



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**LA NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD EN SECUNDARIA:
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ACTIVIDADES
DIDÁCTICAS CON BASE EN EL MÉTODO ACODESA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

PRESENTA:

L. E. S. MARÍA FERNANDA MARTÍNEZ TORRES

DIRECTORA:

DRA. MARÍA TERESA DÁVILA ARAIZA

Hermosillo, Sonora

noviembre de 2021

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LA NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD EN SECUNDARIA: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS CON BASE EN EL MÉTODO ACODESA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

PRESENTA:

L. E. S. MARÍA FERNANDA MARTÍNEZ TORRES

DIRECTORA:

DRA. MARÍA TERESA DÁVILA ARAIZA

MIEMBROS DEL JURADO:

DR. AGUSTÍN GRIJALVA MONTEVERDE

DR. RAMIRO ÁVILA GODOY

DRA. SAMANTHA ANALUZ QUIROZ RIVERA

DRA. MARÍA TERESA DÁVILA ARAIZA

Hermosillo, Sonora. 19 de noviembre del 2021.

Asunto: Cesión de derechos

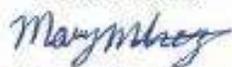
Universidad de Sonora
Presente

Por este conducto hago constar que soy autor y titular de la obra denominada La noción de proporcionalidad en Secundaria: diseño e implementación de actividades didácticas con base en el método ACDESA, en los sucesivos LA OBRA, realizada como trabajo terminal con el propósito de obtener el Grado de Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, en virtud de lo cual autorizo a la Universidad de Sonora (UNISON) para que efectúe la divulgación, publicación, comunicación pública, distribución pública, distribución electrónica y reproducción, así como la digitalización de la misma, con fines académicos o propios de la institución y se integre a los repositorios de la universidad, estatales, regionales, nacionales e internacionales.

La UNISON se compromete a respetar en todo momento mi autoría y a otorgarme el crédito correspondiente en todas las actividades mencionadas anteriormente.

De la misma manera, manifiesto que el contenido académico, literario, la edición y en general cualquier parte de LA OBRA son de mi entera responsabilidad, por lo que deslindo a la UNISON por cualquier violación a los derechos de autor y/o propiedad intelectual y/o cualquier responsabilidad relacionada con la OBRA que cometa el suscrito frente a terceros.

Atentamente



María Fernanda Martínez Torres

Nombre y firma del autor



LIC. GILBERTO LEÓN LEÓN
Abogado General
UNIVERSIDAD DE SONORA

Dedicatoria

Con toda mi admiración, respeto y cariño mi tesis la dedico a mis padres, pues este logro es tan mío como suyo porque sin su apoyo yo no habría llegado a culminar este proyecto al que, por más de dos años, le he invertido mi tiempo y mi esfuerzo.

La dedico a mis hermanos quienes siempre han creído en mí y en que puedo lograr lo que me propongo. Espero que mis esfuerzos y triunfos sean para ellos una inspiración.

La dedico a mi novio y futuro esposo que, aunque a la distancia, siempre estuvo ahí para mí.

Agradecimientos

Agradezco especialmente a mi directora de tesis, la Dra. María Teresa Dávila, por su incondicional apoyo a lo largo de mi paso por la maestría, por ser la mejor directora que me pudo haber tocado, por su comprensión y disposición en todo momento. Mil gracias.

A los miembros del jurado el Dr. Agustín Grijalva, el Dr. Ramiro Ávila y la Dra. Samantha Quiroz, gracias por su disposición para leer mi trabajo, gracias por sus comentarios para enriquecerlo y gracias por acompañarme en la recta final de este proyecto.

Agradezco a todos mis maestros a lo largo de los cuatro semestres de la maestría, por su dedicación en sus clases, por su interés en abonar en mi formación, por su apoyo y comprensión. Muchas gracias.

Agradezco a mi familia, mis padres, mis hermanos y a mi novio por brindarme su apoyo incondicional, sus palabras de aliento y consuelo cuando sentía que me venía abajo.

A mi amiga Alejandra, quien, a su manera, siempre supo como darme ese empujoncito que me incitaba a esforzarme un poco más. Gracias, amiga.

Por último, le agradezco a todas esas personas que en algún momento me dijeron que trabajar y estudiar una maestría era algo muy difícil, que lo pensara mejor y me decidiera por una cosa. De verdad gracias porque cada una de las veces que escuchaba eso me motivaba más y más para dar mi mayor esfuerzo y culminar este proyecto.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
I. ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA	3
1.1 Antecedentes.....	3
1.1.1 Dificultades de los estudiantes	3
1.1.2 Dificultades de los profesores	8
1.2 La noción de proporcionalidad	10
1.2.1 Razonamiento proporcional y proporcionalidad	10
1.2.3 Algunos tipos de problemas de proporcionalidad directa	12
1.2.3.1 Valor faltante	12
1.2.3.2 Comparación de razones.....	12
1.2.3.4 Determinar si hay proporcionalidad	13
1.2.3.5 Relaciones de proporcionalidad entre magnitudes no lineales	14
1.2.4 Algunas técnicas recurrentes en el estudio de la proporcionalidad	14
1.2.4.1 El cálculo del valor unitario.....	15
1.2.4.2 La regla de tres	15
1.3 La proporcionalidad en la educación básica en México	16
1.3.1 El currículo de educación básica	16
1.3.2 Revisión de un libro de texto de secundaria	23
1.4 Problemática, justificación y objetivos.....	26
II. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO	31
2.1 Ejercicio, problema y situación problema	31
2.2 Representaciones y Visualización	32

2.3 Cinco etapas de la metodología ACODESA	34
2.4 Situaciones de investigación.....	36
2.5 Aspectos metodológicos	37
2.5.1 Fase 1. Análisis preliminar	37
2.5.2 Fase 2. Diseño de la situación de investigación	38
2.5.3 Fase 3. Implementación de la situación de investigación.....	40
2.5.4 Fase 4. Análisis y valoración.....	41

III. DISEÑO DIDÁCTICO Y ELEMENTOS TEÓRICOS QUE LO SUTENTAN 43

3.1 Etapa 1. Trabajo individual	44
3.2 Etapa 2. Trabajo en equipo.....	46
3.3 Etapa 3. Discusión grupal.....	52
3.4 Etapa 4. Autorreflexión	53
3.5 Etapa 5. Institucionalización	55

IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LA PUESTA EN ESCENA 57

4.1 Consideraciones metodológicas de la puesta en escena	57
4.2 Estructura del análisis de los datos	59
4.3 Etapa 1. Trabajo individual	61
4.4 Etapa 2. Trabajo en equipo.....	67
4.4.1 Trabajo en equipo parte 1 (sin uso del applet)	68
4.4.2 Trabajo en equipo parte 2 (uso del applet)	87
4.5 Etapa 3. Discusión grupal.....	102
4.6 Etapa 4. Autorreflexión	107
4.7 Etapa 5. Institucionalización	113

CONCLUSIONES	119
Logro de los objetivos	119
Implementación de las actividades.....	123
Dificultades de los estudiantes	125
La metodología ACODESA (desde la perspectiva docente).....	126
Nuevas líneas de trabajo	127
REFERENCIAS	129
ANEXOS	133
Anexo 1. Protocolo de observación.....	133
Anexo 2. Hojas de trabajo implementadas con los estudiantes.....	135
Anexo 3. Hoja de trabajo con anotaciones para el profesor	147
Anexo 4. Hojas de trabajo rediseñadas (con anotaciones para el profesor)	159

INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en cualquier nivel educativo, son motivo de diversas investigaciones por las problemáticas que giran en torno a estos dos procesos.

Existen trabajos que abordan problemáticas de las diferentes ramas, temas y/o contenidos de la matemática. En este caso se desarrolla un trabajo en el área de la aritmética y el álgebra con el tema de proporcionalidad. La elección de la temática surge en un primer momento por experiencias personales en el campo de la docencia en nivel secundaria en la asignatura de matemáticas. Se observó que los alumnos de tercer grado presentaban dificultades a la hora de resolver problemas de proporcionalidad, y también que utilizaban indiscriminadamente la regla de tres sin poner atención al tipo de proporcionalidad de la que se trataba. Presentaban estas dificultades aun cuando el tema ya había sido abordado desde 5° de primaria.

Al consultar algunos artículos de investigación, de Matemática Educativa, se hace más firme el hecho de que existen dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad. Además, esta problemática no es propia de algún nivel educativo, sino que es un problema que afecta a la educación matemática de manera transversal.

Si bien los problemas para la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad se dan en diferentes niveles educativos, para este trabajo se busca intervenir en el nivel secundaria, específicamente en primer grado, pues es en donde se estudia por primera vez la proporcionalidad en este nivel educativo, es decir, que es en este grado en donde se construyen las bases del tema para los grados posteriores.

Para atender la problemática en torno a la proporcionalidad, el presente trabajo tiene como objetivo el diseño e implementación de actividades didácticas, basadas en el método ACODESA (Hitt y Quiroz, 2017) para el tratamiento de la proporcionalidad en primer grado de secundaria.

La implementación de las actividades diseñadas se llevó a cabo en una Escuela Secundaria con alumnos de primer grado con la modalidad en línea mediante la plataforma de zoom.

El trabajo está compuesto de cuatro apartados, en el primero se presentan los antecedentes, trabajos de investigación de los que se retomaron algunos elementos como: dificultades de estudiantes, diseño de actividades, etc. para la construcción del presente. Además, se incluyen elementos matemáticos que forman parte del trabajo con la noción de proporcionalidad a nivel secundaria. Para identificar la importancia y ubicación del tema en la educación básica, se describen los propósitos y aprendizajes esperados determinados por el currículo. Por último, se presenta la problemática sustentada con las diferentes investigaciones consultadas y la información de planes y programas de Educación básica, así como los objetivos de la tesis.

El marco teórico y metodológico se abordan en el segundo apartado de la tesis, ahí se presentan los elementos teóricos que sustentan el diseño de las actividades didácticas y la metodología con la cual se llevó a cabo la implementación. Además, se describen las fases y las acciones metodológicas llevadas a cabo en la realización la presente tesis de maestría.

En el apartado tres se describe el diseño de las actividades resaltando los elementos teóricos y metodológicos considerados para elaborar cada una de las partes del diseño. Posteriormente, en el cuarto apartado, se presenta el análisis de los resultados obtenidos de la implementación de las actividades con alumnos de primer grado de secundaria. En este se incluyen las consideraciones metodológicas de la puesta en escena.

Por último, se presentan las conclusiones del trabajo donde se describe el alcance de los objetivos, las dificultades enfrentadas en la implementación de las actividades, las mejoras que se podrían realizar al diseño y nuevas oportunidades de investigación y/o intervención.

I. ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

En este apartado se describe la problemática a abordar, discutiendo algunos antecedentes que permiten identificar las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del tema. También, se presenta la ubicación curricular de la proporcionalidad con la finalidad de mostrar la importancia del tema, los contenidos y aprendizajes que se espera que los alumnos desarrollen, así como algunos conceptos y técnicas importantes en el estudio de la proporcionalidad. Por último, se enuncian los objetivos que guían y delimitan el presente trabajo.

1.1 Antecedentes

En este apartado se recogen los resultados de diversos estudios con la finalidad de identificar la problemática en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad.

Esta búsqueda, revisión y análisis de estudios se llevó a cabo con la finalidad de obtener un panorama sobre lo ya estudiado con relación a la proporcionalidad como las dificultades de alumnos y profesores. Además, las dificultades y formas de trabajar con la proporcionalidad estudiadas y reportadas por los diversos autores fueron un apoyo para la construcción de la propuesta de intervención presentada en esta tesis.

1.1.1 Dificultades de los estudiantes

En este espacio se presentan las dificultades que los estudiantes enfrentan al trabajar en la resolución de problemas que involucran la noción de proporcionalidad reportadas en distintas investigaciones, así como dificultades de los profesores de matemáticas.

Diferentes investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad han reportado ampliamente una falta de comprensión de esta noción, manifestada, por ejemplo, en el uso incorrecto de técnicas y procedimientos al resolver problemas de proporcionalidad, como el uso de procedimientos aditivos en problemas de proporcionalidad, y el empleo de la regla de tres y del cálculo del valor unitario sin reflexión alguna acerca del porqué de cada operación matemática. Estas limitaciones y/o dificultades en torno al estudio de la proporcionalidad se presentan en diferentes niveles educativos, tanto en estudiantes

como en profesores, lo cual sugiere que lograr la comprensión del concepto de proporcionalidad es algo bastante complejo. A continuación, se describen algunos de estos trabajos y las dificultades que reportan.

En el trabajo de Fernández y Linares (2012) se clasificó alumnos de primaria y secundaria en diferentes perfiles de comportamiento al trabajar con diversos problemas de proporcionalidad, de acuerdo con la forma en la que los resolvieron, los aciertos, los errores y procedimientos realizados.

Para delimitar los perfiles, los autores consideran dificultades presentadas con la noción de proporcionalidad, como: diferenciar situaciones proporcionales de situaciones con estructura aditiva, usar excesivamente métodos aditivos erróneos para resolver las situaciones proporcionales y emplear constantemente métodos multiplicativos erróneos para resolver situaciones con estructura aditiva.

Fernández y Linares (2012) también reportan dificultades con la proporcionalidad ligadas al concepto de razón, particularmente cuando las cantidades involucradas no son enteras o el factor de la relación entre ellas no es un número entero, lo cual favorece que recurran al uso de estrategias aditivas.

Por otro lado, Cortés y Cruz (2018) retoman y adaptan algunas actividades de Oller (2012) para trabajar la proporcionalidad sin acudir a la regla de tres. En sus resultados, los autores reportan diversas dificultades y errores cometidos por los estudiantes. Por ejemplo: cometen errores en los que es evidente la no asimilación de las estrategias multiplicativas relacionadas con el concepto de razón. En la Figura 1, extraída del trabajo de Cortés y Cruz (2018), se observa como un alumno utiliza de manera errónea la estrategia aditiva para solucionar un problema de proporcionalidad en el que el cálculo de la razón pudo ser utilizado para solucionarlo. Es importante destacar cómo el estudiante únicamente considera una magnitud para dar su respuesta.

Ejercicio 2:
 El futbolista N ha marcado 18 goles en los 22 partidos que ha jugado; mientras que el futbolista P ha marcado 25 goles en los 38 partidos jugados, ¿qué futbolista ofrece mayor rendimiento goleador?

$$\frac{22}{-18} = \frac{4}{1} \text{ - sin marcar}$$

$$\frac{38}{-25} = \frac{13}{1} \text{ - sin marcar}$$

= Jugador N es más goleador

Figura 1. No asimilación de la razón. Fuente: Cortés y Cruz (2018)

Cortés y Cruz (2018) reportan errores en el uso de la razón de una manera arbitraria, así como el uso inadecuado de la misma y también se encontraron con errores que son causados por el razonamiento aditivo. Un ejemplo es el que se muestra en la Figura 2, donde el alumno utiliza la razón, pero al mismo tiempo mezcla con procedimientos aditivos para determinar cuál tienda es más rentable.

Ejercicio 6:
 En una tienda, si compras 3 discos, te regalan 4 camisetas, y en otra tienda te regalan 5 camisetas al comprar 4 discos, ¿en qué tienda es más rentable comprar?

$\frac{3}{1}$ A	depende si quieres más camisetas o más discos	$\frac{4}{1}$ B
	P// (B) 5-cm 4-ds	

Figura 2. Uso inadecuado de la razón. Fuente: Cortés y Cruz (2018)

Por último, Cortés y Cruz (2018) encontraron con alumnos que muestran una débil comprensión de la situación de porcentajes y la comprensión de razones. En la Figura 3 es posible observar las respuestas de una estudiante que solo utiliza los datos del problema para dar solución a los cuestionamientos, no utiliza el cálculo de porcentajes ni considera que los árboles mencionados en el problema son solo una parte del total, del 100%.

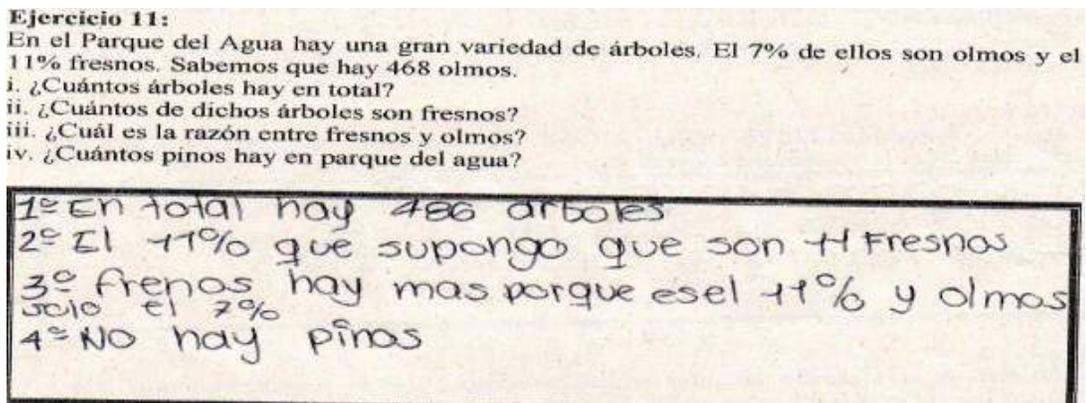


Figura 3. Porcentajes y razón. Fuente: Cortés y Cruz (2018)

En el análisis de sus datos, los autores Cortés y Cruz (2018) mencionan que es necesario incrementar la comprensión de los alumnos en tres campos fundamentales: “1) El uso significativo de las estructuras multiplicativas, 2) La comprensión de los aspectos conceptuales relacionados con la proporcionalidad y 3) La aplicación de dichos aspectos a la hora de resolver situaciones problema relacionadas con la proporcionalidad” (p.45).

En la investigación de Gómez y García (2014) se plantean tareas de comparación de razones desiguales en el contexto de las ofertas comerciales a estudiantes de bachillerato, estudiantes para profesor y estudiantes de máster para profesor de secundaria. Los autores reportan que los estudiantes de los diferentes niveles educativos tienen una predisposición a usar la regla de tres al abordar tareas que involucran la noción de proporción. De manera similar, los estudiantes tienden a calcular el valor unitario en tareas de desproporción. Por otro lado, los estudiantes no notan la invariancia de la razón y no logran comprender que el tanto por ciento de aumento también se puede entender como un descuento.

Por otro lado, en el estudio de Mochón (2012) se trabaja con alumnos de secundaria, planteando dos preguntas relacionadas con proporcionalidad para analizar la forma en la que los alumnos las resuelven, a manera de diagnóstico. Entre las estrategias que utilizan están: la regla de tres, empleada de forma correcta e incorrecta; uso de alguna razón; y procedimientos aditivos. De ahí, Mochón (2012) resalta que “los estudiantes que aplican la regla de tres lo hacen de manera mecánica y descontextualizada, lo cual los lleva a cometer errores” (p. 142). Por ello, Mochón (2012) resalta la importancia de dejar atrás la enseñanza de la proporcionalidad utilizando la regla de tres como única estrategia de solución y sugiere

el uso de una enseñanza conceptual sin dejar de lado el contexto de la situación problema. En consecuencia, propone un acercamiento distinto a la proporcionalidad, empleando situaciones problema en diferentes contextos, como: velocidad, escalas y repartos, y destaca el uso de tablas de valores faltantes que involucran razones sencillas, para empezar, como el triple, la mitad, dos veces, una vez y media, etc. Este tipo de sugerencias fueron consideradas en este trabajo de tesis.

Un trabajo más en la línea del estudio de la proporcionalidad es el de Oliveira (2009), éste se centra en relatar las estrategias utilizadas en la resolución de problemas de proporcionalidad por alumnos de entre 13 y 14 que no han pasado por la enseñanza formal del tema. Además, describe algunas de las dificultades a las que se enfrentaron los estudiantes para la resolución de las tareas, como: pasar de relaciones aditivas a multiplicativas, los alumnos se sentían cómodos utilizando sumas para resolver los problemas; no reconocimiento de situaciones no proporcionales, muchos de los alumnos no fueron capaces de identificar los problemas no proporcionales como tal; resolución de proporcionalidad inversa como directa, utilizaban las mismas estrategias para resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa, además no eran capaces de reflexionar en torno a los resultados que obtenían para darse cuenta que no tenía cabida en el contexto del problema; el uso de estrategias aditivas de forma errónea, los alumnos sumaban la misma cantidad a las diferentes magnitudes que aparecían en los problemas dejando la proporcionalidad en estos aumentos.

Los trabajos mencionados anteriormente reportan diversas dificultades en el trabajo con la noción de proporcionalidad, lo cual permite afirmar que el aprendizaje de la proporcionalidad es complejo. Los estudiantes se enfrentan a diversas dificultades y cometen diversos errores a la hora de resolver problemas de proporcionalidad, tales como: la falta de comprensión del concepto; el uso de la regla de tres y el valor unitario de forma errónea, como estrategias únicas de resolución o de forma mecanizada, sin saber por qué se opera de tal forma, el uso de estrategias aditivas en problemas de proporcionalidad; la confusión entre problemas de proporcionalidad y aquellos que no lo son. Así como dificultades ligadas a la noción de razón y con la tendencia de los estudiantes a tratar una magnitud por separado, sin considerar a otras involucradas.

Además, es posible notar que dichos errores y dificultades se presentan en diferentes niveles, desde primaria y hasta bachillerato como se reporta en los trabajos e investigaciones citadas anteriormente, inclusive en los profesores.

1.1.2 Dificultades de los profesores

Con respecto a las dificultades de los profesores, un trabajo importante es el de Varela (2017), quien propone actividades basadas en los principios de Richard Lesh como medio para enriquecer la formación de profesores de matemáticas de secundaria.

En las actividades la autora plantea dos contextos de la vida cotidiana, se da una descripción del contexto y se proporcionan datos reales de fuentes como periódicos y se incluye un apartado de reflexiones didácticas en la que los profesores reflexionan acerca de los conocimientos, habilidades y conceptos que se pusieron en juego para la resolución de las actividades.

En las conclusiones, la autora reporta que se manifestó una frustración por parte de los docentes al enfrentarse a actividades a las que no están acostumbrados, sin embargo, los profesores resolvieron las consignas generando y argumentando estrategias propias. Por otro lado, señala que el tipo de actividades que se presentaron promovieron la autonomía en la resolución de problemas.

La propuesta de actividades que se presenta en la tesis citada antes no pretende ser una guía para el diseño de actividades, sino que busca ser un recurso para complementar las secuencias didácticas que los docentes deciden implementar con sus alumnos sobre el tema de proporcionalidad.

El trabajo de Varela (2017) permitió reconocer que los docentes presentan dificultades a la hora de resolver problemas de proporcionalidad no rutinarios, planteados en contextos donde no es evidente la presencia de proporcionalidad entre magnitudes. Por lo cual, podría suponerse que los profesores no trabajan el tema con el tipo de situaciones problema en las que la relación de proporcionalidad no se identifica de forma inmediata.

Con los resultados de Varela (2017) se reafirma la necesidad de ofrecer a los docentes diseños para el tratamiento de la proporcionalidad pues, la falta de ellos limita la enseñanza del tema al empleo de técnicas como valor unitario y la regla de tres.

Un estudio más con respecto al tema de proporcionalidad es el de Balderas (2010) titulado: “La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros”, el cual tenía como objetivo general explorar la enseñanza actual de la noción de proporcionalidad.

Para llevar a cabo el estudio se tuvo como sujetos a 63 maestros de secundaria a los cuales se les aplicó un cuestionario para distinguir tres tipos de conocimientos sobre el tema de proporcionalidad: prácticos (tipos de estrategias utilizadas), teóricos (justificación y/o argumentación de estrategias) y didácticos (enseñanza del tema).

Luego de la aplicación de cuestionarios fue realizado el análisis de datos y la categorización de las estrategias de resolución utilizadas por los docentes.

Al finalizar el estudio los autores resaltan dos como sus conclusiones más relevantes, la primera de ellas es que los procedimientos más utilizados por los docentes para resolver problemas de proporcionalidad fueron la regla de tres y el valor unitario aun cuando algunos datos favorecían el uso de otros procedimientos; la segunda es con respecto a las principales dificultades que los docentes presentaron en la resolución de problemas:

- Dificultad para distinguir un problema que no es de proporcionalidad (relación afín y aditiva) de uno que sí lo es
- Dificultad con la noción de escala (confusión entre longitud y superficie)
- Dificultad con la noción de composición de factores de escala. (Balderas, 2010)

El trabajo de Balderas (2010) permitió analizar las estrategias de resolución que utilizan los docentes para dar solución a problemas de proporcionalidad y los argumentos que justifican su elección. Esta elección de estrategias da indicios de la forma en la que los docentes enseñan el tema en el aula.

Otro trabajo que vale la pena mencionar es el de Vega (2006), quien resalta que uno de los medios principales que tienen los docentes para promover el aprendizaje de sus estudiantes sobre proporcionalidad son las actividades didácticas, las cuales condicionan en

gran medida la comprensión que los alumnos lleguen a alcanzar sobre este tema. El libro de texto es una de las fuentes principales de actividades didácticas que los profesores tienen; sin embargo, como lo resalta Vega (2006), los libros de texto dejan una carga de trabajo enorme bajo la responsabilidad del docente, lo cual deja a la vista una falta de material didáctico que apoye al profesor para enseñar la proporcionalidad en el aula de clase, de manera que favorezca una mayor comprensión del tema y no la mecanización de técnicas.

1.2 La noción de proporcionalidad

En este espacio se presentan brevemente algunas perspectivas sobre el razonamiento proporcional y se describen elementos relacionados con la proporcionalidad que muestran la complejidad de esta noción matemática, así como la diversidad de tipos de problemas de proporcionalidad que se pueden plantear en educación básica.

1.2.1 Razonamiento proporcional y proporcionalidad

Diversos autores han resaltado la importancia de desarrollar el razonamiento proporcional en los estudiantes, pues la proporcionalidad está presente en el día a día de las personas y en diversas ramas de las ciencias y las matemáticas (Mochón, 2012; Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino, 2020; Cramer y Post, 1993). Estos autores también destacan la importancia de que la enseñanza de esta noción matemática considere contextos cercanos a la realidad del alumno, para que éste dote de sentido a la proporcionalidad, en lugar de enfatizar el aprendizaje mecanizado de técnicas como la regla de tres. Existen diferentes perspectivas sobre el desarrollo del razonamiento proporcional. Para Lamon (2007, citado en Burgos et al., 2020), el razonamiento proporcional:

reside en el reconocimiento de la razón constante entre elementos del mismo espacio de medida y el reconocimiento de la relación escalar entre diferentes espacios de medida. Supone la habilidad de reconocer una relación multiplicativa entre dos cantidades, así como la capacidad de extender la misma relación a otros pares de cantidades. (p. 8)

Según Cramer, Post y Currier (1993), el razonamiento proporcional requiere de la habilidad para resolver diferentes tipos de problemas, como aquellos de valor faltante, los

que implican la comparación de magnitudes numéricas, y también situaciones de carácter cualitativo, entre otros. El razonamiento proporcional también implica el desarrollo de la habilidad para distinguir situaciones de proporcionalidad de aquellas que no lo son. Además, los estudiantes que hayan desarrollado un razonamiento proporcional deben ser capaces de superar las dificultades relacionadas con el contexto de la situación o la complejidad de las cantidades involucradas. Además de ello, Cramer y Post (1993) destacan que un estudiante que ha desarrollado el razonamiento proporcional es capaz de identificar propiedades matemáticas en situaciones de proporcionalidad y tomar consciencia de los múltiples métodos que pueden ser empleados para resolver tales situaciones.

Con respecto a la proporcionalidad, Mochón (2012) plantea cinco etapas del desarrollo de esta noción, retomadas del trabajo de Karplus et al (1983), y considera esencial el uso de razones para hablar de la proporcionalidad:

- A. Incompleta. Ignora parte de los datos o da una respuesta ilógica.
- B. Cualitativa. Toma en cuenta todos los datos, pero solo con consideraciones cualitativas (“necesita más”, “necesita menos”, etcétera).
- C. Aditiva. Estrategia incorrecta que hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa.
- D. Pre-proporcional. Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades.
- E. Proporcional. Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia (la diferencia de estas dos últimas se explicará más adelante). (pp. 137-138)

Además, Mochón (2012) destaca dos nociones centrales para poder comprender la proporcionalidad: la comparación y la variación. El autor considera dos tipos de comparaciones, “la *aditiva*, por medio de una diferencia, y la *multiplicativa*, por medio de un cociente (al cual llamamos razón)” (p. 135). Con respecto a la variación (citando a Lesh, Post y Behr, 1988), explica que “el razonamiento proporcional involucra un sentido de variación entre dos cantidades para comparar múltiples valores”. (p.136).

Mochón (2012) establece la comparación y la variación como las bases para la comprensión de la proporcionalidad, y el comprender el concepto es fundamental para la resolución de problemas, ya que facilita la elección y el empleo de estrategias. Por ello, estas dos nociones se tomaron como base para el diseño que se presenta en este trabajo de tesis.

1.2.3 Algunos tipos de problemas de proporcionalidad directa

Hay diversos tipos de problemas que implican proporcionalidad, a continuación, se describe en qué consisten algunos de los que se utilizan para el estudio de la proporcionalidad desde la escuela primaria (5° y 6°).

1.2.3.1 Valor faltante

Los problemas de valor faltante corresponden a situaciones en las cuales se tiene una relación entre dos magnitudes proporcionales; se da como información tres datos y se pide encontrar el cuarto faltante (Cramer, Post y Currier, 1993; Block, Mendoza y Ramírez, 2010).

Para resolver problemas de este tipo, los estudiantes deben encontrar el factor constante que determina la relación entre las magnitudes proporcionales (Cramer, Post y Currier, 1993). Es importante destacar que, en este tipo de problemas, la proporción se considera como una relación de igualdad entre dos razones, y el valor faltante es el término desconocido en dicha igualdad (Burgos et. al, 2020)

Este tipo de problema se presta para que los alumnos utilicen procedimientos como la regla de tres para su resolución, pues tienen tres valores conocidos y uno que calcular.

Probablemente pareciera que los problemas de valor faltante no representan un gran reto, sin embargo, Block, Mendoza y Ramírez (2010) mencionan que es común que los estudiantes recurran a estrategias aditivas, en lugar de multiplicativas, cuando en el problema los factores implicados no son números enteros.

1.2.3.2 Comparación de razones

Una razón, según Block, Mendoza y Ramírez (2010), se refiere a la relación que guarda una cantidad con respecto a otra (p. 22). Esta relación puede ser de dos tipos:

- “La razón aritmética: es de tipo aditivo, expresa cuanto es más una cantidad que la otra, es decir, la diferencia entre dos cantidades” (p. 34)
- “La razón geométrica es de tipo multiplicativo; expresa cuántas veces una cantidad es la otra, es decir, su cociente” (p. 35)

En los problemas de proporcionalidad directa, la comparación de tipo multiplicativo es central. De acuerdo con Burgos, et. al. (2020) “una razón establece una comparación multiplicativa entre un par ordenado de cantidades de magnitudes (homogéneas o heterogéneas) cada una de las cuales viene expresada mediante un número real y una unidad de medida” (p. 7).

Dentro de los tipos de problemas que involucran la noción de proporcionalidad, los problemas de comparación de razones son centrales. En estos problemas se proporcionan cuatro valores enteros cualesquiera a, b, c y d , que por pares se relacionan de manera multiplicativa (a y b , c y d) y forman dos razones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Se considera que la proporción es una relación de igualdad entre dichas razones (Burgos et al, 2020).

1.2.3.4 Determinar si hay proporcionalidad

Por lo general, en el estudio de la proporcionalidad se presentan, a los alumnos, solo problemas que sí son de proporcionalidad, olvidando o dejando de lado los problemas que parecieran serlo pero que, a simple vista no es posible determinarlo si no que es necesario analizar el problema para encontrar o no las relaciones de proporcionalidad.

Block, Mendoza y Ramírez mencionan que:

Si todas las relaciones que se les presentan son de proporcionalidad los alumnos pensarán que así son todas las relaciones y aplicarán mecánicamente procedimientos que solo son válidos para las relaciones de proporcionalidad, como el valor unitario, la regla de tres, la conservación de las razones internas. (2010, p. 83)

Es posible afirmar, entonces, que es necesario que los alumnos sean capaces de distinguir cuándo existen relaciones de proporcionalidad en diversos problemas y cuándo no, con la finalidad de que puedan aplicar las técnicas o procedimientos adecuados para la resolución de estos.

1.2.3.5 Relaciones de proporcionalidad entre magnitudes no lineales

Es común que para el estudio de la proporcionalidad se utilicen cierto tipo de problemas “típicos”, respecto a esto Bolea, Bosch y Gascón (2001) mencionan: “en los problemas de proporcionalidad, se parte siempre de ciertos sistemas emblemáticos en los que aparecen dos magnitudes concretas supuestamente “proporcionales” (cantidad de mercancía y coste, cantidad de trabajo y número de obreros, etc.)” (p. 22).

Los autores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001) plantean que la proporcionalidad permanece en esa idea de relacionar dos magnitudes “simples” que podrían ser proporcionales, sin embargo, la evolución de los trabajos en matemáticas ha permitido considerar magnitudes complejas, las cuales se obtienen como producto de potencias de las magnitudes “simples”.

Aunque en este trabajo nos centramos en diseñar actividades que aborden problemas de proporcionalidad en los que se considere una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes concretas o “simples” como las denominan Bolea, Bosch y Gascón (2001), no se ignoran las relaciones de proporcionalidad en las que se establece la relación proporcional entre magnitudes no lineales, por ejemplo:

Que la fuerza con la que se atraen dos masas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, que los volúmenes de las esferas son directamente proporcionales a los cubos de sus radios, que los periodos de los péndulos simples son directamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus longitudes, etc. (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, p. 26)

Esta clase de relaciones que mencionan los autores podrían ser estudiadas en grados posteriores, una vez que exista una asimilación de la noción de proporcionalidad trabajada con una relación proporcional entre dos magnitudes concretas o “simples”.

1.2.4 Algunas técnicas recurrentes en el estudio de la proporcionalidad

Existen diversas técnicas para la resolución de los problemas que implican proporcionalidad, a continuación, se describen dos de ellas, utilizadas para el tratamiento de este tema en la educación básica.

1.2.4.1 El cálculo del valor unitario

El “valor unitario es el valor de una magnitud que corresponde a una unidad de la otra magnitud. En toda relación entre dos magnitudes hay dos valores unitarios” (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, p. 38).

Aplicar esta técnica consiste en encontrar el valor unitario que es útil de acuerdo a la situación y utilizarlo para calcular el dato que es requerido. Para encontrarlo se puede hacer uso de la división de manera formal o informal, es decir, aplicar el algoritmo como tal de la división o utilizar mitades, tercias, cuartos, etc. en esta última conviene que los datos estén organizados en una tabla de valores.

Es común, al utilizar esta técnica, los alumnos se encuentren con la dificultad de decidir cuál es el valor unitario adecuado para utilizar pues, como mencionan los autores existen dos valores unitarios en toda relación entre dos magnitudes.

1.2.4.2 La regla de tres

Una de las técnicas más utilizadas para resolver problemas de proporcionalidad, sin duda, es la regla de tres, la cual, de acuerdo con Block, Mendoza y Ramírez (2010) consiste en:

- Identificar las dos magnitudes en relación
- Acomodar los tres datos y la incógnita dos a dos, de manera que queden lado a lado los elementos que se corresponden
- Plantear la igualdad de fracciones
- Aplicar la regla según la cual las fracciones son iguales
- Finalmente, despejar la x , aplicando una regla del álgebra que dice que lo que multiplica de un lado pasa del otro dividiendo (p. 52, 53)

Esta técnica tiene como principal ventaja que una vez que se dominan los pasos, su aplicación resulta práctica y rápida (Block, Mendoza y Ramírez, 2010), la regla de tres resulta ser una herramienta muy útil en la resolución de problemas de proporcionalidad, sin embargo:

La principal desventaja radica en que los productos que se realizan [...] no tiene sentido en el contexto, es decir, no corresponde a ninguna de las magnitudes en juego. Esta

separación del contexto, típica de las resoluciones algebraicas, impide que los alumnos de primaria y también los de secundaria, comprendan el porqué del procedimiento. Por ello, deben memorizarlo sin comprenderlo, con lo cual el riesgo de que alteren algún paso de la técnica es alto. (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, pp. 53, 54)

Es muy común que los alumnos memoricen el algoritmo para aplicar esta técnica sin comprender por qué se realizan determinadas operaciones, incluso sin comprender por qué se sigue determinado orden al operar (¿primero multiplico o divido?).

Por otro lado, un error típico es el uso de la regla de tres en cualquier problema que implique tres valores conocidos y uno por calcular sin importar si éste es de proporcionalidad o no. “Enseñar solo la regla de tres conduce a un empobrecimiento de la noción de proporcionalidad” (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, p. 55).

1.3 La proporcionalidad en la educación básica en México

El estudio de la proporcionalidad está presente a lo largo de la educación básica, debido a que este estudio se encuentra dirigido al nivel secundaria, es necesario ubicar en el currículo el papel que juega este tema.

La proporcionalidad en la educación secundaria es un tema central pues, como se muestra más adelante, el estudio del tema aparece en los tres grados. Al ser un tema tan importante es necesario mostrar qué aspectos propone el currículo para el estudio de la proporcionalidad en secundaria.

1.3.1 El currículo de educación básica

De acuerdo con el documento Aprendizajes Clave para la Educación Integral (2017) los propósitos del estudio de la proporcionalidad son:

- **Primaria:**
 - Identificar y simbolizar conjuntos de cantidades que varían proporcionalmente, y saber calcular valores faltantes y porcentajes en diversos contextos.

➤ Secundaria:

- Perfeccionar las técnicas para calcular valores faltantes en problemas de proporcionalidad y cálculo de porcentajes
- Modelar situaciones de variación lineal, cuadrática y de proporcionalidad inversa; y definir patrones mediante expresiones algebraicas

En Aprendizajes Clave para la Educación Integral (2017), los temas de la asignatura de matemáticas se encuentran divididos en tres ejes temáticos:

- Número, álgebra y variación
- Forma, espacio y medida
- Análisis de datos

El tema de proporcionalidad se encuentra en el eje Número, álgebra y variación, dividido en los siguientes aprendizajes clave, se presentan los aprendizajes de un grado anterior y los dos posteriores al de interés (primero de secundaria) para el trabajo de tesis. Esta revisión de los grados anteriores fue necesaria para tener una idea de los conocimientos con los que los alumnos ya deberían contar al iniciar su educación secundaria y la revisión de grados posteriores fue útil para tomar decisiones en cuanto a las actividades que se diseñaron, pues tener claro los conocimientos que se requieren en grados posteriores sobre proporcionalidad permitió dejar los cimientos necesarios para continuar con el tema.

Con respecto al contenido de la Figura 4, en el quinto y sexto grado del nivel primaria se da el primer acercamiento al tema. Se busca que los alumnos empiecen a resolver problemas de valores faltantes, que calculen razones y porcentajes, todo esto en el terreno de la proporcionalidad directa.

Ejes	Temas	PRIMARIA	
		TERCER CICLO	
		5º	6º
	Proporcionalidad	<ul style="list-style-type: none"> - Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m de); calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante número natural. - Resuelve problemas de cálculo de porcentajes y de tanto por ciento. - Calcula mentalmente porcentajes (50%, 25%, 10% y 1%) que sirvan de base para cálculos más complejos. 	

