



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Métodos de promedios para estructuras geométricas y
sus aplicaciones

T E S I S

Que para obtener el título de:

Doctor en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Isaac Hasse Armengol

Directores de Tesis: Dr. Yury Vorobev
Dr. Andrés Pedroza

Hermosillo, Sonora, México, 20 de Febrero de 2019

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México

Dr. Yury Vorobev
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México

Dr. José Antonio Vallejo
Universidad Autónoma de San Luis Potosí,
San Luis Potosi, San Luis Potosi, México

Dr. Andrés Pedroza
Universidad de Colima, Colima, Colima, México

Dr. Misael Avendaño Camacho
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México

En el recuerdo de León

Agradecimientos

Le agradezco en primer lugar a Dios por darme vida y sabiduría para completar este proceso. Le agradezco a mi esposa Ángeles por su eterno apoyo y sus grandes palabras de aliento, por caminar a mi lado y mostrarme que juntos podemos llegar a la meta. A mi familia por nunca dejar de creer en mí. Le agradezco mi asesor Yury Vorobev, por cultivar en mí un poco de sus grandes conocimientos y brindarme su apoyo en todo momento. A mi asesor Andrés Pedroza por su valioso apoyo y por las fructíferas pláticas que tuvimos. A Rubén Flores por ser un excelente tutor y un profesor invaluable. Le agradezco de gran manera al profesor y amigo Misael Avendaño, por su valioso apoyo en todos estos años y por enseñarme a nunca hay que darse por vencido. A mis amigos Adrián, Jesús, Manuel, Mayra, Panta, Chino y Caro por los grandes momentos que pasamos juntos y su valiosa amistad. Finalmente, agradezco a la Universidad de Sonora y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por todo el apoyo económico que me brindó.

Abstract

This thesis is devoted to the study of geometric structures with symmetries, in particular Dirac and Poisson structures. We describe an averaging procedure on Dirac and Poisson manifolds, with respect to a class of compatible actions of compact Lie groups. Necessary conditions for the existence of invariant Poisson structures around (singular) symplectic leaves are presented. We also introduce a generalization of the Hannay-Berry connection in the context of foliated manifolds carrying Lie group actions with pre-momentum map. The main application of our approach is related to the construction of Dirac structures with symmetry on Poisson foliations. Moreover, we apply the averaging method due to Jotz, Ratiu and Sniatycki to construct invariant Dirac and Poisson structures with respect to the proper action of a Lie group (not necessarily compact).

Índice general

Introducción	3
1. Estructuras de Dirac	11
1.1. Distribuciones generalizadas	11
1.2. Estructuras de Dirac sobre complejos	18
1.3. Estructuras de Dirac en variedades diferenciables	23
1.4. Transformaciones de gauge	28
2. Método de promedios y estructuras geométricas invariantes	31
2.1. Operadores de promedio	31
2.2. Construcción de estructuras de Dirac invariantes	38
2.3. Estructuras de Poisson invariantes alrededor de hojas simplécticas	48
2.4. Compatibilidad en haces fibrados de Poisson: El caso de acciones de \mathbb{S}^1	54
3. Estructuras de Dirac invariantes en variedades foliadas	59
3.1. Conexiones en variedades foliadas	59
3.2. Método de promedio para conexiones de Ehresmann	62
3.3. Conexiones de Hannay-Berry generalizadas	71
3.4. Conexiones de Poisson con curvatura Hamiltoniana	76
3.5. Estructuras de Dirac invariantes en variedades foliadas	83
3.6. Deformaciones infinitesimales en variedades foliadas de Poisson	88
4. Estructuras de Dirac invariantes bajo acciones propias	93
4.1. Acciones propias y el teorema del tubo	93
4.2. Método de promedio para acciones propias	102
4.3. Estructuras de Dirac G -invariantes	112
Apéndices	117
A. Distribuciones en haces vectoriales y secciones globales generadoras	119
A.1. Distribuciones generalizadas sobre haces vectoriales	119
A.2. Construcción del conjunto de generadores	121

B. Geometría Riemanniana	127
B.1. Aplicación exponencial	127
B.2. Cut locus puntual	131

Introducción

Comunmente en mecánica Hamiltoniana, los espacios fase son modelados por variedades simplécticas. En ocasiones sucede que la dinámica que gobierna la evolución de un sistema está limitada por algunas restricciones físicas, lo que se traduce a que la dinámica del sistema se lleve a cabo en ciertas subvariedades del espacio fase. Además, cada una de estas subvariedades hereda una forma pre-simpléctica, definida como el *pullback* de la forma simpléctica en la variedad ambiente.

Por otro lado, existen sistemas clásicos, como el cuerpo rígido, que admite otra formulación en variedades que no son simplécticas. En esa otra formulación se hace uso de una estructura geométrica llamada *corchete de Poisson* o *bivector de Poisson*, que de hecho, es una generalización de una estructura simpléctica. La noción de estructuras de Poisson no se le atribuye a un solo autor, pues esta fue re-introducida por muchos autores en diferentes años; esto ocurre en los trabajos de Lie (1890), Dirac (1930, 1964), Pauli (1953), Martin (1959), Jost (1964), Arens (1970), Hermann (1973), Sudarshan y Mukunda (1974), Vinogradov y Krasilshchik (1975) y Lichnerowicz (1975). El término de variedad de Poisson se le atribuye a Lichnerowicz [1]. Una *estructura o bivector de Poisson* es un bivector Π en una variedad diferencial M , que satisface la *identidad de Jacobi*, es decir, la operación binaria $\{f, g\} := \Pi(df, dg)$ en $C^\infty(M)$ satisface la identidad

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Al igual que en el caso simpléctico, existen ejemplos de sistemas que son modelados en variedades de Poisson y restringidos a subvariedades. Cada variedad de Poisson (M, Π) tiene asociada una *foliación simpléctica* que caracteriza completamente la estructura. La foliación simpléctica consiste en una descomposición de M , por variedades integrales de la distribución característica $\Pi^\sharp(T^*M)$. Además, la estructura de Poisson Π induce una estructura simpléctica en cada una de las variedades integrables [2]. Si N es una subvariedad de M , la foliación simpléctica en M , define una descomposición en N . Más aún, la estructura simpléctica de cada hoja de la foliación S , induce una estructura *pre-simpléctica* en $S \cap N$, definida como el *pullback* de la estructura simpléctica en S . Es importante resaltar que esta foliación pre-simpléctica, en general, no define una estructura de Poisson en N . Por lo tanto, es natural preguntarse si existe un objeto geométrico más general con una foliación pre-simpléctica asociada. Esta pregunta da pie a las *estructuras de Dirac*.

La noción de estructuras de Dirac fue introducida por Courant y Weinstein en [3]. Por su parte, Courant presenta la noción de variedades de Dirac en [4] y Dorfman extiende la noción de estructuras de Dirac, a complejos sobre álgebras de Lie en [5]. Las estructuras de Dirac fueron llamadas así, debido al trabajo de Dirac en la teoría

de mecánica clásica con restricciones; la cual incluye una clasificación de superficies de restricciones, la formulación del corchete de Dirac, así como aplicaciones a cuantización y teoría de campos. Independiente de su motivación original en mecánica con restricciones; hay investigaciones recientes en que la teoría de estructuras de Dirac están relacionadas con un amplio rango de tópicos en matemáticas y física matemática. Véase por ejemplo [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] y [13].

Una estructura de Dirac es una distribución suave en el haz de Pontryagin $\mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$ de una variedad suave M , la cual es Lagrangiana con respecto al emparejamiento natural de formas y campos vectoriales. Un elemento clave en la definición de estructuras de Dirac en una variedad M , es el *corchete de Courant* [10], esto es, una operación bilineal en el espacio de secciones de $\mathbb{T}M$, la cual es usada para formular una condición general de integrabilidad; ésta engloba las condiciones que una 2-forma sea cerrada y que un bivector sea de Poisson. En este sentido, estas estructuras generalizan dos enfoques en la mecánica Hamiltoniana: el enfoque covariante (las estructuras simplécticas) y el enfoque contravariante (las estructuras de Poisson). Geométricamente, una estructura de Dirac define una *foliación singular pre-simpléctica* en M [10], la cual está dada por la foliación en variedades integrables de la distribución que se obtiene al proyectar la estructura de Dirac en TM .

En ocasiones, los sistemas en mecánica clásica presentan ciertas *simetrías*. Esto es, un grupo actuando por transformaciones canónicas en el espacio fase, el cual deja invariante el Hamiltoniano de un sistema mecánico. Tal es el caso del cuerpo rígido, donde el grupo de simetrías, es dado por el grupo de movimientos Euclidianos en tres dimensiones. Por otro lado, en [7] y [11], estudian la noción de simetría para sistemas Hamiltonianos implícitos, los cuales son sistemas Hamiltonianos con respecto a una estructura de Dirac. Esto motiva el estudio y desarrollo de estructuras geométricas (estructuras de Dirac o estructuras de Poisson) con simetrías, las cuales generalizan propiamente la noción de simetrías en estructuras simplécticas, de Poisson, y en sistemas Hamiltonianos.

El objetivo general del presente trabajo es desarrollar métodos geométricos para la construcción de variedades de Dirac y Poisson con simetrías, es decir, cuya estructura sea invariante con respecto a la acción de un grupo de Lie. Una herramienta fundamental para construir tales estructuras, es el *método clásico de promedios*, el cual se define en un G -espacio, siempre que el grupo de Lie G sea compacto y conexo. Desde el punto de vista geométrico, la dificultad de estudiar la construcción de estructuras de Dirac y Poisson, que son invariantes con respecto a la acción de un grupo dado, esta relacionada al problema de promediar estructuras pre-simplécticas en foliaciones singulares. En general, la presencia de singularidades puede destruir la diferenciabilidad de las estructuras promediadas, lo cual da pie a preguntarnos sobre *condiciones de compatibilidad* entre la foliación singular pre-simpléctica y las órbitas de la acción del grupo. Vorobev y Vallejo [9], desarrollaron un procedimiento, basado en el método de promedios, para construir estructuras de Dirac y Poisson invariantes con respecto a una clase de acciones de grupos de Lie compactos, que son compatibles con la estructura. En este trabajo, generalizamos este enfoque usando un método de promedios introducido por Jotz, Ratiu y Śniatycky [6, 12, 13] para acciones propias de grupos de Lie no necesariamente compactos. Por

otra parte, también recuperamos las construcciones de Vorobev y Vallejo de estructuras de Dirac canónicas, para acciones de grupos compactos y conexos en el contexto de foliaciones de Poisson, aplicando el método de promedios a conexiones de Ehresmann-Poisson con curvatura Hamiltoniana, (Capítulo 3).

Nuestro enfoque y los resultados principales de esta tesis, se presentan a continuación.

1. Métodos de promedio para campos tensoriales con respecto a acciones de grupos compacto y acciones propias.

Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie compacto G en una variedad suave M . El *promedio* de un campo tensorial F en M , es definido como

$$\langle F \rangle_G = \int_G \Phi_g^* F \, dg,$$

donde dg es la medida de Haar normalizada en G . Para cada $\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^1)$ definimos el tensor

$$\delta^G(\lambda_a) := \int_D \left(\int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* \lambda_a \, dt \right) \exp^* \mu, \quad (1)$$

donde $\mu = dg$ y $a \in \mathfrak{g}$. Podemos notar que la aplicación exponencial de un grupo de Lie compacto es sobreyectivo, pero en general no es inyectivo. En la definición de δ^G , D es un dominio en el álgebra de Lie que es isomorfo al grupo de Lie excepto un conjunto de medida cero, llamado *cut locus* [14], por lo cual tiene sentido integrar sobre D . Definimos el operador $l^G: \mathcal{T}_r^s(M) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathcal{T}_r^s(M))$ como $l^G(F)_a = L_a F$, y mostramos que el operador de promedios satisface la siguiente propiedad.

$$\langle \cdot \rangle_G = \text{Id} + (\delta^G \circ l^G).$$

Por otro lado, en trabajos de Jotz, Ratiu y Śniatycki [6, 12, 13] introdujeron un método de promedios para acciones propias, el cual está basado en el *teorema del tubo* [15]. Éste nos permite definir un campo tensorial invariante con respecto a la acción del grupo, en un abierto de la variedad, el cual está dado como sigue.

Suponemos que la acción de un grupo de Lie G en una variedad suave M es propia. El teorema del tubo, define, para cada punto $p \in M$, un difeomorfismo equivariante

$$\tau: G \times_H B \rightarrow U,$$

donde U es un abierto de la órbita de p , B es un espacio vectorial, H es el grupo de isotropía de p y $G \times_H B$ cierto producto torcido. Definimos el promedio G -invariante de un campo tensorial F , en $G \times_H B$, como

$$F^G([g, b]) := \Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_H \Phi_h^* F \, dh \right) ([g, b]),$$

donde dh es la medida de Haar normalizada de H . Finalmente, para cada campo tensorial T definido en el abierto U ,

$$\tau_* \left((\tau^* T)^G \right),$$

es un campo tensorial invariante en este abierto.

Cabe mencionar que la acción de un grupo de Lie compacto en una variedad suave, es también propia. En el caso que el grupo de Lie sea compacto, el promedio para grupos compactos y el promedio para acciones propias en general no coinciden. Este punto se hace evidente en el Ejemplo 4.2.5.

2. Construcción de estructuras de Dirac invariantes respecto a grupos compactos. Condición de compatibilidad y transformaciones gauge.

En una variedad de Dirac (M, D) , consideremos su foliación pre-simpléctica asociada (\mathcal{S}, ω) . Decimos que la acción de un grupo de Lie compacto y conexo G en una variedad suave M , es *compatible* [9] con D , si cada hoja pre-simpléctica $S \in \mathcal{S}$ satisface las siguientes propiedades.

1. S es G -invariante.
2. Existe una aplicación \mathbb{R} -lineal $\rho \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^1(M))$, tal que para todo $a \in \mathfrak{g}$

$$i_{a_M} \omega_S = -i_S^* \rho_a, \quad (2)$$

donde $i: S \rightarrow M$ es la inclusión canónica.

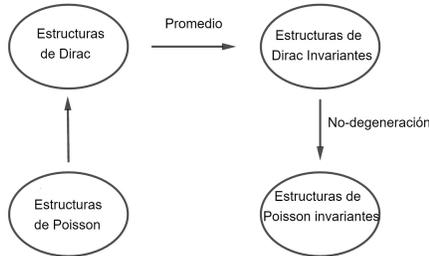
Si la acción de un grupo de Lie compacto y conexo, es compatible con una estructura de Dirac D en M , entonces existe una estructura de Dirac G -invariante \bar{D} que se relaciona con D por la transformación gauge

$$\bar{D} = \{(X, \alpha + i_X d\theta) \mid (X, \alpha) \in D\}$$

para cierta 1-forma θ en M que esta definida en terminos de la acción, el morfismo ρ y el operador δ^G de la fórmula (1). Como aplicación de este hecho, se prueba lo siguiente: Si (M, Π) es una variedad de Poisson con una acción compatible de un grupo de Lie compacto y conexo. Entonces bajo ciertas hipotesis de no-degeneración, existe una estructura de Poisson invariante $\bar{\Pi}$ en M , que se relaciona con Π por la *transformación de gauge*

$$\bar{\Pi}^\sharp = \Pi^\sharp \circ \left(\text{Id} + (d\theta)^\flat \circ \Pi^\sharp \right)^{-1}.$$

Ésta construcción la podemos representar mediante el siguiente diagrama.



Para ilustración, mostramos que las estructuras de Poisson Π en \mathbb{R}^3 que son compatibles con la acción de S^1 en \mathbb{R}^3 , dada por rotaciones alrededor del eje coordenado $(0, 0, z)$, están caracterizadas por la ecuación $\alpha = i_{\Pi}\Omega$, donde Ω es la forma de volumen Euclideana en \mathbb{R}^3 y α es una 1-forma definida por

$$\alpha = f(xdx + ydy + Idz)$$

donde $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ es una función que no se anula, e I es una integral primera del generador infinitesimal de la acción.

3. Estructuras de Poisson invariantes alrededor de hojas simplécticas.

Sean (M, \mathcal{F}) una variedad foliada, y G un grupo de Lie compacto y conexo actuando en M , que preserve la foliación \mathcal{F} . Sea Π una estructura de Poisson en M , y fijemos una hoja simpléctica S de la estructura. Consideremos las siguientes propiedades:

1. Π es de \mathcal{F} -acoplamiento [16] en M , esto es, el haz tangente a M admite la siguiente descomposición

$$TM = \Pi^{\sharp}((T\mathcal{F})^{\circ}) \oplus T\mathcal{F}.$$

2. Cada generador infinitesimal de la G -acción es de la forma

$$a_M = \Pi_{0,2}^{\sharp}(\mu_a)$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$ y un morfismo $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$.

3. La foliación es transversal a la hoja simpléctica, esto es que

$$T_S M = TS \oplus T_S \mathcal{F}.$$

Si se cumplen las propiedades (1) – (3), mostramos que existen un entorno invariante N de S , y una estructura de Poisson $\bar{\Pi}$ definida en N , que tiene a S como hoja simpléctica, y que es invariante con respecto a la acción del grupo. Este resultado se puede usar en el contexto semilocal de formas normales equivariantes para estructuras de Poisson [9], [17].

4. Conexión de Hannay-Berry generalizada.

En esta parte se presenta un enfoque uniforme del método de promedios para conexiones de Ehresmann en variedades foliadas. Además del interés teórico, los resultados obtenidos aquí, pueden ser útiles en el estudio de formas normales para sistemas Hamiltonianos de tipo adiabático [18].

Una *conexión de Ehresmann* $\gamma: TM \rightarrow TM$ en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , es caracterizada por las siguientes propiedades

$$\gamma \circ \gamma = \gamma \quad \text{y} \quad \gamma(TM) = \mathbb{V},$$

donde $\mathbb{V} = T\mathcal{F}$. Cada conexión de Ehresmann tiene asociada una distribución horizontal \mathbb{H}^{γ} , que es complementaria a la distribución \mathbb{V} . Denotamos por (M, \mathcal{F}, P) a una *variedad*

foliada de Poisson, esto es, una variedad foliada equipada con un bivector de Poisson $P \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{V})$. Una conexión γ se dice de Poisson en (M, \mathcal{F}, P) , si cada campo horizontal proyectable es de Poisson con respecto a P . Se muestra que dada una conexión de Ehresmann-Poisson γ en (M, \mathcal{F}, P) , la conexión promediada $\langle \gamma \rangle_G$ es también de Poisson y es llamada conexión de *Hannay-Berry generalizada*, en honor al trabajo de Marsden, Ratiu y Montgomery [19].

Supongamos que la acción de un grupo de Lie G en una variedad foliada de Poisson (M, \mathcal{F}, P) , admite un *operador de pre-momento* en el sentido de Ginzburg [20], esto es que existe $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$, tal que

$$a_M = \Pi^\sharp(\mu_a) \quad \text{y} \quad i_{P^\sharp(\alpha)} d\mu_a = 0,$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$ y $\alpha \in \Omega^1(M)$. Se dice que el operador de momento μ satisface la *condición adiabática* (respecto a una conexión γ) si para toda $a \in \mathfrak{g}$

$$\langle i_{(\text{Id}-\gamma)(X)} \mu_a \rangle^G = 0 \quad \forall X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM).$$

Si la G -acción es *canónica con momentum map* \mathbb{J} , entonces la condición adiabática se escribe como

$$\langle d_{1,0} \mathbb{J}_a \rangle^G = 0$$

y se recupera la condición adiabática para acciones Hamiltonianas en haces fibrados de Poisson [19].

Tenemos la siguiente versión generalizada de la definición de conexiones de tipo Hannay-Berry que satisfacen la condición adiabática. Dada una conexión γ en (M, \mathcal{F}, P) , supongamos que existe una conexión $\tilde{\gamma}$ tal que

- a) $i_{(\text{Id}-\tilde{\gamma})(X)} \mu_a = 0$, para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$.
- b) $\Xi(X) = P^\sharp d(Q(X))$, para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$, donde $\Xi := \gamma - \tilde{\gamma}$ y Q es una 1-forma horizontal.
- c) $\langle Q(X) \rangle_G$ es una función de Casimir.

Entonces $\tilde{\gamma}$ es única. Más aún, una conexión $\tilde{\gamma}$ que satisface (a)-(c) existe si y sólo si el operador de pre-momento μ se puede fijar tal que cumple la así llamada condición adiabática (respecto a γ). En este caso la conexión de Hannay-Berry generalizada es la única conexión que satisface las condiciones (a)-(c).

Estamos interesados en el conjunto $\text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ de conexiones de Poisson γ en (M, \mathcal{F}, P) , tal que la curvatura Curv^γ de γ satisface

$$\text{Curv}^\gamma(X, Y) = -P^\sharp d(\sigma(X, Y)),$$

para todo $X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, y donde σ es una 2-forma horizontal llamada, *forma Hamiltoniana de curvatura*. Mostraremos que el operador de promedios preserva el conjunto $\text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$, esto es que

$$\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P) \implies \langle \gamma \rangle_G \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P),$$

con forma Hamiltoniana de curvatura

$$\tilde{\sigma} = \sigma - d_{1,0}Q - \frac{1}{2}\{Q \wedge Q\}_P.$$

5. Estructuras de Dirac invariantes en variedades foliadas.

Aquí, vamos a aplicar los resultados del ítem 4 para desarrollar más el método de promedios para estructuras de Dirac [9] con propiedades definidas.

Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson. Cada conexión $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ con forma Hamiltoniana de curvatura σ , tiene asociada una distribución en el haz de Pontryagin, dada por

$$D^{\gamma, \sigma} := \{(X + P^\sharp(\alpha), \alpha - i_X \sigma) \mid X \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma), \alpha \in \Gamma((\mathbb{H}^\gamma)^0)\}.$$

Si suponemos que $d_{1,0}^\gamma \sigma = 0$, entonces $D^{\gamma, \sigma}$ es una estructura de Dirac en M . La forma Hamiltoniana de curvatura $\tilde{\sigma}$ asociada a la conexión promediada $\bar{\gamma} := \langle \gamma \rangle_G$, satisface que $d_{1,0}^{\bar{\gamma}} \tilde{\sigma} = 0$ y la estructura de Dirac asociada $D^{\bar{\gamma}, \tilde{\sigma}}$ es G -invariante.

Sea $\mathcal{C}^k \equiv \mathcal{C}^k(M, \mathcal{F}, P, \gamma)$ el conjunto de k -formas γ -horizontales β tal que

$$\beta(X_1, \dots, X_k) \in \text{Casim}(M, P),$$

para todo $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, con $i = 1, \dots, k$. Cada forma Hamiltoniana de curvatura es definida salvo transformaciones de la forma

$$\sigma \mapsto \sigma + C$$

donde $C \in \mathcal{C}^2$. Dada una conexión de Ehresmann $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$, podemos asociar al conjunto $(M, \mathcal{F}, P, \gamma)$, un complejo de cocadena llamado *complejo de De-Rham-Casimir* [21]

$$\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k, \bar{d}^\gamma \right),$$

donde el operador $\bar{d}^\gamma: \mathcal{C}^k \rightarrow \mathcal{C}^{k+1}$, es la restricción del diferencial $d_{1,0}^\gamma$ al conjunto \mathcal{C}^k .

El resultado principal es lo siguiente: se construye una familia de estructuras de Dirac invariantes de la forma $D^{\bar{\gamma}, \tilde{\sigma} + C}$ donde $C \in \mathcal{C}^2$ es un 2-cociclo del complejo de De-Rham-Casimir.

6. Estructuras de Dirac invariantes bajo acciones propias de grupos de Lie.

Sean G un grupo de Lie conexo actuando propiamente en una variedad suave M . Sea p un punto fijo en M . Del teorema del tubo, tomemos el producto torcido $G \times_H B$, donde H es el grupo de isotropía de p . Sea D una estructura de Dirac en $G \times_H B$ con foliación pre-simpléctica (S, ω_S) . Decimos que la acción en $G \times_H B$ es *compatible* con la estructura de Dirac D , si para cada hoja pre-simpléctica (S, ω_S) se cumple que

1. S es H -invariante.

2. Existe una aplicación \mathbb{R} -lineal $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \Omega^1(G \times_H B)$, tal que para cada $a \in \mathfrak{h}$

$$i_{a_{G \times_H B}} \omega_S = -i_S^* \rho_a$$

donde $i_S: S \rightarrow G \times_H B$ es la inclusión canónica.

Nuestra observación es: si la acción es compatible con D , entonces la estructura de Dirac en $G \times_H B$

$$D_{[g,b]}^{\omega_S^G} = \{(X, -i_X \omega_S^G([g,b])) \mid X \in T_{[g,b]} S\}$$

asociada a la forma pre-simpléctica ω_S^G , es G -invariante.

El presente trabajo viene estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2, definimos el método de promedios para grupos de Lie compactos. En el Teorema 2.2.5, construimos estructuras de Dirac que es invariante con respecto a una clase de acciones de grupos de Lie compactos, que son compatibles con la estructura. En particular, en el Teorema 2.2.7, vamos a presentar la construcción de estructuras de Poisson invariantes. Como una aplicación, en el Teorema 2.3.2, daremos condiciones necesarias para construir estructuras de Poisson invariantes alrededor de hojas simplécticas.

En el capítulo 3, presentamos la noción de conexiones de Ehresmann en variedades foliadas, así como la construcción de conexiones de Ehresmann invariantes. En el Teorema 3.3.4, se muestra que, bajo hipótesis adecuadas, una conexión de Ehresmann y su promedio difieren por campos Hamiltonianos. En el Teorema 3.3.9 vamos a presentar una caracterización de las conexiones de Hannay-Berry generalizadas. En el Teorema 3.4.3, damos condiciones suficientes donde el operador de promedio preserve el conjunto de conexiones de Ehresmann-Poisson con curvatura Hamiltoniana. Luego, en el Teorema 3.5.4, construimos estructuras de Dirac invariantes en variedades foliadas. Más aún, en el Teorema 3.5.6, construimos una familia de estructuras de Dirac invariantes, que están parametrizadas por cocíclos del complejo de De-Rham-Casimir.

En el capítulo 4, vamos a introducir ciertas propiedades de acciones propias de grupos de Lie. En el Teorema 4.1.13 vamos a dar una prueba formal del teorema del tubo. Propiedades del operador de promedios para acciones propias de grupos de Lie, serán presentadas en la Proposición 4.2.3. En el Ejemplo 4.2.5, presentaremos un contraejemplo donde sea evidente que el promedio clásico y el promedio para acciones propias no coinciden, cuando el grupo de Lie es compacto. Finalmente, en los Teoremas 4.3.2 y 4.3.4, presentamos un procedimiento para construir estructuras de Dirac y Poisson, que son invariantes bajo la acción propia de grupos de Lie (no necesariamente compactos), las cuales están definidas en vecindades en la variedad.

Capítulo 1

Estructuras de Dirac

Las estructuras de Dirac, introducidas en el año de 1988 por Courant y Weinstein, generalizan dos enfoques en la mecánica Hamiltoniana, estructuras simplécticas y estructuras de Poisson. Definimos una estructura de Dirac en una variedad como un subhaz del haz de Pontryagin, que es Lagrangiano con respecto al pairing natural y cumple con cierta condición de “integrabilidad”.

En la sección 1.1, introduciremos la noción de distribuciones generalizadas en una variedad suave, así como criterios de integración y foliaciones singulares asociadas a estas. En la sección 1.2, presentaremos el concepto de estructura de Dirac en un contexto algebraico [5]. En base a ello, mostraremos que las estructuras de Dirac son álgebras de Lie con el corchete de Courant. En la sección 1.3, presentaremos la definición de estructuras de Dirac en variedades diferenciales. Además, mostraremos que existe una correspondencia uno a uno entre estructuras Dirac y foliaciones pre-simplécticas [10]. Finalmente, en la sección 1.4, presentaremos la transformación de gauge de una estructura de Dirac, y daremos condiciones necesarias y suficientes donde la transformación de gauge de una estructura de Dirac, pueda ser vista como la gráfica de una estructura de Poisson.

1.1. Distribuciones generalizadas

En esta sección vamos a presentar la noción de distribuciones generalizadas en variedades suaves. Vamos a dar algunos resultados importantes sobre integrabilidad de distribuciones generalizadas y foliaciones singulares.

Sea M una variedad diferencial conexa y supongamos que todas las variedades y aplicaciones entre variedades diferenciales son suaves.

Definición 1.1.1. Una *distribución generalizada* en M , es un conjunto $\Delta \subset TM$ tal que Δ_p es un subespacio de T_pM , para todo $p \in M$.

En particular, podemos definir una función

$$p \in M \longmapsto \Delta_p \subset T_pM.$$

El número $\dim(\Delta_p)$ es llamado el *rango* de la distribución Δ en el punto $p \in M$ y es denotado por $\text{rk}_p(\Delta)$.

Decimos que un punto $p \in M$ es *regular* si existe un abierto U que contiene a p , tal que el rango es constante en todo punto de U . Por otro lado, $p \in M$ es un punto *singular* si para todo abierto U , existe $q \in U$ tal que $\text{rk}_q(\Delta) \neq \text{rk}_p(\Delta)$. Decimos que Δ es una *distribución regular* si todos los puntos en M son puntos regulares.

Ejemplo 1.1.2. Sean $M = \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\Delta_{(x,y)} := \begin{cases} \text{gen}\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\} & \text{si } x \geq 0, \\ \text{gen}\{\frac{\partial}{\partial y}\} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

es una distribución generalizada. Podemos notar, que la distribución $\Delta_{(x,y)}$ tiene dimensión 2 en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, y dimensión 1 en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$. ∇

Definición 1.1.3. Se dice que una distribución generalizada Δ en M es *suave*, si para cada punto $p \in M$ existen un abierto $U \subset M$ que contiene a p y una familia de secciones locales s_1, \dots, s_k de Δ en U , tal que para cada $q \in U$

$$\Delta_q = \text{gen}\{s_1(q), \dots, s_k(q)\}.$$

Ejemplo 1.1.4. Sean $M = \mathbb{R}^2$ Definamos la función

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

y consideremos los campos vectoriales

$$X_1(x,y) := \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad X_2(x,y) := f(x) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Entonces $\Delta_{(x,y)} := \text{gen}\{X_1(x,y), X_2(x,y)\}$ es una distribución generalizada suave.

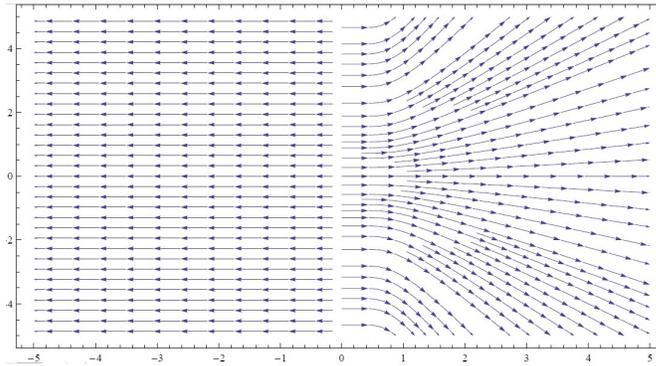


Figura 1.1: Gráfica de la distribución del ejemplo 1.1.4

Notemos que esta distribución Δ satisface que $\dim(\Delta_{(x,y)}) = 2$ en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, y $\dim(\Delta_{(x,y)}) = 1$ en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$. ∇

Podemos dar una definición equivalente de suavidad de una distribución generalizada de la siguiente manera.

Proposición 1.1.5. *Una distribución generalizada Δ en M es suave si y sólo si, para cada punto $p \in M$ y cada $v \in \Delta_p$, existe alguna sección local s de Δ tal que $s(p) = v$.*

Demostración. Supongamos que Δ es una distribución generalizada suave. Sea $p \in M$, entonces existen un abierto U que contiene a p y secciones locales s_1, \dots, s_k en U tales que para cada $q \in U$

$$\Delta_q = \text{gen}\{s_1(q), \dots, s_k(q)\}.$$

Lo cual implica que, para cada $v \in \Delta_p$, se tiene que $v = \sum_{i=1}^k a_i s_i(p)$, y entonces

$$s := \sum_{i=1}^k a_i s_i,$$

es una sección suave en U y satisface que $s(p) = v$.

Recíprocamente, fijemos $p \in M$ y escogemos una base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_k\}$ de Δ_p . Para cada $e_i \in \mathcal{B}$ existe una sección local suave s_i de Δ , tal que $s_i(p) = e_i$, para cada $i = 1, \dots, k$. Tomemos el abierto U como la intersección de todos los dominios de s_j para $j = 1, \dots, k$. Notemos que para cada $q \in U$, el conjunto $\{s_1(q), \dots, s_k(q)\}$ es linealmente independiente, y todo vector $v \in \Delta_q$ se puede escribir como

$$v = \sum_{i=1}^k a_i s_i(q),$$

de esta forma $\Delta_q = \text{gen}\{s_1(q), \dots, s_k(q)\}$. □

Ejemplo 1.1.6. La distribución definida en el Ejemplo 1.1.2, no es suave. En efecto, sean $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (1, 0) \in E_{(0,0)}$. Supongamos que existe una sección suave $X := a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ de Δ , con $a, b \in C^\infty(\text{Dom}(X))$, tal que $X(p) = v$. Entonces tenemos que

$$\begin{cases} a(x, y) = 1, \\ b(x, y) = 0. \end{cases}$$

por lo cual, existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^2$, con $(0, 0) \in V$, tal que $a|_V \neq 0$. En particular si definimos el dominio $V_{(-)} := V \cap \{x < 0\}$, se tiene que, para cada $q \in V_{(-)}$ el campo evaluado $X(q) = a(q) \frac{\partial}{\partial x} + b(q) \frac{\partial}{\partial y}$, cumple que $a(q) \neq 0$.

Por otro lado, para todo $q \in V_{(-)}$, se tiene que $X(q) = c(q) \frac{\partial}{\partial y}$ y entonces $a|_{V_{(-)}} = 0$. Por tanto, Δ no es suave. ▽

Definición 1.1.7. Sea Δ una distribución generalizada suave en M . Se dice que Δ es *finitamente generada* sobre un abierto $U \subset M$, si existe un número finito de secciones locales s_1, \dots, s_k de Δ tales que

$$\Delta_p = \text{gen}\{s_1(p), \dots, s_k(p)\},$$

para todo $p \in U$. En este caso, se dice que s_1, \dots, s_k generan a Δ sobre U . Si además $U = M$, se dice que Δ es *globalmente finitamente generada*.

Observación 1.1.8. En el Apéndice A, se muestra que toda distribución generalizada suave es globalmente finitamente generada. Más aún, existen a lo mas $\text{rk}(TM)(\dim(M) + 1) \max(\text{rk}(\Delta))$ secciones globales que generan a Δ en cada punto de M .

1.1.1. Integrabilidad de distribuciones generalizadas

Sea M una variedad suave y denotemos por $\mathfrak{X}_{loc}(M)$ el conjunto de campos vectoriales definidos en algún conjunto abierto de M . Para cada campo X , denotamos por $\text{Dom}(X)$ a su dominio de definición.

Para cada $p \in \text{Dom}(X)$, sea I_p el intervalo máximo donde el campo X tiene solución en el punto p y denotemos por $D_t^X = \{p \in \text{Dom}(X) \mid t \in I_p\}$. Sea $\text{Fl}_X^t: D_t^X \rightarrow M$ el flujo del campo vectorial X , el cual es un difeomorfismo sobre su imagen.

Definición 1.1.9. Decimos que una distribución generalizada suave Δ es *integrable* si para cada $p \in M$, existe una subvariedad conexa inmersa $i_S: S \hookrightarrow M$, donde i_S es la inclusión de S en M y $p \in S$, que satisface la condición

$$T_q S = \Delta_q, \quad (1.1)$$

para todo $q \in S$. La subvariedad S es llamada *subvariedad integral maximal* de Δ que pasa por p .

Definición 1.1.10. Una distribución generalizada Δ es *involutiva* si para todo $X \in \Gamma(\Delta)$, se cumple que

$$(d_p \text{Fl}_X^t) \Delta_p = \Delta_{\text{Fl}_X^t(p)},$$

para todo $p \in D_t^X$ y para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.11. Una distribución generalizada Δ es *algebraicamente involutivo* si para todo $X, Y \in \Gamma(\Delta)$, se cumple

$$[X, Y](p) \in \Gamma(\Delta),$$

para todo $p \in \text{Dom}(X) \cap \text{Dom}(Y)$.

Si la distribución es regular, entonces las definiciones 1.1.10 y 1.1.11 coinciden. Además, el siguiente teorema establece un criterio de integrabilidad para distribuciones regulares.

Teorema 1.1.12 (Frobenius). *Una distribución regular suave es integrable si y sólo si es involutiva.*

Demostración. La prueba de este resultado la podemos encontrar en [22, Teo. 8.2]. \square

Por otro lado, en caso singular, la distribución es algebraicamente involutivo si ésta es involutiva. El siguiente ejemplo presenta una distribución que es algebraicamente involutiva pero no es integrable.

Ejemplo 1.1.13. Consideremos los campos vectoriales en \mathbb{R}^2

$$X_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad X_2(x, y) = f(x) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ esta definida como

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La distribución suave $\Delta_{(x,y)} = \text{gen}\{X_1(x, y), X_2(x, y)\}$ es algebraicamente involutivo pero no es integrable. En efecto, supongamos que S es una subvariedad integral que pasa por $(0, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces existe un abierto V donde S esta definido. Sin embargo, la intersección $V_- \cap S$ es de dimensión 1 y $V_+ \cap S$ es de dimensión 2, donde V_- y V_+ son la parte negativa y positiva del abierto V , respectivamente. Por lo cual la distribución generalizada $\Delta_{(x,y)}$ no puede ser integrable. ∇

El siguiente teorema presenta un criterio de integrabilidad para distribuciones generalizadas.

Teorema 1.1.14 (Stefan-Sussmann). *Sea Δ una distribución generalizada suave. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. Δ es integrable.
2. Existe una familia de campos locales $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{loc}(M)$ con las siguientes propiedades.
 - \mathcal{V} es definido en todas partes, es decir, para todo $p \in M$ existe $X \in \mathcal{V}$ tal que $p \in \text{Dom}(X)$.
 - Δ es generada por \mathcal{V} .
 - Δ es \mathcal{V} -invariante, es decir, para todo $X \in \mathcal{V}$ se cumple que

$$(d_p \text{Fl}_X^t) \Delta_p = \Delta_{\text{Fl}_X^t(p)},$$

para todo $p \in D_t^X$ y para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que Δ es integrable y definamos $\mathcal{V} := \Gamma(\Delta)$, notemos que \mathcal{V} es definida en todas partes. Como Δ es suave, es decir, para toda $p \in M$ y $v \in \Delta_p$ existe $X \in \Gamma(\Delta)$ tal que $p \in \text{Dom}(X)$ y $X_p = v$, entonces $\Delta_p = \text{gen}\{X_p \mid X \in \Gamma(\Delta)\}$, lo cual implica que Δ es generada por $\Gamma(\Delta)$.

Finalmente, mostremos que Δ es \mathcal{V} -invariante. Fijemos un campo $X \in \Gamma(\Delta)$, un punto $p^0 \in \text{Dom}(X)$ y una subvariedad integral $i: S \rightarrow M$ en p^0 . Entonces para todo $p \in S$ se tiene que

$$d_p i(T_m S) = \Delta_{i(p)}. \quad (1.2)$$

Entonces existe un campo vectorial $\bar{X} \in \mathfrak{X}_{loc}(S)$, con $\text{Dom}(X) = M$ tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ \uparrow i & & \uparrow \text{di} \\ S & \xrightarrow{\bar{X}} & TS \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\text{Fl}_X^t} & M \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ S & \xrightarrow{\text{Fl}_{\bar{X}}^t} & S \end{array}$$

es decir

$$X \circ i = \text{di} \circ \bar{X}, \quad (1.3)$$

$$\text{Fl}_X^t \circ i = i \circ \text{Fl}_{\bar{X}}^t. \quad (1.4)$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones (1.2), (1.4) y la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} (d_{i(p)} \text{Fl}_X^t) \Delta_{i(p)} &= d_{i(p)} \text{Fl}_X^t (d_p i (T_p S)) = d_p (\text{Fl}_X^t \circ i) (T_p S), \\ &= d_p (i \circ \text{Fl}_{\bar{X}}^t) (T_p S) = d_{\text{Fl}_{\bar{X}}^t(p)} i (d_p \text{Fl}_{\bar{X}}^t (T_p S)), \\ &= d_{\text{Fl}_{\bar{X}}^t(p)} i (T_{\text{Fl}_{\bar{X}}^t(p)} S) = \Delta_{i \circ \text{Fl}_{\bar{X}}^t(p)} = \Delta_{\text{Fl}_X^t \circ i(p)}, \end{aligned}$$

para todo $p \in S$.

Recíprocamente, supongamos que existe $\mathcal{V} \subset \Gamma(\Delta)$ que satisface las hipótesis del teorema. Fijemos $p_0 \in M$, mostremos que existe una variedad integral S que pasa por p_0 . Fijemos una base $v_1, \dots, v_r \in \Delta_{p_0}$, con $r = \dim(\Delta_{p_0})$,

Como Δ es generado por \mathcal{V} , existen $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{V}$ tal que $X_1(p_0) = v_1, \dots, X_r(p_0) = v_r$ y cuyos dominios es $\text{Dom}(X_1), \dots, \text{Dom}(X_r) = V$. Podemos definir una aplicación

$$t := (t_1, \dots, t_r) \mapsto f(t) := \text{Fl}_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{X_r}^{t_r} (p_0) \in M.$$

Por el teorema de “Flow Box” [23, Teo. 2.1.8] existe una bola $B \in \text{Dom}(X)$ de radio $\delta > 0$ tal que Fl_X^t es C^∞ y el Jacobiano $\frac{D \text{Fl}_X^t}{Dt}(p_0)$ tiene rango igual a

$$\left. \frac{D \text{Fl}_X^t}{Dt}(p_0) \right|_{t=0} = r.$$

Entonces por el teorema del rango constante, f es una inmersión y localmente $f(B)$ es una subvariedad encaje en M .

Definimos $S := f(B)$. El espacio tangente a S es

$$T_{f(t)} S = \text{gen} \left\{ \frac{df}{dt_1}(t), \dots, \frac{df}{dt_r}(t) \right\},$$

y para cada $i = 1, \dots, r$ se tiene que $\frac{df}{dt_i} \in E_{f(t)}$.

Finalmente, $\Delta_{f(t)} = \Delta_p$. En efecto, si definimos

$$Z^i := (\text{Fl}_{X_1}^{-t_1})^* \circ \dots \circ (\text{Fl}_{X_{i-1}}^{-t_{i-1}})^*$$

para cada $i = 1, \dots, r$, entonces $f(t)$ es una curva integral de Z^i . Entonces para todo $i = 1, \dots, r$

$$f(t) = \text{Fl}_{Z^i}^{t_i}(f(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_r)).$$

Si $i = 1$, entonces $f(t) = \text{Fl}_{Z^1}^{t_1}(f(0, t_2, \dots, t_r))$ y así

$$\dim(\Delta_{f(t)}) = \dim(\Delta_{f(0, t_2, \dots, t_r)}).$$

Inductivamente tenemos

$$\dim(\Delta_{f(t)}) = \dim(\Delta_{f(0, t_2, \dots, t_r)}) = \dots = \dim(\Delta_{f(0, \dots, 0)}) = \dim(\Delta_p).$$

□

1.1.2. Foliaciones generalizadas

La unión de todas las subvariedades integrales de una distribución generalizada involutiva Δ , en una variedad suave M , forma una partición de la variedad en subvariedades que localmente, lucen como rebanadas en una carta coordenada de la variedad.

Definición 1.1.15 (Foliación generalizada). Sea M una variedad suave de dimensión m . Una foliación generalizada (singular) es una partición ajena de la variedad

$$M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{A}_\alpha,$$

por subconjuntos conexos $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ en M , tal que, para cada $p \in M$ existe una carta $\varphi: U \rightarrow W$ con $W \subset \mathbb{R}^m$ y $p \in U$, que satisface la siguiente propiedad: Para cada \mathcal{A}_α existe un número $k \leq m$, no necesariamente constante, y un conjunto numerable $\Sigma_\alpha \subset \mathbb{R}^{m-k}$ tal que

$$\varphi(\mathcal{A}_\alpha \cap U) = \{(x^1, \dots, x^m) \in \varphi(U) \mid (x^1, \dots, x^m) \in \Sigma_\alpha\}.$$

Cada $\mathcal{A}_\alpha \subset M$ es llamada *hoja de foliación*, los elementos de $\varphi(\mathcal{A}_\alpha \cap U)$ son llamados *slices* y k es la dimensión de \mathcal{A}_α .

Si el número k es constante, entonces la foliación es llamada *foliación regular*. Además, cada hoja de foliación es una subvariedad inicial.

Ejemplo 1.1.16. 1. La colección de todos los subespacios de \mathbb{R}^n , paralelos a \mathbb{R}^k , es una foliación regular de dimensión k en \mathbb{R}^n .

2. El conjunto de todas las esferas en \mathbb{R}^n centradas en $\vec{0}$, junto con el $\vec{0}$, es una foliación generalizada de \mathbb{R}^n . Las esferas son hojas de dimensión $n - 1$ y el origen es una hoja de dimensión 0.

3. Si M y N son variedades suaves conexas, el conjunto de subespacios de la forma $\{q\} \times N$ con $q \in M$, es una foliación de $M \times N$, cuyas hojas son difeomorfas a N . Por ejemplo, la colección de todos los círculos de la forma $\mathbb{S}^1 \times \{q\} \in \mathbb{T}^2$, para cada $q \in \mathbb{S}^1$, es una foliación del toro \mathbb{T}^2 .

4. En \mathbb{R}^3 . Sea \mathbb{S}_r^1 el círculo en el plano xy de radio r . El conjunto $\{\mathbb{S}_r^1 \times \mathbb{R}\}_{r>0}$, junto con el eje z , forma una foliación en \mathbb{R}^3 . Los cilindros $\mathbb{S}_r^1 \times \mathbb{R}$ son hojas de dimensión 2 y el eje z es una hoja de dimensión 1.

▽

Para mostrar que cada distribución generalizada que es integrable, tiene asociada una foliación generalizada, es necesario presentar el siguiente lema.

