



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Análisis y Control de la Bifurcación Takens-Bogdanov

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctor en Ciencias

(Matemáticas)

Presenta:

Francisco Armando Carrillo Navarro

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México,

Diciembre 16 de 2009.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González,
Departamento de Matemáticas,
División de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Sonora,
Hermosillo, México.

Dr. Joaquín Delgado Fernández,
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
Ciudad de México, D.F.

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos,
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada,
Ensenada, B.C.

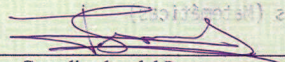
Dr. Daniel Olmos Liceaga,
Departamento de Matemáticas,
División de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Sonora,
Hermosillo, México.

Dr. Yury Mihailovich Vorobev,
Departamento de Matemáticas,
División de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Sonora,
Hermosillo, México.

Dr. Fernando Luque Vásquez Coordinador
del Programa de: Posgrado en Matemáticas
de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden a
los sinodales que intervinieron en el examen que contiene la presente acta.

Hermosillo, Sonora, a 16 de Diciembre del 2009.

Dr. Fernando Luque Vásquez



Coordinador del Programa



DIVISION DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
COORDINACION
POSGRADO EN MATEMATICAS

Dra. Arminda Guadalupe García de León Peñuñuri Vicerrector a
de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora, hace
constar que: el Dr. Fernando Luque Vásquez
es a la fecha de expedición de este documento, Coordinador del Programa arriba citado
y suya la firma que aparece al calce del mismo.

Hermosillo, Sonora, a 16 de Diciembre del 2009.

Dra. Arminda Guadalupe García de León Peñuñuri



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
UNIDAD REGIONAL
CENTRO
VICERRECTORIA



**VICERRECTOR A
UNIDAD REGIONAL CENTRO**

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, por haber apoyado el proyecto de investigación que dió lugar al presente trabajo de tesis, dicho apoyo fue mediante una beca estudiantil con número 73779/73779. Debo agradecer a la Universidad de Sonora por todo el apoyo que me ha brindado a lo largo de mis estudios de Doctorado, por medio de la División de Ciencias Exactas y Naturales, el Departamento de Matemáticas y la Dirección de Desarrollo Académico. Sin estos apoyos, seguramente no hubiera podido lograr este proyecto de vida.

Por otro lado, quiero agradecer también a todas las personas que directa o indirectamente han intervenido para que este trabajo se llevará a cabo, como son mis compañeros de trabajo en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, entre ellos, al M.C. Horacio Leyva Castellanos y al compañero del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, Dr. Baltazar Aguirre, ambos por sus comentarios, sugerencias y consejos tanto académicos como no académicos que tuvieron a bien hacerme durante todo el tiempo que duré elaborando el presente trabajo. No puedo dejar de mencionar los apoyos recibidos por parte de los coordinadores del Programa de Posgrado en Matemáticas, Dr. Rubén Flores Espinoza y Dr. Fernando Luque Vásquez, que estuvieron al frente del mismo durante mis estudios de Doctorado, asimismo al Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa, Jefe del Departamento de Matemáticas en este período, y al M.C. Miguel Angel Moreno Nuñez, Director de la División de Ciencias Exactas y Naturales, y al M.C. Israel Segundo Caballero Secretario de la misma División.

Quiero agradecer también a todos los compañeros Docentes e Investigadores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, así como también a los de otras Instituciones que se tomaron la molestia y el tiempo para revisar y mejorar la presente tesis, mediante todos sus comentarios, sugerencias y correcciones hacia la misma. Primeramente agradezco al Dr. Jaume Llibre, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, en Bellaterra, Barcelona, España, por sus valiosos comentarios hacia el presente trabajo; igualmente, en calidad de Sinodales agradezco al Dr. Joaquín Álvarez Gallegos, del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, al Dr. Daniel Olmos Liceaga del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, y al Dr. Yury Vorobev, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, por su tiempo y aportaciones dedicadas al presente. Al Dr. Joaquín Delgado Fernández, de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, particularmente le quiero manifestar mi aprecio y admiración y sobre todo mi más sentido agradecimiento por toda la ayuda recibida de su parte como co-director de este trabajo y como amigo, para poder concluir esta etapa tan importante en mi vida.

De manera muy especial quiero dar mi eterno agradecimiento al Dr. Fernando Verduzco González, quien fuera el director del presente trabajo de investigación, además de ser una gran compañero de trabajo y amigo, por toda la dedicación y paciencia que me otorgó durante estos últimos cinco años, desde los estudios de Maestría hasta el Doctorado.

Finalmente, deseo expresar mi gratitud, mi más grande admiración y cariño a mi familia, a mi esposa, compañera y amiga Elsa Gabriela por toda la paciencia y comprensión que siempre me ha mostrado, más aún durante estos últimos años, y a mis hijos Francisco Armando, Héctor Guillermo y Jimena Donají, a ellos nuevamente gracias por todo su amor. Quiero terminar dedicando este trabajo de tesis a la memoria de mi Madre, la Sra. Alicia Navarro Munguía.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares Matemáticos	9
1.1. Conceptos Generales	9
1.2. Teoría de la Variedad Central	11
1.3. Formas Normales	14
1.4. Bifurcación de puntos fijos de campos vectoriales	17
1.5. Bifurcaciones de codimensión uno	19
1.6. Deformación Versal	23
1.7. Teoría de Melnikov	24
2. La bifurcación Takens-Bogdanov	27
2.1. Relación de equivalencia entre las deformaciones versales	28
2.2. El diagrama de bifurcación y los retratos fase de la bifurcación Takens-Bogdanov	29
3. Control de la bifurcación Takens-Bogdanov en el plano	43
3.1. Planteamiento del problema	43
3.2. Deformación versal controlable	44
3.3. Análisis de bifurcación	49
3.4. Resultado principal	56
3.5. El diagrama de bifurcación y los retratos fase	58
3.6. Aplicaciones	58
4. Bifurcación Takens-Bogdanov en \mathbb{R}^n	65
4.1. El teorema de la Bifurcación de Takens-Bogdanov	65
4.2. Planteamiento del problema	66
4.3. Dinámica sobre la variedad central	67
4.4. Teorema principal	71
4.5. Un ejemplo de aplicación	75

5. Control de la bifurcación Takens-Bogdanov n-dimensional	79
5.1. Planteamiento del problema	79
5.2. El sistema en su forma de Jordan	80
5.3. Diseño de la ley de control	82
5.4. Resultado principal	89
5.5. Ejemplo de Aplicación: Un péndulo Invertido	91
Conclusiones	97
Eventos	98
Artículos de Investigación	98

Introducción

Uno de los objetivos del control de bifurcaciones es establecer de antemano la creación o eliminación de estados estacionarios tales como, puntos de equilibrio, ciclos límite, toros y atractores extraños, con sus respectivas características de estabilidad. A pesar de que hace un poco más de veinte años que comenzó el estudio del control de bifurcaciones, sólo se ha sistematizado el control de las bifurcaciones de codimensión uno: silla-nodo, transcítica, horquilla y Hopf, ver [1, 2, 26, 24, 41, 39]. Además de unos pocos de intentos aislados acerca del control de las bifurcaciones de codimensión dos, ver [23, 19, 27, 44].

En el presente trabajo, nos trazamos como objetivo principal, el de iniciar un análisis sistemático de la bifurcación de codimensión dos llamada *Bifurcación Takens-Bogdanov* (BTB), también conocida como bifurcación doble-cero, que involucrara tanto el control de la bifurcación, como la generalización del teorema dado para ésta en su dimensión mínima \mathbb{R}^2 , a n dimensiones y m parámetros. Por otro lado creemos que es posible extender este tipo de análisis al resto de las bifurcaciones de codimensión dos a saber: la bifurcación Fold-Hopf (o cero-Hopf), y la bifurcación Hopf-Hopf. Debemos aclarar que este estudio está dedicado al caso genérico de la bifurcación, por que no podemos ignorar que existen otros casos degenerados que no se abordaron, pero que los podemos considerar como problemas abiertos que en un futuro se pueden analizar, por ejemplo, un caso degenerado particular fué estudiada por Dumortier et al. en [16], ellos consideran la forma normal truncada

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ ay_1^2 + by_1y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(y^3),$$

con $a \neq 0$, y agregan términos de orden superior resonantes para obtener la forma normal truncada hasta orden cuatro

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 + y_1^3y_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

y demuestran que

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1^2 + \mu + z_2(v_0 + v_1z_1 \pm z_1^3) \end{pmatrix}$$

es una deformación versal de (1).

El análisis que llevamos a cabo en el presente documento como ya mencionamos, lo dividimos en dos partes:

1. Dado un sistema no lineal n -dimensional m -paramétrico

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m,$$

se dan condiciones suficientes sobre el campo vectorial F , tales que la dinámica sobre la variedad central bidimensional del sistema, es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la BTB dada por Bogdanov,

2. Dado un sistema de control no lineal en \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^r$, con $r \geq 2$, se den las condiciones suficientes sobre los campos vectoriales, de tal manera que pueda ser posible diseñar una ley de control escalar u , tal que al “cerrar el lazo” la dinámica sobre la variedad central del sistema dado, sea topológicamente equivalente a la deformación versal de la BTB dada por Guckenheimer y Holmes, y además puedan determinarse *a priori* mediante la manipulación de los que llamamos *parámetros de control*, las direcciones de las bifurcaciones y sus rasgos de estabilidad. Si es posible obtener tal ley de control, entonces podemos decir que el sistema de control no lineal dado, experimenta una *bifurcación controlable*.

Con tal objetivo en mente, iniciamos nuestro análisis con en el primer capítulo del trabajo *Preliminares Matemáticos*, en el cual, nos dimos a la tarea de establecer una serie de conceptos de los sistemas dinámicos que nos ayudarán en la formalización de nuestro análisis, podemos decir que los temas fundamentales aquí son la Teoría de la Variedad Central y la Teoría de las Formas Normales. Damos también un breve repaso de las bifurcaciones de codimensión uno inmersas en la BTB: la bifurcación silla-nodo, la bifurcación de Hopf y la bifurcación homoclínica.

En el capítulo dos *La bifurcación Takens-Bogdanov*, damos un panorama general de lo que es la BTB, sus diferentes formas normales y deformaciones versales obtenidas y trabajadas por los matemáticos que fueron los pioneros en el estudio de la misma, Floris Takens y Rifkat Ibragimovich Bogdanov, ver [13, 14, 35, 36] así como también se menciona la deformación dada por Guckenheimer y Holmes, ver [22]. En la primera sección del capítulo dos, se dan las relaciones de equivalencia de estas tres deformaciones versales. En otra sección se analiza el diagrama de bifurcación de la BTB, incluidos los retratos fase en el espacio de estados.

En el capítulo tres *Control de la bifurcación Takens-Bogdanov en el plano*, iniciamos nuestro análisis de la BTB en su dimensión mínima que es \mathbb{R}^2 , el problema que nos

planteamos es el siguiente:

Consideremos el sistema de control no lineal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2)$$

con $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^r$, con $r \geq 2$.

Nuestros objetivos en este capítulo son encontrar un cambio de coordenadas $x = \psi(z)$ y diseñar una ley de control $u = u(x, \mu, \gamma)$ donde $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ representa un vector de parámetros de bifurcación artificiales, mientras que $\gamma = (\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$ representa un vector de parámetros de control indeterminados, tales que,

(i) el sistema a lazo-cerrado se transforma en

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3), \quad (3)$$

(ii) que sea posible encontrar tres curvas de bifurcación $\varphi(\mu_1, \mu_2) = 0$ donde el sistema

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

experimenta las bifurcaciones silla-nodo, Hopf y homoclínica respectivamente, y

(iii) que sea posible mediante la manipulación de los parámetros de control, que el sistema (4) experimente todas las posibles direcciones de cada bifurcación.

Llamaremos al sistema (4) una *deformación versal controlable* del sistema de control (2), y si tal ley de control u existe, entonces diremos que el sistema de control (2) experimenta una *bifurcación Takens-Bogdanov* controlable.

Los objetivos planteados en este capítulo se logran mediante una serie de transformaciones de coordenadas y en cada una de ellas se va integrando una parte de la entrada del control u , de tal manera que se logra demostrar el siguiente resultado.

Teorema 0.1 *Considérese el sistema de control no lineal (2). Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que*

$$H1) f(x_0) = 0,$$

$$H2) A = Df(x_0) \text{ es similar a } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H3) q_2^T g(x_0) \neq 0, \text{ donde } q_2 \text{ es el vector propio izquierdo asociado al valor propio cero.}$$

Entonces, si $u = u(x, \mu, \gamma)$, el sistema a lazo cerrado (2), es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal controlable (4).

Concluimos el capítulo con una serie de problemas de aplicación, con sus respectivas simulaciones, a saber: el problema de el Oscilador de van der Pol forzado promediado, ver [22]; un sistema de Depredador-Presa, ver [12] y finalmente se trabaja el Prototipo de un sistema de referencia de control adaptativo, ver [33].

En el capítulo cuatro, *Bifurcación Takens-Bogdanov en \mathbb{R}^n* , se logra la generalización del teorema de la BTB originalmente establecido para sistemas biparamétricos en \mathbb{R}^2 por Y.A. Kuznetsov, el cual se puede consultar en [28], cabe mencionar que en la literatura no existen otros resultados de este tipo. Dicha generalización es para sistemas m -paramétricos n -dimensionales. Y son dadas condiciones suficientes sobre el campo vectorial, tales que la dinámica sobre su variedad central bidimensional m -parametrizada, es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la BTB dada por Bogdanov en el plano. Se establece además una regla explícita para obtener en el espacio de parámetros, las superficies de bifurcación de codimensión uno, inmersas en la BTB.

Entonces en esta parte el problema que nos planteamos es el siguiente:
Considérese el campo vectorial m -parametrizado

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, con $m \geq 2$, y $F \in C^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, con $r \geq 2$. Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que

$$H1) F(x_0, \mu_0) = 0, \text{ y}$$

$$H2) DF(x_0, \mu_0) \sim \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_H \end{pmatrix}, \text{ con } J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } J_H \text{ una matriz de Hurwitz.}$$

Nuestro objetivo en este capítulo es encontrar condiciones suficientes sobre el campo vectorial F , tales que la dinámica sobre la variedad central en $x = x_0$, sea localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la BTB en el plano,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + a z_1^2 + b z_1 z_2, \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$ab \neq 0. \quad (7)$$

El problema se resuelve mediante el cálculo de la variedad central del sistema (5) y encontrando las condiciones sobre ésta para que se satisfagan las condiciones de no hiperbolicidad H1), H2) así como la de no degeneracidad (7) y también una condición más que denotamos como condición de transversalidad sobre la transformación de los parámetros de bifurcación. Con lo anterior se logró demostrar el siguiente resultado:

Teorema 0.2 *Dado el sistema no lineal (5). Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tal que satisface las condiciones*

- H1) $F(x_0, \mu_0) = 0$,
- H2) $\sigma[DF(x_0, \mu_0)] = \{ \lambda_{1,2} = 0; \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, j = 3, \dots, n \}$, considérese el caso donde el valor propio cero tiene multiplicidad geométrica uno, (no hiperbolicidad)
- H3) $ab \neq 0$, (no degeneracidad)
- H4) S_1 y S_2 son linealmente independientes, (transversalidad)

donde a y b son escalares, S_1 y S_2 son vectores en \mathbb{R}^m que dependen del campo vectorial F . Entonces, la dinámica sobre la variedad central del sistema (5), es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov (6), donde $\beta_1 = S_1^T(\mu - \mu_0)$, y $\beta_2 = S_2^T(\mu - \mu_0)$.

Cabe recalcar aquí la importancia de la condición H4) sobre los términos S_1 y S_2 , ya que con ésta es posible asegurar que el espacio de parámetros del campo vectorial se puede mapear de manera sobreyectiva (localmente) sobre el plano de parámetros de bifurcación, además de que es posible determinar la relación explícita que hay entre las superficies de bifurcación en el espacio de parámetros y las curvas de bifurcación en el plano de los parámetros de bifurcación. Al final de este capítulo también se trabaja un problema de aplicación *Un ecosistema depredador-presa*, ver [11] citado en [28], con sus respectivas simulaciones.

En el capítulo cinco, *Control de la bifurcación Takens-Bogdanov en \mathbb{R}^n* , generalizamos el resultado obtenido en el capítulo tres, con un análisis muy similar, sólo que en esta parte primero calculamos la variedad central del sistema de control no lineal dado y sobre ésta aplicamos el esquema trabajado en el capítulo tres. El problema que se resolvió en esta parte es:

Consideremos el sistema de control no lineal n -dimensional

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (8)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, y $f, g \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, con $r \geq 2$. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que se cumplen las condiciones de no hiperbolicidad planteadas en el capítulo 4:

- H1) $f(x_0) = 0$, y
- H2) $\sigma(Df(x_0)) = \{ \lambda_{1,2} = 0, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \text{ para } j = 3, \dots, n \}$, considerándose el caso no diagonalizable. Es decir

$$Df(x_0) \sim J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_H \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y } J_H \text{ es una matriz Hurwitz.} \quad (9)$$

Nuestro objetivo es diseñar una ley de control escalar $u = u(x, \mu, \gamma)$, donde $\mu \in \mathbb{R}^2$ es un vector de *parámetros de bifurcación artificiales*, y $\gamma \in \mathbb{R}^5$ es un vector de *parámetros de*

control indeterminados, tal que la dinámica sobre la variedad central del sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x, \mu, \gamma), \quad (10)$$

es localmente topológicamente equivalente a la *deformación versal controlable*

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Si tal control u existe, diremos que el sistema (8) experimenta una *bifurcación Takens-Bogdanov controlable*.

Entonces, al aplicar la metodología desarrollada en el capítulo tres a la variedad central del sistema de control no lineal planteado en este capítulo, demostramos el siguiente resultado

Teorema 0.3 *Dado el sistema de control no lineal (8). Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que se cumplen las condiciones:*

H1) $f(x_0) = 0,$

H2) $\sigma(Df(x_0)) = \{ \lambda_{1,2} = 0, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \text{ for } j = 3, \dots, n \},$ el caso no diagonalizable, y

H3) $q_2^T g(x_0) \neq 0,$ donde q_2 es el vector propio izquierdo asociado al valor propio cero.

Entonces, si $u = u(x, \mu, \gamma)$ la dinámica sobre la variedad central del sistema a lazo-cerrado (10), es localmente topológicamente equivalente a la *deformación versal* (11).

Cabe hacer notar un detalle notable en el trabajo aquí presentado, y es con relación al importante hecho de que para controlar la BTB en un sistema no lineal $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, además de las condiciones de no hiperbolicidad naturales en el estudio de las bifurcaciones que son: dado un punto de equilibrio x_0 del sistema, $f(x_0) = 0$ y $Df(x_0)$ tenga un valor propio cero doble; sólo se pide que la segunda entrada del vector que representa la parte constante del campo vectorial conductor $g(x)$ (en su forma de Jordan) sea diferente de cero, esto es $q_2^T g(x_0) \neq 0$, donde sabemos que q_2 es el vector propio izquierdo de $Df(x_0)$ asociado al valor propio cero.

Terminamos el capítulo cinco con un ejemplo de aplicación, que consiste en el modelo matemático del péndulo invertido dado en [3] al cual le aplicamos el resultado obtenido en esta parte, e incluimos simulaciones donde se obtienen una bifurcación de Hopf supercrítica y una bifurcación de Hopf subcrítica del sistema a lazo-cerrado resultante.

Finalmente, se dan una serie de conclusiones, donde también se mencionan los diferentes eventos en los que participamos con diferentes ponencias del presente trabajo, los cuales podemos detallar como sigue:

1. XVII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas. Los días del 9 al 13 de Marzo de 2007, en la Ciudad de Hermosillo, Son. Con la presentación de la ponencia *Control de Ocilaciones en la bifurcación Takens-Bogdanov*.
2. XL CONGRESO NACIONAL DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA. Durante los días del 14 al 19 de Octubre de 2007, en la Ciudad de Monterrey N.L. Con una conferencia por invitación titulada *Sobre el control de bifurcaciones de codimensión dos*.
3. Segundo Congreso Latinoamericano de Estudiantes de Matemáticas, EXPRIME 2008, Exposiciones Primaverales de Memorias. Durante los días del 22 al 24 de Abril de 2008, en la Ciudad de San Luis Potosí, S.L.P. Con la conferencia titulada *Control de oscilaciones en la bifurcación Takens-Bogdanov*.
4. 47th IEEE Conference on Decision and Control. Los días del 9 al 11 de Diciembre de 2008, en Cancún, Quintana Roo. Con la conferencia *Control of the Hopf bifurcation in the Takens-Bogdanov bifurcation*.
5. Taller de Control y Sistemas Dinámicos durante la XIX Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas. Durante los días del 2 al 6 de Marzo de 2009, en la Ciudad de Hermosillo, Son. Con la ponencia *Análisis de la bifurcación Takens-Bogdanov en campos vectoriales m-parametrizados*.
6. II Encuentro Interactivo de Matemática Aplicada, EIM@ 2009. Los días del 27 al 30 de Octubre de 2009, en diferentes sedes de Brasil, Perú y México. Con la videoconferencia por invitación *Análisis de la bifurcación Takens-Bogdanov en campos m-paramétricos*.

Además obtuvimos tres artículos de investigación, uno publicado, otro por publicarse el mes de abril de 2010 y el tercero fué enviado para su publicación, las referencias de estos artículos son:

- Francisco A. Carrillo and Fernando Verduzco. *Control of the Planar Takens-Bogdanov Bifurcation*. Acta Applicandae Mathematicae. Volume 105, Number 2, pp. 199-225. Springer Netherlands. February 2009.
- Carrillo, F.A., Verduzco, F. and Delgado, J. *Analysis of the Takens-Bogdanov bifurcation on m-parameterized vector fields*. International Journal of Bifurcation and Chaos. Por publicarse en Vol. 20, No. 4, April 2010.
- Carrillo, F.A., Verduzco, F. and Delgado, J. *Control of the n-dimensional Takens-Bogdanov Bifurcation with Applications*. Enviado para su publicación.

Capítulo 1

Preliminares Matemáticos

En este capítulo, recordaremos algunos conceptos y resultados que desempeñan un papel muy importante en el análisis y desarrollo del trabajo que presentamos en los capítulos posteriores. Gran parte de lo que aquí se presenta fué extraído de [22, 42, 32].

1.1. Conceptos Generales

En esta sección recordaremos los conceptos de Estabilidad Estructural, Generacidad y Transversalidad así como los Sistemas Hamiltonianos completamente integrables.

1.1.1. Estabilidad estructural, Generacidad y Transversalidad

Los modelos matemáticos que ideamos para describir el mundo alrededor y dentro de nosotros son solamente aproximaciones. Por lo tanto, parece razonable que si reflejan exactamente la realidad, los modelos por ellos mismos deben ser insensibles a las perturbaciones y tener características que sean “no atípicas”, en cierto modo eso no es fácil de caracterizar de una manera que sea útil en las aplicaciones. Los intentos de dar sustancia matemática a éstos además de ideas vagas han llevado a los conceptos de *estabilidad estructural* y de *generacidad*, los cuales históricamente han desempeñado un papel importante en el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos como *tema matemático*. Otro concepto que definimos en esta sección es el de *transversalidad*, éste es un ejemplo de una propiedad típica, veremos que desempeñará un papel importante en teoría local y global de bifurcaciones, así como en caracterizar la dinámica caótica.

El concepto de estabilidad estructural fué introducido por Andronov y Pontryagin en 1937, bajo el nombre de “*systèmes grossières*”, o sistemas “gruesos” o sistemas “robustos” y han jugado un papel central en la teoría de los sistemas dinámicos. Hablando a *grosso modo*, un sistema dinámico se dice que es estructuralmente estable si sistemas “cercaños” tienen la misma dinámica cualitativa. Por lo tanto, en la definición de la estabilidad estructural se debe proporcionar una receta para determinar cuando dos sistemas están “cerca”, y luego hay que especificar qué se entiende al decir que, cualitativamente, dos sistemas tienen la misma dinámica.

Dos elementos de $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ se dice que son C^r ε -cercaños ($k \leq r$), o sólo C^k cercaños, si ellos a lo largo de sus primeras k derivadas, están dentro de una ε medida en

alguna norma. Hay un problema con esta definición, a saber, \mathbb{R}^n es ilimitado, y el comportamiento en el infinito debe estar bajo control. Esto explica por qué la mayoría de la teoría matemática de los sistemas dinámicos ha sido desarrollado usando espacios fase compactos; sin embargo, en las aplicaciones esto no es suficiente por lo que se deben hacer modificaciones.

Existen varias formas de manejar esta dificultad. Para los propósitos de nuestra discusión elegiremos la manera usual y supondremos que nuestros campos vectoriales actúan sobre variedades diferenciales n -dimensionales no acotadas y compactas M . La topología inducida sobre $C^r(M, M)$ por esta medida de distancia entre dos elementos de $C^r(M, M)$ es llamada *topología C^k* , para una discusión más detallada pueden consultar [42], [31] y [25].

La pregunta ¿qué significa decir que dos sistemas dinámicos son cercanos? es respondida usualmente, en términos de *equivalencia*. Específicamente, campos vectoriales C^k equivalentes, tienen la misma dinámica cualitativa, sobre este concepto hablaremos más detalladamente en secciones posteriores.

Definición 1.1 *Considérese un campo vectorial C^r , f en $C^r(M, M)$; entonces f se dice que es **estructuralmente estable**, si existe una vecindad N de f en la topología C^k , tal que f es C^0 equivalente a cada campo vectorial en N .*

Ahora definiremos lo que es una propiedad genérica para un campo vectorial en el sentido topológico, este concepto se apoya en la idea de *conjunto residual*.

Definición 1.2 *Sea X un espacio topológico, y sea U un subconjunto de X . U es llamado un **conjunto residual** si contiene la intersección de una cantidad numerable de conjuntos cada uno de los cuales es abierto y denso en X . Si cada conjunto residual de X es denso, entonces X es llamado un **espacio de Baire**.*

Observación 1.3 *$C^r(M, M)$ equipado con la topología C^r ($k \leq r$) es un espacio de Baire. Ver [31]*

Definición 1.4 *Una propiedad de un campo vectorial se dice que es C^k **genérica** si el conjunto de campos vectoriales que la poseen, contienen un conjunto residual en la topología C^k .*

Antes de abandonar esta sección, introduciremos la idea de *transversalidad*, la cual juega un papel central en muchos de los argumentos geométricos de este trabajo.

Transversalidad es una noción geométrica, la cual trata con la intersección de superficies o variedades. Sean M y N variedades al menos C^1 diferenciables en \mathbb{R}^n .

Definición 1.5 *Sea p un punto en \mathbb{R}^n ; entonces M y N se dice que son **transversales** en p si $p \notin M \cap N$; o, si $p \in M \cap N$, entonces $T_p M + T_p N = \mathbb{R}^n$, donde $T_p M$ y $T_p N$ denotan los espacios tangentes de M y N respectivamente, en el punto p . M y N transversales, si son transversales en cada punto $p \in \mathbb{R}^n$; ver Figura 1.1.*

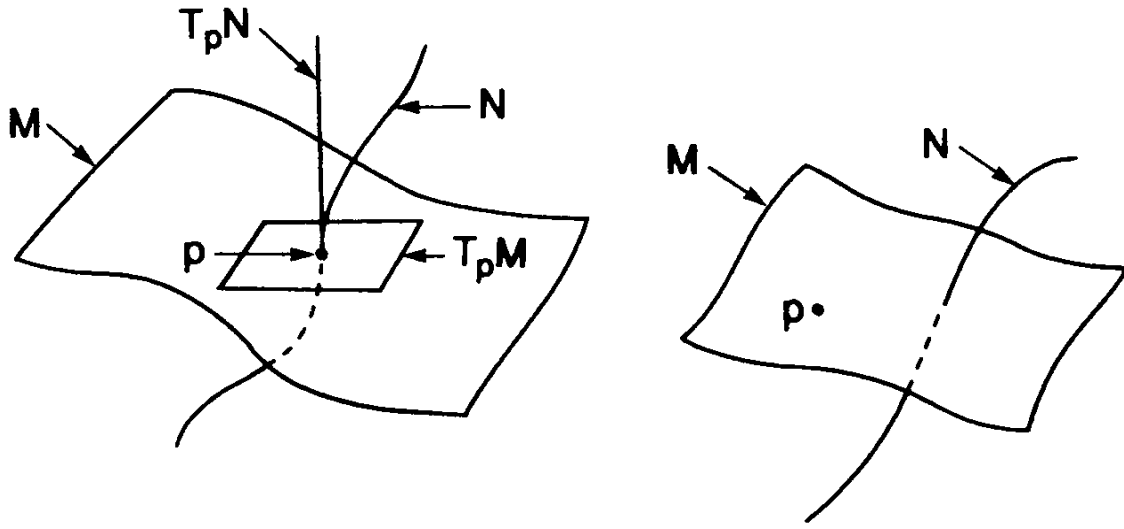


Figura 1.1: M y N transversales en p .

Ya sea o no que la intersección es transversal, se puede determinar conociendo la dimensión de la intersección de M y N . Esto se puede ver como sigue. Usando la fórmula para la dimensión de la intersección de dos subespacios vectoriales tenemos

$$\dim(T_pM + T_pN) = \dim T_pM + \dim T_pN - \dim(T_pM \cap T_pN).$$

Por la definición 1.4, si M y N se intersectan transversalmente en p , entonces tenemos

$$n = \dim T_pM + \dim T_pN - \dim(T_pM \cap T_pN).$$

Ya que las dimensiones de M y N son conocidas, entonces sabiendo la dimensión de su intersección nos permite determinar ya sea o no la intersección transversal.

1.2. Teoría de la Variedad Central

La teoría será desarrollada en dos casos: (i) Campos Vectoriales y (ii) Campos Vectoriales parametrizados.

1.2.1. Campos Vectoriales

Considere el sistema no lineal

$$\dot{w} = X(w), \tag{1.2.1}$$

donde $w \in \mathbb{R}^n$ y X es un campo vectorial suave. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es una *Variedad Invariante Local* para (1.2.1), si para $w_0 \in S$, la solución $w(t)$ de (1.2.1) con $w(0) = w_0$ está en S para $|t| < T$ donde $T > 0$. Si siempre podemos elegir $T = \infty$, entonces decimos que S es una *Variedad Invariante*.

Supóngase que $X(0) = 0$ y que $DX(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, donde A es una matriz $k \times k$ con valores propios con parte real cero y B una matriz $(n - k) \times (n - k)$ con valores propios con parte real negativa. Luego, de manera natural podemos hacer $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $x \in \mathbb{R}^k$ y $y \in \mathbb{R}^{n-k}$, obteniendo la siguiente representación para el sistema (1.2.1),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y), \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

donde $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ y $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$, y $f, g \in C^r$, con $r \geq 2$.

Definición 1.6 Una variedad invariante W^c será llamada **Variedad Central** para el sistema (1.2.2) si puede ser representada, de manera local, como sigue

$$W_{loc}^c(0) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0 \}$$

para δ suficientemente pequeña.

Observación 1.7 El hecho de que $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ nos garantiza que la variedad central $W_{loc}^c(0)$ es tangente al eigenspacio central E^c en el origen.

Los siguientes tres teoremas que enunciaremos, están demostrados en [15]. El primero de ellos nos garantiza la existencia de la variedad central.

Teorema 1.8 Existe una C^r variedad central para el sistema (1.2.2). La dinámica del sistema (1.2.2), restringida a la variedad central, está dada, para v suficientemente pequeña, por el siguiente sistema k -dimensional

$$\dot{v} = Av + f(v, h(v)), \quad (1.2.3)$$

con $v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k$.

El siguiente resultado establece que la dinámica de (1.2.3) cerca de $u = 0$, determina la dinámica de (1.2.2) cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

Teorema 1.9 (i) Suponga que $v = 0$ es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.2.3), entonces $(x, y) = (0, 0)$ es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.2.2).

(ii) Suponga que el equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ del sistema (1.2.2) es estable. Entonces, si $(x(t), y(t))$ es una solución de (1.2.2) con $(x(0), y(0))$ lo suficientemente pequeño, entonces existe una solución $v(t)$ de (1.2.3) tal que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= v(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= h(v(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante

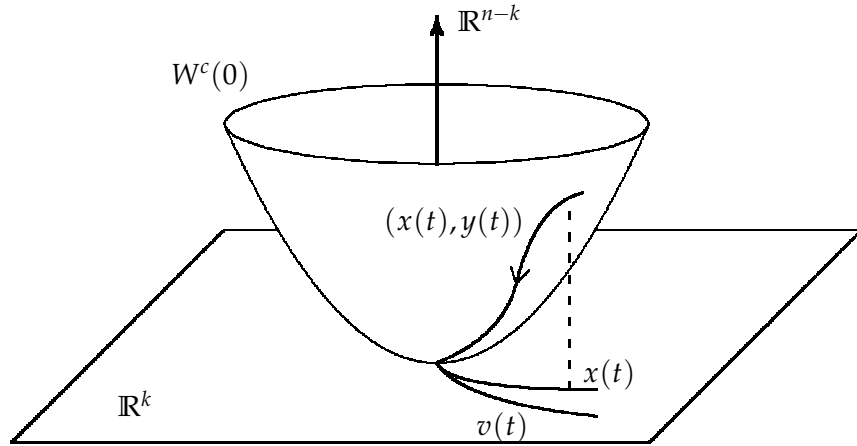


Figura 1.2: Esquemización gráfica del teorema 1.9.

