UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Patrones numéricos y simbolización algebraica en bachillerato. Una propuesta de enseñanza basada en la modelación desde el enfoque de la Educación Matemática Realista

Tesis que presenta

Jesús Martín Hernández López

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias

con Especialidad en Matemática Educativa

Directora de tesis:

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Hermosillo, Sonora, México Marzo de 2022

Hermosillo, Sonora, 14 de marzo del 2020.

Asunto: Cesión de derechos

Universidad de Sonora
Presente

Por este conducto hago constar que soy autor y titular de la obra denominada Patrones numéricos simbolización algebraica en bachillerato. Una propuesta de enseñanza basada en la modelación ..., en lo sucesivo LA OBRA, realizada como trabajo terminal con el propósito de obtener el Grado de Maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa, en virtud de lo cual autorizo a la Universidad de Sonora (UNISON) para que efectúe la divulgación, publicación, comunicación pública, distribución pública, distribución electrónica y reproducción, así como la digitalización de la misma, con fines académicos o propios de la institución y se integre a los repositorios de la universidad, estatales, regionales, nacionales e internacionales.

La UNISON se compromete a respetar en todo momento mi autoría y a otorgarme el crédito correspondiente en todas las actividades mencionadas anteriormente.

De la misma manera, manifiesto que el contenido académico, literario, la edición y en general cualquier parte de LA OBRA son de mi entera responsabilidad, por lo que deslindo a la UNISON por cualquier violación a los derechos de autor y/o propiedad intelectual y/o cualquier responsabilidad relacionada con la OBRA que cometa el suscrito frente a terceros.

Atentamente

Jesús Martín Hernández López
Nombre y firma del autor

LIC. GILBERTO LEÓN LEÓN
Abogado General
UNIVERSIDAD DE SONORA

Agradecimientos

A mi directora de tesis, la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos por todo su apoyo, comprensión y principalmente por su paciencia.

A los miembros del Jurado, por las observaciones y comentarios que permitieron mejorar este trabajo.

A mis compañeros de clase, por los buenos momentos que compartimos.

A Ireni, por su apoyo y consejos.

A el programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa y todos los maestros, por brindarme la oportunidad de convertirme en profesor.

Contenido

Introducción

En este documento se reporta un proyecto de intervención didáctica, el cual consiste en una propuesta de enseñanza basada en la modelación matemática, considerada ésta desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista* de Hans Freudenthal (1905- 1990). En esta propuesta se tratan temas donde aparecen patrones numéricos en la asignatura de Álgebra que se estudian en el nivel medio superior, por lo que se tiene como marco curricular los propósitos para el aprendizaje del álgebra señalados en los planes y programas de estudio vigentes en el bachillerato mexicano. Se busca además integrar el uso de software (GeoGebra).

El documento que se está presentando consta de cuatro capítulos, epílogo y un apartado de referencias bibliográficas.

En el capítulo 1 se presentan algunos antecedentes, elementos de justificación, objetivo general y objetivos específicos. Se muestran, entre otros aspectos, las diferentes posturas acerca de la modelación como estrategia para enseñar matemáticas, así como algunas dificultades reportadas en la literatura de la especialidad sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y una definición de patrones numéricos. Además, se hace una revisión al contexto curricular en el bachillerato mexicano, identificando, sobre todo, cuáles son los propósitos de la formación algebraica en este nivel educativo y se presentan las competencias disciplinares básicas de matemáticas de la Reforma Integral de la Educación Media Superior con las cuales deben de contar los estudiantes.

En el capítulo 2 se presentan las consideraciones teóricas, donde se introduce el enfoque teórico de la *Educación Matemática Realista* iniciado en Holanda por Hans Freudenthal en los años 60, así como a los seis principios fundamentales de este mencionado enfoque; se muestran las acciones metodológicas que se plantearon para lograr tanto el objetivo general como los objetivos específicos de este proyecto de intervención didáctica, las cuales se plantean en cinco fases. La primera consistió en la revisión y organización de literatura especializada en el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, así como del currículo de la asignatura de Álgebra en la Educación Media Superior; la segunda consistió en buscar contextos, matemáticos y extra matemáticos, donde se puedan plantear situaciones problema para definir la estructura de las actividades del proyecto, así como el diseño de recursos tecnológicos que apoyaron el desarrollo de las actividades. En la tercera se establecieron los criterios de evaluación, la planeación e implementación del diseño preliminar de la propuesta, así como recabar y analizar datos y resultados de la implementación. En la cuarta fase se rediseñaron las actividades y la quinta fase se presenta un informe de los resultados de este trabajo, así como las conclusiones del mismo y por último se pone en contexto el desarrollo y el entorno de las actividades que se realizaron en este trabajo.

En el capítulo 3 se presenta el diseño de las actividades de esta propuesta de intervención didáctica, las cuales se planea contribuirán a desarrollar el aprendizaje del álgebra en los alumnos de primer semestre de bachillerato. Se plantea el objetivo de las actividades, así como la descripción del diseño con base en el *Principio de Niveles* de la *Educación Matemática Realista* y los instrumentos para el análisis de resultados.

En el capítulo 4 se muestra la descripción de las puestas en escena, así como el análisis, con base en los seis principios de la *Educación Matemática Realista,* de la implementación de las tres actividades diseñadas, en cada una de las cuales se realizaron dos puestas en escena; dichas actividades presentan situaciones problema adaptadas al enfoque de la *Educación Matemática Realista*. Se muestra también un resumen de los niveles de matematización alcanzados por una selección de once equipos representativos del total que participaron en las actividades.

Se presenta un epílogo donde se establecen conclusiones con respecto a los objetivos alcanzados, agregando también una serie de reflexiones con respecto a la implementación, los resultados obtenidos y personales en donde se recuperan las ideas del trabajo.

Se incluye un apartado con las referencias bibliográficas que se consultaron para la realización de esta tesis.

Capítulo 1. Antecedentes, Problemática y Elementos de Justificación

1.1. Antecedentes

1.1.1. La modelación matemática como estrategia para enseñar matemáticas

Las matemáticas nacen de la necesidad del ser humano de entender y predecir su realidad. Desde sus inicios, la matemática ha estado ligada a la resolución de problemas, desde los más sencillos en la vida cotidiana hasta aquellos en campos especializados y tan disímbolos como la física, la ingeniería, la música, la mercadotecnia, la pintura y muchos otros.

Esta función tan aparentemente natural de los problemas como fuente de construcción del conocimiento matemático, ha sido reconocida por muchas propuestas curriculares en muchos países, incluyendo el nuestro. Una de las interrogantes que los alumnos más frecuentemente tienen con respecto a los conocimientos matemáticos adquiridos en clase, es la aplicación de éstos en una situación cotidiana, de su entorno cercano, o que esté dentro de lo que su imaginación acepte. Más aún, como profesores no siempre tenemos una respuesta adecuada que ayude a los alumnos a aclarar dichas interrogantes, esto y el hecho de que las matemáticas se sigan enseñando mayoritariamente de manera expositiva por parte de los profesores, donde la participación de los alumnos se ve prácticamente reducida a repetir lo que el profesor hace, sin oportunidad de desarrollar sus propias ideas (SEP, 2017), trae consecuencias negativas, entre ellas, el miedo que la gran mayoría de los estudiantes muestran hacia las matemáticas, tal como lo menciona Castro en su investigación "…solamente oír la palabra álgebra ya asusta a los estudiantes, mucho más a aquellos que "no se le dan bien" las matemáticas" (Castro, 2012, pág. 77), lo cual propicia la predisposición de los mismos y el rechazo de su aprendizaje. Chacón (2008) señala la necesidad de establecer contactos entre el conocimiento matemático y sus posibles usuarios, situando entre ellos a profesores y alumnos, argumentando que:

> La relación de la matemática con la realidad es una cuestión que ha interesado desde siempre a los matemáticos y a los profesores de matemáticas, unas veces se establece esta relación desde la historia, otras para motivar a los alumnos (y responder a la famosa cuestión "para qué sirven las matemáticas")

o para situar la construcción de conceptos matemáticos y su significado en experiencias concretas y en conexión con otras disciplinas.

(Gómez-Chacón & Maestre, 2008, pág. 108).

Una vía para poder conectar a las matemáticas con la realidad es la modelación matemática. Esto permitirá a los alumnos reconocer que las matemáticas son una herramienta para resolver la gran mayoría de las situaciones, desde las más simples y cotidianas hasta aquellas más complejas. Esta relación entre las matemáticas y la realidad la han resaltado autores como Cervantes quien expresa que “La modelización matemática, o modelaje matemático, es el proceso racional de elaborar modelos matemáticos para expresar fenómenos reales” (Cervantes, 2015, pág. 2).

De la mano del desarrollo intelectual del ser humano, los modelos matemáticos han sido uno de los principales protagonistas para poder entender su entorno. De acuerdo con lo que menciona Trigueros, “…los modelos matemáticos aparecen cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es imperativo hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales y sociales” (Trigueros, 2009, pág. 76). Podemos entender que un modelo matemático ayuda a darle sentido a todo eso que se aprende, al establecer una conexión entre las matemáticas y la realidad.

Si bien es verdad que la modelación matemática no es un tema nuevo, sí lo es, relativamente, el concebirla como un elemento a partir del cual se puede construir una estrategia para enseñar matemáticas. En la escuela, la modelación matemática, permite crear un ambiente de aprendizaje más enriquecido, promoviendo el interés de los alumnos en el aprendizaje, motivándolos con la resolución de problemas propios y de su comunidad. Además, apoyados a la vez por el uso de tecnologías podrán desarrollar nuevas habilidades, tal como lo sugiere Castro, “El uso de la tecnología en la enseñanza, por su parte, proporciona a los estudiantes soporte visual sobre gráficos y representación simbólica y tablas que les posibilita la manipulación de los mismos y herramienta que les permite resolver problemas” (Castro, 2012, pág. 78).

Estos argumentos, entre otros, son los que han motivado a diversos investigadores a proponer a la modelación matemática, desde diferentes perspectivas, como estrategia a utilizar para trabajar en la enseñanza de las matemáticas. Es importante insistir en que, tal y como lo señalan Bassanezi y Biembengut: "Lo que proponemos no es enseñar la modelización en las escuelas sino enseñar matemáticas usando el método de la modelización" (Bassanezi & Biembengut, 1997, pág. 14), es decir, en este trabajo se utiliza la modelación matemática como una estrategia didáctica para enseñar matemáticas.

1.1.2. Diferentes posturas acerca de la modelación como estrategia para enseñar matemáticas

En el transcurso de los años, de acuerdo con los objetivos didácticos, el término modelación matemática ha tenido diferentes interpretaciones, Trigueros menciona que "Actualmente hay estudios con enfoques muy variados que han sido caracterizados dentro de grupos de acuerdo a algunas perspectivas comunes" (Trigueros, 2009, pág. 77). En la publicación de Kaiser & Sriraman (2006) destacan cinco perspectivas de la modelación matemática las cuales podemos observar en la Tabla 1.

Tabla 1.

Perspectivas de la modelación matemática

Nombre de la perspectiva	Objetivos centrales
Modelación realista	Objetivos pragmático-utilitarios, es decir: resolver problemas del mundo real, comprensión del mundo real, promoción de competencias de modelación
Modelación contextual	Objetivos psicológicos y relacionados con el tema, es decir, resolver problemas de palabras.
Modelación educativa; a) modelación didáctica b) modelación conceptual	Objetivos pedagógicos y relacionados con el tema: a) Estructuración de los procesos de aprendizaje y su promoción. b) Introducción y desarrollo del concepto.
Modelación socio-crítica	Objetivos pedagógicos como la comprensión crítica del mundo circundante.
Modelación epistemológica o teórica	Objetivos orientados a la teoría, es decir, promoción del desarrollo de la teoría.

(Kaiser & Bharath, 2006, pág. 304)(Traducción realizada por el autor).

Tras hacer una revisión de los diferentes enfoques antes mencionados, a pesar que se destaca una variación entre ellos, se entiende que comparten el objetivo de la enseñanza de las matemáticas mediante la modelación. Para la presente propuesta se considera que el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, es el que lograría que el presente trabajo alcance los objetivos que se pretenden, esto debido entre otras cosas a que "Este enfoque trata de conectar la realidad y la actividad humana" (Gómez-Chacón & Maestre, 2008, pág. 109), así como “La didáctica realista invita a reemplazar la visión del alumno como receptor pasivo de una matemática prefabricada, por la de un sujeto que participa, junto con otros, en la organización matemática de fenómenos imaginables.” (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004, pág. 10).

Por lo anterior, se selecciona a la modelación matemática desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista* como el enfoque teórico para desarrollar este trabajo. Esto debido a que se considera que, tanto como por sus objetivos pragmáticos y los principios en que se sustenta, permitirá a los alumnos desarrollar sus propias ideas en un ambiente de aprendizaje más enriquecido, promoviendo en el desarrollo de las clases su participación como principales actores de la misma, dejando de ser así simples receptores de información.

En el capítulo correspondiente a las consideraciones teóricas y metodológicas se darán más argumentos para fortalecer la elección de esta perspectiva y que se pretende que los objetivos de este trabajo contribuyan a que los alumnos cumplan con las competencias requeridas en el currículo del bachillerato.

1.1.3. El contexto curricular del bachillerato mexicano

La Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) es una iniciativa gubernamental que se implementó en 2008 para mejorar la educación media superior. Uno de los pilares de la RIEMS es el Marco Curricular Común (MCC), el cual unifica el perfil de egreso en todo el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), mediante el enfoque por competencias.

A través de dicho enfoque (RIEMS), se espera que los alumnos tengan la oportunidad de vincular los contenidos aprendidos en la escuela con la vida cotidiana, teniendo además la posibilidad de reflexionar sobre su propio aprendizaje. De acuerdo con el MCC de la RIEMS, los alumnos egresados del bachillerato deben cumplir con una serie de competencias genéricas, disciplinares y profesionales. Las competencias disciplinares básicas de matemáticas “buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos." (DOF, 2008, pág. 5).

De las diez competencias básicas disciplinares de matemáticas que contempla el MCC, interesa, por la naturaleza del trabajo de tesis que se desarrolló, la siguiente: "1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales." (DOF, 2008, pág. 5).

Para el logro de la competencia enunciada, se debe adentrar a los alumnos en los conocimientos tanto matemáticos como extra matemáticos necesarios para la modelación de los fenómenos de interés, utilizando para ello representaciones verbales, analíticas, gráficas y numéricas, pues esto permitiría una mejor visualización de dichos fenómenos. Debe, asimismo, estimular su pensamiento crítico y la capacidad de realizar juicios bien fundamentados del papel que desempeñan las matemáticas en su desarrollo personal y en un futuro profesional. Tal como se enuncia en la competencia "4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación" (DOF, 2008, pág. 5).

Además de tener conocimientos matemáticos, un factor de suma importancia para desarrollar la modelación matemática es la comprensión lectora, dado que, para poder generar un modelo de una situación se debe, primeramente, tener una visualización de todos aquellos sucesos que participan en el fenómeno a modelar, y esto solo se puede obtener si se logra hacer un buen análisis de los textos y así poder detectar qué es relevante y qué no lo es, tal y como se establece en la competencia "Identifica, ordena e interpreta las ideas, datos y conceptos explícitos e implícitos en un texto, considerando el contexto en el que se generó y en el que se recibe." (DOF, 2008, pág. 8).

Por otra parte, para que los alumnos puedan ser capaces de aplicar las matemáticas que aprenden en la escuela, el profesor debe crear un ambiente que propicie la participación de los alumnos, promoviendo que el alumno exprese su manera de pensar, impulsando el desarrollo de sus procesos cognitivos. Estas ideas son compatibles con las pretensiones de la

Educación Matemática Realista, que promueve que los alumnos exploren diferentes caminos para matematizar un fenómeno de su interés que dote de sentido a las matemáticas que conocen.

El planteamiento y la resolución de problemas en contextos intra y extra matemáticos es un ambiente que desde la óptica de esta propuesta se considera consecuente con lo expresado en los planes y programas de bachillerato para la enseñanza de la matemática, y que además abre las posibilidades de utilizar a la modelación matemática como estrategia de enseñanza en este campo de conocimiento, pues con ello se dará pie a que los alumnos logren comprender a las matemáticas a través de la naturaleza, del mundo, de los hechos, de la vida.

En este trabajo se pone de relieve a la modelación matemática como una estrategia didáctica, la cual podría contribuir con el desarrollo de algunas de las competencias genéricas y disciplinares, "…en el México de hoy es indispensable que los jóvenes que cursan el bachillerato egresen con una serie de competencias que les permitan desplegar su potencial, tanto para su desarrollo personal como para contribuir al de la sociedad." (DOF, 2008, pág. 1).

A continuación, se muestran las competencias genéricas y sus atributos, así como las competencias disciplinares en las cuales se considera contribuirá el presente trabajo.

Competencias Genéricas:

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

Atributos:

- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

Atributos:

- Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

Atributos:

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

Atributos:

- Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

Atributos:

- Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

Atributos:

- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

Atributos:

- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

Atributos:

- Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.

En cuanto a las Competencias disciplinares, para el caso de las Matemáticas se enuncian:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Un elemento curricular importante es lo establecido en los ejes en los cuales se organizan los contenidos que son estudiados en la Educación Media Superior:

a) Eje Del Pensamiento Numérico al Pensamiento Algebraico.

b) Del tratamiento del espacio, la forma y la medida, a los pensamientos geométrico y trigonométrico.

c) Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.

d) Pensamiento y lenguaje variacional.

c) Del manejo de la información al pensamiento estocástico.

Para los propósitos de este trabajo, interesa lo establecido en el Eje "Del Pensamiento Numérico al Pensamiento Algebraico", el cual señala:

1. "… plantear al álgebra como un lenguaje que permite generalizar y expresar simbólicamente a los números y sus operaciones, y que posibilite, a su vez, la modelación de fenómenos" (SEP, 2017, pág. 163).

2. "…la fuerza del lenguaje algebraico radica en su capacidad de generalización que se expresa en el poder de la simbolización mediante variables y su manipulación" (SEP, 2017, pág. 163).

3. "… el estudiante estaría en condiciones de reconocer la importancia de las matemáticas para su vida, pues las estaría movilizando mediante el uso de un lenguaje para el reconocimiento de patrones, para arribar a su simbolización y la generalización" (SEP, 2017, pág. 163).

En los párrafos anteriores se destacan tres aspectos trascendentes del estudio del álgebra: su relación con la modelación, su potencial en cuanto a la generalización y las herramientas que proporciona como lenguaje para el reconocimiento de patrones, su simbolización y la generalización de los mismos. Esta relación entre el trabajo con patrones y las posibilidades de desarrollar la habilidad de generalización, es un elemento que recientemente ha sido retomado por muchos investigadores y recomendado para ser trabajado en los niveles escolares básico y medio superior.

Después de analizar las competencias genéricas y disciplinares declaradas en el MCC, enseguida se analiza cómo se concretan en el programa de estudio de la asignatura de álgebra.

1.1.3.1. Propósito de la asignatura de álgebra

En el nuevo currículo de la educación media superior se muestran los ajustes realizados al programa estudios en el campo disciplinar de matemáticas para el bachillerato, entre las adecuaciones del contenido para la asignatura de álgebra se muestra su propósito, el cual dice: "Que el estudiante aprenda a identificar, analizar y comprender el uso del lenguaje algebraico en una diversidad de contextos; es decir, que logre significarlo mediante su uso" (SEP, 2017, pág. 12).

De igual manera, se exponen los Aprendizajes Claves de la asignatura de álgebra en la Tabla 2.

Tabla 2.

Aprendizajes clave de la asignatura de álgebra

Aprendizajes Clave de la asignatura de Álgebra		
Eje	Componente	Contenido central
Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico	Patrones, simbolización y generalización: Elementos del Álgebra básica	• Uso de las variables y las expresiones algebraicas. • Usos de los números y sus propiedades. • Conceptos básicos del lenguaje algebraico. • De los patrones numéricos a la simbolización algebraica. • Sucesiones y series numéricas. • Variación lineal como introducción a la relación funcional. • Variación proporcional. • Tratamiento de lo lineal y lo no lineal (normalmente cuadrático). • El trabajo simbólico. • Representación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

(SEP, 2017, pág. 12)

En la tabla anterior podemos observar, en los contenidos centrales, una serie de temas, entre los cuales destaca “De los patrones numéricos a la simbolización algebraica”, estos temas permitirán al alumno cumplir con requerimientos establecidos para que los egresados de bachillerato cuenten con una serie de competencias que les permitan enfrentar el mundo laboral y/o los estudios universitarios. El profesorado en general y particularmente el de matemáticas, tiene como reto utilizar estrategias de enseñanza que efectivamente coadyuven a lograr ese propósito. Es en este sentido, que se ubica este trabajo, como una propuesta que busca fomentar estos aprendizajes de manera funcional y transversal favoreciendo tanto el desarrollo de los conocimientos matemáticos como el desarrollo de ámbitos socioemocionales, trabajo en equipo, y comunicación.

1.2. Problemática y Elementos de Justificación

1.2.1. Dificultades detectadas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra

El álgebra es de suma importancia en la formación matemática escolar de los individuos, ya que es una de las herramientas matemáticas necesarias para abordar los problemas, mediante la identificación de las componentes de los mismos, las relaciones existentes entre ellos, así como el uso de diferentes representaciones. En la educación media superior es la herramienta requerida para transitar de la aritmética al inicio de los campos especializados tanto en la matemática como en los componentes profesionales expuestos en los programas oficiales. Esto debido a que el dominio de esta rama de las matemáticas otorga las bases cognitivas para comprender, desarrollar y aplicar los conocimientos de otras ramas como lo son la geometría, la trigonometría, el cálculo, la física, la química, entre otras, como lo expresa Gascón (1999):

> Aunque la aparición del álgebra se caracteriza materialmente por la proliferación de expresiones algebraicas y por la emergencia de una especie de “lenguaje algebraico”, la nueva forma de hacer matemáticas basa su verdadera potencia en las inmensas posibilidades técnicas que surgen del juego del doble uso de las letras: como “incógnitas” y como “parámetros”. Entre dichas posibilidades destacan las siguientes: resolver simultáneamente una amplia clase de problemas, justificar, interpretar y controlar el ámbito de

> aplicación de las técnicas prealgebraicas (sean "aritméticas", "geométricas" o "combinatorias") y, además de obtener la incógnita cuando el problema tiene solución, explicar cuáles son las condiciones de existencia de dicha solución y describir la estructura del conjunto de las soluciones.
>
> (Gascón, 1999, pág. 80).

Generalmente la transición de aritmética al álgebra produce en los alumnos dificultades y confusiones como lo expresan Kieran y Filloy (1989): "La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra." (Kieran & Filloy, 1989, págs. 229-230), esto debido a que pasan de realizar operaciones aritméticas básicas al uso de literales y operaciones más elaboradas o al "lenguaje algebraico al que no le "ven" sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras" (Castro, 2012, pág. 76). De acuerdo con diferentes autores, el lenguaje algebraico es precisamente uno de los temas que más se les dificulta, esto debido al sentido abstracto que deben darles a los objetos que estarán en estudio y a sus representaciones con literales, también el tener que usar a una literal como variable o incógnita y al hecho de que se puedan hacer operaciones matemáticas con literales. En el trabajo de Mancera y Pérez (2007) se recogen los resultados sobre algunos de los diferentes tipos de dificultades que en sus investigaciones han sido reportados por diferentes autores, entre las que destaca la generalización equivocada de procedimientos aritméticos. Por otra parte, Socas (1997) agrupa las dificultades en 5 categorías, dos relacionadas con la propia disciplina, una asociada a los procesos de enseñanza, una en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y por último una quinta ligada a la falta de una actitud racional por parte de los alumnos hacia las Matemáticas.

> De manera más explícita estas dificultades se pueden organizar, en líneas generales en los siguientes tópicos:
>
> 1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas.
>
> 2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.

4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.

5. Dificultades asociadas a actitudes emocionales hacia las Matemáticas.

(Socas, 1997, pág. 126)

Estas dificultades, que presentan los alumnos, muchas de las cuales provienen de su experiencia con el manejo de literales en la educación básica, se convierten en obstáculos para desarrollar el pensamiento algebraico que está planteado se trabaje en el bachillerato. Se hace necesario entonces buscar formas de enseñanza alternativas a las tradicionales, que ayuden a superarlas y que además permitan alcanzar los propósitos específicos que la propuesta curricular vigente establece para el curso de Álgebra. Tal y como lo hace ver Castro (2012) en su investigación sobre las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje del álgebra:

> Los profesores constatan que los alumnos no llegan a obtener un conocimiento algebraico satisfactorio a pesar del empeño puesto en su enseñanza. La toma de conciencia de esta situación ha generado gran cantidad de trabajos de investigación los cuales tratan de detallar, lo más ampliamente posible, la problemática del aprendizaje del álgebra, las causas que dan origen a la misma y cómo encontrar soluciones que palien dicha problemática.
>
> (Castro, 2012, pág. 76)

Si bien este trabajo no está enmarcado en el ámbito de la investigación, sí lo está en la línea de buscar alternativas en la enseñanza del álgebra. En este sentido es que, retomando una de las posturas planteadas para la modelación como estrategia de enseñanza, se retomará la que expone la *Educación Matemática Realista*.

Consideramos que el planteamiento y resolución de situaciones problema bajo el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, donde aparezcan patrones numéricos, ayudará a que los alumnos sobrepasen algunas las dificultades antes mencionadas, Zapatera (2018) menciona que "La generalización de patrones es considerada una de las formas más importantes para introducir y desarrollar el pensamiento algebraico en las escuelas" (Zapatera, 2018, pág. 53).

1.2.2. Patrones numéricos

Podemos definir como patrón a un sistema que muestra variaciones y que mantiene propiedades entre sus distintas repeticiones (Zapatera, 2018), es decir, se entiende como patrón a algo que se repite, que es constante dentro de un conjunto y puede ser identificado por nuestros sentidos.

Podemos encontrar patrones tanto en la naturaleza como en las disciplinas creadas por los humanos.

En la naturaleza podemos encontrar un sinfín de patrones en los lugares más insospechados, desde los patrones fractales en copos de nieve (Figura 1), hojas de plantas, telas de araña, entre muchas más.

Figura 1

Copo de nieve

Tomada de (Libbrecht, 2020)

Existen también patrones en espiral, presentes en objetos tan minúsculos tales como la concha de un caracol hasta en la inmensidad de una galaxia.

Figura 2

Concha de caracol

Tomada de (Chris, 2004)

Figura 3

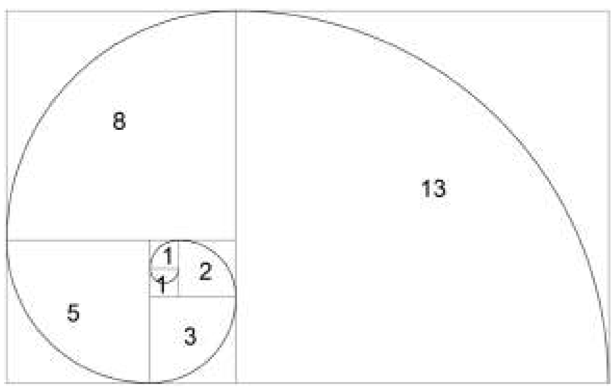
Galaxia espiral NGC 3310

Tomada de (ESA/Hubble, 2001)

A este tipo de patrón, comúnmente, se le asocia con la sucesión de Fibonacci, Figura 4, como patrón de crecimiento.

Figura 4

Sucesión de Fibonacci



Elaboración propia

En dicha sucesión, cada término es la suma de los dos términos anteriores y estos reciben el nombre de números de Fibonacci. De entre todas las propiedades de los números de Fibonacci destaca que el cociente de un término por el anterior se aproxima al número phi (1.618…), el cual también es conocido como Número Áureo o Proporción Divina y fue descubierto por los griegos. Este patrón podemos encontrarlo no solo en la naturaleza, ya que es considerado como la representación de la belleza, muchos artistas lo han empleado para la creación de grandes obras, tales como El David de Miguel Ángel o la Mona Lisa de Leonardo Da Vinci, también está presente en la arquitectura, en la música, en la economía y entre muchas más. Así como este patrón existen muchos otros, los cuales son sujetos de estudio.

De acuerdo con Castro: "Hay una expresión emergente y que muchos matemáticos aceptan, se dice que la Matemática es la ciencia de los patrones" (Castro, s/f, pág. 10), la matemática estudia patrones. Si bien es cierto existe una amplia variedad de éstos, tales como patrones de sonido, de colores, de movimiento, de figuras, de recurrencia, de repetición, numéricos entre otros, en el caso particular del presente trabajo solamente se hace uso de progresiones.

Se puede definir como *progresión* a un conjunto ordenado de elementos, objetos o números, entre los cuales existe una regla de formación, o patrón, dicho conjunto puede ser finito o infinito, los elementos que la conforman son denominados Términos, representados por a_1 el primer término, a_2 el segundo, a_3 el tercero… a_n el enésimo término o término general.

Una *Progresión Aritmética* es una sucesión de números ordenados de tal manera que el patrón que se presenta entre dos términos consecutivos es constante, a este patrón se le denomina diferencia o distancia y es representado por d, el valor de la diferencia puede ser positivo o negativo por lo cual una Progresión Aritmética puede ser creciente o decreciente (Ramos & Latasa, s/f). El enésimo término o término general de una Progresión Aritmética se obtiene mediante un patrón representado por la siguiente expresión, ver Figura 5.

Figura 5

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Una *Progresión Geométrica* es también una sucesión de números ordenados, pero en este caso, el patrón que se presenta entre dos términos consecutivos se obtiene multiplicando al término anterior por una constante, a este patrón se le denomina razón y es representado por r, esta constante puede ser un número entero o un número racional, positivo o negativo, por lo cual una Progresión Geométrica puede, también, ser creciente o decreciente (Ramos & Latasa, s/f). Para encontrar el enésimo término o término general de una Progresión Geométrica se utiliza la siguiente expresión, ver Figura 6, la cual representa al patrón.

