

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Polinomios, productos y anillos de gráficas

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctor en Ciencias

(Matemáticas)

Presenta:

Campanelli Nicolas Pierre André

Director de Tesis: Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Codirector: Jose Luis Martínez Morales

Hermosillo, Sonora, México.

5 de agosto 2016

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

SINODALES

Dr. Martín Eduardo Frías Armenta
Universidad de Sonora, Hermosillo

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora, Hermosillo

Dr. Ismael Gonzalez Yero
Universidad de Cádiz, Cádiz

Dra. Olivia Gutú
Universidad de Sonora, Hermosillo

Jose Luis Martinez Morales
Universidad Autónoma de Morelos, Cuernavaca

Agradecimientos

Primero quisiera agradecer de manera especial a mi director de tesis y amigo, el doctor Martín Eduardo Frías Armenta por haberme ayudado a lo largo de mi tesis de licenciatura, maestría y doctorado. También, agradezco a los doctores Guillermo Dávila Rascón, Olivia Gutú, Ismael Gonzalez Yero y Jose Luis Martinez Morales por haber aceptado ser sinodales de esta tesis y haberme ayudado en las correcciones para que este trabajo fuera lo mejor posible. De verdad, un gran gracias a todos ustedes.

También quisiera agradecer el CONACYT quien me apoyo economicamente durante varios años y sin el cuál quiza este trabajo no hubiera sido posible.

Quiero agradecer también a todos los maestros del departamento de matemáticas de la Universidad de Sonora, especialmente a los maestros del programa de posgrado, quienes me compartieron su saber y me hicieron crecer como persona y como matemático.

Quisiera extender mis agradecimientos a todos mis amigos a lo largo de la vida, especialmente los que están en mi vida desde la niñez Bruno, Nicolas, Remi, Marc, Yann, Damien, Jeff, entre muchos otros (Si je ne l'avais pas fait pour moi, je l'aurais fait pour Didier). No quiero olvidar los amigos que me acompañaron diariamente en la universidad en los estudios, risas, trabajos, fiestas durante estos 4 años del doctorado, especialmente quiero agradecer a David, Jorge, Juan, Misael, Dalicia, Denise y Tanahara, y les pido una disculpa si olvide alguien. No quiero tampoco olvidar el apoyo de Albert por la ayuda en la redacción de la introducción de este trabajo.

Quiero dar un agradecimiento especial a mi familia. Primero mis papás, mi abuela, hermano, primos, tíos que aunque estuvieron lejos esos años por la distancia, siempre estuvieron presente y me han apoyado de todas las maneras que pudieron.

Por último quiero agradecer a mi esposa impulsora Isabel, a quien no se como agradecer por apoyarme tanto en todas mis decisiones, así como a mi hija Zoé y mi hijo Andrés por ser la mejor motivación de superación que exista.

Resumen

Esta tesis es el resultado de tres trabajos distintos pero todos relacionados con los productos de gráficas. En una primera parte, el trabajo realizado consistió en buscar cuáles de los 256 productos de gráficas existentes podían asociarse al grupo $K_{\cup}(\mathcal{G})$ en vista de obtener una estructura de anillo. Luego se desarrolló el mismo trabajo para el grupo $K_{+}(\mathcal{G})$. En ambos casos el resultado fue que exactamente 6 productos cumplían y por último se mostró que cada uno de los anillos formados sobre $K_{\cup}(\mathcal{G})$ es isomorfo a algún anillo formado sobre $K_{+}(\mathcal{G})$.

En una segunda parte, la pregunta planteada fue: ¿En qué casos es posible calcular el polinomio de completas de un producto de gráficas en términos de los polinomios de completas de sus gráficas factores? Se analizaron todos los casos proporcionando la fórmula en los casos afirmativos y un contraejemplo en los casos negativos.

La tercera y última parte de este trabajo se centra en la partición dimensional de uno de los productos de gráficas. Este estudio permitió encontrar cotas así como en algunos casos el valor exacto de la partición dimensional del producto lexicográfico para gráficas arbitrarias y ciertas familias específicas de gráficas como las trayectorias, los ciclos, las gráficas completas y los conjuntos independientes.

Abstract

This thesis is a set of three separate works, all of them related with graph products. In the first part, the work done was to search which of the 256 products could be associated to the $K_{\cup}(G)$ group in order to form a ring structure. The same work was then applied for the $K_{+}(G)$ group. In both cases, the result was that exactly 6 products complied and ultimately it was shown that each one of the rings formed over $K_{\cup}(G)$ is isomorphic to some ring formed over $K_{+}(G)$.

In the second part, the question raised was: In which case it is possible to calculate the clique polynomial of a graphs product in terms of the clique polynomials of its factors graphs? We analyzed each case, giving the formula in the affirmative cases and a counterexample in the negative ones.

The third and last part of this work focuses on the dimensional partition of one of the graphs product. Here we found boundaries or, in some cases, the exact value of the dimensional partition of the graphs product for the general case and for certain specific graphs families, such as the clique ones, the trajectories, the cicles or the independent sets.

Contenido

Resumen	vii
Abstract	ix
Introducción	1
1 Anillos de gráficas	7
1.1 Grupo de Grothendieck para unión y suma	7
1.2 Productos de gráficas	11
1.3 Anillos con la unión de gráficas	18
1.4 Anillos con suma de gráficas	27
2 Polinomios de productos de gráficas	31
2.1 Resultados preliminares	32
2.2 Polinomios de productos de gráficas	33
2.2.1 Representación matricial con 1 E	42
2.2.2 Representación matricial con 2 E	43
2.2.3 Representación matricial con 3 E	44
2.2.4 Representación matricial con 4 E	48
2.2.5 Representación matricial con 5 E	54
2.2.6 Representación matricial con 6 E	59
2.2.7 Representación matricial con 7 E	61
3 Sobre particiones resolventes para el producto lexicográfico	63
3.1 Introducción y definiciones	63
3.2 Resultados generales	65
3.3 Familias específicas de gráficas	71
3.4 Conjuntos independientes	80
Apéndice	91

Introducción

La palabra gráfica proviene del latín *graphicus* y ésta a su vez, del griego *grafikós* (*γραφικός*), la cual significa “relacionado con la escritura” o “escribir”. En el lenguaje científico actual, la teoría de gráficas es una rama de las matemáticas cuyo origen suele situarse en el famoso problema de los “siete puentes de Königsberg”, el cuál fue resuelto por Leonhard Euler en 1736 [41]. Este problema consistía en encontrar un camino para recorrer toda la ciudad de Königsberg, pasando una sola vez por cada uno de los siete puentes que existían en la ciudad (ver Figura 1). Euler demostró que no existía tal camino. En su demostración representó las zonas terrestres por puntos y los puentes por líneas, obteniendo de este modo la gráfica de la Figura 2, la cuál es frecuentemente considerada como la primera gráfica de esta teoría.

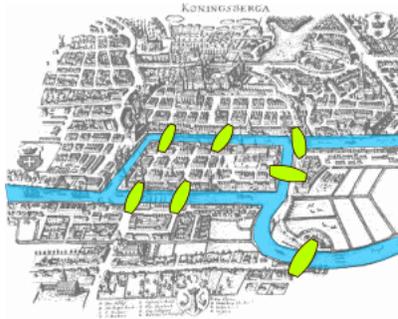


Figura 1: La ciudad de Königsberg en la época de Euler

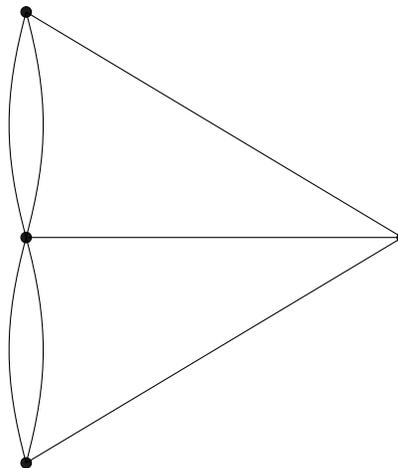


Figura 2: La gráfica de Euler para el problema de los siete puentes

Años más tarde, en 1847, Gustav Kirchhoff utilizó las gráficas para modelar los circuitos eléctricos, asociando los componentes eléctricos de un circuito a vértices y aristas de una gráfica. Luego a cada componente del circuito le asoció un peso y aplicando sus leyes a cada uno de los vértices de la gráfica, obtuvo un sistema de ecuaciones. El trabajo de Kirchhoff consistió en determinar un sistema reducido y equivalente de dichas ecuaciones. Para ello, tuvo que estudiar también las gráficas en sí mismas, iniciando de esta manera el estudio de lo que conocemos ahora como las gráficas conexas. su trabajo se considera la primera aplicación de la teoría de gráficas a un problema de ingeniería.

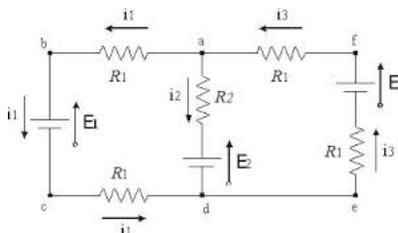


Figura 3: Ejemplo de gráfica representando un circuito eléctrico

Media década después, se planteó el célebre problema de la coloración de mapas, conocido como el *Problema de los Cuatro Colores*. En una carta enviada a William Hamilton, Augusto de Morgan le comentó que un estudiante suyo, Francis Guthrie, le había preguntado si cualquier mapa se podría colorear con 4 colores. El problema fue resuelto en el año 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, después de más de un siglo de pruebas y contraejemplos erróneos. Para resolverlo, utilizaron la teoría de gráficas, reemplazando los países por vértices y poniendo una arista entre dos vértices si los países correspondientes si tienen una frontera en común. El problema fue muy famoso debido a la polémica que generó en su época ya que Appel y Haken utilizaron tres computadoras para resolver unos miles de casos que no pudieron resolver analíticamente.

Según el tipo de problema se utilizan distintos tipos de gráficas. Por ejemplo, podemos citar entre otras las gráficas dirigidas, en las cuales las aristas tienen una dirección. Otro tipo de gráficas son las multigráficas en las cuales las aristas no son subconjuntos de dos elementos del conjunto de vértices de la gráfica, sino subconjuntos de tamaño arbitrario. De igual manera se distinguen las gráficas con pesos o sin pesos en las aristas y aquellas que admiten lazos, es decir, aristas de un vértice hacia sí mismo. Por último es importante mencionar aquellas gráficas que son el principal interés de este trabajo: las gráficas simples, es decir, gráficas sin lazos, ni pesos, ni direcciones (para una definición precisa ver apéndice).

Hoy en día, el uso de las gráficas ha incrementado notablemente así como sus aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la investigación. Por sólo citar algunas, además de los ya mencionados circuitos eléctricos, podemos mencionar el uso de

las gráficas en los árboles genealógicos, la distribución de espacios arquitectónicos, los emparejamientos de objetos, la biología molecular (decodificación del ADN), la programación de actividades, los sistemas de localización, el análisis de estructuras, los códigos de barra, los resultados de torneos, la estadística, el análisis lingüístico, los juegos, el estudio de datos en las redes sociales, los algoritmos de búsqueda en Internet (google), etc... La teoría de gráficas se ha visto también relacionada con ramas como la topología (el problema de los cuatro colores o de los siete puentes son unos ejemplos de esto), la estadística, la probabilidad, la combinatoria, la geometría de polígonos, la aritmética y el álgebra, en el cual podemos destacar los estudios de las operaciones con gráficas como productos, uniones y suma.

Un posible enfoque para el análisis es el estudio de la estructura del producto de las gráficas en sí mismo. Hay una amplia bibliografía sobre el reconocimiento de productos de gráficas, solo por citar algunos [53] [54] [55] citejanez[57] [47]. Un segundo enfoque está relacionado con el estudio del comportamiento de algunos invariantes de gráficas productos. Un ejemplo de este tipo de estudio lo conforma la conjetura de Vizing [58] [59] [60] [61] que está vinculada con lo siguiente: un conjunto dominante es un conjunto de vértices de una gráfica G , tal que todos los vértices fuera del conjunto tienen un vecino en el conjunto dominante. El *número dominante* $\gamma(G)$ es el menor cardinal de un conjunto dominante de G . La conjetura de Vizing plantea que para dos gráficas G, H , $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ donde \square representa el producto cartesiano de gráficas, un producto que estudiaremos más detenidamente en esta tesis. Otros parámetros, tales como la conectividad, la coloración, el tamaño de las subgráficas completas o de los cliques, entre otros, han sido también objeto de desarrollo.

En este trabajo estudiaremos varios aspectos de diversos productos de gráficas. Más precisamente, en una primera parte, nos proponemos estudiar las propiedades de los productos de gráficas haciendo uso de la teoría de grupos y de anillos. En una segunda parte, nos interesaremos por la estructura de las gráficas productos y su reconocimiento a través de los polinomios de completas. Por último trabajaremos lo concerniente a la partición dimensional y analizaremos su comportamiento cuando se tiene el producto lexicográfico de dos gráficas.

Productos de gráficas

Los productos de gráficas fueron introducidos por Whitehead y Russell en 1912 y redescubiertos por Gert Sabidussi en 1960 [9]. Con el desarrollo cada vez más notorio de las ciencias de computación, los estudios y las aplicaciones de estos tipos de gráficas han resultado ser cada vez más numerosos, véase por ejemplo [42], [43], [44], [45]. Un producto de dos gráficas $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ es otra gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) \times V(H)$ y cuyo conjunto de aristas está totalmente definido por las adyacencias y no adyacencias en G y H . Como veremos más adelante, existen 256 productos distintos, sin embargo, algunos son más estudiados que otros por tener propiedades más interesantes como por ejemplo

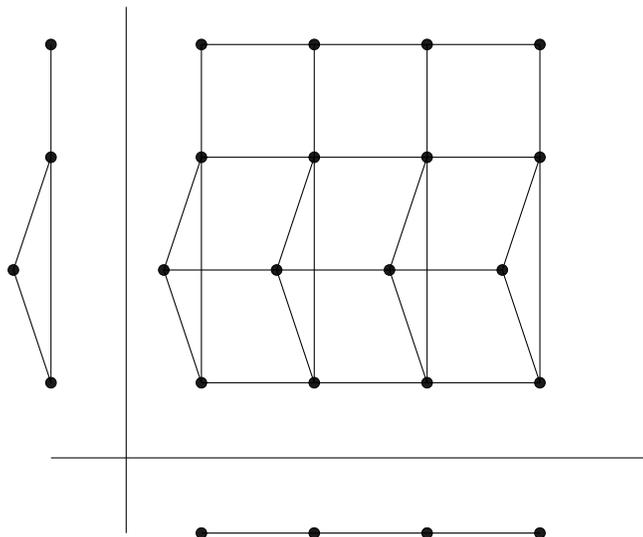


Figura 4: Ejemplo de producto cartesiano

la asociatividad, conmutatividad, etc... Podemos destacar el producto cartesiano, el producto fuerte, el producto lexicográfico, el producto tensorial (o categórico) y el producto modular, para los cuales hay una amplia bibliografía, entre otros: [46], [47], [49], [50], [51], [52], [48], [39], [40].

Por ejemplo, veamos el caso del producto cartesiano. Para dos gráficas $G = (V(G), E(G))$, $H = (V(H), E(H))$, el producto cartesiano se define como la gráfica $G \square H = (V', E')$ donde $V' = V(G) \times V(H)$ y $(g_1, h_1)(g_2, h_2)$ están en E' si y sólo si $Ig_1 = g_2$ y $h_1h_2 \in E(H)$ o $(h_1 = h_2$ y $g_1g_2 \in E(G))$ (ver Figura 4).

Este producto es uno de los más estudiados. Las investigaciones se enfocan en general en la caracterización de las gráficas productos: por ejemplo se sabe que si una gráfica es un producto cartesiano de gráficas, entonces puede ser factorizada únicamente en dos gráficas factores primas, es decir gráficas que no pueden ser factorizadas como producto de dos gráficas factores [9]. También se sabe que un producto cartesiano de gráficas es transitivo por vértices si y sólo si sus gráficas factores también lo son [7]. Otro punto de interés en el estudio de los productos de gráficas está representado por los invariantes. Podemos citar entre otras la antes mencionada conjetura de Vizing. También se sabe que el número cromático χ (el mínimo número de colores necesarios para tener una buena coloración) del producto cartesiano cumple $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ [62] entre otros estudios.

En esta tesis, trabajaremos en un primer tiempo con todos los productos de gráficas y luego estudiaremos detenidamente un invariante: la partición dimensional.

Organización de la tesis

En el primer capítulo, con el objetivo de obtener una estructura de anillo, estudiaremos las propiedades de los productos de gráficas, en especial la distributividad respecto a dos otras operaciones: la unión y la suma de gráficas. En el segundo capítulo intitulado *Polinomios de productos de gráficas*, analizaremos cada uno de los productos con el fin de encontrar cuando podemos calcular el polinomio de completas $P_{G \wedge H}(x)$ de un producto \wedge de dos gráficas arbitrarias G, H independientemente de las gráficas. Por último, en el capítulo denominado *Sobre particiones resolventes para el producto lexicográfico*, estudiaremos la partición dimensional del producto lexicográfico. En particular, daremos cotas para el caso general y para familias específicas de gráficas. A continuación se expone más en detalle lo que se realizará en cada capítulo de esta tesis:

Capítulo 1: La *unión* es una operación básica de la teoría de gráficas. En [6], utilizando como operación la operación unión, los autores construyeron el grupo de Grothendieck sobre el conjunto de gráficas finitas que denotaron por $K_{\cup}(\mathcal{G})$. En este capítulo retomamos este trabajo con la idea de ver cuál de los productos de gráficas se pueden agregar a $K_{\cup}(\mathcal{G})$ para obtener una estructura de anillo. Nuestro primer resultado fue que exactamente 6 de los 256 productos podían ser agregados a $K_{\cup}(\mathcal{G})$ para formar una estructura de anillo. De manera análoga al trabajo hecho con la operación unión, en la segunda parte de este capítulo se realiza el mismo análisis pero esta vez con la suma de gráficas. La operación *suma* de dos gráficas G, H consiste en agregar todas las aristas con un vértice en G y el otro en H a la gráfica $G \cup H$. Otra vez, el resultado obtenido fue que 6 productos, distintos a los encontrados en el caso de la unión, pueden asociarse a $K_{+}(\mathcal{G})$ (el grupo de Grothendieck construido con la suma de gráficas) para obtener una estructura de anillo. Por último, encontramos que estos anillos son isomorfos por pares, es decir, cada uno de los 6 anillos formados con la operación unión es isomorfo a uno de los anillos formados con la operación suma.

Capítulo 2: Esta sección está dedicada al estudio de los polinomios de completas. El polinomio de completas de una gráfica G se define como $P_G(x) = \sum_{i=1} a_i x^i + 1$ donde los coeficientes a_i representan el número de completas de tamaño i en G . El problema abordado en este capítulo se puede plantear de la siguiente manera: dado dos polinomios de gráficas (sin las gráficas)? cuáles son los productos para los que se puede calcular el polinomio de completas de la gráfica resultante? En otras palabras, para dos gráficas G, H , ¿para cuáles productos de gráficas \wedge se puede calcular $P_{G \wedge H}(x)$ en términos exclusivamente de $P_G(x)$ y $P_H(x)$? En la literatura, solo se encuentran las fórmulas de polinomios de completas de 2 productos de gráficas: la del polinomio del producto cartesiano de gráficas [11] y la del producto lexicográfico [38]. En esta parte, se ha revisado para cada producto de gráficas si el cálculo es posible o no: en caso de respuesta afirmativa, se da la fórmula que permite calcularlo y en caso contrario, se proporciona un contraejemplo. Por contraejemplo, entendemos lo siguiente: para un producto \wedge proporcionamos 4 gráficas G, G', H, H'

con $P_G(x) = P_{G'}(x)$ y $P_H(X) = P_{H'}(x)$ pero para las cuales $P_{G \wedge H} \neq P_{G' \wedge H'}$. El resultado principal de esta sección es que encontramos 29 productos para los cuales se puede calcular el polinomio resultante en el sentido antes mencionado y para los que damos la fórmula además de proporcionar un contraejemplo para los 227 casos restantes.

Capítulo 3: La tercera y última parte de esta tesis se centra en la partición dimensional pd (un invariante) del producto lexicográfico de gráficas que denotaremos por \circ . La partición dimensional (Pd) de gráficas ha sido estudiada en varias investigaciones, por Chappell, Gimbel y Hartman en [15], por Chartrand, Salehi y Zhang en [18], por Fehr, Gosselin y Oellermann en [20], por Rodríguez-Velázquez, Yero y Kuziak en [27], por Tomescu, Imran y Slamín en [30], [31] y [32], y por Yero y Rodríguez-Velázquez en [33]. Más detalladamente, Chappell, Gimbel y Hartman obtuvieron varias relaciones entre la partición métrica, la partición dimensional, el diámetro y otros parámetros en [15]. Chartrand, Salehi y Zhang mostraron que para cualquier gráfica no trivial G , se tiene $pd(G) \leq pd(G \square K_2)$, donde \square representa el producto cartesiano de gráficas. También mostraron que para una subgráfica inducida H de una gráfica conexa G , el ratio $r_p = pd(H)/pd(G)$ puede ser arbitrariamente grande [18]. La partición dimensional de algunas familias especiales ha sido estudiado luego en varios artículos. Por ejemplo, las gráficas de Caley fueron estudiadas por Fehr, Gosselin y Oellermann en [20], las gráficas infinitas (\mathbb{Z}^2, ξ_4) y (\mathbb{Z}^2, ξ_8) , donde el conjunto de vértices es el conjunto de puntos del plano \mathbb{R}^2 con entradas enteras y el conjunto de aristas el conjunto de todos los pares de vértices cuyas distancias de bloque de ciudad y de tablero de ajedrez son 1, fueron estudiadas por Tomescu [30]. Otras gráficas infinitas fueron estudiadas en [31]. El producto corona de gráficas fue estudiado por Rodríguez-Velázquez, Yero y Kuziak en [27] y los productos cartesiano y fuerte fueron estudiados en [19] y [33]. En este capítulo, el trabajo se centró en encontrar cotas para la partición dimensional del producto lexicográfico. Primero veremos el caso general, para el cual proporcionamos cotas en términos de la partición dimensional y de la cardinalidad de sus factores. Después haremos un estudio detallado para familias de gráficas específicas, en especial para los siguientes tipos de gráficas factores: gráficas completas, conjuntos independientes, trayectorias y ciclos. Más detalladamente veremos que para el caso general, si G es de orden n_1 y H una gráfica de orden n_2 entonces $pd(H) + 1 \leq pd(G \circ H) \leq n_2 \cdot pd(G)$ y que $pd(G \circ H) \leq n_1 \cdot pd(H + K_1)$. Después del caso general, estudiaremos familias específicas de gráficas, iniciando con los casos en los cuales una de los factores es una gráfica completa K_n . En particular veremos que $pd(K_n \circ H) = n \cdot pd(H + K_1)$ y que $n + 2 \leq pd(G \circ K_n) \leq n \cdot pd(G)$. Luego, verificaremos los casos en donde uno de los factores es una trayectoria P_m o un ciclo C_m , en especial veremos que para cualquier gráfica conexa G de orden r y cualquier trayectoria de longitud $n = 3m + i$ con $i \in \{-1, 0, 1\}$ se tiene $pd(G \circ P_n) \leq (m + 1)r$ y $pd(P_n \circ H) \leq m + 2$. Para cerrar esta sección, daremos las cotas para los casos en los cuales uno de los factores es un conjunto independiente de vértices

Capítulo 1

Anillos de gráficas

Las estructuras algebraicas como los monoides, los grupos, los anillos o los campos son de suma importancia en el desarrollo de las matemáticas y por esta razón fueron objetos bastante estudiados desde que fueron descubiertos. Son ya muy conocidos esos objetos algebraicos cuyos elementos pueden ser números, matrices, objetos geométricos, permutaciones, polinomios, etc... También existe un tipo de estudios de grupos en gráficas, cuyos elementos por lo general son los vértices o las aristas de éstas, pero hasta el trabajo presentado en este capítulo, no se había dado una estructura algebraica cuyos elementos sean gráficas.

En [6] los autores constuyeron el grupo de Grothendieck $K_{\cup}(\mathcal{G})$ sobre el monoide (\mathcal{G}, \cup) formado por el conjunto de todas las gráficas, denotado por \mathcal{G} , y la operación unión de gráficas, construcción que volveremos a presentar en esta tesis. El objetivo del trabajo que se desarrollará en este capítulo, es la construcción de anillos sobre este grupo. En 1974, Wilfried Imrich y Herbert Izbicki encontraron cuales de los 256 productos de gráficas (concepto que definiremos a continuación) son asociativos [8]. Aquí, encontraremos dentro de los 256 productos de gráficas, cuales son distributivos respecto a la operación unión con el objetivo de obtener una estructura de anillo. También mostraremos que una construcción similar se puede obtener con la operación suma de gráficas y otros productos de gráficas, obteniendo el mismo número de anillos. Por último, mostraremos que a cada anillo formado con la unión es isomorfo a uno de los anillos formados con la suma de gráficas.

Este capítulo se divide de la siguiente manera. Primero, daremos las definiciones necesarias, como anillo, unión de gráficas, suma, y veremos como se forma el grupo de Grothendieck. Luego, daremos la definición de un producto de gráficas y su representación matricial. En tercer lugar, mostraremos cuales productos forman anillos con la operación unión y cuales forman un anillo con la operación suma. Por último, veremos la existencia de un isomorfismo de anillos entre pares de anillos.

1.1 Definiciones básicas

Una *gráfica* G es una pareja $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es el conjunto de *vértices* de G , y $E(G)$ es el conjunto de *aristas* de G . Una arista es un subconjunto de dos elementos de V . Una arista caracteriza entonces un vínculo entre dos vértices de una gráfica. En este trabajo trabajaremos con gráficas finitas, es decir, gráficas cuyo conjunto de vértices es finito. Si no están dados explícitamente, denotaremos por $V(G)$

el conjunto de vértices de G y por $E(G)$ el conjunto de aristas de G . Denotaremos por G_\emptyset a la gráfica sin vértices. Si $\{u, v\} \in E$ (que denotaremos frecuentemente uv), diremos entonces que u y v son *adyacentes*, o más simplemente que u *incide en* v . Si $u \in V$ y $e \in E$ son tales que $u \in e$, diremos que el vértice u es *incidente* en la arista e , o también que u es un *extremo* de e . Si $e, f \in E$ y $e \cap f \neq \emptyset$, diremos que las aristas e y f son *adyacentes*. Por ejemplo, en la Figura 3.18, Para la gráfica G tenemos que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ y $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_6v_7\}$.

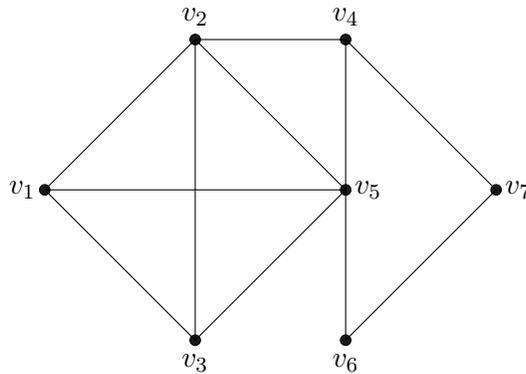


Figura 1.1: Ejemplo de una gráfica G

El *complemento* de una gráfica $G = (V, E)$ se define como $\overline{G} = G^c = (V, E^c)$ tal que $xy \in E^c$ si y sólo si $xy \notin E$.

Una gráfica $G = (V, E)$ se dice *completa* si para cada par de vértices $\{x, y\}$ implica que $xy \in E$. Denotaremos a una gráfica completa de n vértices por K_n . Un *clan* es una completa que no está contenida en ninguna otra completa. Por ejemplo en Figura 3.18, $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ forma un clan.

Diremos que un conjunto H de vértices de una gráfica G es un *conjunto independiente* si para cada $u, v \in H$ se tiene $uv \notin E(G)$. Denotaremos por \overline{K}_n a la gráfica con n vértices y sin ninguna arista. En la Figura 3.18, $\{v_1, v_4, v_6\}$ forma un conjunto independiente.

