



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Evolución de ondas en medios semilineales

## T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

**Doctor en Ciencias**  
(Matemáticas)

Presenta:

Israel Segundo Caballero

Director de Tesis: Dr. Georgii A. Omelyanov

Hermosillo, Sonora, México,      Diciembre de 2011

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos  
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



## SINODALES

Dr. Martín G. García Alvarado  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Anatoli Merzon  
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Dr. Georgii A. Omelyanov  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Rubén Flores Espinoza  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Rodrigo González González  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.





# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Solución asintótica de la ecuación sine-Gordon con coeficiente variable</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Construcción de la solución asintótica . . . . .	1
<b>2. Solución asintótica débil para el problema de interacción de ondas</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Solución asintótica débil . . . . .	15
2.3. Interacción kink-kink . . . . .	16
2.4. Interacción kink-antikink . . . . .	17
2.5. Análisis del sistema dinámico básico . . . . .	27
2.6. El ansatz modificado . . . . .	35
<b>3. Esquema de diferencias finitas</b>	<b>43</b>
3.1. Introducción . . . . .	43
3.2. Requisitos preliminares . . . . .	44
3.3. Esquema preliminar no lineal . . . . .	52
3.4. Linealización . . . . .	58
3.5. Algoritmo para la simulación numérica . . . . .	67
3.6. Resultados de la simulación numérica . . . . .	69
<b>4. Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>



# Abstract

The goal of this research is to study the propagation and interaction of waves in nonlinear media described by equation

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(u, x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (0.1)$$

Here  $\varepsilon > 0$  is a small parameter and  $f(u, x, t)$  belongs to one class of functions smooths nonlinear.

The main result consists in the creation and research of an absolutely stable finite differences scheme for equation (0.6). This result was published in [19] and presented in the following conferences:

- International Conference “II Interactive Meeting of Applied Mathematics”, II EIM@ 2009 [11].
- National Conference “II Taller de Geometría y Sistemas Dinámicos”, Hermosillo, Sonora, Marzo 2011.
- “XXI Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico”, Cuernavaca, Morelos, Marzo 2011 [21].
- “International Seminar on Applied Analysis, Evolution Equations and Control” (ISAAEEC), Ciudad de México, D.F., Mayo 2011.

Equations of type (0.6) appear in theories such as linear superconductors, crystals, laser pulses, geometry surfaces, etc. (see e.g. [20, 13]). The existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for the mixed problem to the equation (0.6) can be proved (for  $\varepsilon = cte > 0$ ) using the method of compactness [16]. Most important model of type (0.6) is when  $f = \text{sen}(u)$ , named sine-Gordon equation, which is completely integrable. This implies the possibility of an analytical description of propagation and interaction process of waves [12, 1]. Partially, the sine-Gordon equation has, for all  $V \in (0, 1)$ , special solutions called kinks

$$u = 4\arctan \left( \exp \left( \frac{x - Vt}{\varepsilon\sqrt{1 - V^2}} \right) \right) \quad (0.2)$$

and antikinks

$$u = 4\arctan \left( \exp \left( -\frac{x - Vt}{\varepsilon\sqrt{1 - V^2}} \right) \right). \quad (0.3)$$

It is clear that with  $\varepsilon \ll 1$  the solutions (0.7) and (0.8) are equals (with accuracy  $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$ ) to a constant ( $0 < 2\pi$ ) outside the  $\varepsilon$ -neighborhood of the path  $x = Vt$ , while  $u$  varies from 0 to  $2\pi$  inside this neighborhood. Such solutions are called “solutions of fast variation” [18]. In fact, is well known that the waves of the sine-Gordon equation interact without changing their forms and the unique result of the interaction is a phase shift (see [23]). This type of interaction is called “sine-Gordon scenario”, and equations of the form (0.6) are called “sine-Gordon type” equations.

In the general case, a wave with localized fast variation is such that, at each time  $t$ , varies slowly outside a small neighborhood of the front  $x = \varphi(t)$  and rapidly near the front. An example of a function with localized fast variation is a smoothed shock wave  $u = u(x, t, \varepsilon)$  (see Figure 01), which is a regularization of the discontinuous function

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{para } x > \varphi(t), \\ u^-(x, t) & \text{para } x < \varphi(t), \end{cases} \quad (0.4)$$

so that  $u(x, t, \varepsilon)$  equals  $u^\pm(x, t)$  outside a small “transition zone” (a neighborhood of the front  $x = \varphi(t)$ ) and varies from  $u^-|_{x=\varphi(t)-0}$  to  $u^+|_{x=\varphi(t)+0}$  as a smooth function inside the transition zone. As special cases we obtain kinks or antikinks (0.7), (0.8).

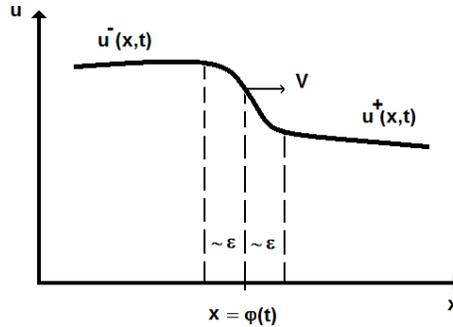


Figure 01: smoothed shock wave,  $x = \varphi(t)$  is the front position,  
 $V = \dot{\varphi}(t)$  is the front velocity.

Another example of a function with localized fast variation is a distorted solitary wave (soliton) (see Figure 02), which is a narrow (of width  $\sim \varepsilon$ ) bell-shaped function. “Distortion” of the solitary wave consists in the variation of its amplitude and velocity with time.

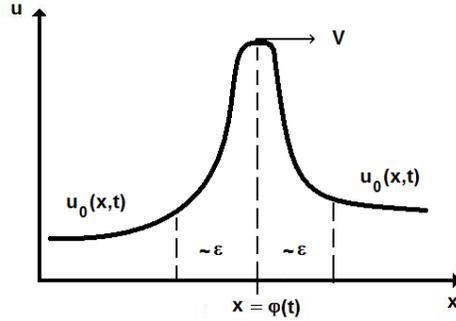


Figure 02: Soliton type wave

Methods about construction of asymptotic solution have been proposed. For example, WKB method was developed in the nineteenth century for the linear equations. In this method, we look for a solution of the form

$$u = \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}S(x, t)\right\} \varphi(x, t, \varepsilon),$$

where  $S(x, t)$  y  $\varphi(x, t, \varepsilon)$  are smooth functions.

A generalization of the WKB method to nonlinear partial differential equations is the Whitham method [25], for rapidly oscillating solution. With such method the asymptotic solution is of the form

$$u = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}), \tag{0.5}$$

where the function  $F_i(\tau, x, t)$  is smooth in all variables and periodic in  $\tau$  with constant period.

The *Inverse Scattering Transform* method was developed in the seventies and eighties of the last century [12, 1], which is a technique that allows to construct exact solutions for a class of integrable partial differential equations. Furthermore, it is possible to obtain exact solutions describing the propagation and interaction of nonlinear waves. However, this theory has a rather narrow range of applicability, because requires that the equation to have a specific structure, namely, the leading term of the equation must be reducible by a suitable change variables to an equation with constant coefficients that can be integrated by such method.

At about the same time, V. P. Maslov and G. A. Omel'yanov [17, 18] modified the Whitham method, which allowed to describe propagation of nonlinear waves with localized fast variation to nonintegrable equations.

Later, a new approach was presented to construct asymptotic solutions call *weak asymptotic method* [5], which allows to describe the propagation and, most important, the interaction of nonlinear waves for nonintegrable equations with localized fast variation. The asymptotic solution is treated in the sense of the continuous mapping from interval  $[0, T]$  to space of functionals  $\mathcal{D}'$ . The main advantage of this method is the possibility of reducing the problem of describing nonlinear waves interaction to a qualitative analysis of some ordinary differential equations (instead of partial differential equations)

In what follows, we present a summary of the content of this work.

In Chapter 1, the procedure to construct an asymptotic kink type solution for the sine-Gordon equation with variable coefficient is shown (corresponding to (0.6) with  $f = \alpha^2(x, t)\sin(u)$ ), with arbitrary precision, using the modification of the Whitham method; however, the solution shown here contains only the leading term.

In Chapter 2, we used the weak asymptotic method [10] to describe the evolution of two solitary waves kink/antikink type to equation (0.6) with  $f = F'(u)$ ; namely, we present sufficient conditions for the nonlinearities  $F(u)$  and initial data under which the kink–kink and kink–antikink collisions occur, without changing the shape of the waves after interacting.

In Chapter 3, we present the main result of our research, which consists in the constuction of an absolutely stable finite differences scheme to equation (0.6). The scheme was tested, implemented and applied to a number of nonintegrable versions. The numerical result shows that the kink–kink and kink–antikink pairs interacting without changing the shape of the waves, including the case when the conditions given in [14, 10] are not satisfied. Furthermore, we obtained an unexpected result: three kinks can interact preserving the sine-Gordon scenario. This is described in the conclusions of this document.

# Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar el proceso de propagación e interacción de ondas en un medio no lineal descrito por la ecuación

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(u, x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (0.6)$$

Aquí  $\varepsilon > 0$  es un parámetro pequeño y  $f(u, x, t)$  pertenece a una clase de funciones no lineales suaves.

El resultado principal consiste en la creación e investigación de un esquema de diferencias finitas absolutamente estable para la ecuación (0.6). Este resultado fue publicado en [19] y presentado en los siguientes congresos académicos:

- Congreso Internacional “II Interactive Meeting of Applied Mathematics”, II EIM@ 2009 [11].
- Congreso Nacional “II Taller de Geometría y Sistemas Dinámicos”, Hermosillo, Sonora, Marzo 2011.
- “XXI Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico”, Cuernavaca, Morelos, Marzo 2011 [21].
- “International Seminar on Applied Analysis, Evolution Equations and Control” (ISAAEEC), Ciudad de México, D.F., Mayo 2011.

Ecuaciones del tipo (0.6) aparecen en teorías tales como superconductores lineales, cristales, pulsos láser, geometría de superficies, etc. (ver por ejemplo [20, 13]). La existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy o del problema mixto para la ecuación (0.6) puede ser probada (para  $\varepsilon = cte > 0$ ) utilizando el método de compatibilidad [16]. El modelo más importante del tipo (0.6) es cuando  $F' = \text{sen}(u)$ , llamada ecuación sine-Gordon, la cual es completamente integrable, lo que implica la posibilidad de una descripción analítica del proceso de propagación e interacción de ondas [12, 1]. Parcialmente, la ecuación sine-Gordon tiene, para todas  $V \in (0, 1)$ , soluciones especiales llamadas kink

$$u = 4\arctan \left( \exp \left( \frac{x - Vt}{\varepsilon\sqrt{1 - V^2}} \right) \right) \quad (0.7)$$

y antikink

$$u = 4\arctan \left( \exp \left( -\frac{x - Vt}{\varepsilon\sqrt{1 - V^2}} \right) \right). \quad (0.8)$$

Es claro que con  $\varepsilon \ll 1$  las soluciones (0.7) y (0.8) son igual (con precisión  $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$ ) a una constante ( $0$  ó  $2\pi$ ) fuera de la  $\varepsilon$ -vecindad de la trayectoria  $x = Vt$ , mientras que  $u$  varía de  $0$  a  $2\pi$  dentro de esa vecindad. Este tipo de soluciones se llaman “soluciones de variación rápida” [18]. De hecho, es conocido que estas ondas de la ecuación sine-Gordon interactúan sin cambiar sus formas y el único resultado de la interacción es un cambio de fase (ver [23]). Llamaremos a este tipo de interacción “escenario sine-Gordon” y a la ecuación de la forma (0.6) la llamaremos ecuación “tipo sine-Gordon”.

En el caso general, una onda con variación rápida localizada es tal que en cada tiempo  $t$ , varía lentamente fuera de una pequeña vecindad del frente de la onda  $x = \varphi(t)$  y rápido cerca del frente. Un ejemplo de una función con variación rápida localizada es una onda de choque suave  $u = u(x, t, \varepsilon)$  (ver Figura 01), la cual es una regularización de la función discontinua

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{para } x > \varphi(t), \\ u^-(x, t) & \text{para } x < \varphi(t), \end{cases} \quad (0.9)$$

tal que  $u(x, t, \varepsilon)$  es igual a  $u^\pm(x, t)$  fuera de una pequeña “zona de transición” (vecindad del frente  $x = \varphi(t)$ ) y varía de  $u^-|_{x=\varphi(t)-0}$  a  $u^+|_{x=\varphi(t)+0}$  como una función suave dentro de la zona de transición. Claro que en el caso especial obtenemos kink/antikink (0.7), (0.8).

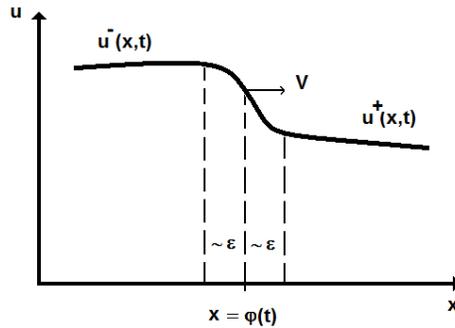


Figura 01: Onda de choque suave, con  $x = \varphi(t)$  la posición del frente,  $V = \dot{\varphi}(t)$  la velocidad del frente.

Otro ejemplo de una función con variación rápida localizada es una onda solitaria distorsionada (solitón) (ver Figura 02), la cual es una función en forma de campana estrecha (de ancho  $\sim \varepsilon$ ). La “distorsión” de onda solitaria consiste en la variación de su amplitud y su velocidad con el tiempo.

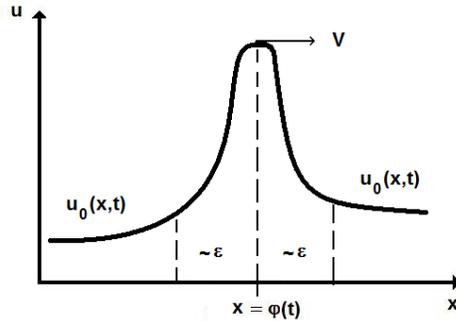


Figura 02: Onda tipo solitón

Se han propuesto métodos de construcción de soluciones asintóticas. Por ejemplo, en el siglo XIX se desarrolló el método WKB, para ecuaciones lineales cuya solución propuesta es de la forma

$$u = \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}S(x, t)\right\} \varphi(x, t, \varepsilon),$$

donde  $S(x, t)$  y  $\varphi(x, t, \varepsilon)$  son funciones suaves.

Una generalización del método WKB a ecuaciones diferenciales parciales no lineales es el método de Whitham [25], para soluciones asintóticas rápidamente oscilantes. Con este método la solución asintótica es de la forma

$$u = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}), \quad (0.10)$$

donde la función  $F_i(\tau, x, t)$  es suave en todas las variables y es periódica en  $\tau$  con período constante.

En los años setenta y ochenta del siglo pasado se desarrolló el método *Inverse Scattering Transform* [12, 1], una técnica que permite construir soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales integrables. Además, es posible obtener soluciones exactas que describan la propagación e interacción de ondas no lineales. Sin embargo, esta teoría tiene un rango muy estrecho de aplicabilidad, ya que requiere que la ecuación tenga una estructura específica, esto es, que la ecuación en su término principal debe ser reducible, por medio de cambios de variable apropiados, a una ecuación con coeficientes constantes para poder ser integrada por dicho método.

Al mismo tiempo, V. P. Maslov y G. A. Omel'yanov [17, 18] modificaron el método de Whitham, lo cual permitió describir la propagación de ondas no lineales con variación rápida localizada para ecuaciones no integrables.

Posteriormente, tal como se establece en [5] se presentó un nuevo enfoque para la construcción de soluciones asintóticas, llamado *método asintótico débil*, el cual

permite describir la propagación y, lo más importante, la interacción de ondas no lineales para ecuaciones no integrables con variación rápida localizada. La solución asintótica es tratada en el sentido del mapeo continuo de un intervalo  $[0, T]$  al espacio de funcionales  $\mathcal{D}'$ . La principal ventaja de este método es la posibilidad de reducir el problema de describir la interacción de ondas no lineales a un análisis cualitativo de algún sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (en lugar de ecuaciones diferenciales parciales).

A continuación, se describe de forma resumida el contenido del presente trabajo.

En el Capítulo 1, se presenta el procedimiento para construir una solución asintótica tipo kink para la ecuación sine-Gordon con coeficiente variable (que corresponde a (0.6) con  $F' = \alpha^2(x, t)\text{sen}(u)$ ), con precisión arbitraria, utilizando el método Whithman, aunque, cabe aclarar que, la solución mostrada aquí contiene únicamente el término principal.

En el Capítulo 2 utilizamos el método asintótico débil [10] para describir la evolución de dos ondas solitarias tipo kink/antikink de la ecuación (0.6) con  $F' = F'(u)$ , es decir, presentamos condiciones suficientes para la no linealidad  $F'(u)$  y datos iniciales bajo las cuales colisiones kink–kink y kink–antikink ocurren, sin que las ondas cambien de forma después de interactuar.

En el Capítulo 3, se presenta el resultado principal de nuestra investigación, se presenta un esquema de diferencias finitas absolutamente estable para la ecuación (0.6). El esquema fue probado, realizado y aplicado a un número de versiones no integrables. Los resultados numéricos muestran que los pares kink–kink y kink–antikink interactúan sin que las ondas cambien de forma, incluyendo el caso cuando las condiciones dadas en [14, 10] no se cumplen. Además, se obtuvo un resultado inesperado: tres kink pueden interactuar preservando el escenario sine-Gordon, el cual se describe en las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 1

## Solución asintótica de la ecuación sine-Gordon con coeficiente variable

### 1.1. Introducción

En este capítulo, utilizando el método asintótico clásico [17, 18], construiremos una solución asintótica  $u(x, t, \varepsilon)$ , tipo kink, para la ecuación sine-Gordon con coeficientes variables

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \alpha^2(x, t) \operatorname{sen} u = 0, \quad (1.1)$$

donde  $\alpha = \alpha(x, t) > 0$ ,  $\alpha \in C^\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $t \in (0, T]$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$  es un parámetro pequeño.

En el caso cuando (1.1) es de coeficientes constantes, esto es  $\alpha = \alpha_0$  constante, la solución exacta, llamada kink, está dada por

$$u(x, t, \varepsilon) = 4 \arctan \left( \exp \left( \beta \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon} \right) \right),$$

donde

$$\varphi := \varphi(t) = Vt, \quad \beta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1 - \varphi_t^2}}, \quad \varphi_t := \frac{d\varphi}{dt}$$

y  $V \in (0, 1)$  es un número arbitrario.

### 1.2. Construcción de la solución asintótica

Empezaremos por introducir una notación para las clases de funciones que vamos a utilizar.

Denotaremos por  $\mathcal{S}$  al conjunto de funciones infinitamente diferenciables  $f(\eta, x, t)$  tal que  $f$  y cada una de sus derivadas tienden a cero cuando  $\eta \rightarrow \pm\infty$  uniformemente en  $x, t$  más rápido que cualquier potencia de  $1/|\eta|$ .

También denotaremos por  $\mathcal{H}$  al conjunto de funciones infinitamente diferenciables  $g(\eta, x, t)$  tal que  $\partial g(\eta, x, t)/\partial \eta \in \mathcal{S}$ .

A continuación presentaremos la definición de una función  $u$  del tipo kink (ver [17, 18]).

**Definición 1.1.** Una función  $u = u(x, t, \varepsilon)$  es llamada tipo kink si  $u$  tiene la siguiente expansión en el parámetro pequeño  $\varepsilon \in (0, 1]$ :

$$u(x, t, \varepsilon) = V_0(\eta, t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \left( u_j(x, t) + V_j(\eta, x, t) \right) \Big|_{\eta=(x-\varphi(t)-\varepsilon\varphi_1(t))/\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}), \quad (1.2)$$

donde  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $u_j(x, t)$ ,  $j = 1, \dots, N$  son ciertas funciones suaves y  $V_j$ ,  $j = 0, \dots, N$  son funciones de  $\mathcal{H}$  tales que  $V_j \rightarrow 0$  si  $\eta \rightarrow -\infty$ .

En nuestro problema, consideraremos  $u \in (0, 2\pi)$ , por lo que  $V_0 \rightarrow 0$  cuando  $\eta \rightarrow -\infty$  implica que  $V_0 \rightarrow 2\pi$  cuando  $\eta \rightarrow +\infty$  suficientemente rápido.

Procederemos a construir una solución asintótica tipo onda de choque de la ecuación (1.1), utilizando (1.2) hasta  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ , esto es

$$u(x, t, \varepsilon) = V_0(\eta, t) + \varepsilon(u_1(x, t) + V_1(\eta, x, t)) + \varepsilon^2(u_2(x, t) + V_2(\eta, x, t)). \quad (1.3)$$

Para esto, se sustituye (1.3) en (1.1) y se agrupan los coeficientes de  $\varepsilon$  de igual potencia. Teniendo en cuenta las identidades

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} V \left( \frac{x - \varphi - \varepsilon\varphi_1}{\varepsilon}, x, t \right) &= \varphi_t^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} V(\eta, x, t) \\ &+ \varepsilon \left( 2\varphi_t \varphi_{1t} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \varphi_{tt} \frac{\partial}{\partial \eta} - 2\varphi_t \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) V(\eta, x, t) \\ &+ \varepsilon^2 \left( \varphi_{1t}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \varphi_{1t} \frac{\partial}{\partial \eta} - 2\varphi_{1t} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V(\eta, x, t), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V \left( \frac{x - \varphi - \varepsilon\varphi_1}{\varepsilon}, x, t \right) &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} V(\eta, x, t) + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial x} V(\eta, x, t) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(\eta, x, t), \end{aligned}$$

obtenemos la relación

$$\left[ \left\{ (\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varepsilon \hat{\Pi}_1 + \varepsilon^2 \hat{\Pi}_2 \right\} u(\eta, t, \varepsilon) + \alpha^2(x, t) \text{sen}(u(\eta, t, \varepsilon)) \right] \Big|_{\eta=(x-\varphi-\varepsilon\varphi_1)/\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}), \quad (1.4)$$

donde  $u(\eta, t, \varepsilon)$  es (1.3) y

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= - \left[ 2\varphi_t \frac{\partial}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_{tt} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} + 2\varphi_t \varphi_{1t} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ \hat{\Pi}_2 &= - \left[ 2\varphi_{1t} \frac{\partial}{\partial t} + \varphi_{1tt} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} + \varphi_{1t}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

La relación (1.4) es válida si

$$\left\{ (\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varepsilon \widehat{\Pi}_1 + \varepsilon^2 \widehat{\Pi}_2 \right\} u(\eta, t, \varepsilon) + \alpha^2(x, t) \text{sen}(u(\eta, t, \varepsilon)) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),$$

para todos los valores  $\eta, x$  y  $t$  independientes.

Por otra parte, utilizando la fórmula de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha^2(x, t) \text{sen}(u(\eta, t, \varepsilon)) &= \alpha^2(x, t) \left\{ \text{sen}V_0 + \left[ \varepsilon(u_1 + V_1) + \varepsilon^2(u_2 + V_2) \right] \cos V_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (u_1 + V_1)^2 \text{sen}V_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\}. \end{aligned}$$

Además, dado que  $x = \varphi + \varepsilon(\eta + \varphi_1)$ , para cada función  $g \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \alpha^2(x, t)g &= \alpha^2(\varphi + \varepsilon(\eta + \varphi_1), t)g \\ &= \left\{ \alpha^2(\varphi, t) + \varepsilon(\eta + \varphi_1) \alpha_x^2(\varphi, t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\eta + \varphi_1)^2 \alpha_x^2(\varphi, t) \right\} g + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

y debido a que  $\text{sen}V_0 \rightarrow 0$  cuando  $\eta \rightarrow 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \alpha^2(x, t) \text{sen}V_0 &= \alpha^2(\varphi, t) \text{sen}V_0 \\ &\quad + \varepsilon \left\{ \alpha^2(x, t)(u_1 + V_1) \cos V_0 + \alpha_x^2(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) \text{sen}V_0 \right\} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\{ \alpha^2(x, t)(u_2 + V_2) \cos V_0 - \frac{1}{2} \alpha^2(x, t)(u_1 + V_1)^2 \text{sen}V_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \alpha_x^2(\varphi, t)(\eta + \varphi_1)^2 \text{sen}V_0 \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo la relación anterior en (1.4) y agrupando los coeficientes de  $\varepsilon$  de igual potencia, se tiene que

$$\begin{aligned} &(\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} + \alpha^2(\varphi, t) \text{sen}V_0 \\ &+ \varepsilon \left\{ (\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta^2} + \widehat{\Pi}_1 V_0 + \alpha^2(x, t)(u_1 + V_1) \cos V_0 + \alpha_x^2(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) \text{sen}V_0 \right\} \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ (\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2 V_2}{\partial \eta^2} + \widehat{\Pi}_1 V_1 + \widehat{\Pi}_2 V_0 + \alpha^2(x, t)(u_2 + V_2) \cos V_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \alpha^2(x, t)(u_1 + V_1)^2 \text{sen}V_0 + \frac{1}{2} \alpha_x^2(\varphi, t)(\eta + \varphi_1)^2 \text{sen}V_0 \right\} = \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{1.5}$$

**Lema 1.2.** Sean  $\varphi(t)$  y  $\varphi_1(t)$  funciones infinitamente diferenciables para  $t \in [0, T]$ , entonces el término principal (con precisión  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ) de la solución asintótica tipo kink de la ecuación (1.1) tiene la forma

$$V_0 = 4\arctan\left(\exp\left(\beta\frac{x - \varphi(t) - \varepsilon\varphi_1(t)}{\varepsilon}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (1.6)$$

donde

$$\beta = \frac{\alpha(\varphi, t)}{\sqrt{1 - \varphi_t^2}}. \quad (1.7)$$

*Demostración.* De (1.5) tenemos que

$$(\varphi_t^2 - 1)\frac{d^2V_0}{d\eta^2} + \alpha^2(\varphi, t)\text{sen}V_0 = 0, \quad (1.8)$$

donde  $t$  se considera como un parámetro.

Multiplicando (1.8) por  $dV_0/d\eta$  e integrando con respecto a  $\eta$ , se obtiene la relación

$$\frac{(\varphi_t^2 - 1)}{2\alpha^2(\varphi, t)}\left(\frac{dV_0}{d\eta}\right)^2 - \cos V_0 = K,$$

y dado que  $dV_0/d\eta \rightarrow 0$  y  $\cos V_0 \rightarrow 1$  cuando  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , entonces  $K$  tiene que ser  $-1$ , lo cual implica que  $|\varphi_t| \leq 1$ , por lo que

$$\left(\frac{dV_0}{d\eta}\right)^2 = 2\beta^2(1 - \cos V_0), \quad (1.9)$$

y cuya solución esta ecuación diferencial es

$$V_0 = 4\arctan(\exp(\beta\eta)). \quad (1.10)$$

□

Nótese que en (1.10) obtuvimos  $V_0 = V_0(\eta)$ , pero  $\eta$  está en función de  $\varphi$  y  $\varphi_1$ , que falta por determinar, y que lo haremos a continuación.