Figura 6

$$a_n = a_1 r^{(n-1)}$$

Se considera que el estudio de patrones desde la educación primaria es fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico de acuerdo con Zapatera "…la formalización algebraica requiere un proceso largo y complejo, el acceso al pensamiento algebraico es factible en edades tempranas." (Zapatera, 2018, pág. 53), existen nuevas propuestas en la introducción del álgebra en este nivel educativo, tal como la Early-Algebra, en las cuales se considera que la generalización de patrones es una herramienta fundamental para este propósito.

> …la generalización de patrones está considerada como una forma eficaz para introducir el pensamiento algebraico en la escuela, por lo que las matemáticas en la Educación Primaria e Infantil deben incluir la exploración de patrones para que los estudiantes sean capaces de descubrir, extender y analizar las regularidades y expresarlas de forma verbal o simbólica.
>
> (Zapatera, 2018, pág. 53)

Hay otros investigadores que insisten en la importancia del trabajo con patrones a lo largo de la vida escolar de los individuos. Cetina y Cabañas (2022) mencionan que:

> Varios autores han destacado la importancia de incorporar el estudio de patrones desde edades tempranas, lo que se justifica por que contribuye a que los estudiantes reconozcan regularidades, conecten relaciones y representen estas relaciones mediante símbolos (e. g., Radford, 2008). Un patrón, en el dominio de las matemáticas, en palabras de Mulligan y Milchelmore (2009, p. 34), es «cualquier regularidad que usualmente involucra relaciones numéricas, espaciales o lógicas». Además, es un paso fundamental en la formación de generalizaciones (Tanişli, 2011), por lo que los estudiantes deben tener experiencias previas con patrones para desarrollar su pensamiento algebraico mucho antes de instruirlos en el uso de la notación y simbología algebraica (Carraher y Schliemann, 2018).

(Cetina & Cabañas, 2022, pág. 67)

Por lo anterior, el interés de este trabajo se centra en la modelación matemática, desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, como una herramienta importante en la visualización y generalización de patrones dado que se consideran factores principales en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Como se mencionó anteriormente, pretendemos que este proyecto, mediante sus objetivos, contribuya a que los alumnos adquieran las competencias que el currículo del bachillerato requiere.

1.3. Objetivo general y objetivos específicos

1.3.1. Objetivo general

Diseñar un conjunto de actividades didácticas dirigidas a alumnos de primer semestre de bachillerato, basadas en la modelación matemática desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, para promover la habilidad de generalización mediante el trabajo con reconocimiento de patrones.

Cabe hacer la aclaración que se buscará que dicho reconocimiento sea expresado de forma verbal, escrita, pictográfica, algebraica o una combinación de ellas.

Este objetivo general del conjunto de actividades didácticas se alcanzará, si se logran los siguientes:

1.3.2. Objetivos específicos

OE1.- Determinar cuáles son las características fundamentales del conjunto de actividades didácticas que serán diseñadas, que aborden el tema de patrones numéricos y que se correspondan con lo planteado en el enfoque de la modelación matemática desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista*.

OE2.- Identificar dificultades reportadas, en la literatura de la especialidad, en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en el bachillerato, particularmente sobre el tema de patrones numéricos.

OE3.- Seleccionar, adaptar o crear situaciones problema, donde aparezcan patrones numéricos, que permitan procesos de modelación desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, que puedan ser trabajadas en bachillerato.

OE4.- Evaluar la propuesta de diseño.

OE5.- Modificar la propuesta en atención a lo obtenido como producto de su experimentación.

Como puede observarse, estos objetivos expresan el interés de desarrollar el trabajo en el enfoque de la *Educación Matemática Realista* y que, a su vez, corresponda con la propuesta del nuevo currículo de la educación media superior, por cual en la sección siguiente se presentan los fundamentos que guiarán este trabajo.

Capítulo 2. Consideraciones Teóricas y Metodológicas

De acuerdo con la RIEMS, "…competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos" (DOF, 2008, pág. 5), entre las cuales destaca "Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales" (DOF, 2008, pág. 5).

Esta indicación curricular será concretada en el presente trabajo mediante la modelación matemática, desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, la cual consideramos, nos brinda elementos apropiados para apoyar a los alumnos a desarrollar la habilidad de generalización que se menciona en el objetivo general, ya que, durante el proceso de la modelación matemática, bajo este enfoque, los alumnos tienen la oportunidad de observar, reconocer e interpretar patrones en situaciones reales.

2.1. Educación Matemática Realista

La *Educación Matemática Realista* se fundamenta en las ideas de Hans Freudenthal (1905-1990), matemático alemán, de origen judío y nacionalizado holandés, quién trabajó en la universidad de Berlín, así como en la universidad Utrecht, en Holanda, donde en 1971 fundó el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO) el cual después de su muerte fue nombrado Instituto Freudenthal y que en la actualidad se llama Instituto Freudenthal de Educación Científica y Matemática.

La *Educación Matemática Realista* tiene como una de sus ideas principales que "La enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano" (Bressan, Gallego, Pérez, & Zolkower, 2016, pág. 2).

Una de las principales influencias de Hans Freudenthal fue Jan Brouwer, conocido como el padre de la corriente matemática denominada "Intuicionismo", otra de sus influencias fue el modelo para la didáctica de la Geometría de Pierre y Dina Van Hiele, de quién fue director de tesis, ambas corrientes matemáticas se ven reflejadas en su teoría.

> La educación matemática realista (EMR). Fundada por Hans Freudenthal (1905-1990), matemático y educador alemán que realizó la mayor parte de su trabajo en Holanda, esta corriente didáctica nace en los años 60 como reacción tanto al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética como a la aplicación directa al aula de la matemática moderna o "conjuntista.".
>
> (Zolkower, Bressan, & Gallego, 2006, pág. 12)

Menciona también Bressan (2004), que la *Educación Matemática Realista* es un conjunto de teorías de enseñanza de temas matemáticos las cuales están basadas en un conjunto de ideas centrales, tales como que la matemática es una actividad humana a la cual denomina matematización y que la comprensión de las matemáticas transita por diferentes niveles, estimulada por la resolución de situaciones problema que generen necesidad de ser organizadas, surgiendo así los modelos matemáticos, primero emergentes de los propios alumnos, para llegar luego a los modelos con las herramientas matemáticas convencionales.

Estas ideas son manifestadas por Freudenthal en varios de sus escritos donde demuestra una oposición a la didáctica de la época, las corrientes pedagógicas, la psicología y las innovaciones en la enseñanza de las matemáticas, así como la teoría constructivista de Piaget.

Uno de los principales colaboradores de Freudenthal, y difusor de la *Educación Matemática Realista*, fue Adrián Treffers (1987) quién formuló dos dimensiones en la matematización: horizontal y vertical.

La matematización horizontal consiste en que los alumnos conviertan una situación problema en un problema matemático, donde los mismos propongan herramientas matemáticas con base en su intuición, observación, sentido común, aproximación empírica y experimentación inductiva, para organizar y resolver dicha situación problema. Tal como lo menciona Zolkower (2006) "Se refiere a la organización de situaciones del mundo real por medio de herramientas matemáticas" (Zolkower, Bressan, & Gallego, 2006, pág. 20).

La matematización vertical consiste en que, ya dentro del sistema matemático, el alumno realice un proceso de reorganización mediante estrategias de reflexión, generalización, esquematización y simbolización. Este proceso tiene por objetivo obtener un nivel más elevado de formalización matemática, con el cual el alumno encuentra la solución de la situación problema utilizando sus propios conceptos matemáticos; en palabras de Henao (2012) “Consiste en la elevación del pensamiento abstracto propiciando la reorganización de las ideas (alcanzadas en el nivel anterior) dentro del mismo sistema matemático” (Henao & Vanegas, 2012, pág. 39). En la figura 5, Bressan (2016) nos muestra un esquema de este proceso de matematización.

> Freudenthal (1991) adoptó la distinción de Treffers de estas dos formas de matematización, y expresó sus significados así: matematizar horizontalmente significa ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos; y matematizar verticalmente significa moverse dentro del mundo de los símbolos.
>
> (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2009, pág. 39)

De acuerdo con la matematización, la enseñanza de las matemáticas en el aula debe dar la oportunidad a los alumnos de reinventar la matemática, en un proceso al cual denomina *Reinvención Guiada*, en este proceso el alumno tendría la oportunidad de hacer sus matemáticas.

> En síntesis la enseñanza de las matemáticas en la EMR toma la forma de reinvención guiada, es decir un proceso en el que los estudiantes reinventan las matemáticas mediante la organización de situaciones-problema en interacción con sus pares y bajo la guía del docente, mientras el aprendizaje es concebido como un proceso discontinuo de matematización progresiva que involucra distintos niveles y en el que los contextos y modelos ocupan un lugar central como puente para favorecer el paso de un nivel a otro más avanzado.
>
> (Henao & Vanegas, 2012, pág. 32)

Otra de las ideas principales de Freudenthal fue que la matemática debe de estar al alcance de todos, no sólo para una minoría, tal como lo menciona Zolkower "El quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora de matematización que está al alcance de todos los seres humanos, de lo que se deduce la consigna de una matemática para todos" (Zolkower, Bressan, & Gallego, 2006, pág. 13).

De acuerdo con Bressan (2004) el propósito de Freudenthal es desarrollar en los alumnos los procesos de significación y producción de sentido, es decir, que los alumnos aprendan matemáticas y que esas matemáticas tengan sentido y significado para el mismo.

Menciona también, que para Freudenthal, es importante que desde pequeños los alumnos desarrollen una "actitud matemática", esta actitud incluye las siguientes habilidades o estrategias:

> -Desarrollar un lenguaje que suba de nivel desde lo ostensible (por ejemplo, señalar, indicar con artículos demostrativos) y lo relativo (específico a un contexto o a una situación determinada) hasta el uso de variables convencionales y lenguaje funcional.
>
> -Cambiar de perspectiva o punto de vista y reconocer cuando un cambio de perspectiva es incorrecto dentro de una situación o problema dado.
>
> -Captar cuál es el nivel de precisión adecuado para la resolución de un problema dado.
>
> -Identificar estructuras matemáticas dentro de un contexto (si es que las hay) y abstenerse de usar la matemática cuando esta no es aplicable.
>
> -Tratar la propia actividad como materia prima para la reflexión, con miras a alcanzar un nivel más alto.
>
> (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004, pág. 4)

El enfoque teórico de la *Educación Matemática Realista* tal como lo expresan Gravemeijer y Teruel (2000):

> Podemos resumir la visión de Freudenthal acerca de la educación matemática como sigue. Las matemáticas deben ser vistas más que como un proceso, una actividad humana. Sin embargo, al mismo tiempo, esta actividad produce como resultado las matemáticas. Esto conduce a plantear cuestiones acerca de cómo dar forma a una educación matemática que integre ambos objetivos. El trabajo de Freudenthal se fundamenta en un número de ideas acerca de cómo responder a estas cuestiones. Estas ideas pueden ser discutidas bajo el encabezamiento de "invención guiada", "niveles de procesos de aprendizaje", y "fenomenología didáctica".
>
> (Gravemeijer & Terwel, 2000, pág. 786)

El principal promotor de la *Educación Matemática Realista* en América latina es el *Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática* (GPDM), este grupo de docentes formado en el año 2000, bajo la coordinación de la Dra. Betina Zolkower y la Prof. Ana María Bressan, además de realizar talleres, cursos y seminarios sobre la *Educación Matemática Realista*, ha realizado la traducción al español de artículos de suma importancia en esta corriente didáctica, en los cuales se han estudiado los principios en los que este enfoque teórico se sustenta.

2.2. Principios de la Educación Matemática Realista

Esta filosofía, como la llama Freudenthal, explícitamente se sostiene en los 6 principios que se describen a continuación:

2.2.1. Principio de Actividad

La matemática es una actividad humana a la que todos podemos acceder. La matemática es un instrumento cognitivo (de público conocimiento) para organizar, estructurar y matematizar partes de la realidad, de la que la matemática también forma parte, no debe de enseñarse como un producto acabado, sino como parte de un proceso de organización de la realidad con herramientas matemáticas (de matematización). La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas.

> De esta manera, en la EMR los estudiantes no son vistos como simples receptores de matemáticas ya hechas, por el contrario, son tratados como participantes activos durante su proceso de aprendizaje. Básicamente el papel dinámico de los estudiantes en el proceso educativo se consigue a través de situaciones problemáticas que generen la necesidad de utilizar conocimientos (formales e informales) para su organización y solución.
>
> (Henao & Vanegas, 2012, pág. 35)

2.2.2. Principio de Realidad

Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos o situaciones realistas, esto se refiere a situaciones que son parte del entorno o de la imaginación, los cuales puedan ser matematizados por los alumnos de una manera informal como primer paso del aprendizaje. Haciendo énfasis en que una situación realista no es necesariamente aquella que es tangible, sino que puede ser una situación que el alumno pueda razonar o imaginar.

> La matemática surge como matematización (organización) de la realidad, luego el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad. Esto no significa mantener a esta disciplina solo conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos (la traducción de "imaginar" en holandés es "zich REALIS-Eren", de allí el término de matemática "realista").
>
> (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004, pág. 5)

2.2.3. Principio de Reinvención

El profesor debe presentar situaciones problema que permitan a los alumnos construir sus procesos matemáticos, guiados por él, en un proceso que Freudenthal denomina *Reinvención Guiada*, de tal forma que facilite a los alumnos pasar de una matemática informal a una matemática formal, en una matematización vertical. En este proceso es de suma importancia la capacidad del profesor para organizar las actividades que permitan guiar a los alumnos en los cambios de nivel de la matematización, cambios que tienden a ser repentinos y fáciles de detectar con los momentos "ajá" de los alumnos, conocido también como el famoso

"Eureka", es decir, el momento en el que el alumno experimenta un salto creativo seguido de una reestructuración en la percepción de una situación problema dada, en la cual, reorganiza sus ideas para encontrar una solución. Algunas investigaciones psicológicas denominan a este momento como "Insight", Seguí (2015) define al "momento ajá" como la "Comprensión súbita de una situación o problema y puede ocurrir inesperadamente, luego de un trabajo profundo, simbólicamente, o mediante el empleo de diversas técnicas afines" (Seguí, 2015, pág. 5).

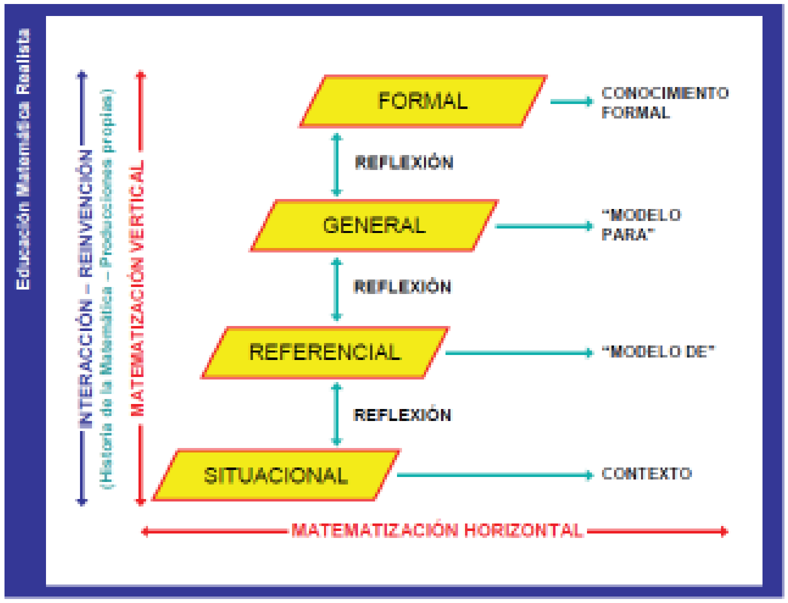
> Freudenthal (1991) insistió también en que el proceso de reinvención debe ser guiado. Se debe ofrecer a los estudiantes un ambiente de aprendizaje en el que puedan construir conocimientos matemáticos y tener posibilidades de alcanzar niveles más altos de comprensión. Esto implica que se deben crear escenarios capaces de promover este crecimiento de la comprensión.
>
> (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2009, pág. 38)

2.2.4. Principio de Niveles

Los alumnos, durante el proceso de la modelación matemática, podrían pasar por los siguientes niveles de comprensión: *Situacional, Referencial, General* y *Formal*. Estos niveles permiten al alumno hacer una esquematización progresiva de una situación realista mediante un proceso de *Reinvención Guiada*, de esta manera pasa de presentar soluciones informales, pegadas a la situación particular lo cual se denomina matematización horizontal, a un proceso de matematización vertical utilizando razonamientos y lenguaje cada vez más próximos a las soluciones formales dentro de la matemática, ver Figura 5.

Figura 5.

Niveles de matematización



Tomado de (Bressan, Gallego, Pérez, & Zolkower, 2016, pág. 7)

Este esquema proviene de las aportaciones de Treffers a la *Educación Matemática Realista*, tal como lo menciona Van Den Heuvel-Panhuizen (2009).

Niveles de comprensión

Situacional: En el *Nivel Situacional* el alumno interpreta la situación problema y aplica estrategias relacionadas al contexto de la situación misma. Y apoyándose en su experiencia, su sentido común y sus conocimientos informales logra identificar y describir los elementos matemáticos que existen en dicha situación problema, esto les permite descubrir lo matemático que hay en ella.

Referencial: En este nivel el alumno inicia el proceso de reflexión y análisis, a este proceso se le denomina matematización vertical, de esta forma los alumnos empiezan a organizar y modelar la situación en forma de pictogramas, descripciones, conceptos, graficas, tablas, etc., en este nivel estos modelos de denominan "modelos de" pues solo esquematizan particularmente la situación problema en la que se está trabajando.

General: En el *Nivel General* continua el proceso de matematización vertical y se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización sobre los modelos que surgieron previamente. Mediante la reflexión el alumno detecta aspectos matemáticos en la situación problema los cuales pueden ser generalizables, es decir, el alumno sobrepasa el contexto de la situación problema y obtiene elementos para generar modelos matemáticos los cuales pueden ser empleados para resolver situaciones problemas semejantes a la situación original, conocidos como "modelos para".

Formal: Por último, en el *Nivel Formal* el alumno logra expresar el modelo matemático obtenido, mediante el uso comprensivo de procedimientos y notaciones convencionales, adecuados de la matemática, o bien un argumento descriptivo de los conceptos y procedimientos derivados del modelo matemático.

> Otro aspecto característico de los modelos, es que son el resultado de organizar la matemática inherente a la situación-problema. Lo cual implica dos cosas importantes; la primera tiene relación con el hecho de que los modelos no están siendo pensados únicamente como representaciones, sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se aplican operaciones y se visualizan, explican y comparan relaciones. (Bressan & Gallego, 2011). La otra, es que los modelos emergen de la propia actividad constructiva de los estudiantes, por lo que no hay un modelo pre-construido o impuesto por la matemática formal, destacándose así, el valor que tienen las producciones de los aprendices para promover el surgimiento de soluciones específicas, que sean posible esquematizar y que tengan una perspectiva vertical.
>
> (Henao & Vanegas, 2012, pág. 42)

Cabe resaltar que el paso de los alumnos por estos niveles de comprensión no es estrictamente secuencial, ya que se pueden presentar casos donde los alumnos pasen, por ejemplo, del nivel situacional al *Nivel General* o inclusive hasta *Nivel Formal* en un solo paso.

2.2.5. Principio de Interacción

Se considera a la matemática como una actividad social, los alumnos al compartir sus procesos de matematización con sus compañeros y profesores, podrían aumentar su capacidad de reflexión, por lo cual una clase con base en el enfoque de la *Educación Matemática Realista* debe permitir los grupos el trabajo y de discusión. A la vez, esto podría permitir a cada alumno, de manera individual, aumentar sus niveles de aprendizaje.

> La discusión sobre las interpretaciones de la situación problema, de las distintas clases de procedimientos y justificaciones de solución y de la adecuación y eficiencia de los mismos es central en la EMR. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados. No se piensa en una clase homogénea en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios.
>
> (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004, pág. 9)

2.2.6. Principio de Interconexión

Una clase bajo el enfoque de la *Educación Matemática Realista* la mayoría de las veces debe de ser abordada desde diferentes ejes curriculares. Dado que la resolución de una situación problema modelada podría requerir del uso de una gran cantidad de herramientas matemáticas.

> En el enfoque de la EMR los contenidos y unidades matemáticas no son tratados de manera individual dentro del proceso de aprendizaje, cada tema que se desea enseñar esta interrelacionado con varios contenidos matemáticos. Esta postura implica que las situaciones realistas deben permitir conectar simultáneamente diferentes contenidos y herramientas matemáticas en una misma unidad de aprendizaje.
>
> (Henao & Vanegas, 2012, pág. 44)

De lo anterior se puede interpretar a la *Educación Matemática Realista* como un enfoque teórico que utiliza situaciones cotidianas, para los alumnos, y las convierte en situaciones problema que serán matematizadas por los alumnos mediante modelos, los cuales servirán como puentes entre lo abstracto y lo preciso, es decir, los alumnos no estarían recibiendo información y repitiéndola, sino que estarían inventando sus propias matemáticas y para que esto suceda el profesor debe dejar de ser un simple transmisor de información y convertirse en un compañero y guía para los alumnos en el tránsito de ese puente, el cual los podría llevar a descubrir para qué sirven las matemáticas.

En el capítulo 1 se mencionó que este trabajo está proyectado para contribuir en el desarrollo de algunas de las competencias genéricas y disciplinares en los alumnos. Un argumento que sostiene la selección de este enfoque es que las acciones que lleva a cabo el profesor en la gestión de la clase, derivadas de los principios de la *Educación Matemática Realista*, contribuyen a promover dichas competencias.

Por mencionar un ejemplo, se considera que el *Principio de Interacción* podría contribuir en el desarrollo de la competencia genérica número 8, "*Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos*" en su atributo *"Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva"*, dado que se tiene la expectativa de que el alumno al trabajar en equipo, comparta con sus compañeros y con el profesor sus puntos de vista y a su vez escuche los de sus compañeros, se espera también que estos diferentes enfoques personales ocasionen un debate entre los alumnos, llevándolos a generar una reflexión sobre estos. En el caso de las competencias disciplinares en matemáticas, un ejemplo sería para la competencia número 8. "*Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos*", para esta, se espera que el *Principio de Niveles* pueda contribuir en su desarrollo.

A continuación, se describen las acciones metodológicas que se utilizaron en este trabajo para alcanzar los objetivos señalados.

2.3. Acciones Metodológicas

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este trabajo es diseñar un conjunto de actividades didácticas para promover la habilidad de generalizar y el uso de la simbolización algebraica mediante modelos matemáticos de situaciones problema, donde aparezcan patrones numéricos, de acuerdo con el enfoque de la *Educación Matemática Realista*. Con base en lo planteado anteriormente se han formulado el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo, es necesario entonces plantear como se alcanzarán dichos propósitos, es decir, cuáles son las acciones que permitirán alcanzar los objetivos antes mencionados.

Este trabajo se llevó a cabo siguiendo una estrategia de acciones metodológicas constituida por 5 fases, las cuales de describen a continuación.

2.3.1. Fase 1. Exploración documental

Esta fase tiene como finalidad lograr el Objetivo Específico 1, *"Determinar características fundamentales del conjunto de actividades didácticas que abordarán el tema de patrones numéricos, que se corresponden con lo planteado en el enfoque de la modelación matemática desde el enfoque de la Educación Matemática Realista"*, y el Objetivo Específico 2, *"Identificar dificultades reportadas, en la literatura de la especialidad, en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en el bachillerato, particularmente sobre el tema de patrones numéricos"*. Para esto se llevó a cabo una revisión documental en revistas, así como en documentos oficiales, en la cual se realizaron específicamente las siguientes acciones:

- Revisar artículos científicos donde se exponen las características de las diferentes posturas acerca de la modelación matemática como un recurso en la enseñanza del álgebra, en especial en el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, tal como se ha mencionado.
- Revisar libros, artículos y publicaciones donde se aborde el tema de los principios en los que se sustenta la *Educación Matemática Realista*, con el propósito de establecer las características básicas que deben de contener las actividades integran esta propuesta.
- Revisar y organizar, mediante fichas de contenido, artículos científicos, libros y tesis que reporten resultados de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, en particular sobre la relación existente entre el tema de los patrones numéricos y la simbolización algebraica.

- Revisar el currículo de la educación media superior y la sección correspondiente al currículo matemático, particularmente el programa de la asignatura de Álgebra, para identificar las competencias genéricas y disciplinares que son susceptibles de ser desarrolladas en las actividades didácticas que serán propuestas.

2.3.2. Fase 2. Planificación y diseño

La finalidad de esta fase es alcanzar el Objetivo Específico 3, *"Seleccionar, adaptar o crear situaciones problema, donde aparezcan patrones numéricos, que permitan procesos de modelación desde el enfoque de la Educación Matemática Realista, que puedan ser trabajadas en bachillerato"*. Se seleccionaron las situaciones problema en las que se basarían las actividades y se diseñaron las actividades, en esta fase se realizaron las siguientes acciones:

- Buscar contextos, en la literatura de la especialidad, donde se puedan plantear situaciones problema que sean de interés para los estudiantes, las cuales puedan ser adaptadas a los principios de la *Educación Matemática Realista*.

- Definir la estructura de las actividades acorde a los planteamientos de la *Educación Matemática Realista*, plantear las tareas matemáticas que realizarán los estudiantes y elaborar las hojas de trabajo y guías para la implementación de las actividades.

2.3.3. Fase 3. Primera implementación y análisis

Esta fase busca alcanzar el Objetivo Específico 4, *"Evaluar la propuesta de diseño"*. Se llevó a cabo la implementación de las actividades, de acuerdo con su diseño, para su posterior análisis, el cual dio pie a su reestructuración. Las acciones concretas que se realizaron son las siguientes:

- Establecer criterios de evaluación: Como herramienta para el profesor en la evaluación del desempeño de los alumnos en el desarrollo de las actividades se diseñó una lista de cotejo.

- Planear la puesta en escena del diseño preliminar de actividades de la propuesta: Se determinó llevar a cabo la puesta en escena con un grupo completo de cuarenta y cuatro alumnos dividido en equipos de cuatro alumnos cada uno y se programó para tres sesiones de una hora cada una. A estos equipos se les facilitaría un cuadernillo consistente en una hoja con la redacción de la situación problema y diez hojas en blanco, con la instrucción de escribir todo el desarrollo de la actividad en las hojas en blanco y con tinta para que no borraran aquello que ellos consideran "mal hecho", este cuadernillo sería utilizado para el análisis de la actividad.

- Implementar el diseño preliminar de la propuesta y recabar los datos: La primera puesta en escena se realizó de acuerdo, tanto a diseño de la actividad como a la planeación de la puesta en escena, más no todo salió de acuerdo con lo planeado, se presentaron situaciones que no se tenían previstas, tales como la saturación del profesor con respecto a la atención a los alumnos ya que hubo momentos donde varios equipos permanecían en espera mientras el profesor se encontraba trabajando con otro equipo, ya que esto dificultó el proceso de *Reinvención Guiada*.

- Analizar los resultados de la implementación: De acuerdo con el diseño de la actividad, el análisis de la puesta en escena preliminar se realizó mediante la interpretación de los principios de la *Educación Matemática Realista*, es decir, se cotejaron las respuestas que dieron los alumnos, tanto escrita como esquemática y pictográfica, además de su participación en equipo y su interacción el profesor. Como herramienta para el análisis se utilizó, además de las hojas de trabajo de los alumnos, el testimonio del profesor.

2.3.4. Fase 4. Rediseño, segunda implementación y análisis

Esta fase tiene como finalidad lograr el Objetivo Específico 5, *"Modificar la propuesta en atención a lo obtenido en la evaluación de la primera implementación"*. Tras el análisis de la puesta en escena de la propuesta preliminar se efectuaron modificaciones en el diseño en las actividades, en esta fase se realizó las siguientes acciones:

- Rediseño de actividades: De los resultados obtenidos del análisis de la primera puesta en escena se modificó la actividad, principalmente en redacción de la situación problema, así como el manejo del desarrollo de la actividad por parte del profesor.

- Planear la puesta en escena del rediseño de actividades de la propuesta: Se mantuvo la idea de llevar a cabo la puesta en escena con un grupo completo, en este caso, de cuarenta alumnos, el grupo será dividido en equipos de cuatro alumnos cada uno y también se programó para tres sesiones de una hora cada una. De nueva cuenta a los equipos se les facilitará un cuadernillo, con las mismas instrucciones, para ser utilizados para el análisis de la actividad.

- Implementar el rediseño de la propuesta y recabar los datos: Esta segunda puesta en escena también se realizó de acuerdo con el diseño y planeación de la puesta en escena de la actividad, se esperaba que con la experiencia previa el profesor tuviera mejor manejo del grupo, cosa que hasta cierto grado sucedió, aunque se siguió presentando el problema con respecto a la atención a los alumnos.
- Analizar los resultados de la implementación: Para el análisis de la segunda puesta en escena se utilizaron los mismos criterios que para la puesta en escena preliminar.

2.3.5. Fase 5. Informe

Por último, se realizó un informe donde se presentan los resultados de este trabajo, así como las conclusiones del mismo.

2.4. Contexto

Las actividades desarrolladas en este trabajo se llevaron a cabo en un plantel que se encuentra ubicado en una zona urbana de la ciudad de Hermosillo, Sonora, México, en una zona considerada de clase media y media alta y fue creado en la década de los 70´s por lo que su población está constituida, en su mayoría, por familias conformadas por personas mayores y de la tercera edad. El plantel tiene una antigüedad de 40 años.

Este bachillerato pertenece al subsistema DGETI (Dirección General de Educación Tecnológica Industrial). Es un bachillerato Tecnológico con una modalidad bivalente, puesto que, además de la formación de bachillerato ofrece una carrera técnica profesional. En este plantel se ofertan 6 especialidades; estas son: Administración de Recursos Humanos, Dietética, Laboratorista Químico, Construcción, Producción Industrial de Alimentos y Programación.