Lema 1.1.17. *Supongamos que Δ es una distribución generalizada integrable en M . Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ la colección de subvariedades integrales conexas de Δ con un punto en comun. Entonces $\bigcup_\alpha S_\alpha$ tiene una única estructura de variedad diferencial que la hace una subvariedad integral conexas de Δ , en la cual S_α es una subvariedad abierta.*

Proposición 1.1.18. *Sea Δ una distribución generalizada integrable en una variedad suave M . El conjunto de todas las subvariedades integrales maximales de Δ definen una foliación generalizada en M .*

Demostración. Para cada $p \in M$, definimos A_p la unión de todas las subvariedades integrales conexas de Δ que contienen a p . Por el Lemma 1.1.17, A_p es una subvariedad integral conexas de Δ que contiene a p , la cual es maximal. Si dos subvariedades A_p y A_q se intersectan, entonces la union es una subvariedad integral que contiene a p y q , y como estas son maximales se tiene que $A_p = A_q$. Lo cual implica que las subvariedades A_p son ajenas o iguales.

Si (U, φ) es una carta coordenada de Δ , entonces $A_p \cup U$ es unión numerable de slices (Estructura local de variedades integrales [24, Proposición 19.12]). Para cada slice S , si $A_p \cap S$ no es vacío o todo S entonces $A_p \cup S$ es una subvariedad integral conexas contenida en A_p , lo cual contradice que A_p es maximal. Por lo tanto $A_p \cap U$ es la union numerable de slices, por lo cual la colección $\{A_p \mid p \in M\}$ es una foliación generalizada en M . □

1.2. Estructuras de Dirac sobre complejos

En esta sección daremos la definición de estructura de Dirac en el contexto de complejos diferenciales sobre álgebras de Lie. Además, mostraremos que una estructura de Dirac forma un álgebra de Lie con respecto al *corchete de Courant*.

Se dice que un espacio vectorial \mathbb{Z} -graduado es un espacio vectorial V , el cual se puede descomponer como la suma directa

$$V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k,$$

donde cada V_k es un espacio vectorial. Por otro lado, un operador lineal entre dos espacio vectoriales \mathbb{Z} -graduados $f: V \rightarrow W$ se dice ser un operador lineal graduado si

$$f(V_k) \subset W_{k+l},$$

para todo $l \in \mathbb{Z}$. En este caso, se dice que f es de grado l .

Definición 1.2.1. Un *complejo diferencial* es un par (Ω, d) donde

$$\Omega = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k,$$

es un \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{Z} -graduado y $d: \Omega \rightarrow \Omega$ es un operador lineal de grado 1 tal que

$$d^2 = 0.$$

Definición 1.2.2. Sea $(A, [\cdot, \cdot])$ un \mathbb{R} -álgebra de Lie. Decimos que un complejo diferencial (Ω, d) es un *complejo sobre el álgebra* $(A, [\cdot, \cdot])$ o *A-complejo* si existe un morfismo $i: A \times \Omega \rightarrow \Omega$ tal que, para cada $a \in A$ el operador

$$\begin{aligned} i_a: \Omega &\longrightarrow \Omega \\ i_a(\eta) &\longmapsto i(a, \eta) \end{aligned}$$

es lineal, de grado -1 y satisface

1. $i_a i_b + i_b i_a = 0$.
2. $i_{[a, b]} = [d i_a + i_a d, i_b]$.

El operador $i: A \times \Omega \rightarrow \Omega$ nos permite definir un pairing entre Ω^1 y A como

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \Omega^1 \times A &\longrightarrow A, \\ (\eta, a) &\longmapsto i_a \eta. \end{aligned}$$

En general, si $\omega \in \Omega^k$ entonces para todo $a_1, \dots, a_k \in A$ se define

$$\omega(a_1, \dots, a_k) = i_{a_k} \cdots i_{a_1} \omega.$$

Definición 1.2.3. Sea (Ω, d) un A-complejo. Para cada $a \in A$ definimos la *derivada de Lie* a lo largo de a , como el endomorfismo de Ω de grado cero

$$L_a := d i_a + i_a d.$$

Este operador se puede extender al álgebra A definiendo

$$L_a b := [a, b],$$

para todo $b \in A$.

Proposición 1.2.4. Para todo $a, b \in A$ y $\eta \in \Omega^1$, el operador derivada de Lie, satisface las siguientes propiedades:

1. $[d, L_a] = 0$.
2. $[L_a, L_b] = L_{[a, b]}$.

$$3. \langle L_a \eta, b \rangle + \langle \eta, L_a b \rangle = L_a \langle \eta, b \rangle.$$

Demostración. Sean $a, b \in A$ y $\eta \in \Omega^1$.

1. De la identidad de Jacobi para el corchete de endomorfismos se tiene que

$$[L_a, d] = [[i_a, d], d] = [i_a, [d, d]] + [d, [i_a, d]] = [-L_a, d]$$

lo cual sucede si y sólo si $[L_a, d] = 0$.

2. Por la identidad de Jacobi, el inciso 1 y la identidad $[L_a, i_b] = i_{[a, b]}$, se tiene que

$$[L_a, L_b] = [L_a, [i_b, d]] = [[L_a, i_b], d] + [i_b, [L_a, d]] = [i_{[a, b]}, d] = L_{[a, b]}.$$

3. Tenemos la siguiente serie de igualdades

$$\begin{aligned} \langle L_a \eta, b \rangle + \langle \eta, L_a b \rangle &= i_a \eta + i_{[a, b]} \eta, \\ &= i_b d i_a \eta + i_b i_a d \eta + [d i_a + i_a d, i_b] \eta, \\ &= i_b d i_a \eta + i_b i_a d \eta + d i_a i_b \eta + i_a d i_b \eta \\ &\quad - i_b d i_a \eta - i_b i_a, d \eta \\ &= i_a d i_b \eta + d i_a i_b \eta + d i_a i_b \eta = L_a i_b \eta = L_a \langle \eta, b \rangle. \end{aligned}$$

□

Sea (Ω, d) un A -complejo. Podemos definir una forma bilineal simétrica canónica en $A \times \Omega^1$ como

$$\begin{aligned} \ll \cdot, \cdot \gg: A \oplus \Omega^1 \times A \oplus \Omega^1 &\longrightarrow A, \\ (a_1 \oplus \eta_1, a_2 \oplus \eta_2) &\longmapsto \langle \eta_1, a_2 \rangle + \langle \eta_2, a_1 \rangle. \end{aligned}$$

Entonces, para cualquier subespacio $\mathcal{L} \subset A \oplus \Omega^1$ podemos definir el complemento ortogonal con respecto a $\ll \cdot, \cdot \gg$ como

$$\mathcal{L}^\perp := \{a \oplus \eta \in A \oplus \Omega^1 \mid \ll a \oplus \eta, a' \oplus \eta' \gg = 0, \text{ para todo } a' \oplus \eta' \in A \oplus \Omega^1\}.$$

Definición 1.2.5 (Estructura de Dirac). Sea (Ω, d) un complejo sobre $(A, [\cdot, \cdot])$.

1. Un subespacio $\mathcal{L} \subset A \oplus \Omega^1$ se llama *estructura casi-Dirac* si $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\perp$, en este caso \mathcal{L} es llamado subespacio isotropico maximal o Lagrangiano.

2. Una *estructura de Dirac*, es una estructura casi-Dirac que satisface la siguiente condición

$$\langle L_{a_1} \eta_2, a_3 \rangle + \langle L_{a_2} \eta_3, a_1 \rangle + \langle L_{a_3} \eta_1, a_2 \rangle = 0, \quad (1.5)$$

o equivalentemente

$$i_{a_3} L_{a_1} \eta_2 + i_{a_1} L_{a_2} \eta_3 + i_{a_2} L_{a_3} \eta_1 = 0,$$

La ecuación (1.5) es llamada condición de integrabilidad.

Definición 1.2.6. Dados $a_1 \oplus \eta_1, a_2 \oplus \eta_2 \in A \oplus \Omega^1$ definimos el corchete

$$\llbracket a_1 \oplus \eta_1, a_2 \oplus \eta_2 \rrbracket := [a_1, a_2] \oplus (L_{a_1}\eta_2 - L_{a_2}\eta_1 + \mathrm{d}i_{a_2}\eta_1). \quad (1.6)$$

llamado *corchete de Courant*.

Notemos que el corchete de Courant $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ es \mathbb{R} -bilineal, pero en general no es antisimétrico.

El corchete de Courant nos permite formular el siguiente criterio de integrabilidad para las estructuras casi-Dirac.

Lema 1.2.7. Una estructura casi-Dirac $\mathcal{L} \subset A \oplus \Omega^1$ es Dirac si y sólo si $\llbracket \mathcal{L}, \mathcal{L} \rrbracket \subset \mathcal{L}$.

Demostración. Sean $l_i = a_i \oplus \eta_i$ con $i = 1, 2$ y $l = a \oplus \eta$ elementos en \mathcal{L} . Mostremos que $\ll \llbracket l_1, l_2 \rrbracket, l \gg = 0$, en efecto, como \mathcal{L} es una estructura casi-Dirac tenemos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\perp$ lo cual implica que $\langle l, l_i \rangle = 0$ y entonces $i_{a_i}\eta = -i_a\eta_i$. Luego

$$\begin{aligned} \ll \llbracket l_1, l_2 \rrbracket, l \gg &= \ll [a_1 \oplus \eta_1, a_2 \oplus \eta_2], a \oplus \eta \gg, \\ &= \ll [a_1, a_2] \oplus (i_{a_1}\mathrm{d}\eta_2 - i_{a_2}\mathrm{d}\eta_1 + \mathrm{d}\langle \eta_2, a_1 \rangle), a \oplus \eta \gg, \\ &= \langle i_{a_1}\mathrm{d}\eta_2 - i_{a_2}\mathrm{d}\eta_1 + \mathrm{d}\langle \eta_2, a_1 \rangle, a \rangle + \langle \eta, [a_1, a_2] \rangle, \\ &= \langle L_{a_1}\eta_2, a \rangle - \langle i_{a_2}\mathrm{d}\eta_1, a \rangle + L_{a_1}i_{a_2}\eta - i_{a_2}L_{a_1}\eta, \\ &= i_a L_{a_1}\eta_2 + i_{a_2}i_a\mathrm{d}\eta_1 + i_{a_1}\mathrm{d}i_{a_2}\eta + i_{a_1}i_{a_2}\mathrm{d}\eta + i_{a_2}\mathrm{d}i_a\eta_1, \\ &= \langle L_{a_1}\eta_2, a \rangle + \langle L_a\eta_1, a_2 \rangle + \langle L_{a_2}\eta, a_1 \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si \mathcal{L} es Dirac entonces por la condición de integrabilidad se tiene

$$\ll \llbracket l_1, l_2 \rrbracket, l \gg = \langle L_{a_1}\eta_2, a \rangle + \langle L_a\eta_1, a_2 \rangle + \langle L_{a_2}\eta, a_1 \rangle = 0,$$

de donde se sigue que $\llbracket l_1, l_2 \rrbracket \in \mathcal{L}^\perp$ y entonces $\llbracket l_1, l_2 \rrbracket \in \mathcal{L}$.

Por otro lado, si suponemos que $\llbracket \mathcal{L}, \mathcal{L} \rrbracket \subset \mathcal{L}$ entonces $\ll \llbracket l_1, l_2 \rrbracket, l \gg = 0$, lo cual implica que se cumple la condición de integrabilidad

$$\langle L_{a_1}\eta_2, a \rangle + \langle L_a\eta_1, a_2 \rangle + \langle L_{a_2}\eta, a_1 \rangle = 0,$$

por lo tanto \mathcal{L} es una estructura de Dirac. \square

Queremos probar que el corchete de Courant define una estructura de álgebra de Lie a una estructura de Dirac. Para poder mostrar esto, es necesario introducir una deformación del corchete de Courant que hace de este antisimétrico. Dados $l_1, l_2 \in A \oplus \Omega^1$, definimos el *corchete de Courant deformado* como

$$\llbracket l_1, l_2 \rrbracket_D = \llbracket l_1, l_2 \rrbracket - 0 \oplus \frac{1}{2}\mathrm{d} \ll l_1, l_2 \gg.$$

Notemos que en una \mathcal{L} estructura de Dirac, el corchete de Courant deformado y el corchete de Courant coinciden. Más aún, el corchete de Courant deformado satisface que

$$\mathfrak{S}_{(1,2,3)} \llbracket \llbracket l_1, l_2 \rrbracket_D, l_3 \rrbracket_D = \frac{1}{4} \mathfrak{S}_{(1,2,3)} \llbracket \llbracket l_1, l_2 \rrbracket, l_3 \rrbracket, \quad (1.7)$$

para todo $l_i \in A \oplus \Omega^1$ con $i = 1, 2, 3$.

Teorema 1.2.8. *La restricción de $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ a una estructura de Dirac \mathcal{L} es un corchete de Lie en \mathcal{L} . Es decir, $(\mathcal{L}, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$ es un álgebra de Lie.*

Demostración. Sean $l_i = a_i \oplus \eta_i \in \mathcal{L}$ con $i = 1, 2, 3$. Mostremos primero que el corchete de Courant es bilineal.

$$\begin{aligned} \llbracket l_1 + l_2, l_3 \rrbracket &= \llbracket a_1 + a_2 \oplus \eta_1 + \eta_2, a_3 \oplus \eta_3 \rrbracket, \\ &= [a_1 + a_2, a_3] \oplus (i_{a_1+a_2} d\eta_3 - i_{a_3} d(\eta_1 + \eta_2) + d\langle \eta_3, a_1 + a_2 \rangle), \\ &= [a_1, a_3] + [a_2, a_3] \oplus (i_{a_1} d\eta_3 + i_{a_2} d\eta_3 - i_{a_3} d\eta_1 - i_{a_3} d\eta_2 \\ &\quad + d\langle \eta_3, a_1 \rangle + d\langle \eta_3, a_2 \rangle), \\ &= [a_1, a_3] \oplus (i_{a_1} d\eta_3 - i_{a_3} \eta_1 + d\langle \eta_3, a_1 \rangle) \\ &\quad + [a_2, a_3] \oplus (i_{a_2} d\eta_3 - i_{a_3} d\eta_2 + d\langle \eta_3, a_3 \rangle), \\ &= \llbracket a_1 \oplus \eta_1, a_3 \oplus \eta_3 \rrbracket + \llbracket a_2 \oplus \eta_2, a_3 \oplus \eta_3 \rrbracket, \\ &= \llbracket l_1, l_3 \rrbracket + \llbracket l_2, l_3 \rrbracket. \end{aligned}$$

Ahora mostremos que el corchete de Courant en \mathcal{L} es antisimétrico.

$$\begin{aligned} \llbracket l_1, l_2 \rrbracket + \llbracket l_2, l_1 \rrbracket &= [a_1, a_2] \oplus (i_{a_1} \eta_2 - i_{a_2} \eta_1) + d\langle \eta_2, a_1 \rangle \\ &\quad + [a_2, a_1] \oplus (i_{a_2} \eta_1 - i_{a_1} \eta_2 + d\langle \eta_1, a_2 \rangle), \\ &= [a_1, a_2] + [a_2, a_1] \oplus (i_{a_1} \eta_2 - i_{a_2} \eta_1 + di_{a_1} \eta_2 \\ &\quad + i_{a_2} \eta_1 - i_{a_1} \eta_2 + di_{a_2} \eta_1), \\ &= 0 \oplus (di_{a_1} \eta_2 + di_{a_2} \eta_1) = 0 \oplus 0. \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que el corchete de Courant en \mathcal{L} satisface la identidad de Jacobi. Usando la ecuación (1.7) y el hecho que el corchete de Courant deformado y el corchete de Courant coinciden en \mathcal{L} , se tiene que

$$\mathfrak{S}_{(1,2,3)} \llbracket \llbracket l_1, l_2 \rrbracket, l_3 \rrbracket = \frac{1}{4} \mathfrak{S}_{(1,2,3)} \llbracket \llbracket l_1, l_2 \rrbracket, l_3 \rrbracket,$$

para todo $l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{L}$. Lo cual implica que

$$\mathfrak{S}_{(1,2,3)} \llbracket \llbracket l_1, l_2 \rrbracket, l_3 \rrbracket = 0.$$

□

1.3. Estructuras de Dirac en variedades diferenciables

En esta sección daremos el concepto de estructuras de Dirac en variedades diferenciables, usando los resultados presentados en la Sección 1.2.

Sea M una variedad suave de dimensión m , y sea $A = \mathfrak{X}(M)$ el algebra de campos vectoriales en M , equipado con el corchete de campos usual. Consideremos $\Omega = \bigoplus \Omega^k(M)$ el complejo de formas diferenciales sobre el algebra de Lie $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$, equipado con la diferencial exterior d .

Denotamos por $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$ al haz de Pontryagin y definimos la forma bilineal simétrica canonica en $\mathbb{T}M$ como

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{T}M \times \mathbb{T}M &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ ((X_1, \alpha_1), (X_2, \alpha_2)) &\longmapsto \langle \alpha_1, X_2 \rangle + \langle \alpha_2, X_1 \rangle. \end{aligned}$$

Dados $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(T^*M)$, el corchete de Courant (1.6) se ve como

$$[[X_1, \alpha_1], (X_2, \alpha_2)] := ([X_1, X_2], (L_{X_1}\alpha_2 - L_{X_2}\alpha_1 + di_{X_2}\alpha_1)). \quad (1.8)$$

De la Definición 1.2.5 y del Lema 1.2.7, daremos la noción de estructuras de Dirac para variedades diferenciales suaves.

Definición 1.3.1. Una *estructura de Dirac en M* es una distribución suave D en el haz de Pontryagin $\mathbb{T}M$, que satisface:

1. D es isotropico maximal, es decir, $D_m^\perp = D_m$ para todo $m \in M$.
2. $\Gamma(D)$ es cerrado con respecto al corchete de Courant.

Ejemplo 1.3.2. En \mathbb{R}^3 , consideremos el álgebra de Lie $(\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3), [\cdot, \cdot])$ de campos vectoriales en \mathbb{R}^3 con el corchete de campos vectoriales usual. Entonces el subespacio $D \subset \mathfrak{X}(M) \oplus \Omega^1(M)$ definido por

$$D := \text{gen} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y}, zdx \right), \left(\frac{\partial}{\partial x}, -zdy \right), (0, dz) \right\},$$

define una estructura de Dirac. ▽

Ejemplo 1.3.3 (Variedades pre-simplécticas). Sea (M, ω) variedad pre-simpléctica, es decir ω es una 2-forma cerrada, $d\omega = 0$. Entonces la distribución

$$D^\omega := \text{Graf}(-\omega^\flat) = \{(X, -i_X\omega) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\},$$

es una estructura de Dirac en M . ▽

Ejemplo 1.3.4 (Variedad de Poisson). Sea (M, Π) una variedad de Poisson. Definimos el morfismo $\Pi^\sharp: T^*M \rightarrow TM$ como $\Pi^\sharp(\alpha) := \langle \beta, \Pi^\sharp\alpha \rangle = \Pi(\alpha, \beta)$ para todo β . Entonces la distribución

$$D_\Pi := \text{Graf}(\Pi^\sharp) = \{(\Pi^\sharp\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Omega^1(M)\},$$

es una estructura de Dirac en M . ▽

La siguiente proposición nos presenta un criterio para que una estructura de Dirac sea la gráfica de un bivector de Poisson.

Proposición 1.3.5. *Sea M una variedad, y sea $D \subset \mathbb{T}M$ una estructura de Dirac en M . Entonces existe un bivector de Poisson Π tal que D_Π si y sólo si $D \cap (TM \oplus \{0\}) = \{0\}$.*

Demostración. Suponemos que $D \cap (TM \oplus \{0\}) = \{0\}$. Definamos un 2-tensor Π en M como

$$\Pi^\sharp(\alpha) = X,$$

si $(X, \alpha) \in \Gamma(D)$ y notemos que esta bien definido pues D es una estructura de Dirac.

Veamos que para todo $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, existe un vector Y tal que $(Y, \alpha) \in \Gamma(D)$. Sea $\text{pr}_2: \mathbb{T}M \rightarrow T^*M$ la proyección canónica de haz de Pontryagin al cotangente. Como $\text{rk}(D) = \dim(M)$, entonces pr_2 es sobreyectiva. Ahora, notemos que $\ker(\text{pr}_2) = D \cap (TM \oplus \{0\}) = \{0\}$. Entonces, por el 1º-teorema de isomorfismos se tiene que

$$D / \ker(\text{pr}_2) \cong D \cong T^*M$$

por lo cual, para toda sección $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ existe un campo $Y \in \Gamma(TM)$ tal que $(Y, \alpha) \in \Gamma(D)$.

Ahora mostremos que Π es de clase C^∞ -lineal: Sean $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces

$$\Pi(f\alpha, \beta) = \langle \beta, \Pi^\sharp(f\alpha) \rangle = \langle \beta, fX \rangle = f \langle \beta, \Pi^\sharp(\alpha) \rangle = f\Pi(\alpha, \beta).$$

Veamos que Π es antisimétrica: Sean $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$, entonces

$$\Pi(\beta, \alpha) = \langle \alpha, \Pi^\sharp(\beta) \rangle = i_{\Pi^\sharp(\beta)}\alpha = -i_{\Pi^\sharp(\alpha)}(\beta) = -\Pi(\alpha, \beta).$$

Finalmente veamos que Π es de Poisson: Usando el corchete de Schouten tenemos la siguiente formula

$$\frac{1}{2}[\Pi, \Pi](\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = - \sum_{(1,2,3)} i_{\Pi^\sharp(\alpha_3)} L_{\Pi^\sharp(\alpha_1)} \alpha_2.$$

Usando la condición de integrabilidad de la estructura de Dirac D se tiene que

$$\sum_{(1,2,3)} i_{\Pi^\sharp(\alpha_3)} L_{\Pi^\sharp(\alpha_1)} \alpha_2 = 0.$$

Por lo tanto $[\Pi, \Pi] = 0$, lo cual implica que Π es un bivector de Poisson.

Por otro lado, suponemos que existe un bivector de Poisson Π en M y consideremos su estructura de Dirac asociada D_Π . Si $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ es tal que $\alpha = 0$ entonces $\Pi^\sharp(\alpha) = 0$, por lo tanto $D \cap (TM \oplus \{0\}) = \{0\}$. \square

Proposición 1.3.6. *Sea $D \subset \mathbb{T}M$ un estructura de Dirac y sea $\text{pr}_1: \mathbb{T}M \rightarrow TM$ la proyección en la primera coordenada, entonces la triada $(D \rightarrow M, \text{pr}_1, [\cdot, \cdot])$ es un algebroid de Lie.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.8 se tiene que $(D, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$ es un álgebra de Lie, basta probar que se cumple la regla de Leibniz. Sean $l_i = X_i \oplus \alpha_i \in \Gamma(D)$ con $i = 1, 2$ y sea $f \in C^\infty(M)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\llbracket l_1, fl_2 \rrbracket &= \llbracket (X_1, \alpha_1), (fX_2, f\alpha_2) \rrbracket, \\
&= ([X_1, fX_2], (i_{X_1}d(f\alpha_2) - i_{fX_2}d\alpha_1 + d(i_{X_1}f\alpha_2))), \\
&= (L_{X_1}fX_2 + f[X_1, X_2], (i_{X_1}df\alpha_2 + fi_{X_1}d\alpha_2 \\
&\quad - fi_{X_2}d\alpha_1 + dfi_{X_1}\alpha_2 + fdi_{X_1}\alpha_2)), \\
&= (L_{X_1}fX_2 + f[X_1, X_2], (f(i_{X_1}d\alpha_2 - i_{X_2}d\alpha_1 + di_{X_1}\alpha_2) \\
&\quad + i_{X_1}df\alpha_2 + dfi_{X_1}\alpha_2)), \\
&= (L_{X_1}fX_2 + f[X_1, X_2], (f(i_{X_1}d\alpha_2 - i_{X_2}d\alpha_1 + di_{X_1}\alpha_2) + L_{X_1}f\alpha_2)), \\
&= (L_{X_1}fX_2, L_{X_1}f\alpha_2) + f(\llbracket (X_1, \alpha_1), (X_2, \alpha_2) \rrbracket).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(D \rightarrow M, \text{pr}_1, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$ es un algebroide de Lie. \square

Puesto que $(D \rightarrow M, \text{pr}_1, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$ es un algebroide de Lie, es posible definir una distribución característica en TM como

$$\mathcal{D} := \text{Im}(\text{pr}_1) = \text{pr}_1(D). \quad (1.9)$$

Esta distribución es integrable y por lo tanto existe una foliación singular \mathcal{S} en M tal que, para cada $p \in M$

$$\mathcal{D}_p = T_p\mathcal{S},$$

para algun hoja $S \in \mathcal{S}$.

Teorema 1.3.7. *Sea $D \subset TM$ una estructura de Dirac en M . Entonces, existe una forma pre-simpléctica, definida por hojas de \mathcal{S}*

$$\omega_p(X_p, Y_p) = -\alpha_p(Y_p), \quad (1.10)$$

donde $p \in S$, $X_p, Y_p \in T_pS$ y $(X_p, \alpha_p), (Y_p, \beta_p) \in D_p$

Demostración. Veamos que ω_p es bien definida. Fijemos $X_p \in T_pS$, supongamos que $(X_p, \alpha_p), (X_p, \alpha'_p) \in D_p$ con $\alpha_p \neq \alpha'_p$. Entonces tenemos que

$$(0, \alpha'_p - \alpha_p) \in D_p,$$

por isotropía se tiene que $\ll (0, \alpha'_p - \alpha_p), (Y_p, \beta_p) \gg = 0$ para todo $Y_p \in T_pS$ y $(Y_p, \beta_p) \in D_p$, entonces

$$(\alpha'_p - \alpha_p)(Y_p) = 0,$$

por lo tanto $\alpha_p(Y_p) = \alpha'_p(Y_p)$.

Ahora, mostremos que ω_p es antisimétrica. Sean $(X_p, \alpha_p), (Y_p, \beta_p) \in D_p$, por definición $\omega_p(X_p, Y_p) = -\alpha_p(Y_p)$, entonces como D es isotrópico maximal

$$\omega_p(Y_p, X_p) = -\beta_p(Y_p) = \alpha_p(Y_p) = -\omega_p(X_p, Y_p),$$

por lo tanto ω_p esta bien definido.

Finalmente, mostremos que ω_p es cerrada. Sean $(X, \alpha), (Y, \beta), (Z, \gamma) \in \Gamma(D)$ con $X_p, Y_p, Z_p \in T_p S$, denotemos por ω_S a la forma pre-simpléctica en la hoja S . Entonces usando la formula de Koszul tenemos que

$$d_S \omega_S(X, Y, Z) = - \sum_{(X, Y, Z)} i_Y L_X i_Z \omega_S,$$

en efecto

$$\begin{aligned} d_S \omega_S(X, Y, Z) &= L_X \omega_S(Y, Z) - L_Y \omega_S(X, Z) + L_Z \omega_S(X, Y), \\ &\quad - \omega_S([X, Y], Z) + \omega_S([X, Z], Y) - \omega_S([Y, Z], X), \\ &= -L_X(i_Z \omega_S(Y)) - L_Y(i_X \omega_S(Z)) - L_Z(i_Y \omega_S(X)), \\ &\quad + i_Z \omega_S([X, Y]) + i_Y \omega_S([Z, X]) + i_X \omega_S([Y, Z]), \\ &= -i_Y L_X i_Z \omega_S - i_Z L_Y i_X \omega_S - i_X L_Z i_Y \omega_S. \end{aligned}$$

Como $\omega_p(Z_p, \cdot) = -\gamma_p(\cdot)$ para todo $p \in S$ entonces $i_Z \omega_S = -\gamma$, similarmente obtenemos las ecuaciones $i_X \omega_S = -\alpha$ y $i_Y \omega_S = -\beta$. Por lo tanto por la condición de integrabilidad se tiene que

$$d_S \omega_S(X, Y, Z) = i_Y L_X \gamma + i_Z L_Y \alpha + i_X L_Z \beta = 0.$$

Lo cual implica que ω_S es cerrado y entonces ω_S es una forma pre-simpléctica definida en S . \square

Dada una estructura de Dirac D en una variedad suave M . La foliación \mathcal{S} definida por la integrabilidad de la distribucion (1.9), equipada con la forma presimpléctica (1.10), es llamada *foliación presimpléctica asociada a la estructura de Dirac D* .

En el caso que D_Π sea la estructura de Dirac asociada a una variedad de Poisson (M, Π) . Entonces el siguiente resultado muestra que la forma pre-simpléctica (1.10), es no-degenerada y entonces la foliación asociada a D_Π , es una foliación simpléctica. Este resultado es bien conocido en la teoria de variedades de Poisson, sin embargo aquí lo probaremos en el contexto de estructuras de Dirac.

Corolario 1.3.8. *Cada estructura de Poisson en una variedad M , induce una foliación singular simpléctica (\mathcal{S}, ω_S) .*

Demostración. Sea (M, Π) una variedad de Poisson y tomemos la estructura de Dirac

$$D = \left\{ \left(\Pi^\sharp(\alpha), \alpha \right) \in \mathbb{T}M \mid \alpha \in T^*M \right\},$$

y consideremos la foliación singular \mathcal{S} definida por la distribución característica $\text{Im}(\Pi^\sharp)$

Entonces por el Teorema 1.3.7, existe ω_S una forma pre-simpléctica definida en $S \in \mathcal{S}$, por lo cual basta ver que $\ker(\omega_p) = \{0\}$.

Consideremos $\ker(\omega_p) = \{X_p \in T_p \mid (X_p, 0) \in D_p\}$, notemos que $(X_p, 0) \in D_p$ si y sólo si $i_X \omega_p = 0$ lo cual es equivalente a tener que $-\alpha_p = 0$. Si $\alpha_p = 0$ entonces $\Pi_p^\sharp(\alpha_p) = 0$, lo cual implica que $\ker(\omega_p) = \{0\}$. \square

Definición 1.3.9. Una 2-forma ω definida por hojas de una foliación \mathcal{S} tal que ω_S es no-degenerada para cada hoja $S \in \mathcal{S}$, se llama diferenciable si para cada 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ el campo $V_\alpha: M \rightarrow TM$ definido como

$$i_{V_\alpha} \omega_S = -i_S^* \alpha,$$

es suave, donde $i_S: S \rightarrow M$ es la inclusión de S en M .

Es posible dar otra definición de diferenciability de una 2-forma definida por hojas de una foliación de la siguiente manera.

Definición 1.3.10. Sea (\mathcal{S}, ω_S) una foliación pre-simpléctica y consideremos la distribución

$$D_p^{\omega_S} = \{(X_p, \alpha_p) \in \mathbb{T}_p M \mid X_p \in T_p S \text{ y } \alpha_p|_{T_p S} = -i_{X_p} \omega_p\}, \quad (1.11)$$

para $p \in S \in \mathcal{S}$. Decimos que ω_S es suave, si $D_p^{\omega_S} \subset \mathbb{T}_p M$ es una distribución suave.

Lema 1.3.11. $\dim(D_p^{\omega_S}) = \dim(M)$.

Demostración. Consideremos la descomposición

$$T_p M = T_p S \oplus \mathcal{V}_p,$$

y tomar una base $\{Y_1, \dots, Y_s\}$ de $T_p S$ con su base dual $\{\alpha^1, \dots, \alpha^s\}$ de $T_p^* S$ tal que $\alpha^i \in (\mathcal{V}_p)^0$. Tomemos un conjunto $\{\beta^1, \dots, \beta^{m-s}\} \subset T_p^* M$ tal que sea base de $(T_p S)^0$, entonces

$$\{(Y_1, \alpha^1), \dots, (Y_s, \alpha^s), (0, \beta^1), \dots, (0, \beta^{m-s})\},$$

es una base de $D_p^{\omega_S}$. \square

La condición de suavidad nos permite definir estructuras de Dirac a partir de foliaciones pre-simplécticas como sigue.

Teorema 1.3.12. Para cada foliación pre-simpléctica (\mathcal{S}, ω_S) en M con ω_S suave, la distribución D^{ω_S} definida en (1.11), es una estructura de Dirac.

Demostración. Mostremos que D^{ω_S} es isotrópico maximal. Sean $(X, \alpha), (Y, \beta) \in D^{\omega_S}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \ll (X, \alpha), (Y, \beta) \gg &= \beta(X) + \alpha(Y) = -(i_Y \omega_S)(X) - (i_X \omega_S)(Y), \\ &= -\omega_S(Y, X) - \omega_S(X, Y) = 0. \end{aligned}$$

La condición de integrabilidad se cumple puesto que $d_S\omega_S = 0$. De igual manera que en la demostración del Teorema 1.3.7, se tiene que

$$d_S\omega_S(X_1, X_2, X_3) = \sum_{(1,2,3)} i_{X_2} L_{X_1} \alpha_3 = 0,$$

para todo $(X_1, \alpha_1), (X_2, \alpha_2), (X_3, \alpha_3) \in D^{\omega_S}$. \square

Corolario 1.3.13. *Cada foliación simpléctica (\mathcal{S}, ω_S) con ω_S suave, induce una estructura de Poisson en la variedad.*

Demostración. Como (\mathcal{S}, ω_S) es una foliación pre-simpléctica, entonces podemos considerar la distribución suave

$$D_p^{\omega_S} = \{(X_p, \alpha_p) \in \mathbb{T}_p M \mid X_p \in T_p S \text{ y } \alpha_p|_{T_p S} = -i_{X_p} \omega_p\},$$

por el Teorema 1.3.12, se tiene que $D_p^{\omega_S}$ es una estructura de Dirac en M .

Para cada $p \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} D_p^{\omega_S} \cap (T_p M \oplus \{0\}) &= \{X_p \in T_p S \mid i_{X_p} \omega_p = 0\} \oplus \{0\} \\ &= \ker(\omega_p) \oplus \{0\}. \end{aligned}$$

Ahora, ω_p es symplectico por lo cual $\ker(\omega_p) = \{0\}$, esto implica que $D_p^{\omega_S} \cap (T_p M \oplus \{0\}) = \{0\}$ y entonces por la Proposición 1.3.5 tenemos que $D_p^{\omega_S}$ es la gráfica de una estructura de Poisson. \square

1.4. Transformaciones de gauge

Sea D una estructura de Dirac en M y (\mathcal{S}, ω_S) su foliación simpléctica asociada. Dada una 2-forma cerrada B , es posible modificar la forma pre-simpléctica ω_S de la siguiente manera.

En cada hoja pre-simpléctica $S \in \mathcal{S}$, definimos una nueva estructura pre-simpléctica como

$$\omega_S - i_S^* B,$$

donde $i_S: S \rightarrow M$ es la inclusión de S en M . Notemos que $d(\omega_S - i_S^* B) = d(\omega_S) - i_S^* d(B) = 0$, por lo cual $\omega_S - i_S^* B$ es una 2-forma cerrada definida en S .

Definición 1.4.1. Sea $B \in \Omega_{cl}^2$ una 2-forma cerrada y sea D una estructura de Dirac en M . Definimos la *transformación de gauge* de D por

$$\tau_B(D) = \{(X, \alpha - i_X B) \mid (X, \alpha) \in D\}.$$

Lema 1.4.2. *La transformación $\tau_B: \Gamma(\mathbb{T}M) \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}M)$ es inyectiva*

Demostración. Sea $(X, \alpha) \in \mathbb{T}M$ tal que $(X, \alpha) \in \ker(\tau_B)$, entonces $(X, \alpha - i_X B) = (0, 0)$, lo cual implica que $X = 0$ y $i_X B = 0$, entonces $\alpha = 0$ y por tanto τ_B es inyectivo. \square

Teorema 1.4.3. *La transformación de gauge $\tau_B(D)$ de una estructura de Dirac D en M , es una estructura de Dirac en M .*

Demostración. Veamos que $\tau_B(D)$ es Lagrangiano. Sean $l_i = (X_i, \alpha_i - i_{X_i}B) \in \Gamma(\tau_B(D))$ para $i = 1, 2$, es decir, $(X_i, \alpha_i) \in \Gamma(D)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \ll l_1, l_2 \gg &= \ll (X_1, \alpha_1 - i_{X_1}B), (X_2, \alpha_2 - i_{X_2}B) \gg, \\ &= \alpha_1(X_2) - i_{X_1}B(X_2) + \alpha_2(X_1) - i_{X_2}B(X_1), \\ &= \alpha_1(X_2) + \alpha_2(X_1) - B(X_1, X_2) - B(X_2, X_1) = 0. \end{aligned}$$

por lo tanto $\tau_B(D) = (\tau_B(D))^\perp$.

Veamos ahora que $\tau_B(D)$ es involutivo bajo el corchete de Courant. Sean $l_i = (X_i, \alpha_i - i_{X_i}B) \in \Gamma(\tau_B(D))$ con $i = 1, 2$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} [[l_1, l_2]] &= [[(X_1, \alpha_1 - i_{X_1}B), (X_2, \alpha_2 - i_{X_2}B)], \\ &= ([X_1, X_2], L_{X_1}(\alpha_2 - i_{X_2}B) - i_{X_2}d(\alpha_1 - i_{X_1}B)), \\ &= ([X_1, X_2], L_{X_1}\alpha_2 - i_{X_2}d\alpha_1 - L_{X_1}i_{X_2}B + i_{X_2}di_{X_1}B), \\ &= ([X_1, X_2], L_{X_1}\alpha_2 - i_{X_2}d\alpha_1 - L_{X_1}i_{X_2}B + i_{X_2}L_{X_1}B), \\ &= ([X_1, X_2], L_{X_1}\alpha_2 - i_{X_2}d\alpha_1 - i_{[X_1, X_2]}B). \end{aligned}$$

Por lo tanto $[[l_1, l_2]] \in \tau_B(D)$. Y entonces $\tau_B(D)$ es una estructura de Dirac en M . \square

Por lo tanto, para cada 2-forma cerrada B , la transformación de gauge τ_B manda estructuras de Dirac en estructuras de Dirac.

Si (\mathcal{S}, ω_S) es una foliación simpléctica de M , entonces del corolario 1.3.13, esta foliación induce una estructura de Poisson en M . Ahora, la foliación pre-simpléctica $(\mathcal{S}, \omega_S - i_S^*B)$ induce una estructura de Poisson si B es no-degenerada.

Mas aun, si (M, Π) es una variedad de Poisson y D_Π su estructura de Dirac asociada. Entonces la siguiente proposición nos da una caracterización de cuando la estructura de Dirac $\tau_B(D_\Pi)$ es la gráfica de un bivector de Poisson.

Proposición 1.4.4. *Sea (M, Π) una variedad de Poisson, consideremos su estructura de Dirac asociada D_Π . Sea $B \in \Omega_{cl}^2(M)$. Entonces, la estructura de Dirac $\tau_B(D_\Pi)$ es la gráfica de un bivector de Poisson si y sólo si $B^\flat \circ \Pi^\sharp$ no tiene puntos fijos distintos de cero.*

Demostración. Por la proposición 1.3.5, $\tau_B(D_\Pi)$ es gráfica de un bivector de Poisson si y sólo si

$$\tau_B(D) \cap (TM \oplus \{0\}) = \{0\},$$

esto es $\tau_B(D_\Pi) \cap (TM \oplus \{0\}) = \{\Pi^\sharp(\alpha) \mid B^\flat \circ \Pi^\sharp(\alpha) = \alpha\} \oplus \{0\} = \{0\} \oplus \{0\}$

Si suponemos que $\tau_B(D_\Pi)$ es la gráfica de un bivector de Poisson y $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ es tal que la ecuación $B^\flat(\Pi^\sharp(\alpha)) = \alpha$ implica que $\Pi^\sharp(\alpha) = 0$, en este caso, $\alpha = 0$.

Por lo tanto, la ecuación $B^b \circ \Pi^\sharp(\alpha) = \alpha$ solo tiene solución trivial para α , es decir, $B^b \circ \Pi^\sharp$ no tiene puntos fijos distintos de cero.

Por otro lado, si $B^b \circ \Pi^\sharp$ no tiene puntos fijos distintos de cero, entonces $B^b \circ \Pi^\sharp(\alpha) = \alpha$ solo tiene solución trivial para α . Por lo cual se tiene que

$$\tau_B(D_\Pi) \cap (TM \oplus \{0\}) = \{\Pi^\sharp(0)\} \oplus \{0\} = \{0\},$$

y entonces $\tau_B(D_\Pi)$ es la gráfica de un bivector de Poisson. □

Capítulo 2

Método de promedios y estructuras geométricas invariantes

El método de promedio nos permite construir campos tensoriales que son invariantes con respecto a la acción de un grupo de Lie compacto en una variedad suave. El objetivo general de este capítulo es, aplicar el método de promedios para construir estructuras de Dirac y Poisson con simetrías.

En la sección 2.1, introduciremos el operador de promedios y daremos algunas propiedades importantes del mismo. En la sección 2.2, aplicaremos el método de promedios para construir estructuras de Dirac y Poisson invariantes con respecto a la acción de un grupo de Lie compacto que es compatible con la estructura [9]. En particular, vamos a caracterizar las estructuras de Poisson que son compatibles con la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^3 por rotaciones. Finalmente, en la sección 2.3, vamos a construir estructuras de Poisson invariantes alrededor de hojas simplécticas.

2.1. Operadores de promedio

En esta sección introduciremos el operador de promedios. Además, presentaremos algunos criterios de invarianza de campos tensoriales. A manera de ejemplo, definiremos el operador de promedio bajo la acción de \mathbb{S}^1 en una variedad suave.

Sea M una variedad suave y G un grupo de Lie compacto y conexo. Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de G en M . Para cada $g \in G$, denotamos por $\Phi_g \in \text{Diff}(M)$, el difeomorfismo inducido por Φ , y definido como $\Phi_g(m) := \Phi(g, m)$ para todo $m \in M$. Denotamos por $\mathcal{T}_s^r(M)$ el espacio de todos los campos tensoriales en M de tipo (r, s) .

Definición 2.1.1. Un tensor $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$ se dice G -invariante, si para todo $g \in G$

$$\Phi_g^* F = F.$$

Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie del grupo de Lie G . Para cada $a \in \mathfrak{g}$, denotamos por a_M el generador infinitesimal de Φ definido por

$$a_M(m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(ta)}(m),$$

para cada $m \in M$. Notemos que el flujo del campo a_M es completo y está dado por

$$\text{Fl}_{a_M}^t(m) = \Phi_{\exp(ta)}(m).$$

Definición 2.1.2. Para cada $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$, definimos el *promedio de F* , como

$$\langle F \rangle_G := \int_G \Phi_g^* F \, dg,$$

donde dg es la medida de Haar normalizada en G .

Lema 2.1.3. Para cada $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$, el promedio $\langle F \rangle_G$ es un tensor G -invariante.

Demostración. Sea $g' \in G$ y denotemos por $\tilde{g} = g'g$. Usando propiedades de integración en grupos de Lie tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_{g'}^* \langle F \rangle_G &= \Phi_{g'}^* \int_G \Phi_g^* F \, dg = \int_G \Phi_{g'g}^* F \, dg, \\ &= \int_G \Phi_{\tilde{g}}^* F \, d\tilde{g} = \langle F \rangle_G, \end{aligned}$$

por lo tanto $\langle F \rangle_G$ es G -invariante. □

Ejemplo 2.1.4. Consideremos la acción del toro en \mathbb{R}^4 dada por

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4, \\ ((\theta_1, \theta_2), (x_1, x_2, x_3, x_4)) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos(\theta_1) - x_2 \operatorname{sen}(\theta_1) \\ x_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + x_2 \cos(\theta_1) \\ x_3 \cos(\theta_2) - x_4 \operatorname{sen}(\theta_2) \\ x_3 \operatorname{sen}(\theta_2) + x_4 \cos(\theta_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La medida de Haar en \mathbb{T}^2 es la 2-forma diferencial

$$\frac{1}{(2\pi)^2} d\theta_1 \wedge d\theta_2.$$

Considerando el cambio de variables

$$x_1 = s \cos(\alpha_1) \quad x_2 = s \operatorname{sen}(\alpha_1) \quad x_3 = r \cos(\alpha_2) \quad x_4 = r \operatorname{sen}(\alpha_2),$$

la acción queda

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4, \\ ((\theta_1, \theta_2), (\alpha_1, \alpha_2, s, r)) &\longmapsto (\alpha_1 + \theta_1, \alpha_2 + \theta_2, s, r). \end{aligned}$$

Entonces el \mathbb{T}^2 -promedio de una función $f(\alpha_1, \alpha_2, s, r)$ en \mathbb{R}^4 es dado por

$$\begin{aligned} &\langle f \rangle_{\mathbb{T}^2}(\alpha_1, \alpha_2, s, r), \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{(\theta_1, \theta_2)}^* f(\alpha_1, \alpha_2, s, r) d\theta_1 d\theta_2, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2, s, r) d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

▽

Proposición 2.1.5. *Sea $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$ un tensor de tipo (r, s) . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. F es G -invariante.
2. $L_{a_M}F = 0$ para todo $a \in \mathfrak{g}$.
3. $\langle F \rangle_G = F$.

Demostración. Supongamos que F es G -invariante y mostremos que $L_{a_M}F = 0$ para todo $a \in \mathfrak{g}$. En efecto, usando propiedades de la derivada de Lie, para cada $p \in M$ tenemos

$$\begin{aligned} (L_{a_M}F)_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\text{Fl}_{a_M}^t)^* F_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\Phi_{\exp(ta)})^* F_p), \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_p) = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que $L_{a_M}F = 0$, mostremos que $\langle F \rangle_G = F$. En efecto, usando propiedades de la derivada de Lie tenemos

$$\left. \frac{d}{dt} (\text{Fl}_{a_M}^t)^* F = (\text{Fl}_{a_M}^t)^* (L_{a_M}F) = 0,$$

por lo cual $(\text{Fl}_{a_M}^t)^* F$ es constante, como $\text{Fl}_{a_M}^1 = \text{Id}_M$, se tiene que

$$(\text{Fl}_{a_M}^t)^* F = F.$$

Puesto que $(\text{Fl}_{a_M}^t)^* F = \Phi_{\exp(ta)}^* F$ y como la aplicación exponencial es sobreyectiva, hecho que podemos encontrar en el Corolario B.2.5, tenemos que $\Phi_g^* F = F$ para todo $g \in G$, por lo tanto

$$\langle F \rangle_G = \int_G \Phi_g^* F \, dg = \int_G F \, dg = F.$$

Ahora, supongamos que $\langle F \rangle_G = F$ y mostremos que F es G -invariante. Calculemos $\Phi_g^* \langle F \rangle_G$

$$\begin{aligned} \Phi_g^* \langle F \rangle_G &= \Phi_g^* \left(\int_G \Phi_h^* F \, dg \right) = \int_G (\Phi_h \circ \Phi_g)^* F \, dg, \\ &= \int_G \Phi_{h \cdot g}^* F \, dg = \langle F \rangle_G, \end{aligned}$$

por lo tanto $\Phi_g^* F = F$. □

Como $\langle F \rangle_G$ es un tensor G -invariante para cada tensor $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$, entonces de la Proposición 2.1.5 se sigue que el G -promedio es un *operador de proyección*, es decir

$$\langle \langle F \rangle_G \rangle_G = \langle F \rangle_G.$$

Por lo cual, tenemos una descomposición del espacio de tensores en M dada por

$$\mathcal{T}_s^r(M) = \text{Im}(\langle \cdot \rangle_G) \oplus (\mathcal{T}_s^r(M))^0,$$

donde $(\mathcal{T}_s^r(M))^0$ denota el espacio de tensores con promedio cero.

