



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

El problema de los dos centros fijos

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Héctor Alfredo Hernández Hernández

Director de Tesis: Dr. Joaquín Delgado Fernández.

Hermosillo, Sonora, México, 20 de Agosto de 2010.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Q A614.83

.H47

Reg- T1615

SINODALES

Dr. Joaquín Delgado Fernández.
Universidad Autónoma de Metropolitana, Ciudad de México.

Dr. Antonio García Rodríguez.
Universidad Autónoma de Metropolitana, Ciudad de México.

Dr. Daniel Olmos Liceaga.
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Fernando Verduzco González.
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

UNIVERSIDAD DE SONORA

Acta de Examen de Grado



EL SABER DE MESTIZAJES
HARA MI GRANDEZA

En la ciudad de Hermosillo Sonora, México, siendo las 11:00 horas del día 20 de Agosto del 2010 se reunieron en:

El Auditorio del Departamento de Matemáticas

de la Universidad de Sonora, los señores:

Dr. Fernando Verduzco González

Dr. Joaquín Delgado Fernández

Dr. Daniel Olmos Liceaga

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último, para efectuar el Examen de Grado a:

Héctor Alfredo Hernández Hernández

de Maestro en Ciencias (Matemáticas)

quien presentó el trabajo de tesis:

"El problema de los dos Centros Fijos"

Acta No. 13
Foja 13
Libro 1
Exp. No. 8420994

Los sinodales replicaron a 1 sustentante y después de debatir entre si reservada y libremente, 10 declararon:

Aprobado por unanimidad

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la presente, firmando los que intervinieron.

Hector A. Hernandez //
Firma del sustentante

[Signature]
PRESIDENTE

Daniel Olmos L.
SECRETARIO

[Signature]
VOCAL

Dr. Oscar Vega Amaya Coordinador
 del Programa de: Posgrado en Matemáticas
 de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden a
 los sinodales que intervinieron en el examen que contiene la presente acta.

Hermosillo, Sonora, a 20 de Agosto del 2010.

Dr. Oscar Vega Amaya

Oscar Vega Amaya
 Coordinador del Programa



Dra. Arminda Guadalupe García de León Peñuñuri Vicerrectora
 de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora, hace
 constar que: el Dr. Oscar Vega Amaya
 es a la fecha de expedición de este documento, Coordinador del Programa arriba citado
 y suya la firma que aparece al calce del mismo.

Hermosillo, Sonora, a 20 de Agosto del 2010.



EL SABER DE MIS HIJOS
 HARA MI GRANDEZA
 UNIDAD REGIONAL
 CENTRO
 VICERRECTORIA

Arminda Guadalupe García de León Peñuñuri
 VICERRECTOR A
 UNIDAD REGIONAL CENTRO

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Doctor Joaquín Delgado Fernández, por su invaluable apoyo en el desarrollo de este trabajo, así mismo agradezco al Doctor Fernando Verduzco González por su sobresaliente guía, a ambos por su paciencia y su gran calidad humana. También agradezco al Doctor Daniel Olmos Liceaga y al Doctor Antonio García Rodríguez por su cuidadosa revisión y sus acertadas observaciones.

Mi más sincero agradecimiento a quienes me alentaron a ingresar al programa de Maestría: Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, Dra. Martha Guzman Partida, M.C. Carlos Robles Corbalá, M.C. Israel Segundo Caballero y al Dr. Martín Gildardo García Alvarado. A quienes brindaron su apoyo para la realización de estos estudios: Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa, M.C. Miguel Angel Moreno Nuñez, a coordinadores del programa de posgrado en Matemáticas: Dr. Rubén Flores Espinoza, Dr. Fernando Luque Vasquez y Dr. Oscar Vega Amaya, y a autoridades a cargo de Desarrollo Académico de la Universidad de Sonora.

A mis compañeros estudiantes de posgrado, les agradezco por compartir "la brisa del mar" en momentos críticos. Igualmente agradezco al Dr. José Luis Soto Munguía y a M.C. Lorena Armida Durazo Grijalva por su constante apoyo moral.

Agradezco a mi madre por su real impulso expresado en la frase: "¿para que tanto estudio?", motivándome la correspondiente respuesta.

Y por último agradezco infinitamente a mi familia: mi esposa I.Q. Paola Tonanzy García Mendivil, mis hijas: Ytrethzy Laisha y María Fernanda por su calidez y ternura, que fueron un estímulo imprescindible para la realización de este Proyecto de Maestría.

Resumen

En este trabajo se presenta el problema bidimensional de los dos centros fijos, se deducen y simplifican las ecuaciones de movimiento, se exhiben dos integrales primeras, que junto con el teorema de Hamilton Jacobi garantizan la separabilidad, es decir, que este problema sea integrable.

Además dado que las órbitas que colisionan o chocan con algún centro fijo, o pasan cerca de uno ellos, son sensibles de seguir numéricamente en sus coordenadas originales, se introduce una transformación llamada Regularización de Birkhoff que evita este problema. Esta regularización se aplica a las ecuaciones y a las regiones donde el movimiento tiene lugar, llamadas regiones de Hill.

A fin de poder obtener soluciones exactas se estudian las condiciones necesarias y suficientes para la separabilidad y se dan las integrales de las ecuaciones de movimiento. Se introducen las coordenadas elípticas y se muestra como se separa el Hamiltoniano en estas coordenadas.

Se comprueba que el uso de las coordenadas elípticas resultan adecuadas para describir las restricciones que llegan a tener las órbitas que describe la masa en movimiento, estableciendo regiones en las cuales se dan diferentes formas de las órbitas. Sin embargo esta versión de coordenadas elípticas son adecuadas si nos quedamos restringuimos a algún cuadrante del plano, de no ser así, requieren de consideraciones de signo cada vez que se pase a otro cuadrante. Para evitarlo se introducen las coordenadas elípticas polares y en ellas se describe el Hamiltoniano del problema. Incluso se eliminan las singularidades utilizando el truco de Poincaré.

Se da un ejemplo de la expresión paramétrica de una solución exacta, la cual requiere de funciones elípticas de Jacobi (seno y coseno elípticos). Se utiliza la herramienta anterior y se implementa en Mathematica para generar una trayectoria de cada región, mostrándose los respectivos gráficos y en su caso haciendo evidente las restricciones del movimiento.

Después de lo anterior la atención se centra en órbitas periódicas simétricas, para lo cual se estudian las simetrías del problema y se muestra el concepto de líneas de simetría, el cual será útil para localizar visualmente condiciones iniciales de órbitas periódicas.

Luego se muestra el método de continuación analítica y su relación con constantes de movimiento. También se muestra que las órbitas Keplerianas no se pueden continuar. Se desarrolla un método numérico de dos fases para realizar la continuación analítica respecto a la masa, el cual se clasifica como Newton de varias variables.

Se presentan los resultados numéricos respecto a mapas de Poincaré del problema, en el plano original y en el plano regularizado, así la visualización de la condición inicial de órbitas periódicas a partir de la intersección de líneas de simetría. En seguida se muestra la continuación de la órbita en forma de ocho y la continuación de la órbita del carnero. Por último se presentan las conclusiones y dos apéndices, uno de Formas Diferenciales y otro de Transformaciones Canónicas y Funciones Generadoras.