Cuenta con 75 Docentes en ambos turnos, 45 administrativos y personal de apoyo. Cuenta también con 27 aulas acondicionadas para 50 alumnos, 4 laboratorios, 6 talleres, 2 centros de cómputo, sala audiovisual, biblioteca, cubículos y sala de maestros, cancha de fútbol, 2 canchas de basquetbol, una de volibol, un aula para estudiantes con capacidades diferentes (CAED) y una explanada techada. Las aulas no se encuentran equipadas con herramientas tecnológicas tales como proyectores, computadoras, internet, etc., sin embargo, cada docente tiene acceso a este tipo de herramientas ya que la dirección del plantel cuenta con 8 proyectores, una laptop y bocinas, las cuales pueden ser solicitadas por los docentes con anticipación. El docente cuenta con acceso a internet solo en la sala de maestros.

En su mayoría, las aulas, se encuentran equipadas con unidades de aire acondicionado tipo "mini split" el resto con unidades tipo centrales, en ambos casos estas unidades emiten una cantidad de ruido mayor a la recomendada, provocando así que los docentes tengan que forzar su voz al momento de impartir las clases, lo cual podría generar problemas en su salud.

La matrícula, en promedio, en cada semestre es de alrededor de 2000 alumnos en ambos turnos, matutino y vespertino. Y la población estudiantil pertenece a diferentes zonas de la ciudad de Hermosillo.

Los alumnos oscilan entre los 14 y 18 años de edad, en su mayoría cuentan con dispositivos electrónicos conocidos como "Smart Phone" pero tienen nulo conocimiento sobre su uso como herramienta para el aprendizaje.

Presentan un nivel de comprensión lectora regular, con un nivel dominio de análisis e interpretación bueno, más no un buen dominio en la evaluación de la información. Algunos poseen pocas habilidades socioemocionales para la convivencia, poca disposición para el trabajo en equipo, poca empatía y la mayoría carece de respeto mutuo.

Las actitudes de los alumnos son diversas, pero todos experimentan actitudes usuales de la adolescencia. Estas actitudes los llevan a desarrollar ciertas predisposiciones que pueden contemplarse, aparentemente, como desfavorables para la convivencia con sus compañeros y su aprovechamiento académico, sin embargo, estas también pueden ser consideradas como un recurso para desarrollar una maduración socioemocional y configurar mejores maneras de socialización.

El profesor que participó en la implementación de estas actividades cuenta con una experiencia de tres años como docente, no tiene una preparación académica especializada en educación, cuenta con una licenciatura en ingeniería civil en la cual se desempeñó durante diez años en la rama de la construcción de vivienda, ingresó a la labor docente tras haber sido evaluado en el concurso de oposición para el ingreso a la Educación Media Superior del Sistema Nacional del Servicio Profesional Docente donde obtuvo la calidad de Idóneo.

La implementación de las tres actividades diseñadas en este trabajo tuvo dos puestas en escena, durante la primera puesta en escena, la actividad “Lotes” se llevó a cabo en forma de piloto, con la finalidad de obtener información en cuanto al comportamiento de los alumnos y el manejo de la situación del profesor, con el objetivo de depurar el diseño definitivo de dichas actividades. Cabe mencionar que este piloto se realizó como parte del contenido de la asignatura, por lo cual la variedad de alumnos fue más extensa, mientras que las siguientes actividades participaron alumnos que pueden ser considerados como alumnos promedio o por debajo del promedio, es decir, aquellos alumnos que generalmente no destacan en las asignaturas de matemáticas.

De acuerdo al orden cronológico de las actividades, a partir de la actividad “Empresa” en la primer puesta en escena, las actividades se realizaron en un horario fuera de clases, y se manejaron grupos más pequeños, en esta ocasión se contó con la participación de voluntarios, como se mencionó anteriormente alumnos de bajo rendimiento en las asignaturas de matemáticas y de dos diferentes grupos y en todos los casos cada actividad se realizó en un mismo día, en tres sesiones de cincuenta minutos cada una, habiendo un receso de quince minutos entre cada sesión.

En la tabla 3 se muestra el orden cronológico en el cual fueron llevadas a cabo cada una de las implementaciones de las tres diferentes actividades.

Tabla 3.

Orden cronológico de las diferentes implementaciones

Actividad	Puesta en escena
Lotes	1ra (Piloto)
Lotes	2da
Empresa	1ra
Rifa	1ra
Empresa	2da
Rifa	2da

Primera puesta en escena

La Actividad "Lotes", se realizó con un grupo de cuarenta y cuatro alumnos de nuevo ingreso al bachillerato, el grupo estaba balanceado en cuanto a la cantidad de hombres y mujeres, se trabajó con once equipos de cuatro alumnos, mayormente se conformaron equipos de un mismo género y pocos equipos mixtos. El tiempo que llevó realizar este primer piloto fue de tres sesiones de cincuenta minutos cada una y se llevó a cabo durante el curso de inducción, antes de iniciar el semestre regular, debido a esto los alumnos aún no se conocían entre sí. Para esta actividad la técnica que se utilizó para recabar los datos para el análisis fue mediante la recolección de las hojas de trabajo y el testimonio del profesor.

En la Actividad "Empresa", participaron dos equipos de cuatro integrantes cada uno, uno de los equipos estuvo conformado por cuatro mujeres, mientras que en el otro equipo lo integraron tres hombres y una mujer, todos participaban por primera vez. En esta actividad la técnica para recabar los datos para el análisis, consistió en la recolección de las hojas de trabajo y el testimonio del profesor.

Para la Actividad "Rifa", acudieron tres equipos de tres integrantes, los dos equipos que participaron en la actividad "Empresa", más tres alumnos que participaban por primera vez. En esta actividad la técnica para recabar los datos para el análisis, consistió en la recolección de las hojas de trabajo, el testimonio del profesor y la grabación en audio del desarrollo de la actividad, por parte de los alumnos.

Segunda puesta en escena

La Actividad “Lotes”, se trabajó de igual manera con un grupo completo de primer semestre de bachillerato de cuarenta alumnos, en este caso se conformaron siete equipos de cuatro alumnos cada uno, dado que algunos de los miembros del grupo ya conocían la actividad, no participaron en esta segunda ocasión. Esta actividad se llevó a cabo durante en el segundo mes del semestre, se realizó en el horario regular de clases y tuvo una duración de cinco sesiones de cincuenta minutos cada una. En esta actividad la técnica que se utilizó para recabar los datos para el análisis fue la recolección de las hojas de trabajo y el testimonio del profesor.

En la Actividad “Empresa” se presentaron cinco diferentes alumnos, en este caso, tres mujeres de un grupo y un hombre y una mujer de otro grupo. Para esta actividad la técnica que se utilizó para recabar los datos para el análisis fue la recolección de las hojas de trabajo, el testimonio del profesor y se empezaron a documentar en audio todas las actividades, cabe mencionar que los alumnos dieron su consentimiento para que dichas grabaciones se efectuaran y fueron ellos mismos quienes realizaron la grabación de los audios desde sus dispositivos móviles, proporcionándolas posteriormente al profesor.

Para la Actividad “Rifa”, se citó a los equipos que participaron en la actividad “Empresa”, pero por circunstancias ajenas a nuestra voluntad, solo se presentaron dos de los seis alumnos, por lo cual solo se trabajó con un equipo de dos integrantes. De nueva cuenta, se continuó con la técnica para recabar los datos para el análisis, consistente en la recolección de las hojas de trabajo, el testimonio del profesor y la grabación en audio del desarrollo, de la actividad, por parte de los alumnos.

Capítulo 3. Diseño de la propuesta

Con base en las consideraciones teóricas de la *Educación Matemática Realista* se exponen la forma en cómo se planificó la propuesta de intervención. Este trabajo incorpora dos grandes componentes: La elección de las situaciones problema y la gestión que el profesor a cargo debe llevar a cabo en el trabajo con los alumnos, esto último atendiendo a los principios de la *Educación Matemática Realista*.

En el primero de los tópicos se diseñaron tres actividades, las cuales llevan por título: **Lotes**, **Empresa** y **Rifa**. Para el segundo, se fueron planificando las acciones correspondientes a lo establecido en los principios de la *Educación Matemática Realista*.

Las fuentes para las actividades mencionadas fueron:

a) Lotes: Fue de elaboración propia, realizada de manera conjunta por el autor del trabajo y la persona que lo dirigió.

b) Empresa: Fue retomada de (Vargas Castro, y otros, 2013, pág. 116).

c) Rifa: Fue retomada de (Vargas Castro, y otros, 2013, pág. 106).

3.1. Objetivo de las actividades

Promover en alumnos de primer semestre de bachillerato la habilidad de generalizar mediante el abordaje de situaciones problema, de acuerdo con los referentes teóricos, donde aparezcan patrones numéricos y que logren expresarlos, ya sea de forma verbal, escrita, pictográfica, algebraica o una combinación de ellas. Estos contenidos, de acuerdo con el plan de estudios vigente en este nivel, son centrales en la asignatura de álgebra.

3.2. Descripción de la propuesta para la conducción de las actividades en el aula

La presentación de la descripción se hará con base en la estructuración por etapas que tiene el diseño de actividades que se está proponiendo. Dicha estructuración se realizará basándose en el *Principio de Niveles* de la *Educación Matemática Realista*.

En el *Principio de Interacción* de la *Educación Matemática Realista* se considera a la Matemática como una actividad social, siguiendo esta directriz, se solicita a los alumnos trabajar en equipos de 4 integrantes. De esta manera los alumnos, al compartir sus procesos iniciales de matematización con sus compañeros y profesor, estarán desarrollando las matemáticas en un ambiente más nutrido de conceptos e ideas, con diferentes enfoques personales o sociales, esto debido a la posible diversidad de origen, costumbres y/o creencias de los integrantes de los diferentes equipos, en caso que durante el desarrollo de la actividad se advirtiera que el trabajo en equipo no está funcionando, cabe la posibilidad de modificar la estructuración del equipo, teniendo en consideración que se debe de privilegiar la interacción, tanto entre los integrantes del equipo como con el profesor.

El *Principio de Niveles* de la *Educación Matemática Realista* nos dice que los alumnos, durante el proceso de la modelación matemática, pasan por diferentes niveles de comprensión: *Situacional*, *Referencial*, *General* y *Formal*. Como ya se mencionó antes, este tránsito entre estos niveles de compresión no es estrictamente secuencial, pero con fines de diseño se va a considerar que durante el desarrollo de estas actividades los alumnos, efectivamente, transiten por cada uno de esos niveles.

Al momento de introducir la actividad el profesor debe presentar la situación problema de tal manera que permita a los alumnos imaginarla como una situación real, esto de acuerdo con el *Principio de Actividad* de la *Educación Matemática Realista*, donde debemos de enseñar las matemáticas como parte de un proceso de organizar la realidad. Así mismo se les solicita a los alumnos documentar todas las ideas que surjan, haciendo énfasis en no borrar nada, incluso aquello que consideren que no esté correcto, simplemente que lo señalen y lo cataloguen como una idea que no los llevará a una solución.

Durante todo el desarrollo de la actividad el profesor, apegándose al *Principio de Reinvención* de la *Educación Matemática Realista*, utilizando el proceso denominado *Reinvención Guiada*, acompaña a los alumnos durante el desarrollo de la actividad apoyándolos y/o descartando algunos de sus planteamientos, no respondiendo directamente a sus preguntas sino, de preferencia, con otra pregunta en un contexto similar para que el alumno replantee la situación desde otro enfoque.

3.3. Actividad “Lotes”

Para esta primera actividad, la versión que se está presentando en este capítulo es el producto de un piloto que se llevó a cabo previo al diseño, este piloto no contó con un diseño escrito, solo se redactó la situación problema. Esto, con la finalidad de que tanto el profesor que llevaría a cabo las implementaciones como quien estaría a cargo de los diseños de las diferentes actividades tuviesen una mejor perspectiva de lo que, al momento, se había visto en la teoría de la *Educación Matemática Realista*, el análisis de este piloto se muestra en el capítulo siguiente.

3.3.1. Situación problema

Se desea fraccionar un terreno rectangular en una cantidad no determinada de lotes, los cuales tendrán las mismas dimensiones. Cada uno de los lotes estará delimitado por cercas fijadas en postes, los cuales estarán colocados en cada una las esquinas. Dependiendo de la cantidad de lotes que resulten, ¿Cuántos postes se utilizarán?

Figura 3.1

Dicha situación problema se presenta bajo un contexto realista, la cual, siguiendo el *Principio de Realidad* de la *Educación Matemática Realista*, se considera permitirá a los alumnos, en un inicio, matematizar horizontalmente, debido a que los alumnos empiezan a trasladar la situación problema de un lenguaje común a un esquema, el cual representa una situación particular de dicha situación.

3.3.2. Etapa 1. Nivel Situacional

Al inicio de la actividad se espera que los alumnos, basándose en su experiencia, su sentido común y conocimientos informales comiencen a imaginar cómo es el terreno, qué es lo que tienen que hacer para dividirlo en lotes más pequeños y dónde deben estar localizados los postes. Durante esta etapa se trabajará en dos sub etapas, en la primera de manera individual y en la segunda, ya con estas ideas individuales, se inicia una discusión en equipo, para plantear ideas en conjunto con respecto de cómo deben de estar acomodados los lotes y los postes con respecto a los lotes, donde, de esas ideas individuales, saldrá una idea en común de cómo plantear la configuración de los lotes.

Las imágenes a continuación presentan algunos de los modelos que podrían ser propuestos por los equipos.

Las figuras 3.2 y 3.3 nos muestran un modelo de una hilera de lotes.

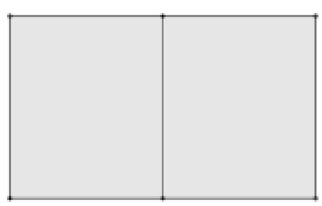


Figura 3.2

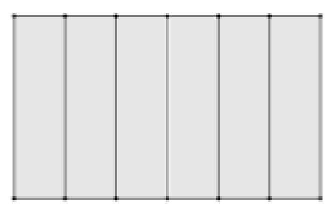


Figura 3.3

Las figuras 3.4 y 3.5 nos muestran un modelo de dos hileras de lotes.

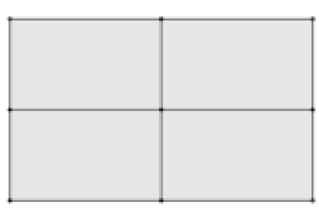


Figura 3.4

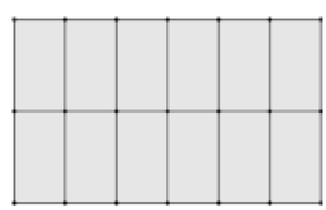


Figura 3.5

Las figuras 3.6 y 3.7 nos muestran un modelo de cuatro hileras de lotes.

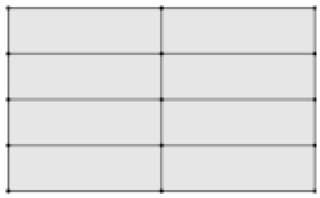


Figura 3.6

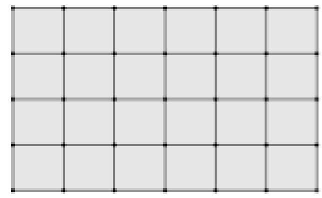


Figura 3.7

En este punto se espera que los alumnos alcanzarán el nivel de Comprensión Situacional una vez que hayan conseguido imaginar cómo quedaría su modelo de los lotes y postes. Cabe destacar que se podrían presentar una cantidad considerable de posibles modelos propuestos por cada equipo.

3.3.3. Etapa 2. Nivel Referencial

Ya que hayan definido una idea de cómo quedaría fraccionado el terreno, se espera que cada equipo plantee situaciones particulares, al menos una, mediante la utilización de esquemas o símbolos o pictogramas, lo que en la *Educación Matemática Realista* se denomina "modelos de", ya que esa representación hace referencia sólo a esa situación en particular, tal y como se muestra en la Figura 3.8.

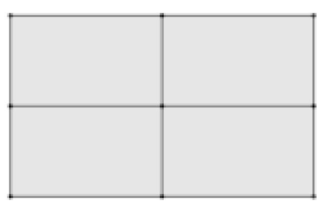


Figura 3.8

De esta representación particular los alumnos determinarán, mediante conteo, una cantidad definida de lotes y de postes, ver Figura 3.9.

4 lotes

9 postes

Figura 3.9

Después de esto, el profesor solicita que cada equipo plantee de la misma manera al menos otras tres diferentes situaciones particulares en el mismo modelo (dos hileras para este ejemplo), con sus respectivas representaciones, pidiendo a los alumnos que obtengan las cantidades correspondientes de lotes y postes en cada una de ellas.

6 lotes

12 postes

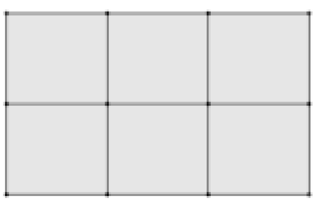


Figura 3.10

8 lotes

15 postes

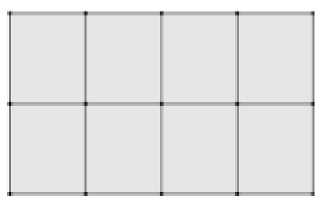


Figura 3.11

10 lotes

18 postes

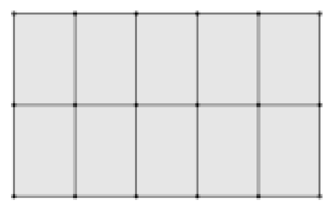


Figura 3.12

En ese momento cada equipo contará con información correspondiente a cada caso. A continuación, el profesor hará la sugerencia a cada equipo, en caso de que no lo hayan hecho, que organicen los datos de cada uno de sus planteamientos. Se espera que el nivel de Comprensión *Referencial* se alcance mediante la utilización de tablas, como la que aparece en la tabla 3.1, por parte de los alumnos, para organizar toda la información registrada.

Cant. de lotes	Cant. de postes
4	9
6	12
8	15

Tabla 3.1

3.3.4. Etapa 3. Nivel General

Ya que se cuente con la información organizada en tablas se solicita a cada equipo que, en el pizarrón, muestren sus propuestas al resto del grupo. De esta manera todos podrán ver los diferentes o coincidentes modelos propuestos, con la expectativa de que los alumnos logren entender que hay muchos más diferentes enfoques en cuanto a la disposición de los terrenos, entre todos los equipos. Después de esto se realiza una comparación y un representante de cada equipo argumenta su enfoque y estrategia en la que trabajaron para organizar los lotes y cómo fue que determinaron cada cantidad de postes en referencia al número de lotes.

En esta etapa se seleccionará el modelo más recurrente, con el fin de homogenizar la clase, como ejemplo tomaremos el modelo de dos hileras de lotes, ver figuras 3.4 y 3.5.

A continuación, se les solicita a los alumnos reflexionar en equipos, propiciando, por parte del profesor, la búsqueda de aspectos que puedan ser generalizables y que puedan ser utilizados en más de una situación particular.

Por ejemplo, es de esperarse que, para este caso, los alumnos detecten que no puede haber un número impar de lotes, el crecimiento en cuanto a la cantidad de lotes es de dos en dos y que el incremento del número de postes es de tres por cada dos lotes que se incrementa.

El nivel de Comprensión General será alcanzado si los alumnos, mediante la exploración y reflexión, identifican patrones en el incremento de postes con respecto al de los lotes que se presenta en los modelos propuestos previamente en las diferentes situaciones particulares y logran predecir la cantidad de postes para un determinado número de lotes, sin necesidad de hacer un esquema para cada situación, es decir que lo generalicen, llevando esa generalización a lo que en la *Educación Matemática Realista* se denomina como un “modelo para”, es decir, que deja de ser para solo una situación particular y se puede utilizar para cualquier situación, como se muestra en la tabla 3.2.

Cant. de lotes	Cant. de postes
2	6
4	9
6	12
8	15
10	18
12	21
14	24
16	27
18	30

Tabla 3.2

En esta tabla se espera que los alumnos amplíen en incrementos consecutivos, de dos en dos, sin la necesidad de hacer las representaciones gráficas para realizar los conteos correspondientes, sino que hagan el incremento en los postes con el patrón detectado, es decir, de tres en tres.

Después de esto el profesor pregunta por una cantidad relativamente cercana a la última cantidad de lotes en la tabla, para este ejemplo el profesor podría preguntar, *¿Cuántos postes se necesitarían para cercar 24 lotes?*, de primera instancia se espera que los alumnos hagan los incrementos consecutivos hasta llegar a la cantidad preguntada, en este caso el profesor preguntará de nuevo pero en esta ocasión por una cantidad relativamente muy alejada del último valor en la tabla, por ejemplo, *¿Cuántos postes se necesitarían para cercar 600 lotes?*, esto con el fin de que los alumnos observen que tendrían que hacer una tabla muy grande para llegar al resultado siguiendo el mismo procedimiento, lo cual no les resultaría práctico, incitándolos así a la búsqueda de una formalización de esos patrones detectados.

Cabe la posibilidad que en este punto los alumnos pasen directamente a la formalización, logrando obtener un resultado y el razonamiento necesario para argumentar su respuesta o, en el mejor de los casos, que logren obtener una expresión algebraica del modelo, tal como $3(\frac{n}{2}+1)$, donde n es el número de lotes y tomaría valores pares de números naturales.

A continuación, el profesor les pregunta, *¿Qué pasará si cambiamos el modelo? ¿Qué pasará si, en lugar de ser dos hileras hacia abajo, son tres o cuatro o cinco o más hileras?* A continuación, les solicita que en equipos lo reflexionen y realicen la organización correspondiente. Se espera que para cada nuevo modelo propuesto los equipos inicien planteando esquemas, tal y como lo hicieron en el primer caso, y al organizar la información busquen y analicen patrones y traten de predecir para más cantidades, todo esto por iniciativa propia, basándose en el primer caso y organizando cada modelo en tablas correspondientes como se muestra a continuación.

3 lotes

8 postes

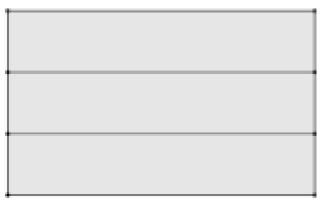


Figura 3.13

6 lotes

12 postes

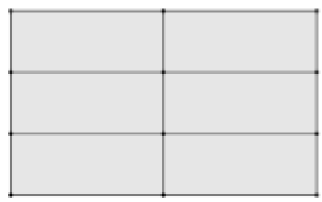


Figura 3.14

9 lotes

16 postes

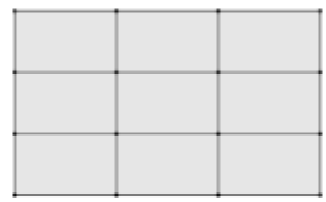


Figura 3.15

Modelo de 3 hileras	
Cant. de lotes	Cant. de postes
3	8
6	12
9	16
12	20
15	24
18	28
21	32
24	36

Tabla 3.3

4 lotes

10 postes

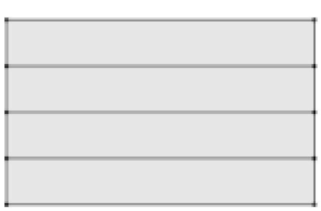


Figura 3.16

8 lotes

15 postes

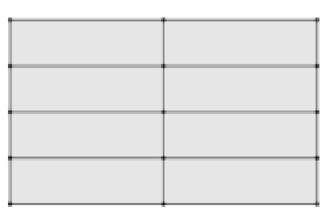


Figura 3.17

12 lotes

20 postes

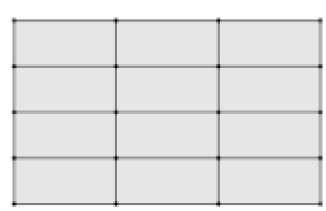


Figura 3.18

Modelo de 4 hileras	
Cant. de lotes	Cant. de postes
4	10
8	15
12	20
16	25
20	30
24	35
28	40
32	45

Tabla 3.4

5 lotes

12 postes

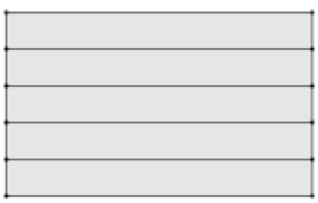


Figura 3.19

10 lotes

18 postes

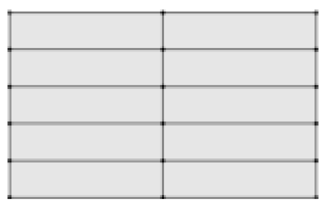


Figura 3.20

15 lotes

24 postes

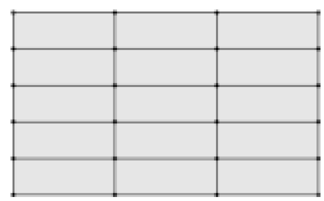


Figura 3.21

Modelo de 5 hileras	
Cant. de lotes	Cant. de postes
5	12
10	18
15	24
20	30
25	36
30	42
35	48
40	54

Tabla 3.5

3.3.5. Etapa 4. Nivel Formal

Por último, ya que los alumnos logren generalizar los patrones que hayan detectado en estos modelos, se espera que, con la ayuda del profesor en un proceso de *Reinvención Guiada* de la *Educación Matemática Realista*, demuestren su comprensión mediante la capacidad de manejar conceptos, tales como “patrón”, “variable” y “literal”, procedimientos o notaciones mediante expresiones algebraicas usuales en el bachillerato o un texto argumentativo o mediante un discurso.

Para alcanzar este nivel el profesor se apoyará en el Applet diseñado para esta situación problema. Les solicitará a los alumnos que en sus dispositivos móviles (Smartphone, Tablet, laptop o similares) instalen la aplicación de *GeoGebra Clásico*. A continuación, el profesor les compartirá el Applet mencionado, imagen 3.1.

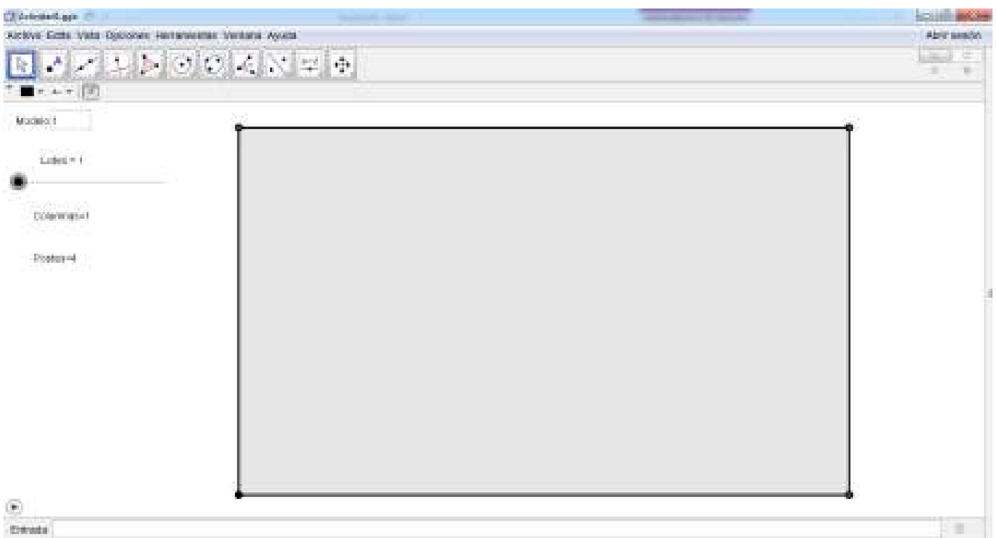


Imagen 3.1

Como actividad inicial en el Applet, para este ejemplo con el modelo de dos hileras, el profesor preguntará: *¿Qué pueden observar si tenemos 2 lotes?*, el profesor dará la indicación de que en el Applet asignen el modelo de 2 hileras y dos lotes, como se observa en la imagen 1, los alumnos podrán observar que resultarían una columna de 2 lotes, 2 columnas de 3 postes, 3 hileras de 2 postes y 6 postes en total.

Como segundo paso el profesor preguntará: *¿Qué pueden observar si tenemos 4 lotes?*, el profesor nuevamente dará la indicación de que en el Applet asignen el modelo de 2 hileras y

4 lotes, como se observa en la imagen 3.2, donde los alumnos podrán observar que resultarían 2 columnas de 2 lotes, 3 columnas de 3 postes, 3 hileras de 3 postes y 9 postes en total.

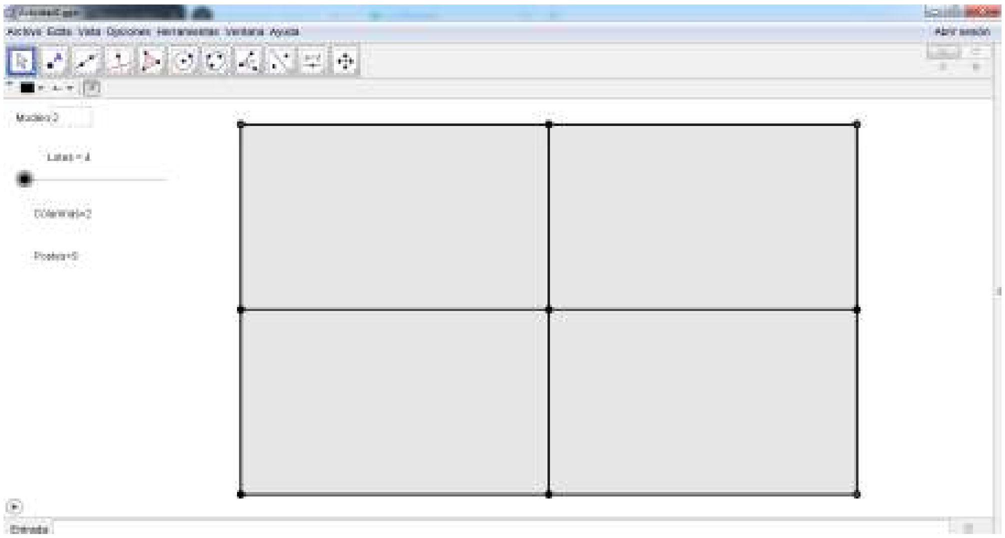


Imagen 3.2

En el tercer paso el profesor preguntará: *¿Qué pueden observar si tenemos 6 lotes*?, se espera que no haya que dar la indicación, pero aun así el profesor nuevamente dará la indicación de que en el Applet asigne el modelo de 2 hileras y 6 lotes, como se observa en la imagen 3.3, donde los alumnos podrán observar que resultarían 3 columnas de 2 lotes, 4 columnas de 3 postes, 3 hileras de 4 postes y 12 postes en total.

