

UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial

**CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS
PARA UN MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA
IMPLEMENTADO EN UN PROCESADOR DIGITAL DE
SEÑALES Y MATLAB.**

TESIS

Que para obtener el título de:

INGENIERO EN MECATRÓNICA

1942

PRESENTA:

OSCAR SAMUEL CORTEZ MORENO

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Resumen

En el presente trabajo se lleva a cabo el diseño, el desarrollo y la implementación de un controlador por retroalimentación de estados y de un controlador PID, para el control de la velocidad angular de un motor de corriente directa de imán permanente utilizando la tarjeta de control en tiempo real DS1104.

Al inicio de este trabajo se presenta el capítulo 1 en donde se habla de los antecedentes, el planteamiento del problema, los objetivos, la hipótesis, la delimitación y limitaciones de desarrollar e implementar el controlador por retroalimentación de estados en un sistema embebido en tiempo real. Después, en el capítulo 2 se presenta el marco de referencia en donde se muestran los fundamentos físicos del funcionamiento del motor de corriente directa, así también se presentan los fundamentos de la teoría de control clásica y moderna que son base para el diseño de algoritmos de control que se presentan este trabajo, y por último en este capítulo se muestra una investigación del estado del arte para conocer los diferentes sistemas de control que se han desarrollado para el control de la velocidad y de la posición angular en motores de CD haciendo uso de la tarjeta de control DS1104. Posteriormente se encuentra el capítulo 3 de aplicación, en donde tomando como referencia lo anterior se procedió a caracterizar el motor mediante la realización de una serie de experimentos que permitieron determinar los parámetros reales del motor, dichos parámetros fueron necesarios para el diseño y la realización de las simulaciones en Simulink-Matlab de los dos sistemas de control. A partir del modelado dinámico del motor de CD fue posible desarrollar el diseño de los controladores mediante el método de asignación de polos. Una vez diseñados y simulados los controladores se procedió a programar en Simulink para después cargar dichos algoritmos en la tarjeta de control en tiempo real DS1104 para la implementación en el motor de CD Finalmente en el capítulo 4 se presentan las conclusiones y perspectivas futuras de este proyecto.

Dedicatoria

A mi madre porque fue la fuerza y la razón para culminar este trabajo, por el apoyo, la comprensión, la paciencia y todo lo que ha trabajado para que yo pueda culminar la carrera de Ingeniería en Mecatrónica. Muchas gracias por ayudarme a superar todos los obstáculos que se me presentaron a lo largo de todos estos años de estudio, eres un ejemplo de lucha, entereza y fortaleza, que es lo que me ha inspirado para seguir siempre adelante.

A mi familia por siempre demostrarme su apoyo y ánimo para sacar adelante mi carrera profesional.

A mis amigos más cercanos por siempre estar al pendiente en cada paso que doy y en todos mis logros, muchas gracias por alentarme, por su ayuda y mostrar siempre su afecto.

Agradecimientos

A la Universidad de Sonora por haberme brindado apoyo con las instalaciones, materiales y laboratorios para la realización de los experimentos de este proyecto.

A mi asesor de tesis, el Dr. Víctor Hugo Benítez Baltazar, por confiar en mis capacidades y permitirme trabajar con él. Le agradezco el apoyo que me brindo para crecer profesionalmente a través de sus valiosas enseñanzas, sugerencias y aportaciones en el desarrollo de este trabajo y durante toda la carrera.

A mis revisores, el M.C. Carlos Anaya Eredia, la M.C. Guadalupe Araceli Torres Valverde, y el M.C. Cuitláhuac Iriarte Cornejo. A todos ellos por tomarse el tiempo de seguir este proceso y los comentarios, sugerencias y apoyo proporcionado para mejorar este proyecto.

A mis amigos y compañeros de la carrera de Ingeniería en Mecatrónica, por su valioso apoyo y préstamo de los materiales necesarios para implementación de los sistemas de control.

Índice

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Planteamiento del problema	2
1.3 Problema actual	2
1.4 Objetivo general	2
1.5 Hipótesis	4
1.6 Delimitación	4
Capítulo 2. Marco de referencia	6
2.1 Motor de CD	6
2.1.1 Fundamentos físicos del motor de corriente directa.....	6
2.1.2 Motor en lazo simple.....	8
2.1.3 Fuerza contra-electromotriz inducida en el motor.....	12
2.1.4. Ecuaciones dinámicas del motor de CD.....	13
2.2 Análisis en el dominio del tiempo para sistemas de segundo orden	16
2.2.1 Introducción al análisis de la respuesta transitoria y estacionaria.....	16
2.2.2 Sistemas de segundo orden.....	17
2.3 Control PID	25
2.3.1 Acciones de Control.....	26
2.3.2 Diseño PID.....	31
2.4 Integrador Windup	37
2.5 Modelado en el espacio de estados	41
2.6 Análisis de sistemas de control en el espacio de estados	45
2.6.1 Representación en el espacio de estados en formas canónicas.....	45
2.6.2 Método de la transformada de Laplace para la solución de las ecuaciones de estado en el caso homogéneo.....	47
2.6.3 Controlabilidad.....	48
2.7 Diseño de sistemas de control en el espacio de estados	50
2.7.1 Asignación de polos.....	50
2.7.2 Solución de problemas de asignación de polos con MATLAB.....	56

2.7.3 Diseño de servosistemas.....	56
2.8 Filtros activos.....	62
2.8.1 Filtro básico pasabajas	63
2.8.2 Diseño del filtro pasabajas	65
2.8.3 Respuesta del filtro.....	65
2.8.4 Filtro Butterworth pasabajas de $-40dB/década$	65
2.9 Filtros digitales	67
2.9.1 Transformación bilineal	67
2.9.2 Filtro pasabajas digital	68
2.10 Matlab y Simulink.....	70
2.10.1 Matlab.....	70
2.10.2 Simulink	70
2.11 Tarjeta de control DS1104 e instrumentación en tiempo real	71
2.11.1 DS1104 R&D	71
2.11.2 Tiempo real	74
2.11.3 ControlDesk Next Generation.....	75
2.12 Estado del arte	75
2.12.1 Diseño e implementación de controladores para motores de corriente directa.....	75
CAPÍTULO 3. Aplicación	92
3.1 Modelo matemático del motor de CD.....	92
3.2 Caracterización de los parámetros del motor de CD.....	95
3.2.1 Resistencia de armadura.....	95
3.2.2 Inductancia de armadura	97
3.2.3 Constante contra-electromotriz y constante de par	98
3.2.4 Constante de fricción viscosa.....	101
3.2.5 Momento de inercia del motor	101
3.3 Análisis de respuesta en el dominio del tiempo	105
3.4 Modelo en el espacio de estados	107
3.5 Diseño del sistema de control en el espacio de estados.....	111
3.5.1 Condición de Controlabilidad	111
3.5.2 Diseño de localización de polos	111
3.5.3 Método de asignación de polos para el diseño del sistema de control en el espacio de estados	115
3.6 Diseño del control PID	120

3.7. Implementación en tiempo real de los sistemas de control de lazo cerrado en el procesador digital de señales DS1104	125
3.7.1 Sensores y acondicionamiento de señales.....	125
3.7.2 Etapa de potencia	130
3.7.3 Diagrama de bloques en Simulink para los sistemas de control en Tiempo Real..	131
3.7.4 Implementación y resultados del control por retroalimentación de estados para el control de velocidad del Motor de CD.....	134
3.7.5 Implementación y resultados del control PID para el control de velocidad del Motor de CD.....	144
CAPÍTULO 4. Conclusiones y trabajo futuro	151
4.1 Conclusiones	151
4.2 Trabajo futuro.....	152
Bibliografía	154
Anexo A	156

Capítulo 1. Introducción

1.1 Antecedentes

El constante desarrollo y el aumento en la complejidad de los sistemas de automatización de procesos de producción en la industria, sistemas robotizados, electrodomésticos, telefonía, sistemas de radar, equipos de medicina, y sistemas utilizados en la investigación, sólo por mencionar algunos, han propiciado la generación de nuevos sistemas embebidos de control en tiempo real para resolver de manera óptima, precisa y rápida un conjunto de problemas o tareas. Es por eso que en este trabajo de investigación se realizará una aplicación de un control en tiempo real utilizando la tarjeta de control DS1104 de la empresa dSPACE.

Hoy en día la utilización de motores eléctricos en los procesos de automatización, en sistemas robóticos o como parte de una máquina, es de gran importancia. Un motor eléctrico normalmente es conocido como actuador eléctrico, y tiene una función específica en el sistema en el que se utiliza, como por ejemplo: realizar movimientos controlados para un posicionamiento angular o en el seguimiento de un perfil de velocidad. El objetivo principal de la tesis, es desarrollar una aplicación con la tarjeta de control DS1104 por retroalimentación de estados para un motor de corriente directa (CD) de imán permanente, en donde se pretende controlar la velocidad angular de dicho motor, con base en la teoría de control moderna para el desarrollo del algoritmo.

1.2 Planteamiento del problema

Al diseñar e implementar un algoritmo de control por retroalimentación de estados para un motor de CD, se desea corregir el error en estado estacionario de la velocidad angular, generado por perturbaciones externas y que además, cumpla con las condiciones de diseño de control (requerimientos de la respuesta en el tiempo). Para tal fin, se hará uso de una tarjeta de control o sistema embebido para aplicaciones en tiempo real como lo es la DS1104, que será programada en el software Matlab-Simulink, mediante la creación de modelos en diagrama de bloques y con la utilización del RTI1104 (Real-Time Interface).

1.3 Problema Actual

Teniendo en cuenta un motor de CD de imán permanente implementado en un sistema mecánico para llevar a cabo una tarea en un proceso, en el cual se requiere una velocidad angular deseada y que ante perturbaciones por cargas externas no genere un error o desviación de la velocidad con respecto a una referencia. Con esto se desea que el sistema de control y de adquisición de datos implementado sea utilizado como plataforma de investigación para el desarrollo de nuevos sistemas en el laboratorio de control de la Universidad de Sonora

El diseñar e implementar el algoritmo de control por retroalimentación de estados requiere de conocimientos de teoría de control moderna y en el manejo del software Matlab-Simulink para la creación de modelos; aquí yace la importancia del programa, debido a que se llevará a cabo la programación en bloques del control y el acondicionamiento de las señales enviadas por los sensores en tiempo real.

1.4 Objetivo general

Diseñar e implementar un algoritmo de control por retroalimentación de estados en tiempo real para el control de velocidad de un motor de CD, empujando la tarjeta DS1104 de dSPACE. El modelo será desarrollado, simulado y compilado desde Matlab-Simulink. Para llevar a cabo el control se tiene como retroalimentación de estado del sistema dos sensores de efecto hall, un encoder incremental para medir la velocidad angular, y el sensor ACS711 para la medición de corriente. Las señales y datos adquiridos y generados por la tarjeta de control

serán monitoreados, procesados y analizados en tiempo real por el programa de instrumentación ControlDesk Next Generation.

Para realizar el objetivo anterior se deberán llevar a cabo las siguientes tareas:

- Instalar y configurar los programas RCP and HIL, ControlDesk Next Generation, ConfigurationDesk, TargetLink, dSPACE Maintenance, Real-Time Testing y Matlab 2012b en la computadora de 32-bit.
- Instalar y configurar la tarjeta de control DS1104 R&D en el Bus PCI de la computadora, después establecer conexión del panel conector CP1104 con la tarjeta.
- Identificar y estudiar las características de la tarjeta de control DS1104 y del panel conector (estructura interna, recursos, tipo de entradas y salidas, etc.).
- Identificar las entradas y salidas (analógicas y digitales) del sistema.
- Modelar matemáticamente y caracterizar los parámetros del motor de CD pololu modelo 1446.
- Implementar un controlador PID para el control de la velocidad del motor, sólo como caso de estudio.
- Realizar el diseño del controlador en el espacio de estados mediante el método de asignación de polos. Se determinará la matriz de ganancias de retroalimentación \mathbf{K} con la fórmula de Ackermann.
- Adquirir los dos sensores a utilizar para la retroalimentación de estados, el sensor para la medición de corriente y el encoder incremental para la medición de velocidad angular del motor
- Realizar una etapa de acondicionamiento de señales para los sensores.
- Diseñar y programar en Matlab-Simulink el algoritmo de control por retroalimentación de estados, haciendo uso de los bloques del RTI1104 para generar una interface entre las salidas y entradas de la tarjeta de control.
- Compilar y construir el modelo realizado en Simulink para ser cargado en la tarjeta de control DS1104.
- Diseñar y construir un layout en el programa ControlDesk Next Generation para el monitoreo, calibración y análisis de los datos generados por las variables.

- Diseñar y construir circuitos electrónicos en la protoboard para realizar las conexiones con el panel conector CP1104.
- Diseñar una etapa de potencia con un transistor de unión bipolar de tipo NPN.
- Realizar pruebas y experimentar con el sistema completo.
- Ajustes del sistema para depuración de errores.
- Diseño de material didáctico para la capacitación del equipo.

1.5 Hipótesis

El control por retroalimentación de estados implementado en un motor de CD es capaz de mantener la velocidad angular de referencia ante perturbaciones causadas por cargas externas, empleando la tarjeta de control DS1104 y programando el modelo en el software Simulink con la utilización de los bloques del RTI1104. Así mismo, el diseño del controlador en el espacio de estados cumplirá con las especificaciones de repuesta deseada en la señal de salida, tanto en la simulación como en el sistema físico en tiempo real.

1.6 Delimitación

El control por retroalimentación de estados a implementar será para una señal de control y una señal de salida de tipo escalares, es decir, será implementado para un sistema de control en lazo cerrado de una entrada, una salida.

En el modelo matemático del motor de CD no se toma en cuenta la caja reductora (tren de engranes) por no disponer de suficiente información para ello, por lo que, la constante contra-electromotriz y la constante de par electromagnético serán considerados iguales. El modelo dinámico del sistema será obtenido mediante ecuaciones diferenciales lineales que describen el comportamiento del sistema, es decir, el modelo del sistema será tomado como lineal.

El motor no podrá someterse a una carga de perturbación externa muy grande debido a restricciones físicas de la planta.

Otro factor que limita la realización del proyecto es la capacidad de recursos de la computadora empleada, ya que esto influye en la selección del tiempo de muestro del modelo realizado en Simulink para la aplicación en tiempo real.

Se determinó que el sensor para medir corriente es el ACS711 de tipo efecto hall debido a que se pudo adquirir de manera inmediata en la localidad y por tener un costo razonable, pero presenta problemas por el factor de escala de 136 mV/A, ya que los rangos de corriente que tendrá que medir van desde los 100mA hasta 1A, entonces para variaciones de 100mA en el motor se presenta cambios de voltaje muy pequeños a la salida del sensor, por lo que el ruido incorporado a la salida no permite tener mediciones exactas, aun utilizando un filtro analógico

Capítulo 2. Marco de referencia

2.1 Motor de CD

2.1.1 Fundamentos físicos del motor de corriente directa

A continuación se presentarán los principios de operación del motor de corriente directa en base a los conceptos de electricidad y magnetismo. El motor de CD es usado como un ejemplo concreto para la revisión de conceptos como campo magnético, fuerza magnética, ley de Faraday y fuerza electromotriz inducida (fem) [1].

Fuerza Magnética. Los motores funcionan según el principio básico de la fuerza magnética producida en los conductores que portan corriente en presencia de un campo magnético. De hecho, este fenómeno experimental se utiliza para definir el concepto de campo magnético. Si se colocan un cable con corriente entre los polos de un imán como se muestra en la figura 2.1, se ejerce una fuerza sobre el alambre. Experimentalmente, la magnitud de dicha fuerza magnética es proporcional a la cantidad de corriente en el conductor i , así también a la longitud del cable l que se encuentra entre los polos del imán. Por tanto, la fuerza magnética F_m es proporcional al producto li . La dirección del campo magnético \vec{B} en cualquier punto está definido como la dirección en la que una brújula señala dicha dirección. La dirección de F_m se define mediante la regla de la mano derecha.

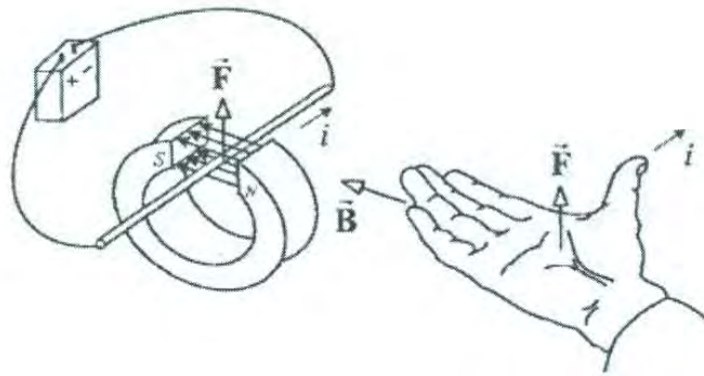


Figura 2.1. Ley de fuerza magnética.

Con la dirección perpendicular del campo magnético \vec{B} con respecto al conductor, la magnitud del campo magnético está definido como

$$B = |\vec{B}| \triangleq \frac{F_m}{li} \quad (2.1)$$

Donde F_m es la fuerza magnética, i es la corriente, y l es la longitud del conductor perpendicular al campo magnético. Es decir, B es la constante de proporcionalidad de la expresión (2.1).

Otros experimentos muestran que si el cable conductor es paralelo al campo magnético en vez de ser perpendicular, entonces no se ejerce fuerza magnética sobre el conductor. Si el conductor presenta un ángulo de inclinación θ con respecto a las líneas de campo magnético \vec{B} como se muestra en la figura 2.2, entonces la fuerza magnética es proporcional a la componente de \vec{B} perpendicular a la dirección de \vec{l} , es decir, es proporcional a $B_{\perp} = B \sin \theta$. En resumen, la ley de fuerza magnética: Dado \vec{l} , que denota el vector de la longitud del conductor y cuya dirección se define como la dirección positiva de la corriente en la barra; por lo tanto, la fuerza magnética en el conductor de longitud l por la que fluye una corriente i esta dada por

$$\vec{F}_m = i\vec{l} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

Así también, la fuerza magnética (2.2) se define como el producto cruz entre el vector de campo magnético y el producto escalar de la corriente que fluye en el conductor por el vector de longitud, en término escalar se tiene $F_m = ilB \sin \theta$.

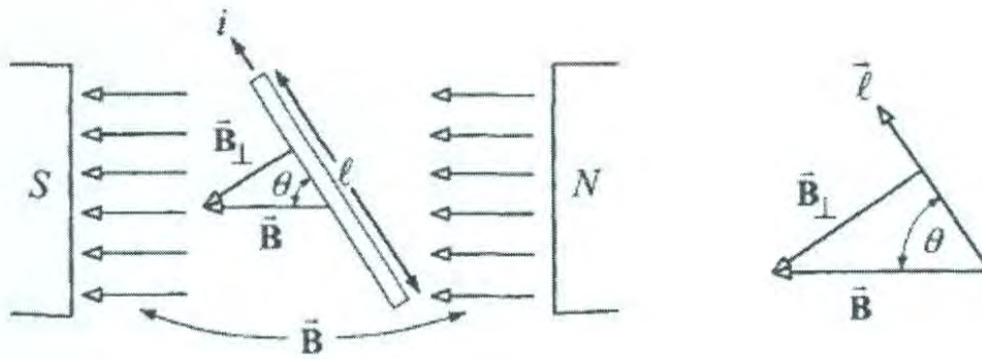


Figura 2.2. Componente B_{\perp} del campo magnético la cual es perpendicular al conductor.

2.1.2 Motor en lazo simple

Como primer paso en el modelado de un motor de CD se considera un motor en lazo simple. En esta primera etapa se muestra cómo es producido el momento de torsión e invierte el sentido de la corriente (conmutar la corriente) cada media vuelta para mantener el torque constante.

Generación de torque. Una propiedad importante de los materiales magnéticos blandos es que el campo magnético en la superficie de tales materiales, tiende a ser normal a la superficie. En consecuencia, la forma cilíndrica de las superficies del núcleo de hierro dulce y el imán permanente del estator tiene el efecto de hacer el espacio del campo magnético dirigido radialmente (figura 2.3); sin embargo, este es razonablemente uniforme en magnitud.

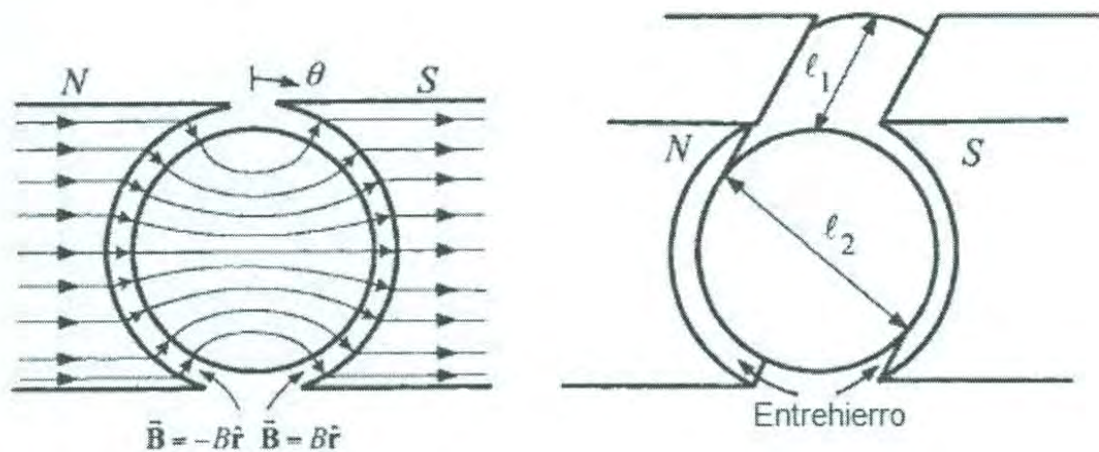


Figura 2.3. Núcleo cilíndrico de hierro dulce colocado dentro de un imán permanente hueco para producir un campo magnético radial en el espacio de aire.

Una descripción matemática del campo magnético en el espacio de aire debido al imán permanente es

$$\vec{B} = \begin{cases} +B\hat{r} & \text{para } 0 < \theta < \pi \\ -B\hat{r} & \text{para } \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde $B > 0$ es la magnitud del campo magnético, θ es la localización arbitraria en el entre hierro y \hat{r} es el vector unitario que indica la dirección del campo magnético en la ecuación (2.3).

En la figura 2.4 se muestra el rotor enrollado alrededor del núcleo de hierro. La longitud del rotor es l_1 y el diámetro es l_2 . El par en el rotor es calculado considerando las fuerzas magnéticas en los lados es a y es a' . Los otros dos lados del lazo: la parte de enfrente y la parte trasera, el campo magnético es de magnitud despreciable, es decir no se producen fuerzas magnéticas en esos lados. Como se muestra en la figura 2.4, la posición angular es tomada como θ_R con respecto la vertical hasta el lado a del rotor.

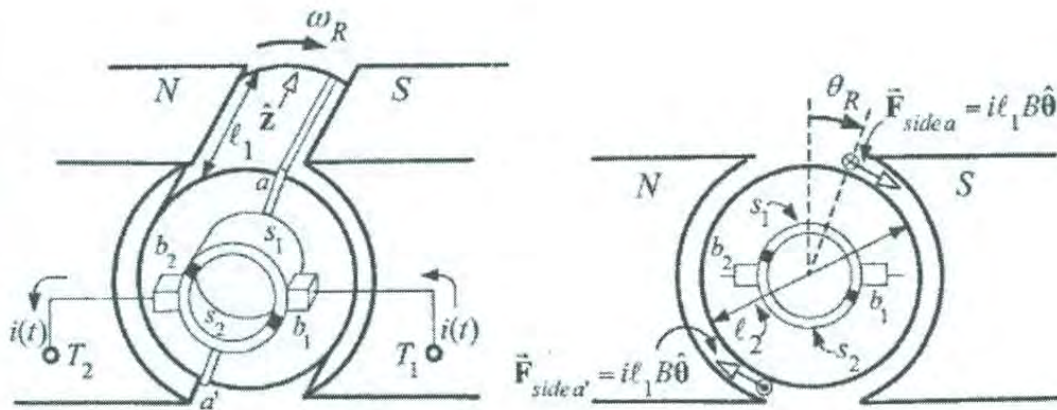


Figura 2.4. Representación del rotor del motor de CD.

La figura 2.5 muestra las coordenadas cilíndricas del sistema de la figura 2.4. \hat{r} , $\hat{\theta}$, \hat{z} denota los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas. El vector unitario \hat{z} apunta hacia adentro de la hoja a lo largo del eje del rotor, $\hat{\theta}$ está en dirección creciente de θ , y \hat{r} se encuentra en la dirección creciente de r .

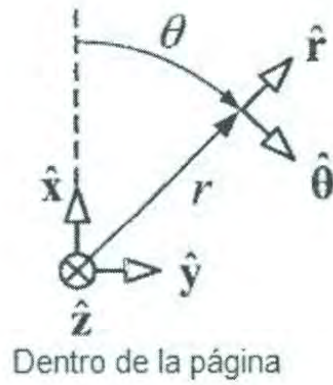


Figura 2.5. Sistema de coordenadas cilíndricas.

Según la figura 2.4, para $i > 0$, la corriente del lado a va en dirección dentro de la página (denotado por \otimes) para después salir de la página (denotado por \odot) en el lado a' . Por tanto, en el lado a el vector de longitud se expresa $\vec{l} = l_1 \hat{z}$ (ya que \vec{l} apunta en dirección positiva del flujo de la corriente), por tanto, la fuerza magnética \vec{F}_a se expresa:

$$\begin{aligned}\vec{F}_a &= i\vec{l} \times \vec{B} \\ &= i(l_1 \hat{z}) \times (B\hat{r}) \\ &= il_1 B\hat{\theta}\end{aligned}$$

la cual es tangencial al movimiento como se muestra en la figura 2.4. El par resultante es:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_a &= (l_2/2) \hat{r} \times \vec{F}_a \\ &= (l_2/2) il_1 B\hat{z}\end{aligned}$$

De forma similar, la fuerza magnética en el lado a' del rotor:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{a'} &= i\vec{l} \times \vec{B} \\ &= i(-l_1 \hat{z}) \times (-B\hat{r}) \\ &= il_1 B\hat{\theta}\end{aligned}$$

Entonces el par correspondiente está dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{a'} &= (l_2/2) \hat{r} \times \vec{F}_{a'} \\ &= (l_2/2) il_1 B\hat{z}\end{aligned}$$

El par de torsión resultante en el rotor es:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_m &= \vec{\tau}_a + \vec{\tau}_{a'} \\ &= l_2 l_1 B i \hat{z}\end{aligned}$$

El par resultante a lo largo del eje z , que es el eje de rotación, se representa en forma escalar como se muestra en (2.4)

$$\tau_m = K_m i \tag{2.4}$$

En donde $K_m \triangleq l_2 l_1 B$ es la fuerza es proporcional a la magnitud del campo magnético B en la brecha de separación debido al imán permanente; τ_m es el par generado en el motor que permite establecer un movimiento angular del mismo.

Conmutación del motor de corriente directa. En la deducción del par de torsión anteriormente realizado, se asume que la corriente en el lado del rotor, bajo la cara del polo sur va hacia adentro de la página, para después salir hacia afuera de la página en el lado del polo norte del imán permanente como se muestra en la figura 2.4. Asumiendo que lo antes dicho es válido, la dirección de la corriente debe ser cambiada cada vez que el conmutador pase a través de la vertical.

El proceso de cambio de la dirección del corriente se le conoce como conmutación y se realiza cuando $\theta_R = 0$ y $\theta_R = \pi$. Con el uso de los anillos deslizantes s_1, s_2 y las escobillas b_1, b_2 como se muestra en la figura 2.6. Los anillos deslizantes están rígidamente unidos al colector. Las escobillas hacen contacto eléctrico con los anillos debido al movimiento de rotación generado.

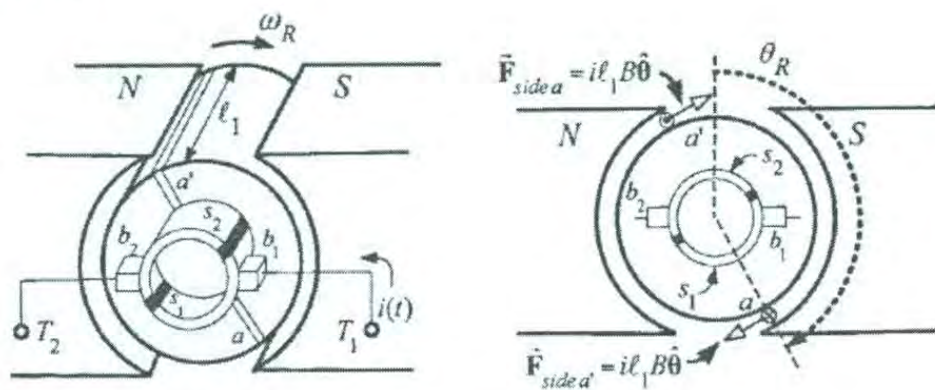


Figura 2.6. Rotor antes de la conmutación donde $0 < \theta_R < \pi$.

El principio de funcionamiento de los motores eléctricos de corriente directa o continua se basa en la repulsión que ejercen los polos magnéticos de un imán permanente cuando, de acuerdo con la Ley de Lorentz, interactúan con los polos magnéticos de un electroimán que se encuentra montado en un eje. Este electroimán se denomina “rotor” y su eje le permite girar

libremente entre los polos magnéticos norte y sur del imán permanente situado dentro de la carcasa o cuerpo del motor.

Con el cambio de sentido de la circulación de la corriente eléctrica a través del enrollado de la bobina del rotor cada vez que completa media vuelta, producirá una nueva fuerza magnética en la dirección apropiada para mantener el movimiento de rotación o en otras palabras, coincidirán el polo norte del electroimán con el polo norte del imán permanente al igual que el polo sur produciendo una rechazo constante.

2.1.3 Fuerza contra-electromotriz inducida en el motor

A continuación, se encontrará la expresión de la fuerza contra-electromotriz inducida en la armadura del motor generada por el campo magnético externo debido al imán permanente. Por tanto, se considera un flujo en la superficie del devanado del rotor como se muestra en la figura 2.7. Dicha superficie es un medio cilindro de radio $l_2/2$ y de longitud l_1 teniendo como límite el mismo rotor. La superficie cilíndrica en el entre hierro, donde el campo magnético es conocido por ser radialmente directo y de magnitud constante, esto es (2.5).

$$\vec{B} = \begin{cases} +B\hat{r} & \text{para } 0 < \theta < \pi \\ -B\hat{r} & \text{para } \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2.5)$$

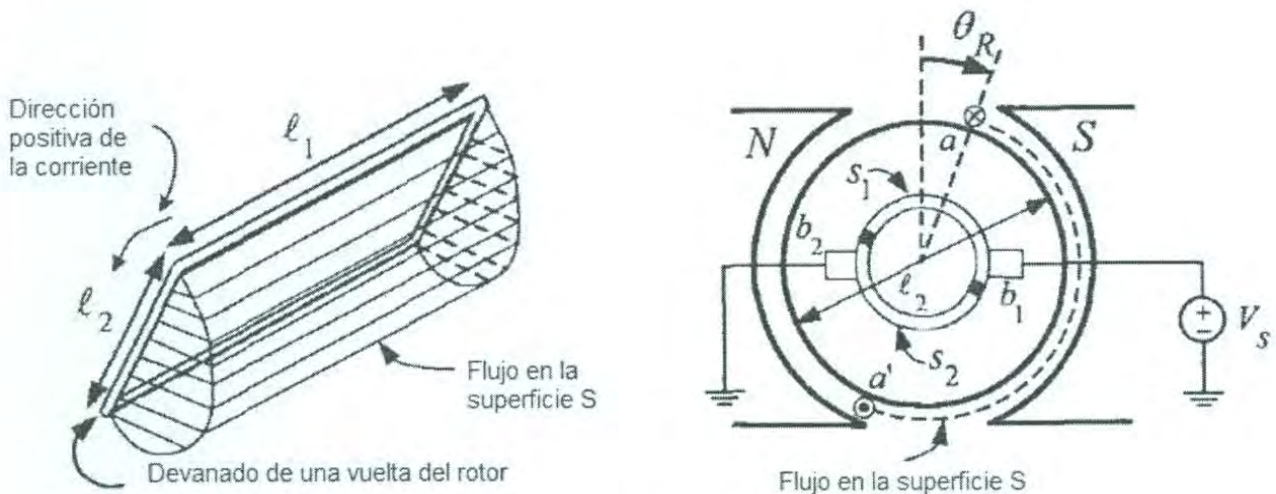


Figura 2.7. Flujo en la superficie del rotor.

En la parte cilíndrica de la superficie, el diferencial de área en el elemento es:

$$d\vec{S} = (l_2/2) d\theta dz \hat{r}$$

el cual apunta directamente hacia afuera del eje del cilindro, en dirección del vector unitario \hat{r} .

El flujo de campo magnético, a través de las dos líneas finales de la superficie, dado desde $0 < \theta_R < \pi$ se expresa como:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_R) &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \Phi(\theta_R) &= -l_1 l_2 B \left(\theta_R - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La deducción de (2.6) está basada en el hecho de que el campo magnético \vec{B} esta dirigido radialmente hacia afuera sobre la longitud $(l_2/2) \left(\theta_R - \frac{\pi}{2} \right)$ y radialmente hacia adentro de $(l_2/2) \theta_R$ como se muestra en la figura 2.7.

La expresión correcta para cualquier valor del ángulo θ_R . Por la ley de inducción electromagnética de Faraday se encontrará a continuación la expresión de la fuerza contra-electromotriz inducida en el rotor.

$$\xi = \frac{d\Phi}{dt} = l_1 l_2 B \frac{d\theta_R}{dt} = K_b \omega_R \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.7) se tiene la constante de fuerza contra-electromotriz, que se define como $K_b \triangleq l_1 l_2 B$.

Como conclusión se debe decir que, el voltaje inducido en el rotor es debido a la razón de cambio del flujo magnético en la bobina del rotor y esta variación es debido al movimiento rotacional, por lo que, si se aumenta la velocidad en el motor la fuerza contra-electromotriz aumenta reduciendo la corriente que entra al rotor.

2.1.4 Ecuaciones dinámicas del motor de CD

Basándose en el motor de CD de imán permanente anteriormente analizado el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del motor, se basan en los subsistemas que componen el motor: subsistema eléctrico y subsistema mecánico, cada uno de estos subsistemas se modelan mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento dinámico del subsistema eléctrico, se basa en el circuito eléctrico que está compuesto por la fuente de voltaje de

alimentación, la resistencia de armadura, el inductor del rotor y la fuerza contra-electromotriz inducida en el mismo, como se muestra en la ecuación (2.8):

$$V_s(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - K_b \omega_R(t) = 0 \quad (2.8)$$

donde:

$V_s(t)$: Voltaje aplicado al motor.

$i(t)$: Corriente eléctrica.

R : Resistencia de armadura.

L : Inductancia de armadura.

K_b : Constante de fuerza contra-electromotriz.

$\omega_R(t)$: Velocidad angular.

La ecuación diferencial (2.8) tiene como circuito equivalente la figura 2.8. El torque generado en el motor por la presencia de un campo magnético mientras fluye una corriente en el rotor, es expresado como ya se dedujo en la ecuación (2.4).

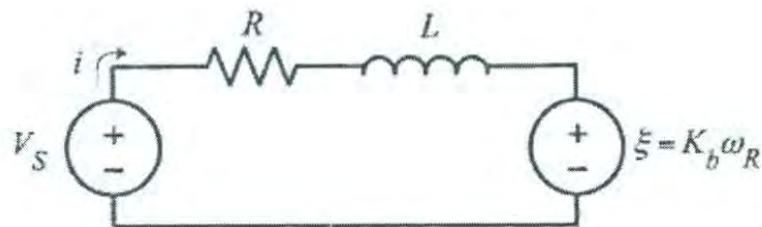


Figura 2.8. Circuito eléctrico equivalente en el motor de corriente directa.

Con un eje y una caja reductora en el motor, se tiene el subsistema mecánico del motor (figura 2.9), con las variables: torque de fricción viscosa, momento de inercia del eje, par de carga externo, par generado por la fuerza magnética en el rotor.

Por la segunda ley de Newton se tiene (2.9):

$$\tau_m(t) - \tau_L(t) - b\omega_R(t) = J \frac{d\omega_R(t)}{dt} \quad (2.9)$$

donde:

$\tau_m(t)$: Par electromagnético generado en el motor.

b : Constante de fricción viscosa.

$\tau_L(t)$: Par de perturbación externa.

J : Momento de inercia del eje del motor.

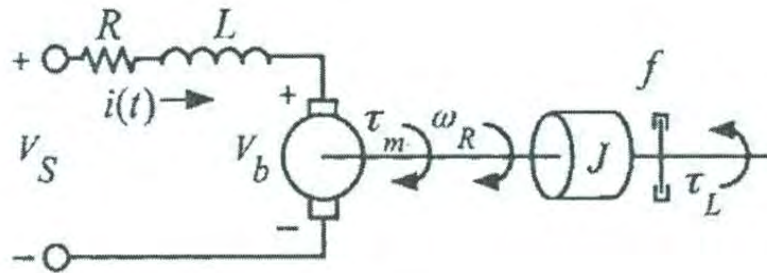


Figura 2.9. Sistema eléctrico y mecánico del motor de DC.

El sistema de ecuaciones que describen la dinámica del motor de DC está dado por (2.10).

$$\begin{aligned}
 L \frac{di(t)}{dt} &= V_s(t) - Ri(t) - K_b \omega_R(t) \\
 J \frac{d\omega_R(t)}{dt} &= \tau_m(t) - \tau_L(t) - b\omega_R(t) \\
 \frac{d\theta_R}{dt} &= \omega_R(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

2.2 Análisis en el dominio del tiempo para sistemas de segundo orden

2.2.1 Introducción al análisis de la respuesta transitoria y estacionaria

El primer paso para analizar un sistema de control es obtener un modelo matemático del mismo [2]. Una vez que se obtiene dicho modelo, existen varios métodos para el análisis del comportamiento del sistema.

En la práctica, la señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, siendo de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse de forma analítica. Sólo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y puede representarse de forma analítica o mediante curvas. En el análisis y diseño de sistemas de control, lo ideal sería contar con una base de comparación del comportamiento de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las señales de entrada de pruebas particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

Señales de prueba típicas. Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de los sistemas de control, ya que las señales son funciones del tiempo simples. La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia en una operación normal determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema. El uso de tales señales de prueba permite comprar el comportamiento de todos los sistemas sobre la misma base.

Respuesta transitoria y respuesta en estado estacionario. La respuesta en el tiempo de un sistema de control se dice que consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario [2]. La respuesta transitoria es aquella que va del estado inicial al estado final. Por respuesta en estado estacionario se entiende la manera como se comporta la salida del sistema conforme t tiende a infinito. Por tanto, la respuesta del sistema $c(t)$ se puede escribir como (2.11)

$$c(t) = c_{tr} + c_{ss}(t) \quad (2.11)$$

donde el primer término del miembro derecho de la ecuación es la respuesta transitoria y el segundo término es la respuesta en el estado estacionario.

Estabilidad absoluta, estabilidad relativa y error en estado estacionario. Cuando se diseña un sistema de control, se debe ser capaz de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de sus componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico es la estabilidad absoluta, es decir si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante en el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema lineal e invariante en el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan de forma indefinida. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial.

2.2.2 Sistemas de segundo orden

Un sistema de segundo orden es aquel que queda definido por medio de una ecuación diferencial de segundo orden (2.12) [3]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 r(t) \quad (2.12)$$

Al transformar la ecuación anterior al dominio s , considerando condiciones iniciales cero y aplicando una entrada $r(t)$, se tiene su función de transferencia (2.13):

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.13)$$

Donde las raíces del polinomio característico $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ de la ecuación (2.13) son:

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

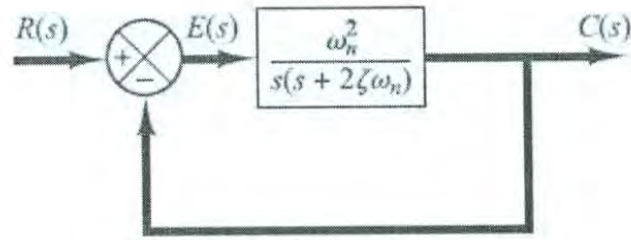


Figura 2.10. Sistema de segundo orden.

En términos de ζ (factor de amortiguamiento relativo) y ω_n (frecuencia natural no amortiguada), un sistema de segundo orden como el de la figura 2.10, puede representarse en términos de su función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ por medio de (2.14):

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.14)$$

Esta forma se denomina forma estándar del sistema de segundo orden. El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe en términos de dos parámetros ζ y ω_n . Si $0 < \zeta < 1$, los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentra en el semiplano izquierdo del plano s . El sistema se denomina subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria. Si $\zeta = 0$, la respuesta transitoria no se amortigua. Si $\zeta = 1$, el sistema se denomina críticamente amortiguado. Los sistemas sobreamortiguados corresponden a $\zeta > 1$ [2].

Considérese la respuesta del sistema para una entrada escalón unitario. Se considerarán tres casos diferentes: el subamortiguado, el críticamente amortiguado y el sobreamortiguado.

1. Caso subamortiguado ($0 < \zeta < 1$): en este caso, $C(s)/R(s)$ se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \quad (2.15)$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. La frecuencia ω_d se denomina frecuencia natural amortiguada. Para una entrada escalón unitario (despejando $C(s)$ de (2.15)), la salida $C(s)$ se escribe como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (2.16)$$

La transformada inversa de Laplace de (2.16) se obtiene a continuación:

$$L^{-1}[C(s)] = c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (2.17)$$

A partir de (2.17) se observa que la frecuencia de oscilación transitoria es la frecuencia natural amortiguada ω_d y que, por tanto, varía con el factor de amortiguamiento relativo ζ . Si ζ es igual a cero, la respuesta se vuelve no amortiguada y las oscilaciones continúan indefinidamente. La respuesta $c(t)$ para el caso del amortiguamiento cero se obtiene sustituyendo $\zeta = 0$ en la ecuación (2.17), lo cual produce:

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.18)$$

Por tanto, a partir de (2.18), se establece que ω_n representa la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Es decir, ω_n es la frecuencia a la cual el sistema oscilará si el amortiguamiento disminuyera a cero.

2. Caso críticamente amortiguado ($\zeta = 1$): si los dos polos $C(s)/R(s)$ son casi iguales, el sistema se aproxima mediante uno críticamente amortiguado.

Para una entrada escalón unitario, $R(s) = 1/s$, $C(s)$ se escribe como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \quad (2.19)$$

La transformada inversa de Laplace de (2.19) se encuentra:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.20)$$

Este resultado (2.20) se obtiene suponiendo que ζ se aproxima a la unidad en la ecuación (2.17).

3. Caso sobreamortiguado ($\zeta > 1$): en este caso, los polos de $C(s)/R(s)$ son reales negativos y diferentes. Para una entrada escalón unitario, $R(s) = 1/s$, $C(s)$ se escribe:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \quad (2.21)$$

La transformada inversa de Laplace de (2.21) es:

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad t \geq 0 \quad (2.22)$$

donde $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ y $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$. Por tanto, la respuesta de $c(t)$ (2.22) incluye dos términos exponenciales que decaen.

Cuando ζ es apreciablemente mayor que la unidad, uno de los dos exponenciales que decaen disminuye mucho más rápido que el otro, por lo que el término exponencial que decae más rápido puede pasarse por alto. Es decir, si $-s_2$ se localiza mucho más cerca del eje $j\omega$ que $-s_1$, para una solución aproximada se puede no considerar $-s_1$. Una vez desaparecido el término exponencial que decae más rápido, la respuesta es similar a la de un sistema de primer orden, y $C(s)/R(s)$ se aproxima mediante:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2} \quad (2.23)$$

Con la función de transferencia aproximada de $C(s)/R(s)$, la respuesta del tiempo $c(t)$ de (2.23) es, entonces,

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad t \geq 0 \quad (2.24)$$

Esto proporciona una respuesta escalón unitario aproximada en (2.24) cuando uno de los polos puede pasarse por alto.

En la figura 2.11 se observa una familia de curvas $c(t)$ con diversos valores de ζ , donde la abscisa es la variable adimensional $\omega_n t$. Las curvas son función de ζ , y se obtienen a partir de las ecuaciones (2.7), (2.10) y (2.12). El sistema descrito mediante las ecuaciones anteriores estaba inicialmente en reposo.

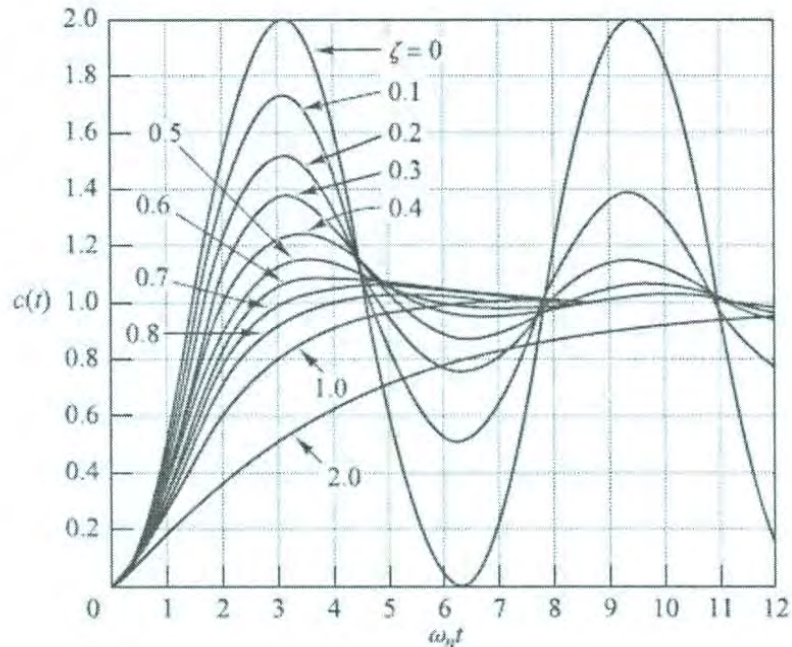


Figura 2.11. Curvas de respuesta a escalón unitario del sistema

Definiciones de las especificaciones de respuesta transitoria. En la mayoría de los casos prácticos, las características de desempeño deseadas del sistema de control se especifican en el dominio del tiempo. Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario y esta depende de las condiciones iniciales. La respuesta transitoria de un sistema de control práctico muestra oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario y que aparece en forma gráfica en la figura 2.12, es común especificar lo siguiente:

1. **Tiempo de retardo.** t_d : es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

2. **Tiempo de subida.** t_r : es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final.
3. **Tiempo pico** t_p : es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreimpulso.
4. **Sobreimpulso máximo (Porcentaje) M_p** : es el máximo valor del pico de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estacionario de la respuesta es diferente de la unidad, es frecuente utilizar el porcentaje de sobreimpulso máximo. Se define mediante:

$$\text{Porcentaje de sobreimpulso máximo} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

5. **Tiempo de asentamiento** t_s : es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (de 2 o 5%).

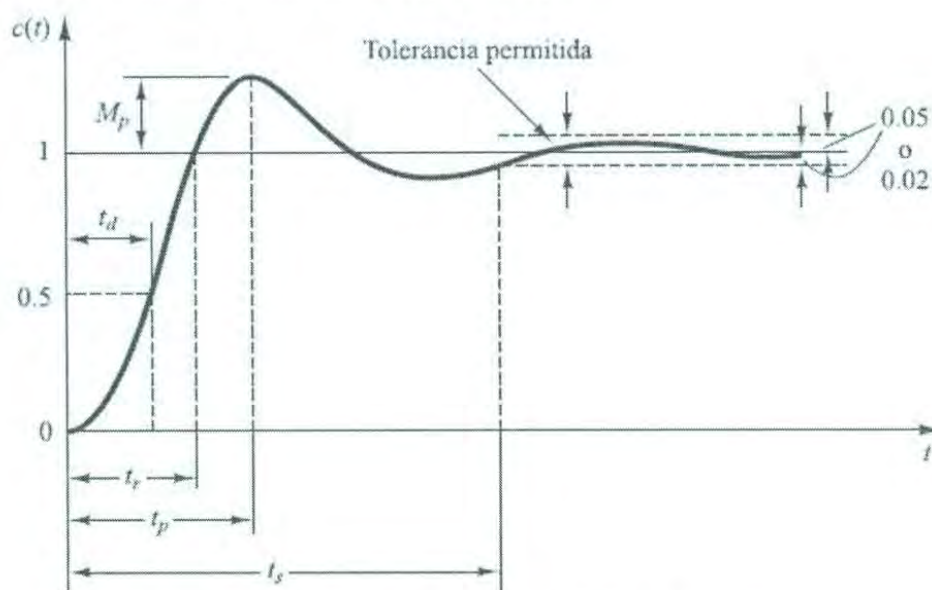


Figura 2.12. Curva de respuesta a escalón unitario.

Sistemas de segundo orden y especificaciones de la respuesta transitoria. A continuación, se obtendrán las expresiones del tiempo de subida, tiempo pico, sobreimpulso máximo y el tiempo de asentamiento del sistema de segundo orden. Además, estas expresiones estarán en términos de ζ y ω_n , se supone que el sistema está subamortiguado.

Tiempo de subida t_r : Si se remite a la ecuación (2.17), se obtiene el tiempo de subida t_r , suponiendo que $c(t_r) = 1$,

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (2.25)$$

donde β se define de la figura 2.13. Es evidente que para un valor pequeño de t_r de (2.25), ω_d debe ser grande.

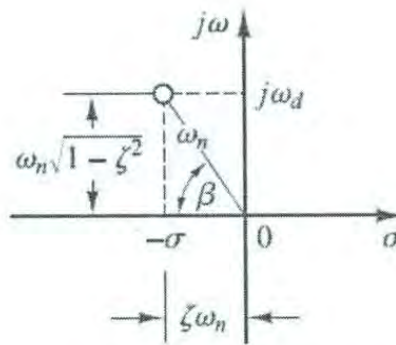


Figura 2.13. Definición del ángulo β

Tiempo pico t_p : al remitirse a la ecuación (2.17), se obtiene el tiempo pico diferenciando $c(t)$ con respecto al tiempo y suponiendo que esta derivada es igual a cero.

$$\frac{dc(t)}{dt} = (\text{sen}(\omega_d t_p)) \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0 \quad (2.26)$$

Como el tiempo pico corresponde al primer pico del sobreimpulso máximo. Por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (2.27)$$

El tiempo pico obtenido en (2.27) corresponde a medio ciclo de la frecuencia de oscilación amortiguada.

Sobreimpulso máximo M_p : El sobreimpulso máximo se presenta en el tiempo pico o en $t_p = \pi/\omega_d$. Por tanto, a partir de la ecuación (2.17), M_p se obtiene en (2.28)

$$M_p = c(t_p) - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\zeta\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \pi \right) \\
 &= e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)\pi} = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

El porcentaje de sobreimpulso máximo es $e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)\pi} \times 100\%$.

