



Universidad de Sonora

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Programa de Posgrado en Matemáticas

Estabilización de Sistemas Lineales con Control Escalar
Restringido

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Martín Aarón Carrillo Carranza

Directores de Tesis:

M.C. Horacio Leyva Castellanos

Hermosillo, Sonora. 9 de agosto de 2013

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

SINODALES

Dr. Fernando Verduzco Gonzáles

Dr. Luis Aguirre Castillo

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro

*Algunas personas quieren que algo ocurra,
otras sueñan con que pasara,
otras hacen que suceda.*

Michael Jordan

Índice general

Introducción	v
1. Controlabilidad para estabilizar	1
1.1. Teoremas de controlabilidad para sistemas lineales	1
1.2. El problema de Estabilización Global	4
1.3. Estabilización Global de Sistemas Lineales con Realimentación Positiva no Acotada	5
1.4. Estabilización Global de Sistemas con Retroalimentación Positiva Acotada.	11
2. Estabilización rápida de una familia de sistemas lineales positivos mediante modos deslizantes	15
2.1. Sistemas Lineales Positivos	15
2.2. Estabilización de Sistemas Positivos Mediante Modos Deslizantes	17
2.3. Modos deslizantes para sistemas afines	18
2.4. Modos deslizantes para sistemas lineales	24
3. Aplicación de un caso particular de Sistemas Compartimentales	29
3.1. El caso de mezcla con dos tanques	29
3.2. Un caso de mezcla con tres tanques	40
3.3. El caso de mezclas con n tanques	52
3.4. Estabilización de la insulina en el modelo de Sorensen	53
4. Conclusiones	61

Introducción

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

donde $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, con entrada admisible $u \in U \subset \mathbb{R}$. En particular consideraremos los casos de conjunto admisible $U = [0, r]$ y $U = [0, \infty)$, para estos dos casos diseñamos una función de retroalimentación positiva y acotada (*FRPA*).

En el capítulo 1, abordamos el problema de Estabilización Asintótica Global (*EAG*) del sistema (1), partiendo de la hipótesis de controlabilidad se presenta un diseño sencillo de función Lipschitz-continua *FRPA* $u = u(x)$ de retroalimentación para la estabilización asintótica global de sistemas lineales estables a lazo abierto, mediante un control positivo y acotado. En [15] se desarrolla un algoritmo para encontrar una función de retroalimentación positiva que estabiliza globalmente al sistema (1).

Una función $f(x)$ es Lipschitz si satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

donde L es una constante positiva y $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana.

Sin perder generalidad, suponemos que la matriz real A está en la forma canónica de Jordan. El punto de equilibrio $x = 0$ de $\dot{x} = f(x)$ es estable (Lyapunov-estable) si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica que $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. El punto de equilibrio $x = 0$, es asintóticamente estable si, es estable y δ puede ser elegida de tal manera que $\|x(0)\| < \delta$ implique que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Cuando en el sistema el origen es asintóticamente estable, el conjunto

$$R = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0 \right\}$$

se denomina *región de atracción*.

Existen numerosos sistemas físicos descritos dinámicamente por ecuaciones diferenciales que dependen en forma discontinua del estado actual del sistema, es decir, ecuaciones con lado derecho discontinuo. A estos sistemas se los denomina sistemas de estructura variable (*SEV*). Un *SEV* puede pensarse como un conjunto de (dos o más) estructuras o subsistemas

continuos y alguna lógica asociada que, en función de los estados del sistema, efectúa la conmutación entre ambos. Cada una de tales estructuras tendrá sus propias características y, al conmutar entre ellas, el *SEV* puede combinar las mismas o, incluso, poseer propiedades nuevas no asociadas a ninguno de los subsistemas.

Como ejemplos de *SEV* pueden mencionarse sistemas mecánicos donde existe rozamiento, donde la fuerza de roce toma el signo opuesto a la dirección de movimiento, o también sistemas eléctricos con fuentes conmutadas o convertidores electrónicos, entre otros.

Tanto en los *SEV* como en algunos sistemas continuos, el control tiene también la posibilidad de cambiar de estructura. El Control por Estructura Variable (*CEV*) consiste en diseñar los parámetros de cada una de tales estructuras para lograr determinado comportamiento de un *SEV*. Generalmente, las leyes de *CEV* son funciones discontinuas de los estados del sistema. Una de las maneras más efectivas de realizar un *CEV* consiste en plasmar el objetivo de control como una función de los estados. Luego, mediante conmutaciones a frecuencia muy elevada, idealmente infinita, se fuerza a las trayectorias del sistema a evolucionar sobre una variedad predeterminada por la restricción planteada, en el espacio de estados. A este modo de funcionamiento, ilustrado en la Figura 2.2, se le denomina operación por modos deslizantes. Se caracteriza por ser altamente robusto o invariante ante cierto tipo de perturbaciones externas y variaciones en los parámetros del sistema. Además, la operación llamada *dinámica deslizante ideal* en modo deslizante es de orden reducido, fijando la dinámica en la superficie de cambio. Cuando la frecuencia de conmutación no es infinita, como sucede en cualquier implementación práctica, o en el caso de que existan dinámicas no modeladas, las conmutaciones generan oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre la variedad de deslizamiento. A este fenómeno se lo denomina efecto *chattering* y constituye el principal defecto de los modos deslizantes. Una manera de reducir el efecto *chattering* es usar un control continuo, el cual puede definirse al menos en una vecindad de la superficie de cambio (ver [16]). Una idea esquemática de esta situación puede observarse en la Figura 2.2.

En el capítulo 2 se desarrolla un trabajo donde se hace uso de algunos resultados relevantes de los sistemas lineales positivos, dado que en los sistemas de este capítulo no se tiene la hipótesis de controlabilidad entonces hacemos uso de la teoría de modos deslizantes para estabilizar. Con base en la teoría de modos deslizantes descritos en [1] y [3], en este capítulo describimos un nuevo método de estabilización rápida y robusta para una familia de sistemas positivos, se presentan las ideas básicas y fundamentos del control por estructura variable, específicamente por modos deslizantes. En primer lugar se aborda el control por modo deslizante para sistemas afines sentando las bases para presentar estos resultados para sistemas lineales. La idea básica del control por modo deslizante consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una variedad o superficie de deslizamiento y forzarlas a evolucionar sobre ella. Así, el comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados. De este modo, plasmando los objetivos de control en tales ecuaciones mediante un diseño adecuado de las mismas, es posible lograr la estabilización del sistema.

Consideremos ahora algunos resultados de los sistemas lineales positivos que se usaran para llevar a cabo el desarrollo de este trabajo.

Los sistemas lineales positivos son aquellos sistemas en los cuales todas las variables involucradas (entradas, estados y salidas) son de valor positivo, o al menos no-negativas. Estos sistemas, algunas veces llamados sistemas con restricciones, son muy frecuentes en la realidad, debido principalmente a que en una gran variedad de procesos las variables representan cantidades que tiene significado físico sólo cuando son no-negativas. Una propiedad inherente de los sistemas positivos es la de preservar automáticamente la no-negatividad de las variables de estado. Por ejemplo variables como temperatura (absoluta), presión (absoluta), volumen, masa, densidad, habitantes de un población, etc. son cantidades muy frecuentes en diversos modelos físicos. Es por esta razón que los sistemas positivos se encuentran en una gran variedad de aplicaciones en áreas como la química, física, medicina, economía y muchas otras (ver [5] y [7]).

Los cálculos desarrollados en el capítulo 2 parten de sistemas del tipo (1), donde suponemos que la matriz A es Metzler, i.e., $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$. A este tipo de matrices se le conoce comúnmente como matrices Metzler. Consideremos el sistema lineal homogéneo en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Si $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq 0$, entonces la solución $x(t, t_0, x_0)$ es no-negativa, es decir, $x(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall t \geq t_0$, si y sólo si la matriz A es Metzler. A este tipo de sistemas se les denomina positivo porque el cono positivo \mathbb{R}_+^n es un conjunto invariante (ver [5] y [7]).

En el sistema positivo (descrito anteriormente) la condición de que la matriz A sea Metzler implica que el sistema debe preservar la no-negatividad del vector de estado. Para verificar esto, primero se hace notar que

$$\dot{x}_i = a_{ii}x_i + \sum_{i \neq j}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces, para asegurar que la solución $x(t, t_0, x_0)$ es no-negativa es necesario que $\dot{x}_i(t) \geq 0$ cuando $x_i(t, t_0, x_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Esto es, si $x(t, t_0, x_0)$ está sobre la frontera de la región positiva, entonces su dirección de movimiento no puede ser tal que se salga de dicha región (i.e., $x(t, t_0, x_0)$ no puede decrecer aún más). Así, el requerimiento de que $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$ es una condición necesaria para que todas las soluciones sean no-negativas. En los sistemas lineales estudiados en este trabajo el requerimiento de que la matriz A sea Metzler representa la extensión natural de positividad para los sistemas lineales en tiempo continuo.

Ahora es posible definir apropiadamente un sistema lineal positivo en tiempo continuo. Consideremos el sistema lineal no-homogéneo en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + bu$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$. Este sistema se denomina positivo si, y sólo si, la matriz A es Metzler, la matriz b es positiva y la entrada $u \in \mathbb{R}_+$ (i.e., $bu \geq 0 \quad \forall t$). Así, la solución $x(t, t_0, x_0)$ será siempre no-negativa para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall t_0 \geq 0$, con lo que el cono positivo \mathbb{R}_+^n es un conjunto invariante para el sistema.

En particular, mostramos el método de estabilización para la familia de sistemas lineales

positivos que representan un sistema compartimental. Para ilustrar el método, en el capítulo 3 abordamos el problema de estabilización de los sistemas que representan una mezcla en dos y tres tanques (con volumen constante). En estas aplicaciones, mostramos que la rapidez de convergencia en el deslizamiento está en función del hiperplano deslizante seleccionado, de forma que podemos elegir una rapidez de convergencia en el deslizamiento. Esto es posible porque los valores propios de la matriz de estado correspondiente están en función del gradiente del hiperplano deslizante.

Una aplicación que motiva este método de estabilización, consiste en el problema llamado Hiperinsulinemia, que consiste en estabilizar la glucosa sin estabilizar la insulina. En este problema es útil las principales características del método deslizante; que consisten en lograr estabilización rápida y robusta mediante controles positivos y acotados.

Capítulo 1

Controlabilidad para estabilizar

1.1. Teoremas de controlabilidad para sistemas lineales

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

donde $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $B \in \mathfrak{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$

Definición 1.1.1. Decimos que el estado x_1 del sistema (1.1) es controlable en $t = t_0$, si toda condición inicial x_0 puede ser transferida a x_1 en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$, para alguna ley de control $u(t, x_0)$. Si todos los estados de un sistema son controlables, diremos que el sistema es completamente controlable, o simplemente, controlable.

Definición 1.1.2. El sistema (1.1) se dice que es nulo-controlable si existe un conjunto abierto $V \in \mathbb{R}^n$ que contenga al origen y para el cual, cualquier $x_0 \in V$ puede ser controlado a $x_1 = 0$ en un intervalo de tiempo finito. Diremos que (1.1) es globalmente nulo-controlable si V puede ser tomado como \mathbb{R}^n .

Veamos ahora como deducir una expresión matemática que nos garantice cuándo un sistema es controlable. Sin pérdida de generalidad supongamos que el estado final $x_1 = 0$ y que el tiempo inicial $t_0 = 0$. Analizaremos el caso de un control escalar u ($m = 1$). El caso general es similar.

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{1.2}$$

donde $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathfrak{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ y $u \in \mathbb{R}$.

La solución del sistema (1.2) es

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}bu(s)ds$$

Ahora bien, si el sistema es controlable y como hemos supuesto que $x_1 = 0$, obtenemos entonces

$$x(t_1) = x_1 = 0 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}bu(s)ds$$

lo que equivale a

$$0 = e^{At_1} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-As}bu(s)ds \right)$$

o bien

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-As}bu(s)ds \quad (1.3)$$

Ahora bien, sabemos que la exponencial de una matriz cuadrada puede expresarse como una suma finita de potencias de ellas mismas, es decir

$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k$$

luego, (1.3) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} x_0 &= - \int_0^{t_1} e^{-As}bu(s)ds \\ &= - \int_0^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(s)A^k \right) bu(s)ds \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} A^k b \int_0^{t_1} \alpha_k(s)u(s)ds \end{aligned}$$

Sea

$$\beta_k = \int_0^{t_1} \alpha_k(s)u(s)ds$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned} x_0 &= - \sum_{k=0}^{n-1} A^k b \beta_k \\ &= - (b\beta_0 + Ab\beta_1 + A^2b\beta_2 + \dots + A^{n-1}b\beta_{n-1}) \\ &= - (b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si el sistema (1.2) es completamente controlable, entonces para cualquier estado inicial x_0 , la ecuación anterior deberá satisfacerse, ver [17]. Esto puede garantizarse si la matriz

$$C = (b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b)_{n \times n}$$

es de rango n , o lo que es lo mismo, que los vectores $b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b$ sean linealmente independientes. La matriz C es llamada *matriz de controlabilidad*. Esto nos sugiere el siguiente resultado

Proposición 1.1.1. *Considere el sistema de control*

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{1.4}$$

donde $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathfrak{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ y $u \in \mathbb{R}$. Diremos que el sistema es completamente controlable si y sólo si la matriz

$$C = (b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b)_{n \times n}$$

tiene rango n .

Una forma común de decir que un sistema es controlable es diciendo que la pareja (A, b) es controlable.

Dependiendo de las dimensiones de las matrices A y b , el cálculo del rango de la matriz de controlabilidad C puede ser complicado, aún usando algún paquete computacional.

Ejemplo 1.1.1. *Para ilustrar el resultado anterior, consideremos el siguiente sistema*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{1.5}$$

para este sistema tenemos que la matriz de controlabilidad es

$$C = (b \quad Ab) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual es, evidentemente de rango 2. Luego el sistema es controlable.

En el seguimiento a la teoría de controlabilidad con control restringido, consideremos también el Teorema de Brammer. El desarrollo de este teorema se basará sobre el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.6}$$

donde $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, y el parámetro u está restringido a tomar valores en el cono $U = \mathbb{R}^+$.

Definición 1.1.3. Decimos que el estado x_1 del sistema (1.6) es CCP (controlable con control positivo) en $t = t_0$, si toda condición inicial x_0 puede ser transferida a x_1 en un intervalo de tiempo finito, para algún control $u(t; x_0)$ positivo. Si todos los estados de un sistema son controlables, diremos que el sistema es completamente CCP, o simplemente CCP.

En el seguimiento de la teoría, el desarrollo en este capítulo se basa sobre el sistema de control (1.1) el cual se sigue de las siguientes condiciones. El presente resultado, demostrado en [2], da una caracterización de los sistemas CCP.

Teorema 1.1.1. El sistema (1.2) es CCP si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones

- i) La matriz de controlabilidad $C = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$ tiene rango n .
- ii) No existe vector propio real v de A^T que satisfaga que el producto escalar $v^T b u \leq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^+$.

i) y ii) serán llamadas la primera y segunda condición de Brammer, respectivamente. Claramente el sistema del ejemplo (1.1.1) no cumple con la condición ii) de Brammer, pues $v^T = (0 \ 1)$ es vector propio de A^T , se sigue que

$$v^T b u = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = u$$

si $u \in \mathbb{R}^+$ claramente $v^T b u \geq 0$, por tal motivo dicho sistema no es CCP. Consideremos el siguiente lema;

Lema 1.1.1. Si A tiene al menos un valor propio real, entonces el sistema no es completamente controlable con control positivo.

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \sigma(A)$, tal que $\lambda \in \mathbb{R} \cap \sigma(A)$, entonces existe v que es vector propio de A^T , tal que

$$A^T v = \lambda v \quad \Rightarrow \quad A^T(-v) = \lambda(-v)$$

dado que $bu \leq 0$, se sigue que el término $v^T b u \leq 0$ no cambia de signo. No se cumple la condición ii) del teorema de Brammer, por lo tanto el sistema no es CCP. \square

1.2. El problema de Estabilización Global

Consideremos el sistema de control lineal (1). El problema de estabilización global consiste en diseñar una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}$ que satisfaga las siguientes condiciones:

1. El punto de equilibrio $x = 0$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax + bu(x)$ es globalmente asintóticamente estable.
2. $u : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ es una función Lipchitz.

3. $u = 0$ pertenece a la frontera de U ($0 \in \partial U$).

Si el problema tiene solución, el sistema (1) es llamado globalmente estabilizable. El problema clásico de estabilización global está compuesto por las condiciones (1) y (2). La condición (3) está poco estudiada y representa una dificultad mayor para resolver el problema de estabilización.

En este capítulo se resuelve el problema de estabilización para el sistema (1) con controles restringidos en signo y magnitud.

Para resolver el problema de estabilización, supondremos que el sistema es controlable con controles positivos. Es decir, si (1) es nulo-controlable con $u \in [0, r]$, entonces damos el estabilizador. Además, si la ecuación $\dot{x} = Ax$ es Lyapunov-estable, mediante la saturación en $[0, 1]$ del control previo, obtenemos un *FRPA* (de hecho el control puede ser arbitrariamente pequeño) que estabiliza globalmente a las soluciones del sistema realimentado.

Trabajaremos con los sistemas lineales controlables con control positivo. Denotamos con $C(A, b)$ a la matriz de controlabilidad $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$. Brammer, presenta en [2] la siguiente caracterización de los sistemas lineales controlables con $U = [0, 1]$.