Observación 1.10 Lo que nos dice el teorema 1.9 es que la solución $u(t)$ del sistema (1.2.3), representa, de manera aproximada, la proyección de la solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1.2.2), sobre el eigenspacio $E^c \cong \mathbb{R}^k$. Ver figura 1.2.

El último teorema proporciona un método para aproximar la función $h(x)$, cuya gráfica es la variedad central. Antes de enunciarlo, encontraremos una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya incógnita es justamente nuestra función $h(x)$.

Sea $(x(t), y(t)) \in W_{loc}^c(0)$, luego, se cumple que $y(t) = h(x(t))$, y derivando con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (1.2.4)$$

Pero todo punto sobre la variedad central satisface la ecuación (1.2.2), por lo tanto, la ecuación (1.2.4) es equivalente a

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = Dh(x) (Ax + f(x, h(x))).$$

Hagamos

$$\mathcal{N}(h(x)) = Dh(x) (Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) \equiv 0. \quad (1.2.5)$$

Luego, nuestro problema es encontrar $h(x)$ tal que satisfaga la ecuación (1.2.5), a esta ecuación se le conoce como *ecuación homológica* ver [6]. Encontrar la solución de esta ecuación en derivadas parciales es en general más difícil que resolver el sistema (1.2.2), sin embargo, el siguiente teorema nos permitirá aproximar la solución de (1.2.5) con el grado de precisión que se desee.

Teorema 1.11 Sea $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de clase C^1 , con $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$ cuando $x \rightarrow 0$, para algún $q > 1$. Entonces

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q) \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

1.2.2. Campos Vectoriales parametrizados

Considere el sistema no lineal parametrizado, escrito ya en bloques de Jordan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu)\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

con $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^p$, donde A posee valores propios con parte real cero y B posee valores propios con parte real negativa, con $f(0) = Df(0) = 0$ y $g(0) = Dg(0) = 0$. Supongamos por un momento que $\mu \in \mathbb{R}^p$ es un vector de estados, luego podemos reescribir (1.2.6) como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu),\end{aligned}\tag{1.2.7}$$

llamado el *sistema suspendido*, que a su vez lo reescribimos como

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu).\end{aligned}$$

Tenemos entonces un eigenespacio central de dimensión $k + p$, por lo tanto existe una función $y = h(x, \mu)$ cuya gráfica es la variedad central, localmente alrededor del origen $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$, del sistema (1.2.7). Luego, la dinámica sobre esta variedad central está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, h(x, \mu), \mu) \\ \dot{\mu} &= 0,\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

y la ecuación (1.2.5) para determinar $h(x, \mu)$ se reduce a

$$\mathcal{N}(h(x, \mu)) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, \mu) (Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)) - Bh(x, \mu) - g(x, h(x, \mu), \mu) \equiv 0.\tag{1.2.9}$$

1.3. Formas Normales

La teoría de formas normales consiste en, dado un sistema no lineal

$$\dot{x} = X(x),$$

con $X(0) = 0$, buscar un cambio de coordenadas $x = y + h(y)$ tal que el sistema en las nuevas coordenadas tenga la expresión “más simple posible”.

Supongamos que el campo X ha sido desarrollado en serie de Taylor alrededor del equilibrio $x = 0$, y que, además, su parte lineal se encuentra en forma de Jordan,

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \dots,\tag{1.3.1}$$

donde $F_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r . Supongamos que el campo X posee términos no lineales de grado r en adelante, es decir,

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots. \quad (1.3.2)$$

Considere el cambio de coordenadas

$$x = y + h_r(y), \quad (1.3.3)$$

donde $h_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r , tal que $\|h_r(y)\| \ll 1$. La idea es encontrar h_r tal que, el sistema (1.3.2) en las nuevas coordenadas no posea términos de grado r . Derivando (1.3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} + Dh_r(y)\dot{y} \\ &= (I + Dh_r(y))\dot{y}, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

pero en $I + Dh_r(y)$ tenemos que $\|Dh_r(y)\| < 1^1$, entonces es una matriz invertible, tal que

$$(I + Dh_r(y))^{-1} = I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots,$$

luego, de (1.3.4) se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I + Dh_r(y))^{-1} \dot{x} \\ &= \left(I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots \right) (Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots). \end{aligned}$$

Pero $F_r(y + h_r(y)) = F_r(y) + DF_r(y)h_r(y) + \cdots$, luego entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \left(I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots \right) \left(J(y + h_r(y)) + F_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}) \right) \\ &= Jy + (F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}) \\ &= Jy + \tilde{F}_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}), \end{aligned}$$

donde $\tilde{F}_r(y) = F_r(y) - (Dh_r(y)Jy - Jh_r(y))$.

Observación 1.12 Observe que si el campo vectorial X posee términos no lineales a partir de orden r , entonces el cambio de coordenadas $x = y + h_r(y)$ produce un nuevo campo vectorial también con términos no lineales a partir de orden r .

Veamos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de h_r tal que $\tilde{F}_r = 0$. Considere el espacio vectorial H^r de los campos vectoriales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado r , y sea $L_J : H^r \rightarrow H^r$ el operador lineal dado por

$$L_J(h_r(y)) = Dh_r(y)Jy - Jh_r(y).$$

Tal operación se conoce como el *paréntesis de Lie* (o *corchete de Lie*) de los campos vectoriales Jy y $h_r(y)$. Basta probar que L_J es invertible, ya que $\tilde{F}_r = 0 \Leftrightarrow h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y))$.

¹Aquí $\|\cdot\|$ representa a la norma euclidiana, es decir, $\|A\| = \sqrt{|\lambda|}$, donde λ es el valor propio mayor de A .

1.3.1. Campos Vectoriales Equivalentes y Conjugados

A manera de motivación para entrar en el tema que nos concierne en esta sección, consideremos la siguiente situación: hemos obtenido la forma normal de un campo vectorial mediante una transformación de coordenadas, ahora bien ¿cómo modifica la dinámica del sistema original esta transformación de coordenadas?. Para contestar a esta pregunta, comenzaremos con una definición.

Sean

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3.5)$$

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3.6)$$

dos campos vectoriales C^r ($r \geq 1$), definidos sobre \mathbb{R}^n (o sobre un conjunto abierto suficientemente grande de \mathbb{R}^n).

Definición 1.13 *Las dinámicas generadas por los campos vectoriales f y g se dice que son C^k equivalentes ($k \leq r$), si existe un difeomorfismo $h \in C^k$ el cual toma órbitas del flujo generado por f , $\phi(t, x)$, en órbitas del flujo generado por g , $\psi(t, y)$, preservando la orientación pero no necesariamente la parametrización en el tiempo. Si h preserva además la parametrización en el tiempo, entonces las dinámicas generadas por f y g se dice que son C^k conjugadas.*

Observación 1.14 *El término “preservando la orientación” en la definición 1.13 refiere al hecho de que la dirección del movimiento a lo largo de una órbita es sin cambios bajo C^k equivalencia.*

Enunciaremos ahora, algunas de las consecuencias en las dinámicas de los campos vectoriales de la definición 1.13. Estos enunciados los haremos en forma de proposiciones cuyas demostraciones son relativamente sencillas y pueden ser estudiadas en [42]. Terminamos la sección enunciando otra consecuencia de la definición 1.13 la cual es el conocido teorema de Hartman-Grobman, cuya demostración puede ser analizada en [5] y [31]

Proposición 1.15 *Supongamos que f y g son C^k conjugados. Entonces*

- i) *Puntos fijos de f son mapeados en puntos fijos de g ;*
- ii) *Órbitas T -periódicas de f son mapeadas en órbitas T -periódicas de g .*

Proposición 1.16 *Supongamos que f y g son C^k conjugados ($k \geq 1$) y $f(x_0) = 0$; entonces $Df(x_0)$ tiene los mismos valores propios que $Dg(h(x_0))$.*

Las dos proposiciones previas trataron con C^k conjugación. Enseguida examinaremos las consecuencias de la C^k equivalencia bajo la suposición que el cambio en la parametrización en el tiempo a lo largo de las órbitas es C^1 . La validación de esta suposición debe ser verificada en cada aplicación específica.

Proposición 1.17 *Supongamos que f y g son C^k equivalentes; entonces*

- i) *Puntos fijos de f son mapeados en puntos fijos de g ;*
- ii) *Órbitas periódicas de f son mapeadas en órbitas periódicas de g , pero los períodos no necesariamente son iguales.*

Proposición 1.18 *Supongamos que f y g son C^k equivalentes ($k \geq 1$) y $f(x_0) = 0$; entonces los valores propios de $Df(x_0)$ y los valores propios que $Dg(h(x_0))$ difieren por el producto de una constante positiva.*

El teorema de Hartman-Grobman

Considérese un campo vectorial C^r ($r \geq 1$)

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3.7)$$

donde f es definida sobre un conjunto abierto de \mathbb{R}^n suficientemente grande. Supongamos que (1.3.7) tiene un punto fijo *hiperbólico* en $x = x_0$ (es decir, ninguno de los valores propios de $Df(x_0)$ está en el eje imaginario). Consideremos el campo vectorial asociado

$$\dot{\xi} = Df(x_0)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3.8)$$

Tenemos el siguiente

Teorema 1.19 *El flujo generado (1.3.7) es C^0 conjugado al flujo generado por (1.3.8) en una vecindad de el punto fijo $x = x_0$.*

1.4. Bifurcación de puntos fijos de campos vectoriales

Considérese el campo vectorial parametrizado

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (1.4.1)$$

donde g es una función C^r sobre algún conjunto abierto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. El grado de diferenciabilidad será determinado por nuestra necesidad de expansión de Taylor de (1.4.1). Usualmente es suficiente con C^5 .

Supongamos que (1.4.1) tiene un punto fijo en $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$, es decir, $g(y_0, \lambda_0) = 0$. Inmediatamente surgen dos preguntas

1. ¿El punto fijo es estable o inestable?
2. ¿Al variar λ como se afecta a la estabilidad o inestabilidad?

Para responder la pregunta 1., el primer paso es examinar el campo vectorial lineal asociado a (1.4.1) alrededor del punto fijo $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$. Este campo vectorial lineal es dado por

$$\dot{\xi} = Dg(\xi, \lambda)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4.2)$$

Si el punto fijo es hiperbólico (es decir, ninguno de los valores propios de $Dg(y_0, \lambda_0)$ está sobre el eje imaginario), sabemos que la estabilidad de (y_0, λ_0) en (1.4.1) es determinada por la ecuación lineal (1.4.2). Esto también nos permite responder la pregunta 2, por que como los puntos fijos hiperbólicos son estructuralmente estables, al hacer pequeñas variaciones de λ no se cambia la naturaleza de la estabilidad del punto fijo.

Supongamos que el punto fijo es *no hiperbólico*, es decir, $Dg(y_0, \lambda_0)$ tiene algún valor propio sobre el eje imaginario. En este caso, para cada λ “muy cercana” a λ_0 (y para y cercana a y_0), puede ocurrir una dinámica radicalmente diferente. Por ejemplo, puntos fijos pueden ser creados y destruidos y comportamientos dependientes del tiempo como dinámicas periódicas o cuasi-periódicas, dinámicas caóticas pueden ser creadas. En cierto sentido, entre más valores propios sobre el eje imaginario existan más exótica será la dinámica.

¿Qué es la bifurcación de un punto fijo?

El término *bifurcación* fue usado originalmente por Poincaré para describir la “división” de soluciones de equilibrio en una familia de ecuaciones diferenciales. Pero éste es un término extremadamente general. Podemos comenzar aprendiendo su uso en los sistemas dinámicos, entendiendo su uso en la descripción de las estructuras de órbitas cerca de puntos fijos no hiperbólicos. Si queremos aplicar el término bifurcación al ejemplo ?? para describir el cambio en la estructura de la órbita cuando μ pasa por cero, entonces esto nos lleva a la siguiente

Definición 1.20 *Un punto fijo $(x, \mu) = (0, 0)$ de una familia uni-paramétrica de campos vectoriales uni-dimensionales se dice que **experimenta** una bifurcación en $\mu = 0$ si el flujo para μ y x cerca de cero **no** es cualitativamente el mismo que el flujo cerca de $x = 0$ en $\mu = 0$.*

Observación 1.21 *Hablando prácticamente, un punto fijo (x_0, μ_0) de un campo vectorial uni-dimensional es un punto de bifurcación si, ya sea que una o más curvas de puntos fijos pasan a través de (x_0, μ_0) en el plano μx ; entonces éstas se quedan completamente sobre uno de los lados de la línea $\mu = \mu_0$ en el plano μx .*

Observación 1.22 *La condición de que el punto fijo se no hiperbólico es necesaria pero no es suficiente para que la bifurcación ocurra en una familia uni-paramétrica de campos vectoriales.*

En las siguientes secciones se usarán términos como *codimensión* y *desdoblamiento* en la discusión de bifurcaciones particulares. La codimensión de una bifurcación será la dimensión más pequeña del espacio de parámetros, los cuales contienen a la bifurcación. Un desdoblamiento de una bifurcación es una familia la cual contiene a la bifurcación. Más adelante se ampliarán estos conceptos.

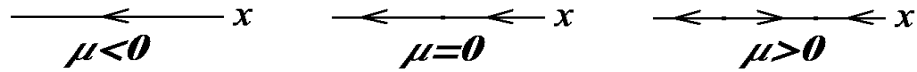


Figura 1.3: Retrato fase de la ecuación (1.5.1).

1.5. Bifurcaciones de codimensión uno

En esta sección describiremos las bifurcaciones más simples, las cuales son representadas por las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales que dependen todas sobre un parámetro real μ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 && \text{(silla-nodo),} \\ \dot{x} &= \mu x - x^2 && \text{(transcrítica),} \\ \dot{x} &= \mu - x^2 && \text{(horquilla),} \\ \begin{cases} \dot{x} &= -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{cases} &&& \text{(Hopf).} \end{aligned}$$

Aquí, haremos un breve estudio de sólo dos de estas cuatro bifurcaciones: la bifurcación silla-nodo y la bifurcación de Hopf.

1.5.1. Bifurcación silla-nodo

Consideremos el sistema unidimensional

$$\dot{x} = \mu \pm x^2. \quad (1.5.1)$$

(1.5.1) se dice que es la *forma normal* para la bifurcación silla-nodo. Para $\mu > 0$ existen dos puntos críticos $x = \pm\sqrt{\mu}$; $Df(x, \mu) = -2x$, $Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \mp\sqrt{\mu}$; y vemos que el punto crítico $x = \sqrt{\mu}$ es inestable, mientras que el punto $x = -\sqrt{\mu}$ es estable. Para $\mu = 0$, existe solamente un punto crítico $x = 0$ y es un punto crítico no hiperbólico, ya que $Df(0, 0) = 0$; el campo vectorial $f(x) = -x^2$ es estructuralmente inestable; y $\mu = 0$ es un valor de bifurcación. Para $\mu < 0$ no existen puntos críticos. El retrato fase para esta ecuación diferencial se muestra en la figura 1.3. Para $\mu > 0$ las variedades estable e inestable unidimensionales, están dadas por $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, \infty)$, $W^u(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, \sqrt{\mu})$, y para $\mu = 0$ la variedad central unidimensional $W^c(0) = (-\infty, \infty)$. Toda la información sobre la bifurcación es capturada en el diagrama de bifurcación dado por la figura 1.4.

1.5.2. Bifurcación de Hopf

Consideremos aquí un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1.5.2)$$

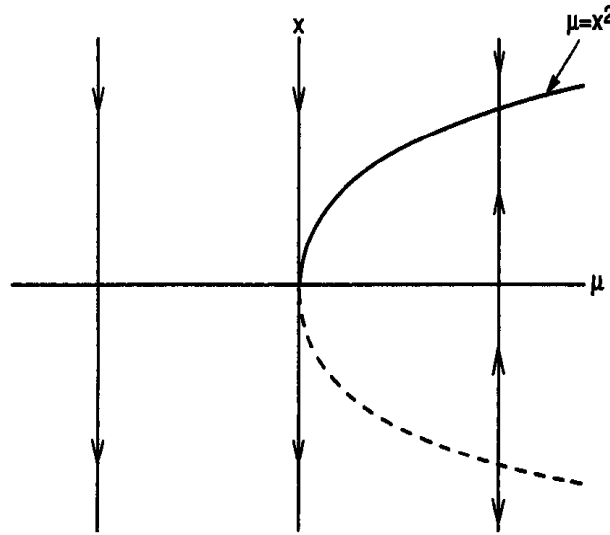


Figura 1.4: Diagrama de bifurcación para la bifurcación silla-nodo.

con $\mu = \mu_0$ y un punto de equilibrio $x = x_0$, en el cual $Df(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios puramente imaginarios, $\pm i\omega$, con $\omega > 0$ y ningún otro valor propio con parte real cero. El teorema de la función implícita garantiza (ya que $Df(x_0, \mu_0)$ es invertible) que para cada μ cerca de μ_0 existirá un punto de equilibrio $p(\mu)$ cerca de x_0 el cual varía suavemente con μ . No obstante las dimensiones de las variedades estable e inestable en $p(\mu)$ cambian si los valores propios de $Df(p(\mu))$ cruzan el eje imaginario en μ_0 . Este cambio cualitativo en el flujo local cerca de $p(\mu)$ se debe marcar por algunos otros cambios locales en los retratos fase que no implican puntos fijos.

Una pista de qué sucede en el problema genérico de la bifurcación que implica un equilibrio con valores propios imaginarios puros se puede obtener de examinar los sistemas lineales en los cuales hay un cambio de este tipo. Por ejemplo, considerar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \text{sen } \omega t \\ \text{sen } \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.4)$$

Cuando $\mu < 0$, las soluciones espirales convergen al origen, y cuando $\mu > 0$ las soluciones espirales se alejan del origen. Cuando $\mu = 0$, todas las soluciones son periódicas. Incluso en una familia uni-paramétrica de ecuaciones, es frecuente encontrar un valor del parámetro en el cual haya una familia completa de órbitas periódicas, más aún, hay una superficie de órbitas periódicas que aparece en el problema genérico (1.5.2).

Mediante cambios de coordenadas suaves, las series de Taylor de grado 3 (tomando

$k=1$), para el problema general puede ser trasladado a la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (d\mu + l_1(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y, \\ \dot{y} &= (\omega x + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + l_1(x^2 + y^2))y,\end{aligned}\quad (1.5.5)$$

la cual puede ser expresada en coordenadas polares como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (d\mu + l_1r^2)r, \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2.\end{aligned}\quad (1.5.6)$$

Como el lado derecho de la ecuación \dot{r} en (1.5.6) es independiente de θ , vemos que existen órbitas periódicas de (1.5.5) las cuales son círculos de radio $r = \text{constante}$, obtenidos de las soluciones diferentes de cero de $\dot{r} = 0$ en (1.5.6). Si $l_1 \neq 0$ y $d \neq 0$ (el teorema líneas abajo especifica quien es y que representa esta constante) esas soluciones permanecen a lo largo de la parábola $\mu = -l_1r^2/d$. Esto implica que la superficie de órbitas periódicas tiene una tangencia cuadrática con su plano tangente $\mu = 0$ en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. El teorema de la bifurcación de Hopf establece que las propiedades cualitativas de (1.5.5) cerca del origen permanecen sin cambio si se agregan los términos de orden superior al sistema:

Teorema 1.23 (*Teorema de la bifurcación de Hopf*) Supongamos que el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, tiene un punto de equilibrio (x_0, μ_0) tal que

(H1) $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros y ningún otro valor propio con parte real cero.

(H2) Sean $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ los valores propios de $D_x f(x_0, \mu)$ los cuales son imaginarios en $\mu = \mu_0$, tales que

$$d = \frac{d}{d\mu} (\text{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0. \quad (1.5.7)$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional que pasa por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suave para el cual la expansión de Taylor de grado tres sobre la variedad central, en coordenadas polares, es dada por

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (d\mu + l_1r^2)r, \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2.\end{aligned}$$

Si $l_1 \neq 0$, entonces existe una superficie de soluciones periódicas en la variedad central, la cual tiene tangencia cuadrática con el eigenespacio de $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$ que coincide en dimensión dos, con el paraboloido $\mu = -\frac{l_1}{d}r^2$. Si $l_1 < 0$, entonces, esas soluciones periódicas son estables, mientras que si $l_1 > 0$, son ciclos límite inestables.

Una prueba de este teorema está dada en [18].

Observación 1.24 Si $l_1 < 0$, se dice que la bifurcación de Hopf es Supercrítica, mientras que si $l_1 > 0$, se dice que la bifurcación de Hopf es Subcrítica. Los coeficientes de estabilidad d y l_1 son llamados velocidad de cruce y primer coeficiente de Lyapunov, respectivamente.

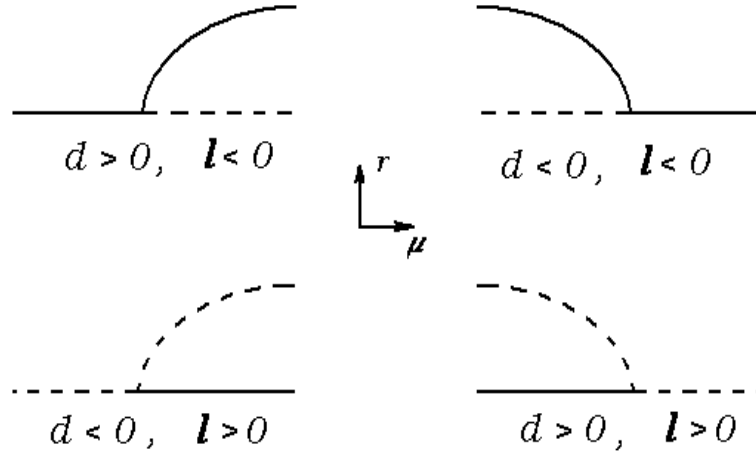


Figura 1.5: Direcciones y estabilidades de la bifurcación de Hopf

Como puede verificarse en [29], este teorema puede ser probado por una aplicación directa de los teoremas de la variedad central y de las formas normales que se estudiaron en las secciones anteriores.

Observación 1.25 *La dirección hacia donde abre la superficie de soluciones periódicas en la variedad central nos la proporciona el signo del producto $d \cdot l_1$, si $d \cdot l_1 > 0$ abre hacia la izquierda del valor de bifurcación, si $d \cdot l_1 < 0$ abre hacia la derecha del valor de bifurcación.*

Observación 1.26 *Como en la bifurcación silla-nodo, existen cuatro diferentes direcciones para la ocurrencia de la bifurcación de Hopf que dependen de los signos de d y l . Ver figura 1.5.*

Una de estas direcciones esta representada en la figura 1.5.2.

1.5.3. Primer coeficiente de Lyapunov

Existe una expresión en los sistemas bidimensionales, para encontrar el primer coeficiente de Lyapunov l_1 (ver [22]). Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x),$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$ con $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$. Entonces

$$l_1 = \frac{1}{16\omega}(R_1 + \omega R_2), \quad (1.5.8)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= [F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} \\ &\quad + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2}]|_{x=0}, \\ R_2 &= [F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2}]|_{x=0}. \end{aligned}$$

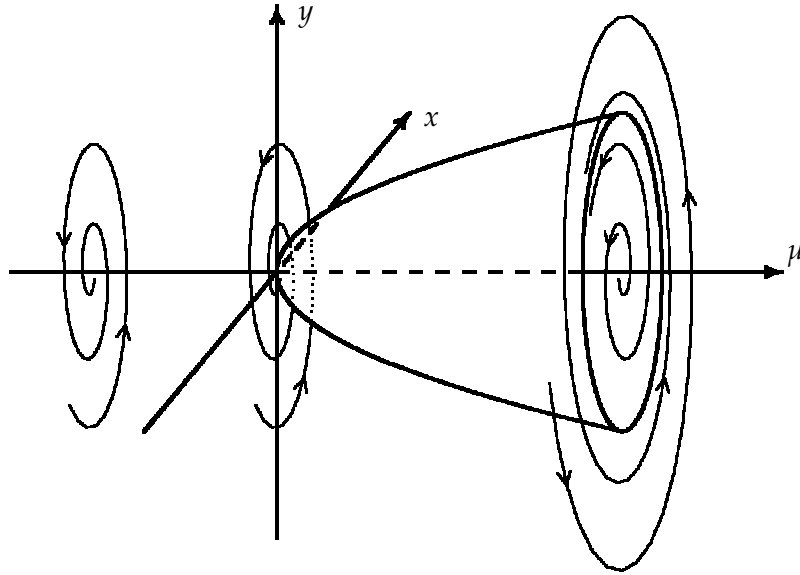


Figura 1.6: Familia uni-paramétrica de órbitas periódicas S resultantes de la bifurcación de Hopf, en un punto de equilibrio no hiperbólico x_0 y un valor de bifurcación $\mu = \mu_0$.

1.6. Deformación Versal

Consideremos los campos vectoriales

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{y} = g(y),$$

donde f, g son $C^r(V)$, con $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Diremos que f y g son C^k *topológicamente equivalentes* si existe un difeomorfismo $h \in C^k$, el cual toma órbitas de el flujo generado por f , en órbitas del flujo generado por g , preservándose la orientación pero no necesariamente la parametrización en el tiempo. Si h preserva la parametrización en el tiempo, entonces decimos que f y g son C^k *topológicamente conjugados*.

Considérese ahora los campos vectoriales "suaves"

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \lambda) \\ \dot{y} &= g(y, \mu), \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$, y $\mu \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que existen puntos de equilibrio tales que $f(x_0, \lambda_0) = 0$ y $g(y_0, \mu_0) = 0$. Diremos que los campos vectoriales l -paramétricos f y g son *topológicamente equivalentes* si existe un mapeo continuo $h : U \rightarrow V$, con U una vecindad de (x_0, λ_0) y V una vecindad de y_0 , con $h(x_0, \lambda_0) = y_0$, tal que, para cada $\lambda \approx \lambda_0$, $h_\lambda(\cdot) = h(\cdot, \lambda)$, es un homeomorfismo que exhibe la equivalencia topológica entre f y g . Si h_λ preserva la parametrización en el tiempo, diremos que f y g son *topológicamente conjugados*.

Diremos que el campo vectorial suave m -paramétrico

$$\dot{x} = v(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, con $v(x_0, \mu_0) = 0$, es inducido por (1.6.1) si existe un mapeo continuo $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, con $\varphi(\mu_0) = \lambda_0$, tal que

$$v(x, \mu) = f(x, \varphi(\mu)).$$

Definición 1.27 La familia de campos vectoriales suaves (1.6.1) es llamada una **deformación versal** de

$$\dot{x} = f(x, \lambda_0) \tag{1.6.2}$$

en el punto $x = x_0$, si cada familia m -paramétrica suave que se reduce a (1.6.2) para una elección particular de los parámetros es equivalente a una familia de campos vectoriales inducida por (1.6.1).

Ejemplo 1.28 Consideremos el campo vectorial en el plano

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \dots \tag{1.6.3}$$

Bogdanov [13] probó que, la forma normal truncada de (1.6.3)

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ az_1z_2 + bz_2^2 \end{pmatrix},$$

donde $ab \neq 0$, tiene la deformación versal

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \mu_1 + \mu_2z_1 + az_1z_2 + bz_2^2 \end{pmatrix},$$

mientras que Takens [35] probó que, la forma normal truncada de (1.6.3)

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 + az_1^2 \\ bz_1^2 \end{pmatrix},$$

donde $ab \neq 0$, tiene la deformación versal

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 + \mu_2z_1 + az_1^2 \\ \mu_1 + bz_1^2 \end{pmatrix}.$$

1.7. Teoría de Melnikov

La teoría de Melnikov nos provee de una herramienta analítica para establecer la existencia de trayectorias homoclínicas transversales a mapeos de Poincaré para órbitas periódicas de sistemas dinámicos perturbados. Empezaremos con un resultado para sistemas en el plano de la forma

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t) \tag{1.7.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ y g es periódica de período T en t . Note que el sistema puede ser escrito como un sistema autónomo en \mathbb{R}^3 definiendo $x_3 = t$. Supondremos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que $g \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$. Siguiendo a [22], pp. 184-188, haremos las siguientes suposiciones:

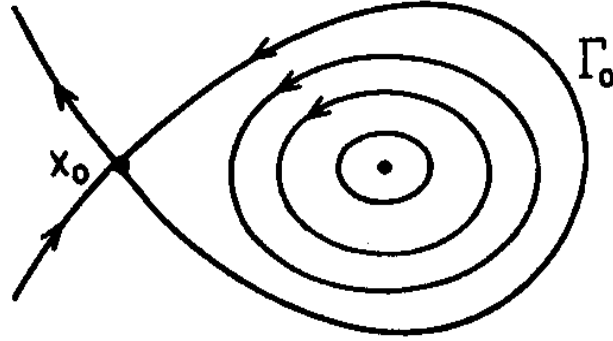


Figura 1.7: Retrato fase del sistema (1.7.1) no perturbado.

- A1. Para $\varepsilon = 0$ el sistema (1.7.1) tiene una órbita homoclínica $\Gamma_0 : x = \gamma_0(t)$, $-\infty < t < \infty$, en un punto silla hiperbólico x_0 y
- A2. Para $\varepsilon = 0$ el sistema (1.7.1) tiene una familia uni-paramétrica de órbitas periódicas $\gamma_\alpha(t)$ de período T_α en el interior de Γ_0 con $\frac{\partial \gamma_\alpha(0)}{\partial \alpha} \neq 0$; ver figura 1.7.

La función de Melnikov $M(t_0)$, entonces está definida como

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^t \nabla \cdot f(\gamma_0(s)) ds} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt \quad (1.7.2)$$

donde el producto \wedge de dos vectores u y $v \in \mathbb{R}^2$ es definido como $u \wedge v = u_1 v_2 - v_1 u_2$. Nótese que la función de Melnikov $M(t_0)$ es proporcional a la derivada del mapeo de Poincaré con respecto al parámetro ε en el interior de una vecindad del ciclo separatriz Γ_0 (o en una vecindad de un ciclo). Antes de establecer el resultado principal de Melnikov concerniente a la existencia de una órbita homoclínica transversa al mapeo de Poincaré, necesitamos el siguiente lema, el cual establece la existencia de una órbita periódica $\gamma_\varepsilon(t)$ de (1.7.1), y de aquí la existencia del mapeo de Poincaré P_ε , para (1.7.1) con ε suficientemente pequeño.

Lema 1.29 *Bajo la suposiciones A1 y A2, para ε suficientemente pequeño, (1.7.1) tiene una única órbita periódica hiperbólica $\gamma_\varepsilon(t) = x_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Correspondientemente, el mapeo de Poincaré P_ε tiene un único punto fijo hiperbólico del tipo silla $x_\varepsilon = x_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$.*

Teorema 1.30 *Bajo la suposiciones A1 y A2, si la función de Melnikov $M(t_0)$ definida por (1.7.2) tiene un cero simple en $[0, T]$ entonces para todo $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeño, las variedades estable e inestable $W^s(x_\varepsilon)$ y $W^u(x_\varepsilon)$ del mapeo de Poincaré P_ε se intersectan transversalmente; es decir, P_ε tiene una órbita homoclínica transversa. Y si $M(t_0) > 0$ (< 0) para toda t_0 entonces $W^s(x_\varepsilon) \cap W^u(x_\varepsilon) = \emptyset$.*

Las pruebas del lema y el teorema pueden ser analizadas en [22].

Observación 1.31 Si para $\varepsilon = 0$, (1.7.1) es un sistema Hamiltoniano, es decir, si

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T,$$

entonces $\nabla \cdot f = 0$ y la función de Melnikov toma la forma

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt. \quad (1.7.3)$$

Ahora, consideremos el sistema en el plano

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t, \mu) \quad (1.7.4)$$

donde el sistema no perturbado ($\varepsilon = 0$) es un sistema Hamiltoniano y $\mu = \mu(\varepsilon)$.

Teorema 1.32 Supongamos que A1 y A2 se satisfacen para (1.7.4). Si $M(t_0)$ dada por (1.7.3) tiene un cero simple, entonces para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, la órbita homoclínica persiste para (1.7.4).

1.7.1. Bifurcación homoclínica

Supongamos el campo vectorial (1.7.4) (donde el sistema no perturbado es un sistema Hamiltoniano), en este caso la función de Melnikov depende del parámetro μ , es decir la podemos escribir $M(t_0, \mu)$ y tenemos el siguiente teorema de bifurcación para la función de Melnikov.

Teorema 1.33 Si para (1.7.3), se satisface que $M(t_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial^2 M}{\partial t_0^2}(t_0, \mu_0) \neq 0$ y $\frac{\partial M}{\partial \mu}(t_0, \mu_0) \neq 0$, entonces para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeño, el sistema (1.7.3) experimenta una bifurcación homoclínica a partir del valor de bifurcación $\mu = \mu_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

La prueba de este teorema la pueden analizar en [42], pp. 715,716.