Igualamos a cero el coeficiente de  $\varepsilon$  en (1.5), esto es

$$(\varphi_t^2 - 1)\frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta^2} + \alpha^2(x, t)(u_1 + V_1)\cos V_0 + \widehat{\Pi}_1 V_0 + \alpha_x^2(\varphi, t)(\eta + \varphi_1)\text{sen}V_0 = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.11)$$

Primeramente, obsérvese que  $\widehat{\Pi}_1 V_0 \rightarrow 0$ ,  $\text{sen}V_0 \rightarrow 0$ ,  $\partial^2 V_0/\partial \eta^2 \rightarrow 0$  y  $\cos V_0 \rightarrow 1$  cuando  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . Además, dado que  $V_1 \rightarrow 0$  cuando  $\eta \rightarrow -\infty$ , entonces  $\alpha^2(x, t)u_1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$  y por lo tanto  $u_1 = 0$ . Luego, cuando  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $\alpha^2(x, t)V_1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , lo cual

implica que  $V_1 \rightarrow 0$  cuando  $\eta \rightarrow \infty$ . Esto nos conduce a que  $V_1 \in \mathcal{S}$ . Por lo tanto, reescribimos (1.11) de la siguiente manera

$$(\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta^2} + \alpha^2(x, t) V_1 \cos V_0 + \widehat{\Pi}_1 V_0 + \alpha_x^{2'}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) \text{sen} V_0 = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.12)$$

Dado que en el segundo término del lado izquierdo de la ecuación (1.12)  $V_1 \cos V_0$  tiende a cero cuando  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , entonces  $\alpha^2(x, t)$  puede ser escrito como

$$\alpha^2(x, t) V_1 = \{ \alpha^2(\varphi, t) + \varepsilon(\eta + \varphi_1) \alpha_x^{2'}(\varphi, t) \} V_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.13)$$

Sin embargo, la relación anterior modifica las expresiones para los coeficientes de  $\varepsilon$  y  $\varepsilon^2$  en (1.5), quedando como sigue

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\{ (\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta^2} + \alpha^2(\varphi, t) V_1 \cos V_0 + \widehat{\Pi}_1 V_0 + \alpha_x^{2'}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) \text{sen} V_0 \right\} \\ & \varepsilon^2 \left\{ (\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2 V_2}{\partial \eta^2} + \alpha^2(x, t)(u_2 + V_2) \cos V_0 + \widehat{\Pi}_1 V_1 + \widehat{\Pi}_2 V_0 \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} \alpha^2(x, t) V_1^2 \text{sen} V_0 + \frac{1}{2} \alpha_x^{2''}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1)^2 \text{sen} V_0 \\ & \quad \left. + \alpha_x^{2'}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) V_1 \cos V_0 \right\} = \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (1.14)$$

De (1.14), igualando a cero el coeficiente de  $\varepsilon$ , se tiene que

$$(\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta^2} + \alpha^2(\varphi, t) V_1 \cos V_0 = -\widehat{\Pi}_1 V_0 - \alpha_x^{2'}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) \text{sen} V_0. \quad (1.15)$$

Reescribimos la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\widehat{L} V_1 = F_1, \quad (1.16)$$

donde

$$\widehat{L} = (\varphi_t^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \alpha^2(\varphi, t) \cos V_0,$$

$$F_1(\eta, t) = -\widehat{\Pi}_1 V_0 - \alpha_x^{2'}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) \text{sen} V_0.$$

Observe que el operador  $\widehat{L}$  en  $\mathcal{H}$  es autoadjunto y su kernel es  $\partial V_0 / \partial \eta$ .

**Lema 1.3.** *Sea  $F(\eta, t) \in \mathcal{H}$ . Una condición necesaria y suficiente para la solubilidad de (1.16) en la clase  $\mathcal{H}$  es que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta, t) \frac{\partial V_0}{\partial \eta} d\eta = 0. \quad (1.17)$$

Para demostrar este lema, se multiplica a (1.16) por  $\partial V_0/\partial \eta$  y se integra con respecto a  $\eta$  el lado izquierdo de (1.16) y se verifica que es igual a cero.

**Lema 1.4.** *La condición (1.17) es equivalente al sistema Hamiltoniano*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad H = \sqrt{\alpha^2(\varphi, t) + P^2(t)}. \quad (1.18)$$

Además,  $\varphi_t^2 < 1$  uniformemente en  $t$ .

*Demostración.* De acuerdo con el Lema 1.3

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Pi}_1 V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \eta} d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_x^{2'}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \text{sen} V_0 d\eta = 0. \quad (1.19)$$

Sustituyendo  $\widehat{\Pi}_1$  y utilizando (1.8), reescribimos (1.19) como sigue

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\varphi_t \varphi_{1t} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} - 2\varphi_t \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta \partial t} - 2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta \partial x} - \varphi_{tt} \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right\} \frac{\partial V_0}{\partial \eta} d\eta \\ & - \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\alpha^2(\varphi, t)} (\varphi_t^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1) \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} d\eta = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Integrando por partes se verifican las siguientes identidades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} d\eta = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \eta \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} d\eta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta,$$

y que al sustituirlas en (1.20) se obtiene

$$-\varphi_{tt} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta - \varphi_t \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta - \frac{\alpha_x^{2'}}{2\alpha^2} (\varphi_t^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = 0,$$

que equivale a

$$\frac{d}{dt} \varphi_t \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta + \frac{\alpha_x^{2'}}{2\alpha^2} (\varphi_t^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = 0. \quad (1.21)$$

Utilizando (1.7) y como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = 4\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\cosh^2(\xi)} > 0,$$

entonces (1.21) queda como sigue

$$\frac{d}{dt} (\beta \varphi_t) + \frac{\alpha \alpha_x'}{\beta} = 0. \quad (1.22)$$

Definiendo  $P := \beta\varphi_t$ , utilizando (1.7) y considerando (1.22), se tiene que

$$\varphi_t = \frac{P}{\sqrt{\alpha^2 + P^2}}, \quad P_t = -\frac{\alpha(\varphi, t)\alpha'_x(\varphi, t)}{\sqrt{\alpha^2(\varphi, t) + P^2}}.$$

Si denotamos por  $H = \sqrt{\alpha^2(\varphi, t) + P^2}$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  es solución del sistema Hamiltoniano

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \quad (1.23)$$

Además

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{\sqrt{\alpha^2(\varphi, t) + P^2}}$$

lo cual implica que

$$|\varphi_t| = \left| \frac{\partial H}{\partial P} \right| < 1.$$

□

A continuación, igualamos a cero el coeficiente de  $\varepsilon^2$  en (1.14), con el fin de obtener  $\varphi_1$ , esto es,

$$\begin{aligned} (\varphi_t^2 - 1)\frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} + \alpha^2(x, t)(u_2 + V_2)\cos V_0 + \widehat{\Pi}_1 V_1 + \widehat{\Pi}_2 V_0 - \frac{1}{2}\alpha^2(x, t)V_1^2 \text{sen} V_0 \\ + \frac{1}{2}\alpha_x^{2''}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1)^2 \text{sen} V_0 + \alpha_x^{2'}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1)V_1 \cos V_0 = \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Obsérvese que en la ecuación anterior  $\partial^2 V_0 / \partial \eta^2 \rightarrow 0$ ,  $\text{sen} V_0 \rightarrow 0$ ,  $\widehat{\Pi}_1 V_1 \rightarrow 0$ ,  $\widehat{\Pi}_2 V_0 \rightarrow 0$ ,  $\cos V_0 \rightarrow 1$  cuando  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , además, como  $V_1 \in \mathcal{S}$ , entonces  $u_2 = u_2(x, t) \equiv 0$  y  $V_2 \in \mathcal{S}$ . Por lo tanto reescribimos (1.24) de la siguiente manera:

$$\widehat{L}V_2 = F_2, \quad (1.25)$$

donde

$$\begin{aligned} F_2 = -\widehat{\Pi}_1 V_1 - \widehat{\Pi}_2 V_0 + \frac{1}{2}\alpha^2(x, t)V_1^2 \text{sen} V_0 + \frac{1}{2}\alpha_x^{2''}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1)^2 \text{sen} V_0 \\ - \alpha_x^{2''}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1)V_1 \cos V_0. \end{aligned}$$

De acuerdo con el Lema 1.3, una condición necesaria y suficiente para la solubilidad de (1.25) es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_2 \frac{\partial V_0}{\partial \eta} d\eta = 0, \quad (1.26)$$

**Lema 1.5.** Sea  $\varphi_t^2 < 1$ . Entonces (1.26) es equivalente a la ecuación

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \mu_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + \mu_2\varphi_1 = 0, \quad (1.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{\beta_t}{\beta} - 2\frac{\alpha'_t(\varphi, t)}{\alpha(\varphi, t)}, \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}\beta^2\alpha^2(\varphi, t) \left\{ \varphi_t \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha_x'^2(\varphi, t)}{\alpha^2(\varphi, t)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha_x'^2(x, t)}{\alpha^2(x, t)} \right) \Big|_{x=\varphi} \right\}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Sustituyendo  $F_2$  en (1.26), se tiene que

$$\begin{aligned} & -2\varphi_t \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta t} d\eta - \varphi_{tt} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta} d\eta + 2\varphi_t \varphi_{1t} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta\eta} d\eta \\ & - \frac{\alpha^2(x, t)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_1^2 \sin V_0 d\eta + \alpha_x'^2(\varphi, t) \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1) V_1 V_{0\eta} \cos V_0 d\eta \\ & - 2\varphi_{1t} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{0\eta t} d\eta - \varphi_{1tt} \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta + \varphi_{1t}^2 \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{0\eta\eta} d\eta \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{0tt} d\eta + \frac{\alpha_x''(\varphi, t)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1)^2 V_{0\eta} \sin V_0 d\eta = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Aquí y en lo que sigue, para  $k = 1, 2$

$$V_{k\eta} := \frac{\partial V_k}{\partial \eta}, \quad V_{k\eta\eta} := \frac{\partial^2 V_k}{\partial \eta^2}, \quad V_{k\eta t} := \frac{\partial^2 V_k}{\partial \eta \partial t}.$$

Integrando por partes la tercera integral del lado izquierdo de (1.28) y utilizando (1.8) se tiene que

$$2\varphi_t \varphi_{1t} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta\eta} d\eta = 2\varphi_{1t} \frac{\varphi_t \alpha^2(\varphi, t)}{1 - \varphi_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} V_1 \cos V_0 d\eta. \quad (1.29)$$

Además,

$$-2\varphi_t \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{0\eta t} d\eta = -\varphi_t \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta. \quad (1.30)$$

Utilizando (1.8), (1.29) y (1.30), reescribimos (1.28) como sigue:

$$\begin{aligned} & -2\varphi_t \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta t} d\eta - \varphi_{tt} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta} d\eta + 2\varphi_{1t} \frac{\varphi_t a(\varphi, t)}{1 - \varphi_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} V_1 \cos V_0 d\eta \\ & - \frac{\alpha^2(x, t)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_1^2 \sin V_0 d\eta + \alpha_x'^2(\varphi, t) \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1) V_1 V_{0\eta} \cos V_0 d\eta \\ & - \varphi_{1t} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta - \varphi_{1tt} \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{0tt} d\eta \\ & - \frac{\alpha_x''(\varphi, t)(\varphi_t^2 - 1)}{2a(\varphi, t)} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1)^2 V_{0\eta} V_{0\eta\eta} d\eta = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ahora calculamos las derivadas de (1.6) que serán utilizadas más adelante. Dado que

$$V_{0\eta} = \frac{2\beta}{\cosh(\beta\eta)}, \quad V_{0\eta\eta} = -\frac{2\beta^2 \sinh(\beta\eta)}{\cosh^2(\beta\eta)}, \quad V_{0t} = \frac{2\beta_t \eta}{\cosh(\beta\eta)},$$

entonces

$$V_{0tt} = \frac{\beta_{tt}}{\beta} \eta V_{0\eta} + \frac{\beta_t^2}{\beta^2} \eta^2 V_{0\eta\eta}, \quad V_{0\eta t} = \frac{\beta_t}{\beta} V_{0\eta} + \frac{\beta_t}{\beta} \eta V_{0\eta\eta}. \quad (1.32)$$

Por otra parte, multiplicando (1.15) por  $V_{1\eta}$  e integrando con respecto a  $\eta$  se tiene que

$$\begin{aligned} & (\varphi_t^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} V_{1\eta} V_{1\eta\eta} d\eta + \alpha^2(\varphi, t) \int_{-\infty}^{\infty} V_1 V_{1\eta} \cos V_0 d\eta \\ &= 2\varphi_t \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta t} V_{1\eta} d\eta + \varphi_{tt} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta} d\eta \\ & - 2\varphi_t \varphi_{1t} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta\eta} V_{1\eta} d\eta - \alpha_x^{2'}(\varphi, t) \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1) V_{1\eta} \sin V_0 d\eta. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Es obvio que la primer integral del lado izquierdo de (1.33) es igual a cero. La segunda integral del mismo lado la integramos por partes, resultando que

$$\alpha^2(\varphi, t) \int_{-\infty}^{\infty} V_1 V_{1\eta} \cos V_0 d\eta = \frac{\alpha^2(\varphi, t)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V_1^2 V_{0\eta} \sin V_0 d\eta.$$

Por consiguiente, (1.33) queda como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2(\varphi, t)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_1^2 \sin V_0 d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} V_{1\eta} \left\{ 2\varphi_t V_{0\eta t} + \varphi_{tt} V_{0\eta} - 2\varphi_t \varphi_{1t} V_{0\eta\eta} \right. \\ & \left. - \alpha_x^{2'}(\varphi, t) (\eta + \varphi_1) \sin V_0 \right\} d\eta. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Sustituyendo (1.34) y la primera igualdad de (1.32) en (1.31) y agrupando términos, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & -2 \frac{d}{dt} \varphi_t \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta} d\eta + \alpha_x^{2'}(\varphi, t) \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1) \left\{ V_1 V_{0\eta} \cos V_0 + V_{1\eta} \sin V_0 \right\} d\eta \\ & - \frac{d}{dt} \varphi_{1t} \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta + \frac{\beta_t^2}{2\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} (V_{0\eta})^2 d\eta - \frac{\alpha_x^{2''}(\varphi, t)}{2\beta^2} \varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Integrando por partes la cuarta integral del lado izquierdo de la ecuación anterior se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} (V_{0\eta})^2 d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \eta (V_{0\eta})^2 d\eta = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1) \left\{ V_1 V_{0\eta} \cos V_0 + V_{1\eta} \sin V_0 \right\} d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + \varphi_1) \frac{\partial}{\partial \eta} (V_1 \sin V_0) d\eta \\ &= \frac{1}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} V_{1\eta} V_{0\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Por lo que (1.35) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dt} \left\{ \varphi_{1t} \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta + 2\varphi_t \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta} d\eta \right\} \\ & + \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta} d\eta - \frac{\alpha_x^{2''}(\varphi, t)}{2\beta^2} \varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta = 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

A continuación, obtendremos una expresión para la integral de  $V_{0\eta} V_{1\eta}$ . Para esto, consideremos (1.16), donde la parte derecha que es  $F_1$ , está expresado como

$$\widehat{L}V_1 = F_1 = 2\varphi_t V_{0\eta t} + \varphi_{tt} V_{0\eta} - 2\varphi_t \varphi_{1t} V_{0\eta\eta} - \alpha_x^{2'}(\varphi, t)(\eta + \varphi_1) \sin V_0. \quad (1.37)$$

Utilizando la segunda expresión de (1.32), (1.8) y (1.22), (1.36) se transforma en

$$\widehat{L}V_1 = - \left( \varphi_{tt} + \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\beta^2} \right) (V_{0\eta} + 2\eta V_{0\eta\eta}) - \left( 2\varphi_t \varphi_{1t} + \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\beta^2} \varphi_1 \right) V_{0\eta\eta}. \quad (1.38)$$

Por lo tanto,  $V_1$  es de la forma  $V_1 = (c_1\eta^2 + c_2\eta + c_3)V_{0\eta}$  y su derivada con respecto a  $\eta$  es

$$V_{1\eta} = (2c_1\eta + c_2)V_{0\eta} + (c_1\eta^2 + c_2\eta + c_3)V_{0\eta\eta}.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} (2c_1\eta + c_2)(V_{0\eta})^2 d\eta + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (c_1\eta^2 + c_2\eta + c_3) \frac{\partial}{\partial \eta} (V_{0\eta})^2 d\eta. \quad (1.39)$$

Sustituyendo en (1.39) cada una de las siguientes integrales, mismas que pueden verificarse integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta (V_{0\eta})^2 d\eta = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} (V_{0\eta})^2 d\eta = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} (V_{0\eta})^2 d\eta = - \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} (V_{0\eta})^2 d\eta = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \eta (V_{0\eta})^2 d\eta = 0,$$

obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_{0\eta} V_{1\eta} d\eta = \frac{1}{2} c_2 \int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta. \quad (1.40)$$

A continuación obtendremos el valor de  $c_2$ . Para esto, aplicamos el operador  $\widehat{L}$  a  $V_1$  y el resultado lo comparamos con la parte derecha de (1.38).

$$\begin{aligned} \widehat{L}V_1 &= (\varphi_t^2 - 1) \{ 2c_1(V_{0\eta} + 2\eta V_{0\eta\eta}) + 2c_2 V_{0\eta\eta} + (c_1\eta^2 + c_2\eta + c_3)V_{0\eta\eta\eta} \} \\ &\quad + \alpha^2(\varphi, t) \{ (c_1\eta^2 + c_2\eta + c_3)V_{0\eta} \} \cos V_0. \end{aligned}$$

Comparando con (1.38) concluimos que

$$c_2 = -\frac{1}{2(\varphi_t^2 - 1)} \left( 2\varphi_t \varphi_{1t} + \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\beta^2} \varphi_1 \right),$$

y dado que

$$\beta^2 = -\frac{\alpha^2(\varphi, t)}{\varphi_t^2 - 1},$$

entonces

$$c_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2(\varphi, t)} \varphi_t \varphi_{1t} + \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{2\alpha^2(\varphi, t)}. \quad (1.41)$$

Sustituyendo (1.40) y el valor de  $C_2$  en (1.36) y dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (V_{0\eta})^2 d\eta > 0,$$

se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi_{1t}}{\alpha^2(\varphi, t)\beta} \right) + \frac{1}{2} \varphi_1 \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\alpha^2(\varphi, t)} \beta \varphi_t \right) - \frac{1}{2\beta} \frac{(\alpha_x^{2'}(\varphi, t))^2}{\alpha^2(\varphi, t)} + \frac{1}{\beta} \alpha_x^{2''}(\varphi, t) \right\} = 0. \quad (1.42)$$

Derivando el segundo término del lado izquierdo de (1.42), utilizando (1.22) y las igualdades

$$\begin{aligned} \alpha^2(\varphi, t) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\alpha^2(\varphi, t)} \right) &= \alpha_x^{2''}(\varphi, t) - \frac{(\alpha_x^{2'}(\varphi, t))^2}{\alpha^2(\varphi, t)}, \\ \alpha^2(\varphi, t) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\alpha^2(\varphi, t)} \right) &= \alpha_x^{2''}(\varphi, t) - \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t) \alpha_{xt}^{2'}(\varphi, t)}{\alpha^2(\varphi, t)}, \end{aligned}$$

se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi_{1t}}{\alpha^2(\varphi, t)\beta} \right) + \frac{1}{2} \varphi_1 \beta \left\{ \varphi_t \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha_x^{2'}(\varphi, t)}{\alpha^2(\varphi, t)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha_x^{2'}(x, t)}{\alpha^2(x, t)} \right) \Big|_{x=\varphi} \right\} = 0, \quad (1.43)$$

que realizando algunas manipulaciones algebraicas simples nos conduce a la ecuación (1.27) cuya solución representa el cambio de fase  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ .  $\square$

Como consecuencia de los Lemas anteriores, obtenemos el siguiente resultado

**Teorema 1.6.** Sean  $\varphi, P$  y  $\varphi_1$  soluciones infinitamente diferenciables de (1.18), (1.27) para  $t \in [0, T]$ . Entonces para cualquier entero  $N \geq 0$  existe una solución asintótica tipo onda de choque mod  $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$  de (1.1) cuyo término principal tiene la forma

$$V_0 = 4 \arctan \left( \exp \left( \beta \frac{x - \varphi(t) - \varepsilon \varphi_1(t)}{\varepsilon} \right) \right),$$

donde

$$\beta = \frac{\alpha(\varphi, t)}{\sqrt{1 - \varphi_t^2}}.$$

## Capítulo 2

# Solución asintótica débil para el problema de interacción de ondas

### 2.1. Introducción

A diferencia del capítulo anterior, aquí se analizará la propagación e interacción de ondas, específicamente, la interacción del par kink-antikink considerando la ecuación tipo sine-Gordon, con la característica de que después de la colisión entre dichas ondas, estas preserven sus formas originales.

Consideremos una clase de ecuaciones de onda semil-lineales

$$\varepsilon^2 (u_{tt} - u_{xx}) + F'(u) = 0, \quad (2.1)$$

donde  $u = u(x, t, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño y  $F'(u) = \partial F(u)/\partial u$ , con  $F(u)$  es una función no lineal suave tal que la ecuación (2.1) tiene soluciones del tipo kink/antikink de la forma:

$$u(x, t, \varepsilon) = \omega \left( S\beta \frac{x - Vt}{\varepsilon} \right), \quad (2.2)$$

donde

$$S = \pm 1, \quad \beta = (1 - V^2)^{-1/2}, \quad V \in (0, 1), \quad \omega(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

$$\omega(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{para } \eta \rightarrow -\infty, \quad \omega(\eta) \rightarrow 1 \quad \text{para } \eta \rightarrow +\infty.$$

Vamos a suponer adicionalmente que  $\omega(\eta)$  tiende a sus valores límites suficientemente rápido, es decir

$$|\omega(\eta)| \leq c_1 \eta^{-1} \quad \text{cuando } \eta \rightarrow -\infty, \quad |\omega(\eta) - 1| \leq c_2 \eta^{-1} \quad \text{cuando } \eta \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

La función (2.2) es llamada kink si  $S = 1$  y antikink si  $S = -1$ , como se muestra en la figura 2.1.

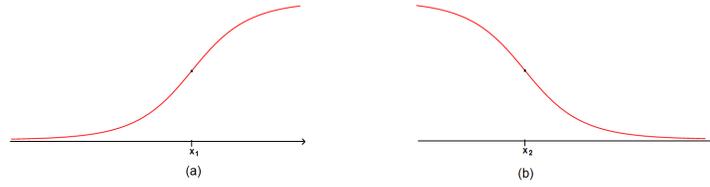


Figura 2.1: (a) kink; (b) antikink

En (2.2) la recta  $x - Vt = 0$  es la trayectoria, en el plano, que sigue el frente del kink o antikink, donde  $t$  representa el tiempo y  $V$  la velocidad.

Sustituyendo (2.2) en (2.1) se obtiene la ecuación

$$\frac{d\omega(\eta)}{d\eta} = \sqrt{2F(\omega(\eta))}. \quad (2.4)$$

Para la existencia de soluciones tipo kink/antikink de la clase (2.2), (2.3) la función  $F(u)$  debe satisfacer las siguientes condiciones (ver [14, 10])

- A)  $F(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $F(z) > 0$  para  $z \in (0, 1)$ ,
- B)  $F^{(i)}(z_0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ ,  $F^{(k+1)}(z_0) > 0$ , donde  $z_0 = 0$  y  $z_0 = 1$  y  $k = 1$  o  $k = 3$ ,

Además, la condición de periodicidad

$$C) F(z + 1) = F(z)$$

nos permite considerar la superposición de ondas y cualquier combinación de kink - antikink

$$u_\Sigma = \sum_{i=1}^N \omega \left( \pm \beta_i \frac{x - V_i t - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad x_{i+1}^0 - x_i^0 > 1, \quad 0 < t \ll 1 \quad (2.5)$$

se aproximará a la solución exacta del correspondiente problema de Cauchy.

Como ejemplos de funciones que satisfacen las condiciones A) - C) y que son solución (2.1) son

$$F(z) = \frac{1}{4\pi^2}(1 - \cos(2\pi z)), \quad \omega = \frac{2}{\pi} \arctan(e^\eta), \quad (2.6)$$

$$F(z) = \text{sen}^4(\pi z), \quad \omega = \frac{1}{\pi} \text{arccot}(-\sqrt{2}\pi\eta). \quad (2.7)$$

El ejemplo (2.6) corresponde a la ecuación sine-Gordon. Es conocido que los kink/antikink de la ecuación de sine-Gordon, la cual es integrable, interactúan sin cambiar sus formas (ver [23]). Llamaremos a este tipo de interacción “escenario sine-Gordon”. Por consiguiente, el propósito en este capítulo es determinar que condiciones debe cumplir  $F(u)$  en (2.1) para que los kinks y los antikinks colisionen siguiendo el escenario sine-Gordon.

## 2.2. Solución asintótica débil

Dado que los kinks son suaves para  $\varepsilon > 0$  y se convierten en no suaves en el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , trataremos a las soluciones de (2.1) como un mapeo  $\mathcal{C}^\infty(0, T; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x))$  para  $\varepsilon > 0$  y como  $\mathcal{C}(0, T; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x))$  uniformemente en  $\varepsilon \geq 0$ . Por tal razón, lo natural es utilizar la definición estandar de una solución en el sentido débil, esto es

Una distribución  $u \in \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}_x)$  es una solución de la ecuación (2.1), en el sentido débil, si  $F'(u) \in \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}_x)$  y la igualdad

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon^2 u(\psi_{tt} - \psi_{xx}) + \psi F'(u)) dx dt = 0 \quad (2.8)$$

es válida para cualquier función de prueba  $\psi(x, t) \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}_x)$ .

Sin embargo, existe un obstáculo al utilizar esta definición, ya que el lado izquierdo de (2.8) es  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Para superar esta situación, en [14] fue construida una nueva definición de solución asintótica, que a continuación se presenta

**Definición 2.1.** Una sucesión  $u(t, x, \varepsilon)$ , que pertenece a  $\mathcal{C}^\infty(0, T; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^1))$  para  $\varepsilon > 0$  y que pertenece a  $\mathcal{C}(0, T; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^1))$  uniformemente en  $\varepsilon$ , es llamada una solución asintótica débil mod  $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$  de (2.1) si la relación

$$2 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 u_t u_x \psi dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (\varepsilon u_t)^2 + (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u) \right\} \psi_x dx = O(\varepsilon^2) \quad (2.9)$$

es válida para cualquier función de prueba  $\psi = \psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ .

Aquí el lado izquierdo es una función  $\mathcal{C}^\infty$  para  $\varepsilon = \text{const} > 0$  y una función continua por pedazos uniformemente en  $\varepsilon \geq 0$ . La estimación se entiende en el sentido  $\mathcal{C}(0, T)$ :

$$g(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^k) \leftrightarrow \max_{t \in [0, T]} |g(t, \varepsilon)| \leq c \varepsilon^k.$$

El lado izquierdo de (2.9) es el resultado de la multiplicación de (2.1) por  $\psi(x)u_x$  e integrando por partes en el caso de  $u$  suave. Por lo tanto, es cero para cualquier solución exacta. Por otro lado, la relación (2.9) es justamente la condición de ortogonalidad que aparece en el capítulo anterior. Esta condición garantiza la existencia de la primera corrección y permite encontrar una ecuación para el movimiento distorsionado de frentes de kinks.