El sistema (1) con $U = [0, 1]$ es nulo-controlable si y sólo si $C(A, b)$ tiene rango n y A no tiene valores propios reales.

Supondremos que la matriz $C(A, b)$ es no singular y A no tiene valores propios reales. También restringimos a la entrada u en signo.

1.3. Estabilización Global de Sistemas Lineales con Realimentación Positiva no Acotada

1.3.1. Subespacio invariante

Supongamos que la matriz real $A \in \mathfrak{M}_{2k \times 2k}(\mathbb{R})$ está dada en la forma canónica. Entonces, si todos los valores propios de la matriz A son imaginarios y simples se cumple que $A^T = -A$. Mostraremos que el hiperplano definido por $b^T x(t) = 0$ (de dimensión $n - 1$) no tiene subespacios A -invariantes.

Proposición 1.3.1. *Si $A^T = -A$ y rango $C(A, b) = n$ entonces, no existe una solución $x(t) \neq 0$ del sistema $\dot{x} = Ax$, tal que $b^T x(t) = 0$ para $t \geq 0$.*

Demostración. Probaremos esta proposición por contradicción. Supongamos que existe $x(t)$ tal que la igualdad previa es verdadera, entonces, derivando sucesivamente respecto a t obtenemos que

$$b^T A^m x(t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \text{ y } m = 1, 2, \dots, n - 1.$$

aplicando la condición $A^T = -A$, obtenemos que

$$x(t)^T A^m b = 0 \text{ para } t \geq 0 \text{ y } m = 1, 2, \dots, n - 1.$$

lo cual implica que $\text{rango}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) < n$, lo cual contradice la hipótesis de que el rango $C(A, b) = n$. \square

Observación 1.3.1. Dada una matriz $A \in \mathfrak{M}_{2k \times 2k}(\mathbb{R})$ en la forma con valores propios imaginarios diferentes, entonces la solución del sistema lineal $\dot{x} = Ax$ tiene la forma

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & e^{A_k t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{k0} \end{pmatrix}.$$

Esta función vectorial esta compuesta por k funciones vectoriales de dimensión dos:

$$x_j(t) = e^{A_j t}x_{j0} = \begin{pmatrix} \cos(\beta_j t) & \text{sen}(\beta_j t) \\ -\text{sen}(\beta_j t) & \cos(\beta_j t) \end{pmatrix} x_{j0} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k. \quad (1.7)$$

De (1.7) es claro que

$$x_j\left(t + \frac{\pi}{\beta_j}\right) = -x_j(t)$$

para cada j , así que el medio-espacio $\{x \in \mathbb{R}^n \mid b^T x > 0\}$ no puede ser A -invariante. Existen k hiperplanos A -invariantes de dimensión dos en el espacio de estado \mathbb{R}^{2k} ; de acuerdo a la proposición (1.2.1.), ninguno de estos hiperplanos está contenido en el hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n \mid b^T x = 0\}$. Mostraremos la estabilización global de los sistemas lineales inestables de tipo (1) mediante el control positivo y no acotado

$$u(x) = \frac{1}{2} (|K^T x| + K^T x) = \max\{0, K^T x\} \quad (1.8)$$

donde K^T es un vector apropiado y $u(x) \in U = [0, \infty)$.

Dada una matriz $A \in \mathfrak{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con valores propios

$$\sigma(A) = \{\alpha_1 \pm i\beta_1, \beta_1 > 0\},$$

por controlabilidad, existe $K^T \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\sigma(A + bK^T) = \{\alpha_2 \pm i\beta_2, \beta_2 > 0\},$$

donde este último conjunto lo elegimos a conveniencia. Para determinar K^T , sólo igualamos el polinomio característico $\det[A + bK^T - \lambda I]$ con el polinomio cuyas raíces son

$$\sigma(A + bK^T) = \{\alpha_2 \pm i\beta_2, \beta_2 > 0\}.$$

Proposición 1.3.2. Dado un sistema controlable del tipo (1) con $U = [0, \infty)$, entonces el sistema retroalimentado (1)-(1.8) es tal que

i. Si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} < 0$, entonces el origen $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable;

- ii. Si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > 0$ entonces el origen $x = 0$ es inestable;
- iii. Si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 0$ entonces el origen es estable (es un centro).

Demostración. Tomamos una condición inicial $x(0) = x_0 \neq 0$ tal que $K^T x_0 = 0$. Denotamos por $x(t, x_0)$ a la solución correspondiente, los tiempos de intersección al hiperplano $\{x \mid K^T x = 0\}$ son definidos como

$$\begin{aligned} t_1 &= \inf \{t \mid t > 0 \text{ y } K^T x(t, x_0) = 0\} \\ t_2 &= \inf \{t \mid t > t_1 \text{ y } K^T x(t, x_0) = 0\} \end{aligned}$$

Considerando el sistema a lazo cerrado, obtenemos que $x(t_2, x_0) = x(t_2 - t_1, x(t_1, x_0))$. Considerando el par de sistemas

$$\dot{x}_i = A_i x_i, \quad \text{donde } A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Entonces la solución del sistema $\dot{x}_1 = A_1 x_1$ que inicia en $x_0 \neq 0$ es

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_1 t) & \text{sen}(\beta_1 t) \\ -\text{sen}(\beta_1 t) & \cos(\beta_1 t) \end{pmatrix} x_0$$

Esta solución vuelve a intersectar al hiperplano $\{x \mid K^T x = 0\}$ en el tiempo $t_1 = \frac{\pi}{\beta_1}$, ya que $x_1(t + \frac{\pi}{\beta_1}) = -x_1(t)$, de modo que

$$x_1(t_1, x_0) = -e^{\pi \frac{\alpha_1}{\beta_1}} x_0$$

tomando esta última como condición inicial del sistema $\dot{x}_2 = A_2 x_2$, tenemos que la solución esta dada por

$$x_2(t) = e^{\alpha_2 t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_2 t) & \text{sen}(\beta_2 t) \\ -\text{sen}(\beta_2 t) & \cos(\beta_2 t) \end{pmatrix} x_1(t_1, x_0).$$

Considerando que $t_2 = \frac{\pi}{\beta_1} + \frac{\pi}{\beta_2}$ es el tiempo en que tarda la solución $x(t, x_0)$ en dar una vuelta, se tiene que

$$x_2(t_2 - t_1, (t_1, x_0)) = \left(e^{\pi \frac{\alpha_2}{\beta_2}} \right) \left(e^{\pi \frac{\alpha_1}{\beta_1}} \right) x_0$$

o bien

$$x_2(t_2 - t_1, (t_1, x_0)) = e^{\pi \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)} x_0$$

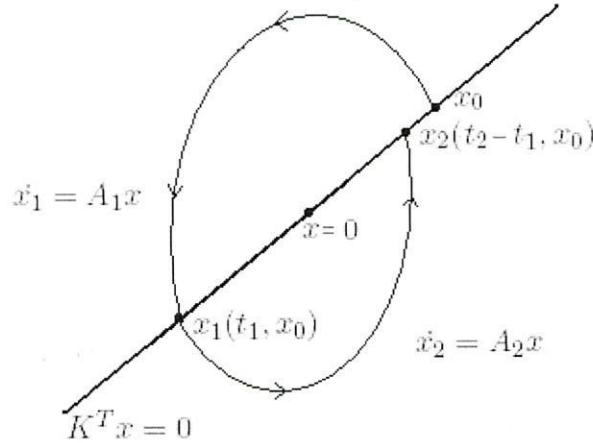
equivalentemente

$$x \left(\frac{\pi}{\beta_1} + \frac{\pi}{\beta_2}, x_0 \right) = e^{\pi \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)} x_0$$

así

$$\left\| x \left(\frac{\pi}{\beta_1} + \frac{\pi}{\beta_2}, x_0 \right) \right\| = e^{\pi \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)} \|x_0\|.$$

Ilustrando el desarrollo anterior consideremos la siguiente figura.



de manera que el mapeo, que resulta del sistema a lazo cerrado, es una contracción si y sólo si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} < 0$. De otra forma, si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 0$, entonces $\|x(t_2, x_0)\| = \|x_0\|$ para cualquier condición inicial x_0 , de manera que el origen es un centro. \square

Observación 1.3.2. El resultado previo se extiende fácilmente al caso donde la matriz A tiene valores propios simples

$$A = \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \right\} \text{ con } \beta_j \neq 0, \text{ para } j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}.$$

de tal forma que el vector K^T es tal que

$$\sigma(A + bK^T) = \left\{ \widehat{\alpha}_j \pm i\widehat{\beta}_j; \text{ para } j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \right\}$$

entonces las soluciones del sistema a lazo cerrado (1)-(1.8) tienen el siguiente comportamiento cualitativo:

- i. Si $\frac{\alpha_j}{\beta_j} + \frac{\widehat{\alpha}_j}{\widehat{\beta}_j} < 0$ para $j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, entonces es atractor global;
- ii. Si $\frac{\alpha_j}{\beta_j} + \frac{\widehat{\alpha}_j}{\widehat{\beta}_j} > 0$ para algún j , entonces el origen es un repulsor.
- iii. Si $\frac{\alpha_j}{\beta_j} + \frac{\widehat{\alpha}_j}{\widehat{\beta}_j} = 0$ para un valor de j , entonces, en el hiperplano j -ésimo las soluciones describen órbitas cerradas.

Ahora consideremos la multiplicidad de los valores propios de la matriz A . En la siguiente proposición suponemos la forma de Jordan

$$A = \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta \\ -\beta & \alpha_1 \end{pmatrix} \right\} + N \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

donde $\beta \neq 0$ y la matriz N nilpotente es tal que $N^m \neq 0$ y $N^{m+1} = 0$ para un entero positivo m . También consideraremos la norma Euclídeana:

$$\|M\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i,j} m_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

definida para una matriz $M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, tal que

$$\left\| \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \text{sen } \beta t \\ -\text{sen } \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \right\} \right\| = 1, \quad \|I\| = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \|N\| \leq 1.$$

Proposición 1.3.3. *Si el sistema (1) es controlable con $U = [0, \infty)$, entonces la función de retroalimentación (1.8) es un estabilizador global.*

Demostración. Generalizamos los cálculos para sistemas definidos en un espacio de estado de dimensión n , consideremos el sistema lineal de tipo (1) con

$$A = \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta \\ -\beta & \alpha_1 \end{pmatrix} \right\} + N \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

donde N es una matriz triangular superior nilpotente. Consideraremos también los vectores $b, K^T \in \mathbb{R}^n$ tal que el rango $(C(A, b)) = n$ y $\sigma(A + bK^T) = \{\alpha_2 + i\beta\}$ con la multiplicidad apropiada.

Entonces existe una matriz invertible P tal que

$$P^{-1} (A + bK^T) P = \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta \\ -\beta & \alpha_2 \end{pmatrix} \right\} + \bar{N}.$$

donde \bar{N} es de nuevo una matriz nilpotente.

De la condición de controlabilidad tenemos que $x = 0$ es el único conjunto A -invariante contenido en $\{x \mid K^T x = 0\}$. La función

$$x(t) = e^{\alpha_1 t} \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \text{sen } \beta t \\ -\text{sen } \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \right\} \left[I + \sum_{i=1}^k \frac{N^i t^i}{i!} \right] x_0$$

es solución de $\dot{x} = Ax$, con condición inicial $x(0) = x_0$, así que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{\alpha_1 t} \left\| \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \text{sen } \beta t \\ -\text{sen } \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left[\|I\| + \sum_{i=1}^k \frac{\|N^i\| t^i}{i!} \right] \|x_0\| \\ &\leq e^{\alpha_1 t} \left[1 + \sum_{i=1}^k \frac{\|N\|^i t^i}{i!} \right] \|x_0\| \end{aligned}$$

tal que

$$\|x(t)\| \leq e^{\alpha_1 t} e^{\|N\|t} \|x_0\| = e^{(\alpha_1 + \|N\|)t} \|x_0\| \quad (1.9)$$

donde hemos usado las conocidas desigualdades

- 1) $\|N\|^i \geq \|N^i\|$ válida para cualquier entero positivo i ;
- 2) $e^{\|N\|t} \geq \left[1 + \sum_{i=1}^k \frac{\|N^i\|t^i}{i!}\right]$, para $t > 0$ y cualquier entero positivo k .

Similarmente la función

$$y(t) = e^{\alpha_2 t} \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \text{sen } \beta t \\ -\text{sen } \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \right\} \left[I + \sum_{i=1}^k \frac{\overline{N}^i t^i}{i!} \right] y_0$$

es solución de $\dot{y} = P^{-1}(A + bK^T)Py$ con $y(0) = y_0$; así que

$$\|y(t)\| \leq e^{\alpha_2 t} \left\| \left\{ \text{diag} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \text{sen } \beta t \\ -\text{sen } \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \right\} \right\| \left\| \left[I + \sum_{i=1}^k \frac{\|\overline{N}^i\|t^i}{i!} \right] \|y_0\| \right\|$$

tal que

$$\|y(t)\| \leq e^{(\alpha_2 + \|\overline{N}\|)t} \|y_0\| \quad (1.10)$$

Dada una condición inicial arbitraria $x(0) = x_0 \neq 0$ donde $K^T x_0 = 0$. Denotemos por $x(t, x_0)$ a la solución correspondiente y mediante los tiempos de intersección

$$\begin{aligned} t_1 &= \inf \{t \mid t > 0 \text{ y } K^T x(t, x_0) = 0\}; \\ t_2 &= \inf \{t \mid t > t_1 \text{ y } K^T y(t, x(t_1)) = 0\}. \end{aligned}$$

tal que $y_0 = x(t_1)$, de las desigualdades (1.9) y (1.10) obtenemos que

$$\|y(t_2)\| \leq e^{(\alpha_2 + \|\overline{N}\|)t_2} e^{(\alpha_1 + \|N\|)t_1} \|x_0\| \leq e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\|\overline{N}\|)t_2} \|x_0\|$$

de donde suponemos que $\|N\| \geq \|\overline{N}\|$. De la desigualdad

$$\|y(t_2)\| \leq e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\|N\|)t_2} \|x_0\|$$

deducimos que hay una contracción de la composición de medios mapeos $y(t_2, x_{t_1})$ si

$$e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\|N\|)t_2} < 1$$

o equivalentemente, si

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\|N\| < 0 \quad (1.11)$$

donde $0 < \|N\| < 1$.

En particular, si el sistema es inestable a lazo abierto con $\alpha_1 > 0$ y $N \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, podemos escoger $\alpha_2 < 0$ para tener (1.11). Concluimos que esta condición es suficiente para tener estabilización asintótica global en el sistema a lazo cerrado (1)-(1.8). \square

Observemos que la desigualdad (1.11) implica la desigualdad (1) de la proposición (1.3.1.) que fue obtenida para asegurar la estabilidad asintótica en el caso de dos dimensiones. Para el caso $\beta_1 = \beta_2 < 0$ y $N = 0$, las desigualdades coinciden. Hasta aquí, el control considerado (1.8) es no acotado. Sin embargo, podemos usar la saturación para obtener un estabilizador global para la clase de sistemas lineales Lyapunov-estables.

1.4. Estabilización Global de Sistemas con Retroalimentación Positiva Acotada.

En lo que sigue suponemos que la matriz A está en la forma canónica y el sistema a lazo abierto $\dot{x} = Ax$ es Lyapunov-estable. Es decir,

$$A = J = \text{blockdiag} [J_1, J_2, \dots, J_s]$$

En esta sección damos un control positivo globalmente estabilizante para la clase de sistemas (1) donde la matriz A y el vector b satisfacen las siguientes dos condiciones:

- a) $\text{rango}(C(A, b)) = n$.
- b) $A^T = -A$ con $0 \notin \sigma(A)$.

Es bien conocido que las condiciones a) y b) implican controlabilidad local del sistema (1) con $U = [0, r]$, ver [2]. La restricción $u \in [0, r]$, implica que la condición a) no sea suficiente para resolver el problema de estabilización de (1). Para tener el diseño del estabilizador global *FRPA*, necesitamos que el sistema a lazo abierto sea Lyapunov-estable, esto implica que A es simple, lo que a la vez implica la condición b).

La siguiente función *FRPA*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [|b^T x| - b^T x] & \text{si } -b^T x \leq r \\ r & \text{si } -b^T x \geq r \end{cases} \quad (1.12)$$

corresponde a la saturación del control

$$u(x) = \frac{1}{2} (|b^T x| + b^T x)$$

en el intervalo $U = [0, r] \subset \mathbb{R}$.

Proposición 1.4.1. *Si el sistema (1) es controlable con $U = [0, r]$ y A es Lyapunov-estable, entonces la retroalimentación (1.12) resuelve el problema de estabilización global.*

Demostración. Consideremos la función de Lyapunov $V = x^T x$, tal que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [Ax + bu(x)]^T x + x^T [Ax + bu(x)] \\ &= x^T [A^T + A] x + u^T b^T x + x^T bu \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2b^T ux \\ &= \begin{cases} b^T x [|b^T x| - b^T x] & \text{si } -b^T x \leq r \\ 2b^T ux & \text{si } -b^T x \geq r \end{cases} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

de manera que al considerar los casos

- Caso $-b^T x > 0$. Tenemos que $\dot{V} < 0$.
- Caso $-b^T x \leq 0$. En este caso tenemos que $\dot{V} = 0$. De la proposición (1.2.1) y observación (1.2.1), concluimos que el origen es el único conjunto A -invariante en $\{x \mid -b^T x \leq 0\}$. De acuerdo al principio de invariancia de LaSalle, concluimos que el origen es globalmente asintóticamente estable bajo el sistema a lazo cerrado (1)-(1.12).