Figura 4. Aprendizajes esperados del tema proporcionalidad en 5º y 6º de primaria (SEP, 2017, p.175)

En la Figura 5 se muestra que para primer grado de secundaria los alumnos ya deben contar con conocimientos y herramientas acerca del tema. Lo que se busca con el estudio de la proporcionalidad en este grado es que se practiquen las técnicas o estrategias de resolución aprendidas en primaria planteando problemas de mayor complejidad y que impliquen ya no sólo el uso de números naturales.

Además, en este grado, los conocimientos del tema de proporcionalidad se utilizan en el tema de funciones pues se busca que los alumnos puedan analizar diversos tipos de variación y que sean capaces de discriminar entre los que son proporcionales y los que no lo son.

MATEMÁTICAS. SECUNDARIA. 1º		
EJES	Temas	Aprendizajes esperados
NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN	Número	• Convierte fracciones decimales a notación decimal y viceversa. Aproxima algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Ordena fracciones y números decimales.
	Adición y sustracción	• Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
	Multiplicación y división	• Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales y de división con decimales. • Determina y usa la jerarquía de operaciones y los paréntesis en operaciones con números naturales, enteros y decimales (para multiplicación y división, solo números positivos).
	Proporcionalidad	• Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación). • Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.
	Ecuaciones	• Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.
	Funciones	• Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación.

Figura 5. Aprendizajes esperados del tema de proporcionalidad en 1º de secundaria (SEP, 2017, p. 178)

La Figura 6 muestra que en segundo grado ya aparece el estudio de la proporcionalidad inversa y el reparto proporcional. Los conocimientos adquiridos en los dos grados anteriores son la base para continuar el estudio de la proporcionalidad en segundo grado.

En lo que respecta al tema de funciones en segundo grado de secundaria, se busca que los alumnos sean capaces de analizar y comparar la variación lineal y la proporcionalidad inversa. Sin embargo, en el estudio de la variación lineal se presenta una ruptura con el tema de la proporcionalidad (Herrera y Dávila-Araiza, 2021). Si bien, el tratamiento de la variación lineal se apoya en las representaciones (gráfica, algebraica y tabular) de las relaciones de proporcionalidad, dicho tratamiento se dirige ahora al estudio de las relaciones entre dos magnitudes como funciones, particularmente aquellas de la forma $y = mx + b$, cuando $b \neq 0$, destacando que ya no existe una relación de proporcionalidad directa entre las dos magnitudes consideradas, x y y . Este tipo de acercamiento funcional a la variación lineal considera a las relaciones de proporcionalidad como un caso particular de las funciones expresadas como $y = mx + b$, cuando $b = 0$.

MATEMÁTICAS. SECUNDARIA. 2º		
EJES	Temas	Aprendizajes esperados
NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN	Multiplicación y división	<ul style="list-style-type: none"> Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos. Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos. Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
	Proporcionalidad	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
	Ecuaciones	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
	Funciones	Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Figura 6. Aprendizajes esperados de tema de proporcionalidad en 2º de secundaria (SEP, 2017, p. 179)

El acercamiento funcional a la variación lineal, propuesto en la escuela secundaria, podría enriquecerse si se recupera su vínculo con la noción de proporcionalidad, como se propone en el trabajo de Herrera (2020) y de Herrera, Dávila-Araiza, Giacomone y Beltrán-Pellicer (2021), resaltando que en los fenómenos de variación lineal siempre se puede establecer una relación de proporcionalidad entre las variaciones de las magnitudes x y y , aunque no necesariamente exista una relación de proporcionalidad entre dichas magnitudes.

Por último, en el tercer grado de secundaria (Figura 7) ya no se estudia el tema de proporcionalidad, sino el de la noción de función. Para el estudio del tema de funciones ya no se hace uso de las herramientas y conocimientos adquiridos en los grados anteriores en torno a la proporcionalidad.

MATEMÁTICAS. SECUNDARIA. 3°		
EJES	Temas	Aprendizajes esperados
NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN	Número	<ul style="list-style-type: none"> • Determina y usa los criterios de divisibilidad y los números primos. • Usa técnicas para determinar el mcm y el MCD.
	Ecuaciones	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
	Funciones	<ul style="list-style-type: none"> • Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.

Figura 7. Aprendizajes esperados del tema proporcionalidad en 3° de secundaria (SEP, 2017, p. 180)

En las figuras anteriores es posible apreciar que los contenidos del tema de proporcionalidad se encuentran presentes desde el 5° grado de primaria hasta segundo de secundaria.

Para el trabajo de tesis fue necesario concentrarse en los aprendizajes esperados señalados para primer grado, ya que fue el grado elegido para intervenir con las actividades diseñadas. Se decidió trabajar con este grado porque es donde se inicia el estudio de la proporcionalidad a nivel secundaria. Además, es en este grado donde se perfeccionan las técnicas aprendidas en primaria de forma que esas técnicas, habilidades y conocimientos les sirvan a los estudiantes en temas posteriores como variación lineal y funciones.

En otra sección de este mismo documento (Aprendizajes Clave, SEP, 2017) aparecen orientaciones didácticas de algunos de los temas de cada grado, en la Figura 8 y Figura 9 se muestran las orientaciones sobre el tema de proporcionalidad en primer grado.

MATEMÁTICAS, SECUNDARIA, 1º	
EJE	NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN
Tema	-Proporcionalidad
Aprendizajes esperados	<ul style="list-style-type: none"> •Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación). •Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

En primer grado de secundaria, los alumnos deben seguir reafirmando los procedimientos para resolver problemas de comparación de razones y de valor faltante en situaciones de variación, los cuales empezaron a estudiar en la primaria: conservación de las razones internas, valor unitario, y factor constante de proporcionalidad (se sugiere consultar la orientación didáctica correspondiente para 6º grado). Además, ahora deben identificar y utilizar constantes de proporcionalidad que son fracciones o decimales, lo cual representa un paso difícil, pero importante. Situaciones como "Un lado de la figura A que mide 5 cm debe medir 3 cm en una copia a escala en A'. ¿Cuánto debe medir en A' un lado que en A mide 4 cm?" enfrentan a los alumnos con la novedad de multiplicaciones que ya no solo se interpretan como iterar varias veces una cantidad y que, incluso, pueden empequeñecer en lugar de agrandar. Comprender lo anterior implica reconstruir la noción de multiplicación y requiere de numerosas situaciones que pongan en evidencia los errores, sobre todo el arraigado error aditivo (pensar que, por ejemplo, las medidas de A' se obtienen restando 2 cm a las de A). Por esta razón, el estudio de la proporcionalidad en este grado debe estar integrado con el de la multiplicación de fracciones. Los dos aspectos se observan prácticamente con las mismas situaciones (consultar la

Figura 8. Orientaciones didácticas del tema proporcionalidad para 1º de secundaria (SEP, 2017, p. 187)

<p>orientación didáctica correspondiente a "Multiplicación y división").</p> <p>Cálculo de porcentajes, del tanto por ciento y de la cantidad base</p> <p>En la primaria, los estudiantes empezaron a usar el tanto por ciento bajo la forma de una razón expresada con dos números "n por cada 100" y, en ocasiones, expresaron este con una fracción. En este grado, además de reafirmar lo anterior, aprenderán a resolver problemas más complejos y a expresar el tanto por ciento mediante números con punto decimal.</p> <p>Cuando se aplica un tanto por ciento a una cantidad entran en juego tres datos: el tanto por ciento (o tasa), la cantidad inicial (o <i>cantidad base</i>) a la que se aplica el tanto por ciento y la cantidad final que resulta (el porcentaje). Al cambiar de lugar el término desconocido se obtienen los tres tipos de problemas que deben estudiarse. Algunas recomendaciones generales para resolver dichos tipos de problemas son las siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Para el cálculo mental exacto y aproximado, utilizar 10% y 1% como base. También, ocasionalmente, utilizar la calculadora. • Trabajar con situaciones en las que haya variación proporcional y la constante se exprese con un porcentaje. • Trabajar con situaciones de la vida cotidiana, tales como el cálculo del IVA o la aplicación de descuentos en tiendas, y usar los porcentajes 	<p>como herramienta para el tratamiento de datos (en particular, usarlos en las gráficas circulares).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Plantear situaciones en las que el tanto por ciento sea a veces mayor que 100, para lo cual se necesita recurrir a relaciones del tipo parte-parte, por ejemplo, "el precio actual es 120% del precio anterior". • Alternar diferentes expresiones del porcentaje: dos números "n por cada 100", fracción y número con punto decimal. • Aplicar porcentajes sencillos ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$) a superficies, pues estas constituyen una representación que permite identificar de manera clara las relaciones parte-todo. <p>Uso de TIC</p> <p>Algunos recursos que puede encontrar en Internet son los siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • "¿Porcentajes?" y "¿Descuentos y más descuentos?", en Hoja electrónica de cálculo. EMAT, México, SEP, 2000, pp. 50-52. • "Explosión demográfica" e "Inflación contra salario", en Hoja electrónica de cálculo. EMAT, México, SEP, 2000, pp. 98-102. • "Análisis de textos" en Hoja electrónica de cálculo. EMAT, México, SEP, 2000, pp. 142-143. (Con este material, los alumnos podrán establecer vínculos entre representaciones numéricas, simbólicas y gráficas en el contexto de la cuantificación de letras que aparecen en un texto).
--	---

Figura 9. Orientaciones didácticas del tema proporcionalidad para 1º de secundaria (SEP, 2017, p.188)

Las orientaciones didácticas son una guía que plantea el currículo en la cual se orienta al docente para el estudio de determinado tema. Las orientaciones que aparecen para el tema de proporcionalidad son limitadas ya que solo contienen la información de las figuras anteriores y además le sugieren al docente el uso de estrategias que han sido reportadas, por diversos autores, como limitaciones o dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad. Se incluye el uso de la tecnología digital, sugiriendo a los docentes algunas páginas de internet en las que puede encontrar materiales que ayuden a reforzar algunos de los elementos que el currículo plantea se trabajen en el tema de proporcionalidad.

1.3.2 Revisión de un libro de texto de secundaria

El análisis didáctico de libros de texto contribuye a la reflexión sobre los aprendizajes de los alumnos (Vega, 2006). Además, la revisión del libro de texto permite tener una perspectiva más detallada de lo que el currículo propone para el estudio de la proporcionalidad, los tipos de actividades que se proponen y las orientaciones didácticas que se le brindan al docente para el tratamiento de tema.

El libro de texto elegido es de Matemáticas 1. Guía para docentes (Covarrubias, 2018) de la editorial Castillo, porque es uno de los libros que se emplean en las escuelas secundarias de Sonora. En primer grado de secundaria el tema de proporcionalidad se encuentra ubicado en el bloque 2, segundo tema.

Estudiar el tema en este nivel abarca dos aprendizajes esperados:

- Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación)
- Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base

Las actividades que se proponen en el libro están divididas en tres secuencias, para lo cual se sugiere un tiempo de tres semanas, una por cada secuencia. Se contemplan seis contenidos (dos por cada secuencia):

- Calcula valores faltantes en situaciones de proporcionalidad directa, con constante fraccionario
- Calcula valores faltantes en situaciones de proporcionalidad directa con constante decimal
- Expresa el tanto por ciento como “n por cada cien” y como una fracción $n/100$
- Resuelve problemas que implican calcular el tanto por ciento
- Resuelve problemas que implican calcular el porcentaje
- Resuelve problemas que implican calcular la cantidad base

Primera secuencia: **Proporcionalidad directa**

Las situaciones que se presentan en esta secuencia están enfocadas en la comparación de razones, el factor común y factores constantes no enteros. Los contextos son: el valor nutricional de los alimentos, las vueltas que da la llanta de una bicicleta, el cambio de pesos a otra moneda y la reproducción de figuras a escala. En el libro de texto se presenta una breve descripción de la situación, tablas de variación y algunas preguntas para reflexionar en torno a la información presentada en las tablas. El libro hace un cambio de una situación a otra muy tajante, se plantean muy pocas preguntas de reflexión.

Al final de la secuencia se plantea una actividad de cierre retomando dos de las situaciones planteadas anteriormente, pero con algunas variantes en la complejidad del tema (mayor complejidad: uso de fracciones y decimales), se agregan más preguntas que permiten a los alumnos reflexionar acerca de otros aspectos del mismo problema y también se cambian algunos datos de la misma situación buscando que los alumnos generen otras estrategias de solución o adapten las ya utilizadas.

Dentro de las sugerencias u orientaciones didácticas que se presentan en el libro de texto para el docente (Covarrubias, 2018), se menciona el valor unitario como un procedimiento de solución para las actividades propuestas en esta primera secuencia y brinda al docente ejemplos de problemas que podría plantear para promover este método de solución en los alumnos.

Además, se promueve el uso del factor constante y la deducción aproximada del mismo con base en datos que aparecen en las diversas tablas de variación.

Hay una parte de formalización en la cual se presentan algunos conceptos utilizados en la secuencia: conservación de razones internas, valor unitario y factor constante de proporcionalidad.

Segunda secuencia: **Problemas de porcentajes**

Esta secuencia está enfocada en el cálculo de porcentajes y del tanto por ciento.

Los problemas presentados son en contextos como: superficies de figuras, cálculo de porcentajes atendiendo a distintas características de un grupo de personas y encuestas.

Al igual que en la secuencia anterior, se presenta una breve descripción del contexto o situación, se utilizan tablas para representar la información, se solicita que los alumnos llenen los espacios vacíos y que posteriormente respondan algunas preguntas con base en los resultados obtenidos.

Como procedimientos de solución se le propone al docente hacer que los alumnos asocien los porcentajes con fracciones (a qué fracción equivale determinado porcentaje). Además, para calcular porcentajes de números mayores a 100 se promueve el uso del decimal como factor para encontrar la cantidad de personas que corresponden a determinado porcentaje.

Tercera secuencia: **Otros problemas de porcentajes**

En esta última secuencia se trata el cálculo de porcentajes de tanto por ciento, de cantidad base y mayores que 100%.

La estructura es similar a las dos secuencias anteriores solo que, se presentan en menor medida las tablas de variación, hay más preguntas de reflexión y se utilizan círculos para trabajar los problemas de porcentajes mayores al 100%.

En su mayoría se utiliza el contexto de las encuestas para hacer el cálculo de diversos porcentajes también los descuentos o aumentos de precios.

Al final de la secuencia se plantean problemas de diversos tipos con contextos diferentes a los ya revisados, y se ponen en juego algunos de los contenidos vistos en las dos secuencias anteriores.

Para las situaciones planteadas en esta secuencia se propone utilizar operaciones inversas para calcular la cantidad base, el tanto por ciento y la cantidad que corresponde a determinado porcentaje; para esto mismo, también se propone utilizar tablas de proporcionalidad.

Por otro lado, para el cálculo de porcentajes mayores al 100% se propone hacer operaciones por separado: sacar el tanto por ciento que sobre pasa el cien y sumarlo a la cantidad que ya es el 100%. El otro procedimiento propuesto es pasar el porcentaje a decimal y multiplicarlo por la cantidad que corresponde al cien por ciento.

La revisión del currículo y el libro de texto permite tener una visión de lo que se debe enseñar y aprender sobre proporcionalidad en los niveles anteriores (5° y 6° de primaria), posteriores (2° y 3° de secundaria) y el de interés (1° de secundaria) para el trabajo. Además, se muestra lo que estos materiales le indican al docente que debe promover a la hora de abordar el tema. Todos estos elementos abonan al planteamiento de la problemática a estudiar en este trabajo.

1.4 Problemática, justificación y objetivos

En los estudios citados en el apartado de antecedentes se reporta que la falta de comprensión del concepto, el uso incorrecto de procedimientos aditivos en problemas geométricos y el uso mecánico de estrategias como la regla de tres y el valor unitario son algunas de las limitaciones y/o dificultades en torno al estudio de la proporcionalidad en diferentes niveles educativos. Es importante resaltar que éstas se presentan tanto en estudiantes como en profesores, lo cual sugiere que lograr la comprensión del concepto de proporcionalidad es algo bastante complejo.

Además de las dificultades descritas, en los trabajos citados se identifica que la enseñanza de la proporcionalidad se realiza de manera limitada, enfatizando el uso de la regla

de tres y el valor unitario de manera mecanizada y como estrategias de solución únicas para resolver problemas de proporcionalidad. Esto ha motivado la búsqueda por problemas y materiales didácticos que favorezcan un estudio más significativo de la proporcionalidad.

Por otro lado, sugieren también que las actividades didácticas y el docente juegan un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de este tema porque, del docente depende en gran medida qué tanto los alumnos llegan a comprender sobre la proporcionalidad; las decisiones que toma, el tipo de actividades que le propone a los alumnos, las prácticas, reflexiones y estrategias que promueve son factores que influyen en el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad. Por ello, sería valioso proveer al profesor de materiales didácticos que le permitieran trabajar con sus estudiantes aspectos significativos del tema de proporcionalidad que vayan más allá de la aplicación mecánica de técnicas como la regla de tres. Asimismo, es importante resaltar el papel que tiene el estudio de la proporcionalidad en el currículo, pues el tema aparece explícitamente en dos de los tres grados y se relaciona con otros contenidos como variación lineal y funciones, los cuales sí se estudian en los tres grados.

El currículo y el libro de texto son materiales que los docentes tienen a su disposición para trabajar los diferentes temas en el aula. En el primer documento (SEP, 2017) se presentan los contenidos que deben ser estudiados en cada grado, pero no contiene orientaciones didácticas claras y detalladas acerca de lo que se busca que el docente promueva en los alumnos. El libro de texto para el docente analizado para este trabajo (Covarrubias, 2018) sí contiene orientaciones didácticas sobre lo que el docente debe promover a la hora de impartir los temas, sin embargo, en éstas se enfatiza el uso mecanizado de estrategias como el valor unitario y la regla de tres, lo cual ha sido reportado como una dificultad o limitación en el estudio de la proporcionalidad, además no siempre se promueven aspectos como los planteados en el documento Aprendizajes Clave para la Educación Integral (SEP, 2017):

Mediante el trabajo individual y colaborativo en las actividades en clase se busca que los estudiantes utilicen el pensamiento matemático al formular explicaciones, aplicar métodos, poner en práctica algoritmos, desarrollar estrategias de generalización y particularización; pero sobre todo al afrontar la resolución de un problema hasta entonces

desconocido para ellos. Además, se busca que comprendan la necesidad de justificar y argumentar sus planteamientos y la importancia de identificar patrones y relaciones como medio para encontrar la solución a un problema. (p. 159)

El currículo remarca la importancia de que los alumnos trabajen de forma individual y en colaborativo ya que esto les permite poner a discusión sus estrategias y argumentar en torno a ellas, sin embargo, también es necesario plantear a los alumnos actividades que favorezcan ese tipo de trabajo, que favorezcan el intercambio de información entre los alumnos y el surgimiento de nuevos procedimientos.

Ante esta problemática en torno al estudio de la proporcionalidad, descrita en los apartados de antecedentes, análisis del currículo y del libro de texto, es importante realizar una propuesta de intervención en la que se diseñen materiales/actividades que favorezcan el trabajo en equipo y de forma individual, que promuevan el uso de diversas estrategias, la argumentación y deje de lado la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad centrado exclusivamente en la mecanización de los procedimientos.

Para diseñar actividades congruentes con los planteamientos del currículo respecto a los fines del estudio de las matemáticas en secundaria en particular en el tema de proporcionalidad se utilizarán como referentes teóricos la metodología de enseñanza ACODESA (Aprendizaje colaborativo, Debate científico y Autorreflexión), las nociones de ejercicio, problema y situación problema de Hitt y Cortés (2009) y las características planteadas por Hitt y Quiroz (2019), para lo que denominan “situaciones de investigación”.

Con la intención de atender las dificultades y limitaciones en torno al estudio de la proporcionalidad para este proyecto de tesis se establecen los siguientes objetivos, los cuales están declarados en términos de los elementos teóricos seleccionados para llevar a cabo este trabajo.

➤ Objetivo general:

Diseñar actividades didácticas que promuevan el trabajo colaborativo, la discusión y argumentación en torno a la noción de proporcionalidad, dirigidas a estudiantes de primer grado de secundaria.

➤ **Objetivos específicos:**

1. Determinar los contenidos matemáticos, relacionados con la proporcionalidad, que jugarán un papel en las actividades didácticas.
2. Formular o seleccionar situaciones problema, problemas y/o ejercicios de proporcionalidad que promuevan la visualización, el establecimiento de conjeturas, la argumentación y el uso de tecnología digital.
3. Valorar la pertinencia de las actividades didácticas diseñadas para favorecer el trabajo colaborativo, la discusión y la argumentación en torno a las propiedades y técnicas de la proporcionalidad pretendidas.

Con el planteamiento de la problemática y los objetivos se concluye el primer apartado de este trabajo de tesis, abriendo paso a los elementos teóricos y consideraciones metodológicas consideradas para este trabajo.

II. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este apartado se definen los elementos teóricos que sustentan el presente trabajo de tesis, así como los aspectos metodológicos en donde se describen las acciones a realizar en cada fase establecida para el diseño y valoración de las actividades didácticas diseñadas, las cuales, en su conjunto y por sus características se denominarán situaciones de investigación dentro del marco elegido para el diseño.

2.1 Ejercicio, problema y situación problema

Para este trabajo se utiliza la metodología de enseñanza ACODESA (Aprendizaje colaborativo, Debate científico y Autorreflexión) y las nociones de ejercicio, problema y situación problema de Hitt y Cortés (2009) como referentes para el diseño de una situación de investigación orientada hacia la comprensión del concepto de proporcionalidad, por lo cual, es importante definir algunos conceptos que son clave dentro de esta metodología de enseñanza.

Se inicia por realizar una distinción entre ejercicio, problema y situación problema, a continuación, se presenta una definición de cada uno de ellos de acuerdo con Hitt y Cortés (2009):

- **Ejercicio:** Si en la lectura de un enunciado matemático recordamos de inmediato un proceso o algoritmo a seguir para resolverlo, se dice que el enunciado es un ejercicio.
- **Problema:** Si en la lectura del enunciado no recordamos un proceso o algoritmo directo a utilizar, y la situación nos obliga a producir representaciones que nos permitan ligar aspectos matemáticos no en forma directa sino a través de articulaciones entre representaciones y procesos de tratamiento al interior de los registros involucrados, diremos que ese enunciado es un problema.
- **Situación problema:** La situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no debe ser explicitada en el enunciado. Es a través de la interacción de los estudiantes con la situación que representaciones funcionales (espontáneas) emergen, y por tanto la matemática hace acto de presencia de manera natural en la discusión entre los miembros de un equipo de estudiantes, proporcionándoles

la posibilidad de construir un modelo matemático que, éste a su vez, permite explicar la situación. (p.6)

En otro trabajo Soto, Hitt y Quiroz (2019) plantean una distinción entre las nociones de ejercicio, problema y situación problema, pero considerando la variable tecnología. Sobre las situaciones problema mencionan lo siguiente:

- **Definición de situación problema en contexto papel-lápiz y tecnología.** La lectura del enunciado y la manipulación de materiales propicia la formación de representaciones espontáneas y esquemas de acción, la tecnología sirve a los estudiantes a mejor entender la situación sin que ella proporcione la respuesta, el ir y venir a la situación, trabajo en papel y lápiz y construcción de nuevas representaciones espontáneas, grupales y articulación con las representaciones institucionales permitirá encontrar un camino que lleve a un equipo de estudiantes trabajando en colaboración a la solución solicitada. En algunos casos se puede proporcionar un applet para que sirva como elemento de control y verificador en forma numérica de cálculos algebraicos. (pp. 47 y 48)

Con las definiciones que presentan los autores se puede considerar como elemento de comparación la parte matemática ya que, ésta surge de manera diferente en cada uno, en un ejercicio los procedimientos o algoritmos matemáticos surgen, podríamos decir que, de manera inmediata mientras que, en los problemas, es necesario pasar por una articulación de ideas hasta llegar a definir los aspectos matemáticos involucrados. Por último, en las situaciones problema los elementos de la matemática no son explícitos en el enunciado, se debe pasar por un proceso de reflexión y análisis para que la parte matemática surja. Además, la tecnología es una herramienta que le permite a los estudiantes reflexionar en torno a la información y construir las representaciones funcionales espontáneas. Para este trabajo se utiliza la tecnología digital con un applet de GeoGebra que juega un papel en las actividades diseñadas.

2.2 Representaciones y Visualización

Al igual que los conceptos anteriores, en la metodología ACODESA, algunos tipos de representaciones juegan un papel importante es por eso que es necesario enunciar las definiciones de estos conceptos.

- **Representación institucional.** Representaciones encontradas en libros de texto o en pantallas de ordenadores, o las que utiliza el profesor.
- **Visualizar.** Es encontrar relaciones entre diferentes representaciones (no necesariamente institucionales) en un proceso de resolución de situaciones problema. Es decir, que nosotros incluimos las representaciones espontáneas que surgen en la resolución de problemas y de situaciones problema, por ello, estas representaciones no necesariamente pertenecen a un sistema específico de signos. (Cortés, Hitt y Saboya, 2016, p. 244)

En otro artículo, los autores (Hitt, Saboya y Cortés, 2017) presentan otras definiciones que también es importante mencionar:

- **Representación no-institucional** Representación que emerge espontáneamente durante la resolución de una tarea matemática no rutinaria como resultado de una representación funcional que ha sido generada por la acción de entender o resolver una tarea
- **Representación funcional y espontánea** Una representación funcional es una representación mental enlazada a una actividad. Al leer el enunciado de la tarea, surge una necesidad y un propósito que, en términos de Leontiev (1978), media la actividad emprendida por el individuo en su conjunto. Una representación mental se construye y se vincula a otros conceptos, proporcionando las representaciones espontáneas como producto. (traducción propia. pp. 59, 60)

Por último, en otro trabajo, Hitt y Quiroz (2019) definen otro tipo de representación que, al igual que las anteriores, juega un papel importante en la metodología de enseñanza ACODESA.

- La idea de **representación grupal** pretende centrar la atención a la evolución de una representación funcional espontánea cuando ésta se somete a un proceso de discusión, comunicación, argumentación, comparación y validación frente a una tarea que demanda un trabajo en equipo en el aula de matemáticas. (p. 16)

Con base en las definiciones de los autores citados en este apartado, se puede decir que las representaciones institucionales vienen del exterior; las representaciones funcionales son internas (mentales) y surgen a partir de la actividad matemática de los sujetos; las espontáneas son la expresión externa de las funcionales (mentales), es decir, la representación mental se convierte en algo físico, algo observable y las representaciones grupales son las

que surgen del trabajo en equipo y se centran en la evolución de las representaciones concebidas de manera individual.

El término visualización es utilizado para referirse al punto en que las diversas representaciones se relacionan, es decir, encontrar un enlace entre la representación funcional, que surge a partir de la actividad matemática, y la representación funcional que fue evolucionando durante el proceso de instrucción.

Los distintos tipos de representaciones definidas anteriormente tienen un papel en cada una de las etapas de la metodológica ACODESA, en el siguiente apartado se describen cada una de ellas.

2.3 Cinco etapas de la metodología ACODESA

La metodología de enseñanza ACODESA se compone de cinco etapas las cuales son descritas a continuación:

- Etapa 1. Trabajo individual. Producción de representaciones funcionales espontáneas para entender la tarea. El trabajo individual permite al estudiante representarse la situación problema o el problema a fin de prepararse para una discusión en la cual sus ideas tengan mayor impacto. En esta etapa las representaciones funcionales-espontáneas emergen en forma natural. (Hitt y Quiroz, 2017, p. 160)

En la etapa de trabajo individual se busca que el alumno tenga un primer acercamiento al problema o situación problema, que formule ideas con las cuales participe en una discusión posterior. En esta etapa el alumno trabaja de manera individual, sin la intervención directa del docente éste funge como guía.

- Etapa 2. Trabajo en equipo sobre la misma tarea. Procesos de discusión y validación. Refinamiento de las representaciones funcionales espontáneas. La distribución del trabajo es importante: uso de tecnología por una persona, uso de materiales por otra, toma de datos y escritura de resúmenes de las acciones realizadas por otra, etc. El refinamiento y la evolución de las representaciones se realizan de manera natural y equitativa. (Hitt y Quiroz, 2017, p. 160)

Para la etapa dos los alumnos trabajan en equipo con la finalidad de compartir sus ideas iniciales sobre el problema o situación problema y al mismo tiempo de modificarlas, ampliarlas o perfeccionarlas con los aportes del resto de sus compañeros de equipo. El papel del docente continúa siendo el de un guía y facilitador.

- Etapa 3. Discusión (podría provocar un debate científico). Procesos de discusión y validación (refinamiento de representaciones). Cada equipo propone sus resultados y los pone a consideración de toda la clase. Una vez más las representaciones funcionales espontáneas pasan por otra etapa de refinamiento. Es importante llegar a un acuerdo en el grupo. (Hitt y Quiroz, 2017, p. 160)

La discusión en grupo permite a los estudiantes refinar más sus ideas iniciales. Se busca llegar a un consenso en grupo mediante un debate que debe ser guiado por el profesor con la finalidad de que los alumnos puedan llegar a un acuerdo sobre el problema o la situación problema.

- Etapa 4. Regreso a la tarea en forma individual (trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión). Esta etapa es crucial en la metodología Acodesa, ya que todo el trabajo individual y en equipo una vez pasado el consenso se puede olvidar rápidamente. La estabilidad del conocimiento adquirido en las etapas anteriores no podrá alcanzarse si no se pasa por un periodo de reconstrucción (autorreflexión) de lo realizado. (Hitt y Quiroz, 2017, p. 160)

En la etapa cuatro se regresa al trabajo individual, esto es considerado como una parte crucial de la metodología pues, es de suma importancia que los alumnos interioricen el conocimiento generado en las etapas anteriores. El producto obtenido del trabajo en esta etapa es la prueba de qué tanto cada uno de los alumnos ha retenido el conocimiento construido en todo el proceso.

- Etapa 5. Institucionalización del conocimiento. Procesos de institucionalización y uso de representaciones institucionales. En esta etapa, el maestro resume los resultados de los equipos, muestra la evolución de las representaciones espontáneas que emergieron en las etapas anteriores y discute su eficacia antes de introducir las representaciones institucionales y los procesos correctos. (Hitt y Quiroz, 2017, p. 160, 161)

Para la institucionalización del conocimiento, última etapa, el docente se vuelve protagonista, pues le corresponde presentar a los alumnos un resumen de lo surgido en las etapas anteriores, además, debe concluir presentando a los alumnos la parte institucional del conocimiento que construyeron.

2.4 Situaciones de investigación

Las actividades diseñadas en este trabajo de tesis estarán sustentadas con la metodología de enseñanza ACODESA, y retomarán las características planteadas por Hitt y Quiroz (2019), para lo que denominan “situaciones de investigación”:

- La actividad a proponer en el aula debe estar compuesta por preguntas eslabonadas que guían el trabajo de los alumnos, incluyendo la tecnología a utilizar.
- La actividad debe estar estructurada de manera a seguir las etapas de ACODESA.
- La actividad debe promover procesos de visualización matemática, conflictos cognitivos, la argumentación, la validación, la predicción y conjetura y la prueba de acuerdo al nivel de estudios de los alumnos.
- La actividad debe, en su primer acercamiento a la tarea, generar un pensamiento diversificado en los alumnos, y de esta manera promover el surgimiento de representaciones funcionales espontáneas.
- Las actividades contemplan también la generación de un pensamiento convergente, ello permitirá la evolución de las representaciones funcionales espontáneas hacia las representaciones grupales y finalmente a las representaciones institucionales. (pp. 25-26)

Las características definidas por los autores (Hitt y Quiroz, 2019) brindan elementos que deberán ser tomados en cuenta en el diseño de las actividades a proponer para los estudiantes, además, estas mismas características, serán elementos considerados la hora de llevar a cabo el análisis de los datos que se obtendrán de la implementación, los cuales, a su vez, permitirán evaluar la pertinencia de la propuesta e identificar posibles modificaciones en busca de mejoras. Es importante aclarar que, de ahora en adelante, a las actividades didácticas diseñadas (en su conjunto) les llamaremos *situación de investigación*.

2.5 Aspectos metodológicos

El objetivo general de este trabajo es diseñar actividades didácticas que promuevan el trabajo colaborativo, la discusión y argumentación en torno a la noción de proporcionalidad, dirigidas a estudiantes de primer grado de secundaria, para lograr cumplir con este objetivo fue necesario llevar a cabo varias acciones, las cuales, están estructuradas en las siguientes fases.

2.5.1 Fase 1. Análisis preliminar

La fase 1 consistió en la revisión de diversos documentos con la finalidad de establecer un panorama sobre el tema matemático a estudiar, la proporcionalidad, compuesto de aspectos como: las dificultades de los estudiantes, tratamiento didáctico en el currículo y en un libro de texto, así como la identificación de los contenidos matemáticos relacionados con el tema.

En esta fase se llevaron a cabo las siguientes acciones metodológicas:

- Revisión de libros, artículos de investigación y tesis que trataran el tema de proporcionalidad, para detectar dificultades de los estudiantes, así como nociones matemáticas y tipos de problemas relacionados con la proporcionalidad.
- Revisión del documento Aprendizajes clave para la Educación Integral (SEP, 2017) y del libro de texto de Covarrubias (2018) para identificar, contenidos matemáticos, representaciones institucionales, tipos de problemas, ejercicios y situaciones problema propuestas para el estudio de la proporcionalidad en secundaria.
- Identificación de conceptos, técnicas y situaciones problema implicados en el estudio de la proporcionalidad

Se llevó a cabo la revisión de investigaciones que reportan dificultades, de alumnos y profesores, en torno a la proporcionalidad; así como trabajos de intervención que presentaban diseños utilizados para trabajar el tema en distintos niveles educativos. Todo esto con la finalidad de identificar las dificultades que ya se han reportado en torno al tema pues, tener identificadas dichas dificultades permitió que fueran tomadas en cuenta en las actividades

diseñadas. Por otro lado, conocer diseños que trabajen la proporcionalidad fue de utilidad para tener un panorama sobre qué se ha hecho, en términos de diseño, para el estudio de la proporcionalidad.

Para identificar el tratamiento propuesto para el tema de proporcionalidad se llevó a cabo una revisión del currículo, mediante al análisis del documento Aprendizajes clave para la Educación Integral (SEP, 2017) tomando en cuenta el grado en el que se inicia el estudio del tema (5to de primaria) y el grado en el que se pretende realizar la intervención (1ro de secundaria). También, se revisaron las secuencias propuestas por un libro de texto (Covarrubias, 2018) correspondientes al último grado mencionado.

Por último, se revisaron los trabajos de Block et. al. (2010), Mochón (2012) y Burgos et al. (2020) para identificar tipos de problemas y técnicas propias del estudio de la proporcionalidad, así como la caracterización de otros objetos matemáticos implicados en su estudio. Esto con el propósito de complementar el panorama presentado por el currículo, de todo lo que está implicado al estudiar la proporcionalidad.

2.5.2 Fase 2. Diseño de la situación de investigación

Esta fase corresponde al diseño de la situación de investigación para lo cual, fue necesario realizar las siguientes acciones metodológicas:

- Definir los contenidos matemáticos correspondientes a la proporcionalidad que se promoverán en la situación de investigación y determinar cómo se promoverá la visualización, las conjeturas y la argumentación en torno a ellos.
- Identificar o formular situaciones problema considerando las características propuestas en la metodología ACODESA
- Determinar el papel de la tecnología digital en la situación diseñada para favorecer la visualización y diseñar applets correspondientes a esto
- Diseñar preguntas y tareas para guiar el trabajo de los alumnos considerando las etapas de ACODESA y las características de una situación de investigación en torno a la proporcionalidad (visualización, conjeturas, argumentación sobre propiedades y técnicas en juego)

- Determinar qué aspectos de los contenidos matemáticos trabajados en la situación de investigación es conveniente reforzar o complementar con problemas y/o ejercicios y diseñar los mismos
- Elaborar las hojas de trabajo para los estudiantes
- Realizar análisis a priori de la situación de investigación tomando en cuenta los elementos teóricos de ACODESA, las características propias de las situaciones de investigación y los contenidos matemáticos relacionados con la proporcionalidad

Fue necesario determinar qué contenidos matemáticos se abordarían en los diseños pues, al ser tan amplio el tema de la proporcionalidad, se requirió decidir los elementos que se espera que los alumnos puedan construir mediante el trabajo propuesto en las actividades.

El contexto en el que se enmarcó la situación problema fue seleccionado con cuidado ya que, se buscaba que fuera atractivo para los alumnos, además, era necesario que fuera un contexto en el que no estuviera tan evidente la presencia de las matemáticas, atendiendo a los planteamientos de ACODESA.

Para reforzar algunos de los aspectos trabajados en la situación de investigación, se consideró importante incluir ejercicios o problemas que permitieron a los alumnos refirmar los elementos matemáticos construidos.

Una vez formulada la situación problema, que incluía ejercicios y/o problemas que en conjunto formaron la situación de investigación fue necesario elaborar las hojas de trabajo que se proporcionaron a los alumnos para utilizar durante la implementación.

Por último, se llevó a cabo un análisis a priori de la situación de investigación con la finalidad de describir posibles dificultades que se podrían presentar, las estrategias y/o técnicas que los alumnos pudieran emplear, las respuestas que se esperan y las acciones que podría realizar el profesor. Además, este análisis a priori se consideró para realizar el análisis de los resultados obtenidos de la implementación.

2.5.3 Fase 3. Implementación de la situación de investigación

Para valorar la pertinencia de la situación de investigación diseñada se llevó a cabo realizar una puesta en escena de estas. El propósito de esta fase fue la planificación de la implementación de la situación de investigación.

Para la fase de implementación se pueden distinguir dos momentos, para el primero de ellos, previo al trabajo con los alumnos, se tienen las siguientes acciones:

- Realizar un pilotaje previo a la puesta en escena definitiva
- Identificar aspectos a modificar en las actividades y reformularlas con base en ellos
- Seleccionar la institución y grupo de estudiantes para la implementación definitiva
- Adaptar la situación de investigación a los tiempos disponibles para llevar a cabo la implementación
- Elaborar y/o seleccionar los instrumentos que serán utilizados para la recolección de datos

Para un segundo momento, trabajo directo con los estudiantes, se tienen las siguientes acciones metodológicas:

- Llevar a cabo la implementación
- Realizar la recolección de datos durante el lapso de implementación

La implementación fue llevada a cabo con un grupo de alumnos de primer grado de secundaria, para conseguir acceso a éstos fue necesario establecer un contacto formal con los directivos para gestionar los permisos.

Con la finalidad de obtener la mayor información posible durante la implementación se determinó utilizar guías de observación e incluir a dos observadoras no participantes en las sesiones de zoom de la implementación.

2.5.4 Fase 4. Análisis y valoración

En esta fase se realizó el análisis de los datos obtenidos de la implementación de la situación de investigación, con la finalidad de valorar las mismas y realizar las modificaciones pertinentes.

En la fase 4 se llevaron a cabo las acciones:

- Definir la estrategia para el análisis de los datos
- Realizar el análisis de los datos tomando en cuenta los elementos teóricos de ACODESA, las características de una situación de investigación y los contenidos matemáticos de proporcionalidad que fueron seleccionados para trabajar
- Contrastar el análisis de los datos con el análisis a priori
- Identificar los aspectos de las actividades que requieren ser modificados
- Modificar los elementos de las actividades que se consideren pertinentes

Para llevar a cabo el análisis de los datos fue necesario considerar los planteamientos de ACODESA, las características de las situaciones de investigación y el trabajo de Block et al. (2010), con la finalidad de valorar si la situación de investigación favoreció o no la creación de los distintos tipos de representaciones y la evolución de las mismas; si los planteamientos propuestos a los alumnos promovieron el uso de las técnicas esperadas y el enlace de las mismas con los conceptos; valorar si la tecnología digital favoreció la visualización, la construcción de conjeturas y la argumentación.