Si el valor final $c(\infty)$ de la salida no es la unidad, se necesita utilizar la ecuación siguiente:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

Tiempo de asentamiento t_s : para un sistema subamortiguado de segundo orden, la respuesta transitoria se obtiene a partir de la ecuación (2.27).

La velocidad de decaimiento de la respuesta transitoria depende del valor de la constante de tiempo $1/\zeta\omega_n$. Para un ω_n determinado, el tiempo de asentamiento t_s es una función del factor de amortiguamiento relativo ζ . En la figura 2.14, se observa que, para el mismo ω_n y para un rango de ζ entre 0 y 1 el tiempo de asentamiento para un sistema ligeramente amortiguado es más grande que para un sistema amortiguado de manera moderada. Para un sistema sobreamortiguado, el tiempo de asentamiento t_s se vuelve más grande debido al inicio lento de la respuesta.

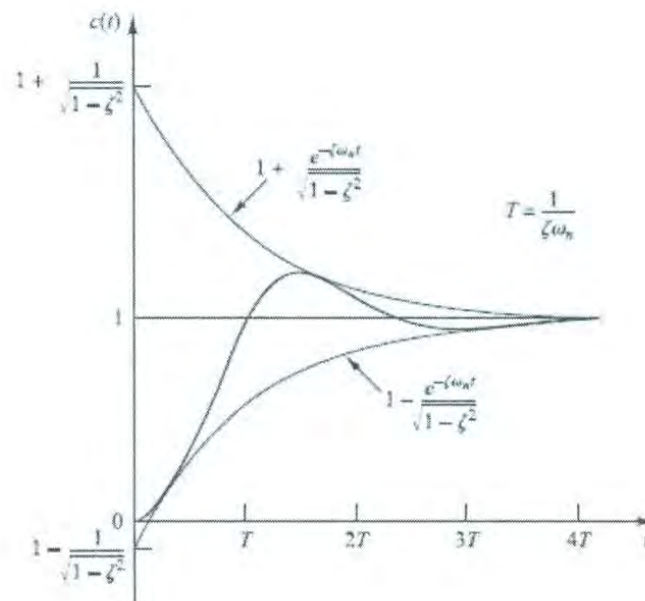


Figura 2.14. Par de curvas envolventes para la curva de respuesta a escalón unitario.

El tiempo de asentamiento se toma a partir de dos criterios, dependiente de la banda de tolerancia de $\pm 2\%$ o $\pm 5\%$ que se mide en función de la constante de tiempo $T = 1/\zeta\omega_n$. A continuación se muestran expresiones del tiempo de asentamiento en las ecuaciones (2.29) y (2.30).

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{Criterio del } 2\%) \quad (2.29)$$

o bien

$$t_s = 3T = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{Criterio del } 5\%) \quad (2.30)$$

2.3 Control PID

Los controladores son elementos que se agregan al sistema original para mejorar sus características de funcionamiento, con el objetivo de satisfacer las especificaciones de diseño tanto en régimen transitorio como en estado estacionario [3]. La primera manera de modificar las características de respuesta de los sistemas es el ajuste de ganancia (control proporcional). Sin embargo, aunque por lo general el incremento en ganancia mejora el funcionamiento en estado estable, produce una pobre respuesta en régimen transitorio y viceversa. Por tal motivo, es necesario adicionar elementos a la simple variación de ganancia, lo cual da como resultado a los diversos tipos de controladores que se mencionarán en la sección 2.3.1.

El incremento en el número de polos en un sistema ocasiona que el lugar geométrico de raíces se desplace hacia la derecha del eje $j\omega$, lo que reduce la estabilidad relativa del sistema o, en algunos casos, lo hace inestable. Por el contrario, el incorporar ceros en un sistema produce que el lugar geométrico de las raíces se desplace hacia el semiplano izquierdo, lo que hace estable o más estable al sistema. En términos generales, el diseño de los controladores se enfoca en la adición de ceros para mejorar la respuesta transitoria, así como la colocación de un polo en el origen para corregir el comportamiento en estado estable del sistema.

El controlador PID es el algoritmo de control más común. La mayoría de los lazos de realimentación se diseñan mediante este algoritmo u otro con pequeñas variaciones. Se implementa de muchas formas diferentes, como un controlador único, parte de un paquete de

Control Digital Directo o un sistema de control de procesos distribuido jerárquico [3]. El algoritmo PID se puede contemplar de distintas formas. Se puede ver como un dispositivo que puede operarse con pocas reglas heurísticas, pero también estudiarse analíticamente.

2.3.1 Acciones de Control

Control Proporcional.

Se dice que un control es de tipo *proporcional* cuando la salida del controlador $u(t)$ es proporcional al error $e(t)$ (2.31):

$$u(t) = K_p e(t) \quad (2.31)$$

donde su equivalente en el dominio de la frecuencia s es (2.32):

$$U(s) = K_p E(s) \quad \therefore \quad G_c = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (2.32)$$

K_p se considera la ganancia proporcional.

Cualquiera que sea el mecanismo real y la forma de potencia de operación, el controlador proporcional es, en esencia, un amplificador con ganancia ajustable. En general, para pequeñas variaciones de ganancia, aunque se logra un comportamiento aceptable en régimen transitorio, la respuesta en estado estable lleva implícita una magnitud elevada de error. Al tratar de corregir este problema, los incrementos de ganancia mejorarán las características de respuesta en estado estable en detrimento de la respuesta transitoria. Por lo anterior, aunque el control P es fácil de ajustar e implementar, no suele incorporarse a un sistema de control en forma aislada, sino más bien se acompaña de algún otro elemento.

Control Integral.

En un controlador con acción *integral*, el valor de la salida del controlador $u(t)$ se cambia a razón proporcional a la señal del error $e(t)$, es decir (2.33):

$$\frac{u(t)}{dt} = K_i e(t) \quad \therefore \quad u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (2.33)$$

donde K_i es la ganancia de control integral. La función de transferencia del controlador integral es (2.34):

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (2.34)$$

En cualquier tipo de controlador, la acción proporcional es la más importante, por lo que la constante K_i puede escribirse en término de K_p (2.35):

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (2.35)$$

donde T_i es un factor de proporcionalidad ajustable que indica el tiempo de integración. Por lo que es posible obtener una nueva expresión de (2.34) sustituyendo (2.35), dando el resultado (2.36):

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{T_i s} \quad (2.36)$$

El control integral tiende a reducir o hacer nulo el error en estado estacionario, ya que agrega un polo en el origen aumentando el tipo del sistema; sin embargo, dicho comportamiento muestra una tendencia del controlador a sobre corregir el error. Así, la respuesta del sistema es de forma muy oscilatoria o incluso inestable, debido a la reducción de la estabilidad relativa del sistema ocasionada por la adición del polo en el origen.

Control derivativo.

Se dice que el control es de tipo *derivativo* cuando la salida del controlador $u(t)$ es proporcional a la derivada del error $e(t)$ (2.37):

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.37)$$

donde K_d es la ganancia del control derivativo. La constante K_d puede escribirse en términos de K_p (2.38):

$$K_d = K_p T_d \quad (2.38)$$

donde T_d es un factor de proporcionalidad ajustable que indica el tiempo de derivación.

El equivalente de la ecuación (2.37) en el dominio s se presenta en (2.39).

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_d T_d s \quad (2.39)$$

El significado de la derivada se relaciona con la velocidad de cambio de la variable dependiente, que en el caso del control derivativo indica que este responde a la rapidez de

cambio del error, lo que produce una corrección importante antes de que el error sea elevado. Adicionalmente, la acción derivativa es anticipativa, esto es, la acción del controlador se adelanta frente a una tendencia de error. Para que el control derivativo llegue a ser de utilidad debe actuar junto con otro tipo de acción de control, ya que aislado, el control derivativo no responde a errores en estado estable.

Control proporcional–integral: PI.

Se dice que un control es de tipo *proporcional-integral* cuando la salida del controlador $u(t)$ es proporcional al error $e(t)$, sumado a una cantidad proporcional a la integral del error $e(t)$ (2.40):

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt \quad (2.40)$$

de forma que al expresar la ecuación anterior en el dominio s y obtener su función de transferencia se obtiene (2.41):

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (2.41)$$

En donde T_i se denomina tiempo integral, así también en (2.41) corresponde a un factor proporcional K_P que actúa junto con cero ubicado en $z = -1/T_i$ y un polo en el origen.

Control proporcional–derivativo: PD.

La combinación de la acción de control proporcional y la acción de control derivativa se define mediante (2.42):

$$u(t) = K_P e(t) + K_P T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.42)$$

y la función de transferencia es (2.43):

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P (1 + T_d s) \quad (2.43)$$

La ecuación (2.43) indica un factor de proporcionalidad $K_P T_d$ que actúa junto con un cero en $z = -1/T_d$, cuya posición es ajustable en el eje real.

La acción del controlador con acción proporcional y derivativa se puede interpretar como si el control se hiciera proporcional a la salida predicha del proceso, donde la predicción se realiza extrapolando el error por la tangente de la curva del error (ver figura 2.15).

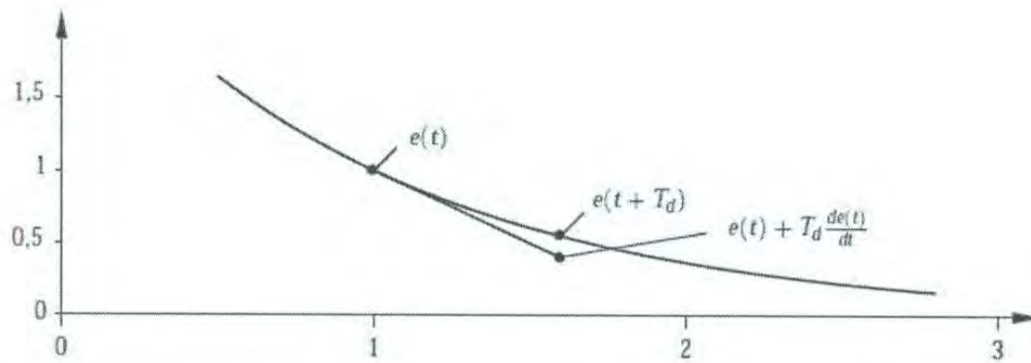


Figura 2.15. Interpretación de la acción derivativa como control predictivo, donde la predicción se obtiene por extrapolación lineal.

Control proporcional–integral–derivativo: PID.

La combinación de la acción de control proporcional, control integral y control derivativa se denomina acción de control proporcional–integral–derivativa. Esta acción combina las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada está dada por (2.44):

$$u(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_P T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.44)$$

y la función de transferencia es (2.45):

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.45)$$

Donde K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral y T_d es el tiempo derivativo. El diagrama de bloques de un controlador PID se muestra en la figura 2.16.

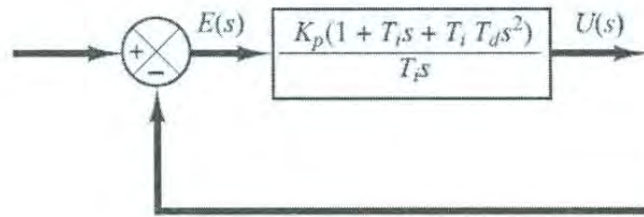


Figura 2.16. Diagrama de bloques de un controlador PID.

A continuación se enumeran las principales características de los diferentes tipos de controladores P, PI, PD y PID.

Control proporcional

- El tiempo de elevación experimenta una pequeña reducción.
- El máximo pico de sobreimpulso se incrementa.
- El amortiguamiento se reduce.
- El tiempo de asentamiento cambia en pequeña proporción.
- El error de estado estable disminuye con incrementos de ganancia.
- El tipo de sistema permanece igual.

Control proporcional–integral

- El amortiguamiento se reduce.
- El máximo pico de sobreimpulso se incrementa.
- Decrece el tiempo de elevación.
- Se mejoran los márgenes de ganancia y fase.
- El tipo de sistema se incrementa en una unidad.
- El error de estado estable mejora por el incremento del tipo de sistema.

Control proporcional–derivativo

- El amortiguamiento se incrementa.
- El máximo pico de sobreimpulso se reduce.
- El tiempo de elevación experimenta pequeños cambios.
- Se mejoran el margen de ganancia y el margen de fase.
- El error de estado estable presenta pequeños cambios.

- El tipo de sistema permanece igual.

Control proporcional-integral-derivativo.

- Este tipo de controlador contiene las mejores características del control proporcional-derivativo y del control proporcional-integral.

2.3.2 Diseño PID

Más de la mitad de los controladores industriales que se usan actualmente, utilizan esquemas de control PID o PID modificado [4]. Existen en la teoría diferentes formas de sintonización del controlador y esto depende de características que van desde el conocimiento del modelo matemático de la planta hasta aquellos en que es difícil de obtener modelo debido a la no linealidad y complejidad del sistema. El conocer el modelo matemático de la planta facilita el aplicar diversas técnicas de diseño con el fin de determinar los parámetros del controlador que cumpla las especificaciones del régimen transitorio y estado estacionario del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, si la planta como ya se mencionó, es tan complicada para la obtención de su modelo, no es posible el aplicar un método analítico para el diseño del controlador PID, por lo que se recurren a procedimientos experimentales para su sintonía.

Reglas de Ziegler-Nichols para la sintonía de controladores PID.

El proceso de seleccionar los parámetros del controlador PID que cumplan con las especificaciones de comportamiento dadas para la respuesta de la planta (ver figura 2.17) se conoce como sintonía del controlador [2]. Ziegler y Nichols sugirieron reglas para sintonizar los controladores PID (lo cual significa encontrar los valores de K_P , T_d y T_i) basándose en las respuestas escalón experimentales o en el valor de K_P que produce estabilidad marginal cuando solo se usa la acción de control proporcional. Las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols determinan los valores de la ganancia proporcional K_P , el tiempo integral T_i y del tiempo derivativo T_d , basándose en las características de respuesta transitoria de la planta dada. La determinación de los parámetros o la sintonía se realiza mediante experimentos sobre la planta.

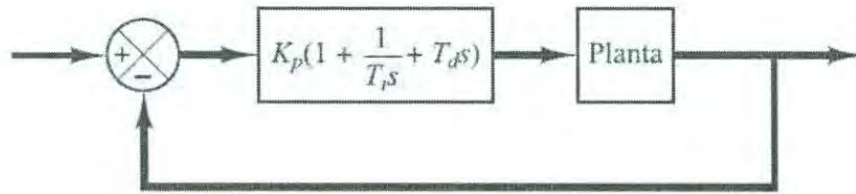


Figura 2.17. Control PID de una planta.

Existen dos métodos denominados reglas de sintonía de Ziegler–Nichols: el primero y el segundo método. A continuación se hablarán de los dos métodos.

Primer Método. En este primer método, la respuesta de la planta a una entrada escalón unitario se obtiene de manera experimental (ver figura 2.18). Si la planta no tiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados, la curva de respuesta escalón unitario puede tener forma de S, tal como se muestra la en la figura 2.19. Este método se puede aplicar si la respuesta muestra una curva en forma de S. Tales curvas de respuesta escalón se pueden generar experimentalmente o a partir de una simulación dinámica de la planta.

La curva con forma de S se caracteriza por dos parámetros, el tiempo de retardo L y la constante de tiempo T . El tiempo de retardo y la constante de tiempo se terminan dibujado una recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de S y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y con la línea $c(t) = K$, tal como se muestra en la figura 2.19.

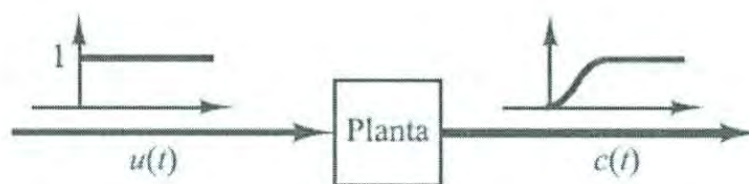


Figura 2.18. Respuesta de la planta ante una entrada escalón unitario.

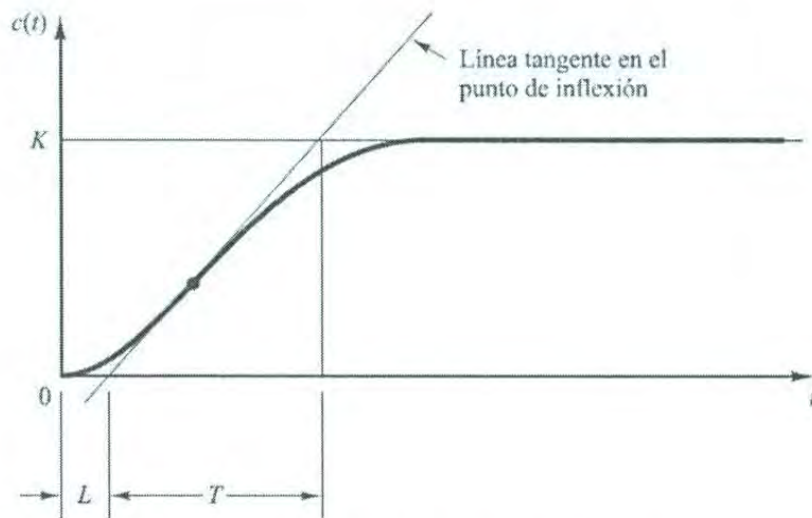


Figura 2.19. Curva de respuesta en forma de S.

En el caso de la figura 2.19, la función de transferencia $C(s)/U(s)$ se aproxima a un sistema de primer orden con retardo, como se muestra en la ecuación (2.46).

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (2.46)$$

Ziegler y Nichols sugirieron establecer los valores de K_P , T_d y T_i , de acuerdo con las fórmulas que se muestran en la tabla 2.1.

Tipo de controlador	K_P	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5 L$

Tabla 2.1. Regla de sintonía de Ziegler–Nichols basada en la respuesta escalón de la planta.

Un controlador PID sintonizado mediante el primer método de Ziegler–Nichols da como resultado (2.47)

$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= 1.2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) \\
 &= 0.6T \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s}
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Por tanto, el controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en $s = -1/L$.

Segundo método. En el segundo método, primero se fija $T_i = \infty$ y $T_d = 0$. Usando solo la acción de control proporcional (ver figura 2.20), se incrementa K_p desde 0 hasta un valor crítico K_{cr} , en donde la salida presenta oscilaciones sostenidas. (Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas para cualquier valor que pueda tomar K_p , este método no se puede aplicar). Así, la ganancia crítica K_{cr} y el periodo P_{cr} correspondiente se determinan experimentalmente (ver figura 2.21).

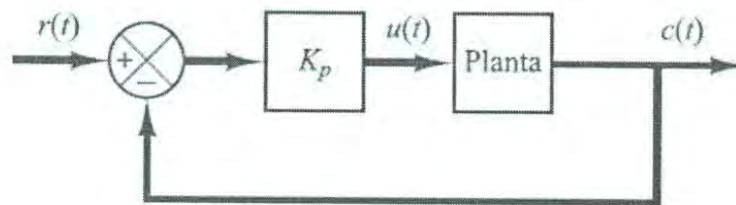


Figura 2.20. Sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional.

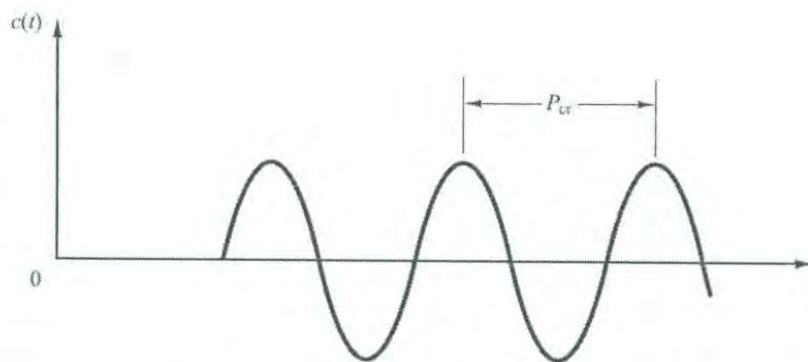


Figura 2.21. Respuesta con oscilación sostenida y con un periodo P_{cr} medido en segundos.

Ziegler-Nichols sugirieron que se establecieran los valores de los parámetros K_p , T_d y T_i , de acuerdo con las fórmulas que se muestran en la tabla 2.2.

Tipo de controlador	K_P	T_i	T_d
P	$0.5 K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45 K_{cr}$	$\frac{L}{1.2} P_{cr}$	0
PID	$0.6 K_{cr}$	$0.5 P_{cr}$	$0.125 P_{cr}$

Tabla 2.2. Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la ganancia crítica K_{cr} y periodo crítico P_{cr} .

El controlador PID sintonizado con el segundo método de las reglas de Ziegler-Nichols produce la función de transferencia del controlador como se muestra en la ecuación (2.48)

$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= 0.6K_{cr} \left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125 P_{cr}s \right) \\
 &= 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s} \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

De ahí, el controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en $s = -4/P_{cr}$.

Si el sistema tiene un modelo matemático conocido (como la función de transferencia), se puede emplear el método del lugar de las raíces para encontrar la ganancia crítica K_{cr} y las frecuencias de las oscilaciones sostenidas ω_{cr} , donde $2\pi/\omega_{cr} = P_{cr}$. Estos valores se pueden determinar a partir de los puntos de cruce de las ramas del lugar de las raíces con el eje $j\omega$.

Sintonía empírica basada en reglas.

Como los métodos de Ziegler-Nichols sólo dan valores aproximados, es necesario complementar los métodos mediante una sintonía manual para obtener propiedades razonables en lazo cerrado [4]. La sintonía manual se realiza típicamente con experimentos sobre el proceso en lazo cerrado. Se introduce una perturbación como un cambio en el punto de consigna o bien como un cambio en la variable de control. Se observa la respuesta en lazo cerrado, y se ajustan los parámetros del controlador. Los ajustes se basan en reglas simples, que dan pautas para cambiar los parámetros. Las reglas se desarrollan mediante la realización de gran cantidad de experimentos. Lo que a continuación se muestra es un conjunto de simple de reglas:

- Aumentando la ganancia proporcional disminuye la estabilidad.
- El error decae más rápidamente si se disminuye el tiempo de integración.
- Disminuyendo el tiempo de integración disminuye la estabilidad.
- Aumentado el tiempo derivativo mejora la estabilidad.

Por último, las reglas de sintonía han sido también formalizadas en diferentes tipos de sistemas formales basados en reglas tales como sistemas expertos o lógica borrosa.

Asignación de polos.

Muchas de las propiedades de un sistema en lazo cerrado se expresan por la localización de sus polos en el plano s . La idea con la asignación de polos es diseñar un controlador que da un sistema en lazo cerrado con polos en lazo cerrado deseados [4]. El método requiere un modelo completo del proceso. Para usar el método para control PID es necesario restringir la complejidad del modelo mediante varios métodos de aproximación. Los polos seleccionados deben escogerse con cuidado para asegurar que el modelo aproximado es válido para frecuencias que correspondan a los polos seleccionados.

Diseño de un controlador PID mediante el método de asignación de polos para un proceso con polos reales.

El proceso se caracteriza por el modelo de segundo orden mostrado en (2.49):

$$P(s) = \frac{K_p}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (2.49)$$

este modelo tiene tres parámetros. Utilizando un controlador PID, que también tiene tres parámetros, es posible colocar arbitrariamente los tres polos del sistema en lazo cerrado. La función de transferencia del controlador PID se puede escribir como (2.50)

$$C(s) = \frac{K(1 + sT_i + s^2T_iT_d)}{sT_i} \quad (2.50)$$

El polinomio característico del sistema en lazo cerrado es (2.51):

$$s^3 + s^2 \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_2} + \frac{KK_P T_d}{T_1 T_2} \right) + s \left(\frac{1}{T_1 T_2} + \frac{KK_P}{T_1 T_2} \right) + \frac{KK_P}{T_1 T_2 T_i} \quad (2.51)$$

Un polinomio característico en lazo cerrado apropiado para un sistema de tercer orden es (2.52):

$$(s + \alpha \omega_0)(s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2) \quad (2.52)$$

que contiene dos polos dominantes con amortiguamiento relativo ζ y frecuencia ω_0 , y un polo real localizado en $-\alpha \omega_0$. Identificando los coeficientes de iguales potencias s en las ecuaciones (2.51) y (2.52) y resolviendo estas ecuaciones se obtienen los siguientes parámetros para el controlador (2.53):

$$\begin{aligned} K &= \frac{T_1 T_2 \omega_0^2 (1 + 2 \alpha \zeta) - 1}{K_P} \\ T_i &= \frac{T_1 T_2 \omega_0^2 (1 + 2 \alpha \zeta) - 1}{T_1 T_2 \omega_0^3} \\ T_d &= \frac{T_1 T_2 \omega_0 (\alpha + 2\zeta) - T_1 - T_2}{T_1 T_2 \omega_0^2 (1 + 2 \alpha \zeta) - 1} \\ k_i &= \frac{\alpha \omega_0^3 T_1 T_2}{K_P} \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.4 Integrador windup

El análisis de los sistemas de control basados en la teoría de control lineal ayuda a generar una idea cercana de las características y el comportamiento que dicho sistema tiene, pero aun así es necesario tener presente algunos efectos no lineales. Todos los actuadores tienen limitaciones: un motor tiene una velocidad limitada, una válvula no puede estar más que totalmente abierta o totalmente cerrada, etc. Para un sistema de control con un amplio

rango de condiciones operativas, puede suceder que la variable de control alcance los límites del actuador. Cuando esto sucede el lazo de realimentación se rompe y el sistema opera como un sistema en lazo abierto debido a que el actuador permanecerá en su límite independientemente de la salida del proceso. Si se utiliza un controlador con acción integral, el error puede continuar siendo integrado si el algoritmo no se diseña adecuadamente. Esto quiere decir, el término integral puede hacerse muy grande o, coloquialmente realiza un <<windup>>. Se requiere entonces que el error tenga signo opuesto durante un largo periodo antes de que las cosas retornen a la normalidad y esto ocasionaría grandes transitorios cuando el actuador se satura [4].

En la figura 2.22 se visualiza la señal de control, señal medida, y valor de referencia para un proceso con una acción de control PI, después del primer cambio en el valor de referencia, la señal se incrementa a su límite superior $U_{m\acute{a}x}$. La señal de control no es bastante grande para eliminar el error de control, por lo tanto, la integral del error del control y la parte integral de la señal de control, aumenta. Cuando la señal de control U aumenta, hay una diferencia entre esta señal y la señal de control verdadera U_{out} . Después de un tiempo, se reduce a un nivel en donde el controlador es capaz de eliminar el error de control ya que, el signo del error se hace negativo, es entonces que, la señal de control comienza disminuir, pero como la señal de control deseada U está por encima del límite $U_{m\acute{a}x}$, la señal de control verdadera U_{out} se mantiene en el límite durante un rato, provocando un retardo en la respuesta.

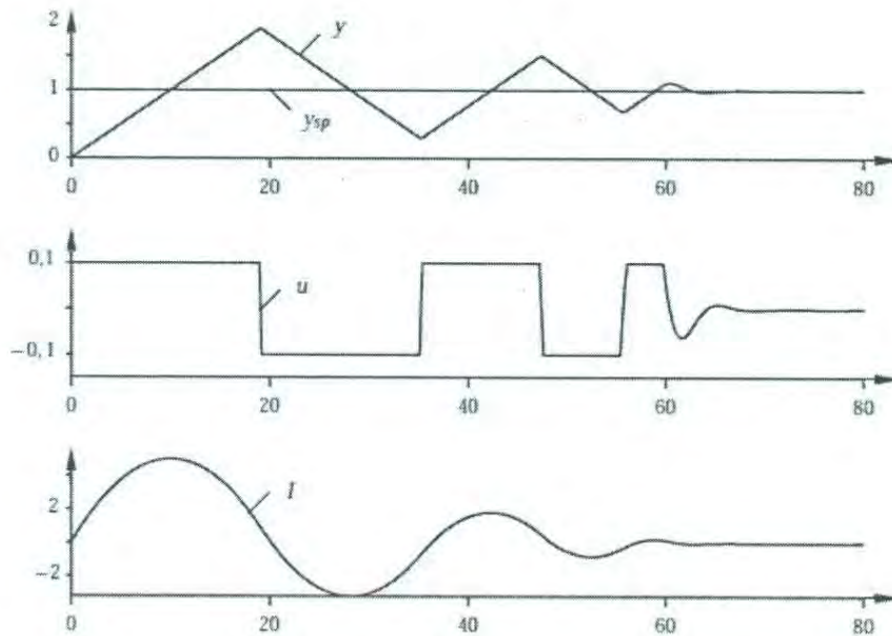


Figura 2.22. Se muestra la saturación del integrador. Se muestra la salida del proceso y , el valor de referencia y_{sp} , la señal de control U , y la parte de la acción integral.

Como se ya se mencionó en la figura 2.22 se muestra el fenómeno windup. El cambio inicial del valor de referencia es tan grande que el actuador se satura en el límite superior, con lo que el término integral aumenta inicialmente porque el error es positivo. La salida permanece saturada hasta ese punto debido al valor grande del término integral. No deja el límite de saturación hasta que el error se hace negativo durante un tiempo suficientemente grande como para que la parte integral baje a un nivel inferior. El efecto de esto es un gran sobreimpulso y oscilaciones amortiguadas donde la señal de control varía de un extremo al otro.

La saturación del integrador ocurre con grandes cambios en el valor de referencia, o puede ser causado por grandes perturbaciones o por el mal funcionamiento de la planta.

Limitación del punto de consigna.

Una manera de evitar el windup del integrador es introducir limitadores sobre las variaciones del valor de referencia de forma que la salida del controlador nunca alcanzará los límites del actuador. El inconveniente de esto es que no el windup causado por perturbaciones.

Algoritmos incrementales.

En este algoritmo se calcula primero la velocidad de cambio de la señal de control y entonces se alimenta a un integrador. En algunos casos este integrador se conecta directamente a un actuador. En otros, el integrador se implementa internamente en el controlador. El windup se evita inhibiendo la integración siempre que se satura la salida. Este algoritmo es similar a un recalculamiento de la acción integral.

Recálculo y seguimiento.

Cuando la salida se satura, se recalcula el término integral en el controlador de tal manera que el nuevo valor da una salida en el límite de la saturación. La importante es no resetear el integrador instantáneamente sino dinámicamente con una constante de tiempo T_t . En la figura 2.23 se muestra un diagrama de bloques de una acción de control PID con protección anti-windup basado en el recálculo. Este sistema tiene un camino de realimentación extra que mide la salida real del actuador, o la de un modelo matemático del actuador con saturación, y formando una señal de error e_s como la diferencia entre la salida del controlador v y la del actuador u . La señal e_s se alimenta a la entrada del integrador a través de la ganancia $1/T_t$. La señal es cero cuando no hay saturación. Cuando el actuador se satura, la señal e_s es diferente de cero, rompiéndose el camino de realimentación normal alrededor del proceso porque la entrada permanece constante. Sin embargo, hay un camino de realimentación alrededor del integrador, con lo que hace que la salida se mueva hacia un valor tal, que la entrada del integrador se hace cero.

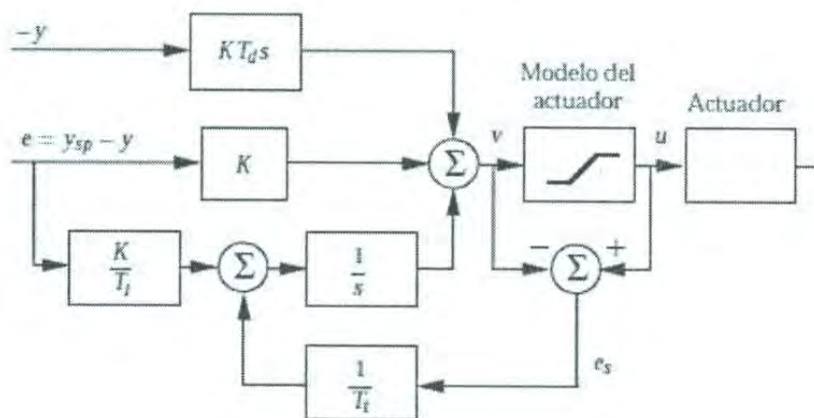


Figura 2.23 Diagrama de bloques de un controlador PID con protección anti-windup.

La velocidad con la que se resetea la salida del controlador está dada por la ganancia de realimentación, $1/T_t$, donde T_t es la constante de tiempo que determina la rapidez con la que se reste a la parte integral. Por último, se muestra en la figura 2.24, la respuesta cuando se aplica un controlador con anti-windup al sistema de la figura 2.22.

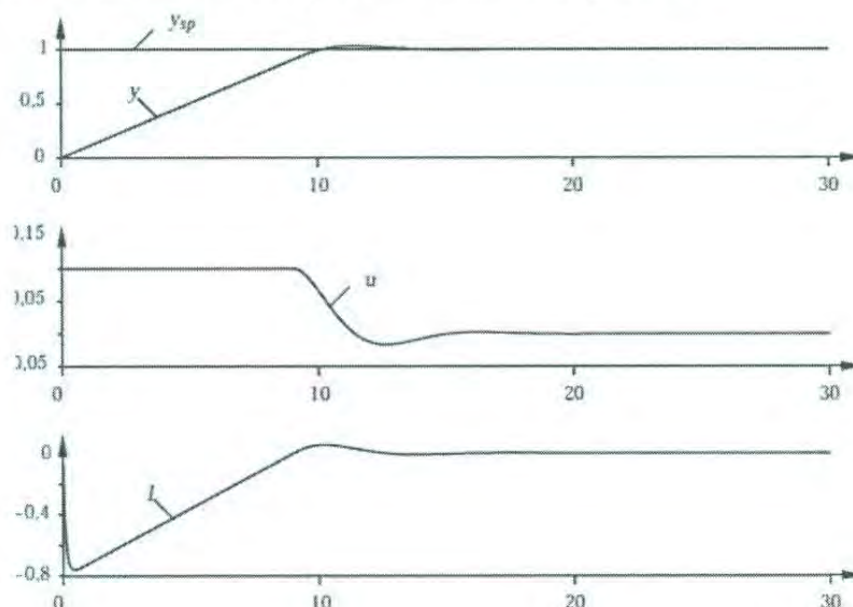


Figura 2.24. Controlador con anti-windup de la figura 2.22.

2.5 Modelado en el espacio de estados

La teoría de control moderna abre paso al análisis de sistemas de ingeniería de mayor complejidad, debido a que hoy en día se requiere mayor precisión en la realización de tareas. Se dice que los sistemas complejos pueden tener múltiples entradas y múltiples salidas y pueden ser variantes en el tiempo. Debido a la necesidad de cumplir requisitos cada vez más exigentes en el comportamiento de los sistemas de control, el aumento en la complejidad del sistema y al fácil acceso a las computadoras a gran escala, la teoría moderna de control, que es una nueva aproximación al análisis y diseño de los sistemas de control complejo, se continúa desarrollando desde 1960 [2]. La nueva aproximación se basa en el concepto de estado, que ha existido durante mucho tiempo en el campo de la dinámica clásica.

La gran diferencia entre la teoría de control moderna y la clásica radica en que la formulación de la moderna como ya se explicó, es aplicable a sistemas de múltiples entradas-múltiples salidas (MIMO), que puede ser lineales o no lineales, invariantes en el tiempo o

variables en el tiempo, mientras que la teoría convencional sólo es aplicable a sistemas de una entrada-una salida (SISO) invariantes en el tiempo.

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$.

Variables de estado. Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si al menos se necesitan n variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico, entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado. Las variables de estado no necesitan ser físicamente medibles o cantidades observables. Se pueden elegir como variables de estado a variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables, esta libertad de elección es una ventaja de los métodos de espacio de estados. Aunque siempre es recomendable elegir las variables de estado a aquellas que pueden ser cantidades físicamente medibles.

Vector de estado. Si se necesitan n variables para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector \mathbf{x} . Este vector se denomina vector de estado. Un vector de estado es, por lo tanto, un vector que determina unívocamente el estado del sistema $\mathbf{x}(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geq t_0$. Una vez que se conoce el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.

Espacio de estados. El espacio n -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2, \dots , eje x_n en donde x_1, x_2, \dots, x_n son variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un conjunto en el espacio de estados.

Ecuaciones en el espacio de estados. En el análisis en el espacio de estado se centra la atención en los tres tipos de variables que aparecen en el modelo de los sistemas dinámicos; las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. La representación en el espacio de estados de un sistema no es única, salvo que el número de variables de estado es

el mismo para cualquiera que sea la representación en variables de estado de un mismo sistema.

El sistema dinámico debe contener elementos que recuerden los valores de la entada para $t \geq t_1$. Puesto que los integradores en un sistema de control en tiempo continuo sirven como dispositivos de memoria, las salidas de tales integradores se pueden considerar como las variables que describen el estado interno del sistema. Así las salidas de los integradores son usadas como variables de estado. El número de variables de estado para definir completamente la dinámica del sistema es igual al número de integradores que aparezcan en el mismo. Sea un sistema de múltiples entradas-múltiples salidas con n integradores. Suponiendo que también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Se definen las n salidas de los integradores como variables de estado: x_1, x_2, \dots, x_n . Entonces el sistema se describe mediante (2.54):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante (2.55)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Si se define (2.56)

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (2.55) y (2.56) se convierten en (2.57) y (2.58) respectivamente:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.57)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.58)$$

donde la ecuación (2.57) es la ecuación de estado y la ecuación (2.58) es la ecuación de salida. Si las funciones vectoriales \mathbf{f} y/o \mathbf{g} involucran explícitamente el tiempo t , el sistema se denomina sistema variante en el tiempo.

Si se linealizan las ecuaciones (2.57) y (2.58) alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y salida linealizadas (2.59) y (2.60):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.59)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.60)$$

En donde $\mathbf{A}(t)$ es la matriz de estado, $\mathbf{B}(t)$ es la matriz de entrada, $\mathbf{C}(t)$ matriz de salida y $\mathbf{D}(t)$ matriz de transmisión directa. En la figura 2.25 se muestra un diagrama de bloques que representa las ecuaciones (2.59) y (2.60).

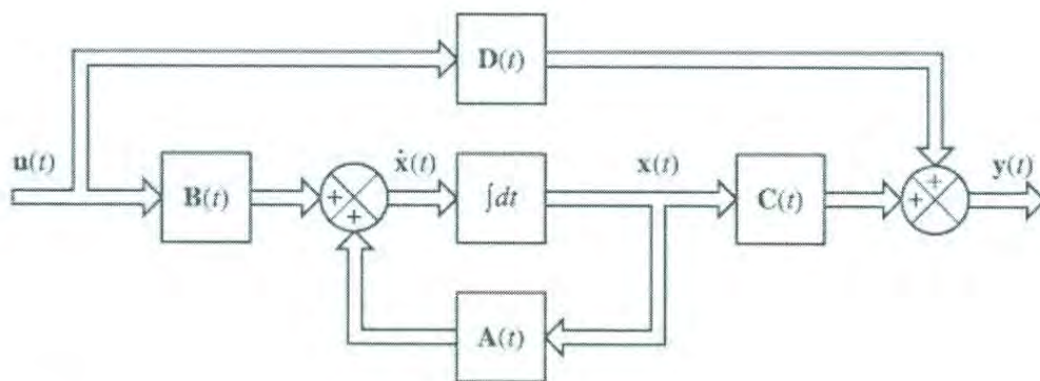


Figura 2.25. Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.

Si las funciones vectoriales f y g no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. Para este caso, las ecuaciones (2.59) y (2.60) se simplifican a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.61)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.62)$$

En donde la ecuación (2.61) es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante con el tiempo y la ecuación (2.62) es la ecuación de salida para el mismo sistema.

2.6 Análisis de sistemas de control en el espacio de estados

Un sistema de control moderno se dice que posee múltiples entradas y salidas relacionadas entre sí de manera compleja. Para analizar este tipo de sistemas, es esencial reducir las expresiones matemáticas, además de recurrir a tediosos cálculos realizados en computadoras. Mientras en la teoría de control convencional o clásica se analiza la relación entrada-salida, o función de transferencia, en la teoría de control moderna se realiza la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial vectorial de primer orden [2]. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento del número de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones planteadas.

2.6.1 Representación en el espacio de estados en formas canónicas

Considérese un sistema definido mediante (2.63):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (2.63)$$

donde u es la entrada e y es la salida; por lo cual, la función de transferencia del sistema es (2.64)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.64)$$

A continuación se presentan las representaciones en el espacio de estados del sistema definido en las ecuaciones (2.63) y (2.64), en su forma canónica controlable, en su forma canónica observable.

Forma canónica controlable. La siguiente representación en el espacio de estado se denomina forma canónica controlable (2.65) y (2.66):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.65)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \cdots \mid b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (2.66)$$

La forma canónica controlable es importante cuando se analiza el método de asignación de polos para el diseño de sistemas de control.

Forma canónica observable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica observable (2.67) y (2.68)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \quad (2.67)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (2.68)$$

La matriz de estado $n \times n$ de la ecuación obtenida en (2.67) es la transpuesta de la ecuación de estado definida en (2.65).

Valores propios de una matriz A de $n \times n$. Los valores propios de una matriz A son las raíces de la ecuación característica (2.69)

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (2.69)$$

2.6.2 Método de la transformada de Laplace para la solución de las ecuaciones de estado en el caso homogéneo

Primero se considera el caso escalar (2.70):

$$\dot{x} = ax \quad (2.70)$$

Tomando la transformada de Laplace de (2.70) y despejando $X(s)$ se obtiene (2.71)

$$X(s) = \frac{x(0)}{s - a} = (s - a)^{-1}x(0) \quad (2.71)$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da la solución (2.72)

$$x(t) = e^{at}x(0) \quad (2.72)$$

Del método anterior para la solución de la ecuación diferencial escalar homogénea, se extiende a la ecuación de estado homogénea (2.73):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.73)$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos términos de (2.74) y factorizando, se obtiene:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) \quad (2.74)$$

Premultiplicando ambos términos de (2.79) por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, se obtiene (2.75)

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \quad (2.75)$$

La transformada inversa de Laplace $\mathbf{X}(s)$ produce la solución $\mathbf{x}(t)$ (2.76),

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \quad (2.76)$$

Teniendo (2.77) para poder aplicar la transformada inversa de Laplace

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots \quad (2.77)$$

Para tener como resultado (2.78)

$$L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = e^{At} \quad (2.78)$$

Se llega a la conclusión de que la transformada inversa de Laplace de una matriz es la matriz formada por las transformadas inversas de Laplace de todos los elementos. A partir de (2.75) y (2.78), la solución de la ecuación de estado homogénea es (2.79):

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) \quad (2.79)$$

2.6.3 Controlabilidad

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito [2]. Kalman introdujo los conceptos de controlabilidad, que juegan un papel importante en el diseño de los sistemas de control en el espacio de estados. De hecho, las condiciones de controlabilidad determinan la existencia de una solución completa para un problema de diseño de un sistema de control. La solución a este problema puede no existir si el sistema considerado no es controlable. En la mayor parte de los sistemas físicos controlables, sus modelos matemáticos correspondientes tal vez no posean las propiedades de controlabilidad; en cuyo caso, es necesario conocer las condiciones en las cuales un sistema es controlable.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo. Sea el sistema en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.80)$$

donde \mathbf{x} = vector de estados (vector de dimensión n)

u = Señal de control (escalar)

A = Matriz de $n \times n$

B = Matriz de $n \times 1$

Se dice que el sistema descrito por (2.80) es de estado controlable en $t = t_0$, si es posible construir una señal de control sin restricción que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Ahora se obtendrá la condición de controlabilidad completa del estado. Sin pérdida de generalidad, se supone que el estado final es el origen en el espacio de estados y que el tiempo inicial es cero, o $t_0 = 0$.

La solución de la ecuación (2.80) es:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (2.81)$$

Aplicando la definición de controlabilidad completa del estado recién establecida en (2.81), se tiene (2.82):

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (2.82)$$

Así también $e^{-A\tau}$ se puede escribir como:

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k \quad (2.83)$$

Al sustituir (2.83) en (2.82) se obtiene (2.84):

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.84)$$

Si se define (2.85) de la siguiente manera:

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_k \quad (2.85)$$

De lo anterior, la ecuación (2.84) se convierte en:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k \mathbf{B} \beta_k \\ &= -[\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \dots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces, dado cualquier estado inicial $x(0)$, la ecuación (2.86) debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz $n \times n$

$$[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$$

Sea de rango n .

El resultado recién obtenido se extiende en el caso en el que el vector de control u es de dimensión r . Si el sistema se describe por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Donde u es un vector de dimensión r , se demuestra que la condición para la controlabilidad completa del estado es que la matriz $n \times nr$

$$[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$$

Sea de rango n , o que contenga n vectores columna linealmente independientes, a dicha matriz se le conoce comúnmente como matriz de controlabilidad.

2.7 Diseño de sistemas de control en el espacio de estados

Una vez presentada toda la teoría en torno al modelado en espacio de estados, es momento de presentar los métodos de diseño en el espacio de estados para realizar una acción de control a una o varias plantas en lazo cerrado. En este apartado se presentará el método de asignación de polos, siendo una estrategia de control para un tipo de respuesta de la planta en base a las características de diseño, dicho método es análogo al método del lugar de las raíces ya que se colocan los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas. El objetivo principal de definir las posiciones de los polos en el plano complejo es encontrar los valores de la matriz de ganancia de realimentación del estado K [2].

2.7.1 Asignación de polos

Una vez definidas todas las variables de estado y verificando que sean medibles y disponibles para su realimentación, se demostrará que, si el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden colocar en cualquier posición deseada mediante una realimentación del estado a través de una adecuada matriz de ganancia de realimentación del estado. La técnica de diseño empieza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria y/o las

especificaciones de la respuesta en frecuencia, tales como velocidad, razón de amortiguamiento, o ancho de banda, al igual que los requisitos de estado estacionario. Si se decide que los polos en lazo cerrado deseados estén en $s = \mu_1, s = \mu_2 \dots s = \mu_n$, entonces, seleccionando una matriz de ganancias apropiada para realimentación del estado, es posible hacer que el sistema tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable. Es importante recalcar que la señal de control $u(t)$ y la señal de salida $y(t)$ son escalares.

Diseño mediante asignación de polos. En el enfoque convencional del diseño de un sistema de control con una sola entrada y una sola salida, se diseña un controlador (compensador) tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan una razón de amortiguamiento ζ y una frecuencia natural no amortiguada ω_n deseada. En este método, el orden del sistema aumenta en 1 o 2, a menos que ocurra una cancelación de polos o ceros. El enfoque de la asignación de polos especifica todos los polos en lazo cerrado, sin embargo para colocar todos los polos en lazo cerrado es necesario tener buenas medidas de todas las variables de estado, o bien incluir un observador de estado en el sistema. La exigencia para colocar los polos en lazo cerrado en las posiciones elegidas de forma arbitraria es que el sistema sea de estado completamente controlable.

Sea el sistema de control (2.87)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du\end{aligned}\tag{2.87}$$

donde \mathbf{x} = vector de estados (vector de dimensión n)

u = Señal de control (escalar)

y = Señal de salida (escalar)

\mathbf{A} = Matriz de coeficientes constantes $n \times n$

\mathbf{B} = Matriz de coeficientes constantes $n \times 1$

\mathbf{C} = Matriz de coeficientes constantes $1 \times n$

D = Constantes (escalar)

Se selecciona la señal de control como

$$u = -Kx \quad (2.88)$$

Esto significa que la señal de control u se determina mediante un vector de ganancias que son retroalimentadas en lazo de control. Tal esquema se denomina realimentación de estado. La matriz K de $1 \times n$, se denomina matriz de ganancias de realimentación de estado. Se supone que todas las variables de estado están disponibles para su realimentación. El sistema en lazo cerrado (figura 2.26) no tiene entradas. Su objetivo es mantener la salida a cero. Como pueden existir perturbaciones, la salida se desviará de cero. Esta salida retornará a la entrada de referencia cero debido al esquema de realimentación del estado del sistema, a este tipo de sistema en la que la entrada de referencia es siempre cero se conoce como sistema regulador.

Al sustituir (2.88) en (2.87) se obtiene:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (2.89)$$

La solución a (2.89) está dada por:

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0) \quad (2.90)$$

donde $x(0)$ es el estado inicial provocado por perturbaciones externas en (2.90). La estabilidad y las características de respuestas transitoria se determinan mediante los valores característicos de la de la matriz $A - BK$. Si los valores de K se eligen de forma adecuada, la matriz $A - BK$ se convierte en una matriz asintóticamente estable y para todos los $x(0) \neq 0$ es posible hacer que $x(t)$ tienda a 0 conforme t tiende a infinito. Los valores propios de $A - BK$ se denominan polos del regulador. Si estos se colocan en el semiplano izquierdo del plano s , entonces $x(t)$ tiende a 0 cuando t tiende a infinito.

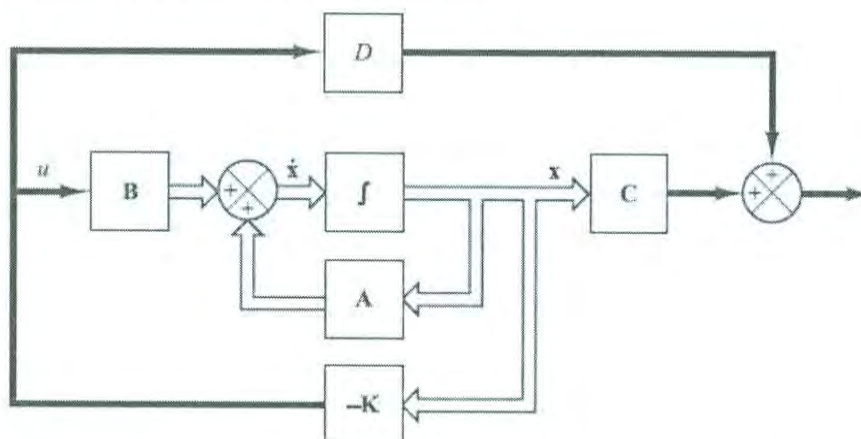


Figura 2.26. Sistema de control en lazo cerrado con $u = -Kx$.

Condición necesaria y suficiente para la asignación arbitraria de los polos. Como ya se ha mencionado la condición necesaria y suficiente para la colocación arbitraria de los polos es que el sistema sea de estado completamente controlable. Obteniendo la condición necesaria. Se comienza por demostrar que, si el sistema no es de estado completamente controlable, existen valores propios de la matriz $A - BK$ que no se pueden controlar mediante realimentación del estado. Supóngase que el sistema de la ecuación (2.87) no es de estado completamente controlable. Así, el rango de la matriz de controlabilidad es menor que n , o

$$\text{rango } [B|AB|\dots|A^{n-1}B] = q < n$$

Esto significa que existen q vectores columna linealmente independientes en la matriz de controlabilidad. Se definen tales q vectores columna linealmente independientes como f_1, f_2, \dots, f_q . También se seleccionan $n - q$ vectores adicionales $V_{q+1}, V_{q+2}, \dots, V_n$, tales que,

$$P = [f_1|f_2|\dots|f_q|V_{q+1}|V_{q+2}|\dots|V_n]$$

Sea de rango n . En este caso, se demuestra que se puede diseñar una nueva matriz \hat{A} con la ayuda de P , como una matriz de similitud:

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Ahora se define:

$$\hat{K} = KP = [k_1 \quad k_2]$$

Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |P^{-1}(sI - A + BK)P| \\ &= |sI - P^{-1}AP + P^{-1}BKP| \\ &= |sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| \\ &= |sI - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2]| \\ &= |sI_q - A_{11} + B_{11}k_1| \cdot |sI_{n-q} - A_{22}| = 0 \end{aligned}$$

donde I_q es una matriz identidad de dimensión q e I_{n-q} es una matriz identidad de dimensión $(n - q)$.