□

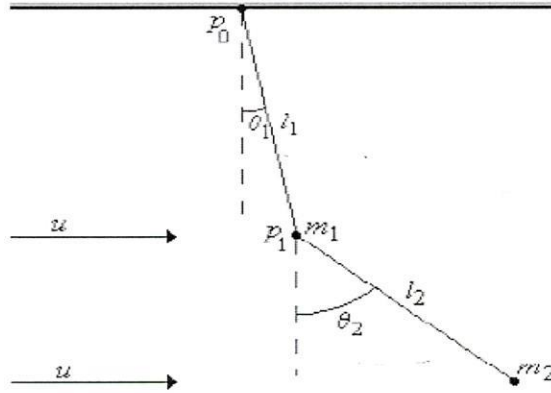
Hemos dividido el espacio de estado en dos regiones:

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \mid -b^T x > 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}_-^n = \{x \mid -b^T x \leq 0\}$$

En el medio espacio \mathbb{R}_+^n las soluciones corresponden al sistema a lazo cerrado, y en \mathbb{R}_-^n al sistema a lazo abierto. De manera que la proposición (1.4.1) implica que el sistema a lazo cerrado, obtenido al aplicar la realimentación (1.12), estabiliza globalmente al sistema.

Aplicación: estabilización de el péndulo doble.

Como una aplicación a un sistema mecánico estabilizable con controles positivos acotados, consideremos las ecuaciones de movimiento linealizadas de dos osciladores con el fin estabilizarlos mediante la utilización de una fuerza continua aplicada en una sola dirección. Cada masa m_i (ambas masas son no nulas) están fijas en los extremos de una varilla ingravida rígida de longitud l_i , $i = 1, 2$. El sistema gira sin fricción sobre los puntos del pivote p_0 y p_1 , donde p_0 está sujeto a una estructura rígida. Una fuerza u , $0 \leq u \leq 1$, es aplicada simultáneamente a las masas m_1 y m_2 como se indica en la siguiente figura.



Si $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \dot{\theta}_2$, es bien conocido que podemos escribir el sistema de ecuaciones que describen la dinámica de un péndulo doble en la forma $\dot{x} = Ax + bu$, con matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

con constante gravitacional $g = 1$, y

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2l_1l_2} \left\{ (l_1 + l_2)k + \sqrt{(l_1 + l_2)^2 k^2 - 4l_1l_2k} \right\}},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{1}{2l_1l_2} \left\{ (l_1 + l_2)k - \sqrt{(l_1 + l_2)^2 k^2 - 4l_1l_2k} \right\}},$$

$$k = 1 + \frac{m_2}{m_1}; \quad b_j = \frac{1}{m_1 l_1} + \frac{(1 - l_1 \beta_j^2) \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right)}{l_1 l_2 \beta_j^2}, \quad j = 1, 2.$$

Observamos que $\beta_1 \neq \beta_2$. Es fácil mostrar que el determinante Δ de la matriz de controlabilidad es

$$\Delta = 4b_1^2 b_2^2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2.$$

En general, $\Delta \neq 0$ excepto para ciertos valores críticos de los parámetros l_1 , l_2 y k . Observamos que la matriz A y el vector b satisfacen las condiciones a) y b), bajo la suposición $\Delta \neq 0$. Concluimos que el estado $x(t)$ del péndulo doble puede ser llevado al estado $x = 0$ con el control positivo arbitrariamente pequeño;

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [|b^T x| - b^T x] & \text{si } -b^T x \leq r \\ r & \text{si } -b^T x \geq r \end{cases}$$

El origen $x = 0$ es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable para el sistema a lazo cerrado.

Capítulo 2

Estabilización rápida de una familia de sistemas lineales positivos mediante modos deslizantes

2.1. Sistemas Lineales Positivos

Considerando el Teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler en sistemas positivos y los resultados conocidos de modos deslizantes, en particular la dinámica deslizante sobre hiperplanos $s(x) = Lx - k = 0$ de codimensión uno, es posible obtener nuevas soluciones al problema de estabilización de sistemas lineales positivos mediante controles positivos. Denotamos $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$ y $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}$.

Considere el sistema lineal homogéneo en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax \tag{2.1}$$

donde $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n, t \geq 0$, entonces la solución $x(t, t_0, x_0)$ será siempre no-negativa, es decir, $x(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^n \forall t \geq t_0$, si y sólo si la matriz A es Metzler, ver [7], [9] y [13]. A este tipo de sistemas se les denomina positivos porque el cono positivo \mathbb{R}_+^n es un conjunto invariante.

2.1.1. Matrices Metzler

Una clase de matrices cuadradas vinculadas estrechamente con las matrices no-negativas consta de todas aquellas matrices cuyos elementos fuera de la diagonal principal son todos no-negativos (cualquiera que sea el signo de los elementos sobre la diagonal principal), i.e. $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} \geq 0 \forall i \neq j$. A esta clase de matrices se les conoce comúnmente como matrices Metzler o simplemente Metzler.

Definición 2.1.1. *La matriz $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ se dice que es una matriz Metzler si se verifica que*

$$a_{ij} \geq 0 \forall i \neq j.$$

Diremos que la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es matriz Hurwitz si tiene todos sus valores propios con parte real negativa.

Definición 2.1.2. La matriz $A = (a_{ij})$ es compartamental si se cumplen las dos condiciones:

- a) A es Metzler.
- b) $\sum_i a_{ij} \leq 0$ para cada columna $j = 1, \dots, n$.

Esta observación es válida para A o bien A^T .

2.1.2. El Teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler.

Diremos que una matriz A es no-negativa si todos los elementos a_{ij} son no-negativos, i.e., $a_{ij} \geq 0 \forall i, j = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Frobenius-Perron para matrices no-negativas). *Sea A una matriz no-negativa. Entonces, existe un número real $\lambda_0 \geq 0$ y un vector $x_0 \geq 0$ tal que*

- i) $Ax_0 = \lambda_0 x_0$; y
- ii) si $\lambda \neq \lambda_0$ es cualquier otro valor propio de la matriz A , entonces $|\lambda| \leq \lambda_0$.

Ver [5] y [7].

Para las matrices del tipo Metzler se pueden obtener conclusiones completamente análogas a las del Teorema de Frobenius-Perron para matrices no-negativas. Simplemente usando el hecho de que cualquier matriz Metzler $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ puede transformarse en una matriz no-negativa (o positiva) mediante $\bar{A} = \delta I + A$, donde δ es una constante positiva apropiada. Además, puesto que \bar{A} es una matriz no-negativa, entonces posee un valor propio de Frobenius-Perron $\lambda_0 \geq 0$ y un vector propio $x_0 \geq 0$, i.e., $\bar{A}x_0 = \lambda_0 x_0$.

Se puede verificar que el valor propio de la matriz Metzler A es $\mu_0 = \lambda_0 - \delta$ y x_0 su vector propio asociado (i.e., $Ax_0 = \mu_0 x_0$). Por las características de λ_0 se tiene que el valor propio μ_0 es real, y además, es el valor con módulo máximo (valor propio dominante) de la matriz A , tal como se muestra en la figura.

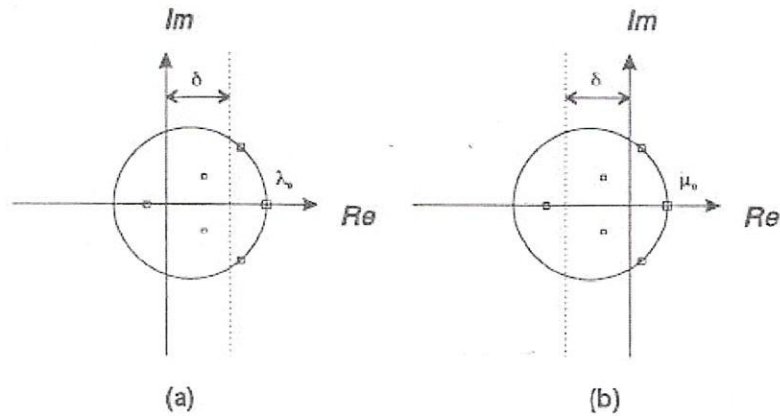


Figura 2.1: Ilustración de que μ_0 es el valor propio con parte real máxima de A . (a) Valores propios de $\bar{A} = \delta I + A$. (b) Valores Propios de A .

Teorema 2.1.2 (Teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler). *Sea $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz Metzler. Entonces, existe un número real μ_0 y un vector $x_0 \geq 0$ tal que se cumple lo siguiente:*

- a) μ_0 es un valor propio de A y $x_0 \geq 0$ su respectivo valor propio, i.e., $Ax_0 = \mu_0 x_0$.
- b) Si $\mu \neq \mu_0$ es cualquier otro valor propio de A , entonces $\Re(\mu) < \mu_0$.

2.1.3. Propiedad de la inversa de las matrices Metzler.

Existen resultados para las matrices Metzler que establece que para cualquier matriz Metzler A su inversa $-A^{-1}$ existe y es positiva, si y sólo si, todos sus valores propios están dentro del semiplano complejo izquierdo (valores propios con parte real estrictamente negativa), i.e., matrices Metzler que son a su vez Hurwitz.

Teorema 2.1.3. *Sea $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz Metzler. La inversa $-A^{-1}$ existe y es positiva si, y sólo si, A es Hurwitz (i.e., $\mu < 0$).*

La prueba de los teoremas (2.1.2) y (2.1.3) pueden verse en [5], [7], [9] y [13].

2.2. Estabilización de Sistemas Positivos Mediante Modos Deslizantes

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.2)$$

con $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ matriz Metzler y Hurwitz, $b \in \mathbb{R}_+^n$ y $u \in [r_1, r_2]$, $r_2 > r_1 \geq 0$. Consideremos el punto de equilibrio

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} \in \mathbb{R}_+^n,$$

donde $\bar{u} \in [r_1, r_2]$.

2.2.1. Problema de Estabilización

Si A es Metzler y Hurwitz en el sistema (2.2) tenemos que el único punto de equilibrio positivo $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ (con \bar{u} constante) es global asintóticamente estable. Nos planteamos la pregunta:

¿Es posible estabilizar más rápidamente en \bar{x} al considerar $u \in [r_1, r_2]$ en lugar de $u = \bar{u}$?

Para responder la pregunta anterior debemos considerar que el sistema (2.1) no es controlable; de acuerdo al teorema de controlabilidad de Brammer, ver el trabajo [2]. Ya que al ser A Metzler, tiene al menos un valor propio real, entonces el sistema no es completamente controlable con control positivo.

Corolario 2.2.1. *Si A es Metzler, el sistema (2.2) no es controlable con control positivo.*

Demostración. De acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, ya que A^T es Metzler, existen un número real μ_0 y un vector $x_0 \geq 0$ tal que $x_0^T b u \geq 0$ para todo $u \geq 0$. \square

A continuación presentamos un método deslizante para responder al problema de estabilización rápida.

2.3. Modos deslizantes para sistemas afines

Consideremos el sistema no-lineal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x_0 \quad (2.3)$$

donde $x \in X$ (subconjunto abierto de \mathbb{R}^n); la función de control $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es discontinua; f y g son campos vectoriales de clase C^1 definidos sobre X , con $g(x) \neq 0$, para toda $x \in X$. Sea una función $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , con gradiente no cero en X .

El conjunto

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = 0\}$$

representa una sub-variedad $n - 1$ dimensional en X (por el teorema de la función implícita), llamada en adelante la variedad deslizante o superficie de cambio. La función escalar s será referida a veces como “función coordenada” de la superficie. Los resultados descritos aquí son

de naturaleza local, restringida a una vecindad abierta de X y su intersección con la variedad deslizante S , se considera x_0 en tal intersección.

Una ley de control de estructura variable se obtiene al permitir a la función de control uno de los valores de retroalimentación, de acuerdo a signo de $s(x)$, definido por

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0, \quad u^+ \neq u^- \end{cases} \quad (2.4)$$

Con esta retroalimentación perseguimos hacer al conjunto S un atractor. A las funciones de control $u^+(x)$ y $u^-(x)$ los llamaremos valores de control extremo. Sobre ellas suponemos que son funciones de clase C^1 de x , y sin pérdida de generalidad, suponemos también que satisfacen $u^+(x) > u^-(x)$ para cada x en X . Denotemos por $L_h G$ la derivada direccional de la función escalar G con respecto al campo vectorial h .

Supongamos que, como resultado de aplicar la política de control (2.4) a las trayectorias de estado (2.3), se alcanza la superficie S , de tal forma que podemos definir al sistema (2.3) en el conjunto de discontinuidad S .

Considerando a la función $s = s(x)$ como variable, le aplicamos el operador derivada direccional L_{f+gu} para dar la siguiente definición.

Decimos que existe un régimen deslizante sobre S siempre que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (L_{f+gu^+} s) < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} (L_{f+gu^-} s) > 0 \quad (2.5)$$

Es decir, la tasa de cambio de la función coordenada de la superficie $s(x)$ medida en la dirección del campo controlado, es tal que se asegura la convergencia de las órbitas a la superficie S por la aplicación del control (2.4). Denotamos por ds al gradiente de $s(x)$, y sea, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar conocido de vectores y co-vectores. Viendo al gradiente $ds(x)$ como vector en el campo ortogonal al plano tangente de S en x , se tiene que las condiciones (2.5) son equivalentes a

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + gu^+ \rangle < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f + gu^- \rangle > 0 \quad (2.6)$$

De tal forma que, sobre S , las proyecciones de los campos $f + gu^+$ y $f + gu^-$ sobre el vector gradiente de $s(x)$ son opuestos en signo.

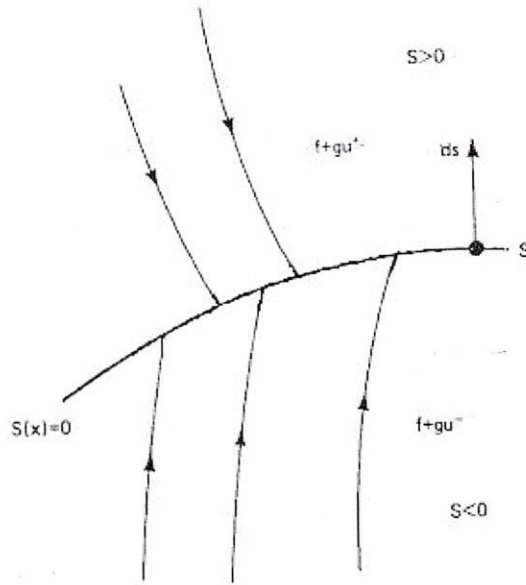


Figura 2.2: Régimen de deslizamiento sobre la variedad de cambio.

2.3.1. Condiciones de Variedad Invariante

En lo que sigue, identificamos el operador de derivada direccional aplicada a s , $L_{f+gu}s$ con el producto interior $\langle ds, f + gu \rangle$. Mediante este operador es posible definir un control u_{eq} que mantiene a la variable de estado $x(t)$ en la superficie de cambio; $s(x(t)) = 0$ para $t \in I$. A este movimiento se le denomina como movimiento deslizante ideal, este movimiento deslizante ideal se escribe usando las siguientes condiciones de variedad invariante.

$$s(x) = 0 \quad , \quad L_{f+gu_{eq}(x)}s = \langle ds, f + gu_{eq} \rangle = 0 \quad (2.7)$$

donde $u_{eq}(x)$ es una ley de control de retroalimentación de clase C^1 .

La función de control de retroalimentación $u_{eq}(x)$ es llamada la función de control equivalente. De la definición de derivada direccional y de (2.7), el control equivalente es dado explícitamente y se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle ds, f + gu_{eq} \rangle = 0 & \Leftrightarrow \langle ds, f \rangle + u_{eq}(x) \langle ds, g \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow u_{eq}(x) = -\frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} \end{aligned}$$

En esta igualdad denotaremos al gradiente ds también como $\frac{\partial s}{\partial x}$, y el producto interior $\langle ds, g \rangle$ como $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)g$, tal que

$$u_{eq}(x) = -\left(\frac{\partial s}{\partial x}g\right)^{-1} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}f; \quad \langle ds, g \rangle \neq 0 \quad (2.8)$$

Aquí debe mencionarse la unicidad de u_{eq} que establece, implícitamente, este método. Sea $\Delta_s(x)$ el subespacio del espacio tangente $T_x X$, definido para cada x por

$$\langle ds, \Delta_s(x) \rangle = 0$$

es decir, considerando como operador al gradiente $ds(x) : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que

$$\Delta_s(x) := \text{kernel}(ds(x)).$$

Aquí, $\Delta_s(x)$ es llamada la distribución deslizante asociada a S . Las condiciones (2.7) son reescritas como

$$f + gu_{eq} |_{s=0} \in \text{kernel}(ds) = \Delta_s(x)$$

con $\Delta_s(x)$ de dimensión $n - 1$.

2.3.2. Condiciones de Existencia

Diremos que el control equivalente está bien definido siempre que este exista y esté determinado unívocamente de las condiciones de invariancia (2.7).

Lema 2.3.1. *Una condición necesaria y suficiente para que el control equivalente esté bien definido es que la condición de transversalidad*

$$\langle ds, g \rangle \neq 0 \tag{2.9}$$

se satisfaga sobre S .