Capítulo 2

La bifurcación Takens-Bogdanov

En este capítulo, haremos una breve descripción y análisis de una de las bifurcaciones de codimensión dos más estudiada, la *bifurcación Takens-Bogdanov* también conocida como la bifurcación doble cero, esta información se puede consultar con más detalle en [18]. Tanto Floris Takens como Rifkat Bogdanov trabajaron esta bifurcación de manera independiente y casi simultánea, de ahí su nombre. La codimensión dos significa que basta con que varíen sólo dos parámetros para que la bifurcación ocurra.

Se sabe que un sistema en el plano

$$\dot{z} = f(z),$$

experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov, si tiene un punto fijo z_0 tal que la matriz Jacobiana evaluada en éste $Df(z_0)$ tiene un valor propio cero de multiplicidad dos, asumiendo además que se satisfacen algunas condiciones de no degeneración, las cuales mencionaremos más adelante.

Tres bifurcaciones de codimensión uno ocurren dentro de la bifurcación Takens-Bogdanov: la bifurcación silla-nodo, la bifurcación de Hopf y la bifurcación homoclínica. Esto es que todas las curvas asociadas con estas bifurcaciones concurren en la bifurcación Takens-Bogdanov.

Las formas normales truncadas que trabajaron Takens y Bogdanov respectivamente son:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 + az_1^2 \\ bz_1^2 \end{pmatrix}, \quad (2.0.1)$$

y

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ az_1^2 + bz_1z_2 \end{pmatrix}, \quad (2.0.2)$$

donde ambos consideraron el caso $ab \neq 0$. Ellos mostraron de manera independiente en [36, 14], que los términos de orden mayor o igual a tres no modifican la dinámica de estas formas normales, y por lo cual pueden ser truncadas hasta el orden dos. Mostraron también que las deformaciones versales para (2.0.1) y (2.0.2) son de la forma

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 + \mu_2z_1 + az_1^2 \\ \mu_1 + bz_1^2 \end{pmatrix}, \quad (2.0.3)$$

y

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \mu_1 + \mu_2z_1 + az_1^2 + bz_1z_2 \end{pmatrix}, \quad (2.0.4)$$

respectivamente.

Por otro lado, J. Guckenheimer y P. Holmes, trabajando con (2.0.2) demostraron que

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \mu_1 + \mu_2 z_2 + a z_1^2 + b z_1 z_2 \end{pmatrix}, \quad (2.0.5)$$

también es deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov.

2.1. Relación de equivalencia entre las deformaciones versales

2.1.1. Takens a Bogdanov

Dada la deformación versal (2.0.3) considerando $ab \neq 0$, si definimos

$$x_1 = \frac{4a}{b} \left(z_1 + \frac{\mu_2}{2a} \right), \quad x_2 = \frac{8a^3}{b^2} (z_2 + \mu_2 z_1 + a z_1^2),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{16a^4}{b^3} \left(\mu_1 + \frac{b\mu_2^2}{4a^2} \right) \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = -\frac{4a}{b}\mu_2,$$

se obtiene

$$\dot{x} = \frac{b}{2a} \begin{pmatrix} x_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_1 + x_1^2 + x_1 x_2 \end{pmatrix},$$

2.1.2. Bogdanov a Guckenheimer a Bogdanov

Dada la deformación versal (2.0.4) propuesta por Bogdanov para la bifurcación Takens-Bogdanov, donde consideramos $ab \neq 0$, definiendo la siguiente transformación de variables de estado y parámetros de bifurcación:

$$x = z_1 - \frac{\lambda_2}{b}, \quad y = z_2; \quad \mu_1 = \frac{a}{b^2}\lambda_2^2 + \lambda_1, \quad \mu_2 = -\frac{2a}{b}\lambda_2, \quad (2.1.1)$$

al sustituir (2.1.1) en (2.0.4), se obtiene la deformación versal propuesta por Guckenheimer, para la bifurcación Takens-Bogdanov:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \lambda_1 + \lambda_2 y + a x^2 + b x y. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

El regreso es más o menos similar, es decir, pasar de (2.1.2) a (2.0.4) lo logramos introduciendo ahora la transformación:

$$z_1 = x - \frac{1}{2a}\lambda_2, \quad z_2 = y; \quad \lambda_1 = \mu_1 - \frac{1}{4a}\mu_2^2, \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a}\mu_2. \quad (2.1.3)$$

Así, sustituyendo (2.1.3) en (2.1.2) se obtiene (2.0.4).

Por otro lado, si en (2.1.2) tomamos:

$$\tilde{\zeta}_1 = \frac{b^2}{a}x, \quad \tilde{\zeta}_2 = \frac{|b|^3}{|a|a}y, \quad t = \left| \frac{b}{a} \right| \tau, \quad \lambda_1 = \frac{a^3}{b^4}\epsilon_1, \quad \lambda_2 = \left| \frac{a}{b} \right| \epsilon_2,$$

y considerando " · " como la derivada con respecto a τ , entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\zeta}}_1 &= \tilde{\zeta}_2 \\ \dot{\tilde{\zeta}}_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \tilde{\zeta}_2 + \tilde{\zeta}_1^2 + \frac{a|b|}{|a|b} \tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_2, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

donde

$$\frac{a|b|}{|a|b} = \text{signo} \left(\frac{a}{b} \right),$$

por lo tanto, al sistema (2.1.4), lo podemos escribir también de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\zeta}}_1 &= \tilde{\zeta}_2 \\ \dot{\tilde{\zeta}}_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \tilde{\zeta}_2 + \tilde{\zeta}_1^2 \pm \tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_2. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Considerando + cuando $ab > 0$, y/o considerando – cuando $ab < 0$.

2.2. El diagrama de bifurcación y los retratos fase de la bifurcación Takens-Bogdanov

En esta sección analizaremos en detalle la bifurcación doble cero, la cual fué presentada al principio del capítulo.

Considérese una familia de campos vectoriales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \epsilon), \\ \dot{y} &= g(x, y, \epsilon), \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(x, y, \epsilon)$.

Supongamos que $\epsilon = 0$, (2.2.1) tiene un punto de equilibrio en $x = y = 0$ en el cual la matriz de la parte lineal es similar al bloque de Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, la forma normal de (2.2.1) para $\epsilon = 0$ es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ax^2 + bxy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Observemos aquí que la primera ecuación de la forma normal puede tener la forma $\dot{x} = y + \phi(x, y)$, $\phi = \mathcal{O}(|(x, y)|^3)$. Por un cambio de coordenadas en una pequeña vecindad del origen:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + \phi(x, y),$$

ésta puede ser transformada en (2.2.2).

Otra hipótesis básica en esta sección es $ab \neq 0$ en (2.2.2). Bajo esta condición, si hacemos el cambio de coordenadas y del tiempo

$$x \rightarrow \frac{a}{b^2}x, \quad y \rightarrow \frac{a^2}{b^3}y, \quad t \rightarrow \frac{b}{a}t,$$

la ecuación (2.2.2) es transformada en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

si $ab < 0$, entonces el tiempo se invierte. Si se desea mantener la dirección del movimiento, entonces (2.2.2) deberá transformarse en una ecuación que tenga la misma forma que (2.2.2) con $a = 1$, $b = \pm 1$. Aquí consideraremos el caso $b = 1$. El caso $b = -1$ puede ser discutido de manera similar.

Definición 2.1 Una familia de campos vectoriales (2.2.1) es llamada una deformación de (2.2.3) si para $\epsilon = 0$ ésta tiene la forma (2.2.3).

Bajo la hipótesis anterior podemos suponer que (2.2.1) es una familia de deformaciones de (2.2.3) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + w_1(x, y, \epsilon), \\ \dot{y} &= x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) + w_2(x, y, \epsilon), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 0$, $w_1, w_2 \in \mathcal{C}^\infty(x, y, \epsilon)$, y $w_i|_{\epsilon=0} = 0$, $i = 1, 2$.

La prueba de que la siguiente familia bi-paramétrica de campos vectoriales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

es una deformación versal de (2.2.3), el lector la puede encontrar en [18]. Este resultado no es obvio y su prueba fué dada originalmente en [13]-[14] y en [36].

El análisis de la bifurcación que estamos trabajando se divide en tres partes. En la primera parte estudiaremos el diagrama de bifurcación y los retratos fase de (2.2.5), en la segunda parte se reduce (2.2.4) a la forma canónica y en la tercera y última parte se estudia la “versatilidad” de (2.2.5). Aquí mostraremos la primera parte, la segunda y tercera parte se puede ver con gran detalle en [18]

2.2.1. El diagrama de bifurcación y los retratos fase del sistema (2.2.5)

Teorema 2.2 1. Existe una vecindad Δ de $\mu_1 = \mu_2 = 0$ en \mathbb{R}^2 tal que el diagrama de bifurcación de (2.2.5) dentro de Δ consiste del origen y de las siguientes curvas:

(a) $SN^+ = \{\mu | \mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$,

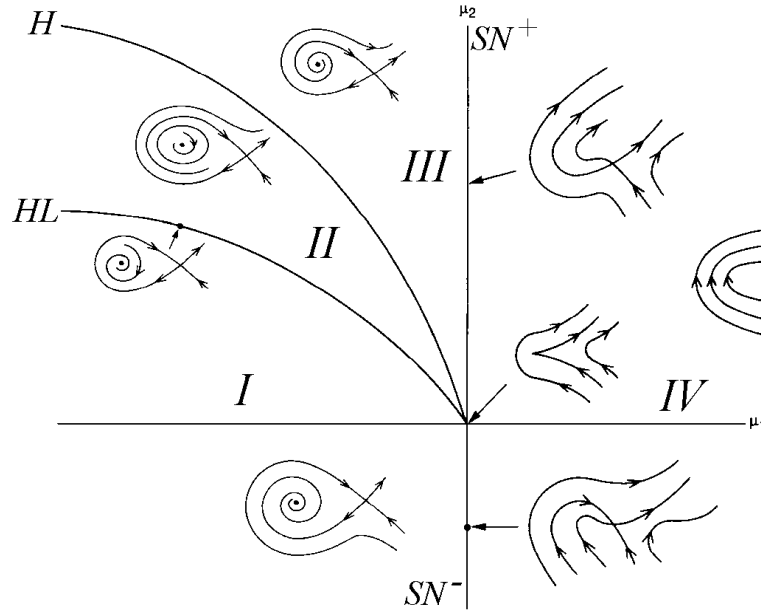


Figura 2.1: El diagrama de bifurcación y los retratos fase del sistema (2.2.5).

- (b) $SN^- = \{\mu | \mu_1 = 0, \mu_2 < 0\}$,
- (c) $H = \{\mu | \mu_1 = -\mu_2^2, \mu_2 > 0\}$,
- (d) $HL = \{\mu | \mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + \mathcal{O}(\mu_2^{5/2}), \mu_2 > 0\}$.

2. El diagrama de bifurcación y retratos fase de (2.2.5) para $\mu \in \Delta$ se muestran en la figura 2.1, donde las regiones I – IV son formadas por las curvas de bifurcación (a) – (d).

Una prueba del teorema 2.2 la daremos usando los siguientes lemas.

Lema 2.3 Existe una vecindad Δ_1 de $\mu_1 = \mu_2 = 0$ tal que SN^+ y SN^- son curvas de bifurcación silla-nodo, mientras que H es una curva de bifurcación de Hopf para el sistema (2.2.5). Además, si $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_1 \cap$ región II y cerca de H , entonces el sistema (2.2.5) tiene un único ciclo límite en una vecindad suficientemente pequeña del foco $(-\sqrt{-\mu_1}, 0)$. Por otra parte, éste es inestable, y tiende al foco cuando (μ_1, μ_2) tiende a un punto sobre H . Los retratos fase de (2.2.5) para $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_1 \cap \{\mu | \mu_1 \geq 0\}$ se muestran en la figura 2.1.

Prueba: Si $\mu_1 > 0$, entonces (2.2.5) no tiene puntos de equilibrio. Si $\mu_1 = 0$, entonces tiene un punto de equilibrio único $(x, y) = (0, 0)$ el cual es un punto silla para $\mu_2 \neq 0$, y es una cúspide para $\mu_2 = 0$. El retrato fase cerca de $(0, 0)$ para $\mu_1 \geq 0$ (ver [52] para los detalles en la obtención de los retratos fase). Finalmente, si $\mu_1 < 0$, entonces (2.2.5) tiene dos equilibrios $(x_{\pm}, 0)$, donde $x_{\pm} = \pm\sqrt{-\mu_1}$. La matriz de 2×2 de la ecuación linealizada en $(x_{\pm}, 0)$ es

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 2\sqrt{-\mu_1} & \mu_2 \pm \sqrt{-\mu_1} \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$\text{traza}(A_{\pm}) = \mu_2 \pm \sqrt{-\mu_1} \quad \text{y} \quad \det(A_{\pm}) = -(\mu_2 \pm \sqrt{-\mu_1}),$$

$(x_+, 0)$ es un punto silla y $(x_-, 0)$ es un foco inestable para $\mu_2 > \sqrt{-\mu_1}$ y un foco estable para $\mu_2 < \sqrt{-\mu_1}$. Por lo tanto, ocurre una bifurcación de Hopf a lo largo de la curva $H = \{\mu | \mu_1 = -\mu_2^2, \mu_2 > 0\}$, y ocurre una bifurcación silla-nodo a lo largo de las curvas SN^+ y SN^- y usando la fórmula (1.5.8), es fácil obtener que el primer coeficiente de Lyapunov es

$$l = \frac{1}{16\sqrt{-\mu_1}} > 0.$$

De aquí que el foco $(x_-, 0)$ es inestable para $\mu_2 = \sqrt{-\mu_1}$. Además, $(x_-, 0)$ será un foco estable rodeado por un ciclo límite inestable para $\mu_2 < \sqrt{-\mu_1}$ y $|\mu_2 - \sqrt{-\mu_1}| \ll 1$, y el ciclo tiende al foco cuando $(\mu_1, \mu_2) \rightarrow H$ (Teorema 1.23). \square

Para analizar el ciclo límite y la órbita homoclínica de (2.2.5), hagamos

$$\mu_1 = -\delta^4, \quad \mu_2 = \zeta\delta^2, \tag{2.2.6}$$

$$x \rightarrow \delta^2 x, \quad y \rightarrow \delta^3 y, \quad t \rightarrow \frac{t}{\delta} \quad (\delta > 0),$$

donde ζ y δ son parámetros nuevos. Entonces (2.2.5) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -1 + x^2 + \zeta\delta y + \delta xy. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Para $\delta = 0$, (2.2.7) es un sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -1 + x^2, \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

con primera integral

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} = h. \tag{2.2.9}$$

El retrato fase de (2.2.8) se muestra en la figura 2.2

Toda órbita cerrada de (2.2.8) rodeando $(-1, 0)$ corresponde a una curva de nivel $\Gamma_h = \{(x, y) | H(x, y) = h, -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}\}$. Γ_h se "encoge" al equilibrio $(-1, 0)$ cuando $h \rightarrow -\frac{2}{3}$, y tiende al ciclo homoclínico cuando $h \rightarrow \frac{2}{3}$.

Ahora consideremos (2.2.7) como una perturbación de (2.2.8) para un δ pequeño. Note que (2.2.7) tiene dos equilibrios: El punto $A(1, 0)$ es un punto silla, y el punto $B(-1, 0)$ es un punto de equilibrio con índice +1 para cada δ y ζ . De aquí que cada órbita cerrada de (2.2.7) debe cortar el segmento de línea $L = \{(x, y) | y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$ y rodear el punto B .

Por otro lado, para cada $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, Γ_h (la órbita de (2.2.8)) intersecta L en exactamente un punto $P_h(x(h), 0)$. Por lo tanto, el segmento L puede ser parametrizado por $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

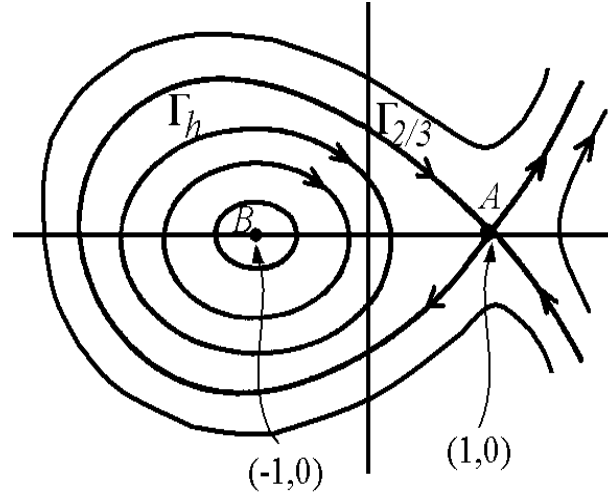


Figura 2.2: Retrato fase del sistema (2.2.8).

Para cada $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, consideremos la trayectoria de (2.2.7) que pasa a través del punto $P_h(x(h), 0) \in L$. Vaya esta trayectoria hacia adelante y hacia atrás hasta que interseque el eje x negativo en el punto Q_2 y Q_1 , respectivamente (figura 2.3). Denotaremos el pedazo de trayectoria de Q_1 a Q_2 por $\gamma(h, \delta, \zeta)$. Para $h = +\frac{2}{3}$, tomamos las posiciones límite de γ usando las variedades estable e inestable en A .

Lema 2.4 $\gamma(h, \delta, \zeta)$ es una órbita periódica de (2.2.7) si y sólo si

$$F(h, \delta, \zeta) = \int_{\gamma(h, \delta, \zeta)} (\zeta + x)y dx = 0. \quad (2.2.10)$$

Además, el sistema (2.2.7) tiene una órbita homoclínica si y sólo si (2.2.10) se satisface para $h = \frac{2}{3}$.

Prueba: $\gamma(h, \delta, \zeta)$ es una órbita periódica si y sólo si $Q_1 = Q_2$. De (2.2.9) tenemos que

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = 1 - x^2 \neq 0, \quad \text{if } |x| \neq 1.$$

De aquí, $Q_1 = Q_2$ si y sólo si $H(Q_1) = H(Q_2)$.

Por otro lado, a lo largo de la órbita de (2.2.7) tenemos que

$$\left. \frac{dH(x, y)}{dt} \right|_{(2.2.7)} dt = \delta(\zeta + x)y^2 \Big|_{(2.2.7)} dt = \delta(\zeta + x)y dx.$$

Esto implica que

$$H(Q_2) - H(Q_1) = \int_{t(Q_1)}^{t(Q_2)} \left. \frac{dH}{dt} \right|_{(2.2.7)} dt = \delta \int_{\gamma(h, \delta, \zeta)} j(\zeta + x)y dx. \quad (2.2.11)$$

Esto nos da el resultado deseado. El caso homoclínico puede ser obtenido tomando el límite cuando $h \rightarrow \frac{2}{3} - 0$ (ver el lema (2.5)). \square

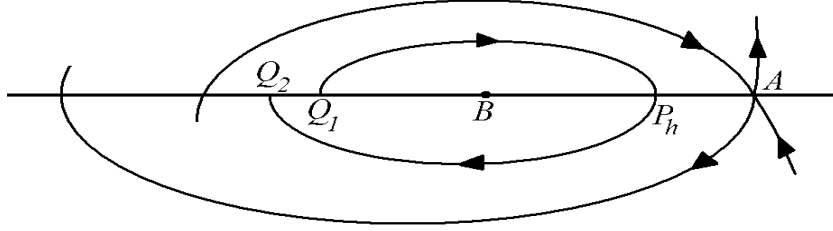


Figura 2.3:

Lema 2.5 (Bogdanov [13]) Existe $\delta_0 > 0$ tal que la función $F(h, \delta, \zeta)$ dada por (2.2.10) es continua en el conjunto

$$U = \{(h, \delta, \zeta) \mid -\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}, 0 \leq \delta \leq \delta_0, \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2\},$$

donde $\zeta_1 < \zeta_2$ son constantes arbitrarias. Además F es C^∞ en δ y ζ sobre U , y C^∞ en h sobre el conjunto

$$V = \{(h, \delta, \zeta) \mid -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}, 0 \leq \delta \leq \delta_0, \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2\}.$$

Prueba: Del resultado sobre la dependencia continua y diferenciable de soluciones sobre condiciones iniciales y parámetros, sabemos que $F \in C^0$ en U y $F \in C^\infty$ en V . Para probar que es C^∞ en δ y ζ con $h = -\frac{2}{3}$, podemos usar el teorema de Andronov et al. [4] acerca de la dependencia suave de soluciones sobre parámetros cerca de un foco. Para probar $F \in C^\infty$ en δ y ζ con $h = \frac{2}{3}$, podemos usar el teorema de Shoshitaishvili [34] acerca de la dependencia suave de la separatriz sobre los parámetros.

Consideraremos $F(h, \delta, \zeta)$ como una perturbación de $F(h, 0, \zeta)$ y esta última es dada por

$$F(h, 0, \zeta) = \zeta I_0(h) + I_1(h), \quad (2.2.12)$$

donde $I_i(h) = \int -\Gamma_h x^i y dx$, $i = 0, 1$, y Γ_h es la curva de nivel de $H(x, y) = h$. La orientación de Γ_h es determinada por la dirección del campo vectorial (2.2.89). Por la fórmula de Green

$$I_0(h) = \int_{\Gamma_h} y dx = \int \int_{D(h)} dx dy > 0, \quad h \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right],$$

where $D(h)$ es la región encerrada por Γ_h . Es fácil mostrar que $\lim_{h \rightarrow -2/3} I_0(h) = \lim_{h \rightarrow -2/3} I_1(h) = 0$. Por el Teorema del Valor Medio para integrales, tenemos

$$\lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{I_1(h)}{I_0(h)} = \lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{\int \int_{D(h)} x dx dy}{\int \int_{D(h)} dx dy} = \lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}} \bar{x}(h) = -1,$$

donde $(\bar{x}(h), \bar{y}(h)) \in D(h)$ y $D(h)$ colapsa al punto $(-1, 0)$ cuando $h \rightarrow -\frac{2}{3}$.

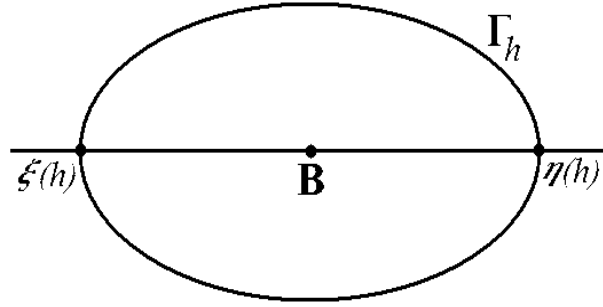


Figura 2.4:

Ahora definamos

$$P(h) = \begin{cases} -\frac{I_1(h)}{I_0(h)}, & -\frac{2}{3} < h \leq \frac{2}{3}, \\ 1, & h = -\frac{2}{3}. \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Esta función es continua en $h \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$.

Observemos aquí que por el lema 2.4, para determinar la existencia y el número de órbitas periódicas para (2.2.7), solamente necesitamos estudiar la existencia y el número de ceros para la función $F(h, \delta, \zeta)$ con respecto a $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Por otro lado, $F(h, \delta, \zeta)$ puede ser aproximada por $F(h, 0, \zeta) = I_0(h)(\zeta - P(h))$. De aquí, el comportamiento de la función $P = P(h)$ como un radio de dos integrales Abelianas, es crucial en nuestra discusión.

Lema 2.6 Si $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$, entonces $P(h)$ satisface la ecuación de Riccati

$$(9h^2 - 4)P'(h) = 7P^2 + 3hP - 5. \quad (2.2.14)$$

Prueba: Tenemos que

$$I_i(h) = \int_{\Gamma_h} x^i y dx = 2 \int_{\xi(h)}^{\eta(h)} x^i y dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2.15)$$

donde $\eta(h)$ y $\xi(h)$ se muestran en la figura 2.4 y

$$y = \left[2 \left(h - x + \frac{x^3}{3} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.16)$$

De (2.2.9), obtenemos que

$$I_i'(h) = 2 \int_{\xi(h)}^{\eta(h)} \frac{x^i}{y} dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.17)$$

Usando (2.2.15), (2.2.16) y (2.2.25), tenemos

$$I_i(h) = 2 \int_{\xi(h)}^{\eta(h)} \frac{x^i y^2}{y} dx = 2hI'_i(h) - 2I'_{i+1}(h) + \frac{2}{3}I'_{i+3}(h). \quad (2.2.18)$$

Por otro lado, una integración por partes muestra que

$$I_i(h) = 2 \left[\frac{x^{i+1}}{i+1} y \Big|_{\xi(h)}^{\eta(h)} - \frac{1}{i+1} \int_{\xi(h)}^{\eta(h)} \frac{x^{i+1}(x^2-1)}{y} dx \right].$$

Como $y(\xi(h), h) = y(\eta(h), h) = 0$, obtenemos por (2.2.25) que

$$I_i(h) = \frac{1}{i+1} (I'_{i+1}(h) - I'_{i+3}(h)). \quad (2.2.19)$$

Quitando $I'_{i+3}(h)$ de (2.2.18) y (2.2.19), tenemos

$$(2i+5)I_i(h) = -4I'_{i+1}(h) + 6hI'_i(h).$$

En particular, tenemos

$$\begin{cases} 5I_0 &= -4I'_1 + 6hI'_0, \\ 7I_1 &= -4I'_2 + 6hI'_1. \end{cases} \quad (2.2.20)$$

Pedimos que $I_2(h) \equiv I_0(h)$. De hecho, de (2.2.9) $dH = y dy + (1-x^2) dx$, es decir,

$$(1-x^2)y dx = y dH - y^2 dy. \quad (2.2.21)$$

Entonces (2.2.20) se convierte en

$$\begin{cases} 5I_0 &= 6hI'_0 - 4I'_1, \\ 7I_1 &= -4I'_0 + 6hI'_1. \end{cases} \quad (2.2.22)$$

Para $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$, (2.2.22) es equivalente a la siguiente ecuación de Picard-Fuchs

$$\begin{cases} (9h^2-4)I'_0 &= \frac{15}{2}hI_0 + 7I_1, \\ (9h^2-4)I'_1 &= 5I_0 + \frac{21}{2}hI_1. \end{cases} \quad (2.2.23)$$

Es fácil obtener (2.2.14) de (2.2.23), (2.2.13), y de la siguiente ecuación

$$P'(h) = \frac{1}{I'_0} (I'_0 I_1 - I'_1 I_0). \quad \square$$

Lema 2.7 $P(h)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\lim_{h \rightarrow \frac{2}{3}} P(h) = \frac{5}{7}$;
2. $P'(h) < 0$ para $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$, $P'(h) \rightarrow -\frac{1}{8}$ cuando $h \rightarrow -\frac{2}{3}$, y $P'(h) \rightarrow -\infty$ cuando $h \rightarrow \frac{2}{3}$.

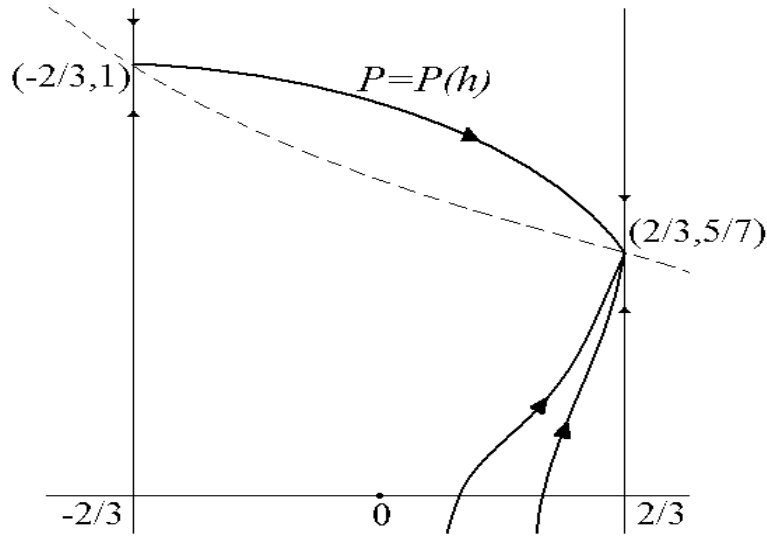


Figura 2.5:

Prueba: $P(h)$ es una solución de (2.2.14) y $P(h) \rightarrow 1$ cuando $h \rightarrow -\frac{2}{3}$. Reescribimos (2.2.14) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -7P^2 - 3hP + 5, \\ \frac{dh}{dt} &= -9h^2 + 4. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

La gráfica de $P(h)$ es la órbita heteroclínica que va del punto silla $(-\frac{2}{3}, 1)$ al nodo $(\frac{2}{3}, \frac{5}{7})$ en el plano (h, P) (ver figura 2.5). Así $P(h) \rightarrow \frac{5}{7}$ cuando $h \rightarrow \frac{2}{3}$.

$$I_i'(h) = 2 \int_{\xi(h)}^{\eta(h)} \frac{x^i}{y} dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.25)$$

La gráfica de la ecuación

$$7P^2 + 3hP - 5 = 0 \quad (2.2.26)$$

tiene dos ramas de curvas sobre las cuales la dirección del campo vectorial (2.2.24) es horizontal. La rama de la hipérbola (2.2.26) arriba del eje h es dada por

$$C_q : q(h) = \frac{1}{4} \left[-3h + (9h^2 + 140)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.2.27)$$

A lo largo de la curva C_q tenemos $P'(h) = 0$ y $q'(h) = -\frac{3q^2}{7q^2} + 5$. De aquí que el campo vectorial (2.2.24) es transversal a C_q de izquierda a derecha para $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$. Esto se sigue de (2.2.14) y (2.2.27) que

$$\lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}} P'(h) = -\frac{1}{8} \quad \text{y} \quad q'(-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la gráfica de $P(h)$ está totalmente arriba de C_q , esto es que $P'(h) < 0$ para $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$. El hecho que $P'(h) \rightarrow -\infty$ cuando $h \rightarrow \frac{2}{3}$ puede ser obtenido directamente de (2.2.14). \square

Ahora, usando las propiedades de $P(h)$, continuaremos con la prueba del Teorema 2.2.

Lema 2.8 *Existe una vecindad Δ_2 de $\mu_1 = \mu_2 = 0$, tal que para $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2$ existe una curva $HL = \left\{ \mu \mid \mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + \mathcal{O}\left(\mu_2^{\frac{5}{2}}\right), \mu_2 > 0 \right\}$ la cual es una curva de bifurcación homoclínica de (2.2.5).*

Prueba: Por el lema 2.4 y (2.2.10), la condición de existencia de la órbita homoclínica de (2.2.7) es: $F(\frac{2}{3}, \delta, \zeta) = 0$. De (2.2.12), (2.2.13) y el lema 2.7, $F(\frac{2}{3}, 0, \zeta_0) = 0$, donde $\zeta_0 = P(\frac{2}{3}) = \frac{5}{7}$, y $\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\frac{2}{3}, 0, \zeta) = I_0(\frac{2}{3}) > 0$. Por el teorema de la función implícita, existe $\delta_0 > 0$ y una función $\zeta = \zeta(\delta)$, definida para $0 \leq \delta < \delta_0$, tal que $F(\frac{2}{3}, \delta, \zeta(\delta)) = 0$, esto es que $\gamma(\frac{2}{3}, \delta, \zeta(\delta))$ es una órbita homoclínica.

Usando (2.2.6), podemos cambiar el parámetro (δ, ζ) y regresar a (μ_1, μ_2) para obtener la ecuación de la curva de bifurcación.

De hecho, $\mu_2 = \zeta\delta^2$ y $\zeta(\delta) = \zeta_0(1 + \mathcal{O}(\delta)) = \frac{5}{7}(1 + \mathcal{O}(\delta))$ implica que $\delta = \mathcal{O}(\mu_2^{\frac{1}{2}})$ cuando $\mu_2 \rightarrow 0^+$. En suma $\mu_1 = -\delta^4$ y $\mu_2 = \zeta\delta^2$ implican que

$$\mu_1 = -\frac{\mu_2^2}{\zeta^2(\delta)} = -\frac{\mu_2^2}{\zeta_0^2}(1 + \mathcal{O}(\delta)) = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + \mathcal{O}\left(\mu_2^{\frac{5}{2}}\right),$$

donde $\mu_2 > 0$ y $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2 = \{(\mu_1, \mu_2) \mid |\mu_1| + |\mu_2| \leq \delta_0^4\}$. Esto completa la prueba del lema. \square

Lema 2.9 *Para un $h_1 \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ dado, existe $\delta_1 > 0$ y una única función $\zeta = \zeta_1(h, \delta)$ definida en $h \in [h_1, \frac{2}{3}]$, $0 \leq \delta \leq \delta_1$, tal que*

(1⁰) *la trayectoria $\gamma(h, \delta, \zeta_1(h, \delta))$, $h_1 \leq h < \frac{2}{3}$ y $0 < \delta \leq \delta_1$, es una órbita periódica de (2.2.7); y*

(2⁰) $\frac{\partial \zeta_1}{\partial h} < 0$, $h_1 \leq h < \frac{2}{3}$, $0 < \delta \leq \delta_1$.