Diremos que $H = (V', E')$ es *subgráfica* de una gráfica $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Diremos que la subgráfica $G' = (V'', E'')$ es una *subgráfica inducida* de $G = (V, E)$ si $E'' = E(V'')$ donde $E(V'')$ es el conjunto de aristas de G restringido al conjunto de vértices V'' . De misma manera, si $G = (V, E)$ es una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$. La *subgráfica inducida por S* se define como la gráfica $G(S) = (V(S), E(S))$ donde $V(S) = S$ y $xy \in E(S)$ si y sólo si $xy \in E(G)$. Diremos que G *contiene* una gráfica G' si existe una subgráfica inducida de G isomorfa a G' . En el caso contrario, diremos que G *no contiene* G' . Por ejemplo, en la Figura 3.18, la gráfica G contiene a K_4 la cual es la gráfica inducida por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Para un vértice $u \in V$, designaremos por $N(u)$ el conjunto de vértices de G adyacentes a u , y por $N[u]$ el conjunto $N(u) \cup \{u\}$. Usualmente a $N(u)$ se le llama vecindad abierta de u y a $N[u]$, la vecindad cerrada de u . Si $N[u] = V$ diremos que u es un *vértice universal*, y la gráfica G , una *estrella centrada en u* . Por ejemplo, en la gráfica G de la Figura 3.18 tenemos que $N(v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ y $N[v_5] = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, sin embargo no G no contiene vértice universal.

Para $u, v \in V$, llamaremos *camino* de u a v , a una secuencia $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de vértices de G con $u = u_1$ y $v = u_n$ tal que para $i = 1, 2, \dots, n-1$, tenemos $u_i u_{i+1} \in E$. La *longitud* de un camino es el número de vértices que contiene menos uno, es decir $n-1$. Una *cuerda de un camino* es una arista compuesta de dos vértices no consecutivos del camino. Si para todo $u, v \in V$ existe al menos un camino de u a v , entonces diremos que G es *conexa*. Se dice que un camino es una *trayectoria* si todos los vértices del camino son distintos, denotaremos a una trayectoria de longitud n por P_n . En la gráfica de la Figura 3.18, una posible trayectoria de v_1 a v_7 es $\{v_1, v_2, v_4, v_7\}$.

Un *ciclo* es una sucesión $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de vértices distintos de G tal que para todo $i = 1, 2, \dots, n$ tenemos $u_i u_{i+1} \in E$ (considerando $u_n = u_1$). La *longitud* de un ciclo es el número de vértices. Una *cuerda* de un ciclo es una arista compuesta de dos vértices no adyacentes del ciclo. Un *hoyo* es un ciclo sin cuerda que tiene longitud de al menos cuatro. Diremos que un camino, un ciclo, o un hoyo es *par* si su longitud es par, e *impar* si su longitud es impar. Podemos observar en la Figura 3.18 que $\{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ es un hoyo, mientras que $\{v_1, v_2, v_5, v_3\}$ es un ciclo más bien no un hoyo por contener la cuerda $v_1 v_5$.

La *distancia* de u a v es la distancia más pequeña entre todos los caminos de u a v y se denota por $d(u, v)$ por ejemplo si G es una trayectoria de n vértices y x_1, x_2 los extremos, entonces $d(x_1, x_2) = n-1$. El *diámetro* de una gráfica $G = (V(G), E(G))$, que denotaremos por $diam(G)$, se define por:

$$diam(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$$

Por ejemplo, en la Figura 3.18, tenemos que $d(v_1, v_6) = 2$ y $diam(G) = 3$

Una *coloración* de una gráfica G es asignar un número (color) a cada vértice de G , en otras palabras, una coloración es una función $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Una *buena coloración de G* es una coloración de G tal que si dos vértices x y y son adyacentes entonces $c(x) \neq c(y)$. Una *r -coloración* de G es una buena coloración de G con r colores. El *número cromático*, denotado $\chi(G)$, está definido como el mínimo n tal que G tiene una r -coloración. Una gráfica G es *r -coloreable* si $\chi(G) \leq r$ y es *r -cromática* si $\chi(G) = r$. Por ejemplo, para la gráfica G de la figura 3.18 la coloración c definida por $c(v_1) = c(v_4) = c(v_6) = 1, c(v_2) = c(v_7) = 2, c(v_3) = 3, c(v_5) = 4$ es una buena coloración de G . Por otra parte, como G tiene K_4 como subgráfica inducida concluimos que $\chi(G) = 4$.

Un *isomorfismo* entre dos gráficas G y H es una función biyectiva $f : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva aristas, es decir $gg' \in E(G)$ si y sólo si $f(g)f(g') \in E(H)$. Diremos que dos gráficas G, H son isomorfas ($G \cong H$) si existe un isomorfismo entre ellas. Denotaremos por \mathcal{G} al conjunto de clases de isomorfismos de gráficas, i.e, dos gráficas están en la misma clase si y sólo si son isomorfas, también denotaremos por G a la clase de isomorfismos de gráficas a la cual pertenece G .

1.2 Grupo de Grothendieck para unión y suma

Un *monoide* es un par (M, \star) donde M es un conjunto y \star es una operación binaria que cumple las siguientes tres propiedades:

1. Cerradura: $x \star y \in M$ para toda $x, y \in M$
2. Asociatividad: $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ para toda $x, y, z \in M$
3. Elemento neutro: existe un único elemento $e \in M$ tal que $e \star x = x \star e = x$

Además si se tiene $xy = yx$ para toda $x, y \in M$, diremos que M es un *monoide conmutativo*. El ejemplo más común de monoide es $(\mathbb{N} \cup 0, +)$.

La unión (o unión disjunta) \cup es una operación binaria básica en la teoría de gráficas definida de la siguiente forma:

Definición 1.2.1. Sean G y H dos gráficas arbitrarias en \mathcal{G} . Se define la unión, que denotaremos por $G \cup H$, como la gráfica

$$G \cup H := (V(G \cup H) \cup E(H \cup H))$$

donde

$$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$$

y

$$E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$$

Veamos que (\mathcal{G}, \cup) es un monoide conmutativo. Claramente, para cualesquiera $G, H, M \in \mathcal{G}$, se tiene

1. $G \cup H \in \mathcal{G}$
2. $G \cup (H \cup M) = (G \cup H) \cup M$
3. $G \cup G_\emptyset = G_\emptyset \cup G = G$ (donde G_\emptyset es la gráfica vacía, i.e, la gráfica que no tiene vértices).
4. $G \cup M = M \cup G$

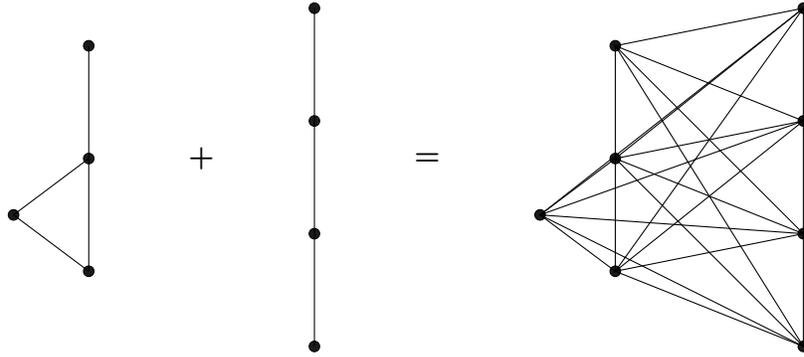


Figura 1.2: Ejemplo: suma de las gráficas

Por lo tanto (\mathcal{G}, \cup) es un monoide conmutativo. De igual manera, veamos ahora que $(\mathcal{G}, +)$ también es un monoide conmutativo.

Definición 1.2.2. Sean G y H dos gráficas arbitrarias en \mathcal{G} . Se define su suma, que denotaremos por $G + H$, como la gráfica

$$G + H := (V(G + H), E(G + H))$$

donde

$$V(G + H) := V(G) \cup V(H)$$

y

$$E(G + H) := E(G) \cup E(H) \cup \{gh | g \in V(G), h \in V(H)\}$$

Se cumplen trivialmente los axiomas de cerradura, conmutatividad y la existencia del neutro para la operación suma. Para la distributividad, vemos que

$$\begin{aligned} E(G + (H + M)) &= E(G) \cup E(H + M) \cup \{gr | g \in V(G) \text{ y } r \in V(H + M)\} \\ &= E(G) \cup E(H) \cup E(M) \cup \{gh | g \in V(G), h \in V(H)\} \\ &\quad \cup \{gm | g \in V(G), m \in V(M)\} \\ &\quad \cup \{mh | m \in V(M), h \in V(H)\} \\ &= E((G + H) + M). \end{aligned}$$

Así concluimos que $(\mathcal{G}, +)$ es un monoide conmutativo. Tomando como base estos monoides, el paso siguiente es la construcción de grupos utilizando como idea la construcción de Grothendieck. En [1], un trabajo sobre geometría algebraica, Alexander Grothendieck introduce una construcción llamada "el grupo de Grothendieck", la cual utilizaremos a continuación. La idea es definir clases de isomorfismo de parejas de gráficas, estudiando en primer lugar el caso de la operación unión. Para ello, definimos la relación \sim en $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$

Definición 1.2.3. Dados $(G, H), (P, Q) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, diremos que:

$$(G, H) \sim (P, Q) \quad \text{si y sólo si} \quad G \cup Q \cong H \cup P \quad (1.1)$$

Veamos que la relación definida en 1.1 es una relación de equivalencia. Sean G, G', H, H', M, M' gráficas:

1. reflexividad: Como $G \cup G' \cong G' \cup G$, tenemos que $(G, G') \sim (G, G')$.
2. Simetría: Suponga que $(G, G') \sim (H, H')$, entonces $G \cup H' \cong H \cup G'$ lo que implica que $H \cup G' \cong G \cup H'$ y por lo tanto $(H, H') \sim (G, G')$.
3. Transitividad: Si $(G, G') \sim (H, H')$ y $(H, H') \sim (M, M')$ entonces $G \cup H' \cong H \cup G'$ y $H \cup M' \cong M \cup H'$, utilizando ambas igualdades, tenemos que $G \cup H' \cup H \cup M' \cong H \cup G' \cup M \cup H'$, lo que implica que $G \cup M' \cong M \cup G'$. Por lo tanto $(G, G') \sim (M, M')$.

De esta manera vemos que \sim es una relación de equivalencia. Este conjunto de clases de equivalencia forma un grupo donde el (G, G') es el neutro. A este grupo lo denotaremos por $K_{\cup}(\mathcal{G})$ o simplemente $K(\mathcal{G})$.

Definición 1.2.4. (G, G') y (H, H') dos elementos de $K_{\cup}(\mathcal{G})$. Definimos la operación unión $\cup : K_{\cup}(\mathcal{G}) \times K_{\cup}(\mathcal{G}) \rightarrow K_{\cup}(\mathcal{G})$ donde $(G, G') \cup (H, H') = (G \cup H, G' \cup H')$

Veamos que la operación está bien definida. Denotaremos por $[(G, G')]$ a la clase a la cual pertenece (G, G') . Sea $(G_1, G'_1) \in [(G, G')]$ y $(H_1, H'_1) \in [(H, H')]$, entonces $(G_1, G'_1) \sim (G, G')$ y $(H_1, H'_1) \sim (H, H')$ por lo que $G_1 \cup G' \cong G'_1 \cup G$ y $H_1 \cup H' \cong H'_1 \cup H$. Juntando ambas ecuaciones tenemos que $(G_1 \cup G') \cup (H_1 \cup H') \cong (G'_1 \cup G) \cup (H'_1 \cup H)$, y como la operación unión es conmutativa para gráficas, obtenemos que $(G_1 \cup H_1) \cup (G' \cup H') \cong (G'_1 \cup H'_1) \cup (G \cup H)$, entonces $(G_1 \cup H_1, G'_1 \cup H'_1) \sim (G \cup H, G' \cup H')$ lo que implica que $(G_1, G'_1) \cup (H, H') \in [(G, G') \cup (H, H')]$ por lo que la operación está bien definida. Ahora veremos que el espacio que construimos es un grupo.

Recordemos que un un *grupo* es un par ordenado (S, \bullet) donde S es un conjunto y \bullet una operación binaria que cumplen los siguientes axiomas:

1. $a \bullet b \in S$ para cualesquiera elementos $a, b \in S$.
2. Para todo $a, b, c \in S$ se tiene $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.
3. Existe un elemento $e \in S$ tal que $e \bullet a = a \bullet e = a$ para cada elemento $a \in S$, al elemento e se le llama elemento *neutro*.
4. Para todo $a \in S$ existe un elemento $a' \in S$ tal que $a \bullet a' = a' \bullet a = e$.

Verifiquemos que se cumplen estos axiomas para $K_{\cup}(\mathcal{G})$. Sean $(G, G'), (H, H'), (M, M') \in K_{\cup}(\mathcal{G})$.

1. Como G, G', H, H' son gráficas, tenemos que $(G \cup H, G' \cup H') \in K_{\cup}(\mathcal{G})$.

2. $(G, G') \cup ((H, H') \cup (M, M')) = (G, G') \cup (H \cup M, H' \cup M')$
 $= (G \cup H \cup M, G' \cup H' \cup M')$
 $= (G \cup H, G' \cup H') \cup (M, M')$
 $= ((G, G') \cup (H, H')) \cup (M, M').$
3. El elemento (\emptyset, \emptyset) es el elemento identidad ya que $(\emptyset, \emptyset) \cup (G, G') = (G, G') \cup (\emptyset, \emptyset) = (G, G')$.
4. El elemento (G', G) es el inverso de (G, G') , pues $(G, G') \cup (G', G) = (G \cup G', G' \cup G) \in [(\emptyset, \emptyset)]$

Por lo tanto, concluimos que $K_{\cup}(\mathcal{G})$ es un grupo. Veamos que la misma construcción, la cual denotaremos por $K_{+}(\mathcal{G})$, se puede hacer con la operación suma de gráficas. Ya vimos que $(\mathcal{G}, +)$ forma un monoide. Definimos ahora la relación \approx .

Definición 1.2.5. *Dados $(G, H), (P, Q) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, diremos que:*

$$(G, H) \approx (P, Q) \quad \text{si y sólo si} \quad G + Q \cong H + P \quad (1.2)$$

Veamos que \approx es relación de equivalencia. Sean $G, G', H, H', M, M' \in \mathcal{G}$, como $G + G' \cong G' + G$, se tiene $(G, G') \approx (G, G')$. Ahora suponga que $(G, G') \approx (H, H')$ entonces $G + H' \cong G' + H$ por lo que $H' + G \cong H + G'$ y por lo tanto $(H, H') \approx (G, G')$. Por último, suponga que $(G, G') \approx (H, H')$ y $(H, H') \approx (M, M')$, entonces $G + H' \cong G' + H$ y $H + M' \cong H' + M$ juntando ambas tenemos que $G + M' + H + H' \cong G' + M + H + H'$ por lo que $G + M' \cong G' + M$ y por lo tanto $(G, G') \approx (M, M')$. Así, \approx es una relación de equivalencia.

Como lo hicimos en el caso de la unión, formamos el grupo $(\mathcal{G}, +)$, que denotaremos por $K_{+}(\mathcal{G})$. Para $(G, G'), (H, H') \in K(\mathcal{G})$, definimos la suma $+$ como $+: K_{+}(\mathcal{G}) \times K_{+}(\mathcal{G}) \rightarrow K_{+}(\mathcal{G})$ donde $(G, G') + (H, H') = (G + H, G' + H')$. Basta seguir los mismos pasos que en el caso de la unión para ver que la suma está bien definida y que $K_{+}(\mathcal{G})$ es un grupo.

Por último, veamos que los grupos construidos son abelianos. Para $G, G' \in \mathcal{G}$ claramente se tiene $G \cup G' \cong G' \cup G$. Sean $(G, G'), (H, H') \in K_{\cup}(\mathcal{G})$, tenemos:

$$\begin{aligned} (G, G') \cup (H, H') &= (G \cup H, G' \cup H') \\ &= (H \cup G, H' \cup G') \\ &= (H, H') \cup (G, G'). \end{aligned}$$

Por lo que $K_{\cup}(\mathcal{G})$ es grupo abeliano. De la misma manera se prueba que $K_{+}(\mathcal{G})$ también es abeliano:

$$\begin{aligned} (G, G') + (H, H') &= (G + H, G' + H') \\ &= (H + G, H' + G') \\ &= (H, H') + (G, G'). \end{aligned}$$

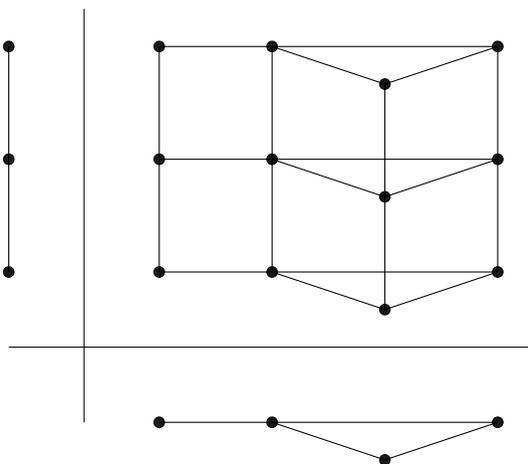


Figura 1.3: Ejemplo de producto cartesiano

Ya hemos construido los dos grupos $K_{\cup}(\mathcal{G})$ y $K_{+}(\mathcal{G})$. La sección siguiente está dedicada a la definición y el concepto de producto de gráficas y su notación con el objetivo de ver cuales se pueden agregar a $K_{\cup}(\mathcal{G})$ y $K_{+}(\mathcal{G})$ para formar un anillo. Para evitar ambigüedades, por “producto de gráficas” nos referimos a las operaciones para las cuales el conjunto de vértices es el producto cartesiano de las gráficas factores y las aristas dependen directamente de las adyacencias (no-adyacencias) también dependen de las gráficas factores.

1.3 Productos de gráficas

La primera referencia que se tiene de los productos de gráficas data de 1912 y fue escrita por Alfred North Whitehead y Bertrand Russel [10] en su libro “Principia Mathematica” donde definen el producto cartesiano. Se volvieron a definir de manera independiente en 1960 en el artículo “Graph multiplication” de Gert Sabidussi [9], donde vuelve a definir el producto cartesiano además del producto tensorial y el producto fuerte de gráficas. Más recientemente, Wilfried Imrich y Sandi Klavžar en el año 2000, publicaron un trabajo con algoritmo de reconocimiento de gráficas que provienen de algún producto cartesiano, fuerte, directo o lexicográfico de gráficas [7]. Estos productos son algunos de los 256 productos de gráficas que se pueden construir pero fueron estudiados más detalladamente puesto que cumplen con propiedades interesantes que veremos a continuación. Como no es factible dar un nombre a cada uno de los productos, le daremos una representación matricial que posteriormente explicaremos. Antes de definir los productos de gráficas de manera general, estudiaremos algunos ejemplos como el producto cartesiano y posteriormente generalizaremos el concepto.

Sean $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ gráficas en \mathcal{G} , se define el *producto cartesiano*, que denotaremos por $G \square H$ por:

$$G \square H := (V(G \square H), E(G \square H))$$

donde

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H) = \{(g, h) | g \in V(G) \text{ y } h \in V(H)\} \quad (1.3)$$

y

$$(g, h)(g', h') \in E(G \square H) \quad \text{si y sólo si}$$

$$(g = g' \text{ y } hh' \in E(H)) \quad \text{o} \quad (h = h' \text{ y } gg' \in E(G))$$

En otras palabras, dos vértices son adyacentes en el producto si al proyectar sobre las gráficas G y H , de un lado obtenemos un vértice y del otro lado una arista. La gráfica 1.2 representa el producto cartesiano de G , abajo y H a la izquierda. El vértice (g_1, h_1) es adyacente a (g_1, h_2) ya que ambos vértices tienen a g_1 y $h_1 h_2 \in E(H)$, por otro lado (g_1, h_1) y (g_2, h_2) no son adyacentes ya que ni en G ni en H estamos hablando del mismo vértice.

Nota que para cada $g_i \in G$, se forma una copia de la gráfica H y para cada $h \in H$ se forma una copia de G , además cada arista aparece exactamente en una copia de G o de H , por lo que podemos concluir que $G \square H = H \square G$, es decir, el producto cartesiano es conmutativo. El producto cartesiano también es asociativo, veámoslo. Sean $G, H, M \in \mathcal{G}$, denotemos los vértices de $G \square (H \square M)$ y $(G \square H) \square M$ por (g_i, h_i, m_i) , claramente, ambas expresiones tienen los mismos vértices. Una arista $(g, h, m)(g', h', m') \in G \square (H \square M)$ si y sólo si se cumple una de las siguientes proposiciones:

1. $g = g'$ y $(h, m)(h', m') \in E(H \square M)$
2. $(h, m) = (h', m')$ y $gg' \in E(G)$

Estas proposiciones se cumplen si y sólo si:

1. $g = g'$ y
 - $h = h'$ y $mm' \in E(M)$ ó
 - $m = m'$ y $hh' \in E(H)$
2. $gg' \in E(G)$ y
 - $h = h'$ y $mm' \in E(M)$ ó
 - $m = m'$ y $hh' \in E(H)$

Que podemos reescribir como:

1. $m = m'$ y
 - $g = g'$ y $hh' \in E(H)$ ó
 - $h = h'$ y $gg' \in E(G)$

2. $mm' \in E(M)$ y
- $g = g'$ y $hh' \in E(H)$ ó
 - $h = h'$ y $gg' \in E(G)$

Lo que es lo mismo que:

1. $m = m'$ y $(g, h)(g', h') \in E(G \square H)$ ó
2. $mm' \in E(M)$ y $(g, h) = (g', h')$

De lo anterior concluimos que $(g, h, m)(g', h', m') \in E(G \square (H \square M))$ si y sólo si $(g, h, m)(g', h', m') \in E((G \square H) \square M)$, por lo que el producto cartesiano es asociativo y conmutativo. Utilizaremos estas propiedades en el momento de construir los anillos.

Otro ejemplo de producto de gráficas es el *producto categórico*, también conocido como producto tensorial y se denota por \times . Para dos gráficas G, H lo definimos como la gráfica con $V(G \times H) = \{(g, h) | g \in V(G) \text{ y } h \in V(H)\}$ y $(g, h)(g', h') \in E(G \times H)$ si y sólo si $gg' \in E(G)$ y $hh' \in E(H)$. Podemos ver en la gráfica 1.3 un ejemplo de producto categórico. Para ver que $G \times H$ y $H \times G$ son isomorfas, definimos la función $f : G \times H \rightarrow H \times G$ como $f(g, h) = (h, g)$, claramente, $(g, h)(g', h') \in E(G \times H)$ si y sólo si $f(h, g)f(h', g') \in E(H \times G)$, por lo que el producto categórico es conmutativo. Veamos que también es asociativo. Tenemos que $(g, (h, m))(g', (h', m')) \in E(G \times (H \times M))$ si y sólo si $gg' \in E(G)$ y $(h, m)(h', m') \in E(H \times M)$ si y sólo si $gg' \in E(G)$, $hh' \in E(H)$ y $mm' \in E(M)$ lo que es equivalente a $(g, h)(g', h') \in E(G \times H)$ y $mm' \in E(M)$, por lo que tenemos que $(g, (h, m))(g', (h', m')) \in E(G \times (H \times M))$ si y sólo si $((g, h), m)((g', h'), m') \in E((G \times H) \times M)$.

Veamos por último dos otros ejemplos de productos de gráficas. El producto *lexicográfico*, denotado por \bullet y definido como la gráfica $V(G \bullet H) = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$ y $(g, h)(g', h') \in E(G \bullet H)$ si y sólo si $gg' \in E(G)$ ó $\{g = g' \text{ y } hh' \in E(H)\}$. Un ejemplo de producto lexicográfico se puede ver en la gráfica 1.4.

Como último ejemplo, veremos el caso del *producto fuerte* de gráficas, denotado por \boxtimes . Se define la operación $G \boxtimes H$ como la gráfica con $V(G \boxtimes H) = V(G) \cup V(H)$ y $(g, h)(g', h') \in E(G \boxtimes H)$ si y sólo si se cumple una de las siguientes propiedades:

- $gg' \in E(G)$ y $h = h'$
- $hh' \in E(H)$ y $g = g'$
- $gg' \in E(G)$ y $hh' \in E(H)$

Veamos que es conmutativo y asociativo. Sean G, H gráficas, claramente $V(G \boxtimes H) = V(H \boxtimes G)$, ahora vemos que tanto $E(G \boxtimes H)$ como $E(H \boxtimes G)$ están compuestos por todos los pares $(g, h)(g', h')$ que cumplen una de las propiedades antes descritas. por lo que $(G \boxtimes H) = (H \boxtimes G)$. Para ver que el producto fuerte es asociativo, sean $G, H, M \in \mathcal{G}$. Nota que $E(G \boxtimes (H \boxtimes M))$ está compuesto por todos los pares de ternas $(g, (h, m)), (g', (h', m'))$ que cumplen con una de las propiedades siguientes:

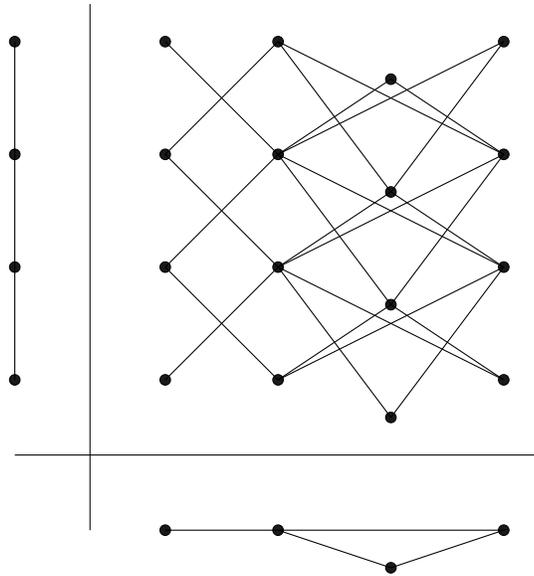


Figura 1.4: Ejemplo de producto categórico

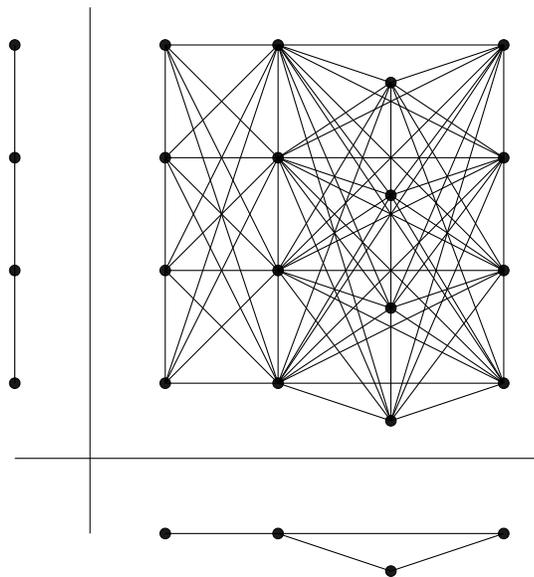


Figura 1.5: Ejemplo de producto lexicográfico

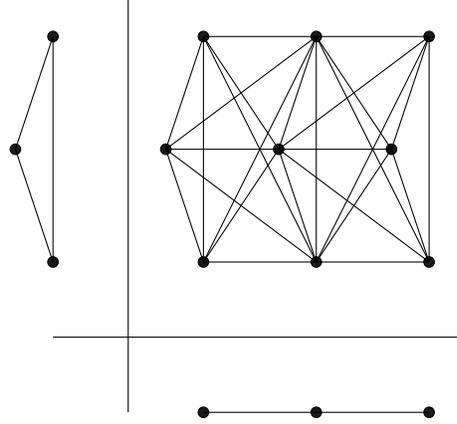


Figura 1.6: Ejemplo de producto fuerte

- $g = g'$ y $(h, m)(h', m') \in E(H \boxtimes M)$
- $(h, m) = (h', m')$ y $gg' \in E(G)$
- $(h, m)(h', m') \in E(H \boxtimes M)$ y $gg' \in E(G)$

Separando por casos obtenemos las adyacencias según las propiedades siguientes:

- $g = g'$ y $hh' \in E(H)$ y $mm' \in E(M)$
- $g = g'$ y $h = h'$ y $mm' \in E(M)$
- $g = g'$ y $m = m'$ y $hh' \in E(H)$
- $h = h'$ y $m = m'$ y $gg' \in E(G)$
- $h = h'$ y $mm' \in E(M)$ y $gg' \in E(G)$
- $m = m'$ y $hh' \in E(H)$ y $gg' \in E(G)$
- $gg' \in E(G)$ y $hh' \in E(H)$ y $mm' \in E(M)$

Estas adyacencias son las mismas que las de $((G \boxtimes H) \boxtimes M)$, por lo que concluimos que el producto fuerte es asociativo.