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que el control equivalente está bien definido de (2.8). Entonces necesariamente $\langle ds, g \rangle \neq 0$ sobre S , de otra forma, $\langle ds, f \rangle$ también sería cero para el control equivalente a existir. Sin embargo, en este caso, u_{eq} no será definido de manera única ya que (2.7) sería trivialmente satisfecho por cualquier control.

(\Leftarrow) Por otro lado, si $\langle ds, g \rangle \neq 0$ en S , entonces evidentemente u_{eq} existe de (2.8). Supóngase, para probar la unicidad, que la condición de invariancia es satisfecha por dos controles equivalentes u_{1eq} y u_{2eq} diferentes, si la condición de transversalidad se mantiene, entonces de (2.7) se sigue que

$$\langle ds, f + gu_{1eq} \rangle = \langle ds, f + gu_{2eq} \rangle$$

por bilinealidad

$$\begin{aligned} \langle ds, f \rangle + u_{1eq} \langle ds, g \rangle &= \langle ds, f \rangle + u_{2eq} \langle ds, g \rangle \\ \Rightarrow (u_{1eq} - u_{2eq}) \langle ds, g \rangle &= 0 \end{aligned}$$

por lo que se concluye

$$u_{1eq} = u_{2eq}$$

se tiene la unicidad. \square

El lema anterior establece que el campo vectorial g no pertenece a la distribución Δ_s . En otras palabras, g no puede ser tangencial a la variedad deslizante S , y de aquí, g es transversal a $\text{kernel}(ds)$. La condición de transversalidad representa sólo una condición necesaria para la existencia de un régimen deslizante, como lo prueba el siguiente lema.

Lema 2.3.2. *Si existe un movimiento deslizante sobre S entonces*

$$\langle ds, g \rangle < 0 \quad (2.10)$$

sobre S .

Demostración. De la definición de un movimiento deslizante, dado por (2.5) ó (2.6), tenemos sobre S

$$\langle ds, f + gu^+ \rangle < 0 \text{ y } \langle ds, f + gu^- \rangle > 0$$

y de aquí;

$$\langle ds, (u^+ - u^-)g \rangle = (u^+ - u^-) \langle ds, g \rangle < 0$$

por hipótesis $u^+ > u^-$, se concluye que $\langle ds, g \rangle < 0$. \square

Lema 2.3.3. *Una condición necesaria para la existencia de un movimiento deslizante sobre S es que el control equivalente esté bien definido sobre S .*

Teorema 2.3.1. *Una condición necesaria y suficiente para la existencia local de un régimen deslizante sobre S es que, en X , para x en S*

$$u^-(x) < u_{eq}(x) < u^+(x) \quad (2.11)$$

Demostración. (\Rightarrow) Supóngase que existe un movimiento deslizante sobre S , entonces de (2.6) se sigue que, sobre S ,

$$\langle ds, f + u^+g \rangle = \langle ds, f \rangle + u^+ \langle ds, g \rangle < 0$$

en virtud de (2.8) y ya que, de lema 2.3.2, la condición de transversalidad (2.10) se mantiene necesariamente

$$\frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} + u^+ = -u_{eq}(x) + u^+ > 0$$

por otro lado, sobre S , se tiene que $\langle ds, f + u^+g \rangle > 0$; usando el mismo argumento se sigue que

$$-u_{eq}(x) + u^- < 0.$$

(\Leftarrow) Para probar la implicación del teorema, sea $u_{eq}(x)$ función de retroalimentación de clase C^1 que satisface (2.8) y (2.11). De esto se sigue que

$$0 < u_{eq}(x) - u^-(x) < u^+(x) - u^-(x)$$

y de aquí

$$0 < w_{eq}(x) := \frac{u_{eq}(x) - u^-(x)}{u^+(x) - u^-(x)} < 1$$

de donde se tiene la desigualdad

$$0 < 1 - w_{eq}(x) < 1$$

y de aquí

$$\langle ds, f + u_{eq}g \rangle = w_{eq} \langle ds, f + u^+g \rangle + (1 - w_{eq}) \langle ds, f + u^-g \rangle = 0$$

se sigue que necesariamente las cantidades $\langle ds, f + u^+g \rangle$ y $\langle ds, f + u^-g \rangle$ tienen signo opuesto. Como vimos antes, podemos siempre redefinir S para tener sobre esta superficie

$$\langle ds, f + u^-g \rangle > 0$$

y entonces $\langle ds, f + u^+g \rangle < 0$. Sin embargo, esto nos lleva a tener la ley de control

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0 \end{cases}$$

que actuando sobre el sistema (2.3) satisface

$$\langle ds, f + u^+g \rangle |_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + u^+g \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^+} L_{f+gu^+} s < 0$$

y

$$\langle ds, f + u^-g \rangle |_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f + u^-g \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^-} L_{f+gu^-} s > 0$$

Es decir, existe un régimen deslizante sobre S . □

2.4. Modos deslizantes para sistemas lineales

Consideremos en esta sección un caso particular de los sistemas afines, el cambio de variable que se considera en este caso es $f(x) = Ax$ y $g(x) = b$, de modo que tenemos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.12)$$

A es Metzler y Hurwitz, $b \in \mathbb{R}_+^n$ y $u \in [r_1, r_2]$, $r_1 > r_2 \geq 0$. Denotemos las componentes $a_{ij} \geq 0$, para $i \neq j$, donde A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

Como referencia en el espacio de estado, consideremos los puntos de equilibrio positivos

$$\bar{x}_1 = -A^{-1}br_1 \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = -A^{-1}br_2$$

tal que $\|\bar{x}_1\| < \|\bar{x}_2\|$ ya que

$$\|\bar{x}_1\| = \|-A^{-1}br_1\| = \|-A^{-1}b\| r_1 < \|-A^{-1}b\| r_2 = \|-A^{-1}br_2\| = \|\bar{x}_2\|$$

La hipótesis de que A es Hurwitz, implica que cada punto de equilibrio \bar{x}_i es globalmente atractor para las soluciones del sistema retroalimentado

$$\dot{x} = Ax + br_i \quad i = 1, 2.$$

Con el objetivo de describir el deslizamiento, consideramos un vector constante $L \in \mathbb{R}_+^n$ y un escalar constante $k > 0$, de manera que el segmento de hiperplano contenido en \mathbb{R}_+^n , representado por la igualdad

$$Lx = k$$

con valores numéricos de L y k por elegir de forma que se satisface la condición de deslizamiento, expresadas con el par de desigualdades:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} L(Ax + br_1) < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} L(Ax + br_2) > 0$$

o bien

$$\begin{aligned} L(Ax + br_1) &< 0 && \text{para } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tales que } Lx - k > 0 \\ L(Ax + br_2) &> 0 && \text{para } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tales que } Lx - k < 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para determinar la magnitud de k , consideremos el segmento de recta que une a los puntos de equilibrio

$$x = \lambda \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bar{x}_2, \quad \text{para } \lambda \in (0, 1)$$

elegimos k de forma que el hiperplano, representado por $Lx - k = 0$, pase por un punto de equilibrio predeterminado \bar{x} obtenido con $\lambda = \frac{1}{2}$; es decir,

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_2$$

por consiguiente

$$k = L\bar{x}$$

Con las desigualdades (2.13) y, los valores de los parámetros r_1 , r_2 , \bar{x} , k y L , es conocido que mediante la aplicación del control discontinuo

$$u(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - k > 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - k < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

tendremos que cualquier solución $x(t)$ que inicia fuera del hiperplano $Lx = k$, alcanza al hiperplano en tiempo finito, ya que al considerar la función de Lyapunov $V = \frac{1}{2}(Lx - k)^2$, tenemos que el control (2.14) es la solución al siguiente problema de optimización

$$\min_{u \in [r_1, r_2]} \frac{dV}{dt} = \min_{u \in [r_1, r_2]} \{(Lx - k) L(Ax + bu)\}$$

Una vez cumplidas las desigualdades (2.13), se origina una dinámica invariante sobre el hiperplano $Lx = k$, podemos decir que está dinámica corresponde a la aplicación del llamado control equivalente, denotado por u_{eq} y definido para x tales que $Lx = k$, de manera que lo podemos calcular de la igualdad $L\dot{x} = 0$. Es decir,

$$L(Ax + bu_{eq}) = 0,$$

por consiguiente

$$u_{eq} = -\frac{L Ax}{L b}.$$

Con este resultado tenemos definido el control globalmente estabilizante para toda $x \in \mathbb{R}_+^n$:

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - k > 0 \\ u_{eq} & \text{si } Lx - k = 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - k < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Buscamos valores para los parámetros involucrados en el sistema realimentado (2.12)-(2.15) de manera que la estabilización sea rápida.

2.4.1. Como elegir el plano $Lx = k$

Es claro que para tener positividad de la función $u_{eq} = -\frac{L Ax}{L b}$, es necesario y suficiente que $L Ax < 0$.

Consideremos la matriz Metzler A dada en (2.12) con entradas $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$. Tal que el término LAx nos queda

$$\begin{aligned} LAx &= (l_1 \ l_2 \ \cdots \ l_n) \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= -x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 \cdots - x_n p_n \\ &= -\langle p, x \rangle \quad \text{para } p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n) \end{aligned}$$

es decir, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ establece la igualdad

$$\begin{aligned} -l_1 a_{11} + l_2 a_{21} + l_3 a_{31} + l_4 a_{41} + \cdots + l_n a_{n1} &= -p_1 \\ l_1 a_{12} - l_2 a_{22} + l_3 a_{32} + l_4 a_{42} + \cdots + l_n a_{n2} &= -p_2 \\ l_1 a_{13} + l_2 a_{23} - l_3 a_{33} + l_4 a_{43} + \cdots + l_n a_{n3} &= -p_3 \\ &\vdots \\ l_1 a_{1n} + l_2 a_{2n} + l_3 a_{3n} + l_4 a_{4n} + \cdots + l_n a_{nn} &= -p_n \end{aligned}$$

que escribimos matricialmente como

$$A^T L^T = -p$$

por consiguiente $L^T = (-A^{-1})^T p \in \mathbb{R}_+^n$; ya que A es Metzler y Hurwitz.

Es decir, para cada $p \in \mathbb{R}_+^n$ tenemos un vector $L = -p^T A^{-1} \in \mathbb{R}_+^n$, tal que $u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb} > 0$. De este modo tenemos que

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\frac{LAx}{Lb} \\ &= -\frac{(-p^T A^{-1}) Ax}{Lb} \\ &= -\frac{p^T x}{p^T (-A^{-1})b} > 0 \end{aligned}$$

ya que $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Veamos ahora como se ve el sistema a lazo cerrado con u_{eq} , para obtener así la matriz A_{eq} .

$$\begin{aligned} A_{eq}x &= Ax + bu_{eq}(x) = Ax + b \left(-\frac{LAx}{Lb} \right) \\ &= \left(Ax + b \frac{p^T x}{p^T (-A^{-1})b} \right) \end{aligned}$$

de modo que

$$A_{eq} = \left(A + b \frac{p^T}{p^T (-A^{-1})b} \right). \quad (2.16)$$

Observamos que la matriz (2.16) es Metzler, ya que es la suma de una matriz Metzler y una matriz con entradas no negativas.

Consideremos el sistema de control positivo y el plano $s = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Lx = k\}$.

Lema 2.4.1. $p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ si y sólo si existe un deslizamiento sobre s .

Demostración. (\Leftarrow) La condición $p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ implica que $u_{eq} > 0$ para $x \in \mathbb{R}_+^n$. De acuerdo al teorema 1 (pag. 1363) en [8] al considerar $r_2 > 0$ suficientemente grande ($\|\bar{x}_1\| < \|\bar{x}_2\|$) tenemos que existe un deslizamiento sobre el hiperplano s .

(\Rightarrow) Sin perder generalidad supongamos que $p_1 < 0$, entonces existe una vecindad $\Omega \subset S$ del punto $(x_1, 0, \dots, 0)$ tal que $LAx = -p_1 x_1 \geq 0$ implicando que $u_{eq}(x) \leq 0$, por consiguiente no existe deslizamiento en Ω . \square

Proposición 2.4.1. $\lambda = 0 \in \sigma(A_{eq})$.

Demostración. $b \in \text{kernel}\left(I - b\frac{L}{Lb}\right)$, ya que

$$\left(I - b\frac{L}{Lb}\right)b = b - b\frac{L}{Lb}b = 0,$$

entonces $\det A_{eq} = 0$. \square

La proposición anterior prueba que la matriz A_{eq} tiene como valor propio al cero, es decir, el hiperplano donde actúa el control u_{eq} es de dimensión $n - 1$. En particular, por ser A Hurwitz tenemos que $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ es punto de equilibrio de $\dot{x} = Ax + bu_{eq}$, ya que al sustituir en la última igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{eq}x \\ &= A\bar{x} + b\frac{-LAx}{Lb} \\ &= A(-A^{-1}b\bar{u}) + b\frac{-LA(-A^{-1}b\bar{u})}{Lb} \\ &= -b\bar{u} + b\left(-\frac{L(-b\bar{u})}{Lb}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hemos probado que $\lambda = 0$ es el valor propio de la matriz $A_{eq} = A + b\left(-\frac{p^T}{p^T(-A^{-1})b}\right)$; además es Metzler por ser la suma de una matriz Metzler y una matriz con entradas no negativas.

Por otro lado, tenemos que si $x^* \in \text{Ker}\left(I - b\frac{L}{Lb}\right)$, entonces $x^* = \frac{bL}{Lb}x^*$. Por lo tanto, $x^* \in \text{Im}(b)$, implicando que $\lambda = 0$ es el valor propio correspondiente al vector propio x^* . En cada una de las aplicaciones expuestas más adelante, mostramos que $\lambda = 0$ es el valor propio dominante de A_{eq} (de acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler); esto

implica que la dinámica del sistema $\dot{x} = A_{eq}x$ tiene al estado $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ como único punto de equilibrio.

Además, de las desigualdades (2.13), es fácil ver que para x tal que $s(x) = 0$ se cumple que

$$L(Ax + br_1) < 0 < L(Ax + br_2)$$

como $Lb > 0$, tenemos que

$$Lbr_1 < -LAx < Lbr_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 < -\frac{LAx}{Lb} < r_2$$

concluimos que $u_{eq} \in [r_1, r_2]$. En particular, se cumple que

$$u_{eq}(\bar{x}) = -\frac{1}{Lb}LA\bar{x} = -\frac{1}{Lb}LA(-A^{-1}b\bar{u}) = -\frac{1}{Lb}L(-b\bar{u}) = \bar{u}.$$

Más aun, denotemos al conjunto de valores propios de A como:

$$\sigma(A) = \{\lambda_i\} \text{ para } i = 1, \dots, n-1 \quad \text{y} \quad \sigma(A_{eq}) = \{\lambda_{di}\} \text{ para } i = 1, \dots, n-1.$$

Sea $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, una consideración más que podríamos hacer es ver si podemos dar condiciones para las $l_i > 0$ de forma que los valores propios de $\sigma(A_{eq})$ cumplan con la condición siguiente

$$\max_i \{\Re(\lambda_{di})\} \leq \max_i \{\Re(\lambda_i)\} \quad (2.17)$$

En general resulta complicado encontrar condiciones para las l_i para tener (2.17), en el siguiente capítulo se aborda este problema.

Capítulo 3

Aplicación de un caso particular de Sistemas Compartimentales

En este capítulo consideramos casos particulares de sistemas compartimentales, de forma que las matrices A y A_{eq} son compartimentales, con A matriz Hurwitz. En el caso de A_{eq} , si es matriz compartimental, entonces $\sigma(A_{eq}) \cap \mathbb{C}^+ = \emptyset$, implicando que el valor propio $\lambda = 0$ es dominante, según el teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler. Además implica que el punto $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ es el único equilibrio, y es atractor, en la dinámica deslizante.

Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones esta mezcla se puede modelar matemáticamente con una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal que contiene la mezcla. En el presente capítulo se estudian 3 modelos de sistemas dinámicos lineales positivos, en ellos damos elementos para mejorar la estabilización mediante la teoría de modos deslizantes.

3.1. El caso de mezcla con dos tanques

En esta sección estudiamos un sistema en dos dimensiones (dos tanques), la descripción del problema es el siguiente:

Dos tanques, A y B , contienen V_1 y V_2 litros de salmuera respectivamente. En los tanques A y B se disolvieron inicialmente a y b libras de sal respectivamente. Ambos tanques están conectados, habiendo un flujo f_2 de salmuera del tanque A al tanque B , y un flujo f_3 del tanque B al tanque A . Además, del exterior hay un flujo de f_1 , con c_1 libras de sal por litro, hacia el tanque A , y del tanque B hay un flujo f_4 hacia el exterior. Deseamos determinar la cantidad de sal presente en cada tanque en el momento t .

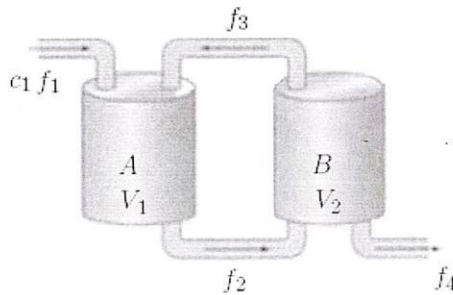


Figura 3.1: Configuración de dos tanques interconectados.

Para formar el modelo matemático, denotamos por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ la cantidad de libras de sal presente en el tanque A y en el tanque B, respectivamente. La dinámica del sistema es representada por el par de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -f_2 \frac{x_1}{V_1} + f_3 \frac{x_2}{V_2} + f_1 c_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2 \frac{x_1}{V_1} - f_3 \frac{x_2}{V_2} - f_4 \frac{x_2}{V_2}\end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = a$ y $x_2(0) = b$.