Además, se tomó en cuenta lo que se espera que sucediera y surgiera en cada una de las etapas de ACODESA, con el propósito de valorar si el trabajo individual, en equipo y grupal favorecieron los conflictos cognitivos, la reflexión y argumentación en torno a las situaciones presentadas.

Fue importante tomar en cuenta el análisis a priori y contrastar lo que se esperaba con lo que, en la puesta en escena, sucedió ya que esto permitió identificar áreas de oportunidad en las actividades, las cuales podrían ser modificadas en busca de mejorarlas.

III. DISEÑO DIDÁCTICO Y ELEMENTOS TEÓRICOS QUE LO SUTENTAN

En apartados anteriores se presentó una descripción de las secuencias que propone un libro de texto de primer grado de secundaria para el estudio de la proporcionalidad, resaltando los contextos, las estrategias sugeridas y el tipo de tareas (tablas de valores, preguntas de reflexión) que les solicitaban a los estudiantes.

Dentro de los elementos teóricos se hace una distinción entre las nociones de *ejercicio*, *problema* y *situación problema*, basado en las definiciones que los autores (Hitt y Cortés, 2009; Soto, Hitt y Quiroz, 2019) plantean sobre estas nociones podemos decir que en el libro de texto revisado (Covarrubias, 2018) se proponen solo problemas y ejercicios, ya que las tareas propuestas permiten a los estudiantes, de primer grado de secundaria, evocar rápidamente algunas de las técnicas que se ven en grados anteriores (5° y 6° de primaria), y algunas otras tareas si implican una reflexión en torno a la información que se brinda y el surgimiento de las técnicas o estrategias no es inmediato, siendo éstas características de los problemas. En el libro de texto no se encontraron tareas que cumplieran con las características de una situación problema.

La problemática planteada en torno al estudio de la noción de proporcionalidad puede ser atendida con el diseño de materiales que consideren las dificultades reportadas y los requerimientos que plantea el currículo, por tal motivo para este trabajo se diseñaron actividades didácticas con base en las características de las *situaciones de investigación* (Hitt y Quiroz, 2019).

En este apartado se realizará la descripción del diseño de una situación de investigación, resaltando en cada parte los elementos teóricos considerados. Dado que el diseño está estructurado en las cinco etapas que ACODESA propone y que son parte de las características de las situaciones de investigación, se describe el contenido incluido en el diseño para cada una de las etapas.

3.1 Etapa 1. Trabajo individual

En primer lugar, fue necesario seleccionar un contexto adecuado para plantear una situación problema, ya que, de acuerdo con Hitt y Cortés (2009) ésta debe promover en los alumnos la reflexión, la matemática a utilizar no debe ser explícita y debe ser interesante para los alumnos; todo esto contribuiría a promover un pensamiento diversificado en los alumnos, lo cual es una de las características de las situaciones de investigación.

La situación problema se enmarca en el nuevo etiquetado para alimentos y bebidas propuesto por la Secretaría de Salud en México. Para iniciar se presenta un texto (para texto completo ver anexo 1) y algunas imágenes con las que se describe el contexto de la situación, y al final se cierra con tres preguntas que tienen el propósito de interesar a los alumnos en la situación problema. En la Figura 10 se puede ver el inicio del texto, las imágenes y las preguntas con las que se cierra el texto.



Figura 10. Texto etapa 1

De acuerdo con Hitt y Quiroz (2017) en esta etapa se da la producción de representaciones funcionales espontáneas, representaciones mentales enlazadas a una actividad (Hitt, Saboya y Cortés, 2017), en este caso la actividad detonada al abordar la situación problema. El trabajo individual en torno a la tarea prepara al alumno para una discusión en donde pueda argumentar en torno a sus ideas.

Se propone a los alumnos trabajen de manera individual en preguntas de reflexión (ver Figura 11) en torno a la situación, preguntas estructuradas de manera eslabonada que tienen

la finalidad de guiar a los alumnos a la construcción de representaciones funcionales espontáneas.

- a) De las etiquetas octagonales negras, ¿cuáles crees que deberían tener las cuatro barras de chocolate que se muestran en la imagen 3? ¿Por qué?
- b) ¿Cuál barra de chocolate consideras que es la menos saludable? ¿Por qué?
- c) Para poder comparar más fácilmente los chocolates podemos elegir un ingrediente, por ejemplo: el azúcar ¿Cuál chocolate crees que es más dulce? ¿Y cuál consideras el menos dulce? Explica por qué.
- d) ¿Podrías saber cuál chocolate es más dulce sin haberlo probado? Explica tu respuesta.
- e) Ordena las barras de chocolate de la más dulce a la menos dulce y haz un dibujo que represente el azúcar que consideras que cada una contiene. Explica con un texto tu dibujo.

Figura 11. Preguntas etapa 1

Las preguntas a) y b) tienen el propósito de familiarizar al alumno con el contexto y se espera que surjan respuestas basadas en la experiencia personal de cada alumno con el texto del nuevo etiquetado y con las marcas de chocolate involucradas en la situación. En los incisos c) y d) se empieza a centrar la atención hacia el ingrediente que nos interesa resaltar para realizar la comparación de los chocolates, el azúcar. Se espera que los alumnos sigan respondiendo con base en su experiencia y tal vez algunos datos (como los gramos de las barras de chocolate, los ingredientes, entre otros) que puedan rescatar del texto y de las imágenes que lo acompañan, que puedan realizar inferencias basados en la información proporcionada en el texto. Es importante resaltar que las barras de chocolate fueron elegidas de manera que no fuera sencillo identificar cuál era más dulce que otro comparando solo su cantidad de azúcar, es decir, se tomaron barras con contenidos similares tanto en cantidad de azúcar como en cantidad de producto. Solo el chocolate menos dulce, el de la marca Turín, era el más evidente y sencillo de clasificar.

Por último, la pregunta del inciso e) tiene la finalidad de materializar las representaciones funcionales que los alumnos, de manera individual, hayan construido al momento, pues se solicita que mediante un dibujo y un texto hagan la clasificación de los chocolates. Se espera que los alumnos representen la clasificación que harían de los chocolates y la justifiquen utilizando sus experiencias o algunos datos que hayan podido rescatar del texto, además, en este punto se espera que los alumnos hagan explícitos los ingredientes o aspectos que ellos están tomando en cuenta para realizar la clasificación de los chocolates.

Se espera que con las ideas que los alumnos construyan en esta etapa se preparen para el trabajo en equipo en el que puedan aportar y argumentar para refinar sus representaciones iniciales.

3.2 Etapa 2. Trabajo en equipo

Durante esta etapa los alumnos trabajan en equipo, se promueven los procesos de discusión y validación, además se da el refinamiento de las representaciones funcionales espontáneas. Se hace uso de la tecnología digital (GeoGebra) para promover dicho refinamiento y el proceso de visualización (Hitt y Quiroz, 2017).

En esta etapa los alumnos trabajan en equipos de tres o cuatro personas, como material se les proporcionan fotografías de las etiquetas de las barras de chocolate propuestas para trabajar (Figura 12, Figura 13, Figura 14, Figura 15). En una implementación llevada a cabo de manera presencial a cada equipo se le proporcionarían las 4 barras de chocolates con la finalidad de que discutan sobre la idea de experimentar y probar los chocolates buscando comprobar sus hipótesis sobre la clasificación de los chocolates.

Este envase aporta:				Información Nutricional Tamaño de porción 18 g (1 barra); Cantidad por porción: Contenido energético 398 kJ (96 kcal); Carbohidratos (Hidratos de carbono) 6.9 g; Azúcares 4.8 g; Fibra dietética 2.1 g; Grasa total (Lípidos totales) 6.9 g; Grasa saturada 4.3 g; Grasa poliinsaturada 0.2 g; Grasa monoinsaturada 2.4 g; Ácidos grasos trans 0 g; Colesterol 0 mg; Proteínas 1.5 g; Sodio 0 mg.	
Grasa Saturada 39 kcal	Otras Grasas 23 kcal	Ácidos grasos totales 43 kcal	Sodio 0,0 mg	% de los nutrientes diarios	LOTE Y FECHA DE CADUCIDAD IMPRESOS EN EL ENVASE
19 %	6 %	12 %	0 %		

Figura 12. Información nutricional chocolate Turín

Porción de 100 g	Porción por envase (100 g)	Porción por envase (100 g)
Energía	170	170
Grasa total	33	33
Grasa saturada	17	17
Grasa monoinsaturada	14	14
Grasa poliinsaturada	2	2
Carbohidratos	83	83
Almidón	43	43
Glucosa	13	13
Proteínas	13	13
Sodio	1	1




Queremos Escucharte
 Nestlé Servicio al Cliente de los EE. UU.
 Llamada gratuita al 1-800-368-7963
 7 días a la semana de 8:00 a 20:00 horas

Visitarnos en:
www.nestle.com.mx

104 kcal
 43936143


CRUNCH

Figura 13. Información nutricional chocolate Crunch

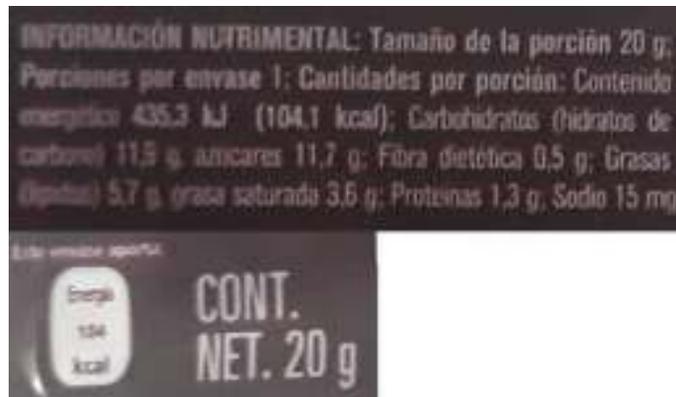


Figura 14. Información nutrimental chocolate Hershey's



Figura 15. Información nutrimental chocolate Carlos V

Las consignas de esta etapa pretenden promover la discusión en torno a las representaciones funcionales espontáneas que cada alumno generó en la etapa 1, se espera que discutan sobre el chocolate que eligieron como el más dulce y su método o estrategia para clasificarlos, además se pide a los alumnos que argumenten sus respuestas. Después de esta discusión se espera que sus métodos y la clasificación sufran un primer refinamiento influenciado por las decisiones de los otros miembros del equipo. Como el fruto de esta discusión se espera obtener el primer consenso al interior del equipo (ver Figura 16).

 **Etapa 2. Trabajo en equipo (parte 1)**



II. Reunidos en equipos de tres o cuatro personas comparen sus respuestas de la etapa 1, entre todos decidan cuál es el chocolate más dulce y respondan lo siguiente.

a) ¿Cuál fue la barra de chocolate que eligieron como la más dulce? Expliquen por qué.

Figura 16. Inicio de la discusión en equipo

Después de la discusión para determinar cuál chocolate consideran como el más dulce, se propone el uso de tablas de valores (Figura 17) que les permitan estructurar la información que les brindan las etiquetas de los productos, resaltando el contenido de azúcar de cada barra de chocolate, con la finalidad de los alumnos discutan en torno a esa información y puedan determinar cuál chocolate es el menos dulce y el más dulce, de una manera aproximada comparando los gramos de azúcar con el total de gramos del producto completo.

b) Completen la siguiente tabla.

Cantidades en gramos	Turín	Crunch	Carlos V	Hershey's
Azúcar				
Otros ingredientes				
Total de producto				

- c) ¿En cuáles de las barras de chocolate los gramos de azúcar son la mitad o más de la mitad del contenido total del producto? Expliquen su razonamiento y también ilustren con un dibujo las barras y el azúcar que contiene cada una.
- d) ¿En cuál barra el azúcar es aproximadamente una cuarta parte de su contenido total? Expliquen cómo llegaron a su respuesta y también representen con un dibujo la barra y el azúcar que contiene.
- e) Considerando la información de la tabla, ¿Cuál chocolate es el menos dulce? ¿Y cuál es el más dulce? Expliquen por qué.

Figura 17. Partes de un todo

El uso de la tabla pretende que los alumnos reflexionen en torno a las partes de un todo, es decir, que relacionen que la barra de chocolate es el todo que está compuesto por diferentes ingredientes. Las preguntas que aparecen debajo de la tabla (ver Figura 17) se espera guíen a los alumnos hacia aproximaciones que les permitan construir la razón entre la cantidad total de producto y la cantidad de azúcar que contiene. En específico los incisos c) y d) pretende hacer evidentes dos relaciones: cuando la parte de azúcar es aproximadamente la mitad del contenido del producto y cuando es aproximadamente la cuarta parte de éste, relaciones que fácilmente se pueden visualizar en la tabla y que pueden orientar a los alumnos a reflexionar sobre la razón entre los gramos de azúcar y los gramos del contenido total del chocolate, y qué parte de cada chocolate es azúcar. De esta forma ellos podrán reconsiderar si su elección de la barra más dulce es la correcta, es decir, se trabaja en el refinamiento de las representaciones funcionales espontáneas que en un principio se construyeron en lo individual.

Para fortalecer la noción de razón se pide a los alumnos que representen la cantidad de azúcar de cada barra de chocolate coloreando una cuadrícula (ver

Figura 18), se cuidó que las cuadrículas fueran de diferente tamaño porque las barras de chocolate no contienen la misma cantidad de producto. Con esto se pretende favorecer la visualización, pues los alumnos trabajarán la información numérica de la tabla anterior (Figura 17) representada de otra manera, esta vez representarán de manera gráfica la cantidad total de producto y la cantidad de azúcar que contiene cada barra, es probable que la representación sea aproximada, es decir, los alumnos podrían reflexionar sobre que el contenido de la barra de Crunch, por ejemplo, es aproximadamente la mitad del contenido total y colorear la mitad de los cuadritos que representan esta barra.

f) Las cuadrículas siguientes representan las barras de chocolate. Anoten el nombre del chocolate que corresponde a cada barra y coloreen las partes que son azúcar.

CRUNCH	HERSHEY'S
	
TURÍN	CARLOS V
	

g) ¿Qué información utilizaron para decidir cuál chocolate es más dulce que otro? ¿por qué?

Figura 18. Representación gráfica de la razón

Además, se cuidó que las cuadrículas (ver

Figura 18) fueran lo más cercanas al contenido total de cada barra con la finalidad de resaltar la importancia de que el tamaño de cada barra de chocolate influye para tomar la decisión de cuál chocolate es más dulce. Es por eso por lo que se pregunta de nuevo qué información les es útil para decidir cuál chocolate es el más dulce, para que los alumnos reflexionen sobre que no basta con tener la cantidad de azúcar de cada barra para compararlas porque las barras son de diferente tamaño.

Con la finalidad de promover el proceso de visualización se utiliza un applet (<https://www.GeoGebra.org/m/nyktshtb>) creado en el software GeoGebra, donde se muestran rectángulos con base de longitud variable que simulan la porción ingerida de chocolate (ver Figura 19), barras verticales que representan los gramos de azúcar

correspondiente a dicha porción de chocolate y un cilindro en el que se simula la cantidad de azúcar consumida (volumen). Al manipular los puntos que se encuentran en las esquinas inferiores de los rectángulos, la porción de producto consumida puede aumentar o disminuir y al mismo tiempo la cantidad de azúcar cambia proporcionalmente.

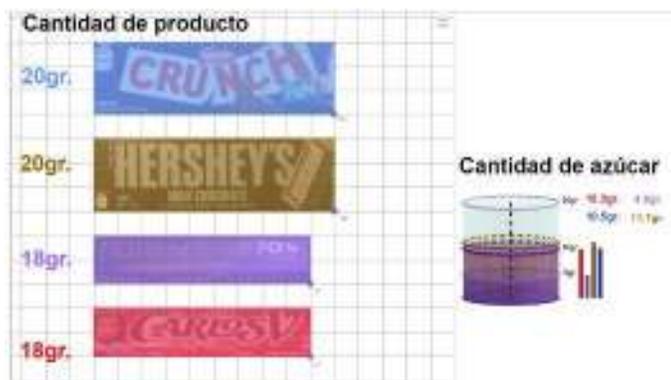


Figura 19. Applet para el trabajo en equipo

Para la exploración del applet se dan instrucciones y se plantean algunas preguntas de reflexión (ver Figura 20) en torno a lo que los alumnos pueden observar y deducir de la exploración. Se busca que construyan de manera cualitativa propiedades de la proporcionalidad, como: *Si me como media barra de chocolate, estaría comiendo la mitad del total de azúcar. Mientras más chocolate como más azúcar estaré consumiendo. Mientras menos chocolate coma menos azúcar comeré. Si cambia la porción de chocolate cambia la cantidad de azúcar consumida.* Además, se espera que visualizar la barra de chocolate y la cantidad de azúcar como magnitudes cambiantes sea un parteaguas para conectar con el tema de Variación lineal.



Etapa 2. Trabajo en equipo (parte 2)



- III. Aún reunidos en equipos exploren el applet "Chocolates y azúcar" y respondan las siguientes preguntas.
- Abran el applet "Chocolates y azúcar". Localicen el punto CH y muévanlo a la derecha. El rectángulo azul que aparece representa la cantidad de la barra de chocolate que alguien consume. Al mover el punto ¿qué sucede con la cantidad de producto? ¿Y con la cantidad de azúcar?
 - Ahora hagan lo mismo con los puntos HS, TN y CV ¿Sucede lo mismo que pasó al mover el punto CH?
 - Regresen el punto CH al final de la imagen de la barra de chocolate, una vez ahí muévanlo hacia la izquierda ¿Qué sucede con la cantidad de producto? ¿Y con la cantidad de azúcar?
 - Repitan el procedimiento del inciso c) con los puntos HS, TN y CV, ¿sucede lo mismo que pasó al mover el punto CH?
 - ¿Qué relación encuentran entre la cantidad de producto y la cantidad de azúcar cuando cambia la cantidad de producto consumida?
 - Si alguien comiera una tercera parte de una de las barras de chocolate ¿Qué parte del azúcar estaría comiendo? ¿Por qué?
 - Y si comiera dos barras del mismo chocolate ¿Qué tanta azúcar estaría comiendo? Explica por qué.

Figura 20. Exploración y reflexión con el applet

Posteriormente se proponen tablas de valores (una tabla por cada barra de chocolate) en las que se pide a los alumnos que, con ayuda del applet y de las etiquetas, calculen la cantidad de azúcar que hay en determinada cantidad de producto (ver Figura 21). Con esto se busca que los alumnos construyan, ahora de forma cuantitativa, propiedades de la proporcionalidad como: *Si me como 10 gr. de Crunch, me estoy comiendo 5.1gr. de azúcar, es decir la mitad.*

La información de las tablas y las preguntas que aparecen debajo de las mismas se espera permitan a los alumnos reflexionar sobre el valor unitario, que concluyan que el último renglón de las tablas es el que les sirve para comparar la cantidad de azúcar de las barras ya que es necesario tener la misma cantidad de producto de las cuatro barras para poder compararlas. Podría ser que también surja en este punto la constante de proporcionalidad y se favorezcan reflexiones como que el producto con constante mayor será el más dulce. Además, se podría trabajar, con las mismas tablas, la noción de proporción, pues en cada uno de los renglones de las tablas es posible visualizar la razón entre la cantidad de producto y cantidad de azúcar, comparar estas razones hará evidente la proporcionalidad que existe entre las magnitudes en juego.

Se espera que con estas últimas preguntas los alumnos puedan brindar argumentos sólidos sobre su elección del chocolate más dulce, es decir, que sus justificaciones iniciales

que estaban basadas en su experiencia con las marcas de chocolates o en la información que podían, de manera rápida, obtener de las etiquetas cambian a ser justificaciones con base en las propiedades que han logrado construir.

b) Con ayuda de las etiquetas de las barras de chocolate y del applet "Chocolates y azúcar", completa las tablas siguientes.

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g		20g		18g		18g	
10g		10g		9g		9g	
5g		5g		6g		6g	
4g		4g		4.5g		4.5g	
1g		1g		1g		1g	

- ¿Qué sucede con las cantidades de Crunch y de azúcar al pasar del primer al segundo renglón? Expliquen su razonamiento.
- ¿Qué sucede con las cantidades de Turin y de azúcar al pasar del primer al tercer renglón? Expliquen su razonamiento.
- ¿Qué información de las tablas les sería útil para comparar las barras de chocolate y determinar cuál de ellas es la más dulce? Expliquen por qué.
- Utilizando la información de las tablas, ¿Cuál chocolate es el más dulce? Expliquen de qué forma llegaron a la respuesta.

Figura 21. Construcción de propiedades cuantitativas de la proporcionalidad

Al final de esta etapa los alumnos deben determinar cuál es el chocolate más dulce, argumentando su respuesta con la información pertinente (cantidad de azúcar y cantidad total de producto) y/o estrategias implementadas (comparación del valor unitario, la constante de proporcionalidad o comparación de razones), para en la siguiente etapa compartir en grupo sus hallazgos.

3.3 Etapa 3. Discusión grupal

En esta etapa de nuevo se trabaja el refinamiento de representaciones funcionales espontáneas mediante una discusión en grupo en la que los equipos presentan sus resultados ante el resto del grupo, y pasan por el proceso de validación con la finalidad de llegar a un acuerdo grupal (Hitt y Quiroz, 2017).

Aquí el profesor se debe encargar de guiar la discusión y organizarla de manera que los equipos puedan presentar sus resultados al resto del grupo, además debe resaltar los

elementos importantes de las estrategias y resultados obtenidos por cada equipo con la finalidad de llegar a un consenso en grupo.

Dentro del diseño, a los alumnos solo se les da la instrucción de trabajar en plenaria para compartir los resultados con el resto de sus compañeros. Pero, se elaboró una versión de esta etapa para el docente (ver Figura 22) donde se incluyen algunos puntos importantes que se deben resaltar durante la discusión grupal, aspectos como comparar el valor unitario para determinar el chocolate más dulce, reflexiones en torno a las propiedades de la proporcionalidad que cada equipo construyó (por ejemplo: *entre más producto consuma más azúcar consumiré. Si me como la mitad del producto estaré consumiendo la mitad del total de azúcar*), el uso de las tablas de valores para calcular el valor unitario, la razón o la constatación de proporcionalidad, entre otros. Se seleccionaron esos aspectos porque son los que se espera que surjan en las etapas 1 y 2 del diseño, sin embargo, durante la puesta en escena se pueden agregar u omitir los que se consideren necesarios.

Etapa 3. Discusión grupal

IV. En plenaria, compartan sus resultados y discutan en torno a ellos con apoyo del profesor

- Reflexiones en torno a la primera tabla, orientarse hacia la construcción de la razón ¿Qué parte del total es azúcar? (fracciones) (representar la división con frases como: y cantidad de azúcar por cada cantidad x de z chocolate)
- Retomar una de las tablas y llamar la atención sobre la constante de proporcionalidad y sobre el hecho de que el chocolate con constante mayor será el más dulce.
- Hacer reflexiones en torno al significado del último renglón de cada tabla ¿Por qué utilizar esa información para comparar? (hacer énfasis en que tener cantidades iguales de producto es importante para poder compararlos)
- Retomar las respuestas de los incisos f) y g) para reflexionar en torno a la propiedad de la proporcionalidad que ahí surge “al doble le toca el doble”

Figura 22. Etapa 3 versión para el docente

3.4 Etapa 4. Autorreflexión

Los alumnos regresan al trabajo individual, esta etapa es considerada crucial dentro del método ACODESA, pues lo construido en etapas anteriores se puede olvidar rápidamente y, es en esta etapa en donde los alumnos reconstruyen lo realizado (Hitt y Quiroz, 2017).

En esta etapa se propone una variante de la situación problema inicial, esta vez se trabaja con otro ingrediente de las barras de chocolate, las grasas saturadas, se busca que los alumnos

puedan determinar cuál es el chocolate con mayor contenido de grasas saturadas considerando el tamaño de la barra. De nuevo se utiliza un texto (ver Figura 23) para introducir información relevante sobre el ingrediente a considerar y al final preguntas que tienen la finalidad de interesar a los alumnos.

 **Etapa 4. Autorreflexión**

V. Lee la siguiente información y responde las preguntas que se plantean después.



Además del azúcar, las barras de chocolate contienen otros ingredientes que si se consumen en exceso pueden provocar diversas enfermedades. Por ejemplo, las grasas saturadas, éstas tienen la función de aportar energía que el cuerpo necesita para trabajar adecuadamente, pero el consumo excesivo de ellas hace que los niveles de colesterol (grasas malas en la sangre) se eleven provocando enfermedades y problemas cardiovasculares.

El nuevo etiquetado incluye un octágono negro que advierte cuando un producto contiene exceso de grasas saturadas. ¿Cuál de los chocolates será el que contiene más grasas saturadas considerando la cantidad de producto de cada barra?

Figura 23. Texto etapa 4

Se propone de nuevo el trabajo con tablas de valores (ver Figura 24) para la organización de la información que extraen de las etiquetas, esta vez centrada en el ingrediente de grasas saturadas. La tabla que se propone es similar a la utilizada en la etapa 2, en la que se trabajó las partes de un todo. Para esta etapa el trabajo con tablas tiene el mismo propósito, que los alumnos visualicen la barra de chocolate como un todo que está compuesto por diferentes ingredientes, solo que ahora centramos la atención en las grasas saturadas que cada barra contiene. Se espera que el llenado de la tabla sea rápido, es decir, que los alumnos puedan localizar la información necesaria rápidamente y puedan organizarla en la tabla propuesta.

a) Completa la siguiente tabla.

Barra de chocolate	Cantidad de producto (g)	Cantidad de grasas saturadas (g)
Turín		
Crunch		
Carlos V		
Hershey's		

- b) Con la información de la tabla y considerando la cantidad de producto de cada chocolate, ¿podrías decidir cuál barra de chocolate es la que contiene más grasas saturadas? Justifica tu respuesta.
- c) Describe la estrategia que utilizarías para determinar cuál barra de chocolate contiene más grasas saturadas considerando los gramos de producto que contiene cada barra.
- d) Utiliza la estrategia que describiste anteriormente para ordenar las barras de chocolate, de la que contiene más cantidad de grasas saturadas a la que contiene menos.
- e) ¿La estrategia utilizada funcionaría para clasificar las barras de chocolate del más saludable al menos saludable, considerando cualquier ingrediente? Justifica tu respuesta.

Figura 24. Reconstrucción de estrategias

Una vez que los alumnos trabajan llenando la tabla de valores se presentan algunas preguntas de reflexión que les permitan utilizar la o las estrategias presentadas en la discusión grupal. Se espera que los alumnos puedan utilizar alguna de las estrategias discutidas en la etapa 3 (como podrían ser la comparación de razones, el valor unitario o la constante de proporcionalidad) para determinar cuál es la barra de chocolate que contiene más grasas saturadas respecto al tamaño de la misma.

3.5 Etapa 5. Institucionalización

El profesor presenta un resumen de los resultados de los equipos y se discute la eficacia de las estrategias implementadas, además se introducen las representaciones institucionales y estrategias correctas (Hitt y Quiroz, 2017).

Para la institucionalización del conocimiento, última etapa, el docente se vuelve protagonista, pues le corresponde presentar a los alumnos un resumen de lo surgido en las etapas anteriores, además, debe concluir presentando a los alumnos la parte institucional del conocimiento que construyeron.

Al igual que en la etapa 3, dentro de las hojas de trabajo de los alumnos para esta etapa solo se da la instrucción del trabajo en plenaria y, en una versión del diseño de la etapa 5 para

el docente (ver Figura 25), se enlistan los conceptos y estrategias institucionales, tales como la constante de proporcionalidad, el valor unitario, la razón y el uso de tablas.

Etapa 5. Institucionalización

VI. En plenaria compartan sus respuestas.

- Constante de proporcionalidad
- El valor unitario
- Razón (mitad a mitad, tercer parte a tercera parte, doble a doble)
- Uso de tablas
- Propiedad de la proporcionalidad “al doble le toca el doble”

Figura 25. Etapa 5 versión para el docente

IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LA PUESTA EN ESCENA

En este apartado se describen las consideraciones metodológicas de la puesta en escena de la situación de investigación y se presenta el análisis de los datos recabados en ella. Primeramente, se explica la estrategia de análisis seguida y posteriormente se presenta el análisis considerando cada una de las etapas de ACODESA.

4.1 Consideraciones metodológicas de la puesta en escena

Se trabajó con 11 estudiantes de primer grado de secundaria de una institución pública, quienes son alumnos de la asignatura de Matemáticas de la diseñadora/instructora de la situación de investigación.

Por la modalidad en la que se llevó a cabo la implementación, era importante que los alumnos contaran con al menos un dispositivo (computadora de escritorio, laptop, tablet, celular) para conectarse a las clases de manera virtual.

Además, debido a que las actividades propuestas implicaron un trabajo extra al de la clase de Matemáticas regular, se consideró que los alumnos invitados a participar fueran alumnos regulares en las clases, es decir, alumnos que no tuvieran actividades faltantes y que fueran constantes en las clases regulares de la asignatura de Matemáticas.

Para la integración de los equipos, se cuidó que hubiera por lo menos un integrante que contara con un dispositivo en el que la manipulación del applet se facilitara (computadora de escritorio o laptop) y pudiera compartir pantalla al resto de los integrantes a los que se les dificultara la manipulación del applet en el celular.

La comunicación entre padres de familia, alumnos y la persona encargada de la intervención se dio mediante un grupo de WhatsApp en el que se compartió toda la información y los detalles de la implementación. Además, se redactó una carta de consentimiento informado para padres y alumnos, en el que se explicaba de manera breve y clara el objetivo del proyecto; y las implicaciones de su participación en este.

La intervención constó de 6 sesiones llevadas a cabo en la plataforma de Zoom, debido a que es la plataforma que se utiliza normalmente en la clase de matemáticas. Para la

recolección de datos cada una de las sesiones fue videograbada y se contó con el apoyo de dos observadoras no participantes, quienes permanecieron con micrófono y cámara apagados.

Las hojas de trabajos se enviaron por medio del grupo de WhatsApp unos días antes de las sesiones, dándole dos opciones a los alumnos para responderlas: 1) Escribir solo las respuestas en hoja blanca o de cuaderno, o bien 2) imprimir las hojas de trabajo.

El envío de fotografías de las respuestas en las hojas de trabajo se solicitó por medio de WhatsApp como fuente principal, pero para quienes no pudieran por ese medio se les dio la opción de hacerlo por correo electrónico o por Messenger.

Las sesiones se organizaron de acuerdo con el trabajo en etapas que ACODESA propone, solo el trabajo en equipo se llevó en reuniones de zoom diferentes, una reunión por cada equipo, esto con la finalidad de facilitar la interacción entre los miembros de cada equipo, las discusiones y la observación e intervención por parte de la instructora.

En la Tabla 1 se describen cada una de las sesiones:

Tabla 1. Descripción de las sesiones de intervención

Sesión	Descripción	Observaciones
Sesión 1. Detalles técnicos Viernes 6 de noviembre 3:00pm	Esta sesión fue para explicar la dinámica de trabajo que se seguiría en el resto de las sesiones, además de revisar el funcionamiento de algunas herramientas de Zoom y de GeoGebra.	Se utilizó un applet con características similares al diseñado para las actividades, solo para que los alumnos practicara la manipulación de puntos y conocieran la interfaz de GeoGebra.
Sesión 2 Etapas 1. Trabajo individual Lunes 9 de noviembre 3:00pm	Se realizó una reunión en zoom grupal, pero los alumnos trabajaron, de manera individual, en las consignas de la hoja de trabajo correspondientes a la etapa 1.	Los alumnos terminaron de responder sus hojas de trabajo antes de que el tiempo en Zoom se terminara, así que el tiempo sobrante se aprovechó para discutir sobre qué les pareció el contexto de la situación y qué experiencias han tenido con el nuevo etiquetado. Utilizaron información de las etiquetas de las barras, aunque no se pidió que lo hicieran.
Sesión 3 Etapas 2. Trabajo en equipo (parte 1) Martes 10 de noviembre	Se hizo una sesión con cada equipo. Se trabajó en los incisos de la parte II de la situación de investigación.	Antes de esta sesión se les enviaron fotos de las etiquetas de las barras de chocolate a los alumnos.

E1 → 3:00pm E2 → 4:00pm E3 → 5:00pm		
Sesión 4 Etapa 2. Trabajo en equipo (parte 2) Miércoles 11 de noviembre E1 → 3:00pm E2 → 4:00pm E3 → 5:00pm	Se hizo una sesión con cada equipo. Se trabajó en los incisos de la parte III de la situación de investigación	Cada alumno trabajó con el applet desde su dispositivo, la instructora pudo ver en tiempo real las acciones de los alumnos mediante una clase en línea de GeoGebra. Con algunos equipos se utilizó la herramienta de compartir pantalla cuando los alumnos querían explicar o mostrar algo a sus compañeros de equipo.
Sesión 5 Etapa 3. Discusión grupal Etapa 4. Autorreflexión (parte 1) Jueves 12 de noviembre 3:00pm	Se inició la sesión con la discusión grupal guiada por la instructora posteriormente los alumnos pasaron a trabajar en las consignas de la etapa 4.	El tiempo fue suficiente para que los alumnos concluyeran con la etapa 4. En la siguiente sesión se inició con la etapa 5.
Sesión 6 Etapa 4. Autorreflexión (parte 2) Etapa 5. Institucionalización Viernes 13 de noviembre 3:00pm	Inició la sesión con la etapa 5 ya que el tiempo de la sesión anterior fue suficiente para concluir la etapa de autorreflexión.	El tiempo fue suficiente para trabajar la institucionalización, los minutos que restaron se aprovecharon para agradecer a los participantes y preguntar su opinión sobre las actividades y el trabajo en todas las sesiones.

4.2 Estructura del análisis de los datos

El objetivo de llevar a cabo el análisis de los datos obtenidos de la puesta en escena de la situación de investigación diseñada en este trabajo es valorar la pertinencia de la misma, esto a través de las producciones y discusiones de los estudiantes, para identificar las partes del diseño que cumplieron con su propósito, así como aquellas que generaron dificultades en los alumnos, de manera que se puedan proponer mejoras a la situación de investigación.

El análisis está seccionado considerando las cinco etapas que ACODESA propone, dado que cada una de ellas tiene características específicas que fueron consideradas en el diseño de la situación de investigación. En cada sección se presenta el análisis de los datos recabados durante la implementación de la situación de investigación.

Para la recolección de datos se utilizaron tres medios: hojas de trabajo de los estudiantes, videograbación de las sesiones y un protocolo de observación. Las fuentes principales de información son fotografías de las respuestas que los estudiantes plasmaron en las hojas de trabajo y que se complementan con las videograbaciones de las sesiones, de las que se puede extraer lo que los alumnos expresaron de manera verbal y no de forma escrita. El protocolo de observación es utilizado para localizar momentos o acontecimientos clave que sucedieron durante la implementación como: los procesos de validación en los equipos, dudas que se presentaron, intervenciones del docente, entre otros.

Dentro de cada una de las secciones se incluyen imágenes de las respuestas de los estudiantes en sus hojas de trabajo, algunas transcripciones de las sesiones videograbadas con explicaciones que complementan las respuestas de las hojas de trabajo o son evidencia de las discusiones al interior de los equipos o en grupo; así como imágenes extraídas de los videos. A lo largo del análisis se utiliza el código A1, A2, A3... para referirse a los alumnos.

Dependiendo del propósito de cada etapa se seleccionaron los incisos o tareas más importantes de acuerdo con las características de cada etapa de ACODESA. En la etapa 1 se eligieron incisos que favorecieran la construcción de representaciones funcionales espontáneas y, en la etapa 2, aquellos que promovieran la discusión al interior de los equipos, la argumentación y el refinamiento de las representaciones funcionales espontáneas. En la etapa 3 se seleccionaron tareas en las que la discusión estuviera orientada hacia las estrategias correctas y hacia propiedades de la proporcionalidad buscadas. Por otra parte, en la etapa 4 se consideraron los incisos que permitieran a los alumnos explicitar el uso de las técnicas o estrategias discutidas en grupo. Finalmente, en la etapa 5 se tomaron en cuenta partes de la institucionalización en donde se hicieran explícitos los conceptos de la proporcionalidad que se trabajaron en el diseño.

De cada uno de los incisos o partes importantes de las etapas se incluyeron ejemplos representativos de las respuestas de los alumnos, por ejemplo: casos en los que las respuestas eran las esperadas, casos en donde se observan elementos interesantes que no se esperaban, o en los casos en los que la mayoría de los alumnos respondieron lo mismo se toma el que sea más legible. Algunos ejemplos con características similares son clasificados en grupos para facilitar la comparación o el contraste entre ellos. Además, se resalta en los mismos

ejemplos si las respuestas fueron las esperadas y las características que el diseño debía favorecer.

4.3 Etapa 1. Trabajo individual

La etapa de trabajo individual tiene el propósito de promover en los alumnos: la reflexión en torno a la situación, un pensamiento diversificado y la construcción de representaciones funcionales espontáneas. El análisis de esta etapa estará centrado en hacer evidente si el diseño favoreció, o no, el cumplimiento de los propósitos del trabajo individual.

En esta etapa los alumnos trabajan de manera individual, inician leyendo el texto con información sobre el contexto de la situación para, posteriormente responder algunas preguntas en torno a la situación problema. Debido a que la parte central en esta etapa es la elaboración de las representaciones funcionales espontáneas (RFE de aquí en adelante), el análisis se centrará en dos de los incisos propuestos a los alumnos en la etapa 1 (Figura 26).

- a) ...
- b) ...
- c) Para poder comparar más fácilmente los chocolates podemos elegir un ingrediente, por ejemplo: el azúcar ¿Cuál chocolate crees que es más dulce? ¿Y cuál consideras el menos dulce? Explica por qué.
- d) ...
- e) Ordena las barras de chocolate de la más dulce a la menos dulce y haz un dibujo que represente el azúcar que consideras que cada una contiene. Explica con un texto tu dibujo.

Figura 26. Preguntas centrales de la etapa 1 (RFE)

Primeramente, en el inciso c), donde los alumnos debían responder cuál chocolate consideraban como el más dulce y cuál el menos dulce, la mayoría de los alumnos coincidieron en la respuesta; eligieron el chocolate Hershey's, sin embargo, la justificación de su elección fue diversa.

En la Figura 27 se presenta la respuesta del estudiante A9 quien expresó que “[El] Hershey's trae 11.7 g de azúcar. Por lo tanto es mas dulce que el turin este contiene 4.8 g (sic)”. Él utiliza la cantidad de azúcar en gramos de cada barra de chocolate para determinar cuál es la más dulce y cuál es la menos dulce, sin embargo, el alumno deja de lado el tamaño de las barras de chocolate fijándose solamente en la cantidad de azúcar que cada una contiene.

Es decir, A9 identificó una de las magnitudes relevantes en la situación problema (la masa en gramos correspondiente a azúcar), y la emplea para proponer una solución; sin embargo, no da importancia a la masa total del chocolate y por lo tanto no establece una relación entre ambas magnitudes.

