



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Estructuras de Poisson Homogéneas y Operador Traza

## T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

**Maestro en Ciencias**  
(Matemáticas)

Presenta:

José Crispín Ruíz Pantaleón

Director de Tesis: Dr. Yury Vorobev

Hermosillo, Sonora, México,      29 de Agosto de 2014

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



## SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza  
Universidad de Sonora

Dr. Yury Vorobev  
Universidad de Sonora

Dr. Guillermo Dávila Rascón  
Universidad de Sonora

Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez  
Universidad Autónoma de San Luis Potosí



*... A Dios.*

*A mis padres y hermanos, novia y profesores con afecto.  
A las personas que me han brindado su apoyo incondicional.*

*“Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo.”*  
Galileo Galilei



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Distribuciones Regulares . . . . .	8
1.2. Distribuciones Singulares . . . . .	11
1.3. Estructuras de Poisson . . . . .	13
<b>2. Primera Clase Característica</b>	<b>23</b>
2.1. Ideal $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ y Diferencial $d_{\mathcal{D}}$ . . . . .	23
2.2. Distribuciones de Codimensión Uno . . . . .	28
2.3. Primera Clase Característica $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1$ . . . . .	30
<b>3. Variedades de Poisson Unimodulares</b>	<b>33</b>
3.1. Segunda Clase Característica $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^2$ . . . . .	33
3.2. Criterios de Unimodularidad . . . . .	35
<b>4. Operador Traza</b>	<b>45</b>
4.1. Definición y Propiedades . . . . .	45
4.2. Campos Modulares y Operador Traza . . . . .	48
<b>5. Estructuras de Poisson Homogéneas</b>	<b>53</b>
5.1. Tensores y Formas Homogéneas . . . . .	53
5.2. Teorema de Descomposición . . . . .	58
5.3. Parametrización . . . . .	62
<b>6. Clasificación de Estructuras de Poisson Lineales y Cuadráticas en <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>69</b>
6.1. Propiedades Generales . . . . .	69
6.2. Caso Lineal . . . . .	72
6.3. Caso Cuadrático. Formas Normales . . . . .	78
<b>7. Pares de Poisson</b>	<b>89</b>
7.1. Pares de Poisson (Cuadrático) + (Lineal) en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	89
7.2. Pares de Poisson Lineal-Cuadrático en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	91
7.3. Ejemplos . . . . .	95
<b>Apéndice</b>	<b>97</b>

---

<b>A. Corchete de Schouten-Nijuenhuis</b>	<b>99</b>
A.0.1. Pairing . . . . .	99
A.0.2. Operador Inserción . . . . .	100
A.0.3. Corchete de Schouten-Nijenhuis . . . . .	102
<b>B. Clasificación de Matrices</b>	<b>105</b>

# Introducción

El presente trabajo se centra en el estudio del problema de clasificación de las estructuras de Poisson homogéneas en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Una de las principales herramientas de nuestro enfoque es el operador traza [11] que provee una manera alternativa de utilizar el cálculo Schouten-Poisson en variedades orientables. Otra herramienta importante, en el contexto de la clasificación de estructuras homogéneas está relacionado con la noción de campos modulares de variedades de Poisson definido por Dufour y Haraki en [4] que a la vez motiva la definición de clase modular [21].

Uno de los resultados presentados en este trabajo es una clasificación detallada y más completa de las estructuras de Poisson lineales y cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$  utilizando isomorfismos lineales. Si bien se puede encontrar en [15] un resultado parecido, la diferencia con nuestra clasificación es que no solamente presentamos familias parametrizadas de estructuras de Poisson lineales y cuadráticas ajenas sino que dentro de estas familias diferenciamos miembros inequivalentes y los llevamos a una forma “irreducible”, es decir, exhibimos un tipo de forma normal de estas estructuras de Poisson en  $\mathbb{R}^3$ .

El resultado anterior lo aplicamos para dar una clasificación completa de las formas normales (en el sentido mencionado anteriormente) de pares de Poisson de tipo (cuadrático) + (lineal) en  $\mathbb{R}^3$  [14]. En cierto modo pensamos que la clasificación de estos pares de Poisson es un resultado original de este trabajo.

Otro problema interesante, importante y no trivial que se estudia en este trabajo se relaciona con el cálculo de clases modulares [7, 5, 21] de variedades de Poisson orientables así como la formulación de criterios de unimodularidad. En efecto, hacemos uso de la clasificación de las estructuras de Poisson lineales y cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$  obtenida para describir ciertas clases de estructuras de Poisson en  $\mathbb{R}^3$  que son unimodulares en ciertos dominios regulares densos.

El estudio de las variedades y las estructuras de Poisson ha experimentado un rápido crecimiento en las últimas tres décadas convirtiéndose en una amplia área de investigación actual con múltiples conexiones con otros campos, tanto de las propias matemáticas como de la física, que incluyen áreas como la mecánica Hamiltoniana, sistemas integrables, teoría de representaciones, entre otras [17, 13].

Fue Siméon Denis Poisson en el trabajo titulado “Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique” quien introdujo (escrito de una manera más moderna) la notación

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i},$$

que actualmente se conoce como el corchete de Poisson clásico o canónico para las funciones escalares  $f$  y  $g$ . A partir de entonces numerables matemáticos han reconocido la importancia de este corchete, gracias a lo cual esta área de estudio ha ido en constante desarrollo [12, 3, 17, 20, 13].

En términos algebraicos un corchete de Poisson en una variedad diferencial  $M$  es un corchete de Lie en el anillo de funciones suaves en  $M$ ,

$$\begin{aligned} \{, \} : C_M^\infty \times C_M^\infty &\longrightarrow C_M^\infty \\ (f, g) &\longmapsto \{f, g\} \end{aligned},$$

el cual es compatible con el producto usual de funciones por medio de la regla de Leibniz [12, 3, 20, 13]. El par  $(M, \{, \})$  se llama variedad de Poisson, terminología acuñada a Lichnerowicz [2]. Fue este mismo quien introdujo, en términos geométricos, la noción de tensor de Poisson en la variedad  $M$ , que es un bivector (tensor de Poisson)  $\Pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$  que satisface la condición

$$\llbracket \Pi, \Pi \rrbracket = 0,$$

que es equivalente a la condición de Jacobi para el corchete donde  $\{, \}$ . Aquí,  $\llbracket, \rrbracket$  denota el corchete de Schouten-Nijenhuis para campos tensoriales contravariantes. El correspondiente corchete de Poisson inducido por el tensor de Poisson  $\Pi$  es definido por

$$\{f, g\} := \Pi(df, dg).$$

Dado que todo bivector se expresa en un sistema de coordenadas locales en la forma

$$\Pi = \sum_{i < j} \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j},$$

la identidad de Jacobi para el bivector  $\Pi$  se traduce en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales de primer orden para  $\Pi$ :

$$\mathfrak{S}_{(i,j,k)} \Pi^{is} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^s} = 0.$$

Como puede observarse el estudio de las estructuras de Poisson en términos contravariantes, aunque poderoso, resulta hasta cierto punto complicado pues conlleva, al menos localmente, resolver ecuaciones parciales que en la mayoría de los casos no resulta un trabajo trivial hacerlo. Esto último motiva un problema geométrico muy interesante: la clasificación de las formas normales de tensores de Poisson [3].

Aunque el “splitting Theorem” de Weinstein [22] da una respuesta al problema anterior en forma local, aún sigue vigente el estudio “global” de este problema en el sentido de determinar formas normales de tensores de Poisson en ciertos abiertos densos. En este trabajo nos interesamos en estudiar desde esta perspectiva global el problema de formas normales con una clase especial de estructuras de Poisson: las estructuras de *Poisson homogéneas* en el espacio  $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1), \dots, x_n\}$  [16].

Una de las motivaciones para dirigir nuestra atención a las estructuras de Poisson homogéneas es la manera natural en que los multivectores homogéneos aparecen en diversas aplicaciones físicas [1, 8]. Estos tensores se definen como aquellos cuyas funciones coordenadas en su expresión local son funciones homogéneas.

Una característica importante de los multivectores homogéneos es que el comportamiento de los grados de homogeneidad con respecto al corchete de Schouten-Nijenhuis es igual al comportamiento de los grados como multivector. Esto permite exhibir otro ejemplo de cómo surgen los tensores de Poisson homogéneos: si se expande por Taylor en torno a un punto singular un bivector de Poisson  $\Pi$  se obtiene la siguiente representación

$$\Pi = \Pi^{(r)} + \Pi^{(r+1)} + \dots + \Pi^{(r+s)} + \dots, \quad (r \geq 1)$$

donde cada  $\Pi^{(k)}$  es un bivector  $k$ -homogéneo. La condición de Jacobi para  $\Pi$  permite concluir que el primer bivector no trivial en la expansión anterior  $\Pi^{(r)}$  es un tensor de Poisson.

Aún más, si también  $\Pi^{(r+1)}$  es un tensor de Poisson el par  $(\Pi^{(r)}, \Pi^{(r+1)})$  resulta ser un par de Poisson [3].

Describimos a continuación la forma en la cual se ha organizado este trabajo.

En el Capítulo 1 se introducen las nociones básicas en torno a distribuciones en una variedad diferencial y en torno a estructuras de Poisson así como algunas de las propiedades más conocidas del cálculo con el corchete de Schouten-Nijenhuis [12, 3, 20, 13].

En el Capítulo 2 se expresan las condiciones de involutividad de una distribución en términos de formas diferenciales y se introduce un primer invariante algebraico para las distribuciones involutivas de codimensión uno: la primera clase característica  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1$  [7].

En el Capítulo 3 se estudia una clase particular de distribuciones de codimensión uno: la distribución característica de una estructura de Poisson [12, 3, 20, 13]. Se dan criterios de unimodularidad de la variedad de Poisson en términos de su clase característica  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}\Pi}^1$ . Además, se introduce un segundo invariante algebraico para esta clase particular de distribuciones: la segunda clase característica  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}\Pi}^1$ . Se presentan también criterios para la existencia de campos de Poisson transversales en términos de estas dos clases características. Se incluyen algunos ejemplos que ilustran lo anteriormente mencionado [7].

En el Capítulo 4 se generaliza lo presentado en el Capítulo 3 haciendo uso del operador introducido por Koszul en [11] para variedades orientables. Se presentan propiedades

generales de este operador y las ventajas de utilizarlo en variedades de Poisson orientables, específicamente, para el estudio de campos mudulares.

En el Capítulo 5 se realiza un estudio en torno a las propiedades de los multivectores y formas homogéneas en  $\mathbb{R}^n$  con el fin de utilizar estas propiedades para realizar una descomposición y una parametrización de los tensores de Poisson homogéneos en  $\mathbb{R}^n$  en términos de un campo vectorial y una forma diferencial. [16, 6].

En el Capítulo 6 se presenta una clasificación de las formas normales de las estructuras de Poisson lineales y cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$  bajo la equivalencia por medio de isomorfismos lineales en el sentido que los representantes de cada clase de equivalencia son no isomorfos. Varias formulaciones de este tipo de resultados se pueden encontrar en [18, 15, 19, 10]. Adicionalmente se calculan para cada forma normal objetos tales como campos Hamiltonianos, funciones de Casimir y dominios regulares, de los cuales se puede encontrar en [12, 3, 17, 20, 13] un tratamiento más amplio.

En el Capítulo 7 se utiliza la clasificación de los tensores de Poisson lineales y cuadráticos efectuada en el Capítulo 6 para realizar una clasificación de las formas normales (en el mismo sentido de la clasificación del Capítulo 6) de los pares de Poisson en  $\mathbb{R}^3$  que constan de la suma de un bivector cuadrático más uno lineal. Detalles generales en torno a los pares de Poisson se pueden encontrar en [12, 14, 3].

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se introducen algunas nociones básicas en torno a distribuciones en una variedad diferencial y de las estructuras de Poisson en la misma. En este capítulo y en todo en lo que resta de este texto las variedades diferenciales se asumirán suaves y de dimensión finita salvo mención explícita de lo contrario. El material aquí presentado se puede consultar en [12, 3, 17, 20, 13].

**Definición 1.0.1.** *Sea  $M$  una variedad diferencial. Una distribución,  $\mathcal{D}$ , en  $M$  es una aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : M &\longrightarrow \mathbb{T}M \\ p &\longmapsto \mathcal{D}_p \subset \mathbb{T}_p M, \end{aligned}$$

tal que  $\mathcal{D}_p$  es un subespacio para todo  $p \in M$

Notemos que la definición no hace mención de la manera en que varía la asignación que realiza  $\mathcal{D}$  de un punto a otro. Para fijar una noción de “suavidad” de dicha asignación es preciso introducir algunas nociones previas.

Un *campo vectorial local* en  $M$  es un par  $(X, U)$  que consiste de un abierto  $U \subset M$  y un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}_U$ . Al abierto  $U$  se le llama *dominio del campo  $X$*  y suele denotarse por  $\text{Dom } X$ . En este texto se usará indistintamente estas notaciones según convenga, además, el dominio del campo  $X$  se creará implícito salvo que el contexto dé oportunidad a confusión.

Se denotará por  $\mathfrak{X}_M^{\text{loc}}$  al conjunto de todos los campos locales en  $M$ . Así, definimos el conjunto

$$\Gamma\mathcal{D} := \left\{ X \in \mathfrak{X}_M^{\text{loc}} \mid X_p \in \mathcal{D}_p, \forall p \in \text{Dom } X \right\},$$

donde a cada  $X \in \Gamma\mathcal{D}$  se le llama *sección (local) suave de  $\mathcal{D}$* . Si existe la necesidad de especificar el abierto  $U$  en el que está definida la sección se escribirá  $X \in \Gamma_U\mathcal{D}$ . Además, haciendo un abuso de notación,  $\Gamma\mathcal{D}$  también denotará a las secciones globales de  $\mathcal{D}$ , es decir, al conjunto de campos  $X \in \mathfrak{X}_M$  tales que  $X_p \in \mathcal{D}_p$  para todo  $p \in M$ .

**Definición 1.0.2.** Una distribución  $\mathcal{D}$  en  $M$  es diferenciable (suave) si para cada  $p \in M$  y cualquier  $v \in \mathbb{T}_p M$ , existe  $X \in \Gamma \mathcal{D}$  tal que  $p \in \text{Dom } X$  y  $X_p = v$ .

A manera de visualizar la definición anterior se presenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.0.3.** Sea  $M = \mathbb{R}^2$  y para cada  $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  sea  $\mathcal{D}$  la distribución definida por

$$p \mapsto \mathcal{D}_p := \begin{cases} \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \partial/\partial x_1|_p, \partial/\partial x_2|_p \right\} & \text{si } x_2 \geq 0. \\ \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \partial/\partial x_2|_p \right\} & \text{si } x_2 < 0. \end{cases},$$

Sean  $p_0 = (0, 0)$  y  $v = \partial/\partial x_1 \in \mathbb{T}_{p_0} \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$ .

Si se supone que existe  $X \in \Gamma_U \mathcal{D}$  tal que  $X_{p_0} = \partial/\partial x_1$ , debe ser  $X = a \partial/\partial x_1 + b \partial/\partial x_2$  tal que  $a(p_0) = 1$ , con  $a, b \in C_U^\infty$ . Luego, por continuidad de la función  $a$ , existe un abierto  $V \subset U$  que contiene a  $p_0$  tal que  $a(p) \neq 0$  para todo  $p \in V$ .

Ahora, si  $j : V \hookrightarrow U$  a la inclusión canónica, tomando  $\tilde{X} = j^* X$  se sigue que existe  $\tilde{X} = \tilde{a} \partial/\partial x_1 + \tilde{b} \partial/\partial x_2 \in \Gamma_V \mathcal{D}$  tal que  $\tilde{a} \neq 0$  en  $V$  y  $\tilde{b} \in C_V^\infty$ , lo cual no puede ser por definición de  $\mathcal{D}$ . Por tanto,  $\mathcal{D}$  es una distribución no diferenciable.

Sin embargo, la distribución

$$p \mapsto \mathcal{D}_p := \begin{cases} \mathcal{D}_p = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \partial/\partial x_1|_p, \partial/\partial x_2|_p \right\} & \text{si } x_2 > 0. \\ \mathcal{D}_p = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \partial/\partial x_2|_p \right\} & \text{si } x_2 \leq 0. \end{cases},$$

si es suave.

◇

A partir de este momento, salvo que se mencione lo contrario, se trabajará únicamente con distribuciones suaves.

Se define el *rango de una distribución*  $\mathcal{D}$  como la aplicación

$$\begin{aligned} \text{rang } \mathcal{D} : M &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ p &\longmapsto \text{rang } \mathcal{D}(p) \equiv \text{rang}_p \mathcal{D} := \dim \mathcal{D}_p. \end{aligned}$$

Un punto  $p_0 \in M$  se llama un punto *regular de*  $\mathcal{D}$  si el rango de la distribución en  $p_0$  es localmente constante, es decir, si existe un abierto  $U \subset M$  que contiene a  $p_0$  tal que  $\text{rang}_p \mathcal{D} = \text{rang}_{p_0} \mathcal{D}$ , para todo  $p \in U$ . Un punto  $p_0 \in M$  se llama un *punto singular de*  $\mathcal{D}$  si no es regular.

Se denotará por  $N^{\text{reg}} \subset M$  al conjunto de puntos regulares de  $\mathcal{D}$  y por  $N^{\text{sing}} \subset M$  al conjunto de puntos singulares de  $\mathcal{D}$ .

**Proposición 1.0.4.** *En cada variedad diferencial  $M$ ,  $N^{reg}$  es un subconjunto abierto y denso de  $M$  y  $N^{sing}$  es un subconjunto cerrado denso en ninguna parte de  $M$ .*

*Demostración.* Primero notemos que por la continuidad de la función determinante, para cada  $p_0 \in M$  existe un abierto  $U \subset M$  que contiene a  $p_0$  tal que  $\text{rang}_p \mathcal{D} \geq \text{rang}_{p_0} \mathcal{D}$ , para todo  $p \in U$ .

Ahora, es claro por definición de  $N^{reg}$  que éste es un conjunto abierto: para cada  $p \in N^{reg}$  existe un abierto  $U$  que contiene a  $p$  en el cual todo punto tiene rango igual a  $\text{rang}_p \mathcal{D}$ , así, todo punto en  $U$  es un punto regular de  $\mathcal{D}$ , luego  $U \subset N^{reg}$ . En consecuencia,  $N^{sing} = M \setminus N^{reg}$  es un conjunto cerrado.

A continuación se probará que  $N^{reg}$  es denso: sea  $p_0 \in M$  un punto singular de  $\mathcal{D}$  y  $U \subset M$  un abierto arbitrario que contiene a  $p_0$ . Ya que el rango de  $\mathcal{D}$  en punto a lo más puede ser igual a la dimensión de la variedad, la aplicación  $U \ni p \mapsto \text{rang}_p \mathcal{D}$  toma sólo un número finito de valores. Por lo que si  $p \in U$  es tal que  $\text{rang}_p \mathcal{D}$  es máximo en  $U$ , entonces  $p$  es un punto regular por lo observado al principio de esta demostración. Finalmente,  $N^{sing}$  es un conjunto denso en ninguna parte por ser un conjunto cerrado que es complemento de un conjunto denso en todas partes.

□

En palabras distintas, la proposición anterior nos dice que  $N^{reg}$  es una variedad diferencial. Notemos que en el Ejemplo 1.0.3 se tiene que  $N^{reg} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Eje } x_1\}$  y  $N^{sing} = \{\text{Eje } x_1\}$ .

Una distribución  $\mathcal{D}$  se dice una *distribución regular* si  $N^{reg} = M$ . Si  $\mathcal{D}$  no es regular se dirá *singular*.

**Definición 1.0.5.** *Una variedad integral de  $\mathcal{D}$  es una subvariedad  $S$  inmersa en  $M$  y conexa,  $S \subset M$ , tal que  $\mathbb{T}_q S = \mathcal{D}_q$  para todo  $q \in S$ .*

**Definición 1.0.6.** *Una distribución  $\mathcal{D}$  se dice integrable si para cada  $p \in M$ , existe una variedad integral  $S = S_p$  de  $\mathcal{D}$  que contiene a  $p$ .*

Si  $\mathcal{D}$  es integrable, cada vez que se escriba “variedad integral por  $p$ ” se estará haciendo referencia a la variedad integral  $S = S_p$ , para cada  $p \in M$ .

Notemos que la Definición 1.0.5 implica que la variedad integral por  $p$  tiene por dimensión  $\dim S_p = \text{rang}_p \mathcal{D}$ . En particular, si suponemos que  $p$  es tal que  $\text{rang}_p \mathcal{D} = 1$ , la variedad integral por  $p$  no es más que una curva inmersa en  $M$ , por tanto, en cierto sentido la teoría de distribuciones generaliza el problema de hayar una curva integral de un campo vectorial dado.

## 1.1. Distribuciones Regulares

En esta sección se asumirá que  $\mathcal{D}$  es una distribución regular. Notemos que en este caso, por definición, el rango de una distribución dada es constante en cada una de las componentes conexas de la variedad en la que está definida. Por tanto, sin pérdida de generalidad, nos referiremos a  $\mathcal{D}$  como una distribución  $k$ -dimensional y denotaremos su rango solamente por  $\text{rang } \mathcal{D}$  cuando no sea necesario especificar el punto de aplicación.

La siguiente proposición muestra una de las principales características de las distribuciones regulares.

**Proposición 1.1.1.** *Sea  $\mathcal{D}$  una distribución  $k$ -dimensional en  $M$ . Entonces, para cada  $p \in M$  existe un abierto  $U \subset M$  que contiene a  $p$  y  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}_U$ , tales que el conjunto  $\{X_{1q}, \dots, X_{kq}\}$  forma una base para  $\mathcal{D}_q$  en cada  $q \in U$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in M$  un punto fijo en  $M$  y  $\{v_1, \dots, v_k\}$  una base en  $\mathcal{D}_p$ . Por ser  $\mathcal{D}$  suave existe un abierto  $\tilde{U} \subset M$  que contiene a  $p$  y  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k \in \Gamma_{\tilde{U}}\mathcal{D}$  tales que  $\tilde{X}_i = v_i$ , ( $i = 1, \dots, k$ ). Además, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $\tilde{U}$  es el dominio de una carta en  $p$  con coordenadas  $\{x^1, \dots, x^m\}$ , donde  $m = \dim M$ . Luego, cada  $\tilde{X}_i$  admite una descomposición  $\tilde{X}_i = \tilde{X}_i^j \cdot \partial/\partial x^j$ , ( $j = 1, \dots, m$ ), la cual induce una matriz

$$\begin{aligned} L: M &\longrightarrow \mathcal{M}_{k \times m}[\mathbb{R}] \\ q &\longmapsto L(q) := \left[ \tilde{X}_i^j(q) \right]_{k \times m}. \end{aligned}$$

Ahora, ya que por hipótesis  $\text{rang}_p \mathcal{D} = k$ , la matriz anterior posee un menor  $\tilde{L}$ ,  $k \times k$ , tal que  $\det \tilde{L}(p) \neq 0$ . Luego, por ser el determinante una función continua, existe un abierto  $U \subset \tilde{U}$  que contiene a  $p$  tal que  $\det \tilde{L}(q) \neq 0$ , para todo  $q \in U$ . En consecuencia, las secciones  $\tilde{X}_i$  resultan ser linealmente independientes en  $U$ . Finalmente, los campos  $X_i \in \Gamma_U \mathcal{D}$  definidos por  $X_i = j^* \tilde{X}_i$ , con  $j: U \hookrightarrow \tilde{U}$  la inclusión canónica, por construcción generan en cada punto  $q \in U$  al subespacio  $\mathcal{D}_q$ .

□

Al par  $(U, X_1, \dots, X_k)$  se le denomina *marco local para  $\mathcal{D}$* . Así, reescribiendo la proposición anterior: una distribución  $\mathcal{D}$  es regular si para cada  $p \in M$  existe un marco local para  $\mathcal{D}$ ,  $(U, X_1, \dots, X_k)$ , tal que  $p \in U$ .

**Definición 1.1.2.** *Una distribución  $\mathcal{D}$  se llama algebraicamente involutiva, si para cualesquiera  $X_1, X_2 \in \Gamma \mathcal{D}$  sucede que  $[X_1, X_2] \in \Gamma \mathcal{D}$  en  $\text{Dom } X_1 \cap \text{Dom } X_2$ .*

Notemos que si  $\mathcal{D}$  admite un marco local,  $(U, X_1, \dots, X_k)$ , tal que  $[X_i, X_j] \in \Gamma \mathcal{D}$  para todo  $i, j = 1, \dots, k$ ; entonces  $\mathcal{D}$  es algebraicamente involutiva. En efecto, bajo las hipótesis anteriores, dados  $Y, Z \in \Gamma \mathcal{D}$  se sigue que

$$[Y, Z] = [Y^i X_i, Z^j X_j] = Y^i Z^j [X_i, X_j] + Y^i X_i (Z^j) \cdot X_j - Z^j X_j (Y^i) \cdot X_i \in \Gamma \mathcal{D}$$

con  $Y^i, Z^j \in C_M^\infty$ , ( $i, j = 1, \dots, k$ ).

En general, dada una distribución ésta no siempre admite una variedad integral como ejemplificamos a continuación.

**Ejemplo 1.1.3.** Para cada  $p \in \mathbb{R}^3$  sea  $\mathcal{D}$  la distribución definida por

$$p \mapsto \mathcal{D}_x := \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ X_{1p} = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \Big|_p, X_{2p} = \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \right\}.$$

La Figura 1.1.1 muestra un bosquejo de esta distribución. Si se supone que  $S$  es una variedad integral de  $\mathcal{D}$  en el origen, por ser  $X_1$  y  $X_2$  tangentes a  $S$ , cualquier curva integral de éstos campos con punto inicial en la variedad integral debe permanecer en  $S$  al menos por un corto período de tiempo. Ahora, por ser el eje- $x_1$  una curva integral del campo  $X_1$ ,  $S$  contiene un subconjunto abierto  $U$  del eje- $x_1$  alrededor del origen. Asimismo, tomando  $U$  suficientemente pequeño,  $S$  contiene subconjuntos abiertos de rectas paralelas al eje  $x_2$ , que son las curvas integrales del campo  $X_2$ , las cuales intersectan a  $U$ .

Lo anterior nos dice que  $S$  contiene un subconjunto abierto  $V \subset \{\text{Plano-}x_1x_2\}$ . Sin embargo, los planos tangentes a puntos  $q \in V$  tales que  $q \notin \{\text{Eje-}x_1\}$  no son iguales a  $\mathcal{D}_q$ . Por tanto,  $\mathcal{D}$  no es integrable.

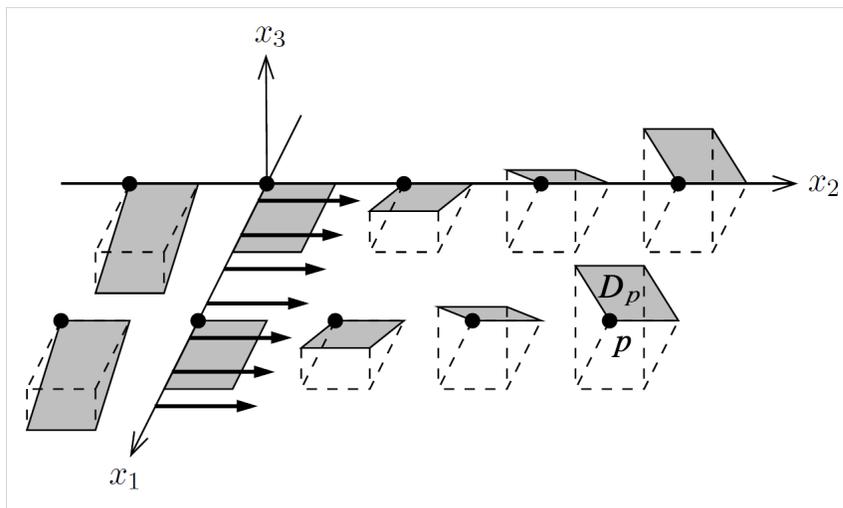


Figura 1.1.1: *Distribución No Integrable.*

◇

El siguiente teorema ya clásico da condiciones necesarias y suficientes para que una distribución sea integrable.

**Teorema 1.1.4** (Frobenius). *Una distribución regular,  $\mathcal{D}$ , en  $M$  es integrable si y sólo si  $\mathcal{D}$  es involutiva algebraicamente.*

Es importante observar que si una distribución es integrable, la variedad integral en cada punto puede estar definida solamente en un entorno pequeño de él. Para el caso del que se ocupa esta sección (regular) se pueda dar una “buena” descripción de la estructura local de cada variedad integral.

Dada una distribución,  $\mathcal{D}$ ,  $k$ -dimensional en una variedad  $M$ , con  $\dim M = m$ , se dice que una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , con coordenadas  $\{x^1, \dots, x^k, \dots, x^m\}$ , es una *carta plana para  $\mathcal{D}$*  si

$$\mathcal{D}_p = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right\}, \quad \forall p \in U. \quad (1.1.1)$$

En los términos anteriores, se le llama  *$k$ -slice* al conjunto  $\mathcal{S}_C$  definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_C &:= \left\{ p \in U \mid x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^m = c^m \right\} \\ &= \varphi^{-1}(\varphi_1(U_1) \times \{c\}), \end{aligned}$$

donde se ha definido  $\varphi := \varphi_1 \times \varphi_2 : U = U_1 \times U_2 \mapsto \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$  y  $c = (c^{k+1}, \dots, c^m) \in \mathbb{R}^{m-k}$ , con cada  $c^i \in \mathbb{R}$ , ( $i = k+1, \dots, m$ ).

Notemos que por el Teorema de la Función Inversa, y por ser  $(U, \varphi)$  una carta coordenada,  $\mathcal{S}_C$  es un encaje en  $M$  de dimensión  $k$  y que en cada punto  $p \in U$  es una variedad integral de la distribución (1.1.1).

**Proposición 1.1.5.** *Sea  $\mathcal{D}$  una distribución integrable  $k$ -dimensional en  $M$ . Para cada  $p \in M$ , sean  $S \subset M$  una variedad integral por  $p$  y  $(U, \varphi)$  una carta plana para  $\mathcal{D}$ . Entonces,*

$$S \cap U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Conjuntos abiertos contenidos en } k\text{-slices de } U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i,$$

donde cada  $S_i$  es un abierto en  $S$  y un encaje en  $M$ .

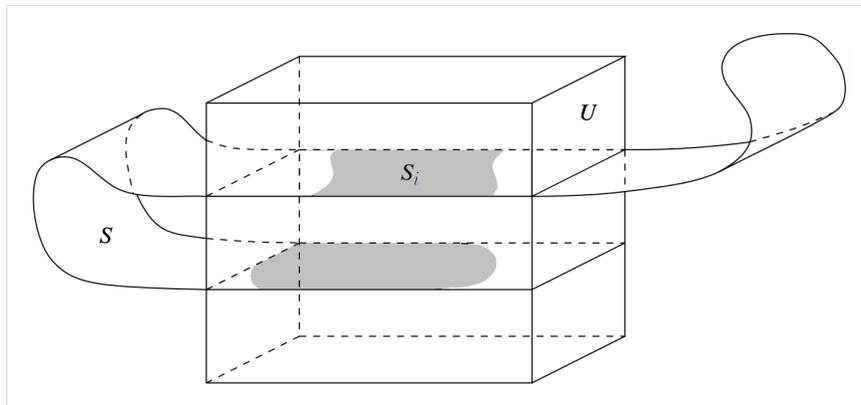


Figura 1.1.2: Estructura local de  $S$ .

## 1.2. Distribuciones Singulares

En esta sección se expondrá de manera más general lo visto en la sección anterior. Asumiremos en esta sección que  $\mathcal{D}$  es una distribución singular.

Una familia de campos vectoriales  $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_M^{loc}$  se llama *definida en todas partes (e.d.)* si para cada  $p \in M$ , existe  $X \in \mathcal{V}$  tal que  $p \in \text{Dom } X$ .

Observemos que si una distribución  $\mathcal{D}$  es suave, entonces por definición la familia  $\mathcal{V} = \Gamma\mathcal{D}$  es definida en todas partes.

**Definición 1.2.1.** Diremos que una distribución  $\mathcal{D}$  es generada por  $\mathcal{V}$ , o que es  $\mathcal{V}$ -generada, si para cada  $p \in M$  es

$$\mathcal{D}_p = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{X_p \mid X \in \mathcal{V}\}.$$

Notemos que por definición, una distribución  $\mathcal{D}$  es  $\mathcal{V}$ -generada si y sólo si es diferenciable. Ahora, se dice que  $\mathcal{D}$  es *invariante con respecto a  $\mathcal{V}$* , o que es  $\mathcal{V}$ -invariante, si para cada  $X \in \mathcal{V}$  se cumple que

$$(\text{d}_p \phi_X^t) \mathcal{D}_p = \mathcal{D}_{\phi_X^t(p)},$$

para todo  $p \in D_t^X$  y  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $\phi_X^t$  denota el flujo del campo  $X$ .

**Definición 1.2.2.** Una distribución  $\mathcal{D}$  en se llama involutiva si es  $\Gamma\mathcal{D}$ -invariante.

Una primer consecuencia de la definición anterior es que una distribución involutiva también es algebraicamente involutiva, como se demuestra en el siguiente lema.

**Lema 1.2.3.** Sea  $\mathcal{D}$  una distribución en  $M$ . Si  $\mathcal{D}$  es involutiva, entonces  $\mathcal{D}$  es algebraicamente involutiva.

*Demostración.* Sean  $p \in M$  y  $X, Y \in \mathfrak{X}_M$ . Denotando por  $\phi_X^t$  el flujo del campo  $X$ , de la igualdad

$$(\phi_X^t)^* [X, Y] = \frac{d}{dt} [(\phi_X^t)^* Y],$$

se sigue que si  $X, Y \in \Gamma\mathcal{D}$ , entonces

$$[X, Y]_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[ \left( \text{d}_{\phi_X^t(p)} \phi_X^{-t} \right) Y_{\phi_X^t(p)} \right] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{Y}_p^t,$$

donde  $\tilde{Y}_p^t \in \mathcal{D}_p$  por hipótesis y en consecuencia  $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$ . Luego, por ser  $p$  arbitrario, se sigue la afirmación del lema.

□

El enunciado recíproco del lema anterior no es cierto en general, daremos un ejemplo de ello después de enunciar el siguiente teorema que viene a ser la generalización del Teorema de Frobenius.

**Teorema 1.2.4** (Stefan-Sussmann). *Sea  $M$  una variedad diferencial. Una distribución singular,  $\mathcal{D}$ , en  $M$  es integrable si y sólo si  $\mathcal{D}$  es involutiva.*

Aún más, el Teorema de Stefan-Sussmann puede ser enunciado en la siguiente forma equivalente.

**Teorema 1.2.5.** *Sea  $\mathcal{D}$  una distribución singular en  $M$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\mathcal{D}$  es integrable.
2. Existe una familia "e.d"  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}_M^{loc}$  tal que  $\mathcal{D}$  es  $\mathcal{V}$ -generada y  $\mathcal{V}$ -invariante.

**Ejemplo 1.2.6.** Sea  $M = \mathbb{R}^2$  y para cada  $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  sea  $\mathcal{D}$  la distribución diferenciable definida por

$$p \mapsto \mathcal{D}_p := \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ X_{1p} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, X_{2p} = f \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \right\}, \text{ donde } f = f(x_1) = \begin{cases} e^{-1/x_1^2} & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \end{cases}.$$

Ahora, por ser

$$[X_1, X_2] = \begin{cases} \frac{f'}{f} X_2 & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

se sigue que  $\mathcal{D}$  es algebraicamente involutiva, sin embargo,  $\mathcal{D}$  no es integrable. En efecto, si  $\mathcal{D}$  fuese integrable, entonces en todo entorno de puntos pertenecientes al eje- $x_1$  la variedad integral tendría dimensión 1 y 2, lo cual es absurdo. Por tanto,  $\mathcal{D}$  es una distribución algebraicamente involutiva pero no involutiva.

◇

**Proposición 1.2.7.** *Si  $\mathcal{D}$  es una distribución regular y algebraicamente involutiva, entonces  $\mathcal{D}$  es involutiva.*

Por tanto en el caso regular las nociones de involutividad algebraica e involutividad son equivalentes.

### 1.3. Estructuras de Poisson

En esta sección se presentan algunas definiciones y propiedades básicas en torno a las variedades de Poisson. Se harán uso de las propiedades de los operadores diferenciales sobre  $\chi_M$  y  $\Omega_M$  y del corchete de Schouten-Nijenhuis  $\llbracket, \rrbracket$ , las cuales pueden ser consultadas en el Apéndice A.

**Definición 1.3.1.** Una estructura de Poisson suave en una variedad  $M$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal y antisimétrica

$$\begin{aligned} \{, \} : C_M^\infty \times C_M^\infty &\longrightarrow C_M^\infty \\ (f, g) &\longmapsto \{f, g\}, \end{aligned}$$

la cual verifica la identidad de Jacobi

$$\mathfrak{S}_{(f,g,h)} \{ \{f, g\}, h \} = \{ \{f, g\}, h \} + \{ \{g, h\}, f \} + \{ \{h, f\}, g \} = 0$$

y la regla de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\},$$

para cualesquiera  $f, g, h \in C_M^\infty$ .