Se llega a la conclusión que, si el sistema no es de estado completamente controlable, existen valores propios de la matriz A que no deben colocarse de forma arbitraria, lo cual se

puede constatar fácilmente en el término $|sI_{n-q} - A_{22}|$ donde no es posible aplicar una acción de control. En este caso, para situar arbitrariamente los valores propios de la matriz $A - BK$, el sistema debe ser de estado completamente controlable (condición necesaria).

Determinación de la matriz K utilizando la fórmula de Ackermann. Existe una formulación muy difundida, conocida como la fórmula de Ackermann, para determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado K [2]. Sea el sistema (2.38), donde se utiliza la entrada de realimentación del estado $u = -Kx$. Se supone que este sistema es de estado completamente controlable. También se va a suponer que los polos en lazo cerrado deseados están en $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$.

La utilización de un control mediante realimentación de estado

$$u = -Kx$$

modifica la ecuación del sistema (2.87) a (2.91)

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.91)$$

Se define

$$\tilde{A} = A - BK$$

La ecuación característica deseada es

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - \tilde{A}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\ &= s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \end{aligned}$$

Como el teorema de Cayley-Hamilton [2] expresa que \tilde{A} satisface su propia ecuación característica, entonces se tiene que

$$\Phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + a_1\tilde{A}^{n-1} + \dots + a_{n-1}\tilde{A} + a_nI = 0 \quad (2.92)$$

Se utilizara (2.92) para obtener la fórmula de Ackermann. Para simplificar la obtención, se considera el caso en el que $n = 3$.

Considerándose las identidades siguientes:

$$\begin{aligned} I &= I \\ \tilde{A} &= A - BK \\ \tilde{A}^2 &= (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BK\tilde{A} \end{aligned}$$

$$\tilde{A}^3 = (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores, en orden, por $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ y α_0 (con $\alpha_0 = 1$), en donde α son los coeficientes de la ecuación característica deseada, por lo que se obtiene (2.93)

$$\begin{aligned} & \alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 \\ &= \alpha_3 I + \alpha_2 (A - BK) + \alpha_1 (A^2 - ABK - BK\tilde{A}) + A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \\ &= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK - \alpha_1 ABK - \alpha_1 BK\tilde{A} - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Tomando en cuenta (2.92), se tiene que

$$\Phi(\tilde{A}) = \alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = 0$$

Asimismo, se llega a

$$\Phi(A) = \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 \neq 0$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en (2.93), se obtiene

$$\Phi(\tilde{A}) = \Phi(A) - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK - ABK\tilde{A} - A^2BK$$

Como $\Phi(\tilde{A}) = 0$, se concluye (2.94)

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= B(\alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K + K\tilde{A}) + A^2BK \\ &= [B|AB|A^2B] \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Como el sistema es de estado completamente controlable, la inversa de la matriz de controlabilidad

$$[B|AB|A^2B]$$

existe. Multiplicando ambos lados de (2.94) por la inversa de la matriz de controlabilidad, se obtiene (2.95)

$$[B|AB|A^2B]^{-1}\Phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Y por último se multiplica ambos lados de (2.95) por $[0 \ 0 \ 1]$, se deduce (2.96)

$$K = [0 \ 0 \ 1][B|AB|A^2B]^{-1}\Phi(A) \quad (2.96)$$

Esta última ecuación da la matriz de ganancias de realimentación del estado K deseada.

Para un entero positivo arbitrario n , se tiene que

$$K = [0 \ 0 \ 1][B|AB|\dots|A^{n-1}B]^{-1}\Phi(A) \quad (2.97)$$

La ecuación (2.97) se conoce como fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancias de realimentación del estado \mathbf{K} .

2.7.2 Solución de problemas de asignación de polos con MATLAB

Los problemas de asignación de polos se solucionan fácilmente con MATLAB, el cual tiene dos órdenes *acker* y *place* para el cálculo de la matriz de ganancias de realimentación \mathbf{K} . La orden *acker* se basa en la fórmula de Ackermann, Esta orden se aplica solo a sistemas de una entrada. Los polos en lazo cerrado deseados pueden incluir polos múltiples (polos localizados en el mismo lugar). Para sistemas de una única entrada, *acker* y *place* dan la misma \mathbf{K} . (Pero para sistemas con múltiples entradas, se debe emplear la orden *place* en lugar de *acker*).

Para utilizar la orden *acker* o *place*, se introducen en primer lugar las siguientes matrices en el programa:

$$\text{matriz } \mathbf{A}, \quad \text{Matriz } \mathbf{B}, \quad \text{Matriz } \mathbf{J}$$

donde \mathbf{J} es la matriz consistente de los polos en lazo cerrado deseados, tal que

$$\mathbf{J} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_n]$$

A continuación se introduce

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{J})$$

o bien

$$\mathbf{K} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{J})$$

La orden $\text{eig}(\mathbf{A}-\mathbf{B}*\mathbf{K})$ se puede utilizar para verificar la matriz \mathbf{K} así obtenida da los valores propios deseados.

2.7.3 Diseño de servosistemas

A continuación se analizará el método de asignación de polos para el diseño de servosistemas de tipo 1. El método se limitará a sistemas que tengan una señal de control u escalar y una salida y también escalar. En esta sección se expondrá el diseño de un servosistema de tipo 1, cuando la planta contiene un integrador.

Diseño de un servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador.

Supóngase que la planta se define mediante (2.98) y (2.99)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.98)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.99)$$

donde \mathbf{x} = vector de estado para la planta (vector de dimensión n)

u = Señal de control (escalar)

y = Señal de salida (escalar)

\mathbf{A} = Matriz de coeficientes constantes $n \times n$

\mathbf{B} = Matriz de coeficientes constantes $n \times 1$

\mathbf{C} = Matriz de coeficientes constantes $1 \times n$

Mediante una elección adecuada de un conjunto de variables de estado, es posible seleccionar la salida igual a una de las variables de estado. La figura 2.27 muestra una configuración general del servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador. Se supone que $y = x_1$. En el análisis que se efectúa, se supone que la entrada de referencia r es una función escalón. En este sistema se utiliza el siguiente esquema de control mediante realimentación del estado (2.100):

$$\begin{aligned} u &= -[0 \quad k_2 \quad k_3 \quad \cdots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1) \\ &= -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1r \end{aligned} \quad (2.100)$$

donde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \cdots \quad k_n]$$

Supóngase que la entrada de referencia (la función escalón) se aplica en $t = 0$. Así, para $t > 0$, la dinámica del sistema se puede describir mediante las ecuaciones (2.98) y (2.100), o bien (2.101)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}k_1r \quad (2.101)$$

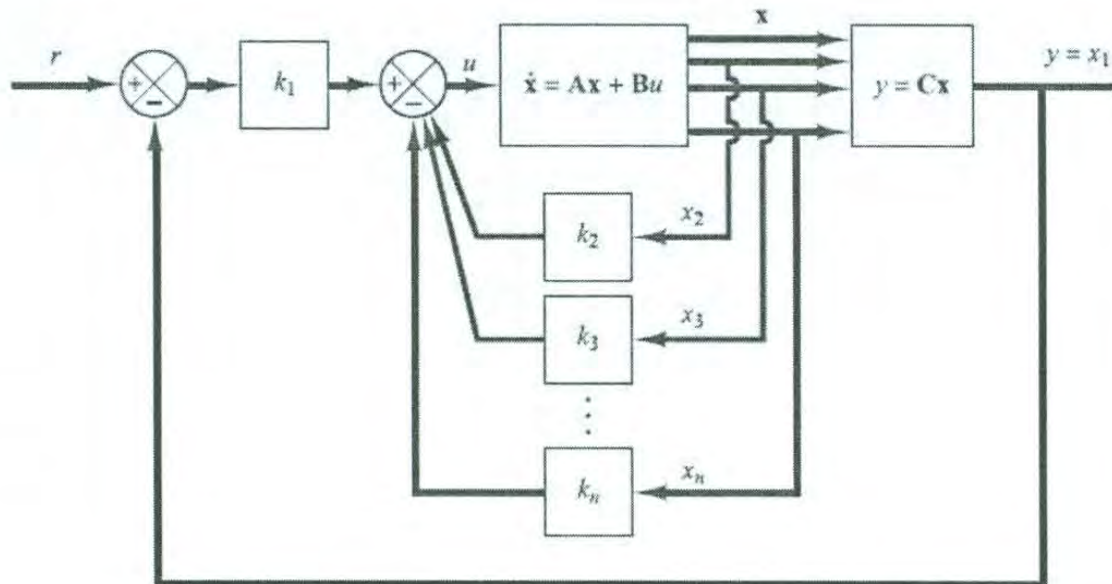


Figura 2.27. Servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador.

Se diseñará el servosistema de tipo 1 de modo que los polos en lazo cerrado se localicen en las posiciones deseadas. El sistema diseñado será un sistema asintóticamente estable, $y(\infty)$ tenderá al valor constante r y $u(\infty)$ tenderá a cero.

Obsérvese que, en estado estacionario, se tiene que

$$\dot{x}(\infty) = (A - BK)x(\infty) + Bk_1r(\infty) \tag{2.102}$$

Considerando que $r(\infty)$ es una entrada escalón, se tiene $r(\infty) = r(t) = r$ (constante) para $t > 0$. Restando la ecuación (2.101) de la ecuación (2.102), se obtiene

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) = (A - BK)[x(t) - x(\infty)] \tag{2.103}$$

Definiendo

$$x(t) - x(\infty) = e(t)$$

la ecuación (2.103) se convierte en :

$$\dot{e} = (A - BK)e \tag{2.104}$$

La ecuación (2.104) describe la dinámica del error.

El diseño del servosistema de tipo 1 se convierte aquí en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable tal que $e(t)$ tiende a cero, para cualquier condición inicial $e(0)$. Si el sistema definido mediante (2.104) es de estado completamente controlable,

entonces, especificando los valores propios deseados $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ para la matriz $A - BK$, la matriz K se determina mediante la técnica de asignación de polos.

El valor en estado estacionario de $x(t)$ y $u(t)$ se encuentran del modo siguiente. En estado estacionario ($t = \infty$), a partir de la ecuación (2.101), se tiene que

$$\dot{x}(\infty) = 0 = (A - BK)x(\infty) + Bk_1r \quad (2.105)$$

Como todos los valores propios deseados de $A - BK$ en (2.105) están en el semiplano izquierdo del plano s , existe la inversa de la matriz $A - BK$. En consecuencia, $x(\infty)$ se determina como

$$x(\infty) = -(A - BK)^{-1}Bk_1r$$

Asimismo, $u(\infty)$:

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + k_1r = 0$$

Diseño de un servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador. Si la planta no tiene integrador (planta de tipo 0), el principio básico del diseño de un servosistema de tipo 1 es insertar un integrador en el camino directo entre el comparador de error y la planta, como se muestra en la figura 2.28. A partir del diagrama:

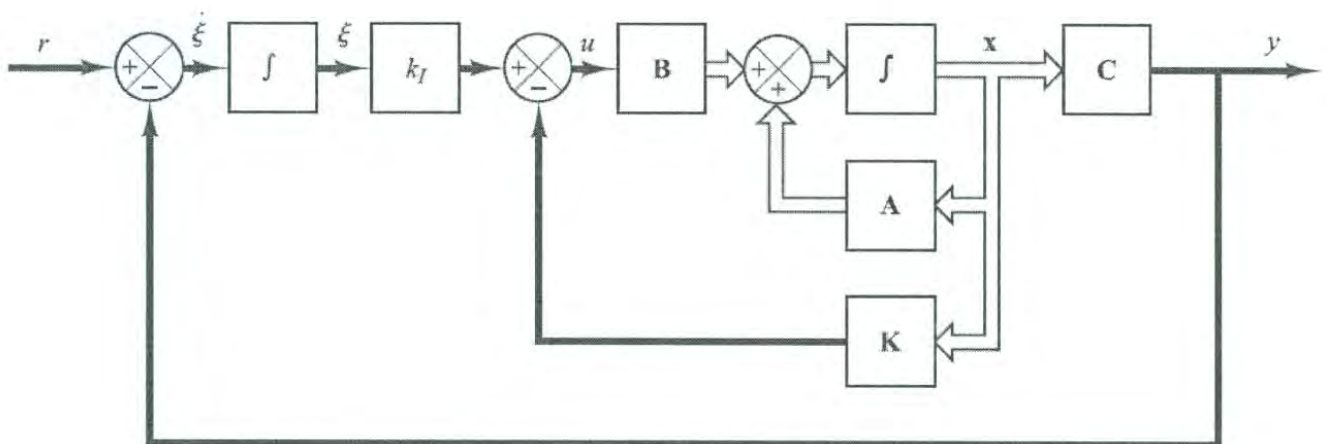


Figura 2.28. Servosistema de tipo 1, integrador agregado.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.106)$$

$$y = Cx \quad (2.107)$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I \xi \quad (2.108)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.109)$$

donde \mathbf{x} = vector de estado de la planta (vector de dimensión n)

u = Señal de control (escalar)

y = Señal de salida (escalar)

ξ = Señal del integrador (variable de estado del sistema, escalar)

r = Señal de entrada de referencia (función escalón, escalar)

\mathbf{A} = Matriz de coeficientes constantes $n \times n$

\mathbf{B} = Matriz de coeficientes constantes $n \times 1$

\mathbf{C} = Matriz de coeficientes constantes $1 \times n$

Al suponer que la planta obtenida mediante la ecuación (2.106) es de estado completamente controlable. La función de transferencia de la planta se calcula mediante (2.110)

$$G_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (2.110)$$

Para evitar la posibilidad de que el integrador insertado se cancele por un cero de la planta en el origen, considerar que $G_p(s)$ no tiene un cero en el origen.

Supóngase que la entrada de referencia (función escalón) se aplica en $t = 0$. En este caso, para $t > 0$, la dinámica del sistema se describe mediante la ecuación (2.111) que es una combinación de las ecuaciones (2.106) y (2.109):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.111)$$

Se diseñará un sistema asintóticamente estable, tal que $\mathbf{x}(\infty)$, $\xi(\infty)$ y $u(\infty)$ tiendan, respectivamente, a valores constantes. Así, en estado estacionario, $\dot{\xi}(t) = 0$ y se obtiene $y(\infty) = r$. Observar que, en estado estacionario, se tiene (2.112)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (2.112)$$

Considerando que $r(t)$ es una entrada escalón, se tiene que $r(\infty) = r(t) = r$ (constante) para $t > 0$. Restando la ecuación (2.112) de la ecuación (2.111), se tiene (2.113)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (2.113)$$

Definiendo

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t)$$

Entonces (2.113) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (2.114)$$

donde:

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + k_I \xi_e(t) \quad (2.115)$$

Se define un nuevo vector de error $e(t)$ de dimensión $(n + 1)$ mediante

$$e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = (n + 1) - \text{vector}$$

Así, la ecuación (2.114) se convierte en:

$$\dot{e} = \widehat{\mathbf{A}}e + \widehat{\mathbf{B}}u_e \quad (2.116)$$

y la ecuación (2.115) en:

$$u_e = -\widehat{\mathbf{K}}e \quad (2.117)$$

donde

$$\widehat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -k_I] \quad (2.118)$$

La ecuación de estado del error se puede obtener sustituyendo (2.118) en (2.116) para obtener (2.119):

$$\dot{e} = (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{K}})e \quad (2.119)$$

Si los valores propios deseados de la matriz $\hat{A} - \hat{B}\hat{K}$ (es decir, los polos enlazo cerrado deseados) se especifican como $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$, entonces la matriz de ganancias de realimentación del estado \mathbf{K} y la constante de ganancia integral k_I pueden determinarse mediante el método de asignación de polos, a condición de que el sistema definido por (2.116) es de estado completamente controlable. Obsérvese que si la matriz:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Tiene rango $n + 1$, entonces el sistema definido por (2.116) es de estado completamente controlable.

2.8 Filtros activos

Un filtro es un circuito diseñado para dejar pasar una banda de frecuencias especificada, mientras atenúe todas las señales fuera de esta banda [5]. Los filtros activos son circuitos que hacen uso de transistores, amplificadores operaciones, inductores y capacitores. Hay cuatro tipos de filtros: pasabajas, pasaaltas, pasabanda y eliminabanda. Para el caso de este trabajo se analizará solamente el filtro pasabajas.

Un filtro pasabajas es un circuito que tiene un voltaje de salida constante desde cd hasta una frecuencia de corte f_c . Conforme la frecuencia va aumentado por arriba de la frecuencia de corte f_c , el voltaje de salida se atenúa, este tipo de filtro es comúnmente utilizado para eliminar los armónicos montados en las señales que dan los sensores analógicos. La figura 2.29, representa una gráfica de la magnitud de voltaje de salida de un filtro pasabajas en función de la frecuencia. Se presentan dos tipos de filtros pasabajas: ideal y el práctico. La línea que se muestra continua es la gráfica para el filtro pasabajas ideal, en tanto las líneas punteadas indican las curvas para los filtros pasabajas prácticos. La frecuencia de corte f_c , también se conoce como: frecuencia 0.707, frecuencia a $-3dB$ o frecuencia de esquina.

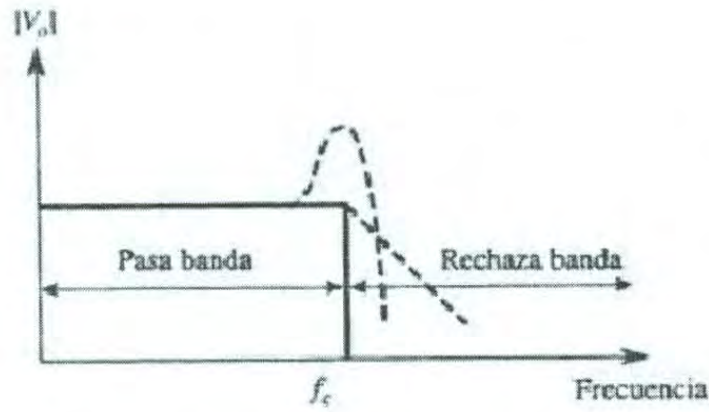


Figura 2.29. Gráfica del filtro pasabajas.

2.8.1 Filtro básico pasabajas

El circuito mostrado en la figura 2.30 es un filtro activo pasabajas. El filtrado lo realiza el circuito RC (resistencia-capacitor) y el amplificador operacional se utiliza como amplificador de ganancia unitaria, la resistencia R_f es igual a R y tienen la función de la desviación de cd. El voltaje diferencial entre 2 y 3 en el amplificador operacional es en esencia, $0 V$. Por tanto, el voltaje a través del capacitor es igual al voltaje de salida V_o , por lo que este circuito tiene la configuración de un seguidor de voltaje. El voltaje de entrada E_i , cae entre la resistencia y la reactancia capacitiva, teniendo como voltaje en el capacitor el voltaje de salida debido al divisor de voltaje formado.

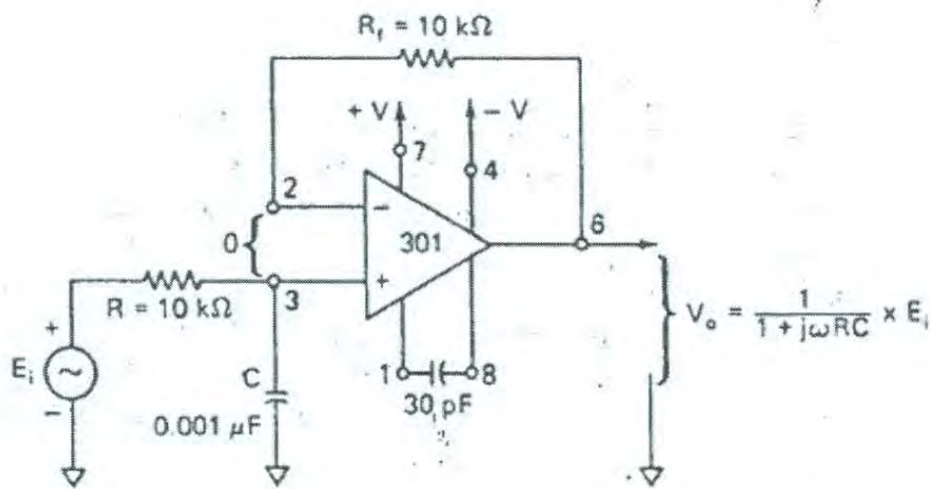


Figura 2.30. Circuito del filtro pasabajas de -20 dB/década .

El voltaje de salida V_o está expresado en la ecuación (2.120):

$$V_o = \left(\frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \right) E_i \quad (2.120)$$

donde ω es la frecuencia de E_i en radianes por segundo ($\omega = 2\pi f$) y $j = \sqrt{-1}$. Modificando la ecuación (2.120) se obtiene la ganancia de voltaje en el lazo cerrado de realimentación negativa formada con el amplificador operacional A_{CL} y se llega a:

$$A_{CL} = \frac{V_o}{E_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (2.121)$$

Considerando la manera en que varía A_{CL} en (2.121) a frecuencias muy bajas, esto significa, conforme ω se aproxima a 0, la ganancia de voltaje en lazo cerrado tiende a uno $|A_{CL}| = 1$, y a altas frecuencias, conforme ω tiende a infinito, la ganancia tiende a cero $|A_{CL}| = 0$. La respuesta en el dominio de la frecuencia del circuito del filtro pasabajas implementado con un amplificador operacional se muestra en la figura 2.31, en donde, se representa la gráfica $|A_{CL}|$ en función de ω y se muestra que para valores de la frecuencias mayores a las de corte ω_c , $|A_{CL}|$ disminuye a razón de $20dB/década$. Esto es, la ganancia de voltaje se divide entre 10 cuando la frecuencia se incremente por 10.

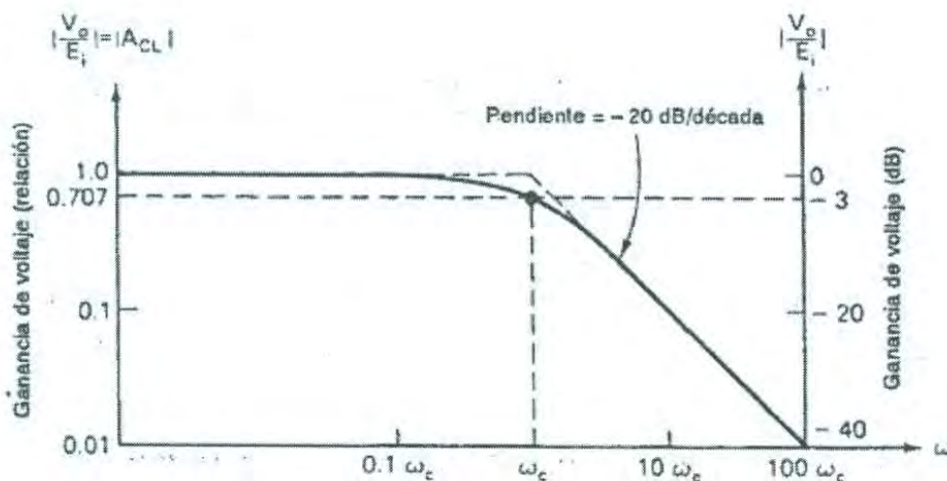


Figura 2.31. Respuesta del filtro pasabajas de $-20dB/década$.

2.8.2 Diseño del filtro pasabajas

Se dice que la frecuencia de corte ω_c se define como la frecuencia de E_i donde $|A_{CL}|$ se reduce a 0.707 veces su valor a baja frecuencia. La frecuencia de corte se obtiene mediante la ecuación (2.122):

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = 2\pi f_c \quad (2.122)$$

donde ω_c es la frecuencia de corte en radianes por segundo, f_c es la frecuencia de corte en Hertz, R está en ohms y C está en farads. Despejando R de la ecuación (2.122), para obtener (2.123) que nos dice el valor de la resistencia a utilizar en el circuito cuando se necesita un filtro pasabajas con una frecuencia de corte ω_c dada.

$$R = \frac{1}{\omega_c C} = \frac{1}{2\pi f_c C} \quad (2.123)$$

2.8.3 Respuesta del filtro

El valor de A_{CL} en ω_c se encuentra al hacer $\omega RC = 1$ en la ecuación (2.121):

$$A_{CL} = \frac{1}{1 + j1} = 0.707 \angle -45^\circ \quad (2.124)$$

Por lo que, la magnitud de A_{CL} en ω_c es:

$$|A_{CL}| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 = -3\text{dB}$$

y el ángulo de fase es -45° .

2.8.4 Filtro Butterworth pasabajas de -40dB/década

El filtro Butterworth es el más apropiado cuando es necesario que la ganancia en lazo cerrado esté lo más próximamente posible a 1 dentro del pasabanda. El filtro Butterworth se denomina también como filtro de máximo plano o filtro plano-plano. En la figura 2.32 se muestra la respuesta en frecuencia ideal y práctica para tres tipos de filtros Butterworth. Se dice que conforme las pendientes son más pronunciadas se aproxima más al filtro ideal.

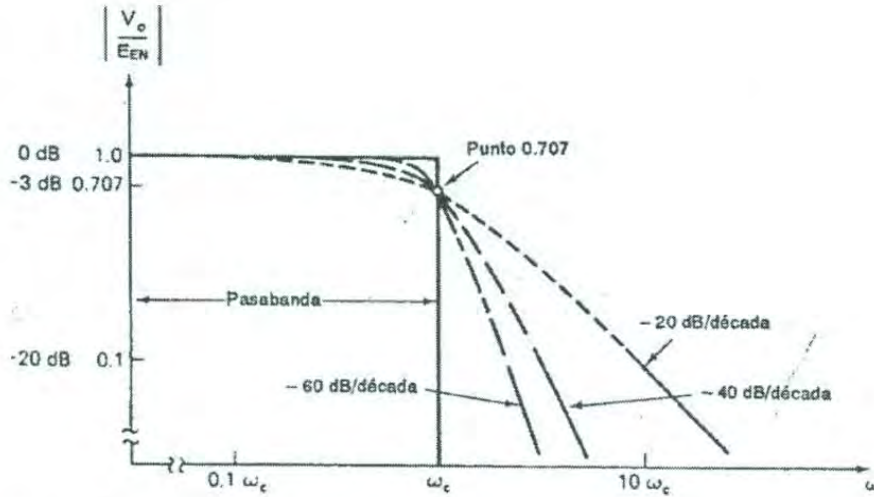


Figura 2.32. Gráfica de respuesta en frecuencia para tres tipos de filtros pasabajos Butterworth.

Procedimiento de diseño. El circuito mostrado en la figura 2.33 es un filtro pasabajos de uso más común, produce una atenuación de $-40dB/década$; esto es, después de la frecuencia de corte, la magnitud de A_{CL} decrece a $40dB$ cuando ω aumente a $10\omega_c$. La línea continua que se muestra en la gráfica de la figura 2.34 demuestra la respuesta en frecuencia real. El circuito con el amplificador operacional se encuentra con una ganancia unitaria en cd. El voltaje a través de C_1 es igual al voltaje de salida V_o . El diseño del filtro pasabajos se simplifica en hacer las resistencias R_1 y R_2 iguales a R .

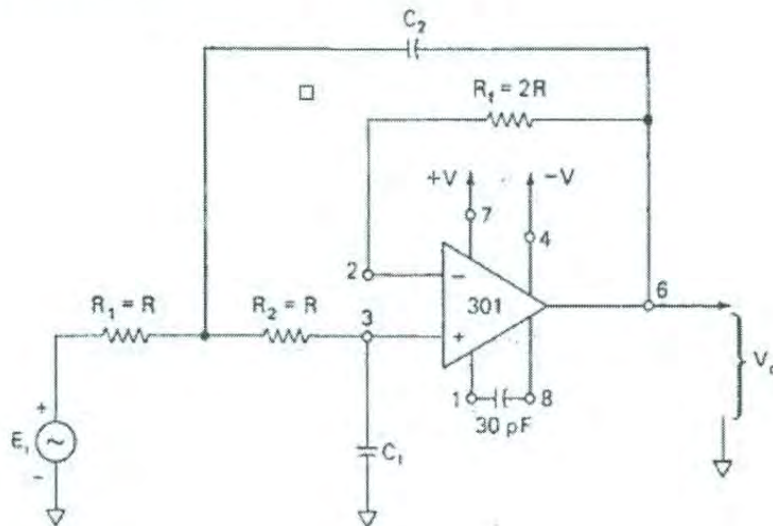


Figura 2.33. Circuito de un filtro pasabajos con una pendiente de $-40dB/década$

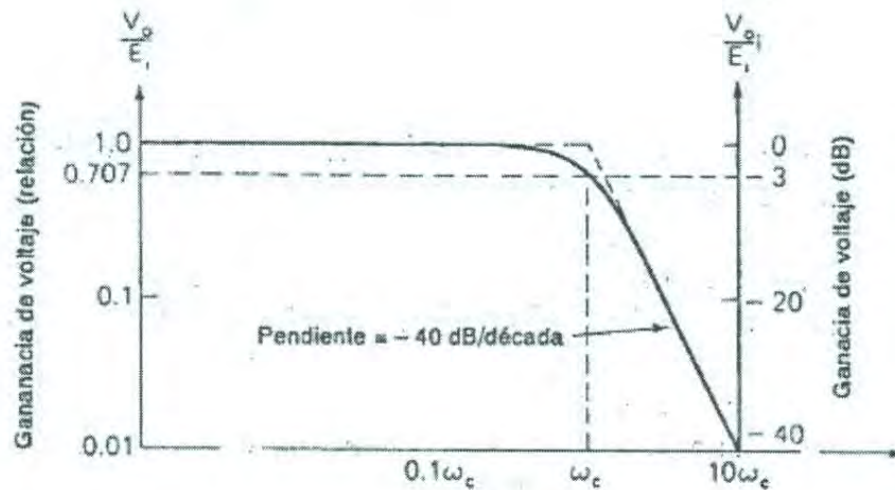


Figura 2.34. Gráfica de respuesta en frecuencia para un filtro pasabajas de -40dB/década .

2.9 Filtros digitales

2.9.1 Transformación bilineal

La transformada bilineal (también conocida con el nombre de Método de Tustin) es usada en el campo del procesamiento digital de señales y en la Teoría de Control de Señales Discretas [6]. Este método suele usarse para transformar la representación en tiempo continuo de las señales al tiempo discreto y viceversa. Es entonces que, convierte una función de transferencia $F(s)$ de un filtro lineal e invariante en el tiempo, que se define en el dominio continuo del tiempo, a una función de transferencia $F(z)$ perteneciente a un filtro lineal e invariante en el tiempo que se encuentre definido en el dominio discreto del tiempo. La función $F(z)$ es comúnmente llamada filtro digital. La transformación bilineal es una aproximación de primer orden a la función logarítmica natural que consiste en realizar una asignación exacta del plano z al plano s . Cuando la transformada de Laplace se realiza sobre una señal de tiempo discreto el resultado es precisamente la transformada Z de la secuencia de tiempo discreto:

$$z = e^{sT} = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} \approx \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \quad (2.125)$$

donde T (2.125), es el periodo de muestra del filtro discreto. La transformación bilineal se realiza sustituyendo s por una aproximación de $s = (1/T) \ln z$, por lo que la inversa de esta asignación está dada por la ecuación (2.126)

$$s \approx \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (2.126)$$

Sólo queda sustituir (2.126) en la función de transferencia del filtro en tiempo continuo, con lo que se tendría (2.127)

$$F(z) = F \left(\frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right) \quad (2.127)$$

Usos comunes de la transformación bilineal:

- Obtención de expresiones entrada-salida.
- Simplificación de estructuras.
- Implementación de estructuras.
- Resolución de ecuaciones en diferencias.
- Puente entre el diseño analógico y digital.

2.9.2 Filtro pasabajas digital

Teniendo la función de transferencia de un filtro pasabajas analógico (en el tiempo continuo) (2.128)

$$F(s) = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} \quad (2.128)$$

donde

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad , \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

La transformación de $s \rightarrow z$ tiene que ser estable, la mitad izquierda del plano s debe transformarse dentro del círculo unidad en el plano z . Por tanto, a cada frecuencia analógica en el intervalo cerrado $(-\infty, \infty)$ le corresponde una única frecuencia en el intervalo $(-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2})$. Con eso se evita el problema del aliasing [6].

Por lo tanto, se obtendrá un filtro digital, sustituyendo (2.126) en (2.128) como se muestra en (2.129)

$$F(s) = \left[\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} \right] \rightarrow F(z) = \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_c} \left(\frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right)} \right] = \left[\frac{z^{-1} + 1}{a_0 + a_1 z^{-1}} \right] \quad (2.129)$$

en donde

$$a_0 = \left(1 + \frac{1}{\omega_c T} \right) \quad a_1 = \left(1 - \frac{1}{\omega_c T} \right)$$

La expresión general de un filtro puede ser representada en función de ω , en función de z y en función de n (número de muestra). Todas estas expresiones son equivalentes. La regla general es dejar el término $a_0 = 1$.

En función de z y en forma de fracción se tiene (2.130):

$$F(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.130)$$

En el dominio n se tiene (2.131):

$$y[nT] = \sum_{k=0}^N b_k x[(n-k)T] - \sum_{k=0}^M a_k y[(n-k)T] \quad (2.131)$$

Siendo T la tasa de muestro. Los coeficientes a y b son los que definen el filtro.

2.10 Matlab y Simulink

2.10.1 Matlab

MATLAB es un entorno de computación técnica que posibilita la ejecución del cálculo numérico y simbólico de forma rápida y precisa, acompañado de características gráficas y de visualización avanzadas aptas para el trabajo científico y la ingeniería. MATLAB es un entorno interactivo para el análisis y el modelado que implementa más de 500 funciones para el trabajo en distintos campos de la ciencia [7]. Por otra parte, MATLAB presenta un lenguaje de programación de muy alto nivel basado en vectores, arreglos y matrices. , el entorno básico de MATLAB se complementa con una amplia colección de bloque de herramientas (*toolboxes*) que contienen funciones específicas para determinadas aplicaciones en diferentes ramas de las ciencias y la ingeniería. La arquitectura de MATLAB es abierta y ampliamente extensible, permitiendo la relación con Excel, C, Fortran y otras aplicaciones externas muy utilizadas e importantes. Entre otras cosas, el código escrito en lenguaje de MATLAB puede ser traducido a C de forma inmediata.

MATLAB también permite la operatividad entre plataformas posibilitando trabajar con distintos sistemas operativos y relacionar el trabajo realizado en las distintas plataformas. Es un software en continuo crecimiento y muy adaptable a los avances científicos y al trabajo en laboratorios I+D, que resuelve los problemas que presenta la ingeniería en el desarrollo de productos innovadores. A través de Simulink, permite diseñar sistemas dinámicos sencillos o complejos y realizar el modelado y simulación mediante un lenguaje agradable basado en diagramas de bloques. Admite sistemas en tiempo continuo, sistemas basados en control y control inteligente y aplicaciones de procesado de señal digital y comunicaciones.

2.10.2 Simulink

Simulink es un entorno de programación en diagrama de bloques para la simulación de múltiples dominios y diseño basado en modelos. Permite la simulación, generación de código automático, pruebas continuas y verificaciones de sistemas embebidos [8]. Simulink permite simular el comportamiento de los sistemas dinámicos. Puede simular sistemas lineales y no lineales, modelos en tiempo continuo, tiempo discreto y sistemas híbridos de los antes mencionados [9]. Siendo una herramienta adicional de Matlab® permite la representación

gráfica por medio de bloques, tanto de ecuaciones diferenciales (dominio del tiempo) como de funciones de transferencia (dominio s) de sistemas lineales y no lineales. También es posible la representación de sistemas discretos en su correspondiente dominio z . Una vez que el modelo se ha representado en Simulink, si se regresa a la ventana de trabajo de Matlab, será posible obtener su representación, ya sea de manera de ecuaciones de estado (n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden) o en su forma de función de transferencia [9]. Se puede acceder a Simulink desde la ventana de trabajo de Matlab, escribiendo solamente la palabra Simulink, con esto se abre una nueva ventada, que permite el acceso a los diversos bloques de herramientas de Simulink. En la librería de Simulink se observan bloques como: continuos (sistemas continuos), discrete (sistemas discretos), function & tables (funciones y tablas), Math (funciones matemáticas especiales), Non linear (sistemas no lineales), Signals & Systems (funciones adicionales), y sources (diversos tipos de entradas). Haciendo uso de estos diferentes bloques, es como se puede realizar la programación y simulación de forma gráfica, los modelos creados en Simulink serán guardados en la extensión .mdl.

En el caso de este trabajo se hacen uso de los bloques generados por la tarjeta de control que se presentará en la sección 2.10. En Simulink se realizará la programación gráfica, para después ser compilada y cargada en la tarjeta de control en tiempo real. Los bloques generados por el RTI de la tarjeta de control representarán los puertos de conexión para las entradas, salidas y los recursos del controlador con el sistema o la planta real (motor de cd), la gran ventaja de utilizar Simulink como entorno de programación es la facilidad de modelar los algoritmos de control a emplear haciendo uso de toda la librería.

2.11 Tarjeta de control DS1104 e instrumentación en tiempo real

2.11.1 DS1104 R&D

La tarjeta de control DS1104 R&D de la marca dSPACE® es una tarjeta estándar con hardware especializado en el procesamiento digital de señales, la cual es instalada en el bus PCI de una computadora para aplicaciones en tiempo real. La tarjeta DS1104 está específicamente diseñada para el desarrollo de controladores digitales multivariables de alta velocidad y simulaciones en tiempo real en varios campos; esta tarjeta de control permite

realizar control en tiempo real mediante la programación gráfica que brinda el entorno de Matlab y Simulink [10]. Así también, es un sistema completo de control en tiempo real basado en un microprocesador 603 PowerPC de punto flotante con una velocidad de 250 MHz. Para propósitos avanzados de entradas y salidas, la tarjeta incluye un subsistema basado en un procesador TMS320F240 tipo DSP. Para propósitos de prototipos de control rápido (RCP), se cuenta con un conector de interface o panel conector que da un fácil acceso a las señales de entrada y salida de la tarjeta. Esta tarjeta controladora representa el cerebro en un sistema de control, en la figura 2.35 se muestra la arquitectura de la DS1104, en donde se observan el flujo de la información de entrada-salida de la tarjeta.

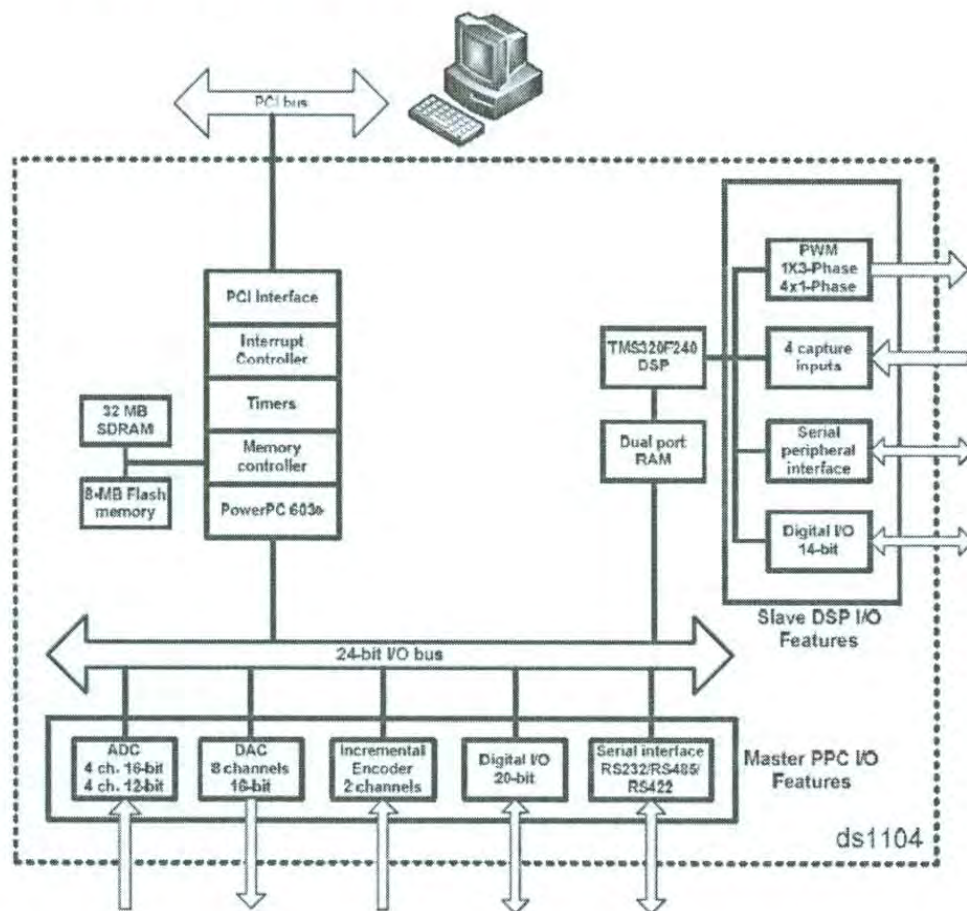


Figura 2.35. Diagrama de bloques de la tarjeta DS1104

Las características de la tarjeta de control son: independencia del sistema operativo de la PC para realizar el control en tiempo real, lo que esto quiere decir es que la tarjeta posee su propio procesador para ejecutar el programa guardado en ella. Para la puesta en marcha de un

sistema programando la DS1104 cuenta con un programa que permite monitorear los datos de las variables que se manejan en la tarjeta.

La unidad de procesamiento digital de la DS1104, MPC8240, consiste de:

1. Un microprocesador PowerPC 603e (master PPC) en el que serán implementados los modelos de control
 - Frecuencia de 250 MHz.
 - Contiene cache de datos de 16-Kbyte.
 - Contiene cache de instrucciones de 16-Kbyte.
 - Unidad ADC.
 - Unidad DAC.
 - I/O digitales.
 - Interface de un encoder incremental.
 - Interface serial.
2. Un controlador de interrupción.
3. Una DRAM síncrona.
4. Varios temporizadores.
5. Interface PCI.

El subsistema slave DSP de la DS1104 consiste de:

1. Un procesador digital de señales Texas Instruments TMS320F240 DSP
 - Frecuencia de 20 MHz.
 - Memoria de doble puerto 4Kx16 bit (DPMEM) utilizada para la comunicación con el master PPC.
 - Unidad de entradas y salidas digitales Slave DSP.
 - Unidad de temporizador Slave DSP.
 - Interface serial periférica Slave DSP.

también, tiene una buena velocidad de procesamiento, manejo de señales como PWM, modelos para la lectura de encoders incrementales, convertidores de señales analógicas a digitales (ADC) y de señales digitales a analógicas (DAC), módulos timer, comunicación serial RS232, RS485 y RS422 y puerto de señales digitales para entradas y salidas.

2.11.2 Tiempo real

La característica principal que ofrece la tarjeta de control DS1104, es la facilidad de compilar aplicaciones en tiempo real. La aplicación en tiempo real se crea de las siguientes dos maneras:

- Se realiza el modelo en Matlab-Simulink y automáticamente se crea el código C y el código para el DSP.
- Crear el código en C y compilarlo para crear el código para el DSP.

La forma en que se va desarrollar el código en tiempo real para este trabajo es mediante la realización del modelado en Simulink. Una vez que se realiza el modelo en Simulink, se presiona en el teclado ctrl +B (RTW Build Model), para la generación y compilación del modelo, que una vez que se inicia el proceso se finaliza cargándolo a la tarjeta de control. Una vez que el comando es ejecutado un número de procesos son invocados para la construcción del programa en tiempo real. RTI (Interfaz de tiempo real) y RTI MP genera un archivo de descripción del sistema (.SDF) que contiene toda la información sobre los archivos de varios objetos y los archivos TRC. Con ControlDesk Next Generation se puede cargar el archivo .SDF al sistema dSPACE (DS1104) o para tener acceso a las señales y parámetros de simulación. Cuando se realiza el algoritmo de control, se debe considerar y determinar el tiempo de muestreo en cada paso con el que se ejecutará el programa debido a la dinámica del proceso, ya que el algoritmo de control debe ejecutarse dentro de ese tiempo, este tiempo de muestreo se configura en Simulink desde la ventana configuración de parámetros (Fundamental sample time). El programa comienza en el inicio de cada paso y debe terminar dentro del tiempo de muestreo (ver figura 2.36), a esto se le conoce como tiempo real.

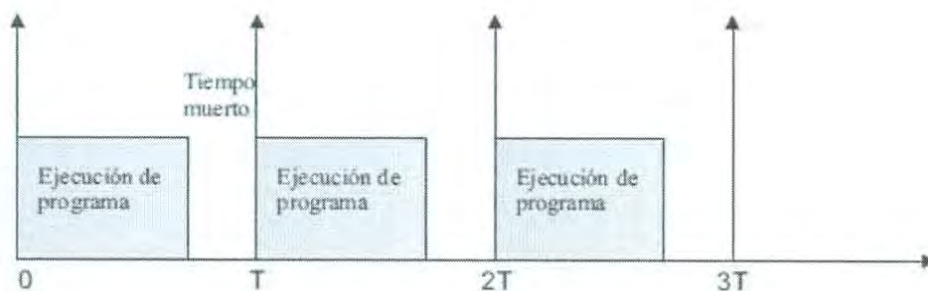


Figura 2.36. Tiempo de muestreo.

2.11.3 ControlDesk Next Generation

ControlDesk es un programa de instrumentación para el desarrollo de Unidades de Control Electrónico. Así también, da soporte para la calibración, medición y acceso al diagnóstico a las unidades de control electrónico utilizando los protocolos estandarizados CCP, XCP, y ODX. ControlDesk es parte de la tarjeta de control DS1104 de la empresa dSPACE y, por conclusión se tiene que permite la descarga de los programas compilados previamente en Simulink y se utiliza como interfaz gráfica para la observación en tiempo real de los datos de las variables creadas en el modelo.

2.12 Estado del arte

A continuación se presentan los trabajos de investigación que fueron tomados como base para el desarrollo de este proyecto, fueron parte importante para tener un punto de referencia en la implementación de sistemas de control con la tarjeta de control DS1104, programada desde Simulink-Matlab.

2.12.1 Diseño e implementación de controladores para motores de corriente directa

La información que se presenta en este apartado de estado del arte se limita al uso de la tarjeta dSPACE (DS1104 y DS1103) como plataforma de control de motores eléctricos de corriente directa. La utilización de motores de corriente directa hoy en día es de suma importancia, debido al creciente aumento en la investigación, el desarrollo y la utilización de sistemas automáticos. Los motores eléctricos se encuentran en la etapa de actuación de muchos procesos en la industria o como parte esencial en la maquinaria, así también se encuentran presentes en las articulaciones de sistemas robóticos, aparatos electrónicos, electrodomésticos, o como en los distintos sistemas desarrollados para la investigación, por ejemplo: los helióstatos utilizados en el CPH (campo de pruebas de Helióstatos), que se tiene como objetivo el control de los motores (ya sean de corriente directa o motores a pasos) para la realización de los movimientos en azimuth y elevación para la ubicación de los espejos. Sólo por mencionar un caso.

El uso de los sistemas de control en lazo cerrado, permitió el desarrollo de muchos algoritmos o acciones de control, y esto debido a las ventajas que trae consigo en la dinámica

de la respuesta, en la estabilidad y en la corrección del error, el realimentar la salida de la planta y compararla con una entrada de referencia. El control de motores eléctricos en especial los motores de corriente directa marca la pauta en la generación de movimientos en sistemas mecánicos de manera controlada. Las variables más comúnmente controladas de los motores eléctricos son: la posición, la velocidad y la aceleración. El diseño de un sistema de control para un motor de corriente directa en donde el uso de sensores como: encoders, tacómetros, potenciómetros, o sensores de corriente de efecto hall, permiten realimentar las variables de salida respecto a la entrada del sistema para generar un sinnúmero de acciones de control, que van desde la teoría de control convencional hasta la teoría de control moderna.

En el trabajo de Tafuya [11] se tiene como objetivo el diseñar un módulo de motor de CD de imán permanente para la implementación de distintas técnicas de control automático para el seguimiento suave de una trayectoria de velocidad angular. En la figura 2.37 se muestra el motor de CD que mueve a una carga a través de una caja de engranes. Una vez caracterizado los parámetros del motor, se procedió a determinar el modelado matemático como se muestra en las ecuaciones (2.132) y (2.133)

$$L \frac{di}{dt} + Ri + nk_e \omega = u \quad (2.132)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega = nk_m i \quad (2.133)$$

donde:

- ω : es la velocidad angular del motor en la salida de la caja de engranes.
- k_e : es la constante de fuerza contra-electromotriz.
- J : es la inercia del rotor del motor.
- R : es la resistencia de armadura.
- L : es la inductancia de armadura.
- b : es la constante de fricción viscosa del motor.

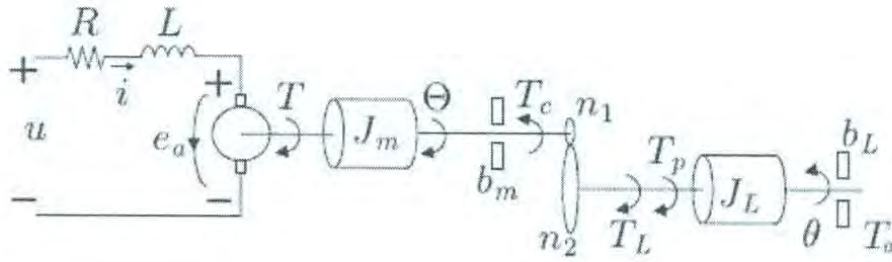


Figura 2.37. Motor de CD.