Matricialmente, tenemos que el sistema anterior es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_3+f_4}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

con

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Si queremos que los volúmenes V_1 y V_2 sean constantes, entonces deben cumplirse las igualdades

$$f_2 = f_3 + f_4 \quad y \quad f_1 = f_4. \quad (3.2)$$

donde la matriz A es matriz Metzler. Este sistema podemos verlo como un caso particular del sistema de control

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (3.3)$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u f_1 - \frac{f_2 x_1}{V_2} + \frac{f_3 x_2}{V_2} \\ \frac{f_2 x_1}{V_1} - \frac{f_2 x_2}{V_2} \end{pmatrix}$$

donde el parámetro de control toma el valor particular $u = c_1$. Calculando los valores propios de la matriz A , llegamos a que estos son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2V_1 V_2} \left(-f_2(V_2 + V_1) \pm \sqrt{f_2^2(V_2 - V_1)^2 + 4V_1 V_2 f_3 f_2} \right) \quad (3.4)$$

Veamos ahora que estos valores propios son reales negativos. De las desigualdades tenemos que $f_2 = f_3 + f_4$, de lo cual se concluye que $f_3 < f_2$. De modo que de la expresión

$$f_2^2(V_2 - V_1)^2 + 4V_1 V_2 f_3 f_2$$

se tiene que

$$4V_1 V_2 f_3 f_2 < 4V_1 V_2 f_2^2$$

es decir

$$f_2^2(V_2 - V_1)^2 + 4V_1 V_2 f_3 f_2 < f_2^2(V_2 - V_1)^2 + 4V_1 V_2 f_2^2 = f_2^2(V_2 + V_1)^2$$

por consiguiente

$$-f_2(V_2 + V_1) + \sqrt{f_2^2(V_2 - V_1)^2 + 4V_1 V_2 f_3 f_2} < 0$$

concluimos entonces que A es Hurwitz.

De acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices metzler, tenemos que el punto de equilibrio \bar{x} es positivo y asintóticamente estable; i.e.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -A^{-1} b \bar{u} \\ &= - \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 V_1 \frac{f_1}{f_2 - f_3} \\ c_1 V_2 \frac{f_1}{f_2 - f_3} \end{pmatrix} \\ &= c_1 \frac{f_1}{f_2 - f_3} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se concluye que la concentración de entrada c_1 es la que determina la cantidad de sal en cada tanque.

La dinámica es sencilla, al aplicar un control constante \bar{u} , cualquier solución que inicie en \mathbb{R}^2 tiende asintóticamente al punto de equilibrio $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$.

A continuación, probaremos (para este sistema estudiado) que se puede estabilizar más rápido al considerar un control de la forma $u \in [r_1, r_2]$ en lugar de $u = \bar{u}$. Con

$$0 \leq r_1 < \bar{u} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) < r_2$$

Sea

$$L = (l_1, l_2), \quad \text{con } l_i > 0$$

Denotemos a $s(x) = Lx - k$, entonces $s(x) = l_1x_1 + l_2x_2 - k = 0$ tal que para $Lx = k$ se cumple que $L\dot{x} = 0$ y

$$k = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)(l_1V_1 + l_2V_2)$$

de forma que la recta $s(x) = 0$ pasa por el punto medio del par de puntos

$$\bar{x}_1 = r_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = r_2 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Si consideramos el control discontinuo

$$u(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } s(x) > 0 \\ r_2 & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Veremos ahora que para el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu$$

con u de la forma (3.7) existe un modo deslizante sobre la recta $s(x) = 0$. Dado que

$$u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb}$$

se sigue que para tener deslizamiento con control positivo sobre la recta $s(x) = 0$ es necesario que $LAx < 0$. Además, cabe recalcar que por el punto fijo \bar{x} (punto fijo sobre la recta de deslizamiento) pasan muchas rectas (ver figura 3.2) en las cuales se define el dominio deslizante, es importante entonces encontrar la recta óptima del dominio deslizante. Más aún, así como es relevante encontrar dicha recta, también necesitamos minimizar λ_d .

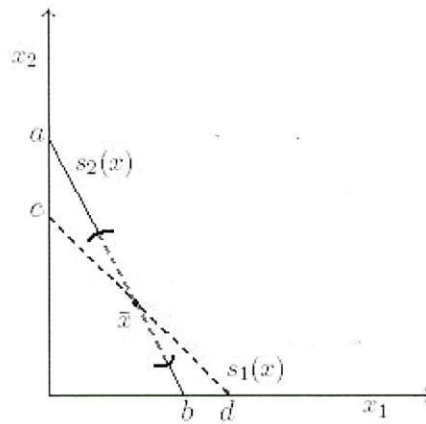


Figura 3.2: En esta figura se presentarán dos segmentos de deslizamiento, el \overline{ab} y \overline{cd} , la parte punteada representa el dominio deslizando en cada uno de ellos. Queda claro que el dominio deslizando en el segmento \overline{cd} es mayor.

Veamos ahora que es posible minimizar λ_d cambiando la pendiente de la recta deslizando.

$$\begin{aligned} LAx &= (l_1, l_2) \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= -x_1 \left(\frac{f_2 l_1}{V_1} - \frac{f_2 l_2}{V_1} \right) - x_2 \left(\frac{f_2 l_2}{V_2} - \frac{f_3 l_1}{V_2} \right) \end{aligned}$$

Para tener que $LAx < 0$, deben cumplirse el par de desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{f_2 l_1}{V_1} - \frac{f_2 l_2}{V_1} &\geq 0 \\ \frac{f_2 l_2}{V_2} - \frac{f_3 l_1}{V_2} &\geq 0 \end{aligned}$$

las cuales se resumen en

$$\frac{f_3}{f_2} \leq \frac{l_2}{l_1} \leq 1.$$

Ya que $Lb = (l_1 \ l_2) \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_1 l_1$, tenemos que

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\frac{LAx}{Lb} \\ &= \frac{-x_1 \left(\frac{f_2 l_1}{V_1} - \frac{f_2 l_2}{V_1} \right) - x_2 \left(\frac{f_2 l_2}{V_2} - \frac{f_3 l_1}{V_2} \right)}{f_1 l_1} \end{aligned}$$

así que la dinámica deslizante, dada por

$$\dot{x} = Ax + bu_{eq}$$

nos queda

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V_1 l_1} & \frac{f_2 l_2}{V_2 l_1} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

donde la matriz

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V_1 l_1} & \frac{f_2 l_2}{V_2 l_1} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix}$$

tiene como valores propios $\lambda_{d1} = 0$ y $\lambda_{d2} = -\frac{f_2}{V_1 V_2 l_1} (V_1 l_1 + V_2 l_2)$ de forma que el valor propio λ_d del modo deslizante es

$$\lambda_d = -\frac{f_2}{V_1 V_2 l_1} (V_1 l_1 + V_2 l_2)$$

Si suponemos que $l_1 = l_2$ y $V_1 = V_2$ de (2.13) se tiene que

$$r_1 < \frac{x_1}{V_1} < r_2$$

con

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\frac{L A x}{L b} \\ &= \frac{-x_1 \left(\frac{f_2 l_1}{V_1} - \frac{f_2 l_2}{V_1} \right) - x_2 \left(\frac{f_2 l_2}{V_2} - \frac{f_3 l_1}{V_2} \right)}{f_1 l_1} \\ &= \frac{1}{V_1} \frac{x_2 (f_2 - f_3)}{f_1} \\ &= \frac{1}{V_1} (V_1 r_2 - x_1) \\ &= r_2 - \frac{x_1}{V_1} \end{aligned}$$

además

$$\lambda_d = -\frac{2f_2}{V_1}$$

es decir, en todo el segmento de recta $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid s(x_1, x_2) = 0\}$ existe un deslizamiento.

Si aceptamos la asignación

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} L (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ &= \frac{1}{2} L (-A^{-1} b r_1 - A^{-1} b r_2) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} k &= V_1 f_1 \frac{l_1}{f_2 - f_3} (r_1 + r_2) \\ &= V_1 l_1 (r_1 + r_2). \end{aligned}$$

Observamos que si $r_1 = 0$, entonces todo el segmento de recta $x_1 + x_2 = V_1 r_2$ en \mathbb{R}_+^2 es deslizante.

Considerando $V_1 = V_2$ y $l_1 = l_2$ en (3.8), tenemos que la dinámica deslizante es dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{f_2}{V_1} (x_1 - x_2) \\ &= -\frac{f_2}{V_1} \left(2x_1 - \frac{k}{l_1} \right) \\ &= -\frac{f_2}{V_1} (2x_1 - V_1 (r_1 + r_2)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

tenemos el punto de equilibrio $\bar{x}_1 = \frac{1}{2} V_1 (r_1 + r_2)$, es decir, $\lim_{t \rightarrow 0} x_1(t) = \frac{1}{2} V_1 (r_1 + r_2)$; este punto de equilibrio es el punto medio del segmento de deslizamiento.

3.1.1. Rapidez de convergencia

Consideremos el sistema (3.3), con $l_1 = l_2$ y $V_1 = V_2$, tenemos que

$$u(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } x_1 + x_2 > V_1 l_1 (r_1 + r_2) \\ u_{eq} & \text{si } x_1 + x_2 = V_1 l_1 (r_1 + r_2) \\ r_2 & \text{si } x_1 + x_2 < V_1 l_1 (r_1 + r_2) \end{cases} \tag{3.10}$$

Observación 3.1.1. *La desigualdad (2.17), implica que cualquier solución $x(t, x_0)$ que inicie en la superficie deslizante (x_0 tal que $x_{10} + x_{20} = V_1 l_1 (r_1 + r_2)$), tiende más rápido al punto de equilibrio \bar{x} = bajo la acción de u_{eq} que bajo la acción del control constante \bar{u} . Más precisamente, existe una vecindad S_ϵ de la superficie de cambio S , tal que cualquier solución $x(t, x_0)$ que inicie en la vecindad S_ϵ tiende más rápido al punto de equilibrio \bar{x} = mediante la acción de u_{eq} que bajo la acción del control constante \bar{u} .*

Dada una condición inicial $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$, tal que $x_{10} + x_{20} > V_1 l_1 (r_1 + r_2)$, consideremos los tiempos t_d , t_f y t_c , donde

- t_d es el tiempo en que la solución de $\dot{x} = Ax + bu$ (con u de la forma (3.7)) que inicia en x_0 llega a la recta de cambio $x_1(t_d) + x_2(t_d) = V_1 l_1 (r_1 + r_2)$ (o $s(x_1, x_2) = 0$).
- $t_f > t_d > 0$ es el tiempo en que la solución (que llega a la recta de cambio y que inicia en x_0) entra a la ϵ -vecindad $\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$, es decir, $\|x(t_f) - \bar{x}\| = \epsilon$, donde $\bar{x} = -Ab\bar{u}$.

c) t_c es el tiempo tal que la solución del sistema $\dot{x} = Ax + b\bar{u}$ satisface $\|x(t_c) - \bar{x}\| = \epsilon$.

El siguiente diagrama resume lo anterior.

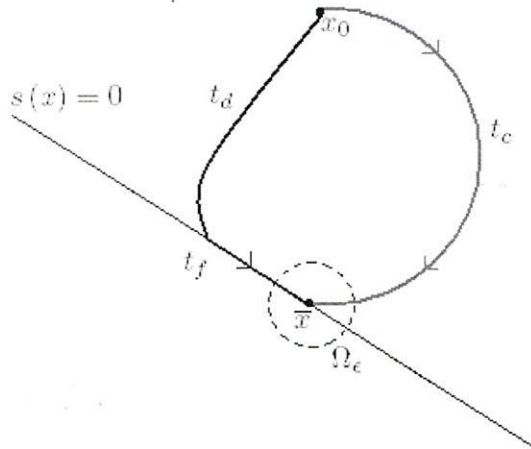


Figura 3.3: Aunque lo ideal en este trabajo sería lograr que $t_d + t_f < t_c$, desafortunadamente no existe un resultado que nos garantice esto. Para el caso $n = 2$ se logra esta de desigualdad.

3.1.2. Ejemplo numérico.

Consideremos el sistema (3.1) con los valores numéricos

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 = 10 \\ f_1 &= f_4 = 1 \\ f_2 &= 3 \\ f_3 &= 2 \quad \text{y} \quad u \in [0, 4]. \end{aligned}$$

tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Claramente se tiene volumen constante, ya que $f_2 = f_3 + f_4$. De (3.6), se tiene

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix},$$

Como $\bar{u} = 2$ se tiene que $\bar{x} = 20$ (es el punto fijo sobre el deslizamiento), con $l_1 = l_2 = 1$ y $k = V_1 l_1 (r_1 + r_2) = 40$, la recta de cambio es $x_1 + x_2 = 40$.

Ya que

$$u_{eq} = r_2 - \frac{x_1}{V_1} = 4 - 0,1x_1$$

de (3.10) se sigue que

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 + x_2 > 40 \\ 4 - 0,1x_1 & \text{si } x_1 + x_2 = 40 \\ 4 & \text{si } x_1 + x_2 < 40 \end{cases} \quad (3.12)$$

luego entonces, tenemos que existe deslizamiento en todo el intervalo $0 < x_1 < 40$, ya que $0 < 4 - 0,1x_1 < 4 \Leftrightarrow 0 < 40 - x_1 < 40$.

De igual forma, se tiene

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V_1 l_1} & \frac{f_2 l_2}{V_2 l_1} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,3 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}$$

de modo que $\sigma(A_{eq}) = \{0, -0,6\}$, esto no lleva a que $\lambda_d = -0,6$. Comparemos ahora el valor de λ_d con los valores propios de $\sigma(A)$ para verificar que $\lambda_d < \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Ahora bien

$$A = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}$$

se sigue que $\sigma(A) = \{-5,5051 \times 10^{-2}, -0,54495\}$. Concluimos finalmente que

$$\lambda_d = -0,6 < \{-5,5051 \times 10^{-2}, -0,54495\}.$$

Tomemos ahora las consideraciones que se hicieron anteriormente para los tiempos de convergencia t_d , t_f y t_c .

Para obtener t_d .

Consideremos la condición inicial $x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$, entonces la solución para esta x_0 es

$$\begin{aligned} x(t, u) &= \begin{pmatrix} x_1(t, u) \\ x_2(t, u) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 26,33e^{-5,5051 \times 10^{-2} t} - 6,3299e^{-0,54495 t} \\ 7,7526e^{-0,54495 t} + 32,247e^{-5,5051 \times 10^{-2} t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

el tiempo de llegada de esta solución a la recta de cambio $s(x_1, x_2) = 0$ se da con la ecuación

$$x_1(t_d, u) + x_2(t_d, u) = 40$$

es decir

$$\begin{aligned} 26,33e^{-5,5051 \times 10^{-2} t_d} - 6,3299e^{-0,54495 t_d} + \\ 7,7526e^{-0,54495 t_d} + 32,247e^{-5,5051 \times 10^{-2} t_d} = 40 \end{aligned} \quad (3.13)$$

eligiendo el cambio de variable $z = e^{-t_d}$, (3.13) es equivalente a

$$1,4227z^{0,54495} + 58,577z^{5,5051 \times 10^{-2}} = 40 \quad (3.14)$$

resolviendo se tiene que $z = 9,6445 \times 10^{-4}$, luego

$$e^{-t_d} = 9,6445 \times 10^{-4} \Leftrightarrow t_d = -\ln(9,6445 \times 10^{-4})$$

por lo tanto $t_d = 6,9440$.

Para obtener t_f .

Una vez conocido el tiempo de llegada (de la solución con la misma condición inicial) consideramos la condición inicial $x(e^{At_d}x_0)$ sobre la recta de cambio, es decir

$$\begin{aligned} x(t_d) &= e^{\begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} (6,9440)} \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17,821 \\ 22,179 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tenemos entonces la condición inicial, ahora consideramos la solución deslizante. De (3.9) se tiene que

$$\dot{x}_1 = 12 - 0,6x_1$$

luego entonces

$$x_1(t) = e^{-0,6t} (C + 20e^{0,6t})$$

con $x(0) = C + 20 = 17,821$ se tiene que $C = -2,179$. Ahora bien, la solución particular es $x_1(t) = 20 - \exp(-0,6t)$. La condición para t_f es representada mediante la igualdad

$$|x(t_f) - 20| = \epsilon = 0,001 \Rightarrow 2,179e^{-0,6t_f} = 0,001$$

entonces

$$t_f = \frac{1}{0,6} \ln \left(\frac{2,179}{0,001} \right) = 12,811$$

finalmente el tiempo de llegada a la ϵ -vecindad es $t_d + t_f = 6,9440 + 12,811 = 19,755$.

Para obtener t_c .