**Definición 2.2.** Una función  $v(t, x, \varepsilon)$  se dice ser de valor  $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^k)$  si la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t, x, \varepsilon) \psi(x) dx = O(\varepsilon^k)$$

es válida para cualquier función de prueba  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x^1)$ .

### 2.3. Interacción kink-kink

El caso de la interacción de dos kinks, presentamos un resumen del análisis realizado en [14]. Se consideró la ecuación (2.1) con las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^2 \omega\left(\beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \sum_{i=1}^2 \beta_i V_i \omega'\left(\beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon}\right), \quad (2.10)$$

donde  $\beta_i = 1/\sqrt{1 - V_i^2}$ ,  $|V_i| \in (0, 1)$ , y las posiciones iniciales de los frentes  $x_i^0$  son tales que  $x_2^0 - x_1^0 > 1$ . Obviamente, se supone que las trayectorias  $x = V_i t + x_i^0$  tienen un punto en común  $x = x^*$  para un instante de tiempo  $t = t^*$ .

El anzatz asintótico para el problema (2.1), (2.10) tiene la siguiente forma:

$$u = \sum_{i=1}^2 \left\{ \omega\left(\beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) + A_i(\tau) U\left(\beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\mu^2 \varepsilon}\right) \right\}. \quad (2.11)$$

Aquí  $\Phi_i = \phi_{i0}(t) + \varepsilon \phi_{i1}(\tau)$ ,  $\phi_{i0} = V_i t + x_i^0$  son las trayectorias de los kinks no interactuantes,  $\tau = \psi_0(t)/\varepsilon$  denota el “tiempo rápido”,  $\psi_0(t) = \phi_{20}(t) - \phi_{10}(t)$ , las correcciones de las fases  $\phi_{i1}$  son funciones suaves tales que

$$\phi_{i1} \rightarrow 0 \quad \text{as } \tau \rightarrow -\infty, \quad \phi_{i1} \rightarrow \phi_{i1}^\infty = \text{const}_i \quad \text{as } \tau \rightarrow +\infty \quad (2.12)$$

con una rapidez no menor que  $1/|\tau|$ . Además,  $A_i(\tau) \in \mathcal{C}^\infty$  son funciones que se anulan exponencialmente cuando  $|\tau| \rightarrow \infty$ ,  $\mu$  es un parámetro suficientemente pequeño,  $\varepsilon < \mu \ll 1$ , y

$$U(\eta) = \frac{d^m U_0(\eta)}{d\eta^m},$$

donde  $m \geq 1$  es un número arbitrario y  $U_0(\eta) \in \mathcal{C}^\infty$  es una función que se anulan suficientemente rápido cuando  $|\eta| \rightarrow \infty$ .

El principal resultado obtenido en [14], para el problema (2.1), (2.10), es el siguiente:

**Teorema 2.3.** *Supóngase que A) - C) son válidas. Estableciendo las hipótesis adicionales*

D)  $F(1/2 + z) = F(1/2 - z)$ ,

E) *Sea la función  $F(z)$  tal que la desigualdad*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta) + \omega(\theta\eta)) d\eta \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sqrt{F(\omega(\eta))} + \sqrt{F(\omega(\theta\eta))} \right\}^2 d\eta \quad (2.13)$$

es válida uniformemente en  $\theta \in (0, \infty)$ . Entonces la interacción de los kinks en el problema (2.1), (2.10) preserva el escenario sine-Gordon con una precisión  $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$  en el sentido de la Definición 2.1. La solución asintótica débil de (2.1), (2.10) tiene la forma (2.11) con una elección especial de las amplitudes  $A_i$  y del parámetro  $\mu$ .

**Observación 2.4.** La simetría  $D$ ) ha sido supuesta sólo para simplificar el análisis asintótico.

**Observación 2.5.** El sentido de la hipótesis  $E$ ) es el siguiente. Las correcciones de las fases  $\phi_{i1}$  son soluciones de un sistema dinámico de  $2 \times 2$  con una singularidad la cual divide el plano fase en dos partes con la posible excepción del punto  $(0, 0)$ . Las hipótesis (2.12) se satisfacen (en consecuencia, el escenario sine-Gordon se lleva a cabo) si y sólo si existe una trayectoria específica la cual va de un semi-plano a otro a través del punto  $(0, 0)$ . En la construcción de la solución asintótica la desigualdad que aparece en la hipótesis  $E$ ) es muy complicada, por lo que ésta a sido cambiada a la forma (2.13). Tal versión puede ser tratada como aceptable ya que se satisface para la ecuación sine-Gordon para cualesquiera velocidades  $V_i, i = 1, 2$ . Lo mismo es cierto para la no linealidad

$$F(u) = \sin^4(\pi u). \quad (2.14)$$

Teniendo en cuenta la libertad en la elección de las amplitudes  $A_i, i = 1, 2$ , la hipótesis (2.13) puede hacerse más débil. Sin embargo, el sistema dinámico con  $A_i \neq 0, i = 1, 2$ , es muy complicado y cuyo análisis completo resta por hacer.

Obviamente, lo dicho anteriormente sigue siendo cierto para la interacción antikink-antikink

## 2.4. Interacción kink-antikink

Centraremos nuestra atención en la interacción kink-antikink para la ecuación (2.1) con los datos iniciales

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^2 \omega \left( S_i \beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \sum_{i=1}^2 S_i \beta_i V_i \omega' \left( S_i \beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad (2.15)$$

donde  $S_1 = 1, S_2 = -1$ , y la notación  $\beta_i, V_i, x_i^0$  es la misma como en (2.10).

Técnicamente, la construcción de la solución asintótica débil es similar al caso kink-kink.

### 2.4.1. Construcción de la solución asintótica débil

De acuerdo a la definición 2.1, para la construcción de la solución asintótica débil, calcularemos las asintóticas débiles mod  $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$  de las expresiones involucradas en la ecuación (2.9).

Consideremos el término principal de la solución asintótica débil mod  $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$  del problema (2.1), (2.15) mediante el ansatz

$$u = \sum_{i=1}^2 \omega \left( S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right), \quad (2.16)$$

que representa la suma de dos ondas solitarias. Aquí  $\beta_i$  y  $\Phi_i$  están definidos como en (2.11).

Primeramente, realizaremos los cálculos para el término  $(\varepsilon u_x)^2$ . Para simplificar, en lo sucesivo denotaremos

$$\omega_0 = \omega_0(\eta) = \frac{d\omega(\eta)}{d\eta}.$$

Diferenciando con respecto a  $x$  el ansatz (2.16), multiplicando el resultado por  $\varepsilon$ , elevando al cuadrado e integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_x)^2 \psi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1^2 \omega_0^2 \left( \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta_2^2 \omega_0^2 \left( \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} 2\beta_1 \beta_2 \omega_0 \left( \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \times \omega_0 \left( \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  es una función arbitraria.

Empezemos por analizar el primer término del lado izquierdo de (2.17).

$$\beta_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2 \left( \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx = \varepsilon \beta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) \psi \left( \frac{\varepsilon}{\beta_1} \eta + \Phi_1 \right) d\eta,$$

donde

$$\eta = \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon}.$$

Luego, aplicando la fórmula de Taylor y utilizando la suposición (2.3)

$$\psi \left( \frac{\varepsilon}{\beta_1} \eta + \Phi_1 \right) = \psi(\Phi_1) + \frac{\varepsilon}{\beta_1} \eta \psi'(\Phi_1) + \frac{\varepsilon^2}{2\beta_1^2} \psi''(\xi),$$

donde  $\xi$  está entre  $\Phi_1$  y  $\Phi_1 + \varepsilon\eta/\beta_1$ , se tiene que

$$\beta_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2 \left( \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx = \varepsilon \beta_1 \psi(\Phi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) d\eta + \varepsilon^2 \psi'(\Phi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0^2(\eta) d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

dado que las funciones  $\omega_0(\eta)$  y  $\eta$  son par e impar, respectivamente, entonces

$$\beta_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2 \left( \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx = \varepsilon \beta_1 \psi(\Phi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

De manera similar, se obtiene una expresión para el segundo término del lado izquierdo de (2.17).

En el tercer término del lado izquierdo de (2.17) hacemos el cambio de variable

$$\eta = \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon}, \quad \text{entonces} \quad \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} = \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varepsilon} = \frac{1}{\beta_2} \eta + \sigma,$$

donde  $\sigma$  está dado por

$$\sigma = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\varepsilon} = \tau + \phi_{21}(\tau) - \phi_{11}(\tau). \quad (2.18)$$

Así, el tercer término queda como sigue

$$\begin{aligned} 2\beta_1\beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 \left( \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \omega_0 \left( \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx \\ = 2\varepsilon\beta_1\psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\theta\eta + \beta_1\sigma)\omega_0(\eta) d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donde  $\theta = \beta_1/\beta_2$ . Por lo tanto (2.17) queda como sigue

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_x)^2 \psi(x) dx = \varepsilon \sum_{i=1}^2 \beta_i \psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) d\eta \\ - 2\varepsilon\beta_1\psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\theta\eta + \beta_1\sigma)\omega_0(\eta) d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.19)$$

la cual es válida para cualquier función de prueba.

Introduciremos la notación

$$\lambda_1(\sigma) = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta)\omega_0(\theta\eta + \beta_1\sigma) d\eta, \quad a_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2(\eta) d\eta \quad (2.20)$$

y reescribimos (2.19) de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_x)^2 \psi(x) dx = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \psi(\Phi_i) - 2\beta_1 \psi(\Phi_2) \lambda_1(\sigma) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.21)$$

En el sentido de distribuciones, se tiene que

$$(\varepsilon u_x)^2 = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \delta(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \lambda_1(\sigma) \delta(x - \Phi_2) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \quad (2.22)$$

donde  $\delta$  es la distribución Delta de Dirac.

Dado que  $\Phi_i(t, \tau, \varepsilon) = \phi_{i0}(t) + \varepsilon\phi_{i1}(\tau)$  y al momento de la interacción  $(x^*, t^*)$   $\phi_{10}(t^*) = \phi_{20}(t^*) = x^* = V_i t^* + x_i^0$ , entonces

$$\begin{aligned}\Phi_i &= V_i t + (x^* - V_i t^*) + \varepsilon\phi_{i1}(\tau) \\ &= x^* + V_i(t - t^*) + \varepsilon\phi_{i1}(\tau).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Sustituyendo (2.23) en (2.18), se obtiene

$$\sigma = \frac{V_2(t - t^*) + \varepsilon\phi_{21} - V_1(t - t^*) - \varepsilon\phi_{11}}{\varepsilon},$$

lo cual implica que

$$t - t^* = \frac{\varepsilon}{\nu}(\sigma + \phi_{11} - \phi_{21}), \quad \text{donde } \nu := V_2 - V_1,$$

aplicando la igualdad inmediata anterior en (2.23), se obtiene que

$$\Phi_i = x^* + \varepsilon \left\{ \frac{V_i}{\nu}\sigma + \frac{1}{\nu} \left( V_i\phi_{11} - V_i\phi_{21} + (V_2 - V_1)\phi_{i1} \right) \right\},$$

y haciendo  $b_i := V_i/\nu$ , se tiene que

$$\Phi_i = x^* + \varepsilon\chi_i, \quad \text{donde } \chi_i = b_i\sigma + b_2\phi_{11} - b_1\phi_{21}.\tag{2.24}$$

Nótese que  $\lambda_1(\sigma) \rightarrow 0$ , no más lentamente que  $1/|\sigma|^2$ , cuando  $|\sigma| \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, utilizaremos el siguiente resultado:

**Lema 2.6.** *Sea  $\mathcal{S}(\tau) \in \mathcal{C}^\infty$  una función tal que  $|\mathcal{S}(\tau)| \leq c/|\tau|$  cuando  $|\tau| \rightarrow \infty$ . Sea  $\varphi_k(\tau) \in \mathcal{C}^\infty$  con la siguiente representación:*

$$\varphi_k(\tau) = x^* + \varepsilon\chi_k(\tau), \quad \chi_k(0) = 0,$$

donde  $x^*$  es constante y  $\chi_k$  es una función que crece no más que linealmente. Entonces

$$\mathcal{S}(\tau)\delta(x - x^*) = \mathcal{S}(\tau)\delta(x - \varphi_k(\tau)) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{S}(\tau)\delta(x - \varphi_k), \psi(x) \rangle &= \mathcal{S}(\tau)\psi(\varphi_k) \\ &= \mathcal{S}(\tau) \{ \psi(x^*) + \varepsilon\chi_k(\tau)\psi'(\xi) \} \\ &= \mathcal{S}(\tau)\langle \delta(x - x^*), \psi(x) \rangle + \varepsilon R(\tau),\end{aligned}$$

donde  $R(\tau) \in \mathcal{C}^\infty$  es una función acotada para  $\tau$  acotada y, además, cuando  $|\tau| \rightarrow \infty$

$$|R(\tau)| \leq \max_{\xi} |\psi'(\xi)| |\mathcal{S}(\tau)\xi_k(\tau)| \leq c_0 \frac{|c_1\tau|}{|\tau|} \leq cte$$

□

Por el Lema anterior, reescribimos (2.22) como sigue:

$$(\varepsilon u_x)^2 = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \delta(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \lambda_1 \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \quad (2.25)$$

A continuación, de manera similar, se obtendrá una expresión para  $(\varepsilon u_t)^2$ .

Derivando el ansatz (2.16) con respecto a  $t$ , se tiene que

$$u_t = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^2 S_i \beta_i \omega_0 \left( S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \dot{\Phi}_{it}, \quad (2.26)$$

donde  $\Phi_{it}$  representa la derivada con respecto a  $t$  y está dada como

$$\Phi_{it} = \nu(b_i + \phi'_{i1}) \quad \text{donde} \quad \phi'_{i1} = \frac{d\phi_{i1}}{d\tau}. \quad (2.27)$$

Multiplicando (2.26) por  $\varepsilon$ , elevando al cuadrado e integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_t)^2 \psi(x) dx &= \sum_{i=1}^2 \beta_i^2 \Phi_{it}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0^2 \left( \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx \\ &\quad - 2\beta_1 \beta_2 \Phi_{1t} \Phi_{2t} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 \left( \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) \omega_0 \left( \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

De manera similar como se obtuvo una relación para el término  $(\varepsilon u_x)^2$  y utilizando las fórmulas (2.20), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u_t)^2 \psi(x) dx = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i^2 \Phi_{it}^2 \psi(\Phi_i) - 2\beta_1 \Phi_{1t} \Phi_{2t} \lambda_1 \psi(\Phi_2) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

en el sentido de distribuciones, se tiene que

$$\begin{aligned} (\varepsilon u_t)^2 &= \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i^2 \Phi_{it}^2 \delta(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \Phi_{1t} \Phi_{2t} \lambda_1 \delta(x - \Phi_2) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon a_2 \nu^2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i (b_i^2 + 2b_i \phi'_{i1} + \phi'_{i1}) \delta(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \lambda_1 \Phi_{1t} \Phi_{2t} \delta(x - \Phi_2) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Agrupando la relación anterior y aplicando el lema 2.6, se tiene que

$$(\varepsilon u_t)^2 = \varepsilon a_2 \nu^2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta(x - \Phi_i) + K_1 \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \quad (2.29)$$

donde

$$K_1 = \sum_{i=1}^2 \beta_i \phi'_{i1} (2b_i + \phi'_{i1}) - \frac{2}{\nu^2} \beta_1 \lambda_1 \Phi_{1t} \Phi_{2t}.$$

A continuación, se obtendrá una expresión para el término  $\varepsilon u_t u_x$ . Procediendo de manera similar como antes. Multiplicando las derivadas respecto a  $t$  y respecto a  $x$  de (2.16), integrando el resultado respecto a  $x$  y aplicando las fórmulas (2.20), (2.24), (2.27), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon u_t u_x \psi(x) dx &= -\varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 \beta_i V_i \psi(\Phi_i) - \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 \beta_i \nu \phi'_{i1} \psi(\Phi_i) \\ &\quad + \varepsilon a_2 \beta_1 (\Phi_{1t} + \Phi_{2t}) \left\{ \lambda_1 \psi(x^*) + \varepsilon \left( \chi_2 \lambda_1 + \frac{1}{\beta_2} \lambda_2 \right) \psi'(x^*) \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde

$$\lambda_2(\sigma) = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \omega_0(\theta \eta + \beta_1 \sigma) d\eta.$$

Escribiendo (2.30) en el sentido de distribuciones y aplicando el Lema 2.6, se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_t u_x &= -\varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 \beta_i V_i \delta(x - \Phi_i) - \varepsilon a_2 K_2 \delta(x - x^*) \\ &\quad + \varepsilon^2 a_2 \left\{ \nu \sum_{i=1}^2 \beta_i \phi'_{i1} \chi_i - \beta_1 (\Phi_{1t} + \Phi_{2t}) \left( \chi_2 \lambda_1 + \frac{1}{\beta_2} \lambda_2 \right) \right\} \delta'(x - x^*) \\ &\quad + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde

$$K_2 = \sum_{i=1}^2 (\nu \beta_i \phi'_{i1} - \beta_1 \lambda_1 \Phi_{it}).$$

Derivando (2.31) con respecto a  $t$  y sustituyendo el valor de  $\Phi_{it}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^2 u_t u_x &= -a_2 \nu^2 \frac{dK_2}{d\tau} \delta(x - x^*) + \varepsilon a_2 \nu^2 \frac{d}{d\tau} \left( \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \phi_{i1} + W \right) \delta'(x - x^*) \\ &\quad + \varepsilon a_2 \nu^2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta'(x - \Phi_i) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donde

$$W = K_2 \chi_2 + \beta_1 \phi'_{11} (\chi_1 - \chi_2) - \theta \lambda_2 \sum_{i=1}^2 \Phi_{it}.$$

A continuación se obtendrá una expresión para el término  $F(u)$ , donde

$$\begin{aligned} F(u) &= F\left(\sum_{i=1}^2 \omega\left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= F\left(\omega\left(\beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon}\right) + \omega\left(-\beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

Primeramente, obsérvese que  $\omega(\eta) + \omega(-\eta) = 1$  y  $F(z+1) = F(z)$ , implican que

$$F(\omega(-\eta)) = F(\omega(\eta)). \quad (2.32)$$

Dado que  $F(u)$  es integrable, entonces escribimos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\psi(x)dx &= \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\omega\left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon}\right)\right) \psi(x)dx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(u) - \sum_{i=1}^2 F\left(\omega\left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon}\right)\right) \right] \psi(x)dx. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Desarrollando en primer término del lado derecho de (2.33), queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\left(\omega\left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon}\right)\right) \psi(x)dx = \frac{\varepsilon}{\beta_i} \psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta))d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.34)$$

Además, utilizando (2.4) y (2.20), la identidad anterior queda como sigue

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\left(\omega\left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon}\right)\right) \psi(x)dx = \frac{\varepsilon}{2\beta_i} a_2 \psi(\Phi_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.35)$$

A continuación, se obtendrá una expresión para el segundo término del lado derecho de (2.33). Considere el cambio de variable  $\eta = \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon}$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(u) - \sum_{i=1}^2 F\left(\omega\left(S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon}\right)\right) \right] \psi(x)dx = \frac{\varepsilon}{\beta_2} \psi(\Phi_2) \frac{a_2}{2} B_{\Delta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.36)$$

donde

$$B_{\Delta} = \frac{2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega(\eta) - \omega(\theta\eta + \beta_1\sigma)) - F(\omega(\eta)) - F(\omega(\theta\eta + \beta_1\sigma))] d\eta. \quad (2.37)$$

Sustituyendo (2.35) y (2.36) en (2.33), se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\psi(x)dx = \sum_{i=1}^2 \frac{\varepsilon}{2\beta_i} a_2 \psi(\Phi_i) + \frac{\varepsilon}{2\beta_2} \psi(\Phi_2) a_2 B_{\Delta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Escribiendo la identidad inmediata anterior en el sentido de distribuciones y dado que  $B_\Delta$  decrece suficientemente rápido aplicamos el Lema 2.6, con lo cual obtenemos una expresión para  $F(u)$ :

$$F(u) = \varepsilon \frac{a_2}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\beta_i} \delta(x - \Phi_i) + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (2.38)$$

En el cálculo de las asintóticas débiles para los términos del lado izquierdo de (2.9), también se obtuvo la convolución

$$\bar{\lambda}_2(\sigma) = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) \omega_0 \left( \frac{\eta - \beta_1 \sigma}{\theta} \right) d\eta. \quad (2.39)$$

**Lema 2.7.** (*Propiedades de las convoluciones*). *Bajo las hipótesis A)-D) las convoluciones (2.20) y (2.39) existen y tienen las siguientes propiedades cuando  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ :*

$$|\sigma^2 \lambda_1(\sigma)| \leq \text{const}, \quad |\sigma \lambda_2(\sigma)| \leq \text{const}, \quad |\sigma^2 B_\Delta(\sigma)| \leq \text{const}. \quad (2.40)$$

Además,  $B_\Delta < 0$  para  $|\sigma|$  suficientemente grande y

$$\bar{\lambda}_2(\sigma) = \theta(\beta_1 \sigma \lambda_1(\sigma) + \theta \lambda_2(\sigma)). \quad (2.41)$$

A continuación, presentaremos los resultados ya obtenidos al calcular las asintóticas débiles de (2.9) en el siguiente lema:

**Lema 2.8.** *Supóngase que A)-D) y (2.12) se satisfacen. Entonces, las siguientes relaciones son válidas:*

$$(\varepsilon u_x)^2 = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \delta(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \lambda_1 \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (2.42)$$

$$(\varepsilon u_t)^2 = \varepsilon a_2 \nu^2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta(x - \Phi_i) + K_1 \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (2.43)$$

$$F(u) = \varepsilon \frac{a_2}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\beta_i} \delta(x - \Phi_i) + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^2 u_t u_x) &= -a_2 \nu^2 \frac{dK_2}{d\tau} \delta(x - x^*) + \varepsilon a_2 \nu^2 \frac{d}{d\tau} \left( \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \phi_{i1} + W \right) \delta'(x - x^*) \\ &+ \varepsilon a_2 \nu^2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta'(x - \Phi_i) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Aquí y en lo que sigue

$$K_1 = \sum_{i=1}^2 \beta_i \phi'_{i1} (2b_i + \phi'_{i1}) - \frac{2}{\nu^2} \beta_1 \lambda_1 \Phi_{1t} \Phi_{2t}, \quad (2.46)$$

$$K_2 = \sum_{i=1}^2 (\nu \beta_i \phi'_{i1} - \beta_1 \lambda_1 \Phi_{it}), \quad (2.47)$$

$$W = K_2 \chi_2 + \beta_1 \phi'_{11} (\chi_1 - \chi_2) - \theta \lambda_2 \sum_{i=1}^2 \Phi_{it}, \quad (2.48)$$

donde

$$\Phi_{it} := \nu(b_i + \phi'_{i1}), \quad \phi'_{i1} := \frac{d\phi_{i1}}{d\tau}. \quad (2.49)$$

Además, la Definición 2.1 implica la relación

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^2 u_t u_x - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\varepsilon u_t)^2 - (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u) \right\} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \quad (2.50)$$

Sustituyendo las fórmulas (2.42) - (2.49) en (2.50), se obtiene una combinación lineal de las funciones  $\delta(x - x^*)$ ,  $\delta'(x - x^*)$  y  $\delta'(x - \Phi_i)$ :

$$\begin{aligned} & \varepsilon a_2 \sum_{i=1}^2 \left\{ \nu^2 \beta_i b_i^2 - \beta_i + \frac{1}{\beta_i} \right\} \delta'(x - \Phi_i) - 2a_2 \nu^2 \frac{dK_2}{d\tau} \delta(x - x^*) \\ & + \varepsilon a_2 \nu^2 \left\{ 2 \frac{dW}{d\tau} + 2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \phi'_{i1} - K_1 + \frac{1}{\nu^2} \left( \beta_1 \lambda_1 + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \right) \right\} \delta'(x - x^*) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de  $\delta'(x - \Phi_i)$ ,  $\delta(x - x^*)$  y  $\delta'(x - x^*)$  a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\beta_i \left( b_i^2 - \frac{1}{\nu^2} \right) + \frac{1}{\nu^2 \beta_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.51)$$

$$\frac{dK_2}{d\tau} = 0, \quad (2.52)$$

$$2 \frac{dW}{d\tau} + 2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \phi'_{i1} - K_1 + \frac{1}{\nu^2} \left( 2\beta_1 \lambda_1 + \frac{B_\Delta}{\beta_2} \right) = 0. \quad (2.53)$$

De (2.51) se obtiene que  $\beta_i^2 = 1/(1 - V_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ . Dado que  $\phi'_{i1} \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$  e integrando (2.52), obtenemos que

$$\sum_{i=1}^2 \{ \nu \beta_i \phi'_{i1} - \beta_1 \lambda_1 \Phi_{it} \} = 0. \quad (2.54)$$

Utilizando (2.18), reescribimos  $\phi'_{i1}$  en términos de  $\sigma'_\tau$ , ya que

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 1 + \phi'_{21} - \phi'_{11}. \quad (2.55)$$

Resolviendo el sistema (2.54), (2.55) para  $\phi'_{11}$  y  $\phi'_{21}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \phi'_{11} &= \frac{(\theta\lambda_1 - 1)\sigma' + 1 + 2\theta\lambda_1 b_1}{1 + \theta - 2\theta\lambda_1}, \\ \phi'_{21} &= \theta \frac{(1 - \lambda_1)\sigma' - 1 + 2\lambda_1 b_2}{1 + \theta - 2\theta\lambda_1}. \end{aligned}$$

Para simplificar, reescribimos el sistema inmediato anterior como:

$$\frac{d\phi_{11}}{d\tau} = -\mathcal{F}G_1, \quad \frac{d\phi_{21}}{d\tau} = \theta\mathcal{F}G_2, \quad (2.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (1 + \theta - 2\theta\lambda_1)^{-1}, \quad G_1 = (1 - \theta\lambda_1)\sigma'_\tau - 1 - 2\theta b_1\lambda_1, \\ G_2 &= (1 - \lambda_1)\sigma'_\tau - 1 + 2\theta b_2\lambda_1. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Obsérvese que el lado derecho de las ecuaciones (2.56) dependen de  $\sigma$ , misma que será considerada como una función desconocida. Para completar el sistema es necesario considerar la ecuación (2.53), pero antes, reescribiremos la expresión para  $W$  definida en (2.48).