Índice general

1. Introducción	1
2. Ecuaciones de movimiento	5
2.1. Adimensionamiento de las ecuaciones	6
3. Primeras Integrales	9
3.1. Integral de energía y regiones de Hill	9
3.2. La integral de Euler	10
4. Regularización	15
4.1. Regularización Lagrangiana	15
4.2. Regularización Hamiltoniana	22
4.3. Regiones de Hill regularizadas	24
5. Teorema de Hamilton Jacobi	27
5.1. El teorema de Hamilton–Jacobi	27
5.2. Un ejemplo sencillo	31
6. Sistemas separables con dos grados de libertad	33
6.1. Condiciones necesarias para la separabilidad	33
6.2. Sistemas de Liouville	34
6.3. Estudio del movimiento	35
7. Separabilidad en coordenadas elípticas cofocales	37
7.1. Relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas elípticas (λ, μ)	38
7.2. Restricción del movimiento	42
7.3. Coordenadas elípticas polares (η, ξ)	49
8. Trayectorias en las regiones del plano (λ_1, λ_2).	55
8.1. Trayectorias acotadas	55
8.2. Integración en términos de funciones elípticas	56
8.3. Trayectorias	57

9. Simetrías del problema	63
9.1. Simetrías como equivariancias	65
9.2. Órbitas periódicas σ_2 -simétricas	67
9.3. Líneas de simetría	68
10.El método de continuación analítica	71
10.1. Motivación	71
10.2. Las ecuaciones variacionales	72
10.3. Presencia de integrales primeras	74
11.Imposibilidad de continuar órbitas Keplerianas	77
11.1. Multiplicadores característicos iguales a 1, órbitas circulares	78
11.2. Imposibilidad de continuar órbitas circulares por simetría	80
12.Continuación numérica respecto de μ	83
12.1. El Método predictor	83
12.2. Las ecuaciones variacionales	84
12.3. El método corrector	88
13.Resultados numéricos	91
13.1. Mapas de Poincaré	91
13.2. Líneas de simetría	91
14.Continuación de órbitas periódicas	97
14.1. Continuación de la órbita ocho	97
14.2. Continuación de la órbita del carnero	97
15.Conclusiones	101
A. Formas diferenciales	103
A.1. Pullback y derivada exterior	103
A.2. Formas simplécticas y campos Hamiltonianos	105
B. Transformaciones canónicas y funciones generadoras	107
B.1. Ecuaciones de Hamilton	115

Capítulo 1

Introducción

El problema de determinar la dinámica de n cuerpos que se atraen mutuamente, es un problema muy difícil, incluso para $n = 3$. En [9] su autor expresa que en vista de la dificultad de resolver el problema general de los tres cuerpos, es conveniente intentar casos más sencillos de este problema. Euler atacó dos de ellos con gran éxito: En el problema colineal de tres cuerpos, logra obtener las soluciones más sencillas en las que se conservan la razón entre las distancias de los cuerpos, llamada *configuración central*, ver Figura 1.1. Euler muestra que aún en este caso sencillo está lejos de poder ser resuelto completamente. Posteriormente muestra que este tipo de soluciones se puede generalizar al problema de los tres cuerpos en el que cada uno sigue una órbita circular Kepleriana partiendo de una configuración central con condiciones iniciales de velocidad convenientes. El otro problema que Euler estudió fue el problema de un cuerpo siendo atraído por dos masas fijas, problema que se conoce como el *problema de los dos centros fijos*¹. Euler menciona al respecto:

"He aquí un problema que parece tan importante como difícil. Conviene al día de hoy, que la astronomía sea llevada al más alto grado de perfección, si se encontrara un medio de determinar el movimiento de tres cuerpos, que se atraen mutuamente en razón inversa del cuadrado de sus distancias. Sin embargo todos los aportes que los Geómetras han hecho hasta ahora para este efecto han sido inútiles, han encontrado a nivel del Análisis obstáculos invencibles, a pesar del gran progreso que se ha hecho en este estudio. Por lo tanto los pasos que se pueden dar para llegar a esta gran meta serán muy importantes. Desde este punto de vista, me he aplicado a la cuestión de los dos cuerpos fijos, en el que se busca el movimiento de un tercero que es atraído siguiendo la ley mencionada".

Una versión de este problema consiste en restringir el movimiento a un plano fijo que contiene a los tres cuerpos². Para resolverlo, Euler encuentra dos constantes de movimiento, la energía y el momento angular, conocidas como la integral de energía y la integral de Euler respectivamente. Con ello reduce el problema a una ecuación

¹La hipótesis de la no movilidad de los dos centros ha llegado a ser discutible, sin embargo en [19] se mencionan ejemplos del mundo macroscópico y microscópico. Incluso en [18] se estudia el ion diatómico de hidrógeno H_2^+

²En el artículo [5] se estudia la versión en tres dimensiones.

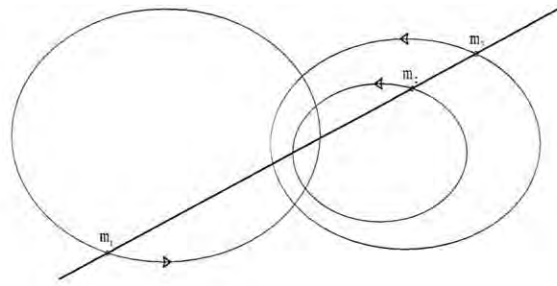


Figura 1.1: Configuración central; ejemplo de Euler

integral de la forma $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ de la cual consigue separar las variables después de varios cambios de coordenadas, involucrando integrales elípticas; da la solución completa dando explícitamente la solución de esta ecuación integral, por ello se afirma que fue el primero en resolver este problema.

Estudia los casos cuando una de las masa es cero y el caso de las masas iguales. También prueba que bajo ciertas condiciones en los valores de la energía y el momento angular, las soluciones pueden ser elípticas, hiperbólicas, incluso encuentra condiciones necesarias y suficientes para que la curva solución sea algebraica, probablemente este haya sido el motivo por el cual Euler profundizó en el estudio de las integrales elípticas. Entre los resultados de Euler respecto a la teoría de este tipo de integrales, están el cálculo de la longitud de arco de $1/4$ de elipse y el teorema de adición de integrales elípticas.

Años más tarde Adrien-Marie Legendre [12] generalizó este resultado al encontrar familias más generales de curvas algebraicas y no algebraicas. El problema en su versión espacial de los dos centros fijo, fue resuelto por Jacobi y generalizado para n centros fijos, incluyendo una fuerza elástica dirigida al centro, usando el método hoy conocido de la ecuación de Hamilton-Jacobi, es importante resaltar la utilización de coordenadas elípticas cofocales.

Euler sostiene que el problema de los centros fijos podría tomarse como punto de partida para comenzar a entender el problema de los tres cuerpos. Existen trabajos recientes en los que se encuentran soluciones periódicas al problema restringido de los tres cuerpos como perturbaciones del problema de los dos centros fijos; en las primeras misiones espaciales se le dio mucha importancia, aunque fueron de poca utilidad práctica.