La aplicación  $\{, \}$  se llama *corchete de Poisson* y al par  $(M, \{, \})$  se le denomina *variedad de Poisson*. Notemos que la definición anterior dice que el par  $(C_M^\infty, \{, \})$  es un álgebra de Lie cuyo corchete es compatible con el producto en  $C_M^\infty$  (Regla de Leibniz). Aún más, como consecuencia de la regla de Leibniz, para cada  $f \in C_M^\infty$ , el operador adjunto

$$\begin{aligned} \text{ad}_f : C_M^\infty &\longrightarrow C_M^\infty, \\ g &\longmapsto \text{ad}_f(g) := \{f, g\}, \end{aligned}$$

es una derivación del corchete  $\{, \}$ . Por tanto, existe un único campo vectorial  $X_f \in \mathfrak{X}_M$ , llamado el *campo Hamiltoniano asociado a  $f$* , tal que  $\mathcal{L}_{X_f}g = \{f, g\}$ , para cualquier  $g \in C_M^\infty$ . A la función  $f$  del campo  $X_f$  se le llama *función Hamiltoniana* o simplemente *Hamiltoniano*.

Se desprende de la linealidad del corchete de Poisson y de la regla de Leibniz que

$$X_{f_1+c f_2} = X_{f_1} + c X_{f_2} \quad \text{y} \quad X_{f_1 \cdot f_2} = f_1 X_{f_2} + f_2 X_{f_1},$$

para cualesquiera  $f_1, f_2 \in C_M^\infty$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 1.3.2.** Sean  $f_1, f_2 \in C_M^\infty$ . Si  $X_{f_1}, X_{f_2} \in \mathfrak{X}_M$  son los campos Hamiltonianos asociados a  $f_1$  y  $f_2$  respectivamente, entonces  $[X_{f_1}, X_{f_2}] = X_{\{f_1, f_2\}}$ .

*Demostración.* Sea  $h \in C_M^\infty$ , luego

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[X_{f_1}, X_{f_2}]}h &= \mathcal{L}_{X_{f_1}}(\mathcal{L}_{X_{f_2}}h) - \mathcal{L}_{X_{f_2}}(\mathcal{L}_{X_{f_1}}h) = \{f_1, \{f_2, h\}\} - \{f_2, \{f_1, h\}\} \\ &= \{\{f_1, f_2\}, h\} = \mathcal{L}_{X_{\{f_1, f_2\}}}h,\end{aligned}$$

y por ser  $h$  arbitraria se concluye que  $[X_{f_1}, X_{f_2}] = X_{\{f_1, f_2\}}$ . □

Se tiene entonces que el corchete de Lie de dos campos Hamiltonianos  $X_{f_1}$  y  $X_{f_2}$  es nuevamente un campo Hamiltoniano con función Hamiltoniana el corchete  $\{f_1, f_2\}$ . Lo anterior quiere decir que el par  $(\text{Ham}(M), [,])$  es una subálgebra de Lie del álgebra de campos vectoriales  $\mathfrak{X}_M$ , donde  $\text{Ham}(M) \equiv \text{Ham}(M, \{, \}) \subset \mathfrak{X}_M$  denota el conjunto de todos los campos Hamiltonianos en  $M$  respecto al corchete  $\{, \}$ .

Por otro lado, como es sabido, una función  $g \in C_M^\infty$  se llama *integral primera* de un campo  $X \in \mathfrak{X}_M$ , si  $\mathcal{L}_X g \equiv 0$ . Ya que la suma y el producto por escalar de dos integrales primeras es nuevamente una integral primera, el conjunto de todas ellas forman un espacio vectorial, aún más, por ser todo campo vectorial una derivación, forman un álgebra con el producto puntual para funciones. Para el caso de campos Hamiltonianos se tienen algunas propiedades adicionales las cuales se muestran en el siguiente lema.

**Proposición 1.3.3.** *Sea  $X_f \in \mathfrak{X}_M$  un campo Hamiltoniano asociado a la función  $f \in C_M^\infty$ . Entonces,*

1. *Una función  $g \in C_M^\infty$  es una integral primera del campo  $X_f$  si y sólo si  $\{f, g\} = 0$ .*
2. *Si  $g_1, g_2 \in C_M^\infty$  son integrales primeras del campo  $X_f$ , entonces la función  $\{g_1, g_2\}$  también lo es.*

*Demostración.* Sean  $(M, \{, \})$  una variedad de Poisson y  $f \in C_M^\infty$ .

1. Es inmediato por definición de campo Hamiltoniano.
2. Si  $g_1, g_2 \in C_M^\infty$  son integrales primeras del campo  $X_f$ , por la identidad de Jacobi y el punto anterior se sigue que

$$\mathcal{L}_{X_f} \{g_1, g_2\} = \{f, \{g_1, g_2\}\} = \{\{f, g_1\}, g_2\} + \{g_1, \{f, g_2\}\} = 0.$$

□

En particular toda función  $f \in C_M^\infty$  es una integral primera de su propio campo Hamiltoniano:  $\mathcal{L}_{X_f} f = \{f, f\} = 0$ , por la intisimetría del corchete de Poisson. Lo anterior es conocido en física como el principio de conservación de la energía, donde a  $f$  se le denomina función de energía.

Además, el punto 2 de la proposición precedente nos dice que el par  $(J_f, \{, \})$  tiene estructura de álgebra de Lie, con  $J_f$  el conjunto de todas las integrales primeras del campo Hamiltoniano  $X_f$ ,  $f \in C_M^\infty$ , conocido también como el *álgebra de simetrías* del campo  $X_f$ .

Una función  $K \in C_M^\infty$  se llama una *función de Casimir* si  $\{K, f\} = 0$  para toda  $f \in C_M^\infty$ . Lo anterior equivale a que el campo Hamiltoniano asociado a  $K$  sea idénticamente cero:  $\mathcal{L}_{X_K} f = \{K, f\} = 0$  para toda  $f \in C_M^\infty$ , si y sólo si  $X_K \equiv 0$ .

**Tensores de Poisson.** La descripción de un corchete de Poisson en términos de una operación binaria en el espacio de funciones  $C_M^\infty$  no siempre resulta eficiente. Afortunadamente, se puede dar una descripción en términos de 2-vectores (bivectores).

Consideremos una aplicación suave

$$\tilde{A} : C_M^\infty \underbrace{\times \cdots \times}_{a\text{-veces}} C_M^\infty \longrightarrow C_M^\infty,$$

$\mathbb{R}$ -multilineal y antisimétrica que además satisface la regla de Leibniz en cada argumento:

$$\tilde{A}(f_1, \dots, gh, \dots, f_a) = \tilde{A}(f_1, \dots, g, \dots, f_a)h + g\tilde{A}(f_1, \dots, h, \dots, f_a).$$

Tenemos, por otro lado, que cada  $a$ -vector  $A \in \chi_M^a$  puede interpretarse como una aplicación suave

$$A : \Omega_M^1 \underbrace{\times \cdots \times}_{a\text{-veces}} \Omega_M^1 \longrightarrow C_M^\infty,$$

$C_M^\infty$ -multilineal y antisimétrica. Como consecuencia de lo anterior se obtiene la siguiente correspondencia.

**Proposición 1.3.4.** *Dada una variedad  $M$ , existe una correspondencia uno a uno entre el espacio de multivectores en  $M$  y aplicaciones del tipo (1.3.1).*

En particular, toda estructura de Poisson  $\{, \}$  induce un 2-vector  $\Pi$  definido por

$$\Pi(df, dg) := \{f, g\}$$

para cualesquier  $f, g \in C_M^\infty$ . El recíproco en este caso necesita de una condición adicional ya que el corchete  $\{, \}$  debe cumplir la identidad de Jacobi.

**Proposición 1.3.5.** *Un bivector  $\Pi \in \chi_M^2$  induce una estructura de Poisson  $\{, \} = \{, \}^\Pi$  si y sólo si  $[[\Pi, \Pi]] = 0$ .*

*Demostración.* Por la Proposición 1.3.4 sólo falta demostrar la identidad de Jacobi para  $\{, \}^\Pi$ . Se tiene que, por ser  $\Pi \in \chi_M^2$ , es  $[[\Pi, \Pi]] \in \chi_M^3$ . Sean  $f, g, h \in C_M^\infty$ , luego, por definición del

corchete de Schouten-Nijenhuis se sigue que

$$\begin{aligned}
i_{[\Pi, \Pi]}(df \wedge dg \wedge dh) &= [\mathcal{L}_\Pi, i_\Pi](df \wedge dg \wedge dh) = (\mathcal{L}_\Pi i_\Pi - i_\Pi \mathcal{L}_\Pi)(df \wedge dg \wedge dh) \\
&= ((i_\Pi d - di_\Pi)i_\Pi - i_\Pi(i_\Pi d - di_\Pi))(df \wedge dg \wedge dh) \\
&= (2i_\Pi di_\Pi - di_{\Pi \wedge \Pi} - i_{\Pi \wedge \Pi} d)(df \wedge dg \wedge dh) \\
&= 2i_\Pi di_\Pi (df \wedge dg \wedge dh) \\
&= 2i_\Pi d \left( - \mathfrak{S}_{(f,g,h)} \Pi(df, dg) dh \right) = 2i_\Pi \left( - \mathfrak{S}_{(f,g,h)} d(\Pi(df, dg)) \wedge dh \right) \\
&= 2 \mathfrak{S}_{(f,g,h)} \Pi(d(\Pi(df, dg)), dh) \\
&= 2 \mathfrak{S}_{(f,g,h)} \{\{f, g\}, h\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{(f,g,h)} \{\{f, g\}, h\} = 0 &\iff \frac{1}{2} i_{[\Pi, \Pi]}(df \wedge dg \wedge dh) = \frac{1}{2} [[\Pi, \Pi]](df, dg, dh) = 0 \\
&\iff [[\Pi, \Pi]] = 0.
\end{aligned}$$

□

Como se puede observar, existe una correspondencia uno a uno entre estructuras de Poisson y bivectores  $\Pi \in \chi_M^2$  tales que  $[[\Pi, \Pi]] = 0$ . Lo anterior permite llamar a cada bivector  $\Pi$  que cumple esta condición una *estructura de Poisson* o simplemente *tensor de Poisson*.

Ahora, dado un corchete de Poisson  $\{, \}$  la expresión local del tensor de Poisson inducido por éste, en una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  con coordenadas  $\{x^1, \dots, x^m\}$ , es

$$\Pi = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j},$$

donde las funciones coordenadas se definen por  $\Pi^{ij} := \{x^i, x^j\}$  y cumplen que (identidad de Jacobi)

$$\sum_{s=1}^m \mathfrak{S}_{(i,j,k)} \Pi^{is} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^s} = 0,$$

para todo  $i, j, k = 1, \dots, m$ . Recíprocamente, dado un tensor de Poisson  $\Pi$  el corchete inducido por éste es

$$\{f, g\}^\Pi = \{f, g\} = \sum_{i,j=1}^m \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

para todas  $f, g \in C_M^\infty$ . Algunas propiedades adicionales relacionadas con los tensores de Poisson serán expuestas en líneas posteriores.

**Morfismos de Poisson.** Sean  $(M_1, \{, \}_1)$  y  $(M_2, \{, \}_2)$  dos variedades de Poisson. Es natural preguntarse por alguna relación entre ambas estructuras o una manera de relacionarlas. Esto se concreta en la siguiente definición.

**Definición 1.3.6.** Sean  $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$  y  $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$  dos variedades de Poisson. Un morfismo de Poisson es una aplicación  $\mathcal{P} : (M_1, \{\cdot, \cdot\}_1) \rightarrow (M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$  de clase  $C^\infty$  que cumple

$$\{\mathcal{P}^* f, \mathcal{P}^* g\}_1 = \mathcal{P}^* \{f, g\}_2,$$

para todas  $f, g \in C^\infty_{M_2}$ .

Si además  $\mathcal{P}$  es un difeomorfismo se dirá que se trata de un *isomorfismo de Poisson*. Dos estructuras de Poisson se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo de Poisson  $\mathcal{P} : (M_1, \{\cdot, \cdot\}_1) \rightarrow (M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ .

También es fácil probar, por las propiedades del pullback, que la composición de dos morfismos de Poisson es nuevamente un morfismo de Poisson. Por otro lado, si  $\mathcal{P}$  resulta ser un difeomorfismo, la definición 1.3.6 puede reescribirse en términos de los correspondientes tensores de Poisson como se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.7.** Una aplicación  $\mathcal{P} : (M_1, \{\cdot, \cdot\}_1) \rightarrow (M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$  de clase  $C^\infty$  entre dos variedades de Poisson, es un isomorfismo de Poisson si y sólo si

$$\mathcal{P}^* \Pi_2 = \Pi_1,$$

con  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  los tensores de Poisson en correspondencia con los corchetes  $\{\cdot, \cdot\}_1$  y  $\{\cdot, \cdot\}_2$  respectivamente.

*Demostración.* Sean  $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$  y  $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$  dos variedades de Poisson y sean  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  los tensores de Poisson en correspondencia con los corchetes  $\{\cdot, \cdot\}_1$  y  $\{\cdot, \cdot\}_2$  respectivamente.

*Necesidad.* Supongamos que  $\mathcal{P} : M_1 \rightarrow M_2$  es un morfismo de Poisson. Entonces, para cualesquier  $f, g \in C^\infty_{M_2}$  se tiene por definición que

$$\{\mathcal{P}^* f, \mathcal{P}^* g\}_1 = \Pi_1(d(\mathcal{P}^* f), d(\mathcal{P}^* g)) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}^* \{f, g\}_2 = \mathcal{P}^*(\Pi_2(df, dg)). \quad (1.3.1)$$

Ahora, por propiedades de la diferencial exterior y del operador inserción de formas diferenciales, tenemos por una parte que

$$\begin{aligned} \Pi_1(d(\mathcal{P}^* f), d(\mathcal{P}^* g)) &= \Pi_1(\mathcal{P}^* df, \mathcal{P}^* dg) = i_{\mathcal{P}^* dg} i_{\mathcal{P}^* df} \Pi_1 \\ &= i_{\mathcal{P}^* dg} \mathcal{P}^*(i_{df} \mathcal{P}_* \Pi_1) = \mathcal{P}^*(i_{dg} i_{df} \mathcal{P}_* \Pi_1). \end{aligned}$$

Por otro lado, es

$$\mathcal{P}^*(\Pi_2(df, dg)) = \mathcal{P}^*(i_{dg} i_{df} \Pi_2).$$

Así, de (1.3.1) y de estas dos últimas observaciones se sigue que, por ser  $f$  y  $g$  arbitrarios,

$$(\mathcal{P}_* \Pi_1)(df, dg) = \Pi_2(df, dg) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{P}_* \Pi_1 = \Pi_2.$$

*Suficiencia.* Supongamos que  $\mathcal{P} : M_1 \rightarrow M_2$  es un difeomorfismo que cumple  $\mathcal{P}^*\Pi_2 = \Pi_1$ . Primero, notemos que al ser  $\mathcal{P}$  difeomorfismo nuestra hipótesis es equivalente a pedir que  $\mathcal{P}_*\Pi_1 = \Pi_2$ . Así, para cualesquier  $f, g \in C_{M_2}^\infty$  se tiene que

$$(\mathcal{P}_*\Pi_1)(df, dg) = \mathcal{P}_*(\Pi_1(\mathcal{P}^*df, \mathcal{P}^*dg)) = \mathcal{P}_*(\Pi_1(d(\mathcal{P}^*f), d(\mathcal{P}^*g))) = \mathcal{P}_*\{\mathcal{P}^*f, \mathcal{P}^*g\}_1$$

y  $\Pi_2(df, dg) = \{f, g\}_2$ .

Luego, por hipótesis, tenemos

$$\mathcal{P}_*\{\mathcal{P}^*f, \mathcal{P}^*g\}_1 = \{f, g\}_2 \quad \text{si y sólo si} \quad \{\mathcal{P}^*f, \mathcal{P}^*g\}_1 = \mathcal{P}^*\{f, g\}_2.$$

□

**Definición 1.3.8.** *Un campo vectorial  $W \in \mathfrak{X}_M$  se llama un campo de Poisson o automorfismo infinitesimal de Poisson si su flujo  $\phi_W^t$  es un morfismo de Poisson.*

Observemos que la definición anterior implica que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_W^t : M \rightarrow M$  es un isomorfismo de Poisson en su dominio.

**Proposición 1.3.9.** *Sean  $(M, \Pi)$  una variedad de Poisson y  $W \in \mathfrak{X}_M$  un campo vectorial. Luego, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $W$  es un campo de Poisson.
2.  $\mathcal{L}_W\Pi = 0$ .
3.  $[[W, \Pi]] = 0$ .
4.  $\mathcal{L}_W\{f, g\} = \{\mathcal{L}_Wf, g\} + \{f, \mathcal{L}_Wg\}$ , es decir,  $W$  es una derivación del corchete de Poisson.

Notemos que si  $W$  es un campo Hamiltoniano  $W = X_h$ ,  $h \in C_M^\infty$ , entonces el punto 4 de la proposición anterior nos dice que  $W$  es un campo de Poisson, esto por la identidad de Jacobi para el corchete  $\{, \}$ . Por tanto, todo campo Hamiltoniano es un campo de Poisson, sin embargo, no todo campo de Poisson es Hamiltoniano. Por ejemplo, si se considera la estructura de Poisson trivial, entonces cualquier campo vectorial es de Poisson, mientras que el único campo hamiltoniano es el trivial.

Denotando por  $\text{Poiss}(M) \subset \mathfrak{X}_M$  al conjunto de todos los campos de Poisson en  $M$  relativos a  $\Pi$ , el párrafo anterior se resume diciendo que  $\text{Ham}(M) \subset \text{Poiss}(M)$ . Aún más, el par  $(\text{Poiss}(M), [,])$  es una subálgebra de Lie del álgebra de campos vectoriales  $\mathfrak{X}_M$ . En efecto, sean  $W_1, W_2 \in \text{Poiss}(M)$ , luego por la identidad de Jacobi para el corchete de Schouten-Nijenhuis

$$[[W_1, W_2], \Pi] = -[\Pi, [W_1, W_2]] = [[W_1, \Pi], W_2] + [W_1, [W_2, \Pi]] = 0,$$

luego, por el punto 3 de la Proposición 1.3.9 se sigue que  $[W_1, W_2] \in \text{Poiss}(M)$ .

**Proposición 1.3.10.** *La subálgebra de Lie  $\text{Ham}(M)$  es un ideal en  $\text{Poiss}(M)$ . Es decir, dados  $X_f \in \text{Ham}(M)$  y  $W \in \text{Poiss}(M)$  es*

$$[W, X_f] = X_{\mathcal{L}_W f}, f \in C_M^\infty.$$

*Demostración.* Sea  $g \in C_M^\infty$ . Luego, usando la Proposición 1.3.9 se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[W, X_f]} g &= \mathcal{L}_W \mathcal{L}_{X_f} g - \mathcal{L}_{X_f} \mathcal{L}_W g = \mathcal{L}_W \{f, g\} - \{f, \mathcal{L}_W g\} \\ &= \{\mathcal{L}_W f, g\} + \{f, \mathcal{L}_W g\} - \{f, \mathcal{L}_W g\} \\ &= \{\mathcal{L}_W f, g\} = \mathcal{L}_{X_{\mathcal{L}_W f}} g. \end{aligned}$$

Por tanto, por ser  $g$  arbitraria,  $[W, X_f] = X_{\mathcal{L}_W f}$ .

□

**Distribuciones de Poisson.** Para cada bivector  $\Pi \in \chi_M^2$  (no necesariamente de Poisson) la inserción de formas diferenciales induce un morfismo  $C_M^\infty$ -lineal

$$\begin{aligned} \Pi^\sharp : \Omega_M^1 &\longrightarrow \mathfrak{X}_M \\ \alpha &\longmapsto \Pi^\sharp(\alpha) := i_\alpha \Pi \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

cuya actuación es dada por  $\Pi^\sharp(\alpha)(\beta) := (i_\alpha \Pi)(\beta) = \Pi(\alpha, \beta)$ , para toda  $\beta \in \Omega_M^1$ . Para nuestros fines, en lo que resta se asumirá que  $\Pi$  es un tensor de Poisson.

En términos del morfismo (1.3.2) un campo Hamiltoniano  $X_f$ ,  $f \in C_M^\infty$ , se puede escribir como  $X_f = \Pi^\sharp(df)$ , ya que

$$X_f = \{f, \cdot\} = \Pi(df, \cdot) = i_{df} \Pi = \Pi^\sharp(df).$$

Luego, la expresión local de cada campo Hamiltoniano  $X_f$ , en una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  con coordenadas  $\{x^1, \dots, x^m\}$ , es

$$\begin{aligned} X_f &= \Pi^\sharp(df) = i_{df} \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k} i_{dx^k} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Además, notemos que la condición para que una función  $K \in C_M^\infty$  sea una función de Casimir se expresa como:  $\Pi^\sharp(dK) = 0$ , es decir,  $dK \in \ker \Pi^\sharp$ .

Dado un punto  $p \in M$ , la restricción del morfismo (1.3.2) a  $\mathbb{T}_p M \subset \mathbb{T}M$  es el mapeo  $\mathbb{R}$ -lineal

$$\begin{aligned} \Pi_p^\sharp \equiv \Pi_p^\sharp : \mathbb{T}_p^* M &\longrightarrow \mathbb{T}_p M \\ \eta &\longmapsto \Pi_p^\sharp(\eta) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

cuya actuación es dada por  $\Pi_p^\sharp(\eta)(\xi) := \Pi_p(\eta, \xi)$ , para toda  $\xi \in \mathbb{T}_p^* M$ . En los términos anteriores, se define el *rango* de una estructura de Poisson  $\Pi$  en un punto  $p \in M$  como el rango del mapeo (1.3.3), es decir,  $\text{rang}_p \Pi := \text{rang} \Pi_p^\sharp = \dim(\text{Im} \Pi_p^\sharp)$ .

Un punto  $p \in M$  se llama un *punto regular de  $\Pi$*  si el rango del tensor de Poisson  $\Pi$  es localmente constante en  $p$ . En caso contrario, se dice que  $p$  es un *punto singular de  $\Pi$* .

Notemos que por la antisimetría de  $\Pi$  el rango en cualquier punto  $p$  siempre es un número par. Un tensor de Poisson se dice *regular* si todo punto  $p \in M$  es un punto regular de  $\Pi$ . Si no es regular,  $\Pi$  se dice *singular*.

Un estructura de Poisson se llama *no degenerada* si el tensor  $\Pi$  es regular con rango igual a la dimensión de la variedad en todo punto de ésta:  $\text{rang}_p \Pi = \dim M$ , para todo  $p \in M$ .

Se define a partir del morfismo (1.3.2) la siguiente distribución (singular)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\Pi : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto \mathcal{D}_p^\Pi := \Pi_p^\sharp(\mathbb{T}_p^*M) \end{aligned} \quad ,$$

la cual es diferenciable ya que como se verá con la siguiente proposición es generada por campos Hamiltonianos.

**Proposición 1.3.11.** *En cada variedad de Poisson  $(M, \Pi)$  la distribución  $\mathcal{D}^\Pi$  es integrable.*

*Demostración.* Sea  $p \in M$  y  $(U, \varphi)$  una carta de  $M$  en  $p$  con coordenadas  $\{x^1, \dots, x^m\}$  y sea  $\mathcal{V} := \text{Ham}(M)$ .

Primero, se mostrará que  $\mathcal{D}^\Pi$  es  $\mathcal{V}$ -generada: por definición cada  $v \in \mathcal{D}_p^\Pi$  es de la forma  $v = \Pi_p^\sharp(\eta)$ , para alguna  $\eta \in \mathbb{T}_p^*M$ . Luego, expresando  $\eta$  de manera local se sigue que

$$v = \Pi_p^\sharp(\eta) = \Pi_p^\sharp(c_i dx^i) = c_i \Pi_p^\sharp(dx^i|_p) = c_i X_{x^i}|_p, \quad (i = 1, \dots, m)$$

con cada  $c^i \in \mathbb{R}$ . Lo anterior dice que  $\mathcal{D}_p^\Pi = \text{Span}_{\mathbb{R}} \text{Ham}(M)$ , es decir, que es  $\mathcal{V}$ -generada.

Ahora, se mostrará que  $\mathcal{D}^\Pi$  es  $\mathcal{V}$ -invariante: sean  $p \in M$ ,  $X_f \in \mathcal{V}$  y  $\phi_{X_f}^t$  el flujo de este campo Hamiltoniano,  $f \in C_M^\infty$ . Por la igualdad

$$\left( (\phi_{X_f}^t)^* \Pi \right)_p^\sharp = \left( d_{\phi_{X_f}^t(p)} \phi_{X_f}^{-t} \right) \circ \Pi_{\phi_{X_f}^t(p)}^\sharp \circ \left( d_{\phi_{X_f}^t(p)} \phi_{X_f}^{-t} \right)^*,$$

donde en el lado derecho de la igualdad anterior “ $*$ ” denota “operador adjunto”, y por ser todo campo Hamiltoniano un campo de Poisson se tiene que

$$\Pi_p^\sharp = \left( d_{\phi_{X_f}^t(p)} \phi_{X_f}^{-t} \right) \circ \Pi_{\phi_{X_f}^t(p)}^\sharp \circ \left( d_{\phi_{X_f}^t(p)} \phi_{X_f}^{-t} \right)^*,$$

□

Una observación que será de utilidad en líneas posteriores es que  $\ker \Pi^\sharp = (\mathcal{D}^\Pi)^\circ$ , con  $(\mathcal{D}^\Pi)^\circ$  el anulador de  $\mathcal{D}^\Pi$ . En efecto, si  $\alpha \in \ker \Pi^\sharp$ , entonces

$$0 = \Pi^\sharp(\alpha)(\beta) = (i_\alpha \Pi)(\beta) = -(i_\beta \Pi)(\alpha) = -\alpha(i_\beta \Pi),$$

para toda  $\beta \in \Omega_M^1$ . Por tanto,  $\alpha \in (\mathcal{D}^\Pi)^\circ$  por ser  $i_\beta \Pi \in \Gamma \mathcal{D}^\Pi$ . La contención contraria es inmediata.

**Cohomología de Poisson.** En cada variedad de Poisson  $(M, \Pi)$  el tensor  $\Pi$  induce un operador  $\mathbb{R}$ -lineal en el espacio de multivectores definido por

$$\begin{aligned} \delta_\Pi : \chi_M^a &\longrightarrow \chi_M^{a+1} \\ A &\longmapsto \delta_\Pi(A) := \llbracket \Pi, A \rrbracket \end{aligned} \cdot$$

A  $\delta_\Pi$  se le llama *operador de Lichnerowicz*.

**Proposición 1.3.12.** *El operador  $\delta_\Pi$  es un operador de cofrontera, es decir,  $\delta_\Pi^2 \equiv \delta_\Pi \circ \delta_\Pi = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $A \in \chi_M^a$  arbitraria. Luego,

$$\delta_\Pi^2(A) = \delta_\Pi(\delta_\Pi(A)) = \llbracket \Pi, \llbracket \Pi, A \rrbracket \rrbracket = \llbracket \llbracket \Pi, \Pi \rrbracket, A \rrbracket - \llbracket \Pi, \llbracket \Pi, A \rrbracket \rrbracket = -\llbracket \Pi, \llbracket \Pi, A \rrbracket \rrbracket = -\delta_\Pi^2(A)$$

si y sólo si  $\delta_\Pi^2 \equiv 0$ .

□

En consecuencia,  $\delta_\Pi$  define una sucesión exacta llamada *complejo de Lichnerowicz*:

$$\dots \xrightarrow{\delta_\Pi} \chi_M^{a-1} \xrightarrow{\delta_\Pi} \chi_M^a \xrightarrow{\delta_\Pi} \chi_M^{a+1} \xrightarrow{\delta_\Pi} \dots$$

Se llama *cohomología de Poisson* a la cohomología del complejo de Lichnerowicz. Por definición, la  $k$ -cohomología de Poisson es el cociente

$$\mathcal{H}_\Pi^k(M) := \frac{\ker \delta_\Pi : \chi_M^k \rightarrow \chi_M^{k+1}}{\text{Im } \delta_\Pi : \chi_M^{k-1} \rightarrow \chi_M^k},$$

donde a cada elemento de  $\ker \delta_\Pi : \chi_M^k \rightarrow \chi_M^{k+1}$  se le llama un  $k$ -cociclo mientras que a cada elemento de  $\text{Im } \delta_\Pi : \chi_M^{k-1} \rightarrow \chi_M^k$  se le llama una  $k$ -cofrontera.

Notemos que para cada  $f \in C_M^\infty$ , es

$$\delta_\Pi(f) = \llbracket \Pi, f \rrbracket = \llbracket f, \Pi \rrbracket = i_{df} \Pi = \Pi^\sharp(df) = X_f.$$

Por tanto, la cero cohomología de Poisson,  $\mathcal{H}_\Pi^0(M)$ , es el conjunto de todas las funciones  $f \in C_M^\infty$  tales que  $X_f \equiv 0$ , es decir, el conjunto de todas las funciones de Casimir respecto a la estructura de Poisson  $\Pi$ .

Ahora, para cada  $X \in \mathfrak{X}_M$ :  $\delta_\Pi(X) = \llbracket \Pi, X \rrbracket = -\llbracket X, \Pi \rrbracket = -\mathcal{L}_X \Pi$ . Así, la primer cohomología de Poisson resulta ser

$$\mathcal{H}_\Pi^1(M) = \frac{\text{Poiss}(M)}{\text{Ham}(M)}.$$

Lo anterior permite interpretar a  $\mathcal{H}_{\Pi}^1(M)$  como una medida de la obstrucción de tener campos de Poisson que a la vez sean Hamiltonianos.

La segunda cohomología de Poisson,  $\mathcal{H}_{\Pi}^2(M)$ , es el cociente del conjunto de todos los 2-tensores  $A \in \chi_M^2$  tales que  $\llbracket A, \Pi \rrbracket = 0$  por el conjunto de todos los 2-tensores  $\tilde{A} \in \chi_M^2$  que son de la forma  $\tilde{A} = \llbracket \Pi, X \rrbracket$  para algún  $X \in \mathfrak{X}_M$ , a los cuales llamaremos *tensores  $\delta_{\Pi}$ -exactos*. Ahora, si  $\llbracket A, \Pi \rrbracket = 0$  y  $\varepsilon \approx 0$ , entonces

$$\llbracket \Pi + \varepsilon A, \Pi + \varepsilon A \rrbracket = \varepsilon^2 \llbracket A, A \rrbracket = 0 \quad \text{mód } \varepsilon^2,$$

es decir,  $A$  es una *deformación infinitesimal* del tensor de Poisson  $\Pi$ . Por otro lado, como

$$\llbracket \Pi, \llbracket \Pi, X \rrbracket \rrbracket = -\llbracket \Pi, \llbracket \Pi, X \rrbracket \rrbracket \quad \iff \quad \llbracket \Pi, \llbracket \Pi, X \rrbracket \rrbracket = 0,$$

todo 2-tensor  $\delta_{\Pi}$ -exacto es una deformación infinitesimal de  $\Pi$ . Por tanto, se puede interpretar a  $\mathcal{H}_{\Pi}^2(M)$  como una medida de la obstrucción a tener únicamente deformaciones infinitesimales de  $\Pi$  que sean  $\delta_{\Pi}$ -exactos.

## Capítulo 2

# Primera Clase Característica

Desde un punto de vista algebraico es posible expresar de manera elegante las condiciones de involutividad de una distribución en términos de formas diferenciales, permitiendo así definir una cohomología que en el caso de las distribuciones integrables de codimensión uno dota a éstas de invariantes algebraicos cuyo estudio, entre otras cosas, está relacionado con la geometría global de la variedad. La exposición de lo anteriormente mencionado es el propósito de este y del capítulo siguiente.

### 2.1. Ideal $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ y Diferencial $d_{\mathcal{D}}$

Esta sección esta compuesta de dos apartados. El primero de ellos está enfocado en reformular el Teorema de Frobenius en términos del módulo de formas diferenciales. En el segundo se introduce una cohomología vinculada con las propiedades algebraicas de las distribuciones involutivas.

**Ideal  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ .** Sea  $\mathcal{D}$  una distribución regular en  $M$  de dimensión  $k$ . Se dice que una  $l$ -forma  $\alpha \in \Omega_M^l$  *anula a  $\mathcal{D}$*  si para cualesquiera  $X_1, \dots, X_l \in \Gamma\mathcal{D}$ , es

$$\alpha(X_1, \dots, X_l) = 0.$$

Es decir,  $\alpha$  anula a  $\mathcal{D}$  si  $\alpha_p(X_{1p}, \dots, X_{lp}) = 0$  para todo  $p \in M$ . Se denotará por

$$\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l := \left\{ \alpha \in \Omega_M^l \mid \alpha \text{ anula a } \mathcal{D} \right\} \subset \Omega_M^l \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_{\mathcal{D}} := \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l \subset \Omega_M. \quad (2.1.1)$$

De manera análoga, la construcción anterior se puede hacer en términos locales: si  $U \subset M$  es un abierto, una  $l$ -forma  $\tilde{\alpha} \in \Omega_U^l$  se dice *anula a  $\mathcal{D}$*  si para cualesquiera secciones (locales) de  $\mathcal{D}$  definidas en  $U$ ,  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_l \in \Gamma_U\mathcal{D}$ , es

$$\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_l) = 0.$$

En los términos anteriores, serán  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l|_U$  e  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}|_U$  como en (2.1.1).

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $M$  una variedad con  $m$ -dimensional y  $U \subset M$  un abierto. Si  $\mathcal{D}$  es una distribución en  $M$  de dimensión  $k$ , se cumple que:*

1.  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}} \wedge \Omega_M \subset \mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ , es decir,  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$  es un ideal en  $\Omega_M$ .
2. Para cada  $p \in M$  existen  $U \subset M$  un abierto que contiene a  $p$  y 1-formas  $\eta^{k+1}, \dots, \eta^m \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^1|_U$  linealmente independientes en  $U$  tales que, para toda  $\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$ ,

$$j^* \alpha = \theta_i \wedge \eta^i,$$

para algunas  $\theta_i \in \Omega_U^{l-1}$ , ( $i = k+1, \dots, m$ ). En lo anterior,  $j : U \hookrightarrow M$  denota la inclusión canónica.

*Demostración.* Para demostrar lo anterior sea  $p \in M$  arbitrario.

1. Sean  $\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$  y  $\beta \in \Omega_M^s$ . Luego, para cualesquiera  $X_1, \dots, X_{l+s} \in \Gamma \mathcal{D}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta)_p \left( X_{1p}, \dots, X_{lp}, X_{(l+1)p}, \dots, X_{(l+s)p} \right) \\ &= \\ & \sum_{\substack{\sigma(1) < \dots < \sigma(l) \\ \sigma(l+1) < \dots < \sigma(l+s)}} \text{Sgn } \sigma \cdot \alpha_p \left( X_{\sigma(1)p}, \dots, X_{\sigma(l)p} \right) \cdot \beta_p \left( X_{\sigma(l+1)p}, \dots, X_{\sigma(l+s)p} \right) \\ &= \\ & 0. \end{aligned}$$

2. Ya que por hipótesis  $\mathcal{D}$  es una distribución regular admite un marco local  $(\tilde{U}, X_1, \dots, X_k)$ , con  $p \in \tilde{U}$ , el cual se puede completar para formar una base del espacio tangente en cada punto de un abierto  $U \subset \tilde{U}$ . Es decir, existen  $X_{k+1}, \dots, X_m \in \mathfrak{X}_U$  tales que  $\mathbb{T}_q M = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{X_{1q}, \dots, X_{kq}, X_{(k+1)q}, \dots, X_{mq}\}$ , para todo  $q \in U$ . Sea  $\{\eta^1, \dots, \eta^k, \eta^{k+1}, \dots, \eta^m\}$  la base dual inducida por la base anterior.

Primero, por construcción son  $\eta^{k+1}, \dots, \eta^m \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^1|_U$  y linealmente independientes en  $U$ . Ahora, cada  $\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$  se puede expresar en  $U$  de la siguiente manera

$$j^* \alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq m} \alpha_{i_1, \dots, i_l} \eta^{i_1} \wedge \dots \wedge \eta^{i_l}.$$

Notemos que si  $\{i_1, \dots, i_l\} \cap \{k+1, \dots, m\} = \emptyset$ , entonces  $\alpha \equiv 0$  por ser  $\alpha_{i_1, \dots, i_l} = \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_l}) = 0$ . Por otro lado, si  $\{i_1, \dots, i_l\} \cap \{k+1, \dots, m\} \neq \emptyset$ , entonces agrupando correctamente los términos podemos escribir  $j^* \alpha = \theta_i \wedge \eta^i$ , con  $\theta_i \in \Omega_U^{l-1}$  e  $i \in \{k+1, \dots, m\}$ .

□

El ideal  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$  se dirá *cerrado* si

$$d\mathcal{I}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{D}},$$

es decir, si  $d\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{l+1}$  para toda  $\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$ .