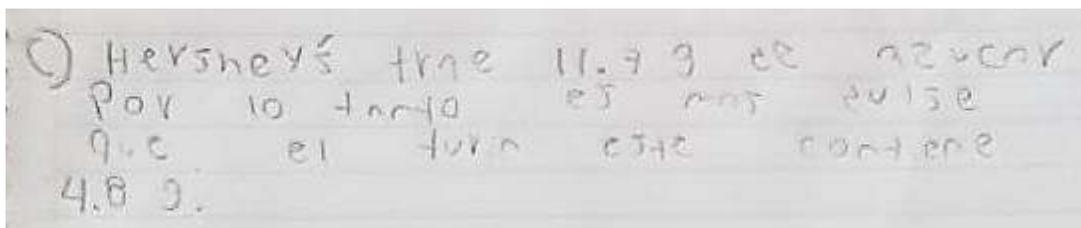


Figura 27. Inciso c) respuesta de A9

Para ese mismo inciso hubo alumnos que se fijaron en otros ingredientes además del azúcar, tal es el caso de A4 (Figura 28) que tomó en cuenta ingredientes como la leche y el cacao para justificar sus elecciones de los chocolates más y menos dulces.

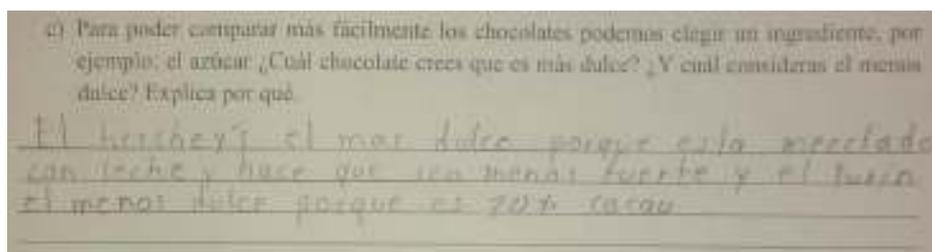


Figura 28. Inciso c) respuesta de A4

Debido a la modalidad virtual en la que se llevó a cabo la implementación, los materiales (hojas de trabajo y fotos de las etiquetas de las barras) fueron puestos a disposición de los alumnos con anticipación, por lo que a pesar de que en este punto de la actividad no se les pide que vayan a buscar información a las etiquetas, algunos alumnos lo hicieron y presentan en sus respuestas datos numéricos que encontraron en las etiquetas de los productos. Se puede considerar que esto influyó para que los alumnos no respondieran considerando sus experiencias y utilizaran solamente la información que rescataron de las etiquetas de los productos.

Las respuestas que los alumnos elaboraron en el inciso c) son su primera RFE sobre la situación y es con esta con la que podrán aportar en la discusión del trabajo en equipo, para que puedan llegar a un acuerdo en equipo sobre cuál es el chocolate más dulce.

Aunque la mayoría de los alumnos coincidieron en su elección del chocolate más dulce y el menos dulce, y que casi todos tomaron en cuenta el ingrediente y la información que se esperaba, es posible asumir que el inciso c) favoreció un pensamiento divergente en los alumnos, pues las justificaciones para sus elecciones fueron diversas y esto les permitirá discutir, negociar y/o argumentar en la etapa de trabajo en equipo.

Por otro lado, el inciso e) es otra pregunta que se elaboró con el propósito de que los alumnos materializaran, de nuevo, una RFE, esta vez utilizando texto y representaciones gráficas (dibujos).

Las respuestas de los estudiantes en el inciso e) fueron diversas, sin embargo, es posible clasificarlas en dos categorías: 1) considerar el azúcar como un elemento aislado y 2) considerar el azúcar como parte de la barra de chocolate. A continuación, se presentan cuatro ejemplos de respuestas de la primera categoría.

Los estudiantes A6 y A10 construyeron representaciones similares en las que representaron la cantidad de azúcar que ellos consideraban contenía cada una de las barras de chocolate. En la Figura 29 y la Figura 30 se puede apreciar el texto y la representación gráfica que cada uno de los alumnos realizó.

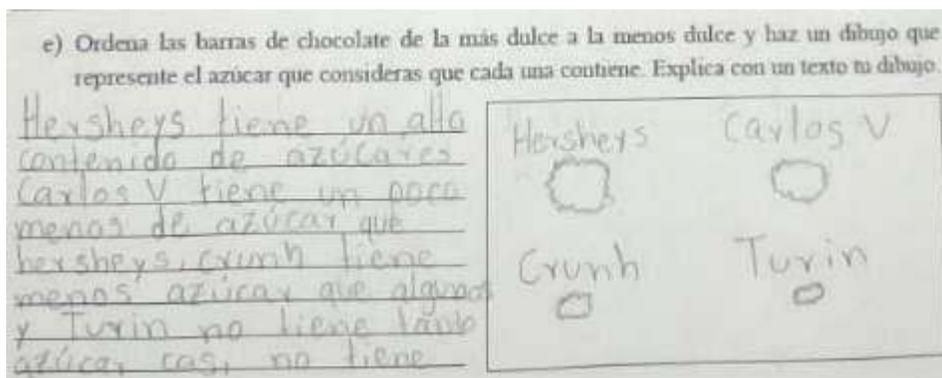


Figura 29. Inciso e) respuesta de A6

e) Ordena las barras de chocolate de la más dulce a la menos dulce y haz un dibujo que represente el azúcar que consideras que cada una contiene. Explica con un texto tu dibujo.

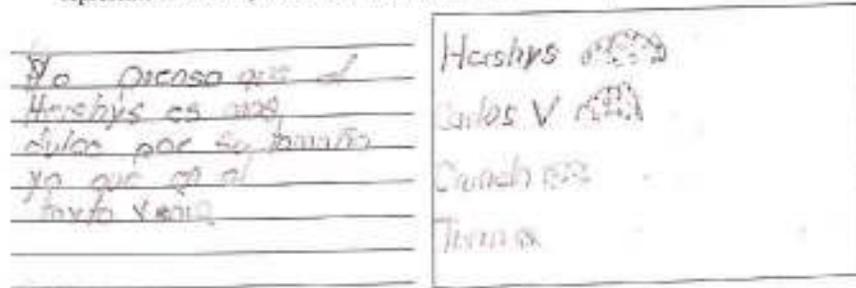


Figura 30. Inciso e) respuesta de A10

Las representaciones de los estudiantes A6 y A10 parecen indicar que los alumnos identifican que hay cierta cantidad de azúcar en cada chocolate, que esta se puede representar como algo fuera de la barra de chocolate y que es el ingrediente que importa para determinar cuál barra es más dulce que otra. Consideran que la barra con el montoncito más grande de azúcar, es decir, con mayor cantidad de azúcar es el más dulce, sin considerar el tamaño o gramos de la barra completa.

Otros estudiantes también tomaron en cuenta la cantidad de azúcar, solo que utilizaron gráficas de barras para representar lo que ellos consideraban que cada producto contenía de azúcar. En la Figura 31 y Figura 32 la se puede observar la RFE que A4 y A9 construyeron para clasificar los chocolates.

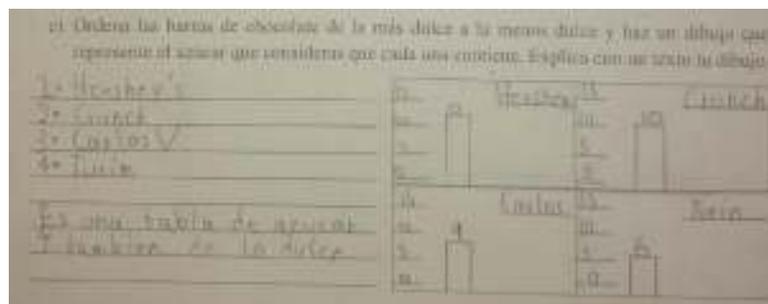


Figura 31. Inciso e) respuesta de A4

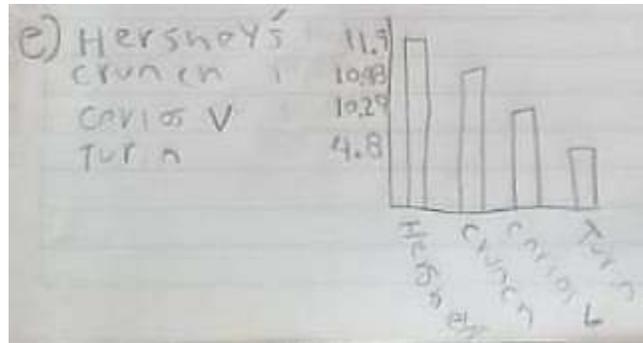


Figura 32. Inciso e) respuesta de A9

Los casos de A4 y A9 se encuentran en la misma categoría en la que consideran el azúcar como algo aislado del resto de la barra de chocolate. Estos cuatro estudiantes (A6, A10, A4 y A9) tomaron el mismo criterio, que *la barra con mayor cantidad de azúcar es la más dulce*, dejando de lado el tamaño o la cantidad de contenido total de cada barra, sin embargo, lo representan de dos maneras diferentes. Los alumnos A6 (Figura 29) y A10 (Figura 30) no presentan datos numéricos y su representación es totalmente una construcción propia, es una RFE no institucional. Por otro lado, A4 (Figura 31) y A9 (Figura 32) clasifican las barras con el mismo que criterio que los estudiantes anteriores (A6 y A10), pero sus representaciones, a pesar de ser RFE tienen algunos rasgos que las acercan a las representaciones institucionales, pues son gráficas de barras con algunas imprecisiones.

Dentro de la segunda categoría los estudiantes A1 (Figura 33) y A2 (Figura 34) también se centraron en tomar en cuenta la cantidad de azúcar, pero lo representaron como parte de la barra de chocolate, lo cual permite pensar que estos alumnos consideran el azúcar como el ingrediente que determina cuál barra es más dulce que otra, sin embargo, ambos estudiantes construyeron las barras de chocolate del mismo tamaño y marcaron o sombrearon la parte que consideraron correspondía a la cantidad de azúcar. Esto parece indicar que hasta ese momento no han considerado que la cantidad de producto de cada barra es diferente, es decir que las barras son de diferente tamaño.

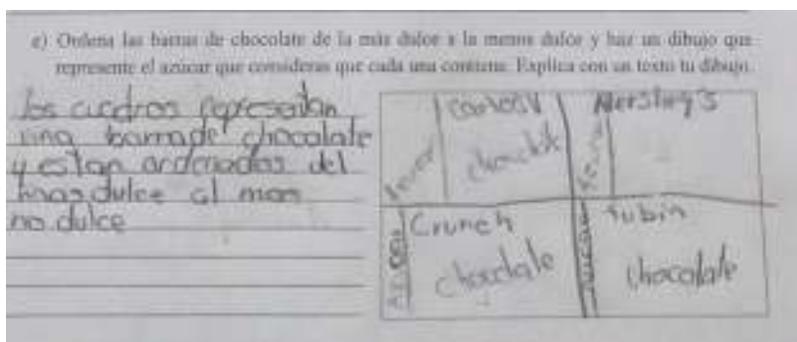


Figura 33. Inciso e) respuesta de A1

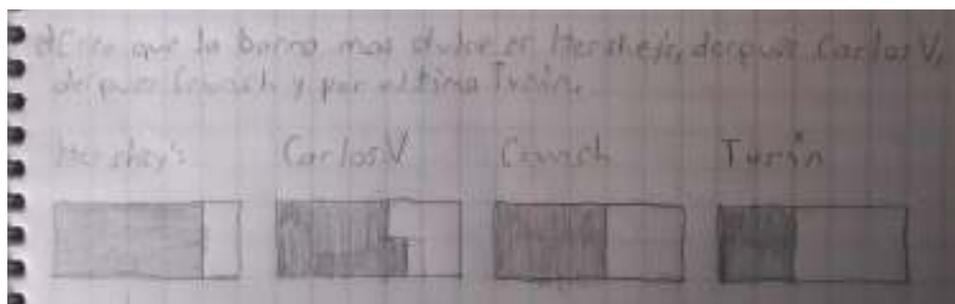


Figura 34. Inciso e) respuesta de A2

Con la información recabada mediante el protocolo de observación fue posible identificar que durante la puesta en escena se presentaron algunas dudas de los alumnos sobre la redacción de algunos incisos, un estudiante expresó:

A7: *Maestra, en la pregunta e), ¿es como nosotros creamos o a base de las imágenes?*

Maestra: *Puedes basarte en las imágenes y hacer tu propia creación. Con toda la información que ya viste, con todo lo que respondiste arriba, haz tu dibujo y explica tu dibujo con un texto. Todo es acerca de cómo tú lo interpretas.*

El estudiante A10 expresó la misma duda que A7, es posible que dentro de la redacción del inciso e) sea necesario expresar de manera más clara que el dibujo que se solicita es una construcción propia con base en sus criterios y la información que se les ha brindado.

En esta etapa del diseño se esperaban respuestas desde la experiencia de los estudiantes y de algunos datos que pudieran rescatar del texto; sin embargo, se obtuvo más que eso porque los alumnos, aunque no se les pidió, obtuvieron información de las etiquetas de las barras, lo que les permitió elaborar respuestas que no se basaron solamente en su experiencia

con el consumo de chocolate. Para los estudiantes no fue evidente el uso de las matemáticas para resolver la situación y clasificar las barras de chocolate de la más dulce a la menos dulce. Ningún estudiante utilizó técnicas o estrategias matemáticas como: regla de tres o valor unitario para llevar a cabo la clasificación de las barras, más bien, con la situación se favoreció el uso de estrategias no matemáticas y diversas.

A pesar de que no se obtuvieron totalmente las respuestas esperadas en la etapa 1 del diseño, se considera que éste sí favoreció el pensamiento divergente y la producción de RFE no institucionales. Los alumnos utilizaron diferente información y justificaron sus elecciones basándose en diversos datos y en sus experiencias. Además, en las RFE que los alumnos lograron construir, surgieron diversos métodos para clasificar los chocolates, y, aunque las clasificaciones no fueron muy diferentes, las justificaciones de sus elecciones sí lo fueron y esto abre la posibilidad de que puedan aportar distintos puntos de vista en la discusión al interior de los equipos de trabajo.

4.4 Etapa 2. Trabajo en equipo

En esta etapa, mediante el trabajo en equipo, se busca promover los procesos de discusión y validación, además del refinamiento de las representaciones funcionales espontáneas construidas de forma individual en la etapa 1.

Se tuvieron tres equipos de trabajo, sin embargo, en el equipo 2 hubo diversos problemas de conexión (fallas de audio y de internet) por parte de los integrantes, lo cual dificultó la comunicación y discusión entre ellos; esto también alentó el trabajo provocando que el tiempo destinado para las sesiones no fuera suficiente y que los integrantes enviaran sus hojas de trabajo incompletas, por lo que no se tiene información (oral ni escrita) de partes que son centrales de las hojas de trabajo. Por estos motivos se decidió incluir en el análisis de esta etapa solo los datos de los equipos 1 y 3. Es importante aclarar que no se busca hacer un análisis comparativo entre ambos equipos; con las producciones y discusiones aquí incluidas se busca evidenciar el logro de los propósitos de esta etapa del diseño y encontrar posibles áreas de mejora en la misma.

El análisis de los datos recabados en esta etapa está seccionado en dos partes. En la primera se trabaja sin el applet diseñado para la situación y en segunda parte sí se incluye el trabajo con este. Se dividió así, puesto que se espera que el applet favorezca el refinamiento de representaciones construidas en la etapa 1 y en las tareas realizadas sin este, así como la visualización y la construcción de estrategias para la comparación de las barras de chocolate.

4.4.1 Trabajo en equipo parte 1 (sin uso del applet)

Las tareas de esta primera parte de trabajo en equipo pretenden centrar la atención de los alumnos en las magnitudes que están en juego y que son útiles para realizar la comparación de los chocolates. Se busca que puedan identificarlas y esbozar la relación que encuentran entre ellas, así como determinar cuál barra de chocolate es la más dulce y la menos dulce.

En el inciso a) se les pide a los alumnos que comparen sus respuestas de la etapa anterior (individual) y que decidan cuál es el chocolate más dulce. Con este inciso se buscaba promover la discusión al interior del equipo. Los alumnos del **equipo 1** expresaron lo siguiente:

A1: *¿Cuál pensarían ustedes que es el más dulce?*

A2: *Es que estoy viendo las fotos que envió [la maestra] para ver los ingredientes de cada barra*

Maestra: *A bueno, pero ahí dice: tomando en cuenta las respuestas que dieron en la hoja anterior, es la hoja de ayer.*

A2: *Pues yo creo que la barra de Hershey's es la más dulce*

A4: *Yo también, porque creo que como está mezclado con leche no está tan concentrado el sabor, entonces es más dulce*

A3: *Yo también creo eso*

En sus hojas de trabajo los integrantes del equipo respondieron utilizando la justificación que expresó A4, el resto de los integrantes no expresó otra justificación para decidir que la barra de Hershey's era la más dulce.

Por otro lado, en el **equipo 3** los integrantes expresaron:

A9: *¿Cuál eligieron ustedes?*

A8: *Yo creo que el Crunch, lo he probado y está muy dulce*

A10: *Yo creo que el Hershey's porque si leímos el primer trabajo dice en lo mero último dice que cómo podemos saber qué chocolate es más dulce y dice considerando su tamaño. Y el Hershey's por así decirlo es el más grande.*

A9: *Yo elegí el Crunch porque trae calorías, grasas saturadas, azúcares y también trae exceso de grasa y esta es muy mala para el cuerpo.*

(Hubo una breve pausa porque A11 entró tarde a la videollamada y se esperó para poder integrarla a la discusión)

A11: *En esta yo había elegido la de Crunch porque en las fotos que nos mandó [la maestra] de los chocolates dice que tiene 52.4 de azúcar y pues los demás tienen más poca.*

A10: *¿Entonces pondremos Crunch?*

Maestra: *Pues por mayoría parece que esa sería la respuesta, ¿Qué dicen?*

A10: *Pero pondríamos solo Crunch, ¿o tendríamos que explicar una respuesta?*

Maestra: *¿Por qué eligieron el Crunch?*

(A8, A9 y A11 repitieron los argumentos que dieron anteriormente para elegir Crunch)

A10: *Yo creo que eso que dice A9 estaría bien poner*

A11: *Sí, yo también estoy de acuerdo con lo que dice A9*

La discusión de los equipos 1 y 3 en torno al inciso a) sugiere que la tarea fue sencilla de resolver, pues los integrantes no tuvieron dificultades para elegir el chocolate más dulce. El hecho de que los integrantes del **equipo 1** desde el principio eligieron la misma barra de chocolate como la más dulce facilitó aún más la elección de una respuesta para este inciso. En el caso del **equipo 3**, tomar la decisión dependió de lo que la mayoría había elegido, para este equipo también fue sencillo tomar una decisión ya que solo un alumno tenía una respuesta diferente. Pareciera que en ambos equipos el acuerdo que se tomó fue respecto a la justificación de su elección. Elegir el chocolate fue sencillo, ya que la mayoría de los alumnos coincidió al comparar su respuesta individual, así que la justificación de sus elecciones fue lo que convenció al resto de los miembros de cada equipo. Los integrantes de los equipos expresaron su justificación para haber elegido determinada barra como la más dulce y la justificación que les pareció más completa la escribieron en sus hojas de trabajo.

Es posible que una reformulación del inciso a) podría favorecer discusiones con mayor intercambio de ideas, pues únicamente se les pide a los estudiantes elegir el chocolate más dulce. Tal vez, el énfasis se debería poner en la clasificación que se hizo de los chocolates en la etapa 1, para favorecer la diversidad de ideas de los alumnos y, de esta manera, propiciar una discusión en la que tengan que decidir cuál sería el método o estrategia adecuados para llevar a cabo la clasificación de las barras de chocolate.

El inciso b) propone completar una tabla (ver Figura 35) utilizando los datos que se encuentran en las etiquetas de las barras de chocolate. La tabla tenía la finalidad de orientar a los alumnos a ver la barra de chocolate como un todo (el total de producto en gramos) compuesto de partes (cada uno de los ingredientes en gramos), una de las cuales serían los gramos de azúcar.

b) Completen la siguiente tabla.

Cantidades en gramos	Turín	Crunch	Carlos V	Hershey's
Azúcar				
Otros ingredientes				
Total de producto				

Figura 35. Tabla inciso b) (partes de un todo)

Para responder este inciso no hubo una discusión en el **equipo 1**; cada integrante inició con el trabajo en su hoja de respuestas de manera individual, hasta que hubo intervención por parte de la docente:

Maestra: *¿Cómo van con las tablas?*

A1: *Maestra, en lo que dice Hershey's... has de cuenta... tengo que... has de cuenta la azúcar y lo demás fibra dietética, grasas, grasas saturadas, ¿todo eso lo tengo que sumar para poner otros ingredientes? O ¿cómo le hago?*

Maestra: *Pues esa sería una opción, a ver A2 y A4 [A3 salió de la videollamada] ¿qué otra opción tienen para llenar esa tabla?*

A2: *Mire, por ejemplo, el Turín, el total de producto son 18gr. entonces a eso le resto lo de azúcar y lo que sobre ¿son los otros ingredientes?*

Maestra: *¿Tú que dices A4?*

A4: *Pues yo creo que sí, porque si la azúcar solo es esa parte ya los demás ingredientes, pues es lo que queda de la barra*

Maestra: *Ahí está A1, tus compañeros lo están haciendo así, esa podría ser una opción.*

En un principio cada estudiante estaba respondiendo la tabla en su hoja de trabajo, no se estaba discutiendo ni trabajando en equipo. La profesora intervino para propiciar el diálogo, y esta intervención permitió al equipo compartir sus ideas y estrategias para completar la tabla que se les solicitaba. Es importante destacar que al inicio los estudiantes esperaban que fuera la profesora quien validara la estrategia para el llenado de la tabla, sin embargo, se promovió que fueran ellos mismos quienes llegaran a un acuerdo para lograr un verdadero trabajo en equipo.

El **equipo 3** discutió lo siguiente para completar la tabla del inciso b) (Figura 35):

A8: *Maestra en otros ingredientes ¿pueden ser como calorías, grasas saturadas y todas esas?*

Maestra: *Sí, todo lo demás que contiene el chocolate*

A11: *Creo que, en el primer cuadrado de Turín, en azúcares, sería la cantidad de 6.9gr. no sé ustedes [...]*

A8: *Yo en Turín encontré que dice azúcares 4.8 gr.*

A11: *Es cierto, fue un error mío, perdón.*

A8: *Y en otros ingredientes hay que poner lo demás carbohidratos y todo lo demás*

A11: *¿Qué dicen los demás? [...]*

A8: *Maestra y en total del producto, ¿podemos sumar azúcares y otros ingredientes?*

Maestra: *Esa podría ser una opción. ¿Hay algún otro lugar de donde podrían sacar esa información? [...]*

A11: *Ya revisé la parte de enfrente del chocolate Turín y dice 18 gr.*

A8: *Eso ha de ser, porque dice contiene 18gr.*

A10: *Pues sí, eso está bien.*

A9: *El azúcar de Crunch es 10.48 [gr.]*

A11: *¿Eso de dónde lo sacaste?*

A9: *Del paquetito [etiqueta] hay dos opciones en azúcar uno es 52.4 [gr.] y otro es 10.48 [gr.]. Si te fijas ahí arriba dice por 100 gramos y pieza de 20 gramos, como que lo está dividiendo.*

- A11: *Creo que tiene razón porque si nos fijamos el Crunch dice que tiene 20 gramos, entonces sería 10.48gr. en azúcar.*
- A8: *Y en otros ingredientes, ¿qué ponemos?*
- A9: *Yo digo que podríamos poner lípidos, ¿no? o proteínas o sodio [...]*
- Maestra: *¿Por qué piensan en poner un solo ingrediente?*
- A9: *Podríamos poner varios, ¿no?*
- A11: *Podríamos agarrar varios y sumarlos*
- Maestra: *¿Y por qué no todos?*
- A9: *¿Sumar todos maestra?*
- Maestra: *Pues ahí no dice que uno, no dice que dos, dice: otros ingredientes. ¿No habrá otra forma de encontrarlo aparte de sumar? [...]*

El trabajo con el **equipo 3** se dio de forma diferente al del equipo 1, los integrantes del equipo 3 dedicaron más tiempo a localizar la información que era necesaria para completar la tabla. Además, ponían a consideración de todos los integrantes la información que obtenían de las etiquetas, trabajaron todo el tiempo bajo acuerdos que todos aceptaran. Para el llenado de la tabla un integrante compartía oralmente lo que había obtenido y el resto lo validaba, se podría decir que el equipo 3 realizó un verdadero trabajo en equipo para responder el inciso b).

Para llegar a la estrategia más rápida para el llenado de la tabla tuvo que haber intervención por parte de la docente, ya que los alumnos primero consideraban poner solo un ingrediente en el espacio que era para otros ingredientes. Fue necesario intervenir con preguntas para que los alumnos lograran construir la idea de que al restar el azúcar del contenido total podían obtener los otros ingredientes de la barra.

Se obtuvieron resultados diversos en el trabajo con la tabla del inciso b) (Figura 35), sin embargo, en ambos equipos la tabla cumplió con el propósito de hacer reflexionar a los alumnos sobre la barra de chocolate como un todo compuesto por diferentes ingredientes, de los cuales centraremos la atención en el azúcar.

Los incisos c) y d) estaban pensados para que los alumnos se centraran en qué parte del contenido total de cada barra es azúcar; por ello, se utilizaron relaciones que eran fáciles de

identificar (mitades y cuartos) con la información de la tabla del inciso b) (ver Figura 35). En torno a estos incisos los alumnos del **equipo 1** expresaron:

A1: *Yo creo que la barra que tiene la mitad de gramos sería Crunch. ¿Cuál pensarían ustedes?*

A4: *Pues casi porque si fuera la mitad fuera 10 exacto.*

A2: *Pues dice: ¿en cuáles es la mitad o más de la mitad? Por ejemplo, el Turín son 18gr. y el azúcar son 4.8 [gr.] lo cual sería menos de la mitad, o sea que ese quedaría descartado [...] Pues la verdad, además del [chocolate] Turín, todos son más de la mitad, así que Crunch, Carlos V y Hershey's tienen más de la mitad de azúcar.*

A1: *Pero el que se acerca más, ¿cuál vendría siendo?*

A2: *Pues dice: ¿en cuáles? Lo que sería en las tres.*

A4: *Sí, las tres [Crunch, Carlos V y Hershey's] más de la mitad y el Turín menos.*

A2: *Entonces pondríamos Crunch, Carlos V y Hershey's.*

A1: *Los enumeraríamos de cuál va más o menos de la mitad.*

A2: *Sí, por ejemplo... A ver.*

A1: *Crunch sería el número 1.*

A2: *Crunch es el que está casi más cercano a la mitad, luego sería Hershey's y a lo último es Carlos V.*

La discusión al interior del equipo inicia con una conjetura de A1: “*la barra con la mitad de gramos es Crunch*”, referente a que la barra de Crunch es la que tiene un contenido de azúcar más cercano a la mitad del contenido total del producto, y la pone a discusión con sus compañeros, quienes brindan algunos argumentos que en parte apoyan la conjetura de A1. A pesar de que la tarea no pide que se haga una clasificación de los chocolates considerando su contenido de azúcar, la idea surge en este equipo y los integrantes discuten al respecto y realizan una clasificación de las barras considerando en cuál de ellas el contenido de azúcar está más cerca de la mitad de su contenido total.

Al finalizar la discusión cada integrante empezó a plasmar su respuesta en su hoja de trabajo de manera individual y en silencio. Con la intención de compensar el hecho de que los alumnos no podían ver lo que sus compañeros escribían en la hoja de respuesta, por ser

en línea la implementación, la maestra pidió que cada uno compartiera de manera oral lo que dibujaba y escribía en su hoja.

A pesar de que los alumnos compartieron de manera oral lo que estaban plasmando en su hoja de respuestas, cada uno construyó una representación diferente, pero sí incluyeron elementos que se discutieron.

El estudiante A4 continuó utilizando gráficas de barras, un tanto imprecisas, para representar la cantidad de azúcar de cada chocolate (como lo hacía en la etapa 1); sin embargo, refinó su representación inicial, pues incorporó una barra más para representar el contenido total de producto (ver Figura 36 y Figura 37). Además, realizó sus gráficas considerando el orden correspondiente a la clasificación que el equipo acordó en la discusión: Crunch, Hershey's y Carlos V.

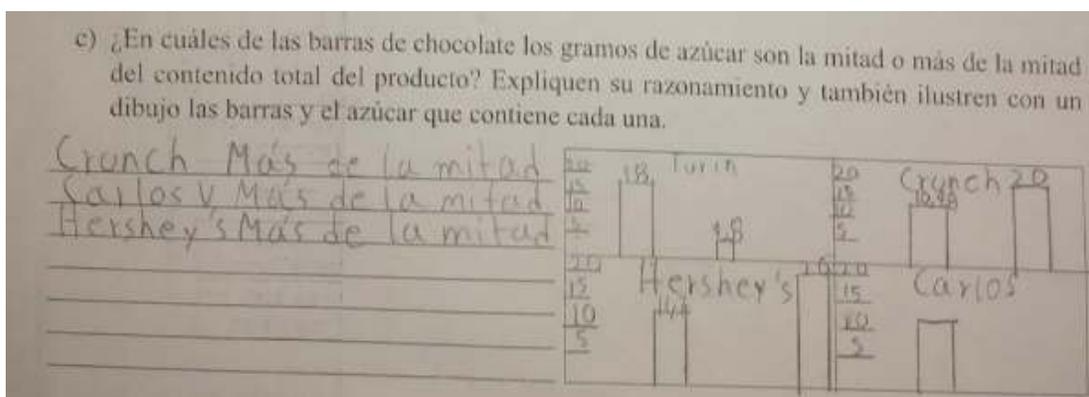


Figura 36. Inciso c) respuesta de A4

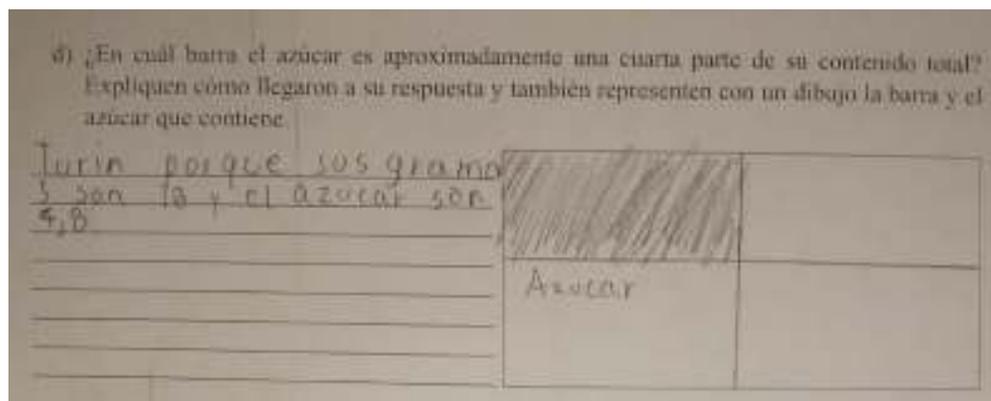


Figura 37. Inciso d) respuesta de A4

El alumno A2 continúa utilizando su RFE de la etapa 1, coloreando la cantidad de azúcar que considera contiene cada barra, pero, al igual que en el caso de A4, se puede observar un refinamiento de su RFE inicial. En esta ocasión se evidencia que A2 se preocupa por que la parte sombreada sea lo más cercana posible al contenido real de azúcar de cada barra (ver Figura 38). Además, el tamaño de las barras que dibuja ya es diferente, esto sugiere que A2 ya está considerando que las barras no son del mismo tamaño, que el total de producto es diferente en cada una. Y, por último, es importante destacar que este estudiante también incluyó en su respuesta la clasificación que se acordó en la discusión del equipo.

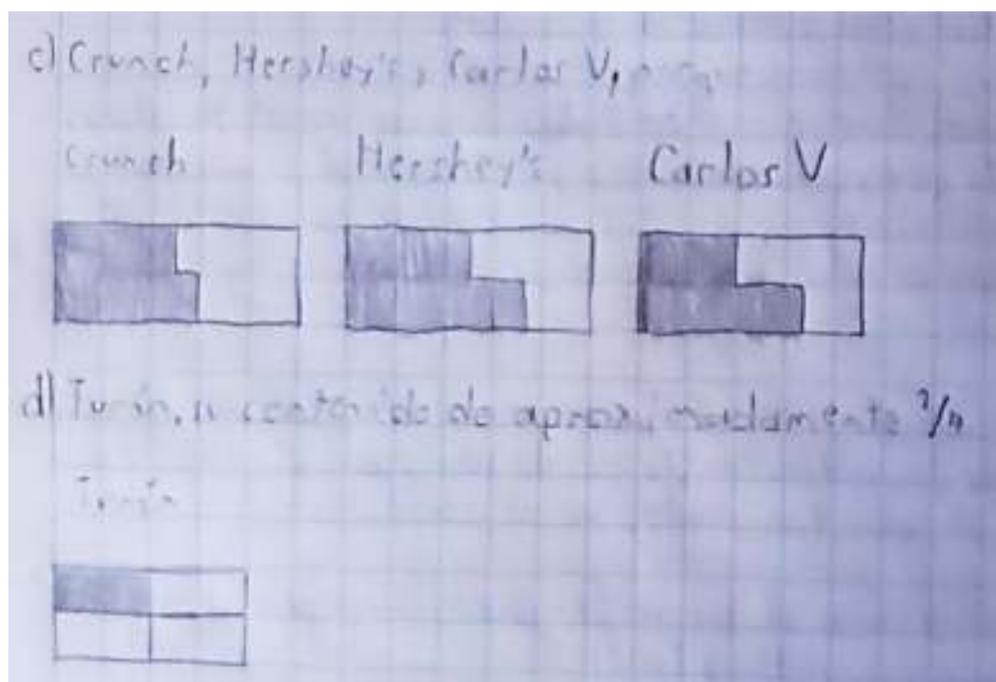


Figura 38. Incisos c) y d) respuestas de A2

La alumna A1, al igual que en la etapa 1, dibujó las barras y las seccionó en dos partes: *chocolate* y *azúcar*. Se considera que la alumna simplificó los datos que trabajaron en la tabla (Figura 35), pues considera el azúcar y el resto del contenido de la barra de chocolate lo engloba en la parte que ella denomina *chocolate*. El refinamiento en su RFE inicial se observa en que esta vez es notable que fue cuidadosa en el espacio que consideró como azúcar, se apegó al contenido de azúcar de cada barra (la mitad o más de la mitad). Además, al igual que sus compañeros de equipo, tomo en cuenta la clasificación que acordaron en la discusión

sobre cuál chocolate tenía un contenido de azúcar más cercano a la mitad del total de producto.

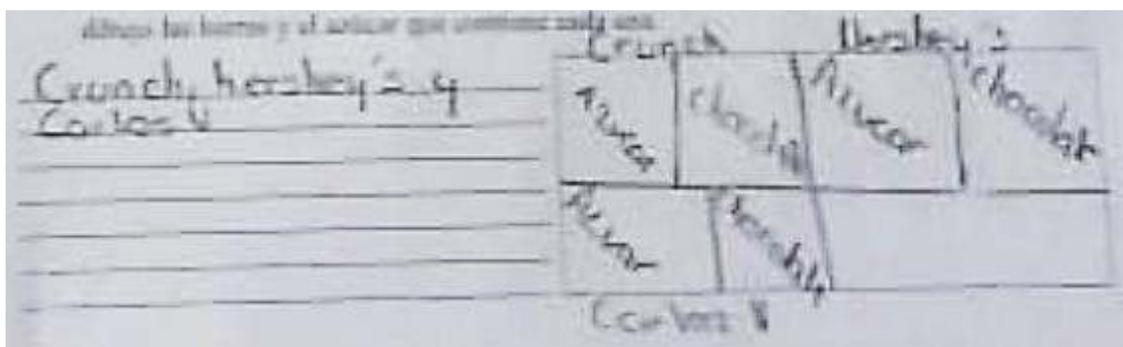


Figura 39. Inciso c) respuesta de A1

Por otro lado, para responder a los incisos c) y d) los integrantes del **equipo 3** expresaron:

A8: *En la c) ¿qué vamos a hacer? No entiendo muy bien*

A11: *Pues dice ¿en cuál de las barras de chocolate los gramos de azúcar son más de la mitad o la mitad que el contenido que tiene? Y yo digo que es el Crunch, porque si nos fijamos son 20 gr. en total y la azúcar es 10.48[gr.] es poquito más de la mitad.*

A9: *Si es el Crunch porque es el que está más en medio*

A11: *Y en el cuadro tendríamos que dibujar las barras de chocolate...las barras de azúcar perdón, que contiene cada uno.*

A9: *Podríamos hacer una gráfica.*

A11: *Pero mira...dice: dibuja las barras y el azúcar que contiene cada una.*

A8: *Qué tal si tenemos que dibujar todos los chocolates y poner el azúcar de cada una.*

A9: *Oh sí, podríamos hacer una barra para cada chocolate y le pondríamos adentro su azúcar.*

A11: *O podríamos al ladito hacer una montañita, así como si fuera el azúcar.*

Maestra: *Oigan, pero ¿por qué las van a dibujar todas? Si ustedes dijeron que el Crunch era el que tenía más de la mitad. ¿Ya vieron las demás [barras]? ¿Las otras barras no tienen la mitad o más [de azúcar]?*

A8: *El Hershey's.*

A11: *Es cierto, el Hershey's tiene también poquito más de la mitad.*

A9: *Yo diría que son el Crunch y el Carlos V que son así la mitad.*

A10: *¿Entonces sería el Crunch y Hershey's?*

A11: *Si nos fijamos bien, en el Carlos V son 10 [gr.]*

- A8: *Si, pero el 10 no es la mitad de 18*
- A11: *Si, pero el 10.48 no es la mitad del 20, es poquito más de la mitad*
- A9: *Pero el que queda más a la mitad es el Crunch*
- Maestra: *Es que chequen bien la pregunta dice: La mitad o más de la mitad*
- A8: *Entonces el Carlos V es más de la mitad*
- A11: *Entonces serían los 4 porque el Turín es 18[gr.] y el azúcar es 4.8[gr.]*
- A10: *Pero el Turín no puede ser porque es menos de la mitad [...]*
- A11: *Yo creo que son Crunch, Carlos V y Hershey's, los tres.*
- A9: *Si porque el Turín da menos de la mitad.*
- A10: *Entonces serían esas tres.*

En la discusión, el **equipo 3** no sólo tomó el acuerdo de cuáles eran las barras que contenían la mitad o más de azúcar, sino que acordaron la forma en la que representarían su respuesta en la hoja. En sus hojas de trabajo cada uno de los integrantes incorporó los elementos que discutieron, como ejemplo se tomaron las respuestas de A11 (Figura 40 y Figura 41). El resto de los integrantes plasmaron representaciones que contenían los mismos elementos, con algunas variantes como: las barras de chocolate en vertical o un poco inclinadas, la cantidad de azúcar escrita dentro de los montoncitos.

- c) ¿En cuáles de las barras de chocolate los gramos de azúcar son la mitad o más de la mitad del contenido total del producto? Expliquen su razonamiento y también ilustren con un dibujo las barras y el azúcar que contiene cada una.