En [11] se planteó el diseño de los controladores tipo: PID, planitud diferencial y GPI, para la realización del control de seguimiento de trayectoria del motor. En este capítulo sólo se presentará el diseño del controlador PID debido a que es el tipo de controlador que más se interesa en este trabajo. En el diseño del controlador PID, Tafoya parte de la consideración que desea que la velocidad angular de salida del motor tienda a la velocidad de referencia $\omega \rightarrow \omega^*$ y que por lo tanto el error de la velocidad tienda asintóticamente a cero $e(t) \rightarrow 0$ para obtener la función de transferencia entre la señal del error, $e(s)$, y la entrada al sistema, $u(s)$ como se muestra en (2.134)

$$\frac{u(s)}{e(s)} = \frac{1}{s} (K_d s^2 + K_p s + K_i) \quad (2.134)$$

Por lo que el error de seguimiento, $e(s)$, es entonces,

$$e(s) = \frac{s \omega^*(s)}{s + G(s)(K_d s^2 + K_p s + K_i)} \quad (2.135)$$

Se dice que para las señales de referencia $\omega^*(s) = \omega_{ref}$ constantes en (2.135), el error en estado estacionario e_{ss} es siempre cero y esto quedó demostrado con el teorema del valor final en (2.136)

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 \omega_{ref}}{s + G(s)(K_d s^2 + K_p s + K_i)} = 0 \quad (2.136)$$

Para encontrar los parámetros del controlador PID en el trabajo de tesis [11] se propuso primero encontrar los parámetros para obtener la función de transferencia del motor CD que se muestra en (2.137).

$$G(s) = \frac{\lambda}{s^2 + \xi s + \beta} \quad (2.137)$$

en donde

$$\lambda = \frac{nk_m}{JL}$$

$$\xi = \frac{JR + bL}{JL}$$

$$\beta = \frac{bR + n^2 k_m k_e}{JL},$$

Con el error de seguimiento en lazo cerrado (2.138) y teniendo como acción de control el PID, se procedió a seleccionar las constantes de diseño K_P , K_d y K_I del polinomio característico de la función de transferencia del error (2.139) para ubicar las raíces de dicho polinomio característico en el semiplano izquierdo del plano complejo, con el fin de asegurar que el sistema en lazo cerrado sea estable.

$$e(s) = \frac{s(s^2 + \xi s + \beta)\omega^*}{s^3 + (\xi + \lambda K_d)s^2 + (\beta + \lambda K_P)s + \lambda K_I} \quad (2.138)$$

$$p(s) = s^3 + (\xi + \lambda K_d)s^2 + (\beta + \lambda K_P)s + \lambda K_I \quad (2.139)$$

Se verificó que el sistema es estable mediante el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, lo primero que se hizo fue tomar los coeficientes del polinomio (2.139) y observar que sean positivos y ninguno sea cero, con esto se concluyó que el sistema podía ser estable. La segunda prueba que se realizó para determinar si el sistema era estable, fue el verificar que el signo de todos los elementos de la primera columna era positivos del arreglo (2.140).

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} s^3 \\ s^2 \\ s \\ s^0 \end{array} \right] \begin{array}{cc} 1 & \beta + \lambda K_p \\ \xi + \lambda K_d & \lambda K_i \\ \beta + \lambda K_p - \frac{\lambda K_i}{\xi + \lambda K_d} & 0 \\ \lambda K_i & \end{array} \end{array} \quad (2.140)$$

Con el polinomio (2.139) y el arreglo de Routh-Hurwitz (2.140), se llega a la conclusión de que el motor puede ser estable. Por lo que, se garantizó que los elementos de la primera columna de (2.140) sean todos positivos cumpliendo con las siguientes desigualdades (2.141),

$$\xi + \lambda K_d > 0$$

$$\beta + \lambda K_p > \frac{\lambda K_i}{\xi + \lambda K_d} \quad (2.141)$$

$$\lambda K_i > 0$$

De acuerdo con (2.141) y considerando que $\lambda = 6693.13$, $\xi = 439.68$ y $\beta = 12136.44$, se seleccionan las constantes del controlador PID, la selección se realiza cumpliendo con las desigualdades de (2.141) logrando que $e(t) \rightarrow 0$.

$$\begin{array}{l} K_p = 7.58 \text{ V}/(\text{rad/s}) \\ K_i = 298.0 \text{ V}/\text{rad} \\ K_d = 0.032 \text{ V}/(\text{rad/s}^2) \end{array} \quad (2.142)$$

Con las constantes seleccionadas en (2.142) se llega a la función de la señal de control en el dominio del tiempo (2.143):

$$u(t) = 7.58e(t) + 298 \int_0^t e(t)dt + 0.032 \frac{de(t)}{dt} \quad (2.143)$$

Las trayectorias que se desean seguir, que esa es la finalidad del controlador hacer que la variable controlada o salida del sistema sea igual a la entrada de referencia, se realiza mediante un perfil de velocidad angular normal usando el polinomio de Bézier de sexto orden como se observa en (2.144):

$$\omega^*(t) = \bar{\omega}(t_i) + [\bar{\omega}(t_f) - \bar{\omega}(t_i)]p(t, t_i, t_f) \quad (2.144)$$

En donde $p(t, t_i, t_f)$ es la función polinomial que interpola entre los valores de 0 y 1, y queda definida por (2.145)

$$p(t, t_i, t_f) = \begin{cases} 0 & t \leq t_i \\ \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^3 \left[r_1 + r_2 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right) + r_3 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^2 + r_4 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^3 \right] & t_i < t < t_f \\ 1 & t \geq t_f \end{cases} \quad (2.145)$$

En donde los tiempos de inicio y final de la trayectoria, se denotan respectivamente por t_i y t_f y el valor de las velocidad angulares en equilibrio, asociados a cada tiempo de la trayectorias, se denotaron por $\bar{\omega}(t_i)$ y $\bar{\omega}(t_f)$ respectivamente.

Los parámetros del motor son: $R = 0.965 \Omega$, $L = 2.2 \text{ mH}$, $J = 0.1182 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$, $b = 0.1296 \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{rad/s})$, $K_e = 0.1201 \text{ V}/(\text{rad/s})$, $K_m = 0.1201 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}$, $n = 14.5$.

Para la implementación práctica del controlador PID desarrollado, se realiza la programación que tiene como finalidad conocer los estados del motor con son la velocidad angular, la corriente del motor y de la misma forma como tratar la entrada del voltaje que llega al motor para el control en tiempo real. Para implementar la aplicación en tiempo real en este proyecto se hizo uso de la tarjeta de control DS1104 de la empresa dSPACE, programando y haciendo uso de las librerías de Matlab-Simulink.

En la figura 2.38 se observa de forma gráfica mediante programación en bloques de Simulink, la forma en que se realiza el muestro en tiempo real de los estados del motor. Para la generación de las trayectorias de velocidad se utilizaron los parámetros, $t_i = 2\text{s}$, $t_f = 10\text{s}$, $\bar{\omega}(t_i) = 0$, $\bar{\omega}(t_f) = 5 \text{ rad/s}$, $r_1 = 20$, $r_2 = -45$, $r_3 = 36$ y $r_4 = -10$.

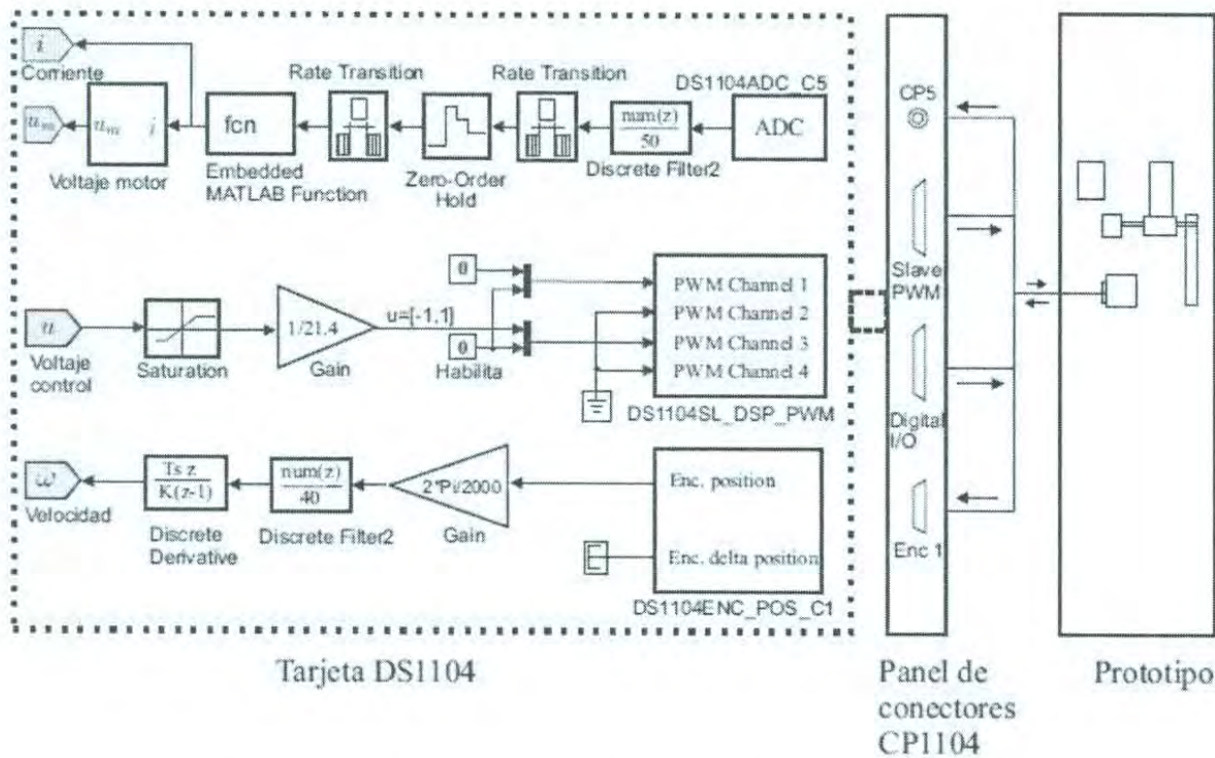


Figura 2.38. Estados a tratar en tiempo real con la tarjeta DS1104.

Se realizó una prueba de robustez en el seguimiento de trayectoria de velocidad deseada al controlador PID. Se sometió una perturbación por carga al motor en el periodo de $5 \leq t \leq 12$ segundos del experimento, con una inercia de carga $J_L = 3.91 \times 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$.

La carga que se le aplica al motor, correspondió a una pieza cilíndrica de 6 cm de diámetro, y con un peso de 871 gr. Para medir la velocidad del motor se hizo uso de un encoder omron E6B2-CWZ6C de resolución de 2000 pulsos por revolución. En la figura 2.39 se puede observar el programa que se implementó en tiempo real para el control de seguimiento de trayectoria de velocidad haciendo uso del controlador PID. Los parámetros que se introdujeron fueron ya establecidos en la ecuación (2.142).

En la figura 2.40 a) se puede ver el seguimiento de la trayectoria de la velocidad deseada que esta sobrepuesta con la gráfica de velocidad del motor en tiempo real, se llega a la conclusión en dicha gráfica, que se cumple con el objetivo de seguir la trayectoria. En la figura 2.40 c) se observa que existe un error entre la velocidad deseada y la real, y que es del orden de centésimas, pero dependiendo de la precisión de control requerido donde se aplica el

motor, debe ser considerado importante. En las figuras 2.40 b) y 2.40 d), se observa el comportamiento de las variables de voltaje $u(t)$ y corriente $i(t)$ respectivamente, estas variables como ya se ha detallado en el trabajo, no son variables a controlar, por lo que existen diferencias significativas en las trayectorias deseadas. Así también se puede notar que la corriente se eleva cuando se somete a la carga por los 5 segundos, lo importante es que la variable de velocidad angular siga la trayectoria deseada.

El programa ControlDesk de dSPACE es utilizado para realizar la interface gráfica, mediante la implementación de instrumentos virtuales para la observación en tiempo real de los resultados y datos obtenidos durante el experimento.

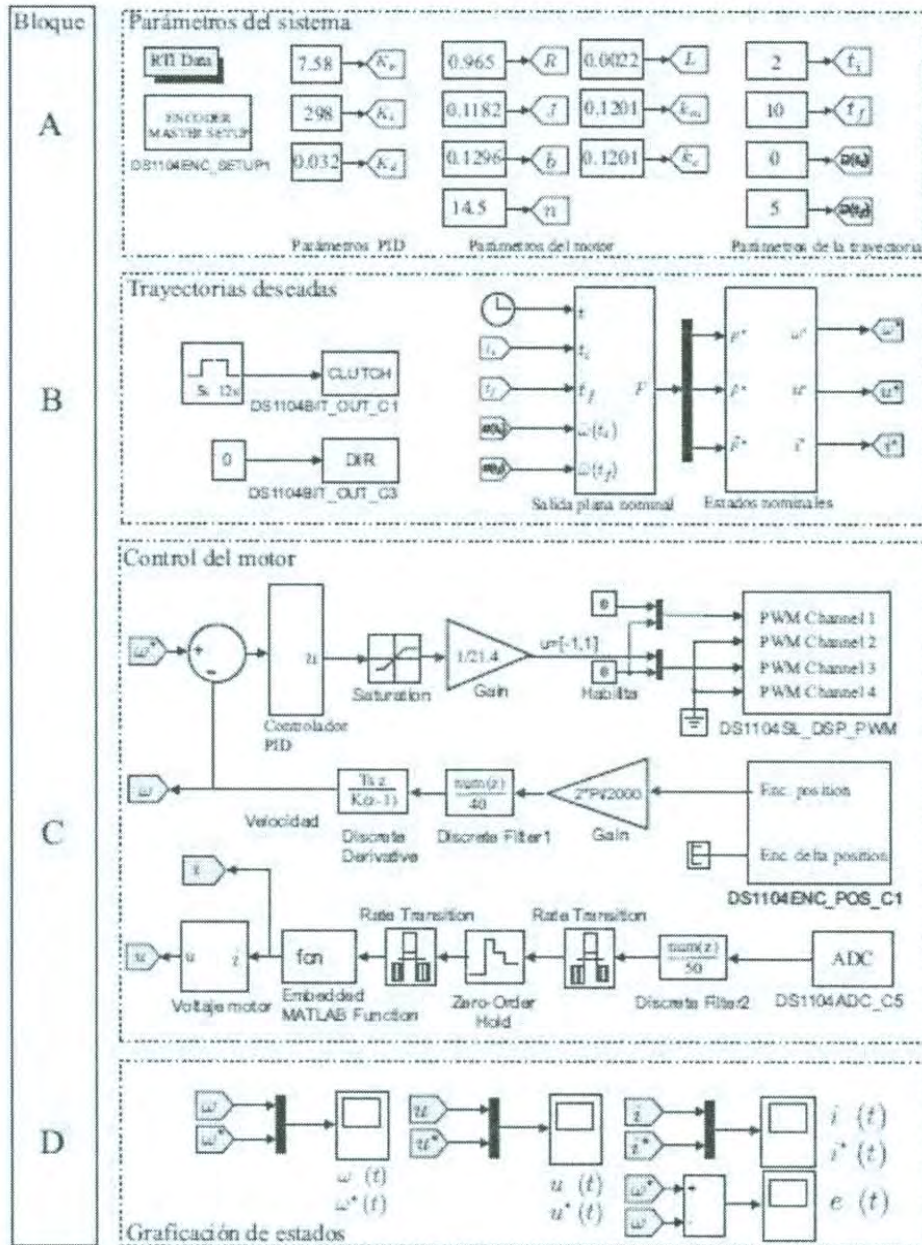


Figura 2.39. Controlador PID en tiempo real haciendo uso de la tarjeta de control DS1104, programada desde Simulink.

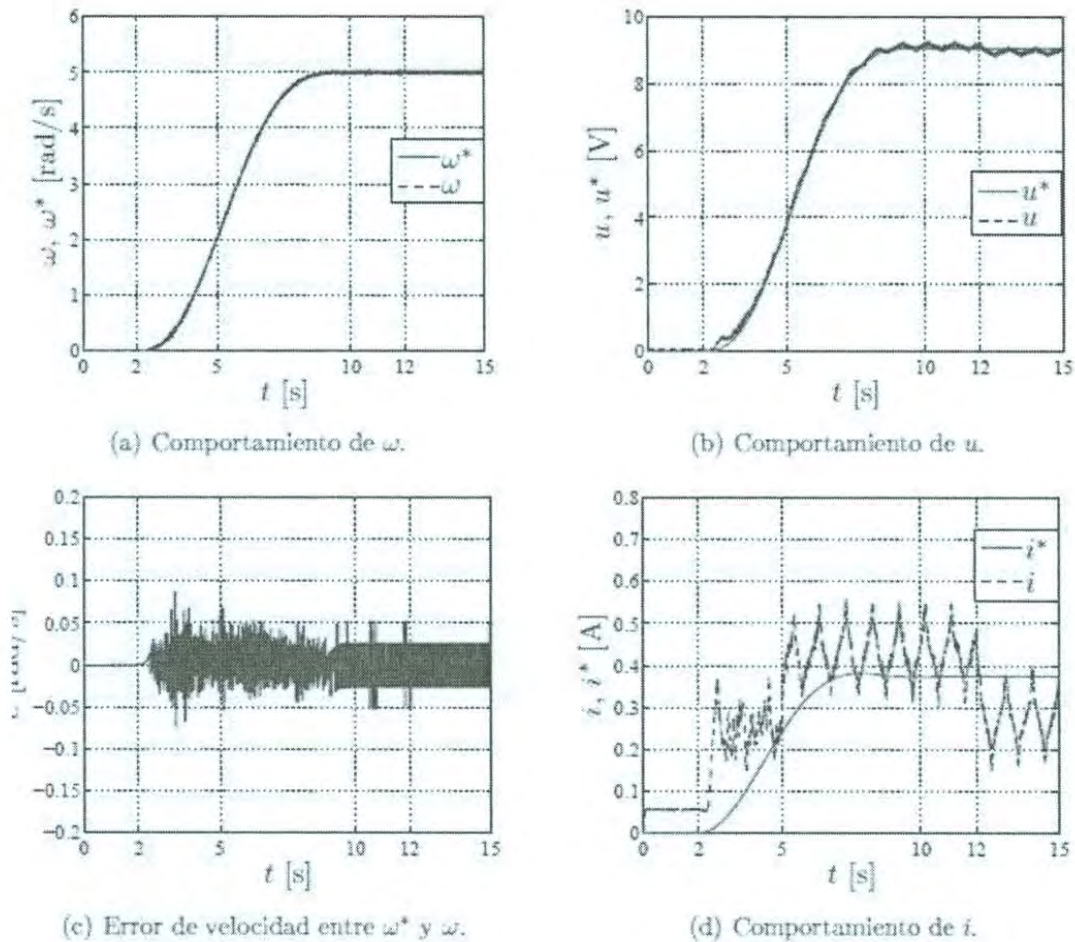
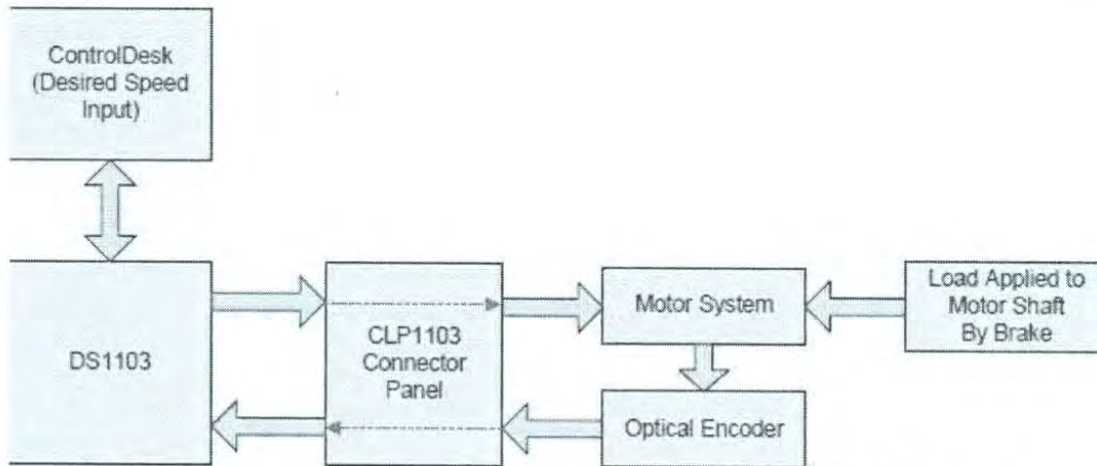


Figura 2.40. Graficas en tiempo real al aplicar un controlador PID al seguimiento de una trayectoria por polinomio de Bézier.

En el artículo [12] se presenta el diseño y la implementación de un control de velocidad para un motor de corriente directa utilizando la tarjeta dSPACE DS1103. El control fue diseñado y simulado haciendo uso de Simulink y el conjunto de bloques de la dSPACE del Real Time Interface 1103. El control fue descargado en el procesador digital de señales Texas Instruments TM320F240 DSP localizado en la tarjeta DS1103. Las entradas a las DS1103 incluyen la velocidad del motor deseada y las salidas del encoder conectado al motor, como salidas de la tarjeta se tiene una señal PWM que es la entrada del motor para regular la velocidad. En la figura 2.41 se muestra el diagrama de bloques del sistema de control de la velocidad del motor.



2.41. Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad del motor.

En este artículo se utiliza un motor Pittman modelo #GM9236C534-R2 con voltaje de alimentación de 24VDC, así también se hace uso de un encoder incremental óptico HEDS-900 con dos canales digitales para medir la velocidad del motor.

Los requerimientos de control que se propusieron son:

- El control de velocidad del motor de CD será diseñado y simulando utilizando Simulink (interface en tiempo real en simulink), los bloques de la dSPACE y el Real – Time Workshop.
- Un sobreimpulso menor o igual del 5%.
- Un tiempo de subida menor o igual a 110 ms.
- Un error en estado estable mínimo.

Una vez declarados los requerimientos de control se procedió a realizar el modelo matemático de la planta como se muestra en la ecuación (2.146) que representa la función de transferencia en lazo abierto, que tiene como relación la transformada de Laplace de la salida (velocidad angular) y la transformada de Laplace de la entrada (voltaje).

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{(R_a + sL_a)(b + sJ) + K_t K_v} \quad (2.146)$$

En donde R_a y L_a son la resistencia y la inductancia del motor, J y b son la inercia mecánica y el coeficiente de fricción viscosa del motor, y K_t y K_v son la constante de torque y

la constante de fuerza contra-electromotriz. En la figura 2.42 se muestra el esquema del motor de CD.

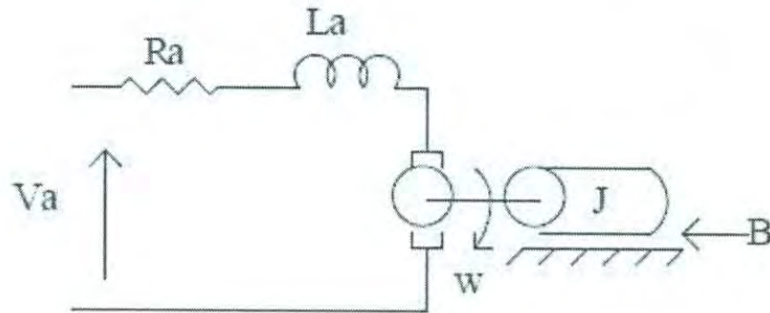


Figura 2.42. Esquema del modelo del motor.

El modelo de la planta que se muestra en la figura 2.43, se simula para obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia (figura 2.44) obteniendo un margen de fase de 86° y una frecuencia de $\omega_c = 279$ rad/s. La función de transferencia en el dominio s que el autor obtuvo de la simulación es (2.147).

$$G_P = \frac{19.4699}{\left(\frac{s}{14.54} + 1\right)\left(\frac{s}{1776.78} + 1\right)} \quad (2.147)$$

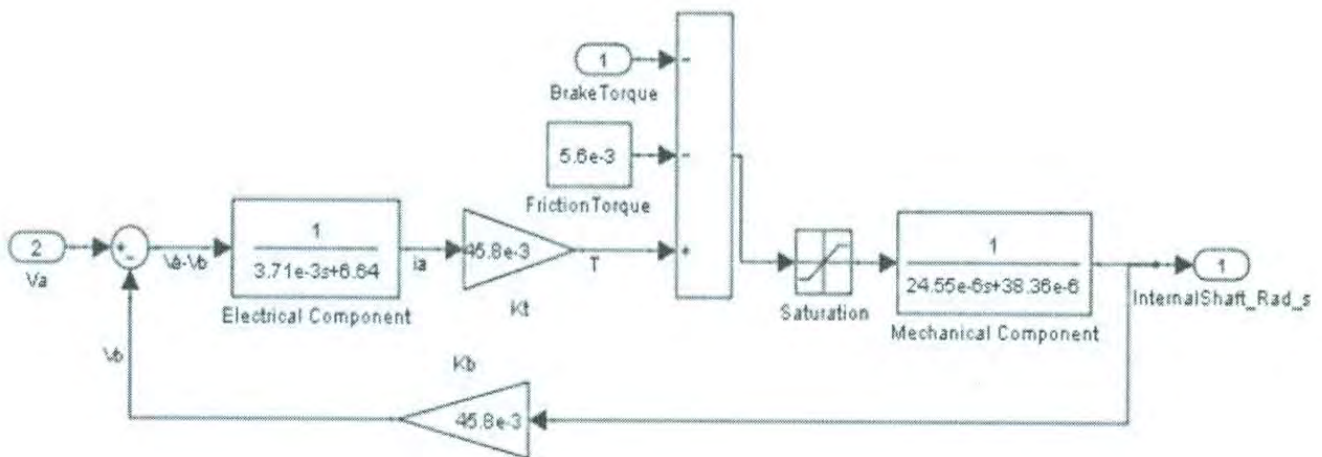


Figura 2.43. Modelo del motor.

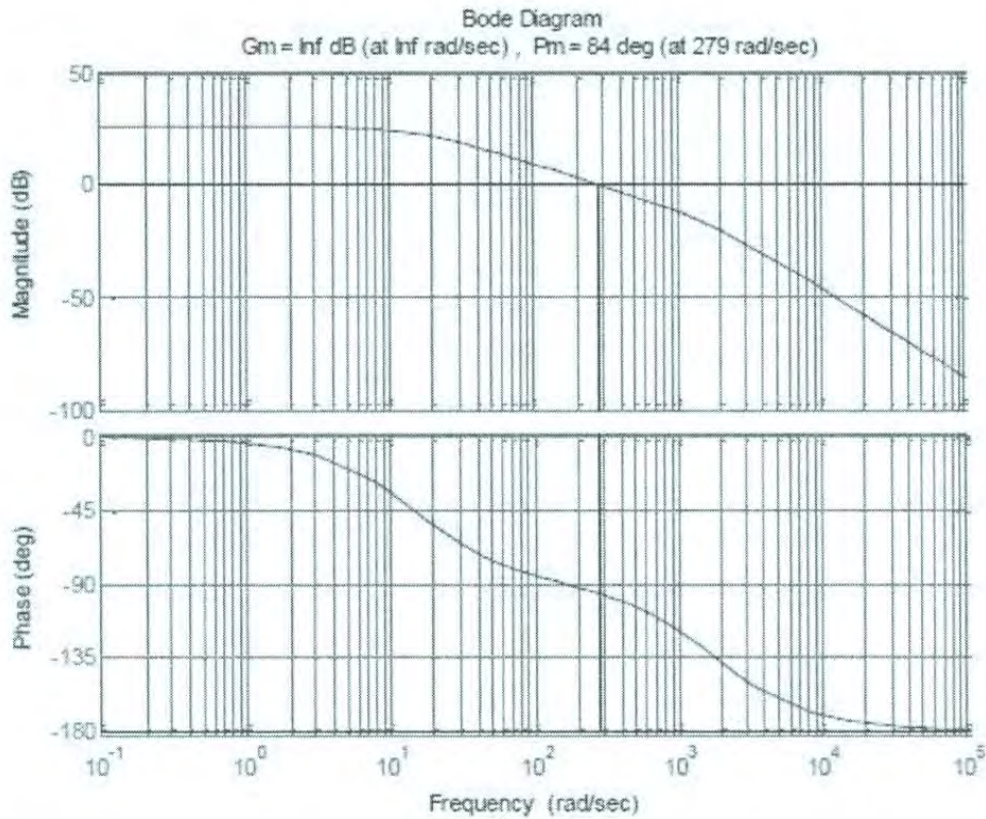


Figura 2.44. Diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia del modelo del motor.

El controlador fue diseñado en el dominio analógico usando el método de Bode para después convertirlo en el dominio discreto o digital utilizando Matlab. Se agregó un integrador $G_C = 1/s$ para minimizar el error en estado estable en el sistema, así también se determinó que, para el tiempo de subida de 20 ms y el sobreimpulso de aproximadamente del 5% se tiene una frecuencia de $\omega_C = 157.08$ rad/s y un margen de fase cercano a 69.01° siendo las especificaciones de diseño. Por lo que se presenta los siguientes cálculos.

$$\beta_C = -1.937 \text{ rad} \quad (2.148)$$

$$\beta_C = -\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_1}{\omega_C} \right) - \frac{\omega_C}{\omega_2} \quad (2.149)$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_C^2}{\omega_2} \quad (2.150)$$

Sustituyendo -1.937 rad en β_C , $\omega_C = 157.08$ rad/s en (2.149) y por último sustituir ω_1 de (2.150) en (2.149) para obtener como resultado $\omega_2 = 857.579$ rad/s que

representa el polo de del controlador G_C . Ahora se sustituye el valor de ω_2 en (2.150) para obtener $\omega_1 = 28.7718$ rad/s que es el cero de la función de transferencia del controlador. Con esto se llega a la función de transferencia del controlador G_C en el dominio continuo o dominio de Laplace (2.151).

$$G_C = \frac{s + 28.7718}{s(s + 857.579)} \quad (2.151)$$

Para aplicar el control en la tarjeta DS1103 programado desde Simulink, el autor opto por encontrar mediante transformación bilineal para una frecuencia de muestreo de 12KHz, la función de transferencia para un controlador digital en variable z partiendo de la expresión del controlador en dominio de Laplace (2.151), con lo que se obtiene (2.152).

$$G_{CDigital} = (72.0631)(0.482282) \left(\frac{z^2 + 0.0024z - 0.9976}{z^2 - 1.931z + 0.931} \right) \quad (2.152)$$

Una vez diseñado el controlador digital se desarrolló el modelo en Simulink mediante los bloques del controlador DS1103 dSPACE para la salida de la señal PWM al sistema del motor, y la entrada de las señales del encoder incremental, todo esto conectado en el panel conector CLP1103. Como ya se mencionó, la mediciones que se van a estar tomando son los pulsos provenientes del encoder en canal 1 de interface para encoder incremental, donde se le da un tratamiento para obtener la velocidad angular del motor, para eso se utiliza el bloque “ENCODER MASTER SETUP” del RTI1103. La señal de salida del controlador es una señal PWM y se configura el bloque en Simulink “DS1103SL_DSP_PWM” en donde tiene como entrada el ciclo de trabajo que se debe tener a la salida. En las figuras 2.45 y 2.46 se aprecian el modelo realizado en Simulink que es cargado a la tarjeta DS1103.

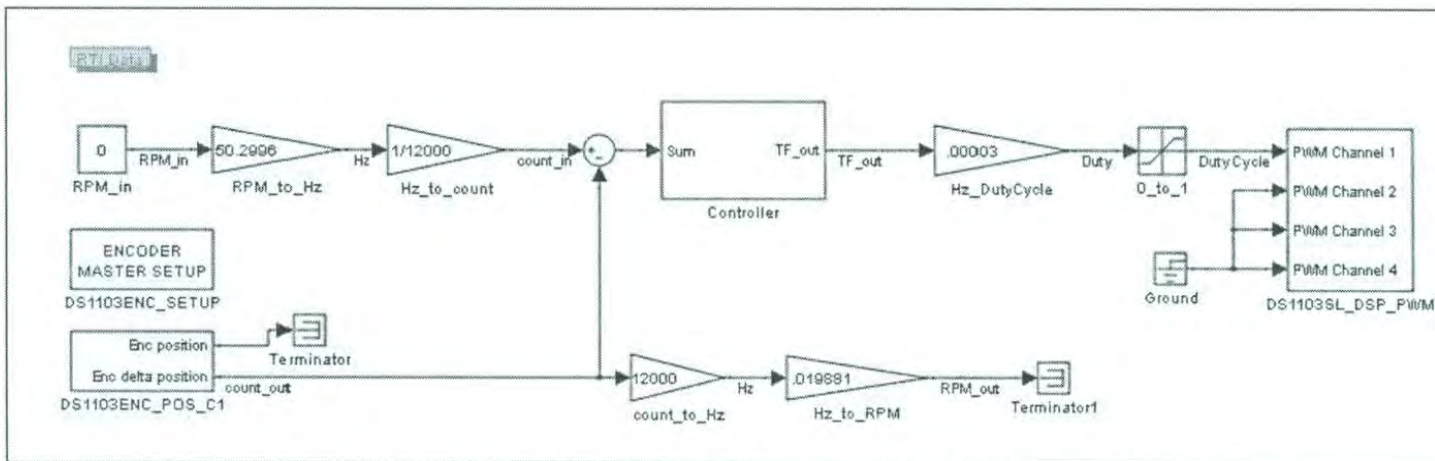


Figura 2.45. Modelo del sistema de control en Simulink descargado en la tarjeta DS1103.

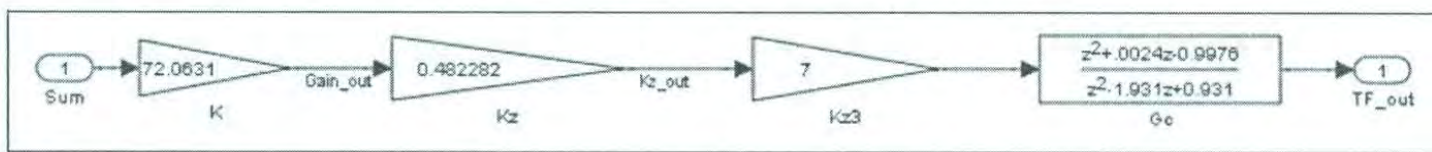


Figura 2.46. Subsistema del controlador digital.

Una vez descargado el programa en la tarjeta de control se realizaron los experimentos, las mediciones y el almacenamiento de datos en el programa ControlDesk. Las gráficas que se muestran a continuación (2.47), (2.48) y (2.49) dan la respuesta a una entrada escalón unitario de referencia, y se observa que se obtiene el tiempo de subida muy similar al establecido en el diseño, pero no el sobreimpulso requerido.

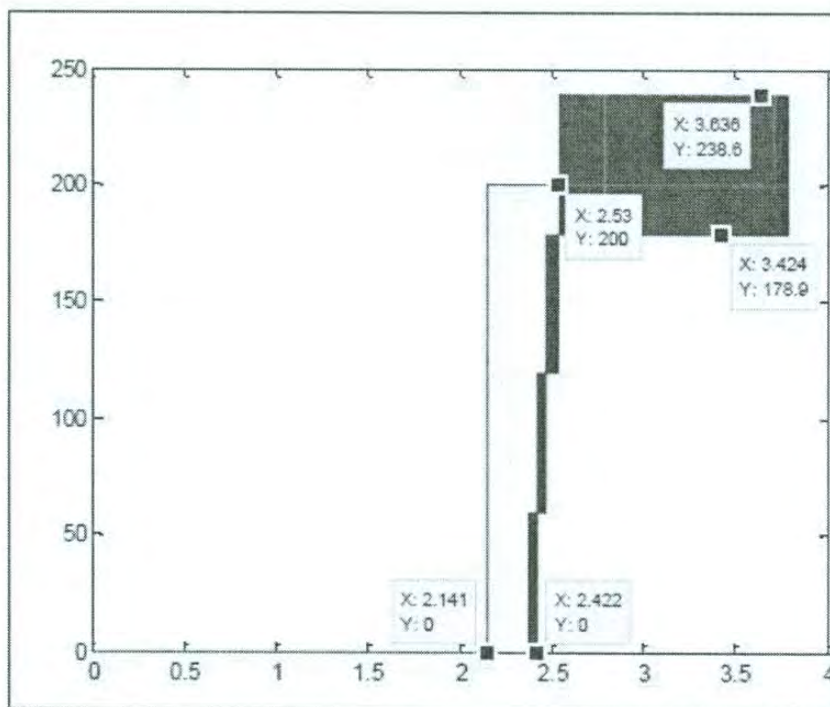


Figura 2.47. RPM_in y RPM_out para una entrada de 200RPM utilizando ControlDesk y graficando en Matlab.

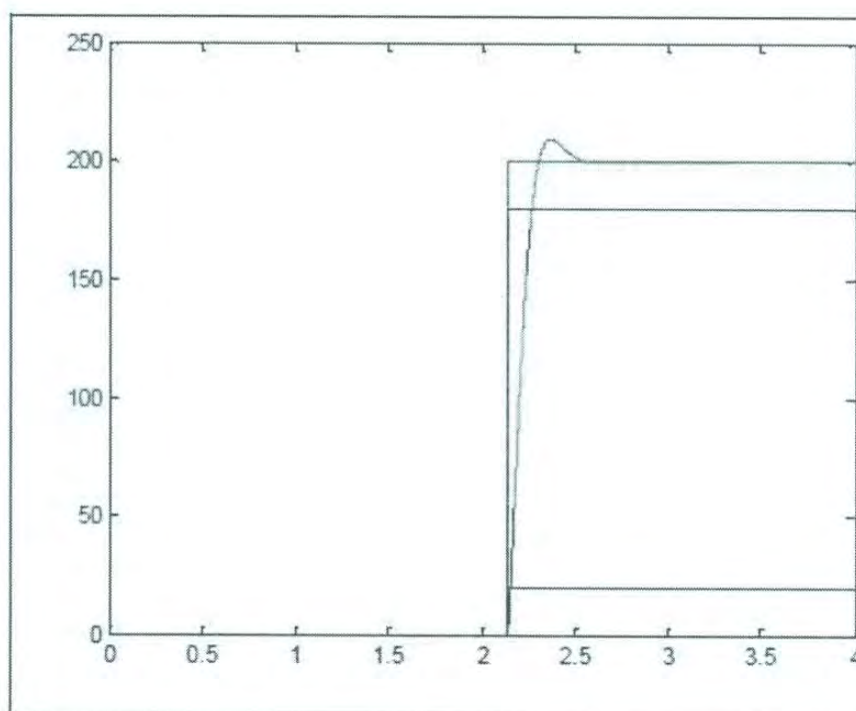


Figura 2.48. Simulación realizada en Simulink cuando se tiene una entrada RPM_in de 200RPM.

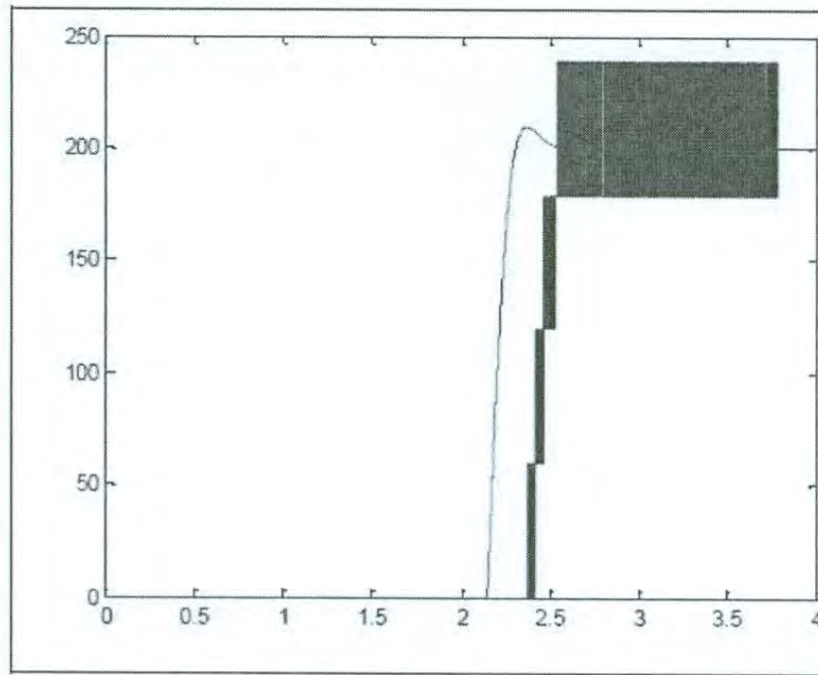


Figura 2.49. Gráfica de RPM_out en Matlab de las figuras 2.47 y 2.48.

La figura 2.49 muestra los tiempos de subida de la simulación en Simulink y el sistema físico real, y se observa que dichos tiempos son muy similares pero existe un retraso en el sistema real. Thomas [12] menciona que las mediciones tomadas que se muestran en la figura 2.47, el tiempo de subida del sistema real es menos de 108 ms y no es posible observar el valor del sobreimpulso.

Como conclusión se tiene que el objetivo en el proyecto desarrollado, es el diseño y la simulación del control de la velocidad del motor utilizando Matlab y Simulink, pero lo más interesante es la implementación del controlador en la tarjeta de control DS1103 utilizando los programas de la empresa dSPACE.

Capítulo 3. Aplicación

3.1 Modelo matemático del motor de CD

Una vez conocida la teoría que sustenta el funcionamiento del motor de corriente directa, se procede a desarrollar el modelo matemático del sistema en base a ecuaciones diferenciales lineales que describen su comportamiento dinámico.

El motor se compone de dos partes, el subsistema eléctrico y subsistema mecánico. Primeramente, se plantean las ecuaciones del subsistema eléctrico que se muestra en la figura 3.1, el circuito eléctrico en serie formado con una resistencia, inductor, voltaje de alimentación del motor y la fuerza contra-electromotriz inducida.

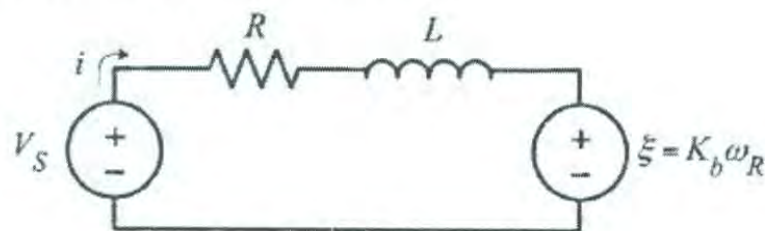


Figura 3.1. Circuito eléctrico de la armadura del motor de CD.

Aplicando ley de voltajes de Kirchhoff al circuito eléctrico, se obtiene la ecuación (3.1).

$$\sum V = V_s(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - \xi(t) = 0 \quad (3.1)$$

donde:

$V_s(t)$: Voltaje aplicado al motor.

$i(t)$: Corriente eléctrica.

R : Resistencia de armadura.

L : Inductancia de armadura.

$\xi(t)$: Fuerza Contra-electromotriz inducida.

El voltaje inducido se relaciona linealmente con la velocidad del rotor, debido a las variaciones del flujo de campo magnético (Ley de inducción de Faraday) que produce los distintos puntos de corte de las líneas de campo, por lo que se llega a la ecuación (3.2).

$$\xi(t) = K_b \omega(t) \quad (3.2)$$

donde:

$\omega(t)$: Velocidad angular del motor

K_b : Constante de fem.

Al sustituir (3.2) en (3.1) y obteniendo la transformada de Laplace de la ecuación diferencial resultante con condiciones iniciales iguales a cero, se llega a (3.3).

$$U_s(s) = RI(s) + LsI(s) + K_b\Omega(s)$$

$$I(s) = \frac{U_s(s) - K_b\Omega(s)}{R + Ls} \quad (3.3)$$

Una vez encontrada la ecuación (3.3) se procede a obtener la ecuación diferencial del subsistema mecánico del motor mostrado en la figura 3.2.

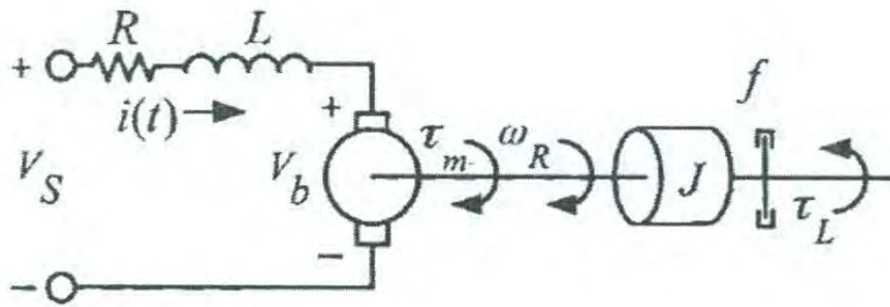


Figura 3.2 Sistema eléctrico y mecánico del motor de C.D.

Aplicando Segunda Ley de Newton al sistema mecánico, se llega a (3.4).

$$\tau_m(t) - \tau_L(t) - \tau_f(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (3.4)$$

donde:

$\tau_m(t)$: Par electromagnético generado en el motor.

$\tau_f(t)$: Par de fricción viscosa.

$\tau_L(t)$: Par de perturbación externa.

La magnitud del par de fricción viscosa depende de la velocidad con la que gira el motor y se expresa según la ecuación (3.5).

$$\tau_f(t) = b\omega(t) \quad (3.5)$$

El par electromagnético generado en el motor se relaciona proporcionalmente con la corriente que fluye en el devanado del rotor, debido al paso de corriente por el conductor en presencia de un campo magnético (generado por el imán en el estator), se produce la fuerza magnética que genera dicho par, con lo que se llega a la ecuación (3.6).

$$\tau_m(t) = K_m i(t) \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) y (3.5) en (3.4) y obteniendo la transformada de Laplace con condiciones iniciales iguales a cero de la ecuación resultante se llega a (3.7).

$$K_m I(s) = Js\Omega(s) + T_L(s) + b\Omega(s) \quad (3.7)$$

Despejando $I(s)$ de (3.3) y sustituyéndola en (3.7) se obtiene la función de transferencia del motor (planta del sistema) (3.8) en lazo abierto, teniendo por salida la velocidad angular y por entrada el voltaje de alimentación, en la función de transferencia encontrada no se toma en cuenta el par de perturbación; los sistemas de control que se presentarán más adelante tratarán de corregir el error que dicha perturbación ocasionaría.

$$\frac{\Omega(s)}{U_s(s)} = \frac{K_m}{LJs^2 + (RJ + bL)s + K_m K_b + bR}$$

$$\frac{\Omega(s)}{U_s(s)} = \frac{\frac{K_m}{LJ}}{s^2 + \frac{(RJ + bL)}{LJ}s + \frac{K_m K_b + bR}{LJ}} \quad (3.8)$$

3.2 Caracterización de los parámetros del motor de CD

Una vez conocido el modelo matemático del motor y los parámetros que intervienen, se procede a realizar una serie de experimentos y pruebas para encontrar cada uno de dichos parámetros, como lo son: resistencia R_a , inductancia L , constante contra-electromotriz K_b , constante de par K_m , momento de inercia J y coeficiente de fricción viscosa b del motor de corriente directa Pololu modelo 1446, que tiene como característica una caja de engranes reductora con una relación de 100:1. El encontrar los valores de los parámetros del motor permite realizar los análisis matemáticos y simulaciones pertinentes de la respuesta de la salida del sistema, para tener como fin el poder desarrollar un planteamiento en el diseño de las leyes de control a utilizar y llevarlas a cabo en la planta física. Lo importante es poder simular las condiciones a las que estará sujeto el motor y tomar las decisiones con respecto a las características de diseño. El realizar mediciones correctas para encontrar los parámetros ayudará a tener mayor exactitud en las simulaciones, en el análisis dinámico, y por ende, una mayor exactitud en la ley control a diseñar.

3.2.1 Resistencia de armadura

Para determinar este parámetro se añadió una resistencia externa R_{ext} en serie con el devanado de armadura de tal forma que, la resistencia equivalente será la suma de la resistencia de armadura y la resistencia externa (como se observa en la figura 3.3).

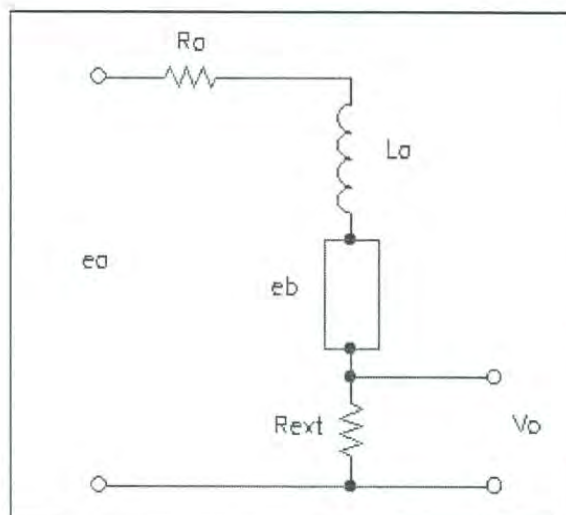


Figura 3.3. Circuito eléctrico del motor con una resistencia externa.

Con esta configuración se aplica una señal de voltaje de entrada al circuito de armadura de 3 V de tal magnitud que el motor no gire; por lo que el voltaje inducido en la armadura es cero debido a que el motor no gira, con lo que se tendrá equivalente a un circuito RL . A partir de tener el circuito RL con un voltaje de entrada de 3 V , y conocer el valor de la resistencia externa se puede obtener el valor de la resistencia de armadura R_a , y dicho valor se encontrará midiendo con un multímetro la caída de voltaje en la resistencia externa de valor conocido; el punto importante es que esa caída de voltaje será medida cuando el voltaje haya alcanzado su valor en el estado estacionario, y esto es debido a que no existe una caída de voltaje en el inductor del motor en dicho estado. Por lo tanto, con la ecuación (3.9) es posible obtener el valor de la resistencia de armadura, la ecuación representa un divisor de voltaje.

$$V_0 = \frac{R_{ext}}{R_{ext} + R_a} \cdot e_a \quad (3.9)$$

donde:

R_{ext} : Resistencia externa.

R_a : Resistencia de armadura del motor.

V_0 : Voltaje en la resistencia externa.

e_a : Voltaje de alimentación del circuito.

En la prueba desarrollada, se contó con una resistencia externa $R_{ext} \approx 326 \Omega$ y se midió el voltaje en dicha resistencia cuando el circuito se alimentó con $3V$. A continuación se presenta la tabla 3.1, de las mediciones obtenidas y los cálculos de la resistencia de armadura calculada mediante el despeje de R_a de la ecuación (3.9).

V_0	R_a
2.93 V	7.78 Ω
2.94 V	6.65 Ω
2.93 V	7.78 Ω
2.93 V	7.78 Ω
2.94 V	6.65 Ω
2.95 V	5.52 Ω
2.95 V	5.52 Ω
2.95 V	5.52 Ω
2.93 V	7.78 Ω
2.94 V	6.65 Ω
2.95 V	5.52 Ω

Tabla 3.1. Valores de la mediciones de voltaje y resistencia de armadura.

El promedio de los valores de resistencia R_a queda como

$$R_a = 6.65 \Omega$$

3.2.2 Inductancia de armadura

Para obtener el valor de la inductancia de la armadura del motor se hizo uso del medidor de inductancia LCR Meter BK PRECISION TEST INSTRUMENTS modelo 878B, en el que se toman las terminales del motor y se realiza la medición de forma directa, a continuación se presenta la tabla 3.2 de los valores de inductancia obtenidos.

<i>L</i>
1.600 mH
1.605 mH
1.600 mH
1.600mH
1.590 mH

Tabla 3.2. Valores de inductancia medidos.