**Teorema 2.1.2.** *Una distribución  $\mathcal{D}$  en  $M$  es algebraicamente involutiva si y sólo si  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$  es cerrado.*

*Demostración. Necesidad:* Supóngase a  $\mathcal{D}$  algebraicamente involutiva. Sean  $\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$  y  $X_0, \dots, X_l \in \Gamma\mathcal{D}$ . Por hipótesis,  $[X_i, X_j] \in \Gamma\mathcal{D}$  para todo  $i, j = 0, \dots, l$ . Luego,

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_0, \dots, X_l) &= \sum_{i=0}^l (-1)^i \mathcal{L}_{X_i} \alpha \left( X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_l \right) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq l} (-1)^{i+j} \alpha \left( [X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_l \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Suficiencia:* Supóngase  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$  cerrado. Sean  $Y, Z \in \Gamma\mathcal{D}$  y  $\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^1$ . Por hipótesis  $d\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^2$ , luego

$$\begin{aligned} 0 &= (d\alpha)(Y, Z) = \mathcal{L}_Y \alpha(Z) - \mathcal{L}_Z \alpha(Y) - \alpha([Y, Z]) \\ &= -\alpha([Y, Z]). \end{aligned}$$

Ahora, ya que la diferencial es un operador local, se sigue que  $\tilde{\alpha}([Y, Z]) = 0$  para toda  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}|_U$ , con  $U \subset M$  abierto.

Sean  $U \subset M$ ,  $\{X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_m\}$  y  $\{\eta^1, \dots, \eta^k, \eta^{k+1}, \dots, \eta^m\}$  el abierto y las bases utilizadas en la demostración de la Proposición 2.1.1. Así, se tiene que  $[Y, Z] = c^i X_i$ , con  $c^i \in C_U^\infty$ , ( $i = 1, \dots, m$ ). Luego, por el cálculo previo, para cada  $j = k+1, \dots, m$  es

$$0 = \eta^j([Y, Z]) = \sum_{i=1}^k c^i \eta^j(X_i) + \sum_{i=k+1}^m c^i \eta^j(X_i) = 0, \implies c_{k+1} = \dots = c_m = 0,$$

Por tanto,  $[Y, Z] = \sum_{i=1}^k c^i X_i \in \Gamma\mathcal{D}$ .

□

Por ser la diferencial exterior para formas es un operador local el teorema anterior es válido si se considera el ideal  $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}|_U$ , con  $U \subset M$  un abierto.

Por otro lado, dada una distribución  $\mathcal{D}$  en  $M$  se puede reformular la condición de diferenciabilidad para  $\mathcal{D}$  en términos de formas diferenciales.

**Lema 2.1.3.** *Una distribución  $k$ -dimensional  $\mathcal{D}$  en  $M$  es diferenciable si y sólo si para cada  $p \in M$ , existen un abierto  $U \subset M$  que contiene a  $p$  y  $\omega^1, \dots, \omega^{m-k} \in \Omega_U^1$  linealmente independientes tales que*

$$\mathcal{D}_q := \left\{ v \in \mathbb{T}_q M \mid \omega^1_q(v) = \dots = \omega^{m-k}_q(v) = 0 \right\}, \quad \forall q \in U. \quad (2.1.2)$$

*Demostración. Necesidad:* Supóngase  $\mathcal{D}$  diferenciable. Por ser  $\mathcal{D}$  regular, para cada  $p \in M$ , admite un marco local,  $(U, X_1, \dots, X_k)$  tal que  $p \in U$ , con el cual se puede completar una base  $\{X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_m\}$  para el espacio tangente  $T_q M$  en cada  $q \in U$ . Sea  $\{\omega^1, \dots, \omega^k, \omega^{k+1}, \dots, \omega^m\}$  la base dual de la base anterior. Ahora, para cada  $q \in U$  si  $v \in \mathcal{D}_q$ , es  $v = c^i X_{i_q}$  con  $i = 1, \dots, k$ ; luego

$$\omega^j_q(v) = c^i \omega^j_q(X_{i_q}) = \begin{cases} c^j & \text{si } j \in \{1, \dots, k\} \\ 0 & \text{si } j \in \{k+1, \dots, m\} \end{cases}.$$

Por tanto, reindexando,  $\mathcal{D}$  es caracterizado localmente por (2.1.2).

*Suficiencia:* Supóngase válida la condición (2.1.2). Ya que por hipótesis las 1-formas  $\omega^1, \dots, \omega^{m-k} \in \Omega^1_U$  son linealmente independientes, se puede completar una base  $\{\omega^1, \dots, \omega^{m-k}, \omega^{m-k+1}, \dots, \omega^m\}$  para el espacio cotangente  $T^*_q M$  en cada  $q \in U$ . Sea  $\{X_1, \dots, X_{m-k}, X_{m-k+1}, \dots, X_m\}$  la base dual de la base anterior, luego cada  $v \in T_q M$ , con  $q \in M$ , se expresa como  $v = c^i X_{i_q}$  con  $i = 1, \dots, m$ . Así,

$$\omega^1_q(v) = \dots = \omega^{m-k}_q(v) = 0 \quad \iff \quad c^1 = \dots = c^{m-k} = 0,$$

es decir, si y sólo si  $v = c^i X_{i_q}$  con  $i = m-k+1, \dots, m$ . Lo anterior equivale a decir que para cada  $q \in U$ , es  $\mathcal{D}_q = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{X_{(m-k+1)_q}, \dots, X_{m_q}\}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{D}$  es suave. □

Al conjunto de 1-formas  $\{\omega^1, \dots, \omega^{m-k}\}$  se les llama 1-formas de definición de  $\mathcal{D}$  y a las ecuaciones  $\omega^1 = \dots = \omega^{m-k} = 0$  como sistema de Pfaff. Observemos que por definición la condición (2.1.2) dice que  $\omega^i \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^1|_U$  para todo  $i = 1, \dots, m-k$ .

*Nota 2.1.4.* Notemos que una consecuencia importante de la demostración anterior es que localmente las 1-formas  $\eta^i$  de la Proposición 2.1.1 pueden tomarse como las 1-formas de definición de  $\mathcal{D}$ .

**Teorema 2.1.5** (Frobenius, 2<sup>da</sup> versión). *Una distribución  $k$ -dimensional  $\mathcal{D}$  en  $M$  es integrable si y sólo si para cualesquiera 1-formas de definición de  $\mathcal{D}$ ,  $\omega^1, \dots, \omega^{m-k} \in \Omega^1_U$ , definidas en un abierto  $U \subset M$ , existen 1-formas  $\theta^i_j \in \Omega^1_U$  tales que*

$$d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j, \quad (i, j = 1, \dots, m-k). \quad (2.1.3)$$

*Demostración. Necesidad:* Supóngase  $\mathcal{D}$  integrable. Por el Teorema 2.1.2 se tiene que  $d\omega^i \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^2|_U$  y por la Proposición 2.1.1 es  $d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j$  para algunas  $\theta^i_j \in \Omega^1_U$ , ( $i, j = 1, \dots, m-k$ ).

*Suficiencia:* Supóngase  $d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j$ . Ya que es  $\omega^i \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^1|_U$ , por hipótesis, se sigue de la Proposición 2.1.1 que  $d\omega^i \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^2|_U$  ( $i = 1, \dots, m-k$ ). Ahora, para cada  $\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$  arbitraria, existen  $\tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^{m-k} \in \Omega^{l-1}_U$  tales que  $\alpha = \tilde{\theta}^i \wedge \omega^i$ , ( $i = 1, \dots, m-k$ ). Así, se tiene que

$$d\alpha = d\tilde{\theta}^i \wedge \omega^i + (-1)^{l-1} \tilde{\theta}^i \wedge d\omega^i \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{l+1}|_U.$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.1.2,  $\mathcal{D}$  es integrable.

□

A las ecuaciones (2.1.3) se les llama *condiciones de integrabilidad para  $\mathcal{D}$* .

**Diferencial  $d_{\mathcal{D}}$ .** En lo que resta de esta sección se asumirá que  $\mathcal{D}$  es una distribución involutiva. Se define en  $\Omega_M$  la siguiente relación binaria de equivalencia: para cualesquiera  $\alpha, \beta \in \Omega_M$  homogéneos se declara que

$$\alpha \mathcal{R} \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha - \beta \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}.$$

A partir de la relación anterior se definen los conjuntos

$$\Omega_{\mathcal{D}}^l(M) \equiv \Omega_{\mathcal{D}}^l := \Omega_M^l / \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l \quad \text{y} \quad \Omega_{\mathcal{D}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \Omega_{\mathcal{D}}^l.$$

Ahora, denotando a la proyección canónica por

$$\varrho : \Omega_M^l \longrightarrow \Omega_{\mathcal{D}}^l, \quad (2.1.4)$$

a partir de la diferencial exterior para formas se puede inducir un operador análogo en el conjunto cociente  $\Omega_{\mathcal{D}}^l$  mediante

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D}} : \Omega_{\mathcal{D}}^l &\longrightarrow \Omega_{\mathcal{D}}^{l+1} \\ \varrho(\alpha) &\longmapsto d_{\mathcal{D}}(\varrho(\alpha)) := \varrho(d\alpha), \end{aligned}$$

para toda  $\alpha \in \Omega_M^l$ . Se llamará de igual manera, diferencial, al operador  $d_{\mathcal{D}}$ .

Para que la diferencial anterior esté bien definida debe mostrarse que no depende del representante de clase que se elija. Pero, lo anterior es consecuencia de suponer que  $\mathcal{D}$  es una distribución involutiva. En efecto, puesto que  $\ker \varrho = \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$ , para cualesquiera  $\alpha, \tilde{\alpha} \in \Omega_M^l$  se tiene que si

$$\varrho(\alpha) = \varrho(\tilde{\alpha}) \quad \iff \quad \varrho(\alpha - \tilde{\alpha}) = 0 \quad \iff \quad \alpha - \tilde{\alpha} \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l,$$

entonces es, por el Teorema 2.1.2,  $d(\alpha - \tilde{\alpha}) \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{l+1}$  y por tanto  $\varrho(d(\alpha - \tilde{\alpha})) = 0$ , es decir,  $d_{\mathcal{D}}(\varrho(\alpha)) = d_{\mathcal{D}}(\varrho(\tilde{\alpha}))$ .

**Proposición 2.1.6.** *La diferencial  $d_{\mathcal{D}}$  es un operador de cofrontera, es decir,  $d_{\mathcal{D}}^2 \equiv d_{\mathcal{D}} \circ d_{\mathcal{D}} = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \Omega_M^l$ , luego

$$d_{\mathcal{D}}^2(\varrho(\alpha)) = d_{\mathcal{D}}(d_{\mathcal{D}}(\varrho(\alpha))) = d_{\mathcal{D}}(\varrho(d\alpha)) = \varrho(d(d\alpha)) = 0.$$

□

Por lo anterior se puede considerar el complejo  $(\Omega_{\mathcal{D}}, d_{\mathcal{D}})$  cuya cohomología inducida es

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^l(M) := \frac{\ker d_{\mathcal{D}} : \Omega_{\mathcal{D}}^l \rightarrow \Omega_{\mathcal{D}}^{l+1}}{\text{Im } d_{\mathcal{D}} : \Omega_{\mathcal{D}}^{l-1} \rightarrow \Omega_{\mathcal{D}}^l}. \quad (2.1.5)$$

## 2.2. Distribuciones de Codimensión Uno

Una distribución en  $M$  se dice de *codimensión uno* si es una distribución  $(m-1)$ -dimensional, con  $m = \dim M$ . El propósito de esta sección es dar un criterio para la integrabilidad de distribuciones de este tipo que admiten además una 1-forma de definición global. Por lo anterior, en esta sección se asumirá que  $\mathcal{D}$  es una distribución de codimensión uno salvo mención explícita de lo contrario.

El Lema 2.1.3 permite asegurar que toda distribución de codimensión uno admite, para cada  $p \in M$ , una 1-forma de definición  $\omega \in \Omega_U^1$  definida en algún abierto  $U \subset M$  que contiene a  $p$ . Además,  $\omega$  resulta ser no degenerada por definición. Con lo anterior, por el Teorema 2.1.5 una distribución de codimensión uno es integrable si y sólo  $d\omega = \theta \wedge \omega$ , para alguna  $\theta \in \Omega_U^1$ . Notemos que las afirmaciones anteriores se enuncian en términos locales.

**Definición 2.2.1.** *Una distribución de codimensión uno  $\mathcal{D}$  se dice orientable si admite una 1-forma de definición global.*

Dada la definición anterior es importante asegurar de algún modo que existen distribuciones que la cumplen. Por ello se presenta la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.2.** *Una distribución  $\mathcal{D}$  es orientable si y sólo si existe un campo vectorial  $Z \in \mathfrak{X}_M$  normal a  $\mathcal{D}$ , es decir, tal que  $T_p M = \mathcal{D}_p \oplus \langle Z_p \rangle$  para todo  $p \in M$ .*

*Demostración. Necesidad:* Supóngase  $\mathcal{D}$  orientable. Para cada  $p \in M$ , por ser  $\mathcal{D}$  una distribución  $(m-1)$ -dimensional y regular, existe un marco local  $(U, X_1, \dots, X_{m-1})$ ,  $p \in U$ , con el cual se puede completar una base  $\{X_1, \dots, X_{m-1}, X_m\}$  para el espacio tangente  $T_q M$  en cada  $q \in U$ . Sea  $\{\eta^1, \dots, \eta^{m-1}, \eta^m\}$  la base dual de la base anterior.

Ahora, por hipótesis,  $\mathcal{D}$  admite una 1-forma de definición  $\omega \in \Omega_M^1$ . Como  $i_{X_m} \omega \neq 0$ , por ser  $\omega$  no degenerada, se define

$$Z := \frac{X_m}{i_{X_m} \omega}.$$

Notemos que  $i_Z \omega \equiv 1$ , luego  $Z \notin \Gamma \mathcal{D}$ . Para mostrar que  $Z$  es un campo global se probará que la definición de  $Z$  no depende del marco elegido: sea  $(\tilde{U}, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{m-1})$  otro marco para  $\mathcal{D}$  con  $p \in \tilde{U}$ . Sean  $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{m-1}, \tilde{X}_m\}$  la base completada con el marco anterior y  $\{\tilde{\eta}^1, \dots, \tilde{\eta}^{m-1}, \tilde{\eta}^m\}$  su base dual.

Primero, en  $U \cap \tilde{U}$  la transición entre los marcos se escribe como

$$\tilde{X}_i = c_i^j X_j \quad \text{y} \quad \eta^i = \tilde{c}_j^i \tilde{\eta}^j, \quad (i, j = 1, \dots, m-1).$$

con  $c_i^j, \tilde{c}_j^i \in C_{U \cap \tilde{U}}^\infty$ . Con lo anterior es  $\tilde{X}_m = c^i X_i + f X_m$ , con  $f \in C_{U \cap \tilde{U}}^\infty$  y  $f \neq 0$ , ( $i = 1, \dots, m-1$ ). Luego, por ser

$$i_{\tilde{X}_m} \eta^j = \tilde{c}_j^i i_{\tilde{X}_m} \tilde{\eta}^j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m-1;$$

se sigue que  $\tilde{X}_m = fX_m$ . En efecto,

$$0 = i_{\tilde{X}_m} \eta^j = c^i i_{X_i} \eta^j + f i_{X_m} \eta^j = c^j, \quad \forall j = 1, \dots, m-1.$$

Finalmente, si se define  $\tilde{Z} := \tilde{X}_m / i_{\tilde{X}_m} \omega$  se tiene que

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{X}_m}{i_{\tilde{X}_m} \omega} = \frac{X_m}{i_{X_m} \omega} = Z.$$

Además, es claro por construcción de  $Z$  que  $T_p M = \mathcal{D}_p \oplus \langle Z_p \rangle$  para todo  $p \in M$ .

*Suficiencia:* Supóngase  $Z \in \mathfrak{X}_M$  normal a  $\mathcal{D}$ . Fijada una base  $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}_M$  con dual  $\eta^1, \dots, \eta^m$ , se define

$$\omega := \frac{\eta^m}{i_Z \eta^m}.$$

La prueba de que  $\omega \in \Omega_M^1$  es análoga a la realizada previamente para el campo  $Z$ .

□

Por lo anterior, una distribución orientable también recibe el nombre de *transversalmente orientable*.

Una consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.2 es que si  $\mathcal{D}$  es una distribución transversalmente orientable, entonces existen bases  $\{X_1, \dots, X_{m-1}, Z\}$  y  $\{\eta^1, \dots, \eta^{m-1}, \omega\}$ , para los espacios tangente y contangente respectivamente en cada punto de  $M$ , con  $Z$  y  $\omega$  globales. Con lo anterior se presenta una reformulación en términos globales del Teorema 2.1.5.

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $\mathcal{D}$  un distribución en  $M$  transversalmente orientable con forma de definición  $\omega \in \Omega_M^1$ . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $\mathcal{D}$  es involutiva (integrable).
2.  $d\omega = \theta \wedge \omega$  para alguna  $\theta \in \Omega_M^1$ .
3.  $\omega \wedge d\omega = 0$  (condición de integrabilidad)

Una consecuencia importante a considerar es que, por observaciones realizadas en la sección anterior, si  $\alpha \in \Omega_M^1$  es tal que  $\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^1$ , entonces  $\alpha = g\omega$  para alguna  $g \in C_M^\infty$ . En particular, si  $\omega$  y  $\tilde{\omega}$  son dos 1-formas de definición globales para  $\mathcal{D}$ , entonces  $\tilde{\omega} = g\omega$ .

### 2.3. Primera Clase Característica $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1$

En esta sección se introduce un primer invariante asociado a la 1-forma de definición de una distribución de codimensión uno que es transversalmente orientable e involutiva, la cual se denotará por  $\mathcal{D}$  a lo largo de esta sección. Además, se presenta el resultado principal de este capítulo el cual dice que la trivialidad de este invariante equivale a la existencia de una 1-forma de definición (global) cerrada para la distribución  $\mathcal{D}$ .

Por el Teorema 2.2.3 se sabe que  $\mathcal{D}$  admite una 1-forma de definición global  $\omega \in \Omega_M^1$ , tal que  $d\omega = \theta \wedge \omega$ , para alguna  $\theta \in \Omega_M^1$ . Bajo el contexto anterior se presenta la definición del invariante mencionado en un principio.

**Definición 2.3.1.** *Sea  $\mathcal{D}$  una distribución de codimensión uno transversalmente orientable e involutiva con 1-forma de definición global  $\omega$ . Se llama primera clase caracterista de  $\mathcal{D}$  a la clase de cohomología*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1 := [\varrho(\theta)] \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}^1(M),$$

donde  $\theta \in \Omega_M^1$  es tal que  $d\omega = \theta \wedge \omega$ .

*Nota 2.3.2.* En la definición anterior  $\varrho$  representa la proyección canónica (2.1.4) y  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^1(M)$  la cohomología (2.1.5).

Antes de mostrar que efectivamente  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1$  es un invariante de  $\mathcal{D}$  se presenta un lema técnico.

**Lema 2.3.3.** *Sea  $\omega \in \Omega_M^1$  una 1-forma de definición para  $\mathcal{D}$  ( $d\omega = \theta \wedge \omega$ ). Luego,*

1. Si  $\beta \in \Omega_M^l$  es tal que  $\beta \wedge \omega = 0$ , entonces  $\beta \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$ .
2.  $\varrho(\theta) \in \Omega_{\mathcal{D}}^1$  es  $d_{\mathcal{D}}$ -cerrada, es decir,  $d_{\mathcal{D}}(\varrho(\theta)) = 0$ .

*Demostración.* 1. Como  $\beta \wedge \omega = 0$  implica  $\beta = \mu \wedge \omega$ , para alguna  $\mu \in \Omega_M^{l-1}$ , se sigue que  $\beta \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^l$ .

2. La hipótesis  $d\omega = \theta \wedge \omega$  implica que  $d\theta \wedge \omega = 0$ . Luego, por la propiedad anterior es  $d\theta \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^2$ . Así,  $d_{\mathcal{D}}(\varrho(\theta)) = \varrho(d\theta) = 0$ .

□

**Proposición 2.3.4.** *La primera clase característica  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1$  no depende de la elección de  $\omega$  y  $\theta$ .*

*Demostración.* Sea  $\omega \in \Omega_M^1$  una 1-forma de definición de  $\mathcal{D}$ . Primero se probará que no existe dependencia de  $\theta$ : sean  $\theta, \tilde{\theta} \in \Omega_M^1$  tales que  $d\omega = \theta \wedge \omega$  y  $d\omega = \tilde{\theta} \wedge \omega$ . Así, es  $(\theta - \tilde{\theta}) \wedge \omega = 0$  con lo cual se tiene que  $\theta - \tilde{\theta} \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^1$ , es decir,  $\theta \mathcal{R} \tilde{\theta}$  y por tanto  $[\varrho(\theta)] = [\varrho(\tilde{\theta})]$ .

Ahora, se probará que no existe dependencia de  $\omega$ : sean  $\omega$  y  $\tilde{\omega}$  dos formas de definición para  $\mathcal{D}$ . Se tiene entonces que  $\tilde{\omega} = f\omega$  para alguna  $f \in C_M^\infty$ , con  $f \neq 0$ . Ahora, como

$$d\tilde{\omega} = d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega = df \wedge \omega + f\theta \wedge \omega = (d(\ln|f|) + \theta) \wedge \tilde{\omega} = \tilde{\theta} \wedge \tilde{\omega},$$

se tiene que  $\tilde{\theta} = \theta + d(\ln|f|)$ . Luego,  $\varrho(\tilde{\theta}) - \varrho(\theta) = d_{\mathcal{D}}(\varrho(\ln|f|))$  y por tanto  $[\varrho(\tilde{\theta})] = [\varrho(\theta)]$ . □

Dada una forma  $\beta \in \Omega_M^l$ , una función  $m \in C_M^\infty$ ,  $m \neq \text{constante}$ , se llama *factor integrante de  $\beta$*  si  $d(\beta/m) = 0$ . En particular, si  $m$  es tal que  $d(\omega/m) = 0$ , se dirá que  $m$  es un factor integrante para  $\mathcal{D}$ .

**Lema 2.3.5.**  $[\varrho(\theta)] = 0$  si y sólo si  $\theta = g\omega + df$ , para algunas  $f, g \in C_M^\infty$ .

*Demostración.* Se tiene que  $[\varrho(\theta)] = 0$  si y sólo si  $\varrho(\theta) \in \text{Im } d_{\mathcal{D}} : \Omega_{\mathcal{D}}^0 \rightarrow \Omega_{\mathcal{D}}^1$ , es decir,  $\varrho(\theta) = d_{\mathcal{D}}(\varrho(f))$  para alguna  $f \in C_M^\infty$ . Luego,

$$\varrho(\theta) = d_{\mathcal{D}}(\varrho(f)) \Leftrightarrow \varrho(\theta) = \varrho(df) \Leftrightarrow \varrho(\theta - df) = 0 \Leftrightarrow \theta - df \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^1,$$

lo cual equivale a que  $\theta - df = g\omega$ , para alguna  $g \in C_M^\infty$ . □

Con ayuda del lema anterior se presenta el teorema principal de esta sección.

**Teorema 2.3.6.** *Sea  $\mathcal{D}$  una distribución en  $M$  de codimensión uno transversalmente orientable e involutiva con 1-forma de definición  $\omega \in \Omega_M^1$ . Entonces,  $\mathcal{D}$  admite un factor integrante  $m \in C_M^\infty$  si y sólo si la primera clase característica de  $\mathcal{D}$  es trivial,  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1 = 0$ .*

*Demostración. Necesidad:* Supóngase  $m \in C_M^\infty$  factor integrante de  $\mathcal{D}$ . Por ser  $\mathcal{D}$  involutiva es  $d\omega = \theta \wedge \omega$  para alguna  $\theta \in \Omega_M^1$ , luego

$$d\left(\frac{\omega}{m}\right) = 0 \Leftrightarrow (\theta - d(\ln|m|)) \wedge \omega = 0 \Leftrightarrow \theta - d(\ln|m|) = g\omega, \quad g \in C_M^\infty;$$

es decir, si y sólo si  $\theta = g\omega + d(\ln|m|)$ . Por tanto, por el Lema 2.3.5 se concluye que  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1 = 0$ .

*Suficiencia:* Supóngase  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1 = 0$ . Ahora, por el Lema 2.3.5 es  $\theta = g\omega + df$ , para algunas  $f, g \in C_M^\infty$ . De lo anterior y por ser  $\mathcal{D}$  involutiva se sigue que  $d\omega = \theta \wedge \omega = df \wedge \omega$ . Definiendo  $m := e^f$  se sigue que

$$d(e^{-f}\omega) = e^{-f}(d\omega - df \wedge \omega) = 0.$$

□

Reescribiendo el teorema anterior:  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1 = 0$  si y sólo si  $\mathcal{D}$  admite una 1-forma de definición,  $\omega_0 \in \Omega_M^1$ , cerrada. Por tanto, la primera clase característica  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1$  es una medida de la obstrucción a que  $\mathcal{D}$  admita esta 1-forma  $\omega_0$ .

**Ejemplo 2.3.7.** Consideremos la variedad  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Plano-}x_1x_3\}$  y la distribución de planos determinada por la siguiente 1-forma de definición

$$\omega = x_2x_3 dx^3.$$

La distribución es claramente regular y de condimensión 1 en  $M$  y además es  $d\omega = x_3 dx^2 \wedge dx^3$ , es decir,  $\omega$  no es cerrada. Sin embargo,  $m = x_2x_3^2 \in C_M^\infty$  es un factor integrante para esta 1-forma. En efecto, si  $\omega_0 = \omega/m = (1/x_3) dx^3$ , entonces

$$d\omega_0 = 0.$$

Por tanto, se puede concluir que la primer clase característica de esta distribución es trivial.

◇

*Nota 2.3.8.* Dada una distribución de codimensión uno transversalmente orientable e involutiva con 1-forma de definición  $\omega$ , se define la clase de *Godbillon-Vey* como la clase  $[\theta \wedge d\theta]$ , con  $d\omega = \omega \wedge \theta$ . Se puede deducir del Teorema 2.3.6 que en el caso que la primera clase característica se anule entonces la clase de Godbillon-Vey resulta trivial. El enunciado recíproco no es cierto en general.

## Capítulo 3

# Variedades de Poisson Unimodulares

En este capítulo se estudia una clase particular de distribuciones de codimensión uno: la distribución característica de una estructura de Poisson. Se presentan criterios de unimodularidad para las variedades de Poisson en términos de su primer clase característica. Además, se introduce un segundo invariante algebraico para esta clase particular de distribuciones: la segunda clase característica  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^1$ . Estas dos clases permiten formular un criterio para la existencia de campos de Poisson transversales a la distribución característica.

### 3.1. Segunda Clase Característica $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^2$

Esta sección se centra en introducir un invariante asociado a la distribución característica de una estructura de Poisson  $\mathcal{D}^\Pi$  en una variedad de Poisson  $(M, \Pi)$ . Para lo anterior se presentan algunos resultados previos.

**Proposición 3.1.1.** *Cada distribución  $\mathcal{D}^\Pi$  en una variedad de Poisson  $(M, \Pi)$  admite una 2-forma  $\sigma = \sigma^\Pi \in \Omega_M^2$  tal que*

$$\sigma(X_f, X_g) = \Pi(df, dg), \quad \forall f, g \in C_M^\infty. \quad (3.1.1)$$

*Demostración.* Fijada una métrica en  $M$ , para cada  $\mathcal{D}^\Pi$  se puede construir la distribución  $(\mathcal{D}^\Pi)^\perp$ , es decir, la distribución ortogonal a  $\mathcal{D}^\Pi$ :  $\Upsilon_p M = \mathcal{D}_p^\Pi \oplus (\mathcal{D}^\Pi)_p^\perp$ , para todo  $p \in M$ . Así, se define  $\sigma \in \Omega_M^2$  tal que cumpla con (3.1.1) e  $i_Y \sigma \equiv 0$  para toda  $Y \in \Gamma(\mathcal{D}^\Pi)^\perp$ .

□

A la 2-forma anterior,  $\sigma$ , se le llama una *2-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$* . Notemos que es suficiente definir a  $\sigma$  por su actuación en campos Hamiltonianos pues, como se vió en la sección 1.3, la distribución  $\mathcal{D}^\Pi$  es  $\text{Ham}(M)$ -generada.

**Proposición 3.1.2.** *Sea  $\sigma \in \Omega_M^2$  una 2-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$ . Entonces,*

1.  $i_{\Pi^\#(\alpha)}\sigma = -\alpha \pmod{\mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^1}$ , para toda  $\alpha \in \Omega_M^1$ .

2.  $\sigma$  es cerrada y no degenerada a lo largo de  $\mathcal{D}^\Pi$ .

**Segunda Clase Característica.** A partir de este momento y en lo que resta de esta sección se supondrá que  $\mathcal{D}^\Pi$  es una distribución de condimensión uno y transversalmente orientable, es decir, que admite una 1-forma de definición global  $\omega = \omega^\Pi \in \Omega_M^1$ . Además, se asumirá que la primer clase característica es trivial ( $\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^1 = 0$ ), o equivalentemente, que  $d\omega = 0$ . Notemos que imponer la hipótesis  $\mathcal{D}^\Pi$  involutiva en este caso es redundante porque como se mostró en la Sección 1.3 la distribución  $\mathcal{D}^\Pi$  siempre es integrable.

La Proposición 3.1.2 dice que  $d\sigma \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^3$ , en consecuencia,  $d\sigma = \vartheta \wedge \omega$ , para alguna  $\vartheta \in \Omega_M^2$ . Con lo anterior se presenta la siguiente definición.

**Definición 3.1.3.** *Se llama segunda clase característica de  $\mathcal{D}^\Pi$  a la clase de cohomología  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^2 := [\varrho(\vartheta)] \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}^\Pi}^1(M)$ .*

En la definición anterior  $\varrho$  representa la proyección canónica (2.1.4) y  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}^\Pi}^1(M)$  la cohomología (2.1.5). Antes de algo, notemos que  $\varrho(\vartheta)$  es  $d_{\mathcal{D}}$ -cerrada. En efecto, por ser  $d\omega = 0$  se sigue que  $d\vartheta \wedge \omega = 0$ . Luego, por el Lema 2.3.3, es  $d\vartheta \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^3 = \ker \varrho$ . Así,  $d_{\mathcal{D}}(\varrho(\vartheta)) = \varrho(d\vartheta) = 0$ .

**Proposición 3.1.4.** *La segunda clase característica  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^2$  no depende de la elección de  $\omega$  y  $\sigma$ .*

*Demostración.* Sea  $\omega \in \Omega_M^1$  una 1-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$  cerrada. Primero se probará que  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^2$  no depende de  $\sigma$ : sean  $\sigma = \sigma^\Pi$  y  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^\Pi$  dos 2-formas de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$  tales que  $d\sigma = \vartheta \wedge \omega$  y  $d\tilde{\sigma} = \tilde{\vartheta} \wedge \omega$ .

Notemos que por definición  $\sigma - \tilde{\sigma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^2$ , luego, es  $\sigma - \tilde{\sigma} = \beta \wedge \omega$  para alguna  $\beta \in \Omega_M^1$ . De lo anterior se sigue que

$$(\vartheta - \tilde{\vartheta}) \wedge \omega = d(\sigma - \tilde{\sigma}) = d(\beta \wedge \omega) = d\beta \wedge \omega \quad \iff \quad (\vartheta - \tilde{\vartheta} - d\beta) \wedge \omega = 0,$$

con lo cual es  $\vartheta - \tilde{\vartheta} - d\beta \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^2$ . Luego,

$$\varrho(\vartheta - \tilde{\vartheta} - d\beta) = 0 \quad \iff \quad \varrho(\vartheta) - \varrho(\tilde{\vartheta}) = d_{\mathcal{D}}(\varrho(\beta)),$$

es decir, si y sólo si  $[\varrho(\tilde{\vartheta})] = [\varrho(\vartheta)]$ .

Ahora, se probará que no hay dependencia de  $\omega$ : Sean  $\omega$  y  $\tilde{\omega}$  dos 1-formas de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$ . Con esto, se tienen definidas dos 2-formas de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$ ,  $\sigma$  y  $\tilde{\sigma}$ , tales que  $d\sigma = \vartheta \wedge \omega$  y  $d\tilde{\sigma} = \tilde{\vartheta} \wedge \tilde{\omega}$ . Luego, como es  $\tilde{\omega} = g\omega$  para alguna  $g \in C_M^\infty$ , se tiene que

$$d\tilde{\sigma} = \tilde{\vartheta} \wedge \tilde{\omega} = g\tilde{\vartheta} \wedge \omega = \vartheta' \wedge \omega.$$

Notemos que esta última igualdad se puede traducir en demostrar que no existe dependencia de la 2-forma de definición  $\sigma$ , lo cual fue demostrado previamente. □

Antes de presentar el teorema principal de esta sección un lema técnico que será de importancia en la demostración del teorema.

**Lema 3.1.5.**  $[\varrho(\vartheta)] = 0$  si y sólo si  $\vartheta = d\alpha + \beta \wedge \omega$ , para algunas  $\alpha, \beta \in \Omega_M^1$ .

*Demostración.* Se tiene que  $[\varrho(\vartheta)] = 0$  si y sólo si  $\varrho(\vartheta) \in \text{Im } d_{\mathcal{D}} : \Omega_{\mathcal{D}\Pi}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{D}\Pi}^2$ , es decir,  $\varrho(\vartheta) = d_{\mathcal{D}}(\varrho(\alpha))$  para alguna  $\alpha \in \Omega_M^1$ . Luego,

$$\varrho(\vartheta) = d_{\mathcal{D}}(\varrho(\alpha)) \iff \varrho(\vartheta) = \varrho(d\alpha) \iff \varrho(\vartheta - d\alpha) = 0 \iff \vartheta - d\alpha \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}\Pi}^2,$$

lo cual equivale a que  $\vartheta - d\alpha = \beta \wedge \omega$  para alguna  $\beta \in \Omega_M^1$ . □

**Teorema 3.1.6.** Sea  $(M, \Pi)$  una variedad de Poisson regular tal que  $\mathcal{D}^\Pi$  es una distribución de codimensión uno y transversalmente orientable. Supóngase además que la primer clase característica es trivial,  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}\Pi}^1 = 0$ . Entonces,  $\mathcal{D}^\Pi$  admite una 2-forma de definición  $\sigma \in \Omega_M^2$  cerrada si y sólo si la segunda clase característica es trivial,  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}\Pi}^2 = 0$ .

*Demostración. Necesidad:* Supóngase  $\sigma$  2-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$  cerrada. Sea  $\omega \in \Omega_M^1$  una 1-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$ . Luego,  $0 = d\sigma = \vartheta \wedge \omega$ , con lo cual es  $\vartheta \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}\Pi}^2$ . Así,  $\varrho(\vartheta) = 0$  y por tanto  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}\Pi}^2 = [\varrho(\vartheta)] = 0$ .

*Suficiencia:* Supóngase  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}\Pi}^2 = 0$ . Por el Lema 3.1.5 es  $\vartheta = d\alpha + \beta \wedge \omega$  para algunas  $\alpha, \beta \in \Omega_M^1$ . Luego,

$$d\sigma = \vartheta \wedge \omega = d\alpha \wedge \omega = d(\alpha \wedge \omega) \iff d(\sigma - \alpha \wedge \omega) = 0.$$

Así,  $\sigma - \alpha \wedge \omega \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}\Pi}^2$  es la 2-forma de definición deseada. □

**Proposición 3.1.7.** Las clases  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}\Pi}^1 = 0$  y  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}\Pi}^2 = 0$  si y sólo si existe un campo de Poisson transversal a la distribución  $\mathcal{D}^\Pi$ .

## 3.2. Criterios de Unimodularidad

Esta sección está enfocada en mostrar la relación que existe entre la primer clase característica de la distribución característica de una estructura de Poisson y la propiedad de unimodularidad para la variedad. Para lo anterior se divide la sección en cuatro apartados. En el primero de ellos se recuerdan propiedades generales del operador divergencia y en el segundo define el campo modular. Con base en lo anterior en la tercer sección se introduce la noción de variedad unimodular. Finalmente, en el cuarto apartado se estudia el caso en que la distribución característica es de codimensión uno.

**Divergencia de un Campo Vectorial.** En este apartado se supondrá que  $M$  es una variedad orientable (no necesariamente de Poisson) con forma de volúmen  $\Omega \in \Omega_M^m$ , con  $m = \dim M$ . Lo anterior significa que  $\Omega \neq 0$  en  $M$ .

Dadas dos formas de volúmen en  $M$ , al ser formas de grado máximo, éstas difieren sólo por un factor el cual es una función  $f \in C_M^\infty$  tal que  $f \neq 0$ . Lo anterior permite definir la *divergencia de un campo vectorial*  $X \in \mathfrak{X}_M$  respecto a una forma de volúmen  $\Omega$ , la cual denotaremos por  $\operatorname{div}_\Omega X$  o simplemente  $\operatorname{div} X$  si el contexto no da pie a confusión, como la única función de clase  $C^\infty$  tal que

$$\mathcal{L}_X \Omega = \operatorname{div}_\Omega X \cdot \Omega.$$

Recordando que un difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow M$  se dice que *preserva el volúmen*  $\Omega$  si  $\varphi^* \Omega = \Omega$ , un campo  $X \in \mathfrak{X}_M$  se dice que *preserva el volúmen*  $\Omega$  si el flujo de este campo,  $\phi_X^t$ , *preserva el volúmen*. De la definición dinámica de la derivada de Lie se sigue que  $X$  *preserva el volúmen* si y sólo  $\operatorname{div}_\Omega X = 0$ .

El siguiente lema presenta algunas propiedades adicionales de la función divergencia.