Corolario 2.1.6. *Para cada $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$ tenemos la siguiente identidad*

$$\langle L_{a_M} F \rangle_G = 0,$$

para cada $a \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Mostremos que $\langle L_{a_M} F \rangle_G = L_{a_M} \langle F \rangle_G$, en efecto, tenemos

$$\langle L_{a_M} F \rangle_G = \int_G \Phi_g^* L_{a_M} F \, dg = L_{a_M} \int_G \Phi_g^* F = L_{a_M} \langle F \rangle_G,$$

como $\langle F \rangle_G$ es G -invariante, se sigue de la Proposición 2.1.5 que $L_{a_M} \langle F \rangle_G = 0$. \square

Del Corolario B.2.5, se tiene que, como G es un grupo de Lie compacto y conexo, la aplicación exponencial $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ es sobreyectiva. Sea e el elemento neutro de G . Por el Teorema B.2.3, existe un dominio en forma de estrella D_e tal que la aplicación exponencial restringida

$$\exp|_{D_e}: D_e \rightarrow G \setminus \mathcal{C}(e),$$

es un difeomorfismo, donde $\mathcal{C}(e)$ es un conjunto de medida cero llamado *cut locus* en e .

Denotamos por $\text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathcal{T}_s^r(M))$ el espacio de aplicaciones \mathbb{R} -lineales del álgebra de Lie \mathfrak{g} al espacio de tensores $\mathcal{T}_s^r(M)$.

Definición 2.1.7. Sea $\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathcal{T}_s^r(M))$, definimos el operador $\delta^G: \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathcal{T}_s^r(M)) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(M)$ como

$$\delta^G(\lambda) := \int_{D_e} \left(\int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* \lambda_a \, dt \right) \exp^* \mu,$$

donde $\mu = dg$ es la medida de Haar normalizada en G .

Tomando en cuenta que $\Omega^k(M) \subset \mathcal{T}_k^0(M)$, tenemos el siguiente lema.

Lema 2.1.8. *El operador $\langle \cdot \rangle_G$ conmuta con la diferencial exterior.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \Omega^k(M)$, se tiene que

$$\langle d\alpha \rangle_G = \int_G \Phi_g^* d\alpha \, dg = \int_G d\Phi_g^* \alpha \, dg = d \int_G \Phi_g^* \alpha \, dg = d \langle \alpha \rangle_G.$$

\square

Supongamos que $\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^k(M))$, esto es que, para todo $a \in \mathfrak{g}$, $\lambda_a \in \Omega^k(M)$. La derivada exterior d , define un operador

$$\begin{aligned} d: \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^k(M)) &\longrightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^{k+1}(M)) \\ \lambda &\longmapsto d\lambda \end{aligned} \quad (2.1)$$

definido por $(d\lambda)_a := d\lambda_a$.

Lema 2.1.9. *El operador δ^G conmuta con el operador d (2.1).*

Demostración. Ahora mostremos que δ^G conmuta con la diferencial. En efecto, para cada $\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^k(M))$, se tiene

$$\begin{aligned} \delta^G(d\lambda) &= \int_{D_e} \left(\int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* d\lambda_a dt \right) \exp^* \mu, \\ &= \int_{D_e} \left(\int_0^1 d\Phi_{\exp(ta)}^* \lambda_a dt \right) \exp^* \mu, \\ &= d \int_{D_e} \left(\int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* \lambda_a dt \right) \exp^* \mu, \\ &= d \circ \delta^G(\lambda). \end{aligned}$$

□

Consideremos la aplicación $l^G: \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathcal{T}_s^r(M))$ dada por

$$l^G(F)_a = L_{a_M} F.$$

Lema 2.1.10. *El operador de promedio $\langle \cdot \rangle_G$ se puede escribir como*

$$\langle \cdot \rangle_G = \text{Id} + \delta^G \circ l^G.$$

Demostración. Como $\Phi_{\exp(ta)}$ es el flujo del campo a_M , tenemos

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\exp(ta)}^* F = \Phi_{\exp(ta)}^* (L_{a_M} F),$$

para todo $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$. Integrando en ambos lados de la igualdad con respecto a t , tenemos que

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi_{\exp(ta)}^* F dt = \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* (L_{a_M} F) dt, \quad (2.2)$$

por el teorema fundamental del cálculo obtenemos del lado izquierdo de la igualdad

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi_{\exp(ta)}^* F dt = \Phi_{\exp(a)}^* F - F,$$

integrando la ecuación (2.2) en $D_e \subset \mathfrak{g}$ con respecto a la medida $\exp^* \mu$, tenemos

$$\int_{D_e} (\Phi_{\exp(a)}^* F) \exp^* \mu - \int_{D_e} F \exp^* \mu = \int_{D_e} \left(\int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* (L_{a_M} F) dt \right) \exp^* \mu. \quad (2.3)$$

Puesto que el cut locus $\mathcal{C}(e)$ tiene medida cero, entonces el promedio $\langle F \rangle_G$ puede escribirse como la integral en D_e

$$\langle F \rangle_G = \int_G \Phi_g^* F dg = \int_{G \setminus \mathcal{C}(e)} \Phi_g^* F dg = \int_{D_e} (\Phi_{\exp(a)}^* F) \exp^* \mu. \quad (2.4)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (2.3) y (2.4), obtenemos la igualdad

$$\langle F \rangle_G - F = \delta^G \circ l^G(F).$$

□

Corolario 2.1.11. *Si $\beta \in \Omega^k(M)$ es una k -forma diferencial cerrada, entonces su promedio se puede escribir como*

$$\langle \beta \rangle_G = \beta - d \circ \delta^G(\rho),$$

donde $\rho \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^k(M))$ esta definido $\rho_a = -i_{a_M} \beta$.

Demostración. De los Lemas 2.1.9 y 2.1.10, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \langle \beta \rangle_G &= \beta + \delta^G(L_{a_M} \beta) = \beta + \delta^G(\text{di}_{a_M} \beta + i_{a_M} d\beta), \\ &= \beta + \delta^G(\text{di}_{a_M} \beta) = \beta + d(\delta^G(i_{a_M} \beta)) = \beta - d \circ \delta^G(\rho_a). \end{aligned}$$

□

Notemos que si $\beta \in \Omega^k(M)$ es cerrada, entonces por el Lema 2.1.8 la forma promediada $\langle \beta \rangle_G \in \Omega^k(M)$ también lo es. Por lo cual, del Corolario 2.1.11, se sigue que β y $\langle \beta \rangle_G$ están en la misma clase de cohomología de De Rham. Una generalización de este resultado lo podemos encontrar en [20, Proposición 4.11].

2.1.1. Operadores de promedio bajo la acción de \mathbb{S}^1 .

Consideremos el caso particular del grupo $G = \mathbb{S}^1$ actuando en una variedad suave M . Denotemos por Υ el generador infinitesimal de la acción. Notemos que Υ es un campo vectorial completo en M y con flujo 2π -periódico. Entonces, el promedio de un campo tensorial $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$ se puede escribir como

$$\langle F \rangle_{\mathbb{S}^1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_{\Upsilon}^t)^* F dt.$$

Lema 2.1.12. *Para cada $\lambda = aF$, con $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$ y $a \in \mathbb{R}$, el operador $\delta^{\mathbb{S}^1}$ se puede escribir como*

$$\delta^{\mathbb{S}^1}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi)(\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt + \pi \langle F \rangle_{\mathbb{S}^1}.$$

Demostración. De la Definición 2.1.7 tomemos $G = \mathbb{S}^1$ y $\lambda_t = tF$ con $t \in \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}$ entonces

$$\delta^{\mathbb{S}^1}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 t (\text{Fl}_\Upsilon^{\theta t})^* F \, d\theta \right) dt.$$

Tomando el cambio de variables $\tau = t\theta$ tenemos que $d\tau = t d\theta$ y

$$\delta^{\mathbb{S}^1}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* F \, d\tau \, dt.$$

Por otro lado, consideremos la integral

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt + \pi \langle F \rangle_{\mathbb{S}^1},$$

la cual podemos escribir como

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt + \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt,$$

usando integración por partes tenemos la integral

$$-\frac{1}{2\pi} \left(\left(t \int_0^t (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* F \, d\tau \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \int_0^t (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* F \, d\tau \, dt \right) + \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt,$$

evaluando tenemos la integral

$$-\frac{1}{2\pi} \left(\left(2\pi \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* F \, d\tau \right) - \int_0^{2\pi} \int_0^t (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* F \, d\tau \, dt \right) + \int_0^{2\pi} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt,$$

y esta es igual a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* F \, d\tau \, dt,$$

lo cual demuestra el lema. □

Si definimos el operador \mathbb{R} -lineal $S: \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(M)$ como

$$S(F) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi)(\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt,$$

entonces el operador $\delta^{\mathbb{S}^1}$ se puede escribir como

$$\delta^{\mathbb{S}^1}(\lambda) = -S(F) + \pi \langle F \rangle_{\mathbb{S}^1}. \quad (2.5)$$

Proposición 2.1.13. *Para cada $F \in \mathcal{T}_s^r(M)$, se satisface*

$$L_\Upsilon \circ S(F) = F - \langle F \rangle_{\mathbb{S}^1}.$$

Demostración. Como el flujo es un grupo 1-paramétrico, tenemos que

$$(\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* S(F) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) (\text{Fl}_\Upsilon^{t+\tau})^* F \, dt = -\frac{1}{2\pi} \int_\tau^{2\pi+\tau} (t - \tau - \pi) (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt.$$

Derivando ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* S(F) &= \frac{1}{2\pi} (t - \tau - \pi) (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt \Big|_\tau^{2\pi+\tau} - \frac{1}{2\pi} \int_\tau^{2\pi+\tau} (\text{Fl}_\Upsilon^t)^* F \, dt, \\ &= (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* (F - \langle F \rangle_{\mathbb{S}^1}), \end{aligned}$$

por otro lado, tenemos que

$$\frac{d}{d\tau} (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* S(F) = (\text{Fl}_\Upsilon^\tau)^* L_\Upsilon \circ S(F),$$

por lo tanto $L_\Upsilon \circ S(F) = F - \langle F \rangle_{\mathbb{S}^1}$. □

Como consecuencia de la Proposición 2.1.13, tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 2.1.14. *Sea σ una forma cerrada, entonces $\sigma - \langle \sigma \rangle_{\mathbb{S}^1}$ es una forma exacta.*

Demostración. De la Proposición 2.1.13, tenemos que

$$L_\Upsilon \circ S(\sigma) = \sigma - \langle \sigma \rangle_{\mathbb{S}^1},$$

pero $L_\Upsilon \circ S(\sigma) = di_\Upsilon S(\sigma) + i_\Upsilon dS(\sigma) = di_\Upsilon S(\sigma)$. □

Como consecuencia de la Proposición 2.1.14, se sigue que σ y $\langle \sigma \rangle_{\mathbb{S}^1}$ están en la misma clase de cohomología de De Rham.

2.2. Construcción de estructuras de Dirac invariantes

En esta sección aplicaremos el método de promedios para construir estructuras de Dirac y Poisson que son invariantes con respecto a una clase de acciones de grupos de Lie compactos, que son compatibles con la estructura. A manera de ejemplo, presentaremos una caracterización de las estructuras de Poisson que son compatibles con la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^3 , por rotaciones.

Recordemos del Teorema 1.3.7, que cada estructura de Dirac D en una variedad suave M , tiene asociada una foliación pre-simpléctica \mathcal{S} en M , con forma pre-simpléctica por hojas ω_S para cada $S \in \mathcal{S}$. Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie G en una variedad de Dirac (M, D) .

Definición 2.2.1. Se dice que la acción es *canónica*, si cada sección $(X, \alpha) \in \Gamma(D)$ satisface que $(\Phi_g^*X, \Phi_g^*\alpha) \in \Gamma(D)$, para todo $g \in G$. Adicionalmente, se dice que la variedad de Dirac es *G-invariante*.

Podemos notar que, si la acción preserva cada hoja pre-simpléctica $S \in \mathcal{S}$, no necesariamente canónica relativa a D , entonces la G -acción es tangente a las hojas pre-simplécticas, esto es, que $a_M(m) \in T_m S$ para todo $a \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$.

Definición 2.2.2. Decimos que la G -acción es *compatible* con la estructura de Dirac D , si para cada hoja pre-simpléctica (S, ω_S) se cumple

1. S es G -invariante, es decir, $\Phi_g(S) \subset S$ para todo $g \in G$.
2. Existe una aplicación \mathbb{R} -lineal $\rho \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^1(M))$, tal que, para todo $a \in \mathfrak{g}$

$$i_{a_M} \omega_S = -i_S^* \rho_a, \quad (2.6)$$

donde $i: S \rightarrow M$ es la inclusión canónica.

Lema 2.2.3. La ecuación (2.6) de la condición de compatibilidad, se puede escribir como

$$(a_M, \rho_a) \in \Gamma(D),$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Sea $X \in \Gamma(TS)$, se sigue de la ecuación (2.6) que

$$\omega_S(a_M, X) = -i_S^* \rho_a(X)$$

Por tanto, de la ecuación (1.10), obtenemos que

$$(a_M, \rho_a) \in \Gamma(D).$$

□

Observación 2.2.4. Podemos notar que la condición de compatibilidad siempre se cumple cuando la foliación pre-simpléctica es regular.

Teorema 2.2.5. Si la G -acción es compatible en (M, D) , entonces el promedio $\langle \omega_S \rangle_G$ es una forma pre-simpléctica suave de la forma

$$\langle \omega_S \rangle_G = \omega_S - i_S^* d(\theta), \quad (2.7)$$

donde $\theta = \delta^G(\rho) \in \Omega^1(M)$. Más aún, la estructura de Dirac asociada $\bar{D} := D^{\langle \omega_S \rangle_G}$ es G -invariante y se relaciona con D por la transformación de gauge

$$\bar{D} = \{(X, \alpha + i_X d\theta) \mid (X, \alpha) \in D\}.$$

Demostración. Puesto que ω_S es una forma pre-simpléctica, entonces el Lema 2.1.8 implica que $\langle \omega_S \rangle_G$ también lo es. Del el Corolario 2.1.11, podemos escribir el G -promedio de la forma pre-simpléctica ω_S como

$$\langle \omega_S \rangle_G = \omega_S - d \circ \delta^G(-i_{a_M} \omega_S),$$

puesto que la G -acción es compatible en la variedad (M, D) , entonces existe $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$ que satisface la ecuación (2.6). Por lo cual se tiene que

$$\langle \omega_S \rangle_G = \omega_S - d \circ \delta^G(i_S^* \rho_a) = \omega_S - i_S^* \circ d(\delta^G(\rho_a)) = \omega_S - i_S^* d(\theta).$$

Notemos que $\langle \omega_S \rangle_G = \omega_S - i_S^* d(\theta)$ es una forma pre-simpléctica por hojas de la foliación \mathcal{S} , que es G -invariante. Por el Teorema 1.3.12, ésta foliación tiene asociada la estructura de Dirac

$$\begin{aligned} \bar{D} := D^{\langle \omega_S \rangle} &= \{(X, \alpha) \mid X \in \Gamma(TS) \text{ y } \alpha = -i_X \langle \omega_S \rangle_G\}, \\ &= \{(X, \alpha + i_X d\theta) \mid (X, \alpha) \in D\}, \end{aligned}$$

y entonces \bar{D} es la transformación de gauge $\tau_{-d\theta}(D)$ de D asociada a la 2-forma cerrada $-d\theta$.

Finalmente mostremos que \bar{D} es G -invariante. Para cada sección $(X, \alpha) \in \Gamma(\bar{D})$ y para cada $g \in G$, se tiene que $\alpha = -i_X \langle \omega_S \rangle_G$ y

$$\begin{aligned} (\Phi_g^* X, -\Phi_g^* \alpha) &= (\Phi_g^* X, -\Phi_g^* i_X \langle \omega_S \rangle_G) = (\Phi_g^* X, -i_{\Phi_g^* X} \Phi_g^* \langle \omega_S \rangle_G), \\ &= (\Phi_g^* X, -i_{\Phi_g^* X} \langle \omega_S \rangle_G) \in \Gamma(D). \end{aligned}$$

□

Ahora, supongamos que (M, Π) es una variedad de Poisson y consideremos su estructura de Dirac asociada

$$D_\Pi = \left\{ (\Pi^\sharp(\alpha), \alpha) \mid \alpha \in \Gamma(T^*M) \right\}.$$

Decimos que la acción de un grupo de Lie G en M es *compatible con* Π , si ésta es compatible con la estructura de Dirac D_Π en el sentido de la Definición 2.2.2.

Del Lema 2.2.3, obtenemos que la G -acción es *compatible con* Π , si existe un morfismo $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$ tal que

$$a_M = \Pi^\sharp(\rho_a), \tag{2.8}$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Lema 2.2.6. *Sea (M, Π) una variedad de Poisson y sea G un grupo de Lie actuando en M . Entonces Π es G -invariante si y sólo si D_Π es G -invariante.*

Demostración. Supongamos que D_Π es G -invariante. Para toda sección $(\Pi^\sharp(\alpha), \alpha) \in \Gamma(D_\Pi)$ se cumple que

$$(\Phi_g^* \Pi^\sharp(\alpha), \Phi_g^* \alpha) \in \Gamma(D_\Pi),$$

para todo $g \in G$. Esto es cierto si y sólo si

$$\Phi_g^* \Pi^\sharp(\alpha) = \Pi^\sharp \Phi_g^* \alpha,$$

lo cual implica que el bivector Π es G -invariante. \square

Teorema 2.2.7. *Sea (M, Π) una variedad de Poisson, \mathcal{S} su foliación simpléctica asociada y ω_S la forma simpléctica de $S \in \mathcal{S}$. Supongamos que la acción de un grupo de Lie compacto y conexo G en M es compatible con Π . Si el endomorfismo*

$$\text{Id} + (d\theta)^\flat \circ \Pi^\sharp : T^*M \rightarrow T^*M,$$

con $\theta = \delta^G(\rho)$, es invertible, entonces la 2-forma $\langle \omega_S \rangle_G$ es no degenerada en cada hoja de \mathcal{S} . Más aún, existe una única estructura de Poisson G -invariante $\bar{\Pi}$ en M cuya foliación simpléctica es $(\mathcal{S}, \langle \omega_S \rangle_G)$.

Además, las estructuras de Poisson Π y $\bar{\Pi}$ están relacionadas por la transformación de gauge a lo largo de la 2-forma cerrada $d\theta$, esto es que

$$\bar{\Pi}^\sharp = \Pi^\sharp \circ (\text{Id} + (d\theta)^\flat \circ \Pi^\sharp)^{-1}. \quad (2.9)$$

Demostración. Sea $D_\Pi := \{(\Pi^\sharp(\alpha), \alpha) \mid \alpha \in \Gamma(T^*M)\}$ la estructura de Dirac en M , asociada al bivector de Poisson Π . Por el Corolario 1.3.8, D_Π induce una foliación simpléctica por hojas \mathcal{S} con forma simpléctica ω_S para cada $S \in \mathcal{S}$.

Como la acción de G en M es compatible con la estructura de Dirac, entonces por el Teorema 2.2.5, el promedio de ω_S tiene la forma

$$\langle \omega \rangle_G = \omega - i_S^* d\theta,$$

y define una forma pre-simpléctica en la foliación \mathcal{S} , cuya estructura de Dirac asociada $\bar{D} := \tau_{-d\theta}(D_\Pi)$ es G -invariante.

Como el morfismo

$$\text{Id} + (d\theta)^\flat \circ \Pi^\sharp,$$

es invertible, entonces por la Proposición 1.4.4, la estructura de Dirac \bar{D} es la gráfica de un bivector de Poisson $\bar{\Pi}$, es decir, $\bar{D} = D_{\bar{\Pi}}$.

Como \bar{D} es G -invariante, entonces por el Lema 2.2.6 la estructura de Poisson $\bar{\Pi}$ es G -invariante. \square

2.2.1. Ejemplo: acción del círculo en variedades 3-dimensionales

La condición de compatibilidad, Definición 2.2.2, nos permite construir una estructura de Dirac que es invariante con respecto a la acción de un grupo de Lie. Nuestro objetivo es construir ejemplos de estructuras de Poisson y Dirac en \mathbb{R}^3 , que sean compatibles con una acción de \mathbb{S}^1 dada.

Sea M una variedad suave de dimensión 3. Cada 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ define una distribución en M como

$$\Delta := \ker(\alpha).$$

Si además, M es una variedad orientable con forma de volumen Ω , existe una relación biyectiva entre 1-formas $\alpha \in \Omega^1(M)$ y bivectores $\Pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$, mediante la ecuación

$$\alpha = i_\Pi \Omega. \quad (2.10)$$

En este caso, el bivector Π es de Poisson si y sólo si $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Definición 2.2.8. Se dice que $\alpha \in \Omega^1(M)$ es una *forma de Poisson* si

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

Proposición 2.2.9. *La distribución Δ es suave. Más aún, Δ es integrable si y sólo si α es una forma de Poisson.*

Demostración. De la ecuación (2.10), el bivector Π asociado a α , tiene la propiedad que $\Pi^\sharp(T^*M) = \Delta$, cuando $\alpha \neq 0$. Entonces Δ es una distribución suave.

Ahora, α es una forma de Poisson si y sólo si Π es de Poisson, y entonces la distribución $\Pi^\sharp(T^*M)$ es integrable. \square

Teorema 2.2.10. *Si \mathbb{S}^1 actúa en M con generador infinitesimal Υ , entonces la acción es compatible con la estructura de Poisson asociada a una forma de Poisson α si*

1. $i_\Upsilon \alpha = 0$.

2. *La ecuación*

$$\alpha \wedge \rho = -i_\Upsilon \Omega \quad (2.11)$$

tiene solución para $\rho \in \Omega^1(M)$.

Demostración. La condición $i_\Upsilon \alpha = 0$ significa que la acción preserva cada hoja de foliación.

Ahora, tenemos que $\Pi^\sharp(\rho) = \Upsilon$ si y sólo si $i_{\Pi^\sharp(\rho)} \Omega = i_\Upsilon \Omega$. Por lo tanto, de la fórmula $i_{\Pi^\sharp(\rho)} \Omega = -\alpha \wedge \rho$, se sigue que $\Pi^\sharp(\rho) = \Upsilon$ si y sólo si $\alpha \wedge \rho = -i_\Upsilon \Omega$. \square

Notemos que la ecuación (2.11) implica que

$$\text{Ceros}(\alpha) \subset \text{Ceros}(\Upsilon). \quad (2.12)$$

Observación 2.2.11. Sea $p \in M$, si $\dim(\Delta_p) = 0$ entonces existe una forma simpléctica canónica en S dada por $\omega_S \equiv 0$. Por otro lado, si $\dim(\Delta_p) = 2$, existe una forma simpléctica $\tilde{\omega}_S$ en S . Sea f una función en M que sea 0 en algún punto donde $\tilde{\omega}_S$ sea no-degenerada. Entonces $\omega_S := f\tilde{\omega}_S$ es una forma pre-simpléctica en S . Del Teorema 1.3.12, se sigue que la foliación pre-simpléctica (S, ω_S) , tiene asociada una estructura de Dirac dada por

$$\begin{aligned} D_p &= \{(X_p, \beta_p) \mid X_p \in T_p S \text{ y } \beta_p|_{T_p S} = -i_{X_p} \omega_p\} \\ &= \{(\Pi^\sharp(\eta_p), -\omega_p^\flat \circ \Pi^\sharp(\eta_p)) \mid \eta_p \in T_p^* M\} \end{aligned}$$

Finalmente, podemos notar que la distribución característica de la estructura de Dirac es dada por

$$\text{pr}_1(D_p) = \Pi^\sharp(T_p^* M) = \Delta_p.$$

Caso \mathbb{R}^3 . Sea Ω_0 la forma de volumen Euclídeana en \mathbb{R}^3 . Consideremos la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^3 dada por rotaciones con respecto al eje z , el cual tiene como generador infinitesimal

$$\Upsilon = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sean $N, z: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas como

$$N(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \text{y} \quad z(x, y, z) = z$$

Lema 2.2.12. Una 1-forma α en \mathbb{R}^3 , satisface que $i_\Upsilon \alpha = 0$ si y sólo si

$$\alpha = f dN + g dz,$$

donde $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Demostración. Sea $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$, el campo vectorial Υ define una distribución regular de dimensión 1. Por lo cual, el conjunto de formas en T^*U que anulan a Υ definen un subhaz de rango 2.

Sean $N, z: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, las funciones definidas por

$$N(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad z(x, y, z) = z.$$

Notemos que las 1-formas dN y dz anulan a Υ , en efecto

$$i_\Upsilon dN = L_\Upsilon N = \Upsilon \cdot \nabla N = (-y, x, 0) \cdot (x, y, 0) = 0,$$

$$i_\Upsilon dz = L_\Upsilon z = \Upsilon \cdot \nabla z = (-y, x, 0) \cdot (0, 0, z) = 0.$$

Más aún, como las formas dN y dz son independientes en U , se sigue que dN y dz generan al subhaz de rango 2 anterior. Por lo cual, si α es una 1-forma diferencial en \mathbb{R}^3 tal que $i_\Upsilon \alpha = 0$, entonces existen $f, g \in C^\infty(U)$ tal que

$$\alpha|_U = f dN|_U + g dz|_U.$$

Mostremos que f, g puede ser extendidas a funciones suaves en todo \mathbb{R}^3 . Sea $\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz$. Como $\alpha|_U = fdN|_U + gd|_U$ se tiene que

$$\alpha_x|_U = fx, \quad \alpha_y|_U = fy \quad \text{y} \quad \alpha_z|_U = g.$$

Como α_x se anula en el plano $x = 0$, entonces α_x tiene que ser de la forma

$$\alpha_x = xh(x, y, z)$$

con h una función global en \mathbb{R}^3 . Por otro lado, α_y se anula en el plano $y = 0$, entonces tiene que ser de la forma

$$\alpha_y = yh'(x, y, z).$$

con h' una función global en \mathbb{R}^3 .

Puesto que h y h' son funciones globales tal que $f = h'|_U = h|_U$, el conjunto U es denso en \mathbb{R}^3 , y por continuidad de las funciones, se tiene que $h = h'$. Por lo tanto, podemos considerar las funciones f y g definidas en todo \mathbb{R}^3 .

Recíprocamente, si $\alpha = fdN + gdz$, se tiene que

$$i_\Upsilon \alpha = i_\Upsilon (fdN + gdz) = fi_\Upsilon dN + gi_\Upsilon dz = 0.$$

□

Notemos que cada 1-forma $\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz$ en \mathbb{R}^3 , tiene asociado un vector $\vec{\alpha}$ en \mathbb{R}^3 de la forma $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$. En este caso, la ecuación (2.11) es equivalente a la ecuación

$$\vec{\alpha} \times \vec{\rho} = -\overrightarrow{i_\Upsilon \Omega_0} \quad (2.13)$$

donde $\vec{\alpha}$, $\vec{\rho}$ y $\overrightarrow{i_\Upsilon \Omega_0}$ son los vectores asociados a α , ρ y $i_\Upsilon \Omega_0$ respectivamente. Por lo cual, una solución para la ecuación (2.13), es dada por

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{\alpha} \times \overrightarrow{i_\Upsilon \Omega_0}}{\|\vec{\alpha}\|^2} + c \cdot \vec{\alpha} \quad (2.14)$$

donde c es una función suave arbitraria.

Lema 2.2.13. *La 1-forma $\rho = \frac{1}{f} dz$, con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ una función que no se anula en ningún punto, es una solución de la ecuación (2.11).*

Demostración. De las ecuaciones (2.13) y (2.14), tenemos que la ecuación (2.11) tiene solución dada por

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{\alpha} \times \overrightarrow{i_\Upsilon \Omega_0}}{\|\vec{\alpha}\|^2} + c \cdot \vec{\alpha} = -\frac{(gx, g, y, -fy^2 - fx^2)}{f^2x^2 + f^2y^2 + g^2} + c(fx, fy, g).$$

Si tomamos $c = -\frac{g}{f\|\vec{\alpha}\|^2}$, entonces

$$\vec{\rho} = \left(0, 0, \frac{1}{f}\right),$$

y como f es una función que no se anula en ningún punto, entonces $\vec{\rho}$ es bien definida. □

Lema 2.2.14. *Sea $\alpha = fdN + gdz$ con f una función que no se anula en ningún punto. Entonces α es de Poisson si y sólo si $g = fI$, donde $I(x^2 + y^2, z)$ es una integral primera de Υ .*

Demostración. Dado $\alpha = fdN + gdz$, su diferencial es $d\alpha = df \wedge dN + dg \wedge dz$, entonces

$$\alpha \wedge d\alpha = (fdg - gdf) \wedge dN \wedge dz = 0,$$

si y solo si $fdg - gdf = c_1dN + c_2dz$, para funciones suaves $c_1, c_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Del Lema 2.2.12, se tiene que $fdg - gdf = c_1dN + c_2dz$ si y solo si

$$0 = i_\Upsilon(fdg - gdf) = fL_\Upsilon g - gL_\Upsilon f.$$

En este caso, la función $\frac{g}{f}$ es una integral primera de Υ , en efecto

$$L_\Upsilon \left(\frac{g}{f} \right) = \frac{fL_\Upsilon g - gL_\Upsilon f}{f^2} = 0,$$

lo cual implica que $\frac{g}{f} = I$, donde $I(x^2 + y^2, z)$ es una integral primera de Υ , y por tanto $g = fI$. \square

Teorema 2.2.15. *Una 1-forma α en \mathbb{R}^3 es compatible con la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^3 , si y sólo si*

$$\alpha = fdN + gdz$$

donde $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ con f una función que no se anula y g una función arbitraria. Más aún, α es una forma de Poisson si y solo si $\alpha = f(dN + Idz)$ donde $I(x^2 + y^2, z)$ es una integral primera del generador infinitesimal de la acción.

Demostración. De los Lemas 2.2.12 y 2.2.13, se sigue que una forma de Poisson α en \mathbb{R}^3 es compatible con la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R} si y solo si

$$\alpha = fdN + gdz$$

con f una función que no se anula en ningún punto.

Del Lema 2.2.14, se sigue que α es de Poisson si y solo si $g = fI$ donde $I(x^2 + y^2, z)$ es una integral primera del generador infinitesimal Υ . \square

Debido a que I es una integral primera del generador infinitesimal Υ , tenemos que los ceros de α es de la forma

$$\text{Ceros}(\alpha) \subset \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Lema 2.2.16. *Una 1-forma de Poisson α en \mathbb{R}^3 que es compatible con la acción de \mathbb{S}^1 , es \mathbb{S}^1 -invariante si y sólo si f es una función \mathbb{S}^1 -invariante.*

Demostración. Del Teorema 2.2.15, se sigue que $\alpha = f(dN + Idz)$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ una función que no se anula en ningún punto.

La 1-forma α es G -invariante si y sólo si $L_\Upsilon\alpha = 0$, esto es

$$L_\Upsilon\alpha = L_\Upsilon(f(dN + Idz)) = L_\Upsilon f \cdot (dN + Idz).$$

por lo tanto $L_\Upsilon\alpha = 0$ si y sólo si $L_\Upsilon f = 0$. \square

Entonces el promedio de una forma de Poisson α en \mathbb{R}^3 que es compatible con la acción de \mathbb{S}^1 , tiene la forma

$$\langle \alpha \rangle_G = \langle f \rangle_G (dN + Idz).$$

Caso lineal. Supongamos que Π es una estructura de Poisson lineal en \mathbb{R}^3 , con forma de volumen Euclídeana Ω_0 . Entonces existe una matriz $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}$ tal que la estructura de Poisson tiene la forma

$$\Pi = Ax \cdot \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial x}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$. En este caso la forma de Poisson es dada por

$$\alpha = i_\Pi \Omega_0 = -Ax \cdot dx. \quad (2.15)$$

Ahora, consideremos la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^3 por rotaciones alrededor del eje que contiene al vector $b = (b_1, b_2, b_3)$ y tal que $\|b\| = 1$. Entonces el generador infinitesimal de la acción es de la forma

$$\Upsilon = (\Lambda \circ b)x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.16)$$

donde $(\Lambda \circ b)$ es la matriz antisimétrica asociada a b y definida como

$$\Lambda \circ b = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos la descomposición de la matriz A como

$$A = S + (\Lambda \circ l), \quad (2.17)$$

donde S es la parte simétrica de A , $(\Lambda \circ l)$ es la parte antisimétrica de A asociada a un vector $l \in \mathbb{R}^3$.

Notemos que la identidad de Jacobi del bivector Π es equivalente a la ecuación

$$Sl = 0. \quad (2.18)$$

Lema 2.2.17. Para la 1-forma α dada por (2.15) y el campo vectorial Υ dado por (2.16). La condición $i_\Upsilon\alpha = 0$ es equivalente a $(\Lambda \circ b)A - A^T(\Lambda \circ b) = 0$.

Demostración. Tenemos que

$$i_{\Upsilon}\alpha = -i_{(\Lambda \circ b)x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} Ax \cdot dx = 0$$

si y sólo si $\langle (\Lambda \circ b), Ax \rangle = 0$ lo cual equivale a

$$x^T (\Lambda \circ b)^T Ax = -x^T (\Lambda \circ b) Ax = 0.$$

Esta ecuación se cumple si la parte simétrica de la matriz $(\Lambda \circ b)A$ es cero es decir

$$(\Lambda \circ b)A - A^T(\Lambda \circ b) = 0.$$

□

Teorema 2.2.18. *Sea Π una estructura de Poisson lineal en \mathbb{R}^3 . Consideremos la acción de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^3 definida por el flujo del campo vectorial Υ dado por (2.16). Si la acción deja invariante cada hoja de la foliación simpléctica de Π , entonces la estructura de Poisson es invariante con respecto a dicha acción. En particular, esto es cierto en el caso cuando la acción de \mathbb{S}^1 es compatible con Π .*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha_p = 0$, esto es que $Sp + (\Lambda \circ l)p = 0$. De la ecuación (2.12) se sigue que $(\Lambda \circ b)p = 0$. Si tomamos $p = l$, entonces $(\Lambda \circ b)l = b \times l = 0$, por lo tanto existe una constante c tal que $l = c \cdot b$.

Del Lema 2.2.17, se tiene que la condición $i_{\Upsilon}\alpha = 0$ es equivalente a la ecuación $(\Lambda \circ b)A - A^T(\Lambda \circ b) = 0$. Tomando la descomposición de $A = S + (\Lambda \circ l)$, se tiene que

$$\begin{aligned} & (\Lambda \circ b)(S + c(\Lambda \circ b)) - (S - c(\Lambda \circ b))(\Lambda \circ b), \\ &= (\Lambda \circ b)S + c(\Lambda \circ b)^2 - S(\Lambda \circ b) + c(\Lambda \circ b)^2, \\ &= [\Lambda \circ b, S] + 2c(\Lambda \circ b)^2 = 0. \end{aligned}$$

Fijemos $\{b, X_1, X_2\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^3 tal que

$$(\Lambda \circ b)X_1 = -X_2 \quad (\Lambda \circ b)X_2 = X_1.$$

De la propiedad $l \times b = 0$ y de la ecuación (2.18) se sigue que $Sb = 0$. Luego podemos escribir $SX_1 = S_{11}X_1 + S_{12}X_2$ y $SX_2 = S_{21}X_1 + S_{22}X_2$.

Entonces evaluando la ecuación $[\Lambda \circ b, S] + 2c(\Lambda \circ b)^2 = 0$ en el elemento básico X_1 tenemos que

$$\begin{aligned} & [\Lambda \circ b, S]X_1 + 2c(\Lambda \circ b)^2X_1 = 0, \\ \Leftrightarrow & (\Lambda \circ b)SX_1 + c(\Lambda \circ b)^2X_1 - S(\Lambda \circ b)X_1 + c(\Lambda \circ b)^2X_1 = 0, \\ \Leftrightarrow & -S_{11}X_2 + S_{12}X_1 + S_{21}X_1 + S_{22}X_2 - 2cX_1 = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, evaluando en X_2 tenemos que

$$\begin{aligned} & [\Lambda \circ b, S]X_2 + 2c(\Lambda \circ b)^2X_2 = 0, \\ \Leftrightarrow & (\Lambda \circ b)SX_2 + c(\Lambda \circ b)^2X_2 - S(\Lambda \circ b)X_2 + c(\Lambda \circ b)^2X_2 = 0, \\ \Leftrightarrow & -S_{21}X_2 + S_{22}X_1 - S_{11}X_1 + S_{12}X_2 - 2cX_2 = 0. \end{aligned}$$

entonces tenemos que la acción preserva cada hoja de foliación si y solo si se satisface el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} S_{12} + S_{21} - 2c = 0, \\ S_{22} - S_{11} = 0, \\ S_{21} + S_{12} + 2c = 0, \end{cases}$$

es decir, cuando $c = 0$, $S_{11} = S_{22}$ y $S_{12} = -S_{21}$, y entonces A es una matriz simétrica.

Ahora, supongamos que la acción preserva cada hoja de la foliación, es decir, $i_{\Upsilon}\alpha = 0$ y la matriz A es una matriz simétrica, por lo cual $d\alpha = 0$. Como Υ está definido por una matriz antisimétrica, entonces $\text{div}(\Upsilon) = 0$. Por lo tanto, se cumple que

$$L_{\Upsilon}\alpha = i_{\Upsilon}d\alpha + \text{div}(\Upsilon)\alpha = 0,$$

es decir la acción preserva la estructura de Poisson. \square

Observación 2.2.19. Si suponemos que la acción preserva cada hoja de foliación, entonces de la demostración del Teorema 2.2.18, tenemos que la matriz A , de la ecuación (2.17), es una matriz simétrica de la forma

$$\begin{pmatrix} m & 0 & u \\ 0 & m & v \\ u & v & t \end{pmatrix}.$$

Consideremos el plano ortogonal al vector b , y tomemos dos vectores linealmente independientes en este plano ortogonal. Notemos que A es invariante en este plano y entonces A es únicamente determinado por su valor en este espacio.

2.3. Estructuras de Poisson invariantes alrededor de hojas simplécticas

En esta sección, vamos a dar condiciones suficientes para la existencia de estructuras de Poisson invariantes, alrededor de hojas simplécticas.

Sea (M, \mathcal{F}) una variedad foliada, es decir, M es una variedad suave equipada con una foliación regular \mathcal{F} . Denotemos por

$$\mathbb{V} := T\mathcal{F},$$

el haz tangente de \mathcal{F} y por $\mathbb{V}^0 \subset T^*M$ su anulador.

Definición 2.3.1. Un bivector de Poisson $\Pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , se dice que es de \mathcal{F} -*acoplamiento*, si la distribución

$$\mathbb{H} := \Pi^{\sharp}(\mathbb{V}^0),$$

es un haz normal de la foliación, es decir

$$TM = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}.$$

En este caso tenemos la descomposición en el cotangente dada por

$$T^*M = \mathbb{V}^0 \oplus \mathbb{H}^0, \quad (2.19)$$

entonces podemos definir una bigraduación de formas diferenciales y multivectores en M como

$$\Omega^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M) \quad \chi^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \chi^{p,q}(M).$$

Una k -forma diferencial (multivector) que esta en el espacio $\Omega^{p,q}(M)$ ($\chi^{p,q}(M)$) se dice ser de bigrado (p, q) .

Se puede probar que la diferencial exterior es un operador bigraduado con la siguiente descomposición [25], [8]

$$d = d_{1,0} + d_{2,-1} + d_{0,1}.$$

Si Π es un bivector de Poisson de \mathcal{F} -acoplamiento Para cada bivector de Poisson Π de \mathcal{F} -acoplamiento, tenemos la descomposición

$$\Pi = \Pi_{2,0} + \Pi_{0,2},$$

donde $\Pi_{2,0} \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{H})$ es un bivector tal que $\text{rk}(\Pi_{2,0}) = \dim \mathbb{H}$. Lo cual implica que

$$\Pi_{2,0}^\sharp(\mathbb{V}^0) = \mathbb{H},$$

y $\Pi_{0,2} \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{V})$ es un tensor de Poisson tangente por hojas. Es decir,

$$\Pi_{0,2}^\sharp(T^*M) \subset \mathbb{V} \quad \text{y} \quad [\Pi_{0,2}, \Pi_{0,2}]_{SCH} = 0.$$

Cada 1-forma β en M se puede descomponer como $\beta = \beta_{1,0} + \beta_{0,1}$, donde $\beta_{1,0} \in \Gamma(\mathbb{V}^0)$ y $\beta_{0,1} \in \Gamma(\mathbb{H}^0)$, por lo cual

$$\Pi^\sharp \beta = \Pi_{2,0}^\sharp \beta_{1,0} + \Pi_{0,2}^\sharp \beta_{0,1}, \quad (2.20)$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \Pi^\sharp(T^*M) &= \Pi^\sharp(\mathbb{V}^0 \oplus \mathbb{H}^0) = \Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp(\mathbb{V}^0 \oplus \mathbb{H}^0), \\ &= \Pi_{2,0}^\sharp(\mathbb{V}^0) \oplus \Pi_{2,0}^\sharp(\mathbb{H}^0) + \Pi_{0,2}^\sharp(\mathbb{V}^0) \oplus \Pi_{0,2}^\sharp(\mathbb{H}^0), \\ &= \Pi_{2,0}^\sharp(\mathbb{V}^0) \oplus \Pi_{0,2}^\sharp(\mathbb{H}^0) = \mathbb{H} \oplus \Pi_{0,2}^\sharp(\mathbb{H}^0). \end{aligned}$$

En consecuencia, la distribución característica de Π , es la suma directa de la distribución \mathbb{H} y la distribución característica de $\Pi_{0,2}$. Esto muestra que el conjunto de puntos singulares de las estructuras de Poisson Π y $\Pi_{0,2}$ coinciden. Además, la distribución \mathbb{H} es integrable si y sólo si $\Pi_{0,2}$ es un tensor de Poisson.

Teorema 2.3.2. *Sea (M, \mathcal{F}) una variedad foliada y sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie compacto y conexo que preserva la foliación. Sea Π una estructura de Poisson de \mathcal{F} -acoplamiento en M y S una hoja simpléctica de Π , que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Existe un morfismo $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$, tal que los generadores infinitesimales de la G -acción son de la forma

$$a_M = \Pi_{0,2}^\sharp(\mu_a), \quad (2.21)$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$.

2. La foliación es transversal a la hoja simpléctica S , es decir

$$T_S M = TS \oplus T_S \mathcal{F}. \quad (2.22)$$

Entonces existe un entorno G -invariante N de S , y existe una estructura de Poisson G -invariante $\bar{\Pi}$ en N . Más aún, podemos tomar N de tal manera que $\bar{\Pi}$ y Π son isomorfos.

Para mostrar el Teorema 2.3.2, es necesario mostrar los siguientes lemas.

Lema 2.3.3. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.3.2, la G -acción es compatible con la estructura de Poisson Π . Más aún, la 1-forma diferencial ρ , de la ecuación de compatibilidad (2.8), es de la forma $\rho_a = (\mu_a)_{0,1} \in \Gamma(\mathbb{H}^0)$, para todo $a \in \mathfrak{g}$, y satisface que $\delta^G((\mu_a)_{0,1})$ es una 1-forma cerrada en S .*

Demostración. De las ecuaciones (2.20) y (2.21), se sigue que

$$a_M = \Pi_{0,2}^\sharp((\mu_a)_{0,1}) = \Pi_{2,0}^\sharp((\mu_a)_{0,1}) + \Pi_{0,2}^\sharp((\mu_a)_{0,1}) = \Pi^\sharp((\mu_a)_{0,1})$$

lo cual implica que la condición de compatibilidad (2.8) se cumple para $\rho_a = (\mu_a)_{0,1}$.

Como la foliación es transversal a la hoja simpléctica S y $(\mu_a)_{0,1} \in \Gamma(\mathbb{H}^0)$, entonces

$$i_S^*(\mu_a)_{0,1} = 0.$$

y entonces $d(i_S^*(\mu_a)_{0,1}) = 0$. Finalmente, del Lema 2.1.9, obtenemos que

$$0 = \delta^G(d(i_S^*(\mu_a)_{0,1})) = d\delta^G(i_S^*(\mu_a)_{0,1}) = d\delta^G((\mu_a)_{0,1}|_S),$$

y por tanto $\delta^G((\mu_a)_{0,1})$ es una forma cerrada en S . □

Lema 2.3.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.3.2, la familia de morfismos*

$$\text{Id} - tB^\sharp \circ \Pi^\sharp,$$

con $B := -d\delta^G((\mu_a)_{0,1})$, es invertible en S para cada $t \in [0, 1]$.