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u} \quad (3.15)$$

mediante la aplicación $\bar{u} = 2$ se tiene que (3.15) es

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución esta dada por

$$x(t) = e^{At} (x_0 + A^{-1}b\bar{u}) - A^{-1}b\bar{u}$$

numéricamente se tiene

$$x(t) = e^{\begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} t} \left(\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

la condición para $t_c > 0$ es $\|x(t_c) - \bar{x}\| = \epsilon$, en este caso

$$\begin{aligned} \|x(t_c) - \bar{x}\| &= \left\| x(t_c) - \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| e^{\begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} t_c} \left(\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \right) \right\| = \epsilon = 0,001 \end{aligned}$$

ya que la expresión

$$e^{\begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} t_c} \left(\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 8,1650e^{-5,5051 \times 10^{-2} t_c} - 8,1650e^{-0,54495 t_c} \\ 10e^{-0,54495 t_c} + 10e^{-5,5051 \times 10^{-2} t_c} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} 166,67e^{-1,0899 t_c} + 166,67e^{-0,1101 t_c} + 66,66e^{-0,54495 t_c} e^{-5,5051 \times 10^{-2} t_c} &= \epsilon^2 \\ &= 1 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

despejando tenemos que $t_c = 171,95$. Resumiendo tenemos que

$$\begin{aligned} t_d &= 6,9440 \\ t_f &= 12,811 \\ t_c &= 171,95 \end{aligned}$$

fácilmente se tiene $t_d + t_f = 19,755 < t_c = 171,95$. A continuación se presenta una simulación donde se da la gráfica $d(t)$ vs t con $d(t) = |x - \bar{x}|$, de modo que podamos ver que se cumplen los resultados numéricos. En todas las simulaciones mostradas en este trabajo se considero la norma 1, es decir, si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ entonces $d(t) = |x_1 - \bar{x}_1| + \dots + |x_n - \bar{x}_n|$.

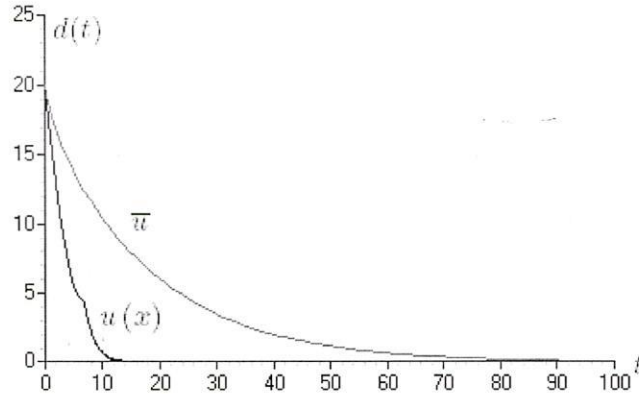


Figura 3.4: En esta simulación se tomó la condición inicial $x_0 = (20, 40)^T$, la curva roja representa la solución del sistema (3.11) con $\bar{u} = 2$, mientras que la otra curva representa la solución con u de la forma (3.12).

3.2. Un caso de mezcla con tres tanques

En esta sección estudiamos un sistema en tres dimensiones (tres tanques), la descripción del problema es el siguiente:

Tres tanques, A, B y C contienen V_1, V_2 y V_3 litros de salmuera respectivamente. En dichos tanques se disolvieron inicialmente a, b y c libras de sal respectivamente.. Ambos tanques están conectados, habiendo un flujo f_2 de salmuera del tanque B al tanque A , un flujo f_3 del tanque A al tanque B , un flujo f_4 del tanque C al tanque B , un flujo f_5 del tanque B al tanque C . Además, del exterior hay un flujo de f_1 , con c_1 libras de sal por litro, hacia el tanque A , y del tanque C hay un flujo f_6 hacia el exterior. Deseamos determinar la cantidad de sal presente en cada tanque en el momento t .

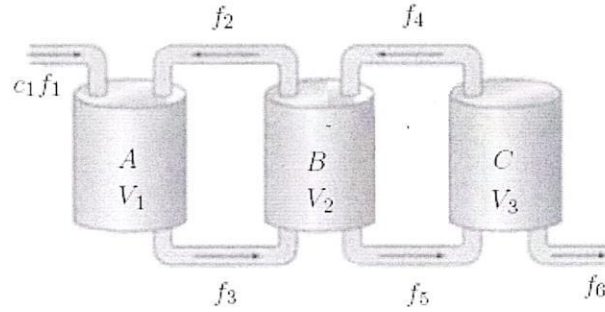


Figura 3.5: El parámetro $u = c_1$ representa la concentración de entrada con el flujo f_1 .

Para que cada tanque tenga volumen constante debe cumplirse que

$$\begin{aligned} f_1 &= f_6 \\ f_3 &= f_1 + f_2 \\ f_3 + f_4 &= f_2 + f_5 \\ f_5 &= f_6 + f_4 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por simplicidad consideremos $V_i = V$ para $i = 1, 2, 3$. De modo que la configuración de los tanques nos lleva al sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{f_3}{V}x_1 + \frac{f_2}{V}x_2 + f_1u \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{f_3}{V}x_1 + \frac{f_2 + f_5}{V}x_2 + \frac{f_4}{V}x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{f_5}{V}x_2 - \frac{f_4 + f_6}{V}x_3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

matricialmente

$$\dot{x} = Ax + bu$$

Observación 3.2.1. Los pasos algebraicos que se siguen para determinar la solución del sistema (3.17) son similares a los de la sección anterior.

Con

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{f_3}{V} & \frac{f_2}{V} & 0 \\ \frac{f_3}{V} & -\frac{f_2+f_5}{V} & \frac{f_4}{V} \\ 0 & \frac{f_5}{V} & -\frac{f_4+f_6}{V} \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{f_3}{V} & \frac{f_2}{V} & 0 \\ \frac{f_3}{V} & -\frac{f_3+f_4}{V} & \frac{f_4}{V} \\ 0 & \frac{f_1+f_4}{V} & -\frac{f_4+f_1}{V} \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con inversa

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{V}{f_2 - f_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{f_2}{f_3} & \frac{f_2}{f_3} \frac{f_4}{f_4 + f_1} \\ 1 & 1 & \frac{f_4}{f_4 + f_1} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{V}{f_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{f_2}{f_3} & \frac{f_2}{f_3} \frac{f_4}{f_5} \\ 1 & 1 & \frac{f_4}{f_5} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de modo que el punto de equilibrio correspondiente es

$$\begin{aligned} \bar{x} = -A^{-1}bu &= \frac{V}{f_2 - f_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{f_2}{f_3} & \frac{f_2}{f_3} \frac{f_4}{f_4 + f_1} \\ 1 & 1 & \frac{f_4}{f_4 + f_1} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} Vu. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nótese que el punto de equilibrio (3.18) es análogo al punto (3.5). Veamos ahora que existe un deslizamiento para este sistema.

Supongamos que existe un plano $l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = k$ con $l_i > 0$, tenemos de (2.16) la forma explícita de A_{eq}

$$A_{eq} = \left(I - \frac{bL}{Lb} \right) A = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} \frac{l_2 f_3}{l_1} & \frac{l_2(f_3 + f_4)}{l_1} - \frac{l_3(f_1 + f_4)}{l_1} & \frac{l_3(f_1 + f_4)}{l_1} - \frac{l_2 f_4}{l_1} \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

ahora podemos obtener los valores propios de A_{eq} y verificar que $\sigma(A_{eq}) \in \mathbb{R}^-$. En general para valores arbitrario de $l_i > 0$; tenemos que la matriz A_{eq} tiene valores propios reales negativos, ya que

$$A_{eq} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\sigma(A_{eq}) = \{\lambda_{d_1} = 0, \lambda_{d_2}, \lambda_{d_3}\}$, donde

$$\lambda_{d_{2,3}} = -\frac{1}{2V} \left(f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3 \frac{l_2}{l_1} \right) \pm \frac{1}{2V} \sqrt{\left(f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3 \frac{l_2}{l_1} \right)^2 - \frac{4}{l_1} f_3 (f_1 + f_4) N}$$

donde

$$N = l_1 + l_2 + l_3$$

y de aquí tenemos que $\frac{4}{l_1} f_3(f_1 + f_4)N > 0$, por lo tanto $\lambda_{d_{2,3}} \in \mathbb{C}^-$.

$$\lambda_{d_2} \in \mathbb{R}^- \quad \text{si} \quad \left(f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3 \frac{l_2}{l_1} \right)^2 - \frac{4}{l_1} f_3(f_1 + f_4)N > 0$$

concluimos entonces que $\sigma(A_{eq}) \in \mathbb{R}^-$.

Al existir una dinámica deslizante sobre el plano $l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = k$, tenemos que

$$\begin{aligned} LAx &= (l_1 \quad l_2 \quad l_3) \begin{pmatrix} -\frac{f_3}{V} & \frac{f_2}{V} & 0 \\ \frac{f_3}{V} & -\frac{f_3+f_4}{V} & \frac{f_4}{V} \\ 0 & \frac{f_1+f_4}{V} & -\frac{f_4+f_1}{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_2 S_1 - x_1 S_2 - x_3 S_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{V} l_3(f_1 + f_4) - \frac{1}{V} l_2(f_3 + f_4) + \frac{1}{V} l_1 f_2 \\ S_2 &= \frac{1}{V} l_1 f_3 - \frac{1}{V} l_2 f_3 \\ S_3 &= \frac{1}{V} l_3(f_1 + f_4) - \frac{1}{V} l_2 f_4 \end{aligned}$$

se sigue que $u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb}$, de modo que existe un deslizamiento con control positivo si $LAx < 0$. Es importante tomar en cuenta que podemos tener varios planos con deslizamiento, por tal motivo consideramos también el objetivo de convertir la superficie en atractora con la cuenta de atracción la mayor posible. En adelante, veamos que podemos tener definidos cuatro planos con deslizamiento.

3.2.1. Plano 1

Para simplificar (3.20) supongamos que $S_2 = 0$ y $S_3 = 0$, lo cual implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} l_1 f_3 - \frac{1}{V} l_2 f_3 &= 0 \\ \frac{1}{V} l_3(f_1 + f_4) - \frac{1}{V} l_2 f_4 &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica que $l_1 = l_2$ y $l_3 = \frac{f_4}{f_1+f_4} l_2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} LAx &= x_2 \left(\frac{1}{V} l_3(f_1 + f_4) - \frac{1}{V} l_2(f_3 + f_4) + \frac{1}{V} l_1 f_2 \right) \\ &= \frac{1}{V} l_2 x_2 (f_2 - f_3) < 0 \quad \forall x_2 > 0; \end{aligned}$$

ya que $f_3 = f_1 + f_2$, i.e $f_3 > f_2$.

Debido a la equivalencia $u_{eq} > 0 \Leftrightarrow LAx < 0$, con estos valores de l_1 , l_2 y l_3 , concluimos que

el deslizamiento está asegurado en todo el plano $Lx = k$. Veamos ahora cuales son los valores propios correspondientes a A_{eq} con el valor asignado a cada l_i . De (3.19) se sigue que

$$A_{eq} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -f_3 & f_3 & 0 \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix}$$

le corresponden los valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_{d_1} &= 0 \\ \lambda_{d_{2,3}} &= -\frac{1}{2V} (f_1 + 2f_3 + 2f_4) \pm \frac{1}{2V} \sqrt{f_1^2 - 4f_1f_3 + 4f_1f_4 + 4f_3^2 - 4f_3f_4 + 4f_4^2} \end{aligned}$$

Sea

$$G = \left(f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3 \frac{l_2}{l_1} \right)^2 - \frac{4}{l_1} f_3 (f_1 + f_4) (l_1 + l_2 + l_3)$$

entonces, para $l_1 = l_2$ y $l_3 = \frac{f_4}{f_1 + f_4} l_2$, los valores propios son reales negativos. Pues

$$\begin{aligned} G &= (f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3)^2 - 4f_3(f_1 + f_4) \left(2 + \frac{f_4}{f_1 + f_4} \right) \\ &= (f_1 + 2f_3 + 2f_4)^2 - (8f_1f_3 + 12f_3f_4) \\ &= (f_1 + 2f_4)^2 - 4f_3(f_1 + f_4) + 4f_3^2 > 0 \end{aligned}$$

3.2.2. plano 2

Consideremos ahora que en (3.20) se tiene $S_1 = 0$ y $S_3 = 0$.

$$l_3(f_1 + f_4) - l_2(f_3 + f_4) + l_1f_2 = 0 \quad (3.21)$$

$$l_3(f_1 + f_4) - l_2f_4 = 0 \quad (3.22)$$

entonces

$$LAx = -x_1 \left(\frac{1}{V} l_1 f_3 - \frac{1}{V} l_2 f_3 \right) \quad (3.23)$$

de (3.21) y (3.22) se tiene que

$$l_1 = \frac{1}{f_2 f_4} (f_1 f_3 l_3 + f_3 f_4 l_3)$$

sustituyendo l_1 en (3.23)

$$\begin{aligned} LAx &= -x_1 \left(\frac{1}{V} l_1 f_3 - \frac{1}{V} l_2 f_3 \right) \\ &= -x_1 \left(\frac{1}{V} \left(\frac{1}{f_2 f_4} (f_1 f_3 l_3 + f_3 f_4 l_3) \right) f_3 - \frac{1}{V} \left(\frac{l_3 (f_1 + f_4)}{f_4} \right) f_3 \right) \\ &= \frac{f_3 l_3}{V f_2 f_4} (f_2 - f_3) (f_1 + f_4) x_1 \end{aligned}$$

de modo que

$$A_{eq} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -2\frac{l_2}{l_1}f_3 & \frac{l_2}{l_1}(f_3 + f_4) - \frac{l_3}{l_1}(f_1 + f_4) & \frac{l_3}{l_1}(f_1 + f_4) - \frac{l_2}{l_1}f_4 \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix}$$

al sustituir los valores $l_2 = \frac{l_3(f_1+f_4)}{f_4}$ y $l_1 = \frac{1}{f_2f_4}(f_1f_3l_3 + f_3f_4l_3)$ en A_{eq} tenemos

$$A_{eq} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -f_2 & f_2 & 0 \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix}$$

la cual, tiene valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_{d_1} &= 0 \\ \lambda_{d_{2,3}} &= -\frac{1}{2V}(f_1 + f_2 + f_3 + 2f_4) \pm \frac{1}{2V}\sqrt{D_1} \end{aligned}$$

con

$$D_1 = f_1^2 - 2f_1f_2 - 2f_1f_3 + 4f_1f_4 + f_2^2 + 2f_2f_3 - 4f_2f_4 + f_3^2 + 4f_4^2.$$

Haciendo unos pasos algebraicos se puede verificar que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$.

3.2.3. Plano 3

Supongamos ahora que $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$, es decir

$$\begin{aligned} l_3(f_1 + f_4) - l_2(f_3 + f_4) + l_1f_2 &= 0 \\ l_3f_3 - l_2f_3 &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$LAx = -\frac{1}{V}(l_3(f_1 + f_4) - l_2f_4).$$

Implicando que $l_1 = l_2$ y sustituyendo en la primer igualdad tenemos que

$$\begin{aligned} l_3 &= \frac{l_2(f_3 + f_4) - l_1f_2}{f_1 + f_4} \\ &= \frac{l_2(f_3 + f_4) - l_2f_2}{f_1 + f_4} \\ &= \frac{l_2(f_1 + f_4)}{f_1 + f_4} \\ &= l_2 \end{aligned}$$

ya que $f_3 = f_1 + f_2$. Esta asignación implica elegir el plano $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{k}{l_1}$; tal que

$$LAx = -\frac{l_1}{V}f_1x_3 < 0$$

implicando que existe deslizamiento en todo el plano, de forma que la dinámica deslizante es representada por

$$\begin{aligned} A_{eq} &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -2\frac{l_2}{l_1}f_3 & \frac{l_2}{l_1}(f_3 + f_4) - \frac{l_3}{l_1}(f_1 + f_4) & \frac{l_3}{l_1}(f_1 + f_4) - \frac{l_2}{l_1}f_4 \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -f_3 & f_3 - f_1 & f_1 \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Los valores propios de (3.24) son

$$\begin{aligned} \lambda_{d_1} &= 0 \\ \lambda_{d_{2,3}} &= -\frac{1}{2V}(f_1 + 2f_3 + 2f_4) \pm \frac{1}{2V}\sqrt{f_1^2 - 8f_1f_3 + 4f_1f_4 + 4f_3^2 - 4f_3f_4 + 4f_4^2} \end{aligned}$$

de manera que $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$.

3.2.4. Plano 4

Ahora supongamos que en (3.20) l_1 , l_2 y l_3 son tales que

$$\begin{aligned} l_3(f_1 + f_4) - l_2(f_3 + f_4) + l_1f_2 &= 0 \\ l_1 &> l_2 \\ l_3(f_1 + f_4) - l_2f_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

en particular, consideremos la asignación $l_1 = f_3$ y $l_2 = f_2$. Esta asignación implica que

$$\begin{aligned} l_3 &= \frac{l_2(f_3 + f_4) - l_1f_2}{f_1 + f_4} \\ &= \frac{f_2(f_3 + f_4) - f_3f_2}{f_1 + f_4} \\ &= \frac{f_2f_4}{f_1 + f_4} \end{aligned}$$

implicando que

$$l_3(f_1 + f_4) - l_2f_4 = \left(\frac{f_2f_4}{f_1 + f_4}\right)(f_1 + f_4) - l_2f_4 = 0.$$

Es decir $l_1 = f_3$, $l_2 = f_2$ y $l_3 = \frac{f_2f_4}{f_1 + f_4}$, de manera que en la expresión general de A_{eq} tenemos que

$$\begin{aligned} A_{eq} &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -2\frac{l_2}{l_1}f_3 & \frac{l_2}{l_1}(f_3 + f_4) - \frac{l_3}{l_1}(f_1 + f_4) & \frac{l_3}{l_1}(f_1 + f_4) - \frac{l_2}{l_1}f_4 \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -f_2 & f_2 & 0 \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

teniendo como valores propios

$$\begin{aligned}\lambda_{d_1} &= 0 \\ \lambda_{d_{2,3}} &= -\frac{1}{2V} (f_1 + f_2 + f_3 + 2f_4) \pm \frac{1}{2V} \sqrt{D_2}\end{aligned}$$

con

$$D_2 = f_1^2 - 2f_1f_2 - 2f_1f_3 + 4f_1f_4 + f_2^2 + 2f_2f_3 - 4f_2f_4 + f_3^2 + 4f_4^2.$$

Lo que hemos obtenido hasta este punto son cuatro planos donde se tiene deslizamiento, lo que sigue ahora es verificar que plano presenta mayor cuenta de atracción, o bien, veamos en cuál de los planos la matriz A_{eq} tiene los valores propios más a la izquierda del semiplano izquierdo, para lograr tal objetivo consideremos el siguiente problema de optimización:

3.2.5. Problema de Optimización

A continuación nos proponemos elegir un plano, es decir parámetros l_1 , l_2 y l_3 positivos, tal que el conjunto $\{\sigma(A_{eq}) \setminus 0\}$ este lo más a la izquierda de \mathbb{C}^- , con el objetivo de aumentar la rapidez de convergencia de las soluciones.