Por otra parte las órbitas periódicas son de particular importancia en cualquier sistema dinámico, pues son órbitas de referencia, el movimiento se considera conocido si las soluciones son periódicas, cuasi-periódicas o asintóticas. Por lo que resulta útil poder obtener tantas órbitas periódicas como se requiera, incluyendo familias de este tipo de órbitas. Una manera de obtener órbitas periódicas, se conoce como el *método de continuación analítica*, el cual consiste en que una vez encontrada una órbita periódica, llevar a cabo una pequeña variación en algún o algunos de los parámetros y obtener otra órbita periódica con los nuevos valores de los parámetros,

en caso de que sea posible. El proceso se podría repetir de nuevo encontrando otros miembros de la familia de órbitas periódicas a las cuales pertenece la órbita inicial.

El objetivo central es mostrar el método de continuación analítica, para órbitas periódicas simétricas de bajo periodo, en el problema de los dos centros fijos, en su versión bidimensional, y en particular a una familia de órbitas: la familia con forma de ocho. Se aplica al problema de los dos centros fijos pues en él es muy fácil encontrar órbitas periódicas, ya que existe una infinidad de ellas. Además, ya que resulta ser un sistema integrable, es posible llegar a comparar soluciones exactas con soluciones numéricas, midiendo de alguna forma la bondad de las segundas.

Incluso los métodos numéricos generados podrían ser extendidos para aplicarse a problemas no integrables, por supuesto, con los ajustes necesarios.

Capítulo 2

Ecuaciones de movimiento

El problema de los dos puntos fijos consiste en determinar la trayectoria que describe una partícula de masa m_0 al ser atraída por la fuerza gravitatoria de dos partículas de masas m_1 y m_2 (llamadas centros) que se suponen fijas. La partícula m_0 se puede mover en el espacio o en un plano fijo que contenga la línea de los dos centros. En lo sucesivo consideramos el problema plano: los centros fijos de masas m_1 y m_2 están localizados sobre el eje x en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ respectivamente (ver Figura 2.1). Sea (x_1, x_2) la posición de la partícula de masa m_0 , entonces por la segunda ley de Newton y la ley de atracción universal se sigue

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x}_1 &= -\frac{Gm_1m_0(x_1+c)}{((x_1+c)^2+x_2^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2m_0(x_1-c)}{((x_1-c)^2+x_2^2)^{3/2}} \\ m_0 \ddot{x}_2 &= -\frac{Gm_1m_0x_2}{((x_1+c)^2+x_2^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2m_0x_2}{((x_1-c)^2+x_2^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Donde $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ es la constante de gravitación universal,

$$\frac{x_1+c}{((x_1+c)^2+x_2^2)^{1/2}}, \quad \frac{x_1-c}{((x_1-c)^2+x_2^2)^{1/2}}$$

son las componentes horizontales de los vectores unitarios en dirección de las fuerzas y donde

$$\frac{x_2}{((x_1+c)^2+x_2^2)^{1/2}}, \quad \frac{x_2}{((x_1-c)^2+x_2^2)^{1/2}}$$

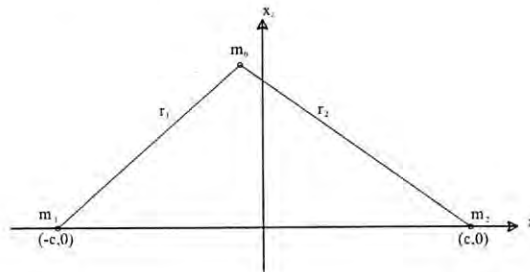


Figura 2.1: Problema de los dos centros fijos

son las componentes verticales de los vectores unitarios en dirección de las fuerzas.

Notemos que la masa m_0 se puede eliminar, o equivalentemente considerar que $m_0 = 1$, así las ecuaciones nos quedan:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{Gm_1(x_1 + c)}{((x_1 + c)^2 + x_2^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2(x_1 - c)}{((x_1 - c)^2 + x_2^2)^{3/2}} \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{Gm_1x_2}{((x_1 + c)^2 + x_2^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2x_2}{((x_1 - c)^2 + x_2^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (2.0.1)$$

2.1. Adimensionamiento de las ecuaciones

La forma adimensional de las ecuaciones se obtiene como sigue: introducimos variables adimensionales de distancia, $x_1 = cx$, $x_2 = cy$, de masa $m_1 = \mu m$, $m_2 = (1 - \mu)m$, con $m = m_1 + m_2$ y de tiempo $t = k\tau$ con el valor adecuado de k , encontraremos tal valor. Para lo cual es necesario distinguir las derivadas respecto a t y respecto a τ , así

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \ddot{x}_1 & \frac{d^2x_2}{dt^2} &= \ddot{x}_2 \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} &= x'' & \frac{d^2y}{d\tau^2} &= y''\end{aligned}$$

Encontremos la relación entre las respectivas componentes.

Por una parte tenemos que

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = k^2\ddot{x}_1, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} = k^2\ddot{x}_2, \quad (2.1.2)$$

por otra parte tenemos que

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = cx'', \quad (2.1.3)$$

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} = cy''. \quad (2.1.4)$$

De (2.1.1) y (2.1.3) tenemos que

$$\ddot{x}_1 = \frac{c}{k^2}x'' \quad (2.1.5)$$

y de (2.1.2) y (2.1.4) tenemos que

$$\ddot{x}_2 = \frac{c}{k^2}y''. \quad (2.1.6)$$

Sustituyendo (2.1.5) y (2.1.6) y las variables adimensionales propuestas en (2.0.1) se obtiene que

$$\frac{c}{k^2}x'' = \frac{cGm}{c^3} \left(-\frac{\mu(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \right) \quad (2.1.7)$$

$$\frac{c}{k^2}y'' = \frac{cGm}{c^3} \left(-\frac{\mu y}{((x+1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-\mu)y}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

Si $\frac{1}{k^2} = \frac{Gm}{c^3}$, esto es: si hacemos $k = \sqrt{\frac{c^3}{Gm}}$ entonces las ecuaciones (2.1.7) se reducen de la siguiente manera:

$$x'' = -\frac{\mu(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \quad (2.1.8)$$

$$y'' = -\frac{\mu y}{((x+1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-\mu)y}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \quad (2.1.9)$$

Observemos que las unidades de la constante $[k] = s$.

Subcomisión de Investigación y Desarrollo Científico y Tecnológico

Capítulo 3

Primeras Integrales

3.1. Integral de energía y regiones de Hill

La energía es una primera integral del problema de los centros fijos. Para ello multiplicamos la primera ecuación (2.1.8) por x' , la segunda (2.1.9) por y' y sumamos, obtenemos $x'x'' + y'y''$, pero esta cantidad es precisamente la derivada de la energía cinética, es decir:

$$x'x'' + y'y'' = \left(\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) \right)' = K'. \quad (3.1.1)$$

Por otro lado, usando las ecuaciones de movimiento (2.1.8) y (2.1.9), obtenemos que

$$\begin{aligned} x''x' + y''y' &= \left(-\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3} \right) x' + \left(-\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3} \right) y' \\ &= -\frac{\mu((x+1)x' + yy')}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)((x-1)x' + yy')}{r_2^3} \\ &= -\left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right)' = U' \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

con

$$r_1 = ((x+1)^2 + y^2)^{1/2}, \quad r_2 = ((x-1)^2 + y^2)^{1/2}.$$

De (3.1.1) y (3.1.2) obtenemos que

$$\left(\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) \right)' = U',$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = U(x, y) + h, \quad (3.1.3)$$

donde h se identifica con la energía y $U = -\left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right)$ es la función potencial. De ésta manera la energía total del sistema es constante $K - U = h$.