Se obtiene el promedio de los valores medidos y se determina el valor de la inductancia:

$$L = 1.6 \text{ mH}$$

3.2.3 Constante contra-electromotriz y constante de par

La constante de par K_m y la constante de fuerza contra-electromotriz K_b están estrechamente relacionadas por la igualdad en su valor numérico. Para comprobar esta igualdad se debe considerar el caso en el que el motor está en estado estacionario y se tiene un balance de potencia, despreciando la resistencia del motor. Es decir, la potencia mecánica P de entrada desarrollada en la armadura está dada por (3.10).

$$P = e_a(t)i(t) \tag{3.10}$$

y la potencia mecánica P entregada al eje es:

$$P = T(t)\omega(t) \tag{3.11}$$

Por tanto, la condición en estado estacionario hace que la potencia de entrada sea igual a la potencia entregada al eje, de modo que se igualan (3.10) y (3.11), considerando que $e_a = K_b \omega(t)$ y $T = K_m i(t)$, se tiene,

$$(K_b \omega)i = (K_m i)\omega$$

$$K_b = K_m$$

Las unidades están en el sistema internacional SI, $T(t)$ está en $N \cdot m$ y $\omega(t)$ está en rad/s , se llega a:

$$K_b \left[\frac{V}{\frac{rad}{s}} \right] = K_m \left[\frac{N \cdot m}{A} \right]$$

Para determinar la constante K_b se tiene que medir la velocidad angular del motor ante una entrada de voltaje, para eso se utiliza un encoder incremental acoplado al eje del rotor; para realizar las mediciones de velocidad del motor se medirá la frecuencia del canal A del encoder utilizando un osciloscopio y, mediante una relación lineal, se determina la velocidad angular a la que gira el motor. Así también, se tiene que medir la corriente de armadura cuando el motor gira a velocidad angular constante y para eso se hace uso de un multímetro digital. Las mediciones de la constante K_b se realizan en estado estable; es decir, al motor se aplica una señal de voltaje de CD en la armadura y de acuerdo al modelo matemático del motor expresado en (3.1) se tiene:

$$V_s(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - K_b \omega(t) = 0$$

Se dice que en estado estacionario la corriente de armadura se estabiliza y es constante, por lo que el término $L \frac{di(t)}{dt} = 0$; es entonces que, si se despeja el parámetro K_b se llega a la ecuación (3.12).

$$K_b = \frac{V_s - Ri}{\omega} \quad (3.12)$$

A continuación se mostrará la tabla 3.3 que muestra las mediciones tomadas de velocidad angular y corriente al alimentar el motor con un voltaje de 12V y 10V, se sabe que el valor de la resistencia es de 6.65Ω . En la cuarta columna se muestra los valores del parámetro K_b al sustituir las mediciones tomadas en la ecuación (3.12).

V_s	i	ω	K_b
12V	0.3260 A	10.680 rad/s	0.92068 V/rad/s
12V	0.3259 A	10.680 rad/s	0.92067 V/rad/s
12V	0.3260 A	10.680 rad/s	0.92068 V/rad/s
12V	0.3262 A	10.678 rad/s	0.92065 V/rad/s
10V	0.2720 A	8.9 rad/s	0.92035 V/rad/s
10V	0.2700 A	8.9 rad/s	0.92185 V/rad/s
10V	0.2727 A	8.9 rad/s	0.91988 V/rad/s

Tabla 3.3. Cálculos de la constante K_b .

Obteniendo el promedio de todos los valores calculados de la constante contra-electromotriz K_b , se llega a:

$$K_b = 0.92068 \text{ V/rad/s}$$

$$\therefore K_m = 0.92068 \text{ N} \cdot \text{m/A}$$

3.2.4 Constante de fricción viscosa

En el modelo dinámico del motor de corriente directa se sabe que cuando se alcanza el estado estable, la velocidad angular del motor es constante y opera sin carga externa, la ecuación (3.4) se expresa:

$$K_m i(t) - b\omega(t) = 0 \quad (3.13)$$

Sólo queda despejar b de (3.13) para obtener (3.14), sabiendo que en estado estable $i = 0.236A$ y $\omega = 10.68 \text{ rad/s}$ cuando el motor se alimenta con $12V$.

$$b = \frac{K_m i(t)}{\omega(t)} \quad (3.14)$$

Por lo tanto el valor de b es:

$$b = 0.0281 \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$$

3.2.5 Momento de inercia del motor

Para determinar el momento de inercia del motor se realiza un experimento teniendo como principio la fuerza contra-electromotriz del motor, la cual solo existe cuando el motor tiene una velocidad angular distinta de cero. Con esto es posible determinar el periodo en el que el motor va desde una velocidad constante hasta el reposo, y esto se determina con un osciloscopio conectado midiendo el voltaje entre las terminales del motor.

En la figura 3.4 se aprecia el voltaje en las terminales del motor medido con un osciloscopio, al principio se observa que el motor está inactivo o apagado, después se alimenta y tiene un subida en el voltaje hasta estabilizarse. Después se corta el suministro de energía, lo cual se puede apreciar en la gráfica, la parte en la que se ve una recta de descarga en la bobina que es producida por la fuerza contra-electromotriz, por inercia el motor sigue en movimiento pero va desacelerando hasta llegar al reposo con lo que la fuerza contra-electromotriz disminuye hasta cero.

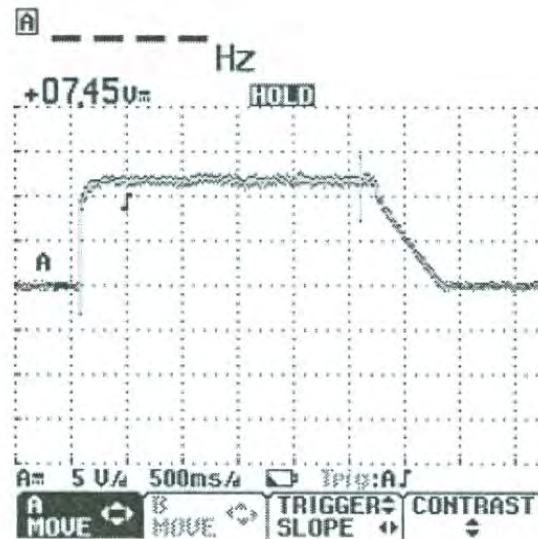


Figura 3.4. Gráfica del voltaje en las terminales del motor medido con un osciloscopio.

En la figura 3.5 se observa que el tiempo que le requiere al motor pasar de una velocidad de 10.68 rad/s a 0 rad/s es de 700 ms .

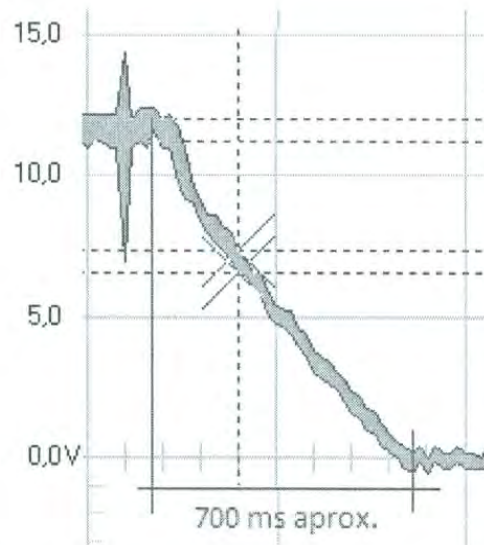


Figura 3.5. Recta de voltaje de desenergización del motor.

En el momento en que desconecta la fuente de voltaje, el motor sigue moviéndose hasta detenerse debido a un momento de frenado τ_B , que se define en (3.15)

$$\tau_B = J \frac{d\omega(t)}{dt} \tag{3.15}$$

τ_B es independiente de la velocidad y será calculado en términos de las pérdidas por fricción. La derivada de la velocidad con respecto al tiempo de (3.15) será sustituida por la pendiente de la recta de la figura 3.5.

Las pérdidas por fricción se calculan en base a la ley de la conservación de potencia como se observa en la ecuación (3.16).

$$V_R = V_s i - Ri^2 - \Delta U i \quad (3.16)$$

Donde ΔU es la pérdida de tensión en las escobillas del motor, midiéndolas con un multímetro da como valor $\Delta U = 0.32 V$. Se determina V_R y se continúa con los cálculos de la siguiente manera:

$$V_R = \tau_B \omega$$

Con el conjunto de ecuaciones antes mencionadas se llega al resultado final que es una expresión para el momento de inercia en términos de los valores ya obtenidos en (3.17),

$$J = \frac{V_R}{\alpha \omega^2} \quad (3.17)$$

donde α es la pendiente de la recta en la figura 3.5. Sustituyendo los valores encontrados se calcula el valor del parámetro del momento de inercia del motor empleado.

$$J = 0.001969 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

La tabla 3.4 presenta los parámetros del motor Pololu modelo 1446.

Resistencia de armadura R_a	6.65 Ω
Inductancia de armadura L	1.6 mH
Constante contra-electromotriz K_b	0.920608 $V / rad/s$
Constante de par K_m	0.920608 $N \cdot m/A$
Momento de inercia del motor J	0.001969 $Kg \cdot m^2$
Constante de fricción viscosa b	0.0281 $\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$
Voltaje nominal V	12 V
Corriente nominal i_a	326 mA
Velocidad angular nominal ω	10.68 $rad/s - 101.986 rev/min$

Tabla 3.4 Parámetros del motor.

Una vez obtenida la expresión de la función de transferencia de la planta, se tiene por salida velocidad angular y como entrada voltaje, se procederá a realizar un análisis del comportamiento ante una entrada de voltaje de tipo escalón unitario y observar la respuesta del sistema de segundo orden en lazo abierto. Antes de esto se sustituirán los parámetros del motor en (3.8) para obtener (3.18).

$$\frac{\Omega(s)}{U_s(s)} = \frac{292219.4007}{s^2 + 4170.264s + 328332.9101} \quad (3.18)$$

3.3 Análisis de respuesta en el dominio del tiempo

A continuación se presenta una simulación realizada en Matlab – Simulink (figura 3.6 y 3.7) se obtiene la gráfica de velocidad del motor contra tiempo ante una entrada escalón de 12 volts, se comienza por hacer el análisis en el dominio del tiempo de la planta, con el fin de entender su comportamiento y sus características, las cuales, son necesarias para poder establecer una estrategia de diseño de los dos controladores que se presentarán en este proyecto de investigación.

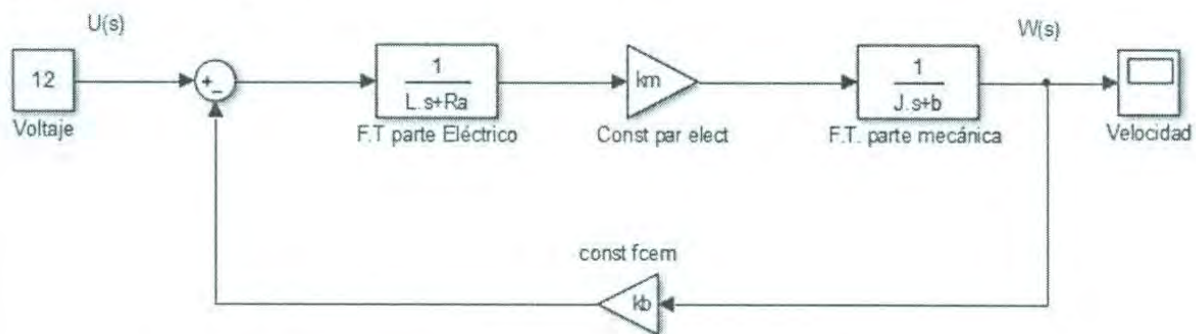


Figura 3.6. Simulación de la función de transferencia del motor en Simulink.

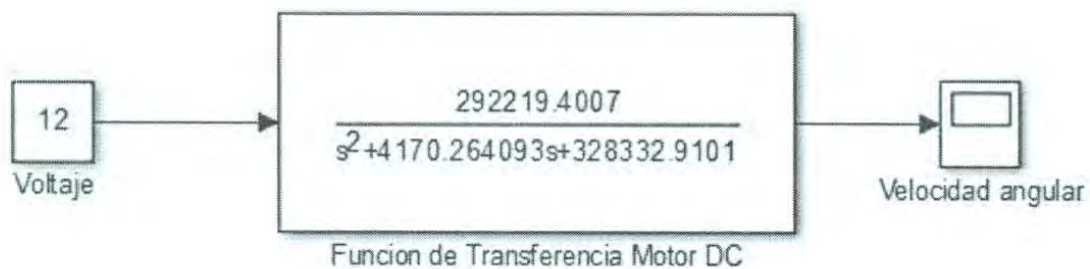


Figura 3.7. Simulación de la función de transferencia del motor de CD en lazo abierto.

En la figura 3.8 se observa la respuesta de la velocidad angular en el dominio del tiempo ante una entrada escalón de 12 volts, analizando dicha figura se puede identificar la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario del sistema en lazo abierto.

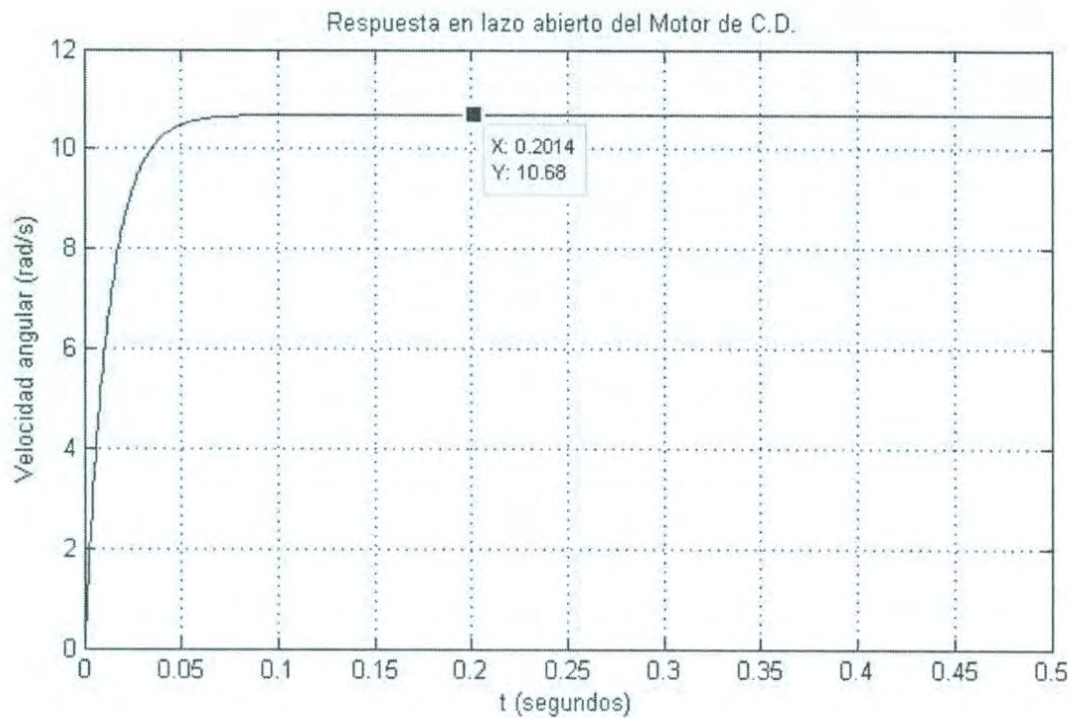


Figura 3.8. Respuesta en velocidad angular del motor $\omega(t)$ en el dominio del tiempo.

En estado estacionario el motor llega una velocidad angular de $\omega = 10.68 \text{ rad/s}$ que es aproximadamente igual a la que el fabricante presenta [13]. El sistema del motor en lazo abierto es estable por lo tanto debe tener sus polos en el semiplano izquierdo del plano complejo s , para comprobar esto obtenemos sus polos utilizando Matlab como se muestra a continuación en la figura 3.9.

```
>> %Polos del sistema en lazo abierto.
num = 292219.4007;
den = [1 4170.264 328332.9101];
p = roots(den);
p =

    1.0e+03 *
   -4.0900
   -0.0803
```

Figura 3.9. Código para la obtención de los polos utilizando Matlab.

Los polos del sistema en lazo abierto se presentan en la ecuación (3.19) y el comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe en términos de los siguientes parámetros: factor de amortiguamiento relativo y frecuencia natural no amortiguada (3.20) y (3.21), en donde se observa y se comprueba que el factor de amortiguamiento obtenido demuestra que el sistema es sobreamortiguado.

$$s_1 = -4090 \quad s_2 = -80.3 \quad (3.19)$$

$$\omega_n = 573 \text{ rad/s} \quad (3.20)$$

$$\zeta = 3.63 \quad (3.21)$$

3.4 Modelo en el espacio de estados

Se definen como variables de estado del motor, la corriente y la velocidad angular, esto es debido a la accesibilidad de medir mediante sensores estas variables para la implementación de un control por retroalimentación de estados, de las ecuaciones (3.1) y (3.4) despejando $i'(t)$ y $\omega'(t)$ se obtienen (3.22) y (3.23):

$$i'(t) = \frac{V_s(t)}{L} - \frac{R}{L}i(t) - \frac{K_b}{L}\omega(t) \quad (3.22)$$

$$\omega'(t) = \frac{K_m}{J}i(t) - \frac{b}{J}\omega(t) \quad (3.23)$$

definiendo las variables de estado en (3.24)

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega(t) \\ x_1' &= \omega'(t) \\ x_2 &= i(t) \\ x_2' &= i'(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.24) en (3.22) y (3.23) se obtienen (3.25) y (3.26).

$$x_2' = \frac{V_s(t)}{L} - \frac{R}{L}x_2 - \frac{K_b}{L}x_1 \quad (3.25)$$

$$Y = [292219.4007 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

El modelo en el espacio de estados es representando en diagramas de bloques con los integradores para la realización de las simulaciones haciendo uso de las librerías de Simulink como se muestra en la figura 3.10.

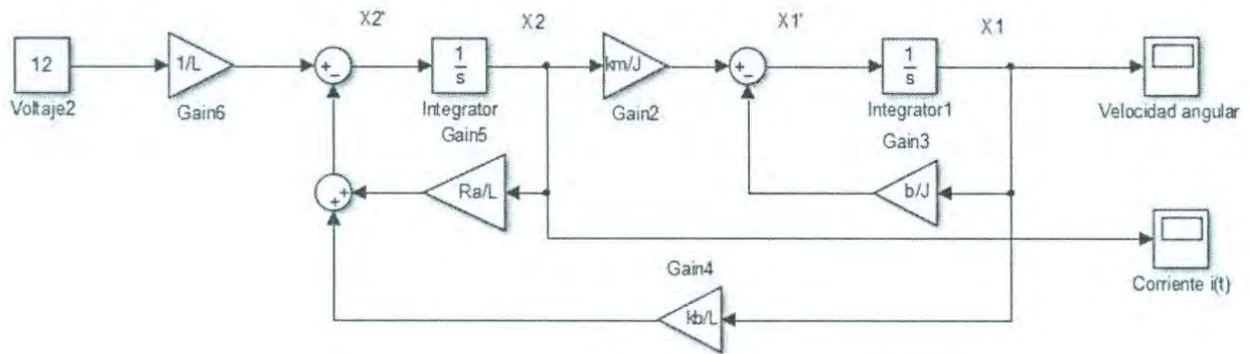


Figura 3.10. Diagrama de bloques del motor de CD representado en el espacio de estados.

Realizando la simulación con un tiempo de 0.5 segundos se presentan las gráficas de las variables de estado: velocidad angular y corriente de armadura del motor, cuando el sistema de lazo abierto tiene una entrada de 12 volts. En las figuras 3.11 y 3.12 se muestran la velocidad angular (rad/s) del motor y la corriente de armadura (A) del motor respectivamente.

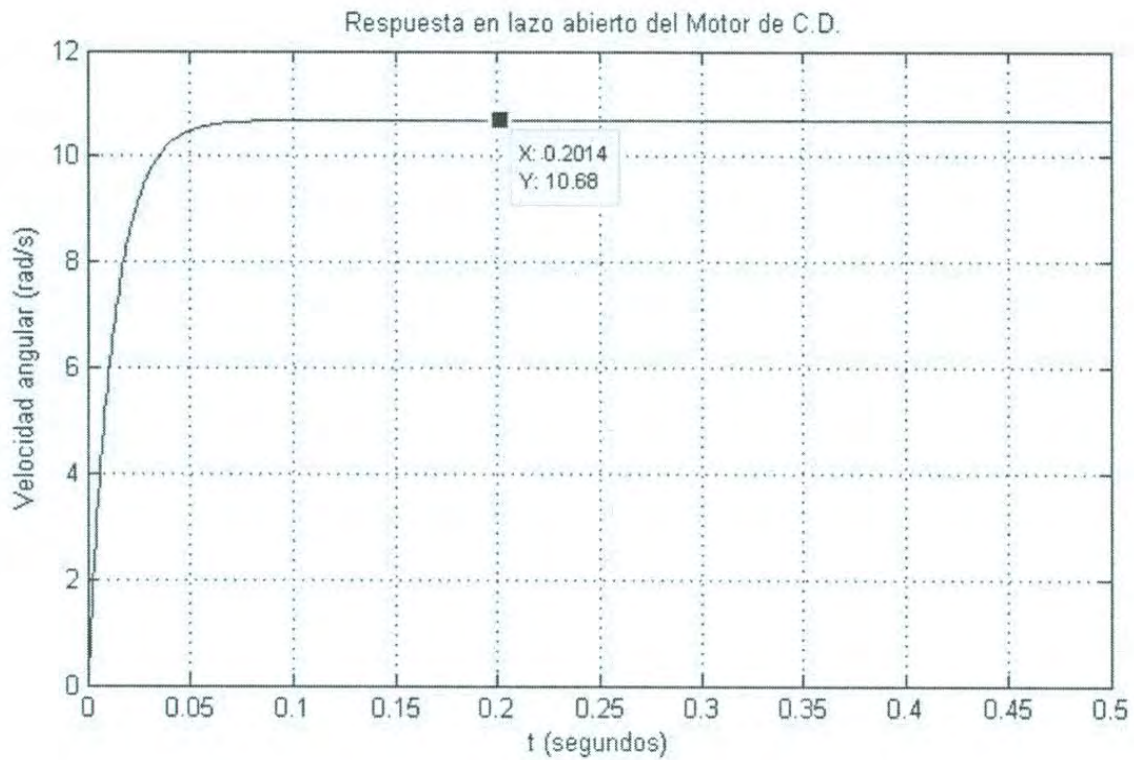


Figura 3.11. Velocidad angular del motor $\omega(t)$ ante una entrada de 12 V sin par de carga externa.

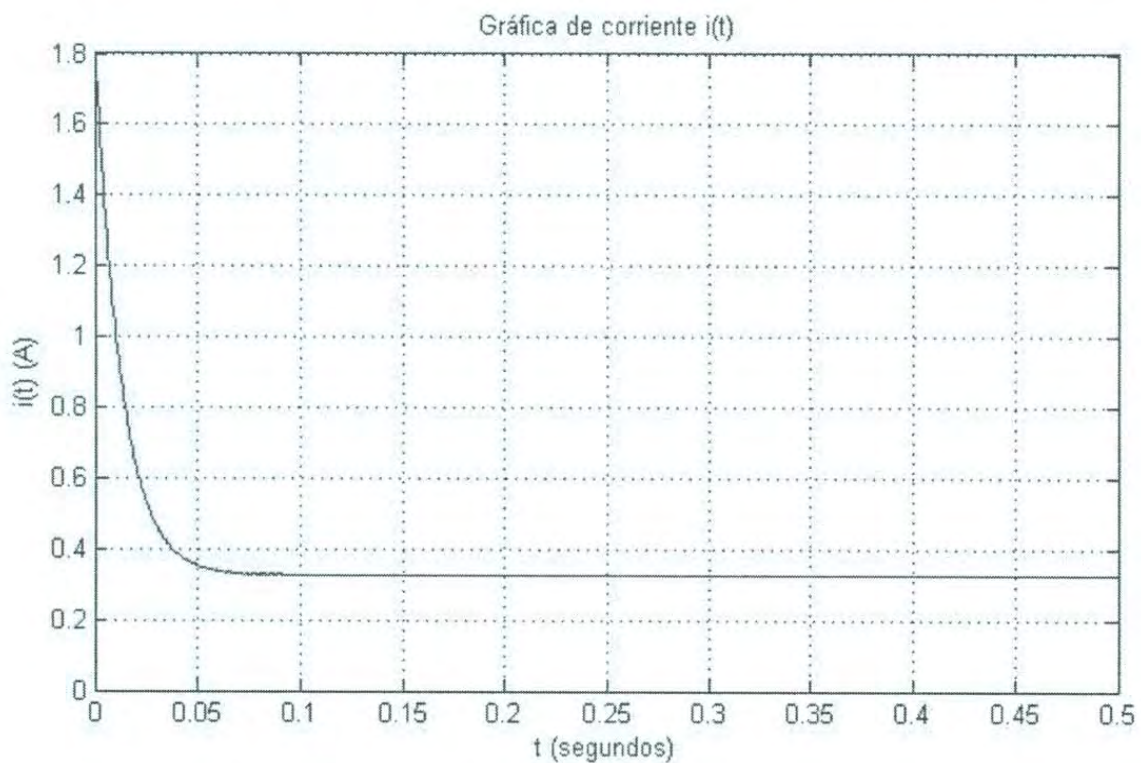


Figura 3.12 Corriente de armadura $i(t)$ del motor de c.d sin par de carga externa.

3.5 Diseño del sistema de control en el espacio de estados

3.5.1 Condición de Controlabilidad

Se dice que el sistema es controlable en el t_0 si se puede transferir de su estado inicial $X(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito. Por lo tanto se dice que el sistema es de estado completamente controlable si y sólo si los vectores de la matriz compuesta $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$, son linealmente independientes. Por lo tanto la matriz de controlabilidad \mathbf{M} se representa mediante (3.34).

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} | \mathbf{AB} | \dots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.34)$$

A continuación se comprobará la condición de controlabilidad en el modelo en espacio de estados del motor (3.32) y (3.33), la cual garantiza que el sistema es de estado completamente controlable y con esto poder aplicar el método de diseño de asignación de polos para el sistema de control en lazo cerrado con la finalidad de obtener una respuesta deseada (velocidad angular). Sustituyendo los valores de las matrices ya obtenidas en (3.34) se llega a (3.35).

Para poder comprobar la condición de controlabilidad es necesario verificar que el rango de la matriz de controlabilidad $n \times n$ sea n y que su determinante sea diferente de 0.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4170.264 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

En donde resulta que $|\mathbf{M}| = -1$ y rango $\mathbf{M} = 2$, por lo tanto el sistema es de estado completamente controlable, por lo que se procederá a diseñar un sistema de control por retroalimentación de estado utilizando el método de asignación de polos [2].

3.5.2 Diseño de localización de polos

Cada sistema de control en lazo cerrado tiene la característica asociada a un tipo de respuesta deseado en términos de factor de amortiguamiento, tiempo pico, tiempo de subida, tiempo de asentamiento y sobreimpulso [2], gracias a esto se tiene como objetivo el utilizar un sistema control en lazo cerrado, llámese control PID, compensación o control por

retroalimentación de estados. Por tanto, para cada tipo de respuesta se asocia las posiciones de los polos de la ecuación característica en el plano complejo, es entonces que si se manipulan dichos polos se obtiene un tipo de respuesta que cumpla con los requisitos de diseño del sistema de control ante una entrada escalón, como es el caso en este proyecto.

En el sistema de control por retroalimentación de estados para el control de la velocidad angular de un motor de CD, mediante el método de asignación de polos y utilizando la fórmula de Ackermann [2], se tiene como requisito que dicho sistema de control en lazo cerrado tenga los parámetros:

- Tiempo de asentamiento: $t_s \approx 0.04 \text{ seg.}$
- Sobreimpulso: $M_p \approx 4.3\%$.

La razón de seleccionar los parámetros anteriores para el diseño del controlador es debido a la respuesta de la velocidad del motor, que se consideraría apropiada gracias al tiempo de asentamiento que se propone, pero sobre todo que el sobreimpulso es pequeño y esto no ocasionaría ningún problema en el funcionamiento interno del motor, dichos valores de los parámetros forman parte del estudio en el desempeño de la tarjeta de control DS1104 en tiempo real. Para asignar los polos en un sistema de control con retroalimentación de estados se tendrá que hacer uso del análisis en el lugar geométrico de las raíces, de primera mano se sabe que el sistema que se pretende desarrollar deberá ser estable, y que al proponerse un sobreimpulso del 4.3% será subamortiguado [2], es así que se pretenderá obtener un par de polos complejos conjugados (ver figura 3.13).

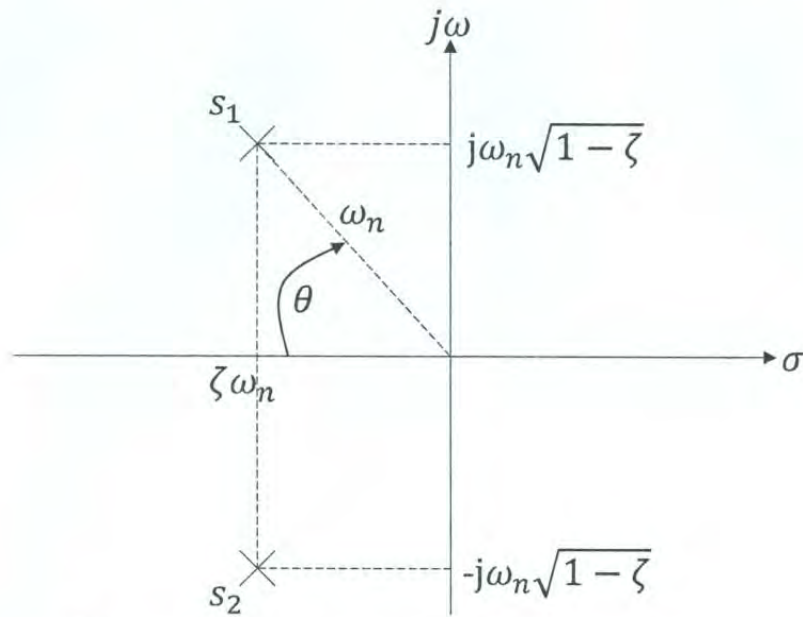


Figura 3.13. Gráfica de polos complejos conjugados.

Para la respuesta de un sistema de control de segundo orden subamortiguado se tienen las ecuaciones (3.36), (3.37), (3.38) y (3.39) [2]

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2 M_P}{\pi^2 + \ln^2 M_P}} \quad (3.36)$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (3.37)$$

$$\sigma = \zeta \omega_n \quad (3.38)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.39)$$

donde:

ζ : Factor de amortiguamiento.

M_P : Sobreimpulso.

t_s : Tiempo de asentamiento.

ω_n : Frecuencia natural no amortiguada.

ω_d : Frecuencia natural amortiguada.

Con esto solo quedara conocer la parte real σ e imaginaria $j * \omega_d$ del par de polos complejos conjugados. Sustituyendo los parámetros de diseño en (3.36) y (3.37) se obtienen (3.40) y (3.41).

$$\zeta = \frac{\ln^2 0.043}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 0.043}} = 0.707 \quad (3.40)$$

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta * 0.04} = 141.42 \text{ rad/s} \quad (3.41)$$

Ahora solo quedará ζ y ω_n en (3.42) para obtener los valores polos complejos conjugados que aseguran los parámetros de diseño especificados.

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j * \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad s_2 = -\zeta\omega_n - j * \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.42)$$

$$\therefore s_1 = -100 + j * 100 \quad s_2 = -100 - j * 100$$

Por último, se considerará en el diseño un tercer polo real y esto debido a que, las ecuaciones características de los dos tipos de sistemas de control que se utilizarán en este proyecto que son: control PID y control por retroalimentación de estados de 3er grado. El valor del tercer polo será 50 veces mayor que la parte real de los polos complejos conjugados ya obtenidos. La posición en la que se encuentran los polos en el planos s dominan en la característica de la respuesta del sistema, por lo tanto, el localizar el tercer polo alejado del eje imaginario no tendrá algún efecto en la respuesta esperada según el diseño de control.

Posicionar dichos polos en el plano s de la forma antes planteada dominan en la característica de la respuesta y se trata que el tercer polo este más alejado del eje imaginario, a estos polos se le denominan polos complejos conjugados dominantes [2]. Con lo anterior dicho se selecciona el valor del tercer polo en (3.43).

$$s_3 = -5000 \quad (3.43)$$

3.5.3 Método de asignación de polos para el diseño del sistema de control en el espacio de estados

Las variables de estado del sistema de control del motor son medibles, como variables de estado se tienen: la velocidad que es obtenida utilizando encoder incremental de efecto hall, y la variable de estado de corriente eléctrica que es medida utilizando el sensor ACS711, por lo que hasta este punto es factible poder realizar el sistema de control por retroalimentación de estados. Una vez comprobado que el sistema es de estado completamente controlable sólo queda realizar el diseño del servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene un integrador (figura 3.14) [2], ya que al analizar la función de transferencia del motor se llega a la conclusión que esta no tiene un polo en el origen, por lo que será necesario insertar un integrador en el camino directo entre el comparador de error y la planta. Dicho integrador tendrá la función de corregir el error en estado estacionario del sistema.

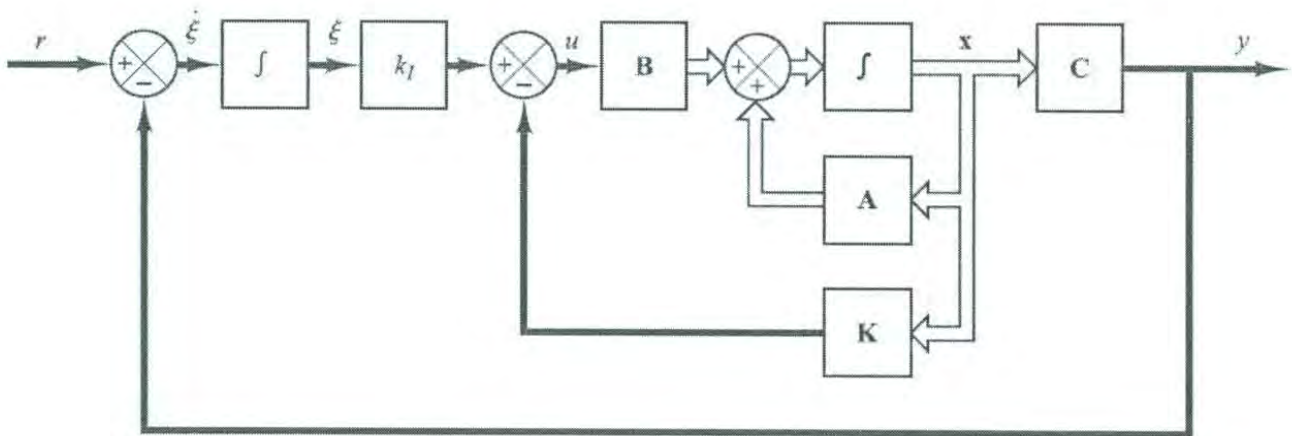


Figura 3.14. Diagrama de bloques del servosistema de tipo 1.

La dinámica del sistema se describe mediante la ecuación de estado (3.44)

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \xi'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.2712 & 467.5469 & 0 \\ -575.375 & -4156.25 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 625 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (3.44)$$

La variable de estado $x_1(t)$ es la variable de salida y representa la velocidad angular del motor $\omega(t)$. Al diseñar un sistema de control que sea asintóticamente estable, se habla que $x(\infty)$, $\xi(\infty)$ y $u(\infty)$ tiendan a valores constantes, por tanto teniendo $r(t)$ como una entrada

escalón que representa velocidad angular de referencia, se llega a la ecuación de estado del error del sistema de control (3.45).

$$\begin{bmatrix} x'_{e1}(t) \\ x'_{e2}(t) \\ \xi'_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.2712 & 467.5469 & 0 \\ -575.375 & -4156.25 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{e1}(t) \\ x_{e2}(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 625 \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (3.45)$$

donde

$$u_e(t) = -\mathbf{K}x_e(t) + k_I\xi_e(t)$$

Como ya se ha mencionado, el objetivo principal de poder realizar el sistema de control en el espacio de estados es encontrar los valores de la matriz de ganancias de realimentación del estado \mathbf{K} , y dicha matriz se encuentra a partir del método de asignación de polos que se desarrolla a partir de los requerimientos de diseño del sistema en lazo cerrado. Por medio de la realimentación se consigue modificar la posición de los polos, pero no de los ceros y esto se muestra en el cambio de la ecuación característica resultante. Para obtener los valores de la matriz \mathbf{K} se utilizará la fórmula de Ackermann. Antes de obtener los valores de la matriz de ganancias \mathbf{K} se determina que el rango de la matriz \mathbf{P} mostrada en (3.46) es 3, esto se determina haciendo uso de Matlab, por lo que se concluye una vez más que el sistema es de estado completamente controlable y es posible la colocación arbitraria de polos para el desarrollo de un servosistema.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -14.2712 & 467.5469 & 0 \\ -575.375 & -4156.25 & 625 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Se muestra el programa en Matlab utilizado para encontrar los valores de la matriz de ganancias \mathbf{K} del sistema de control realimentado, ver figura 3.15.

```

%Programa que obtiene las ganancias de retroalimentación de estados
% utilizando el comando acker.
A=[-14.2712 467.5469; -575.375 -4156.25]; %Matriz de estado.
B=[0 ; 625]; %Matriz de entrada.
C=[1 0]; %Matriz de salida.
D=0; %Valor de transmisión directa
Ae=[A [0 0]';-C 0]; %Matriz de estado resultante.
Be=[B;0]; %Matriz de entrada resultante.
Ce=[C 0]; %Matriz de salida resultante.
De=0;
p1=-100+1i*100; %Polo complejo conjugado
p2=-100-1i*100; %Polo complejo conjugado
p3=-5000; %Polo adicional
Ke=acker(Ae,Be,[p1 p2 p3]); %Comando para obtener K.

Ke =

2.3167 1.6472 -342.2117

```

Figura 3.15. Programa para encontrar la matriz de ganancia **K** en Matlab.

Los valores de la matriz de ganancia **K** de realimentación son (3.47)

$$\mathbf{K} = [2.3167 \quad 1.6472 \quad -342.2117] \quad (3.47)$$

Una vez encontrados los valores de las ganancias de retroalimentación **K** y el valor de k_I , la respuesta a un escalón (velocidad angular de referencia) del motor se puede obtener resolviendo la ecuación del sistema de control por retroalimentación de estados (3.48) y (3.49).

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.2712 & 467.5469 & 0 \\ -2023.3125 & -5185.75 & -213882.3125 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3.48)$$

La salida del sistema es x_1 (3.49).

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \xi \end{bmatrix} + [0] r \quad (3.49)$$

Haciendo uso de Simulink se realiza la simulación del sistema de control por retroalimentación de estados del motor, se tiene una entrada un escalón de 8 *rad/s* (velocidad de referencia) (ver figura 3.16) con un tiempo de simulación de 0.2 segundos y un tiempo de paso fijo (tiempo de muestreo) de 0.0001 segundos.

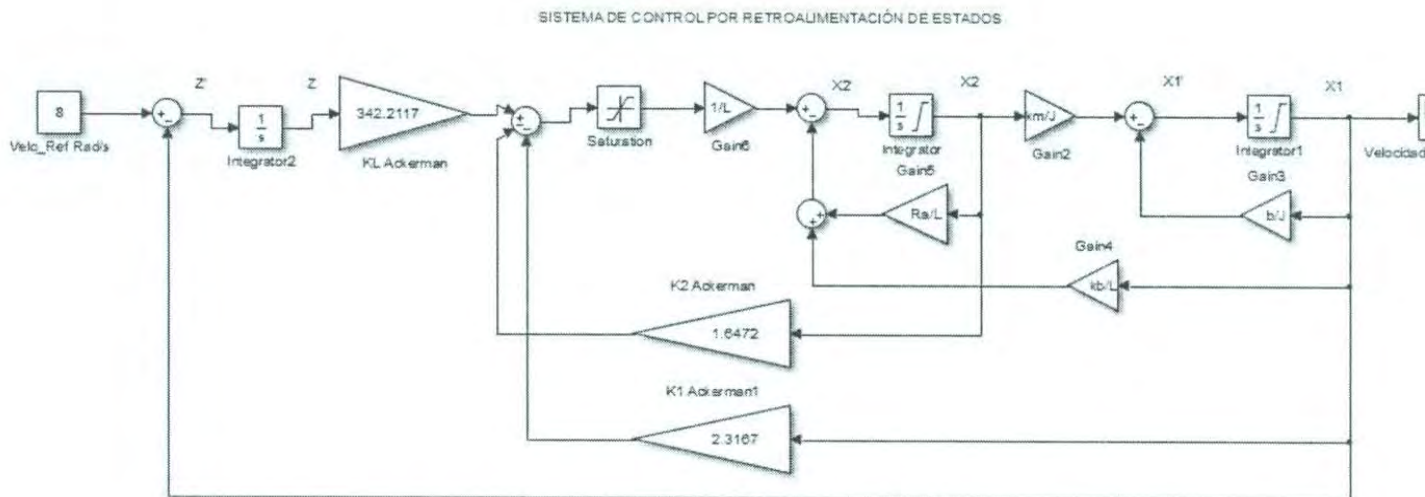


Figura 3.16. Diagrama de bloques de la simulación realizada del sistema de control en Simulink.

La figura 3.17 muestra la respuesta del sistema de control con retroalimentación de estados utilizando una matriz de ganancias de realimentación de $\mathbf{K} = [2.3167 \ 1.6472 \ -342.2117]$.

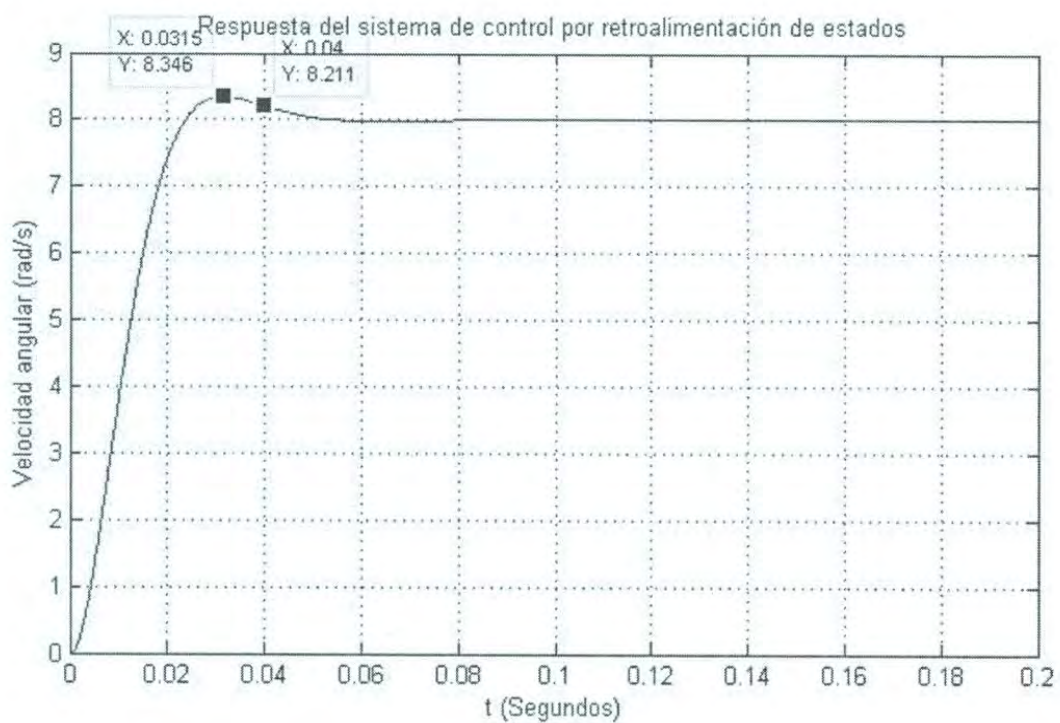


Figura 3.17. Respuesta de la variable de salida del sistema de control ante una entrada escalón de 8 rad/s.

En la figura 3.17 se observa que el sistema de control cumple con las especificaciones de diseño en respuesta, ya que el valor máximo o el pico máximo de velocidad es 8.346 rad/s, el valor del sobreimpulso que se obtiene en la simulación es:

$$M_P = \frac{8.346 - 8}{8} \times 100\% = 4.325\%$$

El valor de la velocidad en $t = 0.04s$ en la simulación es de $\omega = 8.211 \text{ rad/s}$ con lo que se cumple el criterio del 2%, el tiempo de establecimiento especificado es de $t \approx 0.04s$.

En la figura 3.18 se muestra la función de la variable de estado de corriente de armadura $i(t)$ del motor en el dominio del tiempo cuando se tiene por entrada un escalón de velocidad angular de referencia de 8 rad/s , se aprecia que la corriente máxima (pico máximo de corriente) en la transitorio de dicha respuesta es 1.2 A , esto sin par de carga externo; es decir sin perturbaciones.

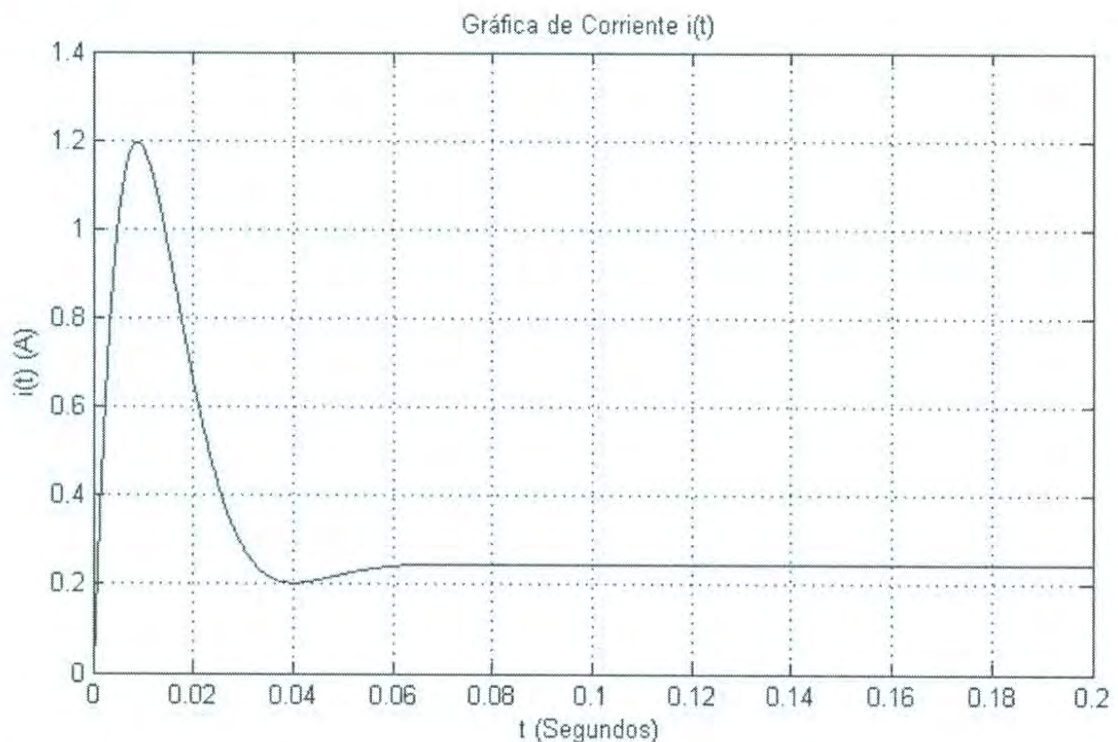


Figura 3.18. Corriente de armadura del motor en el sistema de control por retroalimentación de estados.

3.6 Diseño del Control PID

La otra acción de control que se implementa en este proyecto es el control PID, y se diseña haciendo uso del método de asignación de polos [4]. Para llevar a cabo este método se necesita que el modelo de la planta (motor de cd) y sus parámetros sean conocidos. Como ya se ha mencionado, muchas de las propiedades de un sistema de control en lazo cerrado se expresan por sus polos, es entonces que se pretende diseñar un controlador de tipo PID que da un sistema en lazo cerrado con los polos en las posiciones deseadas para un tipo de respuesta especificado. Antes de iniciar con el diseño del controlador PID se encontrará la función de transferencia del sistema de control en lazo cerrado (figura 3.19) teniendo como entrada una señal de tipo escalón que representa velocidad angular de referencia. Para llegar a la expresión de la función de transferencia de todo el sistema de control retroalimentado se parte de la función de transferencia del controlador PID (3.50) y de la función de transferencia del motor de cd (3.51), para después sustituirse en la función de transferencia de lazo cerrado dada por la ecuación (3.53).

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (3.50)$$

$$G_p(s) = \frac{\omega(s)}{U_s(s)} = \frac{\frac{K_m}{LJ}}{s^2 + \frac{(RJ + bL)}{LJ}s + \frac{K_m K_b + bR}{LJ}} \quad (3.51)$$

Donde

$$b_0 = \frac{K_m}{LJ}$$

$$a_1 = \frac{RJ + bL}{LJ}$$

$$a_0 = \frac{K_m K_b + bR}{LJ}$$

Sustituyendo b_0 , a_0 y a_1 en (3.51) da como resultado (3.52)

$$\frac{\omega(s)}{U_s(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.52)$$

$$\frac{\omega(s)}{\omega^*(s)} = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} \quad (3.53)$$

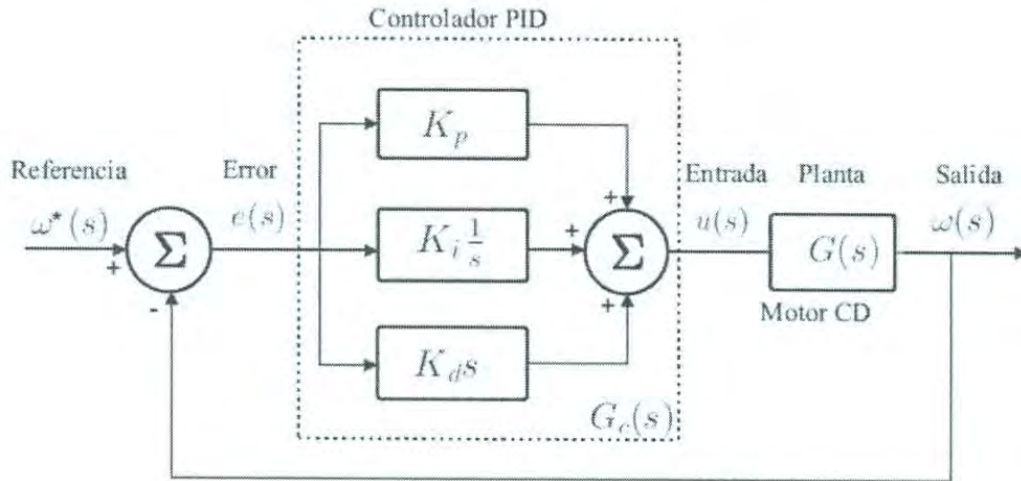


Figura 3.19. Sistema de control en lazo cerrado utilizando un controlador PID.

Sustituyéndose las expresiones de $G_p(s)$ y $G_c(s)$ en (3.53) se llega a la función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control del motor de corriente directa (3.54), en donde se observa que, dicha función de transferencia posee tres polos en su polinomio característico. Para este método no se tomarán en cuenta en el diseño los dos ceros que (3.54) tiene.

$$\frac{\omega(s)}{\omega^*(s)} = \frac{b_0(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 + (a_1 + b_0 K_d)s^2 + (a_0 + b_0 K_p)s + b_0 K_i} \quad (3.54)$$

El polinomio característico de (3.54) se presenta en (3.55).

$$s^3 + (a_1 + b_0 K_d)s^2 + (a_0 + b_0 K_p)s + b_0 K_i \quad (3.55)$$

Ahora se considerará el polinomio característico deseado a las especificaciones de diseño, en donde se tienen dos polos complejos conjugados dominantes y un tercer polo real, por lo que el denominador característico es (3.56), y se igualarán los coeficientes de potencias iguales de s de (3.55) para encontrar las expresiones de las ganancias del controlador PID, como se muestra a continuación.

$$den(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_{n0}s + \omega_n^2)(s + \alpha\omega_{n0}) \quad (3.56)$$

Los siguientes parámetros fueron definidos en base a los requerimientos de diseño del sistema en donde:

ω_{n0} : Frecuencia natural no amortiguada.