Dado que  $\chi_1 - \chi_2 = \sigma(b_1 - b_2)$ , utilizando (2.54) y las ecuaciones (2.56), se tiene que

$$W = (\beta_1\sigma + \theta\lambda_2)\mathcal{F}G_1 - \theta^2\lambda_2\mathcal{F}G_2 - \theta(b_1 + b_2)\lambda_2.$$

Realizando algunas manipulaciones simples, la ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{W}{\mathcal{F}} = L \frac{d\sigma}{d\tau} - \beta_1\sigma - 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2), \quad (2.58)$$

donde

$$L = \beta_1\sigma + \theta\lambda_2 - \bar{\lambda}_2. \quad (2.59)$$

Despejando las derivadas de  $\sigma$  y  $W$  de (2.58) y (2.53) respectivamente, podemos reescribir la ecuación de segundo orden (2.53) como un sistema de ecuaciones autónomo de primer orden

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = Q, \quad \frac{dW}{d\tau} = P, \quad (2.60)$$

donde

$$Q = \frac{1}{L} \left\{ \frac{W}{\mathcal{F}} + \beta_1\sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2) \right\}, \quad (2.61)$$

$$P = \frac{\mathcal{F}\beta_1}{2} \left\{ (1 - \theta\lambda_1^2)Q^2 - 2[1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1)]Q + 1 - 2\lambda_1(\theta b_1^2 + b_2^2) \right\} - \frac{\beta_1}{\nu^2} \left( \lambda_1 + \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2} \right). \quad (2.62)$$

Antes de realizar el análisis del sistema dinámico (2.60), definiremos condiciones adicionales para éste. La primera hipótesis en (2.12) y (2.18) implican que  $\sigma \rightarrow \tau$  cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ . Además, dado que  $\lambda_2(\sigma) \rightarrow 0$  y  $\bar{\lambda}_2(\sigma) \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ , entonces  $L = \beta_1\sigma + \theta\lambda_2 - \bar{\lambda}_2 \rightarrow \beta_1\sigma$ ,  $\mathcal{F} \rightarrow 1/(1 + \theta)$  y  $W \rightarrow 0$ . Por lo tanto, la condición inicial es:

$$\frac{\sigma}{\tau} \rightarrow 1, \quad W \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (2.63)$$

La segunda hipótesis en (2.12) y (2.18), (2.58) implican que  $\sigma$  y  $W$  deben tener los mismos valores límites (2.63) cuando  $\tau \rightarrow \infty$ . Así, la validez de nuestras hipótesis es equivalente a la existencia de una trayectoria  $\gamma_s = (\sigma = \sigma_s(\tau), W = W_s(\tau))$  tal que satisface la condición (2.63) y

$$\frac{\sigma_s}{\tau} \rightarrow 1, \quad W_s \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \rightarrow \infty.$$

## 2.5. Análisis del sistema dinámico básico

Hacemos los cambios de variables  $\tau' = \beta_1\tau$ ,  $\sigma' = \beta_1\sigma$  y omitiendo las primas, reescribimos el sistema (2.60) en la misma forma pero con los lados derechos más simples:

$$Q = \frac{1}{L} \left\{ \frac{W}{\mathcal{F}} + \sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2) \right\}, \quad (2.64)$$

$$P = \frac{\mathcal{F}}{2} \left\{ (1 - \theta\lambda_1^2)Q^2 - 2[1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1)]Q + 1 - 2\lambda_1(\theta b_1^2 + b_2^2) \right\} - \frac{1}{\nu^2} \left( \lambda_1 + \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2} \right). \quad (2.65)$$

Aquí  $L, \mathcal{F}$ , y las convoluciones tienen la forma (2.59), (2.57), (2.20), (2.39), (2.37), pero con argumentos como si  $\beta_1 = 1$ .

En el siguiente lema se resaltan algunas propiedades de las convoluciones.

**Lema 2.9.** *Bajo las hipótesis del Lema 2.7 las siguientes relaciones son válidas:*

$$\lambda_1(-\sigma) = \lambda_1(\sigma) > 0, \quad \lambda_1(\sigma) = \lambda_1^0 + \mathcal{O}(\sigma^2) \quad \text{cuando} \quad \sigma \rightarrow 0,$$

$$\text{sgn}(\sigma\lambda_2(\sigma)) = -1, \quad \text{sgn}(\sigma\bar{\lambda}_2(\sigma)) = 1,$$

$$\lambda_2(-\sigma) = -\lambda_2(\sigma), \quad \bar{\lambda}_2(-\sigma) = -\bar{\lambda}_2(\sigma),$$

$$\begin{aligned}\lambda_2(\sigma) &= \sigma\lambda_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^3), & \bar{\lambda}_2(\sigma) &= \sigma\bar{\lambda}_2^1 + \mathcal{O}(\sigma^3) \quad \text{cuando } \sigma \rightarrow 0, \\ B_\Delta(-\sigma) &= B_\Delta(\sigma), & B_\Delta(\sigma) &= B_\Delta^0 + \mathcal{O}(\sigma^2) \quad \text{cuando } \sigma \rightarrow 0,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_1^0 &:= \lambda_1(0), & B_\Delta^0 &:= B_\Delta(0), \\ \lambda_2^1 &:= \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta\omega_0(\eta) \frac{d\omega_0(z)}{dz} \Big|_{z=\theta\eta} d\eta < 0, \\ \bar{\lambda}_2^1 &:= -\frac{1}{a_2\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \eta\omega_0(\eta) \frac{d\omega_0(z)}{dz} \Big|_{z=\eta/\theta} d\eta > 0.\end{aligned}$$

Las propiedades del Lema 2.9 y las fórmulas (2.57), (2.59), (2.64), (2.65) implican los siguientes resultados:

**Corolario 2.10.** *El sistema (2.60) es invariante con respecto al cambio de variables*

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad \sigma \rightarrow -\sigma, \quad W \rightarrow -W.$$

**Corolario 2.11.** *Bajo las hipótesis del Lema 2.7*

$$L|_{\sigma=0} = 0 \tag{2.66}$$

y las siguientes estimaciones son válidas, uniformemente en  $\sigma$ ,

$$(1 + \theta)^{-1} \leq \mathcal{F} \leq (1 + \theta - 2\theta\lambda_1^0)^{-1} := \mathcal{F}_0 \leq (1 - \sqrt{\theta})^{-2}. \tag{2.67}$$

La igualdad (2.66) muestra que el sistema (2.60), (2.64), (2.65) tiene una singularidad en la recta  $(0, W)$  sobre el plano  $(\sigma, W)$ . Supondremos que esta singularidad es del tipo  $1/\sigma$  y que no existen otros puntos de singularidad. Por tal razón agregaremos la siguiente hipótesis adicional:

E1) Sean la función  $F$  y el número  $\theta = \beta_1/\beta_2$  tales que

$$L(\sigma) > 0 \quad \text{para } \sigma > 0, \quad L_1 := \frac{dL}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0} > 0.$$

Nótese que esta última condición implica que

$$\theta \neq 1 \tag{2.68}$$

dado que

$$L_1|_{\theta=1} = \{1 - \bar{\lambda}_2^1 + \theta\lambda_2^1\}|_{\theta=1} = 0.$$

Recíprocamente, bajo la condición (2.68) la estimación (2.67) garantiza que  $\mathcal{F} \leq \text{cte}$  uniformemente en  $\sigma$ . Por lo tanto, la singularidad de  $Q$  es del tipo  $1/\sigma$ .

A continuación, investigaremos cuando una trayectoria puede pasar del semiplano izquierdo al derecho. Es obvio que esto puede ocurrir sólo a través del punto  $(0, 0)$ .

Consideremos una vecindad pequeña del origen de coordenadas. El Lema 2.9 implica que el sistema dinámico tiene la siguiente representación para  $|\sigma| \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\tau} &= \frac{1}{L_1} \left\{ \frac{W}{\sigma \mathcal{F}_0} + 1 + 2(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1) \right\} + \mathcal{O}(\sigma^2 + |\sigma W|), \\ \frac{dW}{d\tau} &= \frac{\mathcal{F}_0}{2} \left\{ (1 - \theta \lambda_1^{02}) \left( \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 - 2(1 - \lambda_1^0(b_2 - \theta b_1)) \frac{d\sigma}{d\tau} + R \right\} + \mathcal{O}(\sigma^2), \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde

$$R = 1 - 2\lambda_1^0(b_2^2 + \theta b_1^2) - \frac{2}{\nu^2 \mathcal{F}_0} \left( \lambda_1^0 + \frac{B_\Delta^0}{2\beta_1 \beta_2} \right). \quad (2.70)$$

Ahora, mediante manipulaciones algebraicas transformaremos el sistema (2.69) como sigue; despejando  $W$  de la primera ecuación en (2.69), derivando con respecto a  $\tau$  y el resultado lo igualamos con el lado derecho de la segunda ecuación de (2.69), obteniendo

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2}{d\tau^2}(\sigma^2) &= (1 - \theta \lambda_1^{02}) \left( \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 + [2\lambda_1^0(b_2 - \theta b_1) + 4(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1)] \frac{d\sigma}{d\tau} \\ &+ R + \mathcal{O}(\sigma^2) + \mathcal{O} \left( \sigma \frac{dW}{d\tau} + (W + \sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \right), \end{aligned} \quad (2.71)$$

Además, utilizando (2.41) y las propiedades del lema 2.7, se tiene que

$$\bar{\lambda}_2^1 = \theta(\lambda_1^0 + \theta \lambda_2^1) + \mathcal{O}(\sigma^2)$$

por consiguiente, obtenemos que

$$2\lambda_1^0(b_2 - \theta b_1) + 4(b_1 \bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2 \lambda_2^1) = 2(\lambda_1^0 + 2\theta \lambda_2^1)(b_2 + \theta b_1) + \mathcal{O}(\sigma^2).$$

Haciendo

$$N = (\lambda_1^0 + 2\theta \lambda_2^1)(b_2 + \theta b_1) \quad (2.72)$$

y sustituyendo  $N$  en (2.71), tenemos que

$$L_1 \frac{d^2}{d\tau^2}(\sigma^2) = (1 - \theta \lambda_1^{02}) \left( \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 + 2N \frac{d\sigma}{d\tau} + R + \mathcal{O} \left( \sigma^2 \left( \left| \frac{d\sigma}{d\tau} \right| + \left| \frac{dW}{d\tau} \right| \right) \right). \quad (2.73)$$

Aplicando el método de Cauchy-Kovalevskaya y tomando en cuenta que  $\sigma = \sigma(\tau)$  es impar, podemos escribir:

$$\sigma = a_1 \tau + a_3 \tau^3 + \dots \quad (2.74)$$

con coeficientes arbitrarios  $a_i$ . Sustituyendo  $\sigma$  en (2.73) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$Ma_1^2 - 2Na_1 - R = 0, \quad (2.75)$$

$$\{(M + 2nL_1)a_1 - N\} a_{2n+1} = f_{2n+1}(a_1, \dots, a_{2n-1}), \quad n \geq 1, \quad (2.76)$$

donde

$$M = 2L_1 - (1 - \theta\lambda_1^{02}). \quad (2.77)$$

Si  $M \neq 0$ , para  $a_1$  obtenemos dos raíces

$$a_1^\pm = \frac{1}{M} \left( N \pm \sqrt{N^2 + MR} \right). \quad (2.78)$$

Por lo tanto, la función  $\sigma(\tau)$  tiene la representación (2.74) únicamente bajo las condiciones

$$N^2 + MR \geq 0 \quad \text{y} \quad (M + 2nL_1^0)a_1^\pm - N \neq 0 \quad \text{para toda} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

A continuación, es necesario realizar un análisis para los diferentes valores de  $M, N$  y  $R$ . Primero obsérvese que  $M$  puede ser arbitrario (incluyendo el caso  $M = 0$  ya que  $\theta\lambda_1^{02} < 1$  para  $\theta < 1$  y  $\theta\lambda_1^{02} > 1$  para  $\theta > 1$ ).

Si  $M > 0$  entonces

$$a_1^- < 0, \quad a_1^+ > 0, \quad \text{y} \quad Ma_1^- < N < Ma_1^+.$$

Luego, si  $R > 0$  entonces las dos condiciones en (2.79) se satisfacen ya que

$$(M + 2nL_1^0)a_1^+ - N > 2nL_1^0a_1^+ > 0$$

y

$$(M + 2nL_1^0)a_1^- - N < 2nL_1^0a_1^- < 0.$$

Si  $R < 0$  entonces supondremos que la primera condición de (2.79) se satisface. Además, la segunda condición en (2.79) puede ser transformada en la siguiente forma:

$$N \neq \sqrt{N^2 + MR}(1 + q_n) \quad \text{para toda} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.80)$$

donde los números  $q_n$ ,

$$q_n := \frac{M}{2nL_1} = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1 - \theta\lambda_1^{02}}{2L_1} \right),$$

son positivos. Obsérvese que si  $M > 0$  y  $R < 0$  entonces ambas raíces  $a_1^\pm$  son positivas si y sólo si  $N > 0$ . También, si  $R = 0$  entonces existe  $a_1^+ > 0$  si y sólo si  $N > 0$ .

Considerando de manera similar el caso  $M < 0$  obtenemos la condición E2).

Sea  $M \neq 0$ . Además, sean las funciones  $F$  y las velocidades  $V_i$  tales que una de las siguientes hipótesis es válida:

E2a)  $M > 0$  y  $R > 0$ .

E2b)  $M > 0$ ,  $R < 0$ , con

$$N^2 + MR \geq 0. \quad (2.81)$$

Además,  $N > 0$  bajo la hipótesis (2.80),

E2c)  $M > 0$ ,  $R = 0$  y  $N > 0$  bajo la hipótesis (2.80),

E2d)  $M < 0$ ,  $R < 0$  y la desigualdad (2.80) se satisface,

E2e)  $M < 0$  y  $R > 0$ . Además,  $N < 0$  y las hipótesis (2.80), (2.81) se satisfacen,

E2f)  $M < 0$ ,  $R = 0$ ,  $N < 0$ , y  $1 - \theta\lambda_1^{02} \neq 2L_1(1 + 2n)$  para  $n = 1, 2, \dots$

**Observación 2.12.** *Teóricamente, también existe el caso cuando  $M = 0$ , pero no será considerado en este trabajo.*

Calculando las coordenadas  $W$  de las trayectorias de forma similar a (2.74), esto es

$$W = w_1\tau + w_3\tau^3 + \dots, \quad (2.82)$$

pasamos al siguiente resultado.

**Lema 2.13.** *Supóngase que las hipótesis A) – E2) se satisfacen. Entonces existe al menos una trayectoria  $\gamma_s = \{(\sigma = \sigma_s(\tau), W = W_s(\tau))\}$  del sistema (2.60), (2.64), (2.65) la cual pasa del semiplano izquierdo  $(\sigma, W)$  al derecho cuando  $\tau$  crece de  $-\tau_0$  a  $\tau_0$  para  $\tau_0$  suficientemente pequeña.*

A continuación, analizaremos el sistema (2.60), (2.64), (2.65) para el caso  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ . Dado que las convoluciones  $\lambda_1(\sigma)$ ,  $\lambda_2(\sigma)$ ,  $\bar{\lambda}_2(\sigma)$  y  $B_\Delta(\sigma)$  se anulan cuando  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ . se tiene que

$$\begin{aligned} Q &= 1 + (1 + \theta)\frac{W}{\sigma} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(1 + \frac{W}{\sigma}\right)\right), \\ P &= \frac{1}{2(1 + \theta)}(Q - 1)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Resolviendo el sistema (2.60), (2.83) en el término principal para  $|\sigma|$  grande, obtenemos la solución

$$\sigma = \frac{1 + \theta}{2} \frac{W^2}{c - W}, \quad c = W_0 \left(1 + \frac{1 + \theta}{2} \frac{W_0}{\sigma_0}\right), \quad (2.84)$$

donde  $W_0 = W|_{\sigma=\sigma_0}$ . Obsérvese que para  $|\sigma| \gg 1$ ,

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{2}{1 + \theta} \frac{c - W}{W^2}$$

es pequeño, entonces  $W \approx c$ . Por lo tanto,

$$W = c + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\sigma|}\right) \quad \text{cuando } |\sigma| \gg 1.$$

Además,

$$W = c - \frac{1+\theta}{2\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\tau|^2}\right).$$

La fórmula inmediata anterior implica la estabilización de la coordenada  $W$  para cualquier trayectoria para  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , si  $|W_0| = |W(\tau_0)|$  está acotada por una constante y  $|\sigma_0| = |\sigma(\tau_0)|$  es suficientemente grande.

El último paso del análisis del sistema (2.60), (2.64), (2.65) es la consideración de las isoclinas.

Haciendo  $Q = 0$  en (2.64), se obtiene la isoclina  $\gamma_Q = \{(\sigma, W), Q(\sigma, W) = 0\}$  que es la curva

$$W_Q = -\mathcal{F}(\sigma + 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2)),$$

y  $W_Q^\infty = -\sigma/(1+\theta)$  cuando  $|\sigma| \rightarrow \infty$ . Nótese que la curva  $W_Q = W_Q(\sigma)$  intesecta a  $\gamma_s$  en el origen. Esto se debe a que  $W_s$  denota a  $\gamma_s$  como la función  $W_s(\sigma)$ , entonces de la primera ecuación de (2.69), se tiene que

$$W_s = \mathcal{F}_0\sigma \left\{ L_1 \frac{d\sigma}{d\tau} - \alpha \right\}$$

donde  $\alpha = 1 + 2(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1)$ . Derivando a  $W_s$  con respecto a  $\sigma$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dW_s}{d\sigma} &= \mathcal{F}_0 L_1 \frac{d}{d\sigma} (\sigma(a_1 + 3a_3\tau^2 + \dots)) - \mathcal{F}_0\alpha \\ &= \mathcal{F}_0 L_1 a_1 - \mathcal{F}_0\alpha, \end{aligned}$$

ya que  $|\tau| \ll 1$  si  $|\sigma| \ll 1$ .

Ahora, si  $|\sigma| \ll 1$ , por el lema 2.9 tenemos que

$$\begin{aligned} W_Q &= -\mathcal{F}(\sigma + 2\sigma(b_1\bar{\lambda}_2^1 + \theta b_2\lambda_2^1)) \\ &= -\mathcal{F}\sigma\alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\{ \frac{dW_s}{d\sigma} - \frac{dW_Q}{d\sigma} \right\} \Big|_{\sigma=0} = \mathcal{F}_0 L_1 a_1 > 0. \quad (2.85)$$

Para encontrar la isoclina  $\gamma_P = \{(\sigma, W), P(\sigma, W) = 0\}$ , (2.65) nos conduce a la necesidad de resolver la ecuación

$$(1 - \theta\lambda_1^2)Q^2 - 2D_1Q + D_2 = 0, \quad (2.86)$$

donde

$$D_1 = 1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1), \quad D_2 = 1 - 2\lambda_1(b_2^2 + \theta b_1^2) - \frac{2}{\nu^2 \mathcal{F}} \left( \lambda_1 + \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2} \right).$$

Denotemos por  $Q_\pm$  las raíces de (2.86). Entonces obtenemos las siguientes expresiones para las ramas  $W_P^\pm = W_P^\pm(\sigma)$  de la isoclina  $\gamma_P$

$$W_P^\pm = \mathcal{F} (LQ_\pm(\sigma) - \sigma - 2(b_1\bar{\lambda}_2 + \theta b_2\lambda_2)).$$

Para  $|\sigma|$  suficientemente grande la ecuación (2.86) tiene una única raíz  $Q_+ = Q_- = 1$ . Por lo tanto  $\gamma_P$  se convierte en la línea  $\{(\sigma, 0)\}$  cuando  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ . Además, dado que  $\lambda_1 \rightarrow 0$  cuando  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , podemos transformar el discriminante  $D_P$  de la ecuación (2.86) para  $|\sigma|$  suficientemente grande como sigue

$$D_P = \frac{1+\theta}{\nu^2} \left\{ 2\lambda_1(1 + V_1V_2) + \frac{B_\Delta}{\beta_1\beta_2} + \mathcal{O}(\lambda_1^2) \right\}.$$

Un análisis asintótico de las convoluciones implica el siguiente resultado

**Lema 2.14.** *Bajo las hipótesis A) - D),*

$$D_P \rightarrow +0 \quad \text{cuando} \quad |\sigma| \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.15.** *La isoclina  $\gamma_P$  consiste en dos ramas  $W_P^\pm$  las cuales están definidas al menos para  $|\sigma|$  suficientemente grande y tienden a juntarse cuando  $|\sigma| \rightarrow \infty$ . Si  $D_P \geq 0$  para toda  $\sigma \in \mathbb{R}$ , entonces las ramas  $W_P^\pm$  pasan a través del punto  $(0, 0)$ .*

Supongamos ahora que (2.84) tiene raíces reales cerca del origen. Entonces

$$\left\{ \frac{dW_P^\pm}{d\sigma} - \frac{dW_Q}{d\sigma} \right\} \Big|_{\sigma=0} = \mathcal{F}_0 L_1 Q_\pm^0. \quad (2.87)$$

Las fórmulas (2.85), (2.86) muestran que, dependiendo de las velocidades iniciales  $V_i$ , puede cumplirse una de las siguientes posibilidades:

- (i) si  $Q_- < Q_+ < 0$ , entonces las curvas  $\gamma_P^\pm$  y  $\gamma_Q$  tienen dos puntos de intersección para  $\sigma > 0$ . Por lo tanto, el retrato fase contiene cinco puntos singulares,
- (ii) si  $Q_- < 0, Q_+ > 0$ , entonces las curvas  $\gamma_P^-$  y  $\gamma_Q$  tienen un punto de intersección para  $\sigma > 0$ . Por lo tanto, el retrato fase contiene tres puntos singulares, y
- (iii) si  $Q_+ \geq Q_- > 0$ , entonces las curvas  $\gamma_P^\pm$  y  $\gamma_Q$  no tienen puntos de intersección para  $\sigma > 0$ . Así, el retrato fase contiene el único punto singular  $(0, 0)$ .

Nótese que la segunda posibilidad se cumple para  $R < 0$ , mientras que las otras se cumplen para  $R > 0$  y  $D_1|_{\sigma=0} < 0$ , respectivamente .

Además, la igualdad (2.84) muestra que las coordenadas  $W$  de las trayectorias crecen con  $\sigma$  a una razón no mayor que  $\sigma$ , mientras que las convoluciones se desvanecen a una razón no menor que  $1/\sigma^2$ . Por lo tanto, todas las trayectorias, las cuales comienzan cerca del origen, se estabilizan con límite las coordenadas  $W$  cuando  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ . Sin embargo, en referencia con la trayectoria deseada  $\gamma_s$ , no existe razón alguna para suponer que  $W_s(\tau) \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Como un consecuencia de este análisis obtenemos el siguiente resultado.

**Lema 2.16.** *Supóngase que A)- E2) se satisfacen. Entonces el sistema dinámico (2.60), (2.64), (2.65) tiene al menos una trayectoria  $\gamma_s$  la cual se encuentra en la franja  $\{\sigma \in \mathbb{R}^1, |W| \geq cte\}$  y pasa del semiplano  $(-W_s^\infty, -\infty)$  al semiplano  $(W_s^\infty, \infty)$  a través del punto  $(0, 0)$ .*

El retrato fase del sistema dinámico (2.60), (2.64), (2.65) se muestra en la Figura (2.1). En dicha figura se presentan los resultados de las simulaciones numéricas para la ecuación sine-Gordon (2.6) en el caso  $V_1 = -\sqrt{3}/2$ , y  $V_2 = \sqrt{15}/4$ . Dado que  $R < 0$  para tales velocidades, aparecen dos puntos silla los cuales son aproximadamente  $(\sigma_*^\pm, W_*^\pm) = (\pm 1.19, \mp 0.84)$ . Además, aparecen separatrices las cuales unen los puntos sillas con el origen. Debido a la escala que se utilizó en la gráfica, las trayectorias  $\gamma_s^\pm = (W_s^\pm, \sigma_s^\pm)$  coinciden con el eje  $\sigma$ . Por lo que se muestra el comportamiento de esas curvas en la gráfica de la Figura (2.2). Las trayectorias  $\gamma_s^-$  y  $\gamma_s^+$  están en las regiones acotadas por las curvas 1,2 y 3,4 respectivamente.

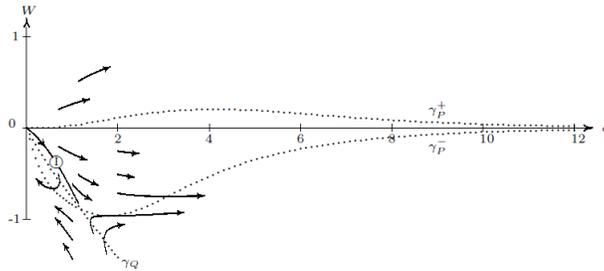
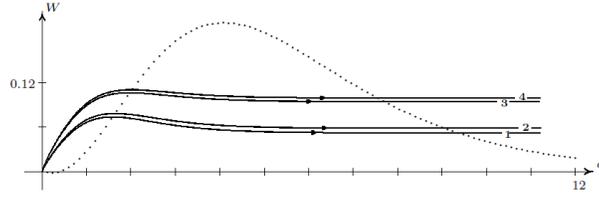


Figura 2.1: Retrato fase del sistema dinámico para la ecuación sine-Gordon. La curva I es la separatriz. Las flechas muestran la dirección del movimiento de las trayectorias.

A continuación, aplicaremos los resultados obtenidos para los cálculos de los cambios de fase  $\phi_{i1}$ . Pasando a  $\pm\infty$  a lo largo de las trayectorias  $\gamma_s^\pm$  y utilizando las

Figura 2.2: Trayectorias  $\gamma_s^\pm$ .

fórmulas (2.56), (2.57), (2.60), (2.64) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{11}}{d\tau} &= -\frac{G_1}{\theta G_2} \frac{d\phi_{21}}{d\tau} = -\frac{\sigma'_\tau - 1}{\theta(\sigma'_\tau - 1)} \frac{d\phi_{21}}{d\tau} \\ &= -\frac{1}{\theta} \left[ \frac{\theta W_s^\infty}{\sigma_s} \right] = -\frac{W_s^\infty}{\sigma_s} \end{aligned}$$

cuando  $|\tau| \gg 1$ .

Sea  $W_s^\infty \neq 0$ . Dado que  $\sigma_s(\tau) = \tau + \mathcal{O}(1)$  para tal  $\tau$ , esto implica un comportamiento tipo algoritmico de  $\phi_{i1}$  cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Obviamente, obtenemos una contradicción con la segunda hipótesis de (2.12). Por otra parte, el término principal de (2.16) de la solución asintótica no contiene parámetro alguno para cambiar el valor de  $W_s^\infty$ . Por lo tanto, es necesario cambiar de anatz.

## 2.6. El anatz modificado

La idea principal de la corrección del anatz es rotar las trayectorias fase cerca del origen con el objetivo de cambiar los valores límite  $W_s^\infty$ . Para esto agregaremos al término principal (2.16) una corrección pequeña, localizada cerca del origen. Considere el caso en que la trayectoria  $\gamma_s = \{W = W_s(\sigma)\}$  satisface

$$\left. \frac{dW_s}{d\sigma} \right|_{\sigma \rightarrow -\infty} > 0.$$

Entonces necesitamos rotar  $\gamma_s$  en la dirección de las manecillas del reloj.

El resultado principal de esta sección se presenta en el lema siguiente.