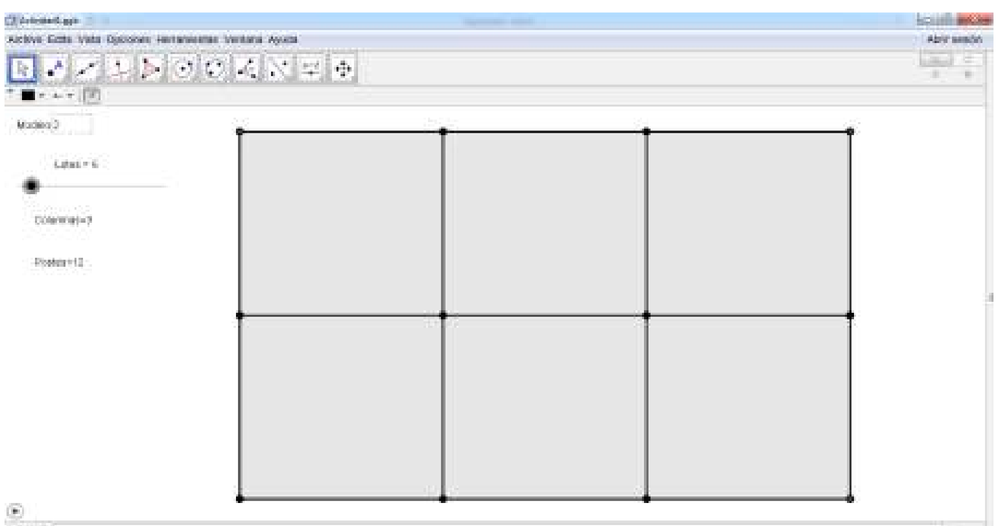


Imagen 3.3

En un cuarto paso el profesor preguntará: *¿Qué pueden observar si tenemos 8 lotes?*, el profesor ya no dará la indicación de que en el Applet asignen el modelo de 2 hileras y 8 lotes, los alumnos podrán observar que resultarían 4 columnas de 2 lotes, 5 columnas de 3 postes, 3 hileras de 5 postes y 15 postes en total, ver Imagen 3.4.

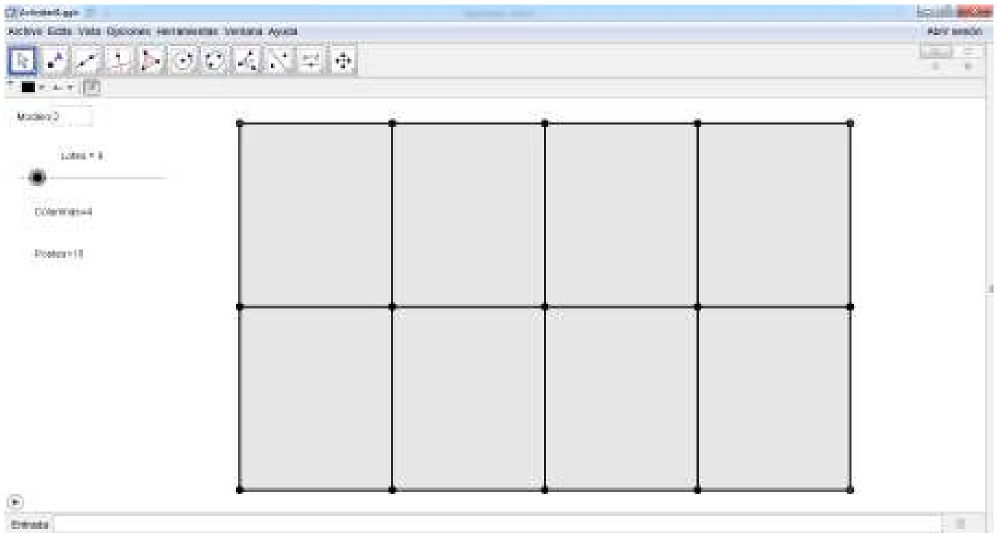


Imagen 3.4

Con esta guía por parte del profesor se espera que el alumno pueda detectar la cantidad de lotes como la variable y cómo es que la cantidad columnas de lotes y la cantidad de postes dependen de esa variación, así como el incremento de los postes con relación al incremento de las columnas, a lo cual el profesor preguntará: *¿Pueden explicarme como es esa relación que hay entre las variaciones?*, se espera que los alumnos den respuestas tales como:

"Por cada dos lotes que aumentamos, la cantidad de columnas de lotes es la mitad de esa cantidad y va aumentando 3 postes por cada columna de lotes que aumente y el total de postes es esa cantidad más los 3 postes del principio".

"Al principio hay una columna de 3 postes y por cada dos lotes que agregamos se aumenta una columna de 3 postes".

"Es un rectángulo que siempre tiene una altura de 3 postes y al principio tiene una base de 2 postes, pero la base va aumentando un poste cada vez que agregamos 2 lotes".

Después de esto el profesor preguntará: *si son una cantidad no definida lotes ¿Cuántos postes serían?*, se espera que respondan algo cómo:

“Entonces los postes serían 3 veces la mitad de esa cantidad de lotes y al final le sumamos los 3 postes principio”.

“El total de la cantidad de postes es 3 postes, más 3 por la mitad del total de lotes”

“La cantidad de postes en como el área de un rectángulo, o sea, la base, que es 2 cuando solo son 2 lotes más 1 por cada dos lotes extras, por la altura, que es 3”.

En este punto se podrá considerar que el alumno alcanzó el nivel de Comprensión Formal, ya que es capaz de argumentar su respuesta.

Por último profesor preguntará, *¿Me pueden explicar eso sin usar palabras?*

Se espera que los alumnos planteen una expresión algebraica basándose en sus argumentos, tal como:

$$\frac{3n}{2}+3$$

$$3\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

Donde n es la cantidad de lotes.

En el momento en que los alumnos logren lo anterior se podría considerar que se ha alcanzado el nivel de comprensión Formal dentro de lo institucional.

Cabe destacar que desde un inicio los alumnos podrían utilizar las variables x o y, esto debido a que son las más comunes en las clases de matemáticas, pero también podrían ser otras variables.

3.3.6. Criterios para el análisis de resultados

Durante el desarrollo de la actividad se dará la recopilación de datos, mediante la recolección de los trabajos realizados por cada uno de los equipos. Para poder determinar si el alumno logró alcanzar cada nivel, dentro de los niveles de comprensión que menciona la *Educación Matemática Realista* en su *Principio de Niveles*, se tendrán las siguientes consideraciones:

3.3.6.1. Nivel Situacional

Que el alumno dé la interpretación de la situación problema y el uso de estrategias vinculadas totalmente al contexto de la situación misma, planteando al menos una situación particular de la configuración de los lotes y la ubicación de los postes.

3.3.6.2. Nivel Referencial

Que el alumno recurra a representaciones o modelos gráficos de la configuración de los lotes y procedimientos personales que esquematizan el problema tal como la organización mediante tablas del conteo de los lotes y postes.

3.3.6.3. Nivel General

Que el alumno logre la generalización mediante la reflexión sobre los patrones en los incrementos de la cantidad de postes con respecto al incremento de lotes, pudiendo predecir otras situaciones particulares sin la necesidad de hacer esquemas para cada situación particular.

3.3.6.4. Nivel Formal

Que el alumno determine, ya sea con notaciones convencionales en el álgebra o que trabaje con los procedimientos de manera argumentativa, la cantidad de postes con respecto a la cantidad de lotes, es importante considerar que en la *Educación Matemática Realista* lo que se denomina como matemática formal no es necesariamente una notación con la que el alumno deba de relacionarse, sino a aquello que el alumno crea dentro de su razonamiento matemático que le da argumentos para generar una realidad matemática, la cual puede denominarse “formal” si permite al alumno desprenderse del contexto de donde partió para construir un modelo general.

3.4. Actividad "Empresa"

3.4.1. Situación problema

Jóvenes estoy iniciando una empresa, a la cual ocupo solo un inversionista, quien para poder pertenecer a esta empresa deberá hacer una inversión de $100, a la vuelta de una semana tendrán un pago único de $200, siempre y cuando logren traer tres nuevos inversionistas, los cuales entrarían a la empresa bajo las mismas condiciones.

La presentación de la situación problema se da bajo un contexto realista, lo cual, de acuerdo con el *Principio de Realidad* de la *Educación Matemática Realista*, permitirá a los alumnos matematizar de una manera informal.

3.4.2. Etapa 1. Nivel Situacional

Para iniciar, el profesor presenta la actividad de manera informal, y con base en su experiencia, su sentido común y conocimientos informales, los alumnos imaginen de qué se trata el negocio y cómo van a conseguir más personas para la empresa. Esta etapa estará dividida en dos sub etapas, primeramente, los alumnos trabajarán de manera individual y después en equipos, donde se realizará una discusión sobre las ideas que aparecieron en la etapa individual. De esta discusión plantearán ideas en conjunto con respecto de cuántas personas van a participar en la empresa, donde, de esas ideas individuales saldrá una idea en común de la estructura de la empresa.

Después de esta etapa, el profesor hará una serie de preguntas.

Pregunta del profesor: *¿Quién está dispuesto a participar como inversionista?*

Posibles respuestas por parte de los alumnos:

Se espera que la mayoría de los alumnos contesten que sí desean participar en la empresa.

Pregunta del profesor a quien sí está dispuesto a participar: *¿Por qué estás dispuesto a invertir?*

Posibles respuestas por parte de los alumnos:

“Porque voy a ganar $100 en una semana solo con conseguir 3 personas que quieran invertir”

“Porque tengo muchos conocidos que si puedo convencer”

“Porque sé que puedo convencer a 3 personas a invertir”

Pregunta del profesor a quien no está dispuesto a participar: *¿Por qué no estás dispuesto a invertir?*

Posibles respuestas por parte de los alumnos:

“Porque no creo que pueda conseguir a 3 personas que quieran participar”

“Porque no tengo dinero”

“Porque un conocido en una ocasión participo en algo similar y no le pagaron”

A continuación, el profesor solicita que formen equipos de máximo 4 integrantes, estos equipos deben de estar integrados de manera homogénea con respecto a los alumnos que hayan decidido sí invertir o no invertir en la empresa. Una vez conformados los equipos el profesor les solicita que compartan sus motivos por el cual tomar su decisión con el fin de homogenizar las ideas en los equipos.

Pregunta del profesor: Considerando que hoy, el primer inversionista, paga sus $100. *¿Cuántos inversionistas nuevos llegarían dentro de dos semanas?*

Respuesta esperada: *9 inversionistas nuevos.*

Pregunta del profesor: *¿Cuántos inversionistas nuevos llegarían dentro de cuatro semanas?*

Respuesta esperada: *81 personas.*

Se espera que en esta etapa de la actividad los alumnos alcancen el nivel de comprensión Situacional una vez que hayan conseguido imaginar la cantidad de personas que estarían participando cada semana.

3.4.3. Etapa 2. Nivel Referencial

Una vez definida la idea de cómo funciona la empresa en cuanto al ingreso de inversionistas, se espera que, mediante la utilización de esquemas o símbolos o pictogramas, los equipos comiencen a plantear situaciones particulares, al menos una, y que esta representación haga referencia sólo a una situación en particular lo que se denomina "modelos de", en la *Educación Matemática Realista*, tal y como se muestra en la Figura 3.22.

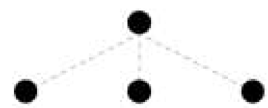


Figura 3.22

Las figuras a continuación presentan algunos de los modelos que podrían ser propuestos por los equipos.

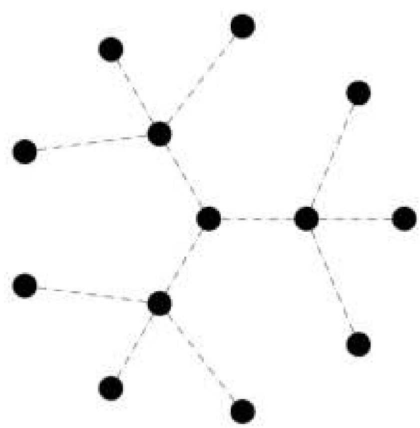


Figura 3.23

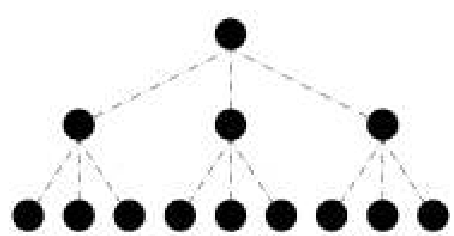


Figura 3.24

Es importante mencionar que lo modelos propuestos por los equipos podrían presentar una cantidad considerable de posibles configuraciones.

De esta representación particular los alumnos determinarán, mediante conteo, una cantidad personas que estarán participando cada esa semana. En la figura 3.25 vemos el inicio de la empresa, donde se cuenta con solo un inversionista.

Inicio

1 inversionista

Figura 3.25

A continuación, el profesor solicita a los equipos que, utilizando el mismo método, planteen al menos las tres siguientes semanas, pidiendo a los alumnos que definan las cantidades de nuevos inversionistas que ingresarían a la empresa en cada una de ellas.

Semana 1

3 inversionistas

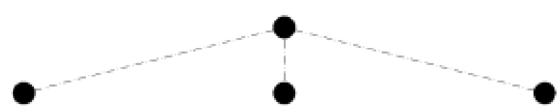


Figura 3.26

Semana 2

9 inversionistas

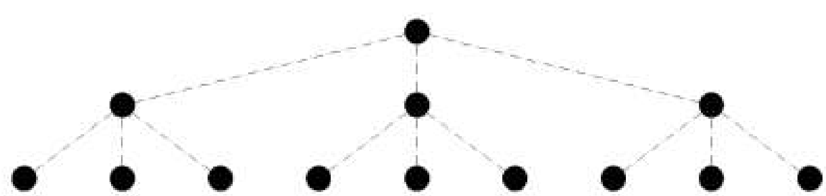


Figura 3.27

Semana 3

27 inversionistas

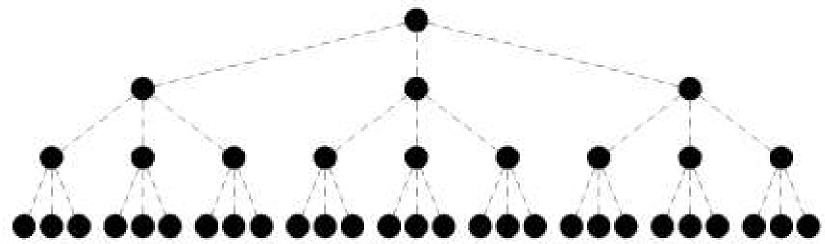


Figura 3.28

Se espera que los equipos, una vez habiendo determinado la cantidad de inversionistas nuevos en cada semana mediante el conteo en sus representaciones, organicen la información, en el caso de que no suceda esto el profesor hará la sugerencia de que así lo hagan. En el momento en que los alumnos organicen su información, por ejemplo, como se muestra en la Tabla 3.6, se esperaría que los alumnos alcancen el nivel de Comprensión *Referencial*.

Semana	Inv. Nuevos
0	1
1	3
2	9
3	27

Tabla 3.6

3.4.4. Etapa 3. Nivel General

Cuando los equipos hayan organizado la información en tablas el profesor les solicitará a los equipos que muestren sus propuestas al resto del grupo. Así todos podrán apreciar los diferentes modelos propuestos por cada uno, esto con la intención de que los alumnos logren apreciar las diferentes perspectivas que se pudieran tener de una misma situación. Acto seguido se lleva a cabo una comparación de estos diferentes modelos presentados, donde un representante del equipo argumenta su estrategia y cómo fue que determinaron cada cantidad de inversionistas para cada semana.

En esta etapa se seleccionará el modelo más recurrente, con el fin de homogenizar la clase.

Después de esto, el profesor solicitará a los equipos reflexionar sobre la información obtenida, con el fin de los alumnos aprecien características que puedan ser generalizables y que puedan ser utilizados en más de una situación particular.

En este caso, se puede esperar que los alumnos se percaten de que en cada semana el número de inversionistas es el triple de la cantidad de los inversionistas que ingresaron la semana anterior.

Si los alumnos identifican al menos un patrón en el comportamiento de las cantidades de inversionistas por semana presentados previamente en los modelos de las diferentes situaciones particulares, se puede considerar que el nivel de Comprensión General fue alcanzado por parte de los alumnos, ya que estos no tendrán necesidad de realizar una representación gráfica para cada situación particular, es entonces cuando se puede decir que lograron generalizar, dando lugar a lo que en la *Educación Matemática Realista* se nombra como un "modelo para", dicho de otra forma, que deja de ser para solo una situación particular y se puede utilizar para cualquier situación, es decir, para cualquier semana.

Para esto el profesor preguntará: *Analizando la información que se tiene hasta la semana 3. ¿Cuántos inversionistas estarían entrando a la empresa en la semana 5?*

Se espera que los alumnos continúen utilizando la tabla, ampliándola hasta la cantidad solicitada sin la necesidad de realizar los pictogramas, ver tabla 3.7, sino mediante los patrones que hayan sido detectados, es decir multiplicando por tres la cantidad anterior.

Semana		Inv. Nuevos
0		1
1	1(3)	3
2	3(3)	9
3	9(3)	27
4	27(3)	81
5	81(3)	243

Tabla 3.7

A continuación, el profesor preguntará por una semana no muy alejada de la última semana en la tabla, como, por ejemplo:

¿Cuántos inversionistas estarían entrando a la empresa en la semana 8?

Es de esperarse que los alumnos continúen con la utilización de la tabla para llegar a dicha semana, ver Tabla 3.8.

Semana		Inv. Nuevos
0		1
1	1(3)	3
2	3(3)	9
3	9(3)	27
4	27(3)	81
5	81(3)	243
6	243(3)	729
7	729(3)	2187

Tabla 3.8

De nueva cuenta el profesor planteará una pregunta, pero en este caso por una semana más alejada de la última que aparece en la tabla, esto con la finalidad de que los alumnos reconsideren la utilización de la tabla y traten, mediante el uso del patrón detectado, obtener la cantidad requerida. Por ejemplo:

¿Cuántos inversionistas estarían entrando a la empresa en la semana 13?

Se espera que tras esta pregunta los alumnos se percaten que, para obtener el resultado, tendrán que hacer una tabla muy grande, hecho que no es nada práctico, estimulando con esto la necesidad de formalizar el patrón que fue detectado.

3.4.5. Etapa 4. Nivel Formal

Para alcanzar el nivel de Comprensión Formal, el profesor, de acuerdo con el proceso de *Reinvención Guiada* de la *Educación Matemática Realista*, apoyará a los alumnos para que demuestren su comprensión mediante la capacidad de manejar conceptos, tales como "patrón", "variable" y "literal", procedimientos o notaciones mediante expresiones algebraicas usuales en el bachillerato o un texto argumentativo o mediante un discurso.

Ya que los alumnos logren obtener los valores de una semana determinada mediante los patrones detectados, el profesor realizará una serie de preguntas en los resultados obtenidos.

Profesor: *En la tabla ¿De dónde obtuvieron el valor de la semana 2?*

Alumno: *De multiplicar el 3 de la semana 1 por 3.*

Profesor: *¿Cuál fue el resultado?*

Alumno: *9*

Profesor: *Entonces ¿El 9 lo puedes expresar de otra forma?*

Alumno: *Sí.*

Profesor: *¿Cómo?*

Alumno: *3 por 3.*

Profesor: *¿Y de dónde obtuvieron el valor de la semana 3?*

Alumno: *De multiplicar el 9 de la semana 2 por 3.*

Profesor: *¿Cuál fue el resultado?*

Alumno: *27.*

Profesor: *¿El 27 lo puedes expresar de otra forma?*

Alumno: *Sí.*

Profesor: *¿Cómo?*

Alumno: *9 por 3.*

Profesor: *Pero el 9 ya había sido expresado de otra forma ¿Cuál fue?*

Alumno: *3 por 3.*

Profesor: *Entonces ¿De qué otra forma puedes expresar el 27?*

Alumno: *3 por 3 por 3.*

Se espera que a esta altura de las preguntas los alumnos puedan sustituir las operaciones expresadas en la Tabla 3.8 y la modifiquen, tal como se puede apreciar en la Tabla 3.9.

Semana		Inv. Nuevos
0		1
1	3	3
2	(3)(3)	9
3	(3)(3)(3)	27
4	(3)(3)(3)(3)	81
5	(3)(3)(3)(3)(3)	243
6	(3)(3)(3)(3)(3)(3)	729
7	(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)	2187

Tabla 3.9

Una vez que los alumnos modifiquen la tabla, el profesor realizará otra serie de preguntas.

Profesor: *Además de 9 ¿De qué otra forma puedes expresar el 3 por 3?*

Alumno: *32.*

Profesor: *¿Y el 3 por 3 por 3?*

Alumno: *33.*

De nueva cuenta, se espera que con estas preguntas los alumnos puedan sustituir las operaciones expresadas en la Tabla 3.9 y la modifiquen, tal como se puede apreciar en la Tabla 3.10.

Semana		Inv. Nuevos
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9
3	3^3	27
4	3^4	81
5	3^5	243
6	3^6	729
7	3^7	2187

Tabla 3.10

Con los resultados de esta tabla, se considera que los alumnos determinarán que el número de semana en la que se está trabajando es la potencia a la que debe de ser elevado el tres, que es el número de inversionistas nuevos que ingresan a la empresa cada semana.

El profesor planteará otra serie de preguntas con las cuales se espera que los alumnos obtengan notaciones mediante expresiones algebraicas usuales en el bachillerato o un texto argumentativo o mediante un discurso oral.

Por ejemplo:

Profesor: *¿Cómo se puede determinar cuántos inversionistas estarían entrando a la empresa en cualquier semana?*

Alumno: *Debemos de elevar el número de inversionistas que lleva cada uno, o sea 3, a una potencia y esa potencia será la semana que queremos calcular.*

En este punto se podrá considerar que el alumno alcanzó el nivel de Comprensión Formal, ya que es capaz de argumentar su respuesta.

Profesor: *¿Me pueden explicar eso sin usar palabras?*

Se espera que los alumnos planteen una expresión algebraica basándose en sus argumentos, tal como:

$$I = 3^n$$

Donde I es el número de inversionistas de esa semana y n es el número de semana.

En el momento en que los alumnos logren lo anterior se podría considerar que se ha alcanzado el nivel de comprensión Formal dentro de lo institucional.

Cabe destacar que desde un inicio los alumnos podrían utilizar las variables x o y, esto debido a que son las más comunes en las clases de matemáticas, pero también podrían ser otras variables.

3.4.6. Criterios para el análisis de resultados

Durante el desarrollo de la actividad se dará la recopilación de datos, mediante la recolección de los trabajos realizados por cada uno de los equipos. Para poder determinar si el alumno logró alcanzar cada nivel dentro de los niveles de comprensión que menciona la *Educación Matemática Realista* en su *Principio de Niveles* se tendrán las siguientes consideraciones:

3.5.6.1. Nivel Situacional

Que el alumno de la interpretación de la situación problema y el uso de estrategias vinculadas totalmente al contexto de la situación misma, planteando al menos una situación particular para la cantidad de inversionistas que estarían entrando a la empresa.

3.4.6.2. Nivel Referencial

Que el alumno recurra a representaciones o modelos gráficos para la cantidad de inversionistas y procedimientos personales que esquematizan el problema tal como la organización mediante tablas del conteo de los inversionistas.

3.4.6.3. Nivel General

Que el alumno logre la generalización mediante la reflexión sobre los patrones en los incrementos de la cantidad de inversionistas con respecto al incremento de semanas, pudiendo predecir otras situaciones particulares sin la necesidad de hacer esquemas para cada situación particular.

3.4.6.4. Nivel Formal

Que el alumno determine notaciones convencionales o trabaje con los procedimientos de manera argumentativa de la cantidad de inversionistas con respecto a la cantidad de semanas, es importante considerar que en la *Educación Matemática Realista* lo que se denomina como matemática formal no es necesariamente una notación con la que el alumno deba de relacionarse, sino a aquello que el alumno crea dentro de su razonamiento matemático que le da argumentos para generar una realidad matemática, la cual puede denominarse "formal" si permite al alumno desprenderse del contexto de donde partió para construir un modelo general.

3.5. Actividad “Rifa”

3.5.1. Situación problema

Se desea realizar una rifa para recaudar fondos para que la selección de futbol de la escuela asista al torneo estatal, el cual se realizara en el mes de junio en Ciudad Obregón, para poder asistir, cada integrante del equipo debe de reunir la cantidad de $3,000. Isidro, miembro de la selección, hará su propia rifa mediante el sistema de “rascaditos”, que consiste en vender números ocultos cuyo valor depende del número; en este sistema el comprador descubre un número y paga en pesos el número descubierto. Por ejemplo, si descubre un siete, paga siete pesos.

Isidro decide rifar un premio de $1000.00 en efectivo y en su hoja incluye solamente los números del 1 al 10, ¿Es suficiente con que venda esa cantidad de números? Si no es así ¿Cuántos números debe de vender para cubrir su necesidad?

La presentación de la situación problema se da bajo un contexto realista, la cual, siguiendo el *Principio de Realidad* de la *Educación Matemática Realista*, se considera permitirá a los alumnos, en un inicio, matematizar de una manera informal.

Para iniciar la actividad el profesor dará lectura a la situación problema.

3.5.2. Etapa 1. Nivel Situacional

La actividad dará inicio con la presentación de la situación problema por parte del profesor, esta será de manera informal, esta etapa estará dividida en dos sub etapas, primeramente, los alumnos trabajaran de manera individual y después en equipos, donde se realizará una discusión sobre las ideas que aparecieron en la etapa individual. Se espera que los alumnos, basándose en su experiencia, su sentido común y conocimientos informales comiencen a imaginar cuál es la mecánica de la rifa, como se venderán los boletos y cuál sería la ganancia obtenida por cada hoja de boletos vendida.

Después de la lectura, el profesor les solicita a los alumnos que en equipo analicen y platiquen la situación, para que por escrito den una explicación de cuál es la mecánica de la rifa.

Se espera que los alumnos planteen, primeramente, hacer la lista con los primeros diez números, es decir, una lista con los números del 1 al 10, donde podrán realizar la sumatoria de las cantidades, tal como se puede apreciar en la Tabla 3.11, para definir cuanta ganancia se obtendrá.

Número
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Tabla 3.11

Se puede considerar que, una vez que hayan conseguido obtener la ganancia acumulada por cada boleto vendido y la ganancia total por los primeros diez boletos que se proponen en la situación problema, los alumnos alcancen el nivel de Comprensión Situacional.

3.5.3. Etapa 2. Nivel Referencial

Una vez que se tenga comprensión de la situación, se espera que los alumnos empiecen a proponer, mediante la utilización de esquemas o símbolos o pictogramas, cantidades definidas de números y realicen las sumatorias de dichas cantidades, como, por ejemplo, la suma de los primeros 10 números naturales, ver Tabla 3.12. Esto en la *Educación Matemática Realista* se denomina “modelos de” ya que esta representación hace referencia sólo a una situación en particular.

Número	Ganancia
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55

Tabla 3.12

Para esto el profesor solicita que respondan las preguntas planteadas en la situación problema.

Profesor: *¿Es suficiente con que venda esa cantidad de números?*

Alumno: *No es suficiente.*

Profesor: *Si no es así ¿Cuántos números debe de vender para cubrir su necesidad?*

Como apoyo para responder a esta pregunta, el profesor realiza otra serie de preguntas.

Profesor: *¿Cuánto gana si vende un número?*

Alumno: *Un peso.*

Profesor: *¿Y si vende dos números?*

Alumno: *Tres pesos.*

Profesor: *¿Y si vende tres números?*

Alumno: *Seis pesos.*

Profesor: *¿Cuánto dinero va a ganar con cada número que aumente?*

Se espera que los alumnos amplíen en la tabla la cantidad de números y el acumulado, similar a lo que se observa en la Tabla 3.13, hasta llegar a la cantidad que cubra su necesidad, es decir, hasta 89 números.

Número	Ganancia
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
…	…
85	3655
86	3741
87	3828
88	3916
89	4005

Tabla 3.13

3.5.4. Etapa 3. Nivel General

Cuando cada equipo cuente con la información organizada en tablas, el profesor hará la solicitud a estos de mostrar sus propuestas al resto del grupo, con el fin de que todos aprecien los diferentes modelos propuestos, esperando que los alumnos logren entender que hay muchos más diferentes enfoques que se pudieran tener de una misma situación. A continuación, se realiza una comparación de los diferentes modelos presentados mediante una exposición ante el grupo, donde un representante de cada equipo argumenta su enfoque y estrategia y cómo fue que obtuvieron las ganancias para cada cantidad de boletos vendidos.

En esta etapa se seleccionará el modelo más recurrente, con el fin de homogenizar la clase.

Después de esto, el profesor se les solicita a los alumnos reflexionar en equipos, propiciando en ellos la búsqueda de características que puedan ser generalizables y que se puedan utilizar en situaciones particulares diferentes.

Para esta situación problema se puede esperar, por ejemplo, que los alumnos detecten que, si toman solamente los números impares y los colocan en orden ascendente, tal como se ve en la Tabla 3.14.

Orden	Número	Ganancia
1	1	1
2	3	6
3	5	15
4	7	28
5	9	45
6	11	66
7	13	91

Tabla 3.14

Y que, si multiplican el número por su posición en este orden, ver Tabla 3.15, obtendrán la ganancia para dicho número de boleto.