De la conservación de la energía y del hecho que la energía cinética es no negativa se sigue que para un valor fijo de la energía h , el movimiento en el espacio de configuración está restringido a la región

$$M_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid U(x, y) + h \geq 0\} \quad (3.1.4)$$

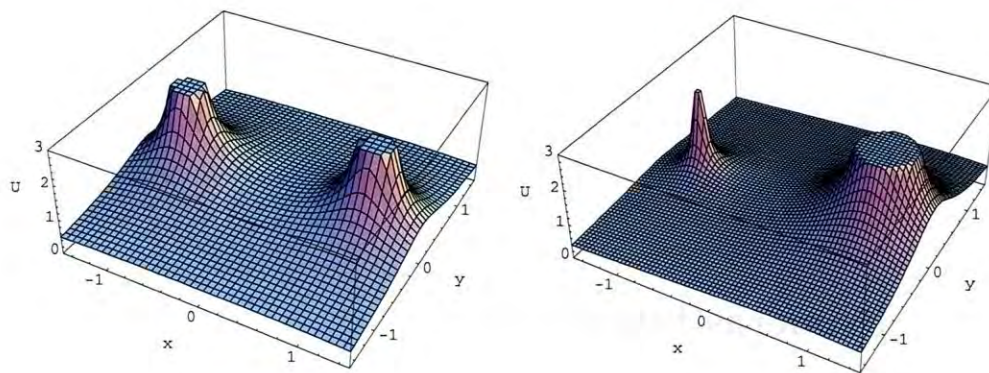


Figura 3.1: Función potencial $U(x, y)$ para $\mu = 1/2$ (izquierda) y $\mu = 1/8$ (derecha).

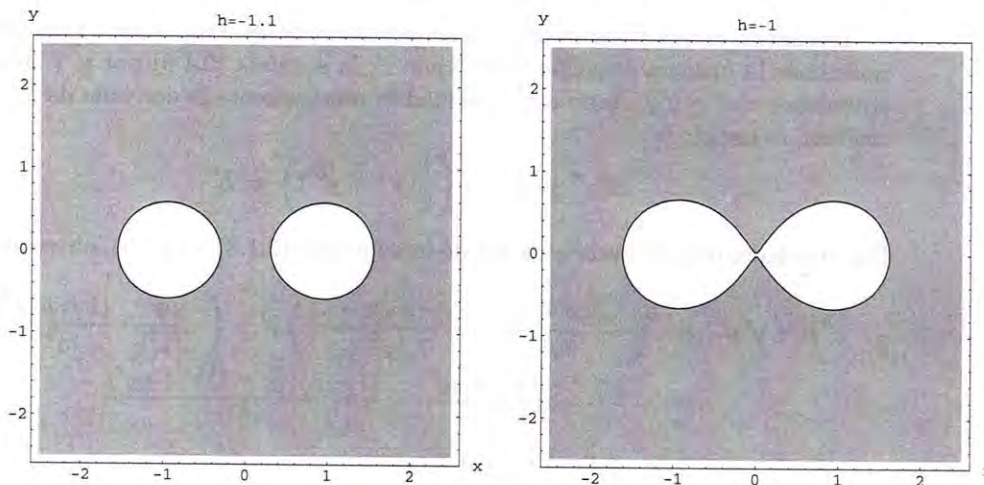


Figura 3.2: Regiones de Hill para $h = -1.1, -1$ y $\mu = 1/2$.

que se conocen como las *regiones de Hill*. Sus fronteras $U = -h$ no son más que las curvas de nivel del potencial $U(x, y)$ para valores de $\mu = 1/2$ (izquierda) y $\mu = 1/8$ (derecha) en la que se pueden apreciar las singularidades debidas a colisión con los primarios.¹

En las Figuras 3.2, 3.3 se muestran las regiones de Hill para valores de $h < 0$. Para valores de $h > 0$ la región de Hill es el plano menos dos puntos correspondientes a los centros fijos.

3.2. La integral de Euler

Euler encontró una integral de movimiento adicional a la energía que es una combinación del producto de los momentos angulares de la partícula respecto de los centros fijos y una combinación de los cosenos del radio vector respecto de los

¹La región de Hill es de color blanco.

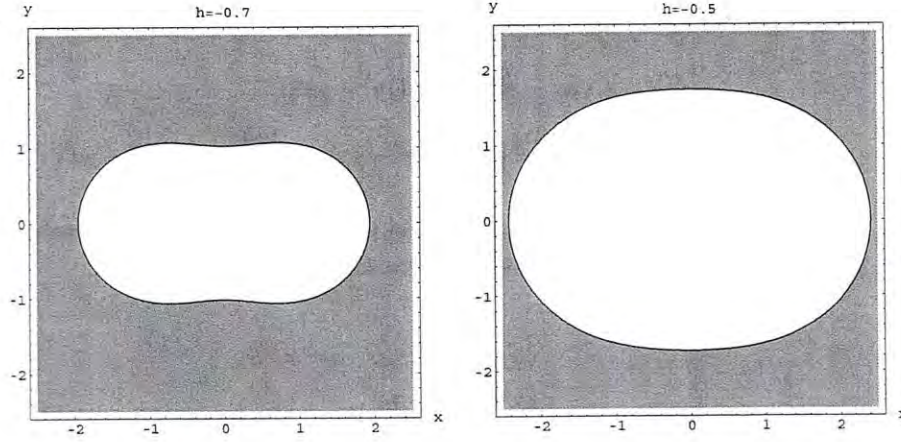


Figura 3.3: Regiones de Hill para $h = -0.7, -0.5$ y $\mu = 1/2$.

centros fijos. Partamos de las ecuaciones de movimiento adimensionales

$$x'' = -\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3} \quad (3.2.1)$$

$$y'' = -\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3}$$

donde

$$r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Calculemos $(x+1)y'' - yx''$ y $(x-1)y'' - yx''$

$$\begin{aligned} (x+1)y'' - yx'' &= (x+1) \left(-\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3} \right) + y \left(\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} + \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3} \right) \\ &= \frac{(1-\mu)(-(x+1)y + (x-1)y)}{r_2^3} = \frac{-2(1-\mu)y}{r_2^3} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} (x-1)y'' - yx'' &= (x-1) \left(-\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3} \right) + y \left(\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} + \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3} \right) \\ &= \frac{\mu y(-(x-1) + (x+1))}{r_1^3} = \frac{2\mu y}{r_1^3} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau} \left([(x+1)y' - yx'][(x-1)y' - yx'] \right) \\ &= [(x+1)y'' + y'x' - yx'' - x'y'][(x-1)y' - yx'] \\ &\quad + [(x-1)y'' + y'x' - yx'' - x'y'][(x+1)y' - yx'] \\ &= [(x+1)y'' - yx''][(x-1)y' - yx'] \\ &\quad + [(x-1)y'' - yx''][(x+1)y' - yx'] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Al sustituir (3.2.2) y (3.2.3) en (3.2.4) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} & \left([(x+1)y' - yx'][(x-1)y' - yx'] \right) \\ &= \frac{-2(1-\mu)y}{r_2^3} [(x-1)y' - yx'] + \frac{2\mu y}{r_1^3} [(x+1)y' - yx'] \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Consideremos la Figura 3.4 para ver que las expresiones el lado derecho de (3.2.5) que están en corchetes cuadrados, son los momentos angulares

$$(x-1)y' - yx' = r_2^2 \dot{\theta}_2 \quad (3.2.6)$$

$$(x+1)y' - yx' = r_1^2 \dot{\theta}_1. \quad (3.2.7)$$

Así al sustituir (3.2.6) y (3.2.7) en el lado derecho de (3.2.5) se transforma en