**Lema 3.2.1.** Sean  $\Omega$  una forma de volúmen en  $M$ ,  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}_M$  y  $f \in C_M^\infty$  tal que  $f \neq 0$ . Luego,

1.  $\operatorname{div}_\Omega(X_1 + cX_2) = \operatorname{div}_\Omega X_1 + c \operatorname{div}_\Omega X_2$ , para todo  $c \in \mathbb{R}$ .
2.  $\operatorname{div}_{f\Omega} X_1 = \operatorname{div}_\Omega X_1 + \frac{1}{f} \mathcal{L}_{X_1} f$ .
3.  $\operatorname{div}_\Omega(fX_1) = f \cdot \operatorname{div}_\Omega X_1 + \mathcal{L}_{X_1} f$ .
4.  $\operatorname{div}_\Omega [X_1, X_2] = \mathcal{L}_{X_1} \operatorname{div}_\Omega X_2 - \mathcal{L}_{X_2} \operatorname{div}_\Omega X_1$ .

*Demostración.* Los resultados se siguen de los siguientes cálculos:

$$1. \operatorname{div}_\Omega(X_1 + cX_2) \cdot \Omega = \mathcal{L}_{X_1 + cX_2} \Omega = \mathcal{L}_{X_1} \Omega + c \mathcal{L}_{X_2} \Omega = (\operatorname{div}_\Omega X_1 + c \operatorname{div}_\Omega X_2) \cdot \Omega.$$

$$2. \operatorname{div}_{f\Omega} X_1 \cdot f\Omega = \mathcal{L}_{X_1}(f\Omega) = \mathcal{L}_{X_1} f \cdot \Omega + f \cdot \mathcal{L}_{X_1} \Omega = (\mathcal{L}_{X_1} f + \operatorname{div}_\Omega X_1) \cdot f\Omega.$$

3. Usando que  $i_{X_1}(df \wedge \Omega) = i_{X_1} df \cdot \Omega - df \wedge i_{X_1} \Omega = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Omega(fX_1) \cdot \Omega &= \mathcal{L}_{fX_1} \Omega = di_{fX_1} \Omega = df \wedge i_{X_1} \Omega + f \cdot di_{X_1} \Omega = i_{X_1} df \cdot \Omega + f \cdot di_{X_1} \Omega \\ &= \mathcal{L}_{X_1} f \cdot \Omega + f \cdot \mathcal{L}_{X_1} \Omega = (\mathcal{L}_{X_1} f + f \cdot \operatorname{div}_\Omega X_1) \cdot \Omega. \end{aligned}$$

4. Como  $\mathcal{L}_{[X_1, X_2]} = [\mathcal{L}_{X_1}, \mathcal{L}_{X_2}]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Omega [X_1, X_2] \cdot \Omega &= \mathcal{L}_{[X_1, X_2]} \Omega = \mathcal{L}_{X_1}(\mathcal{L}_{X_2} \Omega) - \mathcal{L}_{X_2}(\mathcal{L}_{X_1} \Omega) \\ &= \mathcal{L}_{X_1}(\operatorname{div}_\Omega X_2 \cdot \Omega) - \mathcal{L}_{X_2}(\operatorname{div}_\Omega X_1 \cdot \Omega) \\ &= (\mathcal{L}_{X_1} \operatorname{div}_\Omega X_2 - \mathcal{L}_{X_2} \operatorname{div}_\Omega X_1) \cdot \Omega. \end{aligned}$$

□

**Campo Modular.** A partir de este momento y hasta finalizar este capítulo se supondrá que  $(M, \Pi, \Omega)$  es una variedad de Poisson orientable con forma de volúmen  $\Omega \in \Omega_M^m$ . Bajo estas hipótesis surge la siguiente interrogante: ¿Existe una forma de volúmen  $\Omega$  invariante bajo el flujo de cualquier campo Hamiltoniano?. Responder lo anterior es la motivación de este y los apartados restantes.

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $(M, \Pi, \Omega)$  una variedad de Poisson con forma de volúmen  $\Omega$ . Para cada  $f \in C_M^\infty$ , la aplicación  $f \mapsto \operatorname{div}_\Omega X_f$  es una derivación.*

*Demostración.* Sean  $f_1, f_2 \in C_M^\infty$ . Luego, usando el Lema 3.2.1 se tiene que

$$\begin{aligned} f_1 \cdot f_2 \longmapsto \operatorname{div}_\Omega X_{f_1 \cdot f_2} &= \operatorname{div}_\Omega(f_2 X_{f_1}) + \operatorname{div}_\Omega(f_1 X_{f_2}) \\ &= f_2 \cdot \operatorname{div}_\Omega X_{f_1} + \mathcal{L}_{X_{f_1}} f_2 + f_1 \cdot \operatorname{div}_\Omega X_{f_2} + \mathcal{L}_{X_{f_2}} f_1 \\ &= f_2 \cdot \operatorname{div}_\Omega X_{f_1} + f_1 \cdot \operatorname{div}_\Omega X_{f_2} \end{aligned}$$

□

La proposición anterior implica que la aplicación  $f \mapsto \operatorname{div}_\Omega X_f$  define un campo vectorial al que denotaremos por  $Z \in \mathfrak{X}_M$ . Notemos que el campo vectorial  $Z$  depende de la forma de volúmen y la estructura de Poisson fijados.

**Definición 3.2.3.** *El campo vectorial  $Z = Z_\Pi^\Omega \in \mathfrak{X}_M$  se llama campo modular de la estructura de Poisson  $\Pi$  relativo a la forma de volúmen  $\Omega$ .*

Como se notó en líneas anteriores la definición del campo modular depende de la elección de la forma de volúmen. Explícitamente, dadas  $f, g \in C_M^\infty$  con  $f \neq 0$ , se tiene que

$$Z_\Pi^{f\Omega}(g) = \operatorname{div}_{f\Omega} X_g = \operatorname{div}_\Omega X_g + \mathcal{L}_{X_g} \ln |f| = \operatorname{div}_\Omega X_g - \mathcal{L}_{X_{\ln |f|}} g = (Z_\Pi^\Omega - X_{\ln |f|})(g),$$

por tanto,

$$Z_\Pi^{f\Omega} = Z_\Pi^\Omega - X_{\ln |f|}. \quad (3.2.1)$$

Es decir, campos modulares relativos a formas de volúmen distintas difieren sólo por un campo Hamiltoniano.

Dos de las propiedades características del campo modular  $Z$  son:  $Z \in \operatorname{Poiss}(M)$  y  $Z$  preserva el volúmen  $\Omega$ . En efecto,  $Z \in \operatorname{Poiss}(M)$ : sean  $f_1, f_2 \in C_M^\infty$ , luego

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Z \Pi)(df_1, df_2) &= \mathcal{L}_Z(\Pi(df_1, df_2)) - \Pi(d\mathcal{L}_Z f_1, df_2) - \Pi(df_1, d\mathcal{L}_Z f_2) \\ &= \mathcal{L}_Z \{f_1, f_2\}^\Pi - \{\mathcal{L}_Z f_1, f_2\}^\Pi - \{f_1, \mathcal{L}_Z f_2\}^\Pi \\ &= \operatorname{div} X_{\{f_1, f_2\}^\Pi} - \{\operatorname{div} X_{f_1}, f_2\}^\Pi - \{f_1, \operatorname{div} X_{f_2}\}^\Pi \\ &= \operatorname{div}[X_{f_1}, X_{f_2}] + \mathcal{L}_{X_{f_2}} \operatorname{div} X_{f_1} - \mathcal{L}_{X_{f_1}} \operatorname{div} X_{f_2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora,  $\mathcal{L}_Z\Omega = 0$ : para mostrar que  $Z$  preserva el volúmen  $\Omega$  primero se probará que

$$i_Z\Omega = \mathcal{L}_\Pi\Omega.$$

Para lo anterior se utilizarán las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} 0 &= i_X(df \wedge \Omega) = \mathcal{L}_X f \cdot \Omega - df \wedge i_X\Omega, \quad \forall X \in \mathfrak{X}_M. \\ 0 &= i_\Pi(df \wedge \Omega) = df \wedge i_\Pi\Omega - i_{X_f}\Omega, \quad \forall f \in C_M^\infty. \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} df \wedge i_Z\Omega &= \mathcal{L}_Z f \cdot \Omega = \operatorname{div}_\Omega X_f \cdot \Omega = \mathcal{L}_{X_f}\Omega = di_{X_f}\Omega \\ &= d(df \wedge i_\Pi\Omega) = -df \wedge di_\Pi\Omega = df \wedge \mathcal{L}_\Pi\Omega, \end{aligned}$$

es decir,  $df \wedge (i_Z\Omega - \mathcal{L}_\Pi\Omega) = 0$  para toda  $f \in C_M^\infty$ . Por tanto, es  $i_Z\Omega - \mathcal{L}_\Pi\Omega = 0$ . Así,

$$\mathcal{L}_Z\Omega = di_Z\Omega = d\mathcal{L}_\Pi\Omega = -d(di_\Pi\Omega) = 0.$$

Por otro lado, notemos que por ser  $Z$  un campo de Poisson es  $[Z, X_f] = X_{\mathcal{L}_Z f} = X_{\operatorname{div} X_f}$ , para toda  $f \in C_M^\infty$ .

**Proposición 3.2.4.** *En cada variedad de Poisson regular  $(M, \Pi, \Omega)$ , si  $Z$  denota el campo modular de  $\Pi$ , entonces  $Z \in \Gamma\mathcal{D}^\Pi$ .*

*Demostración.* Supóngase que  $\mathcal{D}^\Pi$  es una distribución  $k$ -dimensional. Por ser  $(\mathcal{D}^\Pi)^\circ \simeq \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^1$ , se tiene que  $X \in \Gamma\mathcal{D}^\Pi$  si y sólo si  $i_X\alpha = 0$ , para toda  $\alpha \in (\mathcal{D}^\Pi)^\circ$ . Por otro lado, para cada  $p \in M$ , localmente  $(\mathcal{D}^\Pi)_p^\circ = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{d_p f_1, \dots, d_p f_{m-k}\}$  con  $f_1, \dots, f_{m-k}$  funciones de Casimir de la estructura de Poisson  $\Pi$ . Así, dado  $\alpha \in (\mathcal{D}^\Pi)^\circ$  arbitrario es

$$i_Z\alpha = i_Z(g^i df_i) = g^i \mathcal{L}_Z f_i = g^i \operatorname{div} X_{f_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, m-k)$$

□

**Clase Modular.** Como se mostró en líneas anteriores cada campo modular  $Z$  es un 1-cociclo de la estructura de Poisson  $\Pi$ , lo cual permite formular la siguiente definición.

**Definición 3.2.5.** *Se llama clase modular de la estructura de Poisson  $\Pi$  a la clase de cohomología de Poisson*

$$\mathcal{M}_M^\Pi := [Z] = [Z_\Pi^\Omega] \in \mathcal{H}_\Pi^1(M).$$

Notemos que la definición de la clase modular es independiente de la forma de volúmen elegida, esto como consecuencia de (3.2.1).

A continuación el siguiente teorema da respuesta a la interrogante propuesta de manera previa a la definición de campo modular.

**Teorema 3.2.6.** *Una variedad de Poisson orientable,  $(M, \Pi, \tilde{\Omega})$ , admite una forma de volúmen  $\Omega \in \Omega_M^m$  tal que el campo modular relativo a ella es nulo,  $Z_{\Pi}^{\Omega} \equiv 0$ , si y sólo si la clase modular de la estructura de Poisson  $\Pi$  es trivial,  $\mathcal{M}_M^{\Pi} = 0$ .*

*Demostración. Necesidad:* Si se supone que existe  $\Omega$  tal que  $Z_{\Pi}^{\Omega} \equiv 0$ , es inmediato que  $\mathcal{M}_M^{\Pi} = 0$ .

*Suficiencia:* Supóngase  $\mathcal{M}_M^{\Pi} = 0$ . Notemos que la hipótesis implica que  $Z_{\Pi}^{\tilde{\Omega}} = X_f$  para alguna  $f \in C_M^{\infty}$ . Así, definiendo  $\Omega = e^f \tilde{\Omega}$  se tiene que

$$Z_{\Pi}^{\Omega} = Z_{\Pi}^{e^f \tilde{\Omega}} = Z_{\Pi}^{\tilde{\Omega}} - X_{\ln|e^f|} = X_f - X_f = 0.$$

Por tanto,  $\Omega = e^f \tilde{\Omega}$  es la forma de volúmen deseada.

□

Como el teorema anterior se traduce en decir que  $Z_{\Pi}^{\Omega} = 0$  si y sólo si  $\Omega$  es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano, la clase modular  $\mathcal{M}_M^{\Pi}$  se interpreta como una medida de la obstrucción a la existencia de una forma de volúmen en  $(M, \Pi, \Omega)$  invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano.

**Definición 3.2.7.** *Una variedad de Poisson  $(M, \Pi, \Omega)$  se llama unimodular si  $\mathcal{M}_M^{\Pi} = 0$ .*

En términos de la definición anterior el Teorema 3.2.6 se traduce como: una variedad  $(M, \Pi, \Omega)$  admite una forma de volúmen invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano si y sólo si es una variedad unimodular.

*Nota 3.2.8.* Notemos que en la definición anterior el término “unimodular” hace referencia a una propiedad de la variedad. Sin embargo, también es válido hacer uso de este término para referirse a una propiedad de la estructura de Poisson  $\Pi$ . Esto encuentra justificación en el hecho de que si se considera la restricción de la estructura  $\Pi$  a una familia de abiertos en la variedad, aunque formalmente son estructuras distintas, en esencia provienen de un bivector de Poisson fijo y por tanto la propiedad de que un abierto sea una variedad unimodular con la estructura de Poisson inducida se puede considerar como una propiedad del tensor de Poisson  $\Pi$ .

**Caso Codimensión Uno.** En lo que resta de esta sección se asumirá que  $(M, \Pi, \Omega)$  es tal que  $\mathcal{D}^{\Pi}$  es una distribución de codimensión uno transversalmente orientable con  $\omega \in \Omega_M^1$  y  $\sigma \in \Omega_M^2$  una 1-forma y 2-forma de definición de  $\mathcal{D}^{\Pi}$  respectivamente.

Por lo visto en párrafos anteriores es  $d\omega = \theta \wedge \omega$  y  $d\sigma = \vartheta \wedge \omega$ , para algunas  $\theta \in \Omega_M^1$  y  $\vartheta \in \Omega_M^2$ . Se mantendrán en el presente apartado estas notaciones.

**Proposición 3.2.9.** *Sea  $\sigma$  una 2-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$ . Entonces,*

1. *Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}_M$  es Hamiltoniano, con función Hamiltoniana  $f \in C_M^\infty$ , si y sólo si  $i_X \sigma = -df \pmod{\mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^1}$ .*
2.  *$\Pi^\sharp(i_X \sigma) = -X$  para toda  $X \in \Gamma \mathcal{D}^\Pi$ .*

Notemos que por ser  $\mathcal{D}^\Pi$  una distribución de codimensión uno debe ser  $m = \dim M = 2n + 1$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Se denotará  $\sigma^n := \underbrace{\sigma \wedge \cdots \wedge \sigma}_{a\text{-veces}}$ . Con esto, la  $n$ -forma

$$\Omega^{\omega, \sigma} := \omega \wedge \sigma^n \quad (3.2.2)$$

es una forma de volúmen en  $M$ . Y además, si  $\alpha \in \Omega_M^1$  es tal que  $\alpha \wedge \sigma^{n-1} \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^{2n-1}$ , entonces  $\alpha = g\omega$  para alguna  $g \in C_M^\infty$ .

**Proposición 3.2.10.** *Sea  $(M, \Pi)$  una variedad de Poisson  $(2n + 1)$ -dimensional orientable, con forma de volúmen  $\Omega^{\omega, \sigma}$  definida en (3.2.2), tal que  $\mathcal{D}^\Pi$  es una distribución de codimensión uno y transversalmente orientable. Entonces, el campo modular  $Z = Z_{\Pi}^{\Omega^{\omega, \sigma}}$  satisface*

$$i_Z \sigma = \theta \pmod{\mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^1},$$

donde  $\theta \in \Omega_M^1$  es tal que  $d\omega = \theta \wedge \omega$ . Siendo  $\omega$  una 1-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$

*Demostración.* Sea  $f \in C_M^\infty$ . Primero, como  $i_X \sigma^n = n i_X \sigma \wedge \sigma^{n-1}$  para todo  $X \in \mathfrak{X}_M$ , usando la Proposición 3.2.9 se tiene que  $i_{X_f} \sigma^n = -n df \wedge \sigma^{n-1}$ . Además, como  $i_{X_f} \omega = 0$ ,  $d\sigma^n = n d\sigma \wedge \sigma^{n-1}$  y  $\omega \wedge d\sigma = 0$ , es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_f} \Omega^{\omega, \sigma} &= di_{X_f}(\omega \wedge \sigma^n) = n d(\omega \wedge df \wedge \sigma^{n-1}) \\ &= n d\omega \wedge df \wedge \sigma^{n-1} \\ &= n \theta \wedge \omega \wedge df \wedge \sigma^{n-1}. \end{aligned}$$

Luego,  $df \wedge i_Z \Omega^{\omega, \sigma} = i_Z df \cdot \Omega^{\omega, \sigma} = \operatorname{div}_{\Omega^{\omega, \sigma}} X_f \cdot \Omega^{\omega, \sigma} = \mathcal{L}_{X_f} \Omega^{\omega, \sigma} = -n df \wedge \omega \wedge \theta \wedge \sigma^{n-1}$ .

Ahora, por ser  $Z \in \Gamma \mathcal{D}^\Pi$  es

$$i_Z \Omega^{\omega, \sigma} = i_Z(\omega \wedge \sigma^n) = -n \omega \wedge i_Z \sigma \wedge \sigma^{n-1},$$

de lo cual se sigue que

$$\begin{aligned} df \wedge i_Z \Omega^{\omega, \sigma} &= -n df \wedge \omega \wedge i_Z \sigma \wedge \sigma^{n-1} = -n df \wedge \omega \wedge \theta \wedge \sigma^{n-1}, \quad \forall f \in C_M^\infty \\ &\iff \\ df \wedge (\omega \wedge i_Z \sigma \wedge \sigma^{n-1} - \omega \wedge \theta \wedge \sigma^{n-1}) &= 0, \quad \forall f \in C_M^\infty \\ &\iff \\ \omega \wedge (i_Z \sigma - \theta) \wedge \sigma^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que,  $(i_Z \sigma - \theta) \wedge \sigma^{n-1} \in \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^{2n-1}$ . En consecuencia,  $i_Z \sigma - \theta = g\omega$  para alguna  $g \in C_M^\infty$ .

□

De las proposiciones anteriores se desprende el siguiente teorema que es el principal resultado de esta sección.

**Teorema 3.2.11.** *Sea  $(M, \Pi)$  una variedad de Poisson orientable tal que  $\mathcal{D}^\Pi$  es una distribución de codimensión uno y transversalmente orientable. Entonces,  $(M, \Pi)$  es una variedad de Poisson unimodular si y sólo si la primera clase característica es trivial,  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^1 = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\omega \in \Omega_M^1$  una 1-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$  tal que  $d\omega = \theta \wedge \omega$  y  $\sigma \in \Omega_M^2$  una 2-forma de definición de  $\mathcal{D}^\Pi$ . Por el Lema 2.3.5 se tiene que  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^1 = 0$  si y sólo si  $\theta = g\omega + d\tilde{f}$ , para algunas  $f, g \in C_M^\infty$ . Por tanto, tomando  $f = -\tilde{f}$ , se tiene que

$$i_Z\sigma = \theta \quad \text{mód } \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^1 \iff i_Z\sigma = -df \quad \text{mód } \mathcal{I}_{\mathcal{D}^\Pi}^1 \iff Z = X_f \iff \mathcal{M}_M^\Pi = 0.$$

□

Es consecuencia inmedia de la Nota 2.3.8 el siguiente criterio para determinar si una variedad de Poisson no es unimodular.

**Criterio 3.2.12.** *Sea  $(M, \Pi, \Omega)$  una variedad de Poisson orientable tal que  $\mathcal{D}^\Pi$  es una distribución de codimensión uno. Si la clase de Godbillon-Vey no es trivial entonces  $M$  no es una variedad de Poisson unimodular.*

**Ejemplo 3.2.13.** La variedad  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Plano-}x_1x_3\}$  con la estructura de Poisson  $\Pi = x_2x_3 \partial_{x_1} \wedge \partial_{x_2}$  es una variedad unimodular. Lo anterior consecuencia de lo visto en el Ejemplo 2.3.7.

◇

*Formas de Volúmen Invariantes (Algoritmo).* Sea  $(M, \Pi, \tilde{\Omega})$  una variedad de Poisson orientable con  $\dim M = 2n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Notemos que los Teoremas 2.3.6, 3.2.11 y 3.2.6 proporcionan la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\Pi \text{ admite un factor integrante } m \in C_M^\infty &\iff \mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^1 = 0 \\ &\iff \mathcal{M}_M^\Pi = 0 \\ &\iff Z_\Pi^\Omega = 0 \text{ para alguna } \Omega \in \Omega_M^{2n+1}. \end{aligned}$$

Las demostraciones de estas implicaciones permiten construir el siguiente algoritmo: sean  $\omega \in \Omega_M^1$  y  $\sigma \in \Omega_M^2$  una 1-forma y una 2-forma de definición de la distribución  $\mathcal{D}^\Pi$ . Por ser  $\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^1$  y  $\mathcal{M}_M^\Pi$  independientes de la forma de volúmen fijada, se tomará  $\tilde{\Omega} = \Omega^{\omega, \sigma}$ .

Sea  $m \in C_M^\infty$  un factor integrante para  $\mathcal{D}^\Pi$ . La demostración del Teorema 2.3.6 muestra que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}^\Pi}^1 = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \theta = g\omega + d(\ln |m|), \quad \text{para alguna } g \in C_M^\infty.$$

Ahora, la demostración del Teorema 3.2.11 dice que lo anterior equivale a que,

$$\text{tomando } f = \ln \left| \frac{1}{m} \right|, \quad \text{es } Z_\Pi^{\Omega^{\omega,\sigma}} = X_{\ln \left| \frac{1}{m} \right|}.$$

Finalmente, por la demostración del Teorema 3.2.6 se tiene que,

$$\text{definiendo } \Omega := e^{\ln \left| \frac{1}{m} \right|} \cdot \Omega^{\omega,\sigma} = \frac{1}{m} \cdot \Omega^{\omega,\sigma}, \quad \text{es } Z_\Pi^\Omega \equiv 0,$$

es decir,  $\Omega = (1/m)\Omega^{\omega,\sigma}$  es la forma de volúmen invariante buscada. El algoritmo anterior se resume en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.14.** *Sea  $(M, \Pi, \tilde{\Omega})$  una variedad de Poisson orientable con forma de volúmen  $\tilde{\Omega}$  y tal que  $\mathcal{D}^\Pi$  es una distribución de codimensión uno y transversalmente orientable. Si  $m \in C_M^\infty$  es un factor integrante para  $\mathcal{D}^\Pi$ , entonces la forma de volúmen  $\Omega := (1/m)\tilde{\Omega}$  es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano. Recíprocamente, si  $f \in C_M^\infty$ ,  $f \neq 0$ , es tal que  $\Omega := f\tilde{\Omega}$  es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano, entonces  $1/f$  es un factor integrante para  $\mathcal{D}^\Pi$ .*

De manera local se puede dar un criterio en términos de los campos Hamiltonianos asociados a las funciones coordenadas locales para determinar si una variedad de Poisson unimodular.

**Criterio 3.2.15.** *Una variedad de Poisson orientable  $(M, \Pi, \tilde{\Omega})$  es unimodular si y sólo admite una forma de volúmen  $\Omega$  tal que para cada carta  $(U, \varphi)$  en  $M$ , con coordenadas locales  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , cumple que  $\mathcal{L}_{X_{x_i}}\Omega = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .*

**Ejemplo 3.2.16.** Consideremos la variedad de Poisson orientable  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Plano-}x_1x_3\}$ , con la estructura de Poisson  $\Pi = x_2x_3 \partial_{x_1} \wedge \partial_{x_2}$  y forma de volúmen  $\tilde{\Omega} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ .

Como se mostró en el Ejemplo 2.3.7 la función  $m = x_2x_3^3$  es un factor integrante para la distribución  $\mathcal{D}^\Pi$ , por lo que, acorde a la Proposición 3.2.14 la forma de volúmen

$$\Omega = \frac{1}{m} \tilde{\Omega} = \frac{1}{x_2x_3^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (3.2.3)$$

es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano. Para mostrar esto último se utilizará el criterio anterior. Se tiene que

$$\begin{aligned} X_{x_1} &= x_2x_3 \partial_{x_2} \\ X_{x_2} &= -x_2x_3 \partial_{x_1} \\ X_{x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{L}_{X_{x_1}} \Omega = di_{X_{x_1}} \Omega = -d\left(\frac{1}{x_3} dx^1 \wedge dx^3\right) = -\left(\partial_{x_3}\left(\frac{1}{x_3}\right) dx^3\right) \wedge dx^1 \wedge dx^3 = 0.$$

$$\mathcal{L}_{X_{x_2}} \Omega = di_{X_{x_2}} \Omega = -d\left(\frac{1}{x_3} dx^2 \wedge dx^3\right) = -\left(\partial_{x_1}\left(\frac{1}{x_3}\right) dx^3\right) \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0.$$

$$\mathcal{L}_{X_{x_3}} \Omega = 0.$$

Por lo tanto,  $\Omega$  definida en (3.2.3) es una forma de volúmen invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano.

◇



# Capítulo 4

## Operador Traza

En este capítulo se generaliza lo presentado en el Capítulo 3 haciendo uso del operador introducido por Koszul en [11] para variedades orientables. Se presentan propiedades generales de este operador y las ventajas de utilizarlo en variedades de Poisson orientables, específicamente, para el estudio de campos mudulares.

### 4.1. Definición y Propiedades

Una *variedad orientable* es un par  $(M, \Omega)$  donde  $M$  es una variedad  $m$ -dimensional y  $\Omega$  una forma diferencial en  $M$  de grado máximo que es no-degenerada:  $\Omega \in \Omega_M^m$  tal que  $\Omega \neq 0$  en  $M$ .

En toda variedad orientable  $(M, \Omega)$  la inserción de multivectores en formas diferenciales induce el siguiente isomorfismo  $C_M^\infty$ -lineal

$$\begin{aligned} \varphi \equiv \varphi_\Omega : \chi_M^a &\longrightarrow \Omega_M^{m-a} \\ A &\longmapsto \varphi(A) := i_A \Omega \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Para cada  $\alpha \in \Omega_M^a$ , la inversa de este isomorfismo se define por

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \equiv \varphi_\Omega^{-1} : \Omega_M^a &\longrightarrow \chi_M^{m-a} \\ \alpha &\longmapsto \varphi^{-1}(\alpha) := i_\alpha \Theta \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

con  $\Theta \in \chi_M^m$  el  $m$ -vector dual de  $\Omega$ , esto es,  $i_\Omega \Theta = i_\Theta \Omega = 1$ .

Es claro que el isomorfismo (4.1.2) depende de la forma de volúmen fijada, concretamente, puesto que dos formas de volúmen difieren por una función suave  $f \neq 0$ , es

$$\varphi_{f\Omega} = f \cdot \varphi_\Omega \quad \text{y} \quad \varphi_{f\Omega}^{-1} = \frac{1}{f} \cdot \varphi_\Omega^{-1}.$$

En efecto,  $\varphi_{f\Omega}(A) = i_A(f\Omega) = f \cdot i_A \Omega = f \cdot \varphi_\Omega(A)$ , para toda  $A \in \chi_{M_\sim}^a$ . La segunda igualdad se demuestra de manera análoga utilizando que si  $\tilde{\Omega} = f\Omega$ , entonces  $\tilde{\Theta} = (1/f)\Theta$ . Además,

directamente de las definiciones se siguen las siguientes igualdades

$$\varphi(A \wedge B) = i_A \varphi(B) = (-1)^{ab} i_B \varphi(A) \quad \text{y} \quad \varphi^{-1}(\alpha \wedge \beta) = i_\alpha \varphi^{-1}(\beta) = (-1)^{ab} i_\beta \varphi^{-1}(\alpha),$$

para cualesquier  $A \in \chi_M^a, B \in \chi_M^b$  y  $\alpha \in \Omega_M^a, \beta \in \Omega_M^b$ .

**Definición 4.1.1.** *Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable. Se llama operador traza (relativo a la forma de volúmen  $\Omega$ ) al operador  $\mathbb{R}$ -lineal definido por*

$$\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_\Omega := \varphi_\Omega^{-1} \circ d \circ \varphi_\Omega : \chi_M^a \longrightarrow \chi_M^{a-1},$$

es decir, como el pullback bajo el isomorfismo (4.1.2) de la diferencial exterior para formas,  $d : \Omega_M^a \rightarrow \Omega_M^{a+1}$ .

Si  $A$  es un  $a$ -vector en  $M$ , al multivector  $\mathcal{D}(A) \in \chi_M^{a-1}$  se le llama la *traza* de  $A$ . La definición anterior se puede reformular en la siguiente forma equivalente: para cada  $a$ -vector  $A$  en  $M$ , la traza de  $A$  es el *único*  $(a-1)$ -vector  $\mathcal{D}_\Omega(A)$  tal que

$$i_{\mathcal{D}_\Omega(A)} \Omega = di_A \Omega.$$

Es claro que la definición del operador traza depende de la forma de volúmen fijada. Si  $\tilde{\Omega} = f \Omega$ , con  $f \in C_M^\infty$  y  $f \neq 0$ , es otra forma de volúmen en  $M$ , entonces

$$\mathcal{D}_f \Omega = \mathcal{D}_\Omega + \frac{1}{f} i_d f. \quad (4.1.3)$$

En efecto, para cada  $a$ -vector  $A$  en  $M$ , por definición de operador traza y utilizando las propiedades del isomorfismo (4.1.2) se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_f \Omega - \mathcal{D}_\Omega)(A) &= (\varphi_\Omega^{-1} \circ \varphi_\Omega)(\mathcal{D}_f \Omega(A) - \mathcal{D}_\Omega(A)) = \varphi_\Omega^{-1}(\frac{1}{f} di_A(f \Omega) - di_A \Omega) \\ &= \varphi_\Omega^{-1}(d(\ln |f|) \wedge i_A \Omega) = i_{d(\ln |f|)} \varphi_\Omega^{-1}(i_A \Omega) \\ &= i_{d(\ln |f|)} A. \end{aligned}$$

Una primera consecuencia es que el operador traza resulta ser un operador de homología y esta característica es independiente de la elección de la forma de volúmen. Esto es producto de la propiedad de cuadrado cero de la diferencial exterior para formas.

**Proposición 4.1.2.** *En toda variedad orientable el operador traza es un operador de cofrontera, es decir,*

$$\mathcal{D}^2 \equiv \mathcal{D} \circ \mathcal{D} = 0$$

*Demostración.* Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable. Por definición de operador traza se tiene que

$$\mathcal{D}^2 = \mathcal{D} \circ \mathcal{D} = (\varphi^{-1} \circ d \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ d \circ \varphi) = \varphi^{-1} \circ d^2 \circ \varphi = 0.$$

□

La proposición anterior implica que en cualquier variedad contractible el operador  $\mathcal{D}$  define una *sucesión exacta* dada por

$$\dots \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_M^a \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_M^{a-1} \xrightarrow{\mathcal{D}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}} C_M^\infty \xrightarrow{\mathcal{D}} \{0\}.$$

Así, en cualquier variedad simplemente conexa cada  $a$ -vector  $A$  con traza cero, es un multivector  $\mathcal{D}$ -*exacto*, es decir, es  $A = \mathcal{D}(\tilde{A})$  para algún  $\tilde{A} \in \chi_M^{a+1}$ .

Antes de continuar con el tratamiento y la exploración de las propiedades algebraicas del operador traza es importante subrayar que se puede pensar a  $\mathcal{D}_\Omega$  como una generalización del operador divergencia para campos vectoriales en variedades orientables. En efecto, para cada campo vectorial  $X$  en  $M$ , se tiene que  $i_{\mathcal{D}(X)}\Omega = di_X\Omega = \mathcal{L}_X\Omega = \text{div}_\Omega X \cdot \Omega = i_{\text{div}_\Omega X}\Omega$ , es decir,

$$\mathcal{D}_\Omega(X) = \text{div}_\Omega X, \quad X \in \mathfrak{X}_M.$$

**Proposición 4.1.3.** *El operador traza cumple que:*

1.  $\mathcal{D}(f) = 0$ , para toda  $f \in C_M^\infty$ .
2.  $\mathcal{D}(A \wedge B) = \mathcal{D}(A) \wedge B + (-1)^a A \wedge \mathcal{D}(B) + (-1)^{a+1} \llbracket A, B \rrbracket$ .
3.  $\mathcal{D}(\llbracket A, B \rrbracket) = \llbracket \mathcal{D}(A), B \rrbracket + (-1)^{a-1} \llbracket A, \mathcal{D}(B) \rrbracket$ .

para cualesquier  $A \in \chi_M^a$  y  $B \in \chi_M^b$ .

*Demostración.* Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable con forma de volumen  $\Omega$ .

1. Para toda función suave  $f$  en  $M$  se tiene que

$$\mathcal{D}(f) = (\varphi^{-1} \circ d \circ \varphi)(f) = \varphi^{-1}(d(f\Omega)) = \varphi^{-1}(0) = 0$$

2. Por definición del corchete de Schouten-Nijenhuis, se tiene que

$$\begin{aligned} i_{[A,B]} &= \llbracket i_A, d \rrbracket, i_B &= (i_A d - (-1)^a d i_A) i_B - (-1)^{(a-1)b} i_B (i_A d - (-1)^a d i_A) \\ &= i_A d i_B - (-1)^a d i_A i_B - (-1)^{(a-1)b} i_B i_A d + (-1)^{(a-1)b+a} i_B d i_A, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} i_{[A,B]}\Omega &= i_A d i_B \Omega - (-1)^a d i_A i_B \Omega + (-1)^{(a-1)b+a} i_B d i_A \Omega \\ &= i_A i_{\mathcal{D}(B)}\Omega - (-1)^a i_{\mathcal{D}(A \wedge B)}\Omega + (-1)^{(a-1)b+a} i_B i_{\mathcal{D}(A)}\Omega \\ &= (i_{A \wedge \mathcal{D}(B)} - (-1)^a i_{\mathcal{D}(A \wedge B)} + (-1)^a i_{\mathcal{D}(A) \wedge B})\Omega. \end{aligned}$$

Así,  $[[A, B]] = A \wedge \mathcal{D}(B) - (-1)^a \mathcal{D}(A \wedge B) + (-1)^a \mathcal{D}(A) \wedge B$ , con lo cual

$$\mathcal{D}(A \wedge B) = \mathcal{D}(A) \wedge B + (-1)^a A \wedge \mathcal{D}(B) + (-1)^{a+1} [[A, B]].$$

3. Usando el resultado anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}([[A, B]]) &= \mathcal{D}(A \wedge \mathcal{D}(B)) - (-1)^a \mathcal{D}^2(A \wedge B) + (-1)^a \mathcal{D}(\mathcal{D}(A) \wedge B) \\ &= \mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B) + (-1)^a A \wedge \mathcal{D}^2(B) + (-1)^{a+1} [[A, \mathcal{D}(B)]] \\ &+ (-1)^a \mathcal{D}^2(A) \wedge B + (-1)^{2a-1} \mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B) + (-1)^{2a} [[\mathcal{D}(A), B]] \\ &= [[\mathcal{D}(A), B]] + (-1)^{a+1} [[A, \mathcal{D}(B)]]. \end{aligned}$$

□

En la proposición anterior el punto 1 nos dice que  $\mathcal{D}$  no es una derivación del producto exterior para multivectores, sin embargo, una consecuencia importante de este punto es el poder escribir en una variedad orientable el corchete de Schouten-Nijenhuis en términos del operador traza. En contraste el punto 2 asegura que el operador traza es una derivación (graduada) del corchete de Schouten-Nijenhuis.

**Corolario 4.1.4.** *En toda variedad orientable el operador traza es un generador del corchete de Schouten-Nijenhuis para multivectores:*

$$[[A, B]] = A \wedge \mathcal{D}(B) + (-1)^a \mathcal{D}(A) \wedge B + (-1)^{a+1} \mathcal{D}(A \wedge B),$$

para cualesquier  $A \in \chi_M^a$  y  $B \in \chi_M^b$ .

## 4.2. Campos Modulares y Operador Traza

Como se mostró en el Capítulo 3 la noción de campo modular aparece de manera natural en el contexto de las variedades de Poisson orientables. En ese mismo capítulo se estudiaron ciertas propiedades de estos campos en un marco general. Afortunadamente, como mostraremos en líneas siguientes, el operador traza permite describir a los campos modulares de una manera más operable y en cierta forma elegante.

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable. Un bivector  $\Pi \in \chi_M^2$  es de Poisson si y sólo si*

$$\mathcal{D}(\Pi \wedge \Pi) = 2 \Pi \wedge \mathcal{D}(\Pi).$$

*Demostración.* Sea  $\Pi \in \chi_M^2$ . Por el Corolario 4.1.4 es

$$[[\Pi, \Pi]] = 2 \Pi \wedge \mathcal{D}(\Pi) - \mathcal{D}(\Pi \wedge \Pi).$$

Luego, el resultado se sigue por la Proposición 1.3.5.

□

Al depender el operador traza de la forma de volúmen fijada se puede pensar que la condición para que un bivector en  $M$  sea un tensor de Poisson que enuncia la proposición anterior también depende de la forma de volúmen. Por fortuna, veremos que esto no resulta ser así.