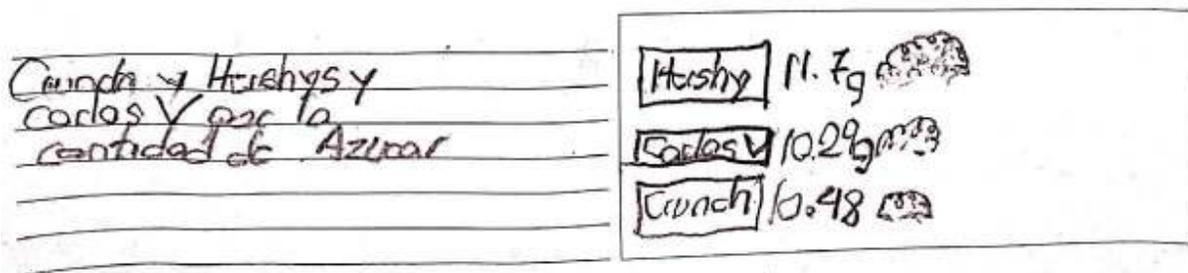


Figura 40. Inciso c) respuesta de A11

d) ¿En cuál barra el azúcar es aproximadamente una cuarta parte de su contenido total? Expliquen cómo llegaron a su respuesta y también representen con un dibujo la barra y el azúcar que contiene.

Tuna porque si multiplicamos $4.8 \times \frac{1}{4}$ nos da un resultado aproximado al total

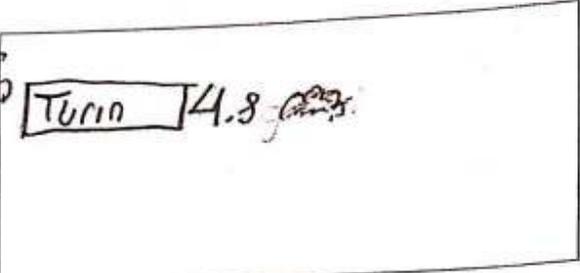


Figura 41. Inciso d) respuesta de A11

La discusión en torno a los incisos c) y d) permitió a los alumnos de ambos equipos establecer conjeturas y validarlas entre ellos mismos mediante argumentos basados en la información que obtuvieron de la tabla. Además, en los dos equipos lograron llegar a un acuerdo sobre cuáles barras de chocolate contenían la mitad o más de la mitad de azúcar. En el **equipo 1** también acordaron el orden en que debían aparecer, sin embargo, no acordaron una forma de representar las barras y el azúcar que contiene cada una. A diferencia del **equipo 3**, en el que llegaron a un acuerdo sobre cómo plasmarían su idea en la hoja de trabajo.

En sus respuestas es posible observar que en el **equipo 1** no se produjo una representación de equipo, una representación común, pero aun así hubo refinamiento de las RFE de la etapa 1, pues cada alumno integró elementos de la discusión a sus representaciones. Esto, en parte, lo podemos atribuir a la modalidad en la que se llevó a cabo la implementación de la actividad, pues las condiciones no permitieron que los estudiantes observaran el trabajo del resto de los integrantes del equipo. A pesar de que se promovió que oralmente se describieran las producciones de cada alumno, esto no fue suficiente para generar un acuerdo de lo que plasmarían en la hoja de trabajo.

Por otro lado, en el **equipo 3** no fue necesario solicitar compartir lo que plasmarían en la hoja, ellos mismo lograron llegar a un acuerdo, podríamos decir que el **equipo 3** logró construir una representación de equipo, en la que incluyeron diversos elementos que cada integrante tenía en sus RFE de la etapa 1.

Los incisos c) y d) lograron su propósito al hacer que los alumnos discutieran y reflexionaron en torno a la parte del contenido total de cada barra de chocolate que es azúcar. En ambos equipos se logró el refinamiento de las RFE de la etapa 1, con algunas diferencias que fueron más notables en el equipo 1.

En el inciso e) se buscaba que los alumnos identificaran la información útil para determinar cuál era el más dulce y cuál era el menos dulce. En la discusión en torno a este inciso los alumnos del **equipo 1** expresaron:

A1: *Yo considero que el menos dulce es el Turín y el más dulce es el Hershey's que viene siendo más de la mitad de azúcar.*

A2: *No, el más dulce sería Carlos [V] porque según su contenido tendría más azúcar.*

A4: *Yo estoy entre dos porque el Carlos [V] pues si tiene un poquito más de la mitad y el Hershey's también, pero tiene de diferencia un gramo más. Entonces o puede ser el otro porque tiene menos producto y tiene un poquito más azúcar o puede ser el otro porque tiene más azúcar y tiene más producto.*

A2: *Pero me imagino que como el Hershey's tiene más producto y tiene como azúcar [...] Dependería del contenido del producto porque, por ejemplo, si el producto es mayor, tal vez no tendrá tanta azúcar concentrada como el Carlos [V] que es menos producto y la azúcar estaría más concentrada.*

A4: *Y no podemos dividir el azúcar entre el producto y así nos va a dar el por ciento de cuanto por ciento de azúcar hay y con esa conclusión ya deducimos cuál es el más dulce.*

A2: *Pues más azúcar tiene Hershey's así que, si es cierto, o sea más azúcar tiene Hershey's, pero menos producto Carlos [V].*

A1: *¿Y entonces? ¿Carlos [V] o Hershey's?*

Maestra: *Fíjense lo que dice: considerando la información de la tabla, entonces con eso podrían decidir. [...]*

A1: *Yo digo Hershey's.*

A3: *Yo también.*

A4: *Bueno pues también Hershey's porque tiene un poco más que Carlos [V].*

A2: *Pues si [Hershey's] tiene más azúcar. Y entonces el menor [el menos dulce] sería Turín y el mayor [el más dulce] sería Hershey's.*

En la discusión es posible notar que los alumnos están utilizando información y reflexiones de incisos pasados para iniciar la discusión en torno al inciso e), como lo que A1 propone sobre los chocolates más y menos dulces basándose en los que contienen la mitad o más de la mitad de azúcar. Además, en sus argumentos los estudiantes utilizan términos ya vistos en incisos anteriores, hablan de contenido total, producto y cantidad de azúcar. Empiezan a tratar de hacer una relación entre los gramos de producto y los gramos de azúcar, incluso hablan sobre una estrategia cuantitativa en la que consideran un cociente, pero la discusión se desvía al darse cuenta de que la tarea les solicita otra respuesta.

La discusión en torno al inciso e) nos indica que es necesaria una reformulación al diseño, en lo correspondiente a esta parte, pues los alumnos del **equipo 1** se estaban inclinando por establecer una estrategia que les permitiría clasificar los chocolates, sin embargo, el solicitar en el inciso e) que solo determinaran cuál era el más dulce y el menos dulce les resultó algo sencillo; para resolver lo solicitado no tenían que discutir más sobre las estrategias de realizar cocientes o calcular porcentajes propuestas por A4 en torno a la problemática planteada por A2 sobre la concentración de azúcar en cada chocolate.

Al interior del **equipo 3**, en torno al inciso e) se expresó lo siguiente:

A10: *El menos dulce es el [chocolate] Turín.*

A11: *Exactamente, porque si vemos las imágenes dice 70% cacao, es más natural.*

A9: *Muy buen punto.*

A8: *Y el que tiene más [azúcar] es el Hershey's*

A11: *Sí, y yo ya sé por qué. Si leímos lo que hicimos en la primera parte dice que, considerando su tamaño, entonces le pondríamos Hershey's porque sería el chocolate más grande.*

A8: *Okey*

En la discusión del **equipo 3** es posible notar que consideran elementos diferentes a los que pedía la tarea para determinar el chocolate más dulce y el menos dulce. Se solicita que se utilice la información de la tabla y los alumnos regresan a utilizar justificaciones que habían dado en la etapa 1, podríamos decir que los alumnos no refinaron los argumentos que

en un principio utilizaron, aún no están considerando la información que es útil para hacer la clasificación: cantidad de producto y cantidad de azúcar.

Con las ideas que ponen en juego los integrantes del equipo 3 se reafirma la necesidad de hacer una reformulación del inciso e). En el equipo 1 se perdió la oportunidad de discutir sobre posibles estrategias para la clasificación y en el equipo 3 hubo un regreso a los argumentos de la etapa 1, se podría decir que esto tal vez se deba a que la tarea del inciso e) es sencilla. Será necesario cambiar el inciso e) y centrarlo en la estrategia para clasificar los chocolates y en la información que es útil para llevar a cabo la clasificación.

Para el inciso f), en la hoja de trabajo se incluían cuatro cuadrículas que representaban cada una de las barras de chocolate y se solicitaba que colorearan el espacio correspondiente al contenido de azúcar. Con este inciso se pretende trabajar la visualización, ya que los alumnos deben representar de manera visual lo que se ha trabajado en incisos anteriores con relación a las partes de un todo.

El estudiante A4 utilizó cada cuadrado pequeño como una unidad y sombreó lo más aproximado posible a la cantidad de azúcar de cada barra. Al parecer el alumno consideró que cada cuadrado equivalía a un gramo de producto, y en cada barra sombreó lo correspondiente (aproximadamente) a la cantidad de azúcar (ver Figura 42).

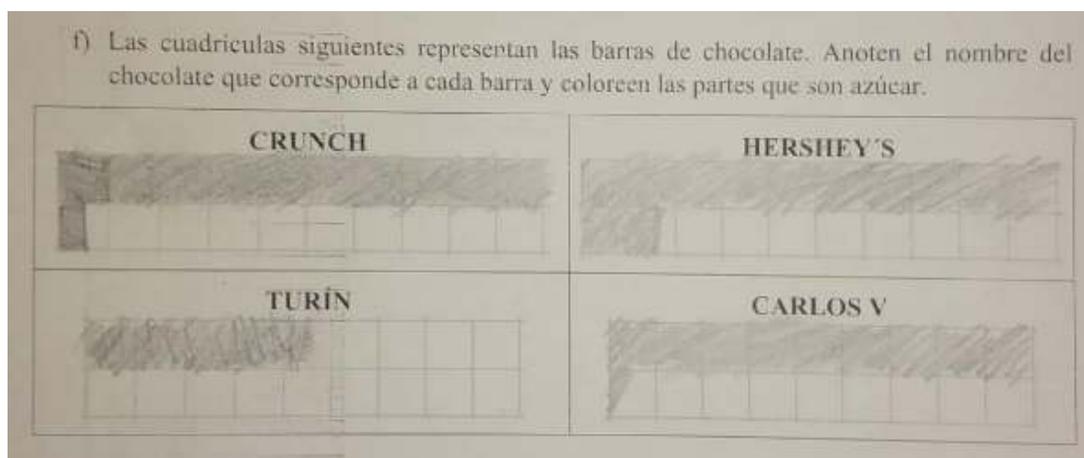


Figura 42. Inciso f) respuesta de A4

La alumna A3 estuvo escribiendo sus respuestas en una hoja blanca, por lo tanto, ella misma tuvo que dibujar sus cuadrículas (ver Figura 43). La alumna no respetó el tamaño de

las cuadrículas que se proporcionaban en la hoja de trabajo y dibujó todas las barras del mismo tamaño. Esto hace pensar que la alumna sigue sin darle importancia al tamaño de las barras para poder clasificar los chocolates. Al observar los dibujos y la parte sombreada, se podría decir que A3 está considerando que cada uno de los cuadrillos dentro de las barras vale dos gramos de producto, pues la alumna colorea aproximadamente cinco cuadrillos en las barras que tienen cerca de diez gramos de azúcar, sin embargo, esto pierde sentido al observar lo que hace con la barra de Turín pues sombrea menos de un cuadrillo, cuando esta barra tiene 4.8 gramos de azúcar. Una causa de que A3 haya hecho así sus cuadrículas y haya sombreado cada una de esa manera, podría ser que durante las discusiones de los incisos anteriores la alumna estuvo teniendo problemas de conectividad que ocasionaron que estuviera fuera de la videollamada durante gran parte de la discusión en equipo.

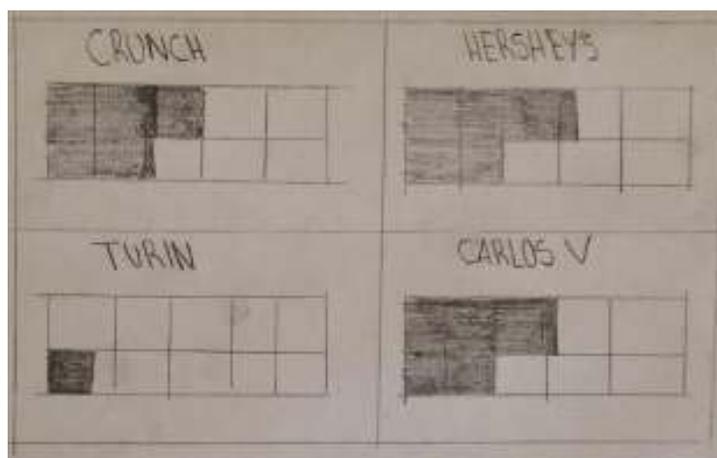


Figura 43. Inciso f) respuesta de A3

El alumno A2, al igual que A3, dibujó sus propias cuadrículas, pero él si cuidó que el tamaño de las barras fuera el mismo que en las hojas de trabajo. Utilizó la cuadrícula de su hoja para replicar la del diseño. Es posible observar que A2 trató de acercarse lo más posible a la cantidad real que cada barra de chocolate contiene de azúcar, cada cuadrillo lo consideró como un gramo.

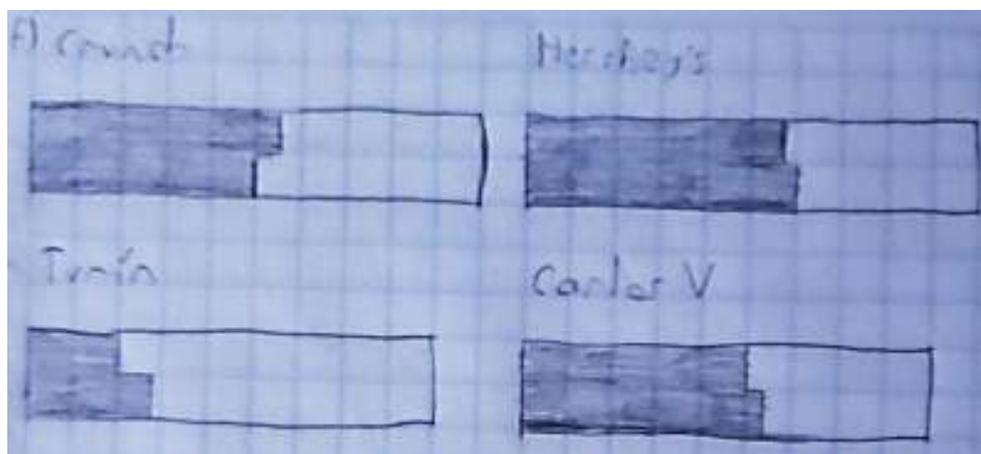


Figura 44. Inciso f) respuesta de A2

Para responder el inciso f) no hubo discusión al interior del **equipo 1**, cada integrante, de manera individual, escribió su respuesta en su hoja. Es posible que el diseño de este inciso no favoreciera la discusión, al haberles brindado los dibujos de las barras con la cuadrícula definida, y al haber incluido el nombre de la barra correspondiente a cada cuadrícula, de manera que ya que no había aspectos en los cuales establecer acuerdos para plasmar una respuesta. Es necesaria una reformulación del inciso f) que promueva que los alumnos inicien una discusión. Uno de los cambios posibles sería incluir una sola cuadrícula en la que ellos deban definir de qué tamaño será cada barra y cuánto debe valer cada uno de los cuadritos que hay.

En el caso del **equipo 3**, el tiempo no alcanzó para terminar la hoja de trabajo en la sesión y cada estudiante respondió de forma individual el inciso f). A continuación, se muestran sus respuestas.

Los estudiantes A11 y A8 estuvieron trabajando en las hojas de trabajo impresas, por lo tanto, contaban con la misma cuadrícula en físico. En sus respuestas (Figura 45 y Figura 46) se puede apreciar que consideraron cada cuadrito como 1gr. y colorearon apropiadamente la cantidad de cuadritos correspondiente a la cantidad de azúcar de cada barra de chocolate. La única diferencia que se puede notar es que hicieron el sombreado en diferentes sentidos; A11 lo hizo de arriba hacia abajo y A8 de derecha a izquierda.

f) Las cuadrículas siguientes representan las barras de chocolate. Anoten el nombre del chocolate que corresponde a cada barra y colorean las partes que son azúcar.

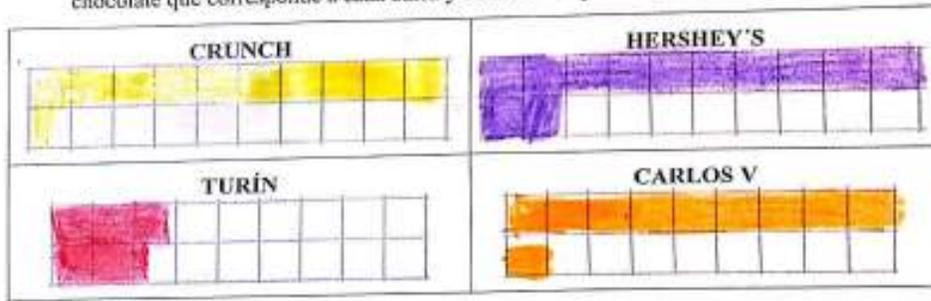


Figura 45. Inciso f) respuesta de A11

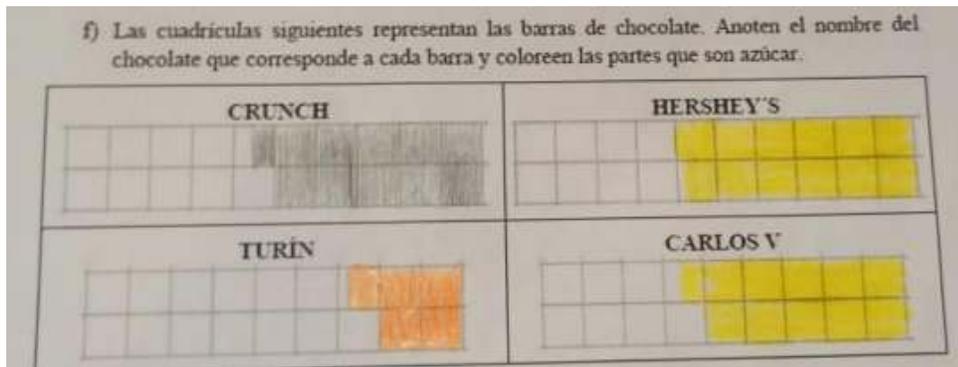


Figura 46. Inciso f) respuesta de A8

El alumno A9 estuvo trabajando en hojas de su cuaderno, por lo cual tuvo que dibujar sus propias cuadrículas. En la Figura 47 se puede ver que el alumno dibujó las barras del mismo tamaño y, por la cantidad de cuadrillos que colorea en cada barra, podríamos decir que los consideró con el valor de 1 gramo cada uno.

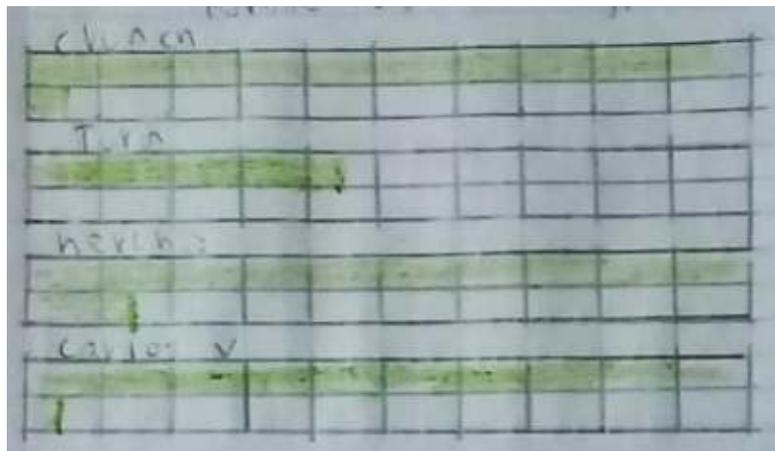


Figura 47. Inciso f) respuesta de A9

La falta de discusión en el equipo 1 para el inciso f) sugiere un cambio. En el equipo 3 no es posible saber si la tarea propició la discusión entre los integrantes. Sin embargo, la mayoría de los alumnos de ambos equipos sombrearon las cuadrículas de formas similares, considerando cada cuadrito con el valor de 1 gramo. Es posible que en la reformulación del inciso f) sea necesario resaltar más la importancia del tamaño o de la cantidad de cuadritos que se considera para cada una de las barras.

Para finalizar esta primera parte del trabajo en equipo, se les propone a los alumnos el inciso g), en el cual se espera que hagan explícita la información que han utilizado para tomar decisiones respecto a cuál chocolate es más dulce que otro. Con relación a esto el **equipo 1** expresó:

Maestra: *A4 comentó que el contenido, ¿verdad A4?*

A4: *Y también cuánto contenía, o sea el tamaño y qué hacía el tamaño. O sea, los gramos de la barra y qué contenía la barra.*

A2: *Entonces utilizamos tamaño, contenido y...*

A1: *Y gramos.*

A2: *Y gramos para poder deducir cuál es más dulce y menos dulce.*

La tarea del inciso g) resultó ser sencilla para el **equipo 1** y no favoreció discusión ni argumentación. Hubo un breve intercambio de ideas que les permitió completar una respuesta para poner en la hoja de trabajo. Es conveniente realizar una modificación a este inciso que permita a los alumnos generar una discusión, la cual se podría centrar en discutir las posibles estrategias que serían útiles para clasificar los chocolates, y no solamente en cuál es la información útil para ello, como lo solicita en inciso g).

En el caso del **equipo 3** no hubo tiempo suficiente para responder el inciso g) durante la sesión, sin embargo, en las hojas de trabajo de los alumnos hay similitudes en sus respuestas; consideraron los mismos elementos. Se muestra como ejemplo la respuesta de A8 (Figura 48):

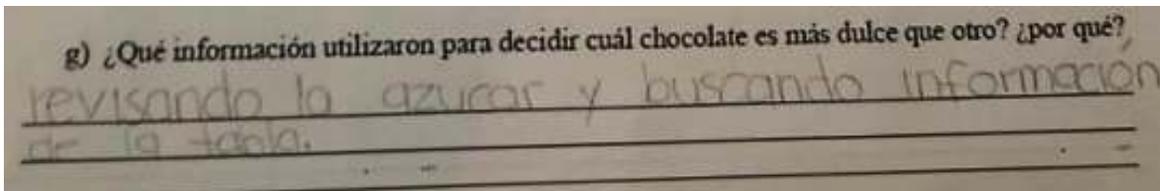


Figura 48. Inciso g) respuesta de A8

El diseño de la parte 1 del trabajo en equipo logró favorecer el proceso de discusión en algunas de las tareas solicitadas, también fue posible observar que hubo procesos de validación al interior del equipo por parte de los mismos integrantes y con ayuda del docente. Los alumnos lograron llegar a acuerdos que plasmaron en sus hojas de trabajo, por tal motivo es posible decir que hubo refinamiento en las RFE de la etapa 1, sin embargo, podemos hablar de un refinamiento parcial en el equipo 1, pues en sus nuevas representaciones consideraron los elementos que estuvieron presentes en la discusión, pero no lograron construir una representación del equipo. Y en el caso del equipo 3 se podría considerar como un refinamiento avanzado, ya que lograron llegar a un acuerdo sobre la forma en que plasmarían la respuesta en sus hojas de trabajo.

Será necesario hacer modificaciones al diseño en los incisos en donde la discusión no fue favorecida, así como algunos cambios que permitan a los alumnos construir una representación del equipo. Además, es posible que sea necesario reorientar algunos incisos para centrarse en la tarea de clasificar las barras de chocolate, de la más dulce a la menos dulce, así como en las estrategias que se podrían emplear para ello, buscando que la discusión no se centre en identificar el chocolate más dulce o el menos dulce, porque al parecer esto resultó ser una tarea sencilla que no requirió de discusión.

Por último, vale la pena rescatar que para los alumnos el trabajo en equipo no es algo que se dé naturalmente, esto es algo que queda en evidencia con el **equipo 1**, ya que al principio cada integrante estaba trabajando en su hoja de manera individual, hasta que hubo intervención por parte del docente. Por lo tanto, el papel del profesor es importante para propiciar un trabajo en equipo genuino en el que se genere discusión y argumentación en torno a las ideas que los estudiantes proponen, con la finalidad de llegar a un acuerdo común.

4.4.2 Trabajo en equipo parte 2 (uso del applet)

El trabajo en la segunda parte de la etapa 2 pretendía, mediante el uso de un applet y tablas de valores, favorecer la construcción de una estrategia que permitiera llevar a cabo la clasificación de las barras de chocolate de la más dulce a la menos dulce.

Para iniciar con el trabajo, del inciso a) al d) se dan indicaciones para que los alumnos exploren el applet (<https://www.GeoGebra.org/m/nyktshtb>) que se propone (Figura 49 y Figura 50), con la finalidad de que logren identificar los elementos que lo componen y construyan relaciones entre ellos.

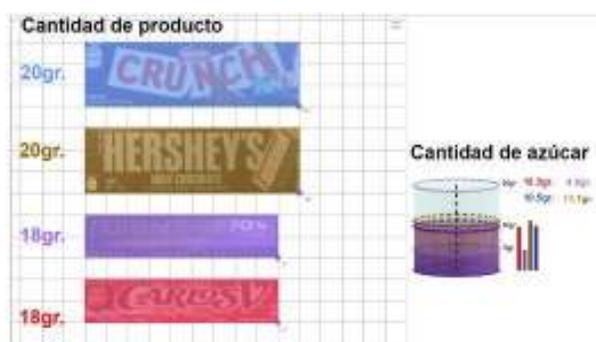


Figura 49. Applet “Chocolates y azúcar”

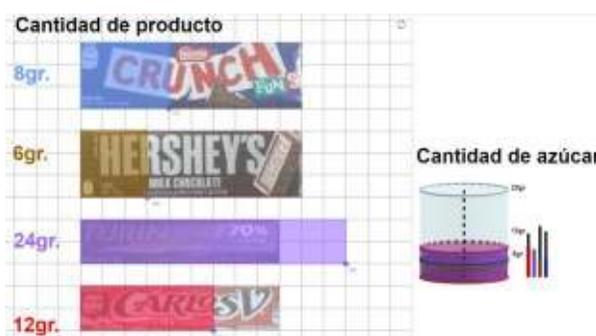


Figura 50. Applet “Chocolates y azúcar” (diferente cantidad de producto consumido)

Durante la exploración del applet, los integrantes del **equipo 1** estaban trabajando de nuevo de manera individual. Hasta que hubo intervención por parte de la docente se inició con el intercambio de ideas al interior del equipo.

Maestra: *¿Ya respondieron el inciso a)? ¿Se pusieron de acuerdo para la respuesta?*

A1: *En el inciso a) yo le puse: se mueve la cantidad del cilindro*

A2: *Yo le puse: la cantidad de producto y el azúcar aumentan*

A4: *Yo puse: nos indica cuánto hay de producto y azúcar y se modifica el cilindro*

A2: *Y luego el inciso b) ¿Sucede lo mismo? ... Sí*

A1: *(Lee el inciso c)) ¿Qué sucede con la cantidad de producto?*

A4: *Pues bajan*

A2: *Regresan a cero. Y con los otros puntos pasa lo mismo*

Los incisos a) al d) no favorecieron la discusión al interior del **equipo 1**. Trabajaron en equipo, pues un integrante estuvo leyendo la pregunta, uno o dos más respondían y eso plasmaban en la hoja de respuestas, pero no hubo cuestionamientos hacia las respuestas que algunos de los integrantes proporcionaron, no se promovió el establecimiento de conjeturas ni la argumentación en torno a los elementos o relaciones que podían encontrar en el applet. Esto podría indicar que las tareas que se diseñaron para la exploración del applet tal vez fueron elementos sencillos de observar, de los cuales no había que discutir.

Por otro lado, durante la exploración del applet en el **equipo 3**, A10 compartió su pantalla ya que A9 tenía problemas para manipular los puntos por estar trabajando en un celular. Al respecto de las tareas comentaron:

A11: *Ya moví el punto yo, A10 y A8 también y al ladito nos aparece la cantidad de azúcar que sería 10.5 gr. Y al lado del chocolate ya no está 0 gr. está 20 gramos que es lo que pusimos en el cuadro en cantidad total.*

A10: *La pregunta dice: ¿qué sucede con la cantidad de producto? ¿Y con la cantidad de azúcar?*

A11: *La cantidad de producto y la cantidad de azúcar aumentaron al mover el punto, ¿qué opinan ustedes?*

A9: *Esa respuesta estaría bien [...]*

A11: *Ahora tenemos que hacer lo mismo con los demás chocolates, me imagino*
(realizaron la manipulación del resto de los puntos y estuvieron comentando sobre los elementos que aparecían en pantalla, los colores de cada chocolate y las cantidades de producto y azúcar)

A10: *Ahora hay que responder la pregunta: ¿Sucede lo mismo que al mover CH?*

A9: *Sí*

A11: *Sí, el producto aumentó. Pues pongámosle: si pasó lo mismo, pero con otra cantidad ¿Les parece bien?*

A9: *Sí, hay que ponerle eso*

En el **equipo 3** trabajaron todos al mismo tiempo con la exploración y al respecto de lo que observaban haciendo comentarios para después acordar una respuesta que plasmar en la hoja de trabajo, sin embargo, no hubo cuestionamientos al respecto de las ideas que surgieron, a los integrantes les fue sencillo acordar la respuesta que plasmarían en la hoja de trabajo.

El trabajo de ambos equipos con los incisos c) y d) sugieren que la exploración plantea tareas sencillas de observar en el applet.

El inciso e) buscaba que los alumnos hicieran explícita la relación que encontraban entre la cantidad de producto y la cantidad de azúcar cuando la primera magnitud variaba. El **equipo 1** expresó:

A2: *La cantidad de producto que se consume afecta la cantidad de azúcar*

A1: *Sí porque sería menos producto*

A2: *Si porque entre más producto más azúcar y entre menos [producto] menos [azúcar]*

A4: *La cantidad cambia*

Maestra: *¿Y cómo cambia esa cantidad A4?*

A4: *Pues si consumes más o menos*

Maestra: *¿Qué pasa si consumes más producto entonces? ¿Cómo cambia?*

A4: *Pues aumenta la cantidad de azúcar*

Los integrantes del **equipo 1** inician el diálogo con la conjetura de A2: “*La cantidad de producto que se consume afecta a la cantidad de azúcar*”, con la cual, al parecer A1 está de acuerdo. A pesar de que no se le cuestiona a A2 sobre su conjetura, él la complementa siendo más preciso, de forma cualitativa, en la manera en que varían las cantidades. Los tres alumnos (A1, A2 y A4) tiene la misma idea respecto a la relación entre cantidad de producto y cantidad de azúcar, A4 requiere de la intervención de la profesora para expresar su idea. En las hojas de trabajo cada integrante expresó con diferentes palabras la conclusión a la que llegaron.

A pesar de que el diálogo entre los integrantes del **equipo 1** fue corto, los alumnos lograron hacer explícita una relación entre las magnitudes de interés para la situación problema. El intercambio de ideas entre los integrantes tal vez no contiene elementos suficientes para poder decir que es una discusión, sin embargo, se logró el propósito del inciso e).

Sobre el inciso e) el **equipo 3** expresó:

A11: *No entiendo muy bien esa pregunta*

A9: *¿Qué relación encontramos entre la cantidad de azúcar y el producto consumido?*

A11: *¿Al momento de moverla? [...] Sigo sin entender muy bien esa pregunta*

Maestra: *Podemos ver que A10 está moviendo en el applet, ¿qué pasa con la cantidad de azúcar y de producto cuando A10 está moviendo la barra?*

A11: *Va cambiando, depende si lo vas reduciendo o haciendo más grande*

Maestra: *¿Entonces qué relación habría ahí?*

A11: *En que el producto y la azúcar disminuyen y se aumentan, no sé cómo explicarme*

A10: *Los dos reducen y aumentan dependiendo*

A11: *Depende de a donde muevas el punto*

A9: *¿Entonces cómo le pondríamos?*

A10: *Que los dos reducen o aumentan dependiendo de a donde muevas el punto*

A11: *Depende de hacia dónde muevas el punto*

En el **equipo 3** hubo algunas dificultades para comprender la redacción de la tarea planteada, se requirió de la intervención de la profesora, y con su apoyo los estudiantes A11 y A10 lograron establecer la relación entre la cantidad de producto consumida y la cantidad de azúcar que le corresponde. En el caso de este equipo los alumnos establecieron la relación en términos de un elemento del applet, es decir, establecieron la relación del producto consumida y el azúcar que le corresponde en función de la dirección en la que se moviera el punto; a diferencia del equipo 1 en donde la relación fue establecida considerando la idea: *consumir más producto hace que aumente la cantidad de azúcar.*

El inciso e) cumplió su propósito en el trabajo con ambos equipos, sin embargo, hubo diferencias en la forma en que cada equipo estableció la relación que se buscaba fuera construida. El equipo 1 logró interpretar el movimiento de los puntos como consumir más o

menos producto, en cambio el equipo 3 se quedó en el plano que manejaba el applet y establecieron la relación en términos de la dirección en la que se movía el punto sin considerar que esto significaba la cantidad de producto consumido. Podríamos decir que no sería necesaria una reformulación del inciso e), pues el propósito se cumplió con ambos equipos, pero si sería conveniente que con la intervención del profesor se oriente a los alumnos que como el equipo 3, se queden con la relación en términos solo del applet buscando que logren establecer una relación como la que logró construir el equipo 1.

Los incisos f) y g) tenían el propósito de orientar a los alumnos hacia propiedades de la proporcionalidad, que las enunciaran de forma cualitativa; propiedades como: *Si me como la mitad de una barra de chocolate estaré comiendo la mitad de su contenido total de azúcar.* Al respecto, el **equipo 1** comentó:

A1 y A2: *Maestra, ¿nosotros elegimos cuál barra?*

Maestra: *Sí, dice: si alguien comiera alguna barra así que ustedes pueden elegir*

A1: *¿Cuál quieren elegir?*

A4: *Crunch*

A2: *Son 20 [gr] una tercera parte serían...*

A3: *Sería como 6 gramos*

A2: *Consumiría casi 5 gramos de azúcar aproximadamente*

A4: *Aquí dice que tiene 10.48gr por porción y una tercera parte sería como de 3.7 [gr.] algo así.*

A2: *Entonces sería Crunch y consumiría...*

A4 y A2: *De tres a cuatro gramos de azúcar*

A1: *Y si comieras dos barras del mismo chocolate ¿Qué tanta azúcar estarías comiendo?*

A2: *Si usamos Crunch serían...*

A4: *20,96 gramos exactos, 21 gramos aproximadamente*

En esta ocasión el **equipo 1** llegó a un acuerdo sobre sus respuestas para los incisos f) y g), trabajaron proponiendo aproximaciones que entre ellos mismo fueron validando hasta acordar una respuesta. Podríamos hablar de un cumplimiento parcial del propósito de estos incisos pues, aunque los alumnos fueron capaces de relacionar que al comer un tercio de la barra de chocolate se estaría consumiendo también un tercio del contenido total de azúcar y

al consumir dos barras el consumo de azúcar se duplicaría, lo hicieron para un caso particular (el del chocolate Crunch). Es posible que se deba a que la redacción del inciso era difícil de interpretar, además la intervención de la docente no se inclinó por orientar a los alumnos hacia lo que se buscaba. Un cambio en la redacción de los incisos f) y g) podría facilitar su comprensión y dejar claro que se busca establecer la relación de una manera general y no sobre un chocolate en particular.

Respecto a los incisos f) y g) en el **equipo 3** se comentó:

A11: *¿Un tercio? O sea, una tercera parte*

A9: *Un tercio de cantidad de azúcar del chocolate*

A11: *Si movemos el punto a la tercera parte que se comió nos va a aparecer la azúcar, pero ahí tenemos uno de 20 gr ¿ahí como sacaríamos la tercera parte?*

A9: *Daría 6.666667*

A11: *Pero ya vi que no nos saldría la cantidad de azúcar porque solo aparece cuando te pones al final de la barra. Entonces si una tercera parte del chocolate es como tú dices 6.666...*

A9: *Tendríamos que dividir la azúcar entre tres [...]*

A8: *Oigan ¿y si hacemos regla de tres simple? Si una es 10.5 [gr] ¿Cuánto van a ser 3? Esto por esto entre esto. 3 por 1 que da 3 y 3 entre 10.5 que me da 3.5, el resultado ha de ser 3.5.*

A11: *Sí, es lo que yo hice [...] Y en la pregunta que sigue solo hay que sumar 10.5 más 10.5 que son dos barras de chocolate*

A9: *Serían 21*

A11: *21 gramos de azúcar estaría consumiendo*

El **equipo 3** optó por considerar uno de los chocolates para responder a los incisos f) y g), eligieron el mismo chocolate que el equipo 1, el chocolate Crunch. Tomaron la cantidad total de producto y la dividieron entre tres, lo mismo hicieron para la cantidad total de azúcar; y para sacar el doble simplemente duplicaron el azúcar. Algo que pasó en particular con el **equipo 3** fue que se habló de utilizar la *regla de tres simple*, el estudiante A8 plantea la forma en la que se utilizaría ese procedimiento para calcular la cantidad de azúcar que comerías al consumir una tercera parte de la barra completa de chocolate, su procedimiento es un poco

confuso de manera oral ya que lo plantea sin hacer uso de las magnitudes (cantidad de producto, cantidad de azúcar), esto hace que al realizar las operaciones se haga de manera incorrecta. Además, el alumno (A8) considera que por una barra de chocolate se consumen 10.5gr. de azúcar, lo cual es correcto, pero después menciona: “¿Cuánto van a ser 3?” podría ser que se refiera a la tercera parte que se está buscando, pero para que fuera así el alumno debería hablar de un tercio. A pesar de que se plantea una estrategia incorrecta, los integrantes del **equipo 3** respondieron correctamente los incisos f) y g) para el caso particular que eligieron, el chocolate Crunch.

Con la resolución de los incisos f) y g) sucedieron cosas similares entre ambos equipos, los integrantes eligieron una barra para hacer cálculos y determinar la cantidad de azúcar que le correspondería a una tercera parte del producto y al doble del mismo. Es posible que se necesaria una reformulación de este inciso, pues, aunque los alumnos respondieron correctamente, considerando el chocolate que eligieron, se esperaba que ellos plantearan la relación de una forma general, es decir, que logran reflexionar sobre que al comer una tercera parte de cualquier barra de chocolate se está consumiendo una tercera parte del azúcar total del producto, y, de esta forma trabajar de manera cualitativa la proporcionalidad.

El inciso h) solicitaba a los alumnos utilizar las etiquetas de los chocolates para completar cuatro tablas (Figura 51), una por cada barra de chocolate, en las que debían determinar la cantidad de azúcar para diferentes cantidades de producto.

h) Con ayuda de las etiquetas de las barras de chocolate y del applet “Chocolates y azúcar”, completa las tablas siguientes.