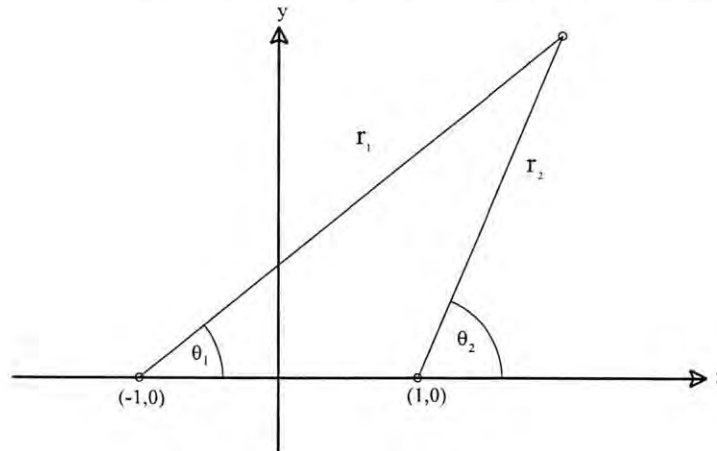


Figura 3.4: Momento angular

$$\frac{-2(1-\mu)y\dot{\theta}_2}{r_2} + \frac{2\mu y\dot{\theta}_1}{r_1} \quad (3.2.8)$$

incluso tomando en cuenta que

$$y = r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2$$

(3.2.8) se transforma a su vez en

$$-2(1-\mu) \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + 2\mu \sin \theta_1 \dot{\theta}_1, \quad (3.2.9)$$

la cual es la derivada exacta

$$-\frac{d}{d\tau} (2\mu \cos \theta_1 - 2(1-\mu) \cos \theta_2),$$

lo cual implica que

$$\frac{d}{d\tau} ((x+1)y' - yx')[(x-1)y' - yx'] = -\frac{d}{d\tau} (2\mu \cos \theta_1 - 2(1-\mu) \cos \theta_2)$$

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned} [(x+1)y' - yx'][(x-1)y' - yx'] &= -2\mu \cos \theta_1 + 2(1-\mu) \cos \theta_2 + D \\ &= -\frac{2\mu(x+1)}{r_1} + \frac{2(1-\mu)(x-1)}{r_2} + D. \end{aligned}$$

La constante $D = D(x, y, x', y')$ es conocida como *la integral de Euler*.

Capítulo 4

Regularización

El problema de los dos centros fijos tiene dos singularidades debidos a la colisión con alguno de los centros fijos $(x, y) = (\pm 1, 0)$, lo cual nos prohíbe estudiar las trayectorias que pasan cerca de colisión con estos focos, inclusive numéricamente. Es necesario eliminar tales singularidades.

El proceso de *regularización* consiste en hacer un cambio de coordenadas y posiblemente una reparametrización del tiempo, tal que las singularidades sean removidas y sustituidas por puntos regulares del campo vectorial en las nuevas coordenadas. Típicamente, se regulariza sobre un nivel de energía fijo h . Usaremos una transformación de coordenadas que involucra una transformación conforme del espacio de configuración introducida por Birkhoff en el problema restringido de tres cuerpos. Vamos a ver dos procedimientos para regularizar las ecuaciones: en el primero efectuamos la transformación explícita de las velocidades que llamaremos regularización Lagrangiana. En el segundo método aprovechamos la estructura canónica de las ecuaciones de Hamilton, completando la transformación de Birkhoff a una transformación canónica que incluye los momentos. Las ecuaciones de movimiento regularizadas se obtienen entonces del Hamiltoniano regularizado, es decir de eliminar en éste las singularidades.

4.1. Regularización Lagrangiana

Las ecuaciones (2.1.8, 2.1.9) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{\partial U}{\partial x} \\y'' &= \frac{\partial U}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

donde

$$U = \frac{\mu}{((x+1)^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{1-\mu}{((x-1)^2 + y^2)^{1/2}}.$$

En lo sucesivo utilizaremos la notación compleja para escribir de manera más compacta los cambios de coordenadas. Sea $z = x + iy$, y observemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} i + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} (-i) = i \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right),\end{aligned}$$

entonces las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como

$$z'' = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \quad (4.1.2)$$

donde

$$U(z, \bar{z}) = \frac{\mu}{|z+1|} + \frac{1-\mu}{|z-1|} \quad (4.1.3)$$

Busquemos una transformación compleja de la forma $z = g(w)$ de tal manera que removamos las singularidades, en la forma

$$z = g(w) = M \left(w + \frac{R}{w} \right),$$

donde M y R son constantes por determinar. En lo sucesivo, para evitar confusiones, denotaremos por $g^*(w)$ la derivada (compleja) de la función g respecto a su argumento y reservamos la notación $(')$ para denotar derivadas respecto de la variables temporal τ .

Entonces

$$g^*(w) = M \left(1 - \frac{R}{w^2} \right). \quad (4.1.4)$$

La transformación $g(w)$ deja fijo el infinito y manda el origen del plano w al infinito

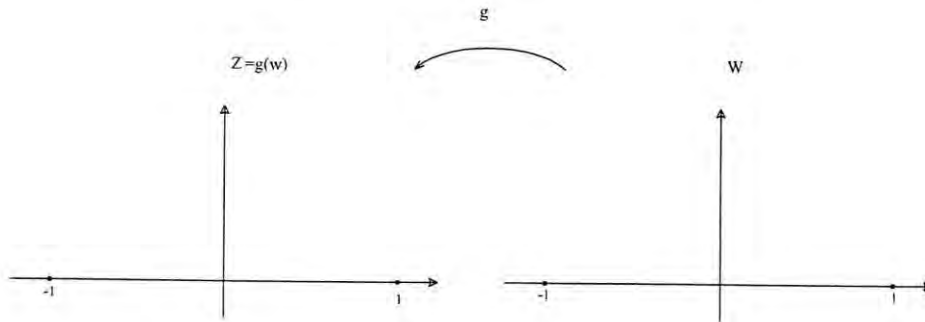


Figura 4.1: $g(w)$

del plano z , pues $g(0) = g(\infty) = \infty$. Buscamos que la transformación deje también fijos los centros, es decir

$$g(\pm 1) = \pm 1,$$

y como queremos regularizar las singularidades, pediremos que

$$g^*(\pm 1) = 0$$

(en caso contrario la transformación sería un difeomorfismo alrededor de las singularidades y no ganaríamos nada). Al fijar estas condiciones obtenemos

$$\begin{aligned} g(\pm 1) &= M(\pm 1 \pm R) = \pm 1 \\ g^*(\pm 1) &= M(1 - R) = 0, \end{aligned}$$

lo cual se cumple tomando $R = 1$ y $M = \frac{1}{2}$, de esta manera la función buscada es

$$g(w) = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right). \quad (4.1.5)$$