Después de estos varios ejemplos de producto de gráficas, daremos ahora una definición más general. Un *producto de gráficas* \wedge es una operación binaria entre dos gráficas G y H del cual resulta otra gráfica $G \wedge H$ con la siguiente construcción:

- $V(G \wedge H) = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$.
- Dos vértices $(g, h), (g', h')$ son adyacentes si y sólo si cumplen condiciones específicas del producto. Estas condiciones están dadas en términos de adyacencias, no adyacencias o igualdad de los vértices g, g' y h, h' en sus respectivas gráficas.

$E(G)$ es el conjunto de aristas de G , $C(G)$ el conjunto de pares de vértices no adyacentes de G y $\Delta(G)$ al conjunto de pares de forma (g, g) con $g \in G$. Entonces un par de vértices $(g, h), (g', h')$ está contenido en $E(G \wedge H)$, $\Delta(G \wedge H)$ ó en $C(G \wedge H)$, dependiendo de las adyacencias entre g, g' en G y h, h' en H . Los 9 casos para determinar la adyacencias son los siguientes:

$$\begin{aligned}
(\Delta E) \quad & g = g', hh' \in E(H) \\
(\Delta C) \quad & g = g', hh' \notin E(H) \\
(E\Delta) \quad & gg' \in E(G), h = h' \\
(E^2) \quad & gg' \in E(G), hh' \in E(H) \\
(EC) \quad & gg' \in E(G), hh' \notin E(H) \\
(C\Delta) \quad & gg' \notin E(G), h = h' \\
(CE) \quad & gg' \notin E(G), hh' \in E(H) \\
(C^2) \quad & gg' \notin E(G), hh' \notin E(H) \\
(\Delta^2) \quad & g = g', h = h'
\end{aligned}$$

Notamos que en el último caso, la arista que se debería agregar es un lazo, por lo que no lo tomaremos en cuenta. Los productos de gráficas son entonces combinaciones de los 8 primeros criterios. Como en cada uno de los casos, se puede elegir agregar o no la arista, tenemos $2^8 = 256$ maneras de definir un producto de gráficas. Como no es viable tener un símbolo especial para todos, utilizaremos el modelo propuesto en 1974 por Wilfried Imrich y Herbert Izbicki en [8].

Para dos gráficas G, H , nos fijemos en los conjuntos E, Δ, C de cada una de las gráficas, entonces podemos representar estos casos en una matriz como se muestra enseguida:

$$\begin{array}{ccc}
& E & \Delta & C \\
\begin{array}{c} E \\ \Delta \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} E^2 & E\Delta & EC \\ \Delta E & \Delta^2 & \Delta C \\ CE & C\Delta & C^2 \end{pmatrix} & & (1.4)
\end{array}$$

Las entradas de la matriz (1.4) son denotadas por E si se agrega la arista para el caso dado y por C si no se quiere agregar la arista. Para un producto $G \wedge H$ por convención tomaremos los reglones como los conjuntos de la gráfica G y las columnas para H . Por ejemplo, recordando que una arista está en el producto cartesiano de gráficas $G \square H$ si y sólo si $(g = g' \text{ y } hh' \in E(H))$ o $(gg' \in E(G) \text{ y } h = h')$. Entonces su representación matricial está dado por:

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la notación introducida para representar un producto de gráficas por medio de la matriz (1.4), los productos categórico, lexicográfico y fuerte se representan por medio de las matrices:

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Esta representación tiene varias ventajas, la principal es que podemos dar propiedades de los productos en términos de propiedades de matrices. Por ejemplo, es fácil ver que un producto es conmutativo si la matriz que lo representa es simétrica, veámoslo. Recordemos que una matriz (a_{ij}) es simétrica si es una matriz de $n \times n$ para cual se cumple $a_{ij} = a_{ji}$ para toda i, j , en otras palabras, una matriz es simétrica si es igual a su matriz transpuesta, entonces si la entrada a_{ij} es igual a la entrada a_{ji} , las aristas presentes en $G \wedge H$ son las mismas que en $H \wedge G$, por lo que el producto es conmutativo. Como nuestras matrices son de 3×3 y que la entrada central es despreciable, hay 5 entradas libres y 3 dependientes, por lo que existen $2^5 = 32$ productos conmutativos.

Dado un producto de gráficas \wedge , definimos el *producto complementario* \vee como : $G \vee H = \overline{G} \wedge \overline{H}$. Vemos que si tenemos una gráfica G y queremos calcular $\overline{G} \wedge H$ es equivalente a calcular $G \wedge' H$, donde \wedge' es la matriz resultante de intercambiar el primero y el último renglon de la matriz de \wedge . Análogamente, calcular $G \wedge \overline{H}$ es equivalente a calcular $G \wedge'' H$ donde \wedge'' es la resultante de intercambiar la primera y última columna. Por último, si queremos calcular $\overline{G} \wedge \overline{H}$, es equivalente a calcular $G \wedge''' H$ donde \wedge''' es la matriz que resulta al intercambiar en \wedge las E por C y vice versa. Por lo que, dado la matriz de un producto \wedge , para encontrar la matriz de su producto complementario, basta con tomar la simetría respecto al centro de la matriz y luego intercambiar cada E por una C y cada C por una E . Por

ejemplo, el producto complementario de $\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ está dado por $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}$.

En particular, el producto lexicográfico es auto-complementario.

En las proximas secciones vamos a analizar los productos de gráficas que pueden ser agregados a $K_{\cup}(\mathcal{G})$ para formar una estructura de anillo. Para ello, y puesto que ya vimos que $K_{\cup}(\mathcal{G})$ es un grupo abeliano, tenemos que ver cuales productos son asociativos y distributivos. Para ello, enunciemos primero el lema siguiente:

Lema 1.3.1. *Si \wedge es un producto conmutativo o asociativo entonces su producto complementario \vee también lo es.*

1.4 Anillos con la unión de gráficas

Recordemos la definición de un anillo:

Un anillo R es un conjunto con dos operaciones binarias generalmente llamadas adición y multiplicación, las cuales cumplen que:

- R es grupo abeliano respecto a la adición.
- La multiplicación es cerrada y asociativa.
- La multiplicación es distributiva por derecha e izquierda respecto a la adición.

En nuestro caso, la adición es la unión de gráficas y la multiplicación algún producto de gráficas. En esta sección veremos cuales son las condiciones para que un producto sea distributivo por la derecha y la izquierda respecto a la unión. También veremos que la propiedad distributiva se puede extender a los elementos de $K_{\cup}(\mathcal{G})$.

Lema 1.4.1. *Un producto de gráficas \wedge es distributivo por la izquierda respecto a la unión de gráficas si y sólo si su matriz asociada es de forma*

$$\begin{pmatrix} - & - & C \\ - & \Delta & C \\ - & - & C \end{pmatrix}$$

Demostración: \Rightarrow Sea \wedge un producto de gráficas. Sea G una gráfica que contiene 3 vértices g_0, g_1, g_2 con $g_0g_1 \in E(G)$ y $g_1g_2 \notin E(G)$. Suponga que G es distributiva por la izquierda, entonces $G \wedge (H \cup M) \cong (G \wedge H) \cup (G \wedge M)$ para cualesquiera gráficas H, M . Nota que para cualquier producto \wedge , se tiene que $(g, h)(g', m) \notin E((G \wedge H) \cup (G \wedge M))$, incluyendo también el caso en que $g = g'$.

Suponga que para el producto \wedge se tiene $\Delta C = E$. Entonces para $h \in H$ y $m \in M$ se tiene $hm \notin H \cup M$, entonces $(g_0, h)(g_0, m) \in E(G \wedge (H \cup M))$, una contradicción.

Suponga que para el producto \wedge se tiene $EC = E$. Como $g_0g_1 \in E(G)$ entonces $(g_0, h)(g_1, m) \in E(G \wedge (H \cup M))$, para toda $h \in H, m \in M$, una contradicción.

Suponga que para el producto \wedge se tiene $C^2 = E$. Como $g_1g_2 \notin E(G)$ entonces $(g_1, h)(g_2, m) \in E(G \wedge (H \cup M))$, para toda $h \in H, m \in M$, una contradicción.

Para terminar, notamos que $(G \wedge H) \cup (G \wedge M) \subseteq G \wedge (H \cup M)$.

\Leftarrow Suponga que en \wedge se tiene $\Delta C = EC = C^2 = C$. Vemos que las únicas aristas que pueden ser distintas entre las gráficas $(G \wedge H) \cup (G \wedge M)$ y $G \wedge (H \cup M)$ son las de la forma $(g, h)(g', m)$, pues para los pares de vértices de tipo $(g, h), (g', h')$ se tiene que $(g, h)(g', h') \in E((G \wedge H) \cup (G \wedge M))$ si y sólo si $(g, h)(g', h') \in E((G \wedge H))$ si y sólo si $(g, h)(g', h') \in E((G \wedge (H \cup M)))$. El caso $(g, m), (g, m')$ es análogo. Ya vimos que para toda g, g', h, m se tiene $(g, h)(g', m) \notin E((G \wedge H) \cup (G \wedge M))$. Luego como $\Delta C = EC = C^2 = C$, tenemos que $(g, h)(g', m) \notin E((G \wedge (H \cup M)))$ para toda g, g', h, m , por lo tanto $G \wedge (H \cup M) \cong (G \wedge H) \cup (G \wedge M)$. \square

Lema 1.4.2. *El producto cartesiano \wedge es distributivo por la derecha respecto a la unión de gráficas, si y sólo si su matriz asociada es de forma*

$$\begin{pmatrix} - & - & - \\ - & \Delta & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

Demostración: La demostración es totalmente análoga a la del lema anterior. \square

Utilizando los dos lemas anteriores, obtenemos el resultado siguiente:

Teorema 1.4.1. *Un producto cartesiano \wedge es distributivo respecto a \cup si y sólo si su matriz asociada es de forma*

$$\begin{pmatrix} - & - & C \\ - & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

Entonces, concluimos que los productos de gráficas distributivos son los siguientes:

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

Hemos probado que estos 8 productos de gráficas son distributivos respecto a la unión de gráficas. Recordamos que los elementos de nuestro grupo $K_{\cup}(\mathcal{G})$, son pares ordenados de gráficas. Extendemos la operación \wedge para elementos del grupo de Grothendieck de la siguiente forma: para $[G, G'], [H, H'] \in K_{\cup}(\mathcal{G})$,

$$[G, G'] \wedge [H, H'] = [(G \wedge H) \cup (G' \wedge H'), (G \wedge H') \cup (G' \wedge H)].$$

Para concluir la parte de distributividad, necesitamos el lema siguiente:

Lema 1.4.3. *Si un producto de gráficas \wedge es distributivo respecto a la unión de gráficas, entonces también distribuye la unión respecto a los elementos de $K_{\cup}(\mathcal{G})$.*

Demostración: Sean $[G, G'], [H, H'], [M, M'] \in K(\mathcal{G})$. Entonces, por la definición de la operación \cup , en $K(\mathcal{G})$ tenemos que:

$$[G, G'] \wedge ([H, H'] \cup [M, M']) = [G, G'] \wedge [H \cup M, H' \cup M'].$$

Por la definición de la operación producto \wedge en $K(\mathcal{G})$, se tiene:

$$[G, G'] \wedge ([H, H'] \cup [M, M']) =$$

$$= [((G \wedge (H \cup M)) \cup (G' \wedge (H' \cup M')), (G \wedge (H' \cup M')) \cup (G' \wedge (M \cup H)))].$$

Por la propiedad distributiva del producto \wedge respecto a la unión de gráficas \cup ,

$$\begin{aligned} & [G, G'] \wedge ([H, H'] \cup [M, M']) = \\ & = [(G \wedge H) \cup (G' \wedge H') \cup (G \wedge M) \cup (G' \wedge M'), (G \wedge M') \cup (G' \wedge M) \cup (G \wedge H') \cup (G' \wedge H)]. \end{aligned}$$

Otra vez, por la definición de la operación unión \cup ,

$$\begin{aligned} & [G, G'] \wedge ([H, H'] \cup [M, M']) = \\ & = [(G \wedge H) \cup (G' \wedge H'), (G \wedge H') \cup (G' \wedge H)] \cup [(G \wedge M) \cup (G' \wedge M'), (G \wedge M') \cup (G' \wedge M)]. \end{aligned}$$

Por la definición del producto de gráficas \wedge ,

$$[G, G'] \wedge ([H, H'] \cup [M, M']) = ([G, G'] \wedge [H, H']) \cup ([G, G'] \wedge [M, M']).$$

□

En los ejemplos vistos anteriormente, vimos que mientras el producto cartesiano, fuerte y categórico son conmutativos, el producto lexicográfico no lo es. También ya vimos cuales son los productos distributivos respecto a la unión. Para completar la construcción de nuestros anillos falta ver cuales de los productos distributivos son también asociativos. En [7], Wilfried Imrich y Herbert Izbicki caracterizaron todos los productos de gráficas que son asociativos, los cuales resultaron ser 20. Veamos la demostración. Para ella recordamos la matriz 1.4 de la definición de producto de gráficas ya que usaremos esta notación en la prueba.

$$\begin{pmatrix} E^2 & E\Delta & EC \\ \Delta E & \Delta & \Delta C \\ CE & C\Delta & C^2 \end{pmatrix}$$

Lema 1.4.4. *Si un producto de gráficas es asociativo entonces se cumplen las siguientes implicaciones:*

$$\begin{array}{ll} (1) E^2 = C \Rightarrow C^2 = C & C^2 = E \Rightarrow E^2 = E \\ (2) E\Delta = C \Rightarrow C\Delta = C & C\Delta = E \Rightarrow E\Delta = E \\ (3) \Delta E = C \Rightarrow \Delta C = C & \Delta C = E \Rightarrow \Delta E = E \\ (4) E^2 = C \Rightarrow EC = CE & C^2 = E \Rightarrow EC = CE \end{array}$$

Demostración: La columna de la derecha representa las mismas condiciones que la columna izquierda en el producto complementario, por lo que únicamente probaremos las implicaciones de la columna izquierda ya que se resuelven análogamente. Suponga que el producto que estamos estudiando es asociativo.

Si $E^2 = C$ entonces $E^2C = C^2$ luego por asociatividad tenemos $C^2 = E^2C = (EE)C = E(EC)$, tenemos dos casos para el término EC : si $EC = E$ entonces $C^2 = EE = C$ y si $EC = C$ entonces $C^2 = EC = C$, por lo que si E^2 entonces $C^2 = C$, y queda demostrada la primera implicación. Suponga que $E\Delta = C$ entonces

$C\Delta = (E\Delta)\Delta = E(\Delta\Delta) = E\Delta^2 = E\Delta = C$ por hipótesis, y queda demostrada la segunda implicación. Para la tercera implicación, suponga que $\Delta E = C$ entonces $\Delta C = \Delta(\Delta E) = (\Delta^2)E = \Delta E = C$. Por último, suponga que $E^2 = C$ entonces $EC = E(E\Delta) = (EE)\Delta = CE$. \square

Buscaremos ahora los productos candidatos a ser asociativos utilizando las implicaciones del lema anterior, considerando cada posibilidad de resultado para ΔE y $E\Delta$.

Caso 1: $\Delta E = E\Delta = C$. Se tiene que $\Delta C = C\Delta = C$ por las implicaciones (2) y (3). Calculemos $CE = (\Delta E)E = \Delta(EE)$, si $EE = C$ entonces $CE = \Delta C = C$ y si $EE = E$ entonces $CE = \Delta E = C$ por lo que $CE = C$. Por otra parte, $C^2 = (\Delta E)C = \Delta(EC) = C$ ya que si $EC = C$ se obtiene $\Delta(EC) = \Delta C = C$ y si $EC = E$ tenemos $\Delta(EC) = \Delta E = C$. Por último $EC = E(E\Delta) = (EE)\Delta = C$ independientemente del valor de EE . No hay implicación que permita calcular el valor de E^2 por lo que obtenemos las dos posibilidades siguientes:

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

Caso 2: $\Delta E = C$ y $E\Delta = E$. Por la implicación (3) se tiene que $\Delta C = C$. También tenemos que $C\Delta = (\Delta E)\Delta = \Delta(E\Delta) = \Delta E = C$ y de misma forma calculamos $C^2 = C(\Delta E) = (C\Delta)E = CE = C$. Para el caso de CE se tiene que $CE = (\Delta E)E = \Delta(EE)$, si $EE = C$ entonces $CE = \Delta C = C$ y si $EE = E$ entonces $CE = \Delta E = C$, por lo que $CE = C$. Por último tenemos que $EC = E(\Delta E) = (E\Delta)E = E^2$. Por lo que para este caso, tenemos los dos productos siguientes:

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

Caso 3: $\Delta E = E$ y $E\Delta = C$. Por la implicación (2) se tiene que $C\Delta = C$. Calculemos, $\Delta C = \Delta(E\Delta) = (\Delta E)\Delta$, luego si $\Delta E = C$ o $\Delta E = E$ se tiene que $\Delta C = C$. $EC = E(E\Delta) = (EE)\Delta$, si $EE = C$ entonces $EE\Delta = C\Delta = C$ y si $EE = E$ entonces $EE\Delta = E\Delta = C$ por lo que $EC = C$. Luego, $C^2 = CC = C(E\Delta) = (CE)\Delta$, si $CE = C$ se tiene $C^2 = C\Delta = C$ y si $CE = E$ entonces $C^2 = E\Delta = C$ por lo que $C^2 = C$. Por último, $E^2 = E(\Delta E) = (E\Delta)E = CE$, por lo que los productos resultantes son:

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}$$

Caso 4: $\Delta E = E\Delta = E$. Dividiremos este caso en 5 subcasos.

Subcaso 1: $E^2 = C$. Por las implicaciones (1) y (4) tenemos que $C^2 = C$ y $EC = CE$. Calculamos $C\Delta = E^2\Delta = E(E\Delta) = E^2 = C$. Por otro lado, $\Delta C = \Delta E^2 = (\Delta E)E = E^2 = C$. Por lo que las matrices resultantes son:

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}$$

Subcaso 2: $E^2 = E$ y $EC = CE = C$. Luego, $\Delta C = \Delta(EC) = (\Delta E)C = EC = C$. También $C\Delta = (CE)\Delta = C(E\Delta) = CE = C$. Por lo que las soluciones posibles son:

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix}$$

Subcaso 3: $\Delta E = E\Delta = E$, $E^2 = E$, $EC = E$ y $CE = C$. Calculando, tenemos que $C\Delta = (CE)\Delta = C(E\Delta) = CE = C$, y por otro lado $C^2 = (CE)C = C(EC) = CE = C$ por lo que las posibilidades son:

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

Subcaso 4: $\Delta E = E\Delta = E$, $E^2 = E$, $EC = C$ y $CE = E$. Se tiene $\Delta C = \Delta(EC) = (\Delta E)C = EC = C$ y $C^2 = C(EC) = (CE)C = EC = C$. Por lo que las posibles matrices son:

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}$$

Subcaso 5: $\Delta E = E\Delta = E$, $E^2 = E$ y $EC = CE = E$. Con estas condiciones no hay maneras de determinar los valores de ΔC , $C\Delta$ y C^2 . por lo que estudiaremos los casos uno por uno. Sabemos que la matriz es de forma:

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & - \\ E & - & - \end{pmatrix}$$

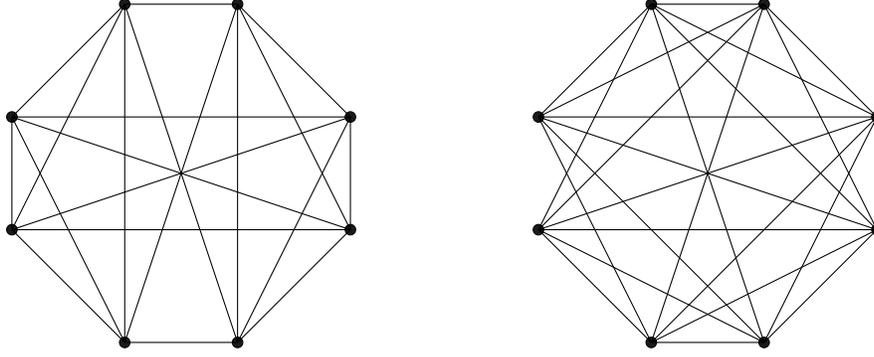


Figura 1.7: contraejemplo de la asociatividad de los productos

Por que tenemos $2^3 = 8$ posibilidades para este caso. Mostraremos con un contraejemplo que los casos

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}$$

no son asociativos. Para esto, utilizaremos las gráficas $\overline{K_2}$ y K_2 .

Para el producto $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}$, si calculamos $(\overline{K_2} \wedge K_2) \wedge \overline{K_2}$ y $\overline{K_2} \wedge (K_2 \wedge \overline{K_2})$

obtenemos las gráficas de la Figura 1.6, las cuales no son isomorfas ya que en la gráfica de la izquierda, cada vértice tiene grado 5 mientras que en la gráfica de la

derecha, cada vértice tiene grado 6. Para el producto $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}$, obtenemos en

el mismo orden las gráficas de la imagen 1.6 calculando primero $\overline{K_2} \wedge (K_2 \wedge \overline{K_2})$ y luego $(\overline{K_2} \wedge K_2) \wedge \overline{K_2}$.

Entonces tenemos 20 productos candidatos a ser productos asociativos. Afirmamos que los 20 casos alojados son productos asociativos. Las demostraciones para ver que en efecto son productos asociativos son análogas, para más detalles ver [7]. Veremos la demostración para 6 productos, en los cuales tenemos especial interés para lo que sigue en esta tesis.

Sean G, H, I gráficas, para cualquier producto es obvio que el número de vértices siempre es $|G||H||I|$, por lo que analizaremos las adyacencias de cada uno. Denotaremos por g, h, i a los vértices de G, H, I respectivamente.

- Para el producto $\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$, si calculamos $(G \wedge H) \wedge I$ o $G \wedge (H \wedge I)$ siempre obtenemos una gráfica sin aristas, por lo tanto este producto es asociativo.

- Para el producto $\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ veamos que $(g, h, i)(g', h', i') \in E(G \wedge H) \wedge I$

si y sólo si $\{(g, h)(g', h') \in E(G \wedge H)\}$ y $\{ii' \in E(I)\}$ si y sólo si $\{gg' \in E(G)$ y $hh' \in E(H)\}$ y $ii' \in E(I)$ si y sólo si $gg' \in E(G)$ y $\{hh' \in E(H)$ y $ii' \in E(I)\}$ si y sólo si $gg' \in E(G)$ y $(h, i)(h', i') \in E(H \wedge I)$ si y sólo si $(g, h, i)(g', h', i') \in E(G \wedge (H \wedge I))$. Así, una arista está en $G \wedge (H \wedge I)$ si y sólo si está en $(G \wedge H) \wedge I$. Por lo que el producto es asociativo.

-Para el producto $\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ se tiene que $(g, h, i)(g', h', i') \in E((G \wedge H) \wedge I)$ si y

sólo si $\{(g, h)(g', h') \in E(G \wedge H)\}$ y $i = i'$, si y sólo si $\{gg' \in E(G)yh = h'\}$ y $i = i'$, si y sólo si $gg' \in E(G)$ y $\{h = h' \text{ y } i = i'\}$, si y sólo si $gg' \in E(G)$ y $(h, i) = (h', i')$, si y sólo si $(g, h, i)(g', h', i') \in E(G \wedge (H \wedge I))$. Por lo que $E((G \wedge H) \wedge I) = E(G \wedge (H \wedge I))$ y el producto es asociativo.

-Para el producto $\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (g, h, i)(g', h', i') &\in E(G \wedge (H \wedge I)) \\ \Leftrightarrow g = g' \text{ y } (h, i)(h', i') &\in E(H \wedge I) \\ \Leftrightarrow g = g' \text{ y } \{h = h' \text{ y } ii' &\in E(I)\} \\ \Leftrightarrow \{g = g' \text{ y } h = h' \} \text{ y } ii' &\in E(I) \\ \Leftrightarrow (g, h) = (g', h') \text{ y } ii' &\in E(I) \\ \Leftrightarrow (g, h, i)(g', h', i') &\in E((G \wedge H) \wedge I) \end{aligned}$$

-Para el producto $\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ calcularemos $E(G \wedge (H \wedge I))$ y $E((G \wedge H) \wedge I)$ por separado.

$$(g, h, i)(g', h', i') \in E(G \wedge (H \wedge I)) \Leftrightarrow [\{g = g' \text{ y } (h, i)(h', i') \in E(H \wedge I)\} \text{ o } \{gg' \in E(G) \text{ y } (h, i) = (h', i')\}] \Leftrightarrow [\{g = g' \text{ y } h = h' \text{ y } ii' \in E(I)\} \text{ o } \{g = g' \text{ y } hh' \in E(H) \text{ y } i = i'\}] \text{ o } \{gg' \in E(G) \text{ y } h = h' \text{ y } i = i'\}.$$

$$(g, h, i)(g', h', i') \in E((G \wedge H) \wedge I) \Leftrightarrow [\{(g, h)(g', h') \in E(G \wedge H) \text{ y } i = i'\} \text{ o } \{(g, h) = (g', h') \text{ y } ii' \in E(I)\}] \Leftrightarrow [\{g = g' \text{ y } hh' \in E(H) \text{ y } i = i'\} \text{ o } \{gg' \in E(G) \text{ y } h = h' \text{ y } i = i'\}] \text{ o } \{g = g' \text{ y } h = h' \text{ y } ii' \in E(I)\}$$

Las condiciones de adyacencias son iguales en los dos casos, por lo que el producto es asociativo.

- Para el producto $\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ tenemos que: $(g, h, i)(g', h', i') \in (G \wedge H) \wedge I$ si y

sólo si sucede uno de estos casos:

- $(g, h)(g', h') \in E(G \wedge H)$ y $ii' \in E(I)$

- $(g, h)(g', h') \in E(G \wedge H)$ y $i = i'$

- $(g, h) = (g, h)$ y $ii' \in E(I)$

las cuales son equivalentes a:

1. - $gg' \in e(G)$ y $hh' \in E(H)$ y $ii' \in E(I)$

- $g = g'$ y $hh' \in E(H)$ y $ii' \in E(I)$

- $gg' \in E(G)$ y $h = h'$ y $ii' \in E(I)$

2. - $gg' \in E(G)$ y $hh' \in E(H)$ y $i = i'$

- $g = g'$ y $hh' \in E(H)$ y $i = i'$

- $gg' \in E(G)$ y $h = h'$ y $i = i'$

3. - $g = g'$ y $h = h'$ y $ii' \in E(I)$

Reacomodando estos 7 casos de adyacencia, obtenemos que son equivalentes a:

- $gg' \in E(G)$ y $(h, i)(h', i') \in E(H \wedge I)$

- $g = g'$ y $(h, i)(h', i') \in E(H \wedge I)$

- $gg' \in E(G)$ y $(h, i) = (h', i')$ los cuales a su vez son equivalentes a que $(g, h, i)(g', h', i') \in E(G \wedge (H \wedge I))$.