Considerando LAx dada por (3.20) y la condición $LAx < 0$ para tener deslizamiento, implica que deben cumplirse las desigualdades

$$\begin{aligned}l_3(f_1 + f_4) - l_2(f_3 + f_4) + l_1f_2 &\leq 0 \\ l_1f_3 - l_2f_3 &\geq 0 \\ l_3(f_1 + f_4) - l_2f_4 &\geq 0\end{aligned}$$

no todas iguales a cero. Equivalentemente

$$l_3(f_1 + f_4) \leq l_2(f_3 + f_4) - l_1f_2 \quad (3.25)$$

$$l_1 \geq l_2 \quad (3.26)$$

$$l_3(f_1 + f_4) \geq l_2f_4 \quad (3.27)$$

de (3.25) y (3.27) deducimos que

$$l_2f_4 \leq l_3(f_1 + f_4) \leq l_2(f_3 + f_4) - l_1f_2 \Rightarrow \frac{l_2f_4}{f_1 + f_4} \leq l_3 \leq \frac{l_2(f_3 + f_4) - l_1f_2}{f_1 + f_4}$$

ésta última desigualdad representa una cota para l_3 . Podemos resumir las desigualdades (3.26), (3.27) y (3.28) al par de desigualdades

$$l_1 \geq l_2 \quad \text{y} \quad \frac{l_2f_4}{f_1 + f_4} \leq l_3 \leq \frac{l_2(f_3 + f_4) - l_1f_2}{f_1 + f_4}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} & \frac{l_2}{l_1} \leq 1 \quad \text{y} \\ 0 \leq & \frac{f_4}{f_1 + f_4} \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \leq \frac{l_3}{l_1} \leq \frac{f_3 + f_4}{f_1 + f_4} \left(\frac{l_2}{l_1} \right) - \frac{f_2}{f_1 + f_4} \leq \frac{f_5}{f_1 + f_4} = 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

la última desigualdad se deduce de la condición $f_3 + f_4 = f_2 + f_5$. En la segunda desigualdad de (3.28) debe cumplirse que

$$0 \leq \frac{f_3 + f_4}{f_1 + f_4} \left(\frac{l_2}{l_1} \right) - \frac{f_2}{f_1 + f_4} \Leftrightarrow \frac{f_2}{f_3 + f_4} \leq \frac{l_2}{l_1}$$

implicando que las restricciones (3.28) pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} & \frac{f_2}{f_3 + f_4} \leq \frac{l_2}{l_1} \leq 1 \quad \text{y} \\ 0 \leq & \frac{f_4}{f_1 + f_4} \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \leq \frac{l_3}{l_1} \leq \frac{f_3 + f_4}{f_1 + f_4} \left(\frac{l_2}{l_1} \right) - \frac{f_2}{f_1 + f_4} \leq \frac{f_5}{f_1 + f_4} = 1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Es decir, hemos encontrado una cota para $\frac{l_2}{l_1}$ y $\frac{l_3}{l_1}$. Por lo tanto podemos resolver en general el problema

$$\min_{\left[\frac{l_2}{l_1}, \frac{l_3}{l_1} \right]} \left\{ - \left(f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3 \frac{l_2}{l_1} \right) \pm \sqrt{\left(f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3 \frac{l_2}{l_1} \right)^2 - 4f_3(f_1 + f_4)N} \right\} \quad (3.30)$$

sujeta a las restricciones (3.29) donde

$$N = 1 + \frac{l_2}{l_1} + \frac{l_3}{l_1}.$$

Sea

$$D = \left(f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3 \frac{l_2}{l_1} \right)^2 - 4f_3(f_1 + f_4) \left(1 + \frac{l_2}{l_1} + \frac{l_3}{l_1} \right)$$

consideremos la cota encontrada para $\frac{l_3}{l_1}$, tal que

$$D_m = \left(f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3 \frac{l_2}{l_1} \right)^2 - 4f_3(f_1 + f_4) \left(1 + \frac{l_2}{l_1} + \frac{f_4}{f_1 + f_4} \frac{l_2}{l_1} \right)$$

donde $D \geq D_m$. Tomemos ahora el cambio de variable $x = \frac{l_2}{l_1}$, de modo que podemos ver la expresión D_m como

$$D_m(x) = (f_1 + f_3 + 2f_4 + f_3x)^2 - 4f_3(f_1 + f_4) \left(1 + x + \frac{f_4}{f_1 + f_4}x \right)$$

calculando el mínimo de la función $D_m(x)$

$$\frac{dD_m(x)}{dx} = -2f_3(f_1 - f_3 + 2f_4 - xf_3)$$

teniendo como punto crítico $x = \frac{f_1 + 2f_4 - f_3}{f_3}$, se sigue que

$$\frac{d^2D_m(x)}{dx} = 2f_3^2 > 0$$

entonces $x = \frac{f_1 + 2f_4 - f_3}{f_3}$ representa un mínimo para la función $D_m(x)$, además se verifica que

$$D_m\left(\frac{f_1 + 2f_4 - f_3}{f_3}\right) = 4f_4(f_1 + f_2) > 0.$$

Concluimos entonces que el mínimo de la función $D_m(x)$ es positivo, y por la desigualdad $D \geq D_m$ se sigue que $D > 0$, es decir, los valores propios son reales. Finalmente, el problema de optimizar (3.30) nos lleva a que

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{l_1} = 1 &\Rightarrow \frac{f_4}{f_1 + f_4} \leq \frac{l_3}{l_1} \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{l_3}{l_1} = 1 \end{aligned}$$

tales condiciones implican que $l_1 = l_2 = l_3$, como estas son las condiciones para $l_i > 0$ en el **plano 3**, concluimos que en dicho plano se presenta mayor rapidez de convergencia. Probemos ahora que para cada par $\frac{l_2}{l_1}$ y $\frac{l_3}{l_1}$ la matriz A_{eq} es Metzler. Para

$$A_{eq} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -f_3 \frac{l_2}{l_1} & (f_3 + f_4) \frac{l_2}{l_1} - (f_1 + f_4) \frac{l_3}{l_1} & (f_1 + f_4) \frac{l_3}{l_1} - f_4 \frac{l_2}{l_1} \\ f_3 & -(f_3 + f_4) & f_4 \\ 0 & (f_1 + f_4) & -(f_1 + f_4) \end{pmatrix}$$

con las restricciones (3.29). Para que A_{eq} sea matriz Metzler solo debemos probar que dos entradas del primer renglon tiene valores mínimos no negativos para planos admisibles, de forma que

$$(f_3 + f_4) \frac{l_2}{l_1} - (f_1 + f_4) \frac{l_3}{l_1} \geq 0 \quad (3.31)$$

$$(f_1 + f_4) \frac{l_3}{l_1} - f_4 \frac{l_2}{l_1} \geq 0. \quad (3.32)$$

Con (3.32);

$$\begin{aligned} &\text{mín} \left\{ (f_3 + f_4) \frac{l_2}{l_1} - (f_1 + f_4) \frac{l_3}{l_1} \right\} \\ &= \left(\frac{f_2}{f_3 + f_4} \right) (f_3 + f_4) - \left(\left(\frac{f_2}{f_3 + f_4} \right) \frac{f_3 + f_4}{f_1 + f_4} - \frac{f_2}{f_1 + f_4} \right) (f_1 + f_4) \\ &= f_2 > 0 \end{aligned}$$

Con (3.33):

$$\begin{aligned} & \min \left\{ (f_1 + f_4) \frac{l_3}{l_1} - f_4 \frac{l_2}{l_1} \right\} \\ & = \left\{ \left(\frac{f_4}{f_1 + f_4} \right) (f_1 + f_4) - f_4 \right\} = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que A_{eq} es Metzler.

En el siguiente ejemplo damos un sistema de control en el cual se tomarón los valores $l_1 = f_3$, $l_2 = l_2$ y $l_3 = \frac{f_2 f_4}{f_1 + f_4}$.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos el sistema (3.17) con valores numéricos

$$\begin{aligned} f_2 &= 2 & f_3 &= 3 \\ f_4 &= 4 & f_5 &= 5 \\ f_1 &= f_6 & &= 1 \\ V &= 100 \end{aligned}$$

matricialmente se tiene

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{100} & \frac{2}{100} & 0 \\ \frac{3}{100} & -\frac{7}{100} & \frac{4}{100} \\ 0 & \frac{5}{100} & -\frac{5}{100} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

equivalentemente

$$A = \begin{pmatrix} -0,03 & 0,02 & 0 \\ 0,03 & -0,07 & 0,04 \\ 0 & 0,05 & -0,05 \end{pmatrix}$$

con valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3.8033 \times 10^{-3} \\ \lambda_2 &= -3.5690 \times 10^{-2} \\ \lambda_3 &= -0.11051. \end{aligned}$$

Ahora con el plano $l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = k$, donde $l_1 = 3$, $l_2 = 3$ y $l_3 = \frac{8}{5}$ se tiene que

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.03 & -0.07 & 0.04 \\ 0 & 0.05 & -0.05 \end{pmatrix}$$

con valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_{d_1} &= 0 \\ \lambda_{d_2} &= -0.03 \\ \lambda_{d_3} &= -0.11. \end{aligned}$$

RS T 130015

Tenemos el punto de equilibrio

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -A^{-1}bu \\ &= \frac{V}{f_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{f_2}{f_3} & \frac{f_2}{f_3} \frac{f_4}{f_1+f_4} \\ 1 & 1 & \frac{f_4}{f_1+f_4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} Vu = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} u.\end{aligned}$$

Aceptando la asignación con $r_1 = 0$ y $r_2 > 0$, por asignar.

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{2}L(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ &= \frac{1}{2}L(-A^{-1}br_1 - -A^{-1}br_2) \\ &= L \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} r_2\end{aligned}$$

con control

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } l_1x_1 + l_2x_2 + l_3 > k \\ u_{eq} & \text{si } l_1x_1 + l_2x_2 + l_3 = k \\ r_2 & \text{si } l_1x_1 + l_2x_2 + l_3 < k \end{cases} \quad (3.33)$$

donde

$$0 \leq u_{eq} \leq r_2$$

con

$$\begin{aligned}u_{eq} &= -\frac{LAx}{Lb} \\ &= -\frac{1}{l_1f_1} (l_1 \quad l_2 \quad l_3) \begin{pmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.03 & -0.07 & 0.04 \\ 0 & 0.05 & -0.05 \end{pmatrix} x \\ &= \left(0.03 - 0.03\frac{l_2}{l_1}\right) x_1 + \left(0.07\frac{l_2}{l_1} - 0.05\frac{l_3}{l_1} - 0.02\right) x_2 + \left(0.05\frac{l_3}{l_1} - 0.04\frac{l_2}{l_1}\right) x_3.\end{aligned}$$

Aquí conviene determinar el valor de r_2 . Se sigue de los valores para las variables $l_i > 0$ que

$$u_{eq} = 0.01x_1 - 1.3333 \times 10^{-2}x_2 - 7.8886 \times 10^{-31}x_3$$

o bien

$$u_{eq} = 0.01x_1 - 1.3333 \times 10^{-2}x_2.$$

Para $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in [0, 200]^3$ tenemos que

$$\text{máx } u_{eq} \leq 0.01(200) = 2 \Rightarrow r_2 = 2.$$

concluimos que

$$0 \leq u_{eq} \leq 2$$

A continuación presentamos una simulación para ilustrar los resultados anteriores.

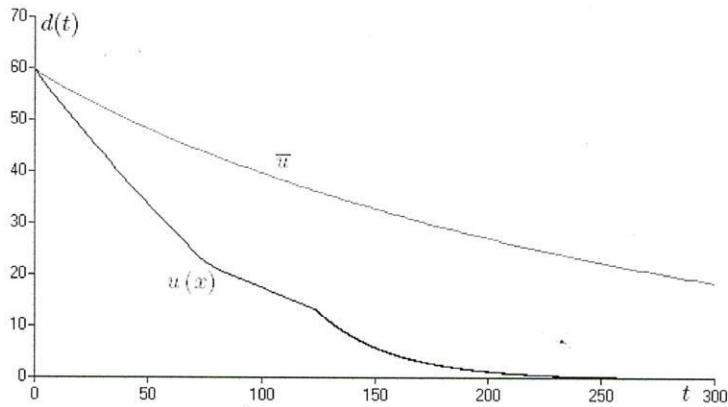


Figura 3.6: En esta simulación se tomó la condición inicial $x_0 = (40, 50, 60)^T$. La curva roja representa la solución al sistema (3.17) con \bar{u} , mientras que la otra curva representa la solución con deslizamiento.

3.3. El caso de mezclas con n tanques

Como motivación al problema de estabilización rápida y aspectos que completen el trabajo presentado en esta tesis, se analizará en forma general el caso de mezcla con n tanques, puesto que se trata de un grado de complejidad bastante mayor. Consideremos la siguiente configuración de tanques;

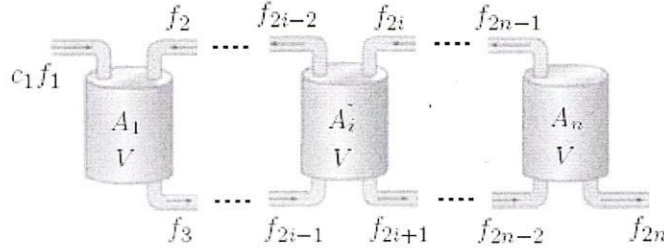


Figura 3.7: En esta configuración de tanques se considera el volumen V constante.

Tal configuración nos lleva al sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu \quad u \geq 0$$

con $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ matriz Metzler y Hurwitz, $b \in \mathbb{R}_+^n$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -f_3 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_3 & -(f_2 + f_5) & f_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{2i-1} & -(f_{2i-2} + f_{2i+1}) & f_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & f_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2n-1} & -(f_{2n-2} + f_{2n}) \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Como el volumen se considera constante, debe cumplirse la ecuación

$$f_{2i-1} + f_{2i} = f_{2i-2} + f_{2i+1} \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

en el i -ésimo tanque.

Observación 3.3.1. Dado que la matriz A es compartamental, se sigue del teorema de Gerschgorin (ver [4] y [5]) que si A es matriz compartamental, entonces $\sigma(A) \cap \mathbb{C}^+ = \emptyset$. Aquí, $\sigma(A)$ representa el conjunto de valores propios de A y $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$.

De acuerdo a la teoría de modos deslizantes para sistema lineales (visto en el capítulo 2), existe un deslizamiento sobre el plano $S = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Lx = k\}$ para el sistema anterior.

3.4. Estabilización de la insulina en el modelo de Sorensen

De acuerdo al modelo de la dinámica de la insulina y glucosa en el cuerpo humano presentado por Sorensen en [11], en esta sección presentamos la estabilización de la parte lineal

del modelo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{3.34}$$

con $x^T = (x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}) \in \mathbb{R}_+^7$ representando los niveles de insulina. El parámetro de control positivo u representa niveles de insulina, de manera que lo consideramos acotado; $u \in [r_1, r_2]$, con $r_2 > r_1 \geq 0$. Observamos que la matriz A de este modelo es Metzler y Hurwitz, de manera que se cumplen las condiciones de positividad y de deslizamiento presentadas en la sección I. En este problema de estabilización suponemos que $b^T = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ y determinaremos los valores numéricos de los parámetros que definen el hiperplano $Lx - k = 0$, donde $L = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7)$.