Enseguida describiremos brevemente la transformación anterior conocida como *transformación de Birkhoff*. La transformación manda el origen a ∞ y el ∞ al ∞ , también manda círculos con centro en el origen en elipses cofocales con focos en ± 1 . De hecho

$$z - 1 = \frac{(w - 1)^2}{2w}, \quad z + 1 = \frac{(w + 1)^2}{2w}, \quad (4.1.6)$$

de donde se observa que $w = \pm 1$ es mapeado en $z = \pm 1$. La derivada

$$g^*(w) = \frac{(w - 1)(w + 1)}{2w^2} \quad (4.1.7)$$

muestra que la transformación es conforme en todo el plano excepto en los puntos $w = \pm 1$, donde la derivada se anula. De (4.1.6) se obtiene fácilmente

$$|z - 1| + |z + 1| = \frac{|w|^2 + 1}{|w|}$$

de donde se sigue que la circunferencia $|w| = r$ es enviada en la elipse

$$|z - 1| + |z + 1| = r + \frac{1}{r}. \quad (4.1.8)$$

Análogamente las rectas $w = \lambda e^{i\theta}$ son enviadas en las hipérbolas

$$|z - 1| - |z + 1| = -\cos \theta.$$

La involución $w \rightarrow \frac{1}{w}$ corresponde a una inversión respecto del círculo unitario en el plano w , seguido de una reflexión; su expresión en coordenadas polares, $re^{i\theta} \rightarrow \frac{1}{r}e^{-i\theta}$, muestra que esta involución invierte un círculo de radio r en un círculo de radio $1/r$ invirtiendo su orientación. Pero esta involución deja invariante el lado derecho de (4.1.8), luego la transformación (4.2.2) puede entenderse así:

1. Es 2 a 1, excepto en los puntos fijos $w = \pm 1$, de hecho manda círculos de radio r y $1/r$ en la misma elipse.

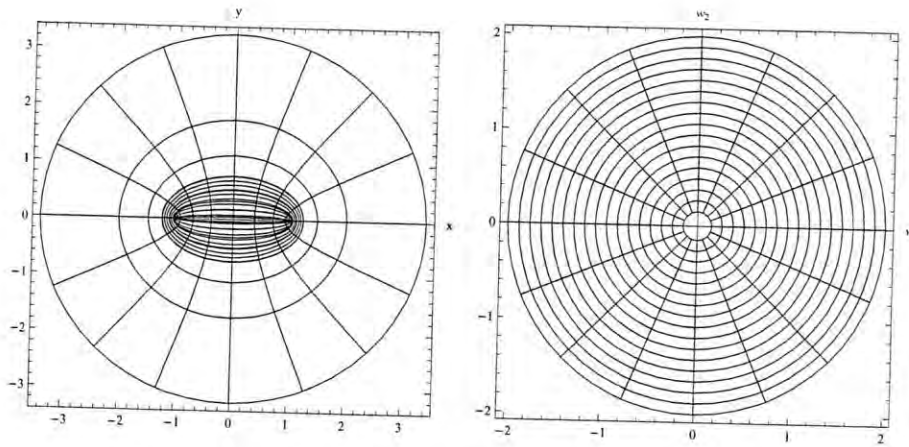


Figura 4.2: Geometría del mapeo $x + iy = g(w_1 + iw_2)$

2. En particular, la circunferencia unitaria en el plano w , es enviada en el segmento $[-1, 1]$ de manera 2 a 1: al recorrer dicho círculo entre 0 y π se recorre el segmento de 1 a -1 y al recorrerlo de π a 2π se recorre el segmento de -1 a 1 .

En la Figura 4.2 se muestra el efecto de la transformación del plano w (izquierda) sobre el plano $x-y$: círculos de radios recíprocos r y $1/r$ son enviados en la misma elipse, en tanto que el círculo unitario del plano w es enviado en el segmento $[-1, 1]$.

Ahora es necesario transformar la ecuación (4.1.2) que está en coordenadas (z, τ) a coordenadas (w, s) , con $z = g(w)$ y donde s será la nueva variable temporal con la propiedad $\frac{d\tau}{ds} = |g'(w)|^2$, que ayudará a eliminar las singularidades. Observemos que

$$\begin{aligned} z' &= \frac{dz}{d\tau} = g^*(w) \left(\frac{dw}{d\tau} \right) \\ z'' &= \frac{d^2z}{d\tau^2} = g^{**}(w) \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 + g^*(w) \frac{d^2w}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Ahora requerimos de las expresiones para $\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2$ y de $\frac{d^2w}{d\tau^2}$. Por una parte tenemos que

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \frac{dw}{ds} = \frac{1}{|g^*(w)|^2} \frac{dw}{ds} \quad (4.1.10)$$

y que

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{d\tau^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{|g^*(w)|^2} \frac{dw}{ds} \right) \frac{ds}{d\tau} \\ &= \left(\frac{1}{|g^*(w)|^2} \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{2}{|g^*(w)|^3} \left(\frac{d}{ds} |g^*(w)| \right) \frac{dw}{ds} \right) \frac{1}{|g^*(w)|^2} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

calculemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}|g^*(w)| &= \frac{d}{ds}\sqrt{g^*(w)\overline{g^*(w)}} \\ &= \frac{g^{**}(w)\frac{dw}{ds}\overline{g^*(w)} + g^*(w)\overline{g^{**}(w)}\frac{d\overline{w}}{ds}}{2\sqrt{g^*(w)\overline{g^*(w)}}} \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$= \frac{g^{**}(w)\overline{g^*(w)}\frac{dw}{ds} + g^*(w)\overline{g^{**}(w)}\frac{d\overline{w}}{ds}}{2|g^*(w)|}. \quad (4.1.13)$$

Así, abreviando el argumento, (4.1.11) queda:

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} = \frac{1}{|g^*|^2} \left(\frac{1}{|g^*|^2} \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{g^{**}\overline{g^*}}{|g^*|^4} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 - \frac{g^*\overline{g^{**}}}{|g^*|^4} \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 \right) \quad (4.1.14)$$

De (4.1.2) y (4.1.9) se obtiene

$$g^{**}(w) \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 + g^*(w) \frac{d^2w}{d\tau^2} = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}. \quad (4.1.15)$$