**Lema 4.2.2.** *Sea  $M$  una variedad orientable y sean  $\Omega$  y  $\tilde{\Omega}$  dos formas de volúmen en  $M$ . Dado un bivector  $\Pi \in \chi_M^2$ , se cumple que*

$$\mathcal{D}_\Omega(\Pi \wedge \Pi) = 2 \Pi \wedge \mathcal{D}_\Omega(\Pi) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{D}_{\tilde{\Omega}}(\Pi \wedge \Pi) = 2 \Pi \wedge \mathcal{D}_{\tilde{\Omega}}(\Pi).$$

*Demostración.* Este lema se sigue de las siguientes implicaciones que son consecuencia de la fórmula (4.1.3): Sean  $\Omega$  y  $\tilde{\Omega} = f \Omega$  dos formas de volúmen en  $M$ , con  $f \neq 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{f\Omega}(\Pi \wedge \Pi) &= 2 \Pi \wedge \mathcal{D}_{f\Omega}(\Pi) \\ \iff \mathcal{D}_\Omega(\Pi \wedge \Pi) + \frac{1}{f} i_{df}(\Pi \wedge \Pi) &= 2 \Pi \wedge (\mathcal{D}_\Omega(\Pi) + \frac{1}{f} i_{df}\Pi) \\ \iff \mathcal{D}_\Omega(\Pi \wedge \Pi) &= 2 \Pi \wedge \mathcal{D}_\Omega(\Pi). \end{aligned}$$

□

Las construcciones anteriores permiten definir a una *variedad de Poisson orientable* como un triple  $(M, \Pi, \Omega)$  donde  $M$  es una variedad diferencial,  $\Pi$  una estructura de Poisson y  $\Omega$  una forma de volúmen en  $M$ .

Por otro lado, notemos que si se define el campo vectorial  $Z = -\mathcal{D}(\Pi) \in \mathfrak{X}_M$ , entonces para toda función suave  $f$  en  $M$  es

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}^2(f\Pi) = \mathcal{D}(f \mathcal{D}(\Pi) - \llbracket f, \Pi \rrbracket) = \mathcal{D}(f \mathcal{D}(\Pi) + i_{df}\Pi) \\ &= -\llbracket f, \mathcal{D}(\Pi) \rrbracket + \mathcal{D}(X_f) = i_{df}\mathcal{D}(\Pi) + \text{div}_\Omega X_f \\ &= -\mathcal{L}_Z f + \text{div}_\Omega X_f \end{aligned}$$

es decir,  $\mathcal{L}_Z f = \text{div}_\Omega X_f$  para toda  $f \in C_M^\infty$ . Lo anterior permite enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.3.** *En cada variedad de Poisson orientable  $(M, \Pi, \Omega)$  el campo vectorial*

$$Z = Z_\Pi^\Omega := -\mathcal{D}_\Omega(\Pi) \in \mathfrak{X}_M$$

*es el campo modular de la estructura de Poisson  $\Pi$  relativo a la forma de volúmen  $\Omega$ .*

La descripción del campo modular como (menos) la traza del tensor de Poisson al cual está asociado resulta más cómodo de operar y algunas consecuencias de esto se presentan a continuación. Sea  $(M, \Pi, \Omega)$  una variedad de Poisson orientable.

1. Para cada función suave  $f$  en  $M$  no nula,  $f \neq 0$ , la fórmula (4.1.3) permite calcular la dependencia del campo modular respecto a las formas de volúmen en la variedad:

$$Z_{\Pi}^{f\Omega} = -\mathcal{D}_{f\Omega}(\Pi) = -\mathcal{D}_{\Omega}(\Pi) - \frac{1}{f} i_{df}\Pi = Z_{\Pi}^{\Omega} - \frac{1}{f} X_f.$$

Lo que coincide con la fórmula (3.2.1).

2. La divergencia del campo modular es nula:

$$\mathcal{D}(Z) = -\mathcal{D}^2(\Pi) = 0.$$

3. El campo modular  $Z$  preserva el volúmen  $\Omega$ :

$$\mathcal{L}_Z \Omega = \operatorname{div}_{\Omega} Z \cdot \Omega = \mathcal{D}(Z) \cdot \Omega = 0.$$

4. El campo modular  $Z$  es un campo de Poisson: al ser  $\Pi$  un tensor de Poisson satisface que  $[[\Pi, \Pi]] = 0$ , teniendo así que

$$0 = \frac{1}{2} \mathcal{D}([[ \Pi, \Pi ]]) = \frac{1}{2} [[ \mathcal{D}(\Pi), \Pi ] - \frac{1}{2} [[ \Pi, \mathcal{D}(\Pi) ]]] = [[ Z, \Pi ] = \mathcal{L}_Z \Pi.$$

5. Si  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  son dos estructuras de Poisson en  $M$  tales que la suma  $\Pi_1 + \Pi_2$  es nuevamente un bivector de Poisson, entonces el campo modular asociado a esta suma es

$$Z_{\Pi_1 + \Pi_2}^{\Omega} = -\mathcal{D}(\Pi_1 + \Pi_2) = -\mathcal{D}(\Pi_1) - \mathcal{D}(\Pi_2) = Z_{\Pi_1}^{\Omega} + Z_{\Pi_2}^{\Omega}.$$

Como se expuso en el Capítulo 1 el conjunto de campos Hamiltonianos en una variedad diferencial,  $\operatorname{Ham}(M)$ , es un ideal en la subálgebra de Lie de campos de Poisson,  $\operatorname{Poiss}(M)$ . Por tanto, por ser todo campo modular un campo de Poisson, se tiene que  $[Z, X_f] = X_{Z(f)} = X_{\operatorname{div} X_f}$  para toda  $f \in C_M^{\infty}$ . La siguiente proposición generaliza esta propiedad.

**Proposición 4.2.4.** *Sea  $(M, \Pi, \Omega)$  una variedad de Poisson orientable. Si  $Z$  es el campo modular de la estructura de Poisson  $\Pi$  relativo a la forma de volúmen  $\Omega$ , entonces para cada  $W \in \operatorname{Poiss}(M)$  se tiene que*

$$[Z, W] = X_{\operatorname{div}_{\Omega} W} \in \operatorname{Ham}(M).$$

*Demostración.* Sea  $(M, \Pi, \Omega)$  una variedad de Poisson orientable y sea  $W \in \operatorname{Poiss}(M)$ , que por definición significa que  $[[W, \Pi]] = 0$ . Luego,

$$0 = \mathcal{D}([[W, \Pi]]) = [[\mathcal{D}(W), \Pi]] + [[W, \mathcal{D}(\Pi)]] = -i_{\mathcal{D}(W)}\Pi - [\mathcal{D}(\Pi), W] = -X_{\operatorname{div}_{\Omega} W} + [Z, W].$$

□

**Transformación de Campos Modulares.** Como se mostró en párrafos anteriores el campo modular de una estructura de Poisson en una variedad orientable depende de la elección de una forma de volúmen. La intención de este apartado es estudiar la manera en que se modifica este campo bajo la acción de difeomorfismos en la variedad. Lo anterior va ligado al estudio de la equivalencia entre estructuras de Poisson en una misma variedad diferencial.

Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable. Recordemos que si  $\phi : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo, entonces

$$\phi^* \Omega = \text{Jac } \phi \cdot \Omega, \quad \text{con} \quad \text{Jac } \phi \equiv \text{Jac}_\Omega \phi. \quad (4.2.1)$$

Además, si sucede que  $\phi^* \Omega = \Omega$ , se dice que  $\phi$  *preserva volúmen*. Se tiene entonces que  $\phi$  preserva volúmen si y sólo si  $\text{Jac } \phi \equiv 1$ .

**Lema 4.2.5.** *Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable y sea  $\varphi_\Omega$  el isomorfismo definido en (4.1.2). Si  $\phi : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo, entonces*

$$\phi^* \circ \varphi_\Omega = \text{Jac } \phi \cdot \varphi_\Omega \circ \phi^* \quad \text{y} \quad \varphi_{\phi^* \Omega} = \text{Jac } \phi \cdot \varphi_\Omega. \quad (4.2.2)$$

*Demostración.* Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable. Para cualquier  $A \in \chi_M^a$  se tiene que

$$(\phi^* \circ \varphi_\Omega)(A) = \phi^* i_A \Omega = i_{\phi^* A} \phi^* \Omega = \text{Jac } \phi \cdot i_{\phi^* A} \Omega = (\text{Jac } \phi \cdot \varphi_\Omega \circ \phi^*)(A).$$

La segunda igualdad es consecuencia de la propiedad  $\varphi_f \Omega = f \cdot \varphi_\Omega$ , para cualquier  $f \in C_M^\infty$ . □

Es fácil ver también que

$$\phi^* \circ \varphi_\Omega^{-1} = \text{Jac } \phi^{-1} \cdot \varphi_\Omega^{-1} \circ \phi^* \quad \text{y} \quad \varphi_{\phi^* \Omega}^{-1} = \text{Jac } \phi^{-1} \cdot \varphi_\Omega^{-1}. \quad (4.2.3)$$

**Lema 4.2.6.** *Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable. Si  $\phi : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo que preserva volúmen ( $\text{Jac}_\Omega \phi = 1$ ), entonces*

$$\phi^* \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ \phi^*.$$

*Demostración.* Sea  $(M, \Omega)$  una variedad orientable y  $\phi : M \rightarrow M$  un difeomorfismo tal que  $\text{Jac}_\Omega \phi = 1$ . Se sigue de (4.2.2), (4.2.3) y por conmutar el pull-back con la diferencial exterior que

$$\phi^* \circ \mathcal{D}_\Omega = \phi^* \circ \varphi_\Omega^{-1} \circ d \circ \varphi_\Omega = \varphi_\Omega^{-1} \circ d \circ \varphi_\Omega \circ \phi^* = \mathcal{D}_\Omega \circ \phi^*.$$

□

Consecuencia importante de la proposición anterior es el siguiente resultado en torno al comportamiento de los campos modulares bajo difeomorfismo que preservan volúmen.

**Proposición 4.2.7.** *Sean  $(M, \Pi, \Omega)$  una variedad de Poisson orientable y  $Z_{\Pi}^{\Omega}$  el campo modular asociado a la estructura  $\Pi$  y relativo a la forma de volúmen  $\Omega$ . Si  $\phi : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo que preserva volúmen ( $\text{Jac}_{\Omega} \phi = 1$ ), entonces*

$$\phi^* Z_{\Pi}^{\Omega} = Z_{\phi^* \Pi}^{\Omega}.$$

*En particular, si  $\phi$  es un difeomorfismo de Poisson ( $\phi^* \Pi = \Pi$ ) es  $\phi^* Z_{\Pi}^{\Omega} = Z_{\Pi}^{\Omega}$ .*

*Demostración.* Sea  $(M, \Pi, \Omega)$  una variedad de Poisson orientable y  $\phi : M \rightarrow M$  un difeomorfismo que preserva el volúmen  $\Omega$ . Usando el Lema 4.2.6 y por definición de campo modular se tiene que

$$\phi^* Z_{\Pi}^{\Omega} = -\phi^*(\mathcal{D}(\Pi)) = -\mathcal{D}(\phi^* \Pi) = Z_{\phi^* \Pi}^{\Omega}.$$

Si además  $\phi$  es un difeomorfismo de Poisson es  $\phi^* \Pi = \Pi$  por definición.

□

A continuación, un resultado un tanto más general cuya demostración utiliza técnicas análogas a las anteriores.

**Proposición 4.2.8.** *Sean  $(M_1, \Pi_1, \Omega_1)$  y  $(M_2, \Pi_2, \Omega_2)$  variedades de Poisson orientables. Si  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  es un difeomorfismo de Poisson ( $\phi^* \Pi_2 = \Pi_1$ ) que preserva volúmen ( $\phi^* \Omega_2 = \Omega_1$ ), entonces*

$$Z_{\Pi_1}^{\Omega_1} = \phi^* Z_{\Pi_2}^{\Omega_2}.$$

## Capítulo 5

# Estructuras de Poisson Homogéneas

En este capítulo se realiza un estudio en torno a las propiedades de los multivectores y formas homogéneas en  $\mathbb{R}^n$  con el fin de utilizar estas propiedades para realizar una descomposición y una parametrización de los tensores de Poisson homogéneos en  $\mathbb{R}^n$  en términos de un campo vectorial y una forma diferencial.

### 5.1. Tensores y Formas Homogéneas

En el espacio  $\mathbb{R}^n$  consideremos coordenadas globales  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Recordemos que una función continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice ser *homogénea de grado*  $r \in \mathbb{Z}$  (o  $r$ -homogénea) si

$$f(\lambda x) = \lambda^r f(x), \quad (5.1.1)$$

para todo  $\lambda \geq 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Por el Teorema de Euler para funciones homogéneas lo anterior equivale a pedir que

$$\mathcal{L}_E f = r f, \quad (5.1.2)$$

donde  $E = x_i \partial / \partial x_i \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$  denota el *campo de Euler* en  $\mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En lo que resta de este trabajo  $E$  denotará el campo de Euler.

Ya que los objetos con los que se trabajan en este texto pertenecen a la categoría  $C^\infty$ , en particular es  $f \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty$ , por practicidad la caracterización (5.1.2) es la que se utilizará en los cálculos siguientes. Además, será  $\partial_i \equiv \partial / \partial x_i$ .

**Definición 5.1.1.** *Un multivector  $A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^a$  se dice  $r$ -homogéneo si cada función coordenada  $A^{i_1 \dots i_a}$  es una función  $r$ -homogénea, siendo  $A = 1/a! A^{i_1 \dots i_a} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a}$ .*

**Definición 5.1.2.** *Una forma diferencial  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^a$  se dice  $r$ -homogénea si cada función coordenada  $\alpha_{i_1 \dots i_a}$  es una función  $r$ -homogénea, siendo  $\alpha = 1/a! \alpha_{i_1 \dots i_a} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_a}$ .*

Directamente de las definiciones anteriores se desprende la siguiente caracterización de los multivectores y formas homogéneas en  $\mathbb{R}^n$  en términos del campo de Euler.

**Proposición 5.1.3.** Sean  $A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^a$  y  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^a$ . Si  $E \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$  denota al campo de Euler, entonces

1.  $A$  es un  $a$ -vector  $r$ -homogéneo si y sólo si  $\llbracket E, A \rrbracket = (r - a)A$ .

2.  $\alpha$  es una  $a$ -forma  $r$ -homogénea si y sólo si  $\mathcal{L}_E \alpha = (r + a)\alpha$ .

*Demostración.* En  $\mathbb{R}^n$  sea  $E$  el campo de Euler. Para demostrar el punto 1 tomemos un multivector  $A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^a$  con expresión local  $A = A^{i_1 \dots i_a} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a} \in \chi_{\mathbb{R}^n}^a$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq n$ .

1. Usando que  $\mathcal{L}_E \partial_i = -\partial_i$ , se tiene

$$\begin{aligned} \llbracket E, A \rrbracket &= \mathcal{L}_E A = (\mathcal{L}_E A^{i_1 \dots i_a}) \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a} + A^{i_1 \dots i_a} \mathcal{L}_E(\partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a}) \\ &= (\mathcal{L}_E A^{i_1 \dots i_a}) \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a} + A^{i_1 \dots i_a} \sum_{m=1}^a \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_E \partial_{i_m} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a} \\ &= (\mathcal{L}_E A^{i_1 \dots i_a}) \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a} - a A^{i_1 \dots i_a} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a} \\ &= (\mathcal{L}_E A^{i_1 \dots i_a}) \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a} - a A. \end{aligned}$$

Luego,  $\llbracket E, A \rrbracket = (r - a)A$  si y sólo si

$$(\mathcal{L}_E A^{i_1 \dots i_a}) \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a} = r A^{i_1 \dots i_a} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a},$$

lo cual equivale a que

$$\mathcal{L}_E A^{i_1 \dots i_a} = r A^{i_1 \dots i_a},$$

es decir, si y sólo si cada  $A^{i_1 \dots i_a}$  es una función  $r$ -homogénea.

2. Usando que  $\mathcal{L}_E dx^i = dx^i$ , la demostración es totalmente análoga a la anterior. □

Notemos que la propiedad de ser homogéneo determina subespacios con una  $\mathbb{Z}$ -bigraduación en el espacio de multivectores y formas en  $\mathbb{R}^n$ . De manera explícita se definen estos subespacios por

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)} &:= \{A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^a \mid A \text{ es } r\text{-homogéneo}\} \subset \chi_{\mathbb{R}^n}^a, \\ \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)} &:= \{\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^a \mid \alpha \text{ es } r\text{-homogénea}\} \subset \Omega_{\mathbb{R}^n}^a. \end{aligned}$$

Se denotarán por

$$\chi_{\mathbb{R}^n}^{\text{Hom}} = \bigoplus_{a,r \in \mathbb{Z}} \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)} \quad \text{y} \quad \Omega_{\mathbb{R}^n}^{\text{Hom}} = \bigoplus_{a,r \in \mathbb{Z}} \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)}.$$

Ciertamente estos subespacios no son  $C_{\mathbb{R}^n}^\infty$ -módulos pero sí subespacios vectoriales. En consecuencia, los pares  $(\chi_{\mathbb{R}^n}^{\text{Hom}}, \wedge)$  y  $(\Omega_{\mathbb{R}^n}^{\text{Hom}}, \wedge)$  heredan la estructura de álgebra (exterior) en las cuales los respectivos productos presentan el siguiente comportamiento con respecto a la bigraduación

$$\wedge : \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_1, r_1)} \times \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_2, r_2)} \longrightarrow \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_1+a_2, r_1+r_2)} \quad \text{y} \quad \wedge : \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a_1, r_1)} \times \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a_2, r_2)} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a_1+a_2, r_1+r_2)}.$$

En efecto, dados  $A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a, r_1)}$  y  $\tilde{A} \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_2, r_2)}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \llbracket E, A \wedge \tilde{A} \rrbracket &= \llbracket E, A \rrbracket \wedge \tilde{A} + A \wedge \llbracket E, \tilde{A} \rrbracket = (r_1 - a_1) A \wedge \tilde{A} + A \wedge (r_2 - a_2) \tilde{A} \\ &= ((r_1 + r_2) - (a_1 + a_2)) A \wedge \tilde{A}. \end{aligned}$$

Luego, la afirmación se sigue de la Proposición 5.1.3. Análogamente, para cualesquiera  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a_1, r_1)}$  y  $\tilde{\alpha} \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a_2, r_2)}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E(\alpha \wedge \tilde{\alpha}) &= \mathcal{L}_E \alpha \wedge \tilde{\alpha} + \alpha \wedge \mathcal{L}_E \tilde{\alpha} = (r_1 + a_1) \alpha \wedge \tilde{\alpha} + \alpha \wedge (r_2 + a_2) \tilde{\alpha} \\ &= ((r_1 + r_2) + (a_1 + a_2)) \alpha \wedge \tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

En las siguientes proposiciones se presenta el comportamiento de algunos operadores definidos en los  $C_{\mathbb{R}^n}^\infty$ -módulos de multivectores y formas en  $\mathbb{R}^n$  restringidos a  $\chi_{\mathbb{R}^n}^{\text{Hom}}$  y  $\Omega_{\mathbb{R}^n}^{\text{Hom}}$ .

**Proposición 5.1.4.** *En  $\mathbb{R}^n$  el corchete de Schouten-Nijenhuis y el operador traza restringidos a la subálgebra  $\chi_{\mathbb{R}^n}^{\text{Hom}}$  presentan el siguiente comportamiento*

$$\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket : \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_1, r_1)} \times \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_2, r_2)} \longrightarrow \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_1+a_2-1, r_1+r_2-1)} \quad \text{y} \quad \mathcal{D} : \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_1, r_1)} \longrightarrow \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_1-1, r_1-1)}.$$

*Demostración.* Esta demostración se argumentará en base a la Proposición 5.1.3. Sean  $A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_1, r_1)}$  y  $\tilde{A} \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a_2, r_2)}$ . Primero, por la identidad de Jacobi para el corchete de Schouten-Nijenhuis se tiene que

$$\begin{aligned} \llbracket E, \llbracket A, \tilde{A} \rrbracket \rrbracket &= \llbracket \llbracket E, A \rrbracket, \tilde{A} \rrbracket + \llbracket A, \llbracket E, \tilde{A} \rrbracket \rrbracket = \llbracket (r_1 - a_1) A, \tilde{A} \rrbracket + \llbracket A, (r_2 - a_2) \tilde{A} \rrbracket \\ &= ((r_1 + r_2 - 1) - (a_1 + a_2 - 1)) \llbracket A, \tilde{A} \rrbracket. \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que por hipótesis es  $\llbracket E, A \rrbracket = (r_1 - a_1) A$  y por ser  $\mathcal{D}(E) = n = \dim \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$(r_1 - a_1) \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\llbracket E, A \rrbracket) = \llbracket \mathcal{D}(E), A \rrbracket + \llbracket E, \mathcal{D}(A) \rrbracket = \llbracket E, \mathcal{D}(A) \rrbracket,$$

es decir,

$$\llbracket E, \mathcal{D}(A) \rrbracket = ((r_1 - 1) - (a_1 - 1)) \mathcal{D}(A).$$

□

En general, la derivada de Lie y la inserción de un campo vectorial en una forma homogénea no dan como resultado una forma homogénea a no ser que el campo vectorial sea también homogéneo.

**Proposición 5.1.5.** *En  $\mathbb{R}^n$  la diferencial exterior, la inserción y la derivada de Lie por un campo vectorial  $s$ -homogéneo  $X$  restringidos a  $\chi_{\mathbb{R}^n}^{\text{Hom}}$  presentan el siguiente comportamiento*

$$\begin{aligned} d : \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)} &\longrightarrow \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a+1,r-1)}, & i_X : \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)} &\longrightarrow \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a-1,r+s)}, \\ \mathcal{L}_X : \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)} &\longrightarrow \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a,r+s-1)}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Esta demostración se argumentará en base a la Proposición 5.1.3. Sean  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)}$  y  $X \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(1,s)}$ . Luego, como la derivada de Lie conmuta con la diferencial exterior se tiene que

$$\mathcal{L}_E(d\alpha) = d\mathcal{L}_E\alpha = d((r+a)\alpha) = ((r-1) + (a+1))d\alpha.$$

Por otro lado,

$$\mathcal{L}_E(i_X\alpha) = i_{[E,X]}\alpha + i_X\mathcal{L}_E\alpha = i_{(s-1)X}\alpha + i_X((r+a)\alpha) = ((r+s) + (a-1))i_X\alpha.$$

Finalmente, usando lo demostrado previamente, se sigue por la fórmula de Cartán que

$$\mathcal{L}_E(\mathcal{L}_X\alpha) = \mathcal{L}_E(di_X\alpha + i_Xd\alpha) = ((r+s-1) + a)\mathcal{L}_X\alpha.$$

□

**Corolario 5.1.6.** *Sean  $A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a,r)}$  y  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a',r')}$ . Entonces,*

$$i_A A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a-a',r+r')} \quad e \quad i_A \alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a'-a,r+r')}.$$

*Demostración.* Por una parte, si  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$  son campos  $s_1, \dots, s_k$  homogéneos respectivamente y  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{a'}$  una forma  $r'$ -homogénea, entonces

$$i_{X_1 \wedge \dots \wedge X_k} \alpha = i_{X_1} \cdots i_{X_k} \alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(a'-k, r'+s_1+\dots+s_k)}.$$

Por otro lado, si  $\eta \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(1,s)}$  y  $X \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$  es un campo  $r$ -homogéneo, entonces  $i_\eta X$  es una función  $(r+s)$ -homogénea, esto porque  $i_\eta X = i_X \eta$ . Ahora, si  $X_1, \dots, X_a \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$  son campos  $r_1, \dots, r_a$  homogéneos respectivamente, como

$$i_\eta(X_1 \wedge \dots \wedge X_a) = \sum_{i=1}^a (-1)^{i+1} X_1 \wedge \dots \wedge i_\eta X_i \wedge \dots \wedge X_a,$$

se tiene que  $i_\eta(X_1 \wedge \cdots \wedge X_a) \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a-1, r_1 + \cdots + r_a + s)}$ . En consecuencia, si  $A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a, r)}$ , entonces  $i_\eta A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a-1, r+s)}$ . Aún más, si  $\eta_1, \dots, \eta_k$  son 1-formas  $s_1, \dots, s_k$  homogéneas respectivamente, entonces

$$i_{\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k} A = i_{\eta_1} \cdots i_{\eta_k} A \in \chi_{\mathbb{R}^n}^{(a-k, r+s_1+\cdots+s_k)}.$$

Ya que todo lo anterior fue realizado en términos de multivectores y formas descomponibles se tiene el resultado del corolario. □

**Caso  $r \geq 0$ .** En lo que resta de esta sección se asumirá que el grado de homogeneidad de los multivectores y formas diferenciales es no-negativo. Notemos que en este caso, por definición, una función 0-homogénea es una función *constante*. En efecto, de (5.1.1) se sigue que si  $r = 0$ , es  $f(x) = f(0)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposición 5.1.7.** *Si  $f \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty$  es una función  $r$ -homogénea ( $r \geq 0$ ), entonces  $f$  es un polinomio homogéneo de grado  $r$ .*

*Demostración.* Sea  $f \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty$   $r$ -homogénea. Por la Proposición 5.1.5 es  $df \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(1, r-1)}$ , lo que por definición de 1-forma homogénea, quiere decir que cada  $\partial_{i_1} f$  es una función  $(r-1)$ -homogénea para cada  $i_1 = 1, \dots, n$ .

Definamos para cada índice  $i_1$  la función  $f_{i_1} := \partial_{i_1} f$ , la cual vimos es una función  $(r-1)$ -homogénea. Nuevamente, por la Proposición 5.1.5 es  $df_{i_1} \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(1, r-2)}$ , lo que quiere decir que cada  $\partial_{i_2} f_{i_1}$  es una función  $(r-2)$ -homogénea para cada  $i_2 = 1, \dots, n$ . Pero, por construcción es  $\partial_{i_2} f_{i_1} = \partial_{i_2} \partial_{i_1} f = \partial_{i_2 i_1}^2 f$ , lo que significa que todas las segundas derivadas parciales de  $f$  son funciones homogéneas de grado  $(r-2)$ .

Análogamente, si definimos para cada índice  $i_1, i_2$  la función  $f_{i_2 i_1} := \partial_{i_2} f_{i_1}$  se concluye que cada  $\partial_{i_3} f_{i_2 i_1} = \partial_{i_3 i_2 i_1}^3 f$  es una función  $(r-3)$ -homogénea, es decir, que todas las terceras derivadas parciales de  $f$  son funciones homogéneas de grado  $(r-3)$ .

Iterando el proceso anterior se obtiene que todas las derivadas parciales de  $f$  de orden  $r$  son funciones homogéneas de grado cero (constantes). Esto implica que  $f$  es un polinomio de grado menor o igual a  $r$ , pero (5.1.1) permite concluir que el grado es precisamente  $r$ . □

En palabras, la proposición anterior dice que para el caso  $r \geq 0$ , en la categoría  $C^\infty$ , las nociones de “función homogénea” y “polinomio homogéneo” son indistintas y que el grado de homogeneidad de la función coincide con el grado usual de un polinomio homogéneo. Por tanto, en lo que resta de este texto utilizaremos solamente polinomios homogéneos.

**Proposición 5.1.8.** *Sea  $f$  un polinomio  $r$ -homogéneo en  $\mathbb{R}^n$ , con  $r \geq 1$ . Entonces,  $df = 0$  si y sólo si  $f \equiv 0$ .*

*Demostración.* Sea  $f$  un polinomio  $r$ -homogéneo con  $r \geq 1$ . Por hipótesis, es  $df \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{(1,r-1)}$ . Ahora, como  $df = 0$  si y sólo si  $f \equiv \text{constante}$ , por ser  $r \geq 1$ , lo anterior equivale a que  $f \equiv 0$ . Esto porque todo polinomio homogéneo de grado positivo se anula al ser valuado en el origen de coordenadas. □

## 5.2. Teorema de Descomposición

Considérese la variedad de Poisson  $(\mathbb{R}^n, \Pi)$ . Se dice que una estructura de Poisson en  $\mathbb{R}^n$  es  $r$ -homogénea, si el bivector  $\Pi$  es  $r$ -homogéneo. En lo que resta de este capítulo se asumirá que  $r \geq 0$  y se fijará a  $\Omega$  como la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ . Además,  $E$  denotará al campo de Euler en  $\mathbb{R}^n$  salvo que se indique lo contrario.

Es importante explicar porque en el desarrollo del texto a partir de este momento utilizaremos solamente la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$ : por definición la forma de volúmen  $\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  es una forma 0-homogénea. Así, dado un multivector  $r$ -homogéneo  $A$ , es  $i_A \Omega$  una forma  $r$ -homogénea.

Ahora, ya que dos formas de volúmen difieren por una función suave  $f$  no nula,  $\tilde{\Omega} = f \Omega$ , para que  $i_A \tilde{\Omega}$  sea una forma homogénea debe ser  $f$  una función homogénea. Pero todas las funciones homogéneas, salvo las constantes, se anulan al menos en el origen de coordenadas. Así, tiene que ser  $f \equiv \text{constante}$ . Por tanto, sin pérdida de generalidad, se puede asumir  $f \equiv 1$ .

Antes de proceder a demostrar el resultado principal de esta sección presentamos algunas consideraciones técnicas que permitirán argumentar cuestiones de unicidad en este resultado.

**Lema 5.2.1.** *Sea  $X \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$  un campo vectorial  $r$ -homogéneo. Si el bivector de Poisson  $X \wedge E$  es de traza nula,  $\mathcal{D}(E \wedge X) = 0$ , entonces es idénticamente cero.*

*Demostración.* Sea  $X$  un campo vectorial  $r$ -homogéneo en  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  el campo de Euler. Un sencillo cálculo muestra que  $\llbracket X \wedge E, X \wedge E \rrbracket = 0$ , es decir,  $X \wedge E$  es siempre un tensor de Poisson.

Ahora, supóngase que  $X \wedge E$  es un bivector de Poisson con traza cero, luego

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{D}(E \wedge X) &= \mathcal{D}(E) \wedge X - E \wedge \mathcal{D}(X) + [E, X] \\ &= nX - \text{div } X \cdot E + (r-1)X, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

con lo cual es  $X = 1/(n+r-1) \text{div } X \cdot E$ . En consecuencia,

$$X \wedge E = \frac{1}{n+r-1} \text{div } X \cdot E \wedge E = 0.$$

□

**Corolario 5.2.2.** *Si  $X \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$  es un campo  $r$ -homogéneo con divergencia cero, entonces para  $n \geq 2$  es*

$$X \wedge E = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad X = 0.$$

*Demostración.* Sea  $X$  un campo  $r$ -homogéneo en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\text{div } X = 0$ , con  $n > 1$ . Si  $X \equiv 0$ , el resultado de este corolario es trivial.

Ahora, si  $X \wedge E = 0$  y  $\text{div } X = 0$  se sigue de (5.2.1) que  $(n + r - 1)X = 0$ . Por tanto, ya que  $n > 1$ , es  $X = 0$ .

□

A continuación presentamos el teorema principal de esta sección seguido de ciertas observaciones que nos permitirán dar respuesta al planteamiento recíproco de este resultado. Señalamos que para la demostración del siguiente teorema se usarán fuertemente las propiedades del operador traza y de los multivectores y formas diferenciales homogéneas en  $\mathbb{R}^n$  estudiadas en el Capítulo 4 y en la Sección 5,1 respectivamente.

**Teorema 5.2.3** (Descomposición). *Sea  $\Pi$  un tensor de Poisson  $r$ -homogéneo en  $(\mathbb{R}^n, \Omega)$ . Entonces,  $\Pi$  admite una única descomposición*

$$\Pi = \Pi_\theta + \frac{1}{n+r-2} Z \wedge E,$$

donde

1.  $\theta$  es una  $(n - 3)$ -forma  $(r + 1)$ -homogénea.
2.  $Z$  un campo vectorial  $(r - 1)$ -homogéneo con divergencia cero.
3.  $\Pi_\theta$  es el bivector  $r$ -homogéneo definido por  $i_{\Pi_\theta} \Omega = d\theta$ .

Aquí  $\Omega$  denota la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$  y  $E$  el campo de Euler.

*Demostración.* Sea  $\Pi$  un tensor de Poisson  $r$ -homogéneo en  $\mathbb{R}^n$ . Utilizando las propiedades del operador traza se tiene que

$$\mathcal{D}(E \wedge \Pi) = \mathcal{D}(E) \wedge \Pi - E \wedge \mathcal{D}(\Pi) + [[E, \Pi]] = n\Pi - E \wedge \mathcal{D}(\Pi) + (r - 2)\Pi,$$

con lo cual es

$$\Pi = \frac{1}{n+r-2} (\mathcal{D}(E \wedge \Pi) - \mathcal{D}(\Pi) \wedge E).$$

Lo primero que se ha obtenido es una descomposición del tensor de Poisson como suma de dos bivectores. La manera particular en la que se han construido estos bivectores permite

parametrizarlos por medio de una forma diferencial y un campo vectorial en la manera siguiente: sean

$$\Pi_\theta = \frac{1}{n+r-2} \mathcal{D}(E \wedge \Pi) \in \chi_{\mathbb{R}^n}^2 \quad \text{y} \quad Z = -\mathcal{D}(\Pi) \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$$

con  $\theta = 1/(n+r-2) i_{E \wedge \Pi} \Omega \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{n-3}$ . Así, la descomposición del tensor de Poisson  $\Pi$  se expresa por

$$\Pi = \Pi_\theta + \frac{1}{n+r-2} Z \wedge E.$$

Claramente  $\theta$  es una  $(n-3)$ -forma  $(r+1)$ -homogénea y  $Z$  un campo vectorial  $(r-1)$ -homogéneo.

Notemos que por construcción de  $\Pi_\theta$  y de  $Z$  se tiene  $\mathcal{D}(\Pi_\theta) = \text{div } Z = 0$ . Estas propiedades son claves para mostrar que la descomposición del tensor de Poisson es única: supongamos que  $\Pi$  admite otra descomposición

$$\Pi = \Pi_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{n+r-2} \tilde{Z} \wedge E,$$

luego

$$\Pi_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{n+r-2} \tilde{Z} \wedge E = \Pi_\theta + \frac{1}{n+r-2} Z \wedge E,$$

es decir,

$$\Pi_{\tilde{\theta}} - \Pi_\theta = -\frac{1}{n+r-2} (\tilde{Z} - Z) \wedge E.$$

Ahora, el miembro izquierdo en la igualdad anterior es un bivector en  $\mathbb{R}^n$  con traza cero, por lo que el bivector del lado derecho de la igualdad también lo es y por el Lema 5.2.1 es  $(\tilde{Z} - Z) \wedge E = 0$ . De esto se desprende que  $\Pi_{\tilde{\theta}} = \Pi_\theta$  y por el Corolario 5.2.2 que  $\tilde{Z} = Z$  al ser  $\tilde{Z} - Z$  un campo vectorial con divergencia cero.

□

A continuación mostramos algunas propiedades y relaciones que cumplen los objetos involucrados en la descomposición de un tensor de Poisson  $\Pi$  en  $\mathbb{R}^n$  dados por el teorema precedente:  $\theta$ ,  $Z$ ,  $\Pi_\theta$  y  $Z \wedge E$ .

a) Por construcción el campo vectorial  $Z = -\mathcal{D}(\Pi)$  es el *campo modular* de la estructura de Poisson  $\Pi$  relativo a la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$ .

b) El campo vectorial  $Z$  preserva el bivector  $\Pi_\theta$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z \Pi_\theta &= \llbracket Z, \Pi_\theta \rrbracket = \llbracket Z, \Pi - \frac{1}{n+r-2} Z \wedge E \rrbracket = \llbracket Z, \Pi \rrbracket - \frac{1}{n+r-2} \llbracket Z, Z \wedge E \rrbracket \\ &= -\frac{1}{n+r-2} (\llbracket Z, Z \rrbracket \wedge E + Z \wedge \llbracket Z, E \rrbracket) = \frac{r-2}{n+r-2} Z \wedge Z \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Se cumple que  $[[\Pi_\theta, \Pi_\theta]] = \frac{2(2-r)}{n+r-2} Z \wedge \Pi_\theta$ :

$$\begin{aligned}
[[\Pi_\theta, \Pi_\theta]] &= [[\Pi, \Pi] - \frac{2}{n+r-2} [[\Pi, Z \wedge E]] + \frac{1}{(n+r-2)^2} [[Z \wedge E, Z \wedge E]] \\
&= -\frac{2}{n+r-2} [[\Pi, Z \wedge E]] = -\frac{2}{n+r-2} ([[\Pi, Z]] \wedge E - Z \wedge [[\Pi, E]]) \\
&= -\frac{2(r-2)}{n+r-2} Z \wedge \Pi = \frac{2(2-r)}{n+r-2} Z \wedge (\Pi_\theta + \frac{1}{n+r-2} Z \wedge E) \\
&= \frac{2(2-r)}{n+r-2} Z \wedge \Pi_\theta.
\end{aligned}$$

d) La forma diferencial  $\theta$  cumple que  $i_{\Pi_\theta} \Omega = d\theta$  e  $i_E \theta = 0$ :

$$i_{\Pi_\theta} \Omega = \frac{1}{n+r-2} i_{\mathcal{D}(E \wedge \Pi)} \Omega = \frac{1}{n+r-2} di_{E \wedge \Pi} \Omega = d\theta \quad \text{e} \quad i_E \theta = \frac{1}{n+r-2} i_E i_{E \wedge \Pi} \Omega = 0.$$

**Proposición 5.2.4.** *Sea  $\Pi$  un tensor de Poisson  $r$ -homogéneo en  $\mathbb{R}^n$ . Para la descomposición de este tensor de Poisson dada por el Teorema 5.2.3,*

$$\Pi = \Pi_\theta + \frac{1}{n+r-2} Z \wedge E,$$

se cumple que

1.  $Z \wedge E$  es siempre un tensor de Poisson. Si además es de traza cero, entonces  $(\mathbb{R}^n, \Pi, \Omega)$  es una variedad de Poisson unimodular.
2.  $\Pi_\theta$  es un bivector de Poisson si y sólo si  $r = 2$  ó  $i_Z d\theta = 0$ .
3.  $[[\Pi_\theta, Z \wedge E]] = 0$  si y sólo si  $\Pi_\theta$  es un bivector de Poisson.