**Lema 2.17.** *Bajo las hipótesis del Lema 2.16 existen correcciones del término principal de (2.16) tal que ambas condiciones de (2.12) se satisfacen.*

*Demostración.* El objetivo es encontrar una solución asintótica de la siguiente forma

$$u = \sum_{i=1}^2 \left\{ \omega \left( S_i \beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) + \frac{A_i}{\sqrt{a_2'}} U \left( S_i \mu \beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right\}. \quad (2.88)$$

Aquí las funciones  $\omega, \Phi_i$ , y la notación  $\tau, \sigma, S_i$  son las mismas como en (2.16).  $A_i = A_i(\beta_i \tau)$  donde  $A_i(Z) \in \mathcal{C}^\infty$  son funciones que se desvanecen exponencialmente cuando  $|\tau| \rightarrow \infty$ ,  $\mu$  es un parámetro suficientemente pequeño,  $\varepsilon < \mu < 1$ , y

$$U(\eta) = \frac{d^m U_0(\eta)}{d\eta^m}, \quad a'_2 = \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} (U(\eta))^2 d\eta$$

donde  $m \geq 1$  es un número arbitrario y  $U_0(\eta) \in \mathcal{C}^\infty$  es una función que se desvanece suficientemente rápido cuando  $\eta \rightarrow \infty$ . Además, supondremos que  $U(\eta)$  es una función impar.

En el sentido  $\mathcal{C}$  la función  $U$  es del orden de  $\mathcal{O}(1)$ . Sin embargo, es arbitrariamente pequeña en el sentido  $D'$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} U\left(\mu\beta\frac{x-\Phi}{\varepsilon}\right) \psi(x) dx &= \left(-\frac{\varepsilon}{\mu\beta}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U_0\left(\mu\beta\frac{x-\Phi}{\varepsilon}\right) \frac{d^m \psi(x)}{dx^m} \right\} dx \\ &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^m\right). \end{aligned}$$

Para la demostración este Lema necesitamos construir nuevamente la solución asintótica. Sin embargo, aparecen obstáculos técnicos no triviales al calcular los términos de la relación (2.9) para el anatz (2.88) ya que el término principal de la expansión asintótica tiene una estructura algebraica extremadamente grande. En particular, la expresión más sencilla  $(\varepsilon u_x)^2$  contiene, esta vez, 10 términos. Por esta razón consideraremos todos los términos con precisión  $\mathcal{O}(\varepsilon^2 + \varepsilon\mu)$ .

Empezemos con la estimación de  $(\varepsilon u_x)^2$ . Derivando el anatz (2.88), luego multiplicando por  $\varepsilon$  y elevando al cuadrado, se obtiene

$$\begin{aligned} (\varepsilon u_x)^2 &= (\varepsilon u_x)^2 \Big|_{A_i=0} + \beta_1^2 \left\{ 2\mu \frac{A_1}{\sqrt{a'_2}} \omega_0(Z_1) U'(\mu Z_1) + \mu^2 \frac{A_1^2}{a'_2} U'^2(\mu Z_1) \right\} \\ &\quad - 2\beta_1 \beta_2 \left\{ \mu \frac{A_2}{\sqrt{a'_2}} \omega_0(Z_1) U'(\mu Z_2) + \mu \frac{A_1}{\sqrt{a'_2}} \omega_0(Z_2) U'(\mu Z_1) \right. \\ &\quad \left. + \mu^2 \frac{A_1 A_2}{a'_2} U'(\mu Z_1) U'(\mu Z_2) \right\} \\ &\quad + \beta_2^2 \left\{ 2\mu \frac{A_2}{\sqrt{a'_2}} \omega_0(Z_2) U'(\mu Z_2) + \mu^2 \frac{A_2^2}{a'_2} U'^2(\mu Z_2) \right\} \end{aligned} \tag{2.89}$$

donde

$$Z_i = \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon}.$$

A continuación se obtendrá una estimación de la integral de (2.89), analizando cada término de ella. Primeramente, para los términos que contengan  $\mu\omega_0(Z_i)U'(\mu Z_i)$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \mu\omega_0\left(\beta_i\frac{x-\Phi_i}{\varepsilon}\right)U'\left(\mu\beta_i\frac{x-\Phi_i}{\varepsilon}\right)\psi(x)dx \\
&= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta)U'(\mu\eta) \left[ \psi(\Phi_i) + \frac{\varepsilon}{\beta_i}\eta\psi'(\Phi_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \frac{\varepsilon}{\beta_i}d\eta \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_i}\mu\psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta)U'(\mu\eta)d\eta + \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2) \\
&= \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2 + \varepsilon\mu).
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Aquí se utilizó el cambio de variable

$$\eta = \beta_i\frac{x-\Phi_i}{\varepsilon}, \quad i = 1, 2.$$

Siguiendo ahora con el término que contiene  $\mu^2U'^2(\mu Z_i)$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
& \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} U'^2\left(\mu\beta_i\frac{x-\Phi_i}{\varepsilon}\right)\psi(x)dx \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_i}\mu \int_{-\infty}^{\infty} U'^2 \left[ \psi(\Phi_i) + \frac{\varepsilon}{\mu\beta_i}\eta\psi'(\Phi_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] d\eta \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_i}\mu\psi(\Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} U'^2(\eta)d\eta + \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2) \\
&= \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2 + \varepsilon\mu).
\end{aligned} \tag{2.91}$$

En (2.91) utilizó el cambio de variable

$$\eta = \mu\beta_i\frac{x-\Phi_i}{\varepsilon}, \quad i = 1, 2.$$

Ahora analizaremos el término que contiene  $\mu\omega_0(Z_i)U'(\mu Z_j)$ , con  $i, j = 1, 2$ .

$$\begin{aligned}
& \mu \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0\left(\beta_1\frac{x-\Phi_1}{\varepsilon}\right)U'\left(\mu\beta_2\frac{x-\Phi_2}{\varepsilon}\right)\psi(x)dx \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_2}\mu \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\theta\eta + \sigma)U'(\mu\eta) \left[ \psi(\Phi_2) + \frac{\varepsilon}{\beta_2}\eta\psi'(\Phi_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] d\eta \\
&= \frac{\varepsilon}{\beta_2}\mu\psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\theta\eta + \sigma)U'(\mu\eta)d\eta + \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2) \\
&= \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2 + \varepsilon\mu).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Finalmente, el término que contiene  $\mu^2 U'(\mu Z_1)U'(\mu Z_2)$

$$\begin{aligned}
 & \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} U' \left( \mu \beta_1 \frac{x - \Phi_1}{\varepsilon} \right) U' \left( \mu \beta_2 \frac{x - \Phi_2}{\varepsilon} \right) \psi(x) dx \\
 &= \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} U'(\theta\eta + \mu\sigma) U'(\eta) \left[ \psi(\Phi_2) + \frac{\varepsilon}{\mu\beta_2} \eta \psi'(\Phi_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \frac{\varepsilon}{\mu\beta_2} d\eta \\
 &= \frac{\varepsilon}{\beta_2} \mu \psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} U'(\theta\eta + \mu\sigma) U'(\eta) d\eta + \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2) \\
 &= \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2 + \varepsilon\mu).
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

Sustituyendo (2.90), (2.91), (2.92), (2.93) en (2.89) obtenemos la misma expresión para  $(\varepsilon u_x)^2$  como en (2.22), mod  $\mathcal{O}(\varepsilon\mu)$ , esto es

$$(\varepsilon u_x)^2 = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i \delta(x - \Phi_i) - 2\beta_1 \lambda_1(\sigma) \delta(x - x^*) \right\} + \mathcal{O}_{D'}(\varepsilon^2 + \varepsilon\mu). \tag{2.94}$$

Para obtener una estimación para  $F(u)$  utilizaremos un procedimiento similar a (2.33), con la diferencia de que  $u$  será el anatz modificado (2.88), esto es

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \psi(x) dx &= \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} F \left( \omega \left( \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \right) \psi(x) dx \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(u) - \sum_{i=1}^2 F \left( \omega \left( \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \right) \right] \psi(x) dx
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

donde

$$F(u) = F \left( \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[ \omega \left( \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) + \frac{A_i}{\sqrt{a'_2}} U \left( \mu \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \right] \right).$$

La primera integral del lado derecho de (2.95) es (2.33). En la segunda integral hacemos el cambio de variable  $\eta = \mu\beta_2(x - \Phi_2)/\varepsilon$ , quedando como sigue

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(u) - \sum_{i=1}^2 F \left( \beta_i \frac{x - \Phi_i}{\varepsilon} \right) \right] \psi(x) dx \\
 &= \frac{\varepsilon}{\mu\beta_2} \psi(\Phi_2) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F \left( \omega \left( \frac{\theta}{\mu} \eta + \sigma \right) \right) - \omega \left( \frac{\eta}{\mu} \right) + \frac{A_1}{\sqrt{a'_2}} U(\theta\eta + \mu\sigma) - \frac{A_2}{\sqrt{a'_2}} U(\eta) \right. \\
 &\quad \left. - F \left( \omega \left( \frac{\theta}{\mu} + \sigma \right) \right) - F \left( \omega \left( \frac{\eta}{\mu} \right) \right) \right\} d\eta.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$2F(u) = \varepsilon a_2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\beta_i} \delta(x - \Phi_i) + \frac{1}{\beta_2} B_{\Delta A} \delta(x - x^*) \right\}, \quad (2.96)$$

donde

$$B = \frac{2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F \left( \omega \left( \frac{\theta}{\mu} + \sigma \right) - \omega \left( \frac{\eta}{\mu} \right) + \frac{A_1}{\sqrt{a_2'}} U(\theta\eta + \mu\sigma) - \frac{A_2}{\sqrt{a_2'}} U(\eta) \right) - F \left( \omega \left( \frac{\theta}{\mu} \eta + \sigma \right) - \omega \left( \frac{\eta}{\mu} \right) \right) \right\} d\eta,$$

$B_{\Delta A} = (B + \mu B_{\Delta})/\mu$  y  $B_{\Delta}$  como en (2.37).

Procediendo de manera similar como se realizó para  $(\varepsilon u_x)^2$  obtenemos que

$$\begin{aligned} (\varepsilon u_t)^2 &= (\varepsilon u_t)^2 \Big|_{A_i=0} \\ &+ a_2 \nu^2 \frac{\varepsilon}{\mu} \left\{ \sum_{i=1}^2 \beta_i A_i'^2 - 2\beta_1 A_1' A_2' \Lambda_1 \right\} (1 + \mathcal{O}(\mu)) \delta(x - x^*), \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^2 u_t u_x) &= -a_2 \nu^2 \frac{dK_{2A}}{d\tau} \delta(x - x^*) + \varepsilon a_2 \nu^2 \frac{d}{d\tau} \left( \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i \phi_{i1} + W_A \right) \delta'(x - x^*) \\ &+ \varepsilon a_2 \nu^2 \sum_{i=1}^2 \beta_i b_i^2 \delta'(x - \Phi_i) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.98)$$

donde

$$A_i' = \frac{dA_i}{dz}(z) \Big|_{z=\frac{\beta_i \tau}{\beta_1}}, \quad K_{2A} = K_2 + r_0,$$

$$W_A = \chi_2 K_{2A} + W - \chi_2 K_2 + \frac{r_1}{\mu} + r_{11} - r_2 \sum_{i=1}^2 \Phi_{it},$$

las funciones  $K_2$  y  $W$  fueron definidas en (2.47) y (2.48) respectivamente,

$$r_0 = A_2'(\Lambda_{01} + A_1 \Lambda_3) + A_1'(\Lambda_{02} + A_2 \Lambda_4),$$

$$r_{11} = \theta(A_2' \bar{\Lambda}_{01} + A_1' \bar{\Lambda}_{02}) - \alpha \sum_{i=1}^2 A_i',$$

$$r_1 = \theta(A_1 A_2' \bar{\Lambda}_3 + A_2 A_1' \bar{\Lambda}_4) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 A_i A_i', \quad r_2 = a_3 \theta A_1 A_2 \bar{\Lambda}_2.$$

Aquí y en lo que sigue utilizamos la notación

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \frac{1}{a_2 a'_2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta) U(\theta\eta + \mu\sigma) d\eta, & \Lambda_3 &= \frac{1}{a_2 a'_2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta) U'(\theta\eta + \mu\sigma) d\eta, \\ \Lambda_4 &= \frac{1}{a_2 a'_2} \int_{-\infty}^{\infty} U'(\eta) U(\theta\eta + \mu\sigma) d\eta, & \bar{\Lambda}_2 &= \frac{1}{a_2 a'_2 a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \eta U'(\eta) U'(\theta\eta + \mu\sigma) d\eta, \\ \Lambda_{01} &= \frac{1}{a_2 \sqrt{a'_2 a_3}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\theta\eta + \sigma) U(\mu\eta) d\eta, \\ \Lambda_{02} &= \frac{1}{a_2 \sqrt{a'_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) U(\mu(\theta\eta + \sigma)) d\eta, \\ a_3 &= \frac{1}{a_2 a'_2} \int_{-\infty}^{\infty} (U'(\eta))^2 d\eta, & \alpha &= \frac{1}{a_2 \sqrt{a'_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega_0(\eta) U(\mu\eta) d\eta,\end{aligned}$$

y  $\bar{\Lambda}_3, \bar{\Lambda}_4, \bar{\Lambda}_{0i}$  denotan las convoluciones similares a  $\Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_{0i}$  respectivamente, pero con el factor adicional  $\eta$  en el integrando.

Sustituyendo (2.94), (2.96), (2.97), (2.98) en (2.50) obtenemos las relaciones (2.51) y las siguientes ecuaciones análogas a (2.56), (2.60):

$$\frac{d\phi_{11}}{d\tau} = \mathcal{F}G_{1A}, \quad \frac{d\phi_{21}}{d\tau} = \theta\mathcal{F}G_{2A}, \quad (2.99)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = Q_A, \quad \frac{dW}{d\tau} = P_A, \quad (2.100)$$

donde

$$G_{1A} = G + \theta r_0, \quad G_{2A} = G_2 - r_0, \quad L_A = L + (1 - \theta)r_2,$$

$$Q_A = \frac{1}{L_A} \left\{ \frac{W + r_1}{\mathcal{F}} + \sigma + 2(b_1 \bar{\lambda}_2 + \theta b_2 \lambda_2) - \theta r_0(\sigma + 2\theta \lambda_2) - 2r_2(b_2 + \theta b_1 - \theta r_0) \right\},$$

$$\begin{aligned}P_A &= \frac{\mathcal{F}}{2} \left\{ (1 - \theta \lambda_1^2) Q_A^2 - 2l_1 Q_A + l_0 \right\} + \frac{1}{2\mu} \left\{ A_1'^2 + \frac{1}{\theta} A_2'^2 - 2A_1' A_2' \Lambda_1 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\nu^2} \left( \lambda_1 + \frac{B_{\Delta A}}{2\beta_1 \beta_2} \right),\end{aligned}$$

y

$$l_1 = 1 - \lambda_1(b_2 - \theta b_1) + (1 - \theta \lambda_1) A_2' \Lambda_{01} - \theta(1 - \theta \lambda_1) A_1' \Lambda_{02},$$

$$l_0 = 1 - 2\lambda_1(\theta b_1^2 + b_2^2) + \theta r_0^2 + (b_2 + \theta b_1 - \theta r_0)(A_2' \Lambda_{01} + A_1' \Lambda_{02}).$$

Seleccionemos el signo de los coeficientes  $A_i$ . Denotemos por  $z_0$  la primer raíz positiva de la ecuación  $\Lambda_2(z)|_{\mu=1} = 0$  y sea  $\tau_0$  tal que  $\sigma(\tau_0) = z_0/\mu$ . Supongamos que

$$(1 - \theta)A_1(\tau)A_2(\tau)\bar{\Lambda}_2(\sigma(\tau)) > 0 \quad \text{para } 0 < \tau < \tau_0. \quad (2.101)$$

Dado que  $\tau = \mathcal{O}(\sigma)$  para  $|\sigma| \gg 1$  y  $A_i$  se anula con una razón exponencial, entonces  $r_2 = \mathcal{O}(\mu^\infty)$  para  $\tau \geq \tau_0$ . Por lo tanto, bajo la hipótesis E1),  $L_A > 0$  para  $\sigma > 0$  y  $L'_A := dL_A/d\sigma|_{\tau=\sigma=0} > 0$ .

Bajo la Hipótesis adicional

$$A'_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.102)$$

existen isoclinas  $\gamma_Q, \gamma_P$  que pasan a través del punto  $(0, 0)$ .

El último paso es la construcción de la trayectoria  $\gamma_s$ . Para  $|\sigma|$  pequeña obtenemos nuevamente la ecuación similar a (2.75), esto es

$$M_A a_1^2 - N_A a_1 - R_A = 0, \quad (2.103)$$

donde  $M_A$  y  $N_A$  coinciden mod  $\mathcal{O}(\mu)$  con  $M$  y  $N$  en (2.77), (2.72) y con la siguiente  $R_A$ :

$$R_A = R - \frac{2\theta}{\mu \mathcal{F}_0} (\zeta_A + \zeta_B)$$

donde

$$\zeta_A = \left\{ A_1 A_2'' \bar{\Lambda}_3 + A_1'' A_2 \bar{\Lambda}_4 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 A_i A_i'' \right\} \Big|_{\tau=\sigma=0}, \quad \zeta_B = \frac{B}{\nu^2 \beta_2} \Big|_{\sigma=0}.$$

La elección de las amplitudes  $A_i(\tau)$  depende del signo del coeficiente  $M$  en (2.75). Sea  $M > 0$ , la hipótesis  $\zeta_A + \zeta_B < 0$  implica la existencia de la solución real

$$a_1 = \frac{1}{\mu} \left( \sqrt{\frac{2\theta}{M \mathcal{F}_0} |\zeta_A + \zeta_B|} + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \right)$$

de (2.103). Además, la condición (2.79) se satisface para cualquier  $n$ .

Finalmente, la segunda ecuación en (2.100) permite definir la coordenada  $W$  de la trayectoria  $\gamma_s$ . Con manipulaciones algebraicas se obtiene la siguiente fórmula para el término principal de (2.82):

$$w_1 = -\frac{\theta}{\mu M} \left\{ (M + (1 - \theta \lambda_1^{02})) + (1 - \theta \lambda_1^{02}) \zeta_A + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \right\}.$$

Aquí,  $w_1$  será negativa bajo alguna elección especial de  $\zeta_A, \zeta_B$  únicamente. Dado que aparece una segunda hipótesis para las derivadas de segundo orden de  $A_i$ , es necesario resumir ambas:

$$\zeta_B < |\zeta_A| < q \zeta_B, \quad \text{donde} \quad q = \frac{M + 1 - \theta \lambda_1^{02}}{1 - \theta \lambda_1^{02}}. \quad (2.104)$$

Nótese que la desigualdad  $M > 0$  implica que  $q > 1$ . Así, la validez de las condiciones (2.101), (2.102) y (2.104) se pueden verificar. Por lo tanto, la derivada

$$\left. \frac{dW_s}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{w_1}{a_1} := -\frac{1}{\sqrt{\mu}} f(A_1(0), A_2(0)), \quad f > 0,$$

puede ser un valor arbitrario. La variación de las amplitudes  $A_i(0)$  y del parámetro  $\mu$  implica la variación de los valores límites  $W_s^\infty := \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} W_s(\sigma)$  del número positivo  $W_s^\infty|_{A_i(0)=0}$  a cualquier número negativo. Esto y la estructura del retrato fase implican la existencia de tales valores de  $A_i(0)$  y  $\mu$  tal que  $W_s^\infty = 0$ .

Sea  $M < 0$ , entonces la hipótesis  $\zeta_A + \zeta_B > 0$  implica la existencia de la solución real

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left( \sqrt{\frac{2\theta}{|M|\mathcal{F}_0} (\zeta_A + \zeta_B) + \mathcal{O}(\sqrt{\mu})} \right)$$

de (2.103). Por lo tanto,

$$w_1 = -\frac{\theta}{\mu q_1} \left\{ ((q_1 - 1)\zeta_B - \zeta_A) + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \right\},$$

donde

$$q_1 = \frac{|M|}{1 - \theta\lambda_1^2} > 0.$$

Así, en lugar de (2.104) obtenemos la siguiente hipótesis

$$-\zeta_B < \zeta_A < (q_1 - 1)\zeta_B. \quad (2.105)$$

Dado que  $q_1 > 0$ , la validez de las condiciones (2.101), (2.102), y (2.105) se cumple. En consecuencia, existen valores de  $A_i(0)$  y  $\mu$  tales que  $W_s^\infty = 0$ .

Falta por considerar los valores límite de  $\phi_{i1}$ . Para esto elijamos  $\sigma = \sigma_s(\tau)$  y  $W = W_s(\tau)$ . Entonces  $|W/\sigma| = o(1/|\tau|)$  cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Luego, sea  $M < 0$ . Entonces, integrando las ecuaciones de la forma (2.99), obtenemos que  $\phi_{i1}^\infty$  están acotados por una constante para cualquier elección del parámetro  $\mu \in [0, 1)$ . Sea  $M > 0$ . Entonces los lados derechos de las ecuaciones (2.99) contiene los términos del tipo  $A_1(\tau)A_2'(\tau/\theta)\Lambda_3(\mu\sigma)$ . Sin embargo,  $A_i$  se anula cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$  con una razón exponencial. Por lo tanto la integral de este término está acotada por una constante uniformemente en  $\mu \geq 0$ . Esto implica la validez de la hipótesis (2.12) y se completa la prueba de este lema.  $\square$

En consecuencia se obtiene el resultado principal.

**Teorema 2.18.** *Sean las hipótesis A) - E2) válidas. Entonces el kink y el antikink preservan su forma mod  $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$  después de la interacción. La solución asintótica débil del problema (2.1), (2.15) tiene la forma (2.88) con la elección especial de las amplitudes  $A_i$  y del parámetro  $\mu$ .*

## Capítulo 3

### Esquema de diferencias finitas

#### 3.1. Introducción

El propósito de este capítulo, es obtener un esquema de diferencias finitas absolutamente estable para simular numéricamente la solución del problema de Cauchy (ver [19]):

$$\varepsilon^2(u_{tt} - u_{xx}) + F'(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

con  $F(u)$  una función no lineal suave, el parámetro  $\varepsilon \rightarrow 0$  y las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^N \omega \left( S_i \beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \sum_{i=1}^N S_i \beta_i V_i \omega' \left( S_i \beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad (3.2)$$

donde  $\beta_i = 1/\sqrt{1 - V_i^2}$ ,  $|V_i| \in (0, 1)$ ,  $S_i = \pm 1$ ,  $\omega$  como se definió en el capítulo anterior, las posiciones iniciales del frente  $x_i$  son tales que  $x_{i+1}^0 - x_i^0 > 1$ . Estamos considerando que las trayectorias  $x = V_i t + x_i^0$  tienen un punto en común  $x = x^*$  para un instante de tiempo  $t = t^*$ .

Dado que la simulación numérica del problema (3.1), (3.2) es realizada para un intervalo finito,  $x \in [0, L]$ , simularemos este problema de Cauchy por el siguiente problema mixto:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(u_{tt} - u_{xx}) + F'(u) &= 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \\ u|_{x=0} &= \nu_\ell, \quad u|_{x=L} = \nu_r, \\ u|_{t=0} &= u^0 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u^1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $u^0$  es la combinación de kinks y antikinks de la forma (3.2) y  $u^1$  es la correspondiente derivada respecto al tiempo  $t$ ,  $\nu_\ell = u^0|_{x=0}$ ,  $\nu_r = u^0|_{x=L}$ . Para simular mediante (3.3) el fenómeno de interacción, supondremos que  $L, T$  y las posiciones iniciales del frente  $x_i^0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , son tales que el punto de intersección de los frentes de onda solitaria pertenecen a  $Q = (0, L) \times (0, T)$ . Además,  $L, T$  y  $x_i^0$  son tales que uniformemente en  $t < T$

$$|u_\Sigma|_{x \in [0, \delta]} - \nu_\ell| \leq ch^2, \quad |u_\Sigma|_{x \in [L-\delta, L]} - \nu_r| \leq ch^2,$$

para algún  $\delta > 0$  suficientemente pequeña. Aquí  $u_\Sigma$  es la combinación de ondas solitarias de la forma

$$u_\Sigma = \sum_{i=1}^N \omega \left( \pm \beta_i \frac{x - V_i t - x_i^0}{\varepsilon} \right) \quad (3.4)$$

correspondiendo al valor inicial  $u^0$ .

Dado que es imposible de crear un esquema de diferencias finitas para el problema (3.3) el cual permanezca estable uniformemente en  $\varepsilon \rightarrow 0$  para  $t \in (0, T)$ ,  $T = \text{const}$ , trataremos a  $\varepsilon$  como una constante fija pero pequeña. También fijaremos cualquier relación entre  $\varepsilon$  y los parámetros del esquema de diferencias finitas.

### 3.2. Requisitos preliminares

En esta sección se presentan algunas definiciones y fórmulas que se utilizarán repetidamente en este capítulo. Primeramente, en el espacio de funciones, la definición de espacios  $L^p$ , las desigualdades de Hölder y Young, así como la definición de espacios de Sobolev, teoremas de inclusión, que también se le conoce con el nombre de inmersión y la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (ver, por ejemplo, [2, 3]). Luego, el análogo discreto, donde se incluyen las fórmulas que aproximan a la primera y segunda derivada (ver, por ejemplo, [9, 22]), además, la versión discreta de la fórmula de integración por partes y del Lema de Gronwall.

#### Espacios de funciones.

**Definición 3.1.** (Espacios  $L^p$ ). Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^n$ . Para cada  $p \in [1, \infty)$ , denotamos por  $L^p(\Omega)$  al espacio de las funciones medibles  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  tales que  $|f|^p$  tiene integral de Lebesgue finita. A este espacio se le dota de la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Definición 3.2.** ( $L^\infty$ ). Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^n$ . Denotamos por  $L^\infty(\Omega)$  al espacio de las funciones medibles  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $|f| \leq C$  casi en toda parte de  $\Omega$ . A este espacio se le dota de la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C : |f| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega \}$$

**Desigualdad de Young.** Si  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y  $a, b > 0$ , entonces

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \quad (3.5)$$

**Desigualdad de Hölder.** Sean  $p, q > 1$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si  $f \in L^p(\Omega)$  y  $g \in L^q(\Omega)$ , entonces

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Definición 3.3.** (Espacio de Sobolev).  $W_p^k(\Omega)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , denota el espacio de funciones  $f$  tales que cualquier derivada  $D^\alpha f$ , definida en el sentido débil, pertenece a  $L^p(\Omega)$ , con  $|\alpha| \leq k$ . Si para  $f$  en  $W_p^k(\Omega)$  se define:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

donde

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad y \quad D_j^k f = \frac{\partial^k f}{\partial x_j^k}, \quad \text{para } j = 1, \dots, n,$$

ocurre que  $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$  es una norma. Y a  $(W_p^k(\Omega), \|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)})$  se le llama espacio de Sobolev.

La norma en  $W_p^k(\Omega)$  también se escribe como

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \left( \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

### Teoremas de inclusión.

**Definición 3.4.** [3] Sean  $V$  y  $W$  dos espacios de Banach con  $V \subseteq W$ . Decimos que el espacio  $V$  es inclusión continua en  $W$  y se escribe  $V \hookrightarrow W$ , si

$$\|v\|_W \leq c\|u\|_V \quad \forall v \in V. \quad (3.6)$$

Decimos que el espacio  $V$  es inclusión compacta en  $W$  y se escribe  $V \hookrightarrow\hookrightarrow W$ , si (3.6) es válida y cada sucesión acotada en  $V$  tiene una subsucesión convergente en  $W$ .