De los 8 productos distributivos, hemos demostrado que los 6 productos siguientes son asociativos:

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}.$$

Para completar el estudio de los productos candidatos a ser utilizados para formar un anillo, notamos que los dos productos siguientes aunque son distributivos respecto a la unión, no son asociativos.

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}.$$

Por lo que concluimos que de los 256 productos posibles, solo 6 son asociativos y distributivos respecto a la unión de gráficas. Lo único que nos falta para la construcción de los anillos es ver que si un producto es asociativo respecto a la unión de gráficas, también lo es para los elementos del grupo $K_{\cup}(G)$.

Lema 1.4.5. *Si \wedge es un producto cartesiano de gráficas asociativo, entonces es asociativo respecto a los elementos de $K_{\cup}(G)$.*

Demostración: Sean $(G, G'), (H, H'), (M, M') \in K_{\cup}(G)$

$$\begin{aligned}
& (G, G') \wedge [(H, H') \wedge (M, M')] \\
&= (G, G') \wedge [(H \wedge M) \cup (H' \wedge M'), (H \wedge M') \cup (H' \wedge M)] \\
&= [(G \wedge ((H \wedge M) \cup (H' \wedge M')) \cup (G' \wedge ((H \wedge M') \cup (H' \wedge M))), \\
&\quad (G \wedge ((H \wedge M') \cup (H' \wedge M))) \cup (G' \wedge ((H \wedge M) \cup (H' \wedge M')))] \\
&= [(G \wedge H \wedge M) \cup (G \wedge H' \wedge M') \cup (G' \wedge H \wedge M') \cup (G' \wedge H' \wedge M), \\
&\quad (G \wedge H \wedge M') \cup (G \wedge H' \wedge M) \cup (G' \wedge H \wedge M) \cup (G' \wedge H' \wedge M')] \\
&= [(((G \wedge H) \cup (G' \wedge H')) \wedge M) \cup (((G' \wedge H) \cup (G \wedge H')) \wedge M'), \\
&\quad (((G \wedge H) \cup (G' \wedge H')) \wedge M') \cup (((G' \wedge H) \cup (G \wedge H')) \wedge M)] \\
&= [(G \wedge H) \cup (G' \wedge H'), (G' \wedge H) \cup (G \wedge H')] \wedge (M, M') \\
& \qquad \qquad \qquad [(G, G') \cup (H, H')] \wedge (M, M')
\end{aligned}$$

□

Teniendo en cuenta los lemas y teoremas anteriores, concluimos la construcción de los anillos de forma $(\mathcal{G}, \cup, \wedge)$ anunciando el siguiente teorema:

Teorema 1.4.2. *$(\mathcal{G}, \cup, \wedge)$ es un anillo si y sólo si \wedge es uno de los siguientes productos:*

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

en orden, el producto vacío, el producto de capas, el co-producto de capas, el producto cartesiano, el producto categórico y el producto fuerte.

1.5 Anillos con suma de gráficas

El objetivo de esta sección es determinar para cuales productos de gráficas \vee , $(\mathcal{G}, +, \vee)$ es un anillo. Recordamos que la suma de dos gráficas G, H se define como $V(G + H) = V(G) \times V(H)$ y $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{gh/g \in G, h \in H\}$. En secciones anteriores hemos construido $K_+(\mathcal{G})$ y demostramos que es un grupo conmutativo. Podemos hacer el mismo análisis que hicimos para la construcción de los anillos de gráficas con unión, el cual nos daría también 6 productos posibles para formar anillos. Estos 6 anillos resultan ser isomorfos a los anillos construidos con la unión, por lo que decidimos poner únicamente las demostraciones relevantes.

Teorema 1.5.1. *Un producto de gráfica \wedge es distributivo respecto a la suma de gráficas $+$ si y sólo si su matriz asociada tiene la siguiente forma:*

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & - \\ E & - & - \end{pmatrix}$$

Demostración: Primero probaremos que un producto de gráfica \wedge es distributivo por la izquierda si y sólo si su matriz asociada tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} E & - & - \\ E & \Delta & - \\ E & - & - \end{pmatrix}$$

Sea G una gráfica con 3 vértices g_0, g_1, g_2 tales que $g_0g_1 \in E(G)$ y $g_1g_2 \notin E(G)$. Suponga que \wedge es distributivo por la izquierda respecto a la suma de gráficas $+$, entonces $G \wedge (H + M) \cong (G \wedge H) + (G \wedge M)$ para cualesquiera gráficas H, M . Nota que para cualquier producto de gráficas \wedge y cualesquiera gráficas H y M , si $g \in V(G)$, $h \in V(H)$ y $m \in V(M)$, entonces $(g, h)(g', m) \in E((G \wedge H) + (G \wedge M))$, incluyendo el caso $g = g'$.

- (a) Si $EE = C$, entonces $g_0g_1 \in E(G)$ implicaría que $(g_0, h)(g_1, m) \notin E(G \wedge (H + M))$, una contradicción.
- (b) Si $\Delta E = C$, como $hm \in E(H + M)$ para cada $h \in H$, $m \in M$, implicaría que $(g_0, h)(g_0, m) \notin E(G \wedge (H + M))$, una contradicción.
- (c) Si $CE = C$, entonces $g_1g_2 \notin E(G)$ implicaría que $(g_1, h)(g_2, m) \notin E(G \wedge (H + M))$, una contradicción.

Por otra parte, suponga que \wedge es un producto de gráficas con una matriz asociada de forma:

$$\begin{pmatrix} E & - & - \\ E & \Delta & - \\ E & - & - \end{pmatrix}$$

Notamos que cada par de vértices $g, g' \in V(G)$, $h, h' \in V(H)$ se tiene que $(g, h)(g', h') \in E(G \wedge (H + M))$ si y sólo si $(g, h)(g', h') \in E(G \wedge H)$ si y sólo si $(g, h)(g', h') \in E((G \wedge H) + (G \wedge M))$. El caso $(g, m)(g', m')$ con $g, g' \in V(G)$, $m, m' \in V(M)$ es análogo, entonces, las únicas posibles aristas distintas entre las gráficas $(G \wedge H) + (G \wedge M)$ y $G \wedge (H + M)$ son de forma $(g, h)(g', h')$. Está claro que $(g, h)(g', h') \in (G \wedge H) + (G \wedge M)$, además como $EE = \Delta E = CE = E$ y $h, m \in H + M$, se tiene que $(g, h)(g', m) \in G \wedge (H + M)$ y por lo tanto $G \wedge (H + M) \cong (G \wedge H) + (G \wedge M)$.

De igual manera probamos que un producto de gráficas \wedge es distributivo por la derecha respecto a la suma de gráficas si y sólo si su matriz asociada tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ - & \Delta & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

y por lo tanto el teorema queda probado. \square

De la misma forma que verificamos que las 6 matrices encontradas anteriormente para la unión forman un anillo, podemos verificar que las 6 matrices a continuación forman un anillo junto con la operación suma. Resumiremos este hecho en un teorema:

Teorema 1.5.2. $(\mathcal{G}, +, \wedge)$ tiene estructura de anillo si y sólo si \wedge tiene asociado una de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix}$$

Para terminar esta sección, mostraremos que los 6 anillos construidos utilizando la operación unión son isomorfos a los 6 anillos construidos con la operación suma.

Proposición 1.5.1. Existe un isomorfismo Ψ entre los anillos de gráficas $(\mathcal{G}, \cup, \wedge)$ y $(\mathcal{G}, +, \vee)$.

Demostración: Notamos que $G \cup H = \overline{\overline{G} + \overline{H}}$ para cualesquiera gráficas G, H . Definimos $\Psi : (\mathcal{G}, \cup, \wedge) \rightarrow (\mathcal{G}, +, \vee)$ como $\Psi([G, G']_{\cup}) = [\overline{G}, \overline{G'}]_{+}$. Claramente, Ψ es biyectiva. Entonces el resultado es producto de esas igualdades:

$$\begin{aligned}
\Psi([G, G'] \wedge [H, H']) &= \Psi([(G \wedge H) \cup (G' \wedge H'), (G' \wedge H) \cup (G \wedge H')]) \\
&= [\overline{(G \wedge H) \cup (G' \wedge H')}, \overline{(G' \wedge H) \cup (G \wedge H')}] \\
&= [\overline{(G \wedge H)} + \overline{(G' \wedge H')}, \overline{(G' \wedge H)} + \overline{(G \wedge H')}] \\
&= [(\overline{G} \vee \overline{H}) + (\overline{G'} \vee \overline{H'}), (\overline{G'} \vee \overline{H}) + (\overline{G} \vee \overline{H'})] \\
&= [\overline{G}, \overline{G'}] \vee [\overline{H}, \overline{H'}] \\
&= \Psi([G, G']) \vee \Psi([H, H']).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi([G, G'] \cup [H, H']) &= \Psi([G \cup H, G' \cup H']) \\
&= [\overline{G \cup H}, \overline{G' \cup H'}] \\
&= [\overline{G} + \overline{H}, \overline{G'} + \overline{H'}] \\
&= \Psi([G, G']) + \Psi([H, H']). \quad \square
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Polinomios de productos de gráficas

En este capítulo, quise abordar un problema de conteo que involucra esencialmente dos cosas: los productos de gráficas que ya hemos definido en el capítulo anterior y los polinomios de completas (Clique Polynomial). Existen muchos polinomios definidos sobre gráficas como lo son el "Tutte polynomial", el "chromatic polynomial", el "Weighted graphs polynomial", el "Chain polynomial", el "characteristic polynomial", el "matching polynomial", el "independent set polynomial", el "vertex cover polynomial", el "Edge cover polynomial", el "Martin polynomial", el "Interlace polynomial", el "Go polynomial", el "Stability polynomial" entre varios otros. No hay una razón específica de haber escogido estudiar el polinomio de completas en vez de algún otro, pero una de ellas sería que existe un homomorfismo de los anillos de gráficas construidos en el capítulo anterior hacia los polinomios de completas.

En 1990, Fisher y Solow definen el polinomio de dependencia (dependence polynomial) como $D_G(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\omega(G)} (-1)^i a_i x^i$ (ver [4]). Este polinomio surgió del problema de contar palabras formadas con un alfabeto en el cual se admiten ciertas condiciones de conmutatividad de las letras. Unos años después, en 1994, Cornelis Hoede y Xueliang Li definieron el polinomio de completas (clique polynomial) de la siguiente manera: para una gráfica G , $P_G(x) := 1 + \sum_{i=1}^{\omega(G)} g_i x^i$, donde g_i es el número de subgráficas completas de tamaño i contenidas en G y $\omega(G)$ es el tamaño de la subgráfica completa más grande contenido en G (ver Figura 2.1). Así tenemos que $D_G(x) = P_G(-x)$.

Como vimos en el capítulo anterior, existen 256 maneras distintas de definir un pro-

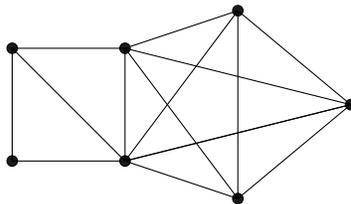


Figura 2.1: Una gráfica G con $P_G(x) = x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 14x^2 + 7x + 1$

ducto de gráficas. La pregunta que se contestará continuación en este capítulo es la siguiente: si G, H son gráficas de las que unicamente conocemos los polinomios de completas, ¿ para cuáles productos \wedge de los 256 posibles se puede calcular el polinomio resultante de $G \wedge H$ en términos de los polinomios de completas de las gráficas factores?. Además, siempre que el cálculo es posible daremos la fórmula del polinomio resultante y en caso contrario, un contraejemplo.

2.1 Resultados preliminares

Lema 2.1.1. *Sea \wedge un producto de gráficas y M_\wedge su representación matricial. Si \wedge' es el producto que tiene como representación la matriz simétrica respecto al segundo reglón entonces: $G \wedge H = \overline{G} \wedge' H$.*

Demostración: Sea \wedge un producto de gráficas y M_\wedge su representación matricial. Al tomar simetria respecto al segundo reglón de M_\wedge , estamos cambiando la propiedad $gg' \in E(G)$ por la propiedad $gg' \notin E(G)$, por lo que, tomando el complemento de G tenemos que la propiedad $gg' \notin E(\overline{G})$ es equivalente a $gg' \in E(G)$. \square

Lema 2.1.2. *Sea \wedge un producto de gráficas y M_\wedge su representación matricial. Si \wedge' es el producto que tiene como representación la matriz simétrica respecto a la segunda columna entonces: $G \wedge H = G \wedge' \overline{H}$.*

Demostración: Análogo al lema anterior. \square

Lema 2.1.3. $GM_\wedge H = HM_\wedge^T G$ donde M_\wedge^T es la matriz transpuesta de M_\wedge .

Nota: si queremos calcular $GM_\wedge H$ y M_\wedge es simétrica respecto al segundo reglón, entonces sólo importa el orden de $V(G)$ y no sus adyacencias. Análogamente, si M_\wedge es simétrica respecto a la segunda columna, sólo importa el orden de $V(H)$.

Lema 2.1.4. $P_G(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$ si y sólo si $G = K_n$

Demostración: Si $G = K_n$, está claro que $P_G(x) = (1+x)^n$. Por otra parte supongamos que $P_G(x) = (1+x)^n = x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{1}x + 1$, entonces G debe ser una gráfica con una completa de tamaño n con n vértices y la única gráfica que cumple estas condiciones es K_n , por último vemos que los demás coeficientes coinciden, por lo que $G = K_n$ \square

2.2 Polinomios de productos de gráficas

En esta sección damos una lista de todos los productos posibles. Para cada producto \wedge proporcionamos una fórmula para calcular el polinomio de completas $P_{G \wedge H}(x)$ de dos gráficas arbitrarias G, H en términos únicamente de $P_G(x)$ y $P_H(x)$ siempre que sea posible. En caso contrario damos un contraejemplo, es decir dos pares de gráficas G, H y G', H' tal que $P_G(x) = P_{G'}(x)$ y $P_H(x) = P_{H'}(x)$ pero con $P_{G \wedge H}(x) \neq P_{G' \wedge H'}(x)$. En efecto si algo así sucede, no podemos calcular el polinomio de completas resultante del producto en términos de los polinomios de completas de sus gráficas factores, pues tendríamos un resultado diferente con polinomios de factores iguales. Veamos como ejemplo el producto \odot cuya representación matricial es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix}$$

Sean G y M las gráficas de la Figura 2.3 y $\overline{K_3}$ la gráfica que consta de 3 vértices sin aristas. Notamos primero que $P_G(x) = 2x^2 + 4x + 1 = P_M(x)$. Por otro lado, si calculamos $P_{\overline{K_3} \odot G}(x)$ y $P_{\overline{K_3} \odot M}(x)$ vemos que son distintos (ver Figura 2.2), por lo que no se puede dar una fórmula que aloje el polinomio de completas de este producto.

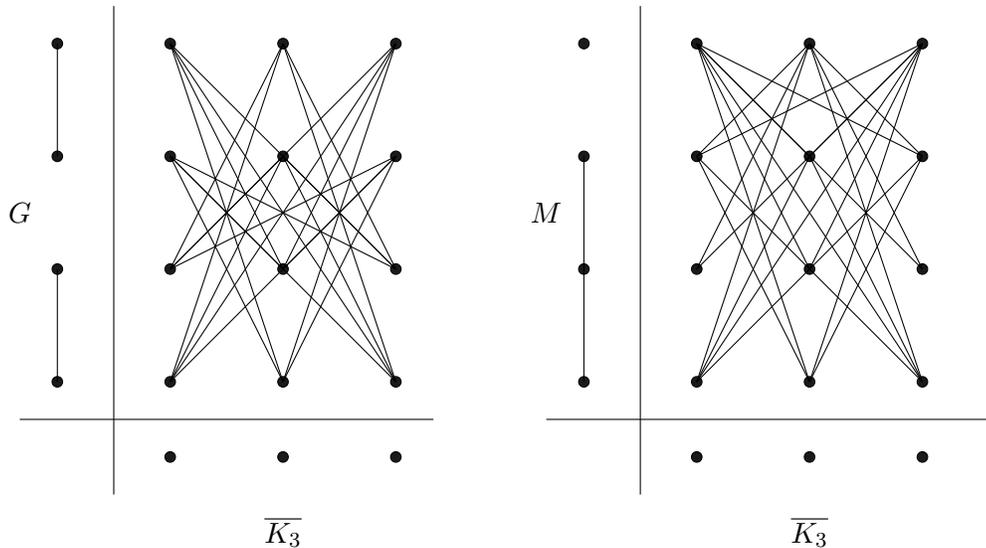


Figura 2.2: $P_{\overline{K_3} \odot G}(x) = 24x^2 + 12x + 1$ y $P_{\overline{K_3} \odot M}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1$

Para lo que resta de este capítulo, utilizaremos la notación \bullet para referirnos a los productos de gráficas, esto para no confundir los productos estudiados en la sección anterior. También, para los casos en los que se proporciona la fórmula, utilizaremos siempre las gráficas G', H' con $P_{G'}(x) = \sum_{i=1} g_i x^i$ y $P_{H'}(x) = \sum_{i=1} h_i x^i$.

Teorema 2.2.1. Si G y H son dos gráficas con polinomios de completas $P_G(x)$ y $P_H(x)$ respectivamente y \wedge un producto de gráficas, entonces el producto de polinomios no depende de las gráficas factores que representan sí y sólo sí \wedge es uno de los 29 productos presentados a continuación con su respectiva fórmula:

- $\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = g_1 h_1 x + 1$
- $\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = \sum_{i=0}^n i! g_i h_i x^i$
- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = g_1 P_H(x) - g_1 + 1$
- $\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = h_1 P_G(x) - h_1 + 1$
- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = h_1 C(G, x) + g_1 C(H, x) - (h_1 + g_1 + g_1 h_1 x) + 1$
- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = h_1 (1+x)^{g_1} - h_1 + 1$
- $\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = g_1 (1+x)^{h_1} - g_1 + 1$
- $\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = \sum_{i=1}^n g_i P_{(h_1-i)}^{h_1} x^i + 1$
- $\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = \sum_{i=1}^n h_i P_{(g_1-i)}^{g_1} x^i + 1$
- $\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = \sum_{i=2}^n (g_i h_1 + g_i i! \sum_{j=2}^i h_j) x^i + g_1 h_1 + 1$
- $\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = \sum_{i=2}^n (h_i g_1 + h_i i! \sum_{j=2}^i g_j) x^i + h_1 g_1 + 1$
- $\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \tilde{g}_i \tilde{h}_j (1+x)^{ij}$ donde $\tilde{g}_i = \sum_{s=i}^n g_i \binom{s}{i} (-1)^{i+s}$
y $\tilde{h}_i = \sum_{s=i}^m h_i \binom{s}{i} (-1)^{i+s}$
- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix}$ $P_{G\wedge H}(x) = g_1 (1+x)^{h_1} + h_1 P_G(x) - h_1 g_1 x - g_1 - h_1 + 1$

$$\bullet \begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = h_1(1+x)^{g_1} + g_1 P_H(x) - g_1 h_1 x - h_1 - g_1 + 1$$

$$\bullet \begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = \sum_{i=1}^n g_i h_1^i x^i$$

$$\bullet \begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = \sum_{i=1}^n h_i g_1^i x^i$$

$$\bullet \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = h_1 P_G(x) + g_1 P_H(x) - (h_1 + g_1 + h_1 g_1 x) + 1$$

$$\bullet \begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = g_1 P_H(x) + h_1 P_G(x) - (g_1 + h_1 + g_1 h_1 x) + 1$$

$$\bullet \begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = g_1(1+x)^{|h_1|} + \sum_{i=2}^{g_1} a_i x^i - g_1 + 1 \text{ donde}$$

$$a_i = \sum_{j=2}^i g_j \left(\sum_{r_1+r_2+\dots+r_j=i} \binom{h_1}{r_1} \binom{h_1-r_1}{r_2} \dots \binom{h_1-(r_1+r_2+\dots+r_{j-1})}{r_j} \right)$$

$$\bullet \begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = h_1(1+x)^{|g_1|} + \sum_{i=2}^{h_1} a_i x^i - h_1 + 1 \text{ donde}$$

$$a_i = \sum_{j=2}^i h_j \left(\sum_{r_1+r_2+\dots+r_j=i} \binom{g_1}{r_1} \binom{g_1-r_1}{r_2} \dots \binom{g_1-(r_1+r_2+\dots+r_{j-1})}{r_j} \right)$$

$$\bullet \begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = g_1(1+x)^{h_1} + h_1(1+x)^{g_1} - g_1 h_1 x - g_1 h_1 + 1$$

$$\bullet \begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = \sum_{i=1, i \leq h_1}^{g_1} \binom{g_1}{i} P_i^{h_1} + 1$$

$$\bullet \begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \quad P_{G \wedge H}(x) = g_1(1+x)^{h_1} + \sum_{i=2}^n a_i x^i - g_1 + 1 \text{ donde}$$

$$a_i = \sum_{j=2}^i g_j \left(\sum_{\substack{r_1, \dots, r_j \\ r_1 + \dots + r_j = i}} \binom{h_1}{r_1} \binom{h_1}{r_2} \dots \binom{h_1}{r_j} \right)$$

- $\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}$ $P_{G \wedge H}(x) = h_1(1+x)^{g_1} + \sum_{i=2}^n a_i x^i - h_1 + 1$ donde

$$a_i = \sum_{j=2}^i h_j \left(\sum_{\substack{r_1, \dots, r_j \\ r_1 + \dots + r_j = i}} \binom{g_1}{r_1} \binom{g_1}{r_2} \dots \binom{g_1}{r_j} \right)$$
- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix}$ $P_{G \wedge H}(x) = \sum_{i=1}^{g_1} \binom{g_1}{i} h_1^i x^i$
- $\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}$ $P_{G \wedge H}(x) = \sum_{i=1}^{h_1} \binom{h_1}{i} g_1^i x^i$
- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix}$ $P_{G \wedge H}(x) = (P_H(x))^{|g_1|}$
- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}$ $P_{G \wedge H}(x) = (P_G(x))^{|h_1|}$
- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix}$ $P_{G \wedge H}(x) = (1+x)^{g_1 h_1}$

Demostración: En la primera parte de la demostración veremos como se calcularon las fórmulas de los productos mencionados en el teorema. Todas provienen de cálculos, más o menos evidentes según los casos por lo cual estas pruebas son más bien explicaciones de cómo se obtuvieron los resultados y se omitieron en los casos más obvios. En una segunda parte daremos una lista de contraejemplos clasificados por la cantidad de "E" que aparecen en su forma matricial en forma creciente, es decir, primero veremos los productos que contienen una E en su representación matricial, seguiremos con los que contienen 2 y así sucesivamente, para que así sea más fácil la búsqueda de algún producto en particular. Denotaremos por P_m^n al número de permutaciones de m elementos en un conjunto de cardinalidad n , esto es, $P_m^n = n!/(nm)!$ y por P_n a la trayectoria de tamaño n .

- $\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' , Este producto siempre aloja un conjunto independiente de tamaño $|G'| |H'|$, por que el polinomio resultante es $P_{G' \bullet H'}(x) = g_1 h_1 x + 1$.
- $\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' se tiene: $P_{G' \bullet H'}(x) = g_1 P_{H'}(x) - g_1 + 1$. El cálculo es sencillo ya que la gráfica resultante está formada por g_1 copias de H' .

- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' se tiene: $P_{G' \bullet H'}(x) = h_1 P_G(x) - h_1 + 1$. El cálculo es sencillo ya que la gráfica resultante está formada por h_1 copias de G' .

- $\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas G', H' se tiene $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=0}^n i! g_i h_i x^i$. Notamos que aparecen aristas únicamente cuando hay aristas en ambas gráficas factores G' y H' , por lo que es suficiente contar cuántas subgráficas completas se forman para cada par de completas de tamaño i en G' y H' . El resultado alojado fue de $i!$ completas.

- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' tenemos $P_{G' \bullet H'}(x) = h_1 P_G + g_1 P_H - (h_1 + g_1 + g_1 h_1 x) + 1$. Este cálculo es sencillo ya que la gráfica resultante está formada por g_1 copias de H' , h_1 copias de G' y que no se forma ninguna completa entre ellas.

- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' , se tiene $P_{G' \bullet H'}(x) = h_1(1 + x)^{g_1} - h_1 + 1$. Notamos que la arista $(g, h)(g', h')$ está en el producto si y sólo si $h = h'$. Entonces para cada $h \in H'$ se forma una completa de g_1 vértices en el producto. Además cada una de estas completas son ajenas, así, ajustando el término constante, obtenemos la ecuación mencionada.

- $\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para G', H' arbitrarias, $P_{G' \bullet H'}(x) = g_1(1 + x)^{h_1} - g_1 + 1$. La demostración es análoga al caso anterior.

- $\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' se tiene

$$P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=1}^n g_i P_{(h_1-i)}^{h_1} x^i + 1$$

Si $g_1 - i \leq 0$ entonces $P_{(g_1-i)}^{g_1} = 0$. En este caso se tiene que $(g, h)(g', h')$ está en el producto si y sólo si $gg' \in E(G')$ y $h \neq h'$. Además, K_n está en el producto si y sólo si su preimagen en G es una completa de n vértices, es decir

no influyen las aristas de H' , por lo que suficiente contar cuántas completas se forman para cada completa en G' .

- $\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}$. Para G', H' arbitrarias, $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=1}^n h_i P_{(g_1-i)}^{g_1} x^i + 1$. Si $g_1 - i \leq 0$ entonces $P_{(g_1-i)}^{g_1} = 0$. La demostración es análoga al caso anterior.

- $\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' , se tiene $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=2}^n (g_i h_1 + g_i i! \sum_{j=2}^i h_j) x^i + g_1 h_1 x + 1$. En este caso se tiene que $(g, h)(g', h')$ está en el producto si y sólo si $gg' \in E(G')$ y $(hh' \in E(H') \text{ ó } h = h')$ por lo que es suficiente contar cuántas completas se forman para completa de G' y cada completa de H' teniendo en cuenta que para cada vértice en H se forma una copia de G' por lo que debemos contar estas completas por separado por el caso en que H' fuese un conjunto independiente. La otra parte del cálculo es similar al caso $\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' se tiene:

$$P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=2}^n (h_i g_1 + h_i i! \sum_{j=2}^i g_j) x^i + h_1 g_1 + 1$$

. La demostración es análoga al caso anterior.

- $\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$ Para dos gráficas arbitrarias G' y H' se tiene $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \tilde{g}_i \tilde{h}_j (1+x)^{ij}$ donde

$$\tilde{g}_i = \sum_{s=i}^n g_s \binom{s}{i} (-1)^{i+s} \text{ y } \tilde{h}_i = \sum_{s=i}^m h_s \binom{s}{i} (-1)^{i+s}.$$

En este caso el cálculo se realiza más fácilmente haciendo un cambio de base y expresar $P_G(x)$ como $\sum_{i=0}^n \tilde{g}_i (1+x)^i$ donde $\tilde{g}_i \in \mathbb{Z}$ y utilizando el hecho que en este producto para cada par de completas se tiene $K_m \bullet K_n = K_{mn}$ y por último que es un producto asociativo.

- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G' y H' se tiene $P_{G' \bullet H'}(x) = g_1(1+x)^{h_1} + h_1 P_G - h_1 g_1 x - g_1 - h_1 + 1$. En este producto se tiene que la arista $(g, h)(g', h')$ está en el producto si y sólo si $g = g'$ o $(h = h'$ y $gg' \in E(G'))$. Para cada vértice de G' , se forma una completa de tamaño h_1 y esas completas son ajenas, por lo que lo podemos calcular como $g_1(1+x)^{h_1}$. También, para cada vértice de H' , se forma una gráfica G' , todas ajenas entre sí, lo que se puede escribir como $h_1 P_{G'}$. Cómo las únicas intersecciones entre los dos tipos de completas son vértices aislados y que hemos contado dos veces los vértices, obtenemos $g_1(1+x)^{h_1} + h_1 P_{G'} - h_1 g_1 x$. Luego ajustando el término independiente, se obtiene la fórmula mencionada.
- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G', H' con $P_{H'}(x) = \sum_{i=0}^n h_i x^i$ se tiene: $P_{G' \bullet H'}(x) = h_1(1+x)^{g_1} + \sum_{i=2}^n h_i g_1 - h_1 + 1$. La prueba es análoga a la del producto anterior.
- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. En este producto se tiene que K_s está en el producto si y sólo si su imagen en G' es también K_s . Como para cada K_s en G se forman h_1^s completas de tamaño s en el producto, entonces el polinomio resultante para gráficas arbitrarias G' y H' es $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=1}^n g_i h_1^i x^i$.
- $\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G' y H' se tiene $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=1}^n h_i g_1^i x^i + 1$. La prueba es análoga a la del producto anterior.
- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G' y H' se tiene $P_{G' \wedge H'}(x) = P_{G'}(P_{H'}(x) - 1)$. Demostración en [3].
- $\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}$. Para dos gráficas arbitrarias G' y H' se tiene $P_{G' \wedge H'}(x) = P_{H'}(P_{G'}(x) - 1)$. La prueba es análoga a la del producto anterior.

- $\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Sean G', H' dos gráficas arbitrarias. En este producto, tenemos aristas $(g, h)(g', h')$ si y sólo si $\{gg' \in E(G') \text{ y } h \neq h'\}$ o $g = g'$ por lo tanto, para cada subgráfica completa en G' se forman completas en $G' \bullet H'$. Si G' es una gráfica con n vértices y sin aristas, entonces $P_{G' \bullet H'} = n(1+x)^{|H'|} - n + 1$, por lo que el término $(1+x)^{|H'|}$ debe aparecer en el polinomio, luego contando cuantas completas se forman en $G' \bullet H'$ para cada completa en G' tenemos que $P_{G' \bullet H'} = n(1+x)^{|H'|} + \sum_{i=2}^n a_i x^i - n + 1$ donde

$$a_i = \sum_{j=2}^i g_j \left(\sum_{r_1+r_2+\dots+r_j=i} \binom{h_1}{r_1} \binom{h_1-r_1}{r_2} \dots \binom{h_1-(r_1+r_2+\dots+r_{j-1})}{r_j} \right)$$

- $\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}$. Utilizando los mismos argumentos que en el producto anterior tomando $|H'| = n$ tenemos que: $P_{G' \bullet H'} = n(1+x)^{g_1} + \sum_{i=2}^n a_i x^i - n + 1$ donde

$$a_i = \sum_{j=2}^i h_j \left(\sum_{r_1+r_2+\dots+r_j=i} \binom{h_1}{r_1} \binom{g_1-r_1}{r_2} \dots \binom{g_1-(r_1+r_2+\dots+r_{j-1})}{r_j} \right)$$

- $\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix}$. Sean G', H' dos gráficas arbitrarias. En este producto, las aristas $(g, h)(g', h')$ que aparecen son las para las cuales $g = g'$ o $h = h'$ sin importar sus adyacencias en G' o en H' . Por lo que el polinomio resultante es $P_{G' \bullet H'}(x) = g_1(1+x)^{g_1} + g_1(1+x)^{h_1} - g_1 h_1 x - g_1 h_1 + 1$.

- $\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix}$. Sean G', H' dos gráficas arbitrarias. En este producto, las únicas aristas $(g, h)(g', h')$ que no aparecen en el producto son las para las cuales $g = g'$ o $h = h'$ por lo que el polinomio resultante depende únicamente del número de vértices de las gráficas. Por lo tanto, el polinomio resultante es : $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=1, i \leq h_1}^{g_1} \binom{g_1}{i} P_i^{h_1} + 1$ donde $P_i^{h_1}$ son las permutaciones de i en $|H'|$.

- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix}$. Sean G', H' dos gráficas arbitrarias. En este producto aparece

la arista $(g, h)(g', h')$ si y sólo si $gg' \in E(G')$ o $g = g'$. Si G' es una conjunto independiente de vértices y H' una gráfica arbitria, entonces la fórmula debe contener al término $g_1(1+x)^{h_1} - g_1 + 1$. Luego, para cada arista $g_1g_2 \in E(G')$ aparecen todas las aristas de forma $(g_1, h)(g_2, h)$, para cualquier $h \in H'$, por lo que el polinomio resultante es: $P_{G' \bullet H'}(x) = g_1(1+x)^{h_1} + \sum_{i=2}^n a_i x^i - g_1 + 1$

donde

$$a_i = \sum_{j=2}^i g_j \left(\sum_{\substack{r_1, \dots, r_j \\ r_1 + \dots + r_j = i}} \binom{h_1}{r_1} \binom{h_1}{r_2} \dots \binom{h_1}{r_j} \right).$$

- $\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}$ Sean G', H' dos gráficas arbitrarias. Este producto es equiva-

lente al tomar el producto anterior y intercambiar G' por H' , por lo que se tiene que el polinomio resultante es: $P_{G' \bullet H'}(x) = h_1(1+x)^{g_1} + \sum_{i=2}^n a_i x^i - h_1 + 1$

donde

$$a_i = \sum_{j=2}^i h_j \left(\sum_{\substack{r_1, \dots, r_j \\ r_1 + \dots + r_j = i}} \binom{g_1}{r_1} \binom{g_1}{r_2} \dots \binom{g_1}{r_j} \right)$$

- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix}$. Sean G', H' gráficas arbitrarias. En este producto hay aristas

$(g, h)(g', h')$ si y sólo si $g \neq g'$, es decir, son irrelevantes las adyacencias en las gráficas G' y H' , ya que la gráfica resultante sera siempre la gráfica multipartita completa K_{h_1, h_1, \dots, h_1} (donde h_1 se repite g_1 veces). Por lo que el polinomio resultante es $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=1}^{g_1} \binom{g_1}{i} h_1^i x^i$.

- $\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}$. Como en el producto anterior, para dos gráficas arbitrarias

G', H' hay aristas $(g, h)(g', h')$ si y sólo si $h \neq h'$, por lo que son irrelevantes las adyacencias en las gráficas G' y H' . En este caso, la gráfica resultante es la gráfica multipartita completa K_{g_1, g_1, \dots, g_1} (donde g_1 se repite h_1 veces).

Entonces su polinomio de completas es $P_{G' \bullet H'}(x) = \sum_{i=0}^{h_1} \binom{h_1}{i} g_1^i x^i$.

- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix}$ Sean G', H' dos gráficas arbitrarias. Notamos que este producto es equivalente a tomar g_1 veces la gráfica H' y poner todas las aristas posibles entre las copias de H' , por lo que la gráfica resultante es de forma $H' + H' + \dots + H'$. El polinomio que resulta de sumar g_1 veces la gráfica H' es $P_{G' \bullet H'}(x) = (P_{H'}(x))^{g_1}$.

- $\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}$ Utilizando el mismo argumento que para el producto anterior, tenemos que para dos gráficas G', H' , $P_{G' \bullet H'}(x) = (P_{G'}(x))^{h_1}$.

$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix}$ Para dos gráficas arbitrarias G', H' , se tiene $P_{G' \bullet H'}(x) = (1 + x)^{h_1 g_1}$. En este producto están todas las aristas posibles, por lo que el polinomio resultante es el de una gráfica completa de $h_1 g_1$ vértices.

Para los productos restantes, mostraremos en cada caso un contraejemplo, en cada uno de ellos utilizaremos algunas de las gráficas siguientes:

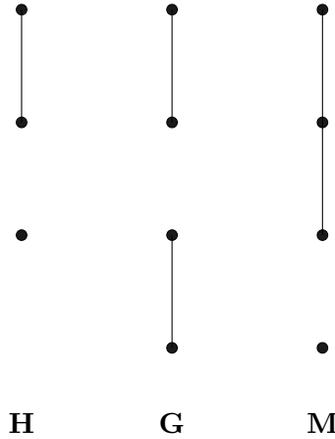


Figura 2.3: Gráficas utilizadas en los contraejemplos

2.2.1 Representación matricial con 1 E

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_3 \bullet G}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{K_3 \bullet M}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_3}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_3}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_3}}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_3}}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

2.2.2 Representación matricial con 2 E

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet p_3}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{H \bullet p_3}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{p_3 \bullet G}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{p_3 \bullet H}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{P_2 \bullet G}(x) = 16x^3 + 32x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{P_2 \bullet M}(x) = 22x^3 + 32x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet P_2}(x) = 16x^3 + 32x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet P_2}(x) = 22x^3 + 32x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_3} \bullet G}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_3} \bullet M}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

2.2.3 Representación matricial con 3 E

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M} = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1} = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{M \bullet K_2} = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{G \bullet K_2} = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_3 \bullet G}(x) = 28x^3 + 36x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{K_3 \bullet M}(x) = 32x^3 + 36x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_3}(x) = 28x^3 + 36x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_3}(x) = 32x^3 + 36x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^3 + 16x^3 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 2x^3 + 12x^3 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{M \bullet H}(x) = 2x^3 + 18x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{G \bullet H}(x) = 18x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_3 \bullet G}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{K_3 \bullet M}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_3}}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_3}}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_3} \bullet G}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_3} \bullet M}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{G \bullet K_2}(x) = 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_3}}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_3}}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 6x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

2.2.4 Representación matricial con 4 E

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ C & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_3} \bullet G}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_3} \bullet H}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet H}(x) = 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_3}}(x) = 24x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{H \bullet \overline{K_3}}(x) = 6x^3 + 24x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet H}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 6x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & C \end{pmatrix}. P_{K_2 \bullet G}(x) = 8x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 8x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^3 + 1x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix}. P_{\overline{K_3} \bullet G}(x) = 6x^4 + 24x^3 + 30x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_3} \bullet M}(x) = 14x^3 + 30x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{K_3 \bullet G}(x) = 6x^4 + 24x^3 + 30x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{K_3 \bullet M}(x) = 14x^3 + 30x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet \overline{K_3}}(x) = 6x^4 + 24x^3 + 30x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_3}}(x) = 14x^3 + 30x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_3}(x) = 6x^4 + 24x^3 + 30x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_3}(x) = 14x^3 + 30x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}. P_{\overline{K_2 \bullet G}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2 \bullet M}}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix}. P_{\overline{G \bullet K_2}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{M \bullet K_2}}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix}. P_{\overline{K_2 \bullet G}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2 \bullet M}}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix}. P_{\overline{G \bullet K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{M \bullet K_2}}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1$$

y $P_M(x) = P_G(x)$.

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{\overline{G \bullet K_1}}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{\overline{M \bullet K_1}}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}. P_{\overline{K_1 \bullet G}}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_1 \bullet M}}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{\overline{G \bullet K_1}}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{\overline{M \bullet K_1}}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{\overline{K_2 \bullet G}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2 \bullet M}}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{\overline{G \bullet K_2}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{M \bullet K_2}}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix}. P_{\overline{G \bullet K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{M \bullet K_2}}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_2}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix}. P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

2.2.5 Representación matricial con 5 E

$$\begin{pmatrix} C & C & C \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ C & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet H}(x) = 4x^4 + 20x^3 + 26x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{M \bullet H}(x) = 4x^4 + 22x^3 + 26x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 14x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{K_2 \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix}. P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix}. P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ C & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet M}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet M}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{M \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ C & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet M}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

2.2.6 Representación matricial con 6 E

$$\begin{pmatrix} E & C & C \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet H}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & C \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet H}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & C & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet P_2}(x) = 2x^6 + 12x^5 + 32x^4 + 48x^3 + 38x^2 + 12x + 1 \text{ y } P_{H \bullet P_2}(x) = 2x^6 + 14x^5 + 36x^4 + 46x^3 + 38x^2 + 12x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet H}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet H}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ C & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_2}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{H \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & C \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix}. P_{H \bullet K_2}(x) = 2x^5 + 30x^4 + 30x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{G \bullet K_2}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix}. P_{K_2 \bullet H}(x) = 2x^5 + 30x^4 + 30x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet G}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ C & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_1}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_1}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & E \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & C & E \end{pmatrix}. P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{H \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix}. P_{G \bullet K_2}(x) = 6x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_2}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 6x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{H \bullet \overline{K_2}}(x) = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ C & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_1 \bullet G}(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ y } P_{K_1 \bullet H}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{M \bullet \overline{K_2}}(x) = 2x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 8x + 1.$$

2.2.7 Representación matricial con 7 E

$$\begin{pmatrix} C & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet H}(x) = 26x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet G}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet H}(x) = 6x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ C & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{\overline{K_2} \bullet H}(x) = 6x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{\overline{K_2} \bullet G}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & C \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet \overline{K_2}}(x) = 4x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{H \bullet \overline{K_2}}(x) = 6x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ C & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{K_2 \bullet H}(x) = 24x^4 + 34x^3 + 20x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{K_2 \bullet G}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 20x^2 + 8x + 1.$$

$$\begin{pmatrix} E & C & E \\ E & \Delta & E \\ E & E & E \end{pmatrix} \cdot P_{G \bullet K_2}(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \text{ y } P_{H \bullet K_2}(x) = 24x^4 + 34x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

□

Capítulo 3

Sobre particiones resolventes para el producto lexicográfico

3.1 Introducción y definiciones

Los conceptos sobre problemas de conjuntos resolventes ó de localización en gráficas fueron descritos de manera independiente por Harary y Melter [21] y por Slater [29], iniciando desde entonces varias investigaciones sobre el tema. Numerosos trabajos están ligados a ciertas propiedades métricas. Uno de esos casos son las particiones resolventes. Tales particiones resolventes fueron introducidas por Chartrand *et al* en [18] para tener una visión más clara de lo que era su predecesor, *la dimensión métrica*. Después de esta publicación, algunos buenos resultados fueron obtenidos en [15], [20], [30] y [27]. Como vimos en la introducción, también se ha calculado la partición resolvente de varios productos de gráficas.

Si $G = (V, E)$ es una gráfica conexa y $\Pi = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ un partición ordenada de los vértices de G , la *representación particional* de un vértice $v \in V(G)$ con respecto a Π es el vector:

$$r(v|\Pi) = (d_G(v, P_1), d_G(v, P_2), \dots, d_G(v, P_n))$$

donde $d_G(v, P_i)$, con $1 \leq i \leq n$ representa la distancia del vértice v al conjunto P_i , eso es $d_G(v, P_i) = \min_{u \in P_i} \{d_G(v, u)\}$ donde $d_G(v, u)$ denota la longitud del camino más corto entre u y v . Si en el contexto está claro la gráfica G a la cual nos referimos, denotaremos simplemente $d_G(u, v)$ por $d(u, v)$. Diremos que Π es una *partición resolvente* si para cada par de vértices distintos $u, v \in V(G)$ se tiene $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$. La *partición dimensional* de G es el mínimo número de conjuntos necesarios para que Π sea una partición resolvente, y se denota por $pd(G)$.

Por ejemplo, en una gráfica completa K_m , como la distancia entre cualesquiera vértices u y v es uno, cada vértice tiene que pertenecer a un conjunto distinto de la partición, por lo que $pd(K_m) = m$. Si $G = P_n$, una trayectoria de longitud $m \geq 2$, entonces $pd(P_n) = 2$, ver Figura 3.1

El producto lexicográfico de dos gráficas $G = (V_1, E_1)$ y $H = (V_2, E_2)$, es la gráfica $G \circ H = (V, E)$ donde $V = V_1 \times V_2$ y donde dos vértices $(a, b), (c, d) \in V$ son adyacentes si y sólo si $ac \in E_1$ o $(a = c)$ y $bd \in E_2$ (ver ejemplo en la figura 3.2). Las gráficas G y H son llamadas *factores* del producto. Siguiendo la notación del

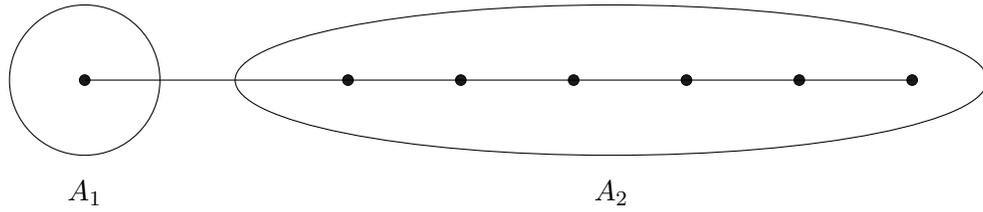


Figura 3.1: Una partición resolvente para una trayectoria P_n

capítulo anterior, tenemos que la representación matricial del producto lexicográfico es:

$$\begin{pmatrix} E & E & E \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

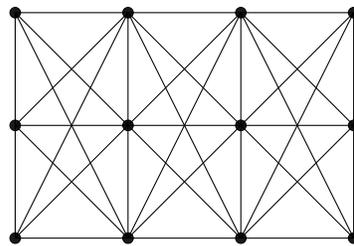


Figura 3.2: La gráfica $P_4 \circ P_3$.

Sea $G \wedge H$ un producto de gráficas, con G y H factores y $u \in V(G)$, el conjunto de vértices $\{(u, x) : x \in V(H)\}$ es llamado una *capa de H* y se denota por ${}^u H$. De la misma manera, para $v \in V(H)$, el conjunto $\{(x, v) : x \in V(G)\}$ se llama una *capa de G* y es denotado por G^v (ver ejemplo en la gráfica 3.3). En el caso del producto lexicográfico, es fácil ver que las subgráficas inducidas por las capas de H son isomorfas a la gráfica H , de la misma forma, las subgráficas inducidas por las capas de G son isomorfas a la gráfica G .

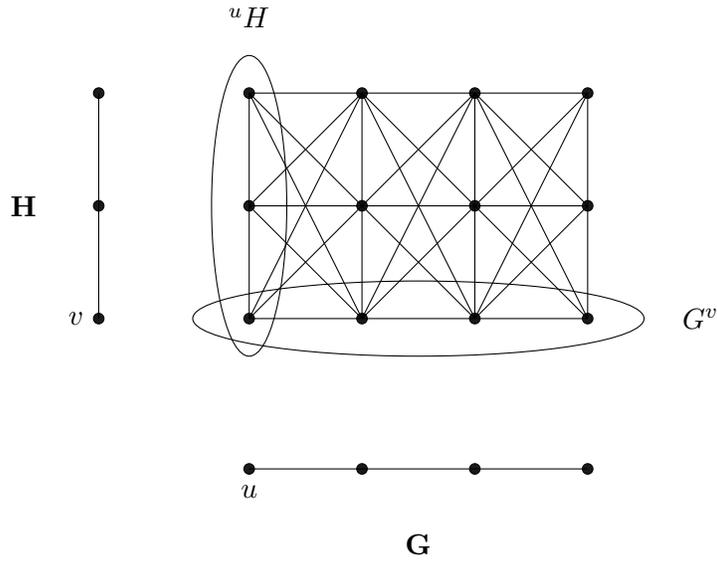


Figura 3.3: Ejemplo de capas de G y H

3.2 Resultados generales

Iniciamos esta sección con unas observaciones básicas, las cuales utilizaremos a lo largo de este capítulo.

La primera observación que haremos es que el producto lexicográfico no es una operación conmutativa, por ejemplo la gráfica $K_3 \circ \overline{K_2}$ contiene 12 aristas mientras que la gráfica $\overline{K_2} \circ K_3$ tiene 6 aristas. Sin embargo, es fácil ver que un producto lexicográfico $G \circ H$ es una gráfica conexa si y sólo si G es conexa, veámoslo. Sea G es una gráfica conexa, y $(g, h), (g', h')$ vértices en $G \circ H$, como G es conexa, existe un camino de $g, g_1, g_2, \dots, g_n, g'$ en G , luego podemos formar el camino $(g, h), (g_1, h), (g_2, h), \dots, (g_n, h), (g', h')$ en $G \circ H$, por lo que $G \circ H$ es conexa. Por otro lado, sea $g, g' \in V(G)$ y supongamos que $G \circ H$ es conexa, entonces existe un camino $(g, h), (g_1, h), (g_2, h), \dots, (g_n, h), (g', h)$ en $G \circ H$ por lo que podemos formar el camino $g, g_1, g_2, \dots, g_n, g'$ en G , por lo tanto G es conexa.

Observación 3.2.1. *Sea $G \circ H$ el producto lexicográfico de dos gráficas G y H . Si x, y pertenecen a la misma capa ${}^u H$ entonces $d(x, v) = d(y, v)$ para toda v que no pertenece a ${}^u H$*

Demostración: Sea $G \circ H$ el producto lexicográfico de dos gráficas G y H . Sean $(g_0, h_0), (g_0, h_1) \in {}^{g_0} H$ y $(g', h') \notin {}^{g_0} H$. Suponga que $d_{G \circ H}((g_0, h_0), (g', h')) = t$, entonces existe un camino $(g_0, h_0), (g_1, h_0), (g_2, h_0), \dots, (g_{t-1}, h_0), (g', h')$ de longitud t , luego notamos que $(g_0, h_0)(g_1, h_0) \in E(G \circ H)$ implica que $(g_0, h_1)(g_1, h_0) \in E(G \circ H)$ por definición del producto lexicográfico, por lo que podemos construir el camino

$(g_0, h_1), (g_1, h_0), \dots, (g_{t-1}, h_0), (g', h')$ que además tiene que ser mínimo, por lo que $d_{G \circ H}((g_0, h_1), (g', h')) = t$ \square

Observación 3.2.2. Sea $G \circ H$ el producto lexicográfico de una gráfica conexa G y una gráfica arbitraria H . Si $x \in {}^u H$ entonces $d(x, y) = 1$ o 2 para cada $y \in {}^u H - \{x\}$

Demostración: Sea $G \circ H$ el producto lexicográfico de G y H con G conexa y $(g, h_0), (g, h_1) \in {}^g H$. Como G es conexa existe $g' \in G$ tal que $gg' \in E(G)$, luego por definición del producto lexicográfico tenemos que $(g, h_0)(g', h_0) \in E(G \circ H)$ y $(g, h_1)(g', h_0) \in E(G \circ H)$. Luego, si $h_0 h_1 \in E(H)$ entonces $d_{G \circ H}((g, h_0), (g, h_1)) = 1$ y si $h_0 h_1 \notin E(H)$, entonces podemos formar el camino $(g, h_0), (g', h_0), (g, h_1)$ y por lo tanto $d_{G \circ H}((g, h_0), (g, h_1)) = 2$. \square

Observación 3.2.3. Sea $G \circ H$ el producto lexicográfico de una gráfica conexa G y una gráfica arbitraria H y sea $u, v \in V(G)$ con $u \neq v$. Si $d_G(u, v) = t$ entonces $d_{G \circ H}((u, x), (v, y)) = t$ para toda $x \in {}^u H$ y toda $y \in {}^v H$.

Demostración: Sea $G \circ H$ el producto lexicográfico de G y H con G conexa y $(g, h), (g', h') \in V(G \circ H)$, $g \neq g'$, y supongamos que $d_{G \circ H}((g, h), (g', h')) = t$. Por la Observación 3.2.1, se tiene que $d_{G \circ H}((g, h_i), (g', h')) = t$ y que $d_{G \circ H}((g, h), (g', h_i)) = t$ para cualquier i . Luego, aplicando otra vez la Observación 3.2.1, se completa la prueba. \square

Los resultados que siguen en esta sección son cotas para la partición dimensional del producto lexicográfico de dos gráficas arbitrarias. Es un resultado conocido que para una gráfica G , $pd(G) = 2$ si y sólo si G es una trayectoria P_n con $n \geq 2$ (ver [18]). Entonces, si $pd(G \circ H) = 2$ concluimos que $G \circ H$ es una trayectoria, lo cual solo puede ocurrir si G es una trayectoria y H es la gráfica trivial K_1 o viceversa. Por lo que podemos hacer la observación siguiente:

Observación 3.2.4. Si G y H son gráficas no triviales, entonces $pd(G \circ H) \geq 3$

El próximo resultado trata sobre la relación entre la partición dimensional de un producto lexicográfico y de las particiones dimensionales de sus factores.

Teorema 3.2.1. Si G es una gráfica conexa de orden n_1 y H una gráfica de orden n_2 entonces

$$pd(H) + 1 \leq pd(G \circ H) \leq n_2 \cdot pd(G)$$

además, si H tiene diámetro 1 o 2 entonces

$$pd(G \circ H) \leq n_1 \cdot pd(H)$$

Demostración: Primero mostraremos la cota inferior tomando una partición resolvente arbitraria para $pd(G \circ H)$ y construyendo a partir de ella una partición resolvente para H . Sea G una gráfica conexa, H una gráfica arbitraria no trivial y $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ una partición resolvente para $G \circ H$. Para algún $u \in G$ definimos la partición de la capa ${}^u H$ generada por Π , $\Pi_u = \{A_1 \cap {}^u H, A_2 \cap {}^u H, \dots, A_r \cap$

${}^uH\}$. Nota que en esta partición tomaremos en cuenta únicamente los conjuntos $A_i \cap {}^uH$ no vacíos. Ahora veamos que Π_u es una partición resolvente para H .

Primero recordamos que uH es isomorfa a H para cada $u \in G$. Sean $x, y \in A_i \cap {}^uH$, como Π es una partición resolvente para $G \circ H$, existe un conjunto $A_j \in \Pi$ tal que $d_{G \circ H}(x, A_j) \neq d_{G \circ H}(y, A_j)$, y por la Observación 3.2.1 se tiene que x, y tienen la misma distancia a cualquier otro vértice de $G \circ H$ que no pertenece a uH , por lo que la diferencia de distancia con A_j debe de ocurrir en $A_j \cap {}^uH$. Como G es conexa, también lo es $G \circ H$ y por la Observación 3.2.2 se tiene que $d_{G \circ H}(x, A_j \cap {}^uH) = 1$ ó 2 . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d_{G \circ H}(x, A_j) = 1$ entonces $d_{G \circ H}(y, A_j) = 2$ y por lo tanto $d_H(x, A_j \cap {}^uH) = 1$ y $d_H(y, A_j \cap {}^uH) \geq 2$. Así concluimos que $r(x, \Pi_u) \neq r(y, \Pi_u)$ y por lo tanto Π_u es una partición resolvente para H y como consecuencia, $pd(H) \leq pd(G \circ H)$.

Ahora supongamos que $pd(H) = pd(G \circ H)$ y sea Π la misma partición resolvente. Notamos que cada intersección de conjuntos A_i con cada capa de H es no vacía, pues de no ser así, existiría $u \in G$ y $A_j \in \Pi$ tal que $A_j \cap {}^uH = \emptyset$, entonces $|\Pi_u| < pd(H)$ y Π_u es una partición resolvente para H , una contradicción. Sean $a, b \in G$ dos vértices adyacentes, entonces existen dos vértices adyacentes $(a, x) \in {}^aH$ y $(b, y) \in {}^bH$, y por construcción del producto lexicográfico tenemos $(a, h_i)(b, h_j) \in E(G \circ H)$ para toda i, j , esto implica que $d_{G \circ H}((a, x), A_i) = d_{G \circ H}((b, y), A_i) = 1$ para toda $1 \leq i \leq r$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $pd(H) + 1 \leq pd(G \circ H)$ y la cota inferior queda demostrada.

Para la cota superior, sea $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_2}\}$ el conjunto de vértices de H y $\Pi_G = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ una partición resolvente de G . Consideramos ahora la partición $\Pi = \{A_i \times \{v_j\} : 1 \leq i \leq r \text{ y } 1 \leq j \leq n_2\}$, veamos que es una partición resolvente para $G \circ H$ (ver Figura 3.4). Sea $(a, b), (c, d) \in A_i \times \{v_j\}$ para alguna $i \in \{1, \dots, r\}$ y alguna $j \in \{1, \dots, n_2\}$ dos vértices distintos de $G \circ H$. Notamos que $b = d = v_j$ y $a \neq c$. Como Π_G es una partición resolvente de G existe un conjunto $A_k \in \Pi_G$ tal que $d_G(a, A_k) \neq d_G(c, A_k)$, luego por la Observación 3.2.3 tenemos que $d_{G \circ H}((a, b), (A_k \times \{v_j\})) = d_G(a, A_k) \neq d_G(b, A_k) = d_{G \circ H}((c, d), (A_k \times \{v_j\}))$, lo que implica que $r((a, b)|\Pi) \neq r((c, d)|\Pi)$ por lo que Π es una partición resolvente para $G \circ H$ y como $|\Pi| = n_2 \cdot pd(G)$ entonces $pd(G \circ H) \leq n_2 \cdot pd(G)$ y la cota superior queda demostrada.