Sustituyendo (4.1.10) y (4.1.14) en (4.1.15):

$$\begin{aligned} &g^{**}(w) \left(\frac{1}{|g^*(w)|^2} \frac{dw}{ds} \right)^2 \\ &+ g^*(w) \left(\frac{1}{|g^*(w)|^4} \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{g^{**}(w)\overline{g^*(w)}}{|g^*(w)|^6} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 - \frac{g^*\overline{g^{**}(w)}}{|g^*(w)|^6} \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 \right) \\ &= 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Reagrupando

$$\begin{aligned} \frac{g^*(w)}{|g^*(w)|^4} \frac{d^2w}{ds^2} + \left(\frac{g^{**}(w)}{|g^*(w)|^4} - \frac{g^*(w)g^{**}(w)\overline{g^*(w)}}{|g^*(w)|^6} \right) \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \\ - \frac{g^{**}\overline{g^*(w)}}{|g^*(w)|^6} \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

o bien

$$\frac{g^*(w)}{|g^*(w)|^4} \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{g^*(w)^2\overline{g^{**}(w)}}{|g^*(w)|^6} \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}. \quad (4.1.16)$$

Transformemos ahora el lado derecho de la última ecuación para que quede en términos de w :

$$2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = 2 \left(\frac{\partial U}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \quad (4.1.17)$$

notemos que $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ pues w no depende de \bar{z} y que

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}}} = \frac{1}{\frac{\partial \bar{z}}{\partial w}} = \frac{1}{g^*(w)}.$$

Así (4.1.16) se expresa como

$$\begin{aligned} \frac{g^*}{|g^*|^4} \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{g^* \overline{g^{**}}}{|g^*|^6} \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 &= \frac{2}{g^*} \frac{\partial U}{\partial \overline{w}} \\ \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{g^* \overline{g^{**}}}{|g^*|^2} \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 &= \frac{2|g^*|^4}{|g^*|^2} \frac{\partial U}{\partial \overline{w}} \\ \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{g^* \overline{g^{**}}}{|g^*|^2} \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 &= 2|g^*|^2 \frac{\partial U}{\partial \overline{w}}. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Ahora consideremos un cierto nivel de energía h (cte.), donde

$$h = \frac{1}{2} \left| \frac{dz}{d\tau} \right|^2 - U,$$

para obtener una expresión de $\left| \frac{dw}{ds} \right|^2$ que será sustituida en (4.1.18).

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= g^*(w) \frac{dw}{d\tau} = g^*(w) \frac{dw}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \frac{g^*(w)}{|g^*(w)|^2} \frac{dw}{ds}, \\ h &= \frac{1}{2} \frac{1}{|g^*|^2} \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 - U \Rightarrow \left| \frac{dw}{ds} \right|^2 = 2|g^*(w)|^2(U + h) \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Así (4.1.18) se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{g^* \overline{g^{**}}}{|g^*|^2} 2|g^*|^2(U + h) &= 2|g^*|^2 \frac{\partial U}{\partial \overline{w}} \\ \frac{d^2w}{ds^2} &= 2 \left(g^* \overline{g^{**}}(U + h) + |g^*|^2 \frac{\partial U}{\partial \overline{w}} \right) \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Se puede verificar que el lado derecho de (4.1.20) es la derivada parcial respecto a \overline{w} de $2|g^*|^2(U + h)$, de tal manera que la ecuación (4.1.20) se reduce a:

$$\frac{d^2w}{ds^2} = 2 \frac{\partial}{\partial \overline{w}} (|g^*(w)|^2(U + h)) \quad (4.1.21)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial \overline{w}} (|g^*|^2(U + h)) &= 2 \frac{\partial}{\partial \overline{w}} (g^* \overline{g^*}(U + h)) \\ &= 2 \left(g^* \overline{g^{**}}(U + h) + g^* \overline{g^*} \frac{\partial U}{\partial \overline{w}} \right) \\ &= 2 \left(g^* \overline{g^{**}}(U + h) + |g^*|^2 \frac{\partial U}{\partial \overline{w}} \right) \end{aligned}$$

Teorema 1. Sea $z = g(w) = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$ con $U = \frac{\mu}{|z+1|} + \frac{1-\mu}{|z-1|}$ entonces $|g^*(w)|^2(U + h)$ es regular en $w = \pm 1$, i.e. tiene derivadas continuas en ± 1 , inclusive.

Demostración: Tenemos

$$U(w, \bar{w}) = \frac{2\mu|w|}{|w+1|^2} + \frac{2(1-\mu)|w|}{|1-w|^2}. \quad (4.1.22)$$

Verifiquemos esto último:

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$$

implica que

$$\begin{aligned} z \pm 1 &= \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \pm 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{w^2 \pm 2w + 1}{w} \right) \\ &= \frac{1}{2w} (w \pm 1)^2 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{1}{|z \pm 1|} = \frac{2|w|}{|w \pm 1|^2}$$

así sustituyendo $\frac{1}{|z+1|}$ y $\frac{1}{|z-1|}$ en la expresión para U en términos de z se obtiene (4.1.22).

Veamos que $|g^*(w)|^2(U+h)$ es regular en $w = \pm 1$.

$$g^*(w) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) = \frac{1}{2w^2} (w^2 - 1) = \frac{1}{2w^2} (w+1)(w-1)$$

de ahí que

$$|g^*(w)|^2 = \frac{|w+1|^2|w-1|^2}{4|w|^4}$$

al multiplicar por $U+h$ nos queda

$$\begin{aligned} |g^*(w)|^2(U+h) &= \frac{|w+1|^2|w-1|^2}{4|w|^4} \left(\frac{2\mu|w|}{|w+1|^2} + \frac{2(1-\mu)|w|}{|1-w|^2} + h \right) \\ &= \frac{\mu|w-1|^2}{2|w|^3} + \frac{1-\mu}{2} \frac{|w+1|^2}{|w|^3} + \frac{h|w+1|^2|w-1|^2}{4|w|^4} \\ &= \frac{1}{2|w|^3} (\mu|w-1|^2 + (1-\mu)|w+1|^2) + \frac{h|w+1|^2|w-1|^2}{4|w|^4}, \end{aligned}$$

la cual es una función continua en $w = \pm 1$. De hecho la derivada existe y es continua en $w = \pm 1$ como queríamos demostrar. \square

Obtengamos ahora la expresión explícita de (4.1.21) Para derivar respecto a \bar{w} requerimos expresar a (4.1.21) en términos de \bar{w} . Vamos por partes:

$$\begin{aligned} \mu|w-1|^2 + (1-\mu)|w+1|^2 &= \mu(w-1)(\bar{w}-1) + (1-\mu)(w+1)(\bar{w}+1) \\ &= \mu(w\bar{w} - w - \bar{w} + 1) + (1-\mu)(w\bar{w} + w + \bar{w} + 1) \\ &= (w + \bar{w})(1 - 2\mu) + w\bar{w} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |w+1|^2|w-1|^2 &= (w-1)(w+1)(\bar{w}-1)(\bar{w}+1) \\ &= (w^2-1)(\bar{w}^2-1) \end{aligned}$$

Calculemos el lado derecho de (4.1.21)