Prueba: Notemos de (2.2.12) que

$$F(h, \delta, \zeta)|_{\delta=0} = I_0(h)\zeta + I_1(h) = I_0(h)(\zeta - P(h)), \quad (2.2.28)$$

donde $P(h)$ está definida en (2.2.13). De aquí, para cada $h^* \in [h_1, \frac{2}{3}]$ tenemos

$$F(h^*, 0, P(h^*)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} \Big|_{\delta=0} = I_0(h^*) > 0.$$

Por el teorema de la función implícita existe $\delta^* > 0$, $\sigma^* > 0$, y una función $\zeta = \zeta^*(h, \delta)$ definida en $0 \leq \delta \leq \delta^*$ y $h^* - \sigma^* < h < h^* + \sigma^*$ (si $h^* = \frac{2}{3}$, entonces consideramos el intervalo $h^* - \sigma < h \leq h^*$) tal que

$$F(h, \delta, \zeta^*(h, \delta)) = 0.$$

Esto significa que $\gamma(h, \delta, \zeta^*(h, \delta))$ es una órbita periódica de (2.2.7).

Entonces, por compacidad de $[h_1, \frac{2}{3}]$, existe $\delta_1 > 0$ y una función $zeta = \zeta_1(h, \delta)$ definida para $0 \leq \delta \leq \delta_1$, $h_1 \leq h \leq \frac{2}{3}$ tal que

$$\zeta_1(h, 0) = P(h), \quad F(h, \delta, \zeta_1(h, \delta)) = 0, \quad (2.2.29)$$

es decir, la trayectoria $\gamma(h, \delta, \zeta_1(h, \delta))$ es una órbita periódica de (2.2.7) que pasa por el punto $(x, y) = (x(h), 0)$.

Como $F \in C^\infty$ para toda δ , ζ , y $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$ (lema 2.5), obtenemos de (2.2.29), (2.2.28) y el lema 2.7 que

$$\frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial h} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \zeta_1} \right|_{\delta=0} = I_0(h) > 0,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{\delta=0, \zeta=\zeta_1(h,0)} = I'_0(h)(\zeta_1(h,0) - P(h)) - I_0(h)P'(h) > 0.$$

Esto implica que (nótese que $I'_0(h)$ es finita para $-\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}$)

$$\left. \frac{\partial \zeta_1(h, \delta)}{\partial h} \right|_{\delta=0} < 0, \quad h_1 \leq h < \frac{2}{3}, \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial \zeta_1(h, \delta)}{\partial h} \right|_{\delta=0} \rightarrow -\infty, \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow \frac{2}{3}.$$

De aquí, podemos elegir δ_1 suficientemente pequeño, tal que

$$\frac{\partial \zeta_1(h, \delta)}{\partial h} < 0, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_1, \quad h_1 \leq h \leq \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto, para cualquier $\delta_0 \in (0, \delta_1)$ y $\delta_0 \in (\zeta(\delta_0), P(h_1))$, donde $\zeta(\delta) = \frac{5}{7}(1 + \mathcal{O}(\delta))$ es la función definida en el lema 2.8, existe un único $h_0 \in (h_1, \frac{2}{3})$ tal que $\zeta_0 = \zeta_1(h_0, \delta_0)$.

De aquí

$$F(h_0, \delta_0, \zeta_0) = 0, \quad (2.2.30)$$

es decir, $\gamma(h_0, \delta_0, \zeta_0)$ es una órbita periódica para (2.2.7).

Por otro lado, consideremos la trayectoria $\gamma(h, \delta_0, \zeta_0)$ para h cerca de h_0 . De (2.2.11) y (2.2.30) tenemos

$$H(Q_2) - H(Q_1) = \delta F(h, \delta_0, \zeta_0) = \delta \left[\left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{(\bar{h}, \delta_0, \zeta_0)} \cdot (h - h_0) \right], \quad (2.2.31)$$

donde Q_1 y Q_2 son los puntos de intersección de $\gamma(h, \delta_0, \zeta_0)$ y el eje- x (ver figura 2.3), y \bar{h} está entre h_0 y h . Como $\frac{\partial F}{\partial h} > 0$ para δ suficientemente pequeña, (2.2.31) implica que la órbita periódica $\gamma(h_0, \delta_0, \zeta_0)$ es un ciclo límite inestable. \square

Lema 2.10 Existe $h_2 \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\delta_2 > 0$ y una única función $\zeta = \zeta_2(h, \delta)$ definida para $-\frac{2}{3} \leq h \leq h_2$, $0 \leq \delta \leq \delta_2$ tal que

- (i) si $\zeta = \zeta_2(h, \delta)$, $-\frac{2}{3} < h \leq h_2$ y $0 < \delta \leq \delta_2$, entonces el sistema (2.2.7) tiene un ciclo límite inestable $\gamma(h, \delta, \zeta_2(h, \delta))$ que pasa a través del punto $(x(h), 0)$;
- (ii) $\frac{\partial \zeta}{\partial h} < 0$, $-\frac{2}{3} < h \leq h_2$, $0 \leq \delta \leq \delta_2$.

Prueba: La ecuación linealizada de (2.2.7) en el foco $(-1, 0)$ tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \delta(\zeta - 1) \end{pmatrix}. \quad (2.2.32)$$

Los valores propios en $(-1, 0)$ son

$$\frac{1}{2} \left\{ \delta(\zeta - 1) \pm i [8 - \delta^2(\zeta - 1)^2]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

De aquí las condiciones del teorema de Hopf 1.23 son satisfechas y la velocidad de cruce $d > 0$.

A continuación, usaremos la fórmula (1.5.8) y obtenemos que el primer coeficiente de Lyapunov $l = \frac{1}{32}(\delta - 2\delta^2) > 0$.

Por el teorema 1.23 podemos encontrar $\bar{x} > -1$, $\delta_2 > 0$, y una función $\zeta = \bar{\zeta}_2(x, \delta)$ definida para $-1 \leq x \leq \bar{x}$, $0 \leq \delta \leq \delta_2$ tal que $\gamma(h, \delta, \bar{\zeta}_2(x, \delta))$ es una órbita periódica de (2.2.7) que pasa a través del punto $(x, 0)$. Además como $d \cdot l > 0$, tenemos que

$$\frac{\partial \bar{\zeta}_2}{\partial x} < 0, \quad -1 \leq x \leq \bar{x}, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_2. \quad (2.2.33)$$

De (2.2.9) tenemos que $x = x(h)$ satisface $x - \frac{1}{3}x^3 = h$. Entonces

$$\frac{\partial x(h)}{\partial h} > 0, \quad \text{para} \quad -\frac{2}{3} \leq h < \frac{2}{3}. \quad (2.2.34)$$

Si tomamos h_2 como el valor que satisface $x(h_2) = \bar{x}$, entonces $-\frac{2}{3} < h_2 < \frac{2}{3}$.

Sea

$$\zeta_2(h, \delta) = \bar{\zeta}_2(x(h), \delta). \quad (2.2.35)$$

Entonces concluimos que (i) se cumple.

De (2.2.35), (2.2.33) y (2.2.34), tenemos que

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial h} = \frac{\partial \bar{\zeta}_2}{\partial x} \cdot x'(h) < 0, \quad -\frac{2}{3} < h < h_2, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_2,$$

y entonces concluimos que (ii) se cumple. \square

Lema 2.11 Existe una vecindad Δ_3 de $\mu_1 = \mu_2 = 0$, tal que si $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_3$ y está entre las curvas H y HL (definidas en los lemas 2.3 y 2.8 respectivamente), el sistema (2.2.5) tiene una única órbita periódica y es un ciclo límite inestable. Además, cuando (μ_1, μ_2) tiende a H , el ciclo límite colapsa en el foco; cuando (μ_1, μ_2) tiende a HL , el ciclo límite tiende al ciclo homoclínico. El sistema (2.2.5) no tiene ciclos límite si $(\mu_1, \mu_2) \in (H \cup HL) \cap \Delta_3$.

Prueba: En lugar de (2.2.5) primero consideremos (2.2.7).

Por el lema 2.10, existe $h_2 \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\delta_2 > 0$, y una función $\zeta = \zeta_2(h, \delta)$ definida en $-\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}$, $0 \leq \delta \leq \delta_2$ con las propiedades (i) y (ii).

Si elegimos $h_1 \in (-\frac{2}{3}, h_2)$, entonces por el lema 2.9 existe $\delta_1 > 0$ y una única función $\zeta = \zeta_1(h, \delta)$ definida en $h_1 \leq h \leq \frac{2}{3}$, $0 \leq \delta \leq \delta_1$ con las propiedades (1⁰) y (2⁰).

Ahora, sea $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$. Entonces por la unicidad de $\zeta_1(h, \delta)$ tenemos que

$$\zeta_1(h, \delta) \equiv \zeta_2(h, \delta), \quad h_1 \leq h \leq h_2, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_3.$$

Así, podemos definir una función en el intervalo completa $-\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}$ como sigue

$$\zeta = \zeta_3(h, \delta) = \begin{cases} \zeta_2(h, \delta) & \text{si } -\frac{2}{3} \leq h \leq h_2, \\ \zeta_1(h, \delta) & \text{si } h_2 \leq h \leq \frac{2}{3}, \end{cases} \quad 0 \leq \delta \leq \delta_3,$$

la cual satisface

1. $\gamma(h, \delta, \zeta_3(h, \delta))$ es una órbita periódica de (2.2.7) que pasa a través del punto $(x(h), 0)$, $-\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}$;
2. $\frac{\partial \zeta_3}{\partial h} < 0$, $-\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}$, $0 \leq \delta \leq \delta_3$.

La condición 2 implica que para cada $\delta_0 \in (0, \delta_3)$ y $\zeta_0 \in [\zeta(\delta_0), 1]$, donde $\zeta = \zeta(\delta)$ es la función correspondiente a la bifurcación homoclínica y descrita en el lema 2.8, existe una única $h_0 \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ tal que $\zeta_0 = \zeta_3(h_0, \delta_0)$. Así, si $\zeta_0 \in (\zeta(\delta_0), 1)$ entonces $\gamma(h_0, \delta_0, \zeta_0)$ es la única órbita periódica de (2.2.7). Además, ésta es un ciclo límite inestable. Si $\zeta_0 \rightarrow \zeta(\delta_0) + (o -)$, entonces el ciclo límite tiende al ciclo homoclínico (o al foco).

Finalmente regresemos a los parámetros μ_1 y $\mu - 2$ usando el reescalamiento (2.2.6).

Como $\mu_1 = -\delta^4$, $\mu_2 = \zeta \delta^2$, la región $0 < \delta \leq \delta_3$, $\zeta(\delta) \leq \zeta \leq 1$ a una región cúspide $0 > \mu_1 \geq -\delta_3^4$ y (μ_1, μ_2) está entre las curvas de bifurcación H y HL (ver figura 2.6). Notando que $\zeta_3(-\frac{2}{3}, \delta) = 1$, $\zeta_3(\frac{2}{3}, \delta) = \zeta(\delta)$ (definida en el lema 2.8), y $\frac{\partial \zeta_3}{\partial h} < 0$, concluimos que el ciclo límite colapsará en el foco o se convertirá en un ciclo homoclínico cuando (μ_1, μ_2) se dirija a H o HL respectivamente. La existencia de δ_3 garantiza la existencia de la vecindad Δ_3 . Esto completa la prueba.

Lema 2.12 *Existe una vecindad Δ_4 de $\mu_1 = \mu_2 = 0$, tal que si $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_4$ y está arriba de la curva H o abajo de la curva HL , entonces el sistema (2.2.5) no tiene órbitas periódicas y tiene el retrato fase mostrado en la figura 2.1.*

Prueba: Por el lema 2.11 sabemos que si $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_3 \cap (H \cup HL)$, entonces el sistema (2.2.5) no tiene órbitas periódicas y cualquier trayectoria positiva γ que nace en el punto $p \in L = \{(x, y) | -1 < x < 1, y = 0\}$ es una espiral en expansión si $(\mu_1, \mu_2) \in H$ o una espiral en contracción si $(\mu_1, \mu_2) \in HL$ (ver figura 2.1).

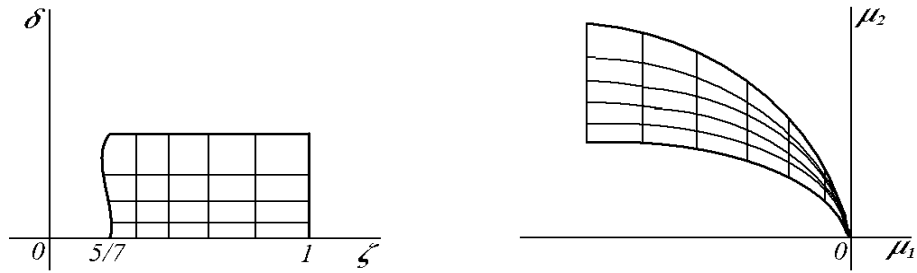


Figura 2.6:

Reescribiendo (2.2.5) en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) - y, \\ \dot{y} &= Q(x, y) - \mu_1 + x^2 + xy + \mu_2 y.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \mu_2} & \frac{\partial Q}{\partial \mu_2} \end{vmatrix} = y^2 > 0, \quad \text{si } y \neq 0. \quad (2.2.36)$$

Esto significa que (2.2.5) es una familia de campos vectoriales rotados con respecto a μ_2 . Para detalles de campos vectoriales rotados, ver [52].

Ahora tomamos $\Delta_4 = \Delta_3$. Para cualquier $(\mu_1, \mu_2) \in \Delta_4$ y arriba de H (o abajo de HL) podemos encontrar $(\mu_1, \bar{\mu}_2) \in H$ (o $\in HL$). Cualquier órbita periódica de (2.2.5) $_{(\mu_1, \bar{\mu}_2)}$ que nace en el punto $p \in L$ es una espiral expansiva (contractiva), y debido a (2.2.36), la trayectoria positiva γ de (2.2.5) $_{(\mu_1, \mu_2)}$ que nace en el mismo punto p debe estar localizado totalmente fuera (dentro) de $\bar{\gamma}$ y de aquí que γ es también una espiral expansiva (contractiva). El retrato fase es mostrado en la figura 2.1. \square

Combinando las conclusiones de los lemas 2.3, 2.8, 2.11 y 2.12, obtenemos el teorema 2.2, donde $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \cap \Delta_4$.

Capítulo 3

Control de la bifurcación Takens-Bogdanov en el plano

Como está demostrado en el capítulo anterior, sobre una deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov es posible encontrar dinámicas que experimentan bifurcaciones como: la silla-nodo, la de Hopf y la homoclínica. En este capítulo consideraremos un sistema en el plano, cuyo campo vectorial nominal tiene un valor propio cero de multiplicidad algebraica dos, y la idea es encontrar bajo que condiciones existe una *ley de control escalar*, tal que sea posible establecer *a priori* que el sistema a lazo-cerrado experimenta cualquiera de las tres bifurcaciones mencionadas con anterioridad. Diremos entonces que tales sistemas experimentan la *bifurcación Takens-Bogdanov controlable*. Al final del capítulo se discutirán algunos problemas de aplicación.

3.1. Planteamiento del problema

Consideremos el sistema de control no lineal

$$\dot{y} = Jy + f(y) + g(y)u \quad (3.1.1)$$

con $y \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(y) = f_2(y) + \mathcal{O}(|y|^3)$, donde

$$f_2(y) = \begin{pmatrix} a_{11}y_1^2 + a_{12}y_1y_2 + a_{13}y_2^2 \\ a_{21}y_1^2 + a_{22}y_1y_2 + a_{23}y_2^2 \end{pmatrix}, \quad g(y) = b + My + \mathcal{O}(|y|^2),$$

donde $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, y $M = (m_{ij})_{2 \times 2}$.

Nuestros objetivos en este capítulo son encontrar un cambio de coordenadas $y = \psi(z)$ y diseñar una ley de control $u = u(y, \mu, \gamma)$ donde $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ representa un vector de parámetros de bifurcación artificiales, mientras que $\gamma = (\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ representa un vector de parámetros de control indeterminados, tales que,

(i) el sistema a lazo-cerrado se transforma en

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3), \quad (3.1.2)$$

(ii) que sea posible encontrar tres curvas de bifurcación $\varphi(\mu_1, \mu_2) = 0$ donde el sistema

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1.3)$$

experimenta las bifurcaciones silla-nodo, Hopf y homoclínica respectivamente, y

(iii) que sea posible mediante la manipulación de los parámetros de control, que el sistema (3.1.3) experimente todas las posibles direcciones de cada bifurcación.

Llamaremos al sistema (3.1.3) una *deformación versal controlable* del sistema de control (3.1.1), y diremos que el sistema de control (3.1.1) experimenta una *bifurcación Takens-Bogdanov controlable*.

3.2. Deformación versal controlable

En esta sección encontraremos un cambio de coordenadas $y = \psi(z)$ y diseñaremos una ley de control $u(y, \mu, \gamma)$ tal que el sistema de control no lineal (3.1.1), se convierte en (3.1.2).

3.2.1. Primer cambio de coordenadas y primera entrada de control

En esta sección daremos un primer cambio de coordenadas y una primera entrada de control para obtener, obtener la parte lineal y la parte constante de (3.1.2). Consideremos el cambio de coordenadas y la entrada de control

$$y = P(w + H(w)) \quad (3.2.1)$$

$$u = \beta_1 \mu_1 + v, \quad (3.2.2)$$

donde

$$\begin{aligned} P &= (p_{ij}), \\ H(w) &= w^T H_0 w = \begin{pmatrix} w^T H_{01} w \\ w^T H_{02} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1(w) \\ H_2(w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} w_1^2 + c_{12} w_1 w_2 + c_{13} w_2^2 \\ c_{21} w_1^2 + c_{22} w_1 w_2 + c_{23} w_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \dot{w} &= [P(I + DH(w))]^{-1} \dot{y} \\ &= (I + DH(w))^{-1} P^{-1} [JP(w + H(w)) + f(P(w + H(w))) + \\ &\quad g(P(w + H(w))) (\beta_1 \mu_1 + v)] \end{aligned}$$

pero para $w \approx 0$,

$$\begin{aligned} (I + DH(w))^{-1} &= I - DH(w) + \mathcal{O}(|w|^2), \\ f(P(w + H(w))) &= f_2(Pw) + \mathcal{O}(|w|^3), \\ g(P(w + H(w))) &= b + MPw + \mathcal{O}(|w|^2), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (I - DH(w) + \dots)P^{-1} (J(Pw + H(w)) + f_2(Pw) + \dots + \\ &\quad (b + MPw + \dots) (\beta_1 \mu_1 + v)) \\ &= \beta_1 \mu_1 P^{-1} b + \bar{J}w + \beta_1 \mu_1 \bar{M}w + \bar{f}_2(w) + \mathcal{O}(\mu_1 |w|^2) + \bar{g}(w)v, \end{aligned}$$

donde

$$\bar{J} = P^{-1}JP, \quad (3.2.3)$$

$$\bar{M} = P^{-1}MP - 2(P^{-1}b)^T H_0, \quad (3.2.4)$$

$$\bar{f}_2(w) = P^{-1}f_2(Pw) + \bar{J}H(w) - DH(w)\bar{J}w, \quad (3.2.5)$$

$$\bar{g}(w) = P^{-1}b + \bar{M}w + \mathcal{O}(|w|^2). \quad (3.2.6)$$

Lema 3.1 *If $b_2 \neq 0$, entonces existen P y $H(w)$, tales que*

$$a) P^{-1}b = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b) \bar{J} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c) \bar{M} \equiv 0.$$

Prueba:

De a) y b) se sigue que $P = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{\delta_3} & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$. De c) se sigue que

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{m_{11}b_2 - b_1m_{21}}{b_2}, \\ c_{13} &= \frac{\delta_3 (b_1m_{11}b_2 - b_1^2m_{21} + m_{12}b_2^2 - b_2b_1m_{22})}{2b_2^2}, \\ c_{22} &= \frac{m_{21}}{\delta_3}, \\ c_{23} &= \frac{1}{2} \frac{b_1m_{21} + m_{22}b_2}{b_2}. \end{aligned}$$

□

Definamos

$$\tilde{f}_2(w) = P^{-1}f_2(Pw) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{21}(w) \\ \tilde{f}_{22}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}w_1^2 + \tilde{a}_{12}w_1w_2 + \tilde{a}_{13}w_2^2 \\ \tilde{a}_{21}w_1^2 + \tilde{a}_{22}w_1w_2 + \tilde{a}_{23}w_2^2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{\delta_3}, \\ \tilde{a}_{12} &= (2a_{11} - a_{22})b_1 + a_{12}b_2 - \frac{2a_{21}b_1^2}{b_2}, \\ \tilde{a}_{13} &= \frac{\delta_3}{b_2^2} (-a_{21}b_1^3 + b_2(a_{11}b_1^2 - a_{22}b_1^2 + b_2(a_{12}b_1 - a_{23}b_1 + a_{13}b_2))), \\ \tilde{a}_{21} &= \frac{a_{21}b_2}{\delta_3^2}, \\ \tilde{a}_{22} &= \frac{2a_{21}b_1 + a_{22}b_2}{\delta_3}, \\ \tilde{a}_{23} &= a_{22}b_1 + a_{23}b_2 + \frac{a_{21}b_1^2}{b_2}.\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\bar{f}_2(w) &= P^{-1}f_2(Pw) + \bar{J}H(w) - DH(w)\bar{J}w \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{f}_{21}(w) \\ \tilde{f}_{22}(w) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_3 H_2(w) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_3 w_2 \frac{\partial H_1}{\partial w_1} \\ \delta_3 w_2 \frac{\partial H_2}{\partial w_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{f}_{21}(w) + \delta_3 H_2(w) - \delta_3 w_2 \frac{\partial H_1}{\partial w_1} \\ \tilde{f}_{22}(w) - \delta_3 w_2 \frac{\partial H_2}{\partial w_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\tilde{a}_{11} + \delta_3 c_{21}) w_1^2 + (\tilde{a}_{12} + \delta_3 c_{22} - 2\delta_3 c_{11}) w_1 w_2 + (\tilde{a}_{13} + \delta_3 c_{23} - \delta_3 c_{12}) w_2^2 \\ \tilde{a}_{21} w_1^2 + (\tilde{a}_{22} - 2\delta_3 c_{21}) w_1 w_2 + (\tilde{a}_{23} - \delta_3 c_{22}) w_2^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

entonces, si hacemos $c_{11} = \frac{\tilde{a}_{12} + \delta_3 c_{22}}{2\delta_3}$, y $c_{21} = -\frac{\tilde{a}_{11}}{\delta_3}$, entonces,

$$\bar{f}_2(w) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} w_2^2 \\ \bar{a}_{21} w_1^2 + \bar{a}_{22} w_1 w_2 + \bar{a}_{23} w_2^2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{a}_{13} &= \tilde{a}_{13} + \delta_3(c_{23} - c_{12}), \\ \bar{a}_{21} &= \tilde{a}_{21}, \\ \bar{a}_{22} &= \tilde{a}_{22} - 2\delta_3 c_{21}, \\ \bar{a}_{23} &= \tilde{a}_{23} - \delta_3 c_{22}.\end{aligned}$$

Entonces, de (3.2.1) y (3.2.2), el sistema (3.1.1) se transforma en

$$\dot{w} = \beta_1 \mu_1 e_2 + \bar{J}w + \bar{f}_2(w) + \mathcal{O}(\mu_1 |w|^2) + (e_2 + \mathcal{O}(|w|^2))v. \quad (3.2.7)$$

3.2.2. Segundo cambio de coordenadas y segunda entrada de control

Con este segundo cambio de coordenadas y segunda entrada de control, obtendremos la parte no lineal de (3.1.2). Ahora, consideremos el cambio de coordenadas y la entrada de control

$$w = z + h(z), \quad (3.2.8)$$

$$v = \mu Lz + q(z), \quad (3.2.9)$$

donde $z = (z_1, z_2)^T$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $h(z) = \begin{pmatrix} h_1(z) \\ h_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}z_1^2 + d_{12}z_1z_2 + d_{13}z_2^2 \\ d_{21}z_1^2 + d_{22}z_1z_2 + d_{23}z_2^2 \end{pmatrix}$,
 $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix}$, y $q(z) = q_1z_1^2 + q_2z_1z_2 + q_3z_2^2$. Entonces, sustituyendo (3.2.8) y (3.2.9) en (3.2.7), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (I - Dh(z) + \dots) \left(\beta_1\mu_1e_2 + \bar{J}(z + h(z)) + \bar{f}_2(z + h(z)) + \mathcal{O}(\mu_1|z|^2) \right) \\ &\quad + (e_2 + \mathcal{O}(|z|^2))(\mu Lz + q(z)) \\ &= \beta_1\mu_1e_2 + \bar{J}z + \mu Lze_2 - \beta_1\mu_1Dh(z)e_2 + \bar{f}_2(z) + \bar{J}h(z) + q(z)e_2 - Dh(z)\bar{J}z + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3) \\ &= \beta_1\mu_1e_2 + \bar{J}z + \mu \mathcal{L}z + F_2(z) + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3), \end{aligned}$$

donde

$$\mu \mathcal{L}z = \mu Lze_2 - \beta_1\mu_1Dh(z)e_2 = \begin{pmatrix} \mu L_1z \\ \mu L_2z \end{pmatrix},$$

$$\text{con } L_1 = \begin{pmatrix} \beta_1d_{12} & 2\beta_1d_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} l_1 - \beta_1d_{22} & l_2 - 2\beta_1d_{23} \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$F_2(z) = \bar{f}_2(z) + \bar{J}h(z) + q(z)e_2 - Dh(z)\bar{J}z = \begin{pmatrix} \bar{f}_{21}(z) + \delta_3h_2(z) - \delta_3z_2\frac{\partial h_1}{\partial z_1}(z) \\ \bar{f}_{22}(z) + q(z) - \delta_3z_2\frac{\partial h_2}{\partial z_1}(z) \end{pmatrix}.$$

Lema 3.2 Si $b_2 \neq 0$, entonces existen L , $q(z)$, y $h(z)$ tales que

$$\mu \mathcal{L}z = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2\mu_2z_2 \end{pmatrix}, \text{ y } F_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1z_1^2 + \delta_2z_1z_2 \end{pmatrix}.$$

Prueba:

Esto es directo, si definimos

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\beta_1}{\delta_3}\bar{a}_{13} \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \\ q(z) &= (\delta_1 - \bar{a}_{21})z_1^2 + (\delta_2 - \bar{a}_{22})z_1z_2 + (-\bar{a}_{23})z_2^2, \\ h(z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\bar{a}_{13}}{\delta_3}z_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Entonces se sigue que sustituyendo (3.2.8) y (3.2.9) en (3.2.7) obtenemos

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3). \quad (3.2.10)$$

Ahora, estableceremos el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.3 *Dado el sistema de control no lineal*

$$\dot{y} = Jy + f_2(y) + \cdots + g(y)u, \quad (3.2.11)$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $g(y) = b + My + \cdots$, con $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Si $b_2 \neq 0$, entonces la ley de control escalar

$$u(y, \mu, \gamma) = \beta_1 \mu_1 + \mu LP^{-1}y + q(P^{-1}y), \quad (3.2.12)$$

donde $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\gamma = (\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $L = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\beta_1 \bar{a}_{13}}{\delta_3} \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{\delta_3} & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, y $q(y) = (\delta_1 - \bar{a}_{21})y_1^2 + (\delta_2 - \bar{a}_{22})y_1 y_2 + (-\bar{a}_{23})y_2^2$, es tal que el sistema a lazo-cerrado (3.2.11-3.2.12) es suavemente equivalente al sistema

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3).$$

Prueba:

Consideremos el sistema a lazo-cerrado (3.2.11-3.2.12)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Jy + f_2(y) + \cdots + (b + My + \cdots) (\beta_1 \mu_1 + \mu LP^{-1}y + q(P^{-1}y)) \\ &= \beta_1 \mu_1 b + Jy + \beta_1 \mu_1 My + (\mu LP^{-1}y)b + f_2(y) + q(P^{-1}y)b + \mathcal{O}(|(\mu, y)|^3) \\ &= X(y, \mu, \gamma) + \mathcal{O}(|(\mu, y)|^3), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

y el homeomorfismo $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$y = \psi(z) = P(z + \mathcal{H}(z)),$$

con $\mathcal{H}(z) = H(z) + h(z)$, donde $H(z)$ y $h(z)$ están dados por el lema 3.1 y el lema 3.2, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= (P(I + D\mathcal{H}(z)))^{-1} \dot{y} \\
&= (I - D\mathcal{H}(z) + \dots) P^{-1} X(y, \mu, \gamma) + \dots \\
&= \beta_1 \mu_1 P^{-1} b + P^{-1} J P z + \beta_1 \mu_1 \left(P^{-1} M P z - D\mathcal{H}(z) P^{-1} b \right) + (\mu L z) P^{-1} b \\
&\quad + P^{-1} f_2(Pz) + P^{-1} J P \mathcal{H}(z) - D\mathcal{H}(z) P^{-1} J P z + q(z) P^{-1} b + \dots \\
&= \beta_1 \mu_1 P^{-1} b + P^{-1} J P z + \beta_1 \mu_1 \left(P^{-1} M P z - D\mathcal{H}(z) P^{-1} b \right) - \beta_1 \mu_1 D h(z) P^{-1} b \\
&\quad + (\mu L z) P^{-1} b + P^{-1} f_2(Pz) + P^{-1} J P H(z) - D H(z) P^{-1} J P z + P^{-1} J P h(z) \\
&\quad - D h(z) P^{-1} J P z + q(z) P^{-1} b + \dots \\
&= \beta_1 \mu_1 e_2 + \bar{J} z + \beta_1 \mu_1 \bar{M} z + \mu \mathcal{L} z + F_2(z) + \dots \\
&= \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3).
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.4 *El sistema a lazo-cerrado (3.2.11-3.2.12) es localmente topológicamente equivalente al sistema*

$$\dot{z} = Z(z, \mu, \gamma) = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.14)$$

El sistema (3.2.14) es llamado *deformación versal controlable* del sistema de control no lineal (3.2.11).

3.3. Análisis de bifurcación

En esta sección daremos un análisis de bifurcación para la deformación versal controlable (3.2.14). Tres curvas de puntos de bifurcación: silla-nodo, Hopf y homoclínica, se encuentran en el plano de parámetros de bifurcación (μ_1, μ_2) .

3.3.1. Puntos de equilibrio

Obsérvese que

$$Z(z, \mu, \gamma) = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0, \text{ y } \beta_1 \mu_1 + \delta_1 z_1^2 = 0,$$

es decir, $z_0^\pm = \left(\pm \sqrt{-\frac{\beta_1 \mu_1}{\delta_1}}, 0 \right)$ son puntos de equilibrio. Definamos $\bar{z}_1 = \sqrt{-\frac{\beta_1 \mu_1}{\delta_1}}$, entonces, la matriz Jacobiana en z_0^\pm está dada por

$$DZ(z_0^\pm, \mu, \gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_3 \\ \pm 2\delta_1 \bar{z}_1 & \beta_2 \mu_2 \pm \delta_2 \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.1)$$

con los valores propios

$$\lambda_{1,2}(z_0^\pm) = \frac{1}{2} \left((\beta_2\mu_2 \pm \delta_2\bar{z}_1) \pm \sqrt{(\beta_2\mu_2 \pm \delta_2\bar{z}_1)^2 \pm 8\delta_1\delta_3\bar{z}_1} \right). \quad (3.3.2)$$

3.3.2. Curva de puntos de bifurcación silla-nodo

Dadas β_1 y δ_1 , entonces, es claro que el sistema (3.2.14) experimenta una bifurcación silla-nodo en $z_0 = (0,0)$ cuando $\mu_1 = 0$. Por ejemplo, si $\beta_1\delta_1 > 0 (< 0)$, entonces, para $\mu_1 > 0 (< 0)$, el sistema (3.2.14) no tiene puntos de equilibrio, mientras que para $\mu_1 < 0 (> 0)$ tiene dos puntos de equilibrio z_0^\pm . Además, para los casos donde existen dos puntos de equilibrio,

- (i) Si $\pm\delta_1\delta_3 > 0$ entonces z_0^\pm es una silla,
- (ii) Si $\pm\delta_1\delta_3 < 0$ y $\beta_2\mu_2 \pm \delta_2\bar{z}_1 > 0$, entonces z_0^\pm es una fuente,
- (iii) Si $\pm\delta_1\delta_3 < 0$ y $\beta_2\mu_2 \pm \delta_2\bar{z}_1 < 0$, entonces z_0^\pm es un sumidero.