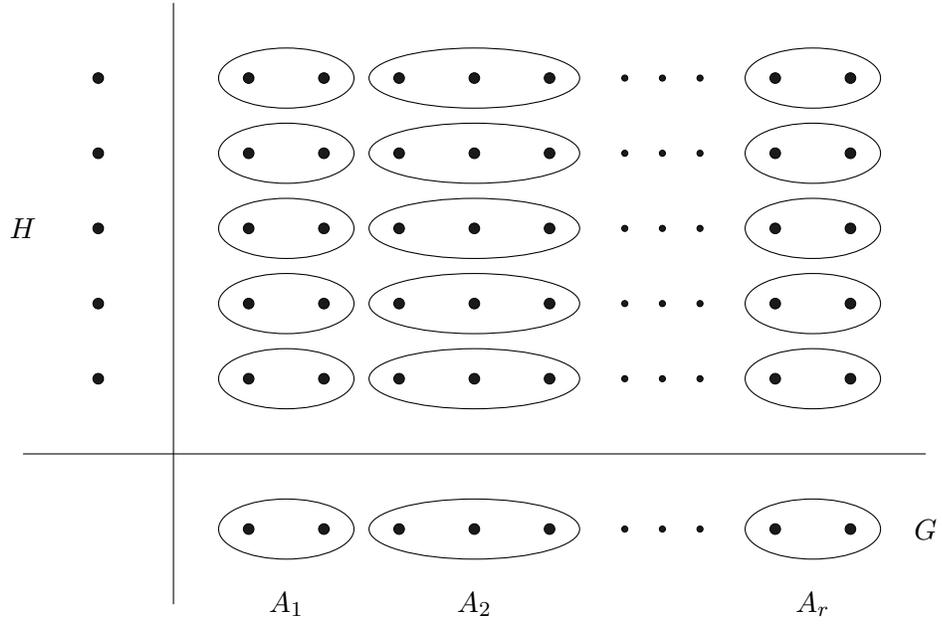


Figura 3.4: Ilustración de la partición Π

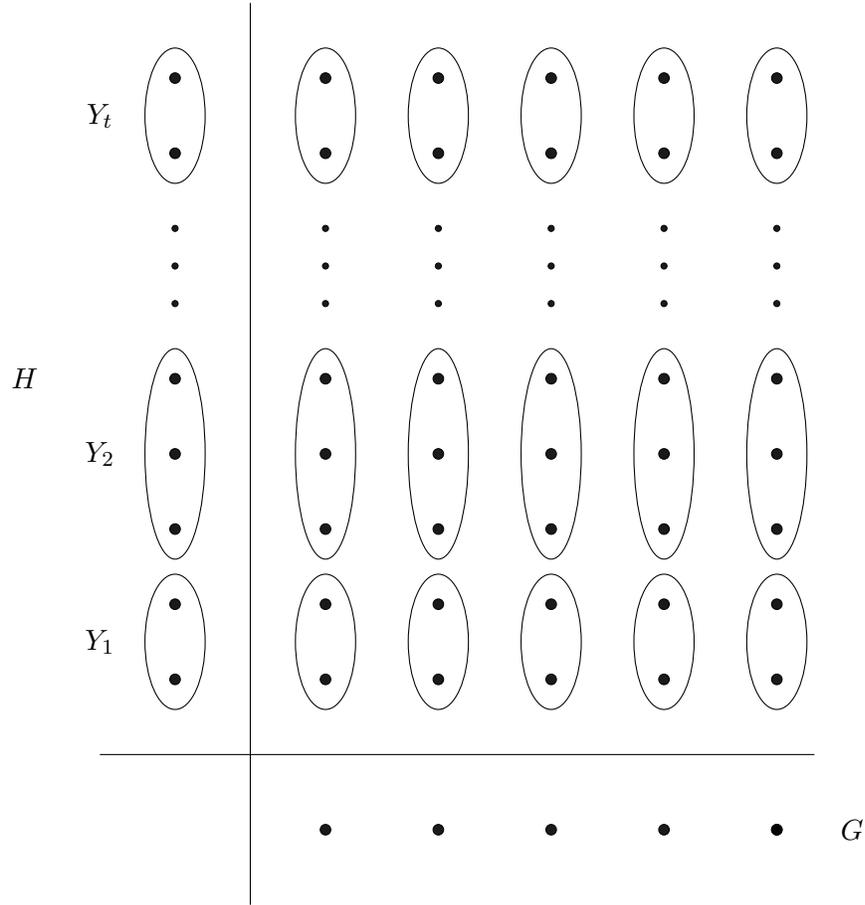


Figura 3.5: Ilustración de la partición Π'

Por último, suponga que H tiene diámetro dos. Sea $\Pi_H = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_t\}$ una partición resolvente para H . Consideramos la partición $\Pi' = \{\{u_i\} \times Y_j : 1 \leq i \leq n_1 \text{ y } 1 \leq j \leq t\}$ (ver Figura 3.5). Sean $(u_i, v), (u_i, w) \in \{u_i\} \times Y_j$ dos vértices distintos de $G \circ H$ para alguna $1 \leq i \leq n_1$ y $1 \leq j \leq t$. Como $v \neq w$ y Π_H es una partición resolvente de H , existe un Y_k con $k \neq j$ tal que $d_H(v, Y_k) \neq d_H(w, Y_k)$. Notamos que como H tiene diámetro 2, se tiene $d_H(a, b) = d_{\{G \circ H\}}((u_i, a)(u_i, b))$ para cualesquiera $a, b \in V(H)$, por lo que tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
d_{G \circ H}((u_i, v), \{u_i\} \times Y_k) &= \min_{x \in Y_k} \{d_{G \circ H}((u_i, v), (u_i, x))\} \\
&= \min_{x \in Y_k} \{d_H(v, x)\} \\
&= d_H(v, Y_k) \\
&\neq d_H(w, Y_k) \\
&= \min_{x \in Y_k} \{d_H(w, x)\} \\
&= \min_{x \in Y_k} \{d_{G \circ H}((u_i, w), (u_i, x))\} \\
&= d_{G \circ H}((u_i, w), \{u_i\} \times Y_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, Π' es una partición resolvente para $G \circ H$ y como $|\Pi| = n_1 \cdot pd(H)$, se tiene que $pd(G \circ H) \leq n_1 \cdot pd(H)$. \square

Notamos que las cotas superiores no son mejorables para el caso general, pues se alcanzan tomando las gráficas completas K_n y K_m para las cuales se tiene $K_n \circ K_m = K_{nm}$ y por lo tanto $pd(K_n \circ K_m) = nm$ ya que está claro que $pd(K_n) = n$.

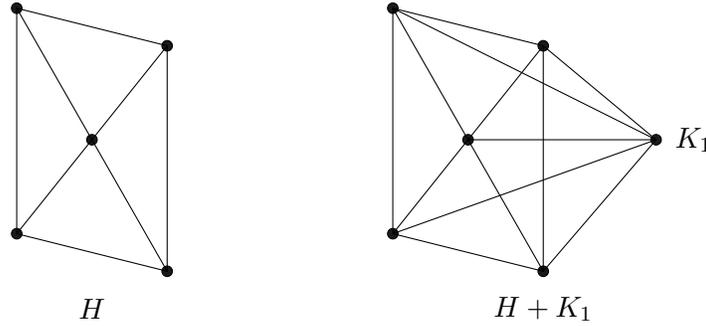
Recordamos que dado una gráfica $H = (V, E)$ y $K_1 = (u, \emptyset)$, la gráfica $H + K_1$ es la gráfica con conjunto de vértices $V(H) \cup \{u\}$ y conjunto de aristas $E(H) \cup \{uv : v \in V(H)\}$ (ver Figura 3.6).

En el teorema que sigue se quiere ilustrar la relación que hay entre un producto lexicográfico $G \circ H$ y la gráfica $H + K_1$. En efecto, vimos en la Observación 3.2.1 que para dos vértices de una misma capa de H , sus distancias respecto a cualquier otro vértice de la gráfica fuera de la misma capa son iguales entre sí, por lo que podemos interpretar la parte fuera de alguna capa de H como un solo vértice, veamos eso más detenidamente. Sea $G = (V, E)$ una gráfica y u el vértice de K_1 . Si $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ es una partición resolvente de $K_1 + G$ entonces o bien $V \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $A_i \in \Pi$ o bien u está en un conjunto de cardinalidad uno, esto es, si existe un conjunto $A_i \in \Pi$ tal que $A_i \cap V(G) = \emptyset$ entonces este conjunto consta únicamente de u . Nota que en ambos casos, la distancia de cualquier vértice al conjunto que contiene u es 1 por que u no es relevante en el momento de encontrar una partición resolvente de $H + K_1$.

Teorema 3.2.2. *Para cualquier gráfica conexa y no trivial G con $|G| = n$ y cualquier gráfica no trivial H ,*

$$pd(G \circ H) \leq n \cdot pd(H + K_1)$$

Demostración: Sean G y H dos gráficas no triviales con G conexa y sea $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una partición resolvente de $H + K_1$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos $\Pi_i = \{A_j \cap g_i H : 1 \leq j \leq r\}$. Demostraremos que $\Pi' = \bigcap_{i=1}^n \Pi_i$ es una partición resolvente de $pd(G \circ H)$, nota que $|\Pi'| = n \cdot pd(K_1 + H)$. Sean $(a, b), (c, d)$ dos vértices diferentes de $G \circ H$ tales que $(a, b), (c, d) \in A_i \cap g_i H$. Notamos que por la construcción de Π_i , se tiene que $a = c = g_j$. Como Π es una partición resolvente de $H + K_1$ existe


 Figura 3.6: Las gráficas H y $H + K_1$

un conjunto $A_k \in \Pi$ tal que $d_{H+K_1}(b, A_k) \neq d_{H+K_1}(d, A_k)$, además por lo visto en el preámbulo del Teorema, A_k no puede ser el conjunto formado por el vértice de K_1 . Nota que $d_{H+K_1}(h, A_k) = d_{H+K_1}((g, h), A_k \cap {}^g H)$ para cada $h \in V(H)$ y cada $g \in V(G)$, pues toman ambas el valor uno si existe $x \in A_k$ tal que $hx \in E(H)$ y dos en otro caso, por lo que se tiene: $d_{G \circ H}((a, b), A_k \cap {}^{g_j} H) = d_{H+K_1}(b, A_k) \neq d_{H+K_1}(d, A_k) = d_{G \circ H}((c, d), A_k \cap {}^{g_j} H)$, así $r((a, b)|\Pi') \neq r((c, d)|\Pi')$ y por lo tanto Π' es una partición resolvente de $G \circ H$ y $pd(G \circ H) \leq n \cdot pd(H + k_1)$ \square

3.3 Familias específicas de gráficas

En la sección anterior hemos dado resultados sobre el caso general de la partición dimensional del producto lexicográfico. En esta sección estudiaremos la partición dimensional del producto lexicográfico de ciertos tipos de familias de gráficas: las gráficas completas, las trayectorias, los conjuntos independientes y los ciclos. Iniciamos esta sección con el caso del producto lexicográfico de dos gráficas completas K_n y K_m lo cual es trivial. Para tal caso, como $K_n \circ K_m \cong K_{nm}$ tenemos que $pd(K_n \circ K_m) = nm$. Por lo tanto estudiaremos los casos para los cuales uno de los dos factores es una gráfica completa, iniciaremos con el caso $K_n \circ H$.

Teorema 3.3.1. *Sea H una gráfica conexa no trivial y no completa. Entonces, para cada entero $n \geq 3$ se tiene:*

$$n \cdot pd(H + K_1) - n \leq pd(K_n \circ H) \leq n \cdot pd(H + K_1)$$

Demostración: Sean $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ los vértices de la gráfica K_n y $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ los vértices de una gráfica conexa no trivial H . Por el Teorema 3.2.2 se tiene que $pd(K_n \circ H) \leq n \cdot pd(H + K_1)$. Queremos ahora demostrar que $pd(K_n \circ H) \geq n \cdot pd(H + K_1)$. Sea $\Pi_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ una partición resolvente para $K_n \circ H$. Notamos que en $K_n \circ H$ cada par de vértices de forma $(u_i, v_j), (u_i, v_l)$ tiene distancia uno a cualquier otro vértice (u_g, v_h) con $g \neq i$, por lo que si $(u_i, v_j), (u_i, v_l) \in B_s$ debe existir un conjunto $B_f \in \Pi_2$ tal que $B_f \cap (\{u_i\} \times V(H)) \neq \emptyset$ y además $B_f \cap ((V(K_n) - \{u_i\}) \times V(H)) = \emptyset$, pues de no ser así, ambos estarían a distancia 1 de B_f , una contradicción. Sea Π_2^i la partición Π restringida a $\{u_i\} \times V(H)$, i.e $\Pi_2^i = \{B_r \cap (\{u_i\} \times V(H))\}$:

$1 \leq r \leq s\}$, entonces, Π_2^i es una partición resolvente para H en la cual todas las distancias posibles toman el valor de uno o dos. Entonces, los conjuntos de Π_2^i juntos con un vértice x adyacente a cada uno de los vértices de ${}^{g_i}H$ forman una partición resolvente para ${}^{g_i}H + K_1$ y por lo tanto $pd({}^{g_i}H + K_1) \leq |\Pi_2^i| + 1$. Nota que cada conjunto añadido en la partición resolvente de ${}^{g_i}H + K_1$ que corresponde al vértice de K_1 está contado como algún vértice $u_j \in V(K_n)$, por lo que tenemos:

$$pd(K_n \circ H) = |\Pi_2| = \sum_{i=1}^n |\Pi_2^i| \geq \sum_{i=1}^n (pd({}^{g_i}H + K_1) - 1) - n = n \cdot pd(H + K_1)$$

y el teorema queda demostrado. \square

Para la proposición siguiente, primero notamos que el producto lexicográfico no es una operación conmutativa, pues por ejemplo podemos ver en la Figura 3.7 que las gráficas $\overline{K_2} \circ K_3$ y $K_3 \circ \overline{K_2}$ no son isomorfas. Por lo que a continuación estudiaremos el caso $G \circ K_n$, para una gráfica conexa arbitraria y no completa G .

Proposición 3.3.1. *Sea G una gráfica conexa no trivial y no completa, entonces para cualquier número entero n se tiene:*

$$n + 2 \leq pd(G \circ K_n) \leq n \cdot pd(G)$$

Demostración: Sea G una gráfica conexa, no trivial y no completa. Por el Teorema 3.2.1, para cualquiera gráfica H con $|H| = n$, se tiene que $pd(G \circ H) \leq n \cdot pd(G)$, por lo que en especial tenemos $pd(G \circ K_n) \leq n \cdot pd(G)$ y queda comprobada la cota superior. Para la cota inferior también haremos uso del Teorema 3.2.1, que nos dice que para cualesquiera gráficas conexas se cumple $pd(H) + 1 \leq pd(G \circ H)$, aplicando ese resultado al caso $H = K_n$ se tiene $pd(G \circ K_n) \geq pd(K_n) + 1 = n + 1$. Supongamos que $pd(G \circ K_n) = n + 1$ y sea $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ una partición resolvente de $G \circ K_n$. Utilizando un argumento similar que en la prueba anterior notamos que para dos vértices $(g, h)(g, h') \in G \circ K_n$, sus distancias a cualquier otro vértice de la gráfica son iguales, además $d_{G \circ K_n}((g, h), (g, h')) = 1$ para toda $h, h' \in V(K_n)$, por lo que para cada $u \in V(G)$, la restricción Π_u de Π a un uK_n -capa contiene al menos n conjuntos. Como K_n tiene exactamente n vértices, se sigue que Π_u tiene exactamente n conjuntos, cada uno formado por un solo vértice.

Como $pd(G \circ K_n) = n + 1$ y G es conexa, debe de existir dos vértices $v, w \in V(G)$ tales que las restricciones Π_v y Π_w de las capas vK_n y wK_n difieren exactamente de un conjunto. Además como $n \geq 2$, existen dos vértices $(v, a) \in {}^vK_n$ y $(w, b) \in {}^wK_n$ que pertenecen al mismo conjunto de la partición resolvente Π , digamos A_i . Con esta construcción, notamos que la subgráfica inducida por ${}^vK_n \cup {}^wK_n$ es isomorfa a la gráfica completa K_{2n} y además $A_i \cap ({}^vK_n \cup {}^wK_n) \neq \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq r$. Como consecuencia, (v, a) y (w, b) tienen la misma distancia (distancia 1) a cada conjunto de la partición Π , por lo que $r((v, a)|\Pi) = r((w, b)|\Pi) = (1, 1, \dots, 1)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $pd(G \circ K_n) \geq n + 2$. \square

Continuamos nuestro estudio para los casos $G \circ K_n$ donde G es una trayectoria o un ciclo. Para ello haremos uso de resultados previos que utilizan el producto fuerte

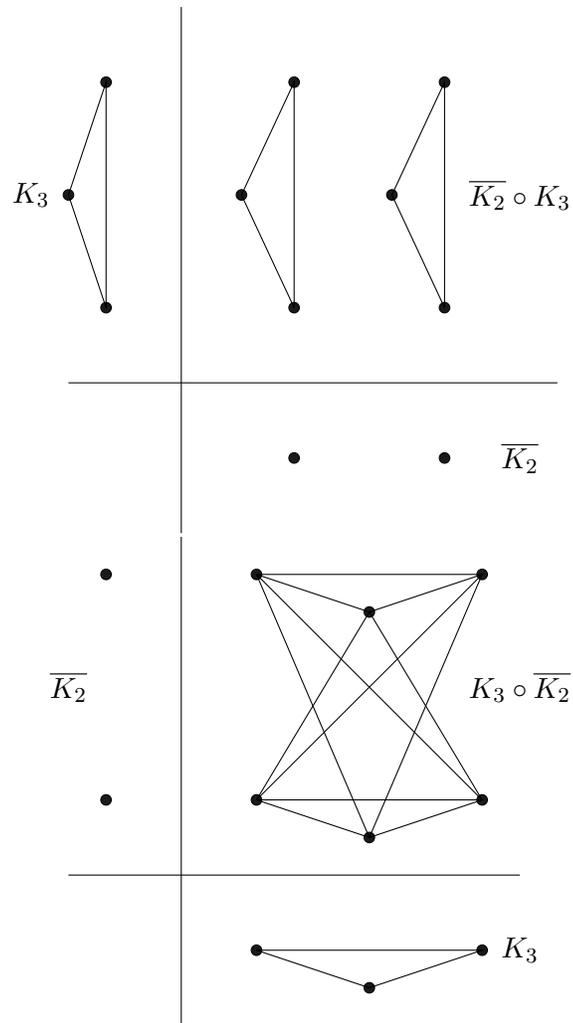


Figura 3.7: Las gráficas $\overline{K_2} \circ K_3$ y $K_3 \circ \overline{K_2}$

de gráficas. Recordamos que el producto fuerte de dos gráficas G, H se denota por $G \boxtimes H$ y se define como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) \times V(H)$ y $(g, h)(g', h') \in E(G \boxtimes H)$ si y sólo si $(g = g' \text{ y } hh' \in E(H))$ ó $(gg' \in E(G) \text{ y } h = h')$ ó $(gg' \in E(G) \text{ y } hh' \in E(H))$ (ver Figura 1.5), por lo que su matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} E & E & C \\ E & \Delta & C \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

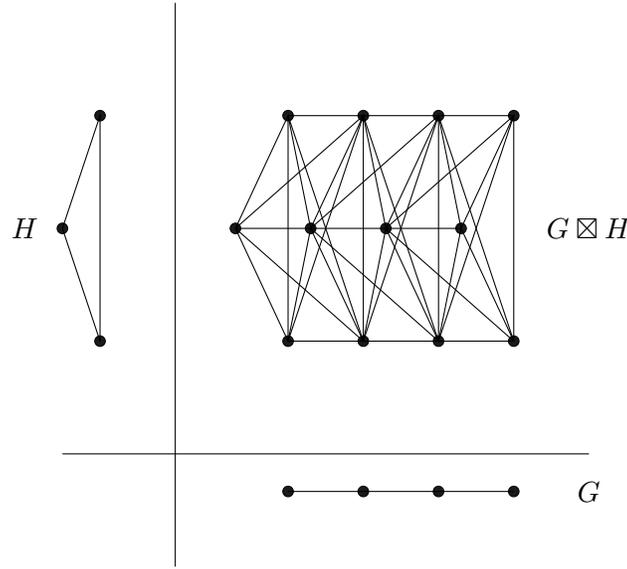


Figura 3.8: Ejemplo de un producto fuerte de gráficas

En [19], los autores probaron los resultados siguientes para el producto fuerte:

Proposición 3.3.2. [19] Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n, m \geq 2$, entonces

$$pd(P_m \boxtimes K_n) = \begin{cases} 2n & \text{si } m = 2 \\ n + 2 & \text{si } m \geq 3 \end{cases}$$

Proposición 3.3.3. [19] Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n, m \geq 3$, entonces

$$pd(C_m \boxtimes K_n) = \begin{cases} 3n & \text{si } m = 3 \\ n + 3 & \text{si } m = 4, 5 \\ n + 2 & \text{si } m \geq 6 \end{cases}$$

Notamos que para dos gráficas G, H , la única diferencia entre el producto fuerte y el producto lexicográfico es que el producto lexicográfico admite las aristas $(g, h)(g', h')$ cuando $gg' \in E(G)$ y $hh' \notin E(H)$, sin embargo, para el caso donde el segundo factor es una gráfica completa, no aparecen tales aristas, por lo que podemos concluir que para cualquier gráfica G tenemos $G \boxtimes K_n \cong G \circ K_n$. Utilizando este hecho y los resultados anteriores, tenemos los corolarios siguientes:

Corolario 3.3.1. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n, m \geq 2$, entonces

$$pd(P_m \circ K_n) = \begin{cases} 2n & \text{si } m = 2 \\ n + 2 & \text{si } m \geq 3 \end{cases}$$

Corolario 3.3.2. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n, m \geq 3$, entonces

$$pd(C_m \circ K_n) = \begin{cases} 3n & \text{si } m = 3 \\ n + 3 & \text{si } m = 4, 5 \\ n + 2 & \text{si } m \geq 6 \end{cases}$$

Continuamos nuestro estudio analizando los casos en los cuales uno de los dos factores es una trayectoria.

Proposición 3.3.4. Sea H una gráfica de orden $m \geq 2$, entonces para cualquier número entero $n \geq 3$,

$$pd(P_n \circ H) \leq m + 2$$

Demostración: Sea $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ y $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ los vértices de las gráficas P_n y H respectivamente con $g_i g_{i+1} \in E(P_n)$ para $1 \leq i \leq n - 1$. Sea $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2\}$ la partición de $P_n \circ H$ donde $B_1 = \{(g_1, h_1)\}$, $B_2 = \{(g_n, h_1)\}$, $A_1 = \{(g_i, h_1) : 2 \leq i \leq n - 1\}$ y para $j \in \{2, 3, \dots, m\}$, $A_j = \{(g_i, h_j) : 1 \leq i \leq n\}$.

Notamos que los únicos casos que debemos verificar son para vértices que pertenecen al mismo A_i , es decir, pares de vértices de forma $(g_j, h_i)(g_k, h_i)$ con $j \neq k$. Notamos que para este caso se tiene que o $d_{P_n \circ H}((g_j, h_i), (g_1, h_1)) \neq d_{P_n \circ H}((g_j, h_i), (g_n, h_1))$ o bien $d_{P_n \circ H}((g_j, h_i), (g_n, h_1)) \neq d_{P_n \circ H}((g_j, h_i), (g_1, h_1))$, por lo que los vértices (g_j, h_i) y (g_k, h_i) son resueltos por B_1 o por B_2 (resueltos en el sentido que no tienen la misma distancia), por lo que Π es una partición resolvente de $P_n \circ H$ y por lo tanto $pd(P_n \circ H) \leq m + 2$. \square

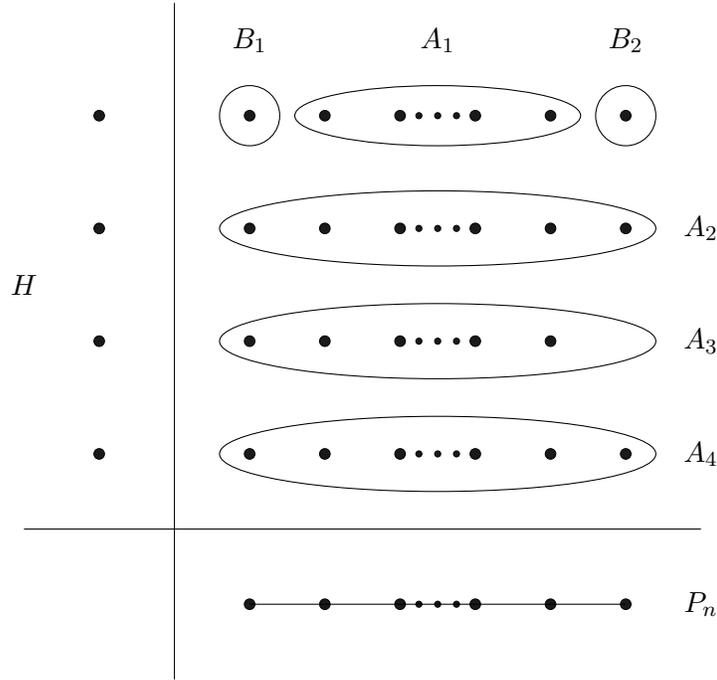


Figura 3.9: La partición Π de la Proposición 3.3.4

Proposición 3.3.5. *Para cualquier gráfica conexa G de orden r y cualquier trayectoria de longitud $n = 3m + i$ con $i \in \{-1, 0, 1\}$ se tienen:*

$$pd(G \circ P_n) \leq (m + 1)r$$

Demostración: Sea G una gráfica conexa con conjunto de vértices $V(G) = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ y sea $V(P_n) = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ con $h_i h_{i+1} \in E(P_n)$ para $0 \leq i \leq n - 1$. Describiremos primeramente particiones para los casos $n = 2, 3, 4$.

- Si $n = 2$, sea $A_1 = \{h_1\}$, $A_2 = \{h_n\}$ y sea $\Pi_2 = \{B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}, \dots, B_{r,2}\}$ donde $B_{i,j} = \{(g_i, h) : h \in A_j\}$ (nota que si G es una completa, tenemos que $G \circ P_2 \cong K_{2r}$ y por lo tanto $pd(G \circ P_n) = 2$).

- Si $n = 3$, sea $A_1 = \{h_1, h_2\}$ y $A_2 = \{h_n\}$ y $\Pi_3 = \{B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}, \dots, B_{r,2}\}$ donde $B_{i,j} = \{(g_i, h) : h \in A_j\}$.

- Si $n = 4$, sea $A_1 = \{h_1, h_2\}$ y $A_2 = \{h_{n-1}, h_n\}$ y $\Pi_4 = \{B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}, \dots, B_{r,2}\}$ donde $B_{i,j} = \{(g_i, h) : h \in A_j\}$.

Notamos ahora que dos vértices $(g_i, h_j), (g_i, h_k) \in G \circ P_n$ tales que $(g_i, h_j), (g_i, h_k) \in B_{i,1}$ son resueltos por $B_{i,2}$, y dos vértices $(g_i, h_j), (g_i, h_k) \in G \circ P_n$ tales que $(g_i, h_j), (g_i, h_k) \in G \circ B_{i,2}$ son resueltos por $B_{i,1}$, por lo que Π_3 y Π_4 son particiones resolventes de $G \circ P_3$ y $G \circ P_4$ respectivamente. El caso de Π_2 es trivial ya que cada conjunto de Π_2 contiene exactamente un vértice. Por lo que $pd(G \circ P_n) \leq 2r$ para

$n = 3, 4$.