*Demostración.* Sea  $\Pi$  un tensor de Poisson  $r$ -homogéneo en  $\mathbb{R}^n$  y consideremos la descomposición de este tensor dada por el Teorema 5.2.3.

1. Realizando cálculos directos se comprueba que es  $[[Z \wedge E, Z \wedge E]] = 0$ . Además, por el Corolario 5.2.2 el bivector  $Z \wedge E$  es de traza cero si y sólo si el campo modular  $Z$  es nulo, lo que implica que la variedad de Poisson  $(\mathbb{R}^n, \Pi, \Omega)$  es unimodular.

2. Por el inciso c) en las observaciones previas a esta proposición, se tiene que

$$[[\Pi_\theta, \Pi_\theta]] = 0 \iff (2-r) Z \wedge \Pi_\theta = 0 \iff r = 2 \text{ ó } Z \wedge \Pi_\theta = 0.$$

Pero,  $Z \wedge \Pi_\theta = 0$  si y sólo si  $i_{Z \wedge \Pi_\theta} \Omega = i_Z d\theta = 0$ .

3. La afirmación se sigue de los incisos b) y c) en las observaciones previas a esta proposición:

$$[[\Pi_\theta, Z \wedge E]] = (r-2) Z \wedge \Pi_\theta = \frac{2-n-r}{2} [[\Pi_\theta, \Pi_\theta]].$$

□

Una vez obtenida una descomposición de los tensores de Poisson en  $\mathbb{R}^n$  se han estudiado ciertas propiedades y relaciones que cumplen los objetos involucrados en esta descomposición. En la siguiente sección se mostrará que algunas de estas propiedades y relaciones son suficientes para dar respuesta a la siguiente cuestión: dados  $\theta \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{n-3}$  y  $Z \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^n}$ , ¿qué condiciones deben cumplir estos objetos para inducir un bivector de Poisson  $r$ -homogéneo en  $\mathbb{R}^n$ ?

### 5.3. Parametrización

Consideremos el espacio  $(\mathbb{R}^n, \Omega)$  con forma de volúmen estándar  $\Omega$ . Para cada  $(n-3)$ -forma diferencial  $\theta$  en  $\mathbb{R}^n$ , sea  $\Pi_\theta$  el bivector definido por

$$\chi_M^2 \ni \Pi_\theta := \varphi^{-1}(d\theta) \iff i_{\Pi_\theta} \Omega = d\theta. \quad (5.3.1)$$

Es decir, el 2-vector inducido por  $d\theta$  mediante el isomorfismo (4.1.2).

Notemos que de manera inmediata se tiene que  $\Pi_\theta = 0$  si y sólo si  $\theta$  es cerrada, en particular,  $\Pi_0 = 0$ .

**Lema 5.3.1.** *Sea  $\theta$  una  $(n-3)$ -forma en  $\mathbb{R}^n$  y  $\Pi_\theta$  el bivector definido como en (5.3.1). Se cumple que*

1. *La asignación  $\theta \rightarrow \Pi_\theta$  es  $\mathbb{R}$ -lineal:*

$$\Pi_{\theta+c\tilde{\theta}} = \Pi_\theta + c\Pi_{\tilde{\theta}}, \quad \forall \theta, \tilde{\theta} \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^{n-3}, c \in \mathbb{R}.$$

2.  $\mathcal{D}(\Pi_\theta) = 0$ .

3. *Si  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo, entonces  $\phi^*\Pi_\theta = \text{Jac } \phi^{-1} \cdot \Pi_{\phi^*\theta}$ . En particular, si  $\phi$  preserva volúmen es  $\phi^*\Pi_\theta = \Pi_{\phi^*\theta}$ .*

*Demostración.* Sea  $\Omega \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^n$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$ .

1. Se tiene por definición de  $\Pi_\theta$  que

$$\Pi_{\theta+c\tilde{\theta}} = \varphi^{-1}(d(\theta + c\tilde{\theta})) = \varphi^{-1}(d\theta) + c\varphi^{-1}(d\tilde{\theta}) = \Pi_\theta + c\Pi_{\tilde{\theta}}$$

2. Por definición se tiene que

$$\mathcal{D}(\Pi_\theta) = (\varphi^{-1} \circ d \circ \varphi)(\varphi^{-1}(d\theta)) = \varphi^{-1}(d^2\theta) = 0.$$

3. Para demostrar este punto es importante el hecho que la operación pull-back de formas diferenciales preserva el grado de las formas. Usando (4.2.3) y puesto que la diferencial exterior conmuta con el pull-back se tiene que

$$\phi^*\Pi_\theta = \phi^*(\varphi^{-1}(d\theta)) = \text{Jac } \phi^{-1} \cdot \varphi^{-1}(d(\phi^*\theta)) = \text{Jac } \phi^{-1} \cdot \Pi_{\phi^*\theta}.$$

□

**Pares Compatibles.** Este apartado es uno de los más importantes de este texto pues se presenta una manera de parametrizar a todos los tensores de Poisson homogéneos en el espacio  $\mathbb{R}^n$  por medio de una forma diferencial y un campo vectorial. Esto permite, entre otras cosas, traducir la condición de Jacobi para un tensor de Poisson en ciertas relaciones entre estos parámetros.

**Lema 5.3.2.** *Sea  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^a$  una forma  $r$ -homogénea, con  $r \geq 0$ . Entonces,  $\alpha$  es una forma cerrada tal que  $i_E\alpha = 0$  si y sólo si  $\alpha \equiv 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{R}^n}^a$  una forma  $r$ -homogénea, con  $r \geq 0$ . Si  $\alpha \equiv 0$  el resultado es trivial. Por tanto, supóngase  $\alpha$  cerrada e  $i_E\alpha = 0$ . Luego, por la fórmula de Cartan

$$(r + a)\alpha = \mathcal{L}_E\alpha = i_E d\alpha + di_E\alpha = 0.$$

□

Extrayendo las propiedades y condiciones de los parámetros  $\theta$  y  $Z$  del Teorema 5.2.3 desprendemos la siguiente definición.

**Definición 5.3.3.** *Sea  $(\mathbb{R}^n, \Omega)$  con forma de volumen estándar  $\Omega$ . Un  $r$ -par compatible será una dupla  $(\theta, Z)$ , donde  $\theta$  es una  $(n-3)$ -forma  $(r+1)$ -homogénea y  $Z$  un campo vectorial  $(r-1)$ -homogéneo, que satisfacen*

1.  $\operatorname{div}_\Omega Z = 0$ .
2.  $d\mathcal{L}_Z\theta = 0$ .
3.  $i_E\theta = 0$ .
4.  $[\Pi_\theta, \Pi_\theta] = \frac{2(2-r)}{n+r-2} Z \wedge \Pi_\theta$ .

Con  $\Pi_\theta$  el bivector  $r$ -homogéneo definido por  $i_{\Pi_\theta}\Omega = d\theta$ .

Antes de enunciar el resultado principal de este apartado, algunas observaciones en torno a la definición anterior.

- a) Es  $\Pi_\theta = 0$  si y sólo si  $\theta = 0$ , esto consecuencia del Lema 5.3.2. Esta observación es muy importante pues nos dice que la correspondencia lineal  $\theta \mapsto \Pi_\theta$  es un isomorfismo.
- b) La condición  $d\mathcal{L}_Z\theta = 0$  es equivalente a  $\mathcal{L}_Z\theta = 0$  si y sólo si  $r = 2$  ó  $i_Z\theta = 0$ . En efecto, ya que

$$i_E\mathcal{L}_Z\theta = \mathcal{L}_Z i_E\theta + i_{[E,Z]}\theta = (r-2)i_Z\theta,$$

por el Lema 5.3.2 se sigue el enunciado. Además, para el caso  $i_Z\theta = 0$  la condición  $\mathcal{L}_Z\theta = 0$  es equivalente a  $i_Zd\theta = 0$ .

**Teorema 5.3.4** (Parametrización). *Existe una biyección entre  $r$ -pares compatibles  $(\theta, Z)$  y estructuras de Poisson  $r$ -homogéneas  $\Pi$  en  $\mathbb{R}^n$ . La correspondencia es dada por*

$$(\theta, Z) \longmapsto \Pi_{\theta, Z} := \Pi_{\theta} + \frac{1}{n+r-2} Z \wedge E,$$

donde  $\Pi_{\theta}$  es el bivector definido por  $i_{\Pi_{\theta}}\Omega = d\theta$ .

La inversa de esta correspondencia es definida por

$$\Pi \longmapsto (\theta, Z) := \left( \frac{1}{n+r-2} i_{E \wedge \Pi} \Omega, -\mathcal{D}(\Pi) \right).$$

Siendo  $E$  el campo de Euler y  $\Omega$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Primero, dado un  $r$ -par compatible  $(\theta, Z)$  hay que mostrar que el bivector  $\Pi_{\theta, Z} := \Pi_{\theta} + 1/(n+r-2) Z \wedge E$  es un tensor de Poisson  $r$ -homogéneo.

Por definición de  $r$ -par compatible se tiene que  $d\theta$  es una  $(n-2)$ -forma  $r$ -homogénea, luego  $\Pi_{\theta} := \varphi^{-1}(d\theta)$  es un bivector  $r$ -homogéneo. De igual manera se tiene que  $Z \wedge E$  un bivector  $r$ -homogéneo. En consecuencia,  $\Pi_{\theta, Z}$  es un bivector  $r$ -homogéneo.

Ahora, efectuando algunos cálculos y usando nuevamente la definición de  $r$ -par compatible, se tiene que

$$\begin{aligned} \llbracket \Pi_{\theta, Z}, \Pi_{\theta, Z} \rrbracket &= \llbracket \Pi_{\theta}, \Pi_{\theta} \rrbracket + \frac{2(r-2)}{n+r-2} \llbracket \Pi_{\theta}, Z \rrbracket \wedge E + \frac{2(r-2)}{n+r-2} Z \wedge \Pi_{\theta} \\ &= \frac{2(2-r)}{n+r-2} Z \wedge \Pi_{\theta} + \frac{2(r-2)}{n+r-2} \llbracket \Pi_{\theta}, Z \rrbracket \wedge E + \frac{2(r-2)}{n+r-2} Z \wedge \Pi_{\theta} \\ &= \frac{2(r-2)}{n+r-2} \llbracket \Pi_{\theta}, Z \rrbracket \wedge E. \end{aligned}$$

Pero notemos que  $\llbracket Z, \Pi_{\theta} \rrbracket = \mathcal{D}(Z \wedge \Pi_{\theta})$ , lo cual equivale a que

$$\begin{aligned} \varphi(\llbracket Z, \Pi_{\theta} \rrbracket) &= \varphi(\mathcal{D}(Z \wedge \Pi_{\theta})) = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ d \circ \varphi)(Z \wedge \Pi_{\theta}) \\ &= d(i_Z \varphi(\Pi_{\theta})) = di_Z d\theta = d\mathcal{L}_Z \theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\llbracket \Pi_{\theta, Z}, \Pi_{\theta, Z} \rrbracket = 0$ , es decir,  $\Pi_{\theta, Z}$  es un bivector de Poisson  $r$ -homogéneo.

Recíprocamente, dado un bivector de Poisson  $r$ -homogéneo  $\Pi$ , por el Teorema 5.2.3, éste induce un  $r$ -par compatible  $(\theta, Z)$  donde  $\theta := 1/(n+r-2) i_{E \wedge \Pi} \Omega$  y  $Z := -\mathcal{D}(\Pi)$ .

El hecho de que esta correspondencia sea una biyección es consecuencia de los Lemas 5.2.1 y 5.3.2.

□

Una observación interesante es que

$$\mathcal{D}(\Pi_{\theta,Z}) = \frac{1}{n+r-2} \mathcal{D}(Z \wedge E) = -Z,$$

es decir, dado un  $r$ -par compatible  $(\theta, Z)$  el campo vectorial  $Z$  es el campo modular de la estructura de Poisson  $\Pi_{\theta,Z}$  inducida por este par compatible.

**Equivalencia.** Recordemos que dos estructuras de Poisson  $\Pi$  y  $\tilde{\Pi}$  en  $\mathbb{R}^n$  se dicen *equivalentes* si existe un difeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\phi^*\Pi = \tilde{\Pi}$ .

Una vez obtenida una parametrización para los tensores de Poisson homogéneos en  $\mathbb{R}^n$ , resulta natural tratar de adaptar la equivalencia entre estos tensores en términos de los parámetros. En las líneas siguientes abordamos esta cuestión.

La afirmación de que la correspondencia establecida en el Teorema 5.3.4 es una biyección nos permite declarar que

$$(\theta, Z) = (\tilde{\theta}, \tilde{Z}) \quad \text{si y sólo si} \quad \theta = \tilde{\theta} \quad \text{y} \quad Z = \tilde{Z}, \quad (5.3.2)$$

para cualesquier  $r$ -pares compatibles  $(\theta, Z)$  y  $(\tilde{\theta}, \tilde{Z})$ . Esto permite reformular la equivalencia entre tensores de Poisson en términos de  $r$ -pares compatibles.

**Teorema 5.3.5** (Equivalencia). *Dos tensores de Poisson  $r$ -homogéneos  $\Pi_{\theta,Z}$  y  $\Pi_{\tilde{\theta},\tilde{Z}}$  en  $\mathbb{R}^n$  son equivalentes si y sólo si existe  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineal e invertible, tal que*

$$(\tilde{\theta}, \tilde{Z}) = (\det T^{-1} \cdot T^*\theta, T^*Z).$$

Donde  $\Pi_{\theta,Z}$  y  $\Pi_{\tilde{\theta},\tilde{Z}}$  son definidos como en el Teorema 5.3.4.

*Demostración.* Primero, sean  $\Pi$  y  $\tilde{\Pi}$  dos tensores de Poisson homogéneos en  $\mathbb{R}^n$  equivalentes por medio de un difeomorfismo  $\phi$  con  $\phi(0) = 0$ . Vamos a probar que esto implica que  $\Pi$  y  $\tilde{\Pi}$  son linealmente equivalentes. Definamos el operador lineal  $T := d_0\phi$ , es decir, la linealización de  $\phi$  en el origen.

Expandiendo por Taylor a  $\phi$  en torno al origen, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(0) + (d_0\phi)(x) + \cdots + \phi^{(s)}(x) + \cdots \\ &= (T + \cdots + \phi^{(s)} + \cdots)(x), \end{aligned}$$

con  $\phi^{(s)}(x)$  término con entradas de orden  $s$ . En particular, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene  $\phi(tx) = tT(x) + \mathcal{O}(t^2)$ .

Por otro lado, ya que la hipótesis  $\phi^*\Pi = \tilde{\Pi}$  en este caso es equivalente a pedir que  $(\phi_*\tilde{\Pi})_{(tx)} = \Pi_{\phi(tx)}$ , se sigue de los cálculos anteriores que

$$((T + \cdots + \phi^{(s)} + \cdots)_*\tilde{\Pi})_{(tx)} = \Pi_{(T+\cdots+\phi^{(s)}+\cdots)(tx)},$$

Es decir,

$$(T_*\tilde{\Pi})_{(tx)} + \mathcal{O}(t^2) = \Pi_{tT(x)+\mathcal{O}(t^2)} \iff (T_*\tilde{\Pi})_x + \mathcal{O}(t) = \Pi_{T(x)+\mathcal{O}(t)}.$$

Finalmente, haciendo tender  $t \rightarrow 0$  es  $(T_*\tilde{\Pi})_x = \Pi_{T(x)}$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ . Esto es, de manera equivalente,

$$T^*\Pi = \tilde{\Pi}.$$

Ahora, sean  $(\theta, Z)$  y  $(\tilde{\theta}, \tilde{Z})$  dos  $r$ -pares compatibles y  $T$  un isomorfismo lineal en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\Pi_{\theta, Z}$  y  $\Pi_{\tilde{\theta}, \tilde{Z}}$  denotan los tensores de Poisson inducidos según el Teorema 5.3.4, la afirmación hecha en (5.3.2) nos dice que es  $\Pi_{\theta, Z} = \Pi_{\tilde{\theta}, \tilde{Z}}$  si y sólo si  $\theta = \tilde{\theta}$  y  $Z = \tilde{Z}$ .

Sea  $E$  el campo de Euler en  $\mathbb{R}^n$ . Luego, que usando  $T^*E = E$  y el Lema 5.3.1, se tiene

$$\begin{aligned} T^*\Pi_{\theta, Z} &= T^*\Pi_{\theta} + \frac{1}{n+r-2} T^*Z \wedge T^*E \\ &= \det T^{-1} \cdot \Pi_{T^*\theta} + \frac{1}{n+r-2} T^*Z \wedge E \\ &= \Pi_{\det T^{-1} \cdot T^*\theta} + \frac{1}{n+r-2} T^*Z \wedge E \\ &= \Pi_{\det T^{-1} \cdot T^*\theta, T^*Z}. \end{aligned}$$

Por tanto, es

$$T^*\Pi_{\theta, Z} = \Pi_{\det T^{-1} \cdot T^*\theta, T^*Z} = \Pi_{\tilde{\theta}, \tilde{Z}}$$

si y sólo si

$$\tilde{\theta} = \det T^{-1} \cdot T^*\theta \quad \text{y} \quad \tilde{Z} = T^*Z$$

□

Hemos de notar la importancia de que la equivalencia entre tensores de Poisson homogéneos en  $\mathbb{R}^n$  sea por medio de transformaciones lineales ya que estas transformaciones no alteran el grado ni la naturaleza homogénea de los tensores.

**Campos Hamiltonianos y Funciones de Casimir.** Una vez que se tiene una parametrización de los tensores de Poisson en  $\mathbb{R}^n$  es deseable poder describir los objetos asociados a las estructuras de Poisson tales como campos Hamiltonianos o funciones de Casimir en términos de los parámetros. Realizar esta traducción es el objetivo de este apartado.

**Proposición 5.3.6.** Sean el espacio  $(\mathbb{R}^n, \Omega)$  con forma de volumen estándar y  $h \in C_{\mathbb{R}^n}^{\infty}$ . El campo Hamiltoniano asociado a la función  $h$  y relativo al tensor de Poisson  $\Pi_{\theta, Z}$  es

$$X_h = \varphi^{-1}(dh \wedge d\theta) + \frac{1}{n+r-2} (\mathcal{L}_Z h \cdot E - \mathcal{L}_E h \cdot Z),$$

donde  $\Pi_{\theta, Z}$  es el tensor de Poisson  $r$ -homogéneo inducido por el  $r$ -par compatible  $(\theta, Z)$  tal como en el Teorema 5.3.4 y  $\varphi$  el isomorfismo (4.1.2).

*Demostración.* El resultado se sigue de calcular  $i_{dh}\Pi_{\theta,Z}$ .

□

**Corolario 5.3.7.** *Una función  $K \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty$  es una función de Casimir para la estructura de Poisson  $r$ -homogénea  $\Pi_{\theta,Z}$  si y sólo si*

$$\varphi_\Omega^{-1}(dK \wedge d\theta) + \frac{1}{n+r-2} (\mathcal{L}_Z K \cdot E - \mathcal{L}_E K \cdot Z) = 0.$$



## Capítulo 6

# Clasificación de Estructuras de Poisson Lineales y Cuadráticas en $\mathbb{R}^3$

El objetivo de este capítulo es presentar una clasificación de las formas normales de las estructuras de Poisson lineales y cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$  bajo la equivalencia por medio de isomorfismos lineales. Se ha dicho formas normales en el sentido que los representantes de cada clase de equivalencia son no isomorfos. Adicionalmente se calculan para cada forma normal objetos tales como campos Hamiltonianos, funciones de Casimir y dominios regulares.

### 6.1. Propiedades Generales

En esta sección se reformularán los resultados vistos en las secciones 5,2 y 5,3 para el caso  $\mathbb{R}^3$ . Esto con la finalidad de utilizarlos en las siguientes secciones de este capítulo para realizar la clasificación de estructuras de Poisson lineales y cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$ . Además, se presenta un resultado que permite determinar ciertos abiertos (densos) en donde las estructuras de Poisson resultan ser unimodulares en términos de los parámetros involucrados en la siguiente proposición.

**Proposición 6.1.1.** *Un par  $(f, Z)$ , donde  $f$  es una función  $(r + 1)$ -homogénea y  $Z$  es un campo vectorial  $(r - 1)$ -homogéneo, induce una estructura de Poisson  $r$ -homogénea en  $(\mathbb{R}^3, \Omega)$ ,*

$$\Pi_{f,Z} := \Pi_f + \frac{1}{r+1} Z \wedge E,$$

si y sólo si

1.  $\operatorname{div}_\Omega Z = 0$ .
2.  $\mathcal{L}_Z f = 0$ .

donde  $\Pi_f$  es el bivector  $r$ -homogéneo definido por  $i_{\Pi_f} \Omega = df$  y  $E$  el campo de Euler.  $\Omega$  es la forma de volumen estándar en  $\mathbb{R}^n$

*Demostración.* Sea  $(\theta, Z)$  un  $r$ -par compatible en  $\mathbb{R}^n$  (ver Definición 5.3.3). Luego, si  $n = 3$ , por definición de  $r$ -par compatible, es  $\theta = f$  una función  $(r + 1)$ -homogénea y  $Z$  un campo vectorial  $(r - 1)$ -homogéneo.

Ahora, examinemos lo que les sucede a las cuatro condiciones de la Definición 5.3.3. Notemos que la condición 1,  $\operatorname{div} Z = 0$ , no se ve alterada mientras que la condición 3,  $i_E \theta = 0$ , se cumple de manera inmediata.

Por otro lado, las condiciones 2 y 4 resultan ser equivalentes. En efecto, primero notemos que

$$i_E \mathcal{L}_Z f = \mathcal{L}_Z i_E f + i_{[E, Z]} f = (r - 2) i_Z f = 0,$$

por lo que, por el Lema 5.3.2, es  $d\mathcal{L}_Z f = 0$  si y sólo si  $\mathcal{L}_Z f = 0$ .

En segundo lugar, observemos que en este caso es  $\Pi_f = \varphi^{-1}(df)$  y que  $[[\Pi_f, \Pi_f]] = -\mathcal{D}(\Pi_f \wedge \Pi_f) = 0$ , por ser  $\Pi_f \wedge \Pi_f$  un 4-vector en  $\mathbb{R}^3$ . En consecuencia, por definición de par compatible, es  $(2 - r) Z \wedge \Pi_f = 0$ . Pero, lo anterior equivale a que

$$0 = (2 - r) i_{Z \wedge \Pi_f} \Omega = (2 - r) i_Z df = (2 - r) \mathcal{L}_Z f.$$

Lo anterior muestra la equivalencia de las condiciones 2 y 4. □

**Campos Hamiltonianos y Funciones de Casimir.** Como caso particular de la Proposición 5.3.6 se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 6.1.2.** *Sea  $\Pi_{f, Z}$  el tensor de Poisson  $r$ -homogéneo en  $(\mathbb{R}^3, \Omega)$  inducido por el par  $(f, Z)$  tal como en la Proposición 6.1.1, donde  $f$  es una función  $(r + 1)$ -homogénea y  $Z$  un campo vectorial  $(r - 1)$ -homogéneo. El campo Hamiltoniano asociado a una función  $h \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$  y relativo al tensor  $\Pi_{f, Z}$  es*

$$X_h = \varphi^{-1}(dh \wedge df) + \frac{1}{r+1} (\mathcal{L}_Z h \cdot E - \mathcal{L}_E h \cdot Z),$$

con  $\Omega$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$  y  $\varphi$  el isomorfismo (4.1.2).

Notemos que en particular, para un par  $(f, Z)$  tal como en la proposición anterior, el campo Hamiltoniano asociado a la función  $f$  es

$$X_f = -f Z.$$

**Corolario 6.1.3.** *Una función  $K \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$  es una función de Casimir para la estructura de Poisson  $r$ -homogénea  $\Pi_{f, Z}$  inducida por el par  $(f, Z)$  si y sólo si*

$$\varphi^{-1}(dh \wedge df) + \frac{1}{r+1} (\mathcal{L}_Z h \cdot E - \mathcal{L}_E h \cdot Z) = 0.$$

En particular,  $f$  es una función de Casimir para  $\Pi_{f, Z}$  si y sólo si  $Z \equiv 0$ .

**Criterio de Unimodularidad.** Recordemos que en toda variedad orientable 3-dimensional  $(M, \tilde{\Omega})$  cada tensor de Poisson  $\Pi$  induce una 1-forma  $\omega = \omega^\Pi \in \Omega_M^1$  definida por  $\omega := i_\Pi \tilde{\Omega}$  la cual cumple que

$$\omega \wedge d\omega = 0,$$

con  $\tilde{\Omega}$  una forma de volúmen en  $M$ .

Además, en la variedad  $N^{reg}$  la 1-forma  $\omega$  resulta ser una 1-forma de definición para la distribución  $\mathcal{D}^\Pi$ .

Para el caso que nos ocupa,  $(M, \tilde{\Omega}) = (\mathbb{R}^3, \Omega)$  con  $\Omega$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^3$  y  $\Pi$  un tensor de Poisson  $r$ -homogéneo, el párrafo anterior se puede reformular en términos de  $r$ -pares compatibles. Así, dado un  $r$ -par compatible  $(f, Z)$  en  $\mathbb{R}^3$  (ver Definición 5.3.3) se tiene que

$$\omega = i_{\Pi_{f,Z}} \Omega = df + \frac{1}{r+1} i_{Z \wedge E} \Omega, \quad (6.1.1)$$

con  $\Pi_{f,Z}$  el tensor de Poisson  $r$ -homogéneo inducido por el par  $(f, Z)$  tal como en la Proposición 6.1.1.

Notemos que por construcción  $\omega$  es una 1-forma  $r$ -homogénea. La expresión coordenada de  $\omega$  en términos del tensor de Poisson  $\Pi_{f,Z}$  es

$$\omega = -\Pi_{f,Z}^{23} dx^1 - \Pi_{f,Z}^{31} dx^2 - \Pi_{f,Z}^{12} dx^3.$$

Consideremos la variedad  $N^{reg}$ . Como se mencionó en líneas anteriores es  $\omega \neq 0$  en  $N^{reg}$  y resulta ser una 1-forma de definición de la distribución característica  $\mathcal{D}^{\Pi_{f,Z}}$ , que en este caso es de codimensión 1. Ya que  $\omega$  en general no es cerrada, una cuestión de interés es poder determinar un factor integrante para  $\omega|_{N^{reg}}$  definido en algún abierto  $U \subset N^{reg}$ . De ser posible es deseable que fuera  $U = N^{reg}$ . Por el Teorema 3.2.11 será  $U$  un abierto en el cual la estructura de Poisson  $\Pi_{f,Z}$  es unimodular.

**Proposición 6.1.4.** *Sea  $\Pi_{f,Z} = \Pi_f + 1/(r+1) Z \wedge E$  el tensor de Poisson  $r$ -homogéneo en  $(\mathbb{R}^3, \Omega)$  inducido por el par  $(f, Z)$ , donde  $f$  es una función  $(r+1)$ -homogénea y  $Z$  un campo vectorial  $(r-1)$ -homogéneo.*

1. *Si  $f \neq 0$  en  $\mathbb{R}^3$ , entonces la estructura de Poisson  $\Pi_{f,Z}$  es unimodular en el abierto*

$$U_1 = \left\{ df + \frac{1}{r+1} i_{Z \wedge E} \Omega \neq 0 \right\} \cap \{f \neq 0\},$$

2. *Si  $f \equiv 0$ , entonces la estructura de Poisson  $\Pi_{f,Z}$  es unimodular en el abierto*

$$U_2 = \{i_{Z \wedge E} \Omega \neq 0\} \cap \{P \neq 0\},$$

*donde  $P$  es un polinomio  $(r+1)$ -homogéneo tal que  $\mathcal{L}_Z P = 0$ .*

*Aquí,  $E$  denota el campo de Euler y  $\Omega$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Sea  $(f, Z)$  un  $r$ -par compatible en  $\mathbb{R}^3$  (ver Definición 5.3.3). Para cada  $\omega$  definida por (6.1.1) sea  $m := 1/(r+1) i_E \omega$ . Notemos que  $m = 1/(r+1) i_E \omega = 1/(r+1) \mathcal{L}_E f = f$ .

Primero, supóngase  $m \neq 0$ . Por ser  $d(\omega/m) = 1/m^2(m d\omega - dm \wedge \omega)$ , probar que  $m$  es un factor integrante de  $\omega$  es equivalente a probar la igualdad  $m d\omega = dm \wedge \omega$ . Para lo anterior se usarán las hipótesis que  $\omega$  es una forma  $r$ -homogénea y  $\omega \wedge d\omega = 0$ : de la igualdad  $(r+1)\omega = \mathcal{L}_E \omega = i_E d\omega + di_E \omega$ , se sigue que

$$i_E d\omega \wedge \omega + (di_E \omega) \wedge \omega = 0 \quad \iff \quad d(i_E \omega) \wedge \omega = (r+1) dm \wedge \omega = \omega \wedge i_E d\omega \quad (6.1.2)$$

Por otro lado, por ser  $\omega \wedge d\omega = 0$  se tiene que

$$0 = i_E(\omega \wedge d\omega) = i_E \omega \cdot d\omega - \omega \wedge i_E d\omega \quad \iff \quad (r+1) m d\omega = \omega \wedge i_E d\omega. \quad (6.1.3)$$

Por tanto, la igualdad  $m d\omega = dm \wedge \omega$  se sigue de (6.1.2) y (6.1.3).

Ahora, supóngase  $m \equiv 0$  y  $P$  un polinomio  $s$ -homogéneo tal que  $dP \wedge d\omega = 0$ . Nuevamente, para probar que  $P$  es un factor integrante de  $\omega$  es suficiente probar la igualdad  $P d\omega = dP \wedge \omega$ . Notemos que por ser  $m = 0$  es  $(r+1)\omega = i_E d\omega$ . Luego, de la hipótesis sobre  $P$  se sigue que

$$0 = i_E(dP \wedge d\omega) = i_E dP \cdot d\omega - dP \wedge i_E d\omega = \mathcal{L}_E P \cdot d\omega - (r+1) dP \wedge \omega$$

si y sólo si

$$s P d\omega = (r+1) dP \wedge \omega.$$

Luego,  $P d\omega = dP \wedge \omega$  si y sólo si  $s = r+1$ . Ahora, se tiene que  $dP \wedge d\omega = 1/(r+1) dP \wedge i_{\mathcal{D}(Z \wedge E)} \Omega = 0$  si y sólo si  $\varphi^{-1}(dP \wedge i_{\mathcal{D}(Z \wedge E)} \Omega) = -(r+1) \mathcal{L}_Z P = 0$ , con  $\varphi$  el isomorfismo (4.1.2).

Finalmente, la afirmación del teorema se sigue del Teorema 3.2.11.

□

## 6.2. Caso Lineal

Recordemos que las funciones lineales son funciones homogéneas de grado uno. Así, se tiene que  $r = 1$  y acorde con la Proposición 6.1.1 los 1-pares compatibles  $(f, Z)$  constan de un polinomio cuadrático  $f \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$  y un campo vectorial constante  $Z \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$  tales que  $\mathcal{L}_Z f = 0$ . Notemos que de manera automática se tiene en este caso  $\text{div } Z = 0$ .

Por ser  $f$  un polinomio cuadrático puede parametrizarse con una matriz simétrica  $S = [s_{ij}]_{3 \times 3}$  ( $S^\top = S$ ) de la siguiente manera

$$f(x) = x^\top S x, \quad (6.2.1)$$

para cada  $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ . Por otro lado, el campo vectorial  $Z$  al ser constante puede identificarse con un vector constante  $l \in \mathbb{R}^3$ ,

$$Z \simeq l = (l_1, l_2, l_3)^\top, \quad (6.2.2)$$

con cada  $l_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Ahora, notemos que la condición  $\mathcal{L}_Z f = 0$  en los términos anteriores es equivalente a que  $l \in \ker S$ , es decir,  $S \cdot l = 0$ . En efecto, si  $\langle, \rangle$  denota al producto interior usual en  $\mathbb{R}^3$ , entonces

$$0 = \mathcal{L}_Z f = \langle l, \nabla(x^\top S x) \rangle = \langle l, (S + S^\top)x \rangle = 2 \langle S \cdot l, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \iff \quad S \cdot l = 0.$$

**Proposición 6.2.1.** *Dos estructuras de Poisson lineales  $\Pi_{f,Z}$  y  $\Pi_{\tilde{f},\tilde{Z}}$  en  $\mathbb{R}^3$  son equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que*

$$\tilde{S} = \frac{1}{\det T} T^\top S T \quad \text{y} \quad \tilde{l} = T^{-1}l,$$

donde  $f \simeq S$ ,  $\tilde{f} \simeq \tilde{S}$  y  $Z \simeq l$ ,  $\tilde{Z} \simeq \tilde{l}$  bajo las identificaciones (6.2.1) y (6.2.2).

*Demostración.* Sean  $(f, Z)$  y  $(\tilde{f}, \tilde{Z})$  dos 1-pares compatibles en  $\mathbb{R}^3$  (ver Definición 5.3.3). Utilizando el Teorema 5.3.5 se tiene que los pares  $(f, Z)$  y  $(\tilde{f}, \tilde{Z})$  son equivalentes si y sólo si  $\tilde{f} = (1/\det T)T^*f$  y  $\tilde{Z} = T^*Z$ .

Sean  $S = [s_{ij}]_{3 \times 3}$  y  $\tilde{S} = [\tilde{s}_{ij}]_{3 \times 3}$  matrices simétricas tales que

$$f(x) = x^\top S x \quad \text{y} \quad \tilde{f}(x) = x^\top \tilde{S} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3;$$

y sean  $l, \tilde{l} \in \mathbb{R}^3$  vectores constantes con los cuales se pueden identificar  $Z$  y  $\tilde{Z}$ ,  $Z \simeq l$  y  $\tilde{Z} \simeq \tilde{l}$ . Luego, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) = (T^*f)(x) &\iff \tilde{f}(x) = f(Tx) \\ &\iff x^\top \tilde{S} x = (Tx)^\top S (Tx) = x^\top (T^\top S T) x \\ &\iff \tilde{S} = T^\top S T, \end{aligned}$$

por lo que,

$$\tilde{f} = \frac{1}{\det T} T^* f \quad \text{si y sólo si} \quad \tilde{S} = \frac{1}{\det T} T^\top S T.$$

Ahora, usando que  $T^{-1}$  es una aplicación lineal, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_x = (T^*Z)_x &\iff \tilde{l} = (d_{T(x)} T^{-1}) Z_{T(x)} \\ &\iff \tilde{l} = T^{-1}l. \end{aligned}$$

□

Con ayuda de la proposición anterior se desprende la siguiente clasificación en formas normales de los tensores de Poisson lineales en  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 6.2.2** (Clasificación). *Todo bivector de Poisson lineal en  $(\mathbb{R}^3, \Omega)$  es linealmente isomorfo a alguno de los bivectores*

$$\Pi_{f,Z} := \Pi_f + \frac{1}{2} Z \wedge E,$$

inducidos por los siguientes pares  $(f, Z)$  bajo la condición

$$\mathcal{L}_Z f = 0,$$

donde

- $f$  es un polinomio cuadrático.
- $Z$  es un campo vectorial constante.
- $\Pi_f$  es el bivector definido por  $i_{\Pi_f} \Omega = \mathrm{d}f$ .

Con  $\Omega$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^3$  y  $E \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$  el campo de Euler.

Tipo	Polinomio Cuadrático	Campo Constante (Modular)
I	$f \equiv 0$	$Z \equiv 0$
II	$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$Z \equiv 0$
III	$f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$Z \equiv 0$
IV	$f = x_1^2 + x_2^2$	$Z \equiv 0$
V	$f = x_1^2 - x_2^2$	$Z \equiv 0$
VI	$f = x_1^2$	$Z \equiv 0$
VII	$f \equiv 0$	$Z = \partial/\partial x_3$
VIII	$f = a(x_1^2 + x_2^2), \quad a \neq 0$	$Z = \partial/\partial x_3$
IX	$f = a(x_1^2 - x_2^2), \quad a \neq 0$	$Z = \partial/\partial x_3$
X	$f = x_1^2$	$Z = \partial/\partial x_3$

Tabla 6.1: Formas normales de pares  $(f, Z)$  que inducen las formas normales de las estructuras de Poisson lineales en  $\mathbb{R}^3$ .