Orden	Número		Ganancia
1	1	1(1)	1
2	3	2(3)	6
3	5	3(5)	15
4	7	4(7)	28
5	9	5(9)	45
6	11	6(11)	66
7	13	7(13)	91

Tabla 3.15

En este mismo ejemplo, también se podría esperar que se percaten que su posición en el orden de números impares es la mitad de su consecutivo, es decir, el número 1 está en posición 1 y su consecutivo es el 2 y la mitad de 2 es 1, el número 3 está en posición 2 y su consecutivo es el 4 y la mitad de 4 es 2.

Siguiendo este mismo ejemplo, los alumnos podrían también detectar que, si agregan los números pares a la tabla, estos quedando en la posición de en medio de los números impares, su posición en el orden sería entonces la mitad de las posiciones de los números impares, ver Tabla 3.16.

Orden	Número		Ganancia
1	1	1(1)	1
	2		3
2	3	3(2)	6
	4		10
3	5	5(3)	15
	6		21
4	7	7(4)	28
	8		36
5	9	9(5)	45
	10		55
6	11	11(6)	66
	12		78
7	13	13(7)	91

Tabla 3.15

Quedando entonces su posición en el orden, en número decimal, tal como se puede apreciar en la tabla 3.16.

Orden	Número		Ganancia
1	1	1(1)	1
1.5	2		3
2	3	3(2)	6
2.5	4		10
3	5	5(3)	15
3.5	6		21
4	7	7(4)	28
4.5	8		36
5	9	9(5)	45
5.5	10		55
6	11	11(6)	66
6.5	12		78
7	13	13(7)	91

Tabla 3.16

Así, aplicando la misma multiplicación del número por su posición en este orden, obtendrán la ganancia para dicho número de boleto, ver Tabla 3.17.

Orden	Número		Ganancia
1	1	1(1)	1
1.5	2	2(1.5)	3
2	3	3(2)	6
2.5	4	4(2.5)	10
3	5	5(3)	15
3.5	6	6(3.5)	21
4	7	7(4)	28
4.5	8	8(4.5)	36
5	9	9(5)	45
5.5	10	10(5.5)	55
6	11	11(6)	66
6.5	12	12(6.5)	78
7	13	13(7)	91

Tabla 3.17

Se considera que el nivel de Comprensión General será alcanzado si los alumnos logran identifican al menos un patrón en el comportamiento de los acumulados en la venta de los boletos, esto a raíz de la exploración y reflexión de los modelos de las diferentes situaciones particulares presentadas, y que este patrón les ayude a predecir cuanto sería el acumulado para cualquier boleto sin la necesidad de realizar la tabla hasta dicho boleto, es aquí cuando se puede considerar que lograron generalizar, a esto en la *Educación Matemática Realista* se denomina como un “modelo para”, dicho de otra forma, que se puede utilizar para cualquier situación y no solo para una situación particular.

A continuación, el profesor preguntará por un número de boleto cercano al último boleto calculado al momento, por ejemplo.

Profesor: *¿Cuánto gana si vende 18 boletos?*

Se espera que los alumnos continúen utilizando la tabla para obtener el monto acumulado para este número de boletos, sin la necesidad de hacer la sumatoria, sino mediante el patrón que hayan detectado, ver Tabla 3.18.

Orden	Número		Ganancia
1	1	1(1)	1
1.5	2	2(1.5)	3
2	3	3(2)	6
2.5	4	4(2.5)	10
3	5	5(3)	15
3.5	6	6(3.5)	21
4	7	7(4)	28
4.5	8	8(4.5)	36
5	9	9(5)	45
5.5	10	10(5.5)	55
6	11	11(6)	66
6.5	12	12(6.5)	78
7	13	13(7)	91
7.5	14	14(7.5)	105
8	15	15(8)	120
8.5	16	16(8.5)	136
9	17	17(9)	153
9.5	18	18(9.5)	171

Tabla 3.18

De nueva cuenta, el profesor preguntará por un número de boleto, pero en esta ocasión por uno muy alejado del último calculado, por ejemplo.

Profesor: *¿Cuánto gana si vende 130 boletos?*

Se espera que con esta pregunta los alumnos observen que tendrían que hacer una tabla muy grande para llegar al resultado, procedimiento que resulta poco práctico. Se considera que esto estimulará en los alumnos la necesidad de formalizar el patrón que fue detectado.

3.5.5. Etapa 4. Nivel Formal

Ya que los alumnos logren obtener la cantidad de boletos que se requiere vender para alcanzar el monto mediante los patrones detectados, es decir, que hayan logrado generalizar los patrones que detectaron en estos modelos y con la ayuda del profesor, en el proceso de *Reinvención Guiada* de la *Educación Matemática Realista*, logren también demostrar su comprensión mediante la capacidad de manejar conceptos, tales como “patrón”, “variable” y “literal”, procedimientos o notaciones mediante expresiones algebraicas usuales en el bachillerato o un texto argumentativo o mediante un discurso.

Después de esto, el profesor preguntará.

Profesor: *¿Cómo se puede determinar cuánto dinero se recauda en cualquier cantidad de boletos?*

Alumno: *Debemos de multiplicar el número de boleto por la mitad del número que le sigue.*

En este punto se podrá considerar que el alumno alcanzó el nivel de Comprensión Formal, ya que es capaz de argumentar su respuesta.

Profesor: *¿Me pueden explicar eso sin usar palabras?*

Se espera que los alumnos planteen una expresión algebraica basándose en sus argumentos, tal como:

$$T = n(n + 1)/2$$

Donde T es la cantidad de dinero acumulado y n es el número de boleto.

3.5.6. Criterios para el análisis de resultados

Durante el desarrollo de la actividad se dará la recopilación de datos, mediante la recolección de los trabajos realizados por cada uno de los equipos. Para poder determinar si el alumno logró alcanzar cada nivel dentro de los niveles de comprensión que menciona la *Educación Matemática Realista* en su *Principio de Niveles* se tendrán las siguientes consideraciones:

3.5.6.1. Nivel Situacional

Que el alumno de la interpretación de la situación problema y el uso de estrategias vinculadas totalmente al contexto de la situación misma, planteando al menos una situación particular para la cantidad de boletos vendidos.

3.5.6.2. Nivel Referencial

Que el alumno recurra a representaciones o modelos gráficos para la cantidad de boletos y procedimientos personales que esquematizan el problema tal como la organización mediante tablas con la sumatorias del dinero recaudado.

3.5.6.3. Nivel General

Que el alumno logre la generalización mediante la reflexión sobre los patrones en los incrementos de boletos vendidos con respecto sumatoria del dinero recaudado, pudiendo predecir otras situaciones particulares sin la necesidad de hacer esquemas para cada situación particular.

3.5.6.4. Nivel Formal

Que el alumno determine notaciones convencionales o trabaje con los procedimientos de manera argumentativa de la cantidad de boletos con respecto al dinero recaudado, es importante considerar que en la *Educación Matemática Realista* lo que se denomina como matemática formal no es necesariamente una notación con la que el alumno deba de relacionarse, sino a aquello que el alumno crea dentro de su razonamiento matemático que le da argumentos para generar una realidad matemática, la cual puede denominarse "formal" si permite al alumno desprenderse del contexto de donde partió para construir un modelo general.

Capítulo 4. Análisis

En este capítulo se presenta el análisis del trabajo realizado por los alumnos y el profesor durante el desarrollo de las actividades didácticas diseñadas con base en las consideraciones teóricas de la *Educación Matemática Realista* y en los propósitos señalados en los planes y programas vigentes en el bachillerato para el aprendizaje del álgebra. Estas actividades se llevaron a cabo en un bachillerato en la ciudad de Hermosillo Sonora México con varios grupos de alumnos de primer grado durante el año 2019.

4.1. Descripción de la puesta en escena

Cada actividad dio inicio con una presentación informal de la situación problema por parte del profesor. En las primeras implementaciones, las instrucciones para la realización de la actividad se dieron por escrito, mientras que en las últimas se dieron de manera verbal, estas fueron, integrase en equipos de 4 personas, nombrar un secretario, quien estaría encargado de elaborar el informe del trabajo desarrollado por el equipo, también se hizo la solicitud de no barrar nada, aunque se considerara un error.

Después de esto y ya conformados los equipos, el profesor, entrega y da lectura al cuadernillo de la actividad, el cual, solo cuenta con la redacción de la situación problema, el resto del cuadernillo estaba conformado por hojas en blanco para el desarrollo de la misma.

4.2. Análisis de las actividades

Este análisis proyecta cómo se identificaron y caracterizaron, en las actividades, los principios de la *Educación Matemática Realista*, tanto en la interacción entre los mismos alumnos, como en la interacción entre alumnos con el profesor. Se hace énfasis en que los principios podrían observarse o no.

Como se mencionó en capítulos anteriores, en las primeras actividades participaron grupos completos, lo cual resultó en una cantidad grande de equipos. En esos casos, para este análisis se tomaron 3 equipos, los cuales se consideran representativos de cada una de ellas.

4.2.1. Principio de Actividad

Con base en las evidencias encontradas, tales como, la utilización de tablas y la presentación de soluciones informales, podemos observar que esta actividad generó en los alumnos una producción matemática, ya que, que los alumnos detectaron patrones o relaciones entre las variables involucradas. Destacan la presentación de soluciones en términos de expresiones algebraicas por parte de algunos de los equipos.

4.2.2. Principio de Realidad

Los diferentes modelos presentados por los equipos nos muestran que la presentación de la situación problema, permitió que los alumnos lograran imaginarla como real, también nos permite apreciar los diferentes enfoques en los que puede ser tratada una misma situación problema, dependiendo de los diversos conocimientos y experiencias entre los alumnos.

4.2.3. Principio de Reinvención

La postura por parte del profesor al momento de conducir la clase y al presentar la actividad pudo tener relevancia en este proceso, ya que se en ciertos momentos se percibieron interacciones con los alumnos, donde estos no tenían frente a ellos a la persona que lo sabe todo, sino más bien a un compañero que tenía ideas diferentes a las de ellos, este proceder da confianza a los alumnos al momento de desarrollar la actividad, confianza que a su vez genera un impulso en los mismos para generar los procesos matemáticos necesarios que los llevan a niveles superiores. Destaca cómo los alumnos comenzaron a hacer sus propias matemáticas al obtener resultados que satisfacen las preguntas planteadas en la situación problema.

4.2.4. Principio de Interacción

Se considera que el trabajo en equipos, por parte de los alumnos, les permitió compartir sus experiencias, conocimientos e ideas con sus compañeros y con el profesor, con esto se generó un ambiente propicio para la actividad matemática, nutrido de conceptos, con diferentes enfoques personales los cuales permitieron aumentar sus niveles de aprendizaje, donde se hicieron notorias la fluidez y la libertad con la que los alumnos presentaban sus ideas.

4.2.5. Principio de Interconexión

Dada la naturaleza y los objetivos de este trabajo, el cual se enfoca en la detección de patrones y su representación algebraica, no se detectaron ejes curriculares diferentes al álgebra.

4.2.6. Principio de Niveles

A continuación, observaremos parte de la evidencia de cómo es que cada uno de los 11 equipos, seleccionadas para el análisis, transitan entre los diferentes niveles de comprensión.

4.2.6.1. Equipo 1

El equipo 1 participó en la actividad “Lotes” en la primera puesta en escena.

Presentan un primer modelo particular de la situación problema, ver Figura 4.1, donde proponen, aleatoriamente, una cantidad de lotes, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 1, mediante el uso de pictogramas para representar el terreno y la distribución de los lotes.

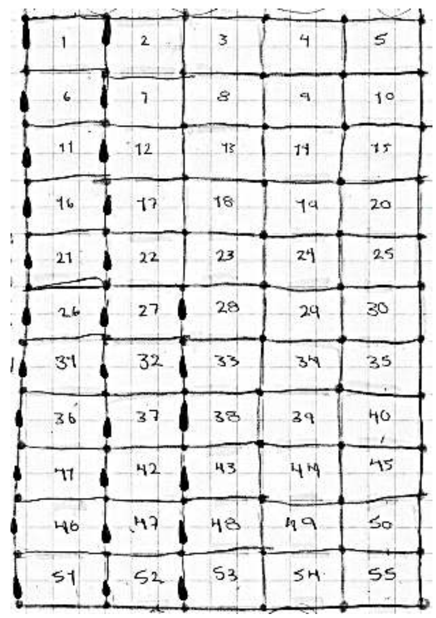


Figura 4.1

En la Figura 4.2 podemos observar como este equipo no realizó el conteo de todos los postes, sino que solo contaron una de las filas de postes y lo multiplicaron por la cantidad de columnas de postes, con lo cual obtuvieron un resultado que satisface la pregunta planteada en la situación problema, este procedimiento podría indicar que este equipo está avanzando con rapidez en sus procesos de generalización matemáticos ya que manifiesta la existencia de regularidades.

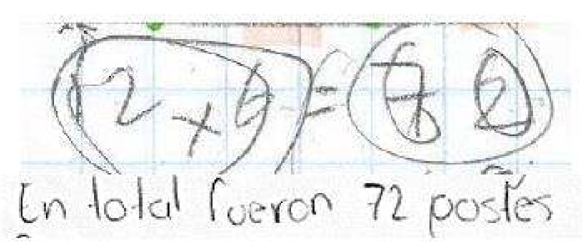


Figura 4.2

Al momento de plantear 3 situaciones particulares diferentes del primer modelo presentado mostraron incongruencias entre todas sus propuestas, ver Figura 4.3, esto nos indica que los alumnos no están inmersos en la situación problema.

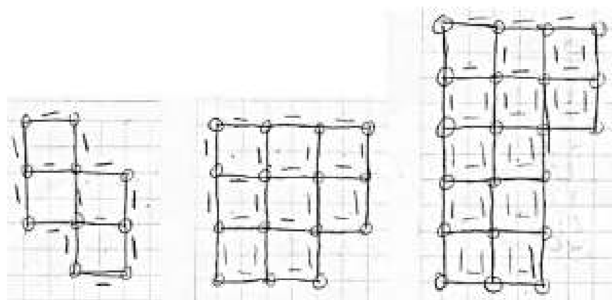


Figura 4.3

Estas incongruencias entre sus diferentes propuestas no les permite relacionar la información obtenida, lo cual les dificulta el análisis en la búsqueda de patrones y posterior generalización, Figura 4.4.

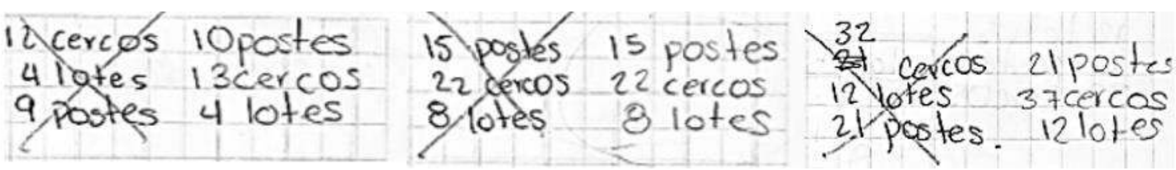


Figura 4.4

Por lo anterior, no logran obtener ninguna expresión.

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar el terreno, en la Figura 4.5 podemos apreciar la descripción a detalle que hacen del mismo, incluso, con información que no existe en la situación problema, sino que proviene de su imaginación.

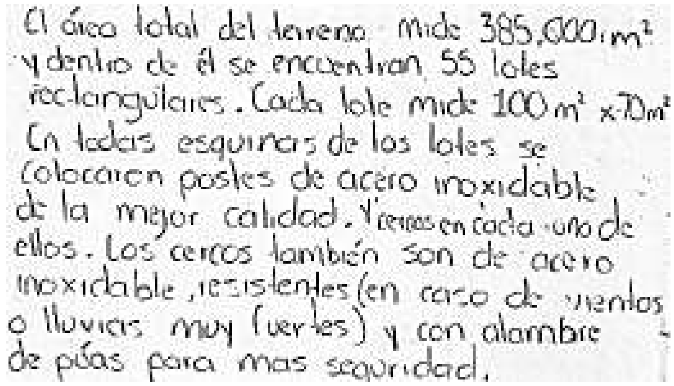

El área total del terreno mide 385,000 m^2
y dentro de él se encuentran 55 lotes
rectangulares. Cada lote mide 100 m^2 x 70 m^2
En todas esquinas de los lotes se
colocaron postes de acero inoxidable
de la mejor calidad. Y cercos en cada uno de
ellos. Los cercos también son de acero
inoxidable, resistentes (en caso de vientos
o lluvias muy fuertes) y con alambre
de púas para mas seguridad.

Figura 4.5

Lograron alcanzar parcialmente *Nivel Referencial*, la evidencia de esto la podemos apreciar en la Figura 4.1, donde se observa el dibujo del terreno con la distribución de lotes y los postes, así como en la Figura 4.3, donde muestran diferentes configuraciones en la distribución de los lotes y donde el terreno no es rectangular.

Debido a lo anterior, no lograron alcanzar el *Nivel General*, ya que la información que se presentó no mostraba ninguna relación y por consecuencia no hubo un patrón que detectar.

Por último, al carecer de todo lo anterior fue imposible para el equipo alcanzar el *Nivel Formal*.

Matematización lograda

El equipo logró una matematización horizontal, porque logró representar, tanto verbalmente como con el uso de pictogramas la situación problema. Incluso establecieron dimensiones, áreas y perímetros concretos para los lotes.

El equipo 1 no obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical.

4.2.6.2. Equipo 2

El equipo 2 participó en la actividad "Lotes" en la segunda puesta en escena.

Presentan un primer modelo particular de la situación problema, ver Figura 4.6, donde proponen, aleatoriamente, una cantidad de lotes, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 2, mediante el uso de pictogramas para representar el terreno y la distribución de los lotes.

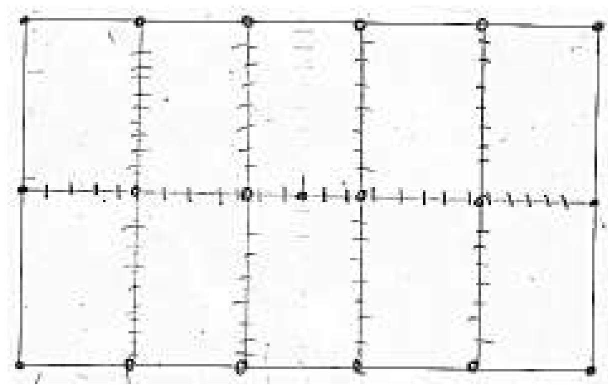


Figura 4.6

En la Figura 4.7 podemos observar que obtuvieron un resultado que, para esta situación particular, satisface la pregunta planteada en la situación problema, dicho resultado se obtuvo mediante el conteo de todos los lotes y los postes, tal como se contempló en el diseño de la actividad.

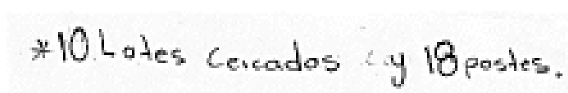


Figura 4.7

Al momento de plantear 3 situaciones particulares diferentes del primer modelo presentado, ver Figura 4.8, dichos planteamientos conservan la misma idea con respecto al primero, lo cual nos indica que los alumnos del equipo 2 están inmersos en la situación.

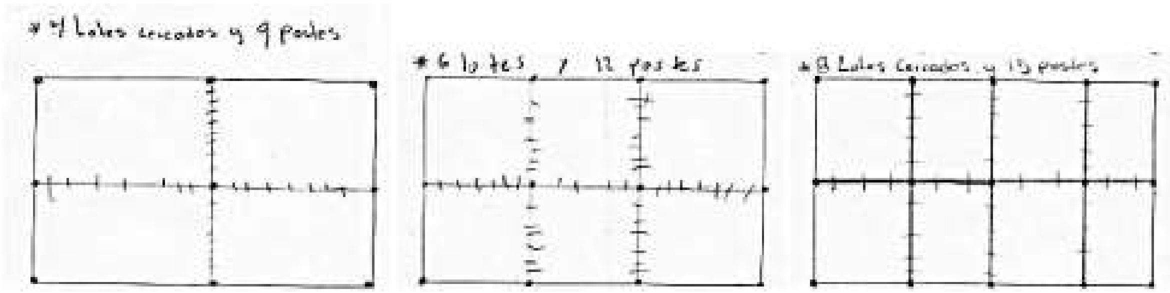


Figura 4.8

De estos modelos de diferentes situaciones particulares, obtienen suficientes datos los cuales logran organizar en una tabla, ver Figura 4.9, como para poder iniciar un análisis en busca de patrones.

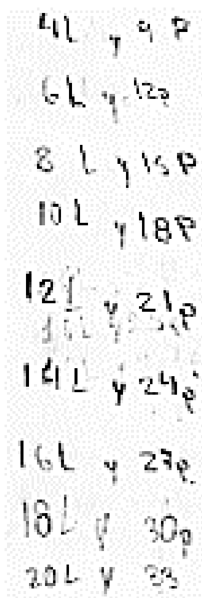


Figura 4.9

En la figura 4.10 se observa el argumento utilizado por el equipo 2 en relación a su análisis de los datos obtenidos, donde lograron detectar un patrón en las variaciones de las cantidades de los lotes y los postes y logran expresarlo verbalmente, es decir, lo generalizan.

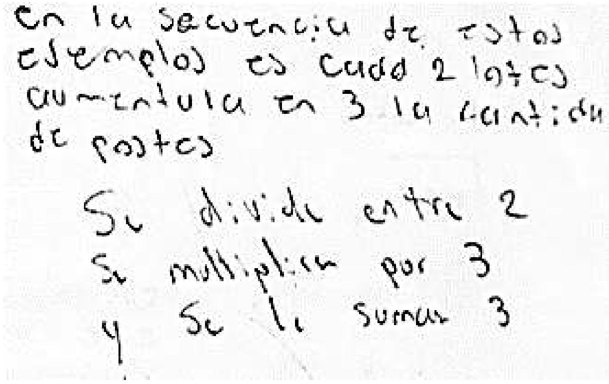


Figura 4.10

De esta expresión verbal de dicha generalización del patrón detectado, el equipo 2 logra obtener una expresión algebraica, ver Figura 4.11.

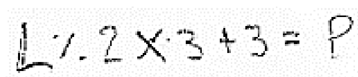


Figura 4.11

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar el terreno y representarlo mediante un pictograma.

Lograron alcanzar parcialmente *Nivel Referencial*, esto lo podemos apreciar en las representaciones que realizaron del terreno con diferentes distribuciones de los lotes, los cuales hacen referencia a diferentes situaciones particulares de la situación problema.

Alcanzaron el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de las diferentes representaciones les permitió detectar un patrón en los incrementos de los lotes y de los postes, el cual lograron generalizar y expresar de forma verbal.

De igual manera se logró alcanzar el *Nivel Formal*, ya que fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado, el cual daba respuesta a la situación problema en cualquier situación particular.

Matematización lograda

El equipo 2 logró una matematización horizontal, ya que logró plantear diferentes representaciones de la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 2 obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical, debido a que fueron capaces de abandonar el método de conteo para obtener la información requerida, esto, mediante la utilización de tablas. De estas tablas los alumnos desprenden una esquematización de la situación problema, la cual les brindó los recursos necesarios para presentar soluciones informales y formales dentro de lo institucional.

4.2.6.3. Equipo 3

El equipo 3 participó en la actividad “Lotes” en la segunda puesta en escena.

Presentan un primer modelo particular de la situación problema, ver Figura 4.12, donde proponen, aleatoriamente, una cantidad de lotes, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 3, mediante el uso de pictogramas para representar el terreno y la distribución de los lotes.

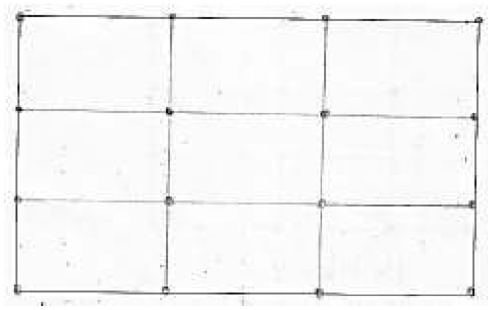


Figura 4.12

En la Figura 4.13 podemos observar que obtuvieron un resultado que, para esta situación particular, satisface la pregunta planteada en la situación problema, dicho resultado se obtuvo mediante el conteo de todos los lotes y los postes, tal como se contempló en el diseño de la actividad.

Figura 4.13

Al momento de plantear 3 situaciones particulares diferentes del primer modelo presentado mostraron incongruencias con respecto al primer modelo planteado, pero manteniendo entre consistencia entre sí, ver Figura 4.14, esto podría ser un indicio de que los alumnos del equipo 3 no están totalmente inmersos en la situación problema.

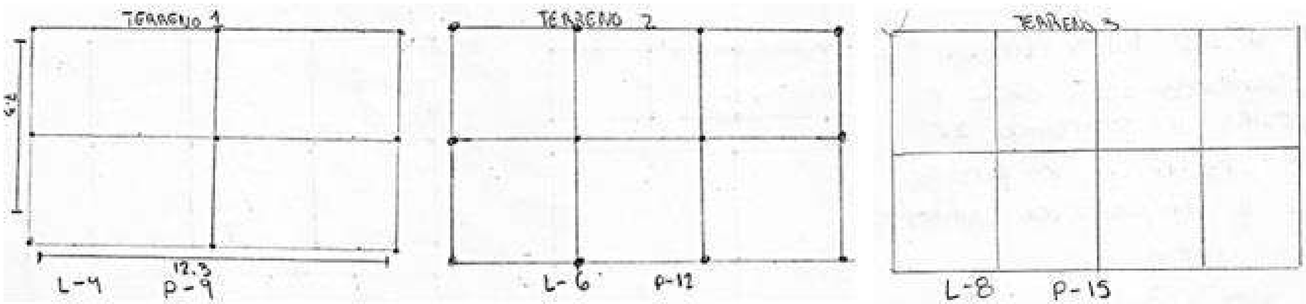


Figura 4.14

Dejando a un lado el primer modelo propuesto, de estos 3 nuevos modelos de diferentes situaciones particulares, obtienen suficientes datos los cuales logran organizar en una tabla, ver Figura 4.15, como para poder iniciar un análisis en busca de patrones.

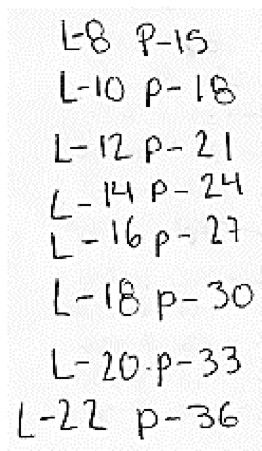


Figura 4.15

En la figura 4.16 se observa el argumento utilizado por el equipo 3 en relación a su análisis de los datos obtenidos, donde lograron detectar un patrón en las variaciones de las cantidades de los lotes y los postes y logran expresarlo verbalmente, es decir, lo generalizan.

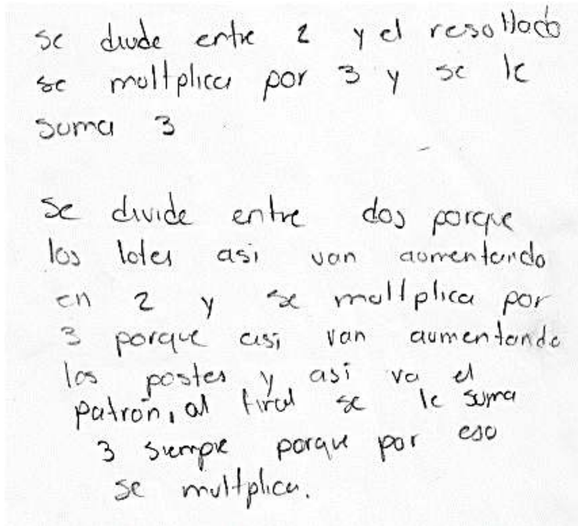


Figura 4.16

De esta expresión verbal de dicha generalización del patrón detectado, el equipo 3 logra obtener una expresión algebraica, ver Figura 4.17.

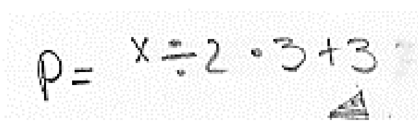


Figura 4.17

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar el terreno y representarlo mediante un pictograma.

Lograron alcanzar parcialmente *Nivel Referencial*, esto lo podemos apreciar en las representaciones que realizaron del terreno con diferentes distribuciones de los lotes, los cuales hacen referencia a diferentes situaciones particulares de la situación problema.

Alcanzaron el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de las diferentes representaciones les permitió detectar un patrón en los incrementos de los lotes y de los postes, el cual lograron generalizar y expresar de forma verbal.

De igual manera se logró alcanzar el *Nivel Formal*, ya que fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado, el cual daba respuesta a la situación problema en cualquier situación particular.

Matematización lograda

El equipo 3 logró una matematización horizontal, ya que logró plantear diferentes representaciones de la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 3 obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical, debido a que fueron capaces de abandonar el método de conteo para obtener la información requerida, esto, mediante la utilización de tablas. De estas tablas los alumnos desprenden una esquematización de la situación problema, la cual les brindó los recursos necesarios para presentar soluciones informales y formales dentro de lo institucional.

4.2.6.4. Equipo 4

El equipo 4 participó en la actividad “Empresa” en la primera puesta en escena.

En la Figura 4.18 se observa la respuesta al primer cuestionamiento planteado en la situación problema, este argumento podría indicar que los alumnos del equipo 4 están inmersos en la situación.

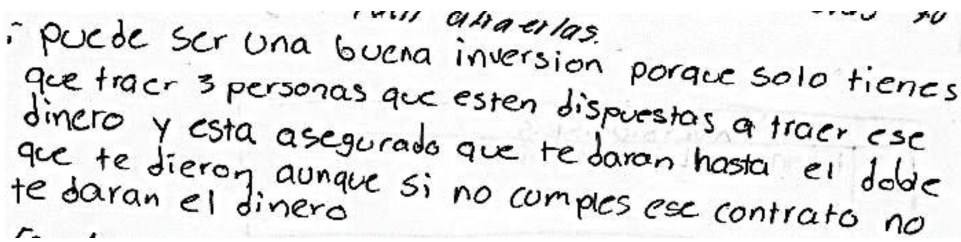


Figura 4.18

Presentan un primer modelo particular de la situación problema, ver Figura 4.19, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 4, mediante el uso de pictogramas para representar las semanas y la cantidad de inversionistas que estarían ingresando en cada una.