Existen varios teoremas de inclusión. Aquí presentaremos uno de ellos.

**Teorema 3.5.** [3] Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  un dominio de Lipschitz acotado abierto no vacío. Entonces las siguientes afirmaciones son válidas.

- i) Si  $k < \frac{d}{p}$ , entonces  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$  para cualquier  $q < p^*$ ,  
donde  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{d}{p}$ .
- ii) Si  $k = \frac{d}{p}$ , entonces  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$  para cualquier  $q < \infty$ .
- iii) Si  $k > \frac{d}{p}$ , entonces  $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{\theta, \beta}(\Omega)$ , donde  $\theta = k - \left\lceil \frac{d}{p} \right\rceil - 1$   
y  $\beta \in \left[0, \left\lceil \frac{d}{p} \right\rceil + 1 - \frac{d}{p}\right)$ .

**Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg.** (Para  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^1$ ). Existe una constante  $c > 0$  tal que

$$\|\partial_x^r f\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{W_2^k(\Omega)}^\theta, \quad \text{donde } \theta k = \frac{1}{2} + r - \frac{1}{p}.$$

En el caso especial cuando existe un punto  $x^* \in \Omega$  tal que  $f(x^*) = 0$ , obtenemos la desigualdad

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}^{1-\theta} \|\partial_x f\|_{L^2(\Omega)}^\theta, \quad \text{donde } \theta = \frac{p-2}{2p}.$$

**Análogo discreto.**

**Dominio unidimensional**

Empezaremos introduciendo una **discretización** del dominio  $\Omega = [0, L]$ , que consiste en seleccionar un conjunto de nodos distintos  $\{x_0, \dots, x_I\}$  y equidistantes, de tal manera que

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{I-1} < x_I = L,$$

y que  $x_{i+1} - x_i = h$ , para  $i = 0, \dots, I-1$ , con  $h > 0$ . A este conjunto de nodos se le llama **mall**a, esto es

$$\Omega_h = \{x = ih, i = 0, \dots, I\}.$$

En general, el interés es calcular el valor aproximado  $f_i$  de  $f(x_i)$ , es decir, el valor en cada nodo. Para ello, en el presente trabajo utilizaremos un esquema de diferencias finitas.

A continuación, para este conjunto discreto de puntos, definimos la norma  $L^p(\Omega_h)$ , sobre la malla  $\Omega_h$ , como:

$$\|f\|_{L^p(\Omega_h)} = \left( h \sum_{i=1}^{I-1} |f_i|^p \right)^{1/p}. \quad (3.7)$$

En seguida, escribimos un resultado que utilizaremos con frecuencia.

**Desigualdad de Hölder** Si  $p, q > 1$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  tal que  $f \in L^p(\Omega_h)$  y  $g \in L^q(\Omega_h)$ , entonces

$$h \sum_{i=1}^{I-1} |f_i g_i| \leq \left( h \sum_{i=1}^{I-1} |f_i|^p \right)^{1/p} \left( h \sum_{i=1}^{I-1} |g_i|^q \right)^{1/q}.$$

Los métodos numéricos que contienen esquemas de diferencias finitas, reemplazan las derivadas mediante una aproximación con cocientes de diferencias adecuado. Para ello, utilizamos desarrollos en series de Taylor. Obviamente, se requiere

cierta regularidad a las funciones involucradas. Recordando, si  $u(x) \in C^n([a, b])$  y  $d^{n+1}u/dx^{n+1}(x)$  existe en  $(a, b)$ , entonces para  $x^* \in (a, b)$  se tiene:

$$u(x^* + h) = u(x^*) + h \frac{du}{dx}(x^*) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x^*) + \cdots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^nu}{dx^n}(x^*) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}(\xi),$$

donde  $\xi$  es un punto comprendido entre  $x^*$  y  $x^* + h$ .

A partir de esta serie de Taylor, se obtiene una aproximación a la primera y segunda derivada sobre la malla  $\Omega_h$ . Para esto, supondremos que  $u(x) \in C^4([0, L])$ . De la expresión

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(\xi_i),$$

donde  $\xi_i$  está entre  $x_i$  y  $x_i + h = x_{i+1}$ , se obtiene

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(\xi_i).$$

Por consiguiente, la fórmula que aproxima el valor de la primera derivada en un punto está dada por:

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + O(h).$$

A la expresión previa se le conoce como fórmula en diferencias finitas progresiva. También existe la fórmula en diferencias finitas regresiva para aproximar la primera derivada de una función:

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

y la fórmula en diferencias finitas centrada:

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2).$$

Para la segunda derivada, si sumamos los desarrollos:

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4u}{dx^4}(\xi_i^1)$$

y

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4u}{dx^4}(\xi_i^2),$$

donde  $\xi_i^1$  está entre  $x_i$  y  $x_i + h = x_{i+1}$  y  $\xi_i^2$  está entre  $x_i - h = x_{i-1}$  y  $x_i$ , tenemos que

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2 \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + \frac{h^4}{4!} \left( \frac{d^4u}{dx^4}(\xi_i^1) + \frac{d^4u}{dx^4}(\xi_i^2) \right),$$

de la cual se obtiene la fórmula en diferencias finitas centrada para aproximar el valor de la segunda derivada en un punto:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2).$$

Para este caso unidimensional, la norma en  $W_p^k(\Omega_h)$  se define como:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega_h)} = \left( \|f\|_{L^p(\Omega_h)}^p + \left\| \frac{d^k f}{dx^k} \right\|_{L^p(\Omega_h)}^p \right)^{1/p},$$

donde la norma  $L^p(\Omega_h)$  ha sido definida en (3.7).

### Dominio de varias variables.

Debido a que nuestro problema mixto (3.3) solo involucra las variables independientes espacio y tiempo, nos enfocaremos al caso de dos variables.

De manera similar como procedimos anteriormente, definimos la malla

$$\Omega_h = \{(x_i, t_j) = (ih, j\tau), i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J\},$$

con  $h > 0, \tau > 0$  y  $J = \lceil T/\tau \rceil$ .

Las fórmulas que aproximan al valor de la primera derivada con respecto a  $x$  y  $t$ , están dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} + O(h)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\tau} + O(\tau)$$

y las que aproximan a la segunda derivada con respecto a  $x$  y  $t$  son:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} + O(h^2)$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\tau^2} + O(\tau^2).$$

La norma  $W_p^k(\Omega_h)$  está dada por:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega_h)} = \left( \|f\|_{L^p(\Omega_h)}^p + \|\partial_x^k f\|_{L^p(\Omega_h)}^p + \|\partial_t^k f\|_{L^p(\Omega_h)}^p \right)^{1/p}$$

donde  $\partial_x^k, \partial_t^k$  denotan las derivadas discretas.

### Simplificación de notaciones y algunas fórmulas.

Denotaremos

$$\begin{aligned}
y &:= y_i^j = u(x_i, t_j), & \hat{y} &:= y_i^{j+1}, & \check{y} &:= y_i^{j-1}, \\
y_t &= \frac{\hat{y} - y}{\tau}, & y_{\bar{t}} &= \frac{y - \check{y}}{\tau}, \\
y_x &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, & y_{\bar{x}} &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \\
y_{t\bar{t}} &= (y_t)_{\bar{t}} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}, & y_{x\bar{x}} &= (y_x)_{\bar{x}} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que

$$2y_{t\bar{t}}y_t = (y_{\bar{t}}^2)_{\bar{t}} + \tau(y_{t\bar{t}})^2, \quad (3.8)$$

$$2\hat{y}_xy_{xt} = (y_x^2)_t + \tau(y_{xt})^2, \quad (3.9)$$

mediante el cambio de variable  $v = y_t$  y  $v = y_x$  respectivamente.

También, en lo sucesivo denotaremos las normas en  $L^p(\Omega_h)$  y  $W_p^k(\Omega_h)$  como  $\|f\|_p$  y  $\|f\|_{p,(k)}$  respectivamente, además, si  $p = 2$ , escribimos  $\|f\| := \|f\|_p$  y  $\|f\|_{(k)} := \|f\|_{p,(k)}$

**Lema 3.6.** (*Fórmula de integración por partes, versión discreta*)

$$h \sum_{i=1}^{N-1} f_i g_{ix} = -h \sum_{i=1}^{N-1} f_{i\bar{x}} g_i, \quad \text{siempre que } f_0 = g_N = 0 \quad (3.10)$$

*Demostración.* Obsérvese que

$$\begin{aligned}
(f_i g_i)_x &= \frac{1}{h}(f_{i+1} g_{i+1} - f_i g_i) \\
&= \frac{1}{h}(f_{i+1} g_{i+1} - f_i g_{i+1} + f_i g_{i+1} - f_i g_i) \\
&= f_{ix} g_{i+1} + f_i g_{ix}.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$f_i g_{ix} = (f_i g_i)_x - f_{ix} g_{i+1}.$$

Sumando sobre  $i$  en la identidad previa y multiplicando el resultado por  $h$ , se obtiene

$$h \sum_{i=1}^{N-1} f_i g_{ix} = h \sum_{i=1}^{N-1} (f_i g_i)_x - h \sum_{i=1}^{N-1} f_{ix} g_{i+1}, \quad (3.11)$$

donde

$$h \sum_{i=1}^{N-1} (f_i g_i)_x = f_N g_N - f_1 g_1 \quad (3.12)$$

y

$$h \sum_{i=1}^{N-1} f_{ix} g_{i+1} = h \sum_{i=1}^{N-1} f_{i\bar{x}} g_i - (f_1 g_1 - f_0 g_1) + (f_N g_N - f_{N-1} g_N). \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.12) y (3.13) en (3.11), se obtiene

$$h \sum_{i=1}^{N-1} f_i g_{ix} = f_N g_N - f_1 g_1 - h \sum_{i=1}^{N-1} f_{i\bar{x}} g_i + (f_1 g_1 - f_0 g_1) - (f_N g_N - f_{N-1} g_N),$$

dado que  $f_0 = g_N = 0$ , entonces

$$h \sum_{i=1}^{N-1} f_i g_{ix} = -h \sum_{i=1}^{N-1} f_{i\bar{x}} g_i.$$

□

El siguiente lema, que es la versión discreta del Lema de Gronwall, posiblemente ya ha sido probado, sin embargo, dado que no encontramos referencia alguna de ello, aquí se incluye dicha demostración.

**Lema 3.7. (Gronwall)** *Sea  $y^j \geq 0$ , con  $j \geq 0$  y  $C_i$  para  $i = 1, 2$ , constantes no negativas. Si*

$$y^j \leq y^0 + C_2 \tau \sum_{k=0}^j y^k,$$

entonces

$$y^j \leq C_1 e^{C_2 t_j}, \quad C_1 = y^0 (1 + O(\tau)), \quad t_j = j\tau.$$

*Demostración.* Lo haremos por inducción. Por hipótesis

$$y^j \leq y^0 + C_2 \tau y^0 + C_2 \tau \sum_{k=1}^j y^k.$$

Definiendo  $z^0 := (1 + C_2 \tau) y^0$ , la desigualdad previa se reescribe como:

$$y^j \leq z^0 + C_2 \tau \sum_{k=1}^j y^k.$$

A continuación se buscará una relación entre  $z^0$  y  $y^j$ . Primero, para  $j = 1$ , se tiene que

$$y^1 \leq z^0 + C_2 \tau y^1.$$

Ordenando términos y haciendo  $q := 1/(1 - C_2\tau)$ , con  $1 - C_2\tau > 0$ , se obtiene que

$$y^1 \leq qz^0.$$

Para  $j = 2$ , se tiene que

$$y^2 \leq z^0 + C_2\tau y^1 + C_2\tau y^2,$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{q}y^2 \leq z^0 + C_2\tau qz^0 = (1 + C_2\tau q)z^0 = qz^0.$$

Por consiguiente

$$y^2 \leq q^2z^0.$$

Ahora, supondremos la validez de  $y^{j-1} \leq q^{j-1}z^0$  para probar  $y^j \leq q^jz^0$ . Así,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}y^j &\leq z^0 + C_2\tau \sum_{k=1}^{j-1} y^k \\ &\leq z^0 + C_2\tau(q + q^2 + \dots + q^{j-1})z^0 \\ &\leq z^0\{1 + C_2\tau q + C_2\tau q(q + \dots + q^{j-2})\} \\ &\leq qz^0\{1 + C_2\tau q + C_2\tau q(q + \dots + q^{j-3})\} = \dots = q^{j-1}z^0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y^j \leq q^jz^0.$$

Reescribiendo la desigualdad inmediata anterior como

$$y^j \leq z^0 e^{\ln q^j} = z^0 e^{-j \ln(1 - C_2\tau)}$$

y dado que

$$\begin{aligned} -j \ln(1 - c\tau) &= -j(-C_2\tau - \frac{1}{2}C_2^2\tau^2 + \dots) \\ &= C_2t_j(1 + \frac{1}{2}C_2\tau + \dots) \\ &= C_2t_j(1 + O(\tau)), \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} y^j &\leq y^0(1 + C_2\tau)e^{C_2t_j(1+O(\tau))} \\ &\leq y^0e^{C_2t_j}\{(1 + C_2\tau)e^{C_2t_jO(\tau)}\}, \quad \text{para } t_j < \infty, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$y^j \leq C_1e^{C_2t_j}, \quad \text{con } C_1 = y^0(1 + O(\tau)).$$

□

### 3.3. Esquema preliminar no lineal

Reemplazando las fórmulas discretas que aproximan a las derivadas en el problema mixto (3.3), se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(y_{it\bar{t}}^j - y_{ix\bar{x}}^{j+1}) + F'(y_i^{j+1}) &= 0, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad j = 2, 3, \dots, \\ y_0^j &= \nu_\ell, \quad y_I^j = \nu_r, \quad j = 0, 1, \dots, \\ y_i^0 &= u^0\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon y_{it}^0 = \tilde{u}^1\left(\frac{x_i}{\varepsilon}, \tau\right), \quad i = 0, \dots, I, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\tilde{u}^1(x_i/\varepsilon, \tau)$  es tal que la última ecuación en (3.3) es aproximada con una exactitud de  $O(\tau^2)$ , mientras que el error local de (3.14) lo es con  $O(\tau^2 + h^2)$ .

De acuerdo a la notación que previamente definimos, la primera ecuación de (3.14) se transforma en

$$\varepsilon^2(y_{t\bar{t}} - \hat{y}_{x\bar{x}}) + F'(\hat{y}) = 0. \quad (3.15)$$

En esta sección, primeramente se obtendrán estimaciones para la solución del sistema algebraico (3.14), posteriormente se analizará la estabilidad de dicho sistema.

**Lema 3.8.** *Sea*

$$\tau \leq c\varepsilon^2, \quad c = cte \quad (3.16)$$

y supóngase que el sistema (3.14) tiene solución para cualquier  $j = 2, \dots, J$ . Entonces uniformemente en  $j$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon y_t\|^2 + \|\varepsilon \hat{y}_x\|^2 + 2\|\sqrt{F'(\hat{y})}\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon^2} \{ \|\varepsilon^2 y_{t\bar{t}}\|^2(j) + \|\varepsilon^2 y_{x\bar{x}}\|^2(j) \} \\ \leq \left\{ \|\varepsilon y_t^0\|^2 + \|\varepsilon y_x^1\|^2 + 2\|\sqrt{F'(y^1)}\|^2 \right\} e^{c_1 \frac{\tau}{\varepsilon^2} t_j} (1 + O(\tau)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $\|\cdot\|(j)$  es una norma en  $L^2$ , definida como sigue

$$\|f\|^2(j) = \tau \sum_{k=1}^j \|f^k\|^2,$$

y  $c_1 > 0$  es una constante que no depende de  $h$ ,  $\tau$  y  $\varepsilon$ .

*Demostración.* Multiplicando la ecuación (3.15) por  $hy_t$  y sumando sobre  $i$ , se obtiene la expresión siguiente:

$$\varepsilon^2 \left\{ h \sum_{i=1}^{I-1} y_{it\bar{t}} y_{it} - h \sum_{i=1}^{I-1} \hat{y}_{ix\bar{x}} y_{it} \right\} + h \sum_{i=1}^{I-1} F'(\hat{y}_i) y_{it} = 0.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes (3.10) al segundo término del lado izquierdo de la ecuación previa, nos queda

$$\varepsilon^2 \left\{ h \sum_{i=1}^{I-1} y_{it\bar{i}} y_{it} + h \sum_{i=1}^{I-1} \hat{y}_{ix} y_{ixt} \right\} + h \sum_{i=1}^{I-1} F'(\hat{y}_i) y_{it} = 0. \quad (3.18)$$

Reemplazando el primer y segundo término de la ecuación (3.18) por (3.8) y (3.9) respectivamente, se obtiene

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ h \sum_{i=1}^{I-1} (y_{t\bar{i}}^2)_{\bar{i}} + \tau h \sum_{i=1}^{I-1} (y_{t\bar{i}})^2 + h \sum_{i=1}^{I-1} (y_x^2)_t + \tau h \sum_{i=1}^{I-1} (y_{xt})^2 \right\} + h \sum_{i=1}^{I-1} F'(\hat{y}) y_t = 0,$$

la cual es equivalente a

$$\varepsilon^2 \left\{ \|y_t\|_{\bar{i}}^2 + \tau \|y_{t\bar{i}}\|^2 + \|y_x\|_t^2 + \tau \|y_{xt}\|^2 \right\} + 2h \sum_{i=1}^{I-1} F'(\hat{y}) y_t = 0. \quad (3.19)$$

A continuación, se obtendrá una relación para el último término de la ecuación (3.19). Es claro que

$$\begin{aligned} F'(\hat{y}) y_t - (F(y))_t &= F'(\hat{y}) \left[ \frac{\hat{y} - y}{\tau} \right] - \left[ \frac{F(\hat{y}) - F(y)}{\tau} \right] \\ &= \frac{1}{\tau} [F'(\hat{y})(\hat{y} - y) - F(\hat{y}) + F(y)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Luego, utilizando desarrollos en series de Taylor, expresamos a  $F(y)$  como

$$F(y) = F(\hat{y}) + F'(\hat{y})(y - \hat{y}) + \frac{1}{2} F''(\vartheta)(y - \hat{y})^2,$$

donde  $\vartheta$  es un número entre  $y$  y  $\hat{y}$ . Sustituyendo la ecuación previa en (3.20), resulta que

$$\begin{aligned} F'(\hat{y}) y_t - (F(y))_t &= \frac{1}{\tau} \left[ F'(\hat{y})(\hat{y} - y) - F(\hat{y}) + F(\hat{y}) - F'(\hat{y})(\hat{y} - y) + \frac{1}{2} F''(\vartheta)(\hat{y} - y)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\tau} F''(\vartheta)(\hat{y} - y)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F'(\hat{y}_i) y_{it} = (F(y_i))_t + \frac{\tau}{2} F''(\vartheta_i^j) y_{it}^2. \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.21) en (3.19), se obtiene

$$\varepsilon^2 \left\{ \|y_t\|_{\bar{i}}^2 + \|y_x\|_t^2 + \tau \|y_{t\bar{i}}\|^2 + \tau \|y_{xt}\|^2 \right\} + 2h \sum_{i=1}^{I-1} (F(y_i))_t + \tau h \sum_{i=1}^{I-1} F''(\vartheta_i^j) y_{it}^2 = 0. \quad (3.22)$$

Observése que si  $v = \|y_t\|^2$ , entonces  $v_{\bar{t}} = \|y_t\|_{\bar{t}}^2$ . Además,

$$\tau \sum_{k=1}^j v_{\bar{t}} = \sum_{k=1}^j (v^k - v^{k-1}) = (v^j - v^0).$$

Por lo tanto

$$\tau \sum_{k=1}^j \|y_t\|_{\bar{t}}^2 = \|y_t^j\|^2 - \|y_t^0\|^2,$$

$$\tau \sum_{k=1}^j \|y_x\|_{\bar{t}}^2 = \|y_x^{j+1}\|^2 - \|y_x^1\|^2$$

y

$$\tau h \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^{I-1} F(y)_t = h \sum_{i=1}^{I-1} F(y^{j+1}) - h \sum_{i=1}^{I-1} F(y^1).$$

Sumando sobre  $j$  en (3.22) y sustituyendo en el resultado las tres identidades inmediatas anteriores, se obtiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left\{ \|y_x^j\|^2 - \|y_t^0\|^2 + \|y_x^{j+1}\|^2 - \|y_x^1\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^j \|y_{t\bar{t}}\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^j \|y_{xt}\|^2 \right\} \\ + 2h \sum_i F(y^{j+1}) - 2h \sum_i F(y^1) + \tau^2 h \sum_{k=1}^j \sum_i F''(\vartheta_i^k) y_t^2 = 0. \end{aligned}$$

Agrupando términos en la expresión previa, utilizando la notación  $\|\cdot\|(j)$  definida anteriormente, y de acuerdo a las hipótesis A) - C) se tiene que  $F(y) \geq 0$  para toda  $y$ , entonces se obtiene la relación siguiente:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon y_t^j\|^2 + \|\varepsilon y_x^{j+1}\|^2 + 2\|\sqrt{F(y^{j+1})}\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^2 y_{t\bar{t}}\|^2(j) + \frac{\tau}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^2 y_{xt}\|^2(j) \\ = \|\varepsilon y_t^0\|^2 + \|\varepsilon y_x^1\|^2 + 2\|\sqrt{F(y^1)}\|^2 - \tau^2 h \sum_{k=1}^j \sum_i F''(\vartheta_i^k) y_t^2. \end{aligned}$$

A continuación se obtendrá una estimación para el último término del lado derecho de la ecuación previa. Obsérvese que, de acuerdo a las hipótesis A) - C), también se concluye que, todas las derivadas de  $F$  están acotadas por una constante, entonces

$$\left| \tau^2 h \sum_{k=1}^j \sum_i F''(\vartheta_i^k) y_t^2 \right| \leq \tau^2 c_1 \sum_{k=1}^j \|y_t^k\|^2, \quad \text{con } |F''(\vartheta)| \leq c_1.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon y_t^j\|^2 + \|\varepsilon y_x^{j+1}\|^2 + 2\|\sqrt{F(\hat{y})}\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon^2} \{ \|\varepsilon^2 y_{tt}\|^2(j) + \|\varepsilon^2 y_{xt}\|^2(j) \} \\ & \leq c_0 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} c_1 \sum_{k=1}^j \|\varepsilon y_t^k\|^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde

$$c_0 = \|\varepsilon y_t^0\|^2 + \|\varepsilon y_x^1\|^2 + 2\|\sqrt{F(y^1)}\|^2.$$

Para finalizar, se aplica la versión discreta del Lema de Gronwall (Lema 3.7) a la desigualdad (3.23), para obtener (3.17).  $\square$

Antes de continuar con el Lema 3.9, se obtendrá una estimación para la norma de  $y^j$ . Es obvio que

$$y_i^j = y_i^0 + \tau \sum_{k=0}^{j-1} y_{it}^k.$$

Tomando la norma, aplicando la desigualdad del triángulo y elevando al cuadrado se obtiene

$$\|y^j\|^2 \leq \|y^0\|^2 + 2\|y^0\|\tau \sum_{k=0}^{j-1} \|y_t^k\| + \tau^2 \left( \sum_{k=0}^{j-1} \|y_t^k\| \right)^2,$$

a la cual se le aplica la fórmula de Young con  $p = q = 2$ , para obtener

$$\|y^j\|^2 \leq 2\|y^0\|^2 + 2\tau^2 \left( \sum_{k=0}^{j-1} \|y_t^k\| \right)^2,$$

y dado a que

$$\left( \sum_{s=1}^N a_s \right)^2 \leq N \sum_{s=1}^N a_s^2, \quad \text{para } a_s > 0, \quad \text{y } t_j = j\tau,$$

entonces

$$\|y^j\|^2 \leq 2\|y^0\|^2 + 2t_j\tau \sum_{k=0}^{j-1} \|y_t^k\|^2. \quad (3.24)$$

De acuerdo al Lema 2, concluimos que

$$\|y^j\|^2 \leq 2\|y^0\|^2 + 2t_j\tau \sum_{k=0}^{j-1} \|y_t^k\|^2 \leq 2\|y^0\|^2 + 2\frac{t_j^2}{\varepsilon^2} Q,$$

donde  $Q > 0$  denota la parte derecha de (3.17). Es claro que esta estimación es muy burda, sin embargo, puede mejorarse un poco para los valores específicos iniciales (3.2).

**Lema 3.9.** Si las hipótesis del Lema 3.8 se satisfacen, entonces con los valores iniciales  $u^0(x_i/\varepsilon), \tilde{u}^1(x_i/\varepsilon, \tau)$ , que se aproximan a los valores iniciales (3.2), la siguiente estimación es válida uniformemente en  $j$ :

$$\sqrt{\varepsilon} \left\{ \|y_t^j\| + \|y_x^j\| + \|y^j\| \right\} \leq c. \quad (3.25)$$

*Demostración.* Obsérvese que es suficiente probar que las normas, en  $L^2(\Omega_h)$ , de  $\varepsilon y_t^0$ ,  $\varepsilon y_x^1$  y  $\sqrt{F(y^1)}$  son de  $O(\sqrt{\varepsilon})$ , ya que junto con la desigualdad (3.17), del Lema 3, se deduce (3.25).

Utilizando los valores iniciales (3.2), se tiene que:

$$\left\| \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\|^2 \leq \sum_{i=1}^N \int_0^L \beta_i^2 V_i^2 \left[ \omega' \left( S_i \beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right) \right]^2 dx.$$

Definiendo el cambio de variable  $\eta = S_i \beta_i (x - x_i^0)/\varepsilon$ , la desigualdad previa se transforma en:

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\|^2 &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} S_i \beta_i V_i^2 [\omega'(\eta)]^2 d\eta \\ &\leq \varepsilon \cdot C, \quad \text{dado que } \omega' \rightarrow 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que,  $\|\varepsilon y_t^0\| \leq c\sqrt{\varepsilon}$ . Se procede de manera similar para  $\|\varepsilon y_x^1\|$ . Para  $\|\sqrt{F(y^1)}\|$ , se utiliza la relación  $d\omega/d\eta = \sqrt{2F(\omega)}$ .  $\square$

**Lema 3.10.** Si las hipótesis del Lema 3.8 se satisfacen, entonces uniformemente en  $j$

$$\|\varepsilon^2 y_{xt}^j\| + \|\varepsilon^2 y_{x\bar{x}}^{j+1}\| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (3.26)$$

donde  $c > 0$  es una constante que no depende de  $\tau, h, \varepsilon$  y  $j$ .