Supongamos ahora que $n \geq 5$ y $n = 3m + i$ son $i \in \{-1, 0, 1\}$. Definimos las particiones Π'_2, Π'_3 y Π'_4 en base a Π_2, Π_3 y Π_4 .

Si $n = 3m - 1$, entonces sea A_1 y A_2 como en la partición Π_2 y $A_{s+2} = \{h_{3s-1}, h_{3s}, h_{3s+1}\}$ para $1 \leq s \leq m - 1$. Definimos $\Pi'_2 = \{B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{2,1}, \dots, b_{r,l}\}$ donde $B_{i,j} = \{(g_i, h) : h \in A_j\}$.

Si $n = 3m$, entonces sea A_1 y A_2 como en la partición Π_3 y $A_{s+2} = \{h_{3s-1}, h_{3s}, h_{3s+1}\}$ para $1 \leq s \leq m - 1$. Definimos $\Pi'_2 = \{B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{2,1}, \dots, b_{r,l}\}$ donde $B_{i,j} = \{(g_i, h) : h \in A_j\}$.

Por último, si $n = 3m + 1$ entonces sea A_1 y A_2 como en la partición Π_4 y $A_{s+2} = \{h_{3s-1}, h_{3s}, h_{3s+1}\}$ para $1 \leq s \leq m - 1$. Definimos $\Pi'_2 = \{B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{2,1}, \dots, b_{r,l}\}$ donde $B_{i,j} = \{(g_i, h) : h \in A_j\}$.

En cada partición vemos que cada par de vértices $(g_i, h_1), (g_i, h_2) \in B_{i,1}$ tenemos que $d_{G \circ P_n}((g_i, h_1), B_{i,3}) = 2$ y $d_{G \circ P_n}((g_i, h_2), B_{i,3}) = 1$ y por otra parte para dos vértices $(g_i, h_{n-1}), (g_i, h_n) \in B_{i,2}$ tenemos que $d_{G \circ P_n}((g_i, h_{n-1}), B_{i,m+1}) = 1$ y $d_{G \circ P_n}((g_i, h_n), B_{i,m+1}) = 2$. Por último, para dos vértices $(g_i, h_j), (g_i, h_k) \in B_{i,s}$, $s \neq 1, 2$ se tiene que sus distancias a uno de los conjuntos $B_{i,1}, B_{i,2}, B_{i,s}$ o $B_{i,s+1}$ difieren. Por lo que concluimos que Π'_2, Π'_3 y Π'_4 son particiones resolventes de $G \circ P_n$ en cada caso correspondiente y como para una m fija tenemos que $|\Pi'_2| = |\Pi'_3| = |\Pi'_4| = m + 1$ entonces $pd(G \circ P_n) \leq (m + 1)r$.

□

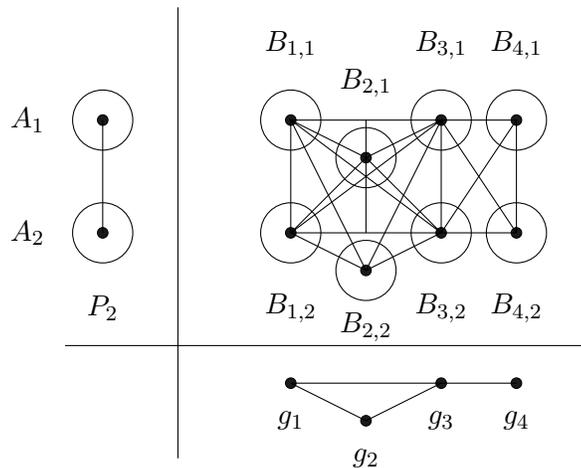
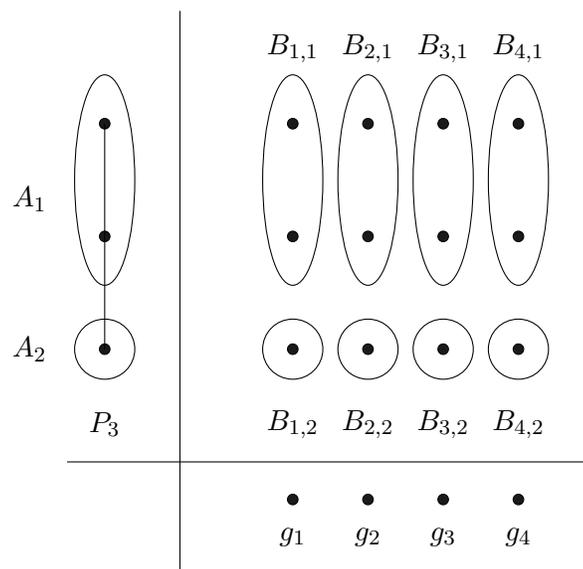
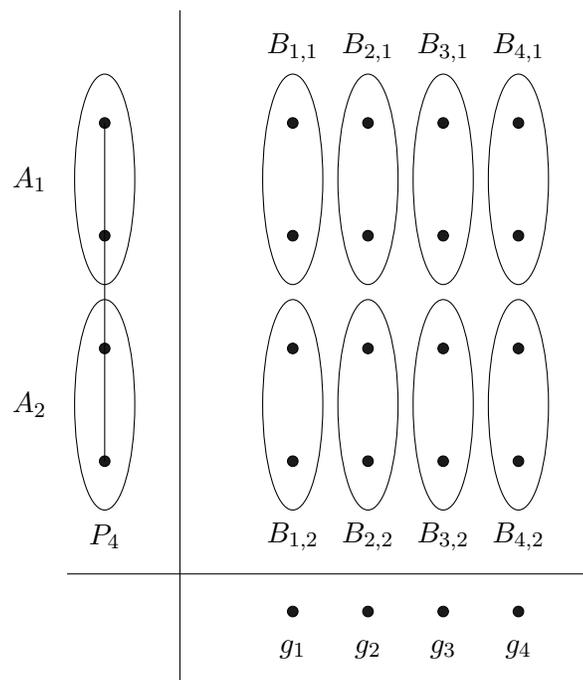


Figura 3.10: la partición Π_2

Figura 3.11: la partición Π_3 Figura 3.12: la partición Π_4

Continuamos nuestro estudio sobre familias especiales de gráficas con el estudio del toro $C_n \circ C_m$ y del cilindro $C_n \circ P_n$ con $n, m \geq 3$. Notamos que si $n = m = 3$ entonces $C_3 \circ C_3 \cong K_9$ y por lo tanto $pd(c_3 \circ C_3) = 9$. Consideraremos entonces los casos para los cuales $n > 3$ y $m \geq 3$.

Teorema 3.3.2. *Sea H una trayectoria o un ciclo de orden $m \geq 3$. Entonces para cualquier entero $n \geq 4$,*

$$pd(C_n \circ H) \leq \begin{cases} m + 3 & \text{si } n = 2, 3 \\ m + 2 & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$$

Demostración: Sea $\{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ y $\{h_0, h_1, \dots, h_{m-1}\}$ los vértices de C_n y H respectivamente. Durante toda esta prueba las operaciones con subíndices g_i y h_j se harán módulo n y modulo m respectivamente. Asumimos que $g_i g_{i+1} \in E(C_n)$ para $0 \leq i \leq n-1$ y $h_i h_{i+1} \in E(H)$ para $0 \leq i \leq m-1$ si H es un ciclo o $0 \leq i \leq m-2$ si H es una trayectoria. Estudiaremos los dos casos por separados.

Caso 1: $n = 4$ o $n = 5$. Sea $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, B_3, B_4\}$ una partición de los vértices de $C_n \circ H$ con $B_1 = \{(g_0, h_0)\}$, $B_2 = \{(g_1, h_0)\}$, $B_3 = \{(g_2, h_0)\}$, $B_4 = \{(g_i, h_0) : 3 \leq i \leq n-1\}$ y para cada $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, $A_j = \{(g_i, h_j) : 0 \leq i \leq n-1\}$. Sean $(g_j, h_i), (g_k, h_i)$ dos vértices en A_i con $j \neq k$ entonces se cumple uno de los tres casos siguientes:

$$d((g_j, h_i), (g_0, h_0)) \neq d((g_k, h_i), (g_0, h_0))$$

$$d((g_j, h_i), (g_1, h_0)) \neq d((g_k, h_i), (g_1, h_0))$$

$$d((g_j, h_i), (g_2, h_0)) \neq d((g_k, h_i), (g_2, h_0))$$

Entonces (g_j, h_i) y (g_k, h_i) son resueltos por B_1, B_2 o B_3 y por lo tanto Π es una partición resolvente para $P_n \circ H$ y como consecuencia $pd(P_n \circ H) \leq m + 3$.

Caso 2: $n \geq 6$. Sea $\Pi' = \{A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2\}$ una partición de $C_n \circ H$ donde $B_1 = \{(g_0, h_0)\}$, $B_2 = \{(g_1, h_0), (g_2, h_0), (g_3, h_0)\}$, $A_0 = \{(g_i, h_0) : 4 \leq i \leq n-1\}$ y para cada $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, $A_j = \{(g_i, h_j) : 0 \leq i \leq n-1\}$. Sean $(g_j, h_i), (g_k, h_i)$ dos vértices en A_i con $j \neq k$, estudiaremos por separado los subcasos $i = 0$ y $i \neq 0$

Subcaso 2.1: $i = 0$. Observamos que para cualquier par de vértices $(g_i, h_0), (g_j, h_0) \in B_2$ sus distancias a A_0 o a B_1 son distintas. Ahora sean $(g_j, h_0), (g_k, h_0) \in A_0$. Si $d((g_j, h_0), (g_0, h_0)) \neq d((g_k, h_0), (g_0, h_0))$ entonces (g_j, h_0) y (g_k, h_0) son resueltos por B_1 . Por otra parte, si $d((g_j, h_0), (g_0, h_0)) = d((g_k, h_0), (g_0, h_0))$ entonces $d((g_j, h_0), (g_1, h_0)) \neq d((g_k, h_0), (g_1, h_0))$ y Si $d((g_j, h_0), (g_3, h_0)) \neq d((g_k, h_0), (g_3, h_0))$. Si suponemos sin pérdida de generalidad que $d((g_j, h_0), B_2) = d((g_j, h_0), (g_1, h_0)) = d((g_k, h_0), (g_3, h_0)) = d((g_k, h_0), B_2)$ se sigue que $d((g_j, h_0), (g_0, h_0)) \neq d((g_k, h_0), (g_0, h_0))$, lo que es una contradicción. Entonces (g_j, h_0) y (g_k, h_0) son resueltos por B_2 .

Subcaso 2.2: $i \neq 0$. Sean $(g_j, h_i), (g_k, h_i) \in A_i$. Si $j, k \notin \{1, 2, 3, 4\}$ entonces podemos razonar de manera análoga al Subcaso 2.1 y concluir que $(g_j, h_i), (g_k, h_i)$ son resueltos por B_1 o por B_2 . De la misma forma, si $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $k \notin \{1, 2, 3, 4\}$ (o vice versa), $(g_j, h_i), (g_k, h_i)$ son resueltos por B_1 o por B_2 . Por lo que el último caso que nos falta verificar es cuando $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Analizaremos los 6 casos por separado.

- (g_0, h_i) y (g_1, h_i) son resueltos por A_0 ya que $d((g_0, h_i), A_0) = d((g_0, h_i), (g_{n-1}, h_0)) = 1 \neq 2 = d((g_1, h_i), (g_{n-1}, h_0)) = d((g_1), A_0)$.
- (g_0, h_i) y (g_2, h_i) son resueltos por A_0 ya que $d((g_0, h_i), A_0) = d((g_0, h_i), (g_{n-1}, h_0)) = 1 \neq 2 = d((g_2, h_i), (g_4, h_0)) = d((g_2), A_0)$.
- (g_0, h_i) y (g_3, h_i) son resueltos por B_1 ya que $d((g_0, h_i), B_1) \leq 2 < 3 = d((g_1, h_i), B_1)$.
- (g_1, h_i) y (g_2, h_i) son resueltos por B_1 ya que $d((g_1, h_i), B_1) = 1 \neq 2 = d((g_2, h_i), B_1)$.
- (g_1, h_i) y (g_3, h_i) son resueltos por B_1 ya que $d((g_1, h_i), B_1) = 1 \neq 3 = d((g_3, h_i), B_1)$.
- (g_2, h_i) y (g_3, h_i) son resueltos por A_0 ya que $d((g_2, h_i), A_0) = 2 \neq 1 = d((g_3, h_i), A_0)$.

Como consecuencia de lo anterior, concluimos que Π es una partición resolvente de $P_n \circ H$ y por lo tanto $pd(P_n \circ H) \leq m + 2$. \square

3.4 Conjuntos independientes

Para continuar nuestro análisis utilizaremos el hecho de que $G \circ H$ es conexa si y sólo si G es una gráfica conexa, aunque H no sea conexa. Entonces podemos estudiar los casos para los cuales H es un conjunto independiente de vértices $\overline{K_m}$. Para seguir en este sentido necesitamos una definición. Recordamos que la *vecindad abierta* de un vértice x en una gráfica G está definido como $N(x) = \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$. Siguiendo con esta definición, diremos que dos vértices $u, v \in G$ son *falsos gemelos* si $N(u) = N(v)$. Notamos que si u y v son adyacentes entonces no son falsos gemelos.

Teorema 3.4.1. *Sea G una gráfica conexa no trivial de orden n tal que G no contiene falsos gemelos. Entonces, para cualquier $m \geq 2$ se tiene*

$$pd(G \circ \overline{K_m}) \leq n + m - 1$$

Demostración: Sea G una gráfica conexa con $V(G) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ su conjunto de vértices y sea $V(\overline{K_m}) = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. Consideremos la partición Π de $G \circ \overline{K_m}$ dada por $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_n, B_2, B_3, \dots, B_m\}$ donde $A_i = \{(g_i, h_1)\}$ y $B_j = V(G) \times \{h_j\}$ con $j \in \{2, \dots, m\}$. Sean $(g_i, h_j), (g_k, h_j) \in B_j$. Si g_j y g_k son adyacentes en G entonces se tiene que $d_{G \circ \overline{K_m}}((g_i, h_j), (g_i, h_1)) = 2$ y $d_{G \circ \overline{K_m}}((g_k, h_j), (g_i, h_1)) = 1$ y por lo tanto $(g_i, h_j), (g_k, h_j)$ son resueltos por A_i . Supongamos ahora que g_i, g_k no son adyacentes en G , como G no contiene falsos gemelos, g_i y g_k no pueden tener la misma vecindad abierta, por lo que debe existir un vértice $g_q \in G$ tal que, sin pérdida de generalidad, $g_q \in N(g_i)$ y $g_q \notin N(g_k)$, se sigue que $d_{G \circ \overline{K_m}}((g_i, h_j), (g_q, h_1)) = 1$ y $d_{G \circ \overline{K_m}}((g_k, h_j), (g_q, h_1)) \geq 2$. Entonces los vértices $(g_i, h_j), (g_k, h_j)$ están resueltos por el conjunto A_q y como consecuencia, Π es una partición resolvente de $G \circ \overline{K_m}$. Como Π tiene cardinalidad $n + m - 1$, se tiene que $pd(G \circ \overline{K_m}) \leq n + m - 1$. \square

El próximo caso que estudiaremos es donde el primer factor es una gráfica completa y el segundo un conjunto independiente de vértices. Notamos que como una gráfica completa no tiene falsos gemelos, podemos aplicar el teorema anterior a este caso.

Teorema 3.4.2. *Para cualesquiera $n \geq 2$ y $m \geq 2$, se tiene:*

$$pd(K_n \circ \overline{K_m}) = n + m - 1$$

Demostración: Sea $V(K_n) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ y $V(\overline{K_m})$ los vértices del primero y segundo factor, respectivamente. Por el teorema 3.4.1 tenemos que $pd(K_n \circ \overline{K_m}) \leq n + m - 1$. Mostraremos ahora que $pd(K_n \circ \overline{K_m}) \geq n + m - 1$. Consideremos dos vértices $(g_k, x), (g_k, y) \in {}^{g_k}H$ para algún $1 \leq k \leq n$. Si $k = j$ entonces $d_{K_n \circ \overline{K_m}}((g_k, x), (g_j, v)) = d_{K_n \circ \overline{K_m}}((g_k, y), (g_j, v)) = 2$ y si $k \neq j$ entonces $d_{K_n \circ \overline{K_m}}((g_k, x), (g_j, v)) = d_{K_n \circ \overline{K_m}}((g_k, y), (g_j, v)) = 1$, lo que implica que cualquier partición resolvente necesita m conjuntos para cubrir la capa ${}^{g_k}H$ (uno para cada vértice). Ahora supongamos que dos capas ${}^{g_i}H$ y ${}^{g_l}H$, $i \neq l$, están cubiertas por los mismos m conjuntos, digamos A_1, A_2, \dots, A_m . Entonces existe dos vértices distintos $(g_i, x') \in {}^{g_i}H$ y $(g_l, y') \in {}^{g_l}H$ tales que $(g_i, x'), (g_l, y') \in A_q$ para algún $q \in \{1, \dots, m\}$ y $d((g_i, x'), A_{q'}) = d((g_l, y'), A_{q'}) = 1$ para cada $q \neq q'$, una contradicción. Entonces, para cubrir las capas ${}^{g_i}H$ y ${}^{g_l}H$, necesitamos al menos $m + 1$ conjuntos distintos. Como consecuencia, necesitamos al menos $n + m - 1$ conjuntos para cubrir $K_n \circ \overline{K_m}$ por lo que $pd(K_n \circ \overline{K_m}) \geq n + m - 1$ y por lo tanto $pd(K_n \circ \overline{K_m}) = n + m - 1$. \square

Los dos últimos resultados tratan los casos donde el primer factor es una trayectoria o un ciclo y el segundo factor un conjunto independiente de vértices.

Teorema 3.4.3. *Si $m \geq 4$ y $n \geq 3$ entonces*

$$pd(P_n \circ \overline{K_m}) = m + 2$$

Demostración: Por la proposición 3.3.4 tenemos que $pd(P_n \circ \overline{K_m}) \leq m + 2$. Mostraremos ahora que $pd(P_n \circ \overline{K_m}) \geq m + 2$. Sea $V(P_n) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ y $V(\overline{K_m}) = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. Consideramos una partición resolvente $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ de $P_n \circ \overline{K_m}$ de cardinalidad minimal. Primero notamos que por la Observación 3.2.1 y el hecho de que $\overline{K_m}$ no tiene aristas, si $(g, h_i) \in A_i$ entonces para cada j con $1 \leq j \leq m$, $j \neq i$ se tiene $(g, h_j) \notin A_i$. Entonces cada capa gH intersecta con Π en exactamente m conjuntos, por lo que $m \leq s$.

Supongamos ahora que $m = s$. Por las observaciones hechas previamente, existen dos vértices consecutivos $g_1, g_2 \in V(P_n)$ y dos vértices $h, h' \in V(\overline{K_m})$ tales que $(g_1, h), (g_2, h')$ pertenecen al mismo conjunto A_j para alguna $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Se sigue que $r((g_1, h)|\Pi) = r((g_2, h')|\Pi) = (1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ (donde el 0 aparece en la i -ésima entrada), lo que es una contradicción, por lo que $m \leq s \leq m + 2$.

Por último supongamos que $m + 1 = s$. Como $m \geq 4$, existe un conjunto $A_k \in \Pi$ y tres vértices consecutivos $g_j, g_{j+1}, g_{j+2} \in V(P_n)$ tales que ${}^{g_j}H \cap A_k \neq \emptyset$ y ${}^{g_{j+1}}H \cap A_k = \emptyset$, además, existen dos vértices $h, h' \in V(\overline{K_m})$ tales que $(g_j, h), (g_{j+2}, h') \in A_r$ para algún $r \in \{1, 2, \dots, m + 1\}$. Entonces se tiene que $d_{P_n \circ \overline{K_m}}((g_j, h), A_l) = d_{P_n \circ \overline{K_m}}((g_{j+2}, h'), A_l) = 1$ para cada $A_l \neq A_k$ y $d_{P_n \circ \overline{K_m}}((g_j, h), A_l) = d_{P_n \circ \overline{K_m}}((g_{j+2}, h'), A_l) = 2$ si $A_l = A_k$ por lo que $r((g_j, h)|\Pi) = r((g_{j+2}, h')|\Pi)$, lo que es una contradicción, por lo tanto $s \geq m + 2$, lo que completa la prueba. \square

Teorema 3.4.4. Sea $m \geq 2$ y $n \geq 4$ dos números enteros:

- Si $n = 4$ entonces $pd(C_n \circ \overline{K_m}) = 2m + 1$
- Si $n = 5$ o $n \geq 8$ entonces $pd(C_n \circ \overline{K_m}) = m + 2$
- Si $n = 6$ o $n = 7$ entonces $m + 2 \leq pd(C_n \circ \overline{K_m}) \leq m + 3$

Demostración: Sea $V(C_n) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ y $V(\overline{K_m}) = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. También asumimos que $g_i g_{i+1} \in E(C_n)$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y que $g_n g_1 \in E(C_n)$. Analizaremos primero el caso para $n = 4$, luego mostraremos que para $n \geq 5$ se tiene $pd(C_n \circ \overline{K_m}) \geq m + 2$ para luego demostrar que para $n = 5$ o $n \geq 8$ se cumple $pd(C_n \circ \overline{K_m}) = m + 2$ y por último veremos que para $n = 6$ o 7 se tiene $pd(C_n \circ \overline{K_m}) \leq m + 3$.

Caso $n = 4$. Sea $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_{2m-1}, B_1, B_2\}$ una partición donde $A_j = \{(g_1, h_j), (g_2, h_j)\}$ si $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, y $A_j = \{(g_3, h_{j-m}), (g_4, h_{j-m})\}$ si $j \in \{m+1, m+2, \dots, 2m-1\}$ y por último $B_1 = \{(g_3, h_m)\}$ y $B_2 = \{(g_4, h_m)\}$ (ver Figura 3.13). Sean $(x, h_i), (y, h_i) \in A_i$, $x \neq y$ entonces se tiene uno de los siguientes casos:

$$-d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((x, h_i), B_1) = 1 \text{ y } d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((y, h_i), B_1) = 2$$

$$-d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((x, h_i), B_1) = 2 \text{ y } d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((y, h_i), B_1) = 1$$

En ambos casos se tiene que $r((x, h_i), \Pi) \neq r((y, h_i), \Pi)$ por lo que Π es una partición resolvente de $C_4 \circ \overline{K_m}$ y como $|\Pi| = 2m + 1$ se tiene que $pd(C_4 \circ \overline{K_m}) \leq 2m + 1$.

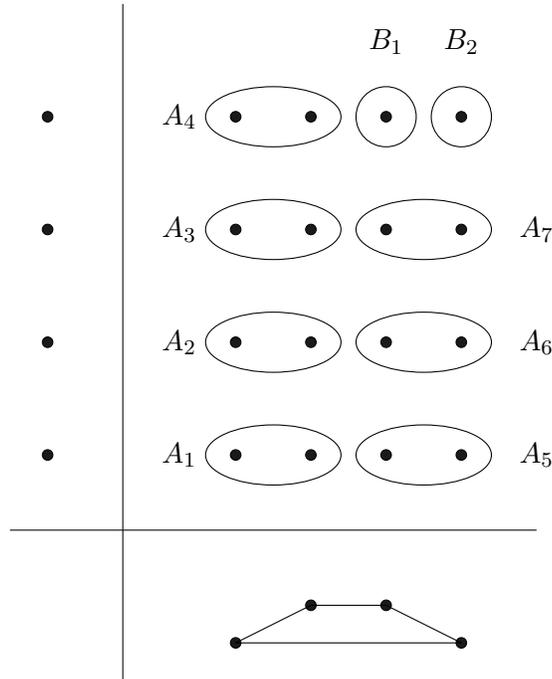


Figura 3.13: La partición Π para $C_4 \circ \overline{K_m}$

Por otra parte sea $\Pi' = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ una partición resolvente de $C_4 \circ \overline{K_m}$. Sea $(g_1, x) \in {}^{g_1}H$. Notamos que $d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((g_1, x), (g_1, y)) = 1$ si $i = 2$ ó $i = 4$, y por otra parte, $d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((g_1, x), (g_1, y)) = 2$ si $i = 1$ ó $i = 3$. Por lo que cada vértice de ${}^{g_1}H$ debe pertenecer a conjuntos diferentes de Π' y por lo tanto $r \geq m$. Ahora supongamos que existen dos vértices $(g_1, z) \in {}^{g_1}H$ y $(g_3, w) \in {}^{g_3}H$ tal que $(g_1, z), (g_3, w) \in A_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Si $A_i \cap {}^{g_2}H \neq \emptyset$ ó $A_i \cap {}^{g_4}H \neq \emptyset$ entonces $d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((g_1, z), A_i) = d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((g_3, w), A_i) = 1$, también, si $A_i \cap {}^{g_2}H = \emptyset$ y $A_i \cap {}^{g_4}H = \emptyset$ entonces $d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((g_1, z), A_i) = d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((g_3, w), A_i) = 2$ por lo que $r((g_1, z)|\Pi') = r((g_3, w)|\Pi')$, una contradicción. Concluimos que dos vértices de ${}^{g_1}H$ y ${}^{g_3}H$ deben pertenecer a dos conjuntos distintos de Π' , lo que implica que $r \geq 2m$.

Por simetría observamos que 2 vértices de ${}^{g_2}H$ y ${}^{g_4}H$ deben pertenecer a conjuntos distintos de Π' . Supongamos ahora que los $2m$ vértices de ${}^{g_2}H$ y ${}^{g_4}H$ están cubiertos por los mismos $2m$ conjuntos que los vértices de ${}^{g_1}H$ y ${}^{g_3}H$. Entonces hay exactamente 2 vértices en cada $A_i \in \Pi'$. Sea $(g_1, h_1) \in A_1$ y sin pérdida de generalidad consideramos un vértice $(g_2, h_j) \in A_1$. Notamos que $d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((g_2, h_j), A_i) = 1$ para cada $i \neq 1$. Además, como $A_i \cap {}^{g_2}H \neq \emptyset$ y $A_i \cap {}^{g_4}H \neq \emptyset$ se sigue que $d_{C_4 \circ \overline{K_m}}((g_1, h_1), A_i) = 1$ para cada $i \neq 1$, lo que es una contradicción, pues tenemos $r((g_1, h_1)|\Pi') = r((g_2, h_j)|\Pi')$. Concluimos que debe de existir al menos un vértice de ${}^{g_2}H$ ó de ${}^{g_4}H$ que pertenece a un conjunto A_s tal que $A_s \cap {}^{g_1}H = \emptyset$ y $A_s \cap {}^{g_3}H = \emptyset$, lo que implica que $r \geq 2m + 1$ y $pd(C_4 \circ \overline{K_m}) \geq 4$. Por lo tanto $pd(C_4 \circ \overline{K_m}) = 4$.

Caso $n \geq 5$. Sea $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ una partición resolvente de $C_n \circ \overline{K_m}$. Observamos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que $d((g_i, h_j), (g_\alpha, h_\beta)) = d((g_i, h_k), (g_\alpha, h_\beta))$ siempre que $(g_\alpha, h_\beta) \neq (g_i, h_j), (g_i, h_k)$. Entonces los vértices de ${}^{g_i}H$ deben pertenecer a conjuntos distintos de Π , entonces $r \geq m$.

Supongamos que $pd(C_n \circ \overline{K_m}) = m$. Entonces existen dos vértices, digamos (g_1, h_i) y (g_2, h_j) tal que $(g_1, h_i), (g_2, h_j) \in A_1$. En tal caso tenemos que $r((g_1, h_i)|\Pi) = (0, 1, 1, \dots, 1) = r((g_2, h_j)|\Pi)$, una contradicción, por lo tanto $r \geq m + 1$.