Para estudiar la estructura de la órbita cerca de $\mu_1 = 0$, con μ_2 arbitrario, usaremos la teoría de la variedad central. Consideremos el parámetro de bifurcación μ_1 , como una variable de estado, entonces (3.2.14) se transforma en el sistema extendido

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\mu}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \mu_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_0(z) \end{pmatrix},$$

donde $f_0(z) = \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2$, y a través del cambio de coordenadas

$$\tilde{z} = P\tilde{\varphi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ \mu_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2\mu_2} & \beta_2\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \mu_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

se transforma en la forma normal

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\mu}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta_1\delta_3}{\beta_2\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \mu_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta_3}{\beta_2\mu_2}f_0(P\tilde{\varphi}) \\ 0 \\ \frac{1}{\beta_2\mu_2}f_0(P\tilde{\varphi}) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -\frac{\delta_3}{\beta_2\mu_2} \left(\beta_1\mu_1 + \delta_1\varphi_1^2 + \frac{\delta_2\beta_1}{\delta_3}\mu_1\varphi_1 + \dots \right) \\ \dot{\mu}_1 &= 0 \\ \dot{\varphi}_2 &= \beta_2\mu_2\varphi_2 + \frac{1}{\beta_2\mu_2} (\delta_1\varphi_1^2 + \dots), \end{aligned}$$

cuya variedad central bidimensional es dada por $\varphi_2 = -\frac{\delta_1}{(\beta_2\mu_2)^2}\varphi_1^2 + \dots$, y la dinámica en ésta es determinada por el sistema unidimensional parametrizado

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{\delta_3}{\beta_2\mu_2} (\beta_1\mu_1 + \delta_1\varphi_1^2)$$

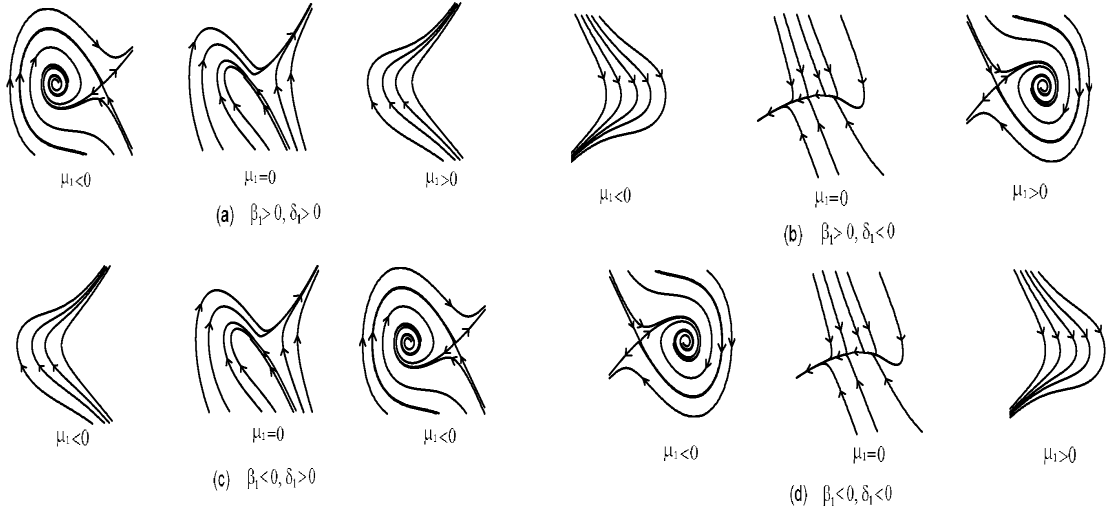


Figura 3.1: Direcciones de la bifurcación silla-nodo cuando $\delta_3 > 0$, $\beta_2 < 0$, y $\mu_2 > 0$.

Lema 3.5 Dadas δ_3 , β_2 , y μ_2 , con $\beta_2\mu_2 \neq 0$. Si $\beta_1\delta_1 \neq 0$, entonces el sistema (3.2.14) experimenta la bifurcación silla-nodo en $z_0 = (0,0)$ cuando $\mu_1 = 0$.

Es decir, sobre el plano de parámetros de bifurcación, la curva

$$C_{sn} = \{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0 \}$$

representa la curva de puntos de bifurcación silla-nodo.

Nótese que si fijamos el signo de $\delta_3\beta_2\mu_2$, entonces, dependiendo de los signos de los parámetros de control β_1 y δ_1 , podemos establecer *a priori* cualquiera de las cuatro posibles direcciones de la bifurcación silla-nodo en $z_0 = (0,0)$ cuando $\mu_1 = 0$. Diremos entonces que el sistema (3.2.14) experimenta la **bifurcación silla-nodo controlable** en $z_0 = (0,0)$ sobre C_{sn} .

Por ejemplo, si consideramos $\delta_3 > 0$, $\beta_2 < 0$, y $\mu_2 > 0$, esto es, $-\frac{\delta_3}{\beta_2\mu_2} > 0$, la figura 3.1 nos muestra la cuatro posibles direcciones de la bifurcación silla-nodo.

3.3.3. Curva de puntos de bifurcación de Hopf

Definamos $\bar{\mu}_2 = \frac{\delta_2}{\beta_2}\bar{z}_1$, entonces de (3.3.2), si $\mu_2 \approx \mp\bar{\mu}_2$ y $\pm\delta_1\delta_3 < 0$, concluimos que

$$\lambda_{1,2}(z_0^\pm) = \frac{1}{2} \left((\beta_2\mu_2 \pm \delta_2\bar{z}_1) \pm i\sqrt{-(\beta_2\mu_2 \pm \delta_2\bar{z}_1)^2 \mp 8\delta_1\delta_3\bar{z}_1} \right),$$

es decir, $Re(\lambda_{1,2}(z_0^\pm)) = \frac{1}{2}(\beta_2\mu_2 \pm \delta_2\bar{z}_1)$.

Luego entonces, si $\mu_2 = \mp\bar{\mu}_2$ y $\pm\delta_1\delta_3 < 0$, entonces $\lambda_{1,2}(z_0^\pm)|_{\mu_2=\bar{\mu}_2} = \pm i\sqrt{\mp 2\delta_1\delta_3\bar{z}_1}$, y

$$d = \frac{d}{d\mu_2} (Re(\lambda_{1,2}(z_0^\pm)))|_{\mu_2=\bar{\mu}_2} = \frac{1}{2}\beta_2, \quad (3.3.3)$$

esto es, el sistema (3.2.14) experimenta la bifurcación de Hopf en $z = z_0^\pm$ cuando $\mu_2 = \mp \bar{\mu}_2$. Para establecer la estabilidad de las órbitas periódicas que surgen en la bifurcación, necesitamos calcular el primer coeficiente de Lyapunov l , el cual es dado por (1.5.8). Para poner el sistema (3.2.14) en su forma normal haremos el cambio de coordenadas

$$\varphi = P^{-1}(z - z_0^\pm),$$

donde $P = \begin{pmatrix} 0 & \delta_3 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$, con $\omega_0^2 = \mp 2\delta_1\delta_3\bar{z}_1$, y después de algunos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -\omega_0\varphi_2 + \delta_2\delta_3\varphi_1\varphi_2 + \frac{\delta_1\delta_3^2}{\omega_0}\varphi_2^2 \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_0\varphi_1, \end{aligned}$$

y entonces

$$l = \mp \frac{\delta_2\delta_3^2}{16\sqrt{-\frac{\beta_1\mu_1}{\delta_1}}}. \quad (3.3.4)$$

Lema 3.6 Si $\mu_2 = \mp \bar{\mu}_2$ y $\pm\delta_1\delta_3 < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(z_0^\pm)|_{\mu_2=\bar{\mu}_2} &= \pm i\sqrt{\mp 2\delta_1\delta_3\bar{z}_1}, \\ d &= \frac{d}{d\mu_2}(\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(z_0^\pm)))|_{\mu_2=\bar{\mu}_2} = \frac{1}{2}\beta_2, \\ l &= \mp \frac{\delta_2\delta_3^2}{16\sqrt{-\frac{\beta_1\mu_1}{\delta_1}}}, \end{aligned}$$

esto es que el sistema (3.2.14) experimenta la bifurcación de Hopf en $z = z_0^\pm$ cuando $\mu_2 = \mp \bar{\mu}_2$.

Observe que

$$\mu_2 = \mp \bar{\mu}_2 \Leftrightarrow \mu_1 = -\frac{\delta_1\beta_2^2}{\beta_1\delta_2^2}\mu_2^2,$$

entonces, en el plano de los parámetros de bifurcación, la curva

$$C_H = \left\{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = -\frac{\delta_1\beta_2^2}{\beta_1\delta_2^2}\mu_2^2 \right\}$$

representa la curva de puntos de bifurcación de Hopf.

Finalmente, dependiendo de los signos de β_2 y δ_2 , tenemos los signos de la velocidad de cruce d y el primer coeficiente de Lyapunov l , dados por (3.3.3) y (3.3.4), respectivamente, y así podemos establecer a priori cualquiera de las cuatro posibles direcciones de la bifurcación de Hopf. Entonces diremos que el sistema (3.2.14) experimenta la **bifurcación de Hopf controlable** en $z = z_0^\pm$ sobre C_H , y llamaremos **coeficientes de controlabilidad** a d y l .

Si consideramos $\beta_1 < 0$, $\delta_1 < 0$, y $\delta_3 > 0$, entonces, $\delta_1\delta_3 < 0$, y por el lema 3.6, el sistema (3.2.14) experimenta la bifurcación de Hopf en $z = z_0^+$ cuando $\mu_2 = -\bar{\mu}_2$. La figura 3.2 nos muestra las cuatro direcciones para este caso.

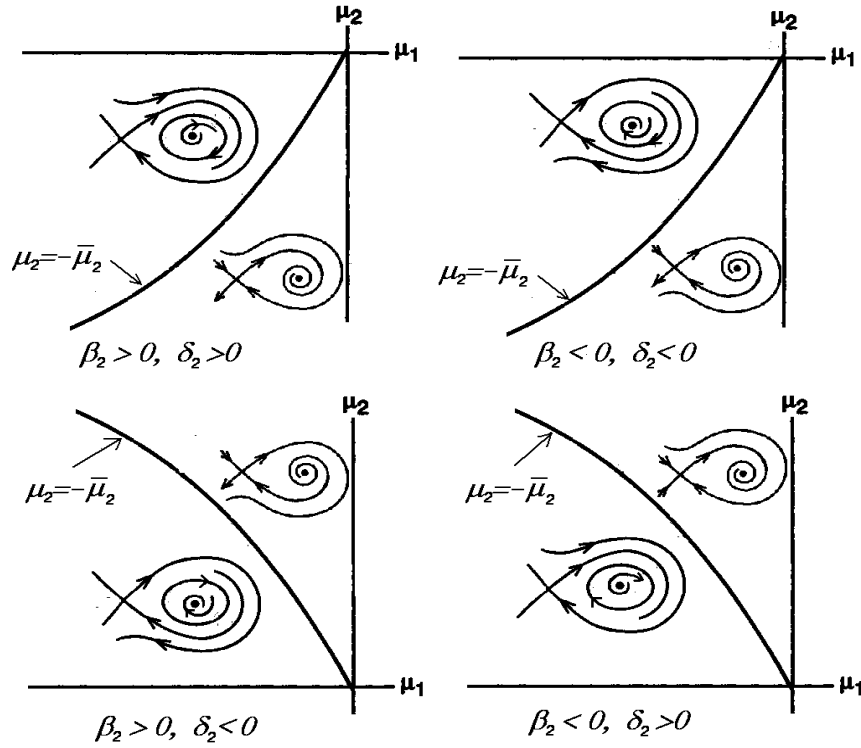


Figura 3.2: Direcciones de la bifurcación de Hopf cuando $\beta_1 < 0$, $\delta_1 < 0$, y $\delta_3 > 0$.

3.3.4. Curva de puntos de la bifurcación homoclínica

Para encontrar la curva de puntos de bifurcación homoclínica es necesario un análisis global alrededor de los puntos de equilibrio, usando el método de Melnikov tratado en la sección (1.7). Empezaremos con un reescalamiento de las variables de estado así como los parámetros y el tiempo

$$z_1 = \varepsilon^2 w_1, \quad z_2 = \varepsilon^3 w_2, \quad \mu_1 = -\frac{\delta_1}{\beta_1} \varepsilon^4, \quad \mu_2 = \frac{\delta_2}{\beta_2} v \varepsilon^2,$$

y $t = \frac{1}{\varepsilon} \tau$, así que (3.2.14) se convierte en

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_3 w_2 \\ \delta_1 (w_1^2 - 1) + \varepsilon \delta_2 (v w_2 + w_1 w_2) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \begin{pmatrix} \delta_3 w_2 \\ \delta_1 (w_1^2 - 1) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_2 (v w_2 + w_1 w_2) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Obsérvese que para $\varepsilon = 0$, el sistema no perturbado

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \delta_3 w_2 \\ \dot{w}_2 &= \delta_1 (w_1^2 - 1), \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

representa un sistema Hamiltoniano completamente integrable con función Hamiltoniana dada por

$$H(w_1, w_2) = \delta_3 \frac{w_2^2}{2} + \delta_1 \left(w_1 - \frac{w_1^3}{3} \right),$$

con la órbita homoclínica $\gamma(t) = (w_1^0(t), w_2^0(t))$, la cual satisface

$$\begin{aligned} \delta_3 \frac{(w_2^0(t))^2}{2} &= \delta_1 \left(\frac{(w_1^0(t))^3}{3} - (w_1^0(t)) - \frac{2}{3} \right), \text{ for } \delta_1 \delta_3 < 0, \\ \delta_3 \frac{(w_2^0(t))^2}{2} &= \delta_1 \left(\frac{(w_1^0(t))^3}{3} - (w_1^0(t)) + \frac{2}{3} \right), \text{ for } \delta_1 \delta_3 > 0, \end{aligned}$$

y con la función de Melnikov

$$M(\nu) = \delta_2 \delta_3 \int_{-\infty}^{\infty} w_2^0(t) (\nu w_2^0(t) + w_1^0(t) w_2^0(t)) dt.$$

Definamos

$$\gamma_1(t) = 1 - 3 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{\delta_1 \delta_3}{2}} t \right), \text{ y } \gamma_2(t) = \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{\delta_1 \delta_3}{2}} t \right) \tanh \left(\sqrt{\frac{\delta_1 \delta_3}{2}} t \right),$$

entonces, el siguiente lema nos dá la órbita homoclínica y la función de Melnikov para diferentes valores de δ_1 y δ_3 .

Lema 3.7 1. Si $\delta_1 > 0$ y $\delta_3 > 0$ entonces

$$\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), 3\sqrt{2} \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_3}} \gamma_2(t) \right) \text{ y } M(\nu) = \frac{24}{35} \sqrt{2} \delta_2 \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_3}} (7\nu - 5)$$

2. Si $\delta_1 < 0$ y $\delta_3 < 0$ entonces

$$\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), -3\sqrt{2} \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_3}} \gamma_2(t) \right) \text{ y } M(\nu) = -\frac{24}{35} \sqrt{2} \delta_2 \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_3}} (7\nu - 5)$$

3. Si $\delta_1 > 0$ y $\delta_3 < 0$ entonces

$$\gamma(t) = \left(-\gamma_1(t), 3\sqrt{2} \sqrt{-\frac{\delta_1}{\delta_3}} \gamma_2(t) \right) \text{ y } M(\nu) = -\frac{24}{35} \sqrt{2} \delta_2 \sqrt{-\frac{\delta_1}{\delta_3}} (7\nu + 5)$$

4. Si $\delta_1 < 0$ y $\delta_3 > 0$ entonces

$$\gamma(t) = \left(-\gamma_1(t), -3\sqrt{2} \sqrt{-\frac{\delta_1}{\delta_3}} \gamma_2(t) \right) \text{ y } M(\nu) = \frac{24}{35} \sqrt{2} \delta_2 \sqrt{-\frac{\delta_1}{\delta_3}} (7\nu + 5)$$

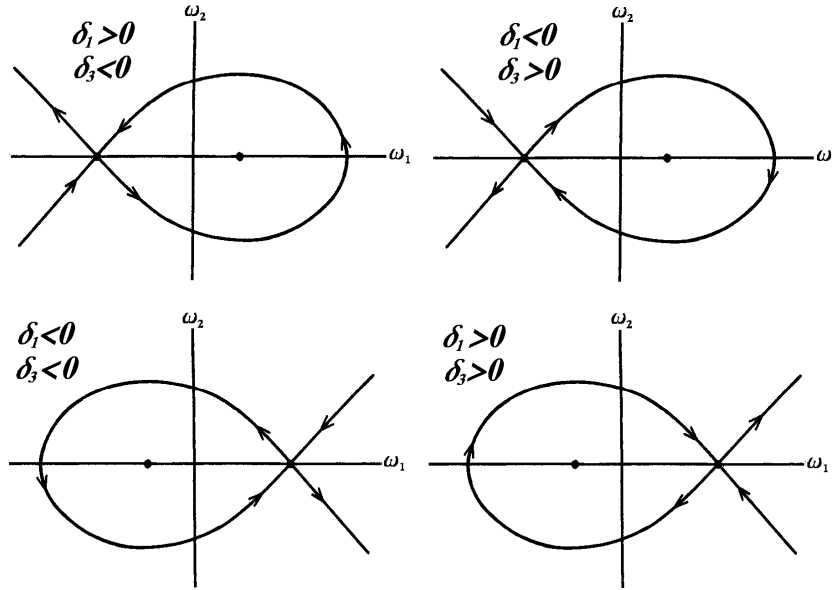


Figura 3.3: Direcciones de la bifurcación homoclínica.

De esto se sigue $M(v) = 0$ si $v = \pm \frac{5}{7}$, es decir, la curva de puntos de bifurcación homoclínica es dada por

$$v = \pm \frac{5}{7} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

pero $\mu_1 = -\frac{\delta_1}{\beta_1}\varepsilon^4 \Leftrightarrow \varepsilon^4 = -\frac{\beta_1}{\delta_1}\mu_1$, y

$$\mu_2 = \frac{\delta_2}{\beta_2}v\varepsilon^2 = \frac{\delta_2}{\beta_2}\left(\pm \frac{5}{7} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right)\varepsilon^2 = \pm \frac{5}{7}\frac{\delta_2}{\beta_2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

es decir $\mu_2^2 = \frac{25}{49}\frac{\delta_2^2}{\beta_2^2}\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5) = -\frac{25}{49}\frac{\delta_2^2}{\beta_2^2}\frac{\beta_1}{\delta_1}\mu_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$, entonces

$$\mu_1 = -\frac{49}{25}\frac{\delta_1\beta_2^2}{\beta_1\delta_2^2}\mu_2^2 + \mathcal{O}(\mu_2^{5/2}).$$

Tenemos que sobre la curva $\mathcal{C}_{hom} = \left\{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = -\frac{49}{25}\frac{\delta_1\beta_2^2}{\beta_1\delta_2^2}\mu_2^2 + \mathcal{O}(\mu_2^{5/2}), \mu_2 \neq 0 \right\}$ el sistema (3.2.14) experimenta la bifurcación homoclínica. Esto se sigue del lema 3.7 que, dependiendo de los signos de δ_1 y δ_3 , es posible obtener cuatro diferentes órbitas homoclínicas. Por ejemplo, si $\delta_1\delta_3 > 0$, tenemos la órbita homoclínica en $z = z_0^+$, mientras que si $\delta_1\delta_3 < 0$, tenemos la órbita homoclínica en $z = z_0^-$. Diremos entonces que el sistema (3.2.14) experimenta la **bifurcación homoclínica controlable** sobre \mathcal{C}_{hom} .

La figura 3.3 nos muestra las cuatro diferentes direcciones de la bifurcación homoclínica.

Con el análisis de bifurcación anterior, hemos probado la siguiente:

Proposición 3.8 *Dada la deformación versal controlable*

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix},$$

entonces, en una vecindad del punto de equilibrio $z_0 = (\pm \sqrt{-\frac{\beta_1}{\delta_1}} \mu_1, 0)$, en el plano de parámetros de bifurcación $\mu_1 - \mu_2$, el sistema a lazo-cerrado (3.2.11-3.2.12) experimenta

(i) *una bifurcación silla-nodo controlable sobre la curva*

$$C_{sn} = \{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0 \}$$

(ii) *una bifurcación de Hopf controlable sobre la curva*

$$C_H = \left\{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = -\frac{\delta_1 \beta_2^2}{\beta_1 \delta_2^2} \mu_2^2, \mu_2 \neq 0 \right\}$$

(iii) *una bifurcación homoclínica controlable sobre la curva*

$$C_{hom} = \left\{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = -\frac{49}{25} \frac{\delta_1 \beta_2^2}{\beta_1 \delta_2^2} \mu_2^2 + \mathcal{O}(\mu_2^{5/2}), \mu_2 \neq 0 \right\}$$

□

3.4. Resultado principal

Considérese el sistema de control no lineal

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u, \quad (3.4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son campos vectoriales suaves, y u es una entrada de control escalar. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0) = 0$ y $A = DF(x_0)$ es similar a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, existe Q tal que $Q^{-1}AQ = J$. Si $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ son los vectores propios derechos generalizados de A asociados al valor propio $\lambda = 0$, es decir, $Ap_1 = 0$ y $Ap_2 = p_1$, entonces $Q = (p_1 \ p_2)$. Si $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$ son los vectores propios izquierdos generalizados de A asociados al valor propio $\lambda = 0$, es decir, $q_1^T A = 0$ y $q_2^T A = q_1^T$, entonces $Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix}$.

Ahora, consideremos la expansión de Taylor alrededor de $x = x_0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= A(x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 F(x_0) (x - x_0, x - x_0) + \cdots, \\ G(x) &= G(x_0) + DG(x_0)(x - x_0) + \cdots, \end{aligned}$$

entonces, el cambio de coordenadas $y = Q^{-1}(x - x_0)$ transforma el sistema (3.4.1) en

$$\dot{y} = Jy + f_2(y) + \cdots + (b + My + \cdots)u,$$

donde

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \frac{1}{2}Q^{-1}D^2F(x_0)(Qy, Qy), \\ b &= Q^{-1}G(x_0) = \begin{pmatrix} q_1^T G(x_0) \\ q_2^T G(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \\ M &= Q^{-1}DG(x_0)Q. \end{aligned}$$

Finalmente, estableceremos el teorema principal de este capítulo.

Teorema 3.9 *Considérese el sistema de control no lineal*

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u, \quad (3.4.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son campos vectoriales suaves, y u es una entrada de control escalar. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0) = 0$ y $A = DF(x_0)$ es similar a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Considérese

a) la ley de control escalar

$$u(x, \mu, \gamma) = \beta_1\mu_1 + \mu LK(x - x_0) + q(K(x - x_0)), \quad (3.4.3)$$

donde $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\gamma = (\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $L = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\beta_1\bar{a}_{13}}{\delta_3} \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{\delta_3} & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, $Q = (p_1 p_2)$, $K = (QP)^{-1}$, y $q(x) = (\delta_1 - \bar{a}_{21})x_1^2 + (\delta_2 - \bar{a}_{22})x_1x_2 + (-\bar{a}_{23})x_2^2$,

b) el difeomorfismo $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$x = \psi(z) = x_0 + K^{-1}(z + H(z) + h(z)),$$

donde $H(z)$ y $h(z)$ son dados por el lema 3.1 y el lema 3.2, respectivamente, y

c) el punto $z_0^\pm = \left(\pm \sqrt{-\frac{\beta_1\mu_1}{\delta_1}}, 0 \right)^T$.

Entonces, si $q_2^T G(x_0) \neq 0$, el sistema a lazo-cerrado (3.4.2-3.4.3) es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal controlable

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix}.$$

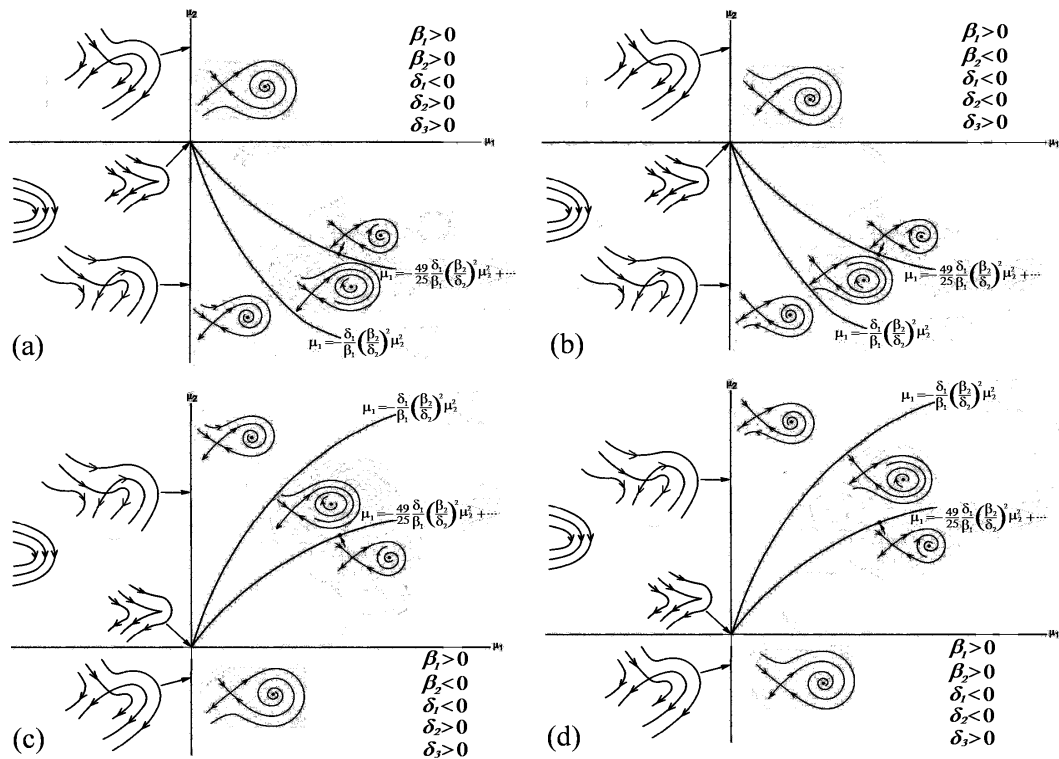


Figura 3.4: Cuatro posibles diagramas de bifurcación.

3.5. El diagrama de bifurcación y los retratos fase

El diseño de la ley de control (3.4.3) tiene cinco parámetros de control indeterminados, y dependiendo del signo de ellos, el sistema a lazo-cerrado (3.4.2-3.4.3) puede experimentar cualquier dirección de cualquiera de las tres bifurcaciones, es decir, el sistema a lazo-cerrado tiene $2^5 = 32$ diagramas de bifurcación diferentes.

En esta sección generaremos sólo cuatro de ellos, de la siguiente forma: Primero, seleccionamos la órbita homoclínica caracterizada por $\delta_1 < 0$ y $\delta_3 > 0$. Luego, consideramos el caso, $\beta_1 > 0$. Finalmente, analizamos las cuatro direcciones posibles de la bifurcación de Hopf, tomando en cuenta los signos de β_2 y δ_2 . Ver la figura 3.4.

3.6. Aplicaciones

En esta sección mostraremos la aplicación de nuestro resultado principal en tres problemas diferentes, en dicha aplicación nos concentramos más que nada en que nuestro resultado funcione matemáticamente, y en adelante, esto mismo haremos en las aplicaciones de los resultados que obtengamos.

3.6.1. Oscilador de van der Pol forzado promediado

Un oscilador muy popular con amortiguamiento no lineal es la ecuación de van der Pol,

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = \beta \cos(\omega t),$$

donde α, β son parámetros no negativos. La aplicación original modela un circuito eléctrico con una válvula triodo, tales sistemas poseen ciclos límite y oscilaciones sostenidas. La ecuación promediada es (ver [22])

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= \sigma x_1 + x_2(1 - x_2^2 + x_1^2) - \delta, \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

donde $\sigma = (1 - \omega^2)/\alpha\omega$, y $\delta = \beta/2\alpha\omega$. Observe que para $(\sigma, \delta) = (1/2, 1/2)$, el sistema promediado tiene el punto de equilibrio $x_0 = (1/2, 1/2)$, cuya linealización tiene un doble valor propio cero. Si consideramos δ , es decir, β , como una entrada de control, $\delta = \frac{1}{2} + u$, y fijamos $\sigma = 1/2$, entonces (3.6.1) se transforma en

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u,$$

donde $F(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2(1 - x_2^2 + x_1^2) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Observe que $F(x_0) = 0$, y $A = DF(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir, A tiene un valor propio cero de multiplicidad algebraica dos. Además, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1}$, entonces $b = Q^{-1}G(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Siguiendo el teorema 3.9, $L = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1/\delta_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = (QP)^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y $q(z) = (\delta_1 - \frac{1}{2\delta_3^2})z_1^2 + (\delta_2 + \frac{4}{\delta_3})z_1z_2 - \frac{3}{2}z_2^2$, entonces, la ley de control

$$u = \beta_1\mu_1 + \mu LK(x - x_0) + q(K(x - x_0)),$$

nos permite controlar la bifurcación Takens-Bogdanov en $x = x_0$. Para producir el diagrama de bifurcación dado por la figura 3.4-c, hacemos $\beta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$, y $\beta_2 = \delta_1 = -1$, y obtenemos la ley de control

$$u = \left(\frac{3}{2} - x_2\right)\mu_1 + \left(-\frac{1}{2} + x_2\right)\mu_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - 5x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 - 2.$$

Entonces, $\mu_1 = \mu_2^2$ es la curva de la bifurcación de Hopf, mientras que $\mu_1 = \frac{49}{25}\mu_2^2 + \dots$ es la curva de puntos de la bifurcación homoclínica. Para $\mu_1 = 0,0001$, la figura 3.5 nos muestra una bifurcación de Hopf supercrítica, mientras que la figura 3.6 nos muestra una órbita homoclínica.

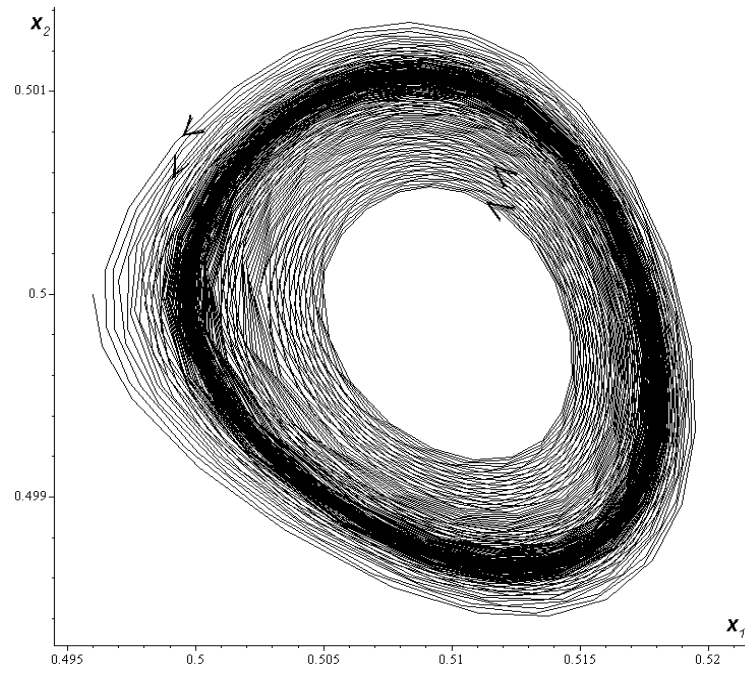


Figura 3.5: Bifurcación de Hopf supercrítica para $\mu_1 = 0,0001$ y $\mu_2 = 0,009$.

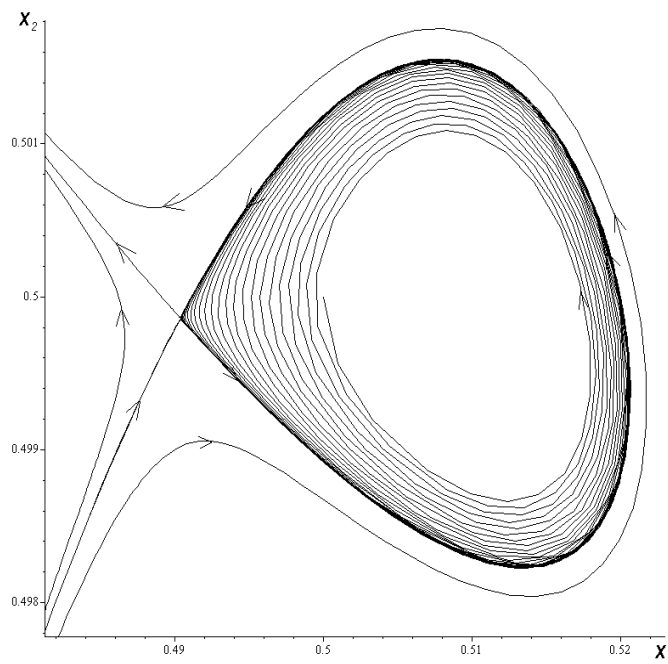


Figura 3.6: Órbita homoclínica para $\mu_1 = 0,0001$ y $\mu_2 = 0,0073289795$.