*Demostración.* Derivando la ecuación (3.14) con respecto a  $x$ , multiplicando el resultado por  $h\varepsilon^2 y_{xt}$ , sumando sobre  $i$ , se obtiene que

$$\varepsilon^2 h \sum_{i=1}^{I-1} \varepsilon^2 (y_{i\bar{t}\bar{t}})_x y_{xt} - \varepsilon^2 h \sum_{i=1}^{I-1} \varepsilon^2 (\hat{y}_{i\bar{x}\bar{x}})_x y_{xt} + \varepsilon^2 h \sum_{i=1}^{I-1} (F'(\hat{y}_i))_x y_{xt} = 0. \quad (3.27)$$

En el primer término del lado izquierdo de (3.27), se aplica la identidad (3.8) como sigue:

$$(y_x)_{i\bar{t}\bar{t}}(y_x)_t = \frac{1}{2}(y_{xt}^2)_{i\bar{t}} + \frac{1}{2}\tau(y_{xt\bar{t}})^2,$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 h \sum_{i=1}^{I-1} \varepsilon^2 (y_{it\bar{t}})_x y_{xt} &= \frac{1}{2} h \sum_i \varepsilon^4 (y_{xt}^2)_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \tau h \sum_i \varepsilon^4 (y_{xt\bar{t}})^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\varepsilon^2 y_{xt}\|_t^2 + \frac{1}{2} \tau \|\varepsilon^2 y_{xt\bar{t}}\|^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De manera similar, en el segundo término del lado izquierdo de (3.27) se aplica la fórmula de integración por partes (3.10) y la identidad (3.9), para obtener

$$-\varepsilon^2 h \sum_{i=1}^{I-1} \varepsilon^2 (\hat{y}_{ix\bar{x}})_x y_{xt} = \frac{1}{2} \|\varepsilon^2 y_{x\bar{x}}\|_t^2 + \frac{1}{2} \tau \|\varepsilon^2 y_{x\bar{x}t}\|^2. \quad (3.29)$$

De acuerdo con la identidad

$$\partial_x F'(\hat{y}_i) = F''(\vartheta_i) \hat{y}_{ix}, \quad (3.30)$$

el tercer término del lado izquierdo de (3.27), se estima como

$$\left| \varepsilon^2 h \sum_{i=1}^{I-1} (F'(\hat{y}_i))_x y_{xt} \right| \leq \frac{1}{2} c \|\hat{y}_x\|^2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon^2 y_{xt}\|^2. \quad (3.31)$$

Sustituyendo (3.28), (3.29) en (3.27) y utilizando (3.31), se obtiene la desigualdad

$$\|\varepsilon^2 y_{xt}\|_t^2 + \|\varepsilon^2 y_{x\bar{x}}\|_t^2 + \frac{\tau}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^3 y_{xt\bar{t}}\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^3 y_{x\bar{x}t}\|^2 \leq c \|\hat{y}_x\|^2 + \|\varepsilon^2 y_{xt}\|^2.$$

Luego, sumando sobre  $j$  en la ecuación previa, aplicando el lema de Gronwall y utilizando (3.25), se obtiene la estimación (3.26)  $\square$

Una consecuencia inmediata del Lema 3.10 es que la norma en  $L^2(\Omega_h)$  de la solución numérica  $y_i^j$  de (3.14), permanece acotada uniformemente en  $j$ . Con el fin de analizar la estabilidad del sistema (3.14), se estudiará la propagación de una perturbación, pequeña, de la solución. Es decir, sea  $y^* = y + z$ , donde  $y$  es la solución del esquema de diferencias finitas, y  $z$  la perturbación o error. Consideremos el problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 (z_{it\bar{t}}^j - z_{ix\bar{x}}^{j+1}) + F'(y_i^{j+1} + z_i^{j+1}) - F'(y_i^{j+1}) &= \mathcal{F}_i^j, \\ z_0^j &= 0, \quad z_I^j = 0, \quad z_i^0 = \psi_i^1, \quad \varepsilon z_{it}^0 = \psi_i^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde  $\psi_i^1, \mathcal{F}_i^j$  son tales que

$$\|\varepsilon \psi_x^1\|^2 \leq c \mu^{k_1}, \quad \|\psi^2\|^2 + \|\tau \psi_x^2\|^2 \leq c \mu^{k_2}, \quad \varepsilon^{-1/2} \max_j \|\mathcal{F}^j\|^2 \leq c \mu^{k_3}.$$

A continuación, en el siguiente Lema se establece una cota para la magnitud de la propagación del error.

**Lema 3.11.** *Si las hipótesis del Lema 3.8 se satisfacen, entonces uniformemente en  $j$*

$$\|\varepsilon z_t^j\|^2 + \|\varepsilon z_x^{j+1}\|^2 \leq c \max_{l=1,2,3} \mu^{k_l} e^{c t_j / \varepsilon^{3/2}}. \quad (3.33)$$

*Demostración.* El proceso de la demostración es similar a la del Lema 3.8. Multiplicar la ecuación (3.32) por  $h z_{it}^j$ , sumar sobre  $i$ , aplicar la fórmula de integración por partes (3.10), las identidades (3.8) y (3.9), el resultado sumar sobre  $j$ , para obtener

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon z_t^j\|^2 + \|\varepsilon z_x^{j+1}\|^2 + \tau \|\varepsilon z_{tt}^j\|^2(j) + \tau \|\varepsilon z_{xt}^j\|^2(j) \\ & \leq \|\varepsilon z_t^0\|^2 + \|\varepsilon z_x^1\|^2 + \tau \sum_{k=1}^j h \sum_{i=1}^{I-1} |F'(y_i^{j+1} + z_i^{j+1}) - F'(y_i^{j+1})| |z_{it}^j| \\ & \quad + \tau \sum_{k=1}^j \|\mathcal{F}^k\| \|z_t^k\|. \end{aligned} \quad (3.34)$$

El término no lineal queda como sigue

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{k=1}^j h \sum_{i=1}^{I-1} |F'(y_i^{j+1} + z_i^{j+1}) - F'(y_i^{j+1})| |z_{it}^j| \\ & \leq \tau \sum_{k=1}^j \|z_t^k\| \|F''(\theta^j y^{j+1} + (1 - \theta^j) z^{j+1})\| \max_i |z_i^{j+1}| \\ & \leq c\sqrt{\varepsilon} \tau \sum_{k=1}^j \|z_t^k\| \|z_x^{j+1}\|. \end{aligned}$$

Sustituimos la desigualdad previa en (3.34), aplicamos la desigualdad de Young y el Lema de Gronwall y obtenemos

$$\|\varepsilon z_t^j\|^2 + \|\varepsilon z_x^{j+1}\|^2 \leq \{c\mu^{k_1} + c\mu^{k_2} + c\mu^{k_3}\} e^{c_1 t_j / \varepsilon^{3/2}},$$

la cual nos conduce a (3.33). □

### 3.4. Linealización

A continuación, se analizará la solubilidad de sistema algebraico (3.14), para cualquier  $j \geq 1$  fijo. Esto es, del sistema

$$y_i^{j+1} - \tau^2 y_{ix\bar{x}}^{j+1} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} F'(y_i^{j+1}) = G^j, \quad \text{donde } G^j = y^j + \tau y_t^j. \quad (3.35)$$

Además, dado que (3.35) es un sistema algebraico no lineal, también se discutirá como linealizar dicho sistema. Para este propósito, se construye una sucesión de funciones

$$\varphi(s) = \{\varphi_0(s), \dots, \varphi_I(s)\}, \quad s \geq 0,$$

tal que  $\varphi_i(0) = y_i^j$ ,  $\varphi_i(s) \rightarrow y_i^{j+1}$  cuando  $s \rightarrow \infty$  y que  $\varphi(s)$  para  $s \geq 1$  satisface la ecuación lineal

$$\begin{aligned} & \varphi(s) - \tau^2 \varphi_{x\bar{x}}(s) \\ & + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left\{ F'(\varphi(s-1)) + F''(\varphi(s-1))(\varphi(s) - \varphi(s-1)) \right\} = G^j, \quad (3.36) \\ & \varphi_0(s) = \nu_\ell, \quad \varphi_I(s) = \nu_r. \end{aligned}$$

La solubilidad del sistema algebraico (3.36) es evidente para  $\tau$  suficientemente pequeña y  $\tau/\varepsilon^2 \leq \text{const.}$  Para simplificar la notación, denotamos:  $\varphi := \varphi(s)$ ,  $\bar{\varphi} := \varphi(s-1)$ ,  $\bar{\bar{\varphi}} := \varphi(s-2)$  y también

$$w := \varphi - \bar{\varphi}, \quad \bar{w} := \bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}.$$

Utilizando la fórmula de Taylor, se tiene que

$$F'(\bar{\varphi} + w) = F'(\varphi) = F'(\bar{\varphi}) + F''(\bar{\varphi})w + \frac{1}{2}F'''(\vartheta_i)w^2,$$

donde  $\vartheta_i$  es un número entre  $\varphi_i$  y  $\bar{\varphi}_i$ . Así, (3.36) queda como sigue:

$$\varphi - \tau^2 \varphi_{x\bar{x}} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left\{ F'(\varphi) - \frac{1}{2}F'''(\vartheta_i)w^2 \right\} = G^j. \quad (3.37)$$

Ahora, suponiendo la existencia de la solución exacta  $y^k$  de la ecuaciones (3.35) para toda  $k = 2, 3, \dots, j$ . También, para los valores específicos iniciales (3.2), que  $y^0$  y  $y^1$  satisfacen la ecuación (3.35). A continuación, se obtendrán las expresiones para la sucesión de funciones auxiliares  $w \equiv w(s)$ , es decir,  $\varphi(s) - \varphi(s-1)$ , a partir de la ecuación lineal (3.36), para  $s > 1$  y  $s = 1$ .

Para  $s > 1$ , restando las ecuaciones

$$\varphi - \tau^2 \varphi_{x\bar{x}} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left\{ F'(\bar{\varphi}) + F''(\bar{\varphi})w \right\} = G^j$$

y

$$\bar{\varphi} - \tau^2 \bar{\varphi}_{x\bar{x}} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left\{ F'(\bar{\varphi}) + F''(\bar{\varphi})\bar{w} \right\} = G^j,$$

y considerando el desarrollo en serie de Taylor

$$F'(\bar{\varphi} + \bar{w}) = F'(\bar{\varphi}) = F'(\bar{\varphi}) + F''(\bar{\varphi})\bar{w} + \frac{1}{2}F'''(\vartheta_i)\bar{w}^2,$$

se obtiene la siguiente expresión para  $w$ , para  $s > 1$ :

$$w - \tau^2 w_{x\bar{x}} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} F''(\bar{\varphi})w = \frac{\tau^2}{2\varepsilon^2} F'''(\vartheta_i)\bar{w}^2, \quad \text{para } s > 1. \quad (3.38)$$

Para  $s = 1$ , dado que  $\bar{\varphi} = \varphi(s-1) = \varphi(0) = y^j$ , la expresión para  $w$ , para  $s > 1$  es la siguiente:

$$w - \tau^2 w_{x\bar{x}} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} F''(\check{y})w = \tau f, \quad \text{para } s = 1, \quad (3.39)$$

donde  $f = 2y_{\bar{t}}^j - y_{\bar{t}}^{j-1}$ .

El siguiente lema permitirá obtener estimaciones para  $\varphi$  y  $w$ , además, establecer condiciones para la convergencia de la sucesión  $\varphi$ .

**Lema 3.12.** *Supóngase que (3.16) se satisface y que  $\tau$  es suficientemente pequeña. Entonces*

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|\varepsilon\varphi_x\|^2 &\leq (1 + c\tau) \left\{ \|y^j\|^2 + c\sqrt{\tau}(\|y^j\|^2 + \|\varepsilon y_{\bar{t}}^j\|^2) \right\} \\ &\quad + c \left\{ \|w\|^2 + \tau^2 \|w_x\|^2 \right\}^2, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$g(1) \leq c\tau^{3/2} \quad \text{y} \quad g(s) \leq c\tau g^2(s-1), \quad \text{para } s > 1, \quad (3.41)$$

donde

$$g(s) := \|w(s)\|^2 + \tau^2 \|w_x(s)\|^2$$

y  $c > 0$  denota una constante, la cual no depende de  $h, \tau$  y  $\varepsilon$ .

*Demostración.* Multiplicando (3.37) por  $h\varphi$ , sumando sobre  $i$ , aplicando la fórmula de integración por partes (3.10) al segundo término del lado izquierdo de dicha ecuación y dado que las derivadas de  $F$  están acotadas, se obtiene la desigualdad

$$\|\varphi\|^2 + \tau^2 \|\varphi_x\|^2 \leq \|G^j\| \|\varphi\| + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|F'(\varphi)\| \|\varphi\| + \frac{\tau^2}{2\varepsilon^2} c \|\varphi\| \|w\|_4^2.$$

Luego, aplicando la desigualdad de Young (3.5) a los tres términos del lado derecho de la ecuación previa y agrupando términos, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\|\varphi\|^2 + \tau^2 \|\varphi_x\|^2 \leq \frac{1}{2} \left\{ \|G^j\|^2 + \left(1 + 2\frac{\tau^2}{\varepsilon^2}\right) \|\varphi\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} (\|F'(\varphi)\|^2 + c\|w\|_4^4) \right\}. \quad (3.42)$$

A continuación, se obtendrá una estimación para la norma de  $G^j$ . Del sistema de ecuaciones (3.35)

$$G^j = y^j + \tau y_{\bar{t}}^j.$$

Tomando la norma en  $L^2$  en la ecuación previa y elevando al cuadrado, se obtiene la desigualdad

$$\|G^j\|^2 \leq \|y^j\|^2 + 2\|y^j\|\tau\|y_{\bar{t}}^j\| + \tau^2\|y_{\bar{t}}^j\|^2.$$

Se aplica la desigualdad de Young (3.5) al segundo término del lado derecho de la ecuación inmediata anterior, obteniendo

$$\|G^j\|^2 \leq \|y^j\|^2 + 2\left(\frac{\alpha}{2}\|y^j\|^2 + \frac{1}{2\alpha}\tau^2\|y_{\bar{t}}^j\|^2\right) + \tau^2\|y_{\bar{t}}^j\|^2,$$

y haciendo  $\alpha = \sqrt{\tau}$ , se deduce la siguiente estimación para la norma de  $G^j$ :

$$\|G^j\|^2 \leq (1 + \sqrt{\tau})\|y^j\|^2 + \tau(\sqrt{\tau} + \tau)\|y_{\bar{t}}^j\|^2. \quad (3.43)$$

Siguiendo con la demostración, a continuación se obtendrá una estimación para el último término de (3.42). De acuerdo con la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, con  $p = 4$ , se tiene que

$$\tau\|w\|_4^4 \leq c\tau\left(\|w\|^{3/4}\|w_x\|^{1/4}\right)^4 = c\left(\|w\|^{3/2}\sqrt{\tau}\|w_x\|^{1/2}\right)^2.$$

En seguida, se aplica la desigualdad de Young (3.5), con  $p = 4/3$ , a la desigualdad previa, obteniéndose la siguiente estimación

$$\tau\|w\|_4^4 \leq c\left(\|w\|^2 + \tau^2\|w_x\|^2\right)^2. \quad (3.44)$$

Para concluir con la demostración de la desigualdad (3.40), se sustituyen las estimaciones (3.43) y (3.44) en (3.42), para obtener

$$\begin{aligned} (1 - c\tau)\|\varphi\|^2 + 2\tau^2\|\varphi_x\|^2 &\leq (1 + \sqrt{\tau})\|y^j\|^2 + c(\sqrt{\tau} + \tau)\|\varepsilon y_{\bar{t}}^j\|^2 \\ &+ c\tau + c(\|w\|^2 + \tau^2\|w_x\|^2)^2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

la cual es equivalente a (3.40).

La segunda parte de la demostración, consiste en probar (3.41), para  $s = 1$  y  $s > 1$ . Primeramente, se analizará el caso  $s = 1$ . Multiplicando (3.39) por  $hw$ , sumando sobre  $i$  y aplicando la fórmula de integración por partes (3.10), se obtiene

$$\|w\|^2 + \tau^2\|w_x\|^2 \leq \tau h \sum_{i=1}^{I-1} \left| \frac{\tau}{\varepsilon^2} F''(y_i) w_i^2 - f_i w_i \right|.$$

La hipótesis (3.16), implica que también  $\tau^{1/4}/\sqrt{\varepsilon} < \text{const}$ , por consiguiente, la desigualdad inmediata anterior queda como:

$$\begin{aligned} \|w\|^2 + \tau^2\|w_x\|^2 &\leq c\tau\|w\|^2 + c\tau^{3/4}\|\sqrt{\varepsilon}y_{\bar{t}}\|\|w\| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + c\tau\right)\|w\|^2 + c\tau^{3/2}\|\sqrt{\varepsilon}y_{\bar{t}}\|^2. \end{aligned}$$

Utilizando el Lema 3.9, se obtiene la estimación (3.41).

Para finalizar con la demostración, resta por probar la desigualdad (3.41) para  $s > 1$ . De nuevo, multiplicando por  $hw$ , pero esta vez a (3.38), sumando sobre  $i$  y utilizando (3.10), se obtiene la desigualdad

$$\|w\|^2 + \tau^2 \|w_x\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} h \sum_i F''(\bar{\varphi}_i) w_i^2 = \frac{\tau^2}{2\varepsilon^2} h \sum_i F'''(\vartheta_i) \bar{w}_i^2 w_i.$$

Dado que todas las derivadas de  $F$  están acotadas por una constante, además, de acuerdo a la hipótesis (3.16), se tiene que

$$\|w\|^2 + \tau^2 \|w_x\|^2 \leq c\tau \|F''(\bar{\varphi})\| \|w\|^2 + \frac{c_1}{2} \tau \|w\| \|\bar{w}\|_4^2.$$

Aplicando la desigualdad de Young (3.5) a la ecuación previa y utilizando la estimación (3.44), se obtiene la expresión

$$\|w\|^2 + \tau^2 \|w_x\|^2 \leq c\tau (\|\bar{w}\|^2 + \tau^2 \|\bar{w}_x\|^2).$$

Por lo que si se define

$$g(s) := \|w\|^2 + \tau^2 \|w_x\|^2,$$

entonces

$$g(s) \leq c\tau g^2(s-1).$$

□

Obsérvese que al combinar las estimaciones (3.41), la sucesión  $w$  tiende a cero rápidamente, esto es

$$\begin{aligned} g(2) &\leq c\tau g^2(1) \leq c\tau^4, \\ g(3) &\leq c\tau g^2(2) \leq c\tau^9, \end{aligned}$$

así

$$g(s) \leq c\tau^{n(s)}, \quad \text{donde } n(1) = \frac{3}{2} \text{ y } n(s) - n(s+1) \geq \frac{5}{2},$$

lo cual implica que

$$\|w(1)\|^2 \leq c\tau^{3/2}, \quad \|w(2)\|^2 \leq c\tau^4, \quad \|w(3)\|^2 \leq c\tau^9, \dots$$

De acuerdo con (3.40), los términos de la sucesión  $\varphi$  están acotados uniformemente en  $s$

$$\|\varphi(s)\|^2 \leq \|y^j\|^2 (1 + O(\sqrt{\tau})). \quad (3.46)$$

Además, nótese que

$$\|\varphi(s+n) - \varphi(s)\| \leq \sum_{i=1}^n \|w(s+i)\| \leq c \sum_{i=1}^n \tau^{n(s+i)/2}.$$

Dado que  $n(s+i) - n(s+1) \geq 5 \cdot i > 2 \cdot i$  para todo  $s \geq 0$ , entonces

$$\|\varphi(s+n) - \varphi(s)\| \leq c\tau^{n(s+1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k.$$

Esto nos conduce a establecer la convergencia de  $\varphi$  cuando  $s \rightarrow \infty$ :

$$\varphi(s) \rightarrow y \quad \text{en} \quad L^2(\Omega_h). \quad (3.47)$$

**Teorema 3.13.** *Supóngase que (3.16) se satisface,  $\varepsilon = \text{const}$  y  $h = \text{const}$ . Entonces para  $\tau = \text{const}$  suficientemente pequeña, la sucesión  $\varphi$  converge, en el sentido  $L^2(\Omega_h)$ . Además,*

$$\|y^{j+1} - \varphi(2)\| \leq c\tau^{9/2},$$

donde  $c > 0$  no depende de  $h$ ,  $\tau$  y  $\varepsilon$ .

Para establecer que  $\varphi$  converge a la solución de la ecuación (3.35), probaremos su convergencia en un sentido más fuerte que (3.47).

**Lema 3.14.** *Supóngase que (3.16) se satisface y que  $\varepsilon = \text{const}$ . Entonces uniformemente en  $s$*

$$\|\varepsilon\varphi_t(s)\| \leq \text{const}, \quad \|\varepsilon\varphi_x(s)\| \leq \text{const}. \quad (3.48)$$

Además,

$$\|\varepsilon y_t^{j+1} - \varepsilon\varphi_t(s)\| \leq c\varepsilon^{p(s)}, \quad \|\varepsilon y_x^{j+1} - \varepsilon\varphi_x(s)\| \leq c\varepsilon^{p(s)} \quad (3.49)$$

para alguna  $p(s)$  la cual tiende a infinito cuando  $s \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Derivando la ecuación (3.36) con respecto a  $x$ , multiplicando el resultado por  $\varepsilon^2 h \varphi_x$ , sumando sobre  $i$  y aplicando (3.10) al segundo término del lado izquierdo, se obtiene

$$\|\varepsilon\varphi_x\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^2 \varphi_{x\bar{x}}\|^2 = -\tau^2 h \sum_i \{F'(\bar{\varphi}) + F''(\bar{\varphi})\mathbf{w}\}_x \varphi_x + \varepsilon^2 h \sum_i G_x \varphi_x. \quad (3.50)$$

Dado que

$$(F''(\bar{\varphi}_i)\mathbf{w}_i)_x = F''(\bar{\varphi}_i)\mathbf{w}_{ix} + F'''(\bar{\vartheta}_i)(\varphi_{ix} - \mathbf{w}_{ix})\mathbf{w}_{i+1},$$

entonces, (3.50) queda expresado como sigue:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\varphi_x\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^2 \varphi_{x\bar{x}}\|^2 &= -\tau^2 h \sum_i (F'(\bar{\varphi}))_x \varphi_x - \tau^2 h \sum_i F''(\bar{\varphi})\mathbf{w}_x \varphi_x \\ &\quad - \tau^2 h \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i)\varphi_x^2 \mathbf{w} + \tau^2 h \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i)\mathbf{w}_x \mathbf{w}_{i+1} \varphi_x \\ &\quad + \varepsilon^2 h \sum_i G_x \varphi_x. \end{aligned} \quad (3.51)$$

De acuerdo con (3.30) y dado que todas las derivadas de  $F$  están acotadas, entonces el primero y segundo término del lado derecho de (3.51), es como sigue:

$$\begin{aligned} \tau^2 h \left| \sum_i (F'(\bar{\varphi}))_x \varphi_x + \sum_i F''(\bar{\varphi})_{\mathbf{w}_x} \varphi_x \right| &\leq c\tau^2 \|\varphi_x\|^2 + c\tau^2 \|\mathbf{w}_x\| \|\varphi_x\| \\ &\leq c\tau^2 \|\varphi_x\|^2 + c\tau^2 (\|\varphi_x\|^2 + \|\mathbf{w}_x\|^2) \\ &\leq c\tau (\|\varepsilon\varphi_x\|^2 + \|\varepsilon\mathbf{w}_x\|^2). \end{aligned} \quad (3.52)$$

El tercer término del lado derecho de (3.51) queda de la siguiente forma:

$$\tau^2 h \left| \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i) \varphi_{ix}^2 \mathbf{w}_i \right| \leq c\tau^2 \|\varphi_x\|_4^2 \|\mathbf{w}\|.$$

Aplicando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg con  $p = 4$ ,  $r = 1$  a la expresión previa y posteriormente (3.41), se obtiene

$$\tau^2 h \left| \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i) \varphi_{ix}^2 \mathbf{w}_i \right| \leq c\tau^{11/4} \|\varphi\|^{3/4} \|\varphi\|_{(2)}^{5/4} = c \frac{\tau^{3/2}}{\varepsilon^{13/8}} \|\sqrt{\varepsilon}\varphi\|^{3/4} \|\varepsilon\tau\varphi\|_{(2)}^{5/4}.$$

Debido a la hipótesis (3.16) y aplicando la desigualdad de Young (3.5) a la ecuación inmediata anterior, se tiene que

$$\tau^2 h \left| \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i) \varphi_{ix}^2 \mathbf{w}_i \right| \leq c\tau^{11/16} \left\{ \frac{1}{p} \left( \|\sqrt{\varepsilon}\varphi\|^{3/4} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \|\varepsilon\tau\varphi\|_{(2)}^{5/4} \right)^q \right\},$$

en la cual, al considerar  $p = 8/3$  y  $q = 8/5$ , se obtiene

$$\tau^2 h \left| \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i) \varphi_{ix}^2 \mathbf{w}_i \right| \leq c\tau^{11/16} \left\{ \|\sqrt{\varepsilon}\varphi\|^2 + \|\varepsilon\tau\varphi\|_{(2)}^2 \right\}. \quad (3.53)$$

De manera similar, el cuarto término del lado derecho de (3.51) queda como sigue:

$$\tau^2 h \left| \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i)_{\mathbf{w}_{ix} \mathbf{w}_{i+1}} \varphi_{ix} \right| \leq c\tau^2 \|\mathbf{w}\| \|\varphi_x\|_4 \|\mathbf{w}_x\|_4.$$

Aplicando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg con  $p = 4$  y  $r = 1$  a la ecuación previa, utilizando (3.41) y de acuerdo a la hipótesis (3.16), se tiene que

$$\tau^2 h \left| \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i)_{\mathbf{w}_{ix} \mathbf{w}_{i+1}} \varphi_{ix} \right| \leq c\tau^{17/16} \|\sqrt{\varepsilon}\varphi\|^{3/8} \|\varepsilon\tau\varphi\|_{(2)}^{5/8} \|\varepsilon\tau\mathbf{w}\|_{(2)}^{5/8}.$$

Por último se aplica la desigualdad de Young (3.5) a la ecuación inmediata anterior y se obtiene

$$\tau^2 h \left| \sum_i F'''(\bar{\vartheta}_i) w_{ix} w_{i+1} \varphi_{ix} \right| \leq c\tau^{17/16} \left\{ \|\sqrt{\varepsilon}\varphi\| + \|\varepsilon\tau\varphi\|_{(2)}^2 + \|\varepsilon\tau w\|_{(2)}^2 \right\}. \quad (3.54)$$

Además, de acuerdo a (3.25) y (3.35) se tiene que

$$\|\varepsilon G_x\| = \|\varepsilon(2y_x^j - y_x^{j-1})\| \leq c\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.55)$$

Combinando las ecuaciones de la (3.52) a la (3.55), se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\|\varepsilon\varphi_x\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^2\varphi_{x\bar{x}}\|^2 \leq c(\sqrt{\varepsilon} + \tau^{11/16}) + c\tau \left( \|\varepsilon w_x\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^2 w_{x\bar{x}}\|^2 \right). \quad (3.56)$$

Para concluir las estimaciones, utilizaremos las ecuaciones (3.38) y (3.39). Para  $s = 1$ , obsérvese que

$$\begin{aligned} \tau^2 h \left| \sum_{i=1}^{N-1} (F''(y_i) w_i)_x w_{ix} \right| &\leq c\tau^2 (\|w_x\|^2 + \|y_x\| \|w\|_4 \|w_x\|_4) \\ &\leq c\tau (\|\varepsilon w_x\|^2 + \|\varepsilon\tau w_{x\bar{x}}\|^2) + c\tau^{13/10}. \end{aligned}$$

Además, de acuerdo con (3.26), se tiene que

$$\|\varepsilon w_x\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|\varepsilon^2 w_{x\bar{x}}\|^2 \leq c\sqrt{\tau}, \quad s = 1. \quad (3.57)$$