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g		20g		18g		18g	
10g		10g		9g		9g	
5g		5g		6g		6g	
4g		4g		4.5g		4.5g	
1g		1g		1g		1g	

Figura 51. Tablas inciso h)

Para el llenado de las tablas, en el **equipo 1** se comentó:

A4: *En el applet si marcas exactamente cuánto mide la barra ahí te diría cuánta azúcar es*

A2: *Sí, ahí dice*

Maestra: *Oigan, ¿en todos los espacios que marcan de la barra de chocolate les aparece la cantidad de azúcar que hay?*

A4: *No, a mí solo me aparece cuando pongo justo entera la barra*

Maestra: *¿Y cómo le van a hacer para sacar los demás?*

A4: *Dividiendo*

A1: *Yo digo que le haríamos como lo hicimos en el inciso f), así como nos estaba pidiendo un tercio, entonces tendríamos que dividir*

Los comentarios de los integrantes del **equipo 1** de nuevo son breves, sin embargo, logran llegar a un acuerdo sobre el uso que le darán al applet y la estrategia que seguirán para el llenado de las tablas. El estudiante A4 es el primero en proponer utilizar la división para completar las tablas puesto que el applet les brinda información que les permitirá completar el primer renglón de cada una de ellas. Al parecer la comparación que A1 hace sobre el llenado de las tablas y lo que trabajaron para responder el inciso f) es suficiente para que A2 y A3 se convenzan de utilizar la división como estrategia, pues una vez que termina el diálogo cada uno de los alumnos empieza a trabajar en el llenado de las tablas. La docente pregunta de qué manera lo está haciendo cada uno y de manera oral los cuatro integrantes responden que están dividiendo para encontrar los valores que el applet no les da.

Se esperaba que los alumnos logran hacer una conexión entre los incisos f) y g), considerando que en esos incisos responderían en lo general y de forma cualitativa como: *Si como un tercio de la barra comeré un tercio del contenido total de azúcar*, se buscaba que con las tablas trabajaran utilizando ese tipo de propiedades de la proporcionalidad, pero esta vez de forma numérica. Es posible que el hecho de que el **equipo 1** lo hiciera desde el principio utilizando una barra en particular facilitara la conexión que A1 logró hacer entre los incisos y las tablas del inciso h).

Sobre el trabajo con el llenado de las tablas en el **equipo 3** comentaron:

A9: *Las tablas esas están muy fáciles porque son como una parte de la cantidad de azúcar*

- A11: *Cantidad de azúcar en 20 gr de Crunch es 10.5 [gr]. Si movemos el punto para que nos de 10 gr. de Crunch ¿cuánta azúcar nos da?*
- A10: *No aparece la cantidad de azúcar*
- A11: *No pues sería muy fácil, entonces hay que dividir los 10.5 [gr] entre dos para que nos de la mitad*
- A9: *Y 5gr es una cuarta parte. Lo que nos salga en 10 gr. tendríamos que dividirlo de nuevo entres dos para sacar la mitad de la mitad [...]*
- A11: *¿Cómo le haríamos para sacar el de 4gr y el de 1gr?*
- A9: *Maestra ¿Cómo le haríamos para sacar el de 4gr?*
- Maestra: *¿Cómo le hicieron para sacar el de 5gr?*
- A9: *20gr lo dividimos entre dos y salió el 10 y ese lo volvimos a dividir entre dos*
- Maestra: *Si dividieron dos veces entre dos, eso sería lo mismo que dividir entre 4, ¿cuánto es 20 entre 4?*
- A9: *Es 5*
- Maestra: *Entonces ahora ocupo llegar al 4, ¿entre cuánto debo dividir el 20 para que sea 4?*
- A11: *Entre 5*
- Maestra: *Entonces si la cantidad de producto se tuvo que dividir entre 5 pues la cantidad de azúcar también, ¿no?*

En el **equipo 3** fue necesaria la intervención de la profesora para orientar a los alumnos en los casos en los que no era tan sencillo identificar la parte de producto que se estaba consumiendo. Para calcular la mitad y la cuarta parte los integrantes del equipo 3 encontraron la forma de hacerlo de manera sencilla, hubo dudas cuando se trató de encontrar una quinta parte o el valor unitario, fue necesario intervenir apoyando a los alumnos solo en el llenado de la tabla de Crunch (ver Figura 51), en las siguientes tablas ellos replicaron la estrategia.

Las tablas del inciso h) (Figura 51) cumplieron su propósito con ambos equipos, ya que lograron utilizar las propiedades cualitativas de la proporcionalidad (*al doble le toca el doble*), para calcular los datos faltantes en las tablas de valores. Las estrategias de los equipos fueron similares, sin embargo, en el equipo 3 surgió la idea de usar la regla de tres simple, lo cual no se concretó. Sería posible que en futuras implementaciones el profesor o profesora pueda orientar a los alumnos para el uso de esa estrategia en el llenado de las tablas.

Además, podríamos decir que las tablas del inciso h) (Figura 51) iniciaron siendo un problema para los estudiantes, pues tuvieron que reflexionar en torno a la información y establecer conexiones entre la misma para poder construir su estrategia, pero esto sucedió solo con la primera tabla ya que, para las siguientes tablas solamente replicaron sus estrategias y de esta manera terminaron siendo ejercicios en los que los estudiantes fácilmente aplicaban la estrategia que surgió con la primera tabla.

Por otro lado, en las mismas tablas de valores (Figura 51) se podrían realizar modificaciones con la finalidad de que surja la estrategia de factor adecuado, es decir, cambiar las cantidades de producto de las tablas de manera que coincidan en otro renglón además de 1g. De esta manera se favorecería el trabajo con otra estrategia además del valor unitario.

Posterior a las tablas (Figura 51) se proponen los incisos i) y j) que tenían el propósito de hacer explícita la relación proporcional que hay entre las magnitudes, se buscaba que los alumnos lograran identificar, por ejemplo, que, al reducir la cantidad de producto a la mitad, la cantidad de azúcar se reducía de igual manera. Sobre estos incisos los integrantes del **equipo 1** comentaron:

A1: *Yo digo que, pues la azúcar se vuelve a la mitad*

A2: *La azúcar se reduce a la mitad de su cantidad*

Maestra: *Oigan, la azúcar se reduce a la mitad, pero no dice qué pasa con la azúcar dice qué pasa en el renglón ¿Qué más hay en el renglón?*

A2: *La cantidad de producto*

Maestra: *¿Y qué pasó con el producto?*

A3: *También se redujo a la mitad*

A1: *O sea, se redujo el producto y la azúcar*

A2: *Entonces sería la cantidad del producto y la azúcar se reducen a la mitad*

A4: *Y ahora vamos con el Turín*

A2: *Las cantidades se convierten en una cuarta parte*

A1: *¿Cuarta?*

A2: *Si porque primero es a un medio y la mitad de un medio es un cuarto [...] A no es un cuarto*

A4: *Es un tercio*

Los integrantes del **equipo 1** identificaron rápidamente que la cantidad de azúcar se reducía a la mitad en el renglón que el inciso i) les indicaba, sin embargo, requirieron apoyo de la profesora para notar que no solo debían considerar el azúcar, sino que la pregunta les solicitaba explicaran lo que pasó con todo el renglón de la tabla, es decir, con el producto y la cantidad de azúcar. Después de la intervención les fue sencillo responder el inciso j) que tenía el mismo propósito que el i), pero esta vez las cantidades se redujeron a un tercio del total.

En el **equipo 3** el tiempo de la sesión no fue suficiente para terminar las hojas de trabajo destinadas a la parte dos de trabajo en equipo, los integrantes trabajaron de manera individual y fuera de las sesiones en responder los incisos i) y j). De sus hojas de trabajo se rescataron las siguientes respuestas:

i) ¿Qué sucede con las cantidades de Crunch y de azúcar al pasar del primer al segundo renglón? Expliquen su razonamiento.

Se reduce a la mitad ya que te pide la mitad

Figura 52. Inciso i) respuesta de A11

j) ¿Qué sucede con las cantidades de Turín y de azúcar al pasar del primer al tercer renglón? Expliquen su razonamiento.

Se reduce a la tercera parte ya que te lo pide

Figura 53. Inciso j) respuesta de A11

i) ¿Qué sucede con las cantidades de Crunch y de azúcar al pasar del primer al segundo renglón? Expliquen su razonamiento.

Pues la cantidad de Azúcar baja a 5.25 al dividir $10.5 \div 2 = 5.25$

Figura 54. Inciso i) respuesta de A8

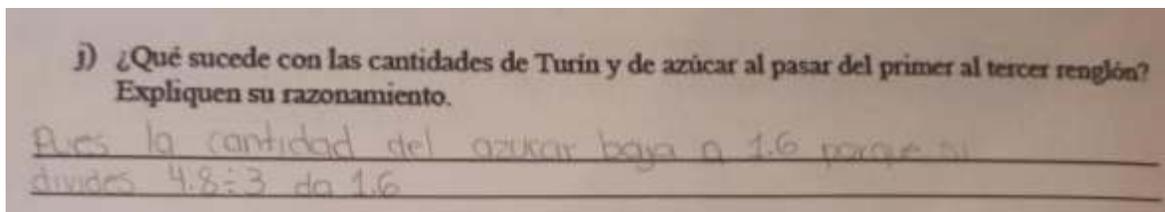


Figura 55. Inciso j) respuesta de A8

Los integrantes del **equipo 3** plasmaron respuestas similares entre los miembros del equipo en sus hojas de trabajo; las respuestas de A8 y A11 representan las diferentes ideas que se encontraron en sus hojas de trabajo. Algunos integrantes se quedaron en lo cualitativo hablando de mitades y terceras partes, como lo hizo A11 (Figura 52 y Figura 53), mientras que otros alumnos utilizaron los valores específicos de cada renglón, como se muestra en las respuestas de A8 (Figura 54 y Figura 55). Ambos tipos de respuesta pueden considerarse como correctos ya que los alumnos identifican lo que se pretende: que ambas cantidades se reducen en la misma proporción (mitades y terceras partes).

Los incisos i) y j) cumplieron su propósito en ambos equipos, ya que lograron identificar la forma en la que la cantidad de producto y de azúcar se reducían, aunque hubo variedad de respuestas, sobre todo en el equipo 3, la idea de la reducción en partes iguales fue expresada de diferentes formas por los integrantes de los equipos.

Para finalizar con la segunda parte del trabajo en equipo se proponen dos últimos incisos, k) y l), en los que se pretende que los alumnos hagan explícita la información de las tablas (Figura 51) que les sería útil para determinar cuál es el chocolate más dulce y que, además la utilicen para determinar cuál barra es la más dulce. El **equipo 1** comentó:

- A3: *El primer renglón ¿Qué no? porque ahí sería el azúcar de toda la barra completa*
- A4 y A2: *Sí*
- A4: *Y también la cantidad porque si una barra chiquita tiene más azúcar pues va a estar más dulce*
- Maestra: *¿Oigan y no afecta en nada que en el primer renglón haya diferentes cantidades de producto?*
- A4: *Pues depende de cuánto producto cambian las cantidades*
- Maestra: *Por eso, entonces si podemos comparar los cuatro chocolates, aunque tengan diferente cantidad de producto*

- A2: *Pues no porque unos serían menores. Los que tendrían 18 gramos serían menores sus cantidades.*
- Maestra: *Entonces ¿puedo comparar un chocolate de 18 gr y uno de 20 gr y decir cuál tiene más azúcar?*
- A2: *Pues no porque tal vez el de 20 [gr] tendría ventaja en azúcar*
- A4: *Pero también las otras porque puede que haya menos producto, pero igual de azúcar*
- A2: *Oh ya, ya. El último renglón porque eso muestra solo un gramo de la barra*
- A4: *En lugar de comparar toda la barra mejor solo tomamos un gramo*
- A2: *Y así las cantidades serían iguales [...]*
- A2: *Hershey's sería el más dulce, bueno dependería de la cantidad de producto porque también podría ser Carlos [V]*
- A4: *No, sigue siendo Hershey's porque por ejemplo Hershey's tiene 20 gr de producto y la mitad son 10 [gr], entonces es 1.7 gramos más y Carlos V tiene 18 gramos que la mitad es 9 y como tiene 10.3 [gr] de azúcar tiene 1.3 gramos más. Por lo tanto, Hershey's es la más dulce.*

Los integrantes del **equipo 1** necesitaron de la intervención de la profesora para identificar que el último renglón (valor unitario) de las tablas era el indicado para realizar la comparación entre las cuatro barras de chocolate, pues en ese renglón la cantidad de producto era 1 gramo en las cuatro barras. Además de esto, A4 plantea un ejemplo de comparación interesante, en el que considera comparar las barras tomando en cuenta el excedente de azúcar que cada barra tiene sobre la mitad del total de su producto, de esta forma A4 refuerza lo que sus compañeros ya habían mencionado sobre que Hershey's es la barra de chocolate más dulce.

El **equipo 3** tampoco alcanzó a discutir en torno a los incisos k) y l), estos fueron respondidos de manera individual por cada alumno. Se obtuvieron los siguientes datos de las hojas de respuestas:

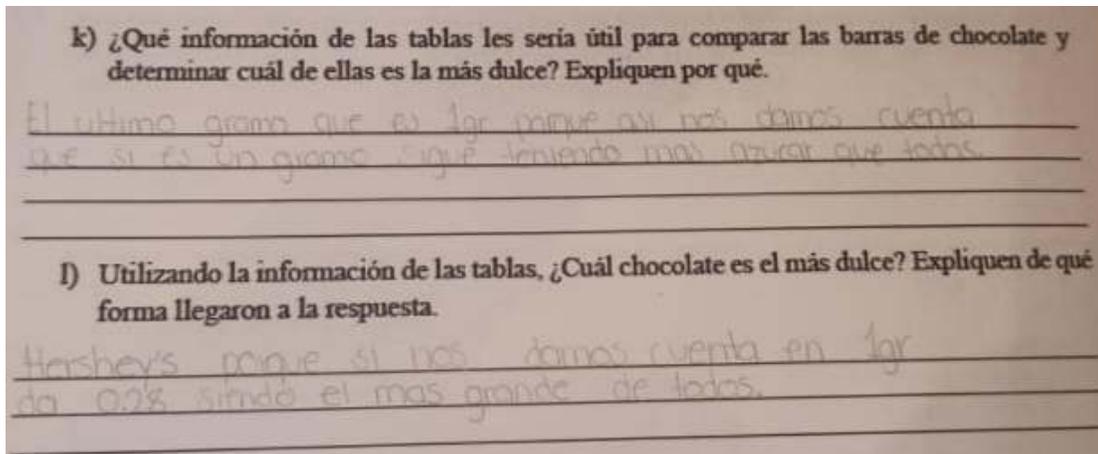


Figura 56. Incisos k) y l) respuestas de A8

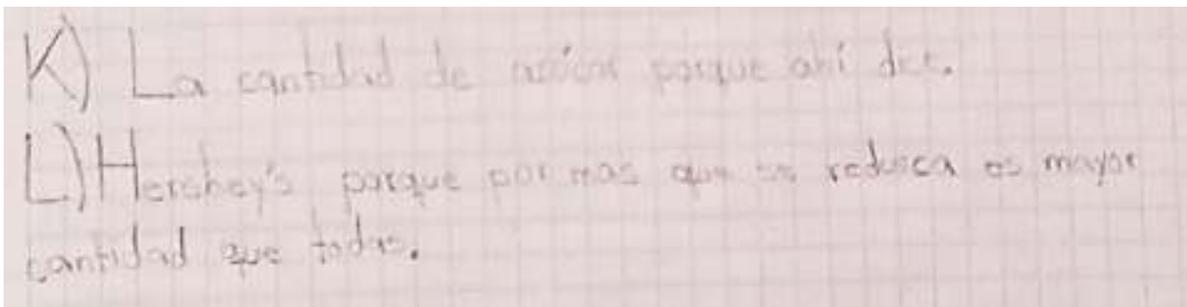


Figura 57. Incisos k) y l) respuestas de A10

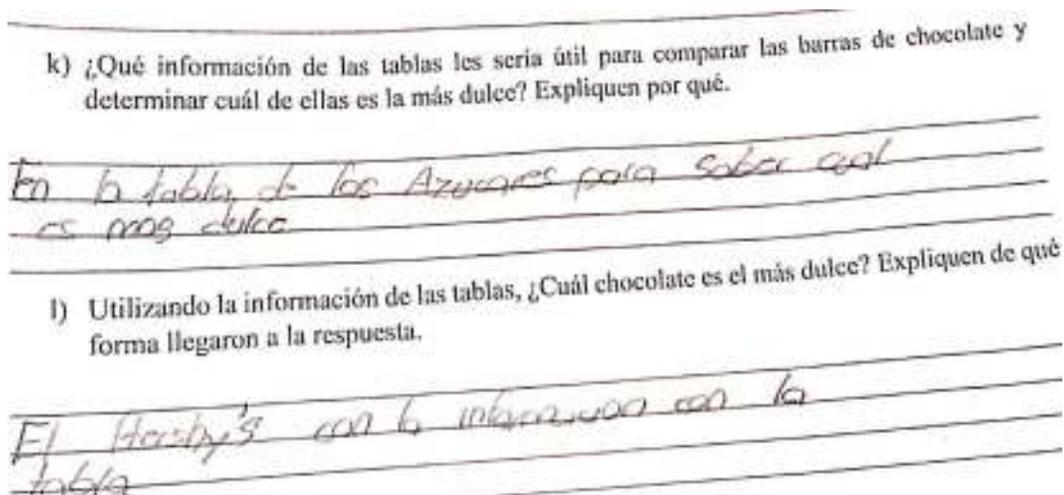


Figura 58. Incisos k) y l) respuestas de A11

Los integrantes del **equipo 3** coincidieron en la elección de chocolate más dulce, Hershey's, sin embargo, en el inciso k) hubo algunas diferencias. Solo uno de los alumnos de este equipo respondió lo que se esperaba en este inciso: utilizar el último renglón para

comparar, el de un gramo (valor unitario). El resto de los integrantes continuó considerando que bastaba con revisar la cantidad de azúcar de cada barra y la que tuviera más sería la más dulce sin importar el tamaño de las barras.

Es posible que una reformulación en el inciso i) permita que los alumnos reflexionen sobre la información que es útil para realizar la comparación de las barras, es decir, preguntar solo por la barra más dulce podría ser una tarea sencilla por lo cual los alumnos consideran que basta con tomar en cuenta el contenido de azúcar de la etiqueta sin importar el tamaño de la barra. Tal vez reorientar el inciso i) hacia la clasificación de las cuatro barras haga de la tarea algo no tan sencillo y esto permita a los alumnos cuestionarse otros aspectos de la información que debería ser tomada en cuenta de cada barra para poder determinar cuál es más dulce que otra y clasificar los cuatro chocolates.

La parte 2 del trabajo en equipo favoreció la discusión al interior de los equipos en menor medida que la parte 1, hubo intercambio de ideas y complementación de estas entre los integrantes de los equipos, pero se requirió de una mayor intervención por parte de la profesora para orientar a los alumnos.

Será necesario reformular algunos de los incisos con la finalidad de enfatizar aspectos que los alumnos dejaron en un segundo plano o que no quedaron claros en la redacción de ciertas tareas, aspectos como: la generalización de las propiedades de la proporcionalidad, en varios incisos de la parte dos se pretendía hacer explícitas propiedades de una manera cualitativa y general (para las cuatro barras de chocolate) y los alumnos se orientación hacia casos particulares. Algunos incisos requieren reformulaciones que hagan de la tarea algo más complejo ya que en ocasiones surgían elementos interesantes (estrategias) en las discusiones de los equipos, pero los integrantes optaban por descartarlos o dejarlos de lado al darse cuenta de que la tarea solicitada podía resolverse de una forma más sencilla. Además, es posible que algunos cambios en el applet y en los incisos que se diseñaron para guiar su exploración favorezcan en mayor medida la discusión al interior de los equipos, la construcción de conjeturas en torno a los elementos que pueden observar y manipular en el applet y la argumentación con base en los mismos.

Por último, es importante mencionar que la intervención del docente resulta clave en el trabajo en equipo, pues esta forma de trabajo no es algo tan sencillo de llevar a la práctica,

los estudiantes no suelen expresar sus ideas o argumentos de manera natural, requieren de la orientación y guía del profesor para llevar a cabo un verdadero trabajo en equipo.

4.5 Etapa 3. Discusión grupal

En esta etapa se trabaja en gran grupo con una discusión en la que los integrantes de los equipos comparten sus resultados y estrategias con el propósito de llevar a cabo un segundo proceso de validación y refinamiento de representaciones que permita llegar a un acuerdo grupal. El docente se encarga de guiar la discusión y de resaltar los elementos importantes de lo que presenta cada equipo.

Por la modalidad en la que se llevó a cabo la implementación (en línea) fue necesario realizar adecuaciones en el trabajo para tratar de cumplir con los propósitos de esta etapa. La presentación de los resultados de cada equipo no se dio de manera espontánea o voluntaria, sino que fue previamente seleccionada por la docente a cargo, considerando las estrategias que cada uno de los equipos empleó en las tareas de la etapa 2. Se seleccionaron equipos con estrategias esperadas o correctas para que las compartieran con sus compañeros de grupo.

Se diseñaron diapositivas que contenían imágenes de las hojas de trabajo, correspondientes a la etapa 2, de los diferentes integrantes de los equipos y, durante la discusión, la docente señalaba de qué equipo habían sido recuperadas las respuestas y se hacía la invitación a los integrantes para compartir oralmente la forma en la que habían respondido.

En la Figura 59 se puede observar una de las diapositivas en la que se pidió que el equipo 1 compartiera su estrategia para el llenado de la tabla en la que se buscaba ver la barra de chocolate como un todo compuesto por partes y centrarse en la parte que es azúcar. Posteriormente se presenta la transcripción de los comentarios del equipo 1 acerca de su estrategia.

Compartamos las estrategias utilizadas...

Cantidades en gramos	Turín	Crunch	Carlos V	Hershey's
Azúcar	4,8	10,48	10,29	11,7
Otros ingredientes	13,2	9,52	7,71	8,3
Total de producto	18	20	18	20

Figura 59. Estrategia del equipo 1 (partes de un todo)

A1: *Nosotros en las imágenes que nos mandó usted [maestra] buscamos la información en las etiquetas, el azúcar y el producto total. Y para encontrar los otros ingredientes restamos el azúcar a los gramos que traía. Como Crunch son 20 [gr] y el azúcar son 10.48 [gr], ese 10.48 se lo quitábamos al 20 y eso eran los otros ingredientes.*

Maestra: *Muy bien A1. En casi todos los equipos utilizaron esa estrategia de restar, excepto en uno en donde pensaron en sumar todos los ingredientes para encontrar la parte de otros ingredientes. Pudieron notar que esa estrategia también es correcta, pero sería más tardado que la de restar. ¿Algún integrante del equipo 1 quisiera agregar algo más? [...]*

Los tres equipos lograron responder correctamente la tabla, en todos los equipos fue necesaria la intervención de la profesora para orientarlos a la estrategia más rápida para el llenado de la tabla, pero en el equipo 1 la intervención fue mínima es por eso por lo que se eligió este equipo para compartir su estrategia con el resto del grupo. En el dialogo es posible apreciar que solo fue necesaria la intervención de una integrante del equipo 1 y de la profesora para hablar sobre la estrategia implementada para completar la tabla.

Se retomaron los incisos f) y g) del trabajo en equipo, en los cuales se buscaba que los alumnos construyeran propiedades cualitativas de la proporcionalidad como: *al doble le toca el doble*. Para compartir respuestas se seleccionaron las del equipo 2, en la Figura 60 se

observa la diapositiva en la que se recopilaron las respuestas de dos estudiantes del equipo 2 a los incisos f) y g), después se presenta un extracto del dialogo que hubo en el grupo.

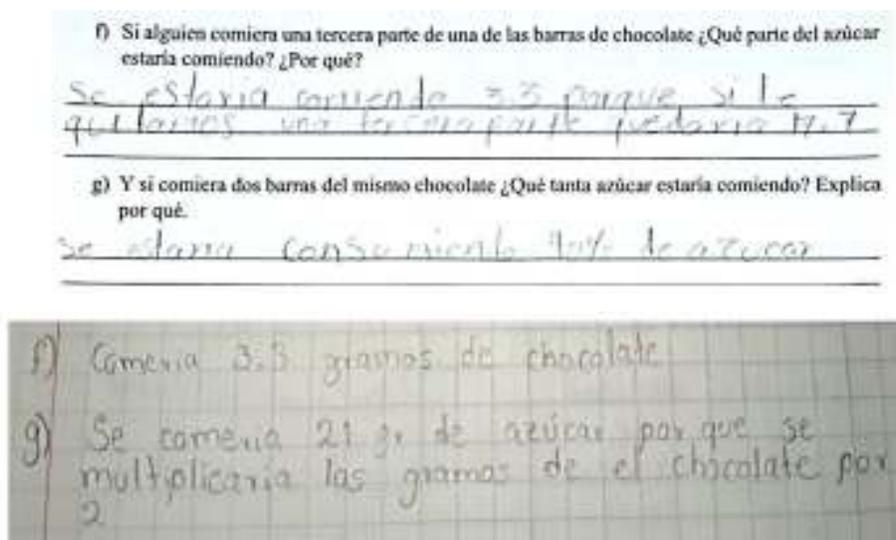


Figura 60. Respuestas del equipo 2 (Propiedades cualitativas de la proporcionalidad)

A7: Conseguimos esos dos incisos porque el total del azúcar eran 10 gramos, entonces si se estuviera comiendo una tercera parte tendríamos que dividir ese 10 entre 3 que nos daría 3.3.

Maestra: Eso hicieron en el inciso f), ¿en el g) cómo le hicieron?

A7: Eso lo sacamos porque si cada barra traía 10 gr de azúcar sería el doble, tendríamos que multiplicar por dos, entonces 10 por 2 es 20.

Maestra: Muy bien, ustedes lo hicieron con el chocolate Crunch. Cada equipo eligió el chocolate que quiso para responder a los incisos f) y g) [...] Pero supongamos que yo no sé cuál barra de chocolate es la que se van a comer, solo me dicen que comerán una tercera parte de la barra, ¿Qué parte de azúcar se estaría comiendo?

A5: Se estaría comiendo 3.3 gr de azúcar

Maestra: Pero yo no sé cuánta azúcar tiene este chocolate, es una barra que yo no conozco. Lo único que sé es que van a consumir una tercera parte de la barra. No sé cuántos gramos contiene la barra y tampoco sé cuántos gramos de azúcar son.

A7: Nos estaríamos comiendo x sobre tres porque no sabemos cuánta azúcar tiene, nos estaríamos comiendo una tercera parte.

Con los incisos f) y g) se obtuvieron respuestas prácticamente iguales en los tres equipos, pues todos se orientaron hacia la elección de una barra de chocolate como caso particular e hicieron los cálculos necesarios para encontrar las cantidades que se necesitaban y en los tres casos los equipos eligieron la misma barra de chocolate (Crunch). Algunas diferencias en sus respuestas fueron por redondear algunas cantidades decimales. Como no había diferencias importantes en las respuestas de los equipos, cualquiera era candidato para participar con los incisos f) y g). Se seleccionó al equipo 2 para compartir su experiencia con estos incisos solo para promover más su participación ya que fue uno de los equipos con menor participación durante las etapas de trabajo en equipo.

Después de la participación de unos de los integrantes la profesora realizó una intervención con la finalidad de exponer la parte que se buscaba surgiera con los incisos f) y g), la propiedad cualitativa de manera general, para todas las barras de chocolate. Esta intervención permitió a los alumnos abordar la tarea de manera general y promovió la participación de ellos en la discusión.

Otro aspecto que se retomó en la discusión fueron las tablas en las que se pretendía trabajar con la razón y el valor unitario, considerando la cantidad de producto y la cantidad de azúcar. En la Figura 61 se observa la diapositiva con las respuestas del equipo 3, y después se incluye la transcripción del dialogo en torno a las tablas.

Compartamos las estrategias utilizadas...

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g	10.5	20g	11.7	18g	10.99	18g	4.8
10g	5.25	10g	5.8	9g	5.49	9g	2.4
5g	2.625	5g	2.9	6g	3.9	6g	1.6
4g	2.1	4g	2.32	4.5g	2.5	4.5g	1.2
1g	0.52	1g	0.58	1g	0.57	1g	0.26

Figura 61. Estrategia equipo 3 (Valor unitario y razón)

A9: *Nosotros vimos cuantas veces cabe la cantidad total de gramos y lo dividimos entre el total de azúcar*

Maestra: *Tomemos una tablita para ver cómo le hizo el equipo 3, la del [chocolate] Crunch. El equipo 3 se dio cuenta de que para pasar del 20 [gr] a 10 [gr] se dividía a la mitad, el 10 cabía dos veces en el 20, entonces asumieron que la cantidad de azúcar también se debía dividir a la mitad [...]*

Los tres equipos respondieron las cuatro tablas que se propusieron. En los tres casos hubo intervención de la profesora para orientar a los alumnos en el llenado de las tablas, en especial en las cantidades donde no se trataba de mitades. Se eligió el equipo 3 para compartir sus estrategias para el llenado de tablas ya que fue el equipo que trabajó en conjunto para llenarlas, llevaron a cabo un genuino trabajo en equipo. Se retomaron algunos ejemplos de cada una de las tablas para compartir la estrategia del equipo 3.

Posterior a la explicación de las tablas se solicitó la participación voluntaria de cualquier equipo para compartir respecto a la información que les sería útil de esas tablas para comparar las cuatro barras de chocolate. Se discutió en torno a por qué utilizar la información del primer renglón de cada tabla sería algo injusto debido a que las cantidades de producto son diferentes y, también se puso a discusión el por qué el último renglón brinda la información que sí permite realizar la comparación de los cuatro chocolates.

Debido a las condiciones en las que se llevó a cabo la implementación de la situación de investigación, esta etapa de discusión grupal requirió de diversas modificaciones. Estos cambios interfirieron para que en la etapa se dieran procesos como la validación entre los alumnos, ya que hubo constante intervención de la profesora lo cual posiblemente inhibió la participación de los alumnos y se considera que esto impidió la validación de las estrategias entre los mismos alumnos, sin embargo, las modificaciones eran necesarias ya que la intervención en línea no permite que la interacción entre los alumnos y la participación fluya como en un salón de clases por tal motivo se requirió mayor intervención de la profesora.

Otro aspecto que es probable no haya permitido que el proceso de validación se diera entre los alumnos es la previa selección de los equipos que compartirían sus estrategias. La selección por parte de la profesora pudo influir en que los alumnos consideraran que las

estrategias de los equipos que estaban compartiendo fueran las correctas porque fue la profesora quien los seleccionó, por lo tanto, tal vez los estudiantes no consideraron necesario cuestionar lo que sus compañeros hicieron para responder a las tareas de la situación.

Además, las representaciones funcionales espontáneas de los estudiantes no se retomaron en esta etapa, provocando que quedaran olvidadas y los estudiantes no pudieran llevar a cabo el refinamiento de estas. Se considera que por el hecho de que la implementación se llevara a cabo con los alumnos de la misma diseñadora y docente, y que además fuera ella misma quien condujera las sesiones influyó en que el trabajo en esta etapa se inclinara más hacia los aprendizajes de los estudiantes más que a la observación de lo que promovía el diseño.

Será necesario, en una futura implementación, reconsiderar las modificaciones que se hicieron, esto con la finalidad de favorecer el proceso de validación de las estrategias entre los alumnos y al mismo tiempo promover el refinamiento de las representaciones que se construyeron en la etapa de trabajo en equipo.

4.6 Etapa 4. Autorreflexión

En la etapa de autorreflexión, los alumnos vuelven al trabajo individual con la finalidad de reconstruir lo trabajado en las etapas anteriores. Esta etapa se considera crucial en ACODESA, pues todo lo construido en el trabajo en equipo y en la discusión grupal se puede olvidar fácilmente.

Para el trabajo en esta etapa se proponen tareas similares a las trabajadas en la etapa 2, pero se cambia el ingrediente con el que se realizará la comparación de las barras de chocolate, esta vez la situación se centra en las grasas saturadas. Se propone una tabla similar a las que se trabajaron en la etapa 2, trabajo en equipo, en la que se separa el contenido de las barras de chocolate en azúcar, otros ingredientes y contenido total; esta vez centrándose en el ingrediente de grasas saturadas.

Todos los alumnos tomaron la información correcta de las etiquetas de las barras de chocolate y completaron la tabla. En la Figura 62 se muestran las respuestas de A8 como ejemplo que representa al grupo.

a) Completa la siguiente tabla.

Barra de chocolate	Cantidad de producto (g)	Cantidad de grasas saturadas (g)
Turín	18gr	4.3
Crunch	20gr	3.36
Carlos V	18gr	3.09
Hershey's	20gr	3.6

Figura 62. Tabla grasas saturadas, respuesta de A8

Al parecer el llenado de la tabla fue sencillo para todos los alumnos, pues no hubo dudas sobre ella, les fue sencillo localizar la información en las etiquetas ya que fue algo que se trabajó durante la etapa 2.

El inciso b) tenía el propósito de rescatar una de las conclusiones que se discutieron en la etapa 3, respecto a que no era posible comparar las barras de chocolate con la información que se sacaba de las etiquetas directamente porque cada barra tenía diferente contenido total de producto.

En la Figura 63 y la Figura 64 se muestran las respuestas de los estudiantes A2 “Pues creo que no, porque la cantidad del producto no justifica cuánta grasa tiene el chocolate” y A10 “No, porque la cantidad del producto se puede decidir, ya que puede ser más o menos que la cantidad del chocolate”, ellos fueron los únicos en rescatar que no se pueden comparar las cantidades de la tabla directamente porque las cantidades de producto de cada barra son diferentes. El resto de los alumnos respondieron que la barra que tenía mayor cantidad de grasas saturadas era la que tenía más gramos de este ingrediente, sin importar el tamaño de la barra completa.

Pues creo que no, porque la cantidad del producto no justifica cuánta grasa tiene el chocolate

Figura 63. Inciso b) respuesta de A2

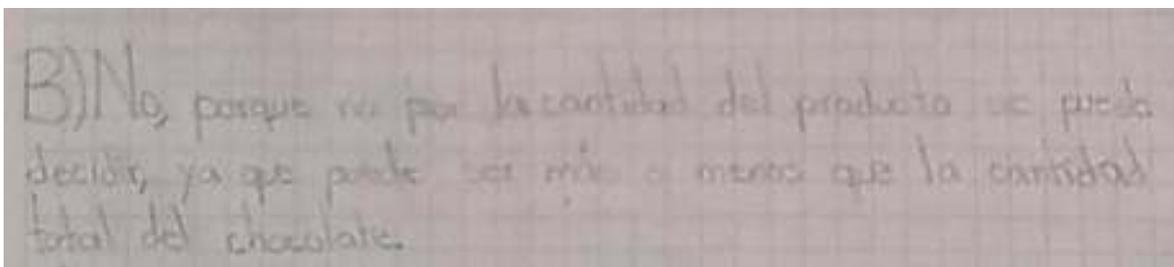


Figura 64. Inciso b) respuesta de A10

Es posible que la redacción del inciso b) haya dificultado que los alumnos pudieran relacionar que para comparar las barras de chocolate considerando el ingrediente de las grasas saturadas se debía tomar en cuenta la cantidad de producto como se llevó a cabo con el azúcar. Se considera la redacción de la tarea como un problema porque al preguntar a los alumnos cuál de las barras contenía más grasas saturadas, ellos pudieron asumir que bastaba con utilizar la información de la tabla y la barra con más gramos de grasa era la correcta. Será necesario buscar alguna forma de redactar ese inciso en el que se pretende que los alumnos reflexionen en torno a que la barra que deben seleccionar es la que contenga más grasas saturadas, pero considerando el tamaño de la barra, es decir igualar las cantidades de producto primero y después comparar la cantidad de grasas saturadas.

Los incisos c) y d) tenían el propósito de que los alumnos describieran y ejecutaran la estrategia que utilizarían para clasificar las barras de chocolate, esta vez considerando las grasas saturadas. Los alumnos debían hacer la clasificación de las barras de que contenía más grasas a la que tenía menos tomando en cuenta el tamaño de las barras. Se presentan algunas de las respuestas de los alumnos al inciso d), ya que en ese es donde se los solicitaba ejecutar sus estrategias y clasificar las barras de chocolate.

Cuatro estudiantes utilizaron la gráfica de barras como estrategia para clasificar los chocolates y determinar la barra que contenía más grasas saturadas. Este tipo de estrategia se utilizó por algunos estudiantes durante la etapa 1, en ella solo representan los datos que

registraron en la tabla considerando solamente la cantidad, en gramos, de grasas saturadas de cada barra, hacen la comparación sin importar la cantidad de producto de cada barra.

En la Figura 65 se muestra la respuesta que plasmó A1, como ejemplo de los cuatro estudiantes que utilizaron esta estrategia. Sus respuestas contenían los mismos elementos: cantidad en gramos de grasas saturadas y total de contenido en gramos; solo había algunas variantes como el tamaño y la orientación (vertical u horizontal) de las barras y algunas impresiones en la escala que utilizaban.

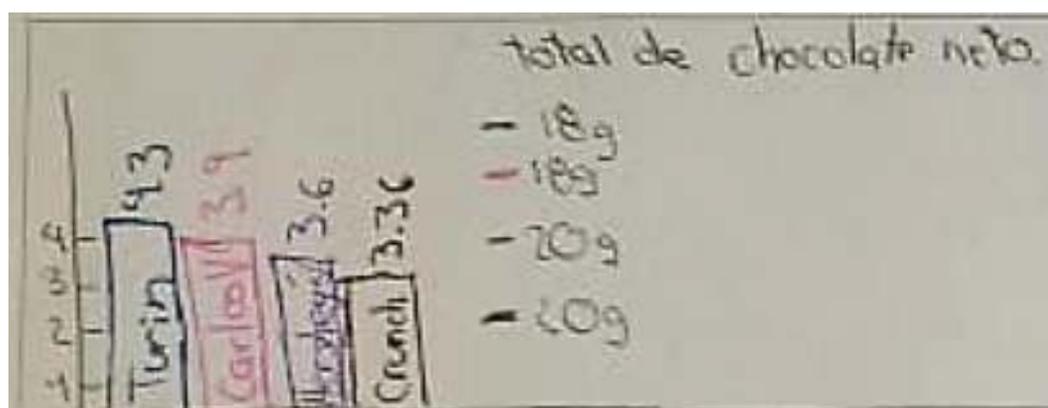


Figura 65. Inciso d) respuesta de A1

En el mismo inciso d) dos estudiantes más, A4 y A3, también utilizaron la información tomada directamente de la tabla del inciso a) (Figura 62). Ordenaron las barras de la que contenía más gramos de grasas saturadas a la que tenía menos, dibujaron cada una de las barras y uno de los alumnos agregó la información correspondiente a cada una. En la Figura 66 se muestra la respuesta de A4 quien detalló la información en cada una de las barras y, a pesar de que consideró la misma información de sus compañeros que realizaron gráfica de

barras, el estudiante A4 realizó una clasificación diferente a la que hicieron sus compañeros en sus gráficas de barras.

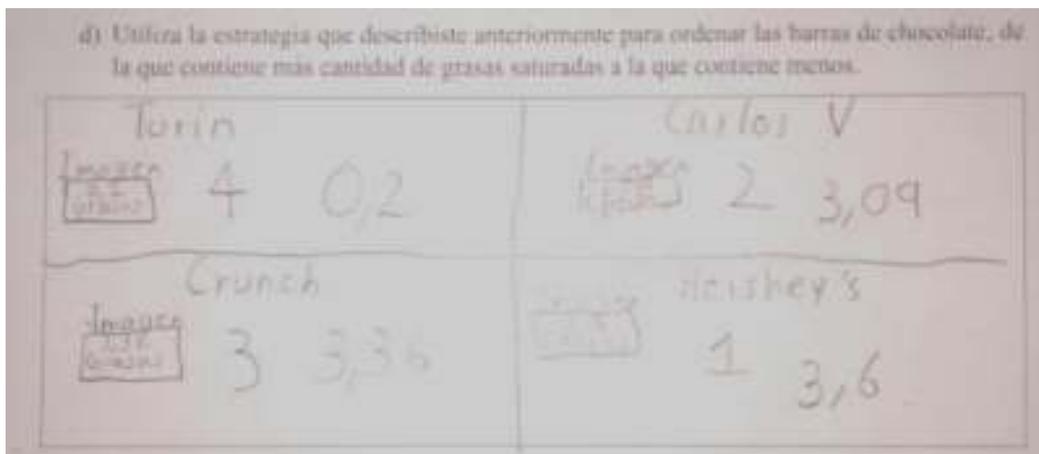


Figura 66. Inciso d) respuesta de A4

La Figura 67 muestra la respuesta de la alumna A3 quien solo dibujo las barras de cada chocolate ordenadas considerando, al igual que el resto de sus compañeros, la información que pusieron en la tabla. La estudiante no puso detalles de la información en cada una de las barras, hizo sus dibujos y con un pequeño texto explicó que consideró poner la barra de Turín en primer lugar porque ésta contenía más grasas que el resto y así lo realizó con las cuatro barras obteniendo una clasificación diferente al resto de sus compañeros.