Demostración. El Lema 2.3.3 implica que $i_S^*B = 0$ o equivalentemente $B^\flat(TS) \subseteq (TS)^0$. Como la foliación es transversal a las hojas simplécticas se tiene que

$$T_S^*M = \mathbb{V}_S^0 \oplus (TS)^0,$$

entonces obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \Pi^\sharp(T_S^*M) &= \Pi^\sharp(\mathbb{V}_S^0) \oplus \Pi^\sharp((TS)^0), \\
 &= \Pi_{2,0}^\sharp(\mathbb{V}_S^0) + \Pi_{0,2}^\sharp(\mathbb{V}_S^0) \oplus \Pi_{2,0}^\sharp((TS)^0) + \Pi_{0,2}^\sharp((TS)^0), \\
 &= \Pi_{2,0}^\sharp(\mathbb{V}_S^0) = TS.
 \end{aligned}$$

Como $\Pi^\sharp(\mathbb{V}_S^0) = TS$, para cada $\alpha \in \mathbb{V}_S^0$ se tiene que $\Pi^\sharp(\alpha) \in TS$, entonces $B^b \circ \Pi^\sharp(\alpha) \in (TS)^0$, y por tanto

$$B^b \circ \Pi^\sharp(\mathbb{V}_S^0) \subseteq (TS)^0.$$

Por otro lado, como $\Pi^\sharp((TS)^0) = 0$ entonces

$$B^b \circ \Pi^\sharp((TS)^0) = 0.$$

Estas inclusiones nos dicen que la matriz del morfismo $B^b \circ \Pi^\sharp|_S: T_S^*M \rightarrow T_S^*M$, con respecto a la descomposición $T_S^*M = \mathbb{V}_S^0 \oplus (TS)^0$, es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \star & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, para cada $t \in [0, 1]$, el morfismo $\text{Id} - tB^b \circ \Pi^\sharp$ es invertible en S . \square

Demostración del Teorema 2.3.2. Por el Lema 2.3.3, tenemos que la G -acción es compatible con la estructura de Poisson Π . Del Lema 2.3.4, se sigue que el morfismo $\text{Id} - tB^b \circ \Pi^\sharp$ es invertible para cada $t \in [0, 1]$, donde $B = -d(\delta^G((\mu_a)_{0,1}))$. Entonces existe una vecindad N de S en la cual este morfismo es invertible. Más aún, como G es un grupo de Lie compacto, entonces podemos escoger la vecindad N como una vecindad G -invariante.

Para cada $t \in [0, 1]$, aplicamos el Teorema 2.2.7 para obtener una familia de estructuras de Poisson G -invariantes Π_t , tal que

$$\tau_{tB}(D_\Pi) = \text{Graf}(\Pi_t^\sharp),$$

y donde la estructura de Poisson Π_t , es definida como

$$\Pi_t^\sharp = \Pi^\sharp \circ (\text{Id} - tB^b \circ \Pi^\sharp)^{-1},$$

notemos que $\Pi_0 = \Pi$ y denotamos por

$$\Pi_1 = \bar{\Pi}. \tag{2.23}$$

Denotemos $\theta := \delta^G((\mu_a)_{0,1})$. La familia de estructuras de Poisson $\{\Pi_t\}$ forman un camino que une Π con $\bar{\Pi}$. Definimos un campo vectorial que depende de t como

$$Z_t = -\Pi_t^\sharp(\theta) = -\Pi^\sharp \circ (\text{Id} + t(d\theta)^b \circ \Pi^\sharp)^{-1}(\theta),$$

y mostremos que Z_t satisface la siguiente ecuación homológica

$$[Z_t, \Pi_t]_{SCH} + \frac{d}{dt} \Pi_t = 0,$$

en efecto, por propiedades del corchete de Schouten tenemos que

$$[Z_t, \Pi_t]_{SCH} = -[\Pi_t^\sharp(\theta), \Pi_t]_{SCH} = -\Pi_t^\sharp(d\theta),$$

por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi_t^\sharp &= \frac{d}{dt} \left(\Pi^\sharp(\text{Id} + t(d\theta)^\flat \circ \Pi^\sharp)^{-1} \right), \\ &= -\Pi^\sharp(\text{Id} + t(d\theta)^\flat \circ \Pi^\sharp)^{-1} \circ (d\theta)^\flat \circ \Pi^\sharp(\text{Id} + t(d\theta)^\flat \circ \Pi^\sharp)^{-1}, \\ &= -\Pi_t^\sharp \circ (d\theta)^\flat \circ \Pi_t^\sharp = (\Pi_t^\sharp(d\theta))^\sharp, \end{aligned}$$

por lo tanto el campo Z_t cumple la ecuación homológica.

Ahora, $\theta|_{T_S M} \in (TS)^0$, como $\Pi^\sharp((TS)^0) = 0$ se tiene que

$$Z_t|_S = -\Pi_t^\sharp(\theta)|_S = 0,$$

por lo tanto el flujo de Z_t es bien definido en todo N , para todo $t \in [0, 1]$. Sea

$$\phi^t := \text{Fl}_{Z_t}^t: N \rightarrow M,$$

el flujo de Z_t . Notemos que $\phi^t|_S = \text{Id}_S$, y además $(\phi^t)^* \Pi_t = \Pi_0$, para todo $t \in [0, 1]$. Por lo tanto, el difeomorfismo $\phi^1: N \rightarrow M$ cumple que

$$(\phi^1)^* \Pi_1 = \Pi_0,$$

así, de la ecuación (2.23) se sigue que

$$(\phi^1)^* \bar{\Pi} = \bar{\Pi}.$$

□

Bajo las hipótesis del Teorema 2.3.2. Dada una variedad de Poisson (M, Π) , existe una estructura de Poisson $\bar{\Pi}$ (2.23), que es invariante con respecto a la G -acción de un grupo de Lie compacto. Esta estructura invariante está definida en una vecindad G -invariante N de una hoja simpléctica S de Π . Ahora, $\bar{\Pi}$ tiene una bigraduación $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_{2,0} + \bar{\Pi}_{0,2}$ con respecto a la descomposición

$$T_N M = \bar{\mathbb{H}} \oplus \mathbb{V}_N.$$

donde $\bar{\mathbb{H}}$ es el haz normal G -invariante de \mathcal{F} respecto a $\bar{\Pi}$.

Proposición 2.3.5. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.3.2. La estructura de Poisson G -invariante $\bar{\Pi}$, definida en la ecuación (2.23), tiene una descomposición de la forma*

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_{2,0} + \bar{\Pi}_{0,2}, \tag{2.24}$$

por bivectores G -invariantes.

Demostración. Puesto que las distribuciones características de Π y $\bar{\Pi}$ coinciden en N , entonces S es una hoja simpléctica de $\bar{\Pi}$. Por lo cual, podemos definir

$$\bar{\mathbb{H}} = \bar{\Pi}^\sharp(\mathbb{V}^0),$$

haz normal de la foliación \mathcal{F} , y entonces tenemos la descomposición

$$TM = \bar{\mathbb{H}} \oplus \mathbb{V}.$$

Así, la estructura de Poisson $\bar{\Pi}$, se puede escribir como

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_{2,0} + \bar{\Pi}_{0,2}.$$

Ahora, como $a_M = \Pi_{0,2}^\sharp \mu_a$ para cada $a \in \mathfrak{g}$, entonces $a_M \in \Gamma(\mathbb{V})$. Entonces tenemos que

$$[\bar{\Pi}_{2,0}, a_M]_{SCH} \in \chi^{2,0}(M) \oplus \chi^{1,1}(M) \quad [\bar{\Pi}_{0,2}, a_M]_{SCH} \in \chi^{0,2}(M),$$

y como $\bar{\Pi}$ es G -invariante, se tiene que

$$0 = L_{a_M} \bar{\Pi} = [\bar{\Pi}, a_M]_{SCH} = [\bar{\Pi}_{2,0}, a_M]_{SCH} + [\bar{\Pi}_{0,2}, a_M]_{SCH},$$

por lo cual $[\bar{\Pi}_{2,0}, a_M]_{SCH} = [\bar{\Pi}_{0,2}, a_M]_{SCH} = 0$, y entonces $\bar{\Pi}_{2,0}$ $\bar{\Pi}_{0,2}$ son bivectores G -invariante. \square

Proposición 2.3.6. *La estructura de Poisson G -invariante $\bar{\Pi}_{0,2}$, definida en la ecuación (2.24), es de la forma*

$$\bar{\Pi}_{0,2}^\sharp = \Pi_{0,2}^\sharp \circ (Id - B_{0,2}^b \circ \Pi_{0,2}^\sharp)^{-1},$$

donde $B = -d(\delta^G(\mu_{0,1}))$.

Demostración. De la ecuación (2.9), tenemos que $\bar{\Pi}^\sharp = \Pi^\sharp \circ (Id - B^b \circ \Pi^\sharp)^{-1}$, al descomponer esta ecuación en bi-grados, obtenemos

$$\bar{\Pi}_{2,0}^\sharp + \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp = (\Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp) \circ (Id - B^b \circ (\Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp))^{-1},$$

componiendo esta igualdad con $(Id - B^b \circ (\Pi_{0,2}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp))$ por ambos lados obtenemos

$$\bar{\Pi}_{2,0}^\sharp + \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp - \bar{\Pi}_{2,0}^\sharp (Id - B^b \circ (\Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp)) - \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp (Id - B^b \circ (\Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp)) = (\Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp).$$

Como $\bar{\Pi}_{2,0}^\sharp(T^*M) = \bar{\mathbb{H}}$, $\bar{\Pi}_{0,2}^\sharp(T^*M) \subset \mathbb{V}$ y si $\bar{p}_V: TM \rightarrow \mathbb{V}$ es la proyección a lo largo de $\bar{\mathbb{H}}$, entonces podemos descomponer esta fórmula como

$$\begin{cases} \bar{\Pi}_{2,0}^\sharp - \bar{\Pi}_{2,0}^\sharp \circ B^b \circ (\Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp) &= (Id - \bar{p}_V) \circ \Pi_{2,0}^\sharp, \\ \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp - \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp \circ B^b \circ (\Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp) &= \bar{p}_V \circ \Pi_{2,0}^\sharp + \Pi_{0,2}^\sharp. \end{cases} \quad (2.25)$$

Como $\Pi_{2,0}^\sharp(\mathbb{H}^0) = 0$ y $\Pi_{0,2}^\sharp = \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp(\mathbb{V}^0) = 0$, entonces la segunda ecuación de (2.25) se puede escribir como

$$\begin{cases} \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp - \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp \circ B^b \circ \Pi_{0,2}^\sharp &= \Pi_{0,2}^\sharp, \\ -\bar{\Pi}_{0,2}^\sharp \circ B^b \circ \Pi_{2,0}^\sharp &= \bar{p}_V \circ \Pi_{2,0}^\sharp. \end{cases} \quad (2.26)$$

Si tomamos $B = B_{2,0} + B_{1,1} + B_{0,2}$ obtenemos de la primera ecuación de (2.26) que

$$\bar{\Pi}_{0,2}^\sharp - \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp \circ (B_{2,0} + B_{1,1} + B_{0,2}) \circ \Pi_{0,2}^\sharp = \Pi_{0,2}^\sharp,$$

usando que $B_{2,0}^b(\mathbb{V}) = 0$ y $B_{1,1}^b(\mathbb{V}) \subset \mathbb{V}^0$ obtenemos

$$\bar{\Pi}_{0,2}^\sharp - \bar{\Pi}_{0,2}^\sharp \circ B_{0,2}^b \circ \Pi_{0,2}^\sharp = \Pi_{0,2}^\sharp,$$

y por lo tanto

$$\bar{\Pi}_{0,2}^\sharp = \Pi_{0,2}^\sharp \circ (\text{Id} - B^b \circ \Pi_{0,2}^\sharp)^{-1}.$$

□

Observación 2.3.7. Si la distribución \mathbb{H} es integrable, entonces el bivector de Poisson invariante $\bar{\Pi}$ se descompone en dos estructuras de Poisson G -invariantes $\bar{\Pi}_{2,0}$ y $\bar{\Pi}_{0,2}$.

2.4. Compatibilidad en haces fibrados de Poisson: El caso de acciones de \mathbb{S}^1

En esta sección estudiaremos el caso de tener la acción de \mathbb{S}^1 en un haz fibrado de Poisson, daremos condiciones para las cuales dicha acción es compatible con una estructura de Poisson dada.

Sea (E, π, S) un haz fibrado. La distribución vertical \mathbb{V} del haz se define como la distribución tangente a las fibras, es decir

$$\mathbb{V} := \ker(T\pi).$$

Definición 2.4.1. Un haz fibrado de Poisson es un par $(\pi: E \rightarrow S)$ donde $\pi: E \rightarrow S$ es un haz fibrado en una variedad suave S , y P un bivector de Poisson tal que $P \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{V})$.

Teorema 2.4.2. Sea (E, π, S, P) un haz fibrado de Poisson con fibra F . Supongamos que $\Phi: \mathbb{S}^1 \times E \rightarrow E$ es una acción de \mathbb{S}^1 en E , tal que el generador infinitesimal de la acción es de la forma

$$\Upsilon = P^\sharp(\mu), \quad (2.27)$$

para algún $\mu \in \Omega^1(E)$. Entonces una estructura de Poisson Π en E es compatible con dada acción si existe una distribución horizontal \mathbb{H} en E tal que

$$\Pi = \Pi_{2,0} + \Pi_{0,2},$$

con $\Pi_{0,2} = P$.

2.4 Compatibilidad en haces fibrados de Poisson: El caso de acciones de \mathbb{S}^1

Demostración. La distribución horizontal \mathbb{H} nos da una descomposición de μ como $\mu = \mu_{1,0} + \mu_{0,1}$, donde $\mu_{0,1} \in \Gamma(\mathbb{H}^\circ)$ y $\mu_{1,0} \in \Gamma((TF)^\circ)$. Por hipótesis tenemos que

$$\Upsilon = \Pi_{0,2}^\sharp(\mu) = \Pi_{0,2}^\sharp(\mu_{1,0} + \mu_{0,1}) = \Pi_{0,2}^\sharp(\mu_{0,1}),$$

por otro lado tenemos que

$$\Pi^\sharp(\mu_{0,1}) = \Pi_{2,0}^\sharp(\mu_{0,1}) + \Pi_{0,2}^\sharp(\mu_{0,1}) = \Pi_{0,2}^\sharp(\mu_{0,1}) = \Upsilon.$$

Por lo tanto la condición de compatibilidad descrita en el Teorema 2.2.7 se cumple para $\rho = \mu_{0,1}$, lo cual implica que Π es compatible con la acción de \mathbb{S}^1 en E . \square

Observación 2.4.3. El Teorema 2.4.2, se sigue cumpliendo en el caso de tener la acción de un grupo de Lie compacto G en el espacio total E de un haz de Poisson. Sustituyendo la hipótesis (2.27) por la siguiente: Existe $\mu \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \Omega^1(E))$, tal que para todo $a \in \mathfrak{g}$, los generadores infinitesimales son de la forma

$$a_E = P^\sharp(\mu_a).$$

Corolario 2.4.4. *La 1-forma ρ que cumple con la condición de compatibilidad*

$$\Upsilon = \Pi^\sharp(\rho),$$

es dada por $\rho = \mu_{0,1}$.

Definición 2.4.5. Una estructura de Poisson Π en un haz fibrado $(E \rightarrow S, F)$ con fibra F , se llama de *casi-acoplamiento* si existe una distribución horizontal \mathbb{H} en E tal que

$$\Pi = \Pi_{2,0} + \Pi_{0,2},$$

con $\Pi_{2,0} \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{H})$ y $\Pi_{0,2} \in \Gamma(\wedge^2 TF)$.

Teorema 2.4.6. *Sea $(E \rightarrow S, P)$ un haz fibrado de Poisson, consideremos una acción de \mathbb{S}^1 en E , tal que el generador infinitesimal de la acción es de la forma*

$$\Upsilon = P^\sharp(\mu),$$

para algun $\mu \in \Omega^1(E)$. Sea Π una estructura de Poisson en E de casi-acoplamiento via una distribución \mathbb{H} con $\Pi_{0,2} = P$. Entonces, existe una estructura de Dirac \mathbb{S}^1 -invariante

$$\overline{D} = \{(X, \alpha - i_X B) \mid (X, \alpha) \in D_\Pi\},$$

con $B := -dQ$ y donde Q esta dado por la formula

$$Q := \delta^{\mathbb{S}^1}(\mu_{0,1}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi)(\text{Fl}_\Upsilon^t)^* \mu_{0,1} + \pi \langle \mu_{0,1} \rangle_{\mathbb{S}^1}. \quad (2.28)$$

En particular, si el morfismo

$$\text{Id} - (B^\flat \circ \Pi^\sharp),$$

es invertible, entonces existe una estructura de Poisson \mathbb{S}^1 -invariante $\overline{\Pi}$, tal que

$$\overline{D} = D_{\overline{\Pi}} := \text{Graf}(\overline{\Pi}^\sharp).$$

Demostración. Como consecuencia del Teorema 2.4.2, tenemos que la \mathbb{S}^1 -acción es compatible con Π , donde la forma de compatibilidad es $\rho = \mu_{0,1}$. Definamos la 1-forma $Q := \delta^{\mathbb{S}^1}(\rho)$, entonces del Lema 2.1.12 se sigue que

$$Q = \delta^{\mathbb{S}^1}(\mu_{0,1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi)(\text{Fl}_T^t)^* \mu_{0,1} + \pi \langle \mu_{0,1} \rangle_{\mathbb{S}^1}.$$

Sea D_Π la estructura de Dirac asociada a Π , entonces del Teorema 2.2.5 existe una estructura de Dirac \mathbb{S}^1 -invariante \overline{D} , que se relaciona con D_Π por la transformación de B -gauge donde $B := -dQ$. Es decir,

$$\overline{D} = \tau_B(D_\Pi) = \{(X, \alpha - i_X B) \mid (X, \alpha) \in D_\Pi\}.$$

En particular, si $\text{Id} - (B^\flat \circ \Pi^\sharp)$ es invertible, entonces por la Proposición 1.4.4, existe una estructura de Poisson $\overline{\Pi}$ tal que $\overline{D} = D_{\overline{\Pi}}$. \square

Del Teorema 2.4.2, supongamos que μ es una forma diferencial cerrada. Entonces tomando la descomposición del diferencial $d = d_{1,0} + d_{2,-1} + d_{0,1}$, dada por la distribución horizontal \mathbb{H} , se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= d = d_{1,0}\mu + d_{2,-1}\mu + d_{0,1}\mu, \\ &= d_{1,0}(\mu_{1,0}) + d_{1,0}(\mu_{0,1}) + d_{2,-1}(\mu_{1,0}) + d_{2,-1}(\mu_{0,1}), \\ &\quad + d_{0,1}(\mu_{1,0}) + d_{0,1}(\mu_{0,1}). \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} (d\mu)_{0,2} = d_{0,1}(\mu_{0,1}) = 0, \\ (d\mu)_{2,0} = d_{1,0}(\mu_{1,0}) + d_{2,-1}(\mu_{0,1}) = 0, \\ (d\mu)_{1,1} = d_{1,0}(\mu_{0,1}) + d_{0,1}(\mu_{1,0}) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Como $\delta^{\mathbb{S}^1}$ conmuta con la derivada exterior, la 1-forma $\delta^G(\mu_a)$ es cerrada, y la 2-forma de gauge B del Teorema 2.4.6, puede ser representada por $B = -dQ$, donde

$$Q = -\delta^{\mathbb{S}^1}(\mu_{1,0}) \in \Gamma(\mathbb{V}^\circ). \quad (2.30)$$

En efecto, de la ecuación (2.28) tenemos que $Q = \delta^{\mathbb{S}^1}(d\mu_{0,1})$, ahora, como $d(\mu) = 0$ y $\mu = \mu_{1,0} + \mu_{0,1}$ entonces $d\delta^G(\mu_{1,0} + \mu_{0,1}) = 0$ y por lo tanto

$$d\delta^G(\mu_{1,0}) = -d\delta^G(\mu_{0,1}).$$

Finalmente, de la ecuación (2.29) se sigue que $B_{0,2} = 0$, luego

$$\begin{aligned} \delta^{\mathbb{S}^1} dQ &= \delta^{\mathbb{S}^1}(d\mu_{1,0}) = \delta^{\mathbb{S}^1}(d_{1,0}\mu_{1,0} + d_{2,-1}\mu_{1,0} + d_{0,1}\mu_{1,0}), \\ &= \delta^{\mathbb{S}^1}(d_{1,0}\mu_{1,0} + d_{0,1}\mu_{1,0}) = d_{1,0}\delta^{\mathbb{S}^1}(\mu_{1,0}) + d_{0,1}\delta^{\mathbb{S}^1}(\mu_{1,0}), \end{aligned}$$

2.4 Compatibilidad en haces fibrados de Poisson: El caso de acciones de \mathbb{S}^1

y entonces $B = B_{2,0} + B_{1,1}$ con

$$B_{2,0} = d_{1,0}\delta^{\mathbb{S}^1}(\mu_{1,0}) \quad B_{1,1} = d_{0,1}\delta^{\mathbb{S}^1}(\mu_{1,0}).$$

En particular, si la acción de \mathbb{S}^1 es Hamiltoniana con momentum map $J: \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(E)$ entonces

$$\Upsilon = \Pi_{0,2}^\sharp dJ_1, \quad Q = -\delta^{\mathbb{S}^1}(d_{1,0}J_1),$$

y

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) (\text{Fl}_{\Pi_{0,2}^\sharp dJ_1}^t)^* d_{1,0}J_1 dt - \pi \langle d_{1,0}J_1 \rangle_{\mathbb{S}^1}.$$

Capítulo 3

Estructuras de Dirac invariantes en variedades foliadas

El objetivo general de este capítulo es construir estructuras de Dirac en variedades foliadas, que son invariantes con respecto a la acción de un grupo de Lie compacto. Para esto, usaremos herramientas de conexiones de Ehresmann en variedades foliadas [9], el método de promedios [19] y el método de acoplamiento [8] [26].

En la sección 3.2, aplicaremos el método de promedios para construir conexiones de Ehresmann que son invariantes con respecto a la acción de un grupo de Lie compacto. Luego, daremos condiciones suficientes donde el operador de promedios preserve el conjunto de conexiones de Poisson. En la sección 3.3, vamos a presentar una generalización de las conexiones de Hannay-Berry en haces fibrados de Poisson [19], en el contexto de variedades foliadas de Poisson. En la sección 3.4, daremos condiciones suficientes donde el operador de promedios preserve el conjunto de conexiones de Poisson con curvatura Hamiltoniana. Finalmente, en la sección 3.5, vamos a aplicar el operador de promedios y el método de acoplamiento para construir estructuras de Dirac invariantes en variedades foliadas.

3.1. Conexiones en variedades foliadas

En esta sección introducimos nociones básicas sobre conexiones de Ehresmann en variedades foliadas, así como algunas propiedades importantes que usaremos a lo largo de este capítulo.

Una variedad foliada es un par (M, \mathcal{F}) , donde M es una variedad diferencial y \mathcal{F} es una foliación \mathcal{F} regular en M . La foliación \mathcal{F} , nos permite definir una distribución integrable

$$\mathbb{V} := T\mathcal{F},$$

llamada *distribución vertical*.

Definición 3.1.1. Un morfismo de haces vectoriales $\gamma: TM \rightarrow TM$ se dice ser una conexión de Ehresmann si

1. $\gamma \circ \gamma = \gamma$.
2. $\gamma(TM) = \mathbb{V}$.

La condición (2) en la definición 3.1.1, es equivalente a la condición

$$\gamma|_{\mathbb{V}} = \text{id}_{\mathbb{V}}.$$

Cada conexión de Ehresmann γ define una distribución suave en M , dada por

$$\mathbb{H}^\gamma := \ker(\gamma),$$

la cual es llamada *distribución γ -horizontal*. Esta distribución es complementaria con \mathbb{V} en el sentido que

$$TM = \mathbb{H}^\gamma \oplus \mathbb{V}, \quad (3.1)$$

lo cual induce una descomposición del haz cotangente T^*M dada por

$$T^*M = (\mathbb{V})^0 \oplus (\mathbb{H}^\gamma)^0, \quad (3.2)$$

donde $(\mathbb{H}^\gamma)^0$ y $(\mathbb{V})^0$ son los anuladores de \mathbb{H}^γ y \mathbb{V} respectivamente.

La distribución vertical de la variedad foliada define un subhaz vectorial en TM llamado haz vertical. El conjunto de secciones de este subhaz, denotado por $\Gamma(\mathbb{V})$, son los campos vectoriales $X \in \Gamma(\mathbb{V})$ tal que $X(m) \in T_m\mathcal{F}$, para todo $m \in M$. Decimos que $X \in \Gamma(TM)$ es un *campo proyectable* si

$$[X, \Gamma(\mathbb{V})] \subset \Gamma(\mathbb{V}).$$

Denotamos por $\Gamma_{\text{pr}}(TM)$ al conjunto de campos proyectables de M . Más aún, los campos proyectables horizontales $\Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, generan a la distribución horizontal.

La *curvatura* de una conexión γ , es una 2-forma valuada vectorial $\text{Curv}^\gamma \in \Omega^2(M, \mathbb{V})$ en M , definida como

$$\text{Curv}^\gamma := \frac{1}{2}[\gamma, \gamma]_{FN},$$

donde $[\cdot, \cdot]_{FN}$ denota el corchete de Frölicher-Nijenhuis [27, pp. 250]. En caso que $\mu, \eta \in \Omega^1(M, TM)$, tenemos que

$$\begin{aligned} [\mu, \eta]_{FN}(X, Y) &= [\mu(X), \eta(Y)] - [\mu(Y), \eta(X)] - \eta([\mu(X), Y] - [\mu(Y), X]), \\ &\quad - \mu([\eta(X), Y] - [\eta(Y), X]) + (\mu \circ \eta + \eta \circ \mu)[X, Y], \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Si γ es una conexión en (M, \mathcal{F}) , entonces las curvatura de γ está únicamente determinada por las relaciones

$$\begin{cases} \text{Curv}^\gamma(X, Y) = \gamma([X, Y]) & \text{para } X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma), \\ i_V \text{Curv}^\gamma = 0 & \text{para } V \in \Gamma(\mathbb{V}). \end{cases} \quad (3.4)$$

Definición 3.1.2. Decimos que un difeomorfismo $\Phi: M \rightarrow M$ preserva la foliación, si

$$(T_p\Phi)(T_p\mathcal{F}) = T_{\Phi(p)}\mathcal{F}, \quad (3.5)$$

para todo $p \in M$.

Notemos que la ecuación (3.5), es equivalente a

$$\Phi^*(\Gamma(\mathbb{V})) = \Gamma(\mathbb{V}).$$

Ejemplo 3.1.3. Sea $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$ un campo vectorial completo, entonces el flujo $\text{Fl}_X^t: M \rightarrow M$ de X , es un difeomorfismo que preserva foliación.

En efecto, como X es campo proyectable, se cumple que

$$(T_p\Phi)Y(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi^*)Y(p) = L_X Y = [X, Y] \in \Gamma(\mathbb{V}_{\Phi(p)}),$$

para todo $Y \in T_p\mathcal{F}$. ∇

Dada una conexión γ en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) y un difeomorfismo que preserva foliación $\Phi: M \rightarrow M$, definimos un morfismo de haces vectoriales $\Phi^*\gamma: TM \rightarrow TM$ como

$$\Phi^*\gamma(X) := \Phi^*(\gamma(\Phi_*X)), \tag{3.6}$$

para cada $X \in \Gamma(TM)$.

Lema 3.1.4. *Sea γ una conexión de Ehresmann en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) y $\Phi: M \rightarrow M$ un difeomorfismo que preserva foliación. Entonces $\Phi^*\gamma$ es una conexión de Ehresmann*

Demostración. Suponemos que Φ preserva foliación y $\gamma(TM) = \mathbb{V}$, entonces de la ecuación (3.6), tenemos que $\Phi^*\gamma(TM) = \Phi^*(\gamma(\Phi_*(TM))) = \mathbb{V}$.

Finalmente, sea $X \in \Gamma(\mathbb{V})$ entonces $\Phi_*X \in \Gamma(\mathbb{V})$. Como γ es conexión entonces $\gamma(\Phi_*X) = \Phi_*X$. Por lo cual

$$\Phi^*\gamma(X) = \Phi^*(\gamma(\Phi_*X)) = \Phi^*(\Phi_*X) = X,$$

por lo tanto, $\Phi^*\gamma$ es una conexión. □

Como consecuencia del Lema 3.1.4, la conexión de Ehresmann $\Phi^*\gamma$ tiene asociada una distribución horizontal dada por

$$\mathbb{H}^{\Phi^*\gamma} := \ker(\Phi^*\gamma).$$

Proposición 3.1.5. *Sea γ una conexión de Ehresmann en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) y $\Phi: M \rightarrow M$ un difeomorfismo que preserva la foliación. Entonces, se cumplen lo siguientes.*

1. Para cada $p \in M$

$$\mathbb{H}_p^{\Phi^*\gamma} = \Phi_*^{-1}(\mathbb{H}_{\Phi(p)}^\gamma).$$

2. Las curvaturas Curv^γ y $\text{Curv}^{\Phi^*\gamma}$ estan relacionadas por la ecuación

$$\Phi^*\text{Curv}^\gamma = \text{Curv}^{\Phi^*\gamma}.$$

Demostración. 1. Se tiene que, $X \in \mathbb{H}_p^{\Phi^*\gamma}$ si y sólo si $\Phi^*\gamma(X) = \Phi^*(\gamma(\Phi_*X)) = 0$, si y sólo si $\gamma(\Phi_*(X)) = 0$. Entonces tenemos que $\Phi_*(X) \in \mathbb{H}_{\Phi(p)}^\gamma$, es decir $X \in \Phi_*^{-1}(\mathbb{H}_{\Phi(p)}^\gamma)$, por lo tanto

$$\mathbb{H}_p^{\Phi^*\gamma} = \Phi_*^{-1}(\mathbb{H}_{\Phi(p)}^\gamma),$$

para todo $p \in M$.

2. Ahora mostremos (2). Por la naturalidad del corchete de Frölicher-Nijenhuis se sigue que

$$\Phi^*\text{Curv}^\gamma = \frac{1}{2}[\gamma, \gamma]_{FN} = \frac{1}{2}[\Phi^*\gamma, \Phi^*\gamma]_{FN} = \text{Curv}^{\Phi^*\gamma}.$$

□

3.2. Método de promedio para conexiones de Ehresmann

En esta sección, nuestro objetivo es aplicar el método de promedios para construir conexiones de Ehresmann que sean invariantes con respecto a la acción de un grupo de Lie compacto. Además, daremos condiciones necesarias donde el operador de promedios preserva el conjunto de conexiones de Poisson.

Sean (M, \mathcal{F}) una variedad foliada y $\mathbb{V} = T\mathcal{F}$ su distribución vertical. Sea $\gamma: TM \rightarrow TM$ una conexión de Ehresmann en (M, \mathcal{F}) , y \mathbb{H}^γ su distribución horizontal asociada. Supongamos que $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es la acción de un grupo de Lie G compacto en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , tal que, para cada $g \in G$, el difeomorfismo Φ_g preserva la foliación. En consecuencia del Lema 3.1.4, se tiene que $\Phi_g^*\gamma$ es una conexión de Ehresmann para cada $g \in G$. Como el grupo es compacto y conexo, podemos promediar la conexión de Ehresmann con respecto a la medida de Haar. Lo cual da pie a la siguiente definición.

Definición 3.2.1. Sea γ una conexión de Ehresmann, el promedio de γ se define por

$$\langle \gamma \rangle_G = \int_G \Phi_g^*\gamma \, dg,$$

donde dg es la medida de Haar normalizada.

Notemos que $\langle \gamma \rangle_G: TM \rightarrow TM$ es un morfismo de haces vectoriales, el cual es definido como

$$\langle \gamma \rangle_G(X) = \int_G \Phi_g^*(\gamma((\Phi_g)_*(X))) dg,$$

para cada $X \in \Gamma(TM)$.

Definición 3.2.2. Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie G en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) . Decimos que una conexión de Ehresmann γ es G -invariante si

$$\Phi_g^*\gamma = \gamma$$

para todo $g \in G$.

Lema 3.2.3. *Sea γ una conexión de Ehresmann en (M, \mathcal{F}) , entonces el promedio $\langle \gamma \rangle_G$ es una conexión de Ehresmann G -invariante.*

Demostración. Primero, mostremos que $\langle \gamma \rangle_G$ es una conexión de Ehresmann. Sea $V \in \Gamma(\mathbb{V})$, entonces como Φ_g preserva foliación, tenemos que

$$\langle \gamma \rangle_G(V) = \int_G \Phi_g^*(\gamma((\Phi_g)_*V)) \, dg = \int_G \Phi_g^*((\Phi_g)_*V) \, dg = V \int_G dg = V.$$

Ademas, para cada $X \in \Gamma(TM)$, tenemos que $\gamma((\Phi_g)_*X) \in \Gamma(\mathbb{V})$, entonces

$$\langle \gamma \rangle_G(X) = \int_G \Phi_g^*(\gamma((\Phi_g)_*X)) \, dg \in \Gamma(\mathbb{V}),$$

por lo tanto $\langle \gamma \rangle_G$ es una conexión de Ehresmann.

Mostremos ahora, que $\langle \gamma \rangle_G$ es G -invariante. Sea $g' \in G$ y denotemos por $\tilde{g} := g'g$, como la medida dg es bi-invariante, se sigue que

$$\begin{aligned} \Phi_{g'}^* \langle \gamma \rangle_G &= \Phi_{g'}^* \int_G \Phi_g^* \gamma \, dg = \int_G \Phi_{g'g}^* \gamma \, dg, \\ &= \int_G \Phi_{\tilde{g}}^* \gamma \, d\tilde{g} = \langle \gamma \rangle_G, \end{aligned}$$

por lo tanto $\langle \gamma \rangle_G$ es G -invariante. \square

Como $\langle \gamma \rangle_G$ es una conexión de Ehresmann en (M, \mathcal{F}) , entonces tiene asociado una distribución horizontal $\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H}^{\langle \gamma \rangle_G} := \ker(\langle \gamma \rangle_G)$ que se relaciona con \mathbb{H}^γ por la formula

$$\tilde{\mathbb{H}} = (I + \Xi)(\mathbb{H}^\gamma), \quad (3.7)$$

donde $\Xi = \gamma - \langle \gamma \rangle_G$.

Proposición 3.2.4. *Se satisfacen las siguientes propiedades.*

1. $\text{Im}(\Xi) \subset \mathbb{V} \subset \ker(\Xi)$.
2. $\langle \Xi \rangle_G = 0$.
3. $\tilde{\mathbb{H}}$ es G -invariante, esto es que

$$T_p \Phi_g(\tilde{\mathbb{H}}_p) = \tilde{\mathbb{H}}_{\Phi_g(p)},$$

para todo $p \in M$ y $g \in G$.

Demostración. 1. Es claro que $\text{Im}(\Xi) \subset \mathbb{V}$, debido a que el morfismo Ξ es la diferencia de conexiones. Por otro lado, para cada $V \in \Gamma(\mathbb{V})$ se tiene que

$$\Xi(V) = \gamma(V) - \langle \gamma \rangle_G(V) = V - V = 0,$$

por lo tanto $\text{Im}(\Xi) \subset \mathbb{V} \subset \ker(\Xi)$.

2. Recordemos que el promedio es un operador lineal de proyección, esto es que $\langle\langle\gamma\rangle_G\rangle_G = \langle\gamma\rangle_G$. Entonces se sigue que

$$\langle\Xi\rangle_G = \langle\gamma\rangle_G - \langle\langle\gamma\rangle_G\rangle_G = 0.$$

3. Sea $X \in \ker(\langle\gamma\rangle_G)_m$. La propiedad de G -invarianza de $\langle\gamma\rangle_G$ es equivalente a tener que

$$(\langle\gamma\rangle_G)_{\Phi_g(m)} \circ T_m\Phi_g = T_m\Phi_g \circ (\langle\gamma\rangle_G)_m,$$

por lo tanto $T_m\Phi_g X \in \ker((\langle\gamma\rangle_G)_{\Phi_g(m)})$, por lo cual $\tilde{\mathbb{H}}$ es G -invariante. □

Para resultados posteriores, resulta de suma importancia dar una formula para el morfismo $\Xi := \gamma - \langle\gamma\rangle$.

Proposición 3.2.5. *Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie compacto y conexo en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , que preserva la foliación. Entonces el morfismo Ξ es de la forma*

$$\Xi = \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* [\gamma, a_M]_{FN} dt dg,$$

donde dg es la medida de Haar normalizada de G .

Demostración. Como $\Phi_{\exp(ta)}$ es el flujo del campo vectorial a_M , para cada $a \in \mathfrak{g}$, tenemos la siguiente identidad

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\exp(ta)}^* \gamma = \Phi_{\exp(ta)}^* L_{a_M} \gamma,$$

Integrando esta expresión tenemos

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi_{\exp(ta)}^* \gamma dt = \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* L_{a_M} \gamma dt. \quad (3.8)$$

Por el teorema fundamental del calculo, la parte izquierda de la ecuación (3.8), se escribe como

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi_{\exp(ta)}^* \gamma dt = \Phi_{\exp(a)}^* \gamma - \gamma.$$

De esta forma obtenemos

$$\Phi_{\exp(a)}^* \gamma - \gamma = \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* L_{a_M} \gamma dt. \quad (3.9)$$

Integrando la ecuación (3.9), con respecto a la medida de Haar, tenemos

$$\int_G \Phi_{\exp(a)}^* \gamma dg - \int_G \gamma dg = \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* L_{a_M} \gamma dt dg. \quad (3.10)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.10) es igual a $\langle \gamma \rangle_G - \gamma$. De aquí se sigue que

$$\langle \gamma \rangle_G - \gamma = \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* L_{a_M} \gamma \, dt \, dg,$$

y entonces

$$\Xi = - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* L_{a_M} \gamma \, dt \, dg.$$

Como $L_{a_M} \gamma = -[\gamma, a_M]_{FN}$, entonces

$$\Xi = \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* [\gamma, a_M]_{FN} \, dt \, dg.$$

□

Observación 3.2.6. En la prueba de la Proposición 3.2.5, usamos que la parte izquierda de la ecuación (3.10) es igual a $\langle \gamma \rangle_G - \gamma$, lo cual puede no ser evidente a primera vista, ya que la aplicación exponencial $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ no es inyectiva. Por lo cual formalmente no podemos integrar la aplicación $\Phi_{\exp(ta)}^* \gamma$ con respecto a todo el grupo G . Sin embargo, del Teorema B.2.3, existe un subconjunto $D \subset \mathfrak{g}$ donde la aplicación exponencial restringida

$$\exp|_D: D \rightarrow G \setminus C(e),$$

es un difeomorfismo. Aquí $C(e)$ es un conjunto de medida cero que contiene a la identidad $e \in G$, llamado “cut locus”. Formalmente la integral

$$\int_G \Phi_{\exp(a)}^* \gamma \, dg,$$

es bien definida en $G \setminus C(e)$, sin embargo como $C(e)$ es de medida cero, la integral en G es igual a la integral en $G \setminus C(e)$. Por lo tanto, de aquí en adelante escribiremos estas integrales con respecto a todo el grupo.

En terminos infinitesimales, la acción de un grupo de Lie G en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) *preserva la foliación*, si los generadores infinitesimales de la acción son proyectables, es decir

$$a_M \in \Gamma_{\text{pr}}(TM),$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$. Por otro lado, decimos que la acción *preserva cada hoja de foliación* si

$$a_M \in \Gamma(\mathbb{V}),$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Lema 3.2.7. *Supongamos que la acción preserva cada hoja de foliación. Entonces cada $\tilde{X} \in \Gamma_{\text{pr}}(\tilde{\mathbb{H}})$, es un campo vectorial G -invariante, es decir*

$$[\tilde{X}, a_M] = 0, \tag{3.11}$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Demostración. De la proposición 3.2.4, tenemos que la distribución horizontal $\tilde{\mathbb{H}}$ es G -invariante. Esto implica que $[\tilde{X}, a_M] \in \Gamma(\tilde{\mathbb{H}})$, para todo $a \in \mathfrak{g}$ y $\tilde{X} \in \Gamma(\tilde{\mathbb{H}})$.

Por otro lado como \tilde{X} es proyectable y $a_M \in \Gamma(\mathbb{V})$, entonces $[\tilde{X}, a_M] \in \Gamma(\mathbb{V})$, lo cual implica que $[\tilde{X}, a_M] = 0$ para todo $a \in \mathfrak{g}$. \square

Lema 3.2.8. *Supongamos que la G -acción de un grupo de Lie compacto y conexo en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , preserva cada hoja de foliación. Entonces, para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ se tiene que*

$$\Xi(X) = - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* [X, a_M] dt dg.$$

Demostración. Sea $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, de la ecuación (3.14), tenemos que $\tilde{X} := X + \Xi(X) \in \Gamma_{\text{pr}}(\tilde{\mathbb{H}})$. Del Lema 3.2.7 tenemos que \tilde{X} es un campo G -invariante, entonces

$$\Xi(\tilde{X}) = \Xi(X) + \Xi^2(X) = \Xi(X).$$

Por la Proposición 3.2.5 y tomando en cuenta que \tilde{X} es G -invariante, se tiene

$$\begin{aligned} \Xi(X) = \Xi(\tilde{X}) &= \int_G \int_0^1 \left(\Phi_{\exp(ta)}^* [\gamma, a_M]_{FN} \right) (\tilde{X}) dt dg, \\ &= \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* \left([\gamma, a_M]_{FN}(\tilde{X}) \right) dt dg, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por otro lado, podemos notar que

$$[\gamma, a_M]_{FN}(V) = [\gamma(V), a_M] - \gamma([V, a_M]) = [V, a_M] - [V, a_M] = 0,$$

para todo, $V \in \Gamma(\mathbb{V})$. Lo cual implica que

$$[\gamma, a_M]_{FN}(\tilde{X}) = [\gamma, a_M]_{FN}(X). \quad (3.13)$$

Por cálculo directo y tomando en cuenta las ecuaciones (3.12) y (3.13), se sigue que

$$\begin{aligned} \Xi(X) &= \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* ([\gamma, a_M]_{FN}(X)) dt dg, \\ &= \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* ([\gamma(X), a_M] - \gamma([X, a_M])) dt dg, \\ &= \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* (-\gamma([X, a_M])) dt dg, \\ &= - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* [X, a_M] dt dg. \end{aligned}$$

\square

De la ecuación (3.7) se sigue que $\Gamma(\tilde{\mathbb{H}}) = (I + \Xi)\Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$. En particular

$$\Gamma_{\text{pr}}(\tilde{\mathbb{H}}) = (I + \Xi)\Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma). \quad (3.14)$$

En efecto, para cada $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, definimos $\tilde{X} := X + \Xi(X)$. Si $V \in \Gamma(\mathbb{V})$, entonces

$$[\tilde{X}, V] = [X + \Xi(X), V] = [X, V] + [\Xi(X), V] \in \Gamma(\mathbb{V}).$$

Por otro lado, el morfismo $I + \Xi$ es un isomorfismo con inversa $I - \Xi$. Entonces para cada $\tilde{X} \in \Gamma_{\text{pr}}(\tilde{\mathbb{H}})$, definimos $X = \tilde{X} - \Xi(\tilde{X})$, lo cual implica que

$$[X, V] = [\tilde{X}, V] - [\Xi(\tilde{X}), V] \in \Gamma(\mathbb{V}).$$

Lema 3.2.9. *Supongamos que la G -acción en (M, \mathcal{F}) preserva cada hoja de foliación. Entonces, para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ se cumple que*

$$\langle \Xi(X) \rangle_G = 0.$$

Demostración. De la ecuación (3.14), tenemos que $X = \tilde{X} - \Xi(\tilde{X})$ donde $\tilde{X} \in \Gamma_{\text{pr}}(\tilde{\mathbb{H}})$. De la Proposición 3.2.4, se sigue que $\Xi^2 = 0$, entonces

$$\Xi(X) = \Xi(\tilde{X}) - \Xi^2(\tilde{X}) = \Xi(\tilde{X}).$$

Del Lema 3.2.7 se tiene que \tilde{X} es G -invariante, por lo tanto se tiene que

$$\langle \Xi(X) \rangle_G = \langle \Xi(\tilde{X}) \rangle_G = \langle \Xi \rangle_G (\tilde{X}) = 0.$$

□

Lema 3.2.10. *Supongamos que la G -acción preserva cada hoja de foliación. Entonces para cada $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ se tiene que*

$$\langle X \rangle_G = X + \Xi(X).$$

Demostración. Sea $\tilde{X} \in \Gamma_{\text{pr}}(\tilde{\mathbb{H}})$, de la ecuación (3.14), tenemos que $\tilde{X} = X + \Xi(X)$. Del Lema 3.2.7 tenemos que \tilde{X} es G -invariante, entonces $\tilde{X} = \langle \tilde{X} \rangle_G$. Por otro lado, del Lema 3.2.9, tenemos que

$$\langle \tilde{X} \rangle_G = \langle X \rangle_G + \langle \Xi(X) \rangle_G = \langle X \rangle_G,$$

y así concluimos que $\langle X \rangle_G = X + \Xi(X)$. □

Lema 3.2.11. *Supongamos que la G -acción preserva cada hoja de foliación. Entonces el conjunto de secciones de la distribución horizontal $\tilde{\mathbb{H}}$ es de la forma*

$$\Gamma_{\text{pr}}(\tilde{\mathbb{H}}) = \{ \langle X \rangle_G \mid X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma) \}.$$

Demostración. El resultado se sigue directamente del Lema 3.2.10. □

3.2.1. Criterios de invarianza de conexiones de Ehresmann

En los siguientes resultados se establecen una serie de criterios para determinar la invarianza de conexiones de Ehresmann.

Proposición 3.2.12. *Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie compacto y conexo en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) . Entonces una conexión de Ehresmann γ es G -invariante si y sólo si*

$$\langle \gamma \rangle_G = \gamma. \quad (3.15)$$

Demostración. Como γ es G -invariante, entonces

$$\langle \gamma \rangle_G = \int_G \Phi_g^* \gamma \, dg = \int_G \gamma \, dg = \gamma.$$

Recíprocamente, supongamos que se cumple la ecuación (3.15), entonces

$$\Phi_g^* \gamma = \Phi_g^* \langle \gamma \rangle_G = \langle \gamma \rangle_G = \gamma.$$

por lo tanto γ es G -invariante. □

Proposición 3.2.13. *Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie conexo que actúa en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) . Entonces una conexión de Ehresmann γ es G -invariante si sólo si*

$$[\gamma, a_M]_{FN} = 0. \quad (3.16)$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$

Demostración. Recordemos que el flujo los generadores infinitesimales a_M es dado por

$$\Phi_{\exp(ta)}: M \rightarrow M,$$

donde $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ es la aplicación exponencial del algebra de Lie.

Supongamos que γ es G -invariante, entonces

$$[\gamma, a_M]_{FN} = -L_{a_M} \gamma = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(ta)}^* \gamma = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma = 0.$$

por lo tanto se cumple la ecuación (3.16).