*Demostración.* Sean  $f$  un polinomio cuadrático y  $Z$  un campo vectorial constante. Ya que la prueba de este teorema involucra cálculos repetidos, se presenta solamente el esquema de la demostración:

1. Se fijan las formas normales de las matrices simétricas de tamaño  $3 \times 3$  con entradas reales  $S_i$  (ver Apéndice B) y  $l \in \mathbb{R}^3$  un vector constante. Luego, se identifican  $f \simeq S_i$  y  $Z \simeq l$  tal como en (6.2.1) y (6.2.2).
2. Se divide la demostración en 2 casos:  $l \equiv 0$  y  $l \neq 0$ . En este último caso, por el teorema de rectificación, se puede fijar  $l = (0, 0, 1)^\top$ .
3. Para cada uno de los casos anteriores se determinan las parejas  $(S_i, l)$  tales que  $S_i \cdot l = 0$ . Esto, para cada forma normal  $S_i$ .
4. Tomando un isomorfismo lineal arbitrario,  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y efectuando algunos cálculos se realiza la clasificación utilizando la Proposición 6.2.1.

□

En la siguiente tabla se presenta de manera explícita los tensores de Poisson  $\Pi_{f,Z}$  inducidos por los pares compatibles de la Tabla 6.1 del Teorema 6.2.2.

Tipo	Tensor de Poisson Lineal
I	$\Pi_{f,Z} \equiv 0$
II	$\Pi_{f,Z} = -2x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 - 2x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 - 2x_3 \partial_1 \wedge \partial_2$
III	$\Pi_{f,Z} = -2x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 - 2x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + 2x_3 \partial_1 \wedge \partial_2$
IV	$\Pi_{f,Z} = -2x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 - 2x_2 \partial_3 \wedge \partial_1$
V	$\Pi_{f,Z} = -2x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 + 2x_2 \partial_3 \wedge \partial_1$
VI	$\Pi_{f,Z} = -2x_1 \partial_2 \wedge \partial_3$
VII	$\Pi_{f,Z} = -1/2 x_2 \partial_2 \wedge \partial_3 + 1/2 x_1 \partial_3 \wedge \partial_1$
VIII	$\Pi_{f,Z} = -(2a x_1 + 1/2 x_2) \partial_2 \wedge \partial_3 + (1/2 x_1 - 2a x_2) \partial_3 \wedge \partial_1, \quad a \neq 0$
IX	$\Pi_{f,Z} = -(2a x_1 + 1/2 x_2) \partial_2 \wedge \partial_3 + (1/2 x_1 + 2a x_2) \partial_3 \wedge \partial_1, \quad a \neq 0$
X	$\Pi_{f,Z} = -(2x_1 + 1/2 x_2) \partial_2 \wedge \partial_3 + 1/2 x_1 \partial_3 \wedge \partial_1$

Tabla 6.2: Formas normales de los tensores de Poisson lineales en  $\mathbb{R}^3$ .

De manera automática se tienen los corchetes de Poisson  $\{, \}_f$  inducidos por los pares compatibles de la Tabla 6.1 del Teorema 6.2.2.

Tipo	Corchete de Poisson Lineal		
I	$\{x_1, x_2\} = 0$	$\{x_2, x_3\} = 0$	$\{x_3, x_1\} = 0$
II	$\{x_1, x_2\} = -2x_3$	$\{x_2, x_3\} = -2x_1$	$\{x_3, x_1\} = -2x_2$
III	$\{x_1, x_2\} = 2x_3$	$\{x_2, x_3\} = -2x_1$	$\{x_3, x_1\} = -2x_2$
IV	$\{x_1, x_2\} = 0$	$\{x_2, x_3\} = -2x_1$	$\{x_3, x_1\} = -2x_2$
V	$\{x_1, x_2\} = 0$	$\{x_2, x_3\} = -2x_1$	$\{x_3, x_1\} = 2x_2$
VI	$\{x_1, x_2\} = 0$	$\{x_2, x_3\} = -2x_1$	$\{x_3, x_1\} = 0$
VII	$\{x_1, x_2\} = 0$	$\{x_2, x_3\} = -1/2 x_2$	$\{x_3, x_1\} = 1/2 x_1$
VIII	$\{x_1, x_2\} = 0$	$\{x_2, x_3\} = -2a x_1 - 1/2 x_2$	$\{x_3, x_1\} = 1/2 x_1 - 2a x_2$
IX	$\{x_1, x_2\} = 0$	$\{x_2, x_3\} = -2a x_1 - 1/2 x_2$	$\{x_3, x_1\} = 1/2 x_1 + 2a x_2$
X	$\{x_1, x_2\} = 0$	$\{x_2, x_3\} = -2x_1 - 1/2 x_2$	$\{x_3, x_1\} = 1/2 x_1$

Tabla 6.3: Formas normales de los corchetes de Poisson Lineales en  $\mathbb{R}^3$ .

En lo que concierne a las particularidades de las estructuras de Poisson lineales, en este apartado nos enfocaremos en presentar algunos resultados en torno a la unimodularidad de estas estructuras en el espacio  $\mathbb{R}^3$  utilizando la clasificación del Teorema 6.2.2. Para esto el siguiente lema será determinante.

**Lema 6.2.3.** *Sea  $\Pi$  un tensor de Poisson lineal en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, todo campo Hamiltoniano constante asociado a la estructura de Poisson  $\Pi$  es nulo.*

*Demostración.* Sea  $\Pi$  un tensor de Poisson lineal en  $\mathbb{R}^n$ . Por ser  $\Pi$  lineal es  $\Pi_{p=0} = 0$ , luego  $X_f|_{p=0} = i_{df}\Pi|_{p=0} = 0$ , para toda  $f \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty$ . Por lo que, si  $X_f$  es constante, debe ser  $X_f \equiv 0$ .

□

Pues bien, como consecuencia de este lema tenemos la siguiente clasificación de las estructuras de Poisson lineales que son unimodulares en  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposición 6.2.4.** *Sea  $\Pi_{f,Z}$  alguno de los tensores de Poisson presentados en la Tabla 6.2. Entonces,*

1. *Las estructuras I-VI son estructuras de Poisson unimodulares.*
2. *Las estructuras VII-X no son estructuras de Poisson unimodulares.*

*Demostración.* Esta proposición se sigue por el Lema 6.2.3 y observando que en la clasificación del Teorema 6.2.2 el campo vectorial constante  $Z$  es el campo modular asociado a la estructura de Poisson lineal  $\Pi_{f,Z}$ .

□

### 6.3. Caso Cuadrático. Formas Normales

Recordemos que las funciones cuadráticas son funciones homogéneas de grado dos. Así, se tiene que  $r = 2$ , por lo que acorde con la Proposición 6.1.1 los 2-pares compatibles  $(f, Z)$  constan de un polinomio cúbico,  $f \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$ , y un campo vectorial lineal con divergencia cero,  $Z \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$ , tales que  $\mathcal{L}_Z f = 0$ .

Recordemos que existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de matrices  $3 \times 3$  y campos vectoriales lineales en  $\mathbb{R}^3$ . Explícitamente, para cada matriz  $A_{3 \times 3}$ , esta correspondencia es dada por

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} \quad \longleftrightarrow \quad X := a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}. \quad (6.3.1)$$

Como consecuencia se tiene que  $\operatorname{div} X = \operatorname{tr} A$ .

Por tanto, dado un 2-par compatible  $(f, Z)$  en  $\mathbb{R}^3$  el campo vectorial  $Z$  se puede identificar con una matriz con traza cero,  $A \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ .

**Proposición 6.3.1.** *Dos estructuras de Poisson cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Pi_{f,Z}$  y  $\Pi_{\tilde{f},\tilde{Z}}$ , son equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo lineal,  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que*

$$\tilde{f} = \frac{1}{\det T} T^* f \quad y \quad \tilde{A} = T^{-1} A T,$$

donde  $Z \simeq A$  y  $\tilde{Z} \simeq \tilde{A}$  bajo la identificación (6.3.1), con  $A, \tilde{A} \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Sean  $(f, Z)$  y  $(\tilde{f}, \tilde{Z})$  dos 2-pares compatibles en  $\mathbb{R}^3$  (ver Definición 5.3.3). Por el Teorema 5.3.5 se tiene que los pares  $(f, Z)$  y  $(\tilde{f}, \tilde{Z})$  son equivalentes si y sólo si  $\tilde{f} = (1/\det T) T^* f$  y  $\tilde{Z} = T^* Z$ .

Ahora, sean  $A, \tilde{A} \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ . Luego, por la correspondencia (6.3.1), se pueden identificar  $Z \simeq A$  y  $\tilde{Z} \simeq \tilde{A}$ . Así, para cada  $x \in \mathbb{R}^3$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_x = (T^* Z)_x &\iff \tilde{Z}_x = (d_{T(x)} T^{-1}) Z_{T(x)} \\ &\iff \tilde{A} x \frac{\partial}{\partial x} = (T^{-1} A T)(x) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\iff \tilde{A} x = (T^{-1} A T)(x) \\ &\iff \tilde{A} = T^{-1} A T. \end{aligned}$$

En lo anterior se ha usado la notación vectorial  $a_{ij} x_j \partial/\partial x_i = Ax \partial/\partial x$ .

□

**Teorema 6.3.2** (Clasificación). *Todo bivector de Poisson cuadrático en  $(\mathbb{R}^3, \Omega)$  es linealmente isomorfo a alguno de los bivectores*

$$\Pi_{f,Z} := \Pi_f + \frac{1}{3} Z \wedge E,$$

inducidos por los siguientes pares  $(f, Z)$  bajo la condición

$$\mathcal{L}_Z f = 0,$$

donde

- $f$  es un polinomio cúbico.
- $Z$  es un campo vectorial lineal con  $\text{div } Z = 0$ .
- $\Pi_f$  es el bivector definido por  $i_{\Pi_f} \Omega = \text{d}f$ .

Con  $\Omega$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^3$  y  $E \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$  el campo de Euler.

Tipo	Polinomio Cúbico	Campo Lineal (Modular)
I	$f$ arbitrario	$Z \equiv 0$
II	$f = a x_1 x_2 x_3$	$Z = b_1 x_1 \partial_1 + b_2 x_2 \partial_2 + b_3 x_3 \partial_3$ . $\Sigma_{i=1}^3 b_i = 0, b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_1$
III	$f_1 = x_3^3 + a x_1 x_2 x_3$ $f_2 = a x_1 x_2 x_3$	$Z = b x_1 \partial_1 - b x_2 \partial_2$
IV	$f_1 = x_3 (x_1^2 + a x_2^2)$ $f_2 \equiv 0$	$Z = b x_1 \partial_1 + b x_2 \partial_2 - 2b x_3 \partial_3$
V	$f = a x_3 (x_1^2 + x_2^2)$	$Z = (b_1 x_1 - b_2 x_2) \partial_1 + (b_2 x_1 + b_1 x_2) \partial_2$ $- 2b_1 x_3 \partial_3$
VI	$f_1^\pm = \pm x_3^3 + a x_3 (x_1^2 + x_2^2)$ $f_2 = a x_3 (x_1^2 + x_2^2)$	$Z = -b x_2 \partial_1 + b x_1 \partial_2$
VII	$f = a x_2^2 x_3$	$Z = (b x_1 + x_2) \partial_1 + b x_2 \partial_2 - 2b x_3 \partial_3$
VIII	$f_1^\pm = \pm x_2^3 + a_1 x_2 x_3^2 + a_2 x_3^3$ $f_2 = x_2^2 x_3 + a x_3^3$ $f_3 = a x_2 x_3^2$ $f_4 = x_3^3$	$Z = x_3 \partial_1$
IX	$f_1 = 2a x_1 x_3^2 - a x_2^2 x_3$ $f_2 = a x_3^3$	$Z = x_2 \partial_1 + x_3 \partial_2$
	$a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$	$b, b_1, b_2, b_3 \neq 0$

Tabla 6.4: Formas normales de pares  $(f, Z)$  que inducen las formas normales de las estructuras de Poisson cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$ .

*Demostración.* Sean  $f$  un polinomio cúbico. Ya que la prueba de este teorema involucra cálculos repetidos, se presenta solamente el esquema de la demostración:

1. Se fijan las formas normales de matrices con traza cero de tamaño  $3 \times 3$  con entradas reales  $A_i$  (ver Apéndice B). Luego, se identifica  $A_i \simeq Z$  tal como en (6.3.1), obteniendo así un campo vectorial con divergencia cero para cada forma normal  $A_i$ .
2. Para cada una de las formas normales anteriores se determinan las parejas  $(f, Z)$  tales que  $\mathcal{L}_Z f = 0$ .
3. Tomando un isomorfismo lineal arbitrario,  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y efectuando algunos cálculos se realiza la clasificación utilizando la Proposición 6.3.1.

□

En la siguiente tabla se presentan de manera explícita los tensores de Poisson  $\Pi_{f,Z}$  inducidos por los pares compatibles de la Tabla 6.4 del Teorema 6.3.2. Las constantes que aparecen en la siguiente tabla son las mismas de la Tabla 6.4 y están sujetas a las mismas condiciones.

Tipo	Tensor de Poisson Cuadrático
I	$\Pi_{f,Z} = -\partial_1 f \partial_2 \wedge \partial_3 - \partial_2 f \partial_3 \wedge \partial_1 - \partial_3 f \partial_1 \wedge \partial_2$
II	$\Pi_{f,Z} = (1/3(b_2 - b_3) - a) x_2 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 + (1/3(b_3 - b_1) - a) x_1 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1$ $+ (1/3(b_1 - b_2) - a) x_1 x_2 \partial_1 \wedge \partial_2$
III	$\Pi_{f_1,Z} = -(a + 1/3b) x_2 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 - (a + 1/3b) x_1 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1$ $-(3x_3^2 + (a - 2/3b) x_1 x_2) \partial_1 \wedge \partial_2$ $\Pi_{f_2,Z} = -(a + 1/3b) x_2 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 - (a + 1/3b) x_1 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1$ $-(a - 2/3b) x_1 x_2 \partial_1 \wedge \partial_2$
IV	$\Pi_{f_1,Z} = (bx_2 - 2x_1) x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 - (bx_1 + 2ax_2) x_3 \partial_3 \wedge \partial_1 - (x_1^2 + ax_2^2) \partial_1 \wedge \partial_2$ $\Pi_{f_2,Z} = bx_2 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 - bx_1 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1$
V	$\Pi_{f,Z} = (bx_2 - (2a - 1/3b_2) x_1) x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 - (bx_1 + (2a - 1/3b_2) x_2) x_3 \partial_3 \wedge \partial_1$ $-(a + 1/3b_2)(x_1^2 + x_2^2) \partial_1 \wedge \partial_2$
VI	$\Pi_{f_1^\pm,Z} = (1/3b - 2a) x_1 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 + (1/3b - 2a) x_2 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1$ $-(\pm 3x_3^2 + (1/3b + a)(x_1^2 + x_2^2)) \partial_1 \wedge \partial_2$ $\Pi_{f_2,Z} = (1/3b - 2a) x_1 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 + (1/3b - 2a) x_2 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1$ $-(1/3b + a)(x_1^2 + x_2^2) \partial_1 \wedge \partial_2$
VII	$\Pi_{f,Z} = bx_2 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 - (bx_1 + (2a + 1/3) x_2) x_3 \partial_3 \wedge \partial_1 + (1/3 - a) x_2^2 \partial_1 \wedge \partial_2$
VIII	$\Pi_{f_1^\pm,Z} = -(\pm 3x_2^2 + (1/3 + a_1) x_3^2) \partial_3 \wedge \partial_1 + ((1/3 - 2a_1) x_2 - 3a_2 x_3) x_3 \partial_1 \wedge \partial_2$ $\Pi_{f_2,Z} = -(1/3 x_3 + 2x_2) x_3 \partial_3 \wedge \partial_1 + (1/3 x_2 x_3 - x_2^2 - 3a x_3^2) \partial_1 \wedge \partial_2$ $\Pi_{f_3,Z} = -(1/3 + a) x_3^2 \partial_3 \wedge \partial_1 + (1/3 - 2a) x_2 x_3 \partial_1 \wedge \partial_2$ $\Pi_{f_4,Z} = -1/3 x_3^2 \partial_3 \wedge \partial_1 + (1/3 x_2 - 3x_3) x_3 \partial_1 \wedge \partial_2$
IX	$\Pi_{f_1,Z} = (1/3 - 2a) x_3^2 \partial_2 \wedge \partial_3 + (2a - 1/3) x_2 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1$ $+ ((a + 1/3) x_2^2 - (4a + 1/3) x_1 x_3) \partial_1 \wedge \partial_2$ $\Pi_{f_2,Z} = 1/3 x_3^2 \partial_2 \wedge \partial_3 - 1/3 x_2 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1 + (1/3 x_2^2 - (1/3 x_1 + 3a x_3) x_3) \partial_1 \wedge \partial_2$
$a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $b, b_1, b_2, b_3 \neq 0$ con $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_1, \sum_{i=1}^3 b_i = 0$	

 Tabla 6.5: Formas normales de los tensores de Poisson cuadráticos en  $\mathbb{R}^3$ .

En las siguientes tablas se presenta el dominio de puntos regulares  $N^{reg}$  de cada una de las estructuras de Poisson inducidas por los pares compatibles de la Tabla 6.4 del Teorema 6.3.2. Las constantes que aparecen en la siguiente tabla son las mismas de la Tabla 6.4.

Tipo	Dominio Regular: $N^{reg}$	Condición para los Parámetros
I	$\{df \neq 0\}$	
II	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Ejes Coordinados}\}$	$\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (b_i - b_j + (-1)^{i+j} 3a) \neq 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	$b_1 - b_2 - 3a = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_2x_3\} \cup \{\text{Eje-}x_1\}$	$b_2 - b_3 - 3a = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_3\} \cup \{\text{Eje-}x_2\}$	$b_3 - b_1 - 3a = 0$
III	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Cono Elíptico: } 3x_3^2 - b x_1x_2 = 0\}$	$3a + b = 0$
	$f_1: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}$	$3a - 2b = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_1\} \cup \{\text{Eje-}x_2\}$	$3a + b \neq 0$ y $3a - 2b \neq 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_3\} \cup \{\text{Plano-}x_2x_3\}$	$3a + b = 0$
	$f_2: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	$3a - 2b = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Ejes Coordinados}\}$	$3a + b \neq 0$ y $3a - 2b \neq 0$
IV	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_3\}$	$a > 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_2\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	$a = 0$
	$f_1: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Planos: } x_1^2 + ax_2^2 = 0\}$	$a < 0$ y $b^2 + 4a = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Rectas: } x_3 = 0 \wedge x_1^2 + ax_2^2 = 0\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	$a < 0$ y $b^2 + 4a \neq 0$
	$f_2: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	NA
V	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	$3a + b_2 = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_3\}$	$3a + b_2 \neq 0$
VI	$f_1^+: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}$	$3a + b = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$	$3a + b \neq 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}$	$3a + b = 0$
	$f_1^-: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Cono: } x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2 = 0\}$	$6a - b = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$	$3a + b \neq 0$ y $6a - b \neq 0$
$a \in \mathbb{R}$ y $b, b_1, b_2, b_3 \neq 0$ con $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_1, \sum_{i=1}^3 b_i = 0$		

Tabla 6.6: Dominio de puntos regulares para cada forma normal de las estructuras de Poisson cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$ .

La siguiente tabla es la continuación de la tabla anterior:

Tipo	Dominio Regular: $N^{reg}$	Condición para los Parámetros
VI	$f_2: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	$3a + b = 0$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_3\}$	$3a + b \neq 0$
VII	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	$a = 1/3$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_1\} \cup \{\text{Eje-}x_3\}$	$a \neq 1/3$
VIII	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_1\}$	$3a_1 + 1 > 0$ ó
	$f_1^+: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_3\}$	$3a_1 + 1 = 0$ y $a_2 \neq 0$ ó
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano: } x_3^2 + \frac{9}{3a_1+1} x_2^2 = 0\} \cup \{\text{Eje-}x_1\}$	$3a_1 + 1 < 0$ y $a_2^2 \neq -\frac{(3a_1+1)(6a_1-1)^2}{729}$
		$3a_1 + 1 = 0$ y $a_2 = 0$
		$3a_1 + 1 < 0$ y $a_2^2 = -\frac{(3a_1+1)(6a_1-1)^2}{729}$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_1\}$	$3a_1 + 1 < 0$ ó
	$f_1^-: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_3\}$	$3a_1 + 1 = 0$ y $a_2 \neq 0$ ó
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano: } x_3^2 - \frac{9}{3a_1+1} x_2^2 = 0\} \cup \{\text{Eje-}x_1\}$	$3a_1 + 1 > 0$ y $a_2^2 \neq \frac{(3a_1+1)(6a_1-1)^2}{729}$
		$3a_1 + 1 = 0$ y $a_2 = 0$
		$3a_1 + 1 > 0$ y $a_2^2 = \frac{(3a_1+1)(6a_1-1)^2}{729}$
$f_2:$	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano: } 6x_2 + x_3 = 0\} \cup \{\text{Eje-}x_1\}$	$a = -1/36$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_1\}$	$a \neq -1/36$
$f_3:$	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Plano-}x_1x_3\}$	$a = -1/3$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}$	$a \neq -1/3$
$f_4:$	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}$	NA
IX	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}$	$a = -1/3$
	$f_1: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Cono Elíptico: } x_2^2 - 2x_1x_3 = 0\}$	$a = 1/6$
	$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_1\}$	$a \neq -1/3$ y $a \neq 1/6$
	$f_2: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje-}x_1\}$	NA

$$a, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad b \neq 0$$

Tabla 6.7: Dominio de puntos regulares para cada forma normal de las estructuras de Poisson cuadráticas en  $\mathbb{R}^3$ .

A diferencia del caso lineal las expresiones de las formas normales del teorema anterior ya no son tan simples. En consecuencia, afirmar por pura inspección cuál forma normal hace de  $N^{reg}$  una variedad unimodular no es inmediato, salvo la forma normal I.

Afortunadamente, después de algunos cálculos es posible afirmar que los siguientes casos hacen de  $N^{reg}$  una variedad unimodular:

*Caso A.* forma normal VI con  $f_1^+$ ,  $f_1^-$  y  $f_2$  bajo la condición  $3a + b = 0$ .

- Para la estructura de Poisson inducida por el par  $(f_1^+, Z)$  se tiene que:

a) El dominio regular es

$$N^{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}.$$

Notemos que cada componente conexa de  $N^{reg}$  es simplemente conexa.

b) Una función de Casimir para la estructura de Poisson inducida por este par es

$$K(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2, \quad a \neq 0.$$

c) Un bosquejo de las foliaciones de  $N^{reg}$  son:

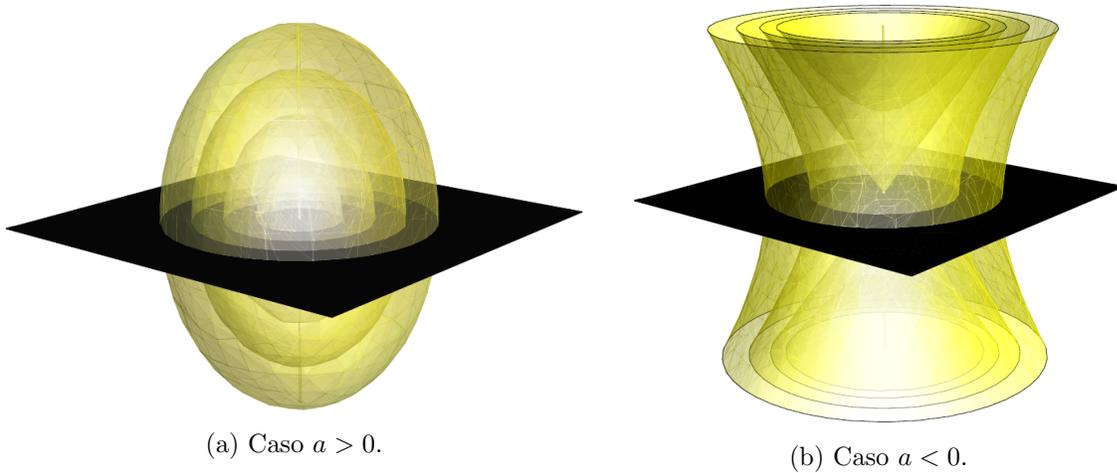


Figura 6.3.1: Foliaciones de  $N^{reg}$ .

- Para la estructura de Poisson inducida por el par  $(f_1^-, Z)$  se tiene que:

a) El dominio regular es

$$N^{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}.$$

Notemos que cada componente conexa de  $N^{reg}$  es simplemente conexa.

b) Una función de Casimir para la estructura de Poisson inducida por este par es

$$K(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2) - x_3^2, \quad a \neq 0.$$

c) Un bosquejo de las foliaciones de  $N^{reg}$  son:

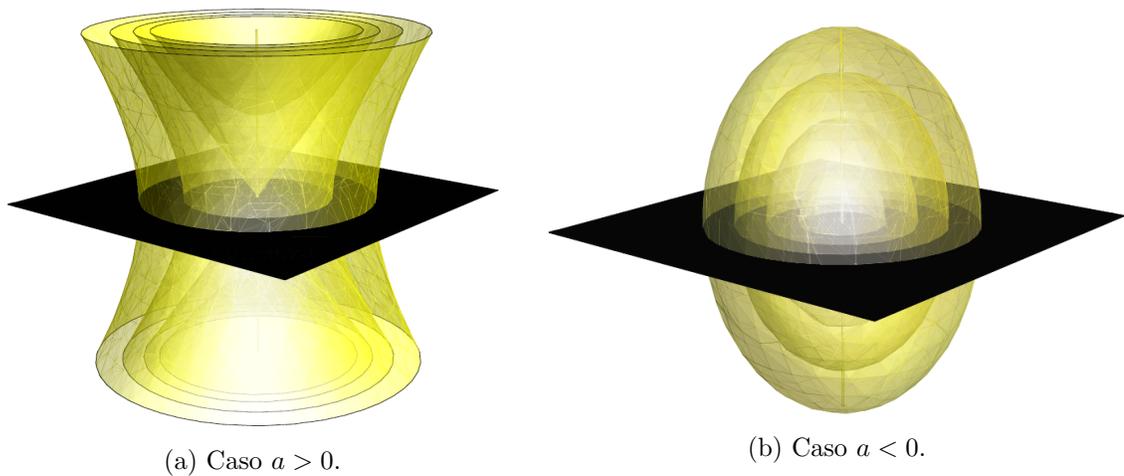


Figura 6.3.2: Foliaciones de  $N^{reg}$ .

*Caso B.* La forma normal VIII con  $f_3$  bajo la condición  $3a + 1 = 0$ .

- Para la estructura de Poisson inducida por el par  $(f_3, Z)$  se tiene que:

a) El dominio regular es

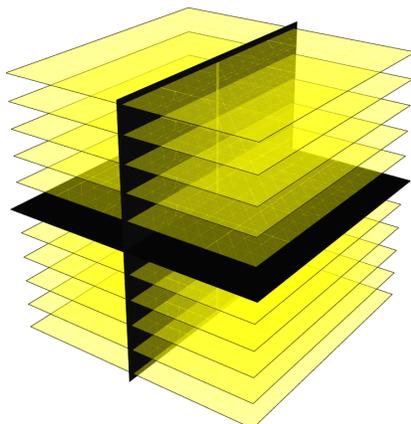
$$N^{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\} \cup \{\text{Plano-}x_1x_3\}.$$

Notemos que cada componente conexa de  $N^{reg}$  es simplemente conexa.

b) Una función de Casimir para la estructura de Poisson inducida por este par es

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

c) Un bosquejo de la foliación de  $N^{reg}$  es:

Figura 6.3.3: Foliación de  $N^{reg}$ 

*Caso C.* La forma normal VIII con  $f_4$ .

- Para la estructura de Poisson inducida por el par  $(f_4, Z)$  se tiene que:

a) El dominio regular es

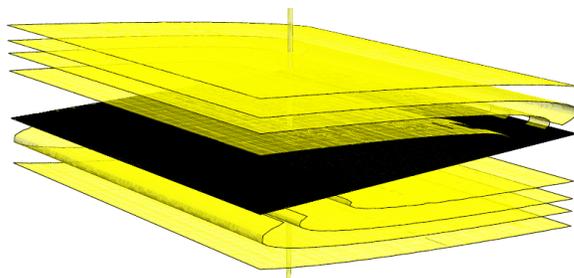
$$N^{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_1x_2\}.$$

Notemos que cada componente conexa de  $N^{reg}$  es simplemente conexa.

b) Una función de Casimir para la estructura de Poisson inducida por este par es

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_3^9 e^{\frac{x_2}{x_3}}.$$

c) Un bosquejo de la foliación de  $N^{reg}$  es:

Figura 6.3.4: Foliación de  $N^{reg}$

**Caso Campos Lineales.** A continuación estudiaremos una clase particular de estructuras de Poisson cuadráticas, aquellas inducidas por dos campos lineales

$$\Pi_{12} = X_1 \wedge X_2, \quad (6.3.2)$$

con  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$  campos lineales.

Es claro que la condición para que un bivector de la forma (6.3.2) sea un bivector de Poisson,  $[\Pi_{12}, \Pi_{12}] = 0$ , es equivalente a la siguiente ecuación

$$X_1 \wedge X_2 \wedge [X_1, X_2] = 0. \quad (6.3.3)$$

A la ecuación anterior se le llama *ecuación de compatibilidad* de los campos  $X_1$  y  $X_2$ . Notemos que las siguientes condiciones para  $X_1$  y  $X_2$  proporcionan soluciones inmediatas de la ecuación de compatibilidad:

1. Si  $X_1$  y  $X_2$  conmutan.
2. Si  $[X_1, X_2] = f_1 X_1 + f_2 X_2$ , para algunas  $f_1, f_2 \in C_{\mathbb{R}^3}^{\infty}$ .

En lo que resta de este apartado se asumirá que  $\Pi_{12}$  es un tensor de Poisson. El tipo de estructuras en cuestión son de interés ya que entre las propiedades que cumplen se encuentran:

1. El conjunto de puntos regulares del bivector  $\Pi_{12}$  es

$$N_{\Pi_{12}}^{reg} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid X_{1x} \text{ y } X_{2x} \text{ son linealmente independientes}\}.$$

2. Si  $K \in C_{\mathbb{R}^3}^{\infty}$  es una integral primera común de los campos  $X_1$  y  $X_2$ , entonces  $K$  es una función de Casimir para la estructura de Poisson  $\Pi_{12}$  inducida por ellos. En efecto, si  $\mathcal{L}_{X_1} K = \mathcal{L}_{X_2} K = 0$ , entonces

$$X_K = i_{dK} \Pi_{12} = (\mathcal{L}_{X_1} K) X_2 - (\mathcal{L}_{X_2} K) X_1 = 0,$$

esto es, el campo Hamiltoniano asociado a  $K$  es nulo y por tanto es  $K$  una función de Casimir.

3. La distribución característica  $x \mapsto \mathcal{D}_x^{\Pi_{12}} = \Pi_{12x}^{\sharp}(\Gamma_x^* \mathbb{R}^3)$  de la estructura de Poisson  $\Pi_{12}$  es generada por dos campos vectoriales, a saber,  $X_1$  y  $X_2$ :

$$\mathcal{D}_x^{\Pi_{12}} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{X_1|_x, X_2|_x\}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

**Ejemplo 6.3.3.** Consideremos el tensor de Poisson cuadrático

$$\Pi_{12} = x_1 x_2 \partial_2 \wedge \partial_3 + x_1 (2x_1 + x_2) \partial_3 \wedge \partial_1,$$

el cual es inducido por los campos lineales  $X_1 = x_1 \partial_3$  y  $X_2 = (2x_1 + x_2) \partial_1 - x_2 \partial_2$ .

Notemos que el bivector anterior resulta ser de Poisson debido a que es

$$[X_1, X_2] = -(2x_1 + x_2) \partial_3,$$

y en consecuencia  $X_1 \wedge X_2 \wedge [X_1, X_2] = 0$ .

Por observaciones anteriormente hechas se puede mostrar que el conjunto de puntos regulares de esta estructura es

$$N_{\Pi_{12}}^{reg} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Plano-}x_2x_3\}.$$

◇

Aún más, la estructura de Poisson  $\Pi_{12}$  admite la siguiente función de Casimir de global

$$K(x) = x_2^2 (x_1 + \frac{1}{3}x_2),$$

como consecuencia de que  $K$  es una integral primera común de los campos  $X_1$  y  $X_2$ ,

$$\mathcal{L}_{X_1}K = \mathcal{L}_{X_2}K = 0.$$

**Teorema 6.3.4.** Sean  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$  campos lineales con divergencia cero tales que satisfacen la ecuación de compatibilidad (6.3.3). Todo tensor de Poisson de la forma  $\Pi = X_1 \wedge X_2$  es linealmente isomorfo a alguna de las estructuras de Poisson inducidas por los siguientes pares  $(f, Z)$  del Teorema 6.3.2:

1. Tipo I con  $f$  un polinomio cúbico arbitrario y  $Z \equiv 0$ .
2. Tipo III con  $f_2 = a x_1 x_2 x_3$  y  $Z = b x_1 \partial/\partial x_1 - b x_2 \partial/\partial x_2$ .
3. Tipo VIII con  $f_3 = -\frac{1}{3} x_2 x_3^2$  y  $Z = x_3 \partial/\partial x_1$ .
4. Tipo VIII con  $f_3 = a x_2 x_3^2$  y  $Z = x_3 \partial/\partial x_1$ , con  $a \neq -\frac{1}{3}$ .
5. Tipo IX con  $f = \frac{1}{3} x_1 x_3^2 - \frac{1}{6} x_2^2 x_3$  y  $Z = x_2 \partial/\partial x_1 + x_3 \partial/\partial x_2$ .

Notemos que en el teorema anterior el punto 2 muestra una estructura de Poisson unimodular en  $N^{reg}$  tal como se mostró en párrafos anteriores.

# Capítulo 7

## Pares de Poisson

En este capítulo se utiliza la clasificación de los tensores de Poisson lineales y cuadráticos efectuada en el Capítulo 6 para realizar una clasificación de las formas normales (en el mismo sentido de la clasificación del Capítulo 6) de los pares de Poisson en  $\mathbb{R}^3$  que constan de la suma de un bivector cuadrático más uno lineal.

### 7.1. Pares de Poisson (Cuadrático) + (Lineal) en $\mathbb{R}^3$

Sea  $\Pi$  un bivector arbitrario en una variedad  $M$  y  $x \in M$  un punto singular de  $\Pi$ . Si se expande el bivector por Taylor en torno a  $x$  se obtiene una descomposición para  $\Pi$  como suma de bivectores homogéneos:

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \dots,$$

donde cada  $\Pi^{(r)}$  denota la parte  $r$ -homogénea de la descomposición, con  $r = 1, 2, 3, \dots$

Ahora bien, en términos de la descomposición anterior  $\Pi$  define una estructura de Poisson si y sólo si

$$0 = [\Pi^{(1)}, \Pi^{(1)}] + 2[\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}] + (2[\Pi^{(1)}, \Pi^{(3)}] + [\Pi^{(2)}, \Pi^{(2)}]) + \dots$$

Es importante notar que en la suma anterior la parte lineal es aportada únicamente por el término  $[\Pi^{(1)}, \Pi^{(1)}]$ , la parte cuadrática por  $2[\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}]$  y la parte cúbica por  $2[\Pi^{(1)}, \Pi^{(3)}] + [\Pi^{(2)}, \Pi^{(2)}]$ . Lo anterior debido al comportamiento del corchete de Schouten con respecto a los multivectores homogéneos.

Consecuencia de la observación anterior es que, de no ser trivial, la parte lineal de la descomposición resulta ser un tensor de Poisson. En caso contrario, si  $\Pi^{(1)} \equiv 0$ , entonces la parte cuadrática  $\Pi^{(2)}$  es un tensor de Poisson. En general, el primer término no trivial de orden  $r$  es un tensor de Poisson.

Ahora, motivado por lo anterior surge el siguiente cuestionamiento: si  $\Pi^{(1)}$  y  $\Pi^{(2)}$  son tensores de Poisson lineal y cuadrático respectivamente ¿bajo qué condiciones la suma  $\Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}$

resulta ser un tensor de Poisson?. Pues bien, un sencillo cálculo muestra que lo anterior sucede si y sólo si

$$[[\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}]] = 0,$$

es decir, si  $\Pi^{(1)}$  y  $\Pi^{(2)}$  forman un *par de Poisson* cuya definición se presenta a continuación.

**Definición 7.1.1.** *Se dice que dos tensores de Poisson  $\Pi$  y  $\tilde{\Pi}$  en una variedad  $M$  forman un par de Poisson si la suma  $\Pi + \tilde{\Pi}$  es un tensor de Poisson.*

En los párrafos anteriores queda reflejado parte de la importancia del estudio de los pares de Poisson, particularmente aquellos formados por un bivector lineal y uno cuadrático, que es en lo que se enfocaran las líneas siguientes.

**Caso Homogéneo en  $\mathbb{R}^n$ .** Sea  $M = \mathbb{R}^n$ . Observemos que si  $\Pi$  es un tensor de Poisson  $r$ -homogéneo y  $\tilde{\Pi}$  es un tensor de Poisson  $s$ -homogéneo, la suma de estos dos tensores no es un tensor homogéneo. Lo que si es que podemos parametrizar cada uno de estos tensores acorde al Teorema 5.3.4.