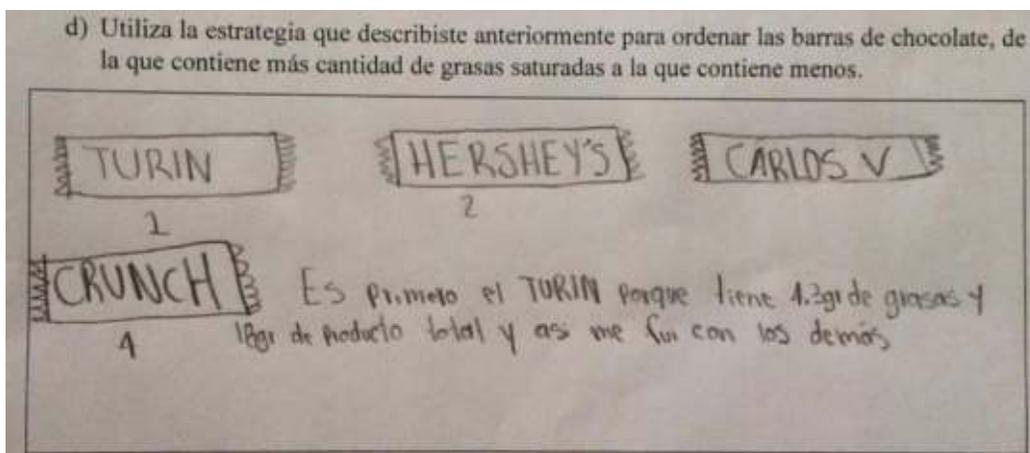


Figura 67. Inciso d) respuesta de A3

En los incisos c) y d) ningún estudiante retomó alguna de las estrategias abordadas en la discusión grupal para llevar a cabo la comparación y clasificación de las barras de chocolate

considerando la cantidad de grasas saturadas. Los alumnos regresaron a las estrategias utilizadas al inicio de la situación, etapa 1, estrategias en las que comparaban la cantidad en gramos del ingrediente a considerar y la barra con más gramos de determinado ingrediente encabezaba la clasificación. Ninguno consideró que se debía tomar en cuenta el tamaño de cada una de las barras para poder hacer la comparación y clasificación.

La última tarea de la etapa, el inciso e) pretendía que los alumnos reflexionaran en torno a la utilidad de las estrategias que utilizaron para la clasificación, pensada en el mismo contexto, pero con diferentes ingredientes. La mayoría de los estudiantes respondió de manera afirmativa a este inciso exponiendo que bastaba con fijarse en las cantidades del ingrediente que se solicitara para poder decidir si una barra de chocolate era más saludable que otra. En la Figura 68 se muestra la respuesta de A4 como ejemplo que representa la respuesta que la mayoría de los estudiantes plasmó en su hoja de trabajo.

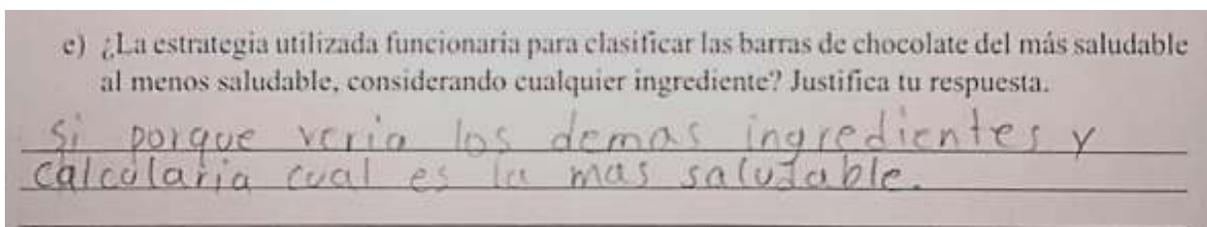


Figura 68. Inciso e) respuesta de A4

Los estudiantes están considerando que para clasificar las barras de chocolate del más saludable a la menos saludable bastaría con fijarse en los contenidos de cada uno de los ingredientes en las etiquetas de las barras, pero ninguno consideró que el tamaño de cada barra es un factor que influye para llevar a cabo la comparación.

En la etapa de autorreflexión los estudiantes no lograron reconstruir las estrategias discutidas en la etapa 3, no pudieron llevar a cabo la clasificación de las barras de chocolate, esta vez considerando las grasas saturadas, como se esperaba. Utilizaron las estrategias que construyeron de manera individual en la etapa 1, en las que no consideraban el tamaño de las barras como un dato importante a tomar en cuenta para la clasificación de los chocolates.

El proceso de refinamiento se fue dando en cada una de las etapas y en la discusión grupal se resaltaron las estrategias que permitían llevar a cabo la clasificación de las barras haciendo uso de las propiedades de la proporcionalidad que se estuvieron trabajando en la situación,

sin embargo, los alumnos no lograron reconstruir lo discutido y puesto en plenaria para dar solución a la parte final de la actividad.

Es posible que los cambios que se han venido mencionando a lo largo del análisis en cada una de las etapas permitan consolidar las estrategias y propiedades de la proporcionalidad que se pretende trabajar con el diseño y esto permita a los alumnos reconstruir lo que se espera en la etapa de autorreflexión.

4.7 Etapa 5. Institucionalización

En esta etapa el docente se vuelve el protagonista, se encarga de presentar un resumen de los resultados obtenidos en las etapas anteriores y, además debe concluir presentando la parte institucional de los contenidos trabajados en la situación.

Debido a la modalidad en la que se llevó a cabo la implementación de la situación, en línea, se diseñaron diapositivas similares a las utilizadas en la etapa de discusión grupal, con la finalidad de compartir con los alumnos las partes importantes de la situación a retomar e institucionalizar. La profesora se encargó de hacer un recordatorio de las estrategias empleadas por los alumnos y de enfatizar los conceptos que estaban presentes, así como el nombre con el que se le conoce dentro de las matemáticas a las estrategias o procedimientos utilizados.

Para iniciar con la institucionalización se retomaron los incisos f) y g) de la etapa de trabajo en equipo, y que también se retomaron en la discusión grupal, esto con la finalidad de trabajar con las propiedades de la proporcionalidad como: *al doble le toca el doble*. En la Figura 69 se puede observar la primera diapositiva que se presenta a los alumnos, en la cual se incluyen los incisos f) y g) de manera textual con la finalidad de recordarlos y hablar sobre el tipo de respuestas esperadas.

Propiedades de la proporcionalidad...

f) Si alguien comiera una tercera parte de una de las barras de chocolate ¿Qué parte del azúcar estaría comiendo? ¿Por qué?

g) Y si comiera dos barras del mismo chocolate ¿Qué tanta azúcar estaría comiendo? Explica por qué.

Figura 69. Propiedades cualitativas de la proporcionalidad (incisos f) y g))

Después de retomar los incisos mencionados, la profesora hace uso del pizarrón electrónico (Figura 70) para mostrar a los alumnos una manera de representar las propiedades de la proporcionalidad que se esperaba surgieran en los incisos f) (*al comer una tercera parte de la barra de chocolate se está comiendo la tercera parte del total de azúcar*) y g) (*al comer dos barras de chocolate la cantidad de azúcar también se duplica*).

Propiedades de la proporcionalidad...



Figura 70. Propiedades cualitativas de la proporcionalidad (pizarrón electrónico)

Como segunda parte de la institucionalización se retomaron las tablas que se trabajaron en la segunda parte del trabajo en equipo, en las que los alumnos debían calcular la cantidad de azúcar correspondiente a diferentes cantidades de cada una de las barras de chocolate, y, en las que se esperaba que se hiciera uso de estrategias como la regla de tres simple, el valor

unitario o la constante de proporcionalidad. En la diapositiva se incluyeron las cuatro tablas ya completas con los valores que los alumnos, en su momento calcularon, se hizo uso de las herramientas del pizarrón electrónico para resaltar los valores que durante la explicación se iban mencionado.

Con las tablas se pretendía institucionalizar dos elementos de la proporcionalidad que surgieron en el trabajo con los equipos, el primero fue la técnica o estrategia del valor unitario (Figura 71). Se consideraron los primeros y los últimos renglones de la tabla y se plantearon reflexiones en torno a cómo pasar de la cantidad total de producto a la cantidad de un gramo. Además, se habló sobre la utilidad de la información del último renglón de las tablas, ya que con esa información sí era justo comparar las barras de chocolate para determinar cuál era la más dulce. Se trabajó también en determinar la barra más dulce concluyendo en que la barra de Hershey's lo era.

Propiedades de la proporcionalidad...

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g	10.48	20g	11.7	18g	10.29	18g	4.8
10g	5.24	10g	5.85	9g	5.145	9g	2.4
5g	2.62	5g	2.925	6g	3.43	6g	1.6
4g	2.096	4g	2.34	4.5g	2.5725	4.5g	1.2
1g	0.524g	1g	0.585	1g	0.571	1g	0.26

Valor unitario:

Figura 71. Valor unitario (pizarrón electrónico)

El segundo elemento que se institucionalizó con ayuda de las tablas de cada barra fue la constatación de proporcionalidad (Figura 72). Se tomó como ejemplo la tabla de la barra de Crunch y se pidió a los alumnos que realizaran el cociente de cada uno de los renglones dividiendo la cantidad de azúcar entre la cantidad de producto, con la finalidad de que fueran ellos mismos quienes notaran que en el cociente de cada renglón siempre se obtenía el mismo valor, el cual es la constante de proporcionalidad. También se planteó la cuestión de que la

barra con mayor constante de proporcionalidad sería la más dulce, al igual que como se trabajó con el valor unitario.

Propiedades de la proporcionalidad...

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g	10.48	20g	11.7	18g	10.29	18g	4.8
10g	5.24	10g	5.85	9g	5.145	9g	2.4
5g	2.62	5g	2.925	6g	3.43	6g	1.6
4g	2.096	4g	2.34	4.5g	2.5725	4.5g	1.2
1g	0.524g	1g	0.585	1g	0.571	1g	0.26

Valor unitario

Constante de proporcionalidad

Figura 72. Constante de proporcionalidad (pizarrón electrónico)

Una vez que se utilizó la tabla de Crunch como ejemplo para mostrar cómo encontrar y qué es la constante de proporcionalidad, se propuso a los alumnos, a manera de ejercicio, llevar a cabo el cálculo de la constante de proporcionalidad de cada barra, pero esta vez considerando las grasas saturadas como ingrediente. De esta manera también se reflexionó sobre la barra con mayor cantidad de grasas saturadas tomando en cuenta la cantidad de producto.

Propiedades de la proporcionalidad...

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g	10.48	20g	11.7	18g	10.29	18g	4.8
10g	5.24	10g	5.85	9g	5.145	9g	2.4
5g	2.62	5g	2.925	6g	3.43	6g	1.6
4g	2.096	4g	2.34	4.5g	2.5725	4.5g	1.2
1g	0.524g	1g	0.585	1g	0.571	1g	0.26

Valor unitario

Constante de proporcionalidad

Turin 18g ---4.3g de grasa 0.23

Carlos V 18g ---3.09g de grasa 0.17

Crunch 20g ---3.36g de grasa 0.168

Hershey's 20g ---3.6g de grasa 0.18

Figura 73. Ejercicios de constante de proporcionalidad (pizarrón electrónico)

Por último, a manera de resumen se incluyó una dispositiva en la que se enuncian en forma de lista los elementos trabajados en la institucionalización (ver Figura 74).

Propiedades de la proporcionalidad...

- Cuando una cantidad aumenta o disminuye la otra lo hace en la misma proporción
 - ✓ Al doble le toca el doble (aumentar)
 - ✓ A la tercera parte le corresponde la tercera parte (disminuir)
- La **constante de proporcionalidad** nos permite comparar diversas magnitudes (cosas medibles)
- La constante de proporcionalidad se puede calcular:
 - Dividiendo una magnitud entre otra
 - Llegando al **valor unitario**

Figura 74. Institucionalización de la proporcionalidad (resumen)

En la institucionalización se busca rescatar los elementos que estuvieron presentes en el trabajo de los alumnos, pero que fueron utilizados de manera informal por los estudiantes. Se espera formalizarlos haciendo explícito el nombre con el que las estrategias, técnicas, propiedades o conceptos utilizados por los alumnos en su trabajo individual, en equipo y grupal se conocen dentro de las matemáticas.

Al final de la etapa 5 no es posible evidenciar resultados de los alumnos o avances, para poder hacerlo sería conveniente incluir ejercicios o problemas con los que se trabajen los elementos explicados en la institucionalización.

CONCLUSIONES

Con este trabajo se buscaba diseñar actividades que atendieran a los propósitos y planteamientos de planes y programas de Educación Básica, específicamente en la escuela secundaria y respecto a la noción de proporcionalidad. Esto debido a que se identificó una problemática en torno a la enseñanza y el aprendizaje de esta noción, particularmente la falta de materiales didácticos (actividades) que apoyen al docente en su labor de enseñanza para trabajar el tema en el aula, que permitan cumplir con los requerimientos de planes y programas de estudio y que ayuden a los estudiantes a superar las dificultades ya reportadas por diferentes investigaciones con respecto a la proporcionalidad.

Llevar a cabo un diseño didáctico en torno a la noción de proporcionalidad fue un gran reto, pues es una noción matemática bastante amplia y compleja que involucra diversos elementos a la hora de trabajar con ella. Fue complicado delimitar los elementos matemáticos ligados a la proporcionalidad que serían incluidos en las actividades, por lo cual el diseño se realizó en primer lugar buscando un contexto con el cual se podía problematizar el tema, tomando como guía la noción de situación problema en el marco del método ACODESA y los propósitos de cada una de sus etapas. Finalmente, se eligieron los contenidos matemáticos que se abordan en primer grado de secundaria sobre proporcionalidad que podían ser involucrados en la resolución de la situación problema elegida.

Logro de los objetivos

Respecto a los objetivos específicos planteados al inicio de esta tesis, podemos decir que el primero de ellos (Determinar los contenidos matemáticos, relacionados con la proporcionalidad, que jugarán un papel en las actividades didácticas) se cumplió, pero de una manera diferente a la pensada en un principio. El objetivo fue planteado pensando en seleccionar primero los contenidos matemáticos a tratar y después iniciar con el diseño de la situación de investigación. Sin embargo, debido a que la proporcionalidad es una noción matemática muy amplia y compleja, primero se seleccionó el contexto en el cual estarían enmarcadas las actividades, se formularon tareas y preguntas para el diseño siguiendo las orientaciones de cada etapa de ACODESA y así fue como se fueron delimitando los

contenidos matemáticos que intervinieron en el diseño: cálculo del valor unitario, constante de proporcionalidad, propiedades cualitativas y cuantitativas de la proporcionalidad (típicamente asociadas a frases como: cuando una aumenta, la otra también; al doble le toca el doble). Es importante señalar que, aunque se determinaron los contenidos que se pretendía trabajar con el diseño, nunca se descartó la posibilidad de que durante la implementación surgieran otros elementos en torno a las tareas planteadas para los alumnos.

Por último, se considera que los elementos trabajados con el diseño podrían ser reforzados con actividades enmarcadas en otros contextos o con problemas y ejercicios que permitan a los alumnos practicar las técnicas y estrategias construidas con el diseño producto de este trabajo de tesis.

Con relación al segundo objetivo específico, *formular o seleccionar situaciones problema, problemas y/o ejercicios de proporcionalidad que promuevan la visualización, el establecimiento de conjeturas, la argumentación y el uso de tecnología digital*; es posible afirmar que se cumplió, pero de manera diferente a la que se había considerado. En un principio se pensó en diseñar una situación problema y, además, ejercicios o problemas que serían implementados después de la etapa de institucionalización con la finalidad de reforzar determinados elementos de la proporcionalidad, pero se decidió que el diseño consistiera en una *situación de investigación* que partiera de una situación problema e incluyera problemas y ejercicios en ciertos apartados. Por ejemplo, tenemos el caso de las tablas de valores como la que se presenta en la Figura 75, en las que los alumnos debían calcular la cantidad de azúcar que había en determinada cantidad de producto.

h) Con ayuda de las etiquetas de las barras de chocolate y del applet "Chocolates y azúcar", completa las tablas siguientes.

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g		20g		18g		18g	
10g		10g		9g		9g	
5g		5g		6g		6g	
4g		4g		4.5g		4.5g	
1g		1g		1g		1g	

Figura 75. Cálculo de valor unitario

Durante la implementación de las actividades, en el equipo 3 les costó trabajo completar la primera tabla, por lo cual se puede considerar que fue un problema para ellos, ya que la estrategia con la que podían calcular la cantidad de azúcar que contenía la cantidad de producto indicada, no surgía a simple vista o fácilmente, sino que los alumnos tuvieron que reflexionar en torno a la información y relacionarla para encontrar la estrategia adecuada. Una vez que lograron construir una estrategia para el llenado de la primera tabla, replicaron su estrategia para completar las siguientes tablas, por lo tanto, podríamos decir que éstas se volvieron ejercicios para los alumnos. Para ilustrar esto, se presenta el siguiente extracto de los diálogos al interior del equipo tres con sus comentarios respecto al llenado de las tablas.

A11: *Ahora solo nos falta el de un gramo y todos los demás cuadros*

A9: *Pero yo creo que los demás cuadros ya están más fáciles porque ya sabemos cómo hacerlos*

A11: *Pues sí, solo hay que hacer la del gramo y ya sabremos como hacer todos*

Sobre el tercer objetivo, *valorar la pertinencia de las actividades didácticas diseñadas para favorecer el trabajo colaborativo, la discusión y la argumentación en torno a las propiedades y técnicas de la proporcionalidad pretendidas*, se puede afirmar que fue alcanzado, ya que después de la implementación se pudo realizar un análisis detallado de cada una de las partes de la situación de investigación diseñada, el cual permitió identificar las partes que sí cumplieron con su propósito, así como elementos a mejorar en las actividades. A continuación, se describen los aspectos más importantes que requirieron ser reformulados en el diseño, dando lugar a una versión actualizada del mismo que se presenta en el anexo 4.

Retomando en particular cada una de las etapas por las que se transita al trabajar con ACODESA, se destaca que en la etapa de trabajo individual no se presentaron dificultades para cumplir con los propósitos establecidos, pues los alumnos participaron como se esperaba. La situación problema realmente atrapó a los alumnos, los hizo involucrarse con el contexto y reflexionar en torno a la información, incluso tuvieron la iniciativa de ir a buscar en información en las etiquetas de los productos a pesar de que no se solicitó en esta etapa.

Respecto a cambios o mejoras que se podrían implementar en la etapa de trabajo individual, se encontró que hay una orientación hacia la identificación del chocolate más dulce y aquél que es el menos dulce, cuando podría resultar más enriquecedor dirigir las tareas hacia la clasificación de todos los chocolates y los elementos que hay que considerar para su comparación. Se hizo la reformulación correspondiente en la etapa 1 para atender esta observación. Cabe mencionar que en la etapa 2 también se encontró esta inclinación hacia los extremos de la clasificación (los chocolates más y menos dulces), por lo cual también se realizaron las modificaciones correspondientes.

Sobre la etapa dos, el trabajo en equipo, después del análisis de los resultados obtenidos fue posible plantear diversas mejoras sobre las tareas propuestas a los alumnos, las cuales se espera puedan favorecer discusiones en las que los alumnos argumenten en torno a las estrategias para clasificar los chocolates y no solo para seleccionar el chocolate más y el menos dulce. Por ejemplo, en las tablas de valores (ver Figura 76) se encontró que además del valor unitario se podría favorecer la estrategia de identificar un factor adecuado para realizar la comparación de las cuatro barras de chocolates, por lo cual se modificaron las tablas para agregar otro valor común en la cantidad de producto.

h) Con ayuda de las etiquetas de las barras de chocolate y del applet "Chocolates y azúcar", completa las tablas siguientes.

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURIN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g		20g		18g		18g	
10g		10g		9g		9g	
5g		5g		6g		6g	
4g		4g		4.5g		4.5g	
1g		1g		1g		1g	

Figura 76. Tablas de valores

Por otro lado, se identificó la necesidad de realizar modificaciones en torno al uso del applet. Se hizo notar que es necesario hacer énfasis en los elementos que el applet contiene y la reflexión sobre ellos, pues los alumnos realizaron la exploración que se proponía con las tareas, pero esto no trascendió a sus reflexiones y argumentos para justificar sus respuestas.

En la etapa 3, de discusión grupal, es necesario replantear la manera en la que se llevó a cabo la implementación en modalidad virtual, pues se considera que los propósitos no fueron cumplidos al haberse dado poca participación de los estudiantes y un nulo debate de ideas y estrategias. Se concluyó que hace falta reformular el diseño en esta etapa, de manera que permita o incite más la participación de los alumnos y que guíe al profesor en la conducción. Además, se cree que el hecho de que la diseñadora haya implementado la situación de investigación con sus alumnos influyó en sus decisiones e intervenciones durante las sesiones.

Se considera que el desarrollo de la etapa 4, la autorreflexión, se vio afectada por las dificultades a las que los alumnos se enfrentaron en etapas previas, de manera que no se pudo llevar a cabo la reconstrucción de estrategias para la resolución de la situación problema. Se pretende que las reformulaciones al diseño de la situación de investigación en las etapas previas contribuyan a mejorar la etapa 4.

Por último, con respecto a la etapa cinco, la institucionalización, se considera que ésta se desarrolló cumpliendo con las características que declara ACODESA, sin embargo, no es posible evidenciar resultados o avances de los alumnos, ya que al finalizar la puesta en escena del diseño no hubo ninguna otra intervención con ellos en torno al estudio de la proporcionalidad.

Al concluir con este trabajo, es posible afirmar que se logró el objetivo general del mismo, *diseñar actividades didácticas que promuevan el trabajo colaborativo, la discusión y argumentación en torno a la noción de proporcionalidad, dirigidas a estudiantes de primer grado de secundaria*, ya que el producto de este trabajo de tesis se concretó en un diseño puesto en escena, analizado y valorado con diversas áreas de mejora que permitirán trabajar con la noción de proporcionalidad a nivel secundaria cumpliendo con los propósitos que se declaran en el currículo de Educación Básica.

Implementación de las actividades

Originalmente, la situación de investigación se diseñó para ser implementada de manera presencial; sin embargo, tuvo que ser llevada a cabo de manera virtual debido a la

contingencia sanitaria por COVID-19. Esta situación conllevó a realizar adaptaciones a las consideraciones metodológicas para su implementación.

La puesta en escena se llevó a cabo mediante la plataforma zoom en seis sesiones diarias de 40 min, cada una, durante una semana, llevando a cabo sesiones diferenciadas para trabajo individual y por equipos.

La metodología ACODESA, tuvo que ser ajustada a las condiciones que los medios digitales permitieron. En la etapa 1 el trabajo se llevó a cabo sin problemas ya que los estudiantes fácilmente pudieron trabajar de manera individual. Para la etapa 2 se tuvo que trabajar en diferentes sesiones con cada uno de los equipos, ya que de esta manera el docente podría supervisar el trabajo de los estudiantes y la interacción entre los miembros de cada equipo no se vería interrumpida por los de otros equipos, además fue una manera de optimizar el tiempo para el trabajo y brindarles a los estudiantes el espacio para la discusión en equipos.

En la etapa 3 fue necesario realizar diversas modificaciones que permitirán aprovechar el tiempo de la sesión, para esto la profesora/diseñadora seleccionó las respuestas que fueran correctas, con estrategias esperadas o interesantes de los equipos para que los integrantes las explicaran a todo el grupo, lo cual limitó la discusión y no favoreció que los alumnos replicaran en torno a las estrategias de sus compañeros.

Se considera que la etapa 4 de autorreflexión se vio afectada por las dificultades enfrentadas en el trabajo en equipo y por las adaptaciones que fue necesario realizar para trabajar en la etapa de discusión grupal. Por otro lado, la evolución de las representaciones funcionales espontaneas se dejó de lado en la etapa 3, descuidando la construcción de representaciones grupales, y esto provocó que los alumnos no reconstruyeran las estrategias que se esperaba en la etapa de autorreflexión. En la etapa 5 no se realizaron grandes cambios, se tomó en cuenta lo que ACODESA plantea sobre la responsabilidad del profesor y se rescataron las representaciones institucionales que se esperaba surgieran al implementar la situación de investigación.

Fue complejo adaptar los aspectos que ACODESA aborda en sus diferentes etapas, ya que la interacción entre los miembros de los equipos fue difícil de promover, y la

participación de los alumnos en ocasiones se vio frenada por el uso de los medios digitales, la conexión a internet, entre otros aspectos.

Dificultades de los estudiantes

Durante el trabajo con las actividades, los estudiantes manifestaron diversas dificultades en las diferentes etapas por las que se transita al trabajar con ACODESA. En primer lugar, se enfrentaron al trabajo en equipo, esta forma de trabajar no fue natural para los estudiantes, quienes requirieron de la intervención y guía de la docente para lograr llevar a cabo el trabajo en equipo. Y a esto se sumó el hecho de que el trabajo fuera en modalidad virtual, para ellos fue complejo adaptarse a observar e interactuar con sus compañeros a través de una pantalla, lo cual ocasionó que las participaciones fueran cortas o nulas en el caso de algunos alumnos, que las discusiones no fluyeran por el hecho de tener que estar prendiendo y apagando un micrófono, ya que, al estar en casa existían diferentes ruidos y distracciones ambientales.

El uso de la tecnología digital fue también una dificultad para algunos estudiantes, dado que surgieron complicaciones que tuvieron que ver con fallas de internet y dificultades en torno a la manipulación del applet diseñado, por el hecho de que algunos estudiantes utilizaron un celular como dispositivo para conectarse a las sesiones. Se considera que estos factores influyeron en que hubiera poca discusión sobre los elementos que el applet presentaba, que hubiera pocas conjeturas en torno a las relaciones que se podían encontrar en el mismo y que el uso del applet hubiera pasado a segundo plano en las discusiones de los equipos.

Otro aspecto problemático en el diseño se identificó en el hecho de que los alumnos consideraron solo una de las magnitudes (los azúcares) para comparar las barras de chocolate. Esta clase de dificultad fue reportada por Oliveira (2009), en su trabajo se reporta que los estudiantes no consideraban las diferentes magnitudes que debían ser tomadas en cuenta para trabajar con problemas de proporcionalidad. En la etapa uno, la mayoría de los estudiantes plasmó en sus representaciones funciones espontáneas una clasificación de las barras de chocolate, resaltando la cantidad de azúcar que cada una de ellas contenía, pero sin tomar en cuenta la cantidad de producto (ver Figura 77). Esta estrategia limitada para realizar la comparación de los chocolates trascendió hasta la etapa de autorreflexión en algunos

estudiantes, quienes tomaron en cuenta solo los gramos de grasas para clasificar las barras de chocolate (ver Figura 78).

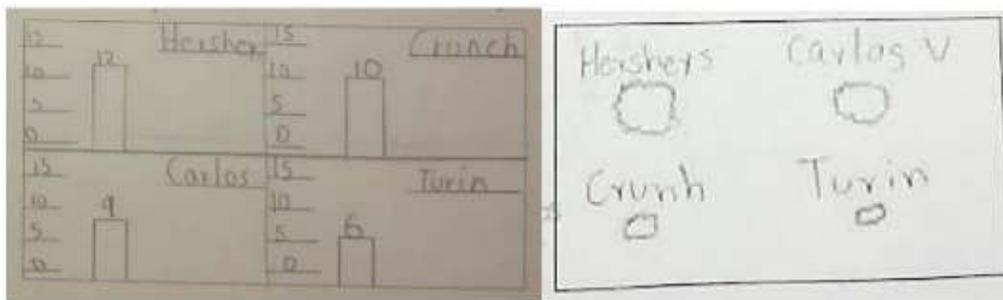


Figura 77. RFE etapa 1

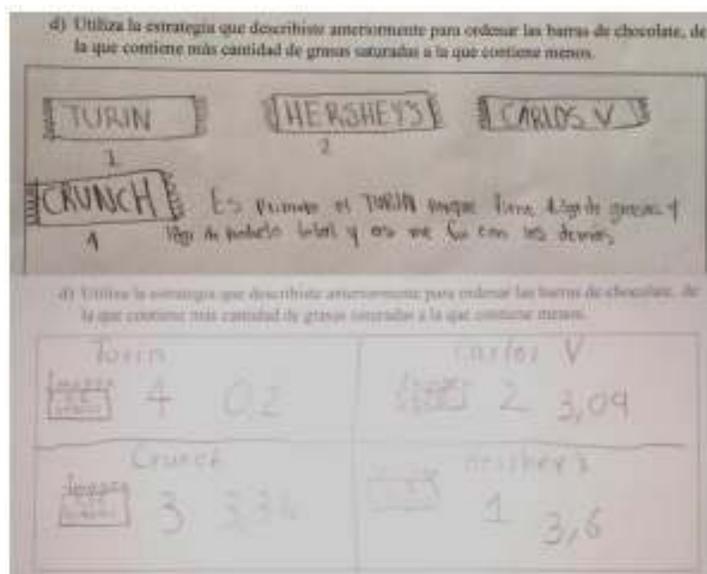


Figura 78. Representaciones etapa 4

La metodología ACODESA (desde la perspectiva docente)

Así como los estudiantes se enfrentaron a diferentes dificultades durante la implementación de las actividades, por parte de la instructora/docente también se presentaron algunas dificultades para llevar a cabo la implementación de las actividades siguiendo los lineamientos de la metodología ACODESA y adaptándolos a la intervención en línea con los estudiantes.

El trabajar en línea dificulta la observación y/o supervisión del trabajo que los alumnos realizan en sus hojas o cuadernos y esto dificulta la toma de decisiones en torno a la intervención por parte del docente, ya que en su mayoría solo cuenta con la información que los alumnos pueden dar oralmente. ¿Cuándo intervenir? ¿Cómo intervenir? Son interrogantes que surgieron durante la implementación de las actividades y que fueron una dificultad para la docente.

Además, se considera que ACODESA brinda pocas directrices que guíen la intervención docente en las diferentes etapas de la metodología, en particular con el trabajo en equipo, esto debido a que esta forma de trabajo no es algo natural para los estudiantes y requieren de una orientación por parte del docente, agregando además que trabajar en equipo de manera virtual es un reto aún mayor, pues la comunicación entre los miembros del equipo es distinta a si estuvieran uno al lado del otro y viendo lo que el otro plasma en su cuaderno.

Particularmente, es en la discusión grupal en la que se considera que existen pocas orientaciones que apoyen al docente en la toma de decisiones para su intervención. Al tratarse de un trabajo en gran grupo el docente debe intervenir, guiar y orientar a los alumnos considerando en todo momento lo que ACODESA plantea como características y propósitos de esta etapa.

Nuevas líneas de trabajo

Al finalizar con el presente trabajo de tesis se abren diferentes caminos que podrían dar pie a nuevos trabajos en torno a la noción de proporcionalidad. A continuación, se enlistan algunos de ellos, sin pretensiones de exhaustividad.

- Una continuación natural del presente trabajo podría ser el diseño de problemas y/o ejercicios para complementar la situación de investigación diseñada, considerando que fue solamente primer escalón en el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre la proporcionalidad en la escuela secundaria.
- Un complemento al diseño realizado podría tener como elemento novedoso el planteamiento de situaciones problema en contextos diferentes para abordar los elementos de la proporcionalidad trabajados con el diseño (valor unitario,

constante de proporcionalidad, propiedades como: al doble le toca el doble), o bien, abordar elementos relacionados con la proporcionalidad que no fueron considerados en este diseño (el porcentaje, factor de escala, semejanza, entre otros).

- El diseño aquí realizado fue pensado para ser implementado con alumnos de secundaria, sin embargo, este podría ser reformulado, de manera que, se pudiera realizar una implementación con profesores o futuros profesores de secundaria con la finalidad de refinar su conocimiento en torno a la proporcionalidad y favorecer la reflexión sobre la enseñanza de esta noción matemática.
- En apartados anteriores se habló sobre la falta de evidencia sobre el aprendizaje de los estudiantes después de la etapa de institucionalización, un trabajo de investigación sobre la noción de proporcionalidad que los estudiantes desarrollan después de la implementación del diseño podría ser una nueva línea sobre la cual trabajar.
- La implementación de actividades con base en la metodología ACODESA en modalidad virtual es un área de oportunidad para realizar nuevos trabajos, una investigación en este sentido podría ampliar los planteamientos de esta metodología.
- El diseño fue implementado por su diseñadora, por lo cual se considera que presentar el diseño a otros docentes, y pedir que lo implementen con sus grupos o grupo de alumnos, permitiría llevar a cabo un trabajo de investigación para reportar la forma en la que interpretan e implementan la situación de investigación otros docentes.
- Por último, el diseño de una guía para llevar a cabo la implementación del diseño elaborado para esta tesis se considera podría ser un complemento que permitiría que otros docentes trabajaran con el diseño en sus aulas.

REFERENCIAS

- Balderas, R. (2010). *La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros* [Tesis de Maestría no publicada]. México: CINVESTAV-IPN.
- Block, D.; Mendoza, T. & Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: Ediciones SM.
- Bolea, P.; Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La trasposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.
- Burgos, M.; Castillo, M.; Beltrán-Pellicer, P.; Giacomone, B. & Godino, J. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 34(66), 40-68.
- Cortés, J.; Hitt, F. & Saboya, M. (2016). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. *Boletim de Educação Matemática* 30(54), 240-264.
- Cortés, W. & Cruz, J. (2018). *La enseñanza de la proporcionalidad, más allá de la regla de tres* [Tesis de maestría no publicada]. Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Covarrubias, E. (2018). *Matemáticas 1. Guía para docentes. Travesías*. (pp. 122- 141). México: Ediciones Castillo.
- Cramer, K. & Post, T. (1993, February). Making connections: A Case for Proportionality. *Arithmetic Teacher*, 60(6), 342-346. Recuperado de http://wayback.archive-it.org/org-121/20190122153121/http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_3.html
- Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and Teaching Ratio and Proportion: Research Implications. In D. Owens (Ed.), *Research Ideas For the Classroom* (pp.

159-178). NY: Macmillan Publishing Company. Recuperado de http://wayback.archive-it.org/org-121/20190122153126/http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_4.html

- Dávila-Araiza, M. T. & Herrera, K. (2021). Reflexiones en torno al diseño de una propuesta formativa sobre variación lineal orientada a futuros profesores de secundaria. *Sahuarus. Revista electrónica de Matemáticas*, 5(1), 94-111.
- Fernández, C. & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 30(1), 129-142.
- Gómez, B. & García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.
- Herrera, K. (2020). *Propuesta formativa para el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de futuros profesores de secundaria sobre variación lineal* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad de Sonora, México.
- Herrera, K., Dávila-Araiza, M. T., Giacomone, B. & Beltrán-Pellicer, P. (2021). Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 108, 263-289.
- Hitt, F. & Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet* 10(1), 1-30.
- Hitt, F. & Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación* (73), 151-175.
- Hitt, F. & Quiroz, S. (2019). La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Núñez, J. L. Soto & M. Saboya (Eds.), *Investigaciones*

- teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 11-30). Recuperado de http://pmme.mat.uson.mx/publicaciones/MEyT/Investigaciones_teorico_practicas_sobre_la_modelacion_matematica_en_un_medio_tecnologico.pdf.
- Hitt, F.; Saboya, M. & Cortés, J. (2017). *Task Design in a Paper and Pencil and Technological Environment to Promote Inclusive Learning: An Example with Polygonal Numbers*. Springer International Publishing AG 2017 G. Aldon et al. (eds.), Mathematics and Technology, Advances in Mathematics Education, DOI 10.1007/978-3-319-51380-5_4.
- Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática*, 24(1), 133-157.
- Oliveira, I. (2009). Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. *Boletim de Educação Matemática* 22(34), 57-79.
- Oller, A. (2012). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria* [Tesis Doctoral no publicada]. España: Universidad de Valladolid.
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. México: SEP.
- Soto, J.; Hitt, F.; & Quiroz, S. (2019). Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos. En S. Quiroz, E. Núñez, J. L. Soto & M. Saboya (Eds.), *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 31-50). Recuperado de http://pmme.mat.uson.mx/publicaciones/MEyT/Investigaciones_teorico_practicas_sobre_la_modelacion_matematica_en_un_medio_tecnologico.pdf.
- Varela, D. (2017). *Una propuesta constructivista orientada a profesores de matemáticas de secundaria, sobre proporcionalidad* [Tesis de maestría no publicada]. México: Universidad de Sonora.

Vega, B. (2006). *La proporcionalidad en el análisis didáctico de un libro de texto* [Tesis de maestría no publicada]. Argentina: Escuela Normal Superior “Gral. José de San Martín”.