Recíprocamente, supongamos que se cumple la ecuación (3.16), entonces

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\exp(ta)}^* \gamma = \Phi_{\exp(ta)}^* (L_{a_M} \gamma) = -\Phi_{\exp(ta)}^* ([\gamma, a_M]_{FN}) = 0,$$

lo cual implica que $\Phi_{\exp(ta)}^* \gamma$ es constante y como $\Phi_{\exp(0a)} = \text{id}_M$, entonces

$$\Phi_{\exp(ta)}^* \gamma = \gamma.$$

Como G es conexo, el Teorema B.2.6 nos asegura que cada elemento $g \in G$, se puede escribir como el producto de aplicaciones exponenciales es decir, existen $a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$ tal que $g = \exp(a_1) \cdot \exp(a_2)$, por lo tanto

$$\Phi_g^* \gamma = \Phi_{\exp(a_1) \cdot \exp(a_2)}^* \gamma = \Phi_{\exp(a_2)}^* \circ \Phi_{\exp(a_1)}^* \gamma = \Phi_{\exp(a_2)}^* \gamma = \gamma,$$

y entonces γ es G -invariante. \square

Proposición 3.2.14. *Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie conexo actuando en (M, \mathcal{F}) , tal que la acción preserva cada hoja de foliación. Una conexión de Ehresmann γ es G -invariante si y sólo si*

$$[X, a_M] = 0, \quad (3.17)$$

para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ y $a \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Aquí usaremos el directamente la Proposición 3.2.13, y mostraremos que la condición (3.16) es equivalente a la condición (3.17). Supongamos que $[\gamma, a_M]_{FN} = 0$ para todo $a \in \mathfrak{g}$. Sea $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, entonces

$$0 = [\gamma, a_M]_{FN}(X) = [\gamma(X), a_M] - \gamma([X, a_M]) = \gamma([X, a_M]),$$

lo cual implica que $[X, a_M] \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$. Por otro lado, como $a_M \in \Gamma(\mathbb{V})$ entonces $[X, a_M] \in \Gamma(\mathbb{V})$, por lo tanto $[X, a_M] = 0$.

Recíprocamente, supongamos que para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ se cumple que $[X, a_M] = 0$. Si $V \in \Gamma(\mathbb{V})$, entonces

$$[\gamma, a_M]_{FN}(V) = [\gamma(V), a_M] - \gamma([V, a_M]) = [V, a_M] - [V, a_M] = 0.$$

Por otro lado, si $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, entonces

$$[\gamma, a_M]_{FN}(X) = [\gamma(X), a_M] - \gamma([X, a_M]) = 0,$$

pues cada termino es cero. Por lo tanto $[\gamma, a_M] = 0$ para todo $X \in \Gamma(TM)$. \square

3.2.2. Conexiones de Poisson invariantes

Una variedad foliada de Poisson (M, \mathcal{F}, P) es una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , dotada con un bivector de Poisson P tal que $P \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{V})$. Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie compacto y conexo G en (M, \mathcal{F}, P) , que preserva cada hoja de foliación, esto es que $a_M \in \Gamma(\mathbb{V})$ para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Definición 3.2.15. Una conexión de Ehresmann γ en (M, \mathcal{F}, P) se dice ser una *conexión de Poisson*, si todo campo horizontal y proyectable $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ satisface que

$$L_X P = 0.$$

Teorema 3.2.16. *Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson. Supongamos que G es un grupo de Lie compacto y conexo que actúa canónicamente en M y que preserva cada hoja de foliación, es decir, se cumple que*

$$L_{a_M}P = 0 \quad \text{y} \quad a_M \in \Gamma(\mathbb{V}),$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$. Si γ es una conexión de Poisson en (M, \mathcal{F}, P) , entonces su promedio $\langle \gamma \rangle_G$ es una conexión de Poisson.

Demostración. Como la acción es canónica, se tiene que $\langle P \rangle_G = P$. Por otro lado, como γ es conexión de Poisson, se tiene que, para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$

$$0 = \langle L_X P \rangle_G = L_{\langle X \rangle_G} P.$$

Por lo cual, el promedio $\langle X \rangle_G$ es un campo de Poisson y entonces el teorema se sigue del Lema 3.2.11. \square

Observación 3.2.17. De la ecuación (3.14) tenemos que todo $\tilde{X} \in \Gamma_{\text{pr}}(\tilde{\mathbb{H}})$, se puede expresar de la forma $\tilde{X} = X + \Xi(X)$, con $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$. Calculando la derivada de Lie de P a lo largo de \tilde{X} , tenemos que

$$L_{\tilde{X}}P = L_X P + L_{\Xi(X)}P.$$

Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.16, se obtiene que

$$L_{\Xi(X)}P = 0,$$

por lo cual $\Xi(X)$ es un campo vertical de Poisson.

Recordemos que, dada una conexión de Ehresmann γ en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , la distribución horizontal \mathbb{H}^γ induce una descomposición del espacio tangente como

$$TM = \mathbb{H}^\gamma \oplus \mathbb{V}$$

Por lo cual, cada campo vectorial $X \in \Gamma(TM)$ puede ser expresado como

$$X = X_{1,0} + X_{0,1},$$

donde $X_{1,0} \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$ y $X_{0,1} \in \Gamma(\mathbb{V})$.

Lema 3.2.18. *Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson y γ una conexión de Poisson. Si $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$ es un campo de Poisson con descomposición $X = X_{1,0} + X_{0,1}$ respecto a la conexión γ , entonces $X_{1,0}$ y $X_{0,1}$ son campos de Poisson.*

Demostración. Sea $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$, entonces

$$[X_{1,0}, \Gamma(\mathbb{V})] = [X, \Gamma(\mathbb{V})] - [X_{0,1}, \Gamma(\mathbb{V})] \in \Gamma(\mathbb{V}),$$

lo cual implica que $X_{1,0} \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$. Como γ es de Poisson, entonces

$$L_{X_{1,0}}P = 0.$$

Ahora, como $X \in \Gamma(TM)$ es de Poisson y $[X_{1,0}, P] = 0$, entonces

$$0 = [X, P] = [X_{1,0}, P] + [X_{0,1}, P] = [X_{0,1}, P].$$

por lo cual $X_{0,1}$ es campo de Poisson. \square

Proposición 3.2.19. *Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson, equipada con una conexión de Poisson γ . Para cada $X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, $\text{Curv}^\gamma(X, Y)$ es un campo de Poisson. Si además, G es un grupo de Lie compacto y conexo actuando canónicamente en (M, \mathcal{F}, P) y preserva cada hoja de foliación. Entonces, para todo $X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, $\text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G}(X, Y)$ es un campo de Poisson de la forma*

$$\text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G}(X, Y) = \text{Curv}^\gamma(X, Y) - \Xi([X, Y]). \quad (3.18)$$

Demostración. Sean $X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, de la ecuación (3.4), se tiene que

$$\text{Curv}^\gamma(X, Y) = \gamma([X, Y]) = [X, Y]_{0,1},$$

donde $[X, Y]_{0,1}$ denota la parte vertical de $[X, Y]$. Entonces del Lema 3.2.18 se sigue que $[X, Y]_{0,1}$ es campo vectorial de Poisson.

Analogamente, por el Teorema 3.2.16, el promedio $\langle \gamma \rangle_G$ es una conexión de Poisson y entonces de nueva cuenta $\text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G}(X, Y)$ es campo de Poisson. Más aún,

$$\text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G}(X, Y) = \langle \gamma \rangle_G([X, Y]) = (\gamma - \Xi)([X, Y]) = \text{Curv}^\gamma(X, Y) - \Xi([X, Y]).$$

\square

3.3. Conexiones de Hannay-Berry generalizadas

En esta sección vamos a introducir una generalización de las conexiones de Hannay-Berry en haces fibrados de Poisson, en el contexto de variedades foliadas de Poisson.

Supongamos que un grupo de Lie compacto y conexo G actúa en una variedad foliada de Poisson (M, \mathcal{F}, P) .

Definición 3.3.1. Decimos que la acción admite un *operador de pre-momento*, si existe un operador lineal $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$ tal que

$$a_M = P^\sharp(\mu_a), \quad (3.19)$$

y

$$i_{P^\sharp(\alpha)} d\mu_a = 0, \quad (3.20)$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$ y $\alpha \in \Omega^1(M)$.

Observación 3.3.2. Formalmente, se dice que una acción admite un operador de pre-momento si ésta satisface la propiedad (3.19). Noción que fue introducida por Ginzburg [20, pp. 331], [28, pp.993]. Sin embargo, en éstos trabajos, él introduce la propiedad (3.20), con el propósito de mostrar algunos resultados con respecto a flujos de Poisson [20, Proposición 3.6] y cohomología de Poisson G -invariante [20, Proposición 4.11]. Por lo cual, en este trabajo adoptamos el término de operador de pre-momento cuando se cumplan las dos propiedades antes descritas.

La condición (3.20) que caracteriza al operador de pre-momento, implica que la forma μ_a es cerrada en cada hoja de foliación simpléctica de P .

Lema 3.3.3. *Si la G -acción en (M, \mathcal{F}, P) admite un operador de pre-momento μ , entonces es canónica.*

Demostración. Para cada $a \in \mathfrak{g}$ se tiene que

$$L_{a_M}P = P^\sharp d\mu_a.$$

Si $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, entonces de la ecuación (3.20), se sigue que

$$P^\sharp d\mu_a(\alpha, \beta) = d\mu_a(P^\sharp(\alpha), P^\sharp(\beta)) = i_{P^\sharp(\alpha)}d\mu_a(P^\sharp(\beta)) = 0.$$

Por lo tanto $L_{a_M}P = 0$, y entonces la acción es canónica. \square

Sean γ una conexión de Poisson en (M, \mathcal{F}, P) , $\langle \gamma \rangle_G$ su promedio y el morfismo de haces vectoriales $\Xi = \gamma - \langle \gamma \rangle_G$.

Teorema 3.3.4. *Si la G -acción en (M, \mathcal{F}, P) admite operador de pre-momento μ , entonces para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, el campo vectorial $\Xi(X)$ es Hamiltoniano de la forma*

$$\Xi(X) = P^\sharp d(Q(X)), \quad (3.21)$$

donde Q es una 1-forma horizontal definida por

$$Q(X) = - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* i_X(\mu_a)_{1,0} dt dg.$$

Demostración. Del Lema 3.2.8, tenemos que para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$

$$\Xi(X) = - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* L_X P^\sharp(\mu_a) dt dg. \quad (3.22)$$

Como la conexión γ es Poisson, de la ecuación (3.22) se sigue

$$\begin{aligned} \Xi(X) &= - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* P^\sharp L_X \mu_a dt dg, \\ &= - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* P^\sharp (di_X \mu_a + i_X d\mu_a) dt dg, \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como P es un bivector antisimétrico, entonces para toda $\alpha \in \Omega^1(M)$

$$\langle \alpha, P^\sharp i_X d\mu_a \rangle = - \langle i_X d\mu_a, P^\sharp \alpha \rangle = \langle i_{P^\sharp \alpha} d\mu_a, X \rangle,$$

entonces la ecuación (3.20) implica que $P^\sharp i_X d\mu_a = 0$. Como P es un vertical, de la ecuación (3.23), se sigue que

$$\begin{aligned} \Xi(X) &= -P^\sharp \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* di_X \mu_a \, dt \, dg, \\ &= -P^\sharp d \left(\int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* i_X \mu_a \, dt \, dg \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como X es un campo horizontal, se tiene que

$$i_X(\mu_a) = i_X(\mu_a)_{1,0} + i_X(\mu_a)_{0,1} = i_X(\mu_a)_{1,0}, \quad (3.25)$$

por lo tanto, de las Ecuaciones (3.24) y (3.25) tenemos

$$\Xi(X) = P^\sharp d \left(- \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* i_X(\mu_a)_{1,0} \, dt \, dg \right).$$

y así $\Xi(X) = P^\sharp d(\langle Q, X \rangle)$, donde $Q \in \Gamma(\mathbb{V}^0)$ esta definida por

$$Q(X) = - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* i_X(\mu_a)_{1,0} \, dt \, dg.$$

□

De la formula $X = \tilde{X} - \Xi(X)$ y que $\Xi(X)$ es vertical, se sigue que

$$i_X \alpha = i_{\tilde{X}} \alpha - i_{\Xi(X)} \alpha = i_{\tilde{X}} \alpha,$$

para toda $\alpha \in \Gamma(\mathbb{V}^0)$ y como \tilde{X} es G -invariante, entonces

$$\begin{aligned} Q(X) &= - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* i_X(\mu_a)_{1,0} \, dt \, dg, \\ &= - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* i_{\tilde{X}}(\mu_a)_{1,0} \, dt \, dg, \\ &= -i_{\tilde{X}} \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* (\mu_a)_{1,0} \, dt \, dg, \\ &= -i_X \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* (\mu_a)_{1,0} \, dt \, dg, \end{aligned}$$

de aqui se sigue que

$$Q = - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* (\mu_a)_{1,0} \, dt \, dg.$$

Corolario 3.3.5. Sea G un grupo de Lie compacto y conexo actuando en una variedad foliada (M, \mathcal{F}, P) que admite un operador de pre-momento. La distribución horizontal de la conexión promediada $\langle \gamma \rangle_G$ es generada por los campos vectoriales G -invariantes de la forma

$$\langle X \rangle_G = X + P^\sharp d(Q(X)),$$

donde $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$.

Demostración. El resultado se sigue directamente del Lema 3.2.11, la formula (3.14) y el Teorema 3.3.4. \square

Definición 3.3.6. Decimos que la acción de un grupo de Lie G en una variedad foliada de Poisson (M, \mathcal{F}, P) es *localmente Hamiltoniana*, si existe un morfismo $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$ tal que

$$a_M = P^\sharp(\mu_a) \quad \text{y} \quad d(\mu_a) = 0,$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Definición 3.3.7. La acción de un grupo de Lie G en una variedad foliada de Poisson (M, \mathcal{F}, P) es *Hamiltoniana con operador de momento* $J: \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$, si

$$a_M = P^\sharp(dJ_a),$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Podemos notar que las acciones localmente Hamiltonianas y las acciones Hamiltonianas con operador de momento, admiten un operador de pre-momento.

Las acciones Hamiltonianas con operador de momento, son también llamadas *acciones canónicas con operador de momento*. Como consecuencia directa del Teorema 3.3.4, se tiene el siguiente resultado

Corolario 3.3.8. Supongamos que la acción de G en (M, \mathcal{F}, P) es Hamiltoniana con operador de momento $J: \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$. Entonces para cada $X \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, el campo vertical $\Xi(X)$ es Hamiltoniano

$$\Xi(X) = P^\sharp d(\langle Q, X \rangle),$$

donde Q está dado por

$$Q = - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* d_{1,0} J_a \, dt \, dg.$$

Demostración. El corolario se sigue directamente del Teorema 3.3.4 y del hecho que

$$(dJ_a)_{1,0} = d_{1,0} J_a.$$

\square

Supongamos que un grupo de Lie compacto y conexo G actúa en una variedad foliada de Poisson (M, \mathcal{F}, P) , tal que admite un operador de pre-momento. Dada una conexión de Poisson γ , llamamos a su promedio $\langle \gamma \rangle_G$ *conexión de Hannay-Berry generalizada*, en honor al trabajo de Marsden, Ratiu y Montgomery [19]. Además, tenemos la siguiente generalización de la caracterización de conexiones tipo Hannay-Berry, en términos de los siguientes axiomas.

Teorema 3.3.9. *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo actuando en una variedad foliada de Poisson (M, \mathcal{F}, P) . Supongamos que la G -acción admite un operador de pre-momento $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$ y fijemos una conexión de Poisson γ en (M, \mathcal{F}, P) . Sea $\tilde{\gamma}$ una conexión de Ehresmann en (M, \mathcal{F}, P) que satisface las siguientes propiedades:*

1. $i_{(1-\tilde{\gamma})(X)}\mu_a = 0$, para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$.
2. Existe $K \in \Gamma(\mathbb{V}^0)$ tal que

$$\Xi(X) = P^\sharp d(K(X)),$$
 para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$, donde $\Xi := \gamma - \tilde{\gamma}$.
3. $\langle K(X) \rangle_G \in \text{Casim}(M, P)$ para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$.

Entonces $\tilde{\gamma}$ es única. Más aún, $\tilde{\gamma}$ existe si y sólo si

$$\langle i_{(1-\gamma)(X)}\mu_a \rangle_G = 0, \quad (3.26)$$

para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$. En este caso, $\tilde{\gamma}$ es la conexión de Hannay-Berry generalizada.

Demostración. Supongamos que existen dos conexiones $\tilde{\gamma}_1$ and $\tilde{\gamma}_2$ que satisfacen (1)-(3). Para cada $i = 1, 2$, la conexión $\tilde{\gamma}_i$ es de la forma

$$\tilde{\gamma}_i = \gamma - \Xi_i.$$

De la condición (2), se sigue que

$$(\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2)(X) = (\Xi_2 - \Xi_1)(X) = P^\sharp d((K_2 - K_1)(X)). \quad (3.27)$$

para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$. Mostremos que la función $(K_2 - K_1)(X)$ es G -invariante, en efecto, por antisimetría de P , de la condición (1) y la ecuación (3.27), obtenemos que

$$\begin{aligned} L_{a_M}((K_2 - K_1)(X)) &= i_{P^\sharp(\mu_a)}d((K_2 - K_1)(X)) \\ &= -i_{P^\sharp d((K_2 - K_1)(X))}\mu_a = -i_{(\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2)(X)}\mu_a \\ &= -i_{(1-\tilde{\gamma}_2)(X)}\mu_a + i_{(1-\tilde{\gamma}_1)(X)}\mu_a = 0 \end{aligned}$$

Así, $(K_2 - K_1)(X) = \langle (K_2 - K_1)(X) \rangle_G = \langle K_2(X) \rangle_G - \langle K_1(X) \rangle_G$. Por tanto, de la condición (3) y la ecuación (3.27) concluimos que

$$(\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2)(X) = P^\sharp d(\langle K_2(X) \rangle_G - \langle K_1(X) \rangle_G) = 0,$$

lo cual implica que $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$.

Por otro lado, las conexiones $\tilde{\gamma}$ y γ satisfacen

$$\langle i_{(1-\gamma)(X)}\mu_a \rangle_G = \langle i_{(1-\tilde{\gamma}-\Xi)(X)}\mu_a \rangle_G = \langle i_{(1-\tilde{\gamma})(X)}\mu_a \rangle_G - \langle i_{\Xi(X)}\mu_a \rangle_G. \quad (3.28)$$

para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$.

Supongamos que se cumplen las condiciones (1)-(3). Las condiciones (2) y (3) implican que

$$\begin{aligned} \langle i_{\Xi(X)}\mu_a \rangle_G &= \langle i_{P^\sharp d(K(X))} \rangle_G = -\langle i_{P^\sharp \mu_a} d(K(X)) \rangle_G \\ &= -i_{P^\sharp \mu_a} d(\langle K(X) \rangle_G) = i_{P^\sharp d(\langle K(X) \rangle_G)}\mu_a = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

por lo tanto, de la ecuación (3.28), se sigue que

$$\langle i_{(1-\gamma)(X)}\mu_a \rangle_G = \langle i_{(1-\tilde{\gamma})(X)}\mu_a \rangle_G = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que se cumple la ecuación (3.26). Del Teorema 3.3.4, la conexión $\langle \gamma \rangle_G$ satisface la condición (2). Ahora, para cada $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$, se tiene que

$$0 = \langle \langle X \rangle_G - X \rangle_G = \langle \Xi(X) \rangle_G = \langle P^\sharp d(Q(X)) \rangle_G = P^\sharp d(\langle Q(X) \rangle_G),$$

lo cual implica la condición (3). De aquí, se sigue que la ecuación (3.29) se cumple, entonces, de la ecuación (3.28), γ y $\langle \gamma \rangle_G$ satisfacen la relación

$$0 = \langle i_{(1-\gamma)(X)}\mu_a \rangle_G = \langle i_{(1-\langle \gamma \rangle_G)(X)}\mu_a \rangle_G,$$

para todo $X \in \Gamma_{\text{pr}}(TM)$. Por lo tanto, $\langle \gamma \rangle_G$ satisface la propiedad (1). \square

De la demostración del Teorema 3.3.9, podemos notar que la conexión $\langle \gamma \rangle_G$, en general, no satisface la propiedad (1), pues dicha propiedad se cumple si y sólo si (3.26) se cumple. En este caso, por unicidad, cualquier conexión $\tilde{\gamma}$ que satisfaga (1)-(3), tiene que ser la conexión de Hannay-Berry generalizada.

En particular, si la G -acción es Hamiltoniana con operador de momento $J: \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$, entonces la condición (3.26) es equivalente a la ecuación

$$\langle d_{1,0}^\gamma J_a \rangle_G = 0,$$

la cual es llamada *condición adiabática*.

3.4. Conexiones de Poisson con curvatura Hamiltoniana

En esta sección, vamos a dar condiciones necesarias donde el operador de promedios preserve el conjunto de conexiones de Poisson con curvatura Hamiltoniana.

Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson. Definimos $\text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ el conjunto de las conexiones de Poisson γ en (M, \mathcal{F}, P) tal que existe $\sigma \in \Omega^2(M)$ tal que

$$\text{Curv}^\gamma(X, Y) = -P^\sharp d(\sigma(X, Y)), \quad (3.30)$$

para cada $X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$. En este caso σ es llamada *2-forma Hamiltoniana de curvatura*.

Podemos notar que cada forma Hamiltoniana de curvatura σ (3.30) es definida salvo transformaciones

$$\sigma \mapsto \sigma + C \quad (3.31)$$

donde C es una 2-forma horizontal tal que

$$C(X, Y) \in \text{Casim}(M, P),$$

para todo $X, Y \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$.

Definición 3.4.1. Se dice que una conexión $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ es *admisibile*, si una 2-forma Hamiltoniana de curvatura σ , satisface la condición

$$d_{1,0}^\gamma \sigma = 0. \quad (3.32)$$

Para cada $\beta \in \Gamma(\wedge^q \mathbb{V}^0)$ y $Q \in \Gamma(\mathbb{V}^0)$ definimos la forma diferencial $\{Q \wedge \beta\}_P \in \Gamma(\wedge^{q+1} \mathbb{V}^0)$ como

$$\{Q \wedge \beta\}_P(X_0, \dots, X_q) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \{Q(X_i), \beta(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_q)\}_P \quad (3.33)$$

donde $\{\cdot, \cdot\}_P$ denota al corchete de Poisson asociado a P , para todo $X_i \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ con $i = 0, \dots, q$.

Lema 3.4.2. Sea G un grupo de Lie compacto y conexo actuando en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) . Para cada $X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ la curvatura de la conexión promediada satisface

$$\text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G}(X, Y) = \text{Curv}^\gamma(X, Y) + [\Xi(X), \Xi(Y)] + [\Xi(X), Y] - [\Xi(Y), X] - \Xi([X, Y]).$$

Demostración. Sean $X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, se tiene que

$$\text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G} = \frac{1}{2}[\langle \gamma \rangle_G, \langle \gamma \rangle_G]_{FN} = [\gamma - \Xi, \gamma - \Xi]_{FN} = \text{Curv}^\gamma + \frac{1}{2}[\Xi, \Xi]_{FN} - [\gamma, \Xi]_{FN}. \quad (3.34)$$

Ahora, de la definición del corchete de Frölicher-Nijenhuis, ecuación (3.3), se sigue que

$$\begin{aligned} [\gamma, \Xi]_{FN}(X, Y) &= [\gamma(X), \Xi(Y)] - [\gamma(Y), \Xi(X)] - \Xi([\gamma(X), Y] - [\gamma(Y), X]), \\ &\quad -\gamma([\Xi(X), Y] - [\Xi(Y), X]) + (\gamma \circ \Xi + \Xi \circ \gamma)([X, Y]), \\ &= -[\Xi(X), Y] + [\Xi(Y), X] + \Xi([X, Y]). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
[\Xi, \Xi]_{FN}(X, Y) &= [\Xi(X), \Xi(Y)] - [\Xi(Y), \Xi(X)] - \Xi([\Xi(X), Y] - [\Xi(Y), X]), \\
&\quad - \Xi([\Xi(X), Y] - [\Xi(Y), X]) + 2\Xi^2([X, Y]), \\
&= 2[\Xi(X), \Xi(Y)].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Finalmente, de las Ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36), se sigue que

$$\text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G}(X, Y) = \text{Curv}^\gamma(X, Y) + [\Xi(X), \Xi(Y)] + [\Xi(X), Y] - [\Xi(Y), X] - \Xi([X, Y]). \tag{3.37}$$

□

Vamos a mostrar que el operador de promedios preserva el conjunto $\text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$.

Teorema 3.4.3. *Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson y sea G un grupo de Lie compacto y conexo actuando en M . Supongamos que la G -acción admite un operador de pre-momento. Si $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ con 2-forma Hamiltoniana de curvatura σ , entonces el promedio $\langle \gamma \rangle_G \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ con 2-forma Hamiltoniana de curvatura*

$$\tilde{\sigma} = \sigma - d_{1,0}Q - \frac{1}{2}\{Q \wedge Q\}_P. \tag{3.38}$$

Demostración. Sean $X, Y \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, como $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$, existe $\sigma \in \Omega^2(M)$ tal que

$$\text{Curv}^\gamma(X, Y) = -P^\sharp d(\sigma(X, Y)).$$

Como la acción admite un operador de pre-momento, entonces se cumple la ecuación (3.21), por lo cual

$$\begin{aligned}
\Xi([X, Y]) &= \Xi([X, Y]_{1,0}) + \Xi([X, Y]_{0,1}) = \Xi([X, Y]_{1,0}), \\
&= P^\sharp d(Q([X, Y]_{1,0})) = P^\sharp d(Q([X, Y]_{1,0} + [X, Y]_{0,1})), \\
&= P^\sharp d(Q([X, Y])).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Por otro lado

$$[\Xi(X), Y] = -L_Y \Xi(X) = -L_Y(P^\sharp dQ(X)) = -P^\sharp d(L_Y Q(X)), \tag{3.40}$$

$$[\Xi(Y), X] = -L_X \Xi(Y) = -L_X(P^\sharp dQ(Y)) = -P^\sharp d(L_X Q(Y)). \tag{3.41}$$

Como $\Xi(X)$ y $\Xi(Y)$ son campos Hamiltonianos entonces su corchete es el campo Hamiltoniano dado por

$$[\Xi(X), \Xi(Y)] = P^\sharp d(\{Q(X), Q(Y)\}_P), \tag{3.42}$$

donde $\{\cdot, \cdot\}_P$ es el corchete de Poisson, asociado a P .

Por lo cual, de las Ecuaciones (3.37), (3.39), (3.40), (3.41) y (3.42), la curvatura queda como

$$\begin{aligned} \text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G}(X, Y) &= \text{Curv}^\gamma(X, Y) + [\Xi(X), Y] - [\Xi(Y), X], \\ &\quad - \Xi([X, Y]) + [\Xi(X), \Xi(Y)], \\ &= P^\sharp d(-\sigma(X, Y) - L_Y Q(X) + L_X Q(Y) - Q([X, Y]) \\ &\quad + \{Q(X), Q(Y)\}_P). \end{aligned}$$

De la formula $dQ(X, Y) = L_X Q(Y) - L_Y Q(X) - Q([X, Y])$ se sigue que

$$\begin{aligned} \text{Curv}^{\langle \gamma \rangle_G}(X, Y) &= P^\sharp d(-\sigma(X, Y) + dQ(X, Y) + \{Q(X), Q(Y)\}_P), \\ &= -P^\sharp d\left(\sigma(X, Y) - d_{1,0}Q(X, Y) - \frac{1}{2}\{Q \wedge Q\}_P(X, Y)\right), \end{aligned}$$

por lo tanto la 2-forma Hamiltoniana de curvatura $\tilde{\sigma}$ asociada a la conexión $\langle \gamma \rangle_G$ es

$$\tilde{\sigma} = \sigma - d_{1,0}Q - \frac{1}{2}\{Q \wedge Q\}_P.$$

□

Mostraremos que el operador de promedios preserva el subconjunto de conexiones admisibles en $\text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$.

Teorema 3.4.4. *Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson y sea G un grupo de Lie compacto y conexo actuando en M . Supongamos que la G -acción admite un operador de pre-momento. Si $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ es una conexión admisible, entonces la conexión promediada $\langle \gamma \rangle_G$ es también admisible.*

Para mostrar el Teorema 3.4.4, es necesario dar primero los siguientes lemas.

Lema 3.4.5. *Supongamos que la acción admite operador de pre-momento. Para cada 2-forma horizontal $\beta \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{V})$, se tiene que*

$$d_{1,0}^{\langle \gamma \rangle_G} \beta = d_{1,0}^\gamma \beta + \{Q \wedge \beta\}_P, \quad (3.43)$$

donde Q es la 1-forma horizontal en la ecuación (3.21).

Demostración. Como β es horizontal, entonces

$$d_{1,0}^\gamma \beta(X, Y, Z) = d\beta(X_{1,0}, Y_{1,0}, Z_{1,0}).$$

Para la conexión de Ehresmann γ , se tiene que

$$\begin{aligned} d_{1,0}^\gamma \beta(X, Y, Z) &= d\beta(X_{1,0}, Y_{1,0}, Z_{1,0}) \\ &= L_{(\text{Id} - \gamma)X}(\beta(Y, Z)) - L_{(\text{Id} - \gamma)Y}(\beta(X, Z)) + L_{(\text{Id} - \gamma)Z}(\beta(X, Y)) \\ &\quad - \beta([X, Y], Z) + \beta([X, Z], Y) - \beta([Y, Z], X), \end{aligned}$$

por otro lado, para la conexión promediada $\langle \gamma \rangle_G$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_{1,0}^{\langle \gamma \rangle_G} \beta(X, Y, Z) &= d\beta(X_{1,0}, Y_{1,0}, Z_{1,0}) \\ &= L_{(\text{Id} - \langle \gamma \rangle_G)X}(\beta(Y, Z)) - L_{(\text{Id} - \langle \gamma \rangle_G)Y}(\beta(X, Z)) \\ &\quad + L_{(\text{Id} - \langle \gamma \rangle_G)Z}(\beta(X, Y)) - \beta([X, Y], Z) + \beta([X, Z], Y) \\ &\quad - \beta([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Supongamos que $\eta := d_{1,0}^{\langle \gamma \rangle_G} \beta - d_{1,0}^\gamma \beta$. Como $\Xi := \gamma - \langle \gamma \rangle_G$ y de la ecuación (3.21), se sigue que

$$\begin{aligned} \eta(X, Y, Z) &= L_{(\gamma - \langle \gamma \rangle_G)X}(\beta(Y, Z)) - L_{(\gamma - \langle \gamma \rangle_G)Y}(\beta(X, Z)) + L_{(\gamma - \langle \gamma \rangle_G)Z}(\beta(X, Y)) \\ &= L_{\Xi(X)}(\beta(Y, Z)) - L_{\Xi(Y)}(\beta(X, Z)) + L_{\Xi(Z)}(\beta(X, Y)) \\ &= i_{P^\sharp d(Q(X))} d\beta(Y, Z) - i_{P^\sharp d(Q(Y))} d\beta(X, Z) + i_{P^\sharp d(Q(Z))} d\beta(X, Y) \\ &= P(dQ(X), d\beta(Y, Z)) - P(dQ(Y), d\beta(X, Z)) + P(dQ(Z), d\beta(X, Y)) \\ &= \{Q(X), \beta(Y, Z)\}_P - \{Q(Y), \beta(X, Z)\}_P + \{Q(Z), \beta(X, Y)\}_P \\ &= \{Q \wedge \beta\}_P(X, Y, Z), \end{aligned}$$

lo cual prueba la fórmula (3.43). □

Lema 3.4.6. *Sea γ una conexión de Poisson, entonces cada 1-forma horizontal Q , satisface la ecuación*

$$d_{1,0}^\gamma \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P = -\{Q \wedge d_{1,0}^\gamma Q\}_P. \quad (3.44)$$

Demostración. Notemos que $d_{1,0}^\gamma \{Q \wedge Q\}_P$ es una 3-forma horizontal. Sean $X, Y, Z \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$, por la fórmula de Koszul se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d_{1,0}^\gamma \{Q \wedge Q\}_P(X, Y, Z) &= L_X \left(\frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P(Y, Z) \right) - L_Y \left(\frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P(X, Z) \right) \\ &\quad + L_Z \left(\frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P(X, Y) \right) - \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P([X, Y], Z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P([X, Z], Y) - \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Sea $\eta := \frac{1}{2}d_{1,0}^\gamma\{Q \wedge Q\}$. Como γ es una conexión de Poisson, entonces

$$\begin{aligned}
\eta(X, Y, Z) &= \{L_X(Q(Y)), Q(Z)\}_P + \{Q(Y), L_X(Q(Z))\}_P - \{L_Y(Q(X)), Q(Z)\}_P \\
&\quad - \{Q(X), L_Y(Q(Z))\}_P + \{L_Z(Q(X)), Q(Y)\}_P + \{Q(X), L_Z(Q(Y))\}_P \\
&\quad - \{Q([X, Y]), Q(Z)\}_P + \{Q([X, Z]), Q(Y)\}_P - \{Q([Y, Z]), Q(X)\}_P \\
&= -\{Q(X), L_Y(Q(Z)) - L_Z(Q(Y)) - Q([Y, Z])\}_P \\
&\quad + \{Q(Y), L_X(Q(Z)) - L_Z(Q(X)) - Q([X, Z])\}_P \\
&\quad - \{Q(Z), L_X(Q(Y)) - L_Y(Q(X)) - Q([X, Y])\}_P \\
&= -\{Q(X), d_{1,0}^\gamma Q(Y, Z)\}_P + \{Q(Y), d_{1,0}^\gamma Q(X, Z)\}_P \\
&\quad - \{Q(Z), d_{1,0}^\gamma Q(X, Y)\}_P = -\{Q \wedge d_{1,0}^\gamma Q\}_P(X, Y, Z).
\end{aligned}$$

lo cual prueba la formula (3.44). \square

Lema 3.4.7. *Sea $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ con 2-forma Hamiltoniana de curvatura σ . Entonces, se cumple que*

$$(d_{1,0}^\gamma)^2 Q = \{Q \wedge \sigma\}_P. \quad (3.45)$$

Demostración. Recordemos que la diferencial exterior tiene una bigraduación dada por $d = d_{1,0}^\gamma + d_{0,1}^\gamma + d_{2,-1}^\gamma$. Tomando en cuenta que $d^2 = 0$, se tiene que

$$(d_{1,0}^\gamma)^2 = -d_{0,1}^\gamma \circ d_{2,-1}^\gamma - d_{2,-1}^\gamma \circ d_{0,1}^\gamma.$$

Como Q es una 1-forma horizontal, se sigue que $d_{2,-1}^\gamma Q = 0$, en consecuencia

$$(d_{1,0}^\gamma)^2 Q = -d_{2,-1}^\gamma \circ d_{0,1}^\gamma Q.$$

Definimos $\eta := d_{0,1}^\gamma Q$. De aquí se sigue que $d_{2,-1}^\gamma \eta$ es una 3-forma horizontal. Sean $X, Y, Z \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, entonces, de la formula de Koszul, la ecuación (3.4) y por bigraduación, se tiene que

$$\begin{aligned}
-d_{2,-1}^\gamma \eta(X, Y, Z) &= \eta([X, Y], Z) - \eta([X, Z], Y) + \eta([Y, Z], X) \\
&= -\eta(X, \gamma([Y, Z])) + \eta(Y, \gamma([X, Z])) - \eta(Z, \gamma([X, Y])) \\
&= -\eta(X, \text{Curv}^\gamma(Y, Z)) + \eta(Y, \text{Curv}^\gamma(X, Z)) - \eta(Z, \text{Curv}^\gamma(X, Y)).
\end{aligned}$$

Ahora, para todo $W \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$ y $V \in \Gamma(\mathbb{V})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
d_{0,1}^\gamma Q(W, V) &= dQ(W, V) = L_W(Q(V)) - L_V(Q(W)) - Q([W, V]) \\
&= -L_V(Q(W)) = -i_V d(Q(W)).
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $\eta = d_{0,1}Q$ y la ecuación (3.30) se tiene

$$\begin{aligned}
-d_{2,1}\eta(X, Y, Z) &= \langle d(Q(X)), \text{Curv}^\gamma(Y, Z) \rangle - \langle d(Q(Y)), \text{Curv}^\gamma(X, Z) \rangle \\
&\quad + \langle d(Q(Z)), \text{Curv}^\gamma(X, Y) \rangle \\
&= -\langle d(Q(X)), P^\sharp d(\sigma(Y, Z)) \rangle + \langle d(Q(Y)), P^\sharp d(\sigma(X, Z)) \rangle \\
&\quad - \langle d(Q(Z)), P^\sharp d(\sigma(X, Y)) \rangle \\
&= P(dQ(X), d\sigma(Y, Z)) - P(dQ(Y), d\sigma(X, Z)) \\
&\quad + P(dQ(Z), d\sigma(X, Y)) \\
&= \{Q(X), \sigma(Y, Z)\}_P - \{Q(Y), \sigma(X, Z)\}_P + \{Q(Z), \sigma(X, Y)\}_P \\
&= \{Q \wedge \sigma\}_P(X, Y, Z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(d_{1,0}^\gamma)^2 Q = -d_{2,-1} \circ d_{0,1} Q = \{Q \wedge \sigma\}_P$. \square

Demostración del Teorema 3.4.4. De la ecuación (3.43), se tiene que

$$d_{1,0}^{\langle \gamma \rangle_G} \tilde{\sigma} = d_{1,0}^\gamma \tilde{\sigma} + \{Q \wedge \tilde{\sigma}\}_P.$$

Substituyendo $\tilde{\sigma}$ por la ecuación (3.38), se sigue que

$$\begin{aligned}
d_{1,0}^{\langle \gamma \rangle_G} \tilde{\sigma} &= d_{1,0}^\gamma \sigma - (d_{1,0}^\gamma)^2 Q - d_{1,0}^\gamma \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P \\
&\quad + \{Q \wedge \sigma\}_P - \{Q \wedge d_{1,0}^\gamma Q\}_P - \left\{ Q \wedge \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P \right\}_P.
\end{aligned}$$

Notemos que, de la identidad de Jacobi se sigue que $\{Q \wedge \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P\}_P = 0$. Finalmente, de las ecuaciones (3.44) y (3.45), tenemos que

$$d_{1,0}^{\langle \gamma \rangle_G} \tilde{\sigma} = d_{1,0}^\gamma \sigma, \quad (3.46)$$

por tanto, como γ es admisible, entonces $\langle \gamma \rangle_G$ es también admisible. \square

Ejemplo 3.4.8. Mostremos un ejemplo de una variedad foliada donde se cumplan las hipótesis del Teorema 3.2.16, y entonces existe una conexión G -invariante de Poisson. Sea $M := B \times N$ un haz trivial con (N, P_{fib}) una variedad de Poisson. Sean $\text{pr}_1: B \times N \rightarrow B$ y $\text{pr}_2: B \times N \rightarrow N$ las proyecciones canónicas.

Definimos una estructura de Poisson P en M como

$$\begin{cases} P((\text{pr}_2)^* \alpha, (\text{pr}_2)^* \beta) = (\text{pr}_2)^* P_{fib}(\alpha, \beta) & \text{para } \alpha, \beta \in \Omega^1(N), \\ i_{(\text{pr}_1)^* \omega} P = 0 & \text{para } \omega \in \Omega^1(B). \end{cases}$$

En coordenadas locales (x^i, y^α) de $B \times N$, el bivector P_{fib} tiene la forma

$$P_{fib} = \frac{1}{2} P^{\alpha, \beta}(y) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial y^\beta}.$$

Entonces $P|_{\text{pr}_1^{-1}(b)} = P_{fib}|_{\text{pr}_1^{-1}(b)}$ para todo $b \in B$.

Consideremos la foliación \mathcal{F} en M definida por

$$\mathcal{F}_m = \text{pr}_1(m) \times N,$$

para cada $m \in M$. Supongamos que $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es la acción de un grupo de Lie compacto y conexo en M y que preserva cada hoja de foliación, esto es que, para cada $b \in B$ fijo, el difeomorfismo $\Phi_{g,b}: N \rightarrow N$ cumple que

$$\Phi_{g,b}^* P_{fib} = P_{fib},$$

lo cual es equivalente a $\Phi_g^* P = P$.

Definimos una conexión $\gamma_0: TM \rightarrow TM$ de la siguiente manera. Para cada $m \in M$ tenemos la siguiente descomposición

$$T_m M = T_{\text{pr}_1(m)} B \oplus T_{\text{pr}_2(m)} N,$$

y entonces definimos $\gamma_0 := T\text{pr}_2$. Entonces la distribución horizontal es

$$\mathbb{H}_m^0 = T_{\text{pr}_1(m)} B.$$

Como los campos vectoriales horizontales son de la forma $X = U \oplus 0$ con $U \in \Gamma(TB)$, entonces

$$L_X P = 0.$$

Por lo tanto, en este caso, existe una conexión G -invariante de Poisson $\langle \gamma_0 \rangle$. En particular si la acción es localmente Hamiltoniana, como la curvatura $\text{Curv}^\gamma \equiv 0$, entonces $\gamma_0 \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$, y del Teorema 3.4.3, se sigue que

$$\langle \gamma_0 \rangle_G \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P).$$

▽

3.5. Estructuras de Dirac invariantes en variedades foliadas

En esta sección vamos a aplicar el Teorema 3.4.3 y el Teorema 3.4.4 con el objetivo de construir una familia de estructuras de Dirac que son invariantes con respecto a la acción de un grupo de Lie compacto y conexo. Estos resultados son una extensión del trabajo de Vallejo y Vorobev [9].

Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson. Para cada $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ con 2-forma Hamiltoniana de curvatura σ , definimos una distribución en $TM \oplus T^*M$ dada por

$$D^{\gamma, \sigma} := \left\{ \left(X + P^\sharp(\alpha), \alpha - i_X \sigma \right) \mid X \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma), \alpha \in \Gamma((\mathbb{H}^\gamma)^0) \right\}. \quad (3.47)$$

Recordemos de la Definición 3.4.1, que γ es admisible si una forma Hamiltoniana de curvatura σ , satisface la condición

$$d_{1,0}^\gamma \sigma = 0.$$

Proposición 3.5.1. *Para cada conexión de Poisson admisible $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$, la distribución asociada $D^{\gamma, \sigma}$ es una estructura de Dirac en M .*

Demostración. Mostremos que $D^{\gamma, \sigma}$ es una distribución Lagrangiana. Notemos que $D^{\gamma, \sigma}$ es una distribución regular de rango igual a $\dim(M)$. Además, para todo $X \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$ y $\alpha \in \Gamma((\mathbb{H}^\gamma)^0)$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \ll (X + P^\sharp(\alpha), \alpha - i_X \sigma), (Y + P^\sharp(\beta), \beta - i_Y \sigma) \gg \\ &= i_Y \alpha + i_{P^\sharp(\beta)} \alpha - i_Y i_X \sigma - i_{P^\sharp(\beta)} i_X \sigma + i_X \beta + i_{P^\sharp(\alpha)} \beta - i_X i_Y \sigma - i_{P^\sharp(\alpha)} i_Y \sigma = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $D^{\gamma, \sigma}$ es Lagrangiana.

Ahora mostremos que $D^{\gamma, \sigma}$ es involutiva con respecto al corchete de Courant (1.8). Tomando en cuenta que

$$D^{\gamma, \sigma} = \text{Graf}(P) \oplus \text{Graf}(\sigma),$$

podemos definir elementos básicos en $D^{\gamma, \sigma}$ como

$$e_\alpha = (P^\sharp(\alpha), \alpha) \quad \text{and} \quad e_X = (X, -i_X \sigma),$$

para todo $X \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$ y $\alpha \in \Gamma((\mathbb{H}^\gamma)^0)$. Como P es un bivector de Poisson, tenemos que

$$[P^\sharp(\alpha), P^\sharp(\beta)] = P^\sharp(\{\alpha, \beta\}_P) = P^\sharp(L_{P^\sharp(\alpha)} \beta - i_{P^\sharp(\beta)} d\alpha),$$

y entonces

$$\ll [e_\alpha, e_\beta] \gg = \left(P^\sharp(L_{P^\sharp(\alpha)} \beta - i_{P^\sharp(\beta)} d\alpha), L_{P^\sharp(\alpha)} \beta - i_{P^\sharp(\beta)} d\alpha \right) \in D^{\gamma, \sigma}.$$

Por otro lado, como γ es admisible, se tiene que

$$\begin{aligned} \ll [e_X, e_Y] \gg &= ([X, Y], -L_X i_Y \sigma + i_Y d i_X \sigma) = ([X, Y], -L_X i_Y \sigma + i_Y d i_X \sigma + i_Y i_X d \sigma) \\ &= ([X, Y], -i_{[X, Y]} \sigma) \in D^{\gamma, \sigma} \end{aligned}$$

Finalmente, como γ es una conexión de Poisson, se sigue que

$$\ll [e_X, e_\alpha] \gg = \left([X, P^\sharp \alpha], L_X \alpha + i_{P^\sharp(\alpha)} d i_X \sigma \right) = \left(P^\sharp(L_X \alpha), L_X \alpha + i_{P^\sharp(\alpha)} d i_X \sigma \right).$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} \ll [e_X, e_\alpha], e_\beta \gg &= i_{P^\sharp(L_X \alpha)} \beta + i_{P^\sharp(\beta)} (L_X \alpha + i_{P^\sharp(\alpha)} d i_X \sigma) = i_{P^\sharp(\beta)} i_{P^\sharp(\alpha)} i_X \sigma \\ &= L_{P^\sharp(\alpha)} (i_X \sigma(P^\sharp \beta)) - L_{P^\sharp(\beta)} (i_X \sigma(P^\sharp \alpha)) - i_X \sigma([P^\sharp \alpha, P^\sharp \beta]) = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple debido a que cada termino es cero. Además

$$\ll [e_X, e_\alpha], e_X \gg = \langle L_X \alpha, Y \rangle + \langle i_{P^\sharp(\alpha)} d i_X \sigma, Y \rangle + \langle -i_Y \sigma, [X, P^\sharp \alpha] \rangle, \quad (3.48)$$

como P es un bivector de Poisson, se tiene que

$$\langle -i_Y \sigma, [X, P^\sharp \alpha] \rangle = -\langle i_Y \sigma, P^\sharp(L_X \alpha) \rangle = \sigma(Y, P^\sharp(L_X \alpha)) = 0.$$

Por bigraduación, tenemos que

$$\langle L_X \alpha, Y \rangle = -\langle \alpha, [X, Y] \rangle = -\langle \alpha, \gamma([X, Y]) \rangle = \langle \alpha, -\text{Curv}^\gamma(X, Y) \rangle$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \langle i_{P^\sharp(\alpha)} di_X \sigma, Y \rangle &= (L_X \sigma)(P^\sharp \alpha, Y) - i_X d\sigma(P^\sharp, Y) \\ &= L_X(\sigma(P^\sharp \alpha, Y)) - \sigma(L_X P^\sharp \alpha, Y) - \sigma(P^\sharp \alpha, L_X Y) - d\sigma(X, P^\sharp \alpha, Y) \\ &= -d\sigma(X, P^\sharp \alpha, Y) = L_{P^\sharp \alpha}(\sigma(X, Y)) = i_{P^\sharp(\alpha)} d(\sigma(X, Y)) \\ &= \langle d(\sigma(X, Y)), P^\sharp \alpha \rangle = \langle \alpha, -P^\sharp d(\sigma(X, Y)) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces, de la ecuación (3.48) se sigue que

$$\ll [e_X, e_\alpha], e_X \gg = -\langle \alpha, \text{Curv}^\gamma(X, Y) \rangle - \langle \alpha, P^\sharp d(\sigma(X, Y)) \rangle = 0,$$

y por tanto $[e_X, e_\alpha] \in D^{\gamma, \sigma}$. \square

Observación 3.5.2. Se dice que $D^{\gamma, \sigma}$ es una estructura de Dirac de acoplamiento, en una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , asociada a los datos geométricos integrables (γ, σ, P) , en el sentido de Vaisman [8] y Wade y Dufour [26].

Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie compacto y conexo en (M, \mathcal{F}, P) . Supongamos que la G -acción admite un operador de pre-momento $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$. Recordemos del Teorema 3.4.3, si $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ con forma Hamiltoniana de curvatura σ , entonces el promedio $\bar{\gamma} := \langle \gamma \rangle^G \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ con forma Hamiltoniana de curvatura

$$\tilde{\sigma} = \sigma - d_{1,0}Q - \frac{1}{2}\{Q \wedge Q\}_P,$$

donde $\{Q \wedge Q\}_P$ es definida por la formula (3.33).

Del teorema 3.4.4, se tiene que la conexión promediada $\bar{\gamma}$ es admisible, en consecuencia, de la Proposición 3.5.1, se sigue que $D^{\bar{\gamma}, \tilde{\sigma}}$ es una estructura de Dirac en M .

Lema 3.5.3. *La estructura de Dirac $D^{\bar{\gamma}, \tilde{\sigma}}$ es G -invariante si y sólo si $\tilde{\sigma}$ es G -invariante.*

Demostración. Como la acción preserva la foliación y de la Proposición 3.2.4, se tiene que $\bar{\gamma}$ es G -invariante si y sólo si las descomposiciones (3.1) y (3.2) son G -invariantes. Supongamos que $D^{\bar{\gamma}, \tilde{\sigma}}$ es G -invariante, entonces para cada sección $(X + P^\sharp(\alpha), \alpha - i_X \tilde{\sigma}) \in \Gamma(D^{\bar{\gamma}, \tilde{\sigma}})$, se tiene que

$$\Phi_g^* X + \Phi_g^* P^\sharp(\alpha) = \tilde{X} + P^\sharp(\tilde{\alpha}), \quad (3.49)$$

$$\Phi_g^* \alpha - i_{\Phi_g^* X} \Phi_g^* \tilde{\sigma} = \tilde{\alpha} - i_{\tilde{X}} \tilde{\sigma}, \quad (3.50)$$

para algún $\tilde{X} \in \Gamma(\mathbb{H}^{\bar{\gamma}})$ y $\tilde{\alpha} \in \Gamma((\mathbb{H}^{\bar{\gamma}})^0)$. Como la G -acción preserva las distribuciones $\mathbb{H}^{\bar{\gamma}}$ y \mathbb{V} , tenemos que

$$\Phi_g^* X \in \Gamma(\mathbb{H}^{\bar{\gamma}}) \quad \text{y} \quad \Phi_g^* P^\sharp(\alpha) \in \Gamma(\mathbb{V}),$$

y de la ecuación (3.49), se sigue que $\tilde{X} = \Phi_g^* X$. Del mismo modo, de la ecuación (3.50), se sigue que

$$\tilde{\alpha} = \Phi_g^* \alpha \quad y \quad i_{\tilde{X}} \tilde{\sigma} = i_{\tilde{X}} \Phi_g^* \sigma.$$

Por lo tanto $\Phi_g^* \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}$. El recíproco se prueba de manera similar. \square

Ahora, estamos listos para probar el resultado principal de este capítulo. Mostraremos que $D^{\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}}$ es una estructura de Dirac G -invariante.

Teorema 3.5.4. *Sea (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson y sea G un grupo de Lie compacto y conexo actuando en M . Supongamos que la G -acción admite un operador de pre-momento. Para cada conexión admisible $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ con forma Hamiltoniana de curvatura σ , la estructura de Dirac $D^{\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}}$, asociada a la conexión promediada $\tilde{\gamma}$ con forma Hamiltoniana de curvatura $\tilde{\sigma}$, es G -invariante.*

Demostración. Mostremos que $\tilde{\sigma}$ es G -invariante. Sean (\mathcal{S}, ω) y $(\mathcal{S}, \tilde{\omega})$ las foliaciones pre-simplécticas asociadas a $D^{\gamma, \sigma}$ y $D^{\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}}$ respectivamente. Recordemos de la ecuación (1.9) que cada hoja de foliación $S \in \mathcal{S}$ es de la forma

$$\begin{aligned} TS &= \text{pr}_T(D^{\gamma, \sigma}) = \{X + P^\sharp \alpha \mid X \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma), \alpha \in \Gamma((\mathbb{H}^\gamma)^0)\} \\ &= \mathbb{H}^\gamma \oplus P^\sharp(T^*M). \end{aligned}$$

Del Teorema 1.3.7, se sigue que S es equipada con una forma pre-simpléctica definida como

$$\begin{aligned} \omega_S(X + P^\sharp \alpha, Y + P^\sharp \beta) &= i_{Y + P^\sharp \beta}(\alpha - i_X \sigma) \\ &= i_Y \alpha + i_{P^\sharp(\beta)} \alpha - i_Y i_X \sigma - i_{P^\sharp(\beta)} i_X \sigma \\ &= i_{P^\sharp(\beta)} \alpha - i_Y i_X \sigma, \end{aligned}$$

por lo cual $\omega_S = \sigma + \tau_S$, donde τ_S es la forma simpléctica asociada a P en S .

Del mismo modo, la foliación pre-simpléctica asociada a $D^{\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}}$, es definida por

$$\begin{aligned} \text{pr}_T(D^{\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}}) &= \left\{ \tilde{X} + P^\sharp \tilde{\alpha} \mid \tilde{X} \in \Gamma(\mathbb{H}^{\tilde{\gamma}}), \tilde{\alpha} \in \Gamma((\mathbb{H}^{\tilde{\gamma}})^0) \right\} \\ &= \mathbb{H}^{\tilde{\gamma}} \oplus P^\sharp(T^*M) = \mathbb{H}^\gamma \oplus \Xi(\mathbb{H}^\gamma) + P^\sharp(T^*M) \\ &= \mathbb{H}^\gamma \oplus P^\sharp(T^*M) = TS. \end{aligned}$$

y la forma pre-simpléctica asociada es dada por $\tilde{\omega}_S = \tilde{\sigma} + \tau_S$.

Notemos que TS es generada por elementos de la forma

$$\left\{ \tilde{X} = X + P^\sharp d(Q(X)), P^\sharp(df) \mid X \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma), f \in C^\infty(M) \right\},$$

por lo cual tenemos que $\tilde{\omega}_S$ es de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_S(X + P^\sharp d(Q(X)), Y + P^\sharp d(Q(Y))) &= \tilde{\sigma}(X, Y) + \tau_S(P^\sharp d(Q(X)), P^\sharp d(Q(Y))) \\ &= \sigma(X, Y) - d_{1,0}^\gamma Q(X, Y) - \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_P(X, Y) + \tau_S(P^\sharp d(Q(X)), P^\sharp d(Q(Y))) \\ &= \sigma(X, Y) - d_{1,0}^\gamma Q(X, Y) - \{Q(X), Q(Y)\}_P + \{Q(X), Q(Y)\}_P \\ &= \sigma(X, Y) - d_{1,0}^\gamma Q(X, Y) = \omega_S(X, Y) - dQ(X, Y), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tilde{\omega}_S = \omega_S - dQ|_S. \quad (3.51)$$

Podemos notar que la 1-forma diferencial Q coincide con la formula $\delta(\mu_a)$ de la Definición 2.1.7. De la ecuación (3.19), se sigue que la estructura de Poisson P es compatible con la G -acción, en el sentido de (2.8). Entonces, del Teorema 2.2.5, comparando las ecuaciones (2.7) y (3.51), se sigue que

$$\tilde{\omega}_S = \langle \omega_S \rangle^G$$

lo cual implica que $\tilde{\omega}_S$ es G -invariante. Finalmente, como τ_S y $\tilde{\omega}_S$ son G -invariantes, entonces $\tilde{\sigma}$ es G -invariante. Así, del Lema 3.5.3, se sigue que la estructura de Dirac $D^{\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}}$ es G -invariante. \square

Denotemos por $\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(M, \mathcal{F}, P, \gamma)$, el conjunto de todas las k -formas horizontales $\beta \in \Gamma\left(\bigwedge^k \mathbb{V}^0\right)$ tal que

$$\beta(X_1, \dots, X_k) \in \text{Casim}(M, P),$$

para todo $X_1, \dots, X_k \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$.

Puesto que los generadores infinitesimales a_M de la G -acción son tangentes a la foliación simpléctica de P , para cada función de Casimir $f \in \text{Casim}(M, P)$, se tiene que

$$L_{a_M} f = 0, \quad (3.52)$$

para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Lema 3.5.5. *Cada 2-forma $C \in \mathcal{C}^2$ es G -invariante.*

Demostración. De la ecuación (3.52) y como $C \in \mathcal{C}^2$ es una k -forma horizontal, se sigue que

$$L_{a_M} C(X, Y) = L_{a_M}(C(X, Y)) - C(L_{a_M} X, Y) - C(X, L_{a_M} Y) = 0,$$

para todo $X, Y \in \Gamma(\mathbb{H}^\gamma)$. Por lo tanto, C es una 2-forma G -invariante. \square

Dada una conexión de Ehresmann $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$, podemos asociar al conjunto $(M, \mathcal{F}, P, \gamma)$, un complejo de cocadena, llamado complejo de De-Rham-Casimir [21], como

$$\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k, \bar{d}^\gamma \right),$$

donde el operador $\bar{d}^\gamma: \mathcal{C}^k \rightarrow \mathcal{C}^{k+1}$, es la restricción del diferencial $d_{1,0}^\gamma$ al conjunto \mathcal{C}^k .

Tomando en cuenta la libertad (3.31) en la elección de una forma Hamiltonaiana de curvatura σ , tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.6. *Sean $\gamma \in \text{Con}_H(M, \mathcal{F}, P)$ una conexión de Ehresmann admisible y $\bar{\gamma} := \langle \gamma \rangle_G$ su promedio. Entonces, $D^{\bar{\gamma}, \tilde{\sigma} + C}$ es una estructura de Dirac G -invariante, para todo \bar{d}^γ -cociclo $C \in \mathcal{C}^2$, esto es que*

$$\bar{d}^\gamma C = 0.$$

Demostración. Como $C \in \mathcal{C}^2$, entonces para todo $X, Y, Z \in \Gamma_{pr}(\mathbb{H}^\gamma)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \{Q \wedge C\}_P(X, Y, Z) &= \{Q(X), C(X, Y)\}_P - \{Q(Y), C(X, Z)\}_P + \{Q(Z), C(X, Y)\}_P \\ &= 0. \end{aligned}$$

Del Teorema 3.5.4 y como C es un \bar{d}^γ -cociclo, se tiene que

$$d_{1,0}^{\bar{\gamma}}(\tilde{\sigma} + C) = d_{1,0}^{\bar{\gamma}}C = d_{1,0}^\gamma C + \{Q \wedge C\}_P = 0.$$

Por lo tanto, del Teorema 3.5.4 y el Lema 3.5.5, se sigue que $\tilde{\sigma} + C$ es G -invariante, y entonces del Lema 3.5.3 y la Proposición 3.5.1, concluimos que $D^{\bar{\gamma}, \tilde{\sigma} + C}$ es una estructura de Dirac G -invariante. \square

3.6. Deformaciones infinitesimales en variedades foliadas de Poisson

En esta sección, aplicaremos resultados de la Sección 3.3, con el objetivo de definir una transformación de normalización a primer orden, de un bivector de Poisson P , definido en la distribución vertical de una variedad foliada. Estos resultados son una generalización del trabajo de Avendaño y Vorobev [18].

Sean (M, \mathcal{F}, P) una variedad foliada de Poisson y $\mathbb{V} := T\mathcal{F}$ la distribución vertical. Sea G un grupo de Lie compacto y conexo actuando en (M, \mathcal{F}, P) . Sea A un bivector en M tal que $[A, P]_{SCH} = 0$, y consideremos la deformación infinitesimal de P

$$\Psi_\varepsilon = P + \varepsilon A,$$

para $\varepsilon \geq 0$. En general A no es G -invariante, por lo tanto Ψ_ε tampoco lo es. Nuestro objetivo es encontrar una transformación $\mathcal{T}_\varepsilon: N \subset M \rightarrow M$ tal que

$$\mathcal{T}_\varepsilon^*(\Psi_\varepsilon) = P + \varepsilon \bar{A} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad [\bar{A}, P]_{SCH} = 0$$

y \bar{A} es G -invariante. En este caso \mathcal{T} es llamada *transformación de normalización G -invariante a primer orden*.

Definición 3.6.1. Definimos el *operador de Lichnerowicz* asociado a la variedad de Poisson (M, P) , como la aplicación $\delta_P: \mathcal{X}^k(M) \rightarrow \mathcal{X}^{k+1}(M)$ definida por

$$\delta_P(A) := [P, A]_{SCH}$$

donde $[\cdot, \cdot]_{SCH}$ denota el corchete de Schouten–Nijenhuis.

El operador de Lichnerowicz tiene la propiedad que

$$\delta_P \circ \delta_P = 0,$$

por lo cual define un complejo de cocadena

$$C^\infty(M) \xrightarrow{\delta_P} \mathcal{X}^1(M) \xrightarrow{\delta_P} \mathcal{X}^2(M) \xrightarrow{\delta_P} \dots \xrightarrow{\delta_P} \mathcal{X}^k(M) \longrightarrow \dots$$

Y entonces definimos los grupos de *cohomología de Poisson*, como

$$H_P^k(M) = \frac{\ker(\delta_P: \mathcal{X}^k(M) \rightarrow \mathcal{X}^{k+1}(M))}{\text{Im}(\delta_P: \mathcal{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{X}^k(M))}.$$

Los elementos de $\ker(\delta_P)$ son llamados *k-cocíclos* y los elementos de $\text{Im}(\delta_P)$ son llamados *k-cofronteras* de P . Decimos que dos *k-cocíclos* $A, B \in \mathcal{X}^k(M)$ están en la misma clase de cohomología si

$$B = A - \delta_P(Y)$$

para algun $Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$.

Finalmente, tenemos que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccccccccccc} C^\infty(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^k(M) & \xrightarrow{d} & \dots \\ \text{Id} \downarrow & & P^\# \downarrow & & P^\# \downarrow & & & & P^\# \downarrow & & \\ C^\infty(M) & \xrightarrow{\delta_P} & \mathcal{X}^1(M) & \xrightarrow{\delta_P} & \mathcal{X}^2(M) & \xrightarrow{\delta_P} & \dots & \xrightarrow{\delta_P} & \mathcal{X}^k(M) & \xrightarrow{\delta_P} & \dots \end{array}$$

Supongamos que la acción admite un operador de pre-momento $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^1(M)$, es decir

$$a_M = P^\#(\mu_a) \quad \text{y} \quad i_{P^\#(\alpha)} d\mu_a = 0$$

para cada $a \in \mathfrak{g}$ y $\alpha \in \Omega^1(M)$.

Supongamos que existe una conexión de Poisson γ tal que $A \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{H}^\gamma)$.

Proposición 3.6.2. *Para cada 2-cociclo horizontal A , la clase de cohomología de A puede ser representada por un 2-cociclo G -invariante \bar{A} .*

Demostración. Como A es un 2-cociclo horizontal y \mathbb{H}^γ es generado por campos proyectables horizontales, entonces podemos escribir A como

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} X^i \wedge X^j$$

para $X^i \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$ y A_{ij} una función suave en M .

Como A es un 2-cociclo entonces $\delta_P(A) = 0$. Además, como γ es una conexión de Poisson, entonces $\delta_P(X^i) = L_{X^i} P = 0$ para todo $X^i \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$. Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} 0 = \delta_P(A) &= \delta_P \left(\frac{1}{2} A_{ij} X^i \wedge X^j \right) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_P(A_{ij}) X^i \wedge X^j + A_{ij} \delta_P(X^i) \wedge X^j + A_{ij} X^i \wedge \delta_P(X^j)) \\ &= \frac{1}{2} \delta_P(A_{ij}) X^i \wedge X^j, \end{aligned}$$

por lo tanto, A_{ij} es una función de Casimir para todo i, j .

Como la acción admite un operador de pre-momento, del Corolario 3.3.5, se sigue que el promedio de cada $X^i \in \Gamma_{\text{pr}}(\mathbb{H}^\gamma)$, toma la forma

$$\langle X^i \rangle_G = X^i - P^\sharp d(i_{X^i} Q)$$

donde

$$Q = - \int_G \int_0^1 \Phi_{\exp(ta)}^* (\mu_a)_{1,0} dt dg.$$

En este caso tenemos que

$$X^i = \langle X^i \rangle_G - P^\sharp (di_{X^i} Q) = \langle X^i \rangle - \delta_P(i_{X^i} Q)$$

Denotemos por $Y^i := i_{X^i} Q$, entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} A_{ij} X^i \wedge X^j = \frac{1}{2} A_{ij} ((\langle X^i \rangle_G - \delta_P(Y^i)) \wedge (\langle X^j \rangle_G - \delta_P(Y^j))) \\ &= \frac{1}{2} A_{ij} (\langle X^i \rangle_G \wedge \langle X^j \rangle_G - \langle X^i \rangle_G \wedge \delta_P(Y^j) \\ &\quad - \delta_P(Y^i) \wedge \langle X^j \rangle_G + \delta_P(Y^i) \wedge \delta_P(Y^j)) \end{aligned}$$

Sea $\bar{A} := A_{ij} \langle X^i \rangle_G \wedge \langle X^j \rangle_G$, como γ es una conexión de Poisson, entonces del Teorema 3.2.16 se sigue que $\langle \gamma \rangle_G$ es una conexión de Poisson, por lo cual $\delta_P(\langle X^i \rangle_G) = L_{\langle X^i \rangle_G} P = 0$. Como A_{ij} es una función de Casimir, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_P(\bar{A}) &= \delta_P \left(\frac{1}{2} A_{ij} \langle X^i \rangle_G \wedge \langle X^j \rangle_G \right) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_P(A_{ij}) \langle X^i \rangle_G \wedge \langle X^j \rangle_G + A_{ij} \delta_P(\langle X^i \rangle_G) \wedge \langle X^j \rangle_G \\ &\quad + A_{ij} \langle X^i \rangle_G \wedge \delta_P(\langle X^j \rangle_G)) \\ &= \frac{1}{2} \delta_P(A_{ij}) \langle X^i \rangle_G \wedge \langle X^j \rangle_G = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto \bar{A} es un 2-cociclo. Ahora, como \bar{A} es un elemento en $\Gamma(\wedge^2 \mathbb{H}^{\langle \gamma \rangle})$, entonces del Lema 3.2.7, se sigue que \bar{A} es G -invariante.

El operador de Lichnerowicz satisface la propiedad

$$\delta_P(A \wedge B) = \delta_P(A) \wedge B + A \wedge \delta_P(B),$$

para todo $A, B \in \mathcal{X}^k(M)$, entonces tenemos

$$A_{ij} \langle X^i \rangle_G \wedge \delta_P(Y^j) = \delta_P(A_{ij} \langle X^i \rangle \wedge Y^j)$$

del mismo modo

$$A_{ij} \delta_P(Y^i) \wedge \langle X^j \rangle_G = -A_{ij} \langle X^j \rangle_G \wedge \delta_P(Y^i) = -\delta_P(A_{ij} \langle X^j \rangle \wedge Y^i)$$

y como A_{ij} es de Casimir, se sigue que

$$A_{ij}\delta_P(X^i) \wedge \delta_P(X^j) = \delta_P(A_{ij}Y^i\delta_P(Y^j))$$

Por lo tanto, se tiene que

$$A = \bar{A} - \delta_P(A_{ij}\langle X^i \rangle \wedge Y^j - A_{ij}\langle X^j \rangle \wedge Y^i - A_{ij}Y^i\delta_P(Y^j))$$

lo cual implica que A y \bar{A} están en la misma clase de cohomología de Poisson. \square

Denotemos por

$$Y := A_{ij}\langle X^i \rangle \wedge Y^j - A_{ij}\langle X^j \rangle \wedge Y^i - A_{ij}Y^i\delta_P(Y^j),$$

de manera que podemos escribir $A = \bar{A} - \delta_P(Y)$. La Proposición 3.6.2, nos permite construir una transformación de normalización G -invariante, dada como el flujo del campo vectorial Y .

Teorema 3.6.3. *Para cada $N \subset M$ abierto G -invariante con cerradura compacta, el flujo Fl_Y^ε es una transformación de normalización G -invariante a primer orden.*

Demostración. Para cada campo tensorial $T(\varepsilon)$ que dependa suavemente por un parámetro ε , se tiene que

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\text{Fl}_Y^\varepsilon)^*T(\varepsilon) = (\text{Fl}_Y^\varepsilon)^* \left(L_Y T + \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right).$$

Entonces, para el bivector $T(\varepsilon) = P + \varepsilon A$ obtenemos

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\text{Fl}_Y^\varepsilon)^*(P + \varepsilon A) = (\text{Fl}_Y^\varepsilon)^*(L_Y(P + \varepsilon A) + A),$$

evaluando para $\varepsilon = 0$, se tiene

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon}(\text{Fl}_Y^\varepsilon)^*(P + \varepsilon A) \right|_{\varepsilon=0} = L_Y P + A.$$

Finalmente, de la proposición 3.6.2, se tiene que $A = \bar{A} - \delta_P(Y)$, donde \bar{A} es un 2-cociclo G -invariante, y entonces

$$\begin{aligned} (\text{Fl}_Y^\varepsilon)^*(P + \varepsilon A) &= P + \varepsilon \left. \frac{d}{d\varepsilon}(\text{Fl}_Y^\varepsilon)^*(P + \varepsilon A) \right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= P + \varepsilon L_Y P + \varepsilon A + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= P + \varepsilon \delta_P(Y) + \varepsilon \bar{A} - \varepsilon \delta_P(Y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= P + \varepsilon \bar{A} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

\square

Capítulo 4

Estructuras de Dirac invariantes bajo acciones propias

El objetivo en este capítulo es definir un método de promedio para acciones propias de grupos de Lie, con el propósito de construir estructuras de Dirac y Poisson que sean invariantes con respecto a dicha acción.

En la sección 4.1, presentaremos algunas propiedades importantes sobre acciones propias, con el objetivo de dar una demostración completa del *teorema del tubo* [15]. En la sección 4.2, usaremos el teorema del tubo para definir un operador de promedios para acciones propias de grupos de Lie, el cual fue introducido por Ratiu, Jotz y Śniatycki [12]. Dicho operador, garantiza obtener campos tensoriales invariantes en abiertos de la variedad. Finalmente, en la sección 4.3, presentaremos la construcción de estructuras de Dirac y Poisson, que son invariantes con respecto a una acción propia de grupos de Lie.

4.1. Acciones propias y el teorema del tubo

En esta sección, vamos a presentar algunos resultados importantes sobre acciones propias de grupos de Lie, con el objetivo de dar una demostración completa del *teorema del tubo*.

Dado un grupo de Lie actuando propiamente en una variedad suave. El teorema del tubo nos permite construir un difeomorfismo equivariante entre un abierto de la órbita de un punto y un producto torcido del grupo de Lie con cierto espacio vectorial, bajo el grupo de isotropía de dicho punto. En esta sección, vamos a dar las herramientas necesarias para presentar una prueba formal de este resultado.

4.1.1. Acciones propias y subvariedades tipo isotropía

Consideremos una acción suave de un grupo de Lie G en una variedad suave M , denotada por

$$\begin{aligned}\Phi: G \times M &\longrightarrow M, \\ (g, m) &\longmapsto \Phi(g, m) := g \cdot m.\end{aligned}$$

Definición 4.1.1. Decimos que $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es una *acción es propia*, si la aplicación

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \times M, \\ (g, m) &\longmapsto (g \cdot m, m), \end{aligned}$$

es propia, es decir, la preimagen de cualquier conjunto compacto es compacto.

Esta definición es equivalente a la siguiente condición: para cada sucesión convergente $\{m_n\}$ en M y una sucesión $\{g_n\}$ en G tal que la sucesión $\{\Phi(g_n, m_n)\}$ es convergente, entonces la sucesión $\{g_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{g_{n_k}\}$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(g_{n_k}, m_{n_k}) = \Phi \left(\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}, \lim_{k \rightarrow \infty} m_{n_k} \right).$$

Definimos el *grupo de isotropía* G_m de un punto $m \in M$ como

$$G_m = \{g \in G \mid \Phi(g, m) = m\}.$$

Proposición 4.1.2. Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ una acción propia de un grupo de Lie G en una variedad suave M .

1. Los subgrupos de isotropía son compactos.
2. M tiene una métrica Riemanniana G -invariante.

Demostración. 1. Sea $\{g_n\}$ una sucesión en el grupo de isotropía G_m de $m \in M$. Entonces $\Phi(g_n, m) = m$ para todo n , y la sucesión $\{\Phi(g_n, m)\}$ converge a m . Por la definición de acción propia, existe una subsucesión $\{g_{n_k}\}$ en G que converge a g tal que

$$\Phi(g, m) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(g_{n_k}, m) = \lim_{k \rightarrow \infty} m = m.$$

Por lo tanto $g \in G_m$, lo cual implica que G_m es compacto.

2. La prueba de este resultado se puede encontrar en [29, Prop. 2.5.2].

□

Supongamos que G actúa propiamente en M , sea H un subgrupo cerrado de G y sea N una subvariedad encajada de M tal que $h \cdot N \subset N$ para todo $h \in H$. Entonces podemos restringir la acción de G en M a una acción de H en N y esta acción restringida también es propia.

Definición 4.1.3. Para cada subgrupo de Lie cerrado H de G , definimos el conjunto tipo isotropía como

$$M_H = \{m \in M \mid G_m = H\}.$$

El conjunto de todos los M_H , donde H oscila sobre el conjunto de subgrupos de Lie cerrados ajenos de G , para el cual M_H es no vacío, forma una partición de M , por lo cual estos son las clases de equivalencia de una relación en M .

Definición 4.1.4. Definimos el *normalizador de H* en G como

$$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Recordemos que el normalizador $N(H)$ es un subgrupo de Lie cerrado de G y como H es un subgrupo normal de $N(H)$, entonces $N(H)/H$ es un subgrupo de Lie de G .

Proposición 4.1.5. Si $m \in M_H$, entonces $\Phi(g, m) \in M_H$ si y sólo si $g \in N(H)$.

Demostración. Mostremos primero que si $m \in M_H$ entonces $G_{g \cdot m} = gHg^{-1}$. Tomemos $m \in M_H$, es decir $G_m = H$, calculemos el subgrupo de isotropía de $g \cdot m$.

$$\begin{aligned} G_{g \cdot m} &= \{g' \in G \mid g' \cdot (g \cdot m) = g \cdot m\} = \{g' \in G \mid (g'g) \cdot m = g \cdot m\}, \\ &= \{g' \in G \mid (g^{-1}g') \cdot m = m\}, \end{aligned}$$

así $g^{-1}g'g \in H$, entonces existe $h \in H$ tal que $g^{-1}g'g = h$, luego $g' = ghg^{-1}$ y por tanto

$$G_{g \cdot m} = gHg^{-1}.$$

Ahora tomemos $g \cdot m \in M_H$, entonces se cumple que $G_{g \cdot m} = H$, luego tenemos que $H = G_{g \cdot m} = gHg^{-1}$, y por tanto $g \in N(H)$.

Por otro lado, si $g \in N(H)$ entonces $gHg^{-1} = H$, como $m \in M_H$ entonces $G_{g \cdot m} = gHg^{-1}$ y por lo tanto $g \cdot m \in M_H$. \square

Por la Proposición 4.1.5, la acción de G en M se restringe a una acción de $N(H)$ en M_H dada por

$$\begin{aligned} N(H) \times M_H &\longrightarrow M_H, \\ (g, m) &\longmapsto g \cdot m. \end{aligned}$$

Recordemos que la *órbita* de un elemento $m \in M$, es el conjunto

$$G \cdot m = \{g \cdot m \mid g \in G\},$$

los cuales definen una partición de M . Más aún, podemos definir una relación de equivalencia en M de la siguiente manera: Dos elementos $m, m' \in M$ están relacionados si y sólo si existe $g \in G$ tal que $m = g \cdot m'$. Las clases de equivalencia de esta relación son las órbitas de la misma, y el conjunto de todas las órbitas de M bajo esta acción es llamado el *espacio de órbitas* y denotado por M/G .

Definición 4.1.6. Definimos el conjunto tipo órbita como

$$M_{(H)} = \{m \in M \mid \exists g \in G \text{ tal que } G_m = gHg^{-1}\}.$$

Podemos notar que el conjunto tipo órbita se puede ver como

$$M_{(H)} = \{g \cdot m \mid g \in G, m \in M_H\} = \bigcup_{m \in M_H} G \cdot m.$$

Como las componentes conexas de M_H y $M_{(H)}$ son subvariedades encajadas de M , por lo cual M_H es llamado *variedad tipo isotropía* y $M_{(H)}$ es llamado *variedad tipo órbita*. Más aún, si denotamos por $\pi: M \rightarrow M/G$ la proyección al espacio de órbitas, entonces

$$\pi(M_{(H)}) = \{g \cdot m \mid m \in M_H\}/G,$$

es una variedad contenida en el espacio de órbitas M/G , y las componentes conexas de $\pi(M_{(H)})$ forman una partición del espacio de órbitas M/G .

Ejemplo 4.1.7. Consideremos $M = \mathbb{R}^3$ y la acción del grupo $G = \text{SO}(3)$ por rotaciones en \mathbb{R}^3 . Podemos notar que como $\text{SO}(3)$ es compacto, entonces la acción es propia. Tomemos un elemento $m \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, y l_m la recta que une 0 con m . Consideremos el subgrupo de rotaciones que dejan fijo a l_m , definido por

$$H_m = \{R \in \text{SO}(3) \mid R = \exp(\theta(\Lambda \circ N_m))\},$$

donde R es una rotación en $\text{SO}(3)$ con respecto al ángulo θ y $\Lambda \circ N_m$ es la matriz antisimétrica asociada a $N_m \in \mathbb{R}^3$, el vector normal con dirección l_m . Aquí, $\Lambda \circ N_m$ es un elemento del algebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $\text{SO}(3)$ y $\exp: \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{SO}(3)$ la aplicación exponencial.

En este caso, la variedad tipo isotropía es dada por $M_{H_m} = l_m \setminus \{0\}$. Notemos que si $H = \text{SO}(3)$, entonces $M_{\text{SO}(3)} = \{0\}$, por lo cual las variedades $M_{\text{SO}(3)}$ y M_{H_m} para cada $m \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, forman una partición de \mathbb{R}^3 .

Notemos que el normalizador de esta acción esta dado por

$$N(H_m) = \{O \in \text{SO}(3) \mid OH_mO^{-1} = H_m\} = H_m.$$

La variedad tipo órbita de H_m es $M_{(H_m)} = \bigcup_{m \in M_H} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, por otro lado, la variedad tipo órbita de $\text{SO}(3)$ es $M_{(\text{SO}(3))} = \{0\}$. Entonces

$$\pi(M_{(H_m)}) = \pi(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = (0, \infty) \quad \text{y} \quad \pi(M_{\text{SO}(3)}) = \pi(\{0\}) = \{0\},$$

forman una partición del espacio de órbitas $\mathbb{R}^3/\text{SO}(3) \cong [0, \infty)$. ∇

Ejemplo 4.1.8. Consideremos la acción diagonal Φ de $\text{SO}(3)$ en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, dado por $\Phi(A, (v, w)) := (Av, Aw)$. Esta acción es propia pues $\text{SO}(3)$ es un grupo de Lie compacto. Tenemos que $\Phi(A, (v, w)) = (v, w)$ si y sólo si $Av = v$ y $Aw = w$, es decir la rotación A deja fijo a v y w . Entonces tenemos los siguientes casos:

1. $(v, w) = (0, 0)$, en este caso el grupo de isotropía es $G_{(0,0)} = \text{SO}(3)$.
2. v y w son linealmente independientes, en este caso $G_{(v,w)} = \text{Id}$.
3. v y w son linealmente dependientes y no ambos cero, si suponemos que $v \neq 0$ entonces $G_{(v,w)} = \{A \in \text{SO}(3) \mid A \text{ es una rotación con respecto a } v\}$.

En el ultimo caso, existen un número infinito de variedades tipo isotropia, una para cada $v \in \mathbb{R}^3$ fija. Además existen tres variedades tipo órbita $M_{\text{SO}(3)}$, M_{Id_3} y $M_{\text{SO}(2)}$, donde

$$\text{SO}(2) \cong \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{SO}(3),$$

es el subgrupo de isotropia de (e_3, e_3) , correspondiente a la variedad tipo isotropia

$$M_{\text{SO}(2)} = \{(ae_3, be_3) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

▽

Definición 4.1.9. Dada una acción de un grupo G en una variedad M , definimos un *slice* que pasa por $m \in M$ como una subvariedad S_m de M que contiene a m , que satisface:

1. S_m es transversal y complementario a la órbita $G \cdot m$ de G que pasa por m , es decir,

$$T_m M = T_m S_m \oplus T_m(G \cdot m).$$

2. Para cada $m' \in S_m$, la variedad S_m es transversal a la órbita $G \cdot m'$, es decir

$$T_{m'} M = T_{m'} S_m \oplus T_{m'}(G \cdot m').$$

3. S_m es G_m -invariante.
4. Sea $m' \in S_m$. Si $g \cdot m' \in S_m$, entonces $g \in G_m$.

Teorema 4.1.10. *Sea G un grupo actuando en una variedad M de manera propia, entonces existen slices para cada $m \in M$.*

Demostración. Esta prueba la podemos encontrar en [30, Teo. 6.26]. □

4.1.2. Teorema del tubo

Dada una acción propia de un grupo de Lie en una variedad suave, el teorema del tubo nos permite obtener, para cada punto de la variedad, un difeomorfismo equivariante entre un abierto de la órbita del punto y el producto torcido del grupo de Lie, con un subespacio dado, bajo la acción restringida al grupo de isotropia.

En esta sección presentaremos una prueba formal para el teorema del tubo, para lo cual es necesario dar algunos resultados acerca de subespacios invariantes. Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ una acción suave por la izquierda y propia, de un grupo de Lie G en una variedad suave M .

Recordemos que como la acción de G en M es propia, entonces el subgrupo de isotropía $H := G_m$ es compacto.

Proposición 4.1.11. *Sea G un grupo de Lie compacto que actúa en una variedad M . Supongamos que $m \in M$ es un punto fijo de la acción, es decir, la órbita $G \cdot m = \{m\}$. Entonces cada abierto de m contiene una vecindad G -invariante de m .*

Demostración. Denotemos por $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de G en M y tomemos U un conjunto abierto arbitrario de m . Entonces la imagen inversa $\Phi^{-1}(U)$ es un abierto en $G \times M$ que contiene a $G \times \{m\}$.

Como $\Phi^{-1}(U)$ es abierto en $G \times M$, entonces para cada $g \in G$ existen vecindades W_g de g en G y V_g de m en M tal que $W_g \times V_g \subset \Phi^{-1}(U)$.

Entonces el conjunto $\{W_g \mid g \in G\}$ forma una cubierta abierta de G . Como G es compacto, existe una subcubierta finita $\{W_{g_1}, \dots, W_{g_n}\}$.

Sea $V := \bigcap_{i=1}^n V_{g_i}$ y definamos el conjunto $W := \Phi(G, V) \subset U$. Notemos que W es un abierto, pues $W = \bigcup_{g \in G} \Phi_g(V)$.

Mostremos que W es un conjunto G -invariante, en efecto: Sea $w \in W$, entonces existe $(g, v) \in G \times M$ tal que $\Phi(g, v) = w$. Así, para cada $h \in G$ se tiene que

$$\Phi(h, w) = \Phi(h, \Phi(g, v)) = \Phi(hg, v) \in W.$$

□

Proposición 4.1.12. *Sea G un grupo de Lie compacto que actúa en M , y tomemos un punto fijo $m \in M$. Entonces existe una métrica Riemanniana G -invariante definida en alguna vecindad G -invariante de m .*

Demostración. Sea $\rho: U \rightarrow \rho(U) \subset \mathbb{R}^n$ una carta local de M alrededor del punto m . Por la Proposición 4.1.11, podemos considerar el abierto U , como un abierto G -invariante. Sea ϱ una métrica Euclideana en $\rho(U) \subset \mathbb{R}^n$, y consideremos el pullback de la métrica $g := \rho^* \varrho$, la cual es una métrica Riemanniana en U .

Ahora tomamos g' la métrica promediada en U dada por

$$g'(z)(u, v) := \int_G g(h \cdot z) (T_z \Phi_h(u), T_z \Phi_h(v)) dg,$$

donde $z \in U$, $u, v \in T_z U$ y dg es la medida de Haar normalizada en G .

Como g es bilineal entonces g' también lo es, y por construcción g' es una métrica Riemanniana G -invariante en U . Puesto que $m \in M$ es punto fijo de la acción, entonces las métricas g y g' coinciden en m . □

Sea M una variedad y sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ la acción de un grupo de Lie en M . Para $m \in M$, tomamos $H := G_m$ el subgrupo de isotropía de G en m y $G \cdot m$ la órbita de m . Entonces, podemos definir una H -representación en el espacio cociente $T_m M / T_m(G \cdot m)$ como

$$\begin{aligned} \rho: H &\longrightarrow \text{GL}(T_m M / T_m(G \cdot m)), \\ h &\longmapsto \rho(h) \end{aligned},$$

definida como

$$\rho(h)(v_m + T_m(G \cdot m)) := T_m\Phi_h(v_m) + T_m(G \cdot m),$$

donde $\Phi_h(m) := \Phi(h, m)$ para todo $h \in H$ y $m \in M$. Para fines prácticos, denotaremos por $h \cdot (v_m + T_m(G \cdot m)) := \rho(h)(v_m + T_m(G \cdot m))$ a la H -representación anterior.

Sea A un subespacio del espacio vectorial $T_mM/T_m(G \cdot m)$. Usando ρ , definimos el producto torcido $G \times_H A$ como el espacio de órbitas $G \times A/H$ de la acción

$$\begin{aligned} \psi: H \times (G \times A) &\longrightarrow G \times A, \\ (h, (g, v)) &\longmapsto (gh^{-1}, h \cdot v), \end{aligned}$$

por lo cual, para cada $h \in H$ tenemos que $[g, v] = [gh^{-1}, h \cdot v]$. Además podemos definir la acción de G en $G \times_H A$ como

$$\begin{aligned} \Phi': G \times (G \times_H A) &\longrightarrow G \times_H A, \\ (g, [g', v]) &\longmapsto [gg', v]. \end{aligned}$$

Teorema 4.1.13 (Teorema del tubo). *Sea M una variedad diferenciable y sea G un grupo de Lie que actúa propiamente en M . Tomemos un punto $m \in M$, definamos $H := G_m$ como el subgrupo de isotropía de G en m y $G \cdot m$ la órbita de la acción de G en m . Entonces*

- *Existe una vecindad H -invariante B del 0 en un espacio de H -representaciones, tal que B es H -equivariantemente isomorfo a $T_mM/T_m(G \cdot m)$.*
- *Existe un abierto U de la órbita $G \cdot m$ en m H -invariante y un difeomorfismo H -equivariante*

$$\varphi: G \times_H B \longrightarrow U.$$

Demostración. Como la acción $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es propia, entonces el subgrupo de isotropía $H := G_m$ es compacto.

Por la Proposición 4.1.12, existe una métrica Riemanniana H -invariante definido en alguna vecindad H -invariante de m .

Sea $\mathfrak{g} \cdot m := \text{gen}\{\xi_M(m) \mid \xi \in \mathfrak{g}\} \cong T_m(G \cdot m)$ el subespacio generado por los generadores infinitesimales de la acción Φ , y definamos N_m el complemento ortogonal de $\mathfrak{g} \cdot m$ en T_mM con respecto a la métrica Riemanniana g . Entonces obtenemos la siguiente descomposición del espacio tangente

$$T_mM = \mathfrak{g} \cdot m \oplus N_m.$$

El subespacio N_m es H -invariante, por estar definida a partir de la métrica g , la cual es H -invariante, y equivariantemente isomorfo a $T_mM/T_m(G \cdot m)$.

Sea $\text{Exp}_m: T_mM \rightarrow M$ la aplicación exponencial Riemanniana. El Teorema B.2.3, garantiza la existencia de una vecindad W del origen en T_mM tal que $\text{Exp}_m|_W$ es un difeomorfismo sobre su imagen.

Por la Proposición 4.1.11, podemos escoger W como una vecindad H -invariante. Definimos $V := W \cap N_m$, como W y N_m con abiertos H -invariantes, entonces V también es un abierto H -invariante, por lo cual el producto torcido $G \times_H V$ está bien definido.

Ahora, definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \tau: G \times_H V &\longrightarrow M, \\ [g, v] &\longmapsto \Phi(g, \text{Exp}_m(v)), \end{aligned}$$

mostremos que τ está bien definida, en efecto: Sea $[gh^{-1}, h \cdot v] \in G \times_H V$, entonces

$$\begin{aligned} \tau([gh^{-1}, h \cdot v]) &= \Phi(gh^{-1}, \text{Exp}_m(h \cdot v)) = \Phi(gh^{-1}h, \text{Exp}_m(v)), \\ &= \Phi(g, \text{Exp}_m(v)) = \tau([g, v]). \end{aligned}$$

Además, podemos mostrar que τ es G -invariante, en efecto: Sea $g' \in G$ y $[g, v] \in G \times_H V$, entonces

$$\begin{aligned} \tau(\Phi'(g', [g, v])) &= \tau([g'g, v]) = \Phi(g'g, \text{Exp}_m(v)), \\ &= \Phi(g', \Phi(g, \text{Exp}_m(v))) = \Phi(g', \tau([g, v])). \end{aligned}$$

Ahora mostremos que $T_{[e,0]}\tau$ es un isomorfismo. Sea $\pi_H: G \times V \rightarrow G \times_H V$ la proyección a su clase de equivalencia, y sea $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ la aplicación exponencial al grupo de Lie. Entonces para cada $(\xi, u) \in T_{(e,0)}(G \times V) = \mathfrak{g} \times N_m$ se tiene

$$\begin{aligned} T_{(e,0)}(\tau \circ \pi_H)(\xi, u) &= \left(\frac{d}{dt} \Phi(\exp(t\xi), \text{Exp}_m(tu)) \right), \\ &= \left(d_{\exp(t\xi)} \Phi^{\text{Exp}_m(tu)} \left(\frac{d}{dt} \exp(t\xi) \right) \right), \\ &= \left. + d_{\text{Exp}_m(tu)} \Phi_{\exp(t\xi)} \left(\frac{d}{dt} \text{Exp}(tu) \right) \right|_{t=0}, \\ &= T_e \Phi^m(\xi) + u = \xi_M(m) + u. \end{aligned}$$

Como u es un elemento arbitrario en N_m , y $\mathfrak{g} \cdot m$ es generado por los generadores infinitesimales $\xi_M(m)$ de la acción, entonces de la descomposición

$$T_m M = \mathfrak{g} \cdot m \oplus N_m,$$

se sigue $T_{(e,0)}\tau: T_{[e,0]}(G \times_H V) \rightarrow T_m M$ es un isomorfismo.

Entonces, el teorema de la función implícita implica que existe una vecindad W' de $[e, 0]$ en $G \times_H V$ tal que $\tau|_W$ es difeomorfismo sobre su imagen. En particular, existe un abierto V' de 0 en V tal que, para cada $v \in V'$, el punto $[e, v] \in W'$. Así, $T_{[e,v]}\tau$ es un isomorfismo para todo $v \in V'$.

Ahora, τ es G -equivariante, es decir, para todo $g \in G$

$$\tau \circ \Phi'_g([e, v]) = \Phi_g \circ \tau([e, v]),$$

entonces se tiene que

$$T_{[g,v]}\tau \circ d_{[e,v]}\Phi'_g = d_{\text{Exp}_m(v)}\Phi_g \circ d_{[e,v]}\tau.$$

Por lo cual $T_{[g,v]}\tau$ es un isomorfismo para cada $g \in G$ y $v \in V'$ y entonces $\tau|_{G \times_H V'}$ es un difeomorfismo sobre su imagen.

Finalmente, usaremos la condición de que la G -acción es propia para mostrar que existe un abierto H -invariante B de V' que contiene a 0 , tal que $\tau|_{G \times_H B}$ es inyectivo.