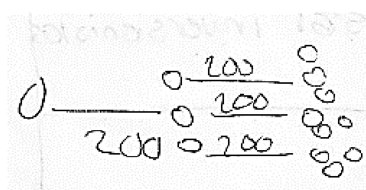


Figura 4.19

En la Figura 4.20 podemos observar que obtuvieron un resultado que, para esta situación particular, satisface la pregunta planteada en la situación problema, dicho resultado se obtuvo mediante el conteo de los inversionistas, en el pictograma utilizado, tal como se contempló en el diseño de la actividad.

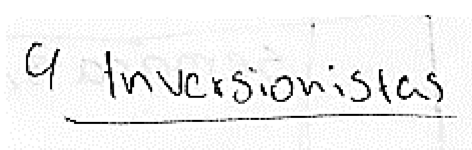


Figura 4.20

De este modelo propuesto, donde se presentan 3 diferentes situaciones particulares, obtienen suficientes datos los cuales logran organizar en una tabla, ver Figura 4.21, como para poder iniciar un análisis en busca de patrones.

Semana	Inversionista
0	1
1	3
2	9

Figura 4.21

En la figura 4.22 se observa el argumento utilizado por el equipo 4 en relación a su análisis de los datos obtenidos, donde lograron detectar un patrón en las variaciones de las cantidades de los inversionistas con respecto a las semanas y logran expresarlo verbalmente, es decir, lo generalizan, destaca la utilización de operaciones aritméticas.

poro la semana 1, 3
para la semana 2 3X3=9
para la semana 3 se multiplica 3X3X3
para la semana 4 se multiplica 3X3X3X3=81
para la semana 5 se multiplica 3X3X3X3X3
para la semana 6 se multiplica 3X3X3X3X3
para la semana 7 se multiplica 3X3X3X3X3X3 X3
para la semana 8 se multiplica 3X3X3X3X3X3 X3X3

Figura 4.22

De esta expresión verbal de dicha generalización del patrón detectado, el equipo 4 logra obtener una expresión algebraica, ver Figura 4.23.

$$3^x = y$$

Figura 4.23

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar la situación problema lo cual se reflejan mediante el argumento dado en la Figura 4.18.

Lograron alcanzar *Nivel Referencial*, esto lo podemos apreciar en las representaciones que realizaron mediante un pictograma de cada semana con las diferentes cantidades de inversionistas, los cuales hacen referencia a diferentes situaciones particulares de la situación problema.

Alcanzaron el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de las diferentes representaciones les permitió detectar un patrón en los incrementos de los inversionistas con respecto a las diferentes semanas, el cual lograron generalizar y expresar de forma verbal.

Se logró alcanzar el *Nivel Formal*, ya que fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado, el cual daba respuesta a la situación problema en cualquier situación particular.

Matematización lograda

El 4 equipo logró una matematización horizontal, ya que logró plantear diferentes representaciones de la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 4 obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical, debido a que fueron capaces de abandonar el método de conteo para obtener la información requerida, esto, mediante la utilización de tablas. De estas tablas los alumnos desprenden una esquematización de la situación problema, la cual les brindó los recursos necesarios para presentar soluciones informales y formales dentro de lo institucional.

4.2.6.5. Equipo 5

El equipo 5 participó en la actividad “Empresa” en la primera puesta en escena.

En la Figura 4.24 se observa la respuesta al primer cuestionamiento planteado en la situación problema, este argumento podría indicar que los alumnos del equipo 5 están inmersos en la situación.

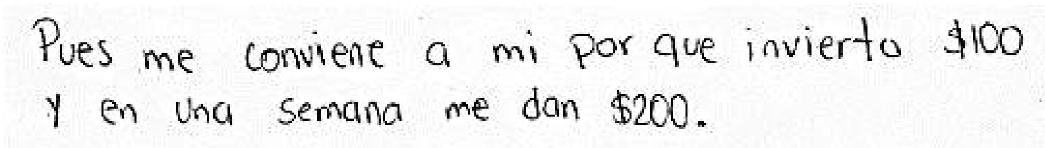


Figura 4.24

Presentan un primer modelo particular de la situación problema, ver Figura 4.25, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 5, mediante el uso de pictogramas para representar las semanas y la cantidad de inversionistas que estarían ingresando en cada una.

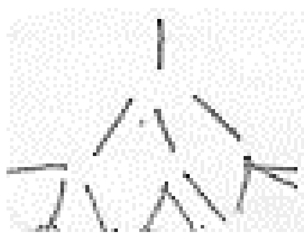


Figura 4.25

En la Figura 4.26 podemos observar que obtuvieron un resultado que, para esta situación particular, satisface la pregunta planteada en la situación problema, dicho resultado se obtuvo mediante el conteo de los inversionistas, en el pictograma utilizado, tal como se contempló en el diseño de la actividad.

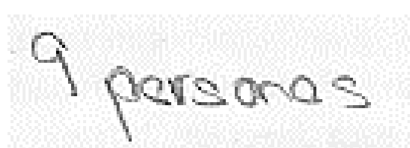


Figura 4.26

De este modelo propuesto, donde se presentan 3 diferentes situaciones particulares, obtienen suficientes datos los cuales logran organizar en una tabla, ver Figura 4.27, como para poder iniciar un análisis en busca de patrones.

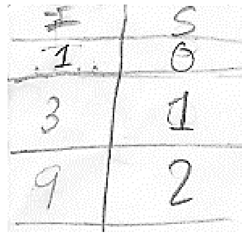


Figura 4.27

En la figura 4.28 se observa el argumento utilizado por el equipo 5 en relación a su análisis de los datos obtenidos, donde lograron detectar un patrón en las variaciones de las cantidades de los inversionistas con respecto a las semanas y logran expresarlo verbalmente, es decir, lo generalizan, destaca la utilización de operaciones aritméticas.

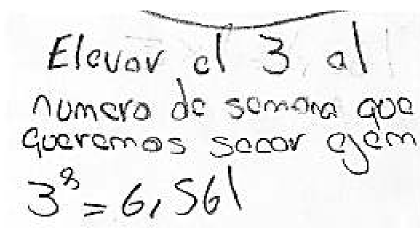


Figura 4.28

De esta expresión verbal de dicha generalización del patrón detectado, el equipo 5 logra obtener una expresión algebraica, ver Figura 4.29.

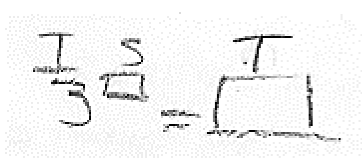


Figura 4.29

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar la situación problema lo cual se reflejan mediante el argumento dado en la Figura 4.24.

Lograron alcanzar *Nivel Referencial*, esto lo podemos apreciar en las representaciones que realizaron mediante un pictograma de cada semana con las diferentes cantidades de inversionistas, los cuales hacen referencia a diferentes situaciones particulares de la situación problema.

Alcanzaron el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de las diferentes representaciones les permitió detectar un patrón en los incrementos de los inversionistas con respecto a las diferentes semanas, el cual lograron generalizar y expresar de forma verbal.

Se logró alcanzar el *Nivel Formal*, ya que fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado, el cual daba respuesta a la situación problema en cualquier situación particular.

Matematización lograda

El equipo 5 logró una matematización horizontal, ya que logró plantear diferentes representaciones de la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 5 obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical, debido a que fueron capaces de abandonar el método de conteo para obtener la información requerida, esto, mediante la utilización de tablas. De estas tablas los alumnos desprenden una esquematización de la situación problema, la cual les brindó los recursos necesarios para presentar soluciones informales y formales dentro de lo institucional.

4.2.6.6. Equipo 6

El equipo 6 participó en la actividad “Empresa” en la segunda puesta en escena. Este equipo está compuesto por 3 alumnas que también participaron en la segunda puesta en escena de la primera actividad, aunque en diferentes equipos.

En la Figura 4.30 se observa la respuesta al primer cuestionamiento planteado en la situación problema, este argumento podría indicar que los alumnos del equipo 6 están inmersos en la situación.

Entrada es igual a 100 pesos, al terminar la semana es un pago de un valor igual a 200 pesos. Al final de la semana se necitara reclutar 3 personas mas. por persona.

Figura 4.30

El equipo 6 no presentó un primer modelo particular de la situación problema mediante el uso de pictogramas, en la Figura 4.31 podemos observar cómo tratan de presentan su modelo mediante un esquema argumentativo, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 6, ya que representan las semanas, la cantidad de inversionistas y la cantidad de dinero que estaría entrando a la empresa.

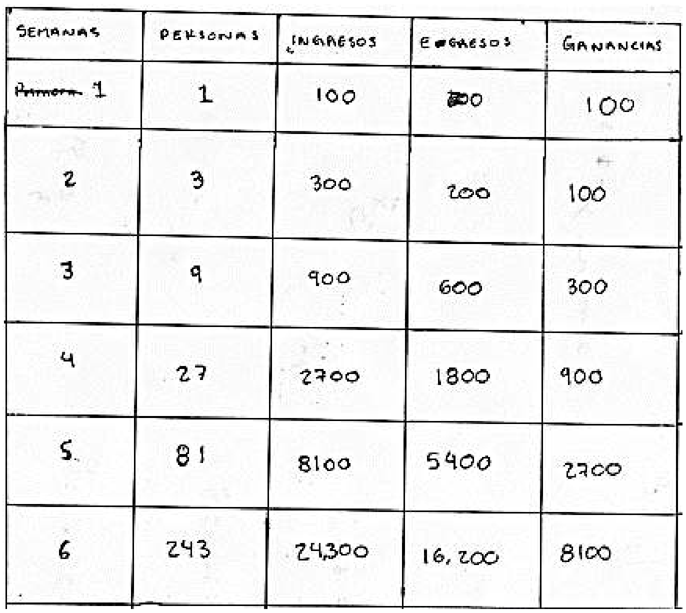
Primera Semana;
Ganacia = 200
Cantidad que entra = 100 por persona.
Perdida: 200 por persona
Cantidad de personas que entran: +1

Segunda semana
Ganacia =
Cantidad de dinero que entra = 100 por persona => 300
Perdida =
Cantidad de personas que entran por semana = 3

Tercera Semana

Figura 4.31

Se puede observar que el esquema argumentativo presentado en la Figura 4.31 quedó inconcluso, esto debido a que el equipo decide generar y organizar directamente la información en una tabla, ver Figura 4.32, y de esta manera poder iniciar un análisis en busca de patrones. Se puede asumir que esta decisión por parte del equipo 6 es debido a la experiencia adquirida previamente en su participación en la primera actividad.



SEMANAS	PERSONAS	INGRESOS	EGRESOS	GANANCIAS
~~Primera~~ 1	1	100	[illegible]	100
2	3	300	200	100
3	9	900	600	300
4	27	2700	1800	900
5	81	8100	5400	2700
6	243	24,300	16,200	8100

Figura 4.32

Este equipo no presenta un argumento verbal en relación a su análisis de los datos obtenidos en cambio en la figura 4.33 se observa las operaciones aritméticas realizadas para poder obtener las cantidades requeridas por la situación problema, donde lograron detectar un patrón en las variaciones de las cantidades de los inversionistas con respecto a las semanas y logran expresarlo aritméticamente, es decir, lo generalizan. Este procedimiento podría indicar que este equipo está avanzando con rapidez en sus procesos de generalización matemáticos ya que manifiesta la existencia de regularidades.

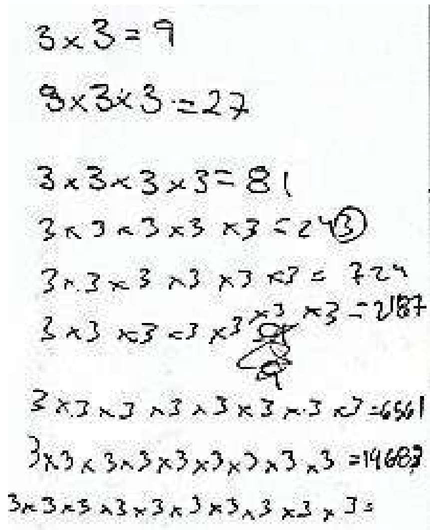


Figura 4.33

De esta expresión aritmética de dicha generalización del patrón detectado, el equipo 6 logra obtener una expresión algebraica, ver Figura 4.34.

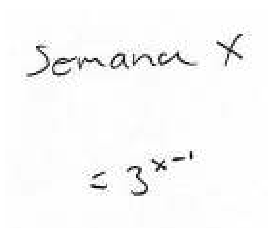


Figura 4.34

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar la situación problema lo cual se reflejan mediante el argumento dado en la Figura 4.30.

Aparentemente lograron saltar el *Nivel Referencial*, ya que no necesitaron realizar representaciones mediante el uso de pictogramas.

Alcanzaron el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de las diferentes representaciones aritméticas, esto les permitió detectar un patrón en los incrementos de los inversionistas con respecto a las diferentes semanas, el cual lograron generalizar y expresar de forma aritmética.

Se logró alcanzar el *Nivel Formal*, ya que fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado, el cual daba respuesta a la situación problema en cualquier situación particular.

Matematización lograda

El equipo 6 logró sobrepasar rápidamente la matematización horizontal, ya que no necesito de plantear la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 6 obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical, debido a que fueron capaces de abandonar el método de conteo para obtener la información requerida, esto, mediante la utilización de tablas. De estas tablas los alumnos desprenden una esquematización de la situación problema, la cual les brindó los recursos necesarios para presentar soluciones informales y formales dentro de lo institucional.

4.2.6.7. Equipo 7

El equipo 7 participó en la actividad "Empresa" en la segunda puesta en escena.

En la Figura 4.35 se observa la respuesta al primer cuestionamiento planteado en la situación problema, este argumento podría indicar que los alumnos del equipo 7 están inmersos en la situación.

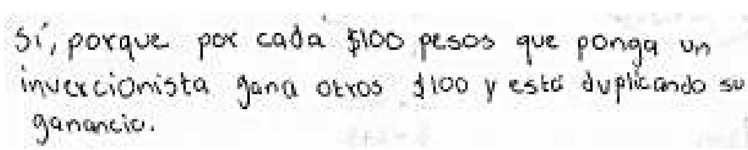
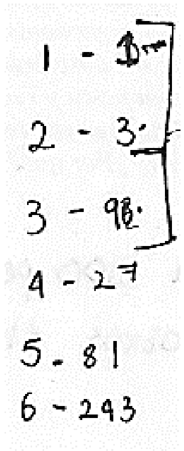

Sí, porque por cada $100 pesos que ponga un invercionista gana otros $100 y esta duplicando su ganancia.

Figura 4.35

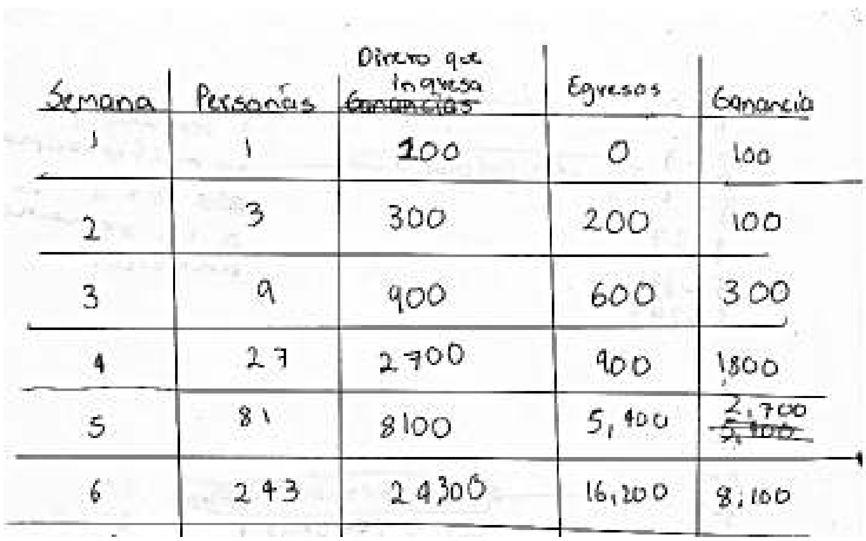
El equipo 7 no presentó un primer modelo particular de la situación problema mediante el uso de pictogramas, en la Figura 4.36 podemos observar cómo lo presentan directamente mediante una tabla, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 7, ya que representan las semanas y la cantidad de inversionistas que estaría entrando a la empresa.



1 - 1
2 - 3
3 - 9
4 - 27
5 - 81
6 - 243

Figura 4.36

En la Figura 4.37 se observa otro formato de la tabla la cual contiene más información y de esta manera poder iniciar un análisis en busca de patrones. Cabe resaltar que todos los alumnos que forman el equipo 7 están en su primera participación en las actividades.



Semana	Personas	Dinero que ingresa ~~Ganancias~~	Egresos	Ganancia
1	1	100	0	100
2	3	300	200	100
3	9	900	600	300
4	27	2700	900	1800
5	81	8100	5,400	2,700 ~~5,400~~
6	243	24300	16,200	8,100

Figura 4.37

Este equipo no presenta un argumento verbal en relación a su análisis de los datos obtenidos en cambio en la figura 4.38 se observa las operaciones aritméticas realizadas para poder obtener las cantidades requeridas por la situación problema, donde lograron detectar un patrón en las variaciones de las cantidades de los inversionistas con respecto a las semanas y logran expresarlo aritméticamente, es decir, lo generalizan. Este procedimiento podría indicar que este equipo está avanzando con rapidez en sus procesos de generalización matemáticos ya que manifiesta la existencia de regularidades.

$3 - 3 \times 3 = 9 \quad 3^2$

$4 - 3 \times 3 \times 3 = 27 \quad 3^3$

$5 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \quad 3^4$

$6 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243 \quad 3^5$

$7 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

$8 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$

$9 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$

$10 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^9$

Figura 4.38

De esta expresión aritmética de dicha generalización del patrón detectado, el equipo 7 logra obtener una expresión algebraica, ver Figura 4.39.

semana $x \qquad 3^{x-1}$

Figura 4.39

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar la situación problema lo cual se reflejan mediante el argumento dado en la Figura 4.35.

Aparentemente lograron saltar el *Nivel Referencial*, ya que no necesitaron realizar representaciones mediante el uso de pictogramas.

Alcanzaron el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de las diferentes representaciones aritméticas, esto les permitió detectar un patrón en los incrementos de los inversionistas con respecto a las diferentes semanas, el cual lograron generalizar y expresar de forma aritmética.

Se logró alcanzar el *Nivel Formal*, ya que fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado, el cual daba respuesta a la situación problema en cualquier situación particular.

Matematización lograda

El equipo 7 logró sobrepasar rápidamente la matematización horizontal, ya que no necesito de plantear la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 7 obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical, debido a que fueron capaces de abandonar el método de conteo para obtener la información requerida, esto, mediante la utilización de tablas. De estas tablas los alumnos desprenden una esquematización de la situación problema, la cual les brindó los recursos necesarios para presentar soluciones informales y formales dentro de lo institucional.

4.2.6.8. Equipo 8

El equipo 8 participó en la actividad “Rifa” en la primera puesta en escena.

En la Figura 4.40 se observa la respuesta a los cuestionamientos planteados en la situación problema, estos argumentos podrían indicar que los alumnos del equipo 8 están inmersos en la situación.

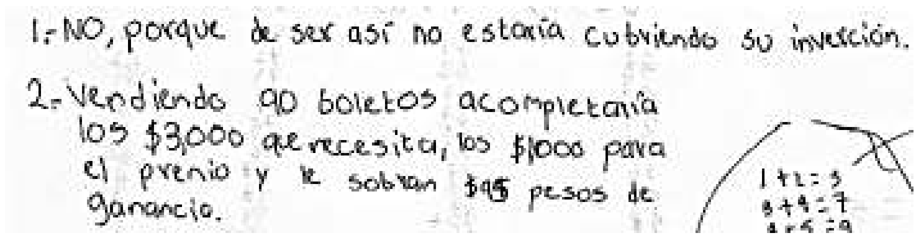


Figura 4.40

El equipo 8 presentó un primer modelo particular de la situación problema mediante un esquema aritmético, ver Figura 4.41, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 8, ya que representan las ganancias que se obtendrían por cada carpeta de boletos vendida y de esta manera poder iniciar un análisis en busca de patrones.

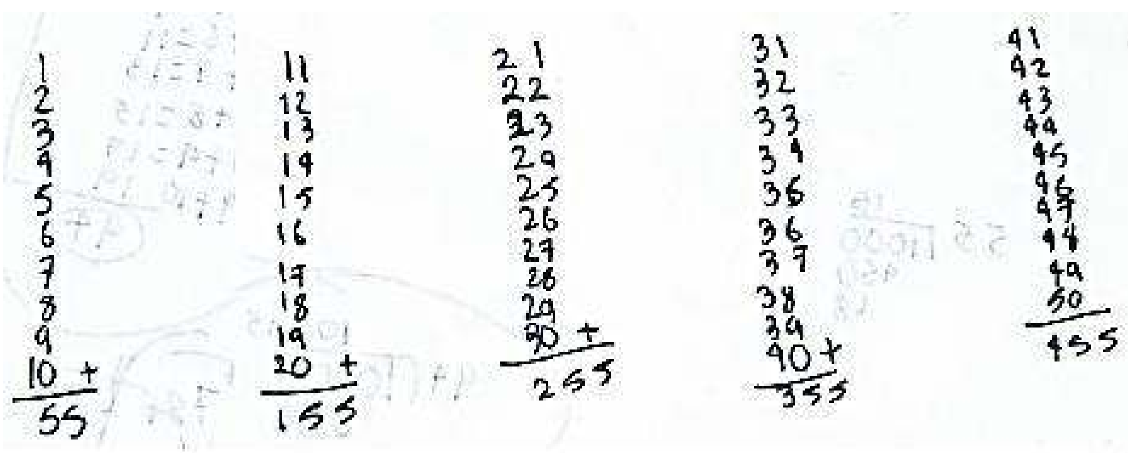


Figura 4.41

En la figura 4.42 se observa el argumento utilizado por el equipo 8 en relación a su análisis de los datos obtenidos, donde lograron detectar un patrón en los incrementos de las ganancias obtenidas por cada carpeta de boletos, es decir, lo generalizan.

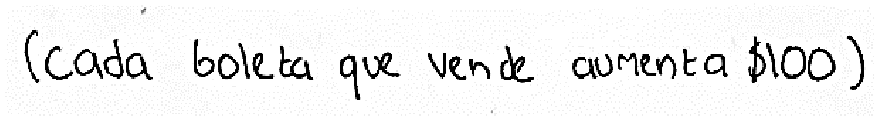


Figura 4.42

En la Figura 4.43 se observa otro formato de la tabla la cual contiene información extendida, siguiendo el patrón detectado tras el análisis.

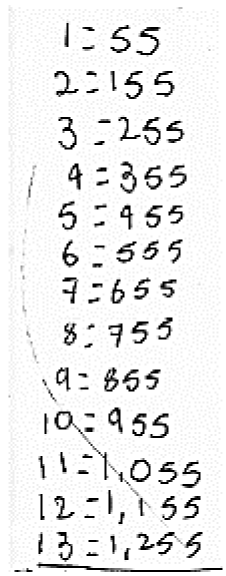


Figura 4.43

El equipo 8, a pesar de haber detectado un patrón en los incrementos de las ganancias, no logra establecer una expresión algebraica que satisfaga dicho patrón.

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar la situación problema lo cual se reflejan mediante el argumento dado en la Figura 4.40.

Lograron alcanzar *Nivel Referencial*, esto lo podemos apreciar en las representaciones que realizaron de las ganancias por carpeta de boletos vendida, las cuales hacen referencia a diferentes situaciones particulares de la situación problema.

Alcanzaron el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de las diferentes representaciones aritméticas, esto les permitió detectar un patrón en los incrementos en las ganancias, el cual lograron generalizar y expresar de forma verbal.

No se logró alcanzar el *Nivel Formal*, ya que no fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado.

Matematización lograda

El equipo 8 logró sobrepasar rápidamente la matematización horizontal, ya que no necesito de plantear la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 8 obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical, esto debido a que fueron capaces de realizar directamente una esquematización progresiva de la situación problema, mediante la utilización de tablas y la presentación de soluciones informales.

4.2.6.9. Equipo 9

El equipo 9 participó en la actividad “Rifa” en la primera puesta en escena.

En la Figura 4.44 se observa la respuesta a los cuestionamientos planteados en la situación problema, estos argumentos podrían indicar que los alumnos del equipo 9 están inmersos en la situación.

No es suficiente porque no es la cantidad que el necesita acumular.

Figura 4.44

El equipo 9 presentó un primer modelo particular de la situación problema mediante un esquema aritmético, ver Figura 4.45, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 9, ya que representan las ganancias que se obtendrían por una carpeta de boletos vendida y de esta manera poder iniciar un análisis en busca de patrones.

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55

Figura 4.45

En la figura 4.46 se observa cómo el equipo 9 en relación a su análisis de los datos obtenidos, no lograron detectar un patrón en los incrementos de las ganancias obtenidas en una carpeta de boletos, es decir, no logran generalizar.

·Si en una cartera con 10 numeros acumula $55,
En una con 30 acumula $465.
55+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30
=465

465+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+46+
47+48+49+50+51+52+53+54+55+56+57+58+59+60=1830

1830+61+62+63+64+65+66+67+68+69+
70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+
80+81+82+83+84+85+86+87+88+89+
90. =4095.

Figura 4.46

En la Figura 4.47 se observa otro formato de la tabla la cual contiene información extendida, en esta tabla lograron detectar parcialmente un patrón, que, en el caso de los números impares, los acumulados eran el resultado de multiplicar ese número por otro número en orden ascendente.

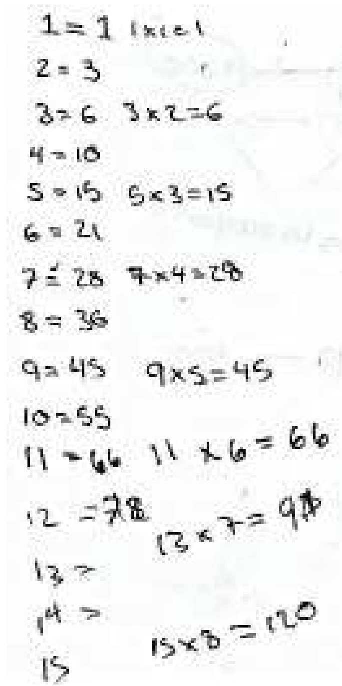


Figura 4.47

El equipo 9, a pesar de haber detectado parcialmente un patrón en los incrementos de las ganancias, no logra establecer una expresión algebraica que satisfaga dicho patrón.

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar la situación problema lo cual se reflejan mediante el argumento dado en la Figura 4.44.

Lograron alcanzar *Nivel Referencial*, esto lo podemos apreciar en las representaciones que realizaron de las ganancias por una carpeta de boletos vendida, las cuales hacen referencia a una situación particular de la situación problema.

No lograron alcanzar el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de una representación aritmética, esto les permitió detectar parcialmente un patrón en los incrementos en las ganancias, el cual no lograron generalizar ni expresar de forma verbal.

Por último, al carecer de lo anterior fue imposible para el equipo alcanzar el *Nivel Formal*.

Matematización lograda

El equipo 9 logró sobrepasar la matematización horizontal, ya que no necesito de plantear la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 9 no obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical.

4.2.6.10. Equipo 10

El equipo 10 participó en la actividad “Rifa” en la primera puesta en escena.

En la Figura 4.48 se observa la respuesta a los cuestionamientos planteados en la situación problema, estos argumentos podrían indicar que los alumnos del equipo 10 están inmersos en la situación.

Figura 4.48

El equipo 10 presentó un primer modelo particular de la situación problema mediante un esquema aritmético, ver Figura 4.49, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 10, ya que representan las ganancias que se obtendrían por una carpeta de boletos vendida y de esta manera poder iniciar un análisis en busca de patrones.

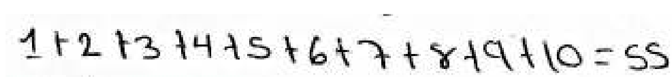


Figura 4.49

En la figura 4.50 se observa cómo el equipo 10 en relación a su análisis de los datos obtenidos, no lograron detectar un patrón en los incrementos de las ganancias obtenidas en una carpeta de boletos, es decir, no logran generalizar.

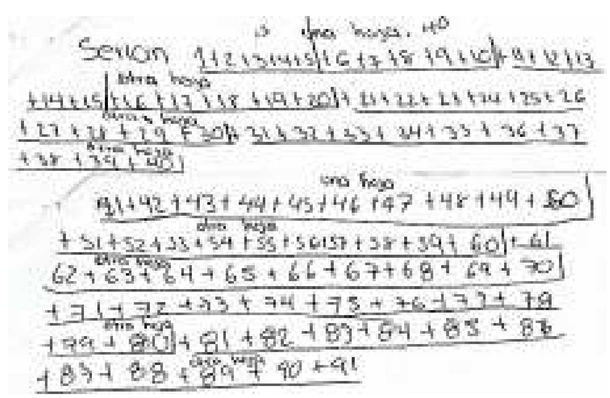


Figura 4.50

En la Figura 4.51 se observa otro formato de la tabla la cual contiene información organizada, en esta tabla lograron tampoco lograron detectar ningún patrón.

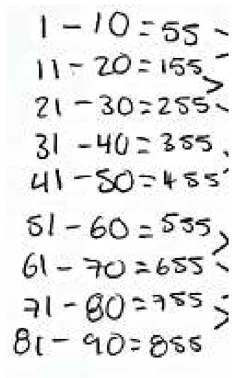


Figura 4.51

Por lo anterior, el equipo 10 no logró obtener ninguna expresión.