ζ : Factor de amortiguamiento relativo.

α : Factor de escala para localizar el polo real.

A continuación se igualan los coeficientes de las potencias de s de (3.55) y (3.56) para obtener las expresiones de las ganancias del controlador PID (K_d , K_P y K_i) (3.57).

$$\begin{aligned} K_d &= \frac{(\alpha + 2\zeta)\omega_{n0} - a_1}{b_0} \\ K_P &= \frac{(2\alpha\zeta + 1)\omega_{n0}^2 - a_0}{b_0} \\ K_i &= \frac{\alpha\omega_{n0}^3}{b_0} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Sustituyendo los valores de cada uno de los parámetros que se muestran a continuación en (3.57),

$$\begin{aligned} \omega_{n0} &= 141.42 \text{ rad/s} \\ \zeta &= 0.707 \\ \alpha &= 50 \\ a_0 &= 328332.9101 \\ a_1 &= 4170.264 \\ b_0 &= 292219.4007 \end{aligned}$$

Se obtienen los valores de las ganancias de la acción de control PID que permite dar una respuesta en velocidad angular del motor de acuerdo a las especificaciones de diseño que se plantearon.

$$K_d = 0.00352 \quad K_P = 2.3663 \quad K_i = 342.147$$

Se simulará el sistema de control en lazo cerrado en Simulink con los valores obtenidos para el controlador PID y esto para verificar si los parámetros de la respuesta en el dominio del tiempo son aproximadamente iguales a los especificados en el diseño (ver figura 3.20). El

tiempo de paso fijo utilizado en la simulación es de 0.5 segundos. Se tiene los rangos de valores de salida del controlador PID de 12 como límite superior y 0 como límite inferior.

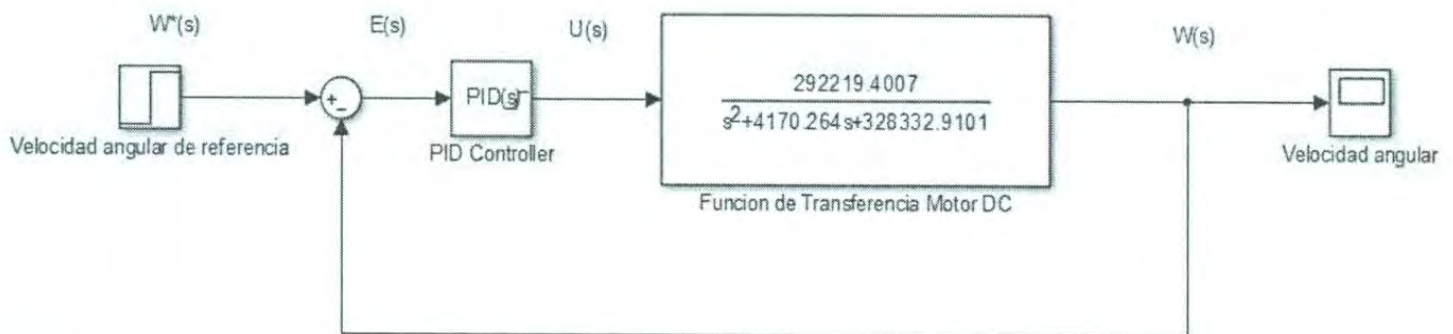


Figura 3.20. Simulación del sistema de control en lazo cerrado para el motor de cd en Simulink.

Ante una entrada escalón de 8 rad/s el sistema de control da como respuesta (figura 3.21).

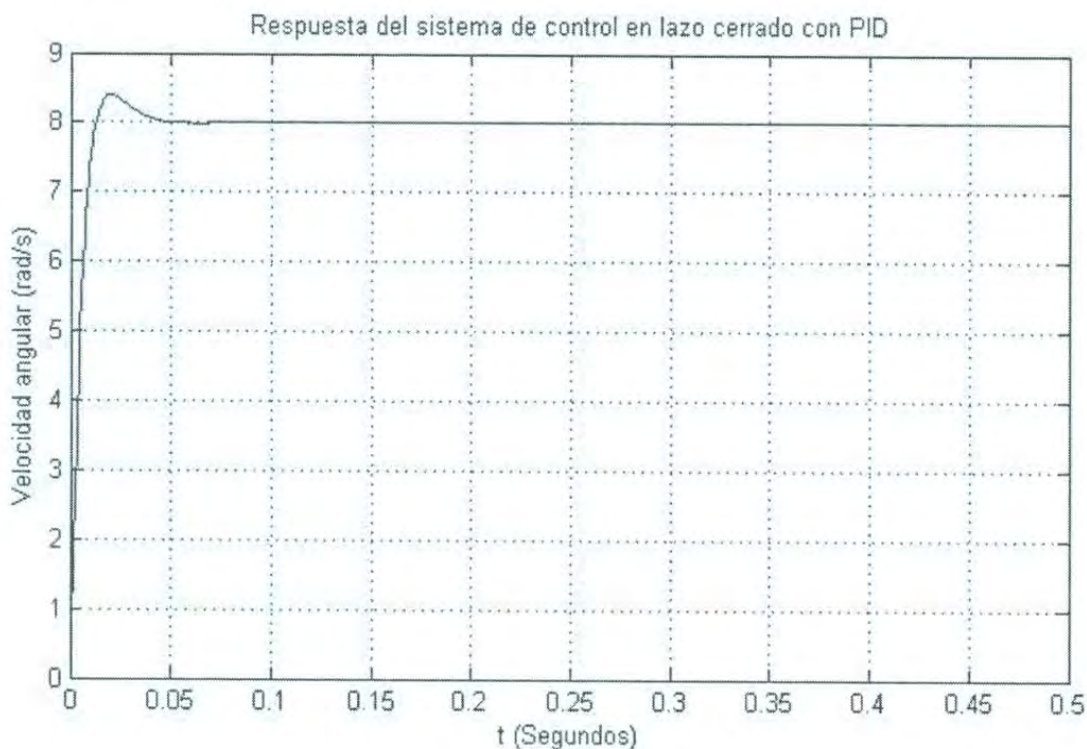


Figura 3.21. Respuesta del sistema de control para el motor utilizando una acción de control PID.

En la figura 3.22 se puede apreciar los parámetros de respuesta del sistema de control de lazo cerrado con PID.

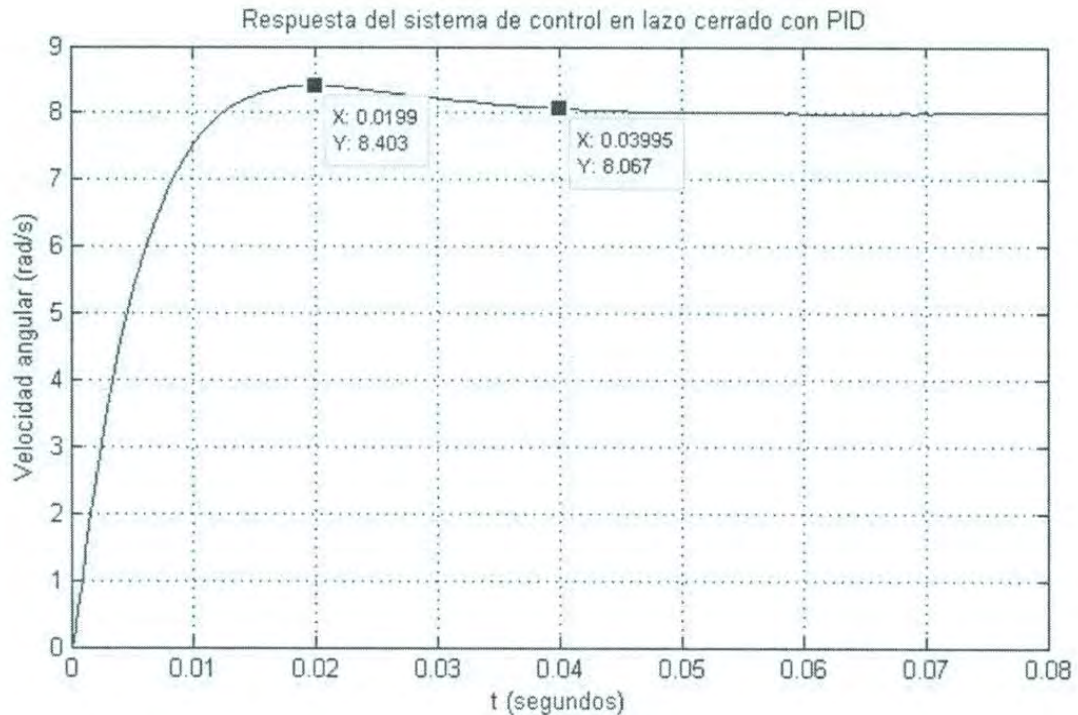


Figura 3.22. Respuesta del sistema de control en lazo cerrado con tiempo de paso de 0.08s

El sistema de control cumple aproximadamente con las especificaciones de diseño en respuesta, ya que el valor máximo o el pico máximo de velocidad es de 8.403 rad/s y por tanto, el valor del sobreimpulso que se obtiene en la simulación es:

$$M_p = \frac{8.403 - 8}{8} \times 100\% = 5\%$$

El valor de la velocidad en $t = 0.04s$ en la simulación es de $\omega = 8.067 \text{ rad/s}$ por lo tanto, se cumple con el criterio del 2% en el que el tiempo de establecimiento especificado es de $t \approx 0.04s$.

3.7 Implementación en tiempo real de los sistemas de control de lazo cerrado en el Procesador Digital de Señales DS1104

La implementación en tiempo real de los dos controladores: Control por retroalimentación de estados y la acción de control PID en la tarjeta DS1104 para el control de la velocidad angular del motor de CD pololu modelo 1446.

3.7.1 Sensores y acondicionamiento de señales

En la realización del sistema de control en lazo cerrado en donde se tiene como planta el motor de CD, se tiene que hacer uso de dos sensores para la retroalimentación de la variable de salida (velocidad en el caso del control PID) y de las variables de estados (velocidad y corriente en el caso del control por retroalimentación de estados). Los sensores a utilizar son: encoder incremental de efecto hall [13] para la medición de la velocidad del motor y el sensor ACS711 [14] para la medición de corriente en la armadura del motor. El encoder incremental de efecto Hall utilizado, lee la rotación de un disco magnético acoplado al rotor del motor. Este disco posee imanes de neodimio colocados lo más cercano a los dos sensores hall digitales, este tipo de sensor es más recomendado que aquellos encoders ópticos (IR) debido a que no les provoca las alteraciones los cambios en el ambiente (por ejemplo la luz ambiental).

El encoder de cuadratura de efecto hall tiene una resolución de 16 pulsos por revolución (tomando en cuenta uno de los canales, ya sea A o B) del rotor del motor; sin embargo, hay que dejar en claro que el motor utilizado posee una caja de engranes reductora 100:1 y que el disco del encoder está acoplado en el rotor del motor, por lo que se tendrían 1600 pulsos por revolución del eje de la caja reductora. En conjunto con los flancos de subida y bajada de cada uno de los canales A y B se llegan a obtener hasta cuatro veces el número de pulsos, con lo que se llegaría a 64 en el eje del motor o 6400 conteos en el eje de la caja reductora por revolución. Los canales A y B del encoder dan a la salida señales de ondas cuadradas de 0V hasta Vcc (voltaje de alimentación del encoder) desfasadas 90°, el voltaje de alimentación del encoder es de 5V utilizando una fuente externa. La frecuencia de transición de las ondas cuadradas indican la velocidad del motor, y el orden de transición entre ellas indican la dirección del movimiento del eje o rotor del motor.

En la figura 3.23 se muestra el circuito del encoder de efecto Hall conectado al Canal 1 de Encoder Incremental de la DS1104 y en la figura 3.24 se presenta el encoder acoplado al motor que se utiliza en el proyecto.

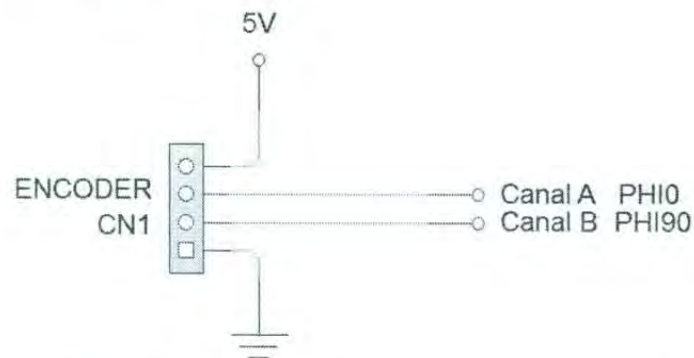


Figura 3.23. Circuito de conexión del encoder en el Canal 1 de la DS1104.

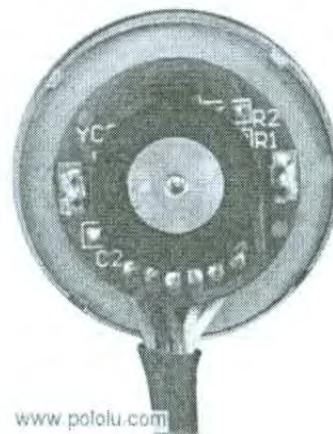


Figura 3.24. Encoder de efecto Hall incremental de 64 CPR.

Para convertir la frecuencia de las ondas cuadradas del canal A y B en un valor de velocidad angular (rad/s) se comienza por el hecho de que en una revolución por segundo (rev/s) del eje de la caja reductora del motor, en cualquiera de los canales ya sea A o B envía 1600 pulsos por segundo, es decir, se lee 1600 Hz en dichos canales, por lo que con esto se obtiene una relación lineal entre la frecuencia de las señales cuadradas y la velocidad angular en rad/s (3.58).

$$\omega_{rad} = \frac{2\pi * f}{1600} \quad (3.58)$$

donde:

ω_{rad} : Velocidad angular del motor en rad/s.

f : Frecuencia de la onda cuadrada de uno de los canales del encoder.

Al momento de realizar la lectura en Simulink (utilizando el bloque del canal del encoder incremental 1) de los pulsos enviados por el encoder y ser adquiridos por el procesador digital de señales (DS1104), se propone hacer uso de un filtro digital IIR pasa bajo diseñado por transformación bilineal [6] con el fin de promediar los datos obtenidos y eliminar las frecuencias no deseadas.

Los parámetros de diseño del filtro digital son:

- Frecuencia de corte $f_c = 100 \text{ Hz}$.
- Tiempo de muestreo $T = 0.001 \text{ s}$.

Por lo tanto, tomando expresión de la función de transferencia $F(z)$ (2.129) del capítulo 2 y sustituyendo los parámetros de diseño propuestos del filtro digital se llega a (3.59). La frecuencia de corte f_c fue determinada en 100 Hz debido a que en dicha frecuencia se evitaría el problema del *aliasing* [4].

$$F(z) = \frac{z^{-1} + 1}{4.183091z^{-1} - 2.183091} \quad (3.59)$$

El sensor a utilizar para la medición corriente es el sensor ACS711 de tipo efecto Hall que tiene un factor de escala de 136 mV/A , el voltaje de salida que da el sensor es lineal con respecto a la corriente que pasa por sus canales (IP+ e IP-), además cuando la corriente leída es de 0 A , el sensor entrega un voltaje de salida $V_{out} = 2.5 \text{ V}$. Es entonces que con esta información se obtiene la ecuación (3.60) en términos de las variables de voltaje de salida y corriente eléctrica leída por el sensor.

$$V_{out} = 2.5 + \frac{5}{36.7} i \quad (3.60)$$

Una vez obtenida la expresión matemática que relaciona el voltaje de salida del sensor con respecto a la corriente leída (corriente de armadura del motor) se procede a acondicionar dicha señal de voltaje empleando un filtro de Butterworth pasa-bajas de segundo orden [5], esto es con el propósito de evitar el *aliasing* al momento de muestrear la señal en canal analógico de la tarjeta DS1104. Al realizar pruebas con el sensor se pudo determinar que la señal de voltaje que entrega contiene bastante ruido y que por lo tanto las mediciones eran muy inexactas cuando se hacía pasar una corriente muy pequeña, es entonces la razón del porque implementar el filtro de Butterworth analógico pasa-bajas haciendo uso de un amplificador operacional y además también implementar un filtro digital IIR [6] en Simulink. Hay que dejar en claro que la razón de utilizar el filtro analógico es para atenuar las señales de frecuencias altas evitando el *aliasing* y así también, el uso del filtro digital en este caso tiene como propósito promediar los datos obtenidos por la tarjeta DS1104 para la reducción del error.

A continuación se presenta el diseño del filtro de Butterworth de segundo orden:

Se selecciona una frecuencia de corte $f_c = 100 \text{ Hz}$ para el filtro analógico ya que se recomienda utilizar una frecuencia diez veces menor que la frecuencia de muestreo en la tarjeta de control y esto con el fin de evitar el fenómeno del *aliasing*, por lo tanto se atenúa y elimina las bandas de frecuencias mayores a 100 Hz que corresponden a la señal del ruido. Una vez definida la frecuencia de corte se procede a realizar los cálculos para definir los valores de las resistencias y capacitores a emplear.

Primero se selecciona el valor del capacitor C_1 en $0.1 \mu\text{F}$ y después se hace $C_2 = 2C_1$, por lo que se obtiene $C_2 = 0.2 \mu\text{F}$. Ahora, para obtener el valor de la resistencia R_1 y R_2 en donde $R_1 = R_2 = R$ se emplea la ecuación (3.61).

$$R = \frac{0.707}{2\pi f_c C_1} \quad (3.61)$$

$$\therefore R = 11,252\Omega$$

Una vez obtenido el valor de la resistencia R , sólo queda encontrar el valor de la resistencia de realimentación negativa R_f como se muestra a continuación.

$$R_f = 2R \quad \therefore \quad R_f = 22,504 \, \Omega$$

En la figura 3.25 se observa el circuito del filtro activo pasa-bajas de Butterworth de segundo orden utilizado para acondicionar la señal enviada por el sensor ACS711, el voltaje de alimentación para el circuito es de 5V.

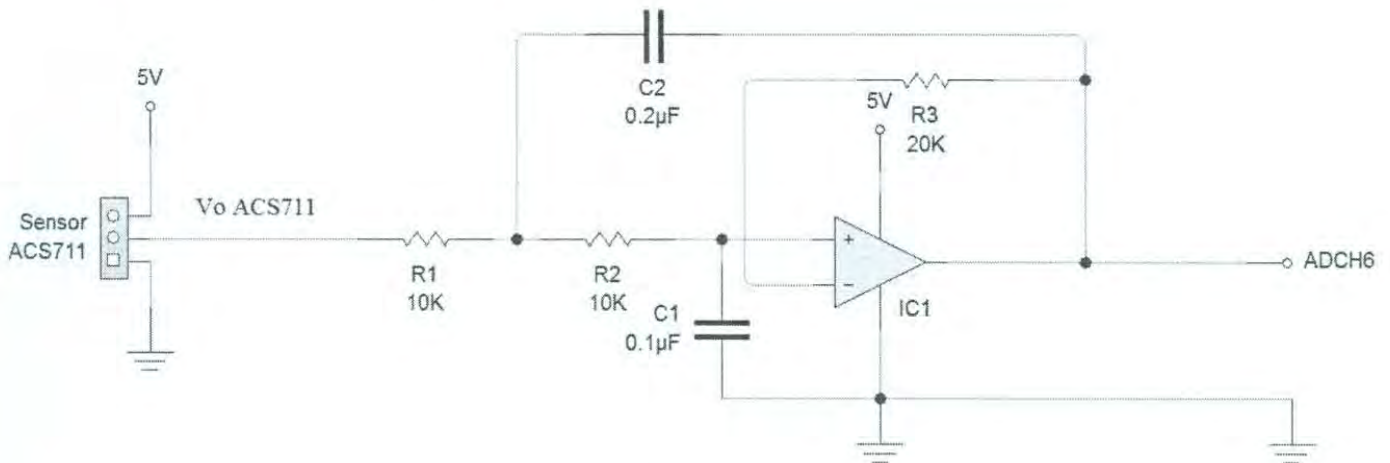


Figura 3.25. Circuito del Filtro de Butterworth pasa-bajas de segundo orden utilizado para acondicionar la señal del sensor ACS711 (Diseñado en Livewire).

Como se observa en la figura 3.25, se modificaron los valores de las resistencias obtenidas a los valores comerciales y esto trae consigo un ligero cambio en la frecuencia de corte f_c que no afecta en lo más mínimo en la precisión de la señal filtrada al momento de implementarlo. El amplificador operacional utilizado en la práctica es el C.I. LM358 y los capacitores utilizados son de tipo cerámicos. El filtro digital IIR que se utiliza para acondicionar o promediar los datos obtenidos por el canal analógico proveniente del sensor ACS711 es el mismo que el empleado para los valores del encoder incremental ya que al momento de realizar las pruebas de experimentación se encontró que la frecuencia de corte seleccionada era idónea para ser empleada también para la señal del sensor, además de ser eficiente para eliminar los datos de frecuencias altas y reducir el error, por lo tanto la función de transferencia del filtro digital diseñado por transformación bilineal es (3.62).

$$F(z) = \frac{z^{-1} + 1}{4.183091z^{-1} - 2.183091} \quad (3.62)$$

3.7.2 Etapa de potencia

Al hacer uso de un motor eléctrico se debe de cumplir con los requerimientos de potencia (voltaje - corriente) para su correcto funcionamiento, es por eso que se diseña una etapa de potencia haciendo uso de un transistor BJT TIP121 de tipo Darlington debido a su elevada ganancia β . El transistor TIP121 deberá de operar en la región de saturación, es entonces que, la resistencia elegida para garantizar la saturación del transistor es de 220Ω , el valor de esta resistencia ha sido obtenida mediante cálculos en proyectos pasados es por eso que la experiencia dicta que funcionará en la forma esperada. El voltaje utilizado para alimentar la etapa de potencia es de $12V$ que es la tensión nominal del motor de corriente directa. El circuito de potencia que se utiliza se muestra en la figura 3.26, en donde la base del transistor recibirá una señal PWM que representa la señal de salida de la acción de control (ya sea el control por retroalimentación de estados o el control PID) dada por el canal ST2PWM de la DS1104.

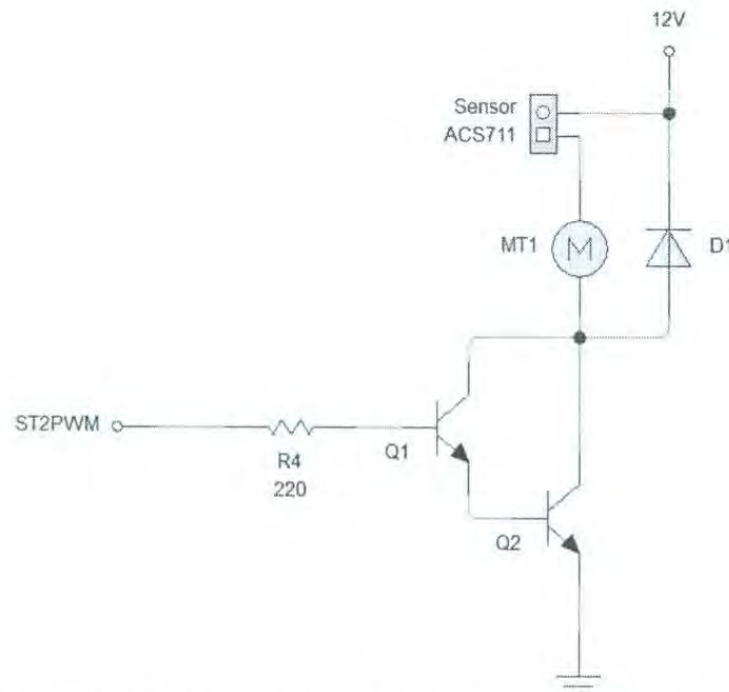


Figura 3.26. Circuito de potencia del sistema de control utilizando el transistor TIP121 (Diseñado en Livewire).

Usando una señal PWM de alta frecuencia (1kHz – 10kHz) como salida del controlador, se tiene la característica que al variar su ciclo de trabajo se tendría un voltaje promedio equivalente, con lo que se modifica la potencia de la señal y esto trae como resultado un cambio en la velocidad del motor. Hay que recordar que el PWM presenta dos valores, en alto y bajo (5V - 0V) por lo que existe una relación lineal entre el ciclo de trabajo y el voltaje promedio resultante como se muestra en la ecuación (3.63).

$$V_{\text{prom}} = V_c \cdot k \quad (3.63)$$

Donde:

V_c : Voltaje del PWM.

k : Ciclo de trabajo del PWM (rango 0-1).

El sensor ACS711 es conectado en serie con el motor como se muestra en la figura 3.26 pasando la corriente entre sus canales (IP+ e IP-) y teniendo un voltaje de salida que va directamente al filtro pasa-bajas como se muestra en el circuito de la figura 3.25. Se utiliza un diodo 1N7001 en paralelo (de marcha libre) con la bobina del motor, para proteger el circuito electrónico de la corriente inductiva.

3.7.3 Diagrama de bloques en Simulink para los sistemas de control en Tiempo Real

Una vez diseñada la etapa de acondicionamiento de señales, la etapa de potencia, y simulados los algoritmos de control (control por retroalimentación de estado y control PID), lo que sigue es implementar en Simulink dichos algoritmos para la puesta en marcha en la tarjeta DS1104 del control de velocidad angular en tiempo real del motor de corriente directa. Para describir el funcionamiento de todo el sistema e identificar cada uno de los elementos que lo conforman se muestra el diagrama de bloques en la figura 3.27.

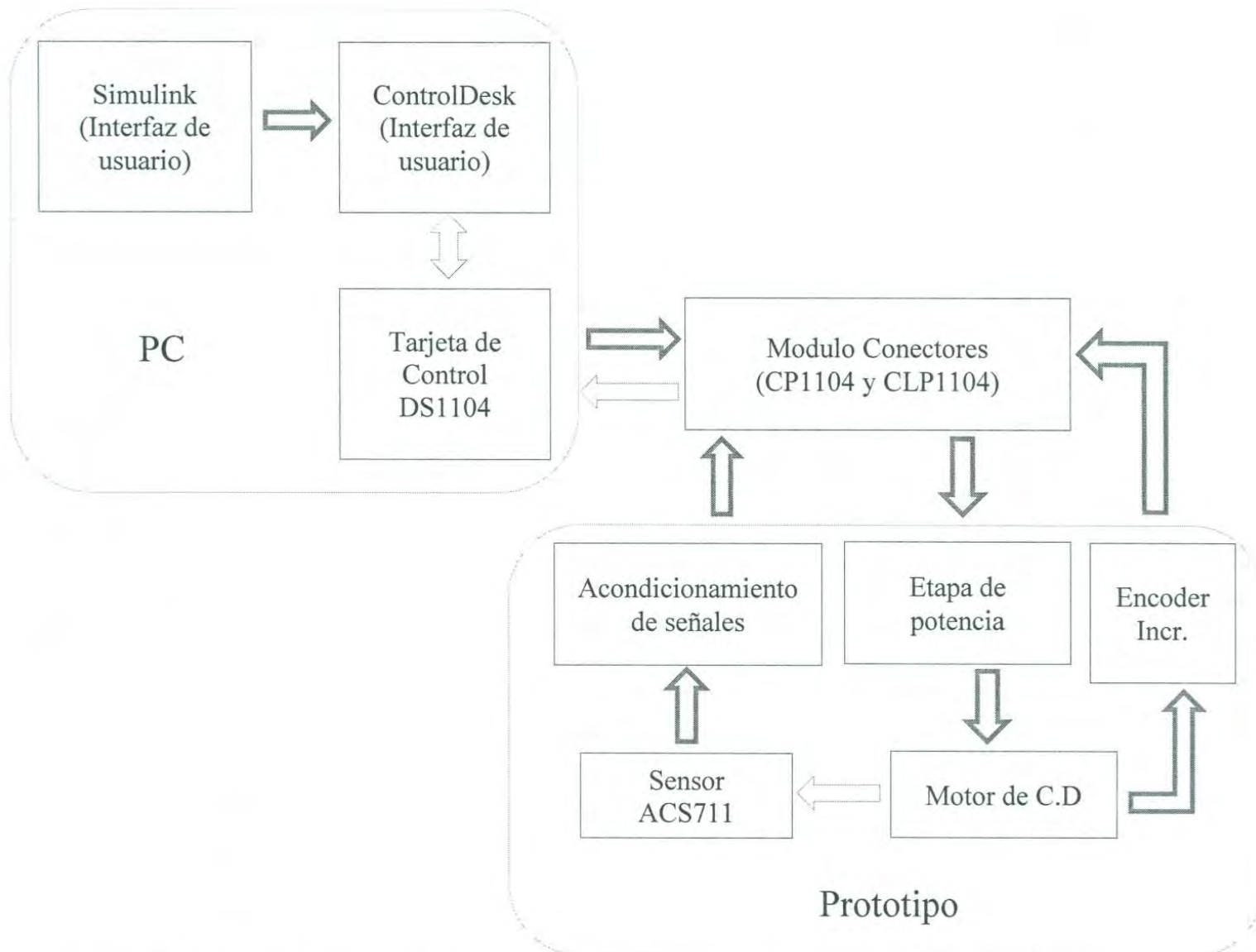


Figura 3.27. Diagrama de bloques de cada uno de los elementos que conforma al sistema de control.

Para llevar a cabo la implementación es necesario identificar los tipos entradas y salidas (sean analógicas o digitales) de los dos sistemas de control y una vez identificados definir los puertos o canales de la tarjeta DS1104 que serán utilizados. A continuación se presentan las entradas y salidas para el control por retroalimentación de estados y para el control PID.

Entradas y salidas del sistema de control por retroalimentación de estados:

Entradas.

- Señal de voltaje del sensor ACS711 para la medición de corriente del motor. Tipo: analógica.
- Ondas cuadradas enviadas por el Encoder Incremental de efecto Hall para la medición de velocidad angular del motor. Tipo: digital.

Salidas.

- Señal de tipo PWM para el control de la velocidad angular del motor. Tipo: digital.

Entradas y salidas del sistema de control PID:

Entradas.

- Ondas cuadradas enviadas por el Encoder Incremental de efecto Hall para la medición de velocidad angular del motor. Tipo: digital.

Salidas.

- Señal de tipo PWM para el control de la velocidad angular del motor. Tipo: digital.

Para la lectura de la señal de voltaje del sensor ACS711 se deberá usar el convertidor analógico digital de la DS1104, por tanto se selecciona el canal 6 ADCH6 de resolución de 12-bit, dicho canal se identifica en la librería rtilib1104 de Simulink como el bloque DS1104ADC_C6.

Para la lectura de los pulsos cuadrados enviados por el encoder incremental se hace uso del canal 1 de interface para encoders incrementales que contiene la tarjeta DS1104. Los bloques que se utilizan del canal 1 en la programación en Simulink son: DS1104ENC_SETUP y DS1104ENC_POS_C1 de la librería rtilib1104.

Para la escritura del PWM de la señal de control se hace uso del canal 1 ST2PWM. El bloque que representa a dicho canal para la generación del PWM es el DS1104SL_DSP_PWM y se encuentra en la librería rtilib1104 de Simulink, el bloque se configura para generar una señal PWM de 1kHz de frecuencia en el canal 1.

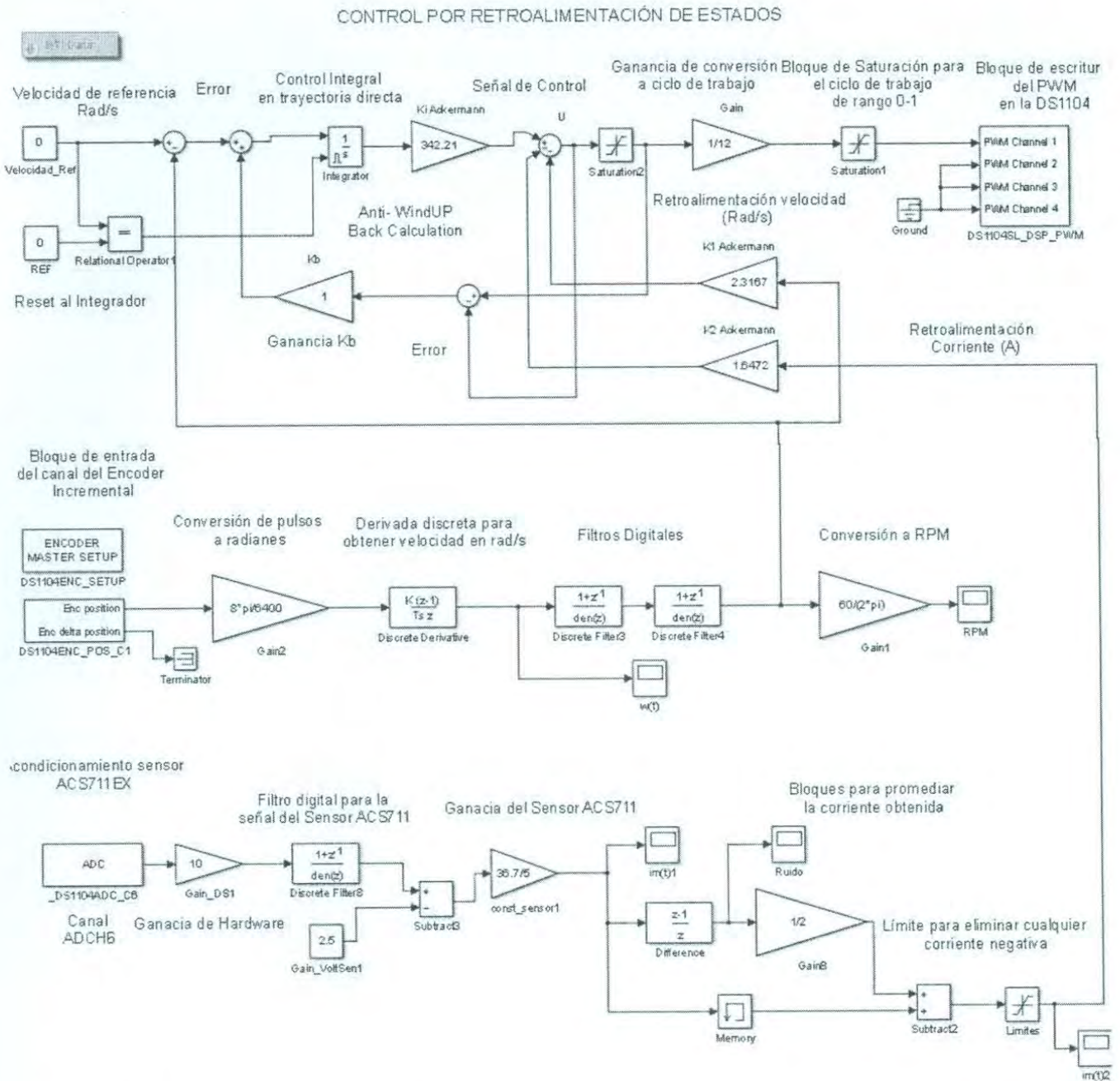


Figura 3.28. Programa del Control por retroalimentación de estados en tiempo real realizado en Simulink.

Se detallará cada una de las partes que componen la estructura del programa:

- El bloque del canal 1 de interface del encoder incremental DS1104ENC_POS_C1 lee el valor del acumulador de pulsos de los flancos de subida y bajada de las dos ondas cuadradas desfasadas 90° cuando el motor gira, es entonces que cada vez que se presenta un flanco de subida o bajada se acumula el valor de 0.25,

3.7.4 Implementación y resultados del control por retroalimentación de estados para el control de velocidad del Motor de CD

Una vez definidos los canales de entrada y salida a utilizar de la tarjeta DS1104 para la implementación práctica, sólo quedaría realizar la programación en Simulink haciendo uso de los bloques de las librerías y cargar el programa en la tarjeta.

Utilizando los valores de la matriz de ganancia de realimentación \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = [2.3167 \quad 1.6472 \quad -342.2117]$$

La figura 3.28 el programa realizado en Simulink del algoritmo de control por retroalimentación de estados. Como se puede ver, el programa consta de 3 partes principales, una de ellas es el acondicionamiento de los datos leídos por el canal 1 de interface del encoder incremental para la velocidad angular del motor (variable de salida), otra parte es el acondicionamiento de los datos leídos por el canal 6 del convertidor analógico digital ADCH6 que representa el voltaje dado por el sensor ACS711 para la variable de estado de la corriente eléctrica y la tercera parte la conforman: el valor de velocidad de referencia, el comparador que genera el error (diferencia entre la velocidad de referencia y la velocidad real de salida), el integrador en trayectoria directa, el lazo externo anti-Windup y la señal de control que es convertida a ciclo de trabajo para obtener PWM a la salida.

cuando se detectan de manera secuencial los flancos de subida y bajada de dichas ondas se acumula o se suma el valor de 1 en el acumulador, por tanto, para convertir el valor de los conteos de pulsos en radianes (posición angular) del eje del motor se multiplica por la ganancia $8\pi/6400$, después se convierte el valor de la posición angular en velocidad angular mediante el bloque de derivada discreta, en donde obtiene la delta de posición angular y la divide en el tiempo de muestreo que es de 0.001 s. Una vez obtenida la velocidad angular del eje del motor en rad/s se pasa la información por dos bloques de filtros digitales IIR en cascada para después ser retroalimentados para generar la señal de control.

- El bloque DS1104ADC_C6 da la lectura del voltaje enviado por el sensor ACS711 una vez ya filtrado analógicamente, el bloque da el valor en una escala de 0-1 por lo que se multiplica por una ganancia de 10 para obtener el voltaje real, después el valor de voltaje pasa por el bloque de un filtro digital IIR, la función de transferencia de dicho filtro ya fue presentada con anterioridad, por tanto una vez filtrada la información (valor de voltaje) sólo es cuestión de convertirla a un valor de corriente eléctrica utilizando la función lineal (3.64). Ya obtenido el valor de corriente (unidad Ampere) pasa por un conjunto de bloques que tienen como finalidad promediar una vez más los datos de corriente para que al final retroalimente como variable de estado del sistema (multiplicándose por la ganancia $k_2 = 1.6472$) en la generación de la señal de control.

$$i = \frac{36.7}{5}(V_{out} - 2.5) \quad (3.64)$$

- Por último, se tiene la parte importante del sistema de control en lazo cerrado, el restador entre la velocidad angular de referencia y la velocidad medida por el encoder para generar el error, que después dicho error es integrado y multiplicado por la ganancia $k_1 = 342.21$ (elemento del matriz de ganancia de retroalimentación \mathbf{K}), es necesario decir que el integrador en trayectoria directa corrige el error en estado estacionario, la salida de la ganancia k_1 es restada por los valores obtenidos de multiplicar las ganancias por las variables de estado (corriente y velocidad angular)

para para obtener la señal de control U , dicha señal es limitada de 0 – 12 (12V voltaje nominal del motor utilizado) por el bloque de saturación, la señal que se encuentra a la salida de ese bloque es convertida a ciclo de trabajo mediante la multiplicación por la ganancia $1/12$, o bien esto significa es que si el valor máximo de la señal de control es de 12 el ciclo de trabajo del PWM es del 100% o igual a 1, por lo que el PWM al llegar a la etapa de potencia mantendrá saturado al transistor haciendo que el motor reciba 12 volts.

Uno de los inconvenientes que presenta el implementar el control por retroalimentación de estados en tiempo real es la saturación de la acción integral, esto hace que la señal de control sobrepase su límite superior (limitado por el voltaje de alimentación nominal del motor) presentado el fenómeno windup [4], que provoca en la respuesta de velocidad angular un mayor sobreimpulso y oscilaciones amortiguadas que trae consigo un aumento en el tiempo de la respuesta transitoria. Entonces, para evitar la saturación de la acción integral se implementa el método *Tracking back calculation* (método de recalcu [4]). El método consiste en generar un lazo de retroalimentación externo en donde se resta la señal de control saturada V menos la señal de control sin saturar U , formando una señal de error e_s que se multiplica por la ganancia k_b para después sumarse al error e (que es la diferencia del valor de velocidad de referencia menos el valor de velocidad real) teniendo una nuevo valor de entrada (valor reducido o menor que evita que se incremente la salida de la acción integral) al bloque del integrador, el error e_s es cero cuando no hay saturación de la señal de control U , por lo que no tendrá ningún efecto sobre la operación cuando el valor de U no supera el valor de 12. El valor de k_b como ya se mencionó en el capítulo 2 indica la velocidad con la cual disminuye o se resetea la salía del controlador. En el programa (ver figura 3.21) se puede apreciar el anti-Windup implementado para el sistema de control utilizando el método *tracking back calculation*, en la ecuación (3.65) se puede ver matemáticamente como funciona dicho método.

$$\xi' = \begin{cases} e & \text{si } U = V \\ e + k_b(V - U) & \text{si } U \neq V \end{cases} \quad e_s = k_b(V - U) \quad (3.65)$$

Como ya se ha mencionado, unas de las principales características que posee la tarjeta DS1104 de dSPACE® es la facilidad para compilar aplicaciones en tiempo real, por lo tanto, con el programa del algoritmo de control ya terminado sólo faltaría construir el modelo en Simulink y generar el código C y los archivos .sdf y *.obj, estos archivos se crean mediante el comando Ctrl+B que activa el “*RTW (Real Time Workshop) Build model*” de Simulink, una vez generado el archivo *.obj es cargado de manera automática en el controlador para empezar a correr la aplicación en tiempo real. Se compila el modelo de la figura 3.28 con un tiempo de muestreo de $T = 0.001s$ y utilizando el método numérico ode8 (Dormand-Prince) como solucionador, así también se configura el bloque DS1104SL_DSP_PWM para que la hardware de control genere una señal PWM de 1KHz de frecuencia.

Una vez cargada la aplicación en tiempo real en la DS1104 se realiza una interface en el programa ControlDesk para el monitoreo, la manipulación, y el análisis de respuesta de la variables. El layout del proyecto de control por retroalimentación de estados se presenta en la figura 3.29. Para realizar una interface en ControlDesk sólo es necesario crear un layout y colocar los instrumentos a utilizar para el monitoreo y visualización de las variables, si se quiere cargar otra aplicación en la tarjeta de control y utilizar ControlDesk se necesita ir a la pestaña *Platform/Device* y desde ahí buscar para cargar el archivo con extensión .sdf de la aplicación a utilizar.

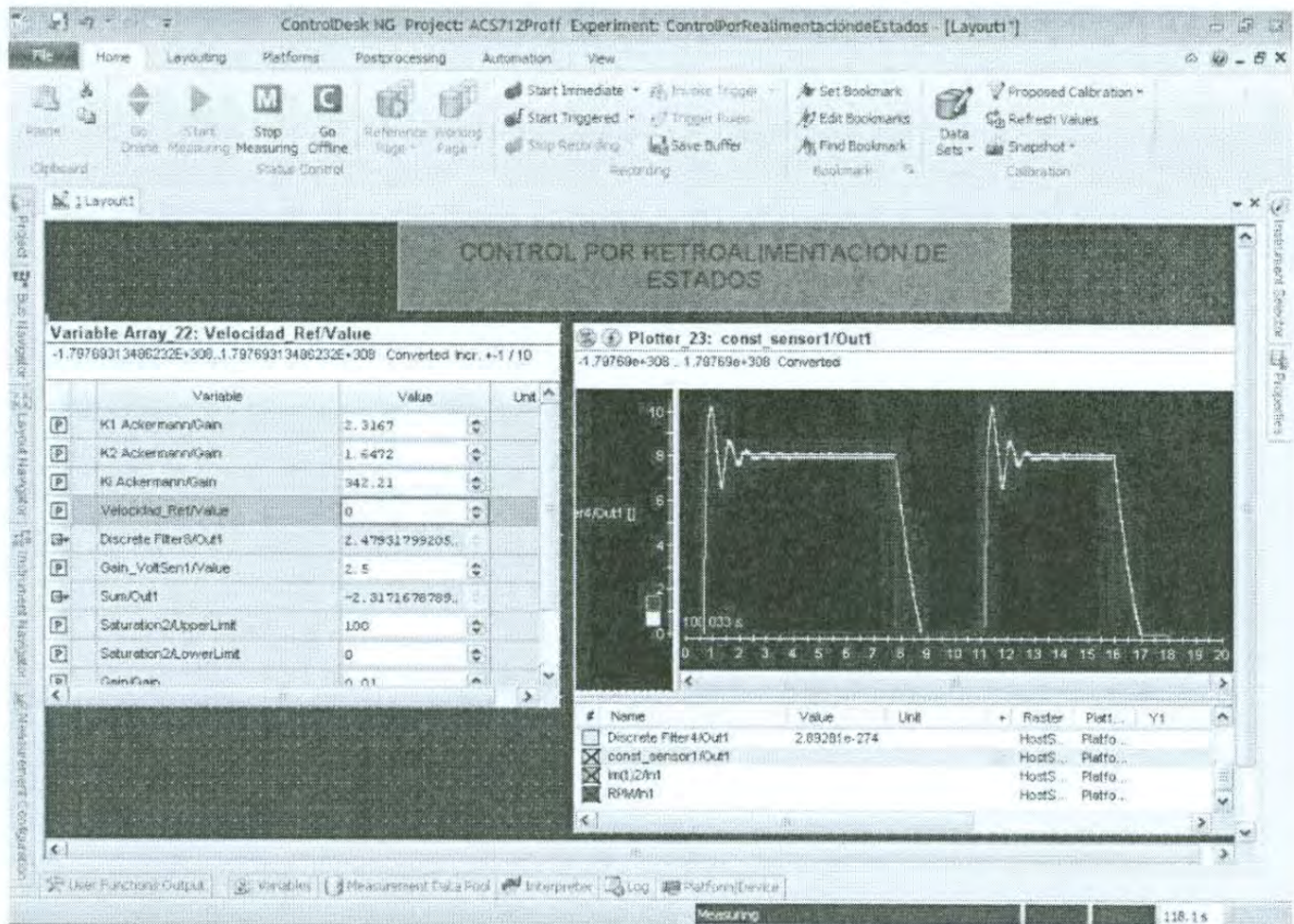


Figura 3.29. Layout en ControlDesk del sistema del control por retroalimentación de estados para el motor de corriente directa.

Las figuras de respuesta de la velocidad angular y de la corriente eléctrica del motor ante una entrada escalón (velocidad angular de referencia) de 8 rad/s, como se puede ver se toma el mismo valor de velocidad de entrada que el utilizado en las simulaciones, es necesario indicar que se hicieron pruebas con otros valores de velocidad angular para el sistema de control, obteniendo en dichos casos las mismas características en las respuestas (los sistemas se estabilizaban y el error en estado estacionario era 0). Las figuras fueron realizadas en Matlab, por lo que en ControlDesk se grabaron los datos que se adquirirían y fueron exportados en un archivo con extensión .mat.

En la figura 3.30 se presenta la respuesta de la velocidad angular del motor cuando el sistema de control no tiene el lazo de retroalimentación externo (no se utiliza ningún método Anti-Windup), se aprecia que el sobre impulso en la respuesta transitoria es del 30% que es un valor demasiado grande con respecto al esperado, así también se presentan oscilaciones

amortiguadas provocando que el tiempo de asentamiento sea mayor, como ya se ha mencionado la saturación del termino integral provoca un problema en la implementación de las acciones de control en los procesadores digitales de señales.

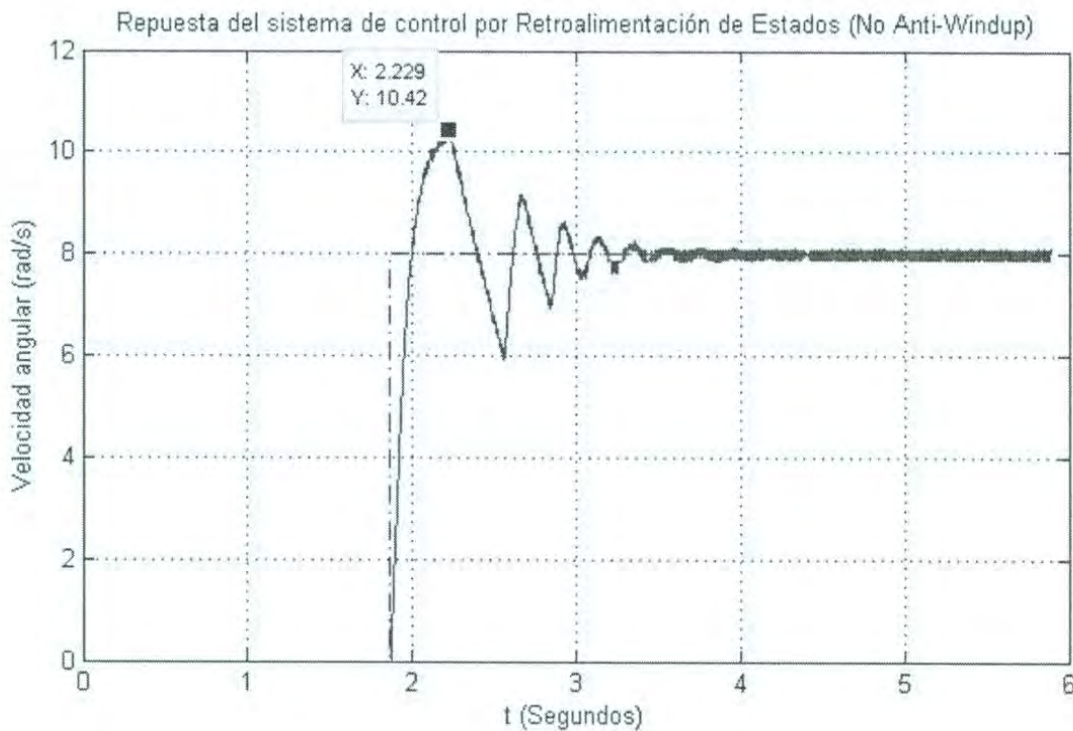


Figura 3.30. Respuesta de velocidad angular cuando en el algoritmo de control no tiene anti-windup (no se utiliza el método *tracking back calculation*).

En la figura 3.31 se muestra la respuesta de la velocidad angular ante una entrada escalón de 8 rad/s (las líneas punteadas en la figura representan la entrada escalón), a diferencia de la figura pasada ahora se hace uso del método anti-Windup con una ganancia $k_b = 5$, por lo que se aprecia que en la respuesta transitoria ya no hay un sobreimpulso del 30% ni oscilaciones amortiguadas de tiempo mayor, el sobre impulso ahora es del 5.575%, el error en estado estacionario es igual a 0 y el tiempo de asentamiento es muy cercano a 0.2 s, con esto se llega a la conclusión de que la respuesta es aceptable y que el control diseñado puede ser puesto en marcha en conjunto con la planta para la realización de un proceso.