ANEXOS

Anexo 1. Protocolo de observación

 Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa Protocolo de observación durante la implementación				
Etapas	Aspectos por observar	Si	No	Descripción/Observaciones e intervalos de tiempo en la grabación
1. Trabajo individual	El contexto despertó interés en los alumnos	Si	No	<ul style="list-style-type: none"> Comentarios que hacen de manera individual: Opiniones acerca del nuevo etiquetado: Conocimientos sobre los ingredientes que aparecen en el nuevo etiquetado: En qué pregunta/consigna presentan dudas: Qué dudas tienen: Explicaciones del docente para aclarar dudas o promover la reflexión:
	Los alumnos realizan preguntas al docente sobre las consignas o la información del texto	Si	No	
	Gestos o comentarios de los alumnos que se manifiestan durante esta etapa			
	Aspectos relacionados con el dibujo que se pide en el inciso e)			
2. Trabajo en equipo (parte I)	El inciso a) favoreció la discusión al interior del equipo	Si	No	<ul style="list-style-type: none"> Aspectos donde al principio no estuvieron de acuerdo: Aspectos donde desde el inicio sí estuvieron de acuerdo: Sobre qué aspecto(s) discutieron más tiempo: Aspectos que consideró incluir como respuesta en las hojas de trabajo: En qué pregunta/consigna presentan dudas:
	Los alumnos utilizan argumentos para convencer a los compañeros del equipo de elegir determinada respuesta	Si	No	
	La tabla del inciso b) generó discusiones en torno a partes de un todo (fracciones)	Si	No	
	Los incisos c) y d) favorecieron la construcción de representaciones gráficas de la relación entre el tamaño del chocolate y la cantidad de azúcar	Si	No	
	Los alumnos utilizan información de la tabla para argumentar la respuesta del inciso e)	Si	No	<ul style="list-style-type: none"> Explicaciones del docente para aclarar dudas o promover discusión:
	El inciso f) favoreció discusiones en torno a partes de un todo (fracciones)	Si	No	
	El inciso g) generó discusión en torno a la información de la tabla	Si	No	
2.1 Trabajo en equipo (parte II)	Los alumnos se organizan para designar tareas a cada integrante (compartir pantalla para que todos puedan ver el applet, participaciones organizadas, leer las consignas)	Si	No	<ul style="list-style-type: none"> Interpretaciones que los alumnos hacen del applet y sus elementos: Dificultades con el uso del applet: Aspectos del applet que les llaman más la atención: Argumentos o ideas erróneas: Aspectos que generan confusión: Aspectos que generan más discusión: Argumentos/respuestas dadas usando el applet: Explicaciones del docente para aclarar dudas o promover discusión:
	La exploración con el applet favorece la discusión al interior del equipo y facilita la respuesta de los incisos a), b), c) y d)	Si	No	
	El applet favorece la construcción de la relación que hay entre la cantidad de producto y la cantidad de azúcar	Si	No	
	El applet favorece la construcción de argumentos que permiten justificar las respuestas de los alumnos	Si	No	
	Los alumnos utilizan el applet y las etiquetas de los chocolates para completar las tablas	Si	No	
	Los alumnos utilizan la información de las tablas para responder y justificar las respuestas a los incisos I, II, III y IV	Si	No	
	Los alumnos determinan cuál es el chocolate más dulce y justifican con argumentos basados en los datos de las tablas	Si	No	
3. Discusión grupal	Los alumnos participan activamente en la discusión grupal	Si	No	<ul style="list-style-type: none"> Aspectos a los que prestan más atención de las respuestas en las hojas de trabajo: Aspectos en los que no están de acuerdo:
	Utilizan argumentos basados en las respuestas que aparecen en las hojas de trabajo	Si	No	
	Los alumnos validan sus respuestas	Si	No	

	Se llega a un acuerdo en grupo al final de la discusión	Si	No	<ul style="list-style-type: none"> • Estrategias que privilegia: • Tipo de lenguaje que los alumnos utilizan: • Dificultades en la comunicación entre los equipos: • Explicaciones del docente para aclarar dudas o promover discusión:
4. Auto-reflexión	Los alumnos realizan preguntas al docente sobre las conignas o la información del texto	Si	No	<ul style="list-style-type: none"> • En qué pregunta/conigna presentan dudas: • Qué dudas tienen: • Conocimientos, técnicas o aspectos relacionados con las etapas de trabajo previas que mencionan los estudiantes:
	Los alumnos realizan preguntas sobre las estrategias discutidas en la etapa anterior	Si	No	
	Los alumnos hacen uso de las etiquetas de los chocolates para responder las conignas	Si	No	
5. Institucionalización	Los alumnos manifiestan dudas	Si	No	<ul style="list-style-type: none"> • Qué dudas tienen: • Explicaciones del docente para aclarar dudas o promover discusión: • Conceptos que se definen en esta etapa: • Técnicas o estrategias mencionadas:
	Dudas o comentarios de los alumnos que se manifiestan durante esta etapa			

Situación de investigación ¿Por qué poner nuevas etiquetas?

Sesión 2. Lunes 9 de noviembre 3:00pm



Etapa 1. Trabajo individual

I. Lee la siguiente información y responde las preguntas que se plantean después.

La Secretaría de Salud en México, buscando prevenir enfermedades como diabetes, hipertensión, problemas cardiovasculares, entre otras, ha implementado diversas estrategias para que la sociedad mexicana cuide su alimentación, sobre todo en lo que respecta al consumo de grasas, azúcares, calorías y sodio.

Gracias a diversos estudios se concluyó que el etiquetado de los diferentes productos no era la manera más adecuada para presentar su contenido

nutricional, pues la información presentada era difícil de comprender y dificultaba a los consumidores la comparación de productos de diversas marcas para elegir la mejor opción. En la imagen de la derecha (imagen 1) se muestra este tipo de etiquetado.

El orden de los nutrimentos a declarar siempre debe ser:



Imagen 1



Imagen 2

consumo excesivo de ciertos productos es el uso de nuevas etiquetas. A partir del 1 de octubre las etiquetas deben ajustarse a nuevas normas, ahora se utilizan unos sellos negros en forma de octágonos, con la finalidad de advertir a los consumidores si el contenido excede los límites

saludables de azúcares, grasas saturadas, grasas trans, calorías y sodio. En la imagen 2 se muestran los sellos que las empresas deben incluir en las etiquetas de diversos productos.

Entre algunos de los productos en los que el nuevo etiquetado debe aparecer, se encuentra el chocolate. En las etiquetas de estas golosinas deben ser incluidos los



Imagen 3

octágonos negros. ¿Cómo saber cuál barra de chocolate es la más saludable o la menos saludable? ¿Cómo saber cuál contiene más azúcar, más grasas, más calorías, etc. considerando su tamaño?

- a) De las etiquetas octagonales negras, ¿cuáles crees que deberían tener las cuatro barras de chocolate que se muestran en la imagen 3? ¿Por qué?

- b) ¿Cuál barra de chocolate consideras que es la menos saludable? ¿Por qué?

- c) Para poder comparar más fácilmente los chocolates podemos elegir un ingrediente, por ejemplo: el azúcar ¿Cuál chocolate crees que es más dulce? ¿Y cuál consideras el menos dulce? Explica por qué.

d) ¿Podrías saber cuál chocolate es más dulce sin haberlo probado? Explica tu respuesta.

e) Ordena las barras de chocolate de la más dulce a la menos dulce y haz un dibujo que represente el azúcar que consideras que cada una contiene. Explica con un texto tu dibujo.

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	
---	---

Situación de investigación ¿Por qué poner nuevas etiquetas?

**Sesión 3. Martes 10 de noviembre E1→3:00pm, E2→4:00pm y
E3→5:00pm**



Etapa 2. Trabajo en equipo (parte 1)



II. Reunidos en equipos de cuatro personas comparen sus respuestas de la etapa 1, entre todos decidan cuál es el chocolate más dulce y respondan lo siguiente.

a) ¿Cuál fue la barra de chocolate que eligieron como la más dulce? Expliquen por qué.

b) Completen la siguiente tabla.

Cantidades en gramos	Turín	Crunch	Carlos V	Hershey's
Azúcar				
Otros ingredientes				
Total de producto				

c) ¿En cuáles de las barras de chocolate los gramos de azúcar son la mitad o más de la mitad del contenido total del producto? Expliquen su razonamiento y también ilustren con un dibujo las barras y el azúcar que contiene cada una.

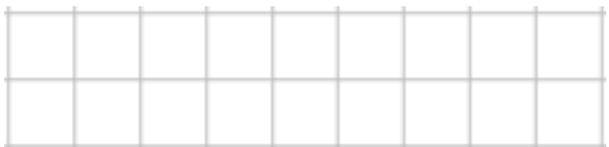
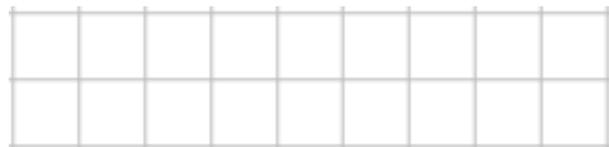


d) ¿En cuál barra el azúcar es aproximadamente una cuarta parte de su contenido total? Expliquen cómo llegaron a su respuesta y también representen con un dibujo la barra y el azúcar que contiene.



e) Considerando la información de la tabla, ¿Cuál chocolate es el menos dulce? ¿Y cuál es el más dulce? Expliquen por qué.

f) Las cuadrículas siguientes representan las barras de chocolate. Anoten el nombre del chocolate que corresponde a cada barra y colorean las partes que son azúcar.

<p style="text-align: center;">CRUNCH</p> 	<p style="text-align: center;">HERSHEY'S</p> 
<p style="text-align: center;">TURÍN</p> 	<p style="text-align: center;">CARLOS V</p> 

g) ¿Qué información utilizaron para decidir cuál chocolate es más dulce que otro? ¿por qué?

Situación de investigación ¿Por qué poner nuevas etiquetas?

Sesión 3. Miércoles 11 de noviembre E1→3:00pm, E2→4:00pm y E3→5:00pm



Etapa 2. Trabajo en equipo (parte 2)



III. Aún reunidos en equipos exploren el applet “Chocolates y azúcar” y respondan las siguientes preguntas.

a) Abran el applet “Chocolates y azúcar”. Localicen el punto CH y muévanlo a la derecha. El rectángulo azul que aparece representa la cantidad de la barra de chocolate que alguien consume. Al mover el punto ¿qué sucede con la cantidad de producto? ¿Y con la cantidad de azúcar?

b) Ahora hagan lo mismo con los puntos HS, TN y CV ¿Sucede lo mismo que pasó al mover el punto CH?

c) Regresen el punto CH al final de la imagen de la barra de chocolate, una vez ahí muévanlo hacia la izquierda ¿Qué sucede con la cantidad de producto? ¿Y con la cantidad de azúcar?

d) Repitan el procedimiento del inciso c) con los puntos HS, TN y CV, ¿sucede lo mismo que pasó al mover el punto CH?

e) ¿Qué relación encuentran entre la cantidad de producto y la cantidad de azúcar cuando cambia la cantidad de producto consumida?

f) Si alguien comiera una tercera parte de una de las barras de chocolate ¿Qué parte del azúcar estaría comiendo? ¿Por qué?

g) Y si comiera dos barras del mismo chocolate ¿Qué tanta azúcar estaría comiendo? Explica por qué.

h) Con ayuda de las etiquetas de las barras de chocolate y del applet “Chocolates y azúcar”, completa las tablas siguientes.

CRUNCH	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar
20g	
10g	
5g	
4g	
1g	

HERSHEY'S	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar
20g	
10g	
5g	
4g	
1g	

CARLOS V	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar
18g	
9g	
6g	
4.5g	
1g	

TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar
18g	
9g	
6g	
4.5g	
1g	

i) ¿Qué sucede con las cantidades de Crunch y de azúcar al pasar del primer al segundo renglón? Expliquen su razonamiento.

j) ¿Qué sucede con las cantidades de Turín y de azúcar al pasar del primer al tercer renglón? Expliquen su razonamiento.

k) ¿Qué información de las tablas les sería útil para comparar las barras de chocolate y determinar cuál de ellas es la más dulce? Expliquen por qué.

l) Utilizando la información de las tablas, ¿Cuál chocolate es el más dulce? Expliquen de qué forma llegaron a la respuesta.

Situación de investigación ¿Por qué poner nuevas etiquetas?

Sesión 5. Jueves 12 de noviembre 3:00pm

Etapa 3. Discusión grupal

- IV. En plenaria, compartan sus resultados y discutan en torno a ellos con apoyo del profesor

Sesión 5. Jueves 12 de noviembre 3:00pm y sesión 6. Viernes 13 de noviembre 3:00pm



Etapa 4. Autorreflexión



- V. Lee la siguiente información y responde las preguntas que se plantean después.

Además del azúcar, las barras de chocolate contienen otros ingredientes que si se consumen en exceso pueden provocar diversas enfermedades. Por ejemplo, las grasas saturadas, éstas tienen la función de aportar energía que el cuerpo necesita para trabajar adecuadamente, pero el consumo excesivo de ellas hace que los niveles de colesterol (grasas malas en la sangre) se eleven provocando enfermedades y problemas cardiovasculares.

El nuevo etiquetado incluye un octágono negro que advierte cuando un producto contiene exceso de grasas saturadas. ¿Cuál de los chocolates será el que contiene más grasas saturadas considerando la cantidad de producto de cada barra?

- a) Completa la siguiente tabla.

Barra de chocolate	Cantidad de producto (g)	Cantidad de grasas saturadas (g)
Turín		
Crunch		
Carlos V		
Hershey's		

b) Con la información de la tabla y considerando la cantidad de producto de cada chocolate, ¿podrías decidir cuál barra de chocolate es la que contiene más grasas saturadas? Justifica tu respuesta.

c) Describe la estrategia que utilizarías para determinar cuál barra de chocolate contiene más grasas saturadas considerando los gramos de producto que contiene cada barra.

d) Utiliza la estrategia que describiste anteriormente para ordenar las barras de chocolate, de la que contiene más cantidad de grasas saturadas a la que contiene menos.

- e) ¿La estrategia utilizada funcionaría para clasificar las barras de chocolate del más saludable al menos saludable, considerando cualquier ingrediente? Justifica tu respuesta.

Sesión 6. Viernes 13 de noviembre 3:00pm

Etapas 5. Institucionalización

- VI. En plenaria compartan sus respuestas

Anexo 3. Hoja de trabajo con anotaciones para el profesor

Situación de investigación 1. ¿Por qué poner nuevas etiquetas?

Objetivo General

Que los alumnos identifiquen relaciones de proporcionalidad, construyan y comparen razones, calculen valor unitario, completen tablas de valores, analicen y utilicen los resultados para tomar decisiones respecto a la situación planteada.

Objetivo específico 1 → Que los alumnos determinen qué chocolate es el más dulce con base en su experiencia y que sean capaces de representar mediante ilustraciones la forma en la que clasificarían los chocolates.



Etapa 1. Trabajo individual

I. Lee la siguiente información y responde las preguntas que se plantean después.

La Secretaría de Salud en México, buscando prevenir enfermedades como diabetes, hipertensión, problemas cardiovasculares, entre otras, ha implementado diversas estrategias para que la sociedad mexicana cuide su alimentación, sobre todo en lo que respecta al consumo de grasas, azúcares, calorías y sodio.

El orden de los nutrimentos a declarar siempre debe ser:



Imagen 1



Imagen 2

Gracias a diversos estudios se concluyó que el etiquetado de los diferentes productos no era la manera más adecuada para presentar su contenido nutrimental, pues la información presentada era difícil de comprender y dificultaba a los consumidores la comparación de productos de diversas

marcas para elegir la mejor opción. En la imagen de la derecha (imagen 1) se muestra este tipo de etiquetado.

Una estrategia actual para prevenir las diversas enfermedades causadas por el consumo excesivo de ciertos productos es el uso de nuevas etiquetas. A partir del 1 de octubre las etiquetas deben ajustarse a nuevas normas, ahora se utilizan unos sellos negros en forma de octágonos, con la finalidad de advertir a los consumidores si el contenido excede los límites saludables de azúcares, grasas saturadas, grasas trans, calorías y sodio. En la imagen 2 se muestran los sellos que las empresas deben incluir en las etiquetas de diversos productos.

Entre algunos de los productos en los que el nuevo etiquetado debe aparecer, se encuentra el chocolate. En las etiquetas de estas golosinas deben ser incluidos los octágonos negros. ¿Cómo saber cuál barra de chocolate es la más saludable o la menos saludable? ¿Cómo saber cuál contiene más azúcar, más grasas, más calorías, etc. considerando su tamaño?



Imagen 3

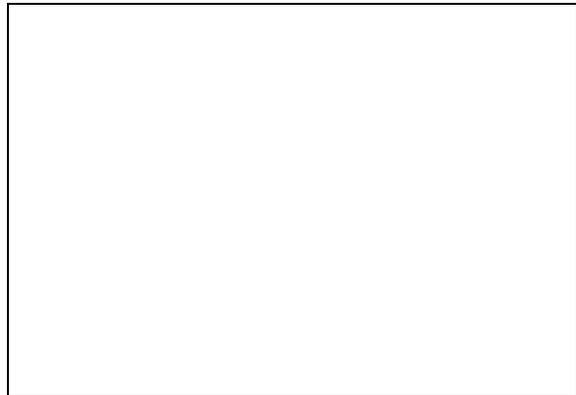
- a) De las etiquetas octagonales negras, ¿cuáles crees que deberían tener las cuatro barras de chocolate que se muestran en la imagen 3? ¿Por qué?

- b) ¿Cuál barra de chocolate consideras que es la menos saludable? ¿Por qué?

c) Para poder comparar más fácilmente los chocolates podemos elegir un ingrediente, por ejemplo: el azúcar ¿Cuál chocolate crees que es más dulce? ¿Y cuál consideras el menos dulce? Explica por qué.

d) ¿Podrías saber cuál chocolate es más dulce sin haberlo probado? Explica tu respuesta.

e) Ordena las barras de chocolate de la más dulce a la menos dulce y haz un dibujo que represente el azúcar que consideras que cada una contiene. Explica con un texto tu dibujo.



Objetivo específico 2 → Que los alumnos identifiquen las magnitudes con las que deben construir y comparar las razones que les permitan determinar qué chocolate es el menos dulce y aproximar cuál es el más dulce.



Etapa 2. Trabajo en equipo (parte 1)



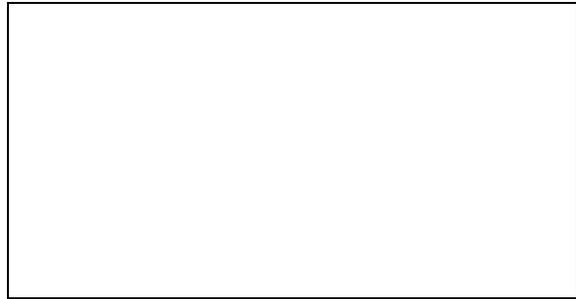
II. Reunidos en equipos de cuatro personas comparen sus respuestas de la etapa 1, entre todos decidan cuál es el chocolate más dulce y respondan lo siguiente.

a) ¿Cuál fue la barra de chocolate que eligieron como la más dulce? Expliquen por qué.

b) Completen la siguiente tabla.

Cantidades en gramos	Turín	Crunch	Carlos V	Hershey's
Azúcar				
Otros ingredientes				
Total de producto				

c) ¿En cuáles de las barras de chocolate los gramos de azúcar son la mitad o más de la mitad del contenido total del producto? Expliquen su razonamiento y también ilustren con un dibujo las barras y el azúcar que contiene cada una.



d) ¿En cuál barra el azúcar es aproximadamente una cuarta parte de su contenido total? Expliquen cómo llegaron a su respuesta y también representen con un dibujo la barra y el azúcar que contiene.



e) Considerando la información de la tabla, ¿Cuál chocolate es el menos dulce? ¿Y cuál es el más dulce? Expliquen por qué.

f) Las cuadrículas siguientes representan las barras de chocolate. Anoten el nombre del chocolate que corresponde a cada barra y colorean las partes que son azúcar.

CRUNCH	HERSHEY'S
	

TURÍN	CARLOS V																																								
<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>																					<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>																				

g) ¿Qué información utilizaron para decidir cuál chocolate es más dulce que otro? ¿por qué?

Objetivo específico 3 → Que los alumnos establezcan la relación de proporcionalidad que existe entre la cantidad de producto y la cantidad de azúcar, de manera cualitativa y cuantitativa. Además, que determinen, mediante el uso de tablas y del valor unitario, cuál chocolate es el más dulce.



Etapas 2. Trabajo en equipo (parte 2)

III. Aún reunidos en equipos exploren el applet “Chocolates y azúcar” y respondan las siguientes preguntas.



a) Abran el applet “Chocolates y azúcar”. Localicen el punto CH y muévanlo a la derecha. El rectángulo azul que aparece representa la cantidad de la barra de chocolate que alguien consume. Al mover el punto ¿qué sucede con la cantidad de producto? ¿Y con la cantidad de azúcar?

b) Ahora hagan lo mismo con los puntos HS, TN y CV ¿Sucedo lo mismo que pasó al mover el punto CH?

c) Regresen el punto CH al final de la imagen de la barra de chocolate, una vez ahí muévanlo hacia la izquierda ¿Qué sucede con la cantidad de producto? ¿Y con la cantidad de azúcar?

d) Repitan el procedimiento del inciso c) con los puntos HS, TN y CV, ¿sucede lo mismo que pasó al mover el punto CH?

e) ¿Qué relación encuentran entre la cantidad de producto y la cantidad de azúcar cuando cambia la cantidad de producto consumida?

f) Si alguien comiera una tercera parte de una de las barras de chocolate ¿Qué parte del azúcar estaría comiendo? ¿Por qué?

g) Y si comiera dos barras del mismo chocolate ¿Qué tanta azúcar estaría comiendo? Explica por qué.

h) Con ayuda de las etiquetas de las barras de chocolate y del applet “Chocolates y azúcar”, completa las tablas siguientes.

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcar						
20g		20g		18g		18g	
10g		10g		9g		9g	
5g		5g		6g		6g	
4g		4g		4.5g		4.5g	
1g		1g		1g		1g	

i) ¿Qué sucede con las cantidades de Crunch y de azúcar al pasar del primer al segundo renglón? Expliquen su razonamiento.

j) ¿Qué sucede con las cantidades de Turín y de azúcar al pasar del primer al tercer renglón? Expliquen su razonamiento.

k) ¿Qué información de las tablas les sería útil para comparar las barras de chocolate y determinar cuál de ellas es la más dulce? Expliquen por qué.

l) Utilizando la información de las tablas, ¿Cuál chocolate es el más dulce? Expliquen de qué forma llegaron a la respuesta.

Etapa 3. Discusión grupal

IV. En plenaria, compartan sus resultados y discutan en torno a ellos con apoyo del profesor

- Reflexiones en torno a la primera tabla, orientarse hacia la construcción de la razón ¿Qué parte del total es azúcar? (fracciones) (representar la división con frases como: y cantidad de azúcar por cada cantidad x de z chocolate)
- Retomar una de las tablas y llamar la atención sobre la constante de proporcionalidad y sobre el hecho de que el chocolate con constante mayor será el más dulce.
- Hacer reflexiones en torno al significado del último renglón de cada tabla ¿Por qué utilizar esa información para comparar? (hacer énfasis en que tener cantidades iguales de producto es importante para poder compararlos)
- Retomar las respuestas de los incisos f) y g) para reflexionar en torno a la propiedad de la proporcionalidad que ahí surge “al doble le toca el doble

Objetivo específico 4 → Que los alumnos analicen las estrategias construidas en las etapas anteriores y las utilicen para determinar cuál chocolate contiene mayor cantidad de grasas saturadas considerando la cantidad de producto.



Etapa 4. Autorreflexión

V. Lee la siguiente información y responde las preguntas que se plantean después.



Además del azúcar, las barras de chocolate contienen otros ingredientes que si se consumen en exceso pueden provocar diversas enfermedades. Por ejemplo, las grasas saturadas, éstas tienen la función de aportar energía que el cuerpo necesita para trabajar adecuadamente, pero el consumo excesivo de ellas hace que los niveles de colesterol (grasas malas en la sangre) se eleven provocando enfermedades y problemas cardiovasculares.

El nuevo etiquetado incluye un octágono negro que advierte cuando un producto contiene exceso de grasas saturadas. ¿Cuál de los chocolates será el que contiene más grasas saturadas considerando la cantidad de producto de cada barra?

a) Completa la siguiente tabla.

Barra de chocolate	Cantidad de producto (g)	Cantidad de grasas saturadas (g)
Turín		
Crunch		
Carlos V		
Hershey's		

b) Con la información de la tabla y considerando la cantidad de producto de cada chocolate, ¿podrías decidir cuál barra de chocolate es la que contiene más grasas saturadas? Justifica tu respuesta.

c) Describe la estrategia que utilizarías para determinar cuál barra de chocolate contiene más grasas saturadas considerando los gramos de producto que contiene cada barra.

d) Utiliza la estrategia que describiste anteriormente para ordenar las barras de chocolate, de la que contiene más cantidad de grasas saturadas a la que contiene menos.

e) ¿La estrategia utilizada funcionaría para clasificar las barras de chocolate del más saludable al menos saludable, considerando cualquier ingrediente? Justifica tu respuesta.

Etapas 5. Institucionalización

VI. En plenaria compartan sus respuestas.

- Constante de proporcionalidad
- El valor unitario
- Razón (mitad a mitad, tercer parte a tercera parte, doble a doble)
- Uso de tablas
- Propiedad de la proporcionalidad “al doble le toca el doble”

Anexo 4. Hojas de trabajo rediseñadas (con anotaciones para el profesor)

Situación de investigación. ¿Por qué poner nuevas etiquetas?

Objetivo General

Que los alumnos identifiquen relaciones de proporcionalidad, construyan y comparen razones, calculen valor unitario, completen tablas de valores, analicen y utilicen los resultados para tomar decisiones respecto a la situación planteada.

Notas para el profesor:

- Al momento de diseñar la actividad aún no entraba en vigor el nuevo etiquetado de los productos, por lo cual las etiquetas de los chocolates utilizados no cumplen con el formato requerido por la Secretaría de Salud. Las etiquetas, después de entrar el vigor el nuevo etiquetado, separan los azúcares en azúcares libres y azúcares añadidos.
- Esta actividad fue implementada, por primera vez, en modalidad virtual. Para una implementación presencial se sugiere proporcionar a los alumnos las barras de chocolate como materiales.

Objetivo específico 1 → Que los alumnos determinen qué chocolate es el más dulce con base en su experiencia y que sean capaces de representar mediante ilustraciones la forma en la que clasificarían los chocolates.



Etapa 1. Trabajo individual

I. Lee la siguiente información y responde las preguntas que se plantean después.

La Secretaría de Salud en México, buscando prevenir enfermedades como diabetes, hipertensión, problemas cardiovasculares, entre otras, ha implementado diversas estrategias para que la sociedad

El orden de los nutrimentos a declarar siempre debe ser:



Imagen 1

mexicana cuide su alimentación, sobre todo en lo que respecta al consumo de grasas, azúcares, calorías y sodio.

Gracias a diversos estudios se concluyó que el etiquetado de los diferentes productos no era la manera más adecuada para presentar su contenido nutrimental, pues la información presentada era difícil de comprender y dificultaba a los consumidores la comparación de productos de diversas marcas para elegir la mejor opción. En la imagen de la derecha (imagen 1) se muestra este tipo de etiquetado.



Una estrategia actual para prevenir las diversas enfermedades causadas por el consumo excesivo de ciertos productos es el uso de nuevas etiquetas. A partir del 1 de octubre de 2020 las etiquetas deben ajustarse a nuevas normas, ahora se utilizan unos sellos negros en forma de octágonos,

Imagen 2 con la finalidad de advertir a los consumidores si el contenido excede los límites saludables de azúcares, grasas saturadas, grasas trans, calorías y sodio. En la imagen 2 se muestran los sellos que las empresas deben incluir en las etiquetas de diversos productos.

Entre algunos de los productos en los que el nuevo etiquetado debe aparecer, se encuentra el chocolate. En las etiquetas de estas golosinas deben ser incluidos los octágonos negros. ¿Cómo saber cuál barra de chocolate es la más saludable o la menos saludable? ¿Cómo saber *Imagen 3* cuál contiene más azúcares, más grasas, más calorías, etc. considerando su tamaño?



- a) De las etiquetas octagonales negras, ¿cuáles crees que deberían tener las cuatro barras de chocolate que se muestran en la imagen 3? ¿Por qué?

b) ¿Cuál barra de chocolate consideras que es la menos saludable? ¿Por qué?

c) De las barras de chocolate que aparecen en la imagen 3, ¿Cuál consideras que es la más dulce? Explica lo que tomaste en cuenta para decidirlo.

d) ¿Podrías saber cuál chocolate es más dulce sin haberlo probado? Explica tu respuesta.

e) Ordena las barras de chocolate de la más dulce a la menos dulce y haz un dibujo que represente los elementos que consideraste para la clasificación. Explica con un texto tu dibujo.



Objetivo específico 2 → Que los alumnos identifiquen las magnitudes con las que deben construir y comparar las razones que les permitan determinar qué barra de chocolate es la que contiene mayor cantidad de azúcares en proporción a su tamaño.



Etapa 2. Trabajo en equipo (parte 1)



- II. Reunidos en equipos de cuatro personas comparen sus respuestas de la etapa 1, discutan sobre la clasificación que realizaron de las barras de chocolate, como lo hicieron y respondan.
- a) ¿Cuál sería la forma correcta de clasificar los chocolates del más dulce al menos dulce? ¿Qué se debería de tomar en cuenta para llevar a cabo la clasificación?

Determinar la dulzura de las barras de chocolate depende de diversos factores como: los ingredientes (leche, cacao, azúcares, etc.), si se ha probado el chocolate o no, los gustos de la persona que prueba los chocolates, entre otros. Para realizar una comparación de los chocolates podríamos tomar uno de los ingredientes y analizar qué tanto de ese ingrediente contiene cada una de las barras con relación al total de producto y así poder realizar una clasificación.

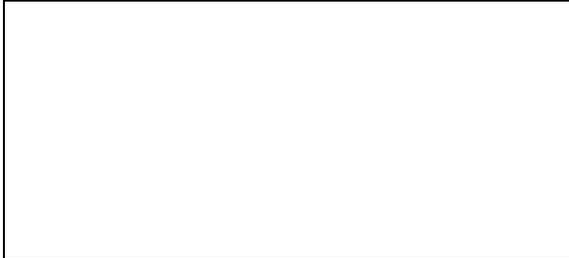


- b) Completen la siguiente tabla.

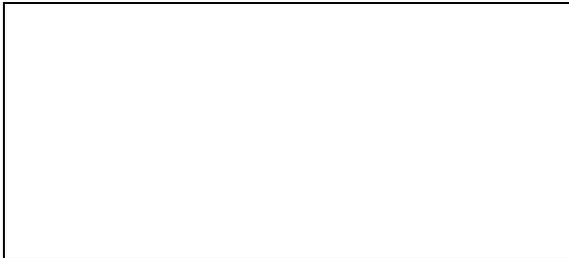
Cantidades en gramos	Turín	Crunch	Carlos V	Hershey's
Azúcares				
Otros ingredientes				
Total de producto				

c) ¿Consideran que la tabla tiene la información suficiente para clasificar las barras de chocolate tomando en cuenta los azúcares y la cantidad de producto de cada una? Justifiquen su respuesta

d) ¿En cuáles de las barras de chocolate los gramos de azúcares son la mitad o más de la mitad del contenido total del producto? Expliquen su razonamiento y también ilustren con un dibujo las barras y los azúcares que contiene cada una.

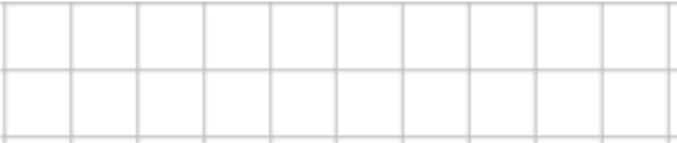
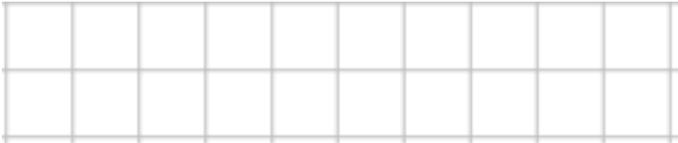
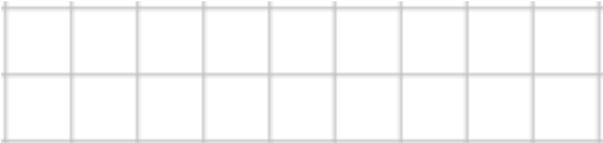
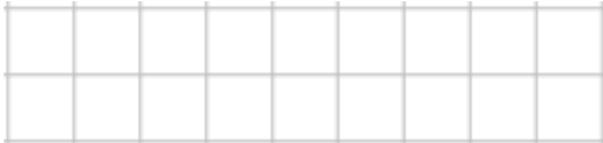


h) ¿En cuál barra los azúcares son aproximadamente una cuarta parte de su contenido total? Expliquen cómo llegaron a su respuesta y también representen con un dibujo la barra y los azúcares que contiene.



i) Considerando la información de la tabla, ¿Cuál chocolate contiene mayor cantidad de azúcares tomando en cuenta la cantidad de producto? Expliquen por qué.

- j) Las cuadrículas siguientes representan las barras de chocolate. Anoten los gramos totales de producto de cada barra y colorean las partes que corresponden a los azúcares de las barras de chocolate.

CRUNCH	HERSHEY'S
	
TURÍN	CARLOS V
	

Objetivo específico 3 → Que los alumnos establezcan la relación de proporcionalidad que existe entre la cantidad de producto y la cantidad de azúcares, de manera cualitativa y cuantitativa. Además, que determinen, mediante el uso de tablas de valores, del valor unitario, la constante de proporcionalidad o el factor adecuado, la clasificación de las barras de chocolate considerando la cantidad de azúcares en proporción al tamaño de cada barra.



Etapa 2. Trabajo en equipo (parte 2)



- III. Aún reunidos en equipos exploren el applet “Chocolates y azúcares” y respondan las siguientes preguntas. Liga de acceso: <https://www.geogebra.org/m/vzpbmtuk>

- a) Abran el applet “Chocolates y azúcares”. Muevan el punto CH hasta llenar la barra por completo, hagan lo mismo con los otros puntos (HS, TN y CV) comenten con sus compañeros de equipo qué es lo que sucede y expliquen.

b) Muevan el punto CH de manera que aumente la cantidad de producto consumida. ¿Qué sucede con la cantidad de azúcares? Expliquen.

c) Ahora muevan los puntos HS, TN y CV para que aumente el producto consumido y describen qué es lo que sucede con los azúcares.

d) Muevan los puntos CH, HS, TN y CV de manera que la cantidad de producto consumida disminuya y describan que sucede con los azúcares.

e) ¿Qué relación encuentran entre la cantidad de producto y la cantidad de azúcares cuando cambia la cantidad de producto consumida?

f) Si alguien comiera una tercera parte de una de las barras de chocolate ¿Qué parte de los azúcares estaría comiendo? ¿Por qué?

g) Y si comiera dos barras del mismo chocolate ¿Qué tanto de azúcares estaría comiendo? Explica por qué.

h) Con ayuda de las etiquetas de las barras de chocolate y del applet “Chocolates y azúcares”, completa las tablas siguientes.

CRUNCH		HERSHEY'S		CARLOS V		TURÍN	
Cantidad de producto	Cantidad de azúcares						
20g		20g		18g		18g	
10g		10g		9g		9g	
5g		5g		6g		6g	
4g		4g		4g		4g	
2g		2g		3g		3g	
1g		1g		1g		1g	

i) ¿Qué sucede con las cantidades de Crunch y de azúcares al pasar del primer al segundo renglón? Expliquen su razonamiento.

j) ¿Qué sucede con las cantidades de Turín y de azúcares al pasar del primer al tercer renglón? Expliquen su razonamiento.

k) ¿Cómo usarían la información de las tablas para clasificar las barras de chocolate? Expliquen.

l) ¿Cuál sería la clasificación de las barras utilizando la información de las tablas? Ilustren su clasificación con un dibujo y utilicen los renglones para explicarla con un texto.

<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	
-------------------------------------	--

Etapa 3. Discusión grupal

IV. En plenaria, compartan sus resultados y discutan en torno a ellos con apoyo del profesor

Se sugiere al profesor considerar los siguientes puntos para la discusión grupal:

- Retomar las ilustraciones que los alumnos elaboraron en individual y las que hicieron en equipo para resalta sus elementos y su evolución.
- Reflexiones en torno a la primera tabla, orientarse hacia la construcción de la razón ¿Qué parte del total son azúcares? (fracciones) (representar la división con frases como: y cantidad de azúcares por cada cantidad x de z chocolate)
- Retomar una de las tablas y llamar la atención sobre la constante de proporcionalidad. Resaltar que permite organizar los chocolates pues la barra que tiene más azúcares respecto a su cantidad de producto será la que tenga mayor constante de proporcionalidad.
- Hacer reflexiones en torno al significado del último renglón (valor unitario) de cada tabla ¿Por qué utilizar esa información para comparar? Además, trabajar con el factor adecuado para comparar los chocolates, hacer énfasis en que tener cantidades iguales de producto es importante para poder compararlos.
- Retomar las respuestas de los incisos f) y g) para reflexionar en torno a la propiedad de la proporcionalidad que ahí surge “al doble le toca el doble”

Objetivo específico 4 → Que los alumnos utilicen alguna de las estrategias construidas en las etapas anteriores para clasificar los chocolates considerando la cantidad de grasas saturadas de cada barra de chocolate en proporción a la cantidad de producto de cada barra.



Etapa 4. Autorreflexión



- V. Lee la siguiente información y responde las preguntas que se plantean después.

Además de los azúcares, las barras de chocolate contienen otros ingredientes que si se consumen en exceso pueden provocar diversas enfermedades. Por ejemplo, las grasas saturadas, éstas tienen la función de aportar energía que el cuerpo necesita para trabajar adecuadamente, pero el consumo excesivo de ellas hace que los niveles de colesterol (grasas malas en la sangre) se eleven provocando enfermedades y problemas cardiovasculares.

El nuevo etiquetado incluye un octágono negro que advierte cuando un producto contiene exceso de grasas saturadas. ¿Cuál de los chocolates será el que contiene más grasas saturadas considerando la cantidad de producto de cada barra?

- a) Completa la siguiente tabla.

Barra de chocolate	Cantidad de producto (g)	Cantidad de grasas saturadas (g)
Turín		
Crunch		
Carlos V		
Hershey's		

- b) Con la información de la tabla y, ¿podrías clasificar las barras de chocolate considerando las grasas saturadas y la cantidad de producto de cada chocolate? Justifica tu respuesta.

- c) Describe la estrategia que utilizarías para clasificar las barras de chocolate considerando las grasas saturadas y la cantidad de producto de cada barra.

- d) Utiliza la estrategia que describiste anteriormente para ordenar las barras de chocolate, de la que contiene más cantidad de grasas saturadas a la que contiene menos considerando el total de gramos de producto de cada barra. Realiza tu procedimiento en el recuadro.

- e) ¿La estrategia utilizada funcionaría para clasificar las barras de chocolate del más saludable al menos saludable, considerando cualquier ingrediente? Justifica tu respuesta.

Etapa 5. Institucionalización

VI. En plenaria compartan sus respuestas.

Se sugiere al profesor considerar los siguientes puntos para la institucionalización:

- Constante de proporcionalidad
- El valor unitario/Factor adecuado
- Razón (mitad a mitad, tercer parte a tercera parte, doble a doble)
- Uso de tablas y las estrategias para llenarlas
- Propiedad cualitativas y cuantitativas de la proporcionalidad (cuando una aumenta al doble la otra aumenta al doble también, cuando una disminuye a la mitad la otra lo hace igual)

Fotografías de las etiquetas con la información nutrimental de las barras de chocolate

- **Chocolate Turín**

Este envase aporta:				Información Nutrimental Tamaño de porción 18 g (1 barra); Cantidad por porción: Contenido energético 398 kJ (96 kcal); Carbohidratos (Hidratos de carbono) 6.9 g; Azúcares 4.8 g; Fibra dietética 2.1 g; Grasa total (Lípidos totales) 6.9 g; Grasa saturada 4.3 g; Grasa poliinsaturada 0.2 g; Grasa monoinsaturada 2.4 g; Ácidos grasos trans 0 g; Colesterol 0 mg; Proteínas 1.5 g; Sodio 0 mg.
Grasa Saturada	Otros Grasas	Azúcares totales	Sodio	
39 kcal	23 kcal	43 kcal	0,0 mg	
19 %	6 %	12 %	0 %	

% de los nutrimentos diarios

LOTE Y FECHA DE CADUCIDAD IMPRESOS EN EL ENVASE

- **Chocolate Crunch**

Porción de 18 g (1 barra)	Porción por envase (100 g)
Energía	170
Grasa total	3.0
Grasa saturada	1.7
Grasa poliinsaturada	0.7
Grasa monoinsaturada	0.6
Carbohidratos	10.0
Azúcares	4.3
Fibra dietética	0.6
Proteínas	1.5
Sodio	0.0

Nestlé

Guillermo Escobar
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente (ITESO)
Calle de correo: 01 000 000 0000
Teléfono: 01 800 000 0000

Visítanos en: www.nestle.com.mx

104 kcal

43926143

Nestlé

CRUNCH

- **Chocolate Carlos V**



- **Chocolate Hershey's**