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar la situación problema lo cual se reflejan mediante el argumento dado en la Figura 4.48.

Lograron alcanzar *Nivel Referencial*, esto lo podemos apreciar en las representaciones que realizaron de las ganancias por una carpeta de boletos vendida, las cuales hacen referencia a una situación particular de la situación problema.

No lograron alcanzar el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de una representación aritmética, no les permitió detectar ningún un patrón en los incrementos en las ganancias.

Por último, al carecer de lo anterior fue imposible para el equipo alcanzar el *Nivel Formal*.

Matematización lograda

El equipo 10 logró sobrepasar la matematización horizontal, ya que no necesito de plantear la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 10 no obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical.

4.2.6.11. Equipo 11

El equipo 11 participó en la actividad "Rifa" en la segunda puesta en escena.

En la Figura 4.52 se observa la respuesta al cuestionamiento planteado en la situación problema, este argumento podrían indicar que los alumnos del equipo 11 están inmersos en la situación.


números, ¿Cuál es la mínima cantidad de números debe de tener la lista para cubrir su necesidad? 89

Figura 4.52

El equipo 11 presentó un primer modelo particular de la situación problema mediante un esquema aritmético, ver Figura 4.53, en este modelo se manifiesta una matematización de una manera informal por parte del equipo 11, ya que representan las ganancias que se obtendrían por una carpeta de boletos vendida y de esta manera poder iniciar un análisis en busca de patrones.

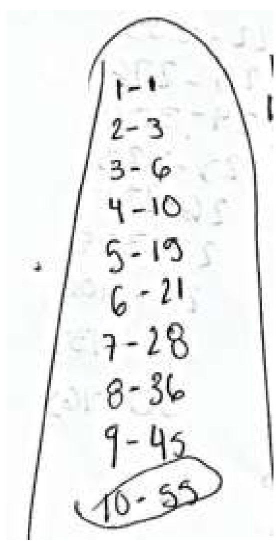


Figura 4.53

En la figura 4.54 se observa cómo el equipo 10 en relación a su análisis de los datos obtenidos, no lograron detectar un patrón en los incrementos de las ganancias obtenidas en una carpeta de boletos, es decir, no logran generalizar.

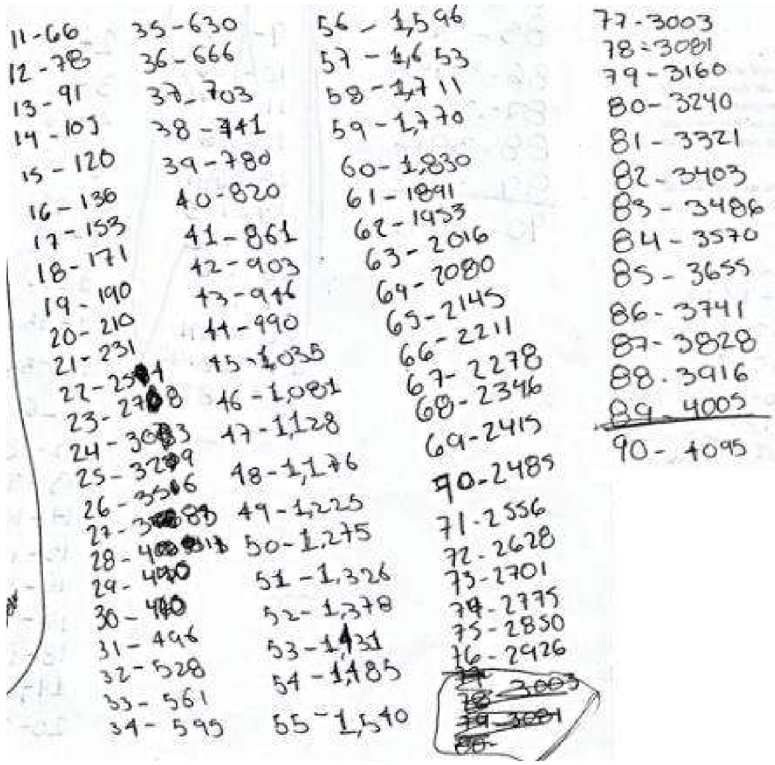


Figura 4.54

Por lo anterior, el equipo 11 no logró obtener ninguna expresión.

Niveles de comprensión alcanzados por el equipo

Lograron alcanzar *Nivel Situacional*, ya que lograron imaginar la situación problema lo cual se reflejan mediante la respuesta a la pregunta planteada en la situación problema, ver Figura 4.52.

Lograron alcanzar *Nivel Referencial*, esto lo podemos apreciar en las representaciones que realizaron de las ganancias por una carpeta de boletos vendida, las cuales hacen referencia a una situación particular de la situación problema.

No lograron alcanzar el *Nivel General*, el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de una representación aritmética, no les permitió detectar ningún un patrón en los incrementos en las ganancias.

Por último, al carecer de lo anterior fue imposible para el equipo alcanzar el *Nivel Formal*.

Matematización lograda

El equipo 11 logró sobrepasar la matematización horizontal, ya que no necesito de plantear la situación problema mediante el uso de pictogramas.

El equipo 11 no obtuvo los elementos necesarios para lograr obtener una matematización vertical.

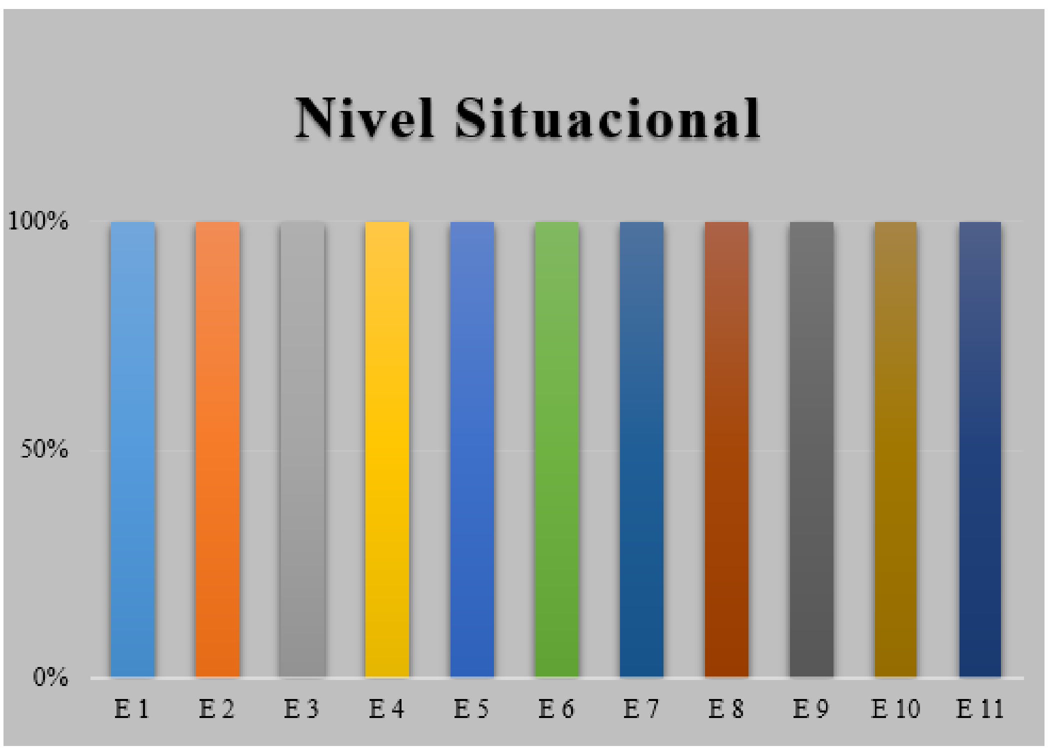
4.3. Resumen

La estructuración del diseño de actividades propuesto se realizó basándose en el *Principio de Niveles* de la *Educación Matemática Realista*. A continuación, se presenta un resumen de los niveles de comprensión alcanzados por los equipos.

4.3.1. Nivel Situacional

En el *Nivel Situacional* el alumno interpreta la situación problema y aplica estrategias relacionadas al contexto de la situación misma. Y apoyándose en su experiencia, su sentido común y sus conocimientos informales logra identificar y describir los elementos matemáticos que existen en dicha situación problema, esto les permite descubrir lo matemático que hay en ella.

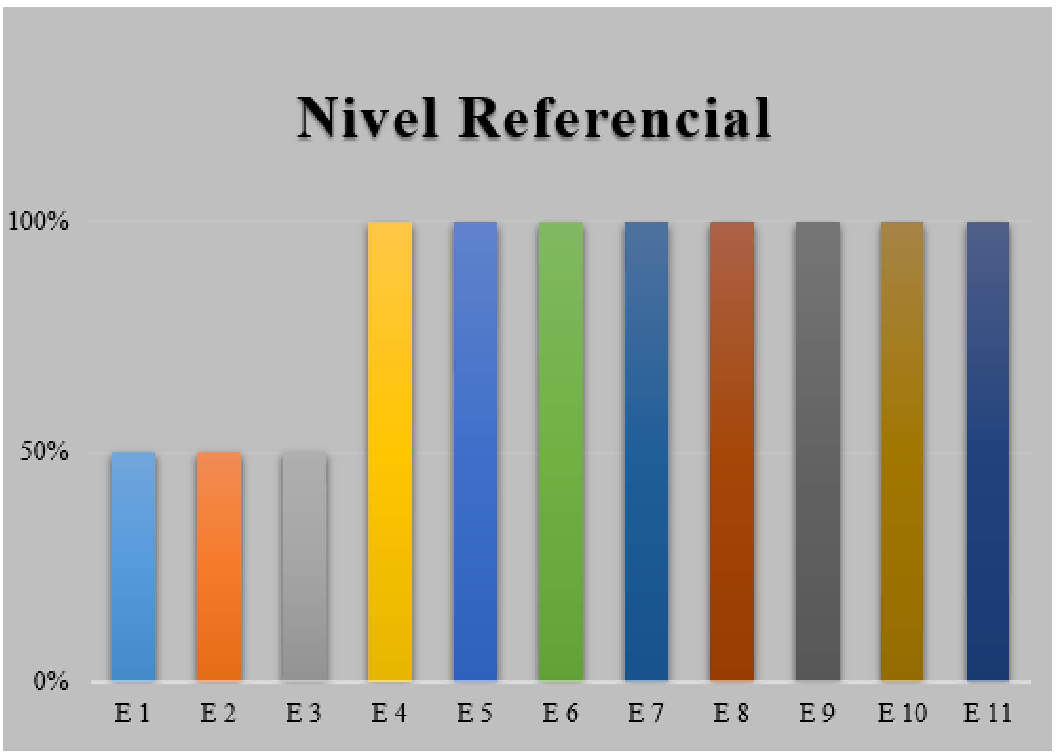
La siguiente gráfica muestra el grado, en el que los diferentes equipos, lograron situarse en este nivel de comprensión.



4.3.2. Nivel Referencial

En este nivel el alumno inicia el proceso de reflexión y análisis, a este proceso se le denomina matematización vertical, de esta forma los alumnos empiezan a organizar y modelar la situación en forma de pictogramas, descripciones, conceptos, graficas, tablas, etc., en este nivel estos modelos de denominan “modelos de” pues solo esquematizan particularmente la situación problema en la que se está trabajando.

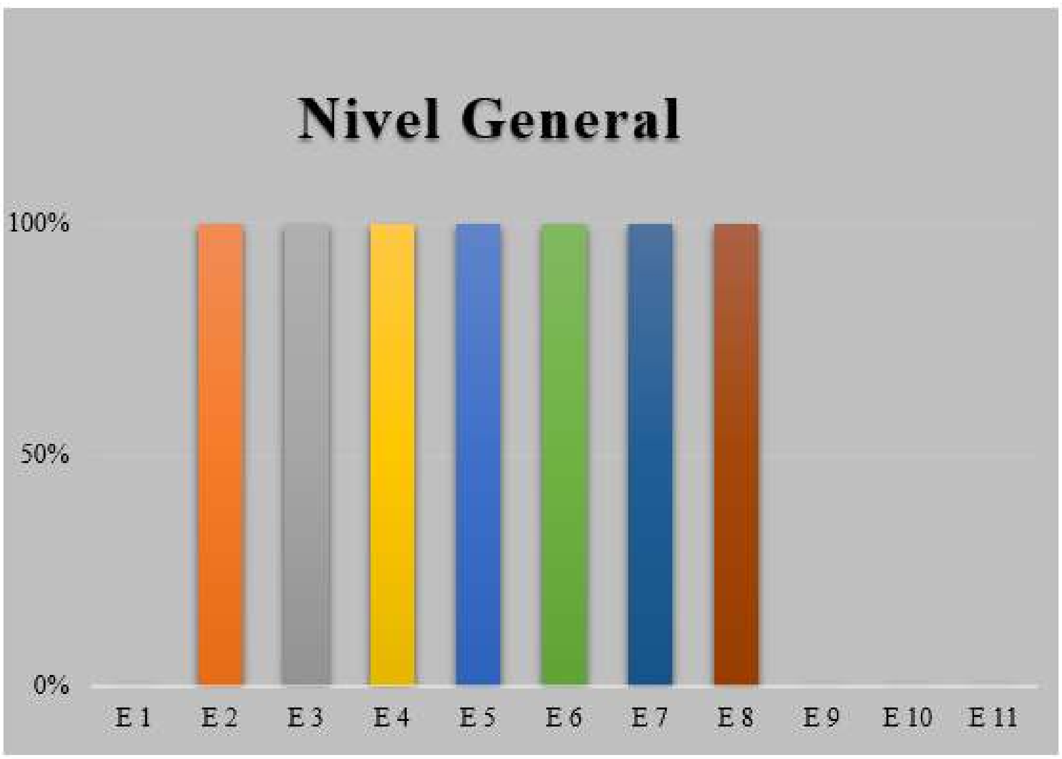
La siguiente gráfica muestra el grado, en el que los diferentes equipos, lograron situarse en este nivel de comprensión.



4.3.3. Nivel General

En el *Nivel General* continua el proceso de matematización vertical y se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización sobre los modelos que surgieron previamente. Mediante la reflexión el alumno detecta aspectos matemáticos en la situación problema los cuales pueden ser generalizables, es decir, el alumno sobrepasa el contexto de la situación problema y obtiene elementos para generar modelos matemáticos los cuales pueden ser empleados para resolver situaciones problemas semejantes a la situación original, conocidos como “modelos para”.

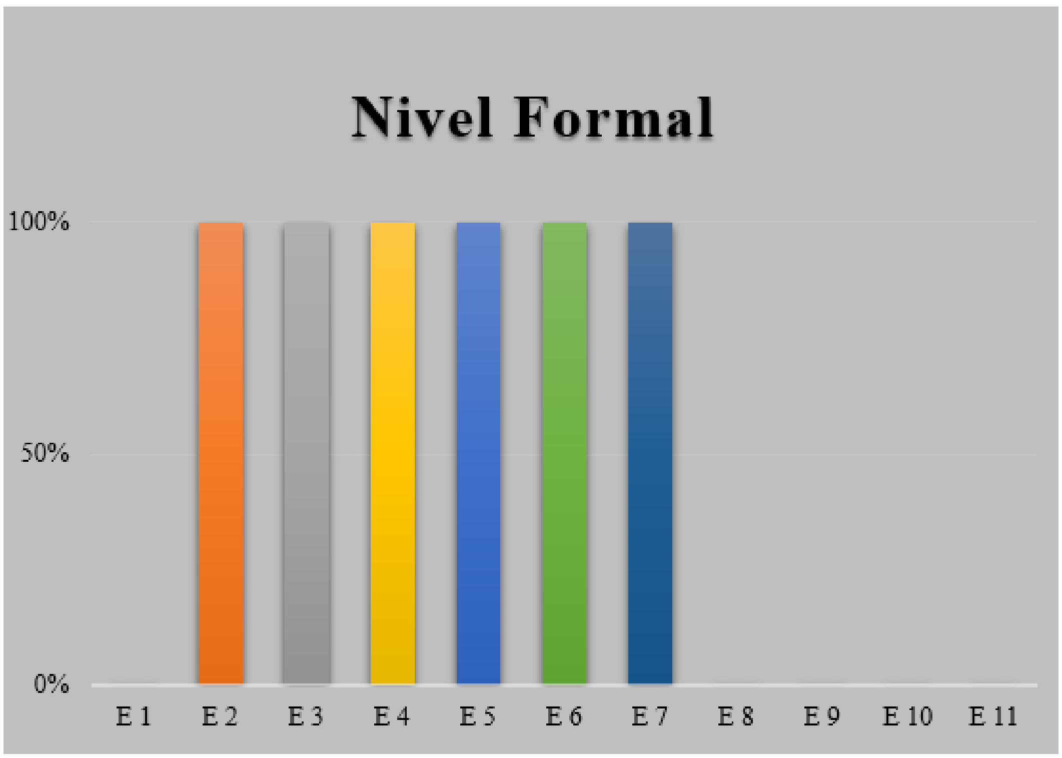
La siguiente gráfica muestra el grado, en el que los diferentes equipos, lograron situarse en este nivel de comprensión.



4.3.4. Nivel Formal

En el *Nivel Formal* el alumno logra expresar el modelo matemático obtenido, mediante el uso comprensivo de procedimientos y notaciones convencionales, adecuados de la matemática, o bien un argumento descriptivo de los conceptos y procedimientos derivados del modelo matemático.

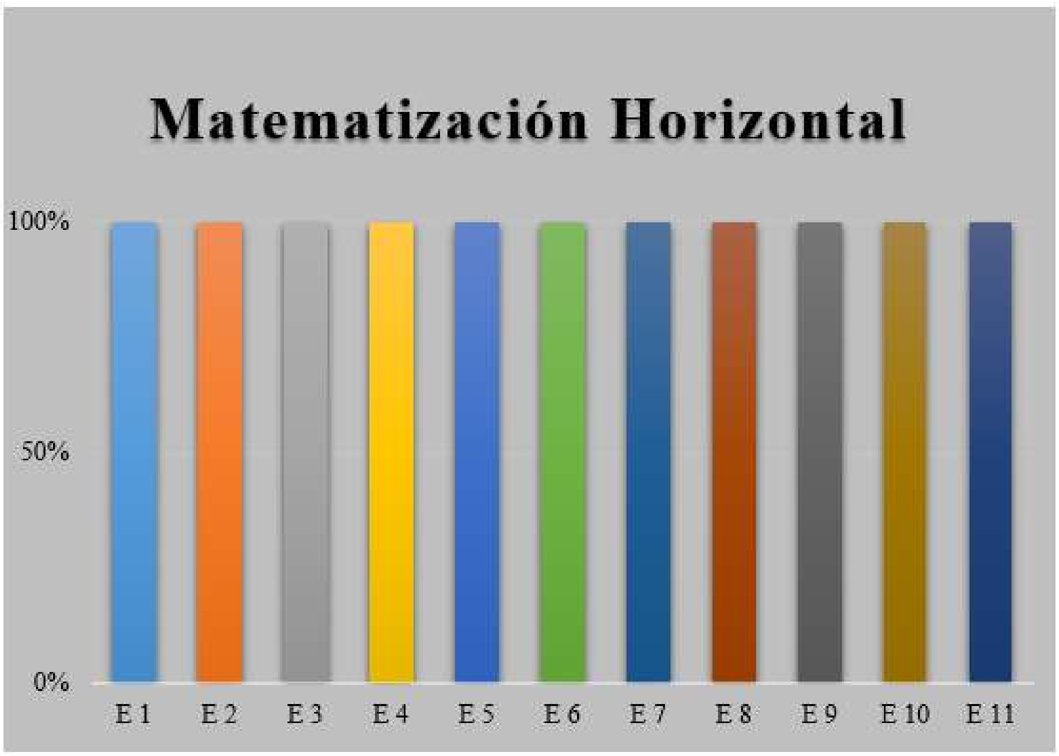
La siguiente gráfica muestra el grado, en el que los diferentes equipos, lograron situarse en este nivel de comprensión.



4.3.5. Matematización Horizontal

La matematización horizontal consiste en que los alumnos conviertan una situación problema en un problema matemático, donde los mismos propongan herramientas matemáticas con base en su intuición, observación, sentido común, aproximación empírica y experimentación inductiva, para organizar y resolver dicha situación problema.

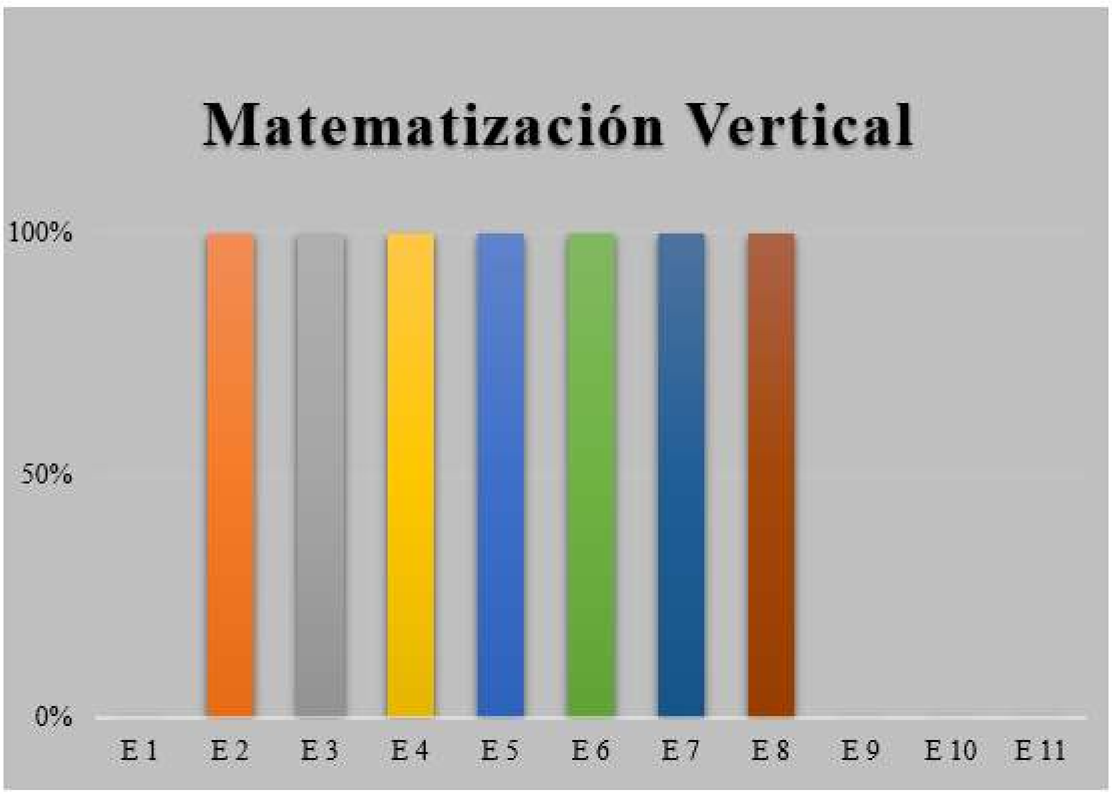
La siguiente gráfica muestra el grado, en el que los diferentes equipos, lograron matematizar horizontalmente.



4.3.6. Matematización Vertical

La matematización vertical consiste en que, ya dentro del sistema matemático, el alumno realice un proceso de reorganización mediante estrategias de reflexión, generalización, esquematización y simbolización.

La siguiente gráfica muestra el grado, en el que los diferentes equipos, lograron matematizar verticalmente.



4.4. Desarrollo de competencias

Como se declaró previamente, en el presente trabajo se considera que la modelación matemática, desarrollada bajo los principios de la Educación Matemática Realista, podría contribuir al desarrollo de algunas de las competencias genéricas y disciplinares enunciadas en Marco Curricular Común. A continuación, se muestra una serie de ejemplos donde se considera que, de acuerdo con la evidencia, los principios de la *Educación Matemática Realista* son una herramienta eficaz para el impulso de dicho desarrollo.

4.4.1. Competencias Genéricas

Se estima que el *Principio de Reinvención* favoreció el desarrollo del atributo "*Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades*", de la competencia genérica 1, "*Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue*", esto se puede apreciar en la interacción que se presentó entre el profesor y los alumnos durante cada actividad, la cual permitió que los alumnos fueran conscientes que durante la resolución de una situación, se pueden presentar procesos que no favorezcan dicha resolución, mas sin embargo, existe en ellos la capacidad de replantear sus ideas con el fin de llegar al objetivo esperado. Esto creó en los alumnos confianza en sí mismos, que a su vez generó un impulso en ellos para llevan a niveles superiores sus procesos matemáticos, ver Figura 4.55.

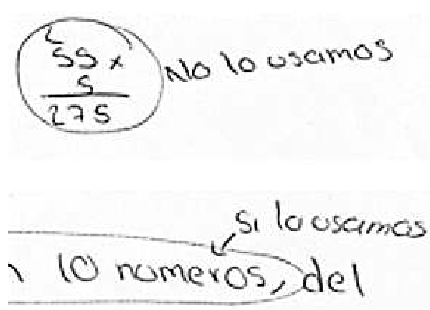


Figura 4.55

Para el caso de la competencia genérica 8, "*Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos*", se considera que el *Principio de Interacción* contribuyó a la promoción de su atributo "*Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva*", teniendo en cuenta que se trabajó en equipos, esto permitió que se generaran debates entre sus integrantes, debates que llevaron a la reflexión, lo cual, a su vez les permitió llegar a niveles más elevados de comprensión, ver Figura 4.56.

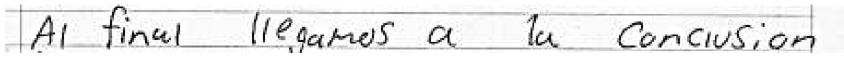
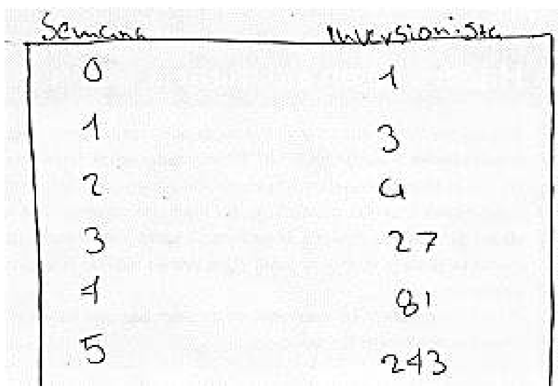


Figura 4.56

4.4.2. Competencias Disciplinares

El *Principio de Actividad* pudo haber contribuido a promover la competencia disciplinar 1 "*Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales*". En la Figura 4.57 se aprecia como los alumnos lograron representar en una tabla, una situación problema presentada en un texto, en esto se refleja que los alumnos están interpretando y organizando partes de la realidad.



Semana	Inversionista
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

Figura 4.57

Así mismo, esta tabla es una herramienta que permitió a los alumnos analizar y comprender esta interpretación, de la cual se desprende una actividad matemática que resultó en la presentación de soluciones, Ver Figura 4.58.

Figura 4.58

Se considera que la competencia disciplinar 3 "*Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales*", fue promovida por el *Principio de Realidad*, esta consideración se sustenta en las interpretaciones algebraicas presentadas por los alumnos, ver figura 4.59, de las diferentes representaciones generadas por ellos mismos.

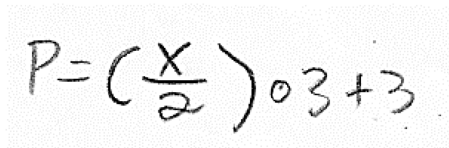


Figura 4.59

El *Principio de Niveles* podría haber ayudado a promover la competencia disciplinar 8 "*Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos*", esto debido a que, en el tránsito por los diferentes niveles de comprensión que componen este principio, los alumnos lograron interpretar el contexto de una situación problema, la cual modelaron en forma de pictogramas, descripciones y tablas, donde mediante la reflexión detectaron aspectos matemáticos inherentes a la situación misma, aspectos que finalmente fueron expresado mediante notaciones convencionales de las matemáticas.

Epílogo

Tal como se manifestó en capítulos anteriores, el interés de este trabajo se centra en las interrogantes que los alumnos frecuentemente tienen con respecto a la aplicación de los conocimientos matemáticos adquiridos en clase en una situación cotidiana, de su entorno cercano, o que esté dentro de lo que su imaginación acepte como real. Así también dimos a conocer información referente a la problemática existente en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.

En este sentido, la aportación de este trabajo con respecto a lo antes mencionado, consiste en una propuesta didáctica que promueve, en los alumnos, la habilidad de generalización mediante el reconocimiento de patrones en situaciones problemáticas que pueden ser consideradas reales y que a su vez cumplan con al menos una de las competencias que contempla el Marco Curricular Común de la Reforma Integral de la Educación Media Superior. Por otra parte, la *Educación Matemática Realista* nos brindó las herramientas necesarias para la adaptación del diseño de las actividades.

En cada uno de los capítulos que constituyen el presente trabajo se detallaron los aspectos principales del mismo, por lo cual, se considera lo más adecuado terminarlo con algunas conclusiones sobre los contenidos más relevantes que fueron expuestos. Por lo anterior, se presentan las conclusiones organizadas en secciones, las cuales han sido tituladas haciendo mención al aspecto al cuál se están refiriendo.

5.1. Conclusiones con respecto a los Objetivos Específicos

5.1.1. Conclusiones con respecto al Objetivo Específico 1

"OE1.- Determinar características fundamentales del conjunto de actividades didácticas que abordarán el tema de patrones numéricos, que se corresponden con lo planteado en el enfoque de la modelación matemática desde el enfoque de la Educación Matemática Realista."

Tal como se mencionó en el capítulo 2, se llevó a cabo una revisión documental en revistas y documentos oficiales, donde se revisaron artículos científicos donde se exponen las características de las diferentes posturas acerca de la modelación matemática como un recurso en la enseñanza del álgebra, en especial en el enfoque de la *Educación Matemática Realista*, tal como se ha mencionado.