Supongamos ahora que $pd(C_n \circ \overline{K_m}) = m + 1$. Como cada capa ${}^{g_i}H$ está cubierta por exactamente m conjuntos, deben existir dos vértices consecutivos de C_n , digamos sin pérdida de generalidad g_1, g_2 tal que ${}^{g_1}H$ está cubierta por m conjuntos de Π , digamos A_1, A_2, \dots, A_m y ${}^{g_2}H$ está cubierta por m conjuntos de Π con un conjunto diferente, digamos A_2, A_3, \dots, A_{m+1} . Notamos que si $A_1 \cap {}^{g_3}H \neq \emptyset$ entonces existen dos vértices $(g_1, h) \in {}^{g_1}H$ y $(g_3, h') \in {}^{g_3}H$ con $r((g_1, h)|\Pi) = r((g_3, h')|\Pi) = (0, 1, \dots, 1)$, lo que es una contradicción.

Entonces la capa ${}^{g_3}H$ está cubierta por conjuntos $\{A_2, A_3, \dots, A_{m+1}\}$. Haciendo el mismo análisis, concluimos que la capa ${}^{g_1}H$ está cubierta por los conjuntos A_2, A_3, \dots, A_{m+1} . Otra vez, razonando de la misma forma concluimos que las capas ${}^{g_l}H$, $l \in \{4, 5, \dots, l\}$ están cubiertas por los conjuntos A_2, A_3, \dots, A_{m+1} también. Entonces $A_1 \cap {}^{g_l}H \neq \emptyset$ y $A_1 \cap {}^{g_l}H = \emptyset$ para $l \in \{2, 3, \dots, n\}$, además las capas ${}^{g_2}H$ y ${}^{g_n}H$ están cubiertas por A_2, A_3, \dots, A_m por lo que existen dos vértices $(g_n, h_k), (g_2, h_s)$ con $r((g_n, h_k)|\Pi) = r((g_2, h_s)|\Pi)$, una contradicción, por lo que $pd(C_n \circ \overline{K_m}) \geq m + 2$.

Tenemos ahora que analizar las cotas superiores, para tal efecto analizaremos tres casos distintos como mencionado anteriormente.

Subcaso 2.1: $n = 5$. Consideramos la partición $\Pi_5 = \{B_1, B_2, B_3, A_2, A_3, \dots, A_m\}$ donde $B_1 = \{(g_1, h_1), (g_3, h_1)\}$, $B_2 = \{(g_2, h_1), (g_4, h_1)\}$, $B_3 = \{(g_5, h_1)\}$ y para cada $i \in \{2, 3, \dots, m\}$, $A_i = \{(g_j, h_i) : 1 \leq j \leq 5\}$. Claramente, los vértices de B_1 y B_2 están resueltos por B_3 . Cada A_j está formado por 5 vértices, los cuales tienen como representación particional:

$$\begin{aligned} r((g_1, h_j)|\Pi_5) &= (2, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) \\ r((g_2, h_j)|\Pi_5) &= (1, 2, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) \\ r((g_3, h_j)|\Pi_5) &= (2, 1, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) \\ r((g_4, h_j)|\Pi_5) &= (1, 2, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) \\ r((g_5, h_j)|\Pi_5) &= (1, 1, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

donde el 0 aparece en la posición j en cada vector correspondiente. Vemos que cada vértice tiene una representación particional diferente, entonces Π_5 es una partición resolvente para $C_5 \circ \overline{K_m}$ y por lo tanto $pd(C_5 \circ \overline{K_m}) = m + 2$.

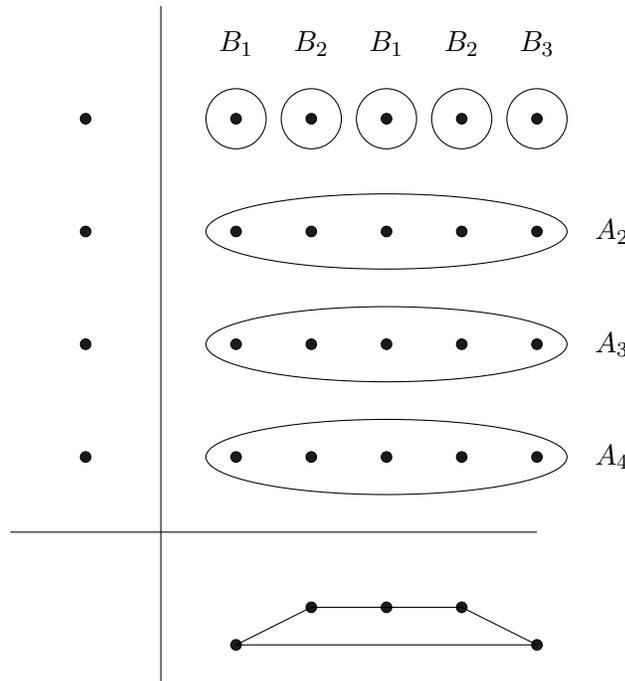


Figura 3.14: La partición Π_5 para $C_5 \circ \overline{K_m}$

Caso 2.2: $n = 6$ o $n = 7$. Sea la partición Π_6 (Π_7 respectivamente) de $C_n \circ \overline{K_m}$ dada por $\Pi_6 = \{B_1, B_2, B_3, b_4, A_2, A_3, \dots, A_m\}$ donde $B_1 = \{(g_1, h_1)\}$, $B_2 = \{(g_2, h_1), (g_3, h_1)\}$, $B_3 = \{(g_4, h_1)\}$, $B_4 = \{(g_5, h_1), (g_6, h_1)\}$ si $n = 6$ y $\Pi_7 = \{B_1, B_2, B_3, b_4, A_2, A_3, \dots, A_m\}$ donde $B_1 = \{(g_1, h_1)\}$, $B_2 = \{(g_2, h_1), (g_3, h_1)\}$, $B_3 = \{(g_4, h_1), (g_5, h_1)\}$, $B_4 = \{(g_6, h_1), (g_7, h_1)\}$ si $n = 7$ y para cada $i \in \{2, 3, \dots, m\}$, $A_i = \{(g_j, h_i) : 1 \leq j \leq 5\}$. Primero vemos que si $n = 6$, entonces los vértices de B_2 y B_4 están resueltos por B_1 o B_3 . También, si $n = 7$ los vértices de B_2, B_3, B_4 están resueltos por B_1, B_2, B_3 o B_4 . Ahora vemos si $n = 6$, cada A_j está formado por 6 vértices de los cuales enumeramos a continuación la representación particional:

$$r((g_1, h_j)|\Pi_6) = (2, 1, 3, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_2, h_j)|\Pi_6) = (1, 1, 2, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_3, h_j)|\Pi_6) = (2, 1, 1, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_4, h_j)|\Pi_6) = (3, 1, 2, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_5, h_j)|\Pi_6) = (2, 2, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_6, h_j)|\Pi_6) = (1, 2, 2, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

donde el 0 aparece en la entrada j de cada vector. Por lo que Π_6 es una partición resolvente de $C_6 \circ \overline{K_m}$ y por lo tanto $m + 2 \leq pd(C_6 \circ \overline{K_m}) \leq m + 3$. De la misma manera, para los vértices de Π_7 tenemos:

$$r((g_1, h_j)|\Pi_7) = (2, 1, 3, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_2, h_j)|\Pi_7) = (1, 1, 2, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_3, h_j)|\Pi_7) = (2, 1, 1, 3, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_4, h_j)|\Pi_7) = (3, 1, 1, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_5, h_j)|\Pi_7) = (3, 2, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_6, h_j)|\Pi_7) = (2, 3, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_7, h_j)|\Pi_7) = (1, 2, 2, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

donde el 0 aparece en la entrada j de cada vector, por lo que Π_7 es una partición resolvente de $C_7 \circ \overline{K_m}$ y $m + 2 \leq pd(C_7 \circ \overline{K_m}) \leq m + 3$.

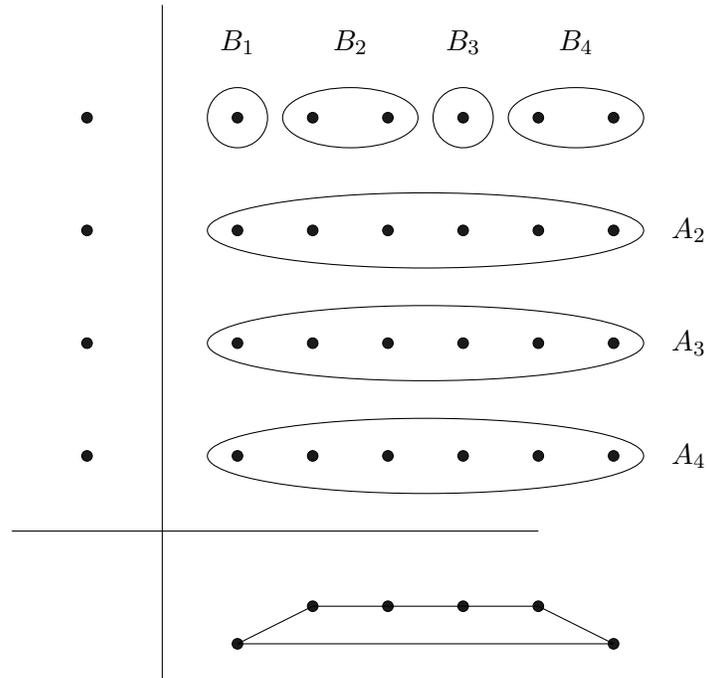


Figura 3.15: La partición Π_6 para $C_6 \circ \overline{K_m}$

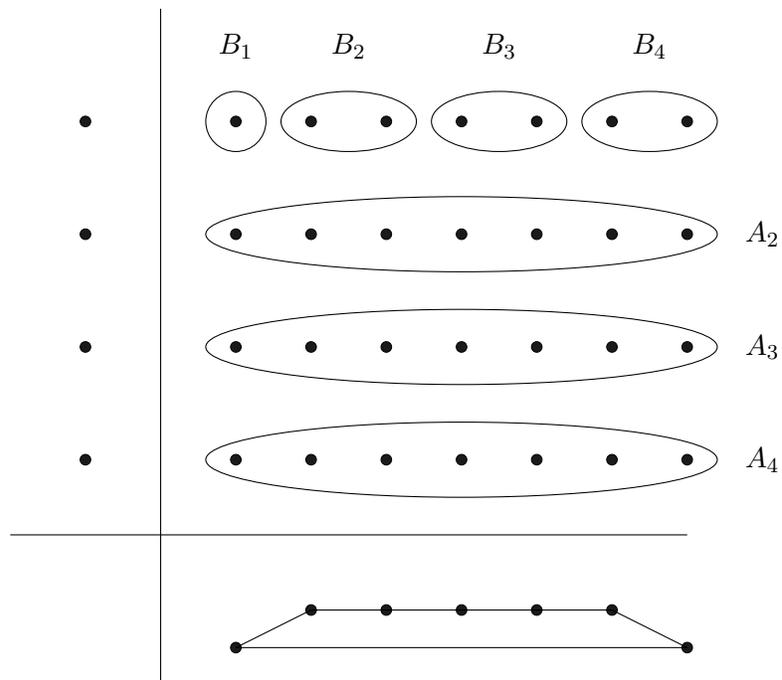


Figura 3.16: La partición Π_7 para $C_7 \circ \overline{K_m}$

Subcaso 2.3: $n \geq 8$. Consideramos ahora la partición Π_8 dada por $\Pi_8 = \{B_1, B_2, B_3, A_2, A_3, \dots, A_m\}$ donde $B_1 = \{(g_1, h_1)\}$, $B_2 = \{(g_2, h_1), (g_3, h_1), (g_4, h_1)\}$, $B_3 =$

$\{(g_5, h_1), (g_6, h_1), \dots, (g_n, h_1)\}$ y para cada $i \in \{2, 3, \dots, m\}$, $A_i = \{(g_j, h_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Claramente los vértices de B_2 están resueltos por B_1 , y también los vértices de B_3 están resueltos por B_1 o B_2 ya que $n \geq 8$. Ahora, para los vértices en cada $A_j \in \Pi_8$ con $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ se tiene:

$$r((g_1, h_j)|\Pi_8) = (2, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_2, h_j)|\Pi_8) = (1, 1, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_3, h_j)|\Pi_8) = (2, 1, 2, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_4, h_j)|\Pi_8) = (3, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_5, h_j)|\Pi_8) = (4, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_{n-z}, h_j)|\Pi_8) = (z, z + 2, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1), z \geq 2$$

$$r((g_{n-1}, h_j)|\Pi_8) = (2, 3, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r((g_n, h_j)|\Pi_8) = (1, 2, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

donde el 0 aparece en la entrada j de cada vector. Entonces esos 8 vértices están resueltos por B_1, B_2 ó B_3 . Observamos también que si $6 \leq i \leq n - 3$ entonces $d_{C_n \circ \overline{K_m}}((g_i, h_j), (g_1, h_1)) \geq 4$, lo que implica que la primera posición en los vectores correspondientes es un entero mayor que 3, y $d((g_i, h_j)|B_2) \geq 3$. Además si existen $k, l \in \{6, \dots, n - 3\}$ tales que $d((g_k, h_j), (g_1, h_1)) = d((g_l, h_j), (g_1, h_1))$, es decir que no estén resueltos por B_1 , entonces se puede probar fácilmente que están resueltos por B_2 . Entonces Π_8 es una partición resolvente de $C_n \circ \overline{K_m}$ por lo que $pd(C_n \circ \overline{K_m}) \leq m + 2$ y por lo tanto $pd(C_n \circ \overline{K_m}) = m + 2$.

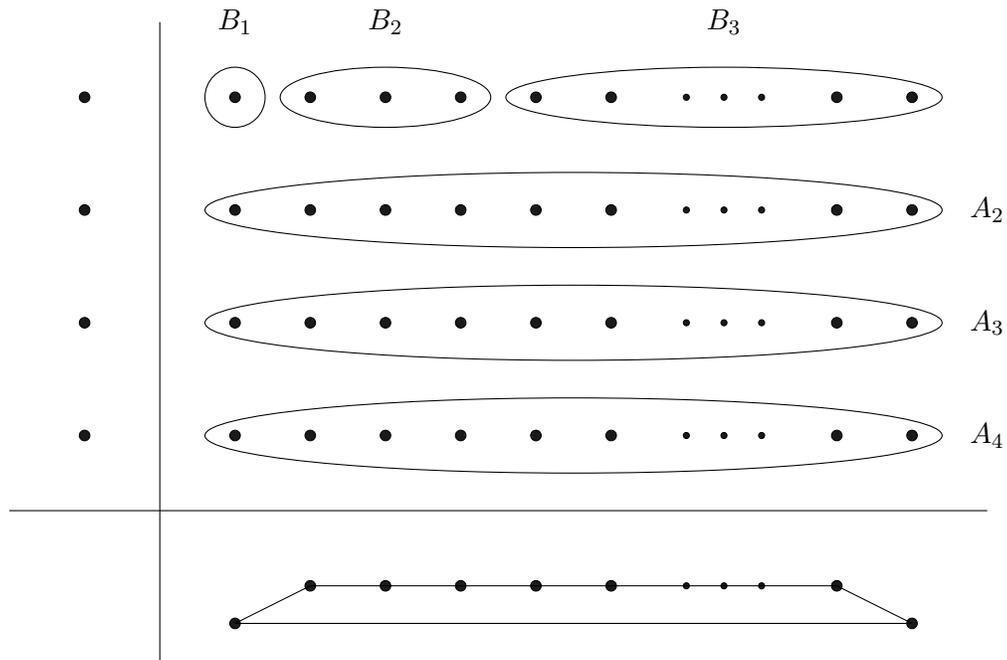


Figura 3.17: La partici3n Π_8 para $C_n \circ \overline{K_m}$, $n \geq 8$

□

El 3ltimo resultado deja algunas preguntas obvias, que pasa en los casos $n = 6$ y $n = 7$. ¿ Existe un valor exacto o siempre existe la posibilidad de $m + 2$ 3 ó $m + 3$? ¿ Se podr3 caracterizar las familias de gr3ficas que cumple los casos $m + 2$ 3 ó $m + 3$?

Conclusiones

En el trabajo presentado hemos abordado tres problemas que involucran productos de gráficas. El primer problema resuelto fue encontrar cuales de los productos, añadidos los grupos $K_{\cup}(\mathcal{G})$ y $K_{+}(\mathcal{G})$ forman una estructura de anillo. El primer resultado importante fue entonces que en ambos casos exactamente 6 productos cumplían con las propiedades. El segundo resultado de la primera parte fue que cada uno de los 6 anillos formados con la unión es isomorfo a uno de los anillos formados con la suma. Un posible trabajo futuro en este sentido es el estudio de otros tipos de operaciones de gráficas con el objetivo de formar objetos algebraicos. También se pretende analizar más propiedades de los anillos encontrados. Este trabajo fue publicado en enero del 2016 [63].

En la segunda parte del trabajo se trabajó con polinomios de completas de gráficas y productos de gráficas. El resultado principal fue encontrar en que caso se puede calcular el polinomio de completas de un producto de gráficas en términos de sus factores. Se analizaron los 256 casos y se encontró que en 29 casos el cálculo es posible. Para estos 29 casos, se dió la fórmula que permite calcularlo y en los casos restantes se proporcionó un contraejemplo. Siguiendo la idea de analizar polinomios de productos de gráficas se pretende realizar a futuro el mismo tipo de investigación para diferentes tipos de polinomios.

En la tercera y última parte de este trabajo se estudió la partición dimensional del producto lexicográfico. En esta parte se dieron cotas para la partición dimensional de este producto. El primer resultado fue con las cotas para el caso general, es decir, para dos gráficas factores arbitrarias. Luego se estudiaron clases específicas de gráficas como las trayectorias, las gráficas completas, los ciclos y los conjuntos independientes. En un futuro se pretende estudiar la partición dimensional de otros productos o operaciones entre gráficas, también se pretende estudiar otros invariantes como el número cromatico métrico para el producto lexicográfico.

Bibliografía

- [1] Grothendieck A. *Sur quelques points d'algèbre homologique*(1957). Thoku Mathematical Journal, (2) vol.9: 119-221..
- [2] Berge Claude. *Théorie des Graphes et ses Applications*(1958) Dunod, Paris.
- [3] Vadim E. Levit, Eugen Mandrescu. *The independence polynomial of a graph - a survey*. Disponible en arXiv : 0904.4819.
- [4] David C. Fisher, Anita E. Solow; *Dependence polynomials* (1990). Discrete Mathematics, Volume 82, Issue 3, Pages 251-258.
- [5] Bollobás Béla. *Modern Graph Theory* (1998). Graduate Texts in Mathematics 184, Springer, p. 104, ISBN 9780387984889.
- [6] Frías Armenta Martín E, Martínez-Morales J.L. *The Grothendieck group of isomorphism classes of graphs*. Sometido al boletín de la sociedad mexicana de matemáticas.
- [7] Imrich Wilfried, Klavžar Sandi. *Product graph: Structure and Recognition*, ISBN: 978-0-471-37039-0.
- [8] Imrich Wilfried, Izbicki Herbert. *Associative products of Graphs* (1975). Monatshefte für Mathematik, Volume 80, Issue 4, pp 277-281.
- [9] Sabidussi Gert. *Graph multiplication* (1960). Mathematische Zeitschrift, Volume 72, Issue 1, pp 446-457.
- [10] Whitehead A. N, Russell B. *Principia Mathematica* (1912). Volume 2. Cambridge University Press, Cambridge.
- [11] Hoede Cornelis, Li Xue Liang. *Clique polynomials and independent set polynomials of graphs*. (1994). Discrete Math. **125**, no. 1-3, 219-228.
- [12] Brigham R. C, Chartrand G, Dutton R. D, Zhang P. *Resolving domination in graphs* (2003). Mathematica Bohemica, **128** (1) 25-36.
- [13] Cáceres J, Hernando C, Mora M, Pelayo I.M, Puertas M.L, Seara C, Wood D.R. *On the metric dimension of Cartesian product of graphs*(2007). SIAM Journal of Discrete Mathematics **21** (2), 273-302.
- [14] Cáceres J, Hernando C, Mora M, Pelayo I.M, Puertas M.L, Seara C. *On the metric dimension of some families of graphs* (2005). Electronic Notes in Discrete Mathematics **22**, 129-133.

- [15] Chappell G, Gimbel J, Hartman C, *Bounds on the metric and partition dimensions of a graph* (2008), *Ars Combinatoria* **88**, 349-366.
- [16] Chartrand G, Eroh L, Johnson M.A, Oellermann O.R. *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph* (2000). *Discrete Applied Mathematics* **105**, 99-113.
- [17] Chartrand G, Poisson C, Zhang P. *Resolvability and the upper dimension of graphs*(2000). *Computers and Mathematics with Applications* **39**, 19-28.
- [18] Chartrand G, Salehi E, Zhang P. *The partition dimension of a graph* (2000). *Aequationes Mathematicae* (1-2) **59**, 45-54.
- [19] González Yero I, Jakovac M, Kuziak D, Taranenko A. *The partition dimension of strong product graphs and Cartesian product graphs*(2014). *Discrete Mathematics* **331**, 43-52.
- [20] Fehr M, Gosselin S, Oellermann O.R. *The partition dimension of Cayley digraphs*(2006). *Aequationes Mathematicae* **71**, 1-18.
- [21] Harary F, Melter R.A. *On the metric dimension of a graph* (1976). *Ars Combinatoria* **2**, 191-195.
- [22] Haynes T.W, Henning M, Howard J, *Locating and total dominating sets in trees*(2006). *Discrete Applied Mathematics* **154**, 1293-1300.
- [23] Hulme B.L, Shiver A.W, Slater P.J. *A Boolean algebraic analysis of fire protection*(1984). *Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research* **95** 215-227.
- [24] Johnson M. A. *Structure-activity maps for visualizing the graph variables arising in drug design*(1993). *Journal of Biopharm Statist* **3**, 203-236.
- [25] Johnson M.A, *Browsable structure-activity datasets*(1998). *Advances in Molecular Similarity*, R. Carbó-Dorca and P. Mezey, eds. JAI Press, Connecticut, 153-170.
- [26] Khuller S, Raghavachari B, Rosenfeld A, *Landmarks in graphs*(1996). *Discrete Applied Mathematics*, **70**, 217-229.
- [27] Rodríguez-Velázquez J.A, Gonzalez Yero I, Kuziak D. *The partition dimension of corona product graphs*. *Ars Combinatoria*. To appear: (arXiv:1010.5144 [math.CO])
- [28] Saenpholphat V, Zhang P, *Conditional resolvability in graphs: a survey*(2004). *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **38**, 1997-2017.
- [29] Slater P.J. *Leaves of trees* (1975) *Proc. 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium* **14**, 549-559.
- [30] Tomescu I. *Discrepancies between metric and partition dimension of a connected graph*(2008). *Discrete Mathematics*, **308**, 5026-5031.

- [31] Tomescu I, Imran M, *On metric and partition dimensions of some infinite regular graphs*(2009). Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, **52**, 461-472.
- [32] Tomescu I, Javaid I, Slamini. *On the partition dimension and connected partition dimension of wheels*(2007). Ars Combinatoria, **84**, 311-317.
- [33] Gonzalez Yero I, Rodríguez-Velázquez J.A. *A note on the partition dimension of Cartesian product graphs*(2010). Applied Mathematics and Computation, **217** (7), 3571-3574.
- [34] Frucht R. *Graphs of Degree 3 with given abstract group*. Canad. J. Math. **3** 1949.
- [35] Biggs N. *Algebraic Graph Theory* (book)(1993). Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 0-521-45897-8.
- [36] Babai L, Graham R, Grötschel M, Lovász L. *Automorphism groups, isomorphism, reconstruction*(1996). Handbook of Combinatorics, Elsevier.
- [37] Godsil Chris, Royle Gordon. *Algebraic Graph Theory*(2001). Graduate Texts in Mathematics 207, New York: Springer-Verlag.
- [38] Brown J. I, Hickman C. A, Nowakowski R. J. *On the location of roots of independence polynomials*(2004). Journal of Algebraic Combinatorics **19**, 273-282.
- [39] Kavruk A, Paulsen V, Todorov I.G, Tomforde M. *Tensor products of operator systems*(2011). Journal of Functional Analysis Volume **261**, Issue **2**, 267299.
- [40] Dauxois J, Romain Y, Viguier-Pla S. *Tensor products and statistics*(1994). Linear Algebra and its Applications Volume **210**, 59-88.
- [41] Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae **8** (1736), 128–140
- [42] Kaveh A, Rahami H. *An efficient method for decomposition of regular structures using graph products*(2004). International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. **61**, no. **11**, 17971808.
- [43] Kaveh A, Koohestani K. *Graph products for configuration processing of space structures*(2008). Computers and Structures, vol. **86**, no. **11-12**, 12191231.
- [44] Kaveh A, Nouri M. *Weighted graph products for configuration processing of planar and space structures*(2009). International Journal of Space Structures, vol. **24**, no. **1**, 1326.
- [45] Kaveh A, Beheshti S. *Weighted triangular and circular graph products for configuration processing*(2012). Periodica Polytechnica, vol. **56**, **19**.
- [46] Klavžar S. *On the fractional chromatic number and the lexicographic product of graphs*(1998). Discrete Mathematics Volume **185**, Issues **13**, Pages 259263.

- [47] Feigenbaum J, Schäffer A. *Finding the prime factors of strong direct product graphs in polynomial time*(1992). Discrete Mathematics Volume 109, Issues 13, 77102.
- [48] Spacapan S. *Connectivity of Cartesian products of graphs*(2008). Applied Mathematics Letters Volume 21, Issue 7, Pages 682685.
- [49] Hales R.S. *Numerical invariants and the strong product of graphs*(1973). Journal of Combinatorial Theory, Series B Volume 15, Issue 2, 146-155.
- [50] Klavžar, Milutinović U. *Strong products of Kneser graphs* (1994). Discrete Mathematics Volume 133, Issues 1, 297-300.
- [51] Meijie Ma, Jun-Ming Xu, Qiang Zhuc. *The Menger number of the Cartesian product of graphs* (2011). Applied Mathematics Letters Volume 24, Issue 5, 627-629.
- [52] Bresar B. *On subgraphs of Cartesian product graphs and S-primeness*(2004). Discrete Mathematics Volume 282, Issues 1, 43-52.
- [53] Imrich W, Klavžar S, Rall, Douglas. *Topics in graph theory (Book)*(2008). A K Peters Ltd., Wellesley, MA, ISSN: 978-1-56881-429-2.
- [54] Hammack R, Imrich W, Klavžar S. *Handbook of product graphs* (Book)(2011). Second, CRC Press, Boca Raton, FL, ISSN: 978-1-4398-1304-1.
- [55] Imrich W, Klavzar S. *Product graphs* (Book)(2000). Wiley-Interscience, New York, ISSN: 0-471-37039-8.
- [56] Žerovnik Janez. *On recognition of strong graph bundles*(2000). Math Slovaca. Vol 50, No.3, 289-301.
- [57] Bert L, Douglas F. *On dominating the Cartesian product of a graph and K_2* (2004). Vol 24, No. 3, 389-402.
- [58] Haynes T.W, Hedetniemi S, Slater P. *Fundamentals of Domination in Graphs* (1998). Marcel Dekker. ISBN 0-8247-0033-3. OCLC 37903553.
- [59] Haynes T.W, Hedetniemi S, Slater P. *Domination in Graphs: Advanced Topics* (1998). Marcel Dekker. ISBN 0-8247-0034-1. OCLC 38201061.
- [60] Garey M, Johnson D. *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness* (1979). W. H. Freeman. ISBN 0-7167-1045-5. OCLC 11745039.
- [61] Hedetniemi S. T, Laskar, R. C. *Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters* (1990). Discrete Mathematics 86(13): 257277, doi:10.1016/0012-365X(90)90365-O.
- [62] Sabidussi, G. *Graphs with given group and given graph-theoretical properties* (1957). Canadian Journal of Mathematics 9: 515525, doi:10.4153/CJM-1957-060-7, MR 0094810.

-
- [63] Campanelli N, Frías-Armenta M-E, Martínez José Luis. *Graph products and characterization by rings* (2016). Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana DOI 10.1007/s40590-015-0081-7. 1-9.