3.6.2. Sistema Depredador-presa

Consideremos el sistema en el plano

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2.\end{aligned}\tag{3.6.2}$$

Este sistema modela la dinámica de un ecosistema de depredador-presa, donde x_1 y x_2 son las poblaciones de depredador y presa respectivamente, y los parámetros no negativos α , y δ describen el comportamiento de poblaciones aisladas y sus interacciones. Ver [12]. Observe que para $(\alpha, \delta) = (\alpha_0, \delta_0) = (\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1))$, el sistema tiene el punto de equilibrio $x_0 = (3 + 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, cuya linealización tiene un valor propio cero doble. Si consideramos δ , como la entrada de control, $\delta = \delta_0 + u$, y fijamos $\alpha = \alpha_0$, entonces (3.6.2) se transforma en

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u,$$

donde $F(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha_0 x_1} \\ -x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha_0 x_1} - \delta_0 x_2^2 \end{pmatrix}$ y $G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2^2 \end{pmatrix}$. Siguiendo el teorema 3.9, la ley de control

$$\begin{aligned}u &= \left((3\sqrt{2} - 4)x_1 + (\sqrt{2} - 2)x_2 + 3 - \sqrt{2} \right) \mu_1 \\ &+ \left(\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{7}{2} \right) x_1 + \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) x_2 + \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) \mu_2 \\ &+ \left(35\sqrt{2} - \frac{99}{2} \right) x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{7}{2} \right) x_2^2 + \left(6\sqrt{2} - \frac{17}{2} \right) x_1 x_2 \\ &+ \left(22 - \frac{31}{\sqrt{2}} \right) x_1 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{7}{2} \right) x_2 + 2\sqrt{2} - 3,\end{aligned}$$

produce el diagrama de bifurcación dado por la figura 3.4-d, con $\beta_1 = \beta_2 = \delta_3 = 1$, y $\delta_1 = \delta_2 = -1$. La figura 3.7 nos muestra una bifurcación de Hopf subcrítica.

3.6.3. Prototipo de un sistema de referencia de control adaptativo

En estudio del modelo de sistema de referencia de control adaptativo, eventualmente cae en el análisis del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 &= \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1^2,\end{aligned}\tag{3.6.3}$$

donde x_1 es relacionada con un error, x_2 con una ganancia y α_1, α_2 son relacionadas con parámetros de adaptación. Ver [33] para más detalles. Obsérvese que para $(\alpha_1, \alpha_2) =$

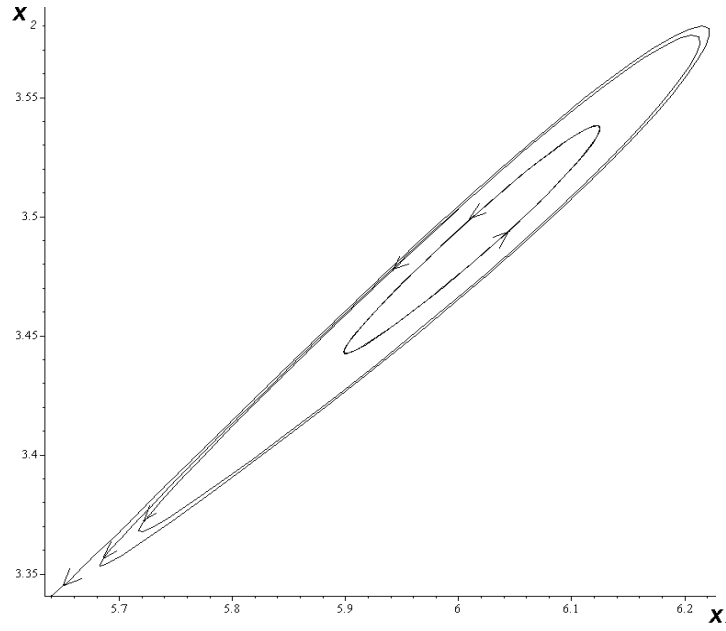


Figura 3.7: Bifurcación de Hopf subcrítica para $\mu_1 = 0,0001$ y $\mu_2 = 0,008$.

$(\alpha_{01}, \alpha_{02}) = (-\frac{2}{3}, \frac{8}{81})$, el sistema tiene un punto de equilibrio $x_0 = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$, cuya linealización tiene un valor propio cero doble. Si consideramos a α_1 , como una entrada de control, $\alpha_1 = \alpha_{01} + u$, y fijamos $\alpha_2 = \alpha_{02}$, entonces (3.6.3) se transforma en

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u,$$

donde $F(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1x_2 + 1 \\ \alpha_{01}x_2 + \alpha_{02}x_1^2 \end{pmatrix}$ y $G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Siguiendo el teorema 3.9, la ley de control

$$u = \frac{1}{9}(-12x_1 - 27x_2)\mu_1 + \frac{1}{3}(4x_1 + 9x_2 + 3)\mu_2 - 4x_1^2 - 6x_2^2 - \frac{2}{3}x_1x_2 - \frac{106}{9}x_1 + 3x_2 - \frac{28}{3}$$

produce el diagrama de bifurcación dado por la figura 3.4-a, con $\beta_1 = \beta_2 = \delta_2 = \delta_3 = 1$, y $\delta_1 = -1$. La figura 3.8 nos muestra una bifurcación de Hopf supercrítica.

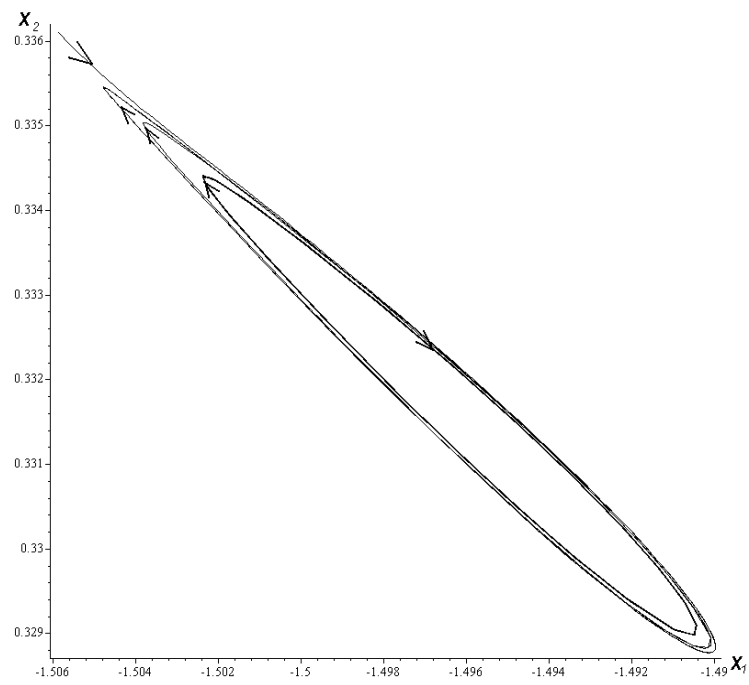


Figura 3.8: Bifurcación de Hopf supercrítica para $\mu_1 = 0,0001$ y $\mu_2 = 0,008$.

Capítulo 4

Bifurcación Takens-Bogdanov en \mathbb{R}^n

Originalmente, Takens en 1974 [35] y Bogdanov en 1975 [13], dieron condiciones suficientes para que un sistema no lineal m -paramétrico en el plano sea topológicamente equivalente a la deformación versal (o desdoblamiento universal) de la bifurcación Takens-Bogdanov. Tiempo después, Y.A. Kuznetsov, con otro tipo de cálculos obtuvo el caso particular $m = 2$. En este capítulo presentamos una generalización al resultado de Takens y Bogdanov, siguiendo la filosofía del análisis de Kuznetsov, pero desde otro punto de vista y con otro tipo de herramientas matemáticas, esta generalización es en el sentido de que encontramos condiciones suficientes para un sistema no lineal n -dimensional k -parametrizado, cuya matriz Jacobiana evaluada en un punto crítico de interés, tiene un valor propio cero de multiplicidad algebraica y geométrica igual a dos y el resto de los valores propios con parte real diferente de cero, tal que la dinámica sobre la variedad central bidimensional de este sistema, sea topológicamente equivalente a la deformación versal mencionada anteriormente. Aunque Kuznetsov mencionó que la generalización al caso n -dimensional de su resultado no brinda nada nuevo, esta generalización no es obvia. En este capítulo tomamos la tarea de hacer esta generalización desde un punto de vista el cual permite un cálculo explícito de las superficies de bifurcación –ver el teorema 4.10. Analizaremos una familia de campos vectoriales con un punto de equilibrio cuya linealización tiene un valor propio cero doble. Daremos condiciones suficientes sobre el campo vectorial, tales que la dinámica sobre la variedad central bidimensional del campo vectorial es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal dada por Bogdanov [13]. Este análisis es el primer paso hacia la generalización del resultado dado en el capítulo anterior, sobre el control de la bifurcación Takens-Bogdanov para un número arbitrario de parámetros y dimensiones.

4.1. El teorema de la Bifurcación de Takens-Bogdanov

A continuación se expone el teorema de Takens-Bogdanov en la versión presentada por James D. Meiss [30].

Teorema 4.1 Takens-Bogdanov

Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ y supongamos que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^2)$ que satisface las siguientes condiciones

$$H1) \quad f(0, 0; 0) = 0, \quad Df(0, 0; 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{cond. de singularidad o no hiperbolicidad})$$

$$H2) \quad D_{xx}f_y|_{(0,0,0)} \neq 0, \quad (D_{xx}f_x + D_{xy}f_y)|_{(0,0,0)} \neq 0, \quad (\text{cond. de no degeneracidad})$$

$$H3) \quad \text{Rango} \left(D_{(x,\mu)}(f, \text{tr}(Df), \det(Df)) \right) \Big|_{(0,0,0)} = 4. \quad (\text{cond. de transversalidad})$$

Entonces existe una vecindad alrededor del origen en la cual las dinámicas de f son inducidas por la forma normal

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \mu_1 + \mu_2 z_1 + a z_1^2 + b z_1 z_2, \end{aligned}$$

donde $a = D_{xx}f_y|_{(0,0,0)}$ y $b = (D_{xx}f_x + D_{xy}f_y)|_{(0,0,0)}$.

4.2. Planteamiento del problema

Considérese el campo vectorial m -parametrizado

$$\dot{x} = F(x, \mu), \tag{4.2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, con $m \geq 2$, y $F \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, con $r \geq 2$. Supongamos que existe $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que

$$H1) \quad F(x_0, \mu_0) = 0, \text{ y}$$

$$H2) \quad \sigma(DF(x_0, \mu_0)) = \{ \lambda_j \in \mathbb{C} \mid \lambda_{1,2} = 0, \quad \text{Re}(\lambda_j) \neq 0, \text{ for } j = 3, \dots, n \}, \text{ considerando el caso no semisimple.}$$

El caso no semisimple se refiere al caso cuando la multiplicidad geométrica del valor propio cero es uno.

Nuestro objetivo en este capítulo es encontrar condiciones suficientes sobre el campo vectorial F , tales que la dinámica sobre la variedad central en $x = x_0$, sea localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov genérica, en el plano

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + a z_1^2 + b z_1 z_2, \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

donde

$$ab \neq 0. \tag{4.2.3}$$

4.3. Dinámica sobre la variedad central

En esta sección usaremos la teoría de la variedad central para determinar la dinámica sobre la variedad central m -parametrizada bidimensional en el punto de equilibrio $x = x_0$ para $\mu \approx \mu_0$.

4.3.1. Forma de Jordan

Consideremos la expansión de Taylor alrededor de (x_0, μ_0) , para el campo vectorial $F(x, \mu)$ en (4.2.1)

$$F(x, \mu) = DF(x_0, \mu_0)(x - x_0) + F_\mu(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) + \frac{1}{2}D^2F(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0) + F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, x - x_0) + \dots \quad (4.3.1)$$

De la hipótesis H2) tenemos que,

Proposición 4.2 La matriz $A = DF(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es similar a la matriz

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix},$$

donde $J_1 \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$ es tal que

$$\sigma(J_1) = \{\lambda_j \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = 3, \dots, n\}.$$

Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ los vectores propios derechos generalizados de A asociados al valor propio $\lambda = 0$:

$$Ap_1 = 0; \quad Ap_2 = p_1. \quad (4.3.2)$$

Sea $P = (p_1, p_2, P_0)$, donde $P_0 \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$ la matriz que contiene los vectores propios derechos generalizados asociados a los valores propios de la matriz J_1 . Se sabe que

$$P^{-1}AP = J. \quad (4.3.3)$$

Entonces, si

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ Q_0 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} q_2^T A = 0, \\ q_1^T A = q_2^T. \end{cases}$$

Es decir, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ son los vectores propios izquierdos generalizados de A asociados al valor propio $\lambda = 0$.

Prueba: Sabemos que

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} q_1^T p_1 & q_1^T p_2 & q_1^T P_0 \\ q_2^T p_1 & q_2^T p_2 & q_2^T P_0 \\ Q_0 p_1 & Q_0 p_2 & Q_0 P_0 \end{pmatrix} = I_{n \times n},$$

entonces

$$q_1^T p_1 = 1, \text{ y } q_1^T P_0 = q_2^T p_1 = q_2^T P_0 = 0.$$

De (4.3.3)

$$AP = PJ \iff (Ap_1 \ Ap_2 \ AP_0) = (0 \ p_1 \ P_0 J_1). \quad (4.3.4)$$

Además

$$PP^{-1} = p_1 q_1^T + p_2 q_2^T + P_0 Q_0 = I_{n \times n}.$$

Entonces, de (4.3.4),

$$\begin{aligned} A &= A(PP^{-1}) \\ &= (Ap_1)q_1^T + (Ap_2)q_2^T + (AP_0)Q_0 \\ &= p_1 q_2^T + P_0 J_1 Q_0, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$q_2^T A = (q_2^T p_1)q_2^T + (q_2^T P_0)J_1 Q_0 = 0,$$

y

$$q_1^T A = (q_1^T p_1)q_2^T + (q_1^T P_0)J_1 Q_0 = q_2^T.$$

□

4.3.2. Cambio de coordenadas

En esta sección usaremos un primer cambio de coordenadas para poner el campo vectorial de la parte derecha de (4.2.1) en su forma de Jordan.

Considérese el cambio de coordenadas y de parámetros

$$y = P^{-1}(x - x_0), \quad \alpha = \mu - \mu_0, \quad (4.3.5)$$

entonces (4.2.1) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Jy + P^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha + \frac{1}{2}P^{-1}D^2F(x_0, \mu_0)(Py, Py) + \\ &P^{-1}F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) + \dots \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Definamos $v_0 = (p_1 \ p_2)$, y $w_0 = (q_1 \ q_2)^T$, entonces $P = (v_0 \ P_0)$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} w_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$.

Ahora definamos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y = P^{-1}(x - x_0) = \begin{pmatrix} w_0(x - x_0) \\ Q_0(x - x_0) \end{pmatrix},$$

es decir, $y_1 = w_0(x - x_0) \in \mathbb{R}^2$, y $y_2 = Q_0(x - x_0) \in \mathbb{R}^{n-2}$. También tenemos,

$$\begin{aligned} Py &= v_0 y_1 + P_0 y_2, \\ D^2F(x_0, \mu_0)(Py, Py) &= D^2F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1 + P_0 y_2, v_0 y_1 + P_0 y_2) \\ &= D^2F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1, v_0 y_1) + 2D^2F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1, P_0 y_2) \\ &\quad + D^2F(x_0, \mu_0)(P_0 y_2, P_0 y_2), \\ F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) &= F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, v_0 y_1) + F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0 y_2), \end{aligned}$$

por lo tanto (4.3.6) se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= J_0 y_1 + w_0 F_\mu(x_0, \mu_0) \alpha + \frac{1}{2} w_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1, v_0 y_1) + \\ &\quad w_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1, P_0 y_2) + \frac{1}{2} w_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(P_0 y_2, P_0 y_2) \\ &\quad + w_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, v_0 y_1) + w_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0 y_2) + \dots \\ \dot{y}_2 &= J_1 y_2 + Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) \alpha + \frac{1}{2} Q_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1, v_0 y_1) + \\ &\quad Q_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1, P_0 y_2) + \frac{1}{2} Q_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(P_0 y_2, P_0 y_2) \\ &\quad + Q_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, v_0 y_1) + Q_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0 y_2) + \dots\end{aligned}$$

Con el fin de simplificar el sistema anterior, usaremos la siguiente

Definición 4.3 Dados $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ y $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times (r \times s)}$, $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, donde $L_i \in \mathbb{R}^{r \times s}$, definimos el producto

$$v \bullet \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n v_i L_i.$$

Entonces, si definimos $q_i = (q_{i1}, \dots, q_{in})^T$ para $i = 1, 2$, observe que

$$\begin{aligned}w_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1, v_0 y_1) &= \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v_0 y_1)^T D^2 F_1(x_0, \mu_0) v_0 y_1 \\ \vdots \\ (v_0 y_1)^T D^2 F_n(x_0, \mu_0) v_0 y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n q_{1i} (v_0 y_1)^T D^2 F_i(x_0, \mu_0) v_0 y_1 \\ \sum_{i=1}^n q_{2i} (v_0 y_1)^T D^2 F_i(x_0, \mu_0) v_0 y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (v_0 y_1)^T \sum_{i=1}^n q_{1i} D^2 F_i(x_0, \mu_0) v_0 y_1 \\ (v_0 y_1)^T \sum_{i=1}^n q_{2i} D^2 F_i(x_0, \mu_0) v_0 y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (v_0 y_1)^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) v_0 y_1 \\ (v_0 y_1)^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) v_0 y_1 \end{pmatrix} \\ &= [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0)] (y_1, y_1).\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}w_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(v_0 y_1, P_0 y_2) &= [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, P_0)] (y_1, y_2), \\ w_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(P_0 y_2, P_0 y_2) &= [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (P_0, P_0)] (y_2, y_2), \\ w_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, v_0 y_1) &= [(w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0] (\alpha, y_1), \\ w_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0 y_2) &= [(w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P_0] (\alpha, y_2),\end{aligned}$$

y también de manera similar podemos reemplazar Q_0 por w_0 .

Por lo tanto, el sistema puede ser escrito como el sistema extendido

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & w_0 F_\mu(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(y_1, \alpha, y_2) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(y_1, \alpha, y_2) \end{pmatrix}, \quad (4.3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(y_1, \alpha, y_2) &= \frac{1}{2} [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0)] (y_1, y_1) \\ &\quad + [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, P_0)] (y_1, y_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (P_0, P_0)] (y_2, y_2) \\ &\quad + [(w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0] (\alpha, y_1) + [(w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P_0] (\alpha, y_2) + \dots, \\ \mathcal{F}_2(y_1, \alpha, y_2) &= \frac{1}{2} [(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0)] (y_1, y_1) \\ &\quad + [(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, P_0)] (y_1, y_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (P_0, P_0)] (y_2, y_2) \\ &\quad + [(Q_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0] (\alpha, y_1) + [(Q_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P_0] (\alpha, y_2) + \dots. \end{aligned}$$

Para calcular la variedad central local m -parametrizada en el punto de equilibrio $y = 0$, primero consideramos el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.8)$$

donde $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -K_2 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ y $\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & K_2 & I_{n-2} \end{pmatrix}$, con $K_2 = J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0)$.

Entonces, a través de (4.3.8) el sistema (4.3.7) se transforma en

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\xi, \alpha, \zeta) \\ 0 \\ f_2(\xi, \alpha, \zeta) \end{pmatrix}, \quad (4.3.9)$$

donde $R_0 = w_0 F_\mu(x_0, \mu_0)$, y

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \alpha, \zeta) &= \mathcal{F}_1(\xi, \alpha, \zeta - K_2 \alpha), \\ f_2(\xi, \alpha, \zeta) &= \mathcal{F}_2(\xi, \alpha, \zeta - K_2 \alpha). \end{aligned}$$

De la teoría de la variedad central, el sistema (4.3.9) tiene una variedad central $\zeta = h(\xi, \alpha) = \mathcal{O}(|\xi, \alpha|^2)$, con $h(0, 0) = Dh(0, 0) = 0$, y la dinámica sobre esta variedad central está dada por

$$\dot{\xi} = J_0 \xi + R_0 \alpha + f_1(\xi, \alpha, h(\xi, \alpha))$$

donde

$$\begin{aligned}
f_1(\xi, \alpha, h(\xi, \alpha)) &= \mathcal{F}_1(\xi, \alpha, h(\xi, \alpha) - J_1^{-1}Q_0F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha) \\
&= [(w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0] (\alpha, \xi) \\
&\quad + [(w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (P_0J_1^{-1}Q_0F_\mu(x_0, \mu_0), v_0)] (\alpha, \xi) \\
&\quad + \frac{1}{2} [(w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0)] (\xi, \xi) + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|\xi, \alpha|^3).
\end{aligned}$$

Observe que no es necesario calcular la variedad central $h(\xi, \alpha)$ por que ésta no afecta los términos cuadráticos en f_1 .

Entonces, hemos probado el siguiente

Lema 4.4 *Sea el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

que satisface las condiciones de no hiperbolicidad $H1) - H2)$ en el punto de equilibrio (x_0, μ_0) . Entonces la dinámica sobre la variedad central m -parametrizada bidimensional en el punto de equilibrio $x = x_0$ para $\mu \approx \mu_0$, está dada por

$$\dot{\xi} = J_0\xi + R_0\alpha + R_1(\alpha, \xi) + \frac{1}{2}R_2(\xi, \xi) + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|\xi, \alpha|^3), \quad (4.3.10)$$

donde $\xi = w_0(x - x_0)$, $\alpha = \mu - \mu_0$, $A_0 = P_0J_1^{-1}Q_0$, y

$$R_0 = w_0F_\mu(x_0, \mu_0), \quad (4.3.11)$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= (w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0 \\
&\quad + (w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (A_0F_\mu(x_0, \mu_0), v_0), \quad (4.3.12)
\end{aligned}$$

$$R_2 = (w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0). \quad (4.3.13)$$

4.4. Teorema principal

En esta sección probaremos el teorema principal del capítulo. La prueba la dividiremos en una serie de lemas, con los cuales transformaremos el sistema (4.3.10) en el caso genérico de la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov.

4.4.1. Equivalencia topológica entre la variedad central y la deformación versal

Primero reescribimos (4.2.2) como

$$\dot{z} = J_0z + \beta_1e_2 + \beta_2z_1e_2 + h_0(z), \quad (4.4.1)$$

donde $e_2 = (0, 1)^T$, y

$$h_0(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ az_1^2 + bz_1z_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, nuestro objetivo es encontrar un cambio de coordenadas

$$\xi = z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2} z^T L_2 z,$$

donde $L_0 \in \mathbb{R}^{2 \times m}$, $L_1 \in \mathbb{R}^{2 \times (m \times 2)}$, $L_2 \in \mathbb{R}^{2 \times (2 \times 2)}$, tal que (4.3.10) sea transformado en (4.4.1). Observe que

$$\dot{\xi} = (I + \alpha^T L_1 + z^T L_2) \dot{z} \Leftrightarrow \dot{z} = (I + \alpha^T L_1 + z^T L_2)^{-1} \dot{\xi},$$

pero para $|z| \approx 0$, tenemos que $(I + \alpha^T L_1 + z^T L_2)^{-1} = I - \alpha^T L_1 - z^T L_2 + \dots$, entonces,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= J_0 z + (J_0 L_0 + R_0) \alpha + \left(J_0 (\alpha^T L_1 z) + \alpha^T R_1 z + (L_0 \alpha)^T R_2 z \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} J_0 (z^T L_2 z) + \frac{1}{2} z^T R_2 z \right) + \dots, \\ &= J_0 z + \tilde{R}_0 \alpha + \alpha^T \tilde{R}_1 z + \frac{1}{2} z^T \tilde{R}_2 z + \dots, \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0 &= J_0 L_0 + R_0, \\ \tilde{R}_1 &= \bar{L}_1 + R_1 - L_1 J_0 + L_0^T R_2 - \tilde{R}_0^T L_2 \\ \tilde{R}_2 &= \bar{L}_2 + R_2 - 2L_2 J_0, \end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned} L_0 &= \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ L_{02}^T \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix}, \\ \bar{L}_0 &= \begin{pmatrix} L_{02}^T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_1 = \begin{pmatrix} L_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_2 = \begin{pmatrix} L_{22} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observación 4.5 En el transcurso de las pruebas de los siguientes lemas, haremos uso del siguiente hecho elemental: si la matriz $X = \begin{pmatrix} X^1 & X^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ es dividida en dos columnas, entonces

$$X J_0 = \begin{pmatrix} X^1 & X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X^1 \end{pmatrix}.$$

Lema 4.6 Existe L_0 tal que $\tilde{R}_0 \alpha = \beta_1 e_2$.

Prueba: Observe que $R_0 = w_0 F_\mu(x_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} R_{01}^T \\ R_{02}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^T F_\mu(x_0, \mu_0) \\ q_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix}$, entonces, si definimos

$$L_{02} = -F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1, \quad \text{y} \quad \beta_1 = q_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \alpha,$$

el resultado se sigue. \square

Observación 4.7 Obsérvese que L_{01} aún permanece sin determinarse.

Lema 4.8 Existe L_2 tal que $\frac{1}{2}z^T \tilde{R}_2 z = (az_1^2 + bz_1z_2)e_2$.

Prueba: Primero, de (4.3.13),

$$R_2 = (w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0) = \begin{pmatrix} (q_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0) \\ (q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} (q_i \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0) &= \\ & \begin{pmatrix} p_1^T (q_i \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) p_1 & p_1^T (q_i \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) p_2 \\ p_2^T (q_i \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) p_1 & p_2^T (q_i \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) p_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1^T D_i p_1 & p_1^T D_i p_2 \\ p_2^T D_i p_1 & p_2^T D_i p_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $D_i = q_i \bullet D^2F(x_0, \mu_0)$. Luego, si definimos

$$\begin{aligned} L_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 + p_1^T D_1 p_2 & l_{12}^1 \\ & l_{12}^1 & l_{22}^1 \end{pmatrix}, \\ L_{22} &= \begin{pmatrix} -p_1^T D_1 p_1 & \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 \\ \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 & 2l_{12}^1 - p_2^T D_1 p_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde l_{12}^1 y l_{22}^1 estan sin determinar. El resultado se sigue, con

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}p_1^T (q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) p_1, \\ b &= p_1^T (q_1 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) p_2. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

□

Lema 4.9 Existen L_{01} y L_{12} tales que $\alpha^T \tilde{R}_1 z = \beta_2 z_1 e_2$.

Prueba: Recordemos que

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} \\ \tilde{R}_{12} \end{pmatrix} = \bar{L}_1 + R_1 - L_1 J_0 + L_0^T R_2 - \tilde{R}_0^T L_2 \\ &= \begin{pmatrix} L_{12} + R_{11} - L_{11} J_0 + L_0^T R_{21} - \tilde{R}_0^T L_{21} \\ R_{12} - L_{12} J_0 + L_0^T R_{22} - \tilde{R}_0^T L_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si definimos

$$L_{12} = L_{11} J_0 - R_{11} - L_0^T R_{21} + \tilde{R}_0^T L_{21},$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{11} &= 0, \\ \tilde{R}_{12} &= R_{12} + L_0^T (R_{22} + R_{21} J_0) - \tilde{R}_0^T (L_{22} + L_{21} J_0) + R_{11} J_0. \end{aligned}$$

entonces usando la observación 4.5,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{12} &= \left(\tilde{R}_{12}^1 \mid \tilde{R}_{12}^2 \right) \\ &= \left(R_{12}^1 + L_0^T R_{22}^1 - \tilde{R}_0^T L_{22}^1 \mid R_{11}^1 + R_{12}^2 + L_0^T (R_{21}^1 + R_{22}^2) - \tilde{R}_0^T (L_{21}^1 + L_{22}^2) \right).\end{aligned}$$

Ahora, de (4.3.12) y (4.3.13), se sigue que para $i, j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}R_{1i}^j &= \left[q_i \bullet \left(F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0) \right) \right] p_j \\ R_{2i}^j &= \begin{pmatrix} p_1^T D_i p_j \\ p_2^T D_i p_j \end{pmatrix},\end{aligned}$$

entonces, si definimos

$$\begin{aligned}L_{01} &= \frac{1}{b} \left((p_1^T D_1 p_2 + p_2^T D_2 p_2) R_{01} + (l_{12}^1 + l_{22}^2) R_{02} - R_{11}^1 - R_{12}^2 \right), \\ l_{12}^1 &= \frac{1}{3} p_2^T \left(D_1 + \frac{b}{4a} D_2 \right) p_2,\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{12}^2 &= 0, \\ \tilde{R}_{12}^1 &= \left[\frac{2a}{b} (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2) \right. \\ &\quad \left. - p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \right] F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1 \\ &\quad - \frac{2a}{b} \sum_{i=1}^2 \left(q_i \bullet \left(F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0) \right) \right) p_i \\ &\quad + \left(q_2 \bullet \left(F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0) \right) \right) p_1,\end{aligned}$$

esto es,

$$\alpha^T \tilde{R}_1 z = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^T \tilde{R}_{12}^1 z_1 \end{pmatrix} = \left(\alpha^T \tilde{R}_{12}^1 \right) z_1 e_2,$$

entonces, si definimos $\beta_2 = \alpha^T \tilde{R}_{12}^1$, el resultado se sigue. \square

Antes de establecer el teorema principal, definamos

$$\begin{aligned}S_1 &= F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_2, \\ S_2 &= \left[\frac{2a}{b} (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2) \right. \\ &\quad \left. - p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \right] F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1 \\ &\quad - \frac{2a}{b} \sum_{i=1}^2 \left(q_i \bullet \left(F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0) \right) \right) p_i \\ &\quad + \left(q_2 \bullet \left(F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0) \right) \right) p_1.\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Además, para desdoblar la bifurcación doble cero de la variedad central, la transformación $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(\mu) = \begin{pmatrix} S_1^T(\mu - \mu_0) \\ S_2^T(\mu - \mu_0) \end{pmatrix}$$

debe tener rango dos, es decir, S_1 y S_2 deben ser linealmente independientes. Entonces como consecuencia de los lemas 3-5 podemos establecer ahora el resultado principal

Teorema 4.10 *Dado el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (4.4.4)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$, tal que, existe (x_0, μ_0) , que satisface las condiciones

$$H1) F(x_0, \mu_0) = 0,$$

$$H2) \sigma[DF(x_0, \mu_0)] = \{\lambda_{1,2} = 0; \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, j = 3, \dots, n\}, \quad (\text{no hiperbolicidad})$$

$$H3) ab \neq 0, \quad (\text{no degeneracidad})$$

$$H4) S_1 \text{ y } S_2 \text{ son linealmente independientes,} \quad (\text{transversalidad})$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1, \\ b &= p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2, \end{aligned}$$

ya S_1, S_2 son dados por (4.4.3). Entonces, la dinámica sobre la variedad central del sistema (4.4.4) en $x = x_0$ y $\mu \approx \mu_0$, el cual es dado por (4.3.10), es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + a z_1^2 + b z_1 z_2, \end{aligned}$$

donde $\beta_1 = S_1^T(\mu - \mu_0)$, y $\beta_2 = S_2^T(\mu - \mu_0)$.

4.5. Un ejemplo de aplicación

En esta sección presentaremos un ejemplo con cuatro parámetros como una ilustración del teorema 4.10.

Un ecosistema depredador-presa.

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \varepsilon x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2,\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

Las ecuaciones (4.5.1), modelan la dinámica de un ecosistema de un depredador con una presa. Las variables x_1 y x_2 son números poblacionales (a escala) del depredador y la presa, respectivamente, mientras α , γ , ε , y δ son parámetros no negativos que describen el comportamiento de las poblaciones aisladas y su interacción (ver [11] citado en [28]). Suponiendo que $\varepsilon = 0$ está fijo. Con el fin de que en el diagrama de bifurcación del sistema con respecto a los tres parámetros restantes (α, γ, δ) , pueda ser exhibida la bifurcación de codimension dos Takens-Bogdanov, consideraremos que $\alpha \in (0, 1)$ y $\alpha\gamma < 1$.