Sean entonces los pares de parámetros  $(\theta, Z)$  y  $(\tilde{\theta}, \tilde{Z})$  con  $\theta$  una  $(n-3)$ -forma  $(r+1)$ -homogénea,  $Z$  un campo vectorial  $(r-1)$ -homogéneo y  $\tilde{\theta}$  una  $(n-3)$ -forma  $(s+1)$ -homogénea,  $\tilde{Z}$  un campo vectorial  $(s-1)$ -homogéneo, satisfaciendo las condiciones de la Definición 5.3.3.

Por el Teorema 5.3.4 los parámetros anteriores inducen los siguientes tensores de Poisson  $r$  y  $s$ -homogéneos respectivamente:

$$\Pi_{\theta, Z} = \Pi_{\theta} + \frac{1}{n+r-2} Z \wedge E \quad \text{y} \quad \Pi_{\tilde{\theta}, \tilde{Z}} = \Pi_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{n+s-2} \tilde{Z} \wedge E$$

Bajo este contexto presentamos la siguiente proposición que proporciona un criterio en términos de los parámetros  $(\theta, Z)$  y  $(\tilde{\theta}, \tilde{Z})$  para que la suma  $\Pi_{\theta, Z} + \Pi_{\tilde{\theta}, \tilde{Z}}$  sea un tensor de Poisson.

**Proposición 7.1.2.** *En  $(\mathbb{R}^n, \Omega)$  el tensor de Poisson  $r$ -homogéneo  $\Pi_{\theta, Z}$  y el tensor de Poisson  $s$ -homogéneo  $\Pi_{\tilde{\theta}, \tilde{Z}}$  forman un par de Poisson si y sólo si*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2-r}{n+s-2} i_{\tilde{Z}} d\theta + \frac{2-s}{n+r-2} i_Z d\tilde{\theta} + i_E d\left(\frac{1}{n+s-2} \mathcal{L}_{\tilde{Z}}\theta + \frac{1}{n+r-2} \mathcal{L}_Z\tilde{\theta}\right) \\ &+ \frac{r-s}{(n+r-2)(n+s-2)} i_{E \wedge Z \wedge \tilde{Z}} \Omega + i_{\mathcal{D}(\Pi_{\theta} \wedge \Pi_{\tilde{\theta}})} \Omega, \end{aligned}$$

donde  $\Pi_{\theta, Z}$  y  $\Pi_{\tilde{\theta}, \tilde{Z}}$  son inducidos por el  $r$ -par compatible  $(\theta, Z)$  y el  $s$ -par compatible  $(\tilde{\theta}, \tilde{Z})$  respectivamente (ver Definición 5.3.3).  $\Omega$  denota la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^n$ .

## 7.2. Pares de Poisson Lineal-Cuadrático en $\mathbb{R}^3$

En  $\mathbb{R}^3$  todo tensor de Poisson lineal está en correspondencia única con un par  $(g, l)$ , donde  $g \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$  es un polinomio cuadrático y  $l \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$  es un campo vectorial constante. De la misma manera, todo tensor de Poisson cuadrático se corresponde de manera única con un par compatible  $(f, Z)$ , donde  $f \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$  es un polinomio cúbico y  $Z \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$  es un campo vectorial lineal con traza nula. En cada caso los pares satisfacen la condición  $\mathcal{L}_l g = \mathcal{L}_Z f = 0$ .

Acorde a la Proposición 6.1.1 el tensor de Poisson lineal y el tensor de Poisson cuadrático inducidos por los pares  $(g, l)$  y  $(f, Z)$  respectivamente son

$$\Pi_{g,l} = \Pi_g + \frac{1}{2} l \wedge E \quad y \quad \Pi_{f,Z} = \Pi_f + \frac{1}{3} Z \wedge E.$$

Bajo estos términos la Proposición 7.1.2 se reformula en la manera siguiente.

**Proposición 7.2.1.** *En  $(\mathbb{R}^3, \Omega)$  el tensor de Poisson lineal  $\Pi_{g,l}$  y el tensor de Poisson cuadrático  $\Pi_{f,Z}$  forman un par de Poisson si y sólo si*

$$\mathcal{L}_Z g + \mathcal{L}_l f - \frac{1}{6} i_{E \wedge l \wedge Z} \Omega = 0, \quad (7.2.1)$$

con  $\Omega$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^3$ .

*Demostración.* La condición (7.2.1) se sigue de sustituir  $n = 3$ ,  $r = 1$ ,  $s = 2$ ,  $\theta = g$ ,  $\tilde{\theta} = f$ ,  $Z = l$  y  $\tilde{Z} = Z$  en la Proposición 7.1.2. Usando también que  $\Pi_g \wedge \Pi_f = 0$ , por tratarse de un 4-vector en  $\mathbb{R}^3$ .

□

Para cuestiones de cálculo, haciendo un abuso de notación, la condición (7.2.1) se puede escribir en la siguiente manera equivalente

$$\mathcal{L}_Z g + \mathcal{L}_l f + \frac{1}{6} \langle E, l \times Z \rangle = 0. \quad (7.2.2)$$

Auxiliándonos de esta fórmula y de la proposición anterior se presenta una tabla en la cual se refleja todos los posibles pares  $(g, l)$  que inducen tensores de Poisson lineales los cuales forman un par de Poisson con cada forma normal de los pares  $(f, Z)$  del Teorema 6.3.2.

**Teorema 7.2.2** (Clasificación). *Toda estructura de Poisson de tipo (cuadrático)+(lineal) en  $(\mathbb{R}^3, \Omega)$  es linealmente isomorfo a alguna de las estructuras*

$$\Pi_{f+g, l+Z} = \Pi_{g+f} + \left(\frac{1}{2}l + \frac{1}{3}Z\right) \wedge E,$$

*inducido por los siguientes pares  $(g, l)$  y  $(f, Z)$  bajo las condiciones*

$$\mathcal{L}_l g = \mathcal{L}_Z f = 0 \quad \text{y} \quad \text{div } Z = 0,$$

*donde*

- *$g$  es un polinomio cuadrático y  $l$  un campo vectorial constante.*
- *$f$  es un polinomio cúbico y  $Z$  un campo vectorial lineal.*
- *$\Pi_{g+f}$  es el bivector definido por  $i_{\Pi_{g+f}} \Omega = d(g + f)$ .*

*Con  $\Omega$  la forma de volúmen estándar en  $\mathbb{R}^3$  y  $E \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}^3}$  el campo de Euler.*

*Nota 7.2.3.* Las tablas que se presentan en las siguientes dos páginas forman parte de este teorema, sin embargo, las hemos dispuesto en tales páginas deliberadamente para tratar de presentarlas lo menos fragmentadas posible.

Pares $(g, l)$	Condiciones
Forma normal $(f, Z)$ tipo I con	
$\mathcal{L}_l f = 0$	NA
Forma normal $(f, Z)$ tipo II con	
$\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$ $g = -1/2 l_2 x_1 x_3 + 1/2 l_1 x_2 x_3$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_3 \partial_3$ $g = 1/2 l_3 x_1 x_2 - 1/2 l_1 x_2 x_3$ $\cdot l = l_2 \partial_2 + l_3 \partial_3$ $g = -1/2 l_3 x_1 x_2 + 1/2 l_2 x_1 x_3$	$l_1, l_2 \in \mathbb{R},$ $6a \neq 0, 2b_1, 3b_1, 4b_1, 6b_1.$ $l_1, l_3 \in \mathbb{R},$ $-6a \neq 0, 2b_1, 3b_1, 4b_1, 6b_1.$ $l_2, l_3 \in \mathbb{R},$ $3a \neq 0, \pm 3b_1, \pm b_1$
Forma normal $(f, Z)$ tipo III con	
<p>Caso <math>f_1</math>:</p> $\cdot l \equiv 0$ $g = c_1 x_3^2 + c_2 x_1 x_2$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$ $g = c x_3^2 + \frac{b-6a}{6b} (l_2 x_1 x_3 - l_1 x_2 x_3)$	$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$ $a, c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}.$
<p>Caso <math>f_2</math>:</p> $\cdot l \equiv 0$ $g = c_1 x_3^2 + c_2 x_1 x_2$ $\cdot l = l_3 \partial_3$ $g = c x_1 x_2$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_3 \partial_3$ $g = 1/2 l_3 x_1 x_2 - 1/2 l_1 x_2 x_3$ $\cdot l = l_2 \partial_2 + l_3 \partial_3$ $g = -1/2 l_3 x_1 x_2 + 1/2 l_2 x_1 x_3$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$ $g = c x_3^2 + \frac{b-6a}{6b} (l_2 x_1 x_3 - l_1 x_2 x_3)$	$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$ $c, l_3 \in \mathbb{R}, a = -1/3 b.$ $l_1, l_3 \in \mathbb{R}, a = -1/3 b.$ $l_2, l_3 \in \mathbb{R}, a = -1/3 b.$ $a, c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}.$
Forma normal $(f, Z)$ tipo IV con	
<p>Caso <math>f_1</math>:</p> $\cdot l = l_2 \partial_2$ $g = -1/2 l_2 x_1 x_3$ $\cdot l = \pm \sqrt{-a} l_2 \partial_1 + l_2 \partial_2$ $g = \frac{l_2(\pm 4\sqrt{-a}-b)}{2b} x_1 x_3 + \frac{l_2(\pm \sqrt{-a} b + 4a)}{2b} x_2 x_3$ $\cdot l = 1/2 b l_2 \partial_1 + l_2 \partial_2 + l_3 \partial_3$ $g = -\frac{l_3}{2b} x_1^2 + \frac{b l_3}{8} x_2^2 + \frac{l_2}{2} x_1 x_3 - \frac{b l_2}{4} x_2 x_3$	$l_2 \in \mathbb{R}, a \geq 0.$ $l_2 \in \mathbb{R}, a < 0.$ $l_2, l_3 \in \mathbb{R}, 4a + b^2 = 0.$
<p>Caso <math>f_2</math>:</p> $\cdot l = l_3 \partial_3$ $g \equiv 0$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$ $g = -1/2 l_2 x_1 x_3 + 1/2 l_1 x_2 x_3$	$l_3 \in \mathbb{R}.$ $l_1, l_2 \in \mathbb{R}.$
Forma normal $(f, Z)$ tipo V con	
$\cdot l = l_3 \partial_3$ $g = \frac{l_3(b_2-6a)}{12b_1} (x_1^2 + x_2^2)$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$ $g = -1/2 l_2 x_1 x_3 + 1/2 l_1 x_2 x_3$	$a, l_3 \in \mathbb{R}.$ $l_1, l_2 \in \mathbb{R}, a = -1/3 b_2.$

Tabla 7.1: Pares  $(g, l)$  que con cada forma normal  $(f, Z)$  inducen pares de Poisson en  $\mathbb{R}^3$ .

Pares $(g, l)$		Condiciones
Forma normal $(f, Z)$ tipo VI con		
Caso $f_1^\pm$ : $\cdot l \equiv 0$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$	$g = c_1 (x_1^2 + x_2^2) + c_2 x_3^2$ $g = c x_3^2 + \frac{b+12a}{6b} (l_2 x_1 x_3 - l_1 x_2 x_3)$	$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $a, c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$
Caso $f_2$ : $\cdot l \equiv 0$ $\cdot l = l_3 \partial_3$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$	$g = c_1 (x_1^2 + x_2^2) + c_2 x_3^2$ $g = c (x_1^2 + x_2^2)$ $g = c x_3^2 + \frac{b+12a}{6b} (l_2 x_1 x_3 - l_1 x_2 x_3)$	$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $16c^2 + l_3^2 \neq 0, a = 1/6 b$ $a, c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$
Forma normal $(f, Z)$ tipo VII con		
$\cdot l = l_3 \partial_3$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$	$g = -\frac{l_3(1+6a)}{12b} x_2^2$ $g = -1/2 l_2 x_1 x_3 + 1/2 l_1 x_2 x_3$	$a, l_3 \in \mathbb{R}$ $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$
Forma normal $(f, Z)$ tipo VIII con		
Caso $f_1^\pm$ : $\cdot l = l_1 \partial_1$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_3 \partial_3$	$g = c_1 x_2^2 + c_2 x_3^2 + c_3 x_2 x_3$ $g = c x_2^2 - \frac{1+12a_1}{6} (l_3 x_1 x_2 - l_1 x_2 x_3)$	$c_1, c_2, c_3, l_1 \in \mathbb{R}$ $c, l_1, l_3 \in \mathbb{R}, a_2 = 0$
Caso $f_2$ : $\cdot l = l_1 \partial_1$	$g = c_1 x_2^2 + c_2 x_3^2 + c_3 x_2 x_3$	$c_1, c_2, c_3, l_1 \in \mathbb{R}$
Caso $f_3$ : $\cdot l = l_1 \partial_1$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_3 \partial_3$	$g = c_1 x_2^2 + c_2 x_3^2 + c_3 x_2 x_3$ $g = c x_3^2 + \frac{1-6a}{6} (l_2 x_1 x_3 - l_1 x_2 x_3)$ $g = c x_2^2 - \frac{1+12a}{6} (l_3 x_1 x_2 - l_1 x_2 x_3)$	$c_1, c_2, c_3, l_1 \in \mathbb{R}$ $a, c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ $a, c, l_1, l_3 \in \mathbb{R}$
Caso $f_4$ : $\cdot l = l_1 \partial_1$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$	$g = c_1 x_2^2 + c_2 x_3^2 + c_3 x_2 x_3$ $g = c x_3^2 + 1/6 l_2 x_1 x_3 - 1/6 l_1 x_2 x_3$	$c_1, c_2, c_3, l_1 \in \mathbb{R}$ $c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$
Forma normal $(f, Z)$ tipo IX con		
Caso $f_1$ : $\cdot l \equiv 0$ $\cdot l = l_3 \partial_3$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2 + l_3 \partial_3$	$g = c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 - 2c_2 x_1 x_3$ $g = -1/10 l_3 x_1 x_2$ $g = c x_3^2 + \frac{1+12a}{6} (l_2 x_1 x_3 - l_1 x_2 x_3)$ $g = \frac{l_2}{10} x_2^2 + \frac{l_1 l_2}{10 l_3} x_3^2 - \frac{l_3}{10} x_1 x_2$ $\quad + \frac{l_2}{10} x_1 x_3 - \frac{3l_1}{10} x_2 x_3$	$c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ $l_3 \in \mathbb{R}, a = 1/15$ $a, c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ $l_2 \neq 0, a = 1/15$ $l_1 l_3 > 0, l_2^2 - 2l_1 l_3 = 0$
Caso $f_2$ : $\cdot l \equiv 0$ $\cdot l = l_1 \partial_1 + l_2 \partial_2$	$g = c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 - 2c_2 x_1 x_3$ $g = c x_3^2 + 1/6 l_2 x_1 x_3 - 1/6 l_1 x_2 x_3$	$c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ $c, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

Tabla 7.2: Pares  $(g, l)$  que con cada forma normal  $(f, Z)$  inducen pares de Poisson en  $\mathbb{R}^3$ .

### 7.3. Ejemplos

En este apartado presentamos dos ejemplos de pares de Poisson de tipo (cuadrático)+(lineal) que aparecen de manera natural en aplicaciones físicas.

**Ejemplo 1.** Esta estructura de Poisson 3-dimensional es una deformación cuadrática del corchete de Poisson lineal del álgebra  $\mathfrak{so}(3)$ .

La estructura de Poisson en cuestión es

$$\Pi = (x_1 - \varepsilon x_2 x_3) \partial_2 \wedge \partial_3 + (x_2 - \varepsilon x_1 x_3) \partial_3 \wedge \partial_1 + (x_3 - \varepsilon x_1 x_2) \partial_1 \wedge \partial_2, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Este tensor de Poisson es suma de los siguiente tensores de Poisson lineal y cuadrático, los cuales forman un par de Poisson,

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} &= x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 + x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + x_3 \partial_1 \wedge \partial_2. \\ \Pi^{(2)} &= -\varepsilon x_2 x_3 \partial_2 \wedge \partial_3 - \varepsilon x_1 x_3 \partial_3 \wedge \partial_1 - \varepsilon x_1 x_2 \partial_1 \wedge \partial_2. \end{aligned}$$

Ahora, en términos de la descomposición en pares  $(g, l)$  y  $(f, Z)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} &\equiv \Pi_{g,l} \quad \text{con } g = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad \text{y } l \equiv 0. \\ \Pi^{(2)} &\equiv \Pi_{f,Z} \quad \text{con } f = \varepsilon x_1 x_2 x_3 \quad \text{y } Z \equiv 0. \end{aligned}$$

De esto se puede concluir que las estructuras de Poisson  $\Pi^{(1)}$  y  $\Pi^{(2)}$  son *unimodulares* en  $\mathbb{R}^3$ , pues los campos modulares en cada caso son triviales. Aún más, ya que el campo modular asociado a la estructura de Poisson  $\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(1)}$  es  $Z+l$ , se tiene que  $\Pi$  es unimodular en  $\mathbb{R}^3$ .

Notemos que en términos de la clasificación del Teorema 7.2.2 es el tensor de Poisson  $\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(1)}$  de tipo  $I$ .

Recordemos, como se mostró en el Capítulo 6, que dado un tensor de Poisson  $\Pi_{K,X}$  homogéneo en  $\mathbb{R}^3$  es  $K$  una función de Casimir para esta estructura de Poisson si y sólo si  $X \equiv 0$ . Por tanto, en este caso  $g$  y  $f$  son funciones de Casimir para las estructuras  $\Pi^{(1)}$  y  $\Pi^{(2)}$  respectivamente. En consecuencia, para este par de Poisson particular, es fácil comprobar que

$$K = g + f \quad \text{es una función de Casimir para } \Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(1)}.$$

**Ejemplo 2.** Esta estructura de Poisson 3-dimensional aparece como el álgebra de simetrías del sistema promediado “Penning trap deformado” bajo la aplicación del método de promedios al modelo “Penning trap” con resonancia tipo 2 :  $(-1) : 2$ , ver [9].

La estructura de Poisson en cuestión es

$$\Pi = -x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 - x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + x_3(x_3 + a) \partial_1 \wedge \partial_2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Este tensor de Poisson es suma de los siguiente tensores de Poisson lineal y cuadrático, los cuales forman un par de Poisson,

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)} &= -x_1 \partial_2 \wedge \partial_3 - x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + a x_3 \partial_1 \wedge \partial_2. \\ \Pi^{(2)} &= x_3^2 \partial_1 \wedge \partial_2.\end{aligned}$$

Ahora, en términos de la descomposición en pares  $(g, l)$  y  $(f, Z)$  se tiene que

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)} &\equiv \Pi_{g,l} \quad \text{con } g = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - a x_3^2) \quad \text{y } l \equiv 0. \\ \Pi^{(2)} &\equiv \Pi_{f,Z} \quad \text{con } f = -\frac{1}{3} x_3^3 \quad \text{y } Z \equiv 0.\end{aligned}$$

De esto se puede concluir que las estructuras de Poisson  $\Pi^{(1)}$  y  $\Pi^{(2)}$  son *unimodulares* en  $\mathbb{R}^3$ , pues los campos modulares en cada caso son triviales. Aún más, ya que el campo modular asociado a la estructura de Poisson  $\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(1)}$  es  $Z+l$ , se tiene que  $\Pi$  es unimodular en  $\mathbb{R}^3$ .

Notemos que en términos de la clasificación del Teorema 7.2.2 es el tensor de Poisson  $\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(1)}$  asociado al tipo  $I$ .

Recordemos, como se mostró en el Capítulo 6, que dado un tensor de Poisson  $\Pi_{K,X}$  homogéneo en  $\mathbb{R}^3$  es  $K$  una función de Casimir para esta estructura de Poisson si y sólo si  $X \equiv 0$ . Por tanto, en este caso  $g$  y  $f$  son funciones de Casimir para las estructuras  $\Pi^{(1)}$  y  $\Pi^{(2)}$  respectivamente. En consecuencia, para este par de Poisson particular, es fácil comprobar que

$$K = g + f = \quad \text{es una función de Casimir para } \Pi = \Pi^{(2)} + \Pi^{(1)}.$$

# Apéndice



# Apéndice A

## Corchete de Schouten-Nijuenhuis

Primeramente se fijarán las notaciones y se recordarán algunas importantes nociones necesarias para estas notas. A lo largo de las secciones  $M$  denotará una variedad finita dimensional con  $m = \dim M$ . Serán  $T^*M$  y  $TM$  los haces cotangente y tangente sobre  $M$  respectivamente. Por  $C_M^\infty$  se entenderá el espacio de funciones diferenciables en  $M$  y por  $\mathfrak{X}_M$  el álgebra de campos vectoriales suaves en  $M$  con la operación  $[\cdot, \cdot]$  que denota el corchete de Lie de campos vectoriales

El  $C_M^\infty$ -módulo de  $k$ -formas diferenciales en  $M$  se denotará por  $\Omega_M^k$  y por  $\chi_M^k$  el de  $k$ -vectores en  $M$ , esto para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . Recordemos que como módulos de secciones (suaves) se definen por  $\Omega_M^k := \Gamma(\Lambda^k T^*M)$  y  $\chi_M^k := \Gamma(\Lambda^k TM)$ . Por convención,  $\Omega_M^k = \chi_M^k = C_M^\infty$  para  $k = 0$  y  $\Omega_M^k = \chi_M^k = \{0\}$  para  $k < 0$  ó  $k > m$ . Como caso particular se tiene  $\chi_M^1 = \mathfrak{X}_M$ . Finalmente, serán

$$\Omega_M := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_M^k \quad \text{y} \quad \chi_M := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \chi_M^k.$$

Las notaciones antes mencionadas se mantendrán a lo largo de estas páginas salvo mención explícita de lo contrario. Acentuamos el hecho de que en estas notas se trabajará en la categoría  $C^\infty$ .

### A.0.1. Pairing

Existe una operación natural entre elementos de  $\Omega_M$  y  $\chi_M$  llamado *pairing* que es una aplicación  $C_M^\infty$ -bilineal,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega_M \times \chi_M &\longrightarrow C_M^\infty \\ (\alpha, A) &\longmapsto \langle \alpha, A \rangle \end{aligned}$$

que se define de la siguiente manera: si  $\alpha \in \Omega_M^a$  y  $A \in \chi_M^{a'}$ , entonces

1.  $\langle \alpha, A \rangle = \alpha_{i_1 \dots i_a} \cdot A^{i_1 \dots i_a}$ , si  $a = a'$ .
2.  $\langle \alpha, A \rangle = 0$ , si  $a \neq a'$ .

donde  $\alpha_{i_1 \dots i_a}$  y  $A^{i_1 \dots i_a}$  son las funciones coordenadas de las expresiones locales de  $\alpha$  y  $A$  respectivamente en una carta de  $M$ :

$$\alpha = \frac{1}{a!} \alpha_{i_1 \dots i_a} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_a} \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{a!} A^{i_1 \dots i_a} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_a}, \quad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

*Nota A.0.1.* En la parte 1 de la definición anterior se ha hecho uso del convenio de *sumación de Einstein* el cual será empleado a lo largo de estas páginas.

El pairing es una operación que está bien definida pues no depende la carta que se utilice para la expresión local de las formas y los multivectores. Notemos que para el caso de dos 0-formas o funciones suaves en  $M$  el pairing de éstas coincide con el producto usual de funciones. Aún más, para formas y multivectores *descomponibles*, es decir, que son el producto de 1-formas y campos vectoriales respectivamente, se tiene que

$$\langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_a, X_1 \wedge \dots \wedge X_a \rangle = \det [\langle \alpha_i, X_j \rangle]_{a \times a}, \quad i, j = 1, \dots, a.$$

con  $\alpha_i \in \Omega_M^1$  y  $X_j \in \mathfrak{X}_M$ .

La definición del pairing puede extenderse a formas y multivectores no descomponibles de la siguiente manera (única): si  $\alpha \in \Omega_M^a$ , entonces

$$\langle \alpha, X_1 \wedge \dots \wedge X_a \rangle := \alpha(X_1, \dots, X_a),$$

para cualesquier  $X_1, \dots, X_a \in \mathfrak{X}_M$ . Análogamente, si  $A \in \chi_M^a$ , entonces

$$\langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_a, A \rangle := A(\alpha_1, \dots, \alpha_a),$$

para cualesquiera  $\alpha_1, \dots, \alpha_a \in \Omega_M^1$ .

### A.0.2. Operador Inserción

**Inserción de Multivectores.** La *inserción* a lo largo de formas diferenciales de un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}_M$  es un operador diferencial  $C_M^\infty$ -lineal sobre  $\Omega_M$  de grado  $-1$ ,

$$\begin{aligned} i_X : \Omega_M^n &\longrightarrow \Omega_M^{n-1} \\ \eta &\longmapsto i_X \eta \end{aligned},$$

con  $i_X \eta$  la única  $(n-1)$ -forma definida por

$$(i_X \eta)(X_1, \dots, X_{n-1}) := \eta(X, X_1, \dots, X_{n-1}),$$

para cualesquier  $X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathfrak{X}_M$ .

Nótese que para cada campo vectorial las 0-formas o funciones suaves en  $M$  pertenecen al kernel del operador inserción. Además, resulta ser este operador una derivación del producto exterior para formas diferenciales:

$$i_X(\eta_1 \wedge \eta_2) = i_X \eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{n_1} \eta_1 \wedge i_X \eta_2,$$

para cualesquiera  $\eta_1 \in \Omega_M^{n_1}$  y  $\eta_2 \in \Omega_M^{n_2}$ .

En estas notas se adoptará el siguiente convenio para la extensión del operador anterior, es decir, para la inserción a lo largo de formas diferenciales de un multivector: si  $A = X_1 \wedge \cdots \wedge X_a$  es un  $a$ -vector descomponible, entonces

$$i_{X_1 \wedge \cdots \wedge X_a} := i_{X_1} \circ \cdots \circ i_{X_a}.$$

Es decir, para cada  $n$ -forma  $\eta$ , es  $i_A \eta = i_{X_1} \cdots i_{X_a} \eta \in \Omega_M^{n-a}$ .

De manera más general, ya que todo multivector se expresa localmente como suma de multivectores descomponibles, para cada  $A \in \chi_M^a$  (no necesariamente descomponible) se define el operador diferencial  $C_M^\infty$ -lineal sobre  $\Omega_M$  de grado  $-a$ ,

$$\begin{aligned} i_A : \Omega_M^n &\longrightarrow \Omega_M^{n-a} \\ \eta &\longmapsto i_A \eta \end{aligned},$$

donde  $i_A \eta$  es la única  $(n-a)$ -forma que cumple, para cualquier  $\tilde{A} \in \chi_M^{n-a}$ , con

$$(i_A \eta)(\tilde{A}) = (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} \langle \eta, A \wedge \tilde{A} \rangle, \quad \text{si } a \leq n.$$

Se define  $i_A \eta = 0$ , si  $a > n$ .

En virtud de lo anterior, la aplicación  $A \rightarrow i_A$  resulta ser  $C_M^\infty$ -lineal. Como caso particular se presenta la siguiente fórmula que para cuestiones de cálculos posteriores será de gran utilidad: si  $B \in \chi_M^2$ , entonces

$$i_B(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_a) = \sum_{1 \leq i < j \leq a} (-1)^{i+j} B(\alpha_i, \alpha_j) \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha}_j \wedge \cdots \wedge \alpha_a,$$

para cualesquiera  $\alpha_1, \dots, \alpha_a \in \Omega_M^1$ .

**Inserción de Formas Diferenciales.** La *inserción* a lo largo de multivectores de una 1-forma diferencial  $\alpha \in \Omega_M^1$  es un operador diferencial  $C_M^\infty$ -lineal sobre  $\chi_M$  de grado  $-1$ ,

$$\begin{aligned} i_\alpha : \Omega_M^p &\longrightarrow \Omega_M^{p-1} \\ P &\longmapsto i_\alpha P \end{aligned},$$

con  $i_\alpha P$  el único  $(p-1)$ -vector definido por

$$(i_\alpha P)(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) := P(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}).$$

para cualesquiera  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \in \Omega_M^1$ .

Nótese que para cada 1-forma los 0-vectores o funciones suaves en  $M$  pertenecen al kernel del operador inserción. Además, resulta ser este operador una derivación del producto exterior para multivectores:

$$i_\alpha(P_1 \wedge P_2) = i_\alpha P_1 \wedge P_2 + (-1)^{p_1} P_1 \wedge i_\alpha P_2,$$

para cualesquier  $P_1 \in \chi_M^{p_1}$  y  $P_2 \in \chi_M^{p_2}$ .

En estas notas se adoptará el siguiente convenio para la extensión del operador anterior, es decir, para la inserción a lo largo de multivectores de una forma diferencial: si  $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_a$  es una  $a$ -forma descomponible, entonces

$$i_{\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_a} := i_{\alpha_1} \circ \cdots \circ i_{\alpha_a}.$$

Es decir, para cada  $p$ -vector  $P$ , es  $i_\alpha P = i_{\alpha_1} \cdots i_{\alpha_a} P \in \chi_M^{p-a}$ .

De manera más general, ya que toda forma diferencial se expresa localmente como suma de formas descomponibles, para cada  $\alpha \in \Omega_M^a$  (no necesariamente descomponible) se define el operador diferencial  $C_M^\infty$ -lineal sobre  $\chi_M$  de grado  $-a$ ,

$$\begin{aligned} i_\alpha : \chi_M^p &\longrightarrow \chi_M^{p-a} \\ P &\longmapsto i_\alpha P \end{aligned},$$

donde  $i_\alpha P$  es el único  $(p-a)$ -vector que cumple, para cualquier  $\tilde{\alpha} \in \Omega_M^{p-a}$ , con

$$(i_\alpha P)(\tilde{\alpha}) = (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} \langle \alpha \wedge \tilde{\alpha}, P \rangle, \quad \text{si } a \leq p.$$

Se define  $i_\alpha P = 0$ , si  $a > p$ .

En virtud de lo anterior, la aplicación  $\alpha \rightarrow i_\alpha$  resulta ser  $C_M^\infty$ -lineal. Además, como caso particular se tiene que si  $A \in \chi_M^a$  y  $\alpha \in \Omega_M^a$ , entonces

$$i_A \alpha = i_\alpha A = (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} \langle \alpha, A \rangle.$$

### A.0.3. Corchete de Schouten-Nijenhuis

En términos de la inserción de multivectores y de la *diferencial exterior* para formas,

$$d : \Omega_M^a \rightarrow \Omega_M^{a+1},$$

que es un operador diferencial sobre  $\Omega_M$  de grado 1, se define el *corchete de Schouten-Nijenhuis* de dos multivectores  $A \in \chi_M^a$  y  $B \in \chi_M^b$ , como el único  $(a+b-1)$ -multivector  $\llbracket A, B \rrbracket$  que satisface la igualdad

$$i_{\llbracket A, B \rrbracket} = \llbracket i_A, d \rrbracket, i_B = \llbracket \mathcal{L}_A, i_B \rrbracket,$$

y que resulta ser una extensión natural del corchete de Lie para campos vectoriales en  $M$ .

*Nota A.0.2.* Los corchetes en el lado derecho de la igualdad anterior denotan el conmutador (graduado) de endomorfismos graduados de  $\Omega_M$ . Esto es,  $[E_1, E_2] := E_1 \circ E_2 - (-1)^{e_1 e_2} E_2 \circ E_1$ , para cualesquier endomorfismos  $E_1$  y  $E_2$  de  $\Omega_M$  de grados  $e_1$  y  $e_2$  respectivamente.

En consecuencia, el corchete de Schouten-Nijenhuis puede interpretarse como una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal,

$$\begin{aligned} \llbracket, \rrbracket : \chi_M^a \times \chi_M^b &\longrightarrow \chi_M^{a+b-1} \\ (A, B) &\longmapsto \llbracket A, B \rrbracket \end{aligned} ,$$

la cual satisface las siguientes propiedades:

1.  $\llbracket A, B \rrbracket = -(-1)^{(a-1)(b-1)} \llbracket B, A \rrbracket$ . (Antisimetría)
2.  $\llbracket A, B \wedge C \rrbracket = \llbracket A, B \rrbracket \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge \llbracket A, C \rrbracket$ . (Regla de Leibniz)
3.  $\llbracket A, \llbracket B, C \rrbracket \rrbracket = \llbracket \llbracket A, B \rrbracket, C \rrbracket + (-1)^{(a-1)(b-1)} \llbracket B, \llbracket A, C \rrbracket \rrbracket$ . (Identidad de Jacobi)

Lo anterior para cualesquier  $A \in \chi_M^a$ ,  $B \in \chi_M^b$  y  $C \in \chi_M^c$ .

Entre las propiedades adicionales que cumple el corchete de Schouten-Nijenhuis las siguientes dos serán de utilidad en líneas posteriores: si  $A \in \chi_M^a$ , entonces

1.  $\llbracket f, A \rrbracket = -i_{df}A$ , para toda  $f \in C_M^\infty$ .
2.  $\llbracket X, A \rrbracket = \mathcal{L}_X A$ , para cualquier  $X \in \mathfrak{X}_M$ .



## Apéndice B

# Clasificación de Matrices

En este breve apartado presentamos la clasificación de matrices simétricas y de traza cero utilizada en el Teorema 6.2.2 y Teorema 6.3.2 respectivamente.

**Matrices Simétricas.** Es sabido del álgebra lineal que las matrices simétricas son diagonalizables y que se pueden clasificar utilizando el índice de inercia para éstas. En esta tesis utilizamos en la demostración del Teorema 6.2.2 la siguiente clasificación de las matrices simétricas de tamaño  $3 \times 3$  con entradas reales:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_9 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Matrices con Traza Cero.** Con ayuda de los valores propios y el rango de una matriz se puede dar una clasificación de las matrices con traza cero de tamaño  $3 \times 3$  y entradas reales. La clasificación que presentamos a continuación es la que utilizamos en la demostración del Teorema 6.3.2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2b_1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con  $b, b_1, b_2, b_3 \neq 0$  y para la matriz  $A_2$  es  $b_1 + b_2 + b_3 = 0$  y  $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_1$ .

# Bibliografía

- [1] A. AY, M. GÜRSES AND K. ZHELTUKHIN. *Hamiltonian Equations in  $\mathbb{R}^3$* . Journal of Mathematical Physics, vol. 44 (2003) 5688-5705.
- [2] A. LICHNEROWICZ. *Les Variétés de Poisson et Leurs Algèbres de Lie Associées*. Journal of Differential Geometry, vol. 2 (1976) 257-300.
- [3] J.-P. DUFOUR AND N. T. ZUNG. *Poisson Structures and Their Normal Forms*. Birkhäuser Basel, First Edition (2005), 321 pp.
- [4] J.-P. DUFOUR AND A. HARAKI. *Rotationnels et structures de Poisson Quadratiques*. C. R. Acad. Sci. Paris 312, Série I (1991), 137-140.
- [5] V. L. GINZBURG AND A. GOLUBEV. *Holonomy on Poisson Manifolds and the Modular Class*. Israel Journal of Mathematics, vol. 122 (2001) 221-242.
- [6] J. GRABOWSKI, G. MARMO AND A. M. PERELOMOV. *Poisson Structures: Towards a Classification*. Modern Physics Letters A, vol. 08 (1993) 1719-1733.
- [7] V. GUILLEMIN, E. MIRANDA AND A. R. PIRES. *Codimension One Symplectic Foliations and Regular Poisson Structures*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 42, vol. 4 (2011) 607-623.
- [8] H. GÜMRAL AND Y. NUTKU. *Poisson Structure of Dynamical Systems with Three Degrees of Freedom*. Journal of Mathematical Physics, vol. 34 (1993) 5691-5723.
- [9] M. V. KARASEV AND E. M. NOVIKOVA. *Inserted Perturbations Generating Asymptotical Integrability*. Mathematical Notes, vol 96 (2014) 965-970.
- [10] F. KLINKER. *Quadratic Poisson Structures in Dimension Four*.
- [11] J. L. KOSZUL. *Crochet de Schouten-Nijenhuis et Cohomologie*. Astérisque, (1985) 257-271.
- [12] C. LAURENT-GENGOUX, A. PICHEREAU AND P. VANHAECKE. *Poisson Structures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, First Edition (2013), 464 pp.
- [13] P. LIBERMANN AND C.-M. MARLE. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Springer Netherlands, First Edition (1987), 526 pp.

- [14] X.-J. LIU AND P. XU. *Quadratic Deformations of Lie-Poisson Structures*. Letters in Mathematical Physics, vol 83 (2008) 217-229.
- [15] X.-J. LIU AND P. XU. *On Quadratic Poisson Structures*. Letters in Mathematical Physics, vol 26 (1992) 33-42.
- [16] F. MALEK AND A. SHAFEI DEH ABAD. *Homogeneous Poisson Structures*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 54 (1996) 203-210.
- [17] J. E. MARSDEN AND T. S. RATIU. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag New York, Second Edition (1999), 586 pp.
- [18] J. M. OLLAGNIER. *Liouvillean First Integrals of Homogeneous Polynomial 3-dimensional Vectors Fields*. Colloquium Mathematicum, vol 70 (1996) 195-217.
- [19] J. M. OLLAGNIER AND J.-M. STRELCYN. *On First Integrals of Linear Systems, Frobenius Integrability Theorem and Linear Representations of Lie Algebras*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1455 (1991) 243-271.
- [20] I. VAISMAN. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Birkhuser Basel, First Edition (1994), 206 pp.
- [21] A. WEINSTEIN. *The Modular Automorphism Group of a Poisson Manifold*. Journal of Geometry and Physics, vol. 23 (1997) 379-394.
- [22] A. WEINSTEIN. *The Local Structure of Poisson Manifold*. Journal of Differential Geometry, vol. 18 (1983) 523-557.