Supongamos por contradicción que dicho subconjunto no existe. Por la Proposición 4.1.11 existe una vecindad B_1 H -invariante en el cual existen dos elementos $[g_1, v_1], [g'_1, v'_1] \in G \times_H B_1$ tal que $[g_1, v_1] \neq [g'_1, v'_1]$ y $\tau([g_1, v_1]) = \tau([g'_1, v'_1])$. Como B_1 es un abierto en V' existe un abierto V'_2 que no contiene a v_1 y v'_1 , por la Proposición 4.1.11, existe un abierto H -invariante $B_2 \subset V'_2$ tal que existen dos elementos $[g_2, v_2], [g'_2, v'_2] \in G \times_H B_2$ tal que $[g_2, v_2] \neq [g'_2, v'_2]$ y $\tau([g_2, v_2]) = \tau([g'_2, v'_2])$.

Recursivamente, obtenemos dos sucesiones $\{[g_i, v_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{[g'_i, v'_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$, tal que $\{v_i\}$ y $\{v'_i\}$ tienden a cero, para cada i tenemos que $[g_i, v_i] \neq [g'_i, v'_i]$ y $\tau([g_i, v_i]) = \tau([g'_i, v'_i])$, es decir

$$\Phi(g_i, \text{Exp}_m(v_i)) = \Phi(g'_i, \text{Exp}_m(v'_i)).$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $g'_i = e$ para todo i .

Como $\{v_i\}$ y $\{v'_i\}$ tienden a cero, las sucesiones $\{\text{Exp}_m(v_i)\}$ y $\{\text{Exp}_m(v'_i)\}$ tienden a m , y la igualdad

$$\Phi(g_i, \text{Exp}_m(v_i)) = \text{Exp}_m(v'_i),$$

implica que $\Phi(g_i, \text{Exp}_m(v_i))$ tiende a m .

Ahora, tenemos que las sucesiones $\{\text{Exp}_m(v_i)\}$ y $\{\Phi(g_i, \text{Exp}_m(v_i))\}$ convergen, y como la G -acción es propia, entonces la sucesión $\{g_i\}$ tiene una subsucesión convergente, la cual, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es $\{g_i\}$. Tomemos

$$g = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i.$$

Entonces la sucesión $\{\Phi(g_i, \text{Exp}_m(v_i))\}$ converge a $\Phi(g, m)$. Entonces tenemos que $\Phi(g, m) = m$, lo cual implica que $g \in H$, y por tanto $[g, 0] = [e, 0]$.

Como la sucesión $\{[g_i, v_i]\}$ converge a $[g, 0] = [e, 0] \in W'$, y además la sucesión $\{[e, v'_i]\}$ converge a $[e, 0] \in W'$, se sigue que para i suficientemente grande $[g_i, v_i]$ y $[e, v'_i]$ son elementos en W' .

Por hipótesis, tenemos que $[g_i, v_i] \neq [e, v'_i]$ y $\Phi(g_i, \text{Exp}_m(v_i)) = \text{Exp}_m(v'_i)$ lo cual contradice la biyectividad de τ en W' .

Entonces existe una vecindad H -invariante B de 0 en V' tal que $\tau|_{G \times_H B}$ es inyectivo. Y así $\tau|_{G \times_H B}$ es un difeomorfismo G -equivariante sobre su imagen.

Por lo tanto definimos el abierto H -invariante

$$U := \tau(G \times_H B).$$

□

4.2. Método de promedio para acciones propias

En esta sección, presentaremos un método de promedio, introducido por Ratiu en los trabajos [13], [12] y [6], para acciones propias de grupos de Lie no necesariamente compactos. Dicho método está basado en el teorema del tubo, y nos permite construir estructuras geométricas invariantes definidos en abiertos de la variedad.

Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ una acción propia de un grupo de Lie en una variedad suave M . Fijemos un elemento $m \in M$, sea $H := G_m$ el grupo de isotropía de m , y $G \cdot m$ su órbita.

Consideremos la H -representación en el cociente $T_m M / T_m(G \cdot m)$

$$\begin{aligned} \rho: H &\longrightarrow \text{GL}(T_m M / T_m(G \cdot m)), \\ h &\longmapsto \rho(h), \end{aligned}$$

definida como

$$\rho(h)(v_m + T_m(G \cdot m)) := T_m \Phi_h(v_m) + T_m(G \cdot m).$$

Supongamos que B es un subespacio H -invariante de $T_m M / T_m(G \cdot m)$. Consideremos la H -acción en $G \times B$ dada por

$$\begin{aligned} \psi: H \times (G \times B) &\longrightarrow G \times B, \\ (h, (g, v)) &\longmapsto (gh^{-1}, \rho(h)(v)), \end{aligned}$$

y denotemos por $G \times_H B$ su espacio de órbitas.

El Teorema del Tubo 4.1.13 garantiza la existencia de una vecindad H -invariante B isomorfa a $T_m M / T_m(G \cdot m)$, una vecindad G -invariante U de $G \cdot m$ y un isomorfismo G -equivariante

$$\tau: G \times_H B \rightarrow U,$$

con respecto a la acción de G en $G \times_H B$ dada por

$$\begin{aligned} \Phi: G \times (G \times_H B) &\longrightarrow G \times_H B, \\ (g, [g', b]) &\longmapsto [gg', b]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

De ahora en adelante, vamos a denotar al espacio de órbitas $G \times_H B$ por E .

Lema 4.2.1. *Sea $F \in \mathcal{T}_s^r(E)$ un tensor H -invariante, entonces el tensor*

$$\tilde{F}([g, b]) := (\Phi_{g^{-1}}^* F)([g, b]),$$

no depende del representante.

Demostración. Sea $[gh^{-1}, h \cdot b] \in E$. Como F es H -invariante, entonces $\Phi_h^* F = F$ para todo $h \in H$, por lo cual

$$\begin{aligned} \tilde{F}([gh^{-1}, h \cdot b]) &= (\Phi_{h g^{-1}}^* F)([gh^{-1}, h \cdot b]) = (\Phi_{g^{-1}}^* \Phi_h^* F)([gh^{-1}, h \cdot b]), \\ &= (\Phi_{g^{-1}}^* F)([gh^{-1}, h \cdot b]) = T_{[e, b]} \Phi_g(F([g^{-1} gh^{-1}, h \cdot b])), \\ &= T_{[e, b]} \Phi_g(F([e, b])) = \Phi_{g^{-1}}^* F([g, b]) = \tilde{F}([g, b]), \end{aligned}$$

por lo cual \tilde{F} esta bien definida. \square

La acción propia $\Phi: G \times E \rightarrow E$, se puede restringir a una acción del grupo de isotropía H en E , la cual es también una acción propia, y esta acción restringida la vamos a denotar también por Φ . Como la acción de G en E es propia, entonces de la Proposición 4.1.2, H es compacto, lo cual implica que existe una medida de Haar normalizada que denotaremos por dh .

Definición 4.2.2. Sea $F \in \mathcal{T}_s^r(E)$, definimos el promedio G -invariante de F como

$$F^G([g, b]) := \Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_H \Phi_h^* F \, dh \right) ([g, b]),$$

para todo $[g, b] \in E$ y dh es la medida de Haar normalizada en H .

Del Lema 4.2.1, tenemos que el promedio G -invariante $F^G([g, b])$ esta bien definido, pues el tensor $\int_H \Phi_h^* F \, dh$ es H -invariante.

Proposición 4.2.3. Supongamos que E es conexo y sea $F \in \mathcal{T}_s^r(E)$. El promedio G -invariante de F satisface las siguientes propiedades.

1. F^G es G -invariante.
2. El promedio G -invariante de F coincide con F si y sólo si F es G -invariante.
3. F es G -invariante si y sólo si $L_{\xi_E} F = 0$, para cada $\xi \in \mathfrak{g}$. Aquí, ξ_E denota el generador infinitesimal de la acción (4.1).

Demostración. Fijemos $F \in \mathcal{T}_s^r(E)$.

1. Definamos un tensor H -invariante

$$Y([g, b]) := \int_H \Phi_h^* F([g, b]) \, dh,$$

y mostremos que $F^G([g, b]) = \Phi_{g^{-1}}^* Y([g, b])$ es G -invariante. En efecto, para todo $g' \in E$

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{g'}^* F^G \right) ([g, h]) &= T_{[g', b]} \Phi_{g'^{-1}} F^G ([g', b]), \\ &= T_{[g', b]} \Phi_{g'^{-1}} \circ \Phi_{(g'g)^{-1}}^* Y([g', b]), \\ &= T_{[g', b]} \Phi_{g'^{-1}} \circ T_{[e, b]} \Phi_{g'g} Y([e, b]), \\ &= T_{[e, b]} \Phi_g Y([e, b]) = \Phi_{g^{-1}}^* Y([g, b]) = F^G([g, b]). \end{aligned}$$

2. Primero, supongamos que $F^G = F$, entonces

$$\Phi_g^* F = \Phi_g^* F^G = F^G = F,$$

para todo $g \in G$. Por otro lado, si F es G -invariante, entonces $\Phi_g^* F = F$ para todo $g \in G$, por tanto

$$\begin{aligned} F^G([g, b]) &= \Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_H \Phi_h^* F \, dh \right) ([g, b]) = \Phi_{g^{-1}}^* F([g, b]) \int_H dh, \\ &= \Phi_{g^{-1}}^* F([g, b]) = F([g, b]). \end{aligned}$$

3. Supongamos que F es G -invariante. Entonces, para cada $p \in E$ tenemos que

$$\begin{aligned} (L_{\xi_E} F)_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\mathbb{F}1_{\xi_E}^t)^* F)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}^* F_p, \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F_p = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que $L_{\xi_E} F = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}^* F = \Phi_{\exp(t\xi)}^* (L_{\xi_E} F) = 0,$$

lo cual implica que $\Phi_{\exp(t\xi)}^* F$ es constante y como $\Phi_{\exp(0\xi)} = \text{id}_E$, entonces

$$\Phi_{\exp(t\xi)}^* F = F.$$

Como E es conexo, el Teorema B.2.6 nos asegura que cada elemento $g \in G$, se puede escribir como el producto de aplicaciones exponenciales, es decir, existen $a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$ tal que $g = \exp(\xi_1) \cdot \exp(\xi_2)$. Por lo tanto

$$\Phi_g^* F = \Phi_{\exp(\xi_1) \cdot \exp(\xi_2)}^* F = \Phi_{\exp(\xi_2)}^* \circ \Phi_{\exp(\xi_1)}^* F = \Phi_{\exp(\xi_2)}^* F = F,$$

por lo tanto F es G -invariante. □

El promedio G -invariante nos permite construir tensores invariantes definidos en el espacio de órbitas E . Sin embargo, a raíz del teorema del tubo, podemos construir tensores invariantes en abiertos de M como sigue. Del teorema de tubo, existe un difeomorfismo equivariante τ entre el espacio de órbitas E y un abierto U de la órbita. Dado un campo tensorial F definido en el abierto U , podemos mandarlo, via τ , al espacio de órbitas como $\tau^* F$. Promediando el tensor $(\tau^* F)^G$, obtenemos un tensor G -invariante en E , y “regresamos” el campo promediado a U , lo cual nos deja el campo tensorial

$$\tau_*((\tau^* F)^G),$$

el cual es un tensor G -invariante definido en el abierto U .

Denotemos el promedio G -invariante como una aplicación

$$\mathcal{A}: \mathcal{T}_s^r(E) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(E),$$

definida como $\mathcal{A}(F) := F^G$. Puesto que el pullback de un difeomorfismo conmuta con el diferencial, se sigue que

$$d \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ d$$

Del inciso (1) de la Proposición 4.2.3, tenemos que el promedio G -invariante \mathcal{A} es un operador de proyección, es decir, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. Entonces tenemos una descomposición

$$\mathcal{T}_s^r(E) = \text{Im}(\mathcal{A}) \oplus \ker(\mathcal{A}),$$

donde $\text{Im}(\mathcal{A})$ es el conjunto de campos tensoriales G -invariantes y $\ker(\mathcal{A})$ son los campos tensoriales con G -promedio cero.

Del inciso (3) de la Proposición 4.2.3, tenemos que $(L_{\xi_E} F)^G = 0$, en efecto

$$\begin{aligned} (L_{\xi_E} F)^G([g, b]) &= \Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_H \Phi_h^* L_{\xi_E} F \, dh \right) ([g, b]), \\ &= L_{\xi_E} \left(\Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_H \Phi_h^* F \, dh \right) \right) ([g, b]), \\ &= L_{\xi_E} F^G([g, b]) = 0. \end{aligned}$$

En particular, para cada campo vectorial X en E , el promedio G -invariante de X es

$$\begin{aligned} X^G([g, b]) &= \Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_H \Phi_h^* X \, dh \right) ([g, b]), \\ &= T_{[e, b]} \Phi_g \left(\int_H (T_{[h, b]} \Phi_{h^{-1}} X([h, b])) \, dh \right). \end{aligned}$$

Para cada forma diferencial α en E , el promedio G -invariante de α es

$$\begin{aligned} \alpha^G([g, b]) &= \left(\Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_H \Phi_h^* \alpha \, dh \right) \right) ([g, b]), \\ &= \left(\int_H (\alpha([h, b]) \circ T_{[e, b]} \Phi_h) \, dh \right) \circ T_{[g, b]} \Phi_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

Si f es una función suave definida en E , entonces su promedio G -invariante está dado por

$$f^G([g, b]) := \int_{h \in H} f([h, b]) \, dh.$$

Ejemplo 4.2.4 (Acción de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3). Consideremos la acción propia de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3 dada por

$$\begin{aligned} \Phi: (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ ((\theta, k), (x, y, z)) &\longmapsto \begin{pmatrix} x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ k + z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fijemos el punto $p = (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces el grupo de isotropía en p es

$$\begin{aligned} H &:= (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})_p = \left\{ (\theta, k) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid \Phi \left(\theta, k, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\}, \\ &= \left\{ (\theta, k) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\}, \\ &= \{(\theta, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\} \cong \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

La órbita de p está dado por

$$G \cdot p = \{\Phi(\theta, k, (0, 0, z)) \mid (\theta, k) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\} = \{(0, 0, z+k) \mid k \in \mathbb{R}\},$$

y entonces el espacio tangente $T_p(G \cdot p)$ es de dimensión 1.

Por el teorema del tubo existen, un abierto U de la órbita $G \cdot p$ y un difeomorfismo equivariante

$$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B \longrightarrow U,$$

donde $B \cong T_p \mathbb{R}^3 / T_p(G \cdot p)$ lo podemos identificar con \mathbb{R}^2 .

Tomemos un elemento $h = (\theta, 0) \in H \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y sea $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p \mathbb{R}^3$. Calculamos el diferencial

$$d\Phi_h(v) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cos(\theta) - v_2 \operatorname{sen}(\theta) \\ v_1 \operatorname{sen}(\theta) + v_2 \cos(\theta) \\ v_3 \end{pmatrix},$$

entonces, la H -representación $\rho: H \times B \rightarrow B$ es dada por

$$\rho((\theta, 0), (x, y)) = \begin{pmatrix} x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta) \\ x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la H -acción $\Psi: H \times (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times B) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times B$ es dada por

$$\Psi((\theta, 0), (\alpha, k, x, y)) = \begin{pmatrix} \alpha - \theta \\ k \\ x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta) \\ x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Tomando el cambio de variables $x = r \cos(\alpha_2)$, $y = r \operatorname{sen}(\alpha_2)$ esta acción queda como

$$\Psi((\theta, 0), (\alpha_1^0, k, r, \alpha_2^0)) = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 - \theta \\ k \\ r \\ \alpha_2^0 + \theta \end{pmatrix}.$$

Por tanto, un modelo para el espacio de órbitas $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B$ es

$$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B \cong \mathbb{R} \times [0, \infty) \times \mathbb{S}^1,$$

este isomorfismo toma cada elemento $[(\alpha, k), (r, \theta)] \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B$ y lo manda al elemento $(k, r, \alpha + \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \times \mathbb{S}^1$. La inversa, toma cada elemento $(k, r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \times \mathbb{S}^1$ y lo manda a la clase $[(0, k), (r, \theta)] \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B$.

La acción del cilindro en el espacio modelo es

$$\begin{aligned} \Phi: (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times [0, \infty) \times \mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{R} \times [0, \infty) \times \mathbb{S}^1, \\ ((\theta, l), (k, r, \alpha)) &\longmapsto (k + l, r, \alpha + \theta). \end{aligned}$$

El isomorfismo equivariante de $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B$ a $U \subset \mathbb{R}^3$ es dado por

$$\tau([(\alpha_1, k), (r, \alpha_2)]) = (r \cos(\alpha_1 + \alpha_2), r \sen(\alpha_1 + \alpha_2), k).$$

Por lo tanto, para cada función f en $\mathbb{R} \times [0, \infty) \times \mathbb{S}^1$, el promedio $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ -invariante de f es

$$\begin{aligned} f^{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}}(k, r, \alpha) &= \Phi_{-(0, k)}^* \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{(\tilde{\alpha}, 0)}^* f \, d\tilde{\alpha} \right) (k, r, \alpha), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{(\tilde{\alpha}, 0)}^* f(0, r, \alpha) \, d\tilde{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(0, r, \alpha) \, d\alpha. \end{aligned}$$

En el abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, el promedio $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ -invariante de $f \in C^\infty(U)$ es

$$\begin{aligned} \langle f \rangle^{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}}(x, y, z) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x \cos(t) - y \sen(t), x \sen(t) + y \cos(t), 0) \, dt. \end{aligned}$$

▽

Con el siguiente ejemplo mostraremos que, en el caso que G sea compacto, el promedio clásico y el promedio G -invariante de una función dada, no coinciden.

Ejemplo 4.2.5. Sea $\Phi: \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la acción del toro en \mathbb{R}^4 , definida como

$$\Phi \left((\theta_1, \theta_2), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta_1 - x_2 \sen \theta_1 \\ x_1 \sen \theta_1 + x_2 \cos \theta_1 \\ x_3 \cos \theta_2 - x_4 \sen \theta_2 \\ x_3 \sen \theta_2 + x_4 \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

La medida de Haar en \mathbb{T}^2 es la 2-forma diferencial

$$\frac{1}{(2\pi)^2} d\theta_1 \wedge d\theta_2.$$

Sea $p = (x_1, x_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ con $p \neq 0$, el grupo de isotropía $H := G_p$ de p es

$$\begin{aligned} H &= \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2 \mid \Phi((\theta_1, \theta_2), (x_1, x_2, 0, 0)) = (x_1, x_2, 0, 0)\}, \\ &= \left\{ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta_1 - x_2 \operatorname{sen} \theta_1 \\ x_1 \operatorname{sen} \theta_1 + x_2 \cos \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ &\cong \{(0, \theta_2) \in \mathbb{T}^2\} \cong \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Por el teorema del tubo, existe un abierto U de la órbita $G \cdot p$ de p y un difeomorfismo G -equivariante $\tau: \mathbb{T}^2 \times_H B \rightarrow U$ donde

$$B \cong T_p \mathbb{R}^4 / T_p(G \cdot p) \cong \mathbb{R}^4 / T_p(G \cdot p).$$

Notemos que $\dim(B) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(T_p(G \cdot p)) = 3$, por lo cual B es isomorfo a \mathbb{R}^3 . Calculemos el espacio $T_p(G \cdot p)$ con $p = (x_1, x_2, 0, 0)$. Si $r = \|p\|$, tenemos

$$G \cdot p = \{(r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi, 0, 0) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Sea $\gamma(t, p) = (x_1 \cos t - x_2 \operatorname{sen} t, x_1 \operatorname{sen} t + x_2 \cos t, 0, 0)$ una curva en $G \cdot p$, entonces $\gamma'(t, p) = (-x_1 \operatorname{sen} t - x_2 \cos t, x_1 \cos t - x_2 \operatorname{sen} t, 0, 0)$, y cuando $t = 0$ nos queda que $\gamma'(0, p) = (-x_2, x_1, 0, 0)$, por lo cual el espacio $T_p(G \cdot p)$ es generado por elementos de la forma $(-x_2, x_1, 0, 0)$.

Por lo tanto, si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^4 , entonces $\{x_2 e_1, x_1 e_2, e_3, e_4\}$ también es base, por lo cual $\{-x_2 e_1 + x_1 e_2, x_2 e_1 + x_1 e_2, e_3, e_4\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^4 , donde el primer elemento $-x_2 e_1 + x_1 e_2 \in T_p(G \cdot p)$ y por tanto $\{x_2 e_1 + x_1 e_2, e_3, e_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4 / T_p(G \cdot p) \cong B$.

Podemos caracterizar al toro y H como subgrupos de $\operatorname{GL}(\mathbb{R}^4)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^2 &\cong \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\operatorname{sen} \theta_1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\operatorname{sen} \theta_2 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi \right\}, \\ H &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\operatorname{sen} \theta_2 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi \right\}. \end{aligned}$$

Sea $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ y sea $h = (0, \theta_2) \in H$, entonces el diferencial de la función $\Phi_h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es

$$d\Phi_h(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\operatorname{sen} \theta_2 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \cos \theta_2 - v_4 \operatorname{sen} \theta_2 \\ v_3 \operatorname{sen} \theta_2 + v_4 \cos \theta_2 \end{pmatrix},$$

entonces la H -representación $\rho: H \times B \rightarrow B$ se puede ver como

$$\rho \left((0, \theta_2), \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \cos \theta_2 - y_3 \operatorname{sen} \theta_2 \\ y_2 \operatorname{sen} \theta_2 + y_3 \cos \theta_2 \end{pmatrix},$$

y así, la aplicación $\Psi: H \times (\mathbb{T}^2 \times B) \rightarrow \mathbb{T}^2 \times B$ es igual a

$$\Psi \left((0, \theta_2), (\alpha_1, \alpha_2), \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 - \theta_2 \\ y_1 \\ y_2 \cos \theta_2 - y_3 \operatorname{sen} \theta_2 \\ y_2 \operatorname{sen} \theta_2 + y_3 \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar notación, definimos la matriz

$$A(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\operatorname{sen} \theta_2 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix},$$

y consideramos elementos $(\alpha, y) := (\alpha_1, \alpha_2, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{T}^2 \times B$. En este caso, la aplicación Ψ , queda como

$$\Psi((0, \theta_2), (\alpha, y)) = (\alpha_1, \alpha_2 + \theta_2, A(\theta_2)y).$$

Consideremos el cambio de variables

$$y_2 = r \cos(\alpha_3) \quad y_3 = r \operatorname{sen}(\alpha_3),$$

en este caso consideramos el espacio \mathbb{R}^3 con coordenadas (y_1, r, α_3) , la acción Ψ de H en $\mathbb{T}^2 \times B$ se ve como

$$\Psi \left((0, \theta_2), (\alpha_1, \alpha_2), \begin{pmatrix} y_1 \\ r \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 - \theta_2 \\ y_1 \\ r \\ \alpha_3 + \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que el espacio $\mathbb{T}^2 \times_H B$ está definido como el espacio de órbitas de la acción de H en $\mathbb{T}^2 \times B$ bajo Ψ . Por lo cual, un modelo para este espacio está dado por

$$\mathbb{T}^2 \times_H B \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times [0, \infty),$$

el difeomorfismo toma cada elemento $[(\alpha_1, \alpha_2), (y, r, \alpha_3)]$ en $\mathbb{T}^2 \times_H B$ y le asigna el elemento $(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, y, r)$ en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$, y la inversa toma $(\alpha_1, \alpha_2, y, r)$ en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$ y le asigna el elemento $[(\alpha_1, 0), (y, r, \alpha_3)]$ en $\mathbb{T}^2 \times_H B$.

Notemos que cualquier clase de equivalencia $[(\alpha_1, \alpha_2), (y, r, \alpha_3)] \in \mathbb{T}^2 \times_H B$ cumple que

$$[(\alpha_1, \alpha_2), (y, r, \alpha_3)] = [(\alpha_1, 0), (y, r, \alpha_2 + \alpha_3)].$$

La acción de \mathbb{T}^2 en $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$, esta dada por

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ ((\theta_1, \theta_2), (\alpha_1, \alpha_2, s, r)) &\longmapsto (\theta_1 + \alpha_1, \theta_2 + \alpha_2, s, r). \end{aligned}$$

El difeomorfismo $\tau: \mathbb{T}^2 \times_H B \rightarrow U$ esta definido como

$$\tau((\theta_1, \theta_2, r_1, r_2)) = \begin{pmatrix} r_1 \cos(\theta_1) \\ r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \\ r_2 \cos(\theta_2) \\ r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \end{pmatrix},$$

y es equivariente pues

$$\begin{aligned} \tau(\Phi_{(\theta_1, \theta_2)}(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2)) &= \tau(\alpha_1 + \theta_1, \alpha_2 + \theta_2, r_1, r_2), \\ &= \begin{pmatrix} r_1 \cos(\alpha_1 + \theta_1) \\ r_1 \operatorname{sen}(\alpha_1 + \theta_1) \\ r_2 \cos(\alpha_2 + \theta_2) \\ r_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 + \theta_2) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} r_1(\cos(\alpha_1) \cos(\theta_1) - \operatorname{sen}(\alpha_1) \operatorname{sen}(\theta_1)) \\ r_1(\cos(\alpha_1) \operatorname{sen}(\theta_1) + \operatorname{sen}(\alpha_1) \cos(\theta_1)) \\ r_2(\cos(\alpha_2) \cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\alpha_2) \operatorname{sen}(\theta_2)) \\ r_2(\cos(\alpha_2) \operatorname{sen}(\theta_2) + \operatorname{sen}(\alpha_2) \cos(\theta_2)) \end{pmatrix}, \\ &= \Phi_{(\theta_1, \theta_2)}(\tau(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2)). \end{aligned}$$

Sea $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times [0, \infty))$. Entonces el promedio G -invariante de f es

$$\begin{aligned} f^{\mathbb{T}^2}(\alpha_1, \alpha_2, s, r) &= \Phi_{-(\alpha_1, \alpha_2)}^* \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{(0, \theta_2)}^* f d\theta_2 \right) (\alpha_1, \alpha_2, s, r), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{(0, \theta_2)}^* f(0, \alpha_2, s, r) d\theta_2, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(0, \theta_2, s, r) d\theta_2. \end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos del Ejemplo 2.1.4, que el promedio clásico de f es

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{\mathbb{T}^2}(\alpha_1, \alpha_2, s, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{(\theta_1, \theta_2)}^* f(\alpha_1, \alpha_2, s, r) d\theta_1 d\theta_2, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2, s, r) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned}$$

por lo cual el promedio clásico y el promedio \mathbb{T}^2 -invariante de la función $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times [0, \infty))$ no coinciden.

Finalmente, el promedio \mathbb{T}^2 -invariante de una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle f \rangle^{\mathbb{T}^2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, 0, x_3 \cos(t) - x_4 \sin(t), x_3 \sin(t) + x_4 \cos(t)\right) dt. \end{aligned}$$

▽

Consideremos el grupo de isotropía H y sea \mathfrak{h} su álgebra de Lie. Del Corolario B.2.5, tenemos que, como H es compacto y conexo, entonces la aplicación exponencial $\exp: \mathfrak{h} \rightarrow H$ es sobreyectiva.

Consideremos el cut locus $\mathcal{C}(e)$ en la identidad $e \in H$, por el Teorema B.2.3 existe una vecindad \mathcal{D}_e tal que la función exponencial restringida $\exp: \mathcal{D}_e \rightarrow H \setminus \mathcal{C}(e)$ es un difeomorfismo. Más aún, el cut locus $\mathcal{C}(e)$ tiene medida cero. Denotemos por $\mu := dh$ la medida de Haar en H , la cual induce la medida de Haar $\exp^* \mu$ en \mathcal{D}_e .

Definición 4.2.6. Definamos el operador $\delta^H: \text{Hom}(\mathfrak{h}, \mathcal{T}_s^r(E)) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(E)$ como

$$\delta^H(\lambda_\xi) := \int_{\mathcal{D}_e} \left(\int_0^1 \Phi_{\exp(t\xi)}^* \lambda_\xi dt \right) (\exp^* \mu),$$

donde $\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{h}, \mathcal{T}_s^r(E))$ y $\xi \in \mathfrak{h}$.

Proposición 4.2.7. Para cada $F \in \mathcal{T}_s^r(E)$, el promedio G -invariante de F satisface la ecuación

$$F^G([g, b]) = \Phi_{g^{-1}}^* F([g, b]) + \Phi_{g^{-1}}^* \delta^H(L_{\xi_E} F)([g, b]), \quad (4.2)$$

para cada $[g, b] \in E$.

Demostración. Sea $\xi \in \mathfrak{h}$, recordemos que el flujo de los generadores infinitesimales ξ_E están dados por

$$\Phi_{\exp(t\xi)}: E \rightarrow E.$$

Sea $F \in \mathcal{T}_s^r(E)$, consideremos la ecuación

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\exp(t\xi)}^* F = \Phi_{\exp(t\xi)}^* (L_{\xi_E} F).$$

Integrando ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi_{\exp(t\xi)}^* F([g, b]) dt = \int_0^1 \Phi_{\exp(t\xi)}^* (L_{\xi_E} F)([g, b]) dt,$$

de aquí se sigue que

$$\Phi_{\exp(t\xi)}^* F([g, b]) - F([g, b]) = \int_0^1 \Phi_{\exp(t\xi)}^* (L_{\xi_E} F)([g, b]) dt,$$

e integrando sobre \mathcal{D}_e , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_e} \Phi_{\exp(t\xi)}^* F([g, b]) \exp^*(\mu) - F([g, b]) &= \\ \int_{\mathcal{D}_e} \left(\int_0^1 \Phi_{\exp(t\xi)}^* (L_{\xi_E} F)([g, b]) dt \right) \exp^*(\mu). & \end{aligned}$$

Como $\exp: \mathcal{D}_e \rightarrow H \backslash \mathcal{C}(e)$ es un difeomorfismo y $\mathcal{C}(e)$ tiene medida cero, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_e} \Phi_{\exp(t\xi)}^* F([g, b]) \exp^*(\mu) &= \int_{H \backslash \mathcal{C}(e)} \Phi_h^* F([g, b]) dh, \\ &= \int_H \Phi_h^* F([g, b]) dh. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_H \Phi_h^* F([g, b]) dh \right) - \Phi_{g^{-1}}^* F([g, b]) &= \\ \Phi_{g^{-1}}^* \left(\int_{\mathcal{D}_e} \left(\int_0^1 \Phi_{\exp(t\xi)}^* (L_{\xi_E} F)([g, b]) dt \right) \exp^*(\mu) \right). & \end{aligned}$$

finalmente con esta ecuación obtenemos la formula

$$F^G([g, b]) = \Phi_{g^{-1}}^* F([g, b]) + \Phi_{g^{-1}}^* (\delta^H (L_{\xi_E} F))([g, b]).$$

□

En particular, si β es una forma diferencial cerrada en E , entonces la ecuación (4.2) tiene la forma

$$\beta^G([g, b]) = \Phi_{g^{-1}}^* \beta([g, b]) + \Phi_{g^{-1}}^* (d\delta^H (i_{\xi_E} \beta))([g, b]). \quad (4.3)$$

4.3. Estructuras de Dirac G -invariantes

En esta sección presentaremos un método para construir estructuras de Dirac y Poisson que son invariantes, con respecto a una clase de acciones propias de grupos de Lie, que son compatibles con la estructura.

Supongamos que E es equipada con una estructura de Dirac D , por Teorema 1.3.7, esta induce una foliación pre-simpléctica (\mathcal{S}, ω_S) , donde ω_S es una forma pre-simpléctica por hojas, para cada $S \in \mathcal{S}$. La acción de G en el espacio modelo E , induce una acción restringida de H en E . Si la H -acción preserva cada hoja pre-simpléctica, entonces los generadores infinitesimales ξ_E son tangentes a las hojas de foliación.

Definición 4.3.1. Decimos que la H -acción es *compatible* con la estructura de Dirac, si para cada hoja pre-simpléctica (S, ω_S) se cumplen

1. S es H -invariante.
2. Existe una aplicación \mathbb{R} -lineal $\rho \in \text{Hom}(\mathfrak{h}, \Omega^1(E))$ tal que para cada $\xi \in \mathfrak{h}$

$$i_{\xi_E} \omega_S = -i_S^* \rho_\xi,$$

donde $i_S: S \rightarrow E$ es la inclusión.

Teorema 4.3.2. *Sea (E, D) una estructura de Dirac con foliación pre-simpléctica (\mathcal{S}, ω_S) . Si la H -acción es compatible con la estructura de Dirac, entonces el promedio G -invariante de ω_S tiene la forma*

$$\omega_S^G([g, b]) = \Phi_{g^{-1}}^* \omega_S([g, b]) - i_S^*(d\Phi_{g^{-1}}^* \theta)([g, b]),$$

donde $\theta := \delta^H(\rho_\xi)$. Y la estructura de Dirac $D_{[g,b]}^{\omega_S^G}$ asociada a ω_S^G es G -invariante.

Demostración. Consideremos el promedio G -invariante ω_S^G , recordemos que esta es una forma pre-simpléctica G -invariante, por la ecuación (4.3), esta forma promediada es

$$\omega_S^G([g, b]) = \Phi_{g^{-1}}^* \omega_S([g, b]) + \Phi_{g^{-1}}^*(d\delta^H(i_{\xi_E} \omega_S))([g, b]).$$

Como la acción es compatible, tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_S^G([g, b]) &= \Phi_{g^{-1}}^* \omega_S([g, b]) - \Phi_{g^{-1}}^*(d\delta^H(i_S^* \rho_\xi))([g, b]), \\ &= \Phi_{g^{-1}}^* \omega_S([g, b]) - \Phi_{g^{-1}}^*(i_S^* d\delta^H(\rho_\xi))([g, b]), \\ &= \Phi_{g^{-1}}^* \omega_S([g, b]) - \Phi_{g^{-1}}^*(i_S^* d\theta)([g, b]), \\ &= \Phi_{g^{-1}}^* \omega_S([g, b]) - i_S^*(d\Phi_{g^{-1}}^* \theta)([g, b]), \end{aligned}$$

donde $\theta := \delta^H(\rho_\xi)$ es una 1-forma en E . Por lo tanto, la estructura de Dirac $D_{[g,b]}^{\omega_S^G}$ asociada a la forma promediada ω_S^G tiene la forma

$$\begin{aligned} D_{[g,b]}^{\omega_S^G} &:= \{ (X, -i_X \omega_S^G([g, b])) \mid X \in T_{[g,b]} S \}, \\ &= \left\{ \left(X, \alpha + i_X \left(d\Phi_{g^{-1}}^* \theta \right) ([g, b]) \right) \mid (X, \alpha) \in \Gamma \left(D_{[g,b]}^{\Phi_{g^{-1}}^* \omega_S} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que la estructura de Dirac $D_{[g,b]}^{\omega_S^G}$ es G -invariante. Sea

$$(X([g, b]), -i_X \omega_S^G([g, b])) \in \Gamma \left(D_{[g,b]}^{\omega_S^G} \right),$$

entonces para cada $g \in G$

$$\begin{aligned} (\Phi_g^* X([g, b]), -\Phi_g^* i_X \omega_S^G([g, b])) &= \left(\Phi_g^* X([g, b]), -i_{\Phi_g^* X} \Phi_g^* \omega_S^G([g, b]) \right), \\ &= \left(\Phi_g^* X([g, b]), -i_{\Phi_g^* X} \omega_S^G([g, b]) \right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(\Phi_g^* X([g, b]), -\Phi_g^* i_X \omega_S^G([g, b])) \in \Gamma \left(D_{[g, b]}^{\omega_S^G} \right).$$

□

Lema 4.3.3. *La estructura de Dirac $D_{[g, b]}^{\omega_S^G}$ es la gráfica de una estructura de Poisson si y sólo si $(d\Phi_{g^{-1}}^* \theta)^{\flat} \circ (\Phi_{g^{-1}}^* \Pi)^{\sharp}$ no tiene puntos fijos distintos de cero.*

Demostración. De la Proposición 1.3.5, recordemos que la estructura de Dirac $D_{[g, b]}^{\omega_S^G}$ es la gráfica de una estructura de Poisson si y sólo si $D_{[g, b]}^{\omega_S^G} \cap (T_{[g, b]}(G \times_H B) \oplus \{0\}) = \{0\}$, esto es

$$\left\{ (\Phi_{g^{-1}}^* \Pi)^{\sharp}(\alpha) \mid (d\Phi_{g^{-1}}^* \theta)^{\flat} \circ (\Phi_{g^{-1}}^* \Pi)^{\sharp}(\alpha) = \alpha \right\} = \{0\}.$$

Supongamos que $D_{[g, b]}^{\omega_S^G} \cap (T_{[g, b]}(E) \oplus \{0\}) = \{0\}$, entonces $(\Phi_{g^{-1}}^* \Pi)^{\sharp}(\alpha) = 0$ implica que $\alpha = 0$. Por lo cual la ecuación $(d\Phi_{g^{-1}}^* \theta)^{\flat} \circ (\Phi_{g^{-1}}^* \Pi)^{\sharp}(\alpha) = \alpha$ sólo tiene solución trivial.

Por otro lado, si $(d\Phi_{g^{-1}}^* \theta)^{\flat} \circ (\Phi_{g^{-1}}^* \Pi)^{\sharp}(\alpha) = \alpha$ no tiene puntos fijos distintos de cero, entonces $\alpha = 0$ y

$$D_{[g, b]}^{\omega_S^G} \cap (T_{[g, b]}(E) \oplus \{0\}) = \left\{ (\Phi_{g^{-1}}^* \Pi)^{\sharp}(0) \right\} \oplus \{0\} = \{0\},$$

por lo tanto $D_{[g, b]}^{\omega_S^G}$ es la gráfica de una estructura de Poisson. □

Sea (E, Π) una variedad de Poisson. Supongamos que la H -acción en E es compatible con Π , es decir, los generadores infinitesimales son de la forma

$$\xi_E = \Pi^{\sharp}(\rho_{\xi}),$$

para cada $\xi \in \mathfrak{h}$ y donde $\rho \in \text{Hom}(\mathfrak{h}, \Omega^1(E))$. En este caso, consideremos la 1-forma $\theta := \delta^H(\rho)$.

Teorema 4.3.4. *Sea (E, Π) una variedad de Poisson, y (\mathcal{S}, ω_S) su foliación simpléctica. Supongamos que la H -acción en E es compatible con Π y el endomorfismo*

$$\text{Id} + (d\Phi_{g^{-1}}^* \theta)^{\flat} \circ (\Phi_{g^{-1}}^* \Pi)^{\sharp},$$

es invertible. Entonces el promedio G -invariante ω_S^G de ω_S es no degenerado en cada hoja $S \in \mathcal{S}$, y existe una estructura de Poisson $\tilde{\Pi}$ que es G -invariante y cuya foliación simpléctica es $\{(S, \omega_S^G) \mid S \in \mathcal{S}\}$.

Demostración. Consideremos la estructura de Dirac

$$D_{\Pi} := \left\{ \left(\Pi^{\sharp}(\alpha), \alpha \right) \mid \alpha \in \Gamma(T^*(G \times_H B)) \right\},$$

asociada a Π . Por el Corolario 1.3.8, D_Π induce una foliación simpléctica (\mathcal{S}, ω_S) , como la H -acción es compatible con Π , entonces del Teorema 4.3.2 se sigue que la forma simpléctica ω_S en $[g, b] \in E$ tiene la forma

$$\omega_S([g, b]) = \Phi_{g-1}^* \omega_S([g, b]) - i_S^* d\Phi_{g-1}^* \theta([g, b]),$$

y la estructura de Dirac

$$D_{[g,b]}^{\omega_S^G} = \left\{ \left(X, \alpha + i_X \left(d\Phi_{g-1}^* \theta \right) ([g, b]) \right) \mid (X, \alpha) \in \Gamma \left(D_{[g,b]}^{\Phi_{g-1}^* \omega_S} \right) \right\},$$

es G -invariante y cuyas hojas pre-simplécticas son $(\mathcal{S}, \omega_S^G)$.

Notemos que $\Phi_{g-1}^* \omega_S$ es una forma simpléctica en S cuya estructura de Poisson asociada es $\Phi_{g-1}^* \Pi$. En efecto, para cada 1-forma diferencial α se cumple que

$$\begin{aligned} -i_{(\Phi_{g-1}^* \Pi)^\# \alpha} \Phi_{g-1}^* \omega_S &= -i_{\Phi_{g-1}^* \Pi^\# \Phi_{g-1*} \alpha} \Phi_{g-1}^* \omega_S = -\Phi_{g-1}^* (i_{\Pi^\# \Phi_{g-1*} \alpha} \omega_S), \\ &= \Phi_{g-1}^* (\Phi_{g-1*} \alpha) = \alpha, \end{aligned}$$

ahora, tenemos que

$$D_{[g,b]}^{\Phi_{g-1}^* \omega_S} = \left(D_{\Phi_{g-1}^* \Pi} \right)_{[g,b]},$$

y por lo tanto podemos escribir $D_{[g,b]}^{\omega_S^G}$ como

$$\begin{aligned} D_{[g,b]}^{\omega_S^G} &= \left\{ \left(X, \alpha + i_X \left(d\Phi_{g-1}^* \theta \right) ([g, b]) \right) \mid (X, \alpha) \in \Gamma \left(\left(D_{\Phi_{g-1}^* \Pi} \right)_{[g,b]} \right) \right\}, \\ &= \left\{ \left(\left(\Phi_{g-1}^* \Pi \right)^\# (\alpha), \alpha + i_{\left(\Phi_{g-1}^* \Pi \right)^\# (\alpha)} \left(d\Phi_{g-1}^* \theta \right) ([g, b]) \right) \mid \alpha \in T_{[g,b]}^* S \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, como el morfismo $\text{Id} + (d\Phi_{g-1}^* \theta)^\flat \circ (\Phi_{g-1}^* \Pi)^\#$ es invertible, entonces por el Lemma 4.3.3 se sigue que existe una estructura de Poisson $\bar{\Pi}$ en E tal que

$$D_{[g,b]}^{\omega_S^G} = \text{Graf} \left(\bar{\Pi}^\# \right),$$

cuyas hojas simplécticas son $(\mathcal{S}, \omega_S^G)$. □

4.3.1. Ejemplo

Ahora, vamos a presentar la construcción de una estructura de Dirac invariante con respecto a la acción del cilindro en \mathbb{R}^3 .

Consideremos la acción de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3 como en el Ejemplo 4.2.4, dada en coordenadas polares por

$$\begin{aligned} \Phi: (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ ((\alpha, k), (r, \theta, z)) &\longmapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta + \alpha \\ z + k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los generadores infinitesimales de esta acción están dado por

$$\Upsilon = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \tilde{\Upsilon} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Fijemos el punto $p = (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$ con $p \neq 0$, entonces el grupo de isotropía en este punto es

$$H := (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})_p \cong \mathbb{S}^1.$$

Del teorema del tubo, existe un abierto U de la órbita $G \cdot p$, y un difeomorfismo equivariante

$$U \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B,$$

donde $B \cong T_p \mathbb{R}^3 / T_p(G \cdot p) \cong \mathbb{R}^2$. Y donde un modelo para este espacio de órbitas es dado por

$$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B \cong \mathbb{R} \times [0, \infty] \times \mathbb{S}^1,$$

este isomorfismo toma cada elemento $[(\alpha, k), (r, \theta)] \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B$ y lo manda al elemento $(k, r, \alpha + \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \infty] \times \mathbb{S}^1$. La inversa, toma cada elemento $(k, r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \infty] \times \mathbb{S}^1$ y lo manda a la clase $[(0, k), (r, \theta)] \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B$. La acción del grupo de Lie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en el espacio modelo $\mathbb{R} \times [0, \infty] \times \mathbb{S}^1$ es dada por

$$\begin{aligned} \Phi: (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times [0, \infty] \times \mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{R} \times [0, \infty] \times \mathbb{S}^1, \\ ((\theta, l), (k, r, \alpha)) &\longmapsto (k + l, r, \alpha + \theta). \end{aligned}$$

Consideremos la estructura de Poisson en \mathbb{R}^3

$$\Pi = f(\theta, z) \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial z},$$

con $f \neq 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \theta} \neq 0$. Notemos que cada hoja de foliación es invariante con respecto a la acción del grupo de isotropía H en \mathbb{R}^3 pues

$$i_{\Upsilon}(-f(\theta, z)dr) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Ceros}(\alpha) \subset \text{Ceros}(\Upsilon).$$

Sin embargo podemos notar que la acción no deja invariante la estructura de Poisson pues

$$L_{\Upsilon} \alpha = i_{\Upsilon} d\alpha = -i_{\Upsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta \wedge dr + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dr \right) = \frac{\partial f}{\partial \theta} dr \neq 0.$$

Por otro lado la ecuación que nos da la condición de compatibilidad $\Upsilon = \Pi^{\sharp}(\rho)$ tiene solución con

$$\rho = -\frac{1}{f(\theta, z)} dz.$$

Ahora, aplicando el operador $\delta^H(\rho)$ (que en este caso coincide con la formula (2.5)) obtenemos que

$$\delta^H(\rho) = -S(\rho) + \pi \langle \rho \rangle_{\mathbb{S}^1} = S \left(\frac{1}{f} \right) (\theta, z) dz - \pi \left\langle \frac{1}{f} \right\rangle_{\mathbb{S}^1} (z) dz,$$

aplicando el diferencial tenemos que

$$d\delta^H(\rho) = S \left(\frac{\partial 1/f}{\partial \theta} \right) (\theta, z) d\theta \wedge dz.$$

Sea (z_0, r_0, θ_0) un elemento en el espacio modelo $\mathbb{R} \times [0, \infty] \times \mathbb{S}^1$, el cual tiene asociado el elemento $[(0, z_0), (r_0, \theta_0)]$ en el espacio de órbitas $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times_H B$. Bajo la acción del cilindro, en el espacio modelo, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_{-(0, z_0)}^* d\delta^H(\rho) &= \Phi_{-(0, z_0)}^* \left(S \left(\frac{\partial 1/f}{\partial \theta} \right) (\theta_0, z_0) d\theta \wedge dz \right), \\ &= S \left(\frac{\partial 1/f}{\partial \theta} \right) (\theta_0, 0) d\theta \wedge dz. \end{aligned}$$

La forma simpléctica asociada a la estructura de Poisson es dada por

$$\omega_{(r_0, \theta_0, z_0)} = \frac{1}{f(\theta_0, z_0)} d\theta \wedge dz,$$

y entonces

$$\Phi_{-(0, z_0)}^* \omega_{(r_0, \theta_0, z_0)} = \frac{1}{f(\theta_0, 0)} d\theta \wedge dz.$$

Por lo cual, del Teorema 4.3.2 podemos construir una estructura de Dirac invariante como

$$\begin{aligned} \bar{D}_{(r_0, \theta_0, z_0)} &= \left\{ \left(X, \alpha + i_X(\Phi_{-(0, z_0)}^* d\delta^H(\rho)) \right) \mid (X, \alpha) \in \Gamma \left(D_{(r_0, \theta_0, z_0)}^{\Phi_{-(0, z_0)}^* \omega} \right) \right\}, \\ &= \left\{ \left(X, \left(-\frac{1}{f(\theta_0, 0)} + S \left(\frac{\partial 1/f}{\partial \theta} \right) (\theta_0, 0) \right) (X^2 dz - X^3 d\theta) \right) \right\}, \end{aligned}$$

donde $X = X^1 dr + X^2 d\theta + X^3 dz$.