Observación 3.4.1. *Este sistema de control lineal no es controlable con control positivo, de acuerdo a las condiciones de controlabilidad de Brammer, ver [6], y de acuerdo al corolario 2.2.1. Por lo que no podemos estabilizar las soluciones en cualquier punto.*

Una vez cumplidas las desigualdades (2.13), definimos el control deslizante u_{eq} en el segmento de hiperplano $Lx = k$. De $L\dot{x} = 0$ tenemos que

$$u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb} \in [r_1, r_2].$$

Dado que $k = L\bar{x}$, donde $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$, tenemos que

$$k = (r_1 + r_2)(0,45781l_1 + 0,45781l_2 + 0,45781l_3 + 0,27387l_4 + 0,35202l_5 + 0,6885l_6 + 0,31014l_7).$$

Probaremos que existe L tal que se presenta un deslizamiento estable sobre el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}_+^7 \mid Lx = k\}$. Para fijar los valores de $l_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, 7$ y $k > 0$, de forma que se cumplan las desigualdades (2.13). De manera que

$$LAx = L \begin{pmatrix} -1,73 & 1,73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,454 & -3,151 & 0 & 0,909 & 0,727 & 1,06 & 0 \\ 0 & 0,765 & -0,765 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,094 & 0,378 & -0,789 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,411 & 0 & 0 & -1,835 & 0 & 0 \\ 0 & 1,418 & 0 & 0 & 0 & -1,874 & 0,455 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & -0,111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{aligned}LAx &= x_{14}(1,06l_2 - 1,874l_6 + 0,05l_7) - x_{11}(0,765l_3 - 0,378l_4) - x_9(1,73l_1 - 0,454l_2) \\ &+ x_{10}(1,73l_1 - 3,151l_2 + 0,765l_3 + 0,094l_4 + 1,411l_5 + 1,418l_6) - x_{15}(0,11l_7 - 0,45l_6) \\ &- x_{12}(0,789l_4 - 0,909l_2) - x_{13}(1,835l_5 - 0,727l_2),\end{aligned}$$

para simplificar la expresión anterior asignamos valores para algunas l_i , en particular para eliminar los terminos x_9 , x_{11} , x_{12} , x_{13} y x_{15} , lo que lleva a considerar el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1,73 & -0,454 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,765 & -0,378 & 0 \\ 0 & -0,909 & 0 & 0,789 & 0 \\ 0 & -0,727 & 0 & 0 & 1,835 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a la cual le corresponde la solución no trivial

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66239 \\ 2,5241 \\ 1,4369 \\ 2,9080 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además, consideremos que $0,111l_7 - 0,455l_6 = 0$, de forma que $l_6 = 0,24396l_7$; tenemos que

$$L = (0,66239 \quad 2,5241 \quad 1,4369 \quad 2,9080 \quad 1 \quad 0,24396l_7 \quad l_7)$$

tal que

$$LAx = (0,34594l_7 - 4,0239)x_{10} + (2,6755 - 0,40718l_7)x_{14}.$$

Ya que $b^T u = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad u \quad 0)^T$ tenemos que $Lbr_1 = l_6 r_1 = 0,24396l_7 r_1$. Para determinar valores para los parámetros positivos tal que se cumplan las desigualdades (2.13), consideramos los calculos

$$\begin{aligned} L\dot{x} &= L(Ax + bu) \\ &= LAx + Lbu \\ &= ((0,34594l_7 - 4,0239)x_{10} + (2,6755 - 0,40718l_7)x_{14} + l_6 u) \\ &= ((0,34594l_7 - 4,0239)x_{10} + (2,6755 - 0,40718l_7)x_{14} + 0,24396l_7 u) \end{aligned} \tag{3.35}$$

también debemos considerar que

$$Lx - k = 0,66239x_9 + 2,5241x_{10} + 1,4369x_{11} + 2,908x_{12} + x_{13} + 0,24396l_7x_{14} + l_7x_{15} - k = 0$$

es decir

$$\begin{aligned} x_{10} &= \frac{1}{2,5241}k - \frac{1}{2,5241}(0,66239x_9 + 1,4369x_{11} + 2,908x_{12} + x_{13} + 0,24396l_7x_{14} + l_7x_{15}) \\ &= \frac{1}{2,5241}k - (0,26243x_9 + 0,56927x_{11} + 1,1521x_{12} + 0,39618x_{13} + 9,6652 \times 10^{-2}l_7x_{14} \\ &\quad + 0,39618l_7x_{15}) \\ &= \frac{1}{2,5241}k - L_m x_m \end{aligned}$$

de forma que

$$Lx - k > 0 \Leftrightarrow x_{10} > \frac{1}{2,5241}k - L_m x_m \Leftrightarrow u = r_1$$

$$Lx - k < 0 \Leftrightarrow x_{10} < \frac{1}{2,5241}k - L_m x_m \Leftrightarrow u = r_2$$

si suponemos que en (3.35), $0,34594l_7 - 4,0239 = 0$ entonces $l_7 = 11,632$; tal que

$$L = (0,66239 \quad 2,5241 \quad 1,4369 \quad 2,9080 \quad 1 \quad 2,8377 \quad 11,632)$$

de forma que

$$L\dot{x} = (2,6755 - 0,40718(11,632))x_{14} + 0,24396(11,632)u$$

es decir

$$L\dot{x} = 2,8377u - 2,0608x_{14} \quad (3.36)$$

las desigualdades (2.13) nos quedan

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} L\dot{x} = \lim_{s \rightarrow 0^+} L(Ax + br_1) = 2,8377r_1 - 2,0608x_{14} < 0 \Leftrightarrow x_{14} > 1,3770r_1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} L\dot{x} = \lim_{s \rightarrow 0^-} L(Ax + br_2) = 2,8377r_2 - 2,0608x_{14} > 0 \Leftrightarrow x_{14} < 1,3770r_2$$

que resumimos en las condiciones para r_1 y r_2 :

$$r_1 < 0,72622x_{14} < r_2$$

si aceptamos que $13,770 = \min x_{14} \leq x_{14} = \max x_{14} = 34,425$, entonces elegimos $r_1 < 10$ y $r_2 > 25$. Podemos considerar $k = 300$. El control equivalente nos queda

$$u_{eq} = -\frac{L A x}{L b} = 0,72622x_{14},$$

que confirmamos con el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\frac{L A x}{L b} \\ &= -2,3012 \times 10^{-5}x_{10} - 2,3611 \times 10^{-6}x_9 + 1,5858 \times 10^{-6}x_{11} + 1,7972 \times 10^{-6}x_{12} \\ &\quad - 7,2946 \times 10^{-6}x_{13} + 0,72619x_{14} - 5,2860 \times 10^{-7}x_{15} \\ &\approx 0,72622x_{14} \end{aligned}$$

que coincide con el valor obtenido directamente de (3.36), ya que $L\dot{x} = 0$ implica que

$$u_{eq} = 0,72622x_{14}.$$

Redefinimos el control

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - 300 > 0 \\ 0,72622x_{14} & \text{si } Lx - 300 = 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - 300 < 0 \end{cases}$$

con

$$0 < r_1 < \min 0,72622x_{14} = 0,72622x_{14} = \max 0,72622x_{14} < r_2,$$

donde elegimos $k = 300$, el cual es un valor aproximado al obtenido de la ecuación $k = L\bar{x}$:

$$k = \frac{1}{2}L(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = 17,653 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) = 17,653 \left(\frac{10 + 30}{2} \right) = 308,93.$$

Calculando el punto de equilibrio \bar{x} del sistema deslizante $\dot{x} = Ax + bu_{eq}(x)$; es decir

$$Ax + bu_{eq}(\bar{x}) = 0$$

de manera que

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1,73 & 1,73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,454 & -3,151 & 0 & 0,909 & 0,727 & 1,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0,765 & -0,765 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,094 & 0,378 & -0,789 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,411 & 0 & 0 & -1,835 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,418 & 0 & 0 & 0 & -1,874 & 0,455 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & -0,111 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,72622x_{14} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,66493x_{14} \\ 0,66493x_{14} \\ 0,66493x_{14} \\ 0,39778x_{14} \\ 0,51129x_{14} \\ x_{14} \\ 0,45046x_{14} \end{pmatrix}$$

Observación 3.4.2. Con el vector de entrada $b^T = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$, los únicos puntos de equilibrio son los dados por

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0,66493x_{14} \\ 0,66493x_{14} \\ 0,66493x_{14} \\ 0,39778x_{14} \\ 0,51129x_{14} \\ x_{14} \\ 0,45046x_{14} \end{pmatrix}$$

es decir, la proporción entre las entradas del punto de equilibrio no cambia, independientemente del hiperplano elegido. En cambio, podemos considerar vectores de entrada

$$b^T = (0, 0, 0, l_4, l_5, 0, l_7),$$

de forma que el punto de equilibrio es $\bar{x} = (20, 20, 20, 20, 20, 20, 20)$.

Ahora consideremos la estabilización al hiperplano $Lx - 140 = 0$, con

$$Lx = x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}.$$

De manera que los puntos de equilibrio nos quedan

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{pmatrix} -1,73 & 1,73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,454 & -3,151 & 0 & 0,909 & 0,727 & -1,06 & 0 \\ 0 & 0,765 & -0,765 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,094 & 0,378 & -0,789 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,411 & 0 & 0 & -1,835 & 0 & 0 \\ 0 & 1,418 & 0 & 0 & 0 & -1,874 & 0,455 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & -0,111 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u} \\ &= \begin{pmatrix} 0,91561 \\ 0,91561 \\ 0,91561 \\ 0,54774 \\ 0,70404 \\ 1,377 \\ 0,62028 \end{pmatrix} \bar{u} \end{aligned}$$

donde \bar{u} es tal que $Lx - 140 = 0$; de manera que obtenemos

$$\bar{x}^T = (21,379 \quad 21,379 \quad 21,379 \quad 12,789 \quad 16,439 \quad 32,152 \quad 14,483)$$

ya que

$$L\bar{x} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 0,91561 \\ 0,91561 \\ 0,91561 \\ 0,54774 \\ 0,70404 \\ 1,377 \\ 0,62028 \end{pmatrix} \bar{u} = 5,9959\bar{u} = 140$$

tal que

$$\bar{u} = \frac{140}{5,9959} = 23,349.$$

Consideremos la siguiente gráfica que representa la distancia con respecto al tiempo de una trayectoria que inicia desde una condición inicial x_0 al punto de equilibrio \bar{x} , bajo el control constante \bar{u} y el control u_{eq} .

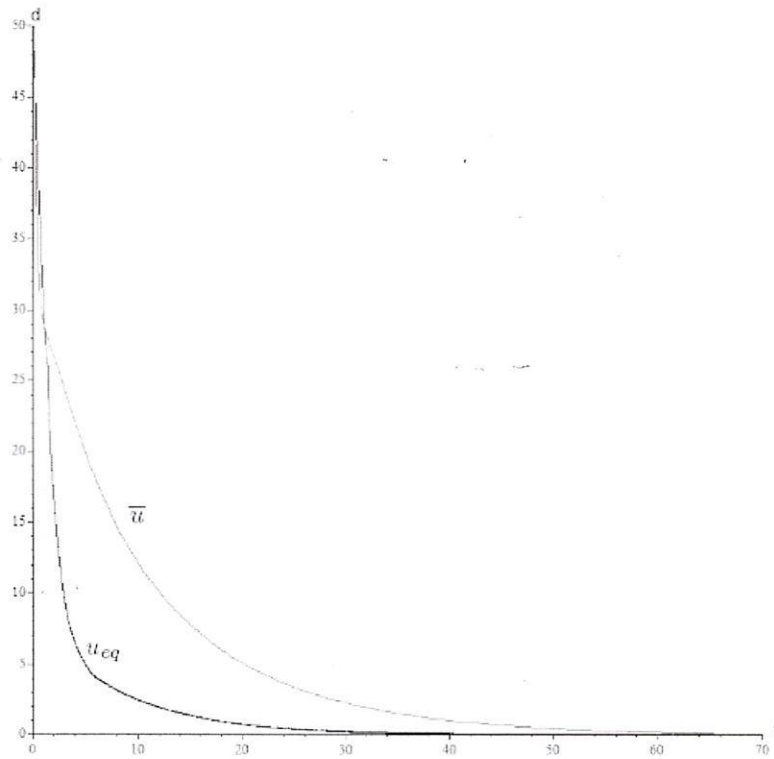


Figura 3.8: Trayectorias de la función distancia desde la condición inicial $x_0 = (30, 30, 30, 20, 20, 20, 20)$, hasta el punto de equilibrio $\bar{x} = (21.379, 21.379, 21.379, 12.789, 16.439, 32.152, 14.483)$

Capítulo 4

Conclusiones

Durante el desarrollo de trabajo en la presente tesis se logra resaltar los siguiente resultados:

En el capítulo 1 se establece que si el sistema lineal $\dot{x} = Ax + bu$ es controlable con controles positivos, entonces puede ser globalmente estabilizado mediante una sencilla función de realimentación no-negativa y Lipchitz en la siguiente forma:

- a) Si $\dot{x} = Ax$ es inestable, entonces, la realimentación $u(x) \in U = [0, \infty)$ (descrita en el capítulo 1) resuelve el problema de estabilización global.

- b) Si $\dot{x} = Ax$ es Lyapunov-estable, entonces la realimentación $u(x) \in U = [0, r]$ resuelve el problema de estabilización global.

En el capítulo 2 se estudia el sistema lineal $\dot{x} = Ax + bu$, dado que tal sistema no cuenta con la hipótesis de controlabilidad hacemos uso de la teoría de modos deslizantes para estabilizar. Se introdujeron las ideas y los conceptos matemáticos básicos para entender el control por modos deslizantes, destacándose sus atractivas características de robustez y la posibilidad de ser aplicados en forma relativamente sencilla a sistemas lineales.

Tras una breve introducción se estudian las ideas de funcionamiento y los inconvenientes al buscar soluciones empleando métodos tradicionales de análisis de sistemas, Para ello se describe el método del control equivalente, relacionado con el movimiento deslizante ideal. Luego, se establecieron condiciones necesarias y suficientes para la existencia de régimen deslizante sobre la superficie $Lx - s = 0$.

Motivando el estudio de la teoría desarrollada en el capítulo 2, en el capítulo 3 se presentan algunas aplicaciones, en cada una de ellas se logra la estabilización por modos deslizantes. En la primera sección se presenta el caso de mezclas con dos tanques, en esta aplicación se obtuvieron resultados interesantes como el de la figura (3.3), aunque desafortunadamente no existe un resultado que nos garantice esto, se presenta al final de cada aplicación una simulación (en simnon) mostrando la ganancia de aplicar el método del control equivalente u_{eq} . En la sección 2 se desarrolla el problema de una caso de mezclas con tres tanques, se hace un estudio minucioso sobre las entradas del vector L de tal forma que los valores propios de la

matriz A_{eq} se más negativos que los de A , una vez definida L tenemos el control discontinuo

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } Lx > k \\ u_{eq} & \text{si } Lx = k \\ r_2 & \text{si } Lx < k \end{cases}$$

Este control nos garantiza deslizamiento sobre el hiperplano $Lx - k = 0$, es decir, al aplicar este al flujo de entrada f_1 se asegura una mayor rapidez para llegar al punto de equilibrio, de modo que, para condiciones iniciales dadas para las soluciones, se puede estabilizar las concentraciones en los tanques en menor tiempo a diferencia de utilizar una constante en el flujo, es decir, logramos una convergencia mas rápida al punto de equilibrio \bar{x} . Generalizando el estudio del problema de mezclas, en la sección 3 se presenta un caso general a esta aplicación. Dado que en cada sección se hizo un estudio amplio para elegir L , se podría considerar como hipótesis que la mejor elección es tomar $L = (1, \dots, 1)$, al menos para el problema de los tanques.

En la sección 4 se presenta la estabilización de la insulina en el modelo de Sorensen.

Bibliografía

- [1] VADIM I. UTKIN, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, 1992.
- [2] R.F. BRAMMER., *Controllability in linear autonomous systems with positive controllers*. SIAM J. Control, 10.1972.
- [3] HERBERTT SIRA-RAMÍREZ. *Differential Geometric methods in variable-structure control*, Int. J. Control, 1988, Vol. 48, No. 4.
- [4] PATRICK DE LEENHEER, DIRK AEYELS, *Stabilization of positive linear systems*, ELSEVIER. Systems and Control Letters 44 (2001).
- [5] RICHARD BELLMAN, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc. Newyork 1960.
- [6] R.F. BRAMMER. *Controllability in linear autonomous systems with positive controllers*. SIAM J. Control, 10.1972.
- [7] DAVID G. LUENBERGER, *Introduction to Dynamic Systems*, Stanford University, Copyright 1979.
- [8] HERBERTT SIRA-RAMÍREZ, *Nonlinear Variable Structure Systems in Sliding Mode: The General Case*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34. No. 11, November 1989.
- [9] GERARDO SILVA NAVARRO, *Análisis y Control de Sistemas Dinámicos Positivos*, Tesis doctoral- México, D.F julio de 1994.
- [10] FERNANDO VERDUZCO G., *CONTROL LINEAL. Un enfoque en variables de estado*, Mosaicos Matemáticos No. 2. Febrero 2001.
- [11] J.T. SORENSEN, *A Physiologic Model of Glucose Metabolism in Man and its Use to Design and Assess Improved Insulin Therapies for Diabetes*, Ph.D. Thesis, MIT, USA, 1985.
- [12] G. QUIROZ AND R. FEMAT, *On hyperglycemic glucose basal levels in Type 1 Diabetes Mellitus from dynamic analysis*, Mathematical Biosciences 210 (2007) 554-575.

-
- [13] A. BERMAN, M. NEUMANN AND I. STERN (1989). *Nonnegative matrices in the Dynamics Systems*. John-Wiley, New York.
- [14] HORACIO LEYVA C., JULIO SOLIS-DAUN. *Synthesis of positive controls for the global CLF stabilization of systems*, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009.
- [15] MARTÍN AARÓN CARRILLO C. *Estabilización Global de Sistemas Lineales en el Plano con Control Positivo*, Tesis de licenciatura, Septiembre del 2010.
- [16] HORACIO LEYVA CASTELLANOS. *Diseños Continuos en Control de Estructura Variable*, Memorias del II Congreso Internacional de Ingeniería, Querétaro 2006.
- [17] JORGE ANTONIO LÓPEZ RENTERIA. *Controlabilidad y el teorema de Brammer*, Tesis de Maestría, Enero 2009.