Si consideramos $\mu = (\alpha, \gamma, \delta)^T$, entonces

$$(x_0, \mu_0) = \left(\left(\frac{1}{\alpha^2}, \frac{\alpha + 1}{\alpha} \right)^T, \left(\alpha, \frac{1 - \alpha}{\alpha(1 + \alpha)}, \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \right)^T \right)$$

es una familia de puntos de equilibrio cuya linealización tiene un valor propio cero doble, y

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \alpha} \\ -\frac{1}{\alpha(1 + \alpha)} \end{pmatrix},$$

son los vectores propios derechos e izquierdos (generalizados) respectivamente, asociados al valor propio cero. Además, de (4.4.2),

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 = \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^3}, \\ b &= p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 = \frac{\alpha^2(\alpha - 1)}{(\alpha + 1)^2},\end{aligned}$$

y, de (4.4.3),

$$\begin{aligned}S_1^T &= \left(\frac{1}{\alpha^4(1 + \alpha)}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1 + \alpha}{\alpha^3} \right), \\ S_2^T &= \left(\frac{2(\alpha^2 - 2\alpha - 1)}{\alpha^2(\alpha + 1)^2(\alpha - 1)}, \frac{\alpha^2 - 3\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}, \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 1}{\alpha(\alpha - 1)} \right).\end{aligned}$$

Así las condiciones $H1)$, $H2)$, $H3)$ y $H4)$ son satisfechas para toda $\alpha \in (0, 1)$. Por lo tanto, si elegimos $\alpha = \frac{1}{2}$, el sistema (4.5.1) es localmente topológicamente equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + \frac{2}{27} z_1^2 - \frac{1}{18} z_1 z_2,\end{aligned}$$

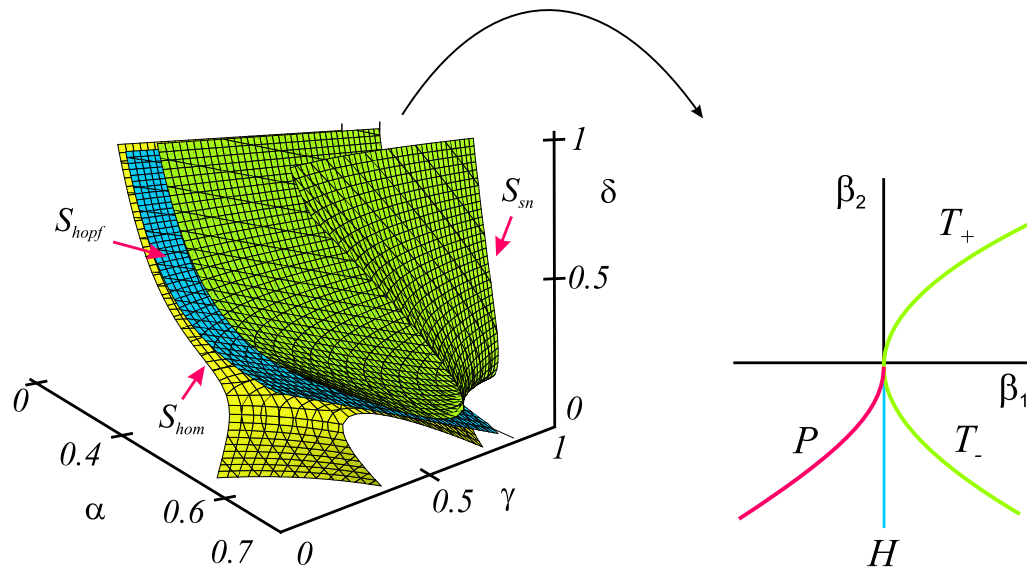


Figura 4.1: Superficies de bifurcación: S_{sn} superficie de la bifurcación silla-nodo, S_H superficie de la bifurcación de Hopf y S_{hom} superficie de la bifurcación homoclínica.

donde

$$\beta_1 = \langle S_1, \mu \rangle, \quad y \quad \beta_2 = \langle S_2, \mu \rangle \quad \text{con} \quad \mu^T = \left(\alpha - \frac{1}{2}, \gamma - \frac{2}{3}, \delta - \frac{2}{9} \right).$$

Las superficies de bifurcación en el espacio de parámetros es mostrado en la figura 4.1. En la figura 4.2 se muestran las diferentes bifurcaciones que el sistema (4.5.1) experimenta para diferentes valores de α , γ y δ .

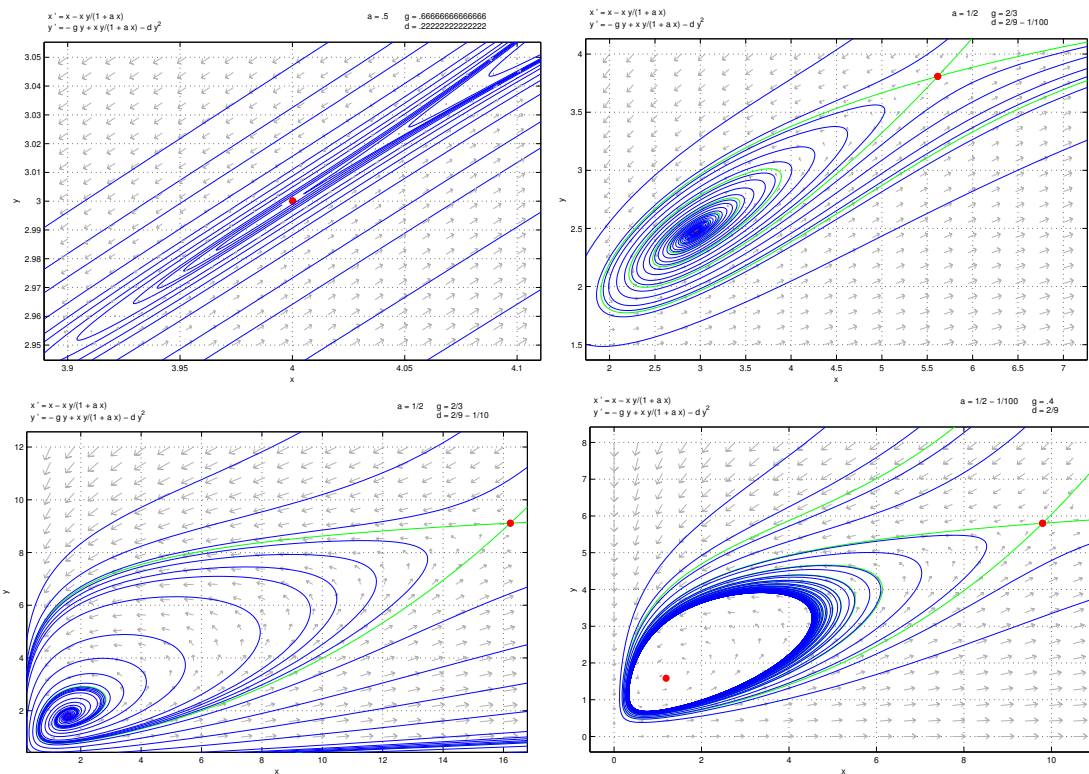


Figura 4.2: Diferentes dinámicas del sistema (4.5.1), de izquierda a derecha, de arriba a abajo: (a) Punto cúspide en $x_0 = (4, 3)^T$ para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{2}{3}$, $\delta = \frac{2}{3}$. (b) Foco estable. (c) Continuación del foco estable. (d) Un ciclo límite estable.

Capítulo 5

Control de la bifurcación Takens-Bogdanov n -dimensional

En este capítulo extendemos el análisis y diseño de la ley de control hecho en el capítulo 3, es decir, dado un sistema de control no lineal n -dimensional, cuya linealización en un punto de equilibrio tiene un valor propio cero doble y el resto de sus valores propios con parte real negativa. Mediante un cambio de coordenadas llevamos éste a su forma de Jordan, donde podemos reconocer sus eigenespacios central y estable. Luego, seguimos la misma técnica del capítulo 3, para diseñar una ley de control tal que al cerrar el lazo, el sistema n -dimensional resultante, tenga una variedad central bidimensional topológicamente equivalente a la deformación versal controlable de la bifurcación Takens-Bogdanov.

5.1. Planteamiento del problema

Consideremos el sistema de control no lineal n -dimensional

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (5.1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, y $f, g \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, con $r \geq 2$. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que se cumplen las condiciones de no hiperbolicidad planteadas en el capítulo 4

H1) $f(x_0) = 0$, y

H2) $\sigma(Df(x_0)) = \{ \lambda_{1,2} = 0, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \text{ para } j = 3, \dots, n \}$, considerándose el caso no diagonalizable. Es decir

$$Df(x_0) \sim J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_H \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y } J_H \text{ es una matriz Hurwitz.} \quad (5.1.2)$$

Nuestro objetivo es diseñar una ley de control escalar $u = u(x, \mu, \gamma)$, donde $\mu \in \mathbb{R}^2$ es un vector de *parámetros de bifurcación artificiales*, y $\gamma \in \mathbb{R}^5$ es un vector de *parámetros de control indeterminados*, tal que la dinámica sobre la variedad central del sistema a lazo-cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x, \mu, \gamma), \quad (5.1.3)$$

es localmente topológicamente equivalente a la deformación controlable

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix}. \quad (5.1.4)$$

Diremos que el sistema (5.1.4) es una *deformación versal controlable* del sistema a lazo-cerrado (5.1.3). Si tal control u existe, diremos que el sistema (5.1.1) experimenta una *bifurcación Takens-Bogdanov controlable*.

5.2. El sistema en su forma de Jordan

En esta sección se da el primer cambio de coordenadas del capítulo, para poner el sistema (5.1.1) en forma normal (forma de Jordan). La expansión de Taylor alrededor del punto de equilibrio x_0 del sistema (5.1.1), toma la forma

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + \cdots + (g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + \cdots)u, \quad (5.2.1)$$

por H2), $Df(x_0)$ tiene un valor propio cero de multiplicidad algebraica dos, entonces supongamos que p_1 y p_2 son sus vectores propios derechos generalizados asociados a $\lambda = 0$, es decir,

$$Df(x_0)p_1 = 0 \quad \text{y} \quad Df(x_0)p_2 = p_1,$$

y supongamos igual que q_1 y q_2 son los vectores propios izquierdos generalizados, asociados a $\lambda = 0$, es decir,

$$q_2^T Df(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad q_1^T Df(x_0)p_2 = q_2^T,$$

donde $\langle p_i, q_i \rangle = 1$ y $\langle p_i, q_j \rangle = 0$, para $i \neq j$.

Definamos matrices

$$Q = (v_0 \ P_0) \quad \text{y} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} w_0 \\ Q_0 \end{pmatrix},$$

donde

$$v_0 = (p_1 \ p_2), \quad w_0 = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

y P_0, Q_0 son las matrices que contienen los vectores propios generalizados izquierdos y derechos, de la matriz J_H .

Si definimos $y = Q^{-1}(x - x_0)$ el sistema (5.2.1) toma la forma

$$\dot{y} = Jy + \frac{1}{2}Q^{-1}(Qy)^T D^2 f(x_0)Qy + \cdots + (b + My + \cdots)u, \quad (5.2.3)$$

donde $J = Q^{-1}Df(x_0)Q$, $b = Q^{-1}g(x_0)$ y $M = Q^{-1}Dg(x_0)Q$. Definamos ahora

$$y_1 = w_0(x - x_0) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.2.4)$$

$$y_2 = Q_0(x - x_0) \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad (5.2.5)$$

$$b_1 = w_0 g(x_0) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.2.6)$$

$$b_2 = Q_0 g(x_0) \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad (5.2.7)$$

y

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 Dg(x_0)v_0 & w_0 Dg(x_0)P_0 \\ Q_0 Dg(x_0)v_0 & Q_0 Dg(x_0)P_0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.8)$$

Con el fin de simplificar los cálculos de los términos del sistema (5.2.3), usaremos el producto \bullet definido en la sección 4.2.2. Observe que $Qy = v_0y_1 + P_0y_2$, entonces

$$Q^{-1}(Qy)^T D^2 f(x_0) Qy = \begin{pmatrix} w_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} (Qy)^T D^2 f(x_0) Qy = \begin{pmatrix} w_0(Qy)^T D^2 f(x_0) Qy \\ Q_0(Qy)^T D^2 f(x_0) Qy \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\begin{aligned} w_0(Qy)^T D^2 f(x_0) Qy &= w_0(v_0y_1 + P_0y_2)^T D^2 f(x_0)(v_0y_1 + P_0y_2) \\ &= w_0 \left(y_1^T v_0^T D^2 f(x_0) v_0 y_1 + 2y_1^T v_0^T D^2 f(x_0) P_0 y_2 + \right. \\ &\quad \left. y_2^T P_0^T D^2 f(x_0) P_0 y_2 \right), \\ &= w_0 y_1^T v_0^T D^2 f(x_0) v_0 y_1 + 2w_0 y_1^T v_0^T D^2 f(x_0) P_0 y_2 + \\ &\quad w_0 y_2^T P_0^T D^2 f(x_0) P_0 y_2, \end{aligned}$$

luego entonces, si $q_i = (q_{i1}, \dots, q_{in})^T$, entonces

$$\begin{aligned} w_0 y_1^T v_0^T D^2 f(x_0) v_0 y_1 &= \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^T v_0^T D^2 f_1(x_0) v_0 y_1 \\ \vdots \\ y_1^T v_0^T D^2 f_n(x_0) v_0 y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n q_{1j} (y_1^T v_0^T D^2 f_j(x_0) v_0 y_1) \\ \sum_{j=1}^n q_{2j} (y_1^T v_0^T D^2 f_j(x_0) v_0 y_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1^T v_0^T \left(\sum_{j=1}^n q_{1j} D^2 f_j(x_0) \right) v_0 y_1 \\ y_1^T v_0^T \left(\sum_{j=1}^n q_{2j} D^2 f_j(x_0) \right) v_0 y_1 \end{pmatrix} \\ &= y_1^T v_0^T \begin{pmatrix} q_1 \bullet D^2 f(x_0) \\ q_2 \bullet D^2 f(x_0) \end{pmatrix} v_0 y_1 \\ &= y_1^T v_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 y_1, \end{aligned}$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} w_0(Qy)^T D^2 f(x_0) Qy &= y_1^T v_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 y_1 + 2y_1^T v_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 \\ &\quad + y_2^T P_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} Q_0(Qy)^T D^2 f(x_0) Qy &= y_1^T v_0^T (Q_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 y_1 + 2y_1^T v_0^T (Q_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 \\ &\quad + y_2^T P_0^T (Q_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2. \end{aligned}$$

Lema 5.1 *Considérese el sistema de control no lineal (5.1.1)*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

y supongamos que existe x_0 que satisface H1) – H2). Entonces el cambio de coordenadas $y = Q^{-1}(x - x_0)$ transforma (5.1.1) en

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T v_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 y_1 + y_1^T v_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} y_2^T P_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 + \cdots + (b_1 + M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) u, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= J_H y_2 + \frac{1}{2} y_1^T v_0^T (Q_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 y_1 + y_1^T v_0^T (Q_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} y_2^T P_0^T (Q_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 + \cdots + (b_2 + M_3 y_1 + M_4 y_2 + \cdots) u, \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Es importante mencionar que algunos términos en (5.2.9)-(5.2.10) son irrelevantes para nuestros propósitos, por lo tanto, de aquí en adelante consideraremos el sistema reducido

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J_0 y_1 + \frac{1}{2} y_1^T v_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 y_1 + y_1^T v_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 + \cdots \\ &\quad + (b_1 + M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) u, \\ \dot{y}_2 &= J_H y_2 + \frac{1}{2} y_1^T v_0^T (Q_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 y_1 + \cdots + (b_2 + M_3 y_1 + \cdots) u, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

y definimos

$$f_2(y_1) = \frac{1}{2} y_1^T v_0^T (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 y_1 = \begin{pmatrix} y_1^T \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2} a_{12} \\ \frac{1}{2} a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} y_1 \\ y_1^T \begin{pmatrix} a_{21} & \frac{1}{2} a_{22} \\ \frac{1}{2} a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} y_1 \end{pmatrix} \quad (5.2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \frac{1}{2} p_1^T (q_i \bullet D^2 f(x_0)) p_1 \\ a_{i2} &= p_1^T (q_i \bullet D^2 f(x_0)) p_2 \\ a_{i3} &= \frac{1}{2} p_2^T (q_i \bullet D^2 f(x_0)) p_2, \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

para $i = 1, 2$.

5.3. Diseño de la ley de control

En esta sección, seguiremos el desarrollo hecho en el capítulo tres, para encontrar un cambio de coordenadas $y = \psi(z)$ y diseñar una ley de control $u(y, \mu, \gamma)$ tal que, las dinámicas sobre la variedad central del sistema de control no lineal (5.1.1), sean localmente topológicamente equivalente a (5.1.4).

5.3.1. Primer cambio de coordenadas y primera entrada de control

Consideremos el cambio de coordenadas y la entrada de control

$$\begin{aligned} y_1 &= P(w + H(w)), & y_2 &= y_2, \\ u &= L_0^T \mu + v, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} L_0 &= \begin{pmatrix} l_{01} \\ l_{02} \end{pmatrix}, & \mu &= \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \\ P^{-1} &= (p_{ij})_{2 \times 2}, \\ H(w) &= w^T H_0 w = \begin{pmatrix} w^T H_{01} w \\ w^T H_{02} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1(w) \\ H_2(w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} w_1^2 + 2c_{12} w_1 w_2 + c_{13} w_2^2 \\ c_{21} w_1^2 + 2c_{22} w_1 w_2 + c_{23} w_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\dot{y}_1 = P(I + DH(w))\dot{w} \Leftrightarrow \dot{w} = (I + DH(w))^{-1} P^{-1} \dot{y}_1.$$

Si $w \approx 0$, $(I + DH(w))^{-1} = I - DH(w) + \mathcal{O}(|w|^2)$. Además,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J_0(Pw + PH(w)) + \frac{1}{2} (Pw + PH(w))^T v_0^T(w_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 (Pw + PH(w)) \\ &\quad + (Pw + PH(w))^T v_0^T(w_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 + \dots \\ &\quad + (b_1 + M_1(Pw + PH(w)) + M_2 y_2 + \dots) (L_0^T \mu + v) \\ &= b_1 L_0^T \mu + J_0 Pw + (M_1 Pw L_0^T \mu + M_2 y_2 L_0^T \mu) \\ &\quad + \left(J_0 PH(w) + \frac{1}{2} (Pw)^T v_0^T(w_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 (Pw) + (Pw)^T v_0^T(w_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 \right) + \dots \\ &\quad + (b_1 + M_1 Pw + M_2 y_2 + \dots) v, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (I + DH(w))^{-1} P^{-1} \dot{y}_1 \\ &= (I - DH(w) + \dots) P^{-1} \left[b_1 L_0^T \mu + J_0 Pw + (M_1 Pw L_0^T \mu + M_2 y_2 L_0^T \mu) \right. \\ &\quad \left. + \left(J_0 PH(w) + \frac{1}{2} (Pw)^T v_0^T(w_0 \bullet D^2 f(x_0)) v_0 (Pw) + (Pw)^T v_0^T(w_0 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 y_2 \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (b_1 + M_1 Pw + M_2 y_2 + \dots) v \right] \\ &= \bar{b}_1 L_0^T \mu + \bar{J}_0 w + \bar{M}_1 w L_0^T \mu + \bar{f}_2(w) + w^T \bar{R}_2 y_2 + \dots + (\bar{b}_1 + \bar{M}_1 w + P^{-1} M_2 y_2 + \dots) v, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1 &= P^{-1}b_1, \\
\bar{J}_0 &= P^{-1}J_0P, \\
\bar{M}_1 &= P^{-1}M_1P - 2\bar{b}_1^T H_0, \\
\bar{f}_2(w) &= P^{-1}f_2(Pw) + \bar{J}_0H(w) - DH(w)\bar{J}_0w, \\
\bar{R}_2 &= P^T v_0^T \left(P^{-1} (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) \right) P_0, \\
P^{-1} (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 p_{1j} (q_j \bullet D^2 f(x_0)) \\ \sum_{j=1}^2 p_{2j} (q_j \bullet D^2 f(x_0)) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

De manera similar,

$$\dot{y}_2 = b_2 L_0^T \mu + J_H y_2 + \dots + (b_2 + \dots)v.$$

Entonces, hemos probado el siguiente

Lema 5.2 *El sistema (5.2.11) es transformado en*

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \bar{b}_1 L_0^T \mu + \bar{J}_0 w + \bar{M}_1 w L_0^T \mu + \bar{f}_2(w) + w^T \bar{R}_2 y_2 + \dots + \left(\bar{b}_1 + \bar{M}_1 w + P^{-1} M_2 y_2 + \dots \right) v, \\
\dot{y}_2 &= b_2 L_0^T \mu + J_H y_2 + \dots + (b_2 + \dots)v,
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

a través del cambio de coordenadas y la entrada de control (5.3.1).

Lema 5.3 *Si $q_2^T g(x_0) \neq 0$, entonces existen P y H_0 tales que*

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1 &= e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\bar{J}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & \delta_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\bar{M}_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Prueba:

De (5.2.6), tenemos que

$$b_1 = w_0 g(x_0) = \begin{pmatrix} q_1^T g(x_0) \\ q_2^T g(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix},$$

y de (5.2.8),

$$M_1 = w_0 Dg(x_0) v_0 = \begin{pmatrix} q_1^T Dg(x_0) p_1 & q_1^T Dg(x_0) p_2 \\ q_2^T Dg(x_0) p_1 & q_2^T Dg(x_0) p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

donde $m_{ij} = q_i^T Dg(x_0) p_j$. Entonces, si definimos

$$P = \begin{pmatrix} \frac{b_{12}}{\delta_3} & b_{11} \\ 0 & b_{12} \end{pmatrix} \tag{5.3.4}$$

y

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{m_{11}b_{12} - b_{11}m_{21}}{2b_{12}}, \\ c_{13} &= \frac{\delta_3 (b_{11}m_{11}b_{12} - b_{11}^2m_{21} + m_{12}b_{12}^2 - b_{12}b_{11}m_{22})}{2b_{12}^2}, \\ c_{22} &= \frac{m_{21}}{2\delta_3}, \\ c_{23} &= \frac{b_{11}m_{21} + m_{22}b_{12}}{2b_{12}}, \end{aligned}$$

el resultado se sigue. □

If $q_2^T g(x_0) \neq 0$, definimos

$$\tilde{f}_2(w) = P^{-1}f_2(Pw) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{21}(w) \\ \tilde{f}_{22}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}w_1^2 + \tilde{a}_{12}w_1w_2 + \tilde{a}_{13}w_2^2 \\ \tilde{a}_{21}w_1^2 + \tilde{a}_{22}w_1w_2 + \tilde{a}_{23}w_2^2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= \frac{a_{11}b_{12} - a_{21}b_{11}}{\delta_3}, \\ \tilde{a}_{12} &= (2a_{11} - a_{22})b_{11} + a_{12}b_{12} - \frac{2a_{21}b_{11}^2}{b_{12}}, \\ \tilde{a}_{13} &= \frac{\delta_3}{b_{12}^2} (-a_{21}b_{11}^3 + b_{12}(a_{11}b_{11}^2 - a_{22}b_{11}^2 + b_{12}(a_{12}b_{11} - a_{23}b_{11} + a_{13}b_{12}))), \\ \tilde{a}_{21} &= \frac{a_{21}b_{12}}{\delta_3^2}, \\ \tilde{a}_{22} &= \frac{2a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}}{\delta_3}, \\ \tilde{a}_{23} &= a_{22}b_{11} + a_{23}b_{12} + \frac{a_{21}b_{11}^2}{b_{12}}. \end{aligned}$$

Lema 5.4 Si $q_2^T g(x_0) \neq 0$, $c_{11} = \frac{\tilde{a}_{12} + 2\delta_3 c_{22}}{2\delta_3}$, y $c_{21} = -\frac{\tilde{a}_{11}}{\delta_3}$, entonces,

$$\bar{f}_2(w) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13}w_2^2 \\ \bar{a}_{21}w_1^2 + \bar{a}_{22}w_1w_2 + \bar{a}_{23}w_2^2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{a}_{13} &= \tilde{a}_{13} + \delta_3(c_{23} - 2c_{12}), \\ \bar{a}_{21} &= \tilde{a}_{21}, \\ \bar{a}_{22} &= \tilde{a}_{22} - 2\delta_3 c_{21}, \\ \bar{a}_{23} &= \tilde{a}_{23} - 2\delta_3 c_{22}. \end{aligned}$$

Prueba:

Sólo observe que

$$\begin{aligned}
\bar{f}_2(w) &= P^{-1}f_2(Pw) + \bar{J}_0H(w) - DH(w)\bar{J}_0w \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{f}_{21}(w) \\ \tilde{f}_{22}(w) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_3H_2(w) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_3w_2\frac{\partial H_1}{\partial w_1} \\ \delta_3w_2\frac{\partial H_2}{\partial w_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{f}_{21}(w) + \delta_3H_2(w) - \delta_3w_2\frac{\partial H_1}{\partial w_1} \\ \tilde{f}_{22}(w) - \delta_3w_2\frac{\partial H_2}{\partial w_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\tilde{a}_{11} + \delta_3c_{21})w_1^2 + (\tilde{a}_{12} + 2\delta_3c_{22} - 2\delta_3c_{11})w_1w_2 + (\tilde{a}_{13} + \delta_3c_{23} - 2\delta_3c_{12})w_2^2 \\ \tilde{a}_{21}w_1^2 + (\tilde{a}_{22} - 2\delta_3c_{21})w_1w_2 + (\tilde{a}_{23} - 2\delta_3c_{22})w_2^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Entonces, hemos probado el resultado principal de esta sección

Proposición 5.5 Si $q_2^T g(x_0) \neq 0$, entonces existen P y H_0 tales que, el cambio de coordenadas y la entrada de control (5.3.1) transforma (5.2.11) en

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= L_0^T \mu e_2 + \bar{J}_0 w + \bar{f}_2(w) + w^T \bar{R}_2 y_2 + \cdots + (e_2 + P^{-1} M_2 y_2 + \cdots) v, \\
\dot{y}_2 &= b_2 L_0^T \mu + J_H y_2 + \cdots + (b_2 + \cdots) v,
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

□

5.3.2. Segundo cambio de coordenadas y segunda entrada de control

Ahora, consideremos el cambio de coordenadas y la entrada de control

$$\begin{aligned}
w &= z + h(z), \quad y_2 = y_2 \\
v &= \mu^T L_1 z + k(z),
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

$$\text{donde } z = (z_1, z_2)^T, \mu = (\mu_1, \mu_2)^T, h(z) = z^T h_0 z = \begin{pmatrix} z^T h_{01} z \\ z^T h_{02} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}z_1^2 + 2d_{12}z_1z_2 + d_{13}z_2^2 \\ d_{21}z_1^2 + 2d_{22}z_1z_2 + d_{23}z_2^2 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix}, \quad \text{and } k(z) = k_1z_1^2 + k_2z_1z_2 + k_3z_2^2. \tag{5.3.7}$$

Lema 5.6 El sistema (5.3.5) se transforma en

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= L_0^T \mu e_2 + \bar{J}_0 z + (\mu^T L_1 z e_2 - Dh(z)L_0^T \mu e_2) + (\bar{f}_2(z) + \bar{J}_0 h(z) - Dh(z)\bar{J}_0 z + k(z)e_2) \\
&\quad + z^T \bar{R}_2 y_2 + \cdots \\
\dot{y}_2 &= b_2 L_0^T \mu + J_H y_2 + \cdots
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

a través del cambio de coordenadas y la entrada de control (5.3.6).

Prueba:

Sólo observe que

$$\dot{w} = (I + Dh(z))\dot{z} \Leftrightarrow \dot{z} = (I + Dh(z))^{-1}\dot{w},$$

y, si $z \approx 0$, $(I + Dh(z))^{-1} = I - Dh(z) + \mathcal{O}(|z|^2)$, y $\bar{f}_2(z + h(z)) = \bar{f}_2(z) + \dots$. \square

De (5.3.2), sabemos que

$$\begin{aligned} \bar{R}_2 &= P^T v_0^T \left(P^{-1} (w_0 \bullet D^2 f(x_0)) \right) P_0 \\ &= P^T v_0^T \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 p_{1j} (q_j \bullet D^2 f(x_0)) \\ \sum_{j=1}^2 p_{2j} (q_j \bullet D^2 f(x_0)) \end{pmatrix} P_0 \\ &= \begin{pmatrix} P^T v_0^T \left(\sum_{j=1}^2 p_{1j} (q_j \bullet D^2 f(x_0)) \right) P_0 \\ P^T v_0^T \left(\sum_{j=1}^2 p_{2j} (q_j \bullet D^2 f(x_0)) \right) P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{R}_{21})_{2 \times (n-2)} \\ (\bar{R}_{22})_{2 \times (n-2)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pero, de (5.3.4),

$$\begin{aligned} \bar{R}_{21} &= \begin{pmatrix} p_1^T \left(\left(q_1 - \frac{b_{11}}{b_{12}} q_2 \right) \bullet D^2 f(x_0) \right) P_0 \\ \frac{\delta_3}{b_{12}} (b_{11} p_1^T + b_{12} p_2^T) \left(\left(q_1 - \frac{b_{11}}{b_{12}} q_2 \right) \bullet D^2 f(x_0) \right) P_0 \end{pmatrix} \\ \bar{R}_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_3} p_1^T (q_2 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 \\ \frac{1}{b_{12}} (b_{11} p_1^T + b_{12} p_2^T) (q_2 \bullet D^2 f(x_0)) P_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lema 5.7 Dado el sistema (5.3.8),

(i) la variedad central es dada por $y_2 = -J_H^{-1} b_2 L_0^T \mu + \dots$, y

(ii) las dinámicas sobre la variedad central están dadas por

$$\dot{z} = L_0^T \mu e_2 + \bar{J}_0 z + \mu^T \mathcal{L} z + F_2(z), \quad (5.3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} -2L_0 (h_{01} e_2)^T - L_0 \left(J_H^{-1} b_2 \right)^T \bar{R}_{21}^T \\ L_1 - 2L_0 (h_{02} e_2)^T - L_0 \left(J_H^{-1} b_2 \right)^T \bar{R}_{22}^T \end{pmatrix}, \\ F_2(z) &= \bar{f}_2(z) + \bar{J}_0 h(z) - Dh(z) \bar{J}_0 z + k(z) e_2. \end{aligned}$$

Prueba:

Consideremos

$$y_2 = \varphi(z, \mu) = \varphi_1 z + \varphi_2 \mu + \dots,$$

entonces $\dot{y}_2 = \varphi_1 \dot{z}$, y del sistema (5.3.8) tenemos que

$$b_2 L_0^T \mu + J_H(\varphi_1 z + \varphi_2 \mu) + \cdots = \varphi_1(L_0^T \mu e_2 + \bar{J}_0 z) + \cdots,$$

entonces

$$(b_2 L_0^T + J_H \varphi_2 - \varphi_1 L_0^T e_2) \mu + (J_H \varphi_1 - \varphi_1 \bar{J}_0) z \equiv 0,$$

así, debemos resolver el sistema

$$b_2 L_0^T + J_H \varphi_2 - \varphi_1 L_0^T e_2 = 0, \quad (5.3.10)$$

$$J_H \varphi_1 - \varphi_1 \bar{J}_0 = 0. \quad (5.3.11)$$

Por el lema de Sylvester (ver [17],[21]), la ecuación (5.3.11) tiene solución única $\varphi_1 = 0$ y sustituyendo este valor en la ecuación (5.3.10), tenemos que $\varphi_2 = -J_H^{-1} b_2 L_0^T$, por lo tanto la variedad central de (5.3.8) es dada por

$$y_2 = -J_H^{-1} b_2 L_0^T \mu + \cdots. \quad (5.3.12)$$

Luego, sustituyendo (5.3.12) en la primera ecuación de (5.3.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z} = & L_0^T \mu e_2 + \bar{J}_0 z + \left[\mu^T L_1 z e_2 - Dh(z) L_0^T \mu e_2 - z^T \bar{R}_2 J_H^{-1} b_2 L_0^T \mu \right] \\ & + \left[\bar{f}_2(z) + \bar{J}_0 h(z) - Dh(z) \bar{J}_0 z + k(z) e_2 \right] + \cdots, \end{aligned}$$

pero,

$$\mu^T L_1 z e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^T L_1 z \end{pmatrix} = \mu^T \begin{pmatrix} 0 \\ L_1 \end{pmatrix} z,$$

$$Dh(z) L_0^T \mu e_2 = 2 \mu^T L_0 z^T h_0 e_2 = 2 \mu^T L_0 \begin{pmatrix} (h_{01} e_2)^T z \\ (h_{02} e_2)^T z \end{pmatrix} = \mu^T \begin{pmatrix} 2 L_0 (h_{01} e_2)^T \\ 2 L_0 (h_{02} e_2)^T \end{pmatrix} z, \text{ y}$$

$$z^T \bar{R}_2 J_H^{-1} b_2 L_0^T \mu = \mu^T L_0 \begin{pmatrix} z^T \bar{R}_{21} J_H^{-1} b_2 \\ z^T \bar{R}_{22} J_H^{-1} b_2 \end{pmatrix} = \mu^T \begin{pmatrix} L_0 (J_H^{-1} b_2)^T \bar{R}_{21}^T \\ L_0 (J_H^{-1} b_2)^T \bar{R}_{22}^T \end{pmatrix},$$

entonces, el resultado se sigue. \square

Proposición 5.8 *El sistema (5.3.9) es localmente suavemente equivalente a la deformación versal controlable*

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3). \quad (5.3.13)$$

Prueba:

Debemos probar que

$$F_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix}, \quad (5.3.14)$$

$$\mu^T \mathcal{L} z = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \mu_2 z_2 \end{pmatrix}. \quad (5.3.15)$$

Observe que

$$\begin{aligned}
F_2(z) &= \bar{f}_2(z) + \bar{J}_0 h(z) - Dh(z) \bar{J}_0 z + k(z) e_2 \\
&= \begin{pmatrix} (\bar{a}_{13} z_2^2) + \delta_3 (z^T h_{02} z) - z^T h_{01} \bar{J}_0 z \\ (\bar{a}_{21} z_1^2 + \bar{a}_{22} z_1 z_2 + \bar{a}_{23} z_2^2) - z^T h_{02} \bar{J}_0 z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\delta_3 d_{21}) z_1^2 + (2\delta_3 d_{22} - \delta_3 d_{11}) z_1 z_2 + (\delta_3 d_{23} - \delta_3 d_{12} + \bar{a}_{13}) z_2^2 \\ (\bar{a}_{21} + k_1) z_1^2 + (\bar{a}_{22} - \delta_3 d_{21} + k_2) z_1 z_2 + (\bar{a}_{23} - \delta_3 d_{22} + k_3) z_2^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \begin{pmatrix} -2L_0 (h_{01} e_2)^T - L_0 \left(J_H^{-1} b_2 \right)^T \bar{R}_{21}^T \\ L_1 - 2L_0 (h_{02} e_2)^T - L_0 \left(J_H^{-1} b_2 \right)^T \bar{R}_{22}^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -L_0 \left(2 (h_{01} e_2)^T + \left(J_H^{-1} b_2 \right)^T \bar{R}_{21}^T \right) \\ L_1 - L_0 \left(2 (h_{02} e_2)^T + \left(J_H^{-1} b_2 \right)^T \bar{R}_{22}^T \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si llamamos al vector $\left(J_H^{-1} b_2 \right)^T \bar{R}_{2i}^T = (n_{i1}, n_{i2})$, para $i = 1, 2$, entonces una solución del sistema (5.3.14-5.3.15) es dada por

$$\begin{aligned}
L_0 &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 (n_{22} - n_{11}) - \frac{2\beta_1 \bar{a}_{13}}{\delta_3} \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{5.3.16}
\end{aligned}$$

$$k(z) = (\delta_1 - \bar{a}_{21}) z_1^2 + (\delta_2 - \bar{a}_{22}) z_1 z_2 + \left(\frac{1}{2} n_{21} \delta_3 - \bar{a}_{23} \right) z_2^2,$$

$$y \ h(z) = \begin{pmatrix} -n_{21} z_1^2 - n_{11} z_1 z_2 - \frac{1}{2} n_{12} z_2^2 \\ -n_{21} z_1 z_2 - \frac{1}{2\delta_3} (\delta_3 n_{11} + 2\bar{a}_{13}) z_2^2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Finalmente, mediante un análisis de bifurcación como el trabajado en el capítulo tres, podemos verificar también en esta parte, que existen tres curvas de bifurcación implícitas en la bifurcación Takens-Bogdanvo: la bifurcación silla-nodo, la bifurcación de Hopf y la bifurcación homoclínica. Tales curvas de bifurcación están dadas en la proposición 3.8.