Apéndice A

Distribuciones en haces vectoriales y secciones globales generadoras

El propósito de este capítulo es dar una demostración completa del siguiente resultado, el cual fue presentado por Sussmann [31, Teorema 1] y Drager, Lee, Park, Efton y Richardson [32, Sec. 4]. Dado un subhaz vectorial generalizado de un haz vectorial sobre una variedad diferenciable. Existe un número finito de secciones globales suaves que generan a la distribución en cada punto de la variedad. Más aún, daremos una cota para el número de generadores globales.

A.1. Distribuciones generalizadas sobre haces vectoriales

En esta sección, daremos las nociones básicas sobre distribuciones generalizadas en haces vectoriales.

Sea M una variedad diferencial conexa con $\dim(M) = m$ y supongamos que todas las variedades y aplicaciones entre variedades diferenciales son suaves. Un *haz vectorial* real sobre M es una terna (E, π, M) donde $\pi: E \rightarrow M$ es una aplicación sobreyectiva tal que:

- (i) Para todo $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} , la cual denotaremos por E_p .
- (ii) Para cada punto $p \in M$ existe un abierto $U \subset M$, un número $k \in \mathbb{N}$ y un difeomorfismo

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

tal que $\pi \circ \varphi^{-1}(p, v) = p$ y la restricción $\varphi|_{E_p}: E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo lineal.

Como M es conexa, la función $p \mapsto \dim(E_p)$ es constante en M , por lo cual si E es un haz vectorial sobre una variedad conexa, la fibra E_p en cada punto $p \in M$ tiene la misma dimensión. En este caso decimos que el rango de E es igual a k y es denotado como $\text{rk}(E) = k$. Para simplificar notación, denotaremos un haz vectorial (E, π, M) únicamente por su espacio total E .

Definición A.1.1. Una *distribución generalizada* Δ de un haz vectorial E , es una asignación $p \mapsto \Delta_p$, donde Δ_p es un subespacio vectorial de E_p .

El número $\dim(\Delta_p)$ es llamado el *rango de Δ en $p \in M$* .

Definición A.1.2. Sea E un haz vectorial sobre M . Una *sección local* de E sobre un abierto U de M , es una aplicación suave $s: U \rightarrow E$ tal que

$$\pi \circ s = \text{id}_U.$$

Se dice que una sección es global si $U = M$.

Dado una distribución generalizada Δ de un haz vectorial E sobre M , y un abierto $U \subset M$, se dice que una sección local s de E sobre U es una sección de Δ , si para todo $p \in U$

$$s(p) \in \Delta_p.$$

Definición A.1.3. Una distribución generalizada Δ de un haz vectorial E es *suave*, si para cada punto $p \in M$ existen un abierto $U \subset M$ que contiene a p y una familia de secciones locales s_1, \dots, s_k de Δ en U , tal que para cada $q \in U$

$$\Delta_q = \text{gen}\{s_1(q), \dots, s_k(q)\}.$$

Del mismo modo que en la Proposición 1.1.5, se puede mostrar que un distribución generalizada en un haz vectorial E , es suave si y sólo si para cada punto $p \in M$ y cada $v \in \Delta_p$, existe alguna sección local s de Δ tal que $s(p) = v$.

De ahora en adelante, todas las distribuciones generalizadas que se mencionen las tomaremos como distribuciones generalizadas suaves.

Definición A.1.4. Sea E un haz vectorial sobre M y Δ una distribución generalizada suave de E . Sea U un abierto en M , decimos que Δ es *finitamente generado* sobre U si existe un número finito de secciones locales s_1, \dots, s_k de Δ tales que

$$\Delta_p = \text{gen}\{s_1(p), \dots, s_k(p)\},$$

para todo $p \in U$. En este caso, se dice que s_1, \dots, s_k generan a Δ sobre U . Si además $U = M$, decimos que Δ es *globalmente finitamente generado*.

Ahora, queremos mostrar que todo haz vectorial sobre una variedad suave es isomorfo a un subhaz de un haz trivial. Para lo cual es necesario formular una serie de lemas técnicos.

Lema A.1.5. *Sea (E, π, M) un haz vectorial. Entonces, el conjunto de secciones $\Gamma(E)$ es un $C^\infty(M)$ -módulo finitamente generado, con $\text{rk}(E)(m + 1)$ generadores.*

Demostración. Este resultado lo podemos encontrar en [33, Cap. 2, Sec. 5, Lema II]. \square

Lema A.1.6. *Sean (E, π, M) y (E', π', M) haces vectoriales sobre M , con fibras F y F' respectivamente. Sea $\Psi: E' \rightarrow E$ un morfismo de haces tal que cada $\Psi_x: F'_x \rightarrow F_x$ es sobreyectivo. Entonces, existe un morfismo de haces vectoriales $\varphi: E \rightarrow E'$ tal que $\Psi \circ \varphi = \text{id}$.*

Demostración. Este resultado lo podemos encontrar en [33, Cap. 2, Sec. 5, Lema III]. \square

Proposición A.1.7. *Cada haz vectorial (E, π, M) sobre una variedad conexa M , es isomorfo a un subhaz de un haz trivial $M \times \mathbb{R}^k$, con $k = \text{rk}(E)(m + 1)$.*

Demostración. Del Lema A.1.5, existe un conjunto finito de secciones $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ que generan a $\Gamma(E)$, con $k = \text{rk}(E)(m + 1)$. Consideremos el haz trivial $M \times \mathbb{R}^k$ y el morfismo de haces $\Psi: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$ definido como

$$\Psi \left(x, \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(x), \quad x \in M,$$

donde e_1, \dots, e_k es base de \mathbb{R}^k . Entonces, cada aplicación lineal $\Psi_x: \mathbb{R}^k \rightarrow F_x$ es sobreyectivo. En efecto, sea $z \in F_x$, escogemos una sección $\sigma \in \Gamma(E)$ tal que $\sigma(x) = z$. Como las secciones σ_i generan a $\Gamma(E)$, podemos escribir σ como

$$\sigma = \sum_{i=1}^k f_i \sigma_i,$$

con $f_i \in C^\infty(M)$. Por lo tanto

$$z = \sigma(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x) \sigma_i(x) = \Psi_x \left(\sum_{i=1}^k f_i(x) e_i \right).$$

Ahora, el Lema A.1.6, nos permite definir un morfismo de haces $\varphi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$, tal que $\Psi \circ \varphi = \text{id}$, lo cual implica que cada aplicación $\varphi_x: F_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ es inyectivo. Por lo tanto, E es un subhaz vectorial de $M \times \mathbb{R}^k$. \square

A.2. Construcción del conjunto de generadores

En esta sección vamos a presentar la construcción del conjunto de generadores de distribuciones generalizadas. Antes, es necesario dar una noción sobre convergencia de funciones en espacios de Fréchet de funciones suaves, la cual se puede consultar en [34, Cap. 5].

Denotemos por $|\cdot|$ la norma Euclideana en \mathbb{R}^n . Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función acotada, entonces definimos la norma del supremo como

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Definimos $BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ como el conjunto de funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que f es de clase C^∞ y todas sus derivadas parciales sean acotadas en \mathbb{R}^n . Si $f \in BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, definimos una seminorma p_k para $k = 0, 1, 2, \dots$ como

$$p_k(f) = \max \left\{ \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \right\| \mid |\alpha| = k \right\},$$

donde el máximo es tomado sobre todos los multi índices α de orden k . Ahora sumando los p_k definimos una norma

$$\|f\|_k = \sum_{j=1}^k p_j(f),$$

y entonces se tiene que $\|f\|_k \leq \|f\|_{k+1}$.

Esta norma $\|\cdot\|_k$ induce una topología en $BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Recordemos que una sucesión $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ en $BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es de Cauchy si esta es de Cauchy con respecto a la norma $\|\cdot\|_k$ para cada k , este hecho se puede consultar en [34, Lema 5.17]. Por lo tanto, para mostrar que una serie $\sum_{i=1}^\infty f_i$ converge en $BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es suficiente mostrar que cada una de las series

$$\sum_{i=1}^\infty \|f_i\|_k \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

es convergente. Si $\sum_{i=1}^\infty f_i$ es convergente en $BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, entonces la función $f = \sum_{i=1}^\infty f_i$ puede ser evaluado puntualmente, ya que la convergencia en $BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ implica convergencia puntual.

Teorema A.2.1. *Sean M una variedad conexa y E un haz vectorial sobre M . Sea Δ una distribución generalizada suave de E , entonces Δ es globalmente finitamente generado.*

La idea general de la prueba del Teorema A.2.1 es la siguiente. De la Proposición A.1.7, podemos considerar Δ como una distribución generalizada de un haz vectorial trivial. Mostraremos que el Teorema A.2.1 se cumple para distribuciones generalizadas de haces vectoriales triviales, y extenderemos las secciones encontradas en distribuciones de haces vectoriales triviales a secciones de distribuciones de haces vectoriales arbitrarios.

Proposición A.2.2. *Sea Δ una distribución generalizada suave del haz trivial $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces Δ es globalmente finitamente generado.*

Para mostrar la Proposición A.2.2, es necesario presentar lo siguiente. Denotemos por B a la bola abierta euclidiana en \mathbb{R}^m y denotemos por $2B$ a la bola con el mismo centro y doble de radio que B . Sea \mathcal{B} el conjunto de todas la bolas con centro en coordenadas racionales y radio racionales, entonces \mathcal{B} es una base numerable para la topología de \mathbb{R}^m .

Para $0 \leq d \leq \max(\text{rk}(\Delta))$ definimos el conjunto

$$\Sigma_d = \{p \in \mathbb{R}^m \mid \dim(\Delta_p) = d\},$$

fijemos $d \geq 1$ tal que $\Sigma_d \neq \emptyset$.

Para cada $p \in \Sigma_d$, existen secciones locales s_1, \dots, s_d en Δ , tal que $\{s_1(p), \dots, s_d(p)\}$ es una base de Δ_p . Estas secciones son linealmente independientes en una vecindad U de p . Nuestro objetivo es construir una cantidad finita de secciones definidas globalmente que generan a Δ en cada punto de Σ_d . Para esto es necesario demostrar el siguiente lema.

Lema A.2.3. *Sea $B \in \mathcal{B}$ una bola tal que $p \in B$ y $2B \subset U$. Entonces existe un morfismo de haces vectoriales suave*

$$P: 2B \times \mathbb{R}^k \rightarrow 2B \times \mathbb{R}^k,$$

donde $k = \text{rk}(E)(m + 1)$, con las siguiente propiedades: Para cada $q \in 2B$

1. $P(q)$ es una proyección ortogonal.
2. $\text{Im}(P(q)) \subset \Delta_q$.
3. $\text{Im}(P(q))$ tiene dimensión d .
4. Si $q \in 2B \cap \Sigma_d$, entonces $\text{Im}(P(q)) = \Delta_q$ y $P(q) = Q_q$, donde Q_q es un operador proyección ortogonal tal que $\text{Im}(Q_q) = \Delta_q$.

Demostración. La prueba de este lema lo podemos encontrar en [32, Lema 4.4]. \square

Demostración de la Proposición A.2.2. Como \mathcal{B} es numerable, entonces por el Lema A.2.3 podemos encontrar una colección numerable de bolas $\{B_i\}_{i \in I}$ que cubre a Σ_d , tal que para cada bola B_i existe un morfismo de haces vectoriales $P_i: 2B \times \mathbb{R}^k \rightarrow 2B \times \mathbb{R}^k$ con las propiedades descritas en dicho resultado.

Sea e_1, \dots, e_k base estándar de \mathbb{R}^k . Definamos secciones suaves constantes S_1, \dots, S_k de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ como

$$\begin{aligned} S_i: B_i &\longrightarrow B_i \times \mathbb{R}^k, \\ p &\longmapsto (p, e_i). \end{aligned}$$

Para cada $i \in I$, escogemos funciones meseta ψ_i en \mathbb{R}^m tal que $0 \leq \psi_i \leq 1$, $\text{supp}(\psi_i) \subset 2B_i$ y se cumple que

$$\begin{cases} \psi_i = 1 & \text{en } B_i, \\ \psi_i = 0 & \text{en } \mathbb{R}^m - 2B_i. \end{cases}$$

Para cada $2B_i$, definimos secciones suaves en Δ como $p \mapsto P_i(p) \circ S_\alpha(p)$ donde $p \in \Sigma_d$. Puesto que $\text{Im}(P_i(p)) \subset \Delta_p$ entonces $P_i S_\alpha$ es una sección de Δ para cada $\alpha = 1, \dots, k$. Ahora, multiplicando por las funciones meseta ψ_i , obtenemos secciones globales $\psi_i P_i S_\alpha$ de Δ tal que $\text{supp}(\psi_i P_i \circ S_\alpha) \subset 2B_i$, para $\alpha = 1, \dots, k$.

Como ψ_i tiene soporte compacto y tiene sus derivadas acotadas, entonces $\psi_i \in BC^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$. Para cada i , podemos encontrar una constante $c_i > 0$ tal que $c_i \|\psi_i\|_i \leq \frac{1}{2^i}$, entonces para cada $\alpha = 1, \dots, k$ tenemos que

$$c_i \|\psi_i P_i S_\alpha\|_i \leq \frac{1}{2^i}.$$

Ahora, si definimos la aplicación $\varphi_i := c_i \psi_i$, entonces tenemos que $\|\varphi_i\|_i \leq \frac{1}{2^i}$ y entonces para cada $\alpha = 1, \dots, k$ tenemos que

$$\|\varphi_i P_i S_\alpha\|_i \leq \frac{1}{2^i}.$$

Ahora definimos una aplicación $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i$ y secciones s_α de Δ como

$$s_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i P_i S_\alpha,$$

para $\alpha = 1, \dots, k$.

Mostremos que el conjunto $\{s_1, \dots, s_k\}$ define una familia de secciones suaves globales que genera a Δ , en cada punto de Σ_d . Para esto es necesario que estas series sean convergentes en un espacio de funciones adecuado, lo va a implicar que son suaves.

Para que φ sea convergente en $BC^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, es suficiente mostrar que la serie $\sum_{i=1}^\infty \|\varphi_i\|_k$ converge para cada k . Para k fijo, tenemos

$$\sum_{i=k}^\infty \|\varphi_i\|_k \leq \sum_{i=k}^\infty \|\varphi_i\|_i \leq \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} = 2^{-k+1},$$

por lo cual, la serie $\sum_i \varphi_i$ converge en $BC^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ y entonces φ es una aplicación suave definida como

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(p),$$

con $p \in \Sigma_d$. Como $p \in B_j$ para alguna bola B_j entonces $\varphi_j = c_j \psi_j = c_j > 0$ en B_j , por lo tanto $\varphi > 0$ en Σ_d .

Ahora, $s_\alpha = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i P_i S_\alpha$ es convergente en $BC^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ dado que

$$\sum_{i=k}^\infty \|\varphi_i P_i S_\alpha\|_k \leq \sum_{i=k}^\infty \|\varphi_i P_i S_\alpha\|_i \leq \sum_{i=k}^\infty \frac{1}{2^i} = 2^{-k+1},$$

entonces las aplicaciones s_α son secciones suaves de Δ definidas como

$$s_\alpha(p) = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(p) P_i(p) \circ S_\alpha(p),$$

con $p \in \Sigma_d$.

Finalmente veamos que si $p \in \Sigma_d$, entonces $\{s_1(p), \dots, s_k(p)\}$ generan a Δ_p . Del Lema A.2.3, tenemos que si $p \in 2B_i$ entonces $\text{Im}(P_i(p)) = \Delta_p$ y $P_i(p) = Q_p$, para cada i . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} s_\alpha(p) &= \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(p) P_i(p) \circ S_\alpha(p) = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(p) Q_p S_\alpha(p), \\ &= \sum_{i=1}^\infty Q_p(\varphi_i(p) S_\alpha(p)) = Q_p(\varphi(p) S_\alpha(p)). \end{aligned}$$

Para cada $p \in \Sigma_d$ tenemos que $\{S_1(p), \dots, S_k(p)\}$ es una base de $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)_p$. Como $\varphi(p) \neq 0$ entonces $\{\varphi(p) S_1(p), \dots, \varphi(p) S_k(p)\}$ es una base de $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)_p$, entonces

$$\{Q_p \varphi(p) S_1(p), \dots, Q_p \varphi(p) S_k(p)\},$$

genera a Δ_p , esto es que $\{s_1(p), \dots, s_k(p)\}$ generan a Δ_p . Por lo tanto, tenemos un número finito de generadores para Δ en puntos de Σ_d .

En el caso donde \mathcal{B} tenga un número finito de bolas, definimos

$$\varphi = \sum_{i \in I} \psi_i \quad y \quad s_\alpha = \sum_{i \in I} \psi_i P_i S_\alpha,$$

como tenemos sumas finitas, φ es una aplicación suave y s_α es una sección global suave de Δ . Análogo al caso anterior, las secciones s_α generan a Δ en cada punto de Σ_d . \square

Observación A.2.4. Podemos hacer la construcción de la prueba de la Proposición A.2.2, para cada $d = 1, \dots, \max(\text{rk}(\Delta))$, lo cual nos da una cota de a lo más $\max(\text{rk}(\Delta)) \cdot k$ secciones globales que generan a Δ en cada punto de \mathbb{R}^m .

Demostración del Teorema A.2.1. De la Proposición A.1.7 tenemos que E es isomorfo a un subhaz del haz trivial $M \times \mathbb{R}^k$, en este caso podemos ver a Δ como una distribución generalizada del haz trivial $M \times \mathbb{R}^k$.

Podemos identificar cada subespacio Δ_p con un subespacio de \mathbb{R}^k . Por otro lado, las secciones de $M \times \mathbb{R}^k$, son aplicaciones $s: M \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Consideremos M una variedad diferenciable de dimensión m , entonces tenemos que cualquier aplicación suave $s: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $U \subset M$, puede ser extendida a una aplicación suave $\tilde{s}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ abierto.

Como Δ es suave, existe una familia \mathcal{F} de secciones locales de Δ tal que $\Delta_p = \text{gen}(\mathcal{F}|_p)$. Entonces cada $s \in \mathcal{F}$ es una aplicación $s: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $U \subset M$, que puede ser extendida a una aplicación $\tilde{s}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$. Entonces, tenemos una familia $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{s} \mid s \in \mathcal{F}\}$ de secciones locales definidas en $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$. Por lo cual, podemos definir una distribución generalizada $\tilde{\Delta} = \text{gen}(\tilde{\mathcal{F}})$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, tal que para cada $p \in M$ se tiene que $\Delta_p = \tilde{\Delta}_p$.

Ahora, de la Proposición A.2.2, podemos encontrar un número finito de secciones globales de $\tilde{\Delta}$ que generan a $\tilde{\Delta}_{\tilde{p}}$ en cada punto de $\tilde{p} \in \mathbb{R}^m$. Y estas secciones definen secciones globales de Δ que generan a Δ_p en cada punto $p \in M$. \square

Dado un haz vectorial E y una distribución generalizada Δ , es posible dar una cota superior de secciones globales que generan a Δ . De la demostración de la Proposición A.1.7 tenemos que Δ es isomorfo a una distribución generalizada del haz trivial $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, donde $k = \text{rk}(E)(m+1)$. Ahora, en la Proposición A.2.2 construimos k secciones globales para cada conjunto Σ_d con $d = 1, \dots, \max(\text{rk}(\Delta))$, y de la Observación A.2.4, concluimos que existen a lo más $\max(\text{rk}(\Delta)) \cdot k$ secciones globales que generan a Δ . Lo cual nos da una cota de $\text{rk}(E)(m+1) \max(\text{rk}(\Delta))$ secciones globales que generan a Δ en cada punto de M .

Apéndice B

Geometría Riemanniana

El objetivo en este capítulo es introducir la aplicación exponencial en geometría Riemanniana, con el objetivo de definir un dominio donde la aplicación exponencial sea un isomorfismo.

B.1. Aplicación exponencial

El objetivo en esta sección es introducir la aplicación exponencial en geometría Riemanniana, y presentar algunas propiedades importantes de la misma.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ la conexión de Levi-Civita de g en M , que es compatible con la métrica Riemanniana, en el sentido que

$$\nabla g = 0.$$

Definición B.1.1. Decimos que un camino $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow M$ de clase C^l , con $l \geq 2$, en una variedad suave M con conexión compatible ∇ , es *geodésico* si

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

Sea (U, x^1, \dots, x^m) un entorno coordenado de M . La ecuación $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$ para γ un camino geodésico, en terminos locales, se ve como

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma^i(t) + \sum_{j,k} (\Gamma_{jk}^i \circ \gamma)(t) \frac{d}{dt} \gamma^j \frac{d}{dt} \gamma^k(t) = 0, \quad (\text{B.1})$$

para todo $i = 1, \dots, m$, y donde $\nabla_{\partial/\partial x^j} \partial/\partial x^k = \sum \Gamma_{jk}^l \partial/\partial x^l$. Entonces por existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, γ existe localmente y es única.

Lema B.1.2. Sea (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ conexión compatible, entonces existe un campo $\mathcal{G} \in \mathfrak{X}(TM)$, tal que para cada curva integral $c: (\alpha, \beta) \rightarrow TM$ de \mathcal{G} , existe una curva geodésica $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow M$ tal que

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = c(t).$$

Demostración. Sea $\pi: TM \rightarrow M$ el haz tangente a M . Vamos a trabajar de manera local, y luego extenderemos esta construcción globalmente. Sea (U, x^1, \dots, x^m) carta coordenada en M , esta induce una carta $(\pi^{-1}(U), q^1, \dots, q^m, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)$ en TM donde

$$q^i = x^i \circ \pi \quad \text{y} \quad \dot{q}^i(\xi) = \xi x^i,$$

entonces cada $\xi \in \pi^{-1}(U)$ se puede escribir como

$$\xi = \sum_{j=1}^m \dot{q}^j(\xi) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Entonces el conjunto $\{\partial/\partial q^1, \dots, \partial/\partial q^m, \partial/\partial \dot{q}^1, \dots, \partial/\partial \dot{q}^m\}$ forma una base local de campos en TM , por lo cual tenemos que

$$\pi_*(\partial/\partial q^j) = \partial/\partial x^j \quad \text{y} \quad \pi_*(\partial/\partial \dot{q}^j) = 0.$$

Entonces de (B.1), tenemos la ecuación diferencial de primer orden en $\pi^{-1}(U)$

$$\begin{cases} (q^l)' = \dot{q}^l, \\ (\dot{q}^l)' = -\sum_{jk} (\Gamma_{jk}^l \circ \pi) \dot{q}^j \dot{q}^k, \end{cases}$$

para cada $j = 1, \dots, m$. Las soluciones de esta ecuación diferencial, son curvas integrales del campo vectorial \mathcal{G} en $\pi^{-1}(U)$ dado por

$$\mathcal{G} = \sum_l \left\{ \dot{q}^l \frac{\partial}{\partial q^l} - \sum_{jk} (\Gamma_{jk}^l \circ \pi) \dot{q}^j \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \right\}.$$

Como la ecuación (B.1) es independiente de la elección de las cartas en M , entonces \mathcal{G} define un campo vectorial en TM .

Finalmente, veamos que existe una geodésica con las propiedades deseadas. Sea $c: (\alpha, \beta) \rightarrow M$ curva integral de \mathcal{G} , definimos $\gamma := \pi \circ c$, por construcción la curva $\gamma(t)$ es una curva geodésica, y además

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma(t) &= (d_{c(t)} \pi) \left(\frac{d}{dt} c(t) \right) = (d_{c(t)} \pi)(\mathcal{G}|_{c(t)}) = (d_{c(t)} \pi)(\dot{q}^i \partial/\partial q^i|_{c(t)}), \\ &= c^i(t) \partial/\partial q^i|_{c(t)} = c(t). \end{aligned}$$

□

Definición B.1.3. El flujo maximal del campo vectorial \mathcal{G} es llamado *flujo geodésico* de \mathcal{G} .

Sea $\varphi := \varphi(t, \xi)$ el flujo maximal de \mathcal{G} en TM , donde $t \in \mathbb{R}$ y $\xi \in TM$. Definimos para cada $\xi \in TM$

$$\gamma_\xi(t) := (\pi \circ \varphi)(t, \xi),$$

entonces γ_ξ es la única geodésica maximal en M que satisface

- $\gamma_\xi(0) = \pi(\varphi(0, \xi)) = \pi(\xi)$.
- $\gamma'_\xi(0) = \varphi(0, \xi) = \xi$.

En particular, $\gamma_\xi(t)$ depende suavemente de t y ξ . Para cada $\xi \in TM$, denotamos por $I_\xi = (-\delta_1, \delta_2)$ al máximo intervalo de definición de la curva γ_ξ .

Lema B.1.4. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $\xi \in TM$, la geodésica $\gamma_{\varepsilon\xi}$ satisface*

- $I_{\varepsilon\xi} = \frac{1}{\varepsilon}I_\xi$,
- $\gamma_{\varepsilon\xi}(t) = \gamma_\xi(\varepsilon t)$.

Demostración. Sea $\tilde{\gamma}: (-\delta_1/\varepsilon, \delta_2/\varepsilon) \rightarrow M$ una reparametrización de la curva $\gamma_\xi(t)$ definida por

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma_\xi(\varepsilon t).$$

Notemos que esta curva es una geodésica, pues

$$\nabla_{\tilde{\gamma}'(t)}\tilde{\gamma}'(t) = \varepsilon^2\nabla_{\gamma'_\xi(t)}\gamma'_\xi(t) = 0.$$

Por definición, tenemos que $\tilde{\gamma}(0) = \gamma_\xi(0) = \pi(\xi)$ y además

$$\tilde{\gamma}'(0) = \left. \frac{d}{dt}\gamma_\xi(\varepsilon t) \right|_{t=0} = \varepsilon\gamma'_\xi(0) = \varepsilon\xi.$$

Por otro lado, tenemos que la curva $\gamma_{\varepsilon\xi}(t)$ cumple que

$$\gamma_{\varepsilon\xi}(0) = \pi(\varphi(0, \varepsilon\xi)) = \pi(\xi) \quad \text{y} \quad \gamma'_{\varepsilon\xi}(0) = \varphi(0, \varepsilon\xi) = \varepsilon\xi,$$

por lo tanto, por unicidad se sigue que

$$\gamma_{\varepsilon\xi}(t) = \gamma_\xi(\varepsilon t).$$

□

Recordemos que la sección cero $\mathfrak{o} \in \Gamma(TM)$ es el campo vectorial tal que $\mathfrak{o}|_p$ es el vector cero en T_pM , para todo $p \in M$. Definamos el conjunto

$$\mathcal{T}M := \{\xi \in TM \mid 1 \in I_\xi\}.$$

Corolario B.1.5. *El conjunto $\mathcal{T}M$ es un conjunto abierto de TM . Más aún $\mathcal{T}M$ es un dominio estrella respecto a la sección cero \mathfrak{o} , es decir, si $\xi \in \mathcal{T}M$ entonces $\varepsilon\xi \in \mathcal{T}M$ para todo $\varepsilon \in [0, 1]$.*

Demostración. El conjunto $\mathcal{T}M$ es abierto, puesto que el dominio del flujo máximo es abierto y $\mathcal{T}M$ es el dominio del flujo con $t = 1$. Más aún, $\mathcal{T}M$ es un dominio de estrella por el Lema B.1.4. □

Definición B.1.6. Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Definimos la *aplicación exponencial Riemanniana* $\text{Exp}: \mathcal{T}M \rightarrow M$ como

$$\text{Exp}^g(\xi) \equiv \text{Exp}(\xi) := \gamma_\xi(1).$$

Además, para cada $p \in M$ definimos $\text{Exp}_p: T_pM \cap \mathcal{T}M \rightarrow M$ como

$$\text{Exp}_p := \text{Exp}|_{T_pM \cap \mathcal{T}M}.$$

Lema B.1.7. La aplicación Exp_p es diferenciable y de rango máximo en el vector cero en T_pM .

Demostración. Para el siguiente cálculo, denotamos por $\bar{0}$ el origen de \mathbb{R} y por $\bar{0}$ el elemento neutro en T_pM . Sea $\mathcal{I}_{\bar{0}}: T_pM \rightarrow T_{\bar{0}}(T_pM)$ la identificación canónica de T_pM con su espacio tangente en $T_{\bar{0}}(T_pM)$. Mostremos que

$$d_{\bar{0}} \text{Exp}_p \circ \mathcal{I}_{\bar{0}} = \text{Id}_{T_pM}.$$

Para cada $\xi \in \mathcal{T}_pM$ la curva $\omega(t) := t\xi$ en T_pM satisface que

$$\omega'(0) = \mathcal{I}_{\bar{0}}(\xi) = d_0 \omega \frac{\partial}{\partial t},$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} d_{\bar{0}} \text{Exp}_p \circ \mathcal{I}_{\bar{0}}(\xi) &= d_{\bar{0}} \text{Exp}_p \circ d_0 \omega \frac{\partial}{\partial t} = d_0(\text{Exp}_p \circ \omega) \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\text{Exp}_p \circ \omega)(t) \right|_{t=0} = \gamma'_\xi(0) = \xi, \end{aligned}$$

por lo tanto Exp_p tiene rango máximo en $\bar{0} \in T_pM$. \square

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi \times \text{Exp}: \mathcal{T}M &\longrightarrow M \times M \\ \xi &\longmapsto (\pi(\xi), \text{Exp}(\xi)). \end{aligned}$$

Lema B.1.8. La aplicación $\pi \times \text{Exp}$ es diferenciable y de rango máximo en $\bar{0} \in T_pM$.

Demostración. Sea $\xi \in \mathcal{T}M$ y $p = \pi(\xi)$. Sea (U, φ) una carta en M con $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces podemos definir una carta en TM como $(\pi^{-1}(U), \varphi_{TM})$, donde $\varphi_{TM}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ se define como $\varphi_{TM}(\xi) = (q(\xi), \dot{q}(\xi))$. Ahora, tomemos la carta $(U \times U, \varphi \times \varphi)$ en $M \times M$, y consideremos $(\pi \times \text{Exp})^{-1}(U \times U)$ el cual es un abierto en TM que contiene a $\mathfrak{o}(U)$.

Entonces la expresión local de $\pi \times \text{Exp}$ esta dada por

$$(\varphi \times \varphi) \circ (\pi \times \text{Exp}) \circ \varphi_{TM}^{-1}: \varphi_{TM}(\pi^{-1}(U)) \longrightarrow \mathbb{R}^{2m},$$

notemos que $\varphi \circ \pi \circ \varphi_{TM}^{-1} = \text{pr}_1$, donde $\text{pr}_1: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ denota la proyección a la primera coordenada. Por lo tanto del Lema B.1.7, se sigue que $\pi \times \text{Exp}$ tiene rango máximo. \square

Observación B.1.9. Del Lema B.1.8, se tiene que para cada $\xi \in \mathfrak{o}(M)$

$$\mathrm{rk}_\xi(\pi \times \mathrm{Exp}) = 2m.$$

Por lo cual existe una vecindad W de $\mathfrak{o}(M)$ en TM , tal que $(\pi \times \mathrm{Exp})|_W$ es un difeomorfismo en su imagen.

B.2. Cut locus puntual

El objetivo de esta sección es definir el *cut locus* en una variedad Riemanniana, con el objetivo de introducir un dominio en el cual la aplicación exponencial es un difeomorfismo.

Para cada $p \in M$ y $\epsilon > 0$, definamos los conjuntos

$$S(p, \epsilon) = \{\xi \in T_p M \mid |\xi| < \epsilon\} \quad \text{y} \quad S_p = S(p, 1).$$

y dado $\xi \in S_p$ definimos el conjunto

$$c_p(\xi) := \sup\{t > 0 \mid t\xi \in \mathcal{T}M, d(p, \gamma_\xi(t)) = t\}.$$

Observación B.2.1. La función $\bar{c}: \{\xi \in TM \mid |\xi| = 1\} \rightarrow (0, \infty]$ definida como $\bar{c}(\xi) := c_{\pi(\xi)}(\xi)$, es semi-continua superior en su dominio. Más aún, si M es una variedad Riemanniana completa entonces \bar{c} es continua su dominio. La prueba de este resultado utiliza herramientas analíticas y se puede consultar en [14, Teorema III.2.1]

Definición B.2.2. Para cada $p \in M$, definimos el *cut locus* de p en $T_p M$ (cut locus tangencial), como

$$C(p) := \{c_p(\xi)\xi \mid c_p(\xi) < \infty, \xi \in S_p\} \cap \mathcal{T}M,$$

y entonces definimos el cut locus de p en M , como

$$\mathcal{C}(p) := \mathrm{Exp} C(p).$$

Ahora, definimos los siguientes conjuntos,

$$D_p := \{t\xi \mid 0 \leq t < c(\xi), \xi \in S_p\}, \tag{B.2}$$

$$\mathcal{D}_p := \mathrm{Exp}(D_p),$$

cuyas propiedades se establecen en el siguiente teorema.

Teorema B.2.3. *El conjunto D_p en la ecuación (B.2), es el dominio mas grande en forma de estrella, con respecto al origen de $T_p M$, para el cual, la aplicación exponencial*

$$\mathrm{Exp}_p|_{D_p}: D_p \longrightarrow M \setminus \mathcal{C}(p),$$

es un difeomorfismo. Además, para cada $p \in M$, el cut locus $C(p)$ tiene medida cero.

Demostración. Este resultado se puede consultar en [14, Teorema III.2.2, Teorema III.3.1].

□

Supongamos ahora que tenemos un grupo de Lie, equipado con una métrica Riemanniana. En este caso, mostraremos primero que si la métrica es bi-invariante, entonces la aplicación exponencial de grupos de Lie y la aplicación exponencial Riemanniana coinciden. Luego, usaremos éste resultado y el Teorema de Hopf-Rinow, el cual podemos consultar en [35, Teorema 2.9], para mostrar que si el grupo de Lie es compacto y conexo, entonces la aplicación exponencial es sobreyectiva.

Teorema B.2.4. *La aplicación exponencial de Lie y la aplicación exponencial Riemanniana en la identidad, coinciden en grupos de Lie con una métrica bi-invariante.*

Demostración. Sea G un grupo de Lie con métrica Riemanniana bi-invariante y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Fijemos $\xi \in \mathfrak{g}$. Para mostrar que las aplicaciones exponenciales coinciden en ξ , es suficiente probar que el subgrupo 1-paramétrico

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\longmapsto G \\ t &\longmapsto \exp(t\xi), \end{aligned}$$

es la geodésica con $\gamma(0) = e$ y $\gamma'(0) = \xi$.

Recordemos que γ es la curva integral del campo vectorial invariante por izquierda X que pasa por $e \in G$ cuando $t = 0$, es decir,

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \text{y} \quad \gamma(0) = e.$$

Como G tiene una métrica bi-invariante, entonces de la fórmula de Kozul se sigue que

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \nabla_X X = \frac{1}{2}[X, X] = 0,$$

donde ∇ es la conexión lineal asociada a G y compatible con la métrica. Por lo tanto γ es una geodésica y entonces la aplicación exponencial de Lie y la aplicación exponencial Riemanniana coinciden. □

Corolario B.2.5. *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo. Entonces la aplicación exponencial $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ es sobreyectiva.*

Demostración. Como G es un grupo de Lie compacto, entonces existe una métrica Riemanniana bi-invariante g . Por el Teorema B.2.4, la aplicación exponencial de Lie y la aplicación exponencial Riemanniana coinciden. Como la aplicación exponencial de Lie es definida para todo elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} , entonces se sigue del Teorema de Hopf-Rinow [35, Teorema 2.9] que (G, g) es una variedad Riemanniana completa, es decir, cada dos puntos de G pueden ser unidos por una geodésica minimal. Por lo tanto $\exp = \text{Exp}_e: T_e G \rightarrow G$ es sobreyectiva. □

Un resultado importante para el desarrollo de este trabajo, es el hecho que para grupos de Lie reales y conexos, cualquier elemento del grupo se puede escribir como el producto de dos elementos en la imagen de su aplicación exponencial.

Teorema B.2.6. *Si G es un grupo de Lie real y conexo, entonces $G = (\exp(\mathfrak{g}))^2$. Más aún, para cada elemento $g \in G$, existen $x, y \in \mathfrak{g}$ tal que $g = \exp(x)\exp(y)$.*

Demostración. La prueba de este resultado se puede encontrar en [36, Teorema 3] y [37, Teorema 5.6]. \square

Bibliografía

- [1] A. Lichnerowicz. Les variétés de poisson et leurs algèbres de lie associées. *J. Differential Geom.*, 12(2):253–300, 1977. URL <https://doi.org/10.4310/jdg/1214433987>.
- [2] J.-P. Dufour and N. T. Zung. *Poisson structures and their normal forms*, volume 242 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. ISBN 978-3-7643-7334-4; 3-7643-7334-2.
- [3] T. Courant and A. Weinstein. Beyond Poisson structures. In *Action hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie (Lyon, 1986)*, volume 27 of *Travaux en Cours*, pages 39–49. Hermann, Paris, 1988.
- [4] T. J. Courant. Dirac manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 319(2):631–661, 1990. ISSN 0002-9947. URL <https://doi.org/10.2307/2001258>.
- [5] I. Dorfman. *Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations*. Nonlinear Science: Theory and Applications. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1993. ISBN 0-471-93893-9.
- [6] M. M. Jotz and T. S. Ratiu. Dirac optimal reduction. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (1):84–155, 2013. ISSN 1073-7928.
- [7] M. Dalsmo and A. van der Schaft. On representations and integrability of mathematical structures in energy-conserving physical systems. *SIAM J. Control Optim.*, 37(1):54–91, 1999. ISSN 0363-0129. URL <https://doi.org/10.1137/S0363012996312039>.
- [8] I. Vaisman. Coupling Poisson and Jacobi structures on foliated manifolds. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 1(5):607–637, 2004. ISSN 0219-8878. URL <https://doi.org/10.1142/S0219887804000307>.
- [9] J. A. Vallejo and Y. Vorobiev. Invariant Poisson realizations and the averaging of Dirac structures. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10:Paper 096, 20, 2014. ISSN 1815-0659. URL <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2014.096>.
- [10] H. Bursztyn. A brief introduction to Dirac manifolds. In *Geometric and topological methods for quantum field theory*, pages 4–38. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.

- [11] G. Blankenstein and A. J. van der Schaft. Symmetry and reduction in implicit generalized Hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.*, 47(1):57–100, 2001. ISSN 0034-4877. URL [https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(01\)90006-0](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(01)90006-0).
- [12] M. Jotz, T. S. Ratiu, and J. Śniatycki. Singular reduction of Dirac structures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(6):2967–3013, 2011. ISSN 0002-9947. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05220-7>.
- [13] M. Jotz and T. S. Ratiu. Induced Dirac structures on isotropy-type manifolds. *Transform. Groups*, 16(1):175–191, 2011. ISSN 1083-4362. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00031-011-9123-z>.
- [14] I. Chavel. *Riemannian geometry—a modern introduction*, volume 108 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. ISBN 0-521-43201-4; 0-521-48578-9.
- [15] R. S. Palais. On the existence of slices for actions of non-compact lie groups. *Annals of mathematics*, pages 295–323, 1961.
- [16] Y. Vorobiev. Coupling tensors and poisson geometry near a single symplectic leaf. *Banach Center Publications*, 54, 09 2000. doi: 10.4064/bc54-0-14.
- [17] E. Miranda and T. Z. Nguyen. A note on equivariant normal forms of poisson structures. *Mathematical Research Letters*, 13, 10 2005. doi: 10.4310/MRL.2006.v13.n6.a14.
- [18] M. Avendaño and Y. Vorobiev. On deformations of poisson structures on fibered manifolds and adiabatic slow-fast systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14, 02 2017.
- [19] J. Marsden, R. Montgomery, and T. Ratiu. Reduction, symmetry, and phases in mechanics. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 88(436):iv+110, 1990. ISSN 0065-9266. URL <https://doi.org/10.1090/memo/0436>.
- [20] V. L. Ginzburg. Momentum mappings and Poisson cohomology. *Internat. J. Math.*, 7(3):329–358, 1996. ISSN 0129-167X. URL <https://doi.org/10.1142/S0129167X96000207>.
- [21] E. Velasco-Barreras and Y. Vorobiev. On the splitting of infinitesimal Poisson automorphisms around symplectic leaves. *Differential Geom. Appl.*, 59:12–34, 2018. ISSN 0926-2245. doi: 10.1016/j.difgeo.2018.03.002. URL <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2018.03.002>.
- [22] H. J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 180:171–188, 1973. ISSN 0002-9947. URL <http://dx.doi.org/10.2307/1996660>.

- [23] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics: a mathematical exposition of classical mechanics with an introduction to the qualitative theory of dynamical systems and applications to the three-body problem*. Mathematical physics monograph series. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., second edition, 1978. ISBN 0-8053-0102-X.
- [24] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. ISBN 0-387-95495-3. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21752-9>.
- [25] I. Vaisman. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, volume 118 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. ISBN 3-7643-5016-4. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8495-2>.
- [26] J.-P. Dufour and A. Wade. On the local structure of Dirac manifolds. *Compos. Math.*, 144(3):774–786, 2008. ISSN 0010-437X. URL <http://dx.doi.org/10.1112/S0010437X07003272>.
- [27] I. Kolar, P. W. Michor, and J. Slovák. *Natural Operations in Differential Geometry*. Electronic library of mathematics. Springer, 1993. ISBN 9783540562351. URL <https://books.google.com.mx/books?id=4m9x1uL71L4C>.
- [28] V. L. Ginzburg. Equivariant Poisson cohomology and a spectral sequence associated with a moment map. *Internat. J. Math.*, 10(8):977–1010, 1999. ISSN 0129-167X. URL <https://doi.org/10.1142/S0129167X99000422>.
- [29] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Lie groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000. ISBN 3-540-15293-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>.
- [30] P. W. Michor. *Topics in differential geometry*, volume 93 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. ISBN 978-0-8218-2003-2. URL <https://doi.org/10.1090/gsm/093>.
- [31] H. J. Sussmann. Smooth distributions are globally finitely spanned. In *Analysis and design of nonlinear control systems*, pages 3–8. Springer, Berlin, 2008. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-74358-3_1.
- [32] L. D. Drager, J. M. Lee, E. Park, and K. Richardson. Smooth distributions are finitely generated. *Ann. Global Anal. Geom.*, 41(3):357–369, 2012. ISSN 0232-704X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10455-011-9287-8>.
- [33] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone. *Connections, curvature, and cohomology. Vol. I: De Rham cohomology of manifolds and vector bundles*. Academic Press, New York-London, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 47.
- [34] R. Meise and D. Vogt. *Introduction to functional analysis*, volume 2 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. The Clarendon Press, Oxford University Press,

- New York, 1997. ISBN 0-19-851485-9. Translated from the German by M. S. Ramanujan and revised by the authors.
- [35] M. M. Alexandrino and R. G. Bettiol. *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*. Springer, Cham, 2015. ISBN 978-3-319-16612-4; 978-3-319-16613-1. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16613-1>.
- [36] M. Wüstner. A connected Lie group equals the square of the exponential image. *J. Lie Theory*, 13(1):307–309, 2003. ISSN 0949-5932.
- [37] M. Moskowitz and R. Sacksteder. The exponential map and differential equations on real Lie groups. *J. Lie Theory*, 13(1):291–306, 2003. ISSN 0949-5932.
- [38] M. Avendaño Camacho and Y. M. Vorobiev. Homological equations for tensor fields and periodic averaging. *Russ. J. Math. Phys.*, 18(3):243–257, 2011. ISSN 1061-9208. URL <http://dx.doi.org/10.1134/S1061920811030010>.
- [39] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*, volume 17 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1999. ISBN 0-387-98643-X. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21792-5>. A basic exposition of classical mechanical systems.
- [40] R. H. Cushman and L. M. Bates. *Global aspects of classical integrable systems*. Birkhäuser/Springer, Basel, second edition, 2015. ISBN 978-3-0348-0917-7; 978-3-0348-0918-4. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0918-4>.
- [41] J. P. Ortega and T. S. Ratiu. *Momentum maps and Hamiltonian reduction*, volume 222 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004. ISBN 0-8176-4307-9. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3811-7>.
- [42] D. Husemoller. *Fibre bundles*, volume 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1994. ISBN 0-387-94087-1. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-2261-1>.
- [43] P. Popescu and M. Popescu. On singular non-holonomic geometry. *Balkan J. Geom. Appl.*, 18(2):58–68, 2013. ISSN 1224-2780.
- [44] D. Prandi. Hölder equivalence of the value function for control-affine systems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 20(4):1224–1248, 2014. ISSN 1292-8119. URL <http://dx.doi.org/10.1051/cocv/2014014>.
- [45] E. M. Babalic and C. I. Lazaroiu. Internal circle uplifts, transversality and stratified G-structures. *J. High Energy Phys.*, (11):174, front matter+25, 2015. ISSN 1126-6708.
- [46] E. M. Babalic and C. I. Lazaroiu. Singular foliations for M-theory compactification. *J. High Energy Phys.*, (3):116, front matter+61, 2015. ISSN 1126-6708.

-
- [47] L. Conlon. *Differentiable manifolds: a first course*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993. ISBN 0-8176-3626-9. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-2284-0>.
- [48] P. Stefan. Integrability of systems of vector fields. *J. London Math. Soc. (2)*, 21(3): 544–556, 1980. ISSN 0024-6107. URL <http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s2-21.3.544>.
- [49] J. Śniatycki. *Differential geometry of singular spaces and reduction of symmetry*, volume 23 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. ISBN 978-1-107-02271-3. URL <https://doi.org/10.1017/CB09781139136990>.
- [50] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. ISBN 0-471-15733-3. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.