Se revisaron y organizaron, mediante fichas de contenido, artículos científicos, libros y tesis que reportan resultados de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, en particular sobre la relación existente entre el tema de los patrones numéricos y la simbolización algebraica.

Así también, se revisó el currículo de la educación media superior y la sección correspondiente al currículo matemático, particularmente el programa de la asignatura de Álgebra, para identificar las competencias genéricas y disciplinares que son susceptibles de ser desarrolladas en las actividades didácticas que serán propuestas.

Se considera que se logró alcanzar el primer objetivo específico, ya que, cada una de las situaciones problemas que se desarrollaron, presentaron patrones numéricos, con los cuales, los alumnos lograron generar una actividad matemática que les permitió transitar por los diferentes niveles de matematización que se mencionan en la *Educación Matemática Realista*, lo cual significa que la revisión literaria que se llevó a cabo resultó objetiva.

5.1.2. Conclusiones con respecto al Objetivo Específico 2

"OE2: Identificar dificultades reportadas, en la literatura de la especialidad, en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en el bachillerato, particularmente sobre el tema de patrones numéricos."

De igual manera, en el capítulo 1 se puede observar la revisión de artículos científicos que reportan dificultades y confusiones que se presentan en los alumnos en la transición de aritmética al álgebra.

De estas dificultades mencionadas podemos destacar las asociadas a actitudes emocionales hacia las matemáticas con base en ciertas declaraciones por parte de algunos de los alumnos participantes y aquellas asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, ver figura 5.1, así como las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, ver figura 5.2.

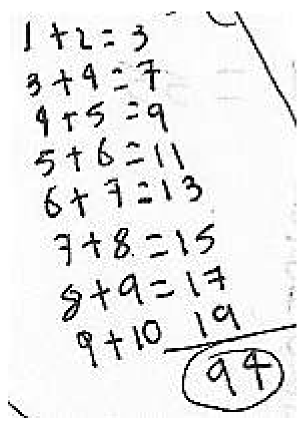


Figura 5.1

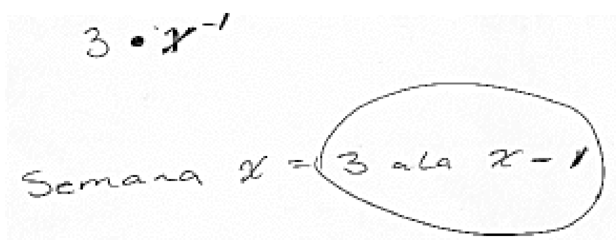


Figura 5.2

Por lo anterior, se considera que el objetivo específico 2 también se logró alcanzar.

5.1.3. Conclusiones con respecto al Objetivo Específico 3

"OE3.- Seleccionar, adaptar o crear situaciones problema, donde aparezcan patrones numéricos, que permitan procesos de modelación desde el enfoque de la Educación Matemática Realista, que puedan ser trabajadas en bachillerato."

La selección de las situaciones problemáticas resultó difícil, ya que no se tenían suficientemente claras las características ni qué tipo de contextos podrían ser considerados por los alumnos en un carácter realista, dado que en la literatura que se revisó no se encontraron reportes de situaciones problemáticas que hubieran sido desarrolladas para el nivel de bachillerato.

También resultó difícil por la necesidad de seleccionar una temática que estuviese contemplada dentro del programa de matemáticas del primer semestre del bachillerato, que es el espacio curricular donde se imparten conocimientos algebraicos.

Se considera que el objetivo específico 3 se consiguió alcanzar, dado que, las diferentes situaciones problemas presentadas en cada actividad realizada durante este trabajo, permitieron a los alumnos detectar patrones y de los cuales realizaron diferentes modelos desde el enfoque de la *Educación Matemática Realista,* tales como, modelos pictográficos y modelos esquemáticos.

5.1.4. Conclusiones con respecto al Objetivo Específico 4

"OE4: Evaluar la propuesta de diseño."

La primera implementación se llevó a cabo de manera piloto, no contó con más diseño que la redacción de la situación problema denominada "Los Lotes". Aquí se tuvieron como propósitos, por un lado, observar la reacción de los alumnos ante la situación problema presentada, es decir, si ésta se comprendía, la posible existencia de vocablos desconocidos, si generaría interés en los estudiantes, si se comprometerían en su solución, y cualquier otra reacción que proporcionara información útil para un diseño más integral de la actividad.

Se trabajó con un grupo de cuarenta y cuatro alumnos de nuevo ingreso al bachillerato, dividido en once equipos de cuatro integrantes cada uno y tuvo una duración de tres sesiones de cincuenta minutos cada una. En este piloto, el instrumento de recolección que se utilizó para recabar los datos para el análisis fueron las hojas de trabajo y el testimonio del profesor. Se realizó en un aula, la cual presentaba deficiencias en su infraestructura, tales como, pizarrón y pupitres en mal estado, mala iluminación, unidades de aire acondicionado altamente ruidosos los cuales, generaban distracción, complicaban la comunicación y provocaban que el profesor forzara la voz poniendo en riesgo su salud.

Por otra parte, también interesaba contar con elementos sobre cómo se manejaría la conducción de la actividad por parte del profesor encargado de la puesta en escena, esto es, qué tan sensible sería a respetar los momentos de actividad de los estudiantes, cómo reconduciría un razonamiento no esperado de los alumnos, cómo manejaría los tiempos, y, en general, todo lo relativo a su papel como conductor de la activad de aprendizaje de los alumnos, tomando en consideración el marco teórico con el que se propuso trabajar.

Este piloto brindó los primeros elementos para empezar a identificar los principios de la *Educación Matemática Realista*, tanto en la producción de los alumnos como en la conducción del profesor.

Por parte del profesor, los espacios de reflexión y discusión conjunta con colegas y conocedores del tema, coadyuvaron a detectar algunas discrepancias que presentó en su ejercicio con respecto al marco teórico, por lo cual, consideró que resultaría necesario recurrir de nueva cuenta a la literatura de la *Educación Matemática Realista* con el fin de nutrir sus referencias y así lograr tener un mejor desempeño en la conducción de las siguientes implementaciones.

Se consideró que el uso de un Applet podría ser una herramienta para los alumnos al momento de generalizar los patrones detectados, por lo cual, se propuso incluir esta herramienta en el diseño de la actividad.

A partir de esta experiencia, se trabajó en una versión de esta actividad que permitiera reconocer el tiempo y la naturaleza en las intervenciones del profesor, pues se consideró que el problema expuesto es rico en posibilidades para ser desarrollado mediante el enfoque de la *Educación Matemática Realista*.

La realización de este piloto nos permitió alcanzar el objetivo específico 4, ya que nos brindó una gran cantidad de elementos a considerar para el diseño de las siguientes actividades.

5.1.5. Conclusiones con respecto al Objetivo Específico 5

"OE5: Modificar la propuesta en atención a lo obtenido en la evaluación de la misma."

A partir del análisis de los resultados que se obtuvieron del piloto, se decidió llevar a cabo modificaciones en la actividad, las cuales se mostraron en el capítulo anterior, entre estas destacan la redacción y la presentación informal de la situación problema y el uso de un Applet diseñado en GeoGebra.

Se trabajó de igual manera con un grupo completo de primer semestre de bachillerato de cuarenta alumnos, en este caso se conformaron siete equipos de cuatro alumnos cada uno, debido a que algunos de los miembros del grupo ya habían participado en el piloto. Esta implementación se llevó a cabo en el segundo mes del semestre, se realizó en el horario regular de clases y tuvo una duración de cinco sesiones de cincuenta minutos cada una. En esta actividad la técnica que se utilizó para recabar los datos para el análisis fue, de nueva cuenta, la recolección de las hojas de trabajo y el testimonio del profesor.

No estaba previsto que la cantidad de inquietudes por parte de los equipos sobrepasara la capacidad del profesor, esto dio lugar a que no se pudieran atender todas estas, por lo cual, la homogeneización de la clase resultó clave en la fluidez de la actividad.

La introducción del Applet diseñado en GeoGebra para esta actividad no resultó como se tenía planteado en el diseño, ya que por la cantidad de equipos con los que se trabajó no dio tiempo al profesor de plantear situaciones para su análisis, ya que mientras se trabajaba con algunos de los equipos en la descarga de dicho Applet, los equipos que ya lo tenían fueron experimentando por iniciativa propia, esto dio como resultado que reforzaran sus planteamientos en cuanto a los patrones detectados.

Se puede considerar que el uso del Applet, diseñado como herramienta para esta actividad, no se utilizó de acuerdo con el diseño. Por lo cual debe de regularse la etapa en la que los alumnos harán uso del Applet, ya que, en la última etapa, los alumnos utilizaron el Applet como "calculadora" para obtener los resultados de las diferentes situaciones que planteaba el profesor, por esto se debe modificar en el diseño su uso, no permitiéndolo durante la etapa de la formalización. De esto se puede determinar que la actividad no siguiere cambios en el diseño del Applet, sino más bien en su uso durante la implementación.

Se tomó la decisión de modificar la mecánica en la implementación, se redujo el número de alumnos participantes con el fin de hacer más fluida la misma y que el profesor tuviera la oportunidad de atender los requerimientos de los equipos en menor tiempo y con mayor eficacia, tratando con esto que sus intervenciones sean más productivas. En esta implementación se trabajó fuera del horario de clases de los alumnos, los cuales pertenecían el turno vespertino y la actividad se realizó en el horario del turno matutino, toda la actividad se realizó en un mismo día durante tres sesiones de 50 minutos cada una y un receso de 10 minutos entre ellas.

Ante la falta de evidencia escrita por parte de algunos equipos en ciertas de sus respuestas se decidió que se solicitaría a los alumnos su autorización para tomar evidencia en formato de audio.

La decisión de disminuir el número de alumnos participantes en la actividad permitió al profesor tener un mejor manejo en el desarrollo de la actividad en cuanto a reconocer el tiempo y la naturaleza en sus intervenciones, disminuyendo algunas discrepancias que presentó en su ejercicio con respecto al marco teórico en previas implementaciones. Esta reducción en el número de alumnos permitió también un mejor desenvolvimiento en ellos, ya que mostraron un mayor interés en realizar la actividad, esto dio como resultado un mejor desempeño por su parte en cuanto a la actividad matemática generada, lo cual favoreció el proceso de *Reinvención Guiada*. Cabe mencionar que algunos de alumnos participantes pertenecen a un bajo nivel en una versión tradicional de evaluación en una clase de matemáticas.

La modificación de la redacción de la situación problema ayudó al sentido que se le trata de dar a la actividad, ya que agilizó la matematización horizontal en los alumnos, vemos que para que se pudiera alcanzar el *Nivel Situacional* y el *Nivel Referencial*, fueron mínimas las intervenciones que requirió hacer el profesor.

El objetivo específico 5 se logró alcanzar al incluir modificaciones en las actividades, dichas modificaciones resultantes del análisis del piloto realizado.

5.2. Conclusiones con respecto al Objetivo General

"OG: Diseñar un conjunto de actividades didácticas dirigidas a alumnos de primer semestre de bachillerato, basadas en la modelación matemática desde el enfoque de la Educación Matemática Realista, para promover la habilidad de generalización mediante el trabajo con reconocimiento de patrones.

Las 3 actividades didácticas fueron diseñadas con base en las consideraciones teóricas de la *Educación Matemática Realista* y en los propósitos señalados en los planes y programas vigentes en el bachillerato para el aprendizaje del álgebra.

Se considera que las situaciones problema seleccionadas son de fácil acceso para los alumnos, dado que los contextos forman parte del día a día de la localidad, por lo cual resultaron susceptibles que las llevaran del texto a su imaginación resultando así una situación que para ellos sería real, en el sentido en el que lo marca la *Educación Matemática Realista*.

Podemos concluir que estas actividades tuvieron avances en cuanto a que los alumnos hicieran una esquematización progresiva de situaciones reales, mediante la utilización de tablas y también la presentación de soluciones informales y en términos de expresiones algebraicas.

Las actividades desarrolladas en este trabajo contribuyeron a que los alumnos se incorporaran en su estudio, proponiendo soluciones, discutiendo y argumentando, acciones que son propias de la actividad matemática de un individuo, acciones que sirvieron como herramientas en la resolución de problemas. Destaca cómo los alumnos comenzaron a hacer sus propias matemáticas al obtener resultados que satisfacen las preguntas planteadas en cada situación problema.

Por todo lo anterior, podemos concluir que el objetivo general de este trabajo se logró alcanzar.

5.3. Conclusiones con respecto a las Competencias

En el capítulo 1 se expuso que en este trabajo se ha integrado una estrategia didáctica que puede ser considerada con potencial para desarrollar algunas de las competencias genéricas y disciplinares mencionadas en los planes y programas de bachillerato para la enseñanza de la matemática. Como se hizo notar en el análisis, los principios en que se sustenta la *Educación Matemática Realista* pudieron haber permitido la promoción, en el alumno, tanto de las competencias genéricas como de las competencias disciplinares básicas en matemáticas. Esto se puede tener como resultado que el alumno haya logrado desarrollar capacidades de razonamiento, análisis, comprensión y comunicación, esto en un sentido matemático, mientras que, en otro sentido, se espera que logre desarrollar una mejor comprensión de su entorno, en todos los sentidos. Con esto, se tiene la expectativa de poder colaborar en que el alumno desarrolle sus potencialidades y que este hecho le permita triunfar en los ámbitos personales y profesionales.

También es conveniente hacer notar que, en este sentido, se está consciente de que el desarrollo de las competencias genéricas no puede ser producto del trabajo en una sola clase, sino que debe de ser consecuencia de un trabajo integral de todos los cursos que integran el plan de estudios de la educación media superior. Lo mismo sucede con el caso de las competencias disciplinares, particularmente el caso de la competencia matemática. Su logro depende del trabajo que vertical y horizontalmente debe promoverse en todos los cursos de matemáticas y aquellos con los cuales se tenga relación.

Finalmente, también es importante acotar que desarrollo de competencias es un proceso que como tal se sigue desarrollando a lo largo de la vida académica, profesional y personal de los individuos.

5.4. Reflexiones

5.4.1. Reflexiones sobre la implementación

La metodología utilizada en la implementación de las 3 actividades, bajo los fundamentos teóricos de la *Educación Matemática Realista*, permitió que los alumnos tuvieran interés en realizar las actividades, lo cual se considera un paso muy importante, ya que la empatía mostrada por los alumnos dio lugar un mejor desempeño por parte de los mismos en cuanto a la actividad matemática que generaron.

Se presentaron dificultades en la comprensión lectora, ya que fue necesario, para algunos de los alumnos, leer en más de una ocasión la situación problema. A pesar de estas dificultades los alumnos lograron desarrollar producciones matemáticas.

Se considera que las actividades se apegan al *Principio de Actividad* de la *Educación Matemática Realista*, ya que dieron pie a que los alumnos iniciaran la resolución de las mismas haciendo uso de sus propios recursos matemáticos.

La presentación de cada situación problema por parte del profesor se dio bajo contexto realista, lo cual contribuyó a que los alumnos pudiesen tener libertad para interiorizar la situación planteada, esto es, asimilarla en su realidad o en su contexto o en su imaginación, esto les permitió a los alumnos dar el primer paso en la construcción de la matemática requerida para comprenderla y resolverla.

Los diferentes modelos presentados por los alumnos nos muestran un punto importante en la teoría de la *Educación Matemática Realista*, esto nos permite apreciar los diferentes enfoques en los que puede ser tratada una misma situación problema, dependiendo de los diversos conocimientos y experiencias entre los alumnos.

La primera parte de la implementación se realizó de acuerdo con el diseño de la actividad, aunque hubo acciones realizadas por los alumnos que no estaban previstas en el diseño, lo cual hizo necesaria la intervención del profesor con preguntas que ayudaron a los alumnos a observar las diferencias entre los modelos de sus propias propuestas, esto les permitió a los alumnos lograr desarrollar producciones matemáticas.

Esta postura por parte del profesor al momento de conducir la clase y al presentar las actividades tuvo relevancia en este proceso, ya que, en ciertos momentos se percibieron interacciones al momento de guiar a los alumnos para avanzar en cada uno de los niveles de matematización.

Se presentaron casos donde se observó que el profesor actuó ante los alumnos como un igual, dejando de ser la persona que "lo sabe todo", este proceder dio confianza a los alumnos al momento de desarrollar las actividades, confianza que a su vez generó un impulso en los mismos para crear sus propios procesos matemáticos que los llevaron a niveles superiores. Esto nos permitió ver como los alumnos hicieron sus propias matemáticas o cómo reinventaron las matemáticas, mediante argumentos que los alumnos fueron capaces de expresar de manera oral o escrita o mediante formalización de dichos argumentos dentro de lo institucional en el ámbito del álgebra.

La interacción entre alumnos con alumnos y alumnos con el profesor fue un elemento importante de la *Educación Matemática Realista* que estuvo presente durante el desarrollo de todas las actividades.

Se considera que el trabajo en equipos, por parte de los alumnos, les permitió compartir sus experiencias, conocimientos e ideas con sus compañeros y con el profesor, con esto se generó un ambiente propicio para la actividad matemática, donde se hicieron notorias la fluidez y la libertad con la que los alumnos presentaban sus opiniones.

Al trabajar en equipos y con las intervenciones del profesor, los alumnos desarrollaron sus matemáticas en un ambiente más nutrido de conceptos, con diferentes enfoques personales los cuales permitieron aumentar sus niveles de aprendizaje,

Fue claramente notorio que los alumnos no se sentían en una clase típica de matemáticas, esto se evidenció en un comportamiento participativo, incluso en aquellos alumnos que generalmente mantienen un perfil bajo.

De acuerdo con los análisis presentados en el capítulo 4, podemos concluir que, aunque todos los equipos que participaron en las actividades que componen el presente trabajo, presentaron evidencias en cuanto a reconocer contenidos matemáticos en situaciones cotidianas, no todos fueron capaces de analizar la información relevante de situaciones particulares ni de separar dicha información de la situación problema original.

Aunque se reportó que todos los equipos lograron alcanzar el *Nivel de Comprensión Situacional*, no se presentaron evidencias como tal, puesto que este se lleva a cabo en un proceso cognitivo por parte del alumno, el cual no se hace evidente, sino hasta el momento alcanzar el nivel de comprensión Referencial, el cual se presenta en el próximo punto.

Estas evidencias fueron al momento de realizar los modelos de situaciones particulares en forma de pictogramas, así como al contestar las preguntas planteadas, lo cual nos mostró que consiguieron situarse e imaginar un modelo de las situaciones problemáticas presentadas.

Todos los equipos fueron capaces de plantear más de un modelo de diferentes situaciones particulares en las situaciones problemáticas que se presentaron en las actividades, aunque en algunos casos se presentaron incongruencias en sus propios modelos.

Se encontraron dificultades en este momento de la actividad, ya que 3 de los equipos, no lograron detectar información en sus modelos planteados, fue necesaria la intervención del profesor para que estos equipos lograran detectar cual era la información relevante para la respectiva actividad.

En cuanto a la organizar la información, todos los equipos fueron capaces de desarrollar tablas con los contenidos relevantes de sus diferentes modelos propuestos de diferentes situaciones particulares de la misma situación problema.

Se concluye que, aunque fue necesaria la intervención del profesor, todos los equipos fueron capaces de esquematizar la situación problema presentada, es decir, lograron alcanzar el *Nivel de Comprensión Referencial*.

En el uso de tablas para organizar la información que se obtuvo de las diferentes representaciones, 4 de los equipos no lograron alcanzar el *Nivel de comprensión General*, en estos casos, mediante sus intervenciones, el profesor solicita a los alumnos simplificar y organizar la información que obtuvieron en sus respectivas tablas, en uno de los casos la información que se presentaron no mostraba ninguna relación y por consecuencia no hubo un patrón que detectar, mientras que otro equipo trataron de buscar patrones utilizando una regla de 3, fueron varias las perspectivas que tomaron, pero todas ellas en el mismo sentido y sin ningún resultado positivo.

7 equipos lograron identificar rápidamente patrones en los incrementos sin necesidad de hacer un esquema para cada situación particular solicitada, el cual lograron generalizar y expresar de forma verbal.

Estos 7 equipos sobrepasaron el contexto de la situación problema y obtuvieron elementos para generar sus propios modelos matemáticos, los cuales utilizaron para solucionar situaciones semejantes a la situación problema original. Por esto se puede determinar que lograron alcanzar el *Nivel de Comprensión General*.

A los 4 equipos, que, al carecer de lo anterior, les fue imposible para alcanzar el *Nivel de Comprensión Formal*, mientras que, de los 7 equipos restantes, solo en uno fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado.

Se considera que 6 de los equipos lograron alcanzar el *Nivel de comprensión Formal*, dado que presentaron argumentos que satisfacen lo requerido por la situación problema. Estos argumentos, expresados de manera oral y escrita, nos muestran los patrones detectados por los alumnos y con los cuales logran determinar la solución para cualquier situación particular sin la necesidad de recurrir a ningún otro elemento distinto de dicho patrón.

Se concluye que se logró alcanzar el *Nivel de comprensión Formal*, ya que fueron capaces de realizar una expresión algebraica del patrón detectado, el cual daba respuesta a la situación problema en cualquier situación particular.

Se considera que todos los equipos lograron una matematización horizontal, ya que todos fueron capaces de convertir una situación problema en un problema matemático, es decir, lograron construir una situación real, la cual contenía una naturaleza matemática y que requería de una solución. En su mayoría, planteando representaciones de la situación problema mediante el uso de pictogramas.

En algunos casos, se dificultó el inicio de la matematización horizontal ya que los equipos tuvieron problemas con la identificación de la información que la situación problema solicitaba, las intervenciones del profesor ayudaron a solventar estas dificultades.

Estos 7 equipos detectaron, a través de la exploración, reflexión y generalización sobre los modelos que presentaron, aspectos matemáticos en las situaciones problemáticas, también así, sobrepasaron los contextos de dichas situaciones, y obtuvieron los elementos necesarios para generar modelos matemáticos los cuales fueron empleados para resolver situaciones problemas semejantes a la situación original, conocidos como “modelos para”.

Las complicaciones de implementar con el grupo completo una investigación de esta naturaleza, en un principio no permitió vislumbrar toda la diversidad de la actividad matemática que se presentó, así como la disparidad entre los avances entre los diferentes equipos.

Uno de los momentos cruciales que se presentaron fue cuando, después de la presentación de la situación problema por parte del profesor, los alumnos empezaron a generar actividad matemática, es decir, la producción matemática de los alumnos dio inicio.

Una de las ventajas de una clase bajo el enfoque de la *Educación Matemática Realista* sobre una clase de matemáticas convencional es que el profesor tiene acceso a la producción matemática de los alumnos.

Los cuestionamientos presentados durante el inicio del desarrollo de cada actividad, fue lo que dio pie a que los alumnos iniciaran con una actividad matemática, estos mismos cuestionamientos reflejan que las propuestas de cada situación problema son aptas y contienen elementos suficientes para ser empleadas en el presente trabajo.

Se recomienda al profesor continuar con los espacios de reflexión y discusión conjunta con colegas y conocedores del tema, así como continuar nutriendo sus referencias con la ayuda de la literatura de la *Educación Matemática Realista*.

5.4.2. Reflexiones sobre los resultados obtenidos

Dadas la serie de limitaciones que se evidenciaron desde la planeación, se puede considerar a este trabajo como un estudio de carácter piloto, que si bien arrojó información de utilidad, también es evidente que puede ser continuado desde distintas perspectivas, retomando aquello que se considere pudiera resultar de utilidad. Entre estas posibilidades de continuación están, por ejemplo, la incorporación del uso de applets con una mejor planeación, estudiar y proponer estrategias para evaluar el conocimiento alcanzado por los alumnos, refinar en la medida de lo posible las intervenciones del profesor, incorporar nuevas situaciones problemas, hacer un seguimiento más organizado sobre las competencias y atributos susceptibles de ser impulsados.

5.4.3. Reflexiones personales derivadas del estudio

Al desarrollar el presente trabajo se alcanzaron muchos aprendizajes en diferentes rubros, principalmente, en cuanto a la enseñanza de las matemáticas.

El principal motivo que me llevó a elegir el estudio de esta maestría fueron las limitaciones en cuanto a los recursos formativos de los cuales disponía para la enseñanza de las matemáticas, producto de la falta de una preparación pedagógica. No obstante que mi preparación profesional en Ingeniería Civil tiene una estrecha relación con la aplicación de métodos matemáticos en la resolución de problemas, sin embargo, no así con la enseñanza de esta. Se considera que muchas de estas limitaciones mencionadas, fueron superadas gracias a los espacios de reflexión y discusión conjunta con los profesores durante este estudio, los cuales contribuyeron a detectar algunas irregularidades que se presentaban en el ejercicio y así lograr tener un mejor desempeño docente.

Cabe mencionar que, para llegar a ser profesor de matemáticas bastó con aprobar el examen del servicio profesional docente, en el cual se demostró tener los conocimientos matemáticos que se imparten en el nivel de bachillerato, más no así, la capacidad de impartir estos conocimientos.

Otro de los motivos principales, fue la interrogante sobre el porqué la gran mayoría de los alumnos presentan dificultades para aprender matemáticas, esta interrogante podría ser producto de que durante mi época como estudiante no presenté mayores dificultades para aprender matemáticas, derivado del gusto que desarrollé desde muy temprana edad por el estudio de esta materia. Durante el transcurso por esta maestría se conoció la existencia de diferentes metodologías sobre la enseñanza de las matemáticas, las cuales son herramientas qué fueron utilizadas para mejorar el desempeño docente y que contribuyeron a sensibilizar la actividad de enseñanza, tomando en cuenta los diferentes procesos de aprendizaje que presentan los alumnos.

De estas diferentes metodologías destaca, obviamente, el marco teórico seleccionado para este trabajo. El trabajar bajo el enfoque de la *Educación Matemática Realista* contribuyó a cambiar la perspectiva que se tenía sobre las estrategias utilizadas al momento de conducir una clase, ya que, en un inicio se tenía la idea de que, dependiendo de la capacidad y el gusto mostrados por los alumnos hacia las matemáticas, se debía de enfocar la clase en dichos alumnos. Este estudio reveló que la interacción entre los diferentes sujetos participantes en una clase de matemáticas contribuye a que el aprendizaje de las matemáticas puede ser atractivo e interesante para todos los alumnos, incluso para aquellos que tienen un bajo perfil en la materia.

Otro de los rubros en los cuales se logró alcanzar aprendizajes es con respecto a las habilidades de comunicación escrita, tanto con respecto a la comprensión lectora, así como en la redacción, ya que, al inicio de este estudio se presentaban serias dificultades para argumentar en un texto las afirmaciones que se manifestaban. Si bien es verdad que aún se siguen presentando estas dificultades, pero en nivel menor que al inicio de la redacción de este documento.

Para finalizar, el estudio de esta maestría me llevó a darme cuenta que no solamente pueden ser los estudiantes quienes presenten dificultades para aprender matemáticas, sino que, uno, como profesor también puede tener dificultades para enseñarlas.

Referencias bibliográficas

Bassanezi, R., & Biembengut, M. S. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-Un nuevo método de enseñanza. *Revista de didáctica de las matemáticas*(32), 13-25.

Bressan, A., Gallego, F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas.* Bariloche: Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática.

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, F. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. *Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*, 1-13.

Castro, E. (2012). Dificultades En El Aprendizaje Del Álgebra Escolar. En Á. C. Antonio Estepa Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (págs. 75-94). Andalucía: Ediciones Blanca.

Castro, E. (s/f). *Configuraciones puntuales. Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales.* Granada: Universidad de Granada.

Cervantes, L. (2015). Modelización matemática: Principios y aplicaciones. En L. Cervantes, *Modelización matemática: Principios y aplicaciones* (pág. 2). Puebla: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Cetina, M., & Cabañas, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones. *Enseñanza de las Ciencias*, 65-68.

Chris, 7. (2004). *Wikimedia Commons [Fotografía]*. Obtenido de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg

DOF, D. (21 de 10 de 2008). *https://www.dof.gob.mx/*. Recuperado el 5 de 12 de 2018, de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_444_marco_curricular_comun_SNB.pdf

ESA/Hubble. (2001). *ESA Hubble [Fotografía]*. Obtenido de https://cdn.spacetelescope.org/archives/images/screen/heic0602a.jpg

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática, 11*(1), 80.

Gómez-Chacón, I. M., & Maestre, N. A. (2008). Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. *EXPERIENCIAS DE AULA Y PROPUESTAS DIDÁCTICAS, 17*(1), 107-221.

Gravemeijer, ., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 777-796.

Henao, S., & Vanegas, A. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Kaiser, G., & Bharath, S. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 302-310.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229-240.

Libbrecht, K. (2020). *Snowflakes [Fotografía]*. Obtenido de Snow Crystals: http://www.snowcrystals.com/photos/i0120a157B.jpg

Mancera, E., & Pérez, C. (2007). Historia y Prospectiva de la educación Matemática. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (págs. 61-68). México: Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V.

Morales, R., Cañadas, M., & Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *Números*, 232-252.

Ramos, F., & Latasa, M. (s/f). *Apuntes Marea Verde*. Obtenido de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3B/03_Sucesiones_3B.pdf

Seguí, V. (2015). *El Insight en Psicología.* ISEP Formación.

SEP, S. (2017). *http://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/*. Recuperado el 05 de 12 de 2018, de http://sems.gob.mx/curriculoems/programas-de-estudio

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics.* Dordrecht: Reidel.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75-87.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Primera parte. *Correo del Maestro*, 36-44.

Vargas Castro, J. R., Rodriguez Ibarra, M. A., Del Castillo Bojorquez, A. G., Villalva Gutierrez, M. C., Olmos, I., Elena, S., . . . Avila Godoy, R. (2013). *Matemáticas 1.* Hermosillo: Monge Gastelum, Adalberto; Limón Samaniego, Ángel Alonso.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números: Revista de las didácticas de las matemáticas, 97*(1), 51-67.

Zolkower, B., Bressan, A., & Gallego, F. (2006). La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática. Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores. *Yupana*, 11-33.