5.4. Resultado principal

En esta sección estableceremos el teorema principal del capítulo.

Teorema 5.9 *Dado el sistema de control no lineal*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (5.4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, y $f, g \in \mathbb{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, con $r \geq 2$. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que, las siguientes condiciones son satisfechas:

$$H1) f(x_0) = 0,$$

$$H2) \sigma(Df(x_0)) = \{ \lambda_{1,2} = 0, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \text{ for } j = 3, \dots, n \}, \text{ considerando el caso no semi-simple, y}$$

$$H3) q_2^T g(x_0) \neq 0, \text{ donde } q_2 \text{ es el vector propio izquierdo asociado al valor propio cero.}$$

Entonces, si

$$u = L_0^T \mu + \mu^T L_1 P^{-1} w_0(x - x_0) + k(P^{-1} w_0(x - x_0)), \quad (5.4.2)$$

donde $L_0, L_1, k(z), P$, y w_0 son dados por (5.3.16), (5.3.4) y (5.2.2) respectivamente, las dinámicas sobre la variedad central del sistema a lazo-cerrado (5.4.1-5.4.2) es localmente suavemente equivalente al sistema

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3).$$

Prueba:

Considerando la variedad central del sistema a lazo-cerrado (5.4.1-5.4.2), donde $y_1 = w_0(x - x_0)$,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J_0 y_1 + f_2(y_1) + \dots + (b_1 + M_1 y_1 + \dots) \left(\beta_1 \mu_1 + \mu^T L_1 P^{-1} y_1 + k(P^{-1} y_1) \right) \\ &= \beta_1 \mu_1 b_1 + J_0 y_1 + \beta_1 \mu_1 M_1 y_1 + (\mu^T L_1 P^{-1} y_1) b_1 + f_2(y_1) + k(P^{-1} y_1) b_1 + \mathcal{O}(|(\mu, y)|^3) \\ &= X(y_1, \mu, \gamma) + \mathcal{O}(|(\mu, y_1)|^3), \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

y el difeomorfismo $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$y_1 = \psi(z) = P(z + \mathcal{H}(z)),$$

con $\mathcal{H}(z) = H(z) + h(z)$, donde $H(z)$ y $h(z)$ son dados por (5.3.1) y (5.3.6) respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= (P(I + D\mathcal{H}(z)))^{-1} \dot{y}_1 \\
&= (I - D\mathcal{H}(z) + \dots) P^{-1} X(\psi(z), \mu, \gamma) + \dots \\
&= \beta_1 \mu_1 P^{-1} b_1 + P^{-1} J_0 P z + \beta_1 \mu_1 \left(P^{-1} M_1 P z - D\mathcal{H}(z) P^{-1} b_1 \right) + (\mu^T L_1 z) P^{-1} b_1 \\
&\quad + P^{-1} f_2(Pz) + P^{-1} J_0 P \mathcal{H}(z) - D\mathcal{H}(z) P^{-1} J_0 P z + k(z) P^{-1} b_1 + \dots \\
&= \beta_1 \mu_1 P^{-1} b_1 + P^{-1} J_0 P z + \beta_1 \mu_1 \left(P^{-1} M P z - D H(z) P^{-1} b_1 \right) - \beta_1 \mu_1 D h(z) P^{-1} b_1 \\
&\quad + (\mu^T L_1 z) P^{-1} b_1 + P^{-1} f_2(Pz) + P^{-1} J_0 P H(z) - D H(z) P^{-1} J_0 P z + P^{-1} J_0 P h(z) \\
&\quad - D h(z) P^{-1} J_0 P z + k(z) P^{-1} b_1 + \dots \\
&= \beta_1 \mu_1 e_2 + \bar{J}_0 z + \beta_1 \mu_1 \bar{M}_1 z + \mu \mathcal{L} z + F_2(z) + \dots \\
&= \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(\mu, z)|^3).
\end{aligned}$$

□

Corolario 5.10 *Las dinámicas sobre la variedad central del sistema a lazo-cerrado (5.4.1-5.4.2) son localmente topológicamente equivalentes al sistema*

$$\dot{z} = Z(z, \mu, \gamma) = \begin{pmatrix} \delta_3 z_2 \\ \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 z_2 + \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_1 z_2 \end{pmatrix}. \quad (5.4.4)$$

El sistema (5.4.4) es llamado *deformación versal controlable* del sistema de control no lineal (5.4.1).

5.5. Ejemplo de Aplicación: Un péndulo Invertido

En esta sección, proponemos un sistema mecánico oscilatorio basándonos en particular en el modelo propuesto en [3]. El sistema es un péndulo subactuado con un disco a manera de inercia, montado en el extremo libre del péndulo.

5.5.1. Descripción del sistema

El sistema mecánico considerado, se muestra en la Figura 5.1. Es un péndulo convencional con un disco de inercia en su extremo libre. El sistema actúa por medio de torques aplicados al disco por un motor de corriente directa montado sobre el brazo del péndulo. Este sistema es subactuado ya que el péndulo puede rotar libremente alrededor de su punto pivote.

El modelo dinámico de este sistema está dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= r_1 \sin x_1 + r_2 x_3 - r_3 v, \\
\dot{x}_3 &= -r_1 \sin x_1 - r_2(1 + \rho)x_3 + r_3(1 + \rho)v,
\end{aligned} \quad (5.5.1)$$

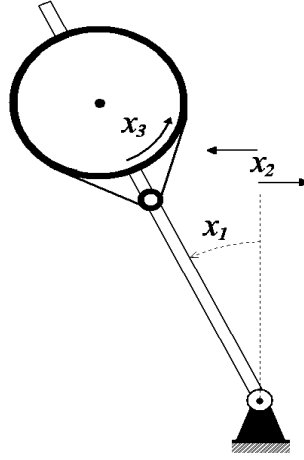


Figura 5.1: El péndulo subactuado.

donde x_1 es el ángulo del brazo ($x_1 = 0$ es la posición vertical hacia arriba) con respecto a la vertical, x_2 es la velocidad angular del brazo, x_3 es la velocidad angular del disco con respecto al brazo, v es la entrada de control (es el voltaje aplicado al motor), y $r_1, r_2, r_3, \rho > 0$ son coeficientes constantes considerados a partir de parámetros físicos del péndulo. La posición del disco no es considerada como un estado del sistema, por que ésta es irrelevante para la estabilización del péndulo en posición invertida y con el fin de hacer el análisis de bifurcación más simple.

Consideraremos el origen ($x_0 = (0, 0, 0)$) como nuestro punto de equilibrio. Pero antes, haremos las siguientes consideraciones para la entrada de control v

$$v = \kappa^T x + u, \quad (5.5.2)$$

donde $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^T$ y $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, entonces, sustituyendo (5.5.2) en (5.5.1), obtenemos

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (5.5.3)$$

donde,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ r_1 \sin x_1 + r_2 x_3 - r_3 \kappa^T x \\ -r_1 \sin x_1 - r_2(1 + \rho)x_3 + r_3(1 + \rho)\kappa^T x \end{pmatrix},$$

y

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_3 \\ r_3(1 + \rho) \end{pmatrix},$$

es claro que $f(x_0) = 0$.

Si definimos $\kappa_1 = r_1/r_3$, $\kappa_2 = 1/r_3$ y $\kappa_3 = r_2/r_3$, entonces, la matriz Jacobiana de (5.5.3), evaluada en x_0 es

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -r_1 + (1 + \rho)r_1 & 1 + \rho & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_{1,2} = 0$ y $\lambda_3 = -1$. Ahora, si definimos matrices

$$Q = (p_1 \ p_2 \ p_3); \quad \text{and} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{pmatrix},$$

donde

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho r_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \rho r_1 - \rho - 1 \end{pmatrix},$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho + 1 - \rho r_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} \rho r_1 \\ \rho r_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{entonces } Q^{-1} \cdot Df(x_0) \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot Df(x_0) \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{además } q_2^T g(x_0) = -\rho r_1 r_3 \neq 0.$$

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -r_1 + (1 + \rho)r_1 & 1 + \rho & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_{1,2} = 0$ y $\lambda_3 = -1$. Ahora, si definimos matrices

$$Q = (p_1 \ p_2 \ p_3); \quad \text{and} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{pmatrix},$$

donde

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho r_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \rho r_1 - \rho - 1 \end{pmatrix},$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho + 1 - \rho r_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} \rho r_1 \\ \rho r_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{entonces } Q^{-1} \cdot Df(x_0) \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{además } q_2^T g(x_0) = -\rho r_1 r_3 \neq 0, \text{ entonces}$$

podemos aplicar el teorema principal de este capítulo a (5.5.3) en $x_0 = 0$. Si definimos

$$u_1(x, \gamma) = \frac{\delta_2 \delta_3 (r_1 \rho x_1 + \rho x_2 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2)}{r_1 r_3^2 \rho} + \frac{\delta_1 \delta_3^2 (r_1 \rho x_1 + \rho x_2 + x_2 + x_3)^2}{r_1^2 r_3^2 \rho^2},$$

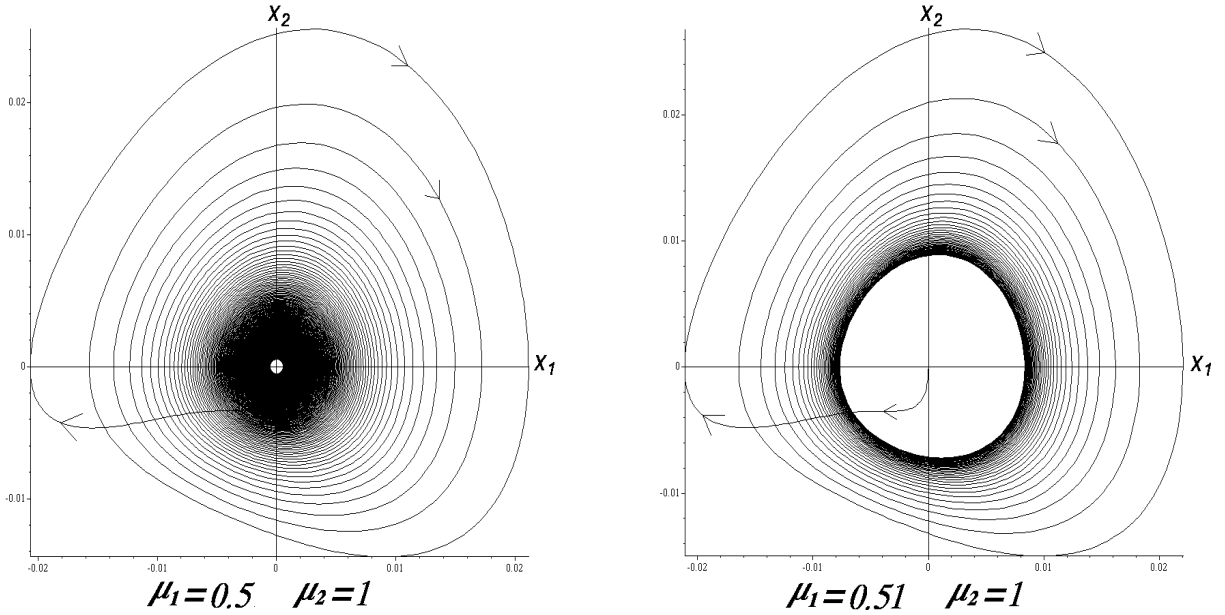


Figura 5.2: Una bifurcación de Hopf supercrítica en el valor de bifurcación $\mu_1 = 0,5$ con $\mu_2 = 1$, mostrada en el plano x_1x_2 .

entonces, la entrada de control u es dado por

$$u(x, \mu, \gamma) = \beta_1 \mu_1 - \frac{\beta_2 \mu_2}{r_3} (x_1 + x_2) + u_1(x, \gamma). \quad (5.5.4)$$

Si tomamos los valores $r_1 = 30$, $r_2 = 0,0245$, $r_3 = 0,0393$, $\rho = 250$ (que son los valores asignados en [3]). Para producir el diagrama de la bifurcación de Hopf dada en la Figura 3.4-c, tomamos $\beta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$, $\beta_2 = -1$ y $\delta_1 = -1/2$, y obtenemos la ley de control

$$v(x, \mu) = \kappa^T x + \mu_1 + 25,45\mu_2(x_1 + x_2) + 323,73x_1^2 + 647,46x_1x_2 + 21,31x_2^2 + 0,08x_2x_3 - 5,76 \times 10^{-6}x_3^2, \quad (5.5.5)$$

entonces, el sistema a lazo-cerrado (5.5.1)-(5.5.5), es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 30 \sin x_1 - 30x_1 - x_2 - 0,0393\mu_1 - \mu_2(x_1 + x_2) - 12,7x_1^2 - 25,45x_1x_2 + 5 \times 10^{-13}x_1x_3 \\ &\quad - 0,84x_2^2 - 0,0033x_2x_3 + 2,26 \times 10^{-7}x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= -30 \sin x_1 + 7530x_1 + 251x_2 + 9,86\mu_1 + 251\mu_2(x_1 + x_2) + 3193,38x_1^2 + 6386,77x_1x_2 \\ &\quad + 5 \times 10^{-11}x_1x_3 + 210,17x_2^2 + 0,82x_2x_3 - 5,6 \times 10^{-5}x_3^2. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Para observar la bifurcación de Hopf supercrítica como en la figura 3.4-c, elegimos la condición inicial $(0, 0, 200)$, con valores $\mu_1 = 0,51$ y $\mu_2 = 1$. Ver la figura 5.2.

Ahora, para producir el diagrama de bifurcación dado por la figura 3.4-b, definimos $\beta_1 = \delta_3 = 1$ y $\beta_2 = \delta_1 = \delta_2 = -1$ con estos valores, obtenemos la ley de control

$$v(x, \mu) = \kappa^T x + \mu_1 + 25,45\mu_2(x_1 + x_2) - 1294,93x_1^2 - 712,47x_1x_2 - 0,26x_1x_3 - 22,39x_2^2 - 0,09x_2x_3 - 1,15 \times 10^{-5}x_3^2, \quad (5.5.7)$$

entonces, el sistema a lazo-cerrado (5.5.3)-(5.5.7), es

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = 30 \sin x_1 - 30x_1 - x_2 - 0,0393\mu_1 - \mu_2(x_1 + x_2) + 50,89x_1^2 + 28x_1x_2 + 0,01x_1x_3 + 0,88x_2^2 + 0,0036x_2x_3 + 4,5 \times 10^{-7}x_3^2$$

$$\dot{x}_3 = -30 \sin x_1 + 7530x_1 + 251x_2 + 9,86\mu_1 + 251\mu_2(x_1 + x_2) - 12773,54x_1^2 - 7028x_1x_2 - 2,56x_1x_3 - 220,9x_2^2 - 0,9x_2x_3 - 0,00011x_3^2. \quad (5.5.8)$$

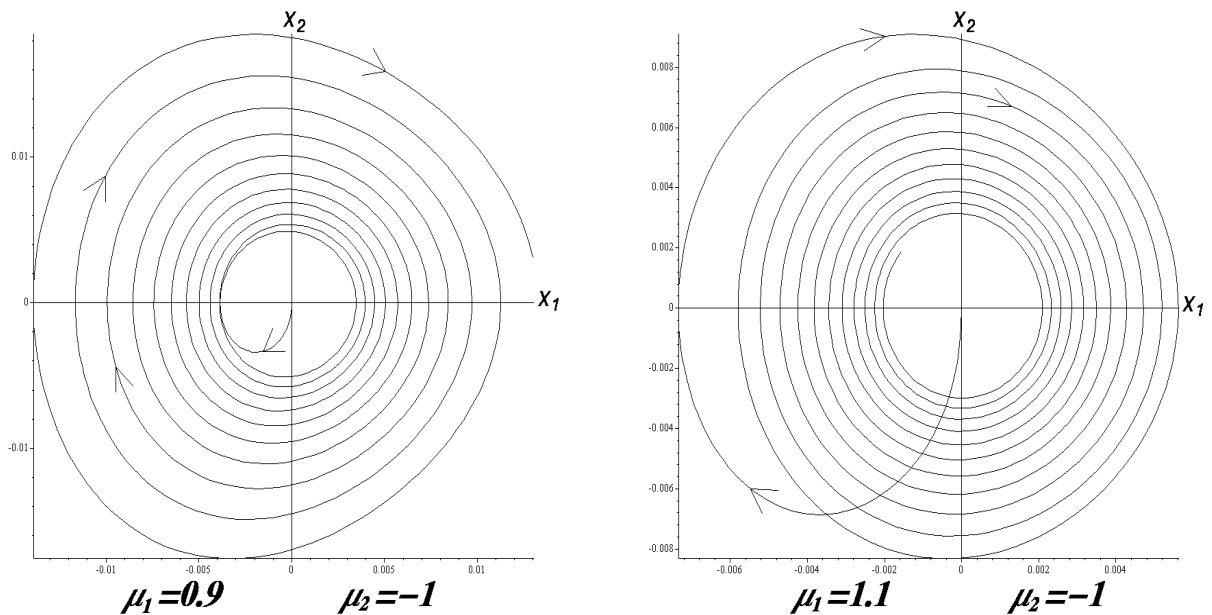


Figura 5.3: Diferentes estabilidades para el punto crítico $(0, 0, -249,75)$ para diferentes valores de μ_1 con $\mu_2 = -1$, mostrado en el plano x_1x_2 .

Para observar una bifurcación de Hopf subcrítica como en la figura 3.4-b, elegimos el punto crítico $(0, 0, -249,75)$. Si calculamos los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema (5.5.8) evaluada en el punto crítico para diferentes valores de μ_1 , por ejemplo: si $\mu_1 = 0,9$ y $\mu_2 = -1$, los valores propios de la matriz Jacobiana son $\{-1, 0,026 \pm 1,38i\}$; si $\mu_1 = 1,1$ y $\mu_2 = -1$, los valores propios de la matriz Jacobiana son $\{-1, -0,0244 \pm 1,45i\}$. Podemos observar que al pasar a través del valor de bifurcación $\mu_1 = 1$, la estabilidad del punto crítico cambia, podemos observar esto claramente en la Figura 5.3, donde

elegimos la condición inicial $(0, 0, -249)$. Por lo tanto, podemos suponer que al cruzar por el valor de bifurcación $\mu_1 = 1$, surge una órbita cerrada inestable.

Conclusiones

En esta parte expondremos una serie de conclusiones a las cuales hemos llegado, esta exposición se hará por capítulos, seguidamente enunciaremos los eventos a los cuales hemos participado con diferentes ponencias del presente trabajo, y los artículos de investigación que con el mismo hemos logrado publicar. Finalmente, enlistaremos una serie de problemas abiertos que serán abordados en el futuro, a manera de darle continuidad este proyecto de investigación que comenzamos con la bifurcación Takens-Bogdanov.

Luego entonces, las conclusiones al trabajo las podemos enunciar como sigue:

1. Con respecto al diseño de la ley control escalar para la bifurcación Takens-Bogdanov en el plano, podemos concluir que para un sistema de control no lineal en el plano, si la matriz Jacobiana evaluada en el punto crítico de interés del campo vectorial, tiene un valor propio cero de multiplicidad dos, basta que se satisfaga una simple condición para el campo vectorial conductor en su forma de Jordan, para que el mencionado diseño sea posible. Como se sabe tal condición tiene que ver con que la parte constante de la segunda entrada del campo vectorial conductor en su forma de Jordan sea diferente de cero, si esto se satisface, entonces, diremos que el sistema a lazo-cerrado resultante experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov controlable.
2. Del análisis y resultado del capítulo cuatro se puede concluir que para una familia m -parametrizada de campos vectoriales n -dimensionales, cuya linealización en un punto de equilibrio tiene un valor propio cero de multiplicidad dos y ningún otro valor propio con parte real cero, encontramos condiciones suficientes sobre la familia de campos vectoriales mencionada, tal que la dinámica sobre la variedad central bidimensional de dicha familia m -paramétrica de campos vectoriales, es de manera local, topológicamente equivalente a deformación versal dada por Bogdanov, de la bifurcación Takens-Bogdanov.
3. En el capítulo final concluimos que para un sistema de control no lineal n -dimensional, donde la linealización del campo vectorial nominal en un punto de equilibrio, tiene un valor propio cero doble y ningún otro valor propio con parte real cero, se demostró que bajo las mismas condiciones suficientes que para el caso planar, es posible diseñar una ley de control escalar para este sistema de control no lineal n -dimensional, tal que la dinámica sobre la variedad central bidimensional del sistema a lazo cerrado, es localmente topológicamente equivalente a deformación versal dada por Guckenheimer y Holmes, de la bifurcación Takens-Bogdanov.

Eventos

Los eventos y/o congresos, en los cuales he participado con la exposición de los diferentes resultados presentados en esta tesis, son:

1. XVII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas. Los días del 9 al 13 de Marzo de 2007, en la Ciudad de Hermosillo, Son. Con la presentación de la ponencia *Control de Ocilaciones en la bifurcación Takens-Bogdanov*.
2. XL CONGRESO NACIONAL DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA. Durante los días del 14 al 19 de Octubre de 2007, en la Ciudad de Monterrey N.L. Con una conferencia por invitación titulada *Sobre el control de bifurcaciones de codimensión dos*.
3. Segundo Congreso Latinoamericano de Estudiantes de Matemáticas, EXPRIME 2008, Exposiciones Primaverales de Memorias. Durante los días del 22 al 24 de Abril de 2008, en la Ciudad de San Luis Potosí, S.L.P. Con la conferencia titulada *Control de oscilaciones en la bifurcación Takens-Bogdanov*.
4. 47th IEEE Conference on Decision and Control. Los días del 9 al 11 de Diciembre de 2008, en Cancún, Quintana Roo. Con la conferencia *Control of the Hopf bifurcation in the Takens-Bogdanov bifurcation*.
5. Taller de Control y Sistemas Dinámicos durante la XIX Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas. Durante los días del 2 al 6 de Marzo de 2009, en la Ciudad de Hermosillo, Son. Con la ponencia *Análisis de la bifurcación Takens-Bogdanov en campos vectoriales m -parametrizados*.
6. II Encuentro Interactivo de Matemática Aplicada, EIM@ 2009. Los días del 27 al 30 de Octubre de 2009, en diferentes sedes de Brasil, Perú y México. Con la videoconferencia por invitación *Análisis de la bifurcación Takens-Bogdanov en campos m -paramétricos*.

Artículos de Investigación

Los artículos de investigación que dieron lugar a esta tesis son:

- Francisco A. Carrillo and Fernando Verduzco. *Control of the Planar Takens-Bogdanov Bifurcation*. Acta Applicandae Mathematicae. Volume 105, Number 2, pp. 199-225. Springer Netherlands. February 2009.
- Carrillo, F.A., Verduzco, F. and Delgado, J. *Analysis of the Takens-Bogdanov bifurcation on m -parameterized vector fields*. International Journal of Bifurcation and Chaos. Por publicarse en Vol. 20, No. 4, April 2010.
- Carrillo, F.A., Verduzco, F. and Delgado, J. *Control of the n -dimensional Takens-Bogdanov Bifurcation with Applications*. Enviado para su publicación.

Bibliografía

- [1] E.H. Abed, J.H. Fu. *Local feedback stabilization y bifurcation control, II. Stationary bifurcation*. Systems & Control Letters. 8 (1987). 467-473.
- [2] E.H. Abed, J.H. Fu. *Local feedback stabilization y bifurcation control, I. Hopf bifurcation*. Systems & Control Letters. 7 (1986). 11-17.
- [3] D.M. Alonso, E.E. Polini and J.L. Moiola. Controlling an Inverted Pendulum with Bounded Controls. Dynamics, Bifurcations and Control. No. 273, pp. 3-16. Springer-Verlag. 2002.
- [4] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon and A.G. Maier. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. SIAM Rev. Volume 17, Issue 1, pp. 183-184 (January 1975).
- [5] V.I. Arnold. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1983.
- [6] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin. 1978.
- [7] V.I. Arnold. Lectures on bifurcation in versal families. Russ. Math. Surv., No. 27, pp 54-123. 1972.
- [8] D.K. Arrowsmith, and C.M. Place. Bifurcations at a Cusp Singularity with Applications. Acta Applicandae Mathematicae 2, 101-138. 1984.
- [9] Q. Bi, P. Yu. Symbolic software development for computing the normal forms of double Hopf bifurcation. J. Math & Computer Modelling, No. 29, pp 49-70. 1999.
- [10] Q. Bi, P. Yu. Computation of normal forms of differential equations associated with non-semisimple zero eigenvalues. Int J of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 12, pp 2279-2319. 1998.
- [11] Bazykin, A. [1985]. Mathematical Biophysics of Interacting Populations. Nauka, Mmoskow. In Russian (Translate to English in book Nonlinear dynamics of interacting populations, by A. D. Bazykin, A. I. Khibnik, B. Krauskopf).
- [12] A. Bazykin, Y. Kuznetsov, A. Khibnik. Bifurcation diagrams of planar dynamical systems. Research Computing Center, USSR Academy of Sciences, Pushchino. In Russian (translate to English in book Elements of Applied Bifurcation Theory, by Y.A. Kuznetsov). 1985.

- [13] R. I. Bogdanov. Bifurcations of the limit cycle of a family of plane vector fields. *Trudy Sem. Petrovsk.* 2. pp. 23-35. 1976. *Sel. Math. Sov.* 1 pp. 373-387 (in English). 1981.
- [14] R. I. Bogdanov. Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues. *Functional analysis and its applications* 9, pp 144-145. 1975.
- [15] J. Carr. *Applications of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag. New York. 1981.
- [16] F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor. Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7 : 375-413 Cambridge University Press (1987).
- [17] F.A. Carrillo. Control de Oscilaciones en Sistemas No Lineales alrededor de Puntos de Equilibrio No Hiperbólicos. Tesis de Mestría. Junio 2006.
- [18] S. Chow, C. Li and D. Wang. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press. 1994.
- [19] E.V. Degtiarev and V. Wataghin. Takens-Bogdanov bifurcation in a two-component nonlinear optical system with diffractive feedback. *Journal of Modern Optics*. Vol. 45, No. 9. pp: 1927-1942. 1998.
- [20] J. H. Fu. Bifurcation analysis and control of nonlinear systems with a nonsemisimple zero at criticality y application. *Int J of Bifurcation and Chaos*, Vol. 10, No. 8, pp 1887-1901. 2000.
- [21] F.R. Gantmacher. *The Theory of MATRICES*. Vol. I, Ed. Chelsea, New York, N.Y. 1990.
- [22] J. Guckenheimer y P. Holmes. *Nonlinear oscillations, Dynamical systems, y bifurcations of vector fields*. Applied Mathematical Sciences 42. Springer-Verlag. 1993.
- [23] G. Häckl and K.R. Schneider. Controllability near Takens-Bogdanov point. *Journal Dynamical and Control Systems*. Vol. 2, No. 4. pp: 583-598. 1996. Springer-Verlag. 1993.
- [24] B. Hamzi, W. Kang, J.P. Barbot. *Analysis y control of Hopf bifurcations*. *SIAM J. Control Optim.* Vol. 42, No. 6. 2200-2220. 2004.
- [25] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin. 1976.
- [26] W. Kang. *Bifurcation control via state feedback for systems con a single uncontrollable mode*. *SIAM J. Control Optim.* Vol. 38, 1428-1452. 2000.
- [27] C.W. Kulp and E.R. Tracy. Control of multidimensional integrable Hamiltonian systems. *Physical Review E* 72. 2005.

- [28] Y.A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 112. Springer. Second Edition. 2000.
- [29] J.E. Marsden, M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer-Verlag. New York. 1976.
- [30] J.D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*. Mathematical Modeling and Computation, SIAM. 2007.
- [31] J. Palis and W. Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin. 1982.
- [32] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics, vol. 7. Springer, Second Edition. 1996.
- [33] F.M.A. Salam, S. Bai. Complicated dynamics of a prototype continuous-time adaptive control system. *IEEE Transactions on Circuits y Systems*, vol 35, No. 7, July 1988.
- [34] A.N. Shoshitaishvili. Bifurcations of topological type at singular points of parametrized vector fields. *Functional Analysis and Its Applications*. Vol. 6. No. 2. pp. 169-1470. 1972.
- [35] F. Takens. Forced oscillations and bifurcation. *Applications of Global Analysis I*. Comm. Math. Inst. Rijksuniversitat Utrecht, 3, pp 1-59. 1974.
- [36] F. Takens. Normal forms for certain singularities of vector fields. *An. Inst. Fourier*. No.2, Tomo 23. pp. 163-195. 1973.
- [37] F. Verduzco. *Control of codimension one stationary bifurcations*. *Int. J. of Bifurcation y Chaos*, Vol. 17, No. 2. pp. 575-582. 2007.
- [38] F. Verduzco. Control of oscillations from the k -zero bifurcation. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006.
- [39] F. Verduzco, J. Alvarez. Hopf bifurcation control: a new approach. *Systems and Control Letters*, No. 55, pp 437-451. 2006.
- [40] F. Verduzco, M.E. Frias. Control of limit cycles at Takens-Bognadov bifurcation. *International Conference on Control and Synchronization of Dynamical Systems*. León Guanajuato, México. 2005.
- [41] F. Verduzco, J. Alvarez. Hopf bifurcation control for affine systems. *American Control Conference 2004*. Boston, USA.
- [42] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 2. Springer-Verlag. Second Edition. 2003.
- [43] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control, A Geometric Approach*. Text of Applications of Mathematics, Vol. 10. Springer-Verlag, New York. Third Edition. 1985.

- [44] K. Yagasaki. Codimension-two bifurcations in a pendulum with feedback control. *Int. Jour. of Non-Linear Mechanics*. Vol. 34, No. 6. 1999.
- [45] P. Yu. A simple and efficient method for computing center manifold and normal forms associated with semi-simple cases. *Special Issue of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems for DCDIS'01*. 2002.
- [46] P. Yu. Analysis on double Hopf bifurcation using computer algebra with the aid of multiple scales. *Nonl. Dynam.*, No. 27 pp 19-53. 2002.
- [47] P. Yu. Symbolic computation of normal forms for resonant double Hopf bifurcations using multiple time scales. *J. Sound Vib.* No. 247, pp 615-632. 2001.
- [48] P. Yu. A method for computing center manifold and normal forms. *EQUADIFF 99*. No. 2, pp 832-837. Singapore: World Scientific. 2000.
- [49] P. Yu. Computation of normal forms via a perturbation technique. *J. Sound Vib.*, No. 211, pp 19-38. 1998.
- [50] P. Yu, K. Huseyin. On generic dynamics related to a three-fold zero eigenvalue. *Dynamics and Stability of Systems*, Vol. 5, No. 2, pp 113-126. 1990.
- [51] P. Yu, K. Huseyin. Bifurcation associated with a three-fold zero eigenvalue. *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. XLVI, No. 2, pp 193-216. June 1988.
- [52] Z. Zhang, T. Ding, W. Huang and Z. Dong. *The Qualitative Theory of Differential Equations*. Science Press, Beijing. 1985 (in Chinese). English Translation.