Para estimar  $\varepsilon w_x$  for  $s > 1$  escribimos

$$\tau^2 h \left| \sum_{i=1}^{N-1} (F'''(\bar{\vartheta}_i) \bar{w}^2)_x w_x \right| \leq \frac{1}{2} \|\varepsilon w_x\|^2 + c\tau^3 \left\{ \|\bar{w}\bar{w}_x\| + \|\bar{\varphi}_x \bar{w}^2\| \right\}^2,$$

donde  $\bar{\vartheta}_i = \alpha_i \bar{\varphi}_i + (1 - \alpha_i) \bar{\bar{\varphi}}_i$ ,  $\alpha_i \in [0, 1]$ . Además, de acuerdo a la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg

$$\tau^{3/2} \|\bar{w}\bar{w}_x\| \leq c\tau^{3/8} \left\{ \|\bar{w}\|^2 + \|\varepsilon\tau \bar{w}_{x\bar{x}}\|^2 \right\}$$

y por (3.56)

$$\tau^{3/2} \|\bar{\varphi}_x \bar{w}^2\| \leq c\tau^{3/32} \|\varepsilon\tau \bar{\varphi}\|_{(2)}^{5/8} \|\bar{w}\|^{7/4} \|\varepsilon\tau \bar{w}\|_{(2)}^{1/4} \leq c\tau^{3/32} \left\{ \|\bar{w}\|^2 + \|\varepsilon\tau \bar{w}_{x\bar{x}}\|^2 \right\}.$$

Además

$$\begin{aligned} \tau^2 h \left| \sum_{i=1}^{N-1} (F''(\bar{\varphi}_i) w_i)_x w_x \right| &\leq c\tau^2 \left\{ \|w_x\|^2 + \|\bar{\varphi}_x\| \|w\|_4 \|w_x\|_4 \right\} \\ &\leq c\tau \|\varepsilon w_x\|^2 + c\tau^{3/8} \|\varepsilon \bar{\varphi}_x\| \left\{ \|w\|^2 + \|\varepsilon\tau w_{x\bar{x}}\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta (3.41) y (3.56), y denotando

$$f(s) = \left\{ \|w\|^2 + \|\varepsilon w_x\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} (\|\varepsilon w_x\|^2 + \|\varepsilon^2 w_{x\bar{x}}\|^2) \right\} (s),$$

se obtiene la desigualdad

$$f(s) \leq c\tau^{3/8} \left\{ \varepsilon^{1/4} + \tau^{11/34} + \tau \sqrt{f(s-1)} \right\} f(s) + c\tau^{3/16} f^2(s-1). \quad (3.58)$$

Y dado que (3.57)

$$f(1) \leq c\sqrt{\tau}. \quad (3.59)$$

Por lo tanto,

$$f(s) \leq c\tau^{3/16} f^2(s-1), \quad s > 1, \quad (3.60)$$

la cual implica la convergencia de la sucesión  $\|\varepsilon\varphi_x\|(s)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Además,

$$\|\varepsilon w_x\|(s) + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varepsilon^2 w_{x\bar{x}}\|(s) \leq c_s \tau^{p(s)}, \quad s \geq 1, \quad (3.61)$$

donde  $c_s$  no depende de  $\tau$ ,  $\varepsilon$  y  $p(s) \rightarrow \infty$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . En particular,

$$p(1) = \frac{1}{4}, \quad p(2) = \frac{19}{32}, \quad p(3) = \frac{41}{32}, \quad p(4) = \frac{85}{32}.$$

La prueba la segunda parte del Lema 8, se realiza de manera similar, pero con la diferencia que es necesario derivar con respecto a  $t$ .  $\square$

Como consecuencia del lema 3.14, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.15.** *Bajo las suposiciones del teorema 3.13 y suponiendo que  $\tau$  y  $h$  son constantes. Entonces la sucesión  $\varphi(s)$  converge, en el sentido  $W_2^2(\Omega_h)$ , a la solución de la ecuación (3.35) cuando  $s \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* Las estimaciones (3.56), (3.57), (3.61) implican que si  $\tau = \text{const}$  y  $h = \text{const}$  entonces, uniformemente en  $s$ ,  $\varphi(s) \in W_2^2(\Omega_h)$  y

$$\varphi(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} y \quad \text{en } W_2^2(\Omega_h). \quad (3.62)$$

Luego, las sucesiones  $F'(\varphi(s))$  y  $F'(\varphi(s-1))w(s)$  están acotadas en  $W_2^1(\Omega_h)$  y por lo tanto

$$F'(\varphi(s)) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \phi \quad \text{en } L_2(\Omega_h) \quad (3.63)$$

y

$$F'(\varphi(s-1))w(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad \text{en } L_2(\Omega_h). \quad (3.64)$$

Además, la ecuación (3.36) y las convergencias (3.62), (3.64) implican que  $\phi = F'(y)$ . Por lo tanto,

$$\varphi(s) \longrightarrow y = y^{j+1} \quad \text{en } W_2^2(\Omega_h)$$

$\square$

Ahora podemos considerar el paso al límite con  $\tau, h \rightarrow 0$  para el esquema (3.35).

**Teorema 3.16.** *Supóngase que (3.16) se satisface y  $\varepsilon = \text{const}$ . Entonces la solución del esquema de diferencias finitas, descrito anteriormente, converge a la solución del problema (3.3) cuando  $\tau, h \rightarrow 0$  en el sentido  $W_2^1(Q_T)$ .*

*Demostración.* Vamos a identificar las sucesiones  $y_{\tau,h}(t_j, x_i)$  de los argumentos discretos con sus interpolaciones  $\phi_{\tau,h}(t, x)$ .

Segun los lemas 3.8, 3.9 y 3.10,  $\phi_{\tau,h} \in W_2^2(Q_T)$  uniformemente en  $\tau, h$  y  $j \leq T/\tau$ ,  $T = \text{const}$ . Como la inclusion  $W_2^2(Q_T) \subset W_2^1(Q_T)$  es compacta, podemos elegir una subsucesión  $\phi_{\tau',h'}(t, x)$  tal que

$$\phi_{\tau',h'}(t, x) \longrightarrow u(t, x) \quad \text{en } W_2^1(Q_T). \quad (3.65)$$

Es claro que las derivadas  $\partial^2 \phi_{\tau',h'}/\partial t^2$  y  $\partial^2 \phi_{\tau',h'}/\partial x^2$  convergen, en el sentido debil, a las derivadas de  $u(\phi, x)$ .

Luego,  $F'(\phi_{\tau',h'})$  es acotado en  $W_2^2(Q_T)$ , de donde, particularmente

$$F'(\phi_{\tau',h'}) \longrightarrow \mathcal{W} \quad \text{débilmente en } L^2(Q_T).$$

Pero (3.65) implica que  $\phi_{\tau',h'} \rightarrow u$  casi en todo punto. Lo mismo se verifica para  $F'(\phi_{\tau',h'})$ . Ahora aplicamos el lema siguiente

**Lema 3.17.** *(Lions) Sea  $Q_T \subset \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t$  un dominio acotado. Supóngase que  $g_\mu$  y  $g$  son funciones de  $L^q(Q_T)$ ,  $1 < q < \infty$ , tales que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(Q_T)} \leq c, \quad g_\mu \rightarrow g \quad \text{casi en todo punto de } Q_T.$$

*Entonces  $g_\mu \rightarrow g$  débilmente en  $L^q(Q_T)$ .*

Definiendo  $g_\mu = F'(\phi_{\tau',h'})$ ,  $g = F'(u)$  y  $q = 2$ , obtenemos que

$$\mathcal{W} = F'(u).$$

□

### 3.5. Algoritmo para la simulación numérica

Dado que la precisión  $O(\tau^{9/2})$  es mucho menor que la precisión del esquema de diferencias finitas (3.14), obtenemos el siguiente algoritmo para la simulación numérica de la solución del problema (3.3):

Para cualquier  $j = 1, 2, \dots, [T/\tau]$ , fijo y  $\tau = \text{const}$ ,

1: Defina  $\varphi(0) := y^j$ ,

- 2: Calcule  $\varphi(s)$ ,  $s = 1, 2$ , de acuerdo con (3.36),  
 3: Defina  $y^{j+1} := \varphi(2)$ , redefina  $j := j + 1$  y regresar a 1.

Sugún el teorema 3.16, este algoritmo permite calcular la solución numérica del problema (3.3), acotada en  $W_2^1(Q_{T,h,\tau})$ .

Finalmente, dado que la sucesión  $\varphi^j(s)$ ,  $s = 1, 2, j = 2, 3, \dots$ , es acotada, podemos establecer el último teorema del presente trabajo:

**Teorema 3.18.** *Bajo las suposiciones del teorema 3.16 el esquema de diferencias finitas descrito anteriormente es estable en el sentido  $W_2^1(\Omega_{T,\tau,h})$ .*

*Demostración.* En virtud del lema 3.9 es suficiente con probar la estabilidad de  $\varphi(s)$  para  $s = 1, 2$ . Para este propósito considerar la ecuación de recurrencia

$$\begin{aligned} & \Phi(s) - \tau^2 \Phi(s)_{x\bar{x}} + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left\{ F'(\varphi(s-1) + \Phi(s-1)) - F'(\varphi(s-1)) \right. \\ & \quad + F''(\varphi(s-1) + \Phi(s-1))(\varphi(s) + \Phi(s) - \varphi(s-1) - \Phi(s-1)) \\ & \quad \left. - F''(\varphi(s-1))(\varphi(s) - \varphi(s-1)) \right\} = \tilde{G}, \quad s = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.66)$$

para la diferencia  $\Phi(s) = \varphi_1(s) - \varphi_2(s)$  de parejas  $\varphi_i(s)$ ,  $s = 0, 1, 2$ . Suponiendo que

$$\|\Phi(0)\|^2 + \|\varepsilon \Phi_x(0)\|^2 + \|\varepsilon \Phi_t(0)\|^2 \leq \mu^{k_3}, \quad (3.67)$$

$$\|\tilde{G}\|^2 + \|\varepsilon \tilde{G}_x\|^2 + \|\varepsilon \tilde{G}_t\|^2 \leq \mu^{k_3}. \quad (3.68)$$

Multiplicando la ecuación (3.66) por  $\Phi(s)$  y dado que  $F^{(k)}$  es acotada, se obtiene la desigualdad

$$\begin{aligned} \|\Phi(s)\|^2 + \tau^2 \|\Phi_x(s)\|^2 & \leq \left( \frac{1}{4} + c \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \right) \|\Phi(s)\|^2 + \mu^{k_3} \\ & \quad + c \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \left( \|\Phi(s)\|_3^3 + \|\Phi(s)\|_4^2 \|\Phi(s-1)\| + \|\Phi(s-1)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

La desigualdad de Gagliardo - Nirenberg y la suposición (3.16), implican que

$$\frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|\Phi(s)\|_3^3 \leq c \tau^{1/4} \varepsilon^{1/2} \|\Phi(s)\| \left( \|\Phi(s)\|^2 + \tau^2 \|\Phi_x(s)\|^2 \right), \quad (3.70)$$

y

$$\frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \|\Phi(s)\|_4^2 \leq c \tau^{1/4} \varepsilon^{1/2} \|\Phi(s)\| \|\Phi(s)\|^{1/2} (\tau \|\Phi_x(s)\|)^{1/2}. \quad (3.71)$$

En virtud de (3.46),  $\|\Phi(s)\|$  esta acotada uniformemente en  $s$ ,  $\|\Phi(s)\| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$ . Por lo tanto, combinando (3.69)-(3.71) se obtiene la desigualdad

$$\|\Phi(s)\|^2 + \tau^2 \|\Phi_x(s)\|^2 \leq c \sqrt{\tau} \left( \|\Phi(s-1)\|^2 + \tau^2 \|\Phi_x(s-1)\|^2 \right) + \mu^{k_3}.$$

Y por (3.67)

$$\|\Phi(s)\|^2 + \tau^2 \|\Phi_x(s)\|^2 \leq (1 + c\sqrt{\tau})^2 \mu^{k_3}. \quad (3.72)$$

Repitiendo de manera similar para las derivadas  $\varepsilon\Phi_x(s)$ ,  $\varepsilon\Phi_t(s)$ , y tomando en cuenta el Lema 3.12 completamos la demostración.  $\square$

### 3.6. Resultados de la simulación numérica

El algoritmo numérico fue realizado como un programa en lenguaje C, el cual primeramente se probó usando la ecuación de sine-Gordon en los casos de uno, dos y tres ondas solitarias. Después, fue utilizado para analizar la interacción de ondas, que se detallan en los ejemplos 1 y 2.

#### Ejemplo 1

Aplicamos el algoritmo descrito anteriormente a la ecuación (3.1) para

$$F(u) = \text{sen}^4(\pi u). \quad (3.73)$$

Para este caso, la solución tipo kink puede ser encontrada explícitamente, esto es,

$$\omega(\eta) = \frac{1}{\pi} \text{arccot}(-\sqrt{2}\pi\eta). \quad (3.74)$$

Para la interacción tipo kink-kink consideramos el problema mixto (3.3) con  $\varepsilon = 0.1$  sobre el intervalo espacial  $[0.5, 2]$ . El primer kink (el de la izquierda) está especificado por  $\beta_1 = 15$  y se mueve a la derecha con una velocidad  $V_1 = \sqrt{1 - (1/15)^2} \approx 0.99778$ . El segundo kink (el de la derecha) está especificado por  $\beta_2 = 20$  y se mueve a la izquierda con una velocidad  $V_2 = -\sqrt{1 - (1/20)^2} \approx -0.99875$ . Las posiciones iniciales de los frentes son  $x_1^0 = 1$  y  $x_2^0 = 1.5$ . Todos los cálculos fueron hechos para la malla especificada por los parámetros  $h = 7.5 \cdot 10^{-5}$  y  $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$ . La razón de elegir este tamaño de  $h$  y  $\tau$  fue debido a que se observó que el kink individual de la ecuación de sine-Gordon varía sobre  $[0, h]$  como  $\exp(\beta_2 h/\varepsilon) = \exp(200h)$ . Es decir, con esta  $h$  implica una variación de  $\exp(1.5 \cdot 10^{-2})$ . Este rango podría ser demasiado pequeño para el movimiento del kink, pero es adecuado para el proceso de interacción. Por el mismo argumento elegimos  $\tau \approx h/4$ .

El resultado de la simulación numérica se representa en la Figura 3.1. Podemos observar que las ondas solitarias preservan la forma tipo kink durante todo el tiempo, excepto en una pequeña vecindad del instante de tiempo de la interacción. Finalmente, podemos observar que la condición de E) se satisface para la no linealidad (3.73) para cualquier valor de  $V_1$  y  $V_2$ .

Para el problema de interacción kink-antikink, se puede probar que la condición E1) no se cumple para la no linealidad (3.73) para cualesquiera velocidades  $V_1, V_2$ . Sin

embargo, nuestra hipótesis de que E1) es excesivamente restrictiva, se verifica para algunos pares de parámetros  $V_1, V_2$ . La gráfica en la Figura 3.2. muestra la evolución del par kink-antikink con los mismos parámetros mencionados anteriormente. De nuevo, la onda solitaria preserva su forma durante todo el tiempo, excepto en una vecindad del instante de tiempo  $t^* = 0.5/(V_1 - V_2)$  de la interacción. De hecho, las ondas pierden la forma kink para  $t \approx 0.25$  y regresa de nuevo en  $t \approx 0.26$  (ver Figura 3.3).

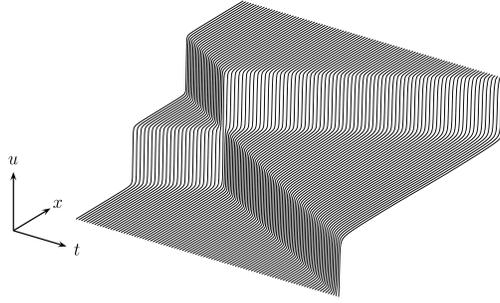


Figura 3.1: Evolución del par kink-kink.

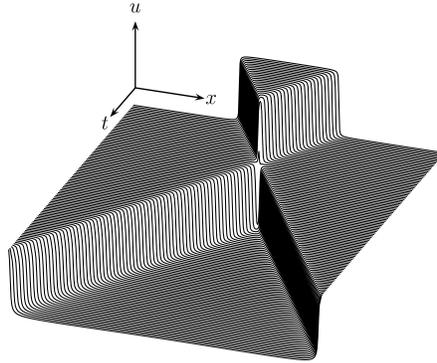


Figura 3.2: Evolución del par kink-antikink.

### Ejemplo 2

Se aplicó el mismo algoritmo a la ecuación (3.1), pero ahora con la no linealidad

$$F(u) = \frac{1}{4\pi^2} \{2 - \cos(2\pi u) - \cos(4\pi u)\}. \quad (3.75)$$

Para tal ecuación, la solución no posee una representación como combinación de

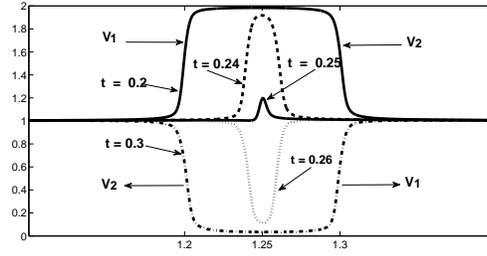


Figura 3.3: Evolución del par kink-antikink para algunos valores de tiempo.

funciones elementales. Por esta razón, primeramente se resolvió numéricamente el problema de Cauchy

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \sqrt{2F(\omega)}, \quad \eta > 0, \quad \omega|_{\eta=0} = \frac{1}{2} \quad (3.76)$$

y que de acuerdo a la condición C), definimos  $\omega$  con argumento negativo como  $\omega(\eta) = 1 - \omega(-\eta)$ . Para calcular la solución de (3.76) se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un tamaño de paso  $h_\eta = 0.01$ . Posteriormente, se aplicó el algoritmo numérico, utilizando los mismos valores de tamaño de paso,  $h, \tau$  para los pares kink-kink y kink-antikink, donde, numéricamente, los resultados de los cálculos muestran muy poca diferencia entre las no linealidades (3.73) y (3.75). Sin embargo, a simple vista sus gráficas son prácticamente idénticas, por lo que podemos referirnos nuevamente a las Figuras 3.1 - 3.3.



## Capítulo 4

### Conclusiones

Resumiendo todo lo escrito anteriormente, podemos concluir que existe una clase de no linealidades, tales que, los pares kink-kink y kink-antikink preservan el escenario de interacción sine-Gordon, al menos en el término principal en el sentido asintótico. Aparentemente, esta clase puede ser especificada por las suposiciones A) - C).

Para el caso de interacción multi-onda, la situación es más complicada y mucho más interesante. De acuerdo con la hipótesis [7] de que existen muchas ecuaciones con el escenario de interacción sine-Gordon de dos ondas solitarias, pero tres ondas pueden interactuar de la misma manera únicamente para ecuaciones completamente integrables. Ante esto, esperábamos que dos kinks y un antikink perdieran la estructura después de la triple interacción. Esto fue realizado y la gráfica de la Figura 4.1 muestra la evolución de tal solución para la no linealidad (3.73). Las posiciones iniciales y las velocidades de las ondas solitarias son las siguientes:  $x_1^0 = 0.5$ ,  $V_1 = 0.99999$ ,  $x_2^0 = 1$ ,  $V_2 = 0.15$ ,  $x_3^0 = 1.5$ ,  $V_3 = -0.69999$ . El primer fenómeno inesperado apareció cuando comprobamos las interacciones acopladas de las mismas ondas (trayectorias que se intersectan por pares). Resulta que la estructura se deforma después de la segunda interacción (ver Figura 4.2). Dado que los pares de las mismas ondas interactúan preservando la estructura, este resultado parece ser muy extraño y que aún no ha sido explicado.

Por otra parte, resultó que tres kinks interactúan de acuerdo al escenario sine-Gordon. Obsérvese que las gráficas en Figura 4.3 y Figura 4.4 las cuales muestran la evolución de los kinks con los parámetros  $x_1^0 = 0.5$ ,  $V_1 = 0.99999$ ,  $x_2^0 = 1$ ,  $V_2 = 0.15$ ,  $x_3^0 = 1.5$ ,  $V_3 = -0.69999$ .

Por lo que es claro que el problema de interacción multi-onda para la ecuación tipo sine-Gordon debe ser investigado más en detalle.

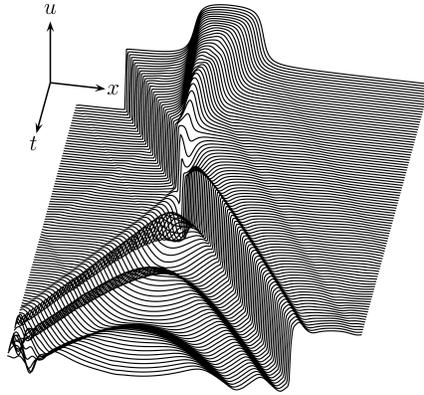


Figura 4.1: Evolución de la tripleta kink-kink-antikink.

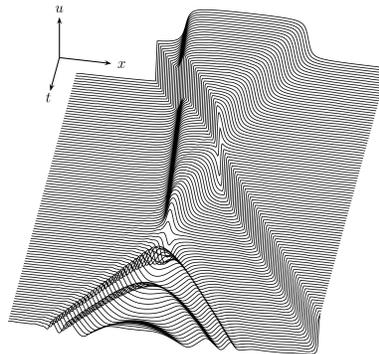


Figura 4.2: Evolución de los pares kink-kink y kink-antikink

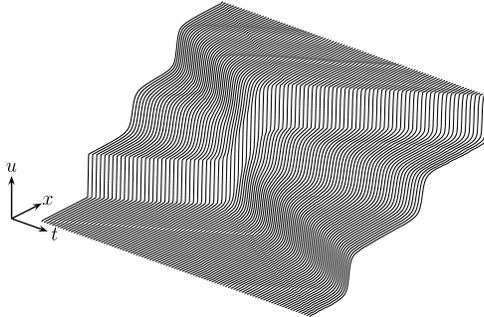


Figura 4.3: Evolución de la tripleta kink-kink-kink

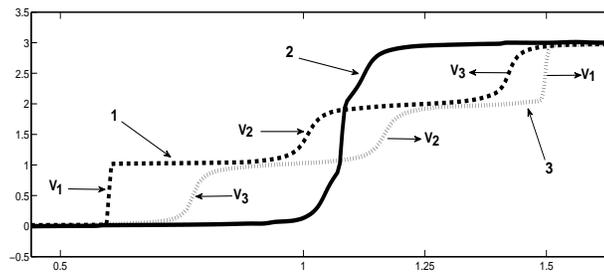


Figura 4.4: Descripción de la evolución antes (curva 1), después (curva 3) y en el instante de tiempo de la interacción (curva 2)



## Bibliografía



## Bibliografía

- [1] Ablowitz M. J.; Segur H.; Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM Studies in Applied Mathematics 4, Philadelphia, 1981.
- [2] Adams, R. A.; *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [3] Atkinson, K; Han, W.; *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*, (Texts in Applied Mathematics 39), Springer, 2001.
- [4] Danilov, V. G.; Omel'yanov, G. A.; Weak asymptotics method and the interaction of infinitely narrow delta-solitons. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2003, **54**, 773–799.
- [5] Danilov, V. G.; Omel'yanov, G. A.; Shelkovich, V. M.; Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves. In: *Asymptotic methods for wave and quantum problems* (M. V. Karasev ed.), AMS Trans., Ser. 2, v. 208, AMS, Providence, RI, 2003, 33–164.
- [6] Danilov, V. G.; Shelkovich, V. M.; Generalized solutions of nonlinear differential equations and the Maslov algebras of distributions. *Integral Transformations and Special Functions*, 1997, **6**, 137–146.
- [7] Danilov, V.; Subochev, P.; Wave solutions of semilinear parabolic equations. *Theoret. and Math.Phys.*, 1991, **89**, no.1, 1029–1046.
- [8] García, M. G.; Flores-Espinoza, R.; Omel'yanov, G. A.; *Interaction of Shock Waves in Gas Dynamics. Uniform in Time Asymptotics*, International Journal of Math. and Mathematical Sci, 2005, 2005: 19, 3111–3126.
- [9] García, M. G.; Flores-Espinoza, R.; Omel'yanov, G. A.; *Differential Equations of Mathematical Physics: Theory and Numerical Simulations*, Colección de Textos Académicos no. 25, Universidad de Sonora.
- [10] Garcia, M. G.; Omel'yanov, G. A.; Kink-antikink interaction for semilinear wave equations with a small parameter, *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2009, **2009**, no. 45, pp. 1–26.
- [11] García, M. G.; Omel'yanov, G. A.; Segundo, I.; Solución Numérica de algunas ecuaciones no integrables, II Interactive Meeting of Applied Mathematics, II EIM 2009, <http://www.izt.uam.mx/2eima/abstracts/martin-garcia.pdf>.

- [12] Gardner C. S.; Green J. M.; Kruskal M. D.; Miura R.M.; Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys.Rev.Lett.*, 19 (1967) 1095–1097.
- [13] Karle, Ch.; Schweitzer, J.; Hochbruck, M.; Laedke, E.W.; Spatschek, K.H.; Numerical solution of nonlinear wave equations in stratified dispersive media, *Journal of Computational Physics* 216 (2006) 138152.
- [14] Kulagin, D. A.; Omel'yanov, G. A.; Interaction of kinks for semilinear wave equations with a small parameter. *Nonlinear Analysis*, 2006, **65**, no. 2, 347–378.
- [15] Ladyzhenskaya, O. A.; Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1973; English transl., The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [16] Lions, J. L.; Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod, Paris, 1969.
- [17] Maslov, V. P.; Omel'yanov, G. A.; Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1981, **36**, no.3, 63–126; English transl., *Russian Math. Surveys*, 1981, **36**, no.3, 73–149.
- [18] Maslov, V. P.; Omel'yanov, G. A.; *Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE, I*. AMS, MMONO 202, Providence, RI, 2001.
- [19] Omel'yanov, G. A.; Segundo-Caballero, I.; Asymptotic and Numerical Description of the Kink/Antikink Interaction, *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2010, **2010**, no. 150, pp. 1–19.
- [20] Scott, A.; Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics, J. Wiley, 1970.
- [21] Segundo, I.; Omel'yanov, G.A.; Descripción numérica de la interacción de ondas solitarias para la ecuación tipo sine-Gordon Número 24, XXI ENOAN 2011; <http://www.enoan.org/enoan2011/images/Enona2011/programacompleto.pdf>.
- [22] Strikwerda, J. C.; *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, University of Wisconsin–Madison, 1989.
- [23] Zakharov, V. E.; Takhtadjan, L. A.; Faddeev L. D.; Complete description of solutions of the 'sine-Gordon' equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1974, **219**, 1334–1337; English transl., *Soviet Phys. Dokl.*, 1974, **19**, 824–826.
- [24] Zhiber, A. V.; Sokolov V. V.; Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type, *Uspekhi Mat. Nauk*, 2001, **56**, no.1, 63–104; English transl., *Russian Math. Surveys*, 2001, **56**, no.1, 61–101.

- [25] G. B. Whitham; *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York-London-Toronto, 1974.