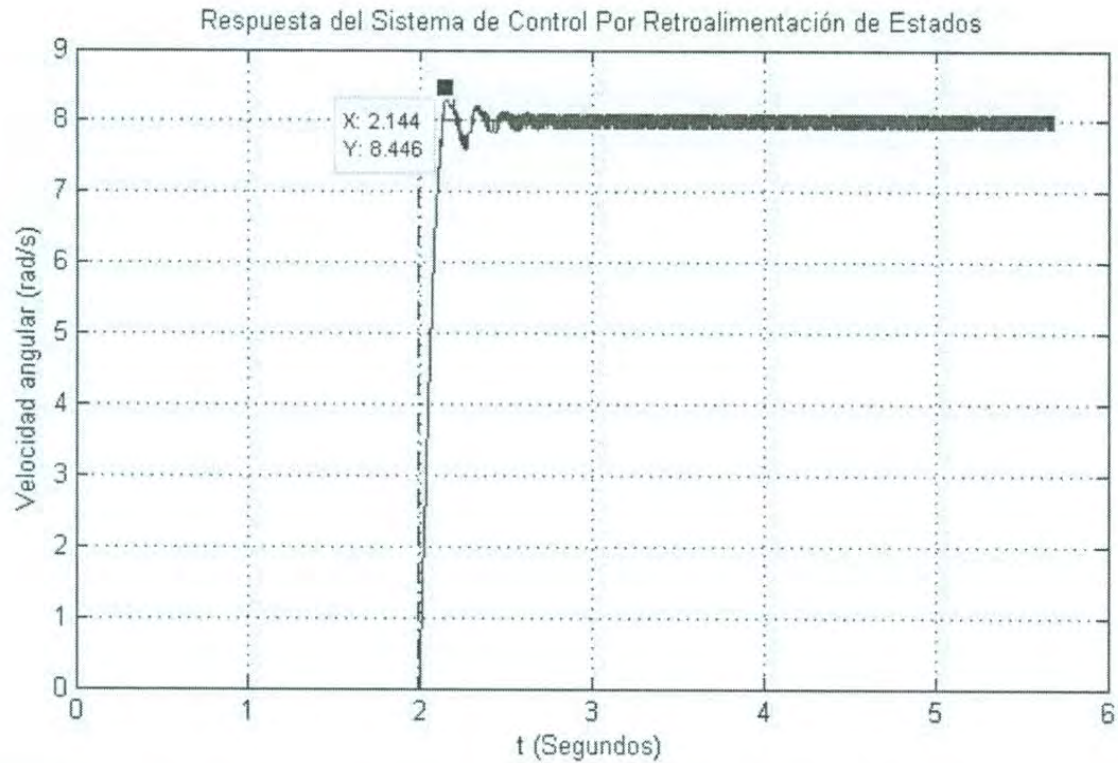


Figura 3.31. Respuesta de velocidad angular ante una entrada escalón de 8 rad/s, control por retroalimentación de estados con método anti-Windup.

En la figura 3.32 se presenta la respuesta de la corriente eléctrica (variable de estado del control en el espacio de estados) en la armadura del motor cuando se tiene una velocidad de referencia de entrada de 8 rad/s, se puede notar que la corriente tiene un pico máximo en la respuesta transitoria de 2A y después se estabiliza en un valor cercano a 0.3A.

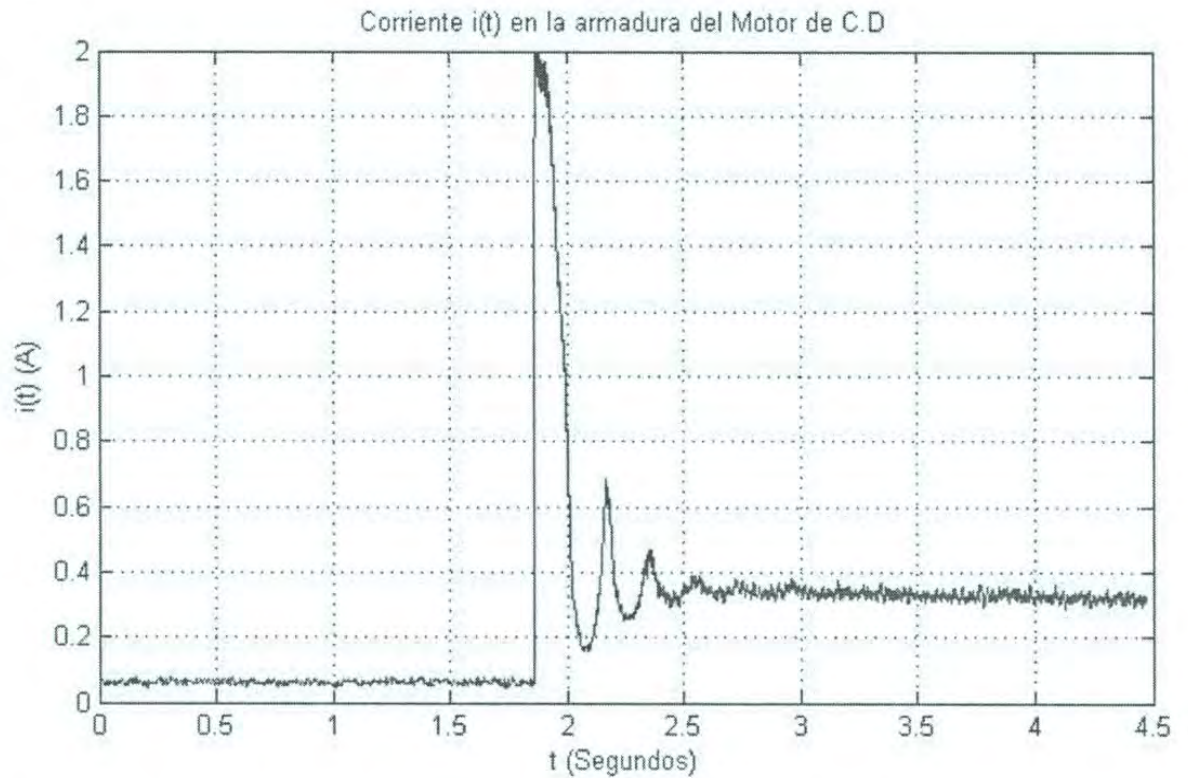


Figura 3.32. Respuesta de corriente eléctrica cuando se tiene una entrada en el sistema de control de 8 rad/s.

Ahora se presenta un nuevo diseño de control por retroalimentación de estados en donde se proponen nuevos parámetros para el tipo de respuesta deseada, los parámetros propuestos son:

- Tiempo de asentamiento: $t_s \approx 0.1 \text{ seg.}$
- Sobreimpulso: $M_p \approx 4.3\%$.

Para localizar los polos complejos conjugados que cumplen con los parámetros de diseño se realiza la misma metodología que ya se presentó en la sección 3.5.2, por lo tanto los polos son:

$$s_1 = -40 + j * 40 \quad s_2 = 40 - j * 40$$

El tercer polo que se necesita para el sistema de control de lazo cerrado se propone su localización en el eje real del semiplano izquierdo con un valor 50 veces mayor que la parte real de los polos complejos conjugados dominantes, por lo tanto el tercer polo se encuentra en:

$$s_3 = -2000$$

Una vez determinados los polos para el sistema de control sólo falta aplicar el método de asignación de polos para determinar la matriz de ganancias de realimentación de estados, dicha matriz se determina haciendo uso de Matlab y la función Ackermann como ya se ha realizado, por tanto partiendo que el sistema es de estado completamente controlable se llega a (3.66)

$$\mathbf{K} = [-0.4630 \quad -3.3448 \quad -21.9] \quad (3.66)$$

Con las nuevas ganancias de la matriz \mathbf{K} se procede a implementar el nuevo diseño del controlador haciendo uso del método anti-Windup *tracking back calculation* con $k_b = 5$. Para realizar la implementación de manera más rápida sólo se necesita modificar los parámetros de las ganancias de la matriz desde el instrumento *Variable Array 22* en ControlDesk y después se presiona el botón *Start Measuring* para iniciar el monitoreo. A continuación se presenta en la figura 3.33 la respuesta de la velocidad angular cuando el sistema de control en lazo cerrado tiene una entrada de referencia de 8 rad/s, el valor del sobreimpulso de la velocidad es del 7.23%.

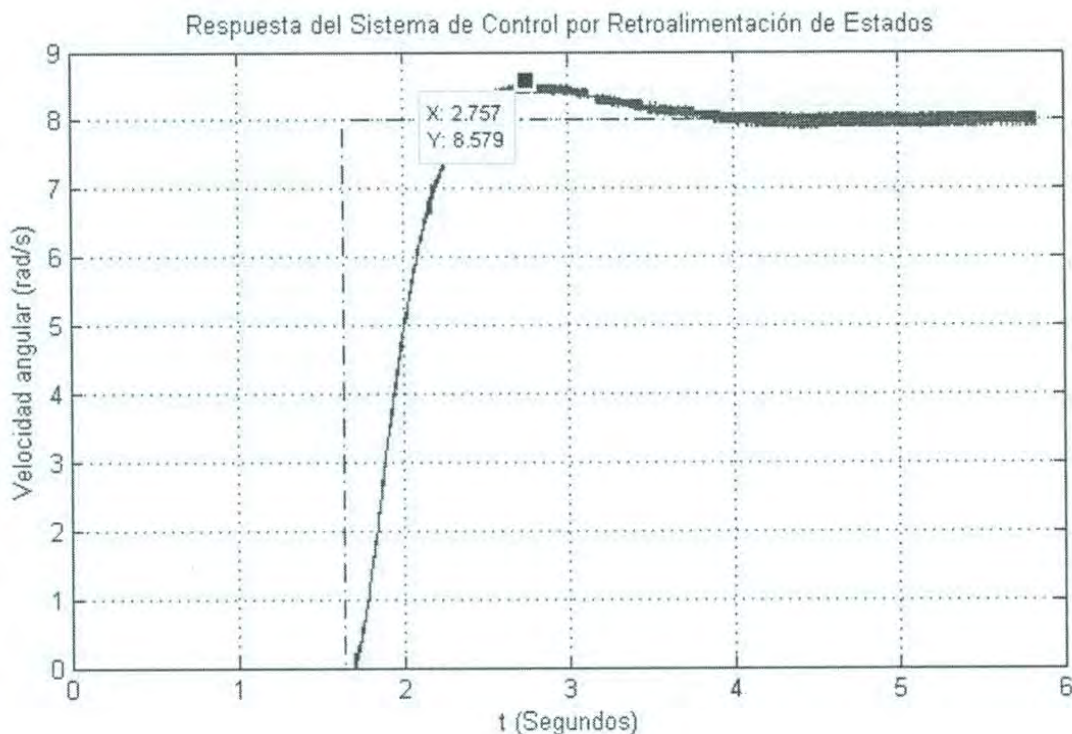


Figura 3.33. Respuesta de la velocidad del sistema de control por retroalimentación de estados ante una entrada de 8 rad/s.

En la figura 3.34 se muestra la respuesta de la corriente eléctrica en el motor cuando el sistema de control tiene una entrada de 8 rad/s, se observa que el valor máximo de la corriente medido por el sensor ACS711 es de 1A.

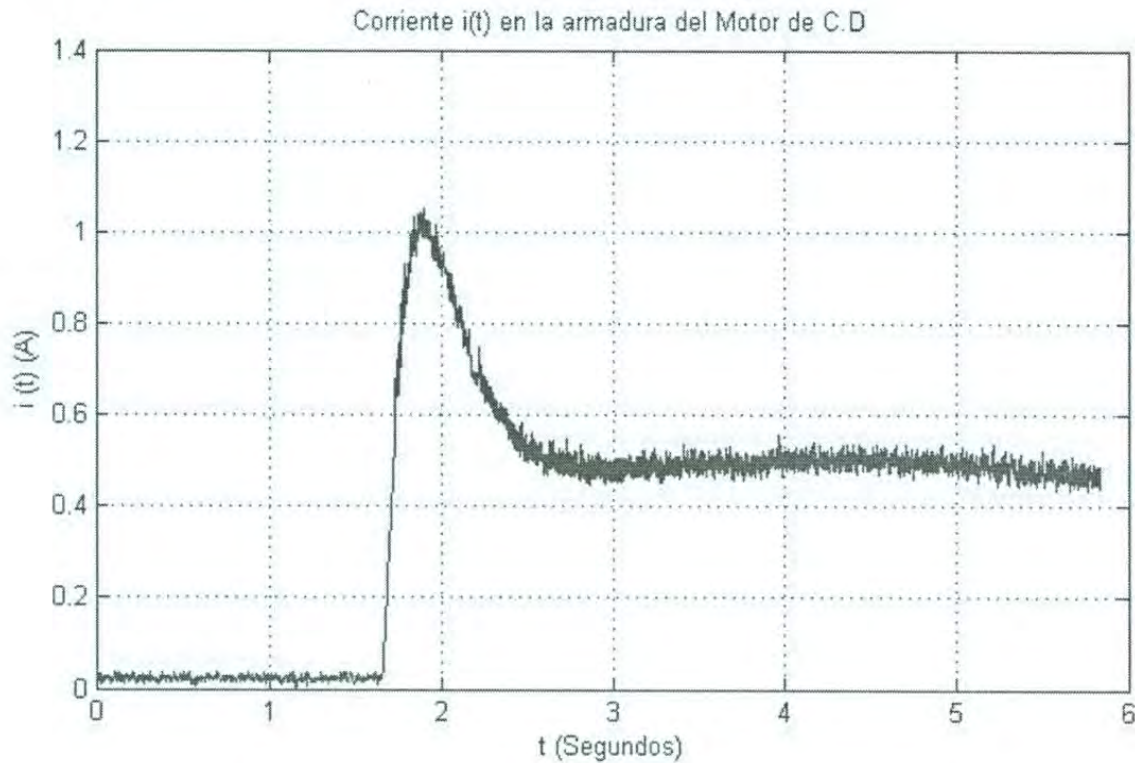


Figura 3.34. Respuesta de la corriente eléctrica ante una entrada en el sistema de control en lazo cerrado de 8 rad/s.

3.7.5 Implementación y resultados del control PID para el control de velocidad del Motor de CD

En esta sección se presenta la implementación en tiempo real del controlador PID en la DS1104, de acuerdo al diseño del controlador PID sintonizado por el método de asignación de polos se procede a implementar el algoritmo de control en Simulink haciendo uso de los bloques de la librería `rtilib1104` de la tarjeta de control y de la librería `continuous` de Simulink. En la figura 3.35 se presenta el programa desarrollado para su implementación, y se compone de dos partes principales como se describen a continuación:

- La primera parte es la adquisición y acondicionamiento de las señales digitales enviadas por el encoder, y para eso se utiliza el bloque `DS1104ENC_POS_C1`, se convierten los conteos que envía el bloque en valores de posición angular (rad)

multiplicando por la ganancia $8\pi/6400$ como en el programa de control por retroalimentación de estados, con el bloque *Discrete Derivative* se transforma la información a velocidad angular en rad/s para después filtrarlo y promediarla haciendo uso de los filtros digitales que se muestran en serie, las expresiones de las funciones de transferencia de los filtros son iguales y se muestran en la ecuación (3.59), la razón de poner los filtros digitales en serie es que se aumenta el orden de la función de transferencia y por lo tanto la pendiente de atenuación es mayor o lo que equivale realizar dos veces el promediado de los datos, por último se retroalimenta la señal de velocidad angular al lazo de control.

- La segunda y la última parte la conforma el bloque de resta entre la velocidad de referencia (se utiliza un bloque generador de tren de pulsos) con respecto a la velocidad real leída por el encoder para generar la señal del error, después el error entra el bloque de control PID que se encuentra en la librería continuos de Simulink, en el bloque PID se configura las ganancias obtenidas en el diseño ($K_d = 0.00352$, $K_p = 2.3663$, $K_i = 342.147$), el rango de valor de salida del controlador (es elegido de 0-12) y la elección del método anti-Windup a emplear (se hace uso del método *back calculation* con $k_b = 5$), una vez configurado el PID se hace la conversión de su señal de salida en ciclo de trabajo para ser escrita en el bloque DS1104SL_DSP_PWM (se selecciona una frecuencia de 1kHz).

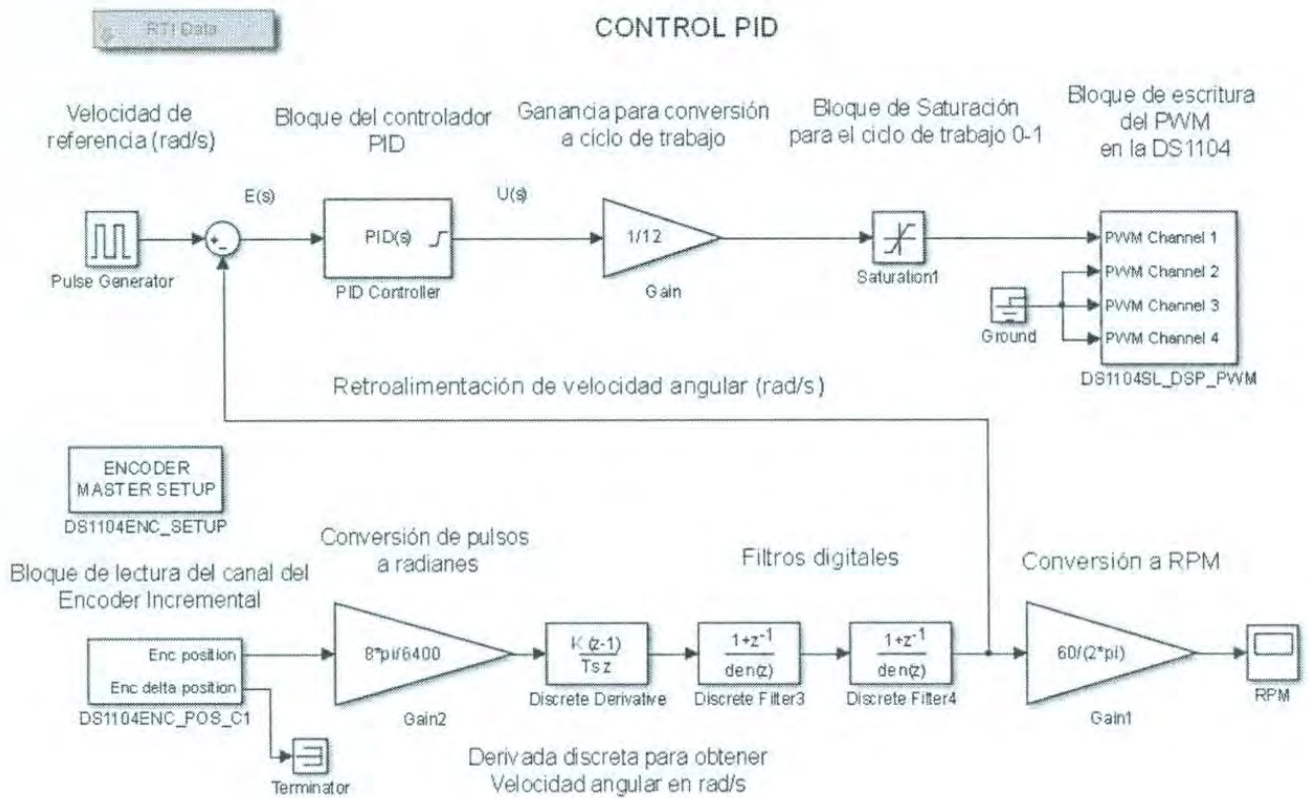


Figura 3.35. Diagrama de bloques en Simulink del algoritmo de control PID implementado en la DS1104.

Se procede a construir el modelo con el propósito de generar el archivo que será cargado en la tarjeta automáticamente, por tanto, con un periodo de muestreo de 0.001s y utilizando el método numérico ode8 (Dormand-Prince) como solucionador se generan los archivos .sdf y .obj del algoritmo de control para iniciar la aplicación en tiempo real, el archivo que se carga en la tarjeta es el de extensión .obj. Una vez terminado el proceso de compilación y carga del algoritmo, lo que sigue es crear una interface en el programa ControlDesk y es por eso que en la figura 3.36 se muestra el layout realizado para el monitoreo, análisis y manipulación de las variables del sistema de control, los instrumentos seleccionados tienen el propósito de mostrar la información de manera gráfica (*Plotter_22*) y manipularla (*Variable Array_21*).

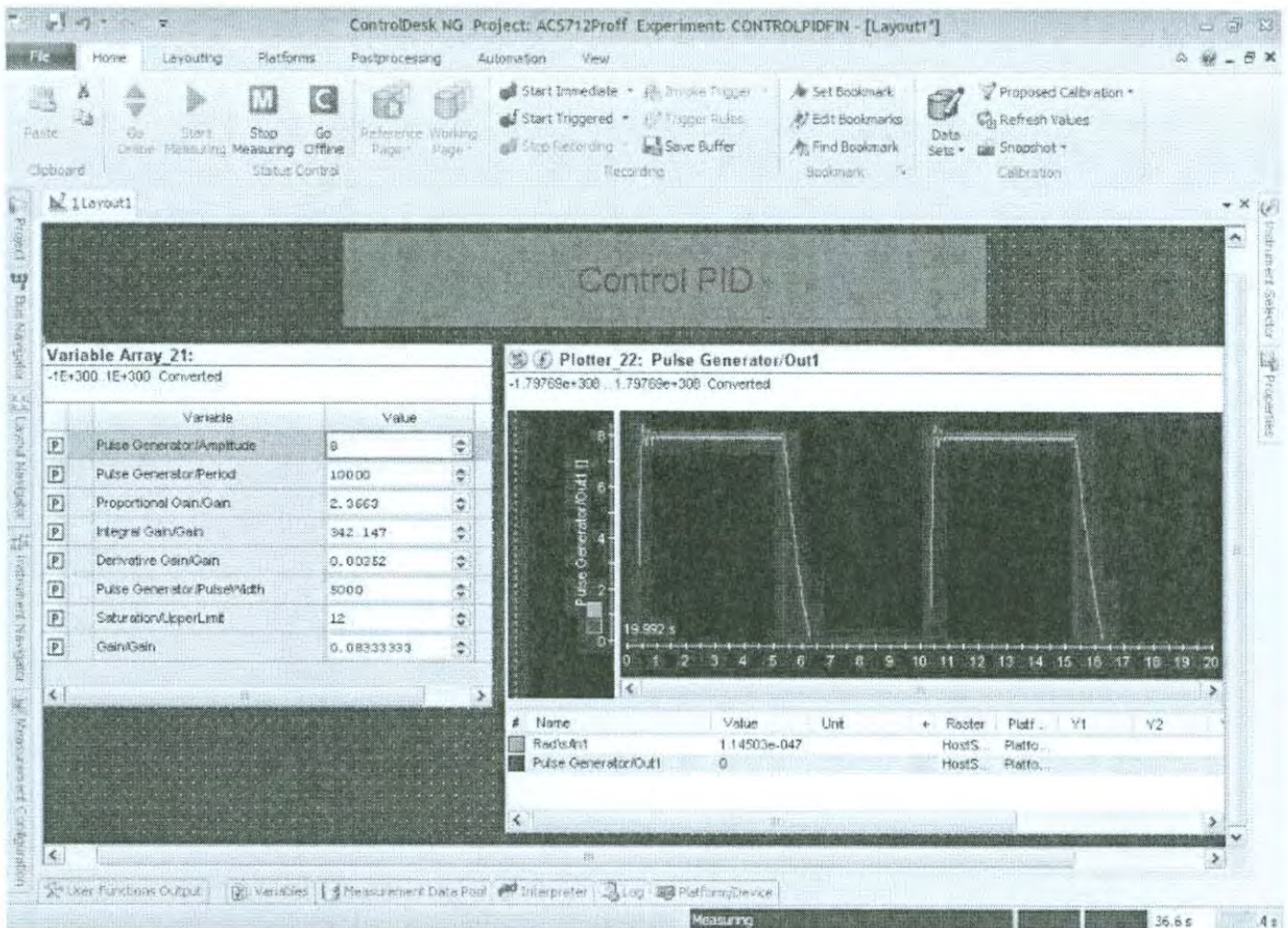


Figura 3.36. Layout en ControlDesk del programa de control PID.

Una vez implementada la interfaz gráfica en ControlDesk se generan archivos .mat con los datos de las variables muestreadas con el propósito de graficar en Matlab los resultados obtenidos de la velocidad, por tanto se muestra en la figura 3.37 la respuesta de la velocidad angular del sistema de control PID con anti-Windup ante una entrada de escalón de 8 rad/s, en donde se puede ver que el sobreimpulso obtenido es del 5.83%.

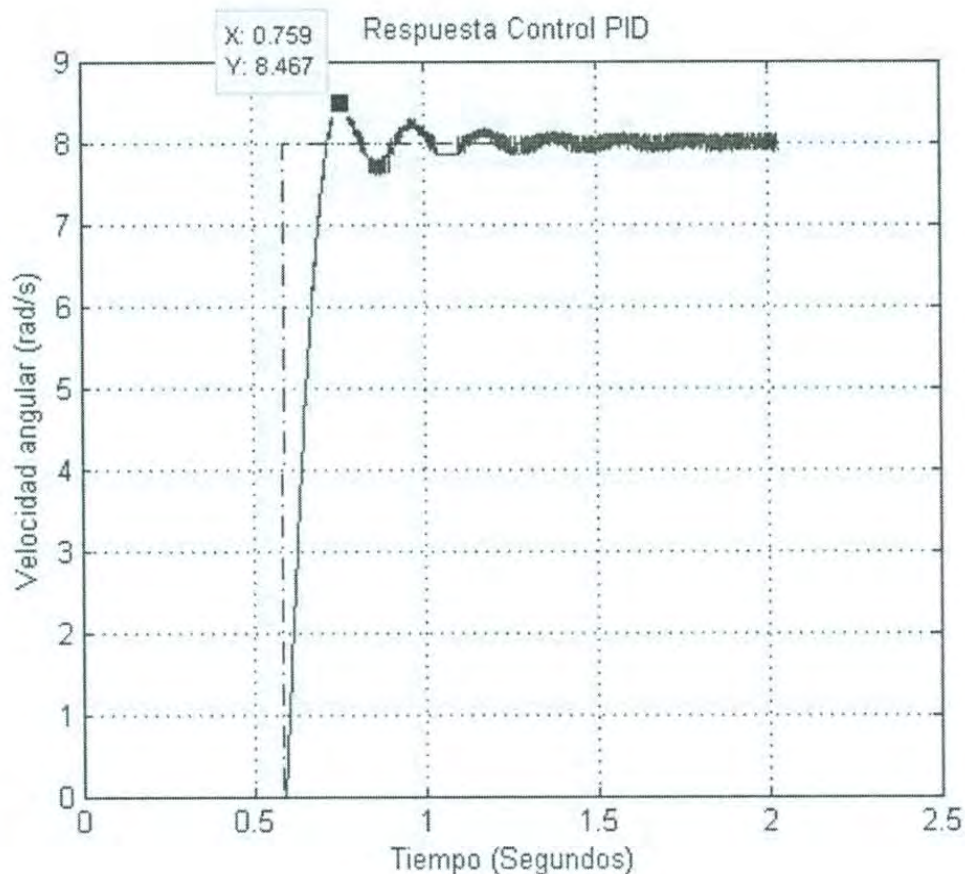


Figura 3.37. Respuesta de la velocidad angular del motor ante una entrada escalón de 8 rad/s en el sistema de control PID.

Por último, en las figuras 3.38, 3.39 y 3.40 se aprecian las conexiones y el armado del circuito en un protoboard del filtro pasa-bajas, del circuito de potencia, de las conexiones de los sensores (encoder incremental y ACS711) y del motor de CD. El panel conector CP1104 es utilizado para realizar las conexiones de los circuitos, de los sensores y obtener la señal PWM con la tarjeta de control DS1104, en dicho panel se encuentra un arreglo de led's CLP1104 que permite identificar cuando están siendo utilizados los canales de dicha tarjeta. El encoder incremental es conectado al CP1104 a través de un sub-conector tipo D, el voltaje del filtro pasa-bajas de segundo orden es conectado a través de un conector de tipo BNC y la señal PWM es tomada también de un sub-conector tipo D. En la figura 3.40 se muestra la computadora de escritorio utilizada en el proyecto en donde fue instalada y configurada la DS1104.

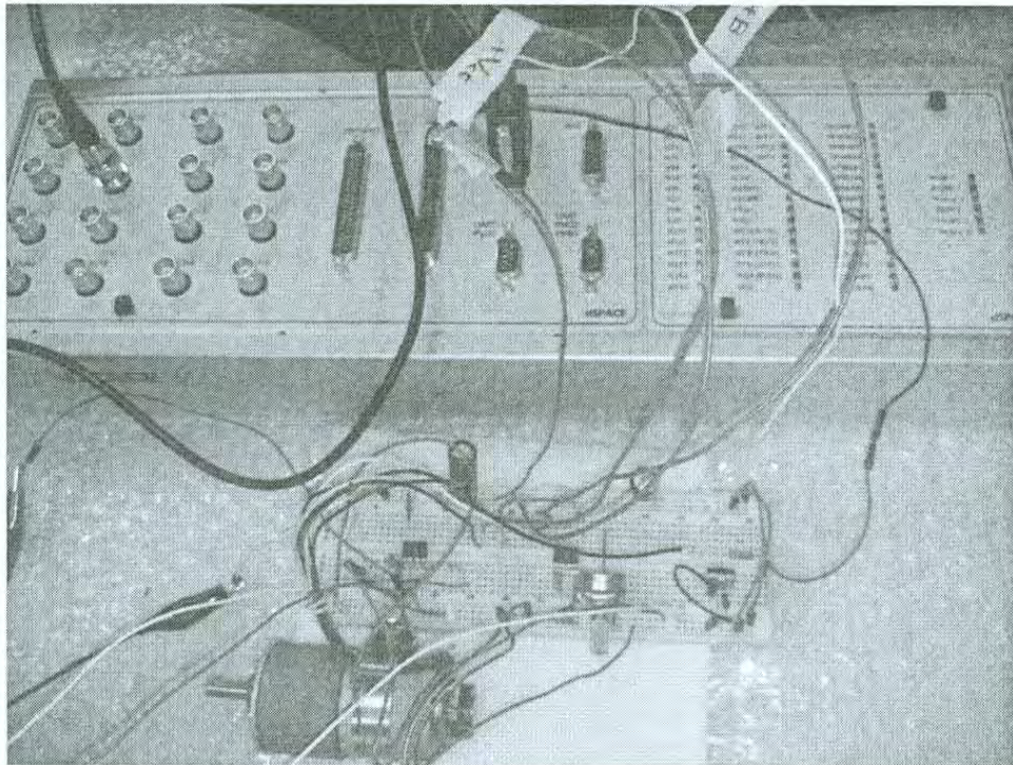


Figura 3.38. Motor de CD 1446, circuito de acondicionamiento y circuito de potencia del sistema de control conectado en el panel conector CP1104.



Figura 3.39. Planta física y conexiones de los circuitos del sistema de control en el panel conector CP1104.



Figura 3.40 Monitoreo y análisis en ControlDesk de las variables del sistema de control.

Capítulo 4. Conclusiones y trabajo futuro

4.1 Conclusiones

Para poder realizar el diseño del control por retroalimentación de estados se desarrolló el modelado dinámico de la planta y se llevaron a cabo experimentos sobre el motor para encontrar sus parámetros con la finalidad de conocer su función de transferencia. El modelo expresado en ecuaciones diferenciales lineales fue el necesario para poder llevar de buena manera el diseño del control en el espacio de estados y la acción de control PID, las simulaciones realizadas en Simulink de los dos tipos de controladores dieron como respuesta los parámetros de diseño que fueron planteados. El filtro pasa-bajas de Butterworth implementado para acondicionar la señal voltaje enviada por el sensor ACS711 tiene como restricción, el no poder atenuar o eliminar una banda de frecuencias, por lo que se mantiene un ruido de pequeña magnitud montado en la señal de voltaje fundamental. El factor de escala del sensor de 136 mV/A, no es idóneo para realizar las mediciones, ya que la magnitud de corriente que fluye por el motor es pequeña; el problema se resolvió desarrollando un filtro digital que tiene como propósito promediar la señal leída por el canal analógico de la tarjeta de control.

En el inicio del proyecto de investigación se tuvieron problemas en la instalación y configuración de la tarjeta de control DS1104 en la PC, ya que al crear los modelos en Simulink no podían ser compilados para llevar a cabo la implementación de los algoritmos, por lo que se consultó la solución con la empresa dSPACE, llegando a la conclusión que el problema se resolvía eliminando las direcciones en: Simulation cache folder y Code generation

folder. El implementar el control por retroalimentación de estados en la tarjeta de control DS1104 tuvo como inconveniente principal la saturación de la señal de control debido al incremento desmesurado de la acción integral, por tanto, el implementar el método anti-*Windup tracking back calculation* trajo consigo la mejora en la respuesta de la velocidad del motor eliminando las oscilaciones amortiguadas y mejorando el tiempo de asentamiento. Así también, al momento de implementar la acción de control PID se presentaba el mismo problema de saturación, pero no existió la necesidad de agregar un lazo externo antiwindup por que el bloque PID perteneciente a la librería continuous de Simulink ya tenía incluido métodos anti-Windup a utilizar, por tanto sólo basto con elegir el método a utilizar.

Los resultados en la respuesta de la velocidad angular del motor de los dos algoritmos de control son considerados buenos, ya que el sobreimpulso obtenido está dentro del rango de diseño planteado (5.575% de 4.3%, se toma como experiencia trabajos revisados en el estado del arte) y el tiempo de asentamiento que aun siendo mayor que el esperado es razonable ya que los periodos de muestreo configurados en las simulaciones son considerablemente pequeños con respecto al configurado en los dos programas realizados en Simulink, y esto se debe a que se presentó un error al momento de compilar el programa cuando se configuraba periodos menores al 0.0001s, llegándose a la conclusión que es una restricción de la computadora utilizada ya que sus recursos no son bastos para llevar a cabo proyectos críticos en el tiempo.

Gracias a los inconvenientes que surgieron al implementar dichos algoritmos en la tarjeta de control se adquirió una valiosa experiencia en el desarrollo físico de los sistemas de control y dicha experiencia es necesaria al momento de llevar a cabo más proyectos del mismo giro, en el área de la investigación, como en la laboral.

4.2 Trabajo futuro

Los aspectos a mejorar en este proyecto para trabajos futuros son: implementar el control por retroalimentación de estados para el control de posición angular de un conjunto de motores, incrementando el nivel de complejidad y de análisis, así también, el diseñar e

implementar un control utilizando observadores de estados y control por seguimiento desarrollando el análisis y la programación de la tarjeta en Simulink. Se recomienda utilizar las interrupciones del controlador para la lectura de los pulsos enviados por el encoder incremental, con esto se tendría una mejor precisión en la velocidad angular leída. Es interesante el utilizar diferentes tipos de sensores para retroalimentar las variables de estado del motor, como por ejemplo, en la lectura de la corriente de armadura del motor es conveniente trabajar con un sensor diferente al de tipo efecto hall, así también utilizar otro con diferente factor de escala y ver qué resultados se obtienen en la adquisición y tratamiento de dicha señal. Se recomienda utilizar una resistencia de potencia en serie con la de armadura del motor obteniendo la señal de salida de un divisor de voltaje observar los resultados y comprarlos (aplicar un acondicionamiento de señal por filtros analógicos o digitales).

Mejorar el tiempo de asentamiento en la respuesta de la velocidad del motor de CD e implementar otro método anti-Windup dando una mejor respuesta a la ya obtenida, serían un buen proyecto de investigación a futuro. Por último se plantearía el diseñar un controlador para un motor de inducción asíncrono ya que esto traería consigo el utilizar más herramientas de análisis en Simulink, diseño electrónico y demandar más recursos por parte de la tarjeta de control DS1104.

Bibliografía

- [1] CHIASSON, John. Modeling and High – Performance Control of Electric Machines. Estados Unidos de América: primera edición, IEEE Press series on power engineering – M.E. El-Hawary, Series Editor, 2005.
- [2] OGATA, Katsuhiko. Ingeniería de control moderna. España: quinta edición, Pearson Educación, 2010.
- [3] HERNANDEZ, Ricardo. Introducción a los sistemas de control: Conceptos, aplicaciones y simulación con MATLAB. México: primera edición, Pearson Educación, 2010.
- [4] ASTRÖM, Karl J.y HÄGGLUND, Tore. Control PID avanzado. España: primera edición, Pearson Educación, 2009.
- [5] COUGHLIN, Robert y DSICOLL, Frederick. Amplificadores Operacionales y Circuitos Integrados Lineales. México: quinta edición, Prentice Hall – Pearson, 1999.
- [6] REYES, Lucelly, Aplicación de un filtro digital en LabVIEW, México: primera edición, 2012.
- [7] PÉREZ, César “Matlab y sus Aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería”, editorial Pearson.
- [8] MATHWORKS, Simulation and Model-Based Design [en línea] [fecha de consulta: 1 Marzo 2015]. Disponible en:<<http://www.mathworks.com/products/simulink/>>.
- [9] ETSETB, Matlab, fundamentos y aplicaciones [en línea] [fecha de consulta: 1 Marzo 2015]. Disponible en: <http://ocw.upc.edu/sites/default/files/materials/15015404/tema_5_simulink-5156.pdf>.
- [10] dSPACE, HelpDesk 2013-A, Alemania: Release 2013-Am dSPACE GmbH, 2013.
- [11] TAFOYA, José (2010), Control de velocidad angular de motores de corriente directa mediante técnicas de control automático.

-
- [12] THOMAS, Annemarie (2009), dSPACE DS1103 Control Workstation Tutorial and DC Motor Speed Control.
- [13] POLOLU ROBOTICS & ELECTRONICS, Catalog: Pololu Metal Gearmotor [en línea] [fecha de consulta: 1 Marzo 2015]. Disponible en :<<https://www.pololu.com/product/1446>>.
- [14] POLOLU ROBOTICS & ELECTRONICS, Catalog: Electronics [en línea] [fecha de consulta: 1 Marzo 2015]. Disponible en :< <https://www.pololu.com/product/2452>>.

Anexo A

Prácticas de introducción a la tarjeta de control DS1104

1. Realizar un programa para la lectura de una señal analógica y digital en la tarjeta de control DS1104.

Objetivo: Familiarizarse con los bloques de la librería dSPACE RTI1104 de los puertos digitales y analógicos (ADC y DAC) de la tarjeta de control.

Descripción: Utilizar un potenciómetro como divisor de voltaje en el rango de 0 a 10V, conectar la señal de salida del potenciómetro hacia el puerto del convertidor analógico a digital de su elección (por ejemplo, el bloque DS1104ADC_C5 que corresponde al puerto ADCH5). El programa desplegará en pantalla los valores de las lecturas utilizando un instrumento en un layout del programa ControlDesk Next Generation.

En el caso de la lectura de la señal digital utilizar un botón pulsador con las configuraciones (Pull-up y Pull-down) para realizar un contador de flancos de subida de los pulsos generado. El programa desplegará la cantidad de veces que ha sido presionado el botón haciendo uso de un instrumento en un layout del programa ControlDesk Next Generation.

2. Realizar e implementar un programa para la escritura de una señal analógica.

Objetivo: Escribir en la tarjeta DS1104 señales analógicas haciendo uso del convertidor digital a analógico, se medirán las señales en un osciloscopio.

Descripción: En la primera parte de la práctica realizar en Simulink un modelo utilizando una variable senoidal en donde se manipule su amplitud y frecuencia, dicha

señal se escribirá en la tarjeta haciendo uso del bloque DAC de su elección. En la segunda parte de la práctica rectificar la señal senoidal a media onda y manipular así también sus parámetros, por último manipular un rango de voltaje de salida de -10 a +10V con el uso de una variable de tipo constante de Simulink. Las variables y parámetros de las señales a utilizar se manipularán en un layout del programa ControlDesk Next Generation.

Sugerencia: Utilizar el instrumento Knoob (perilla) para manipular el voltaje en un rango de -10 a +10V.

3. Realizar e implementar un programa para un control de temperatura.

Objetivo: Generación de un sistema de control de lazo cerrado con la tarjeta de control DS1104.

Procedimiento: Tras definir el valor de referencia se procede a la monitorización del sistema se enciende un ventilador cuando el valor de temperatura leído es mayor que la referencia y se apagará en caso contrario. Programar la acción de control ON-OFF en un modelo en Simulink utilizando los bloques de entradas y salidas para el sistema a desarrollar.

Una vez que es cargada la aplicación en tiempo real desde Simulink a la tarjeta DS1104 realizar una interfaz gráfica haciendo uso de un layout en ControlDesk en donde se permita monitorear la temperatura en °C leída por el sensor.

Sugerencia: Como sensor de temperatura se recomienda utilizar el LM35, TMP35 o equivalentes. El sensor de temperatura puede ser expuesto directamente a fuego durante breves periodos de tiempo siempre y cuando no se exceda el valor pico de temperatura (verificar hoja de datos).

4. Realizar e implementar un control de velocidad de un motor de corriente directa utilizando una señal PWM.

Objetivo: Familiarizarse con la generación de señales PWM con la tarjeta de control DS1104 y uso del canal interface encoder incremental 1.

Descripción: Implementar un control en lazo abierto en donde sea capaz de variar el ciclo de trabajo de la señal PWM para el control de la velocidad angular de un

motor de corriente directa. En el entorno Simulink, utilizar el bloque DS1104SL_DSP_PWM para la escritura del PWM en el canal y con la frecuencia de su elección. Haciendo uso de un layout en el programa ControlDesk Next Generation, realizar una interfaz gráfica que permita variar el ciclo de trabajo del PWM de 0 al 100% utilizando el instrumento Knoob y mostrar el valor de velocidad angular (en RPM) del motor en una gráfica en tiempo real.

Se deberá realizar una etapa de potencia utilizando el transistor TIP121 o un equivalente.

Sugerencia: Realizar distintas configuraciones en el bloque DS1104SL_DSP_PWM para familiarizarse y observar el comportamiento. Como etapa de potencia hacia al motor se recomienda utilizar el TIP121 o equivalente. El motor tendrá un encoder incremental acoplado al eje para obtener las mediciones de velocidad angular.

5. Realizar un control de velocidad angular de un motor de corriente directa utilizando una acción de control PID.

Objetivo: Generación de un sistema de control de lazo cerrado utilizando una acción de control PID en la tarjeta de control DS1104.

Descripción: Implementar un controlador PID para el control de la velocidad angular de un motor de corriente directa de imán permanente. Sintonizar el controlador para un tipo de respuesta de su elección. Dentro del entorno de Simulink, programar el sistema utilizando el bloque de control PID.

Realimentación: Como sensor de velocidad angular se utiliza un encoder incremental, para la realimentación de la variable de salida (velocidad angular)

Para la lectura de la señal enviada por el encoder se utilizara el bloque DS-1104ENC_POS_C1 del RTI1104,

Señal de salida: Utilizando el bloque DS1104SL_DSP_PWM, definir una señal PWM en el canal y con la frecuencia de su elección. Definir un tiempo de paso fijo de 0.001s en el programa.

Monitorización: Haciendo uso de un layout en el programa ControlDesk Next Generation, realizar una interfaz gráfica que permita monitorear en tiempo real la

velocidad angular, manipular los parámetros del controlador PID y modificar la velocidad angular de referencia (set point).

Sugerencia: Como etapa de potencia hacia al motor se recomienda utilizar el TIP121 o equivalente. El motor tendrá un encoder incremental acoplado al eje para obtener las mediciones de velocidad angular.

6. Realizar un servosistema.

Objetivo: Generación de un sistema de control de lazo cerrado tipo PID con la tarjeta de control DS1104.

Descripción: Implementar un controlador PID para el control de la posición angular de un motor de corriente directa. Sintonizar el controlador para un tipo de respuesta de su elección. Dentro del entorno Simulink, programar el sistema utilizando el bloque de control PID.

Realimentación: Como sensor de posición es posible utilizar un encoder incremental o potenciómetro, para la realimentación de la variable de salida (posición angular). En caso de hacer uso de la primera se deberá utilizar el bloque DS-1104ENC_POS_C1 del RTI1104, y en caso de la segunda se deberá utilizar el bloque DS1104ADC_C5 para la lectura del voltaje.

Señal de salida: Utilizando el bloque DS1104SL_DSP_PWM, definir una señal PWM en el canal y con la frecuencia de su elección. Definir un tiempo de paso fijo de 0.001s en el programa.

Monitorización: Haciendo uso de un layout en el programa ControlDesk Next Generation, realizar una interfaz gráfica que permita monitorear en tiempo real la posición angular, manipular los parámetros del controlador PID y modificar la posición angular de referencia (set point).

Sugerencia: Como etapa de potencia hacia el motor se recomienda utilizar un driver para el motor como el C.I L293D o un equivalente.

Solución:

1. En esta primera práctica se realiza un modelo en Simulink y se seleccionan los bloques de lectura del canal analógico y digital a utilizar de la tarjeta DS1104, para el caso de la lectura de la señal de voltaje se selecciona el bloque DS1104ADC_C6, en donde el valor de salida se multiplica por una ganancia de 10 y se guarda o se le asigna el valor al bloque scope “Gráfica de voltaje”. En el caso de la lectura de la señal digital se utiliza el bloque DS1104BIT_IN_C3 que entrega valores de tipo booleano, al querer realizar un conteo de pulsos detectados en dicho canal se tiene que hacer uso de un bloque que detecte los flancos de subida con el propósito de restringir el conteo, una vez utilizado el bloque “Detect Rise Positive” se realiza la conversión a valores de tipo entero, con el fin de enviar un 1 o un 0 al acumulador (lazo de memoria creado), la cantidad de flancos de subida detectados se almacenan y se le asignan al bloque scope llamado “cantidad de pulsos”.

A continuación se muestra en la figura 1 el diagrama de bloques realizado en Simulink de la práctica 1.

Con el programa ya compilado y cargado en la tarjeta de control DS1104 se procede a monitorear y desplegar los valores obtenidos tanto de la señal analógica como de la digital, es por eso que se crea una interface en el programa ControlDesk (ver figura 2) y se utilizan los instrumentos adecuados para una fácil visualización.

En la figura 3 se muestra el circuito armado y conectado al panel CP1104, para generar la señal de voltaje variable se utiliza un potenciómetro como divisor de voltaje, y para generar las señales digitales se utiliza un botón en configuración pull-down con una resistencia de valor de $1k\Omega$.

Práctica 1 DS1104

Pr1 Data

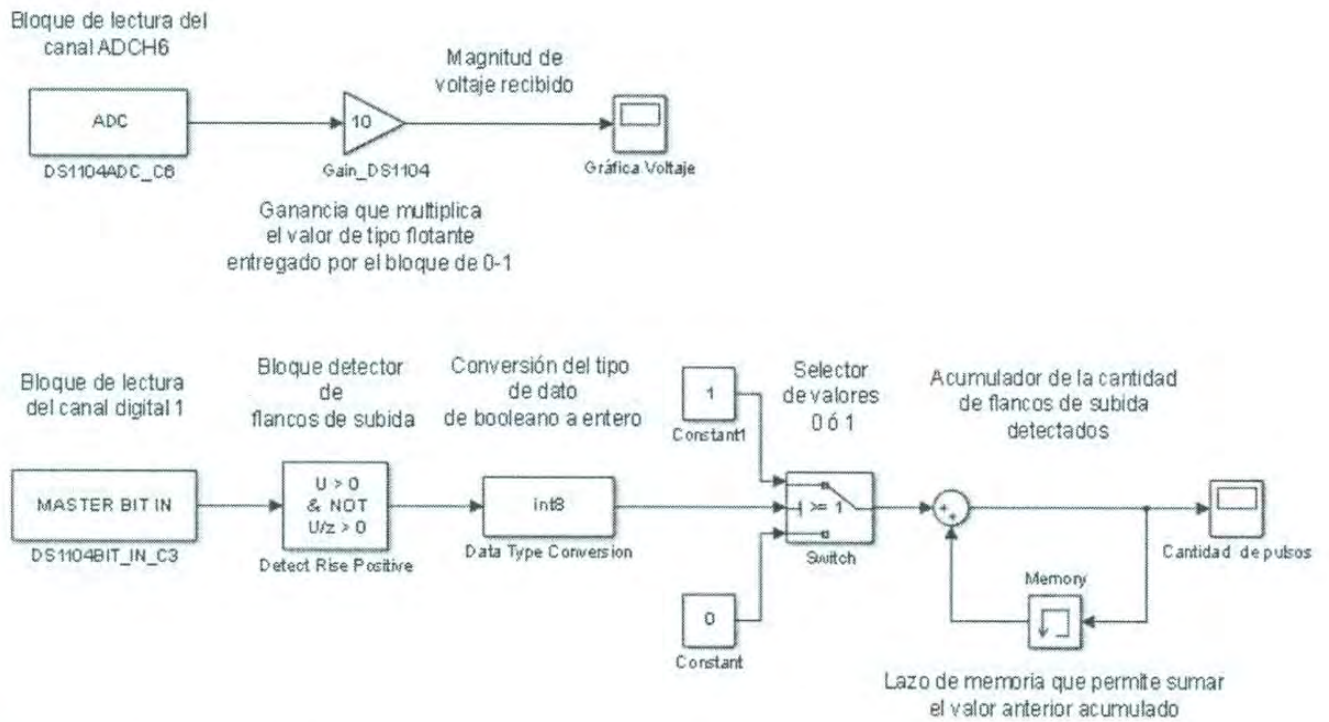


Figura 1. Diagrama de bloques en Simulink del programa de la práctica 1.

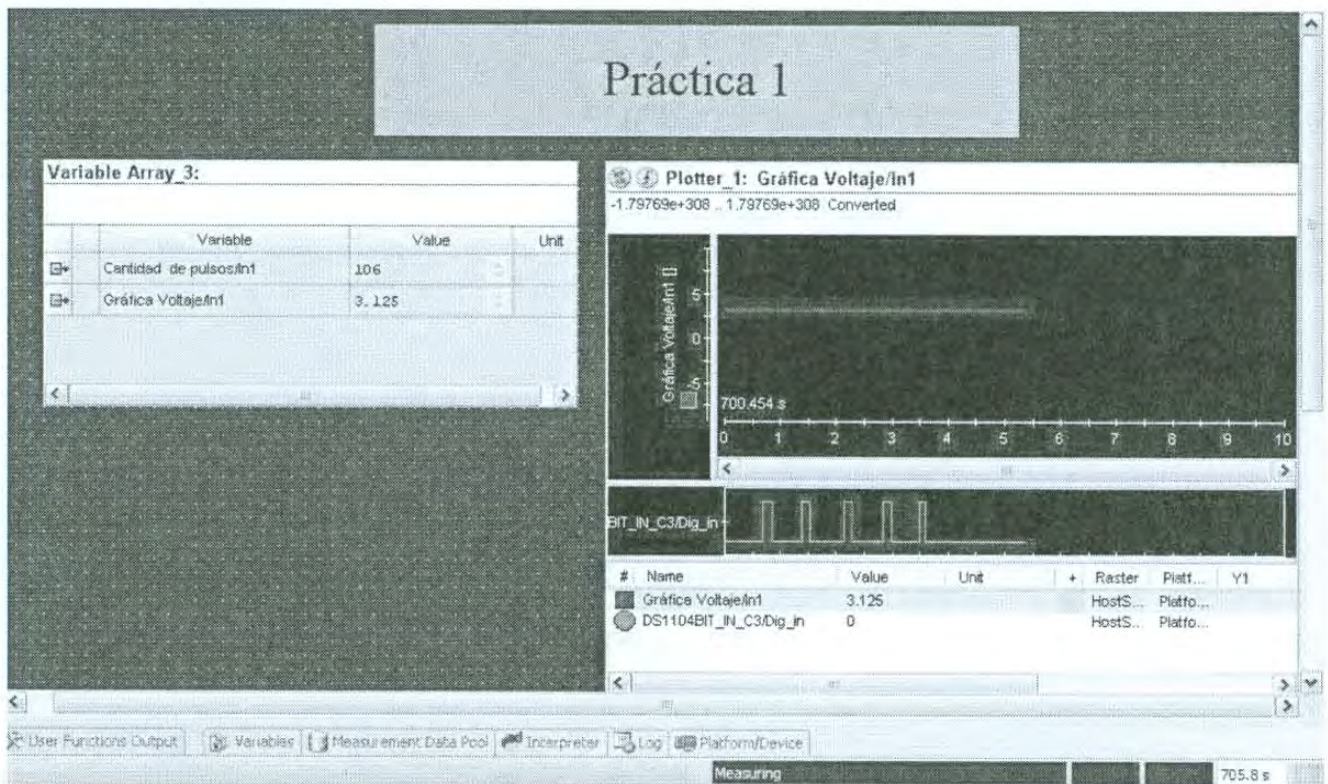


Figura 2. Layout en ControlDesk.

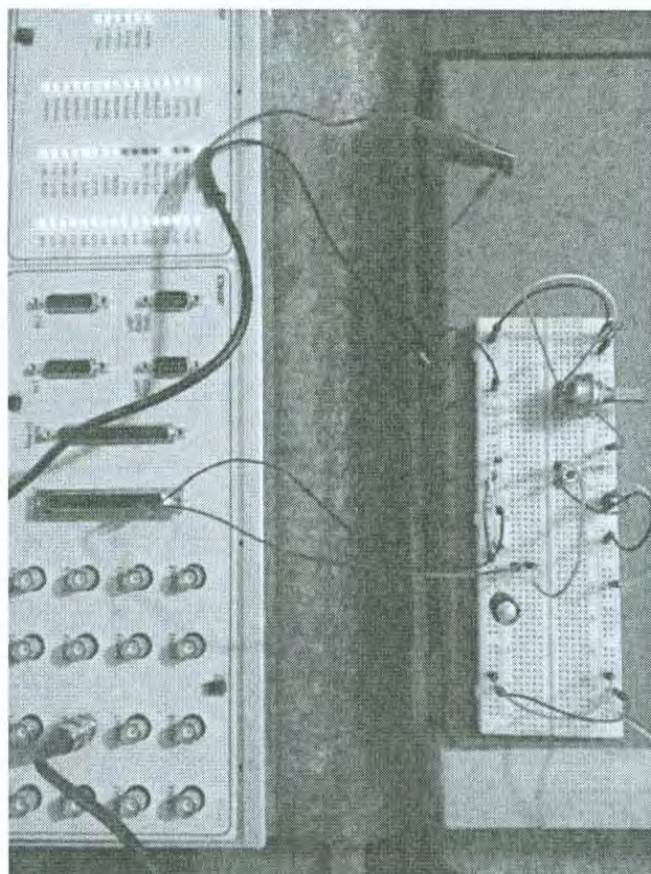


Figura 3. Circuito en protoboard y conexiones en el panel conector CP1104.

2. En la segunda práctica se tiene la finalidad de escribir en el canal del convertidor digital a analógico de la tarjeta de control diferentes tipos de señales y medirlas con un multímetro o un osciloscopio, por lo tanto, en el modelo creado en Simulink se eligen los canales del convertidor DAC a utilizar y se escriben los valores de las señales utilizando los bloques DS1104DAC_C1 y DS1104DAC_C2, las señales a utilizar son: senoidal completa y senoidal rectificada de media onda, además que se utiliza una variable de tipo constante para que el usuario pueda manipularla haciendo uso de una perilla en ControlDesk en un rango de valores de -10V hasta +10V. Los bloques de saturación utilizados en la programación tienen la finalidad de restringir los valores dentro del rango permitido por la tarjeta, para generar la señal senoidal se hace uso de un bloque que se encuentra en la librería continuous.

A continuación se muestra el programa realizado en Simulink de la práctica 2 en la figura 4. Con el programa ya compilado y cargado en la tarjeta DS1104 se procede a realizar un layout en ControlDesk para la manipulación de las variables a utilizar en esta práctica haciendo uso de los instrumentos que este programa contiene, dicho layout propuesto en esta práctica se muestra en la figura 5.

Por último en las figuras 6 y 7 se observan las imágenes tomadas de las mediciones realizadas con el multímetro de las señales escritas en la tarjeta de control.

Práctica 2 DS1104

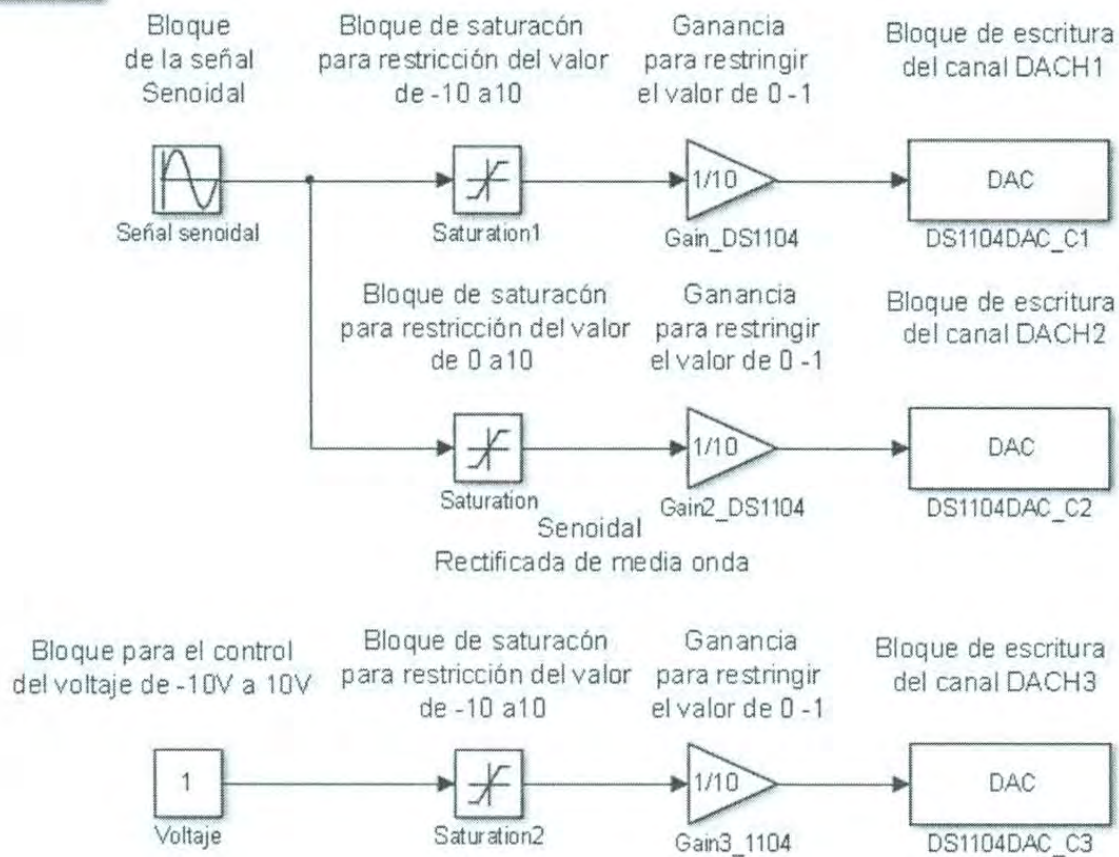


Figura 4. Diagrama de bloques en Simulink del programa de la práctica 2.

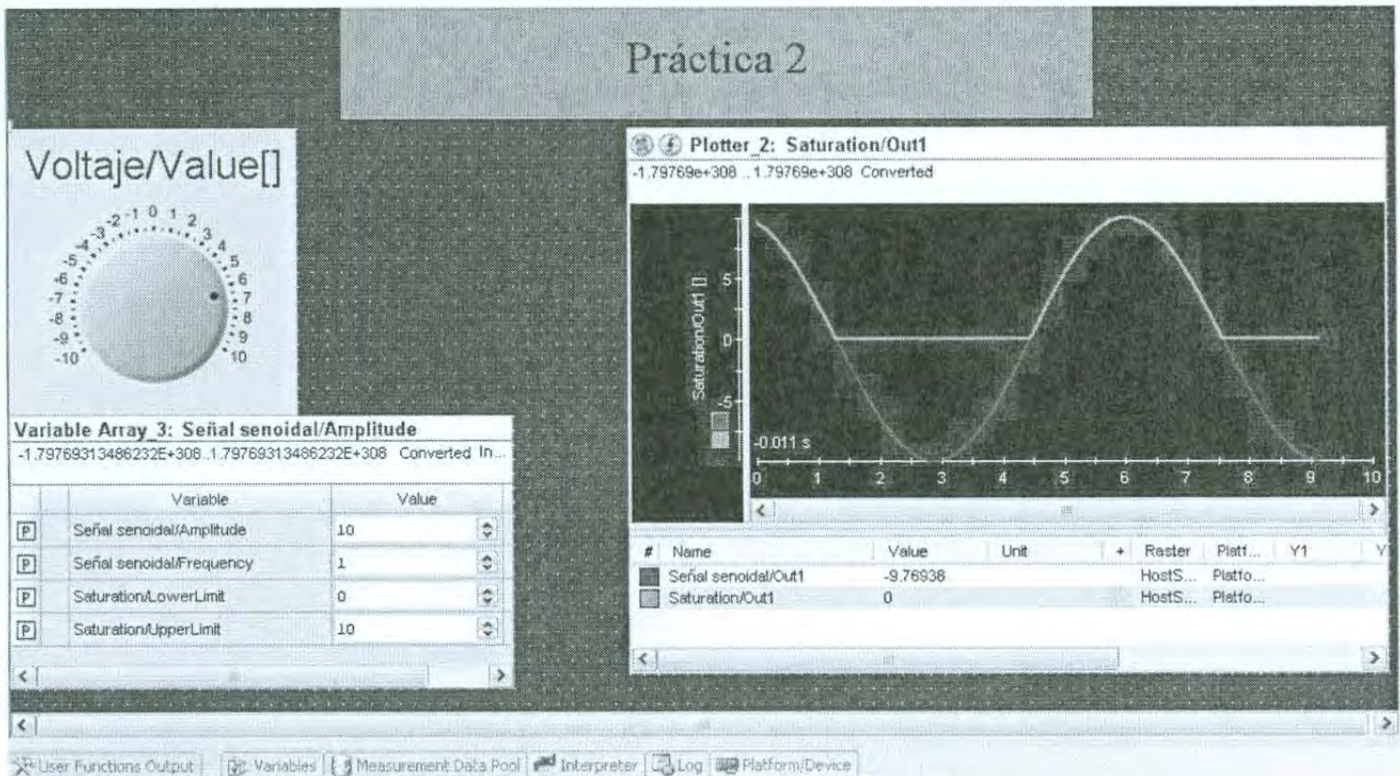


Figura 5. Layout en ControlDesk para la manipulación y monitoreo de las variables utilizadas en la práctica.

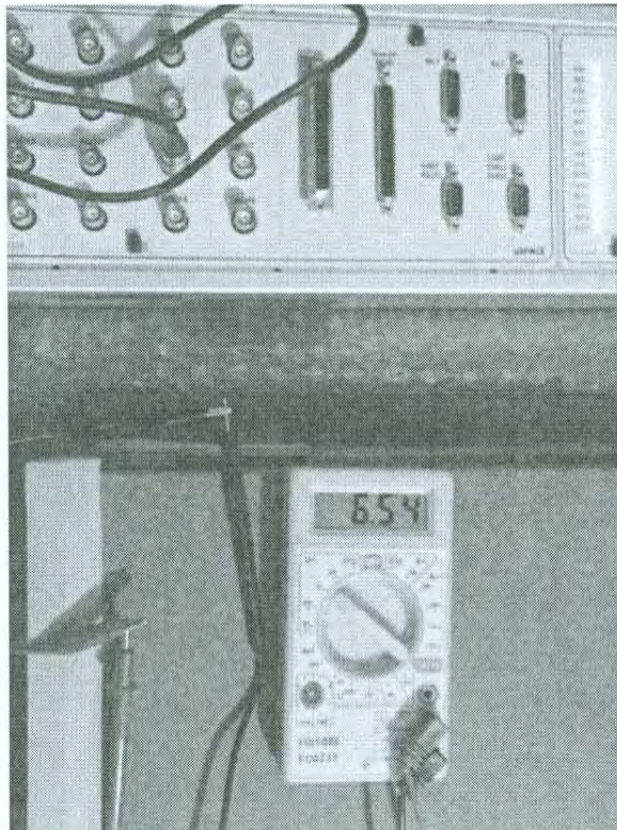


Figura 6. Mediciones de voltaje tomados del convertidor digital a analógico de la DS1104.

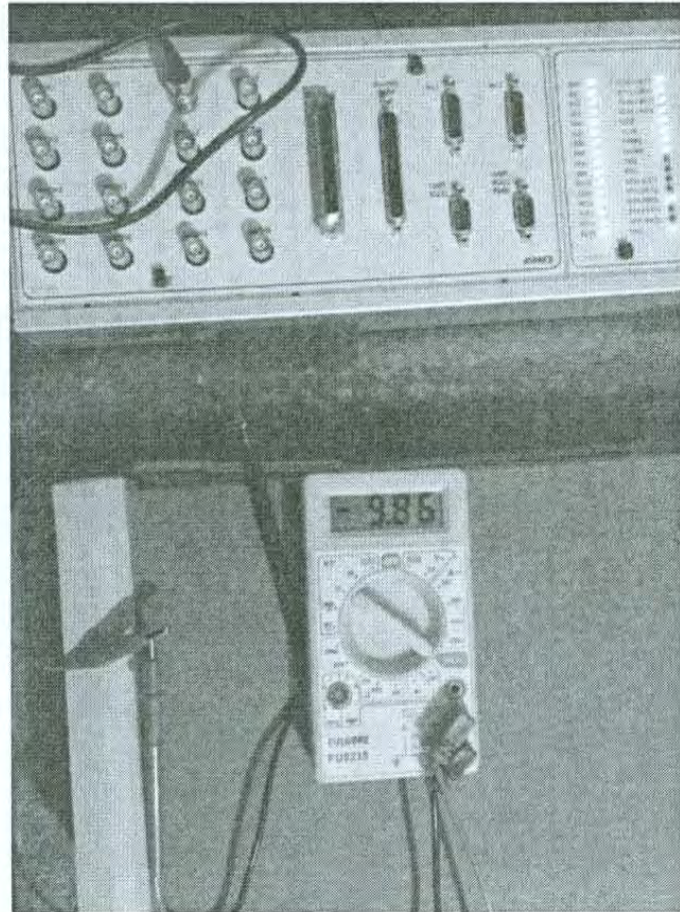


Figura 7. Mediciones de voltaje tomados del convertidor digital a analógico de la DS1104.

3. En la realización de la práctica #3 se hace uso del sensor LM35 para la medición de temperatura, ya que se tiene como finalidad el realizar un control en lazo cerrado de tipo ON-OFF para el control de temperatura, por lo tanto, para la adquisición de la señal de voltaje del sensor se hace uso en Simulink del bloque DS1104ADC_C5 que corresponde al canal 5 de la ADC, se dicho valor leído se multiplica por la ganancia de 10 y por el factor de escala o la resolución del sensor que es de 100mV/°C, una vez multiplicada por estas ganancias se obtiene en el valor de temperatura en °C, después se obtiene la resta entre el valor de temperatura real y la temperatura de referencia para obtener la señal del error, que dicha señal entra al bloque Sign que envía el valor de 1 cuando el error es positivo y -1 cuando el error es negativo, con dichos resultados se procede a obtener utilizando el bloque MinMax el valor de 0 cuando el error es negativo y de 1 cuando el error es positivo, por último se convierten los datos a tipo booleanos y se escriben en el canal digital C0 utilizando el bloque DS1104BIT_OUT_C0 configurado como bloque de salida.

En la figura 8 se muestra el modelo hecho en Simulink de la práctica 3, en donde se pueden identificar los bloques de la tarjeta de control utilizados y el procesamiento de datos que conlleva el utilizarlos.

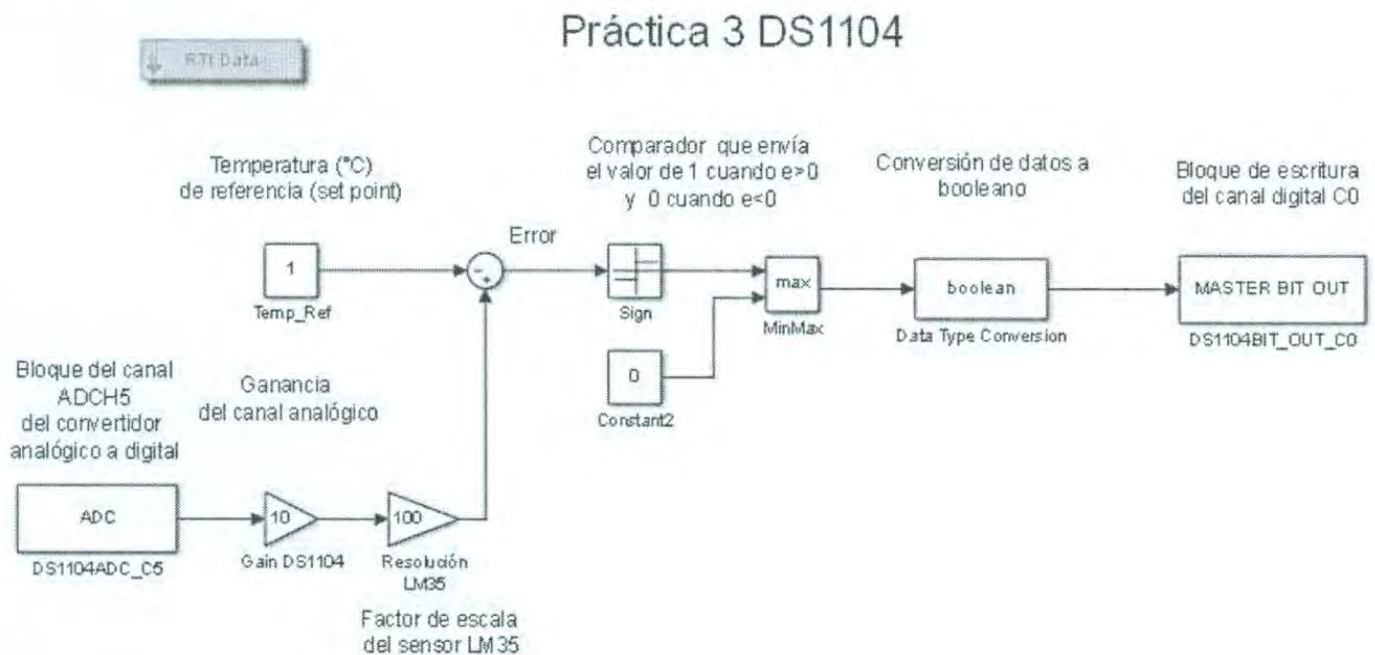


Figura 8. Diagrama de bloques en Simulink del programa de la práctica 3.

En la figura 9 se muestra el layout en ControlDesk de la práctica en donde se observa las mediciones de temperatura entregadas por el sensor LM35 y la perilla de la temperatura de referencia o deseada, en el instrumento Plotter_10 se observa la gráfica de temperatura y de la señal digital de salida que enciende el ventilador.

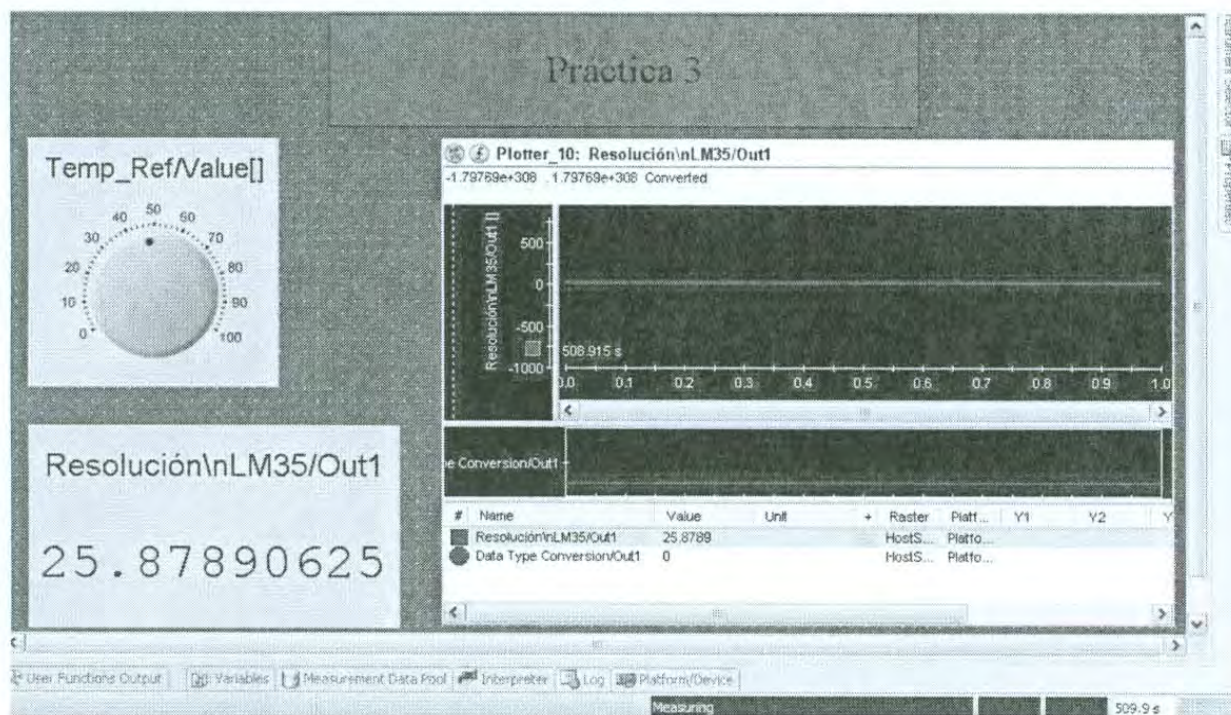


Figura 9. Layout en ControlDesk en donde se observa la temperatura en °C leída por el sensor LM35, y la temperatura de referencia o de entrada del sistema de control ON-OFF.

Una vez cargado el programa en la tarjeta de control se procede a realizar los circuitos electrónicos (ver figura 10), se realiza una etapa de potencia para el correcto funcionamiento del motor del ventilador utilizando el transistor TIP121 en saturación, las conexiones se realizan de la protoboard al panel conector CP1104 de la tarjeta de control, el ventilador utilizado se alimenta con 5V.

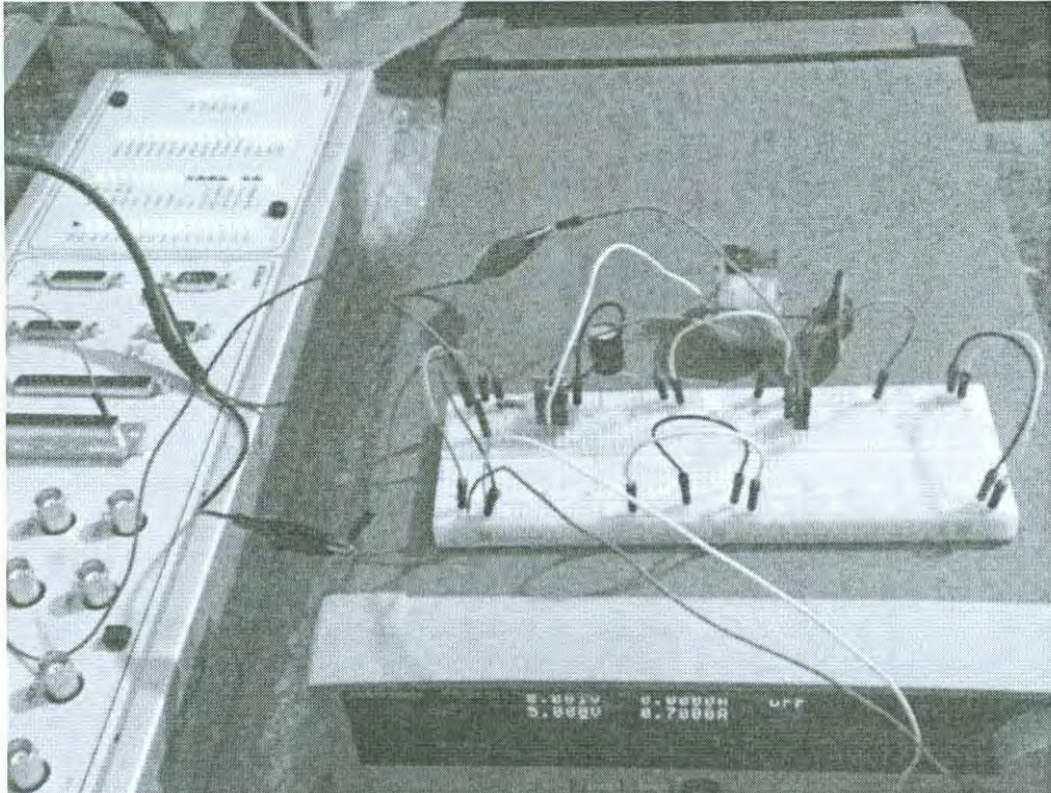


Figura 10. Circuito electrónico armado en protoboard y conexiones al CP1104 de la práctica 3.

4. En esta práctica #4 se tiene como finalidad el control de la velocidad de un motor de CD. en lazo abierto, por lo tanto se realiza un programa en Simulink en donde el usuario pueda manipular el ciclo de trabajo de la señal PWM y con esto variar directamente su velocidad angular, pero antes para poder llevar esto a cabo se tiene que realizar una etapa de potencia (transistor TIP121) para brindarle al motor los requerimientos de voltaje y corriente necesarios para su óptimo funcionamiento.

En la figura 11 se muestra el diagrama de bloques desarrollado en Simulink de esta práctica, en donde se observa la variable de control (RPM_Ref 0-100%) que será la que el usuario manipulará para modificar el ciclo de trabajo del PWM, después se coloca en serie la ganancia de conversión para reducir el valor de RPM_Ref de 0-1, que será el valor que entrará al bloque DS1104SL_DSP_PWM, que es el bloque de escritura para la configuración del ciclo de trabajo, frecuencia (configurada a 1kHz) y el canal a utilizar del PWM. Así también se puede observar el algoritmo de acondicionamiento de los pulsos que envía el encoder, esto con el propósito de presentar un valor de velocidad angular del motor (en RPM).

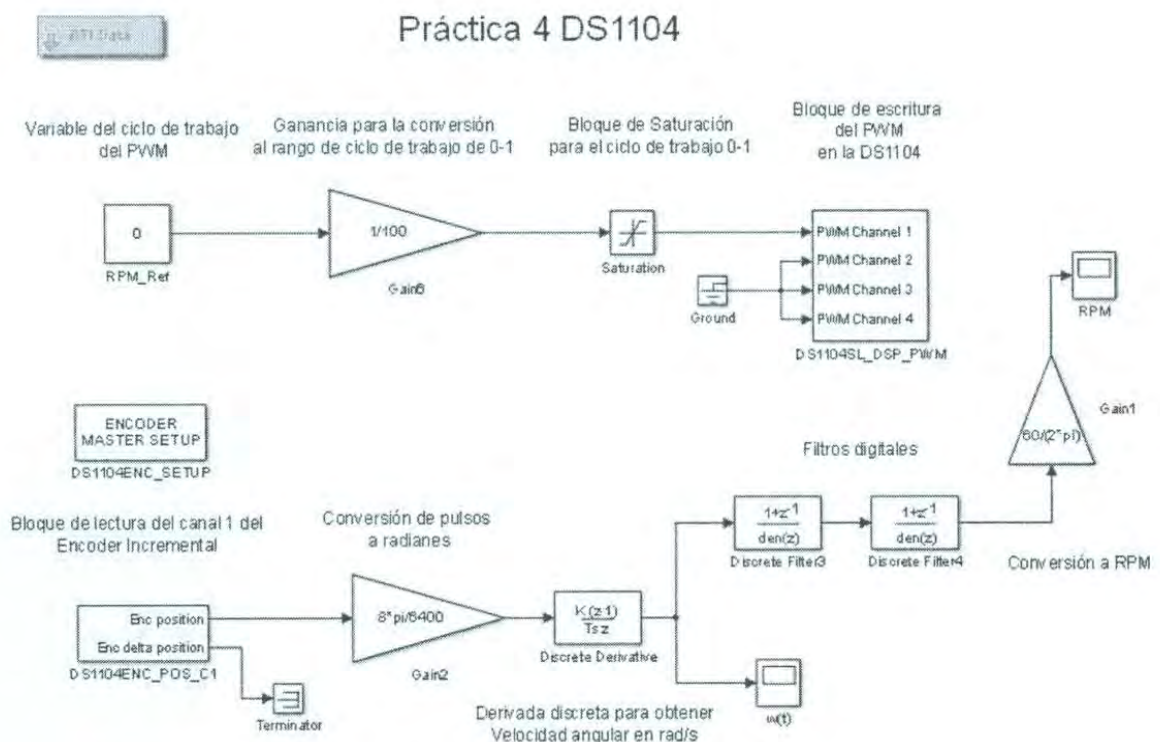


Figura 11. Diagrama de bloques en Simulink de la práctica #4.

Una vez desarrollado el modelo en Simulink, compilado y descargado en la tarjeta de control se procede a realizar una interfaz en ControlDesk como se muestra en la figura 12, en donde se coloca una perilla (variable RPM_Ref/Value) para la manipulación del ciclo de trabajo del PWM, además se coloca una gráfica (variable de entrada Plotter_2: RPM/In1) para desplegar o monitorear el valor de la velocidad angular del motor en RPM

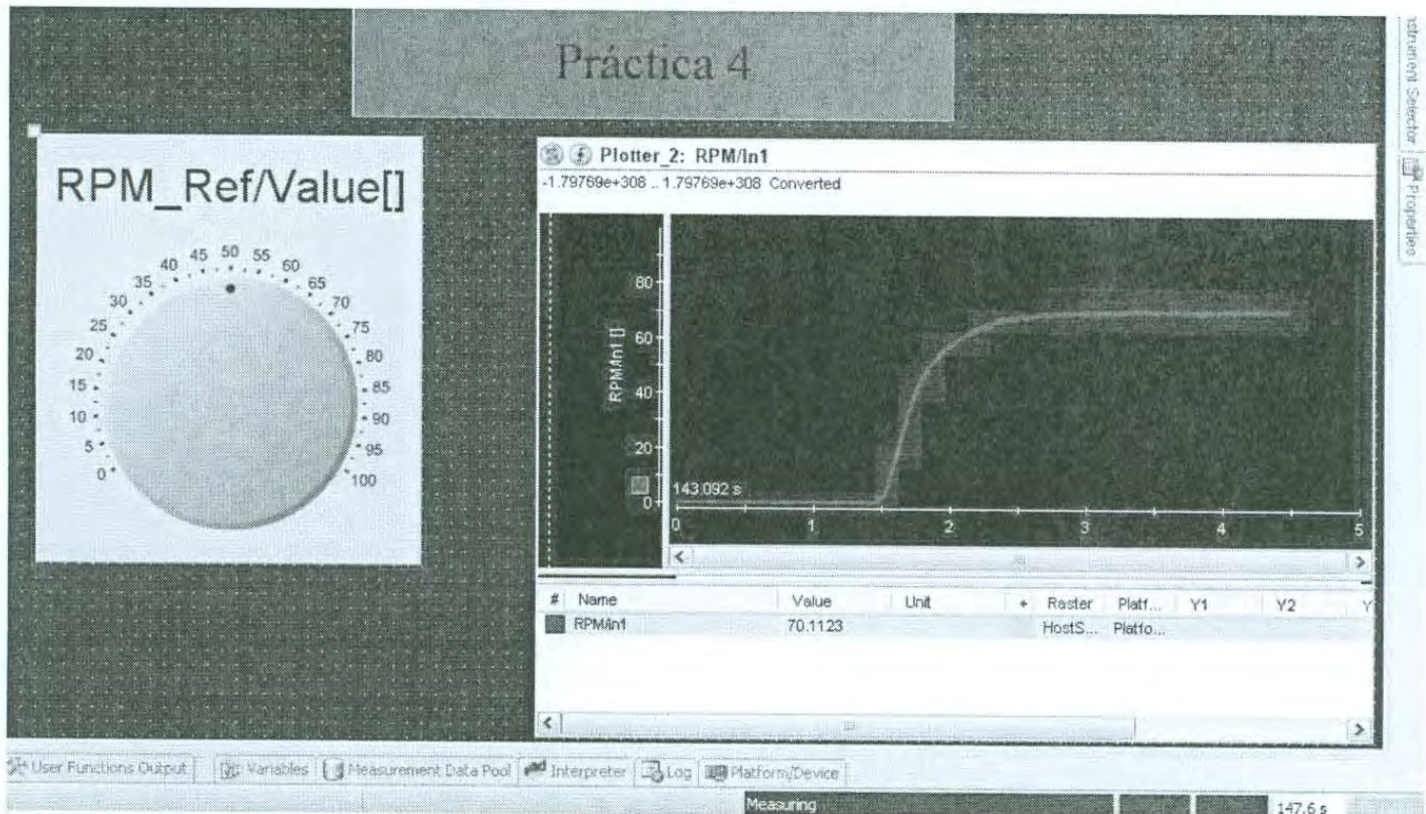


Figura 12. Layout en ControlDesk de la práctica #4.

Para llevar a cabo la implementación física del control de la velocidad angular se tuvo que realizar y armar un circuito de etapa de potencia como se muestra en la figura 13, la etapa de potencia está compuesta por un transistor TIP 121 de tipo Darlington de alta ganancia, un diodo 1N4001 y una resistencia en la base del transistor de 330Ω . En las figuras 14 y 15 se puede apreciar las conexiones e interfaces físicas del motor de CD y el circuito de potencia con el panel conector CP1104.

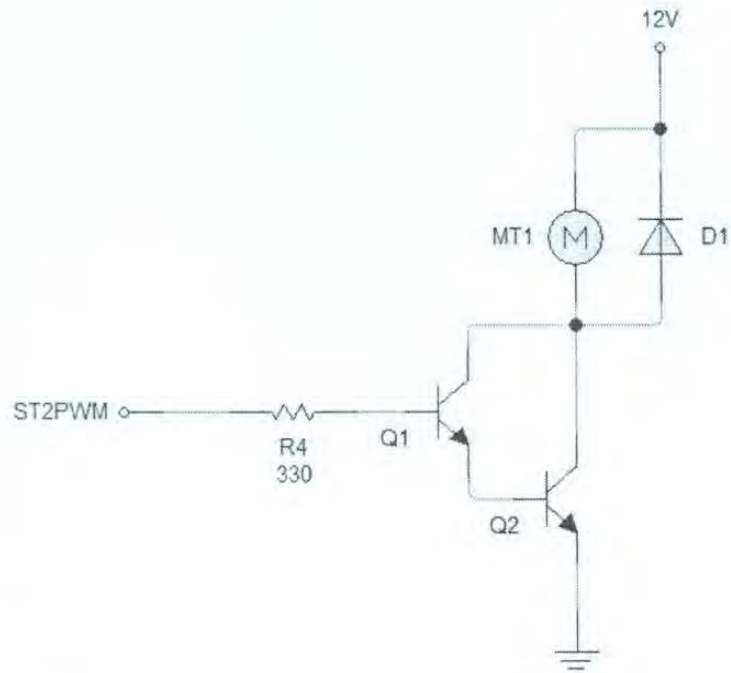


Figura 13. Circuito de potencia haciendo uso del transistor TIP121.

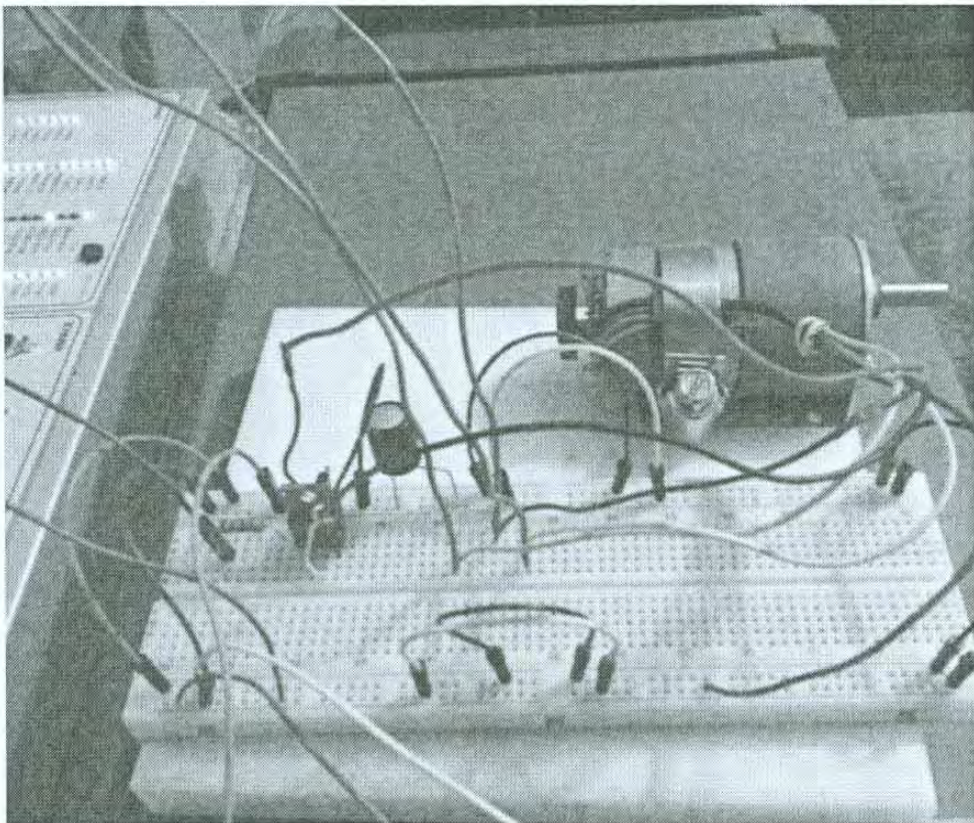


Figura 14. Circuito de potencia y motor de CD utilizados en la práctica.

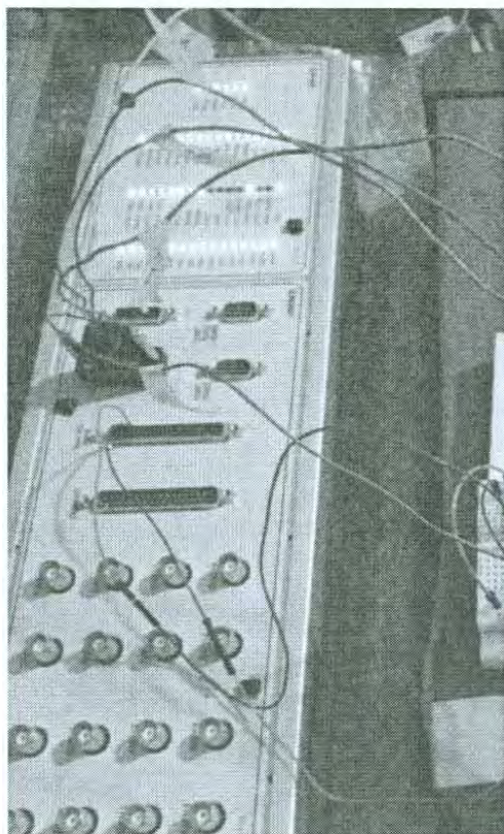


Figura 15. Conexiones en el panel conector 1104 de la tarjeta de control.

5. En esta última práctica se implementa un controlador PID en la tarjeta DS1104 con la finalidad de controlar la velocidad angular del motor de corriente directa y observar las características y cambios que presenta en la respuesta (variable de salida) al modificar las ganancias proporcional, integral y derivativa. En la figura 16 se presenta el diagrama de bloques en Simulink de esta práctica en donde se muestra las 3 partes que componen dicho algoritmo, una de ellas la etapa de adquisición y lectura de los pulsos provenientes del encoder, se realiza una conversión a radianes para después dividir los delta de posición angular entre el periodo de muestro para poder obtener la velocidad angular en rad/s (bloque de derivada discreta), la segunda parte es la trayectoria de lazo cerrado en donde se encuentra el bloque restador que compara la velocidad de referencia con respecto el valor de velocidad real del motor para obtener la señal de error que entra directamente al bloque del controlador PID, por último se tiene la señal de control enviada por el bloque PID controller en donde se realiza una conversión de la señal a ciclo de trabajo para ser escrita en el bloque PWM de la tarjeta de control.

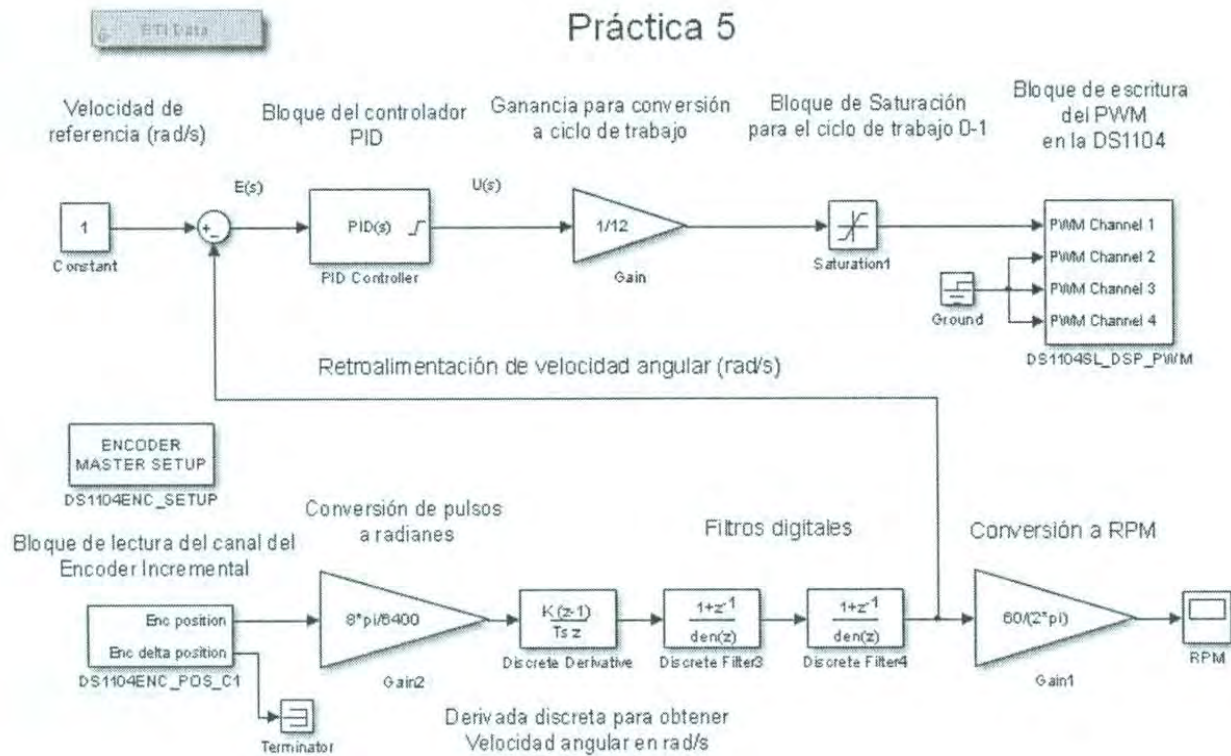


Figura 16. Diagrama de bloques en Simulink del programa de la práctica 5, del controlador PID.

Una vez desarrollado el programa en Simulink se procede a compilarlo y cargarlo en la tarjeta de control para realizar las pruebas correspondientes pero antes, se debe de realizar layout en el programa ControlDesk para el monitoreo y manipulación de las variables de control, en la figura 17 se muestra el layout en donde se puede observar la respuesta del sistema de control en lazo cerrado con la acción de control PID, los valores de las ganancias del controlador son a su criterio ya que la finalidad es que observe los cambios en la respuesta de salida del sistema de control.

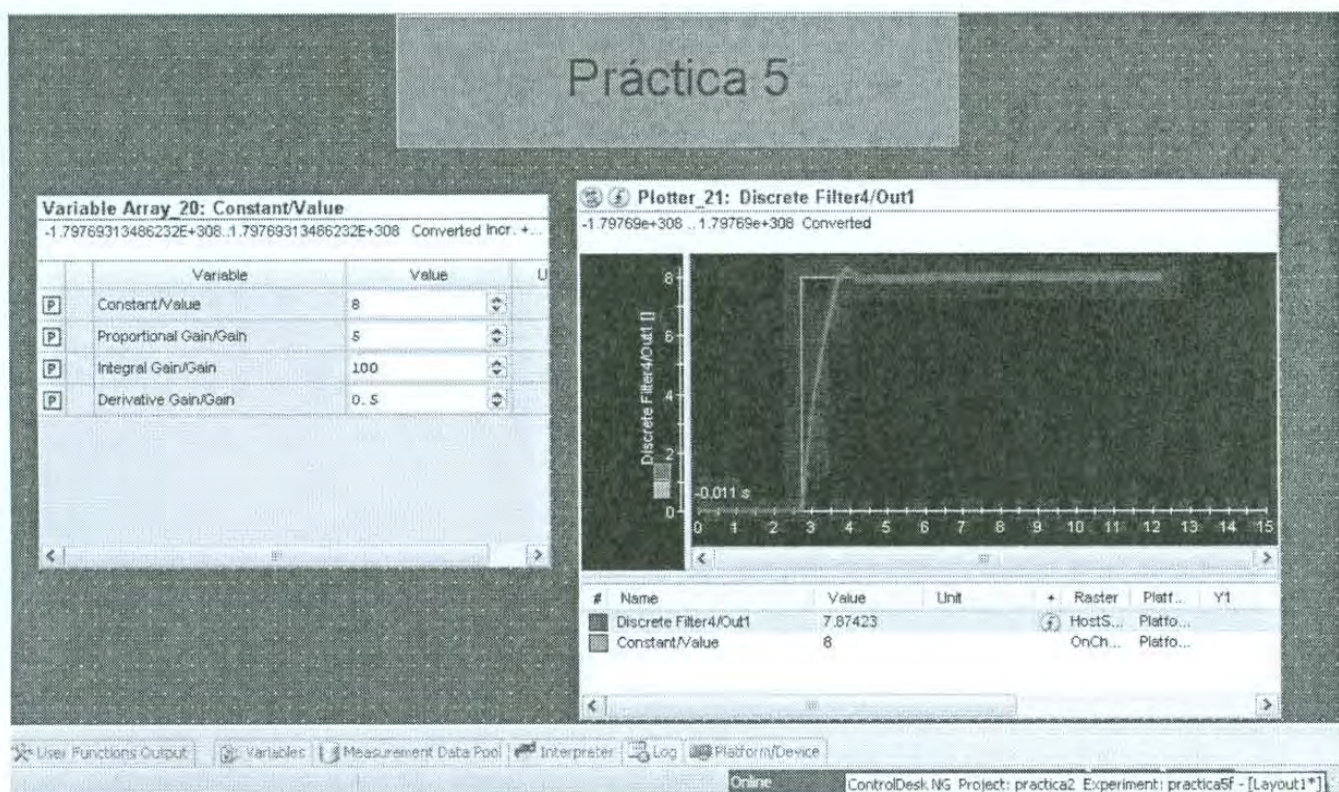


Figura 17. Layout en ControlDesk de la práctica 5.

Para poder llevar a cabo la implementación física se debe construir una etapa de potencia para que el motor funcione de forma correcta entregándole los requerimientos de corriente y voltaje óptimos, por lo tanto el circuito de potencia utilizado es el mismo que se muestra en la figura 14 en donde a la entrada se tiene la señal PWM entregada por el controlador.

Por último, en la figura 18 se presenta la implementación física de la práctica, en donde se muestra el circuito armado, las conexiones entre el motor, encoder y el panel conector de la tarjeta DS1104.

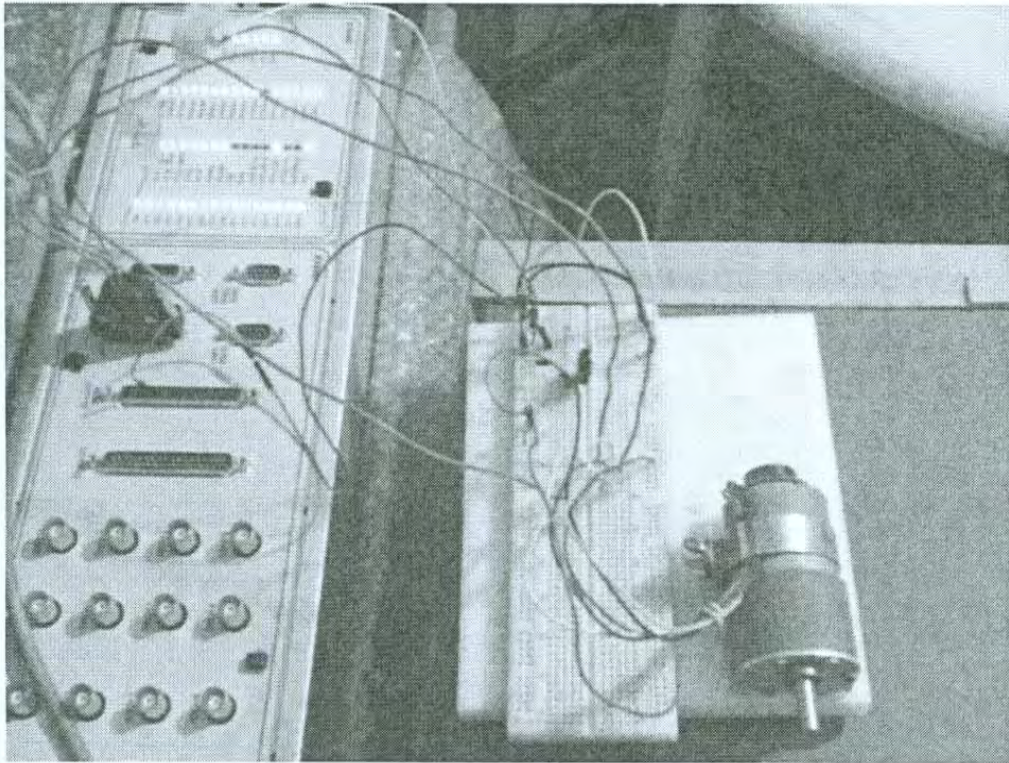


Figura 18. Conexiones entre el panel conector 1104 de la tarjeta de control, circuito de potencia y el motor de CD.