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial\bar{w}}(|g^*(w)|^2(U+h)) &= 2\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{(w+\bar{w})(1-2\mu)+w\bar{w}+1}{2(w\bar{w})^{3/2}} + \frac{h(w^2-1)(\bar{w}^2-1)}{4(w\bar{w})^2}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{(w+\bar{w})(1-2\mu)+w\bar{w}+1}{(w\bar{w})^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{h(w^2-1)(\bar{w}^2-1)}{2(w\bar{w})^2}\right) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{(w+\bar{w})(1-2\mu)+w\bar{w}+1}{(w\bar{w})^{3/2}}\right) &= \frac{1-\bar{w}+2\mu\bar{w}+w\bar{w}-3w+6\mu w-3}{2w\bar{w}^2(w\bar{w})^{1/2}} \\ &= \frac{1(2\mu-1)(3w+\bar{w})+w\bar{w}-3}{2w^{3/2}\bar{w}^{5/2}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\bar{w}}\left(\frac{h(w^2-1)(\bar{w}^2-1)}{2(w\bar{w})^2}\right) &= h\frac{2(w\bar{w})^2(w^2-1)2\bar{w}-(w^2-1)(\bar{w}^2-1)4w^2\bar{w}}{4(w\bar{w})^4} \\ &= h\frac{(w\bar{w})^2(w^2-1)\bar{w}-(w^2-1)(\bar{w}^2-1)w^2\bar{w}}{(w\bar{w})^4} \\ &= h\frac{(w^2-1)w^2\bar{w}(\bar{w}^2-\bar{w}^2+1)}{(w\bar{w})^4} \\ &= \frac{h(w^2+1)}{w^2\bar{w}^3} \end{aligned}$$

De esta manera la ecuación (4.1.21) nos queda

$$\frac{d^2w}{ds^2} = \frac{1(2\mu-1)(3w+\bar{w})+w\bar{w}-3}{2w^{3/2}\bar{w}^{5/2}} + \frac{h(w^2+1)}{w^2\bar{w}^3} \quad (4.1.23)$$

4.2. Regularización Hamiltoniana

Las regiones de Hill se definieron en la sección (3.1). Son regiones en el espacio de configuración donde el movimiento es permitido para un valor dado de la energía h . En esta sección vamos a determinar las regiones de Hill en el plano regularizado w . Graficaremos las regiones de Hill en las variables originales y en las variables regularizadas.

Partimos del Hamiltoniano en variables adimensionales

$$H = \frac{1}{2}|p_z|^2 - \frac{\mu}{|z+1|} - \frac{1-\mu}{|z-1|} \quad (4.2.1)$$

Deseamos efectuar la transformación puntual

$$z = g(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \quad (4.2.2)$$

El siguiente lema muestra cómo podemos completarla a una transformación simpléctica

Lema 1. *Sea $z = g(w)$ una transformación analítica. Entonces la transformación de coordenadas $(w, W) \rightarrow (z, p_z)$ es simpléctica, si $\operatorname{Re}(p_z \bar{d}z) = \operatorname{Re}(W \bar{d}w)$.*

Demostración: La condición equivale a $p_x dx + p_y dy = W_1 dw_1 + W_2 dw_2$ que implica

$$dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy = dW_1 \wedge dw_1 + dW_2 \wedge dw_2.$$

□

Lema 2. *La transformación de coordenadas $(w, W) \rightarrow (z, p_z)$, $p_z = \frac{W}{g^*(w)}$ con $z = g(w)$ analítica, es simpléctica.*

Demostración: De hecho se satisface $p_z \bar{d}z = W \bar{d}w$.

□

Lema 3. *(Truco de Poincaré) Sea f una función suave real y siempre positiva. Las soluciones del sistema Hamiltoniano asociado a H sobre el nivel de energía $H=h$ y las soluciones del sistema Hamiltoniano asociado a $\bar{H} = (H-h)f$ sobre el nivel de energía $\bar{H} = 0$ difieren en la parametrización de la variable independiente $\frac{dt}{d\tau} = f$.*

Demostración: Las ecuaciones de Hamilton para \bar{H} respecto al parámetro τ son

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = J\nabla(H-h)f = J(f\nabla H + (H-h)\nabla f),$$

pero sobre el nivel de energía $\bar{H} = 0$ es $H = h$, por lo que

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = fJ\nabla H \Rightarrow \frac{1}{f} \frac{d\zeta}{d\tau} = J\nabla H$$

si hacemos la reparametrización indicada entonces

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = J\nabla H,$$

que son las ecuaciones de Hamilton para H .

□

Ahora queremos aplicar la transformación de Birkhoff (4.1.6), completar a una transformación canónica y reparametrizar las soluciones con

$$\frac{dt}{d\tau} = |g^*(w)|^2$$

(la razón de usar esta reparametrización es precisamente eliminar las singularidades). Si bajo el cambio de coordenadas $z = g(w)$ y esta reparametrización, las singularidades $z = \pm 1$ son sustituidas por puntos regulares del campo Hamiltoniano asociado a \bar{H} , diremos que hemos regularizado las singularidades.

Aplicamos el Lema 2 a la transformación de Birkhoff, luego debemos hacer

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right), \quad p_z = \frac{2\bar{w}^2 W}{\bar{w}^2 - 1} \quad (4.2.3)$$

Usando (4.1.6) y (4.2.3) en (4.2.1) obtenemos el Hamiltoniano regularizado

$$\overline{H} = (H - h)|g^*(w)|^2 \quad (4.2.4)$$

Un desarrollo muestra que

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \left(\frac{2|w|^4|W|^2}{|w-1|^2|w|^2} - \frac{2\mu|w|}{|w-1|^2} - \frac{2(1-\mu)|w|}{|w+1|^2} - h \right) \frac{|w+1|^2|w-1|^2}{4|w|^4} \\ &= \frac{|W|^2}{2} - \frac{\mu|w+1|^2}{2|w|^3} - \frac{(1-\mu)|w-1|^2}{2|w|^3} - \frac{h|w+1|^2|w-1|^2}{4|w|^4} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

donde indicamos que el nivel de interés es $\overline{H} = 0$.

4.3. Regiones de Hill regularizadas

Como $|W|^2 \geq 0$, a partir de la ecuación (4.2.5), se sigue las regiones permitidas en el plano w son

$$\frac{\mu|w+1|^2}{2|w|^3} + \frac{(1-\mu)|w-1|^2}{2|w|^3} + \frac{h|w+1|^2|w-1|^2}{4|w|^4} \geq 0 \quad (4.3.1)$$

que definen las *regiones de Hill regularizadas*.

Observación 1. De (4.2.4) se sigue que para $w = -1$, se tiene $|W|^2 = \mu$ y para $w = 1$, se tiene $|W|^2 = 1 - \mu$ por lo cual hemos sustituido cada singularidad $z = \pm 1$ por un círculo, topológicamente S^1 .

La frontera de la región de Hill (4.3.1) corresponde a la igualdad y se puede escribir como

$$2|w|(\mu|w+1|^2 + (1-\mu)|w-1|^2) + h|w+1|^2|w-1|^2 = 0 \quad (4.3.2)$$

o bien como una curva de nivel

$$2|w| \left(\frac{\mu}{|w-1|^2} + \frac{1-\mu}{|w+1|^2} \right) = -h \quad (4.3.3)$$

Las expresiones (4.3.2) y (4.3.3) son equivalentes ya ninguno de los puntos $w = \pm 1$ la satisface.

En la Figura se muestran algunas regiones de Hill, en coordenadas originales y en coordenadas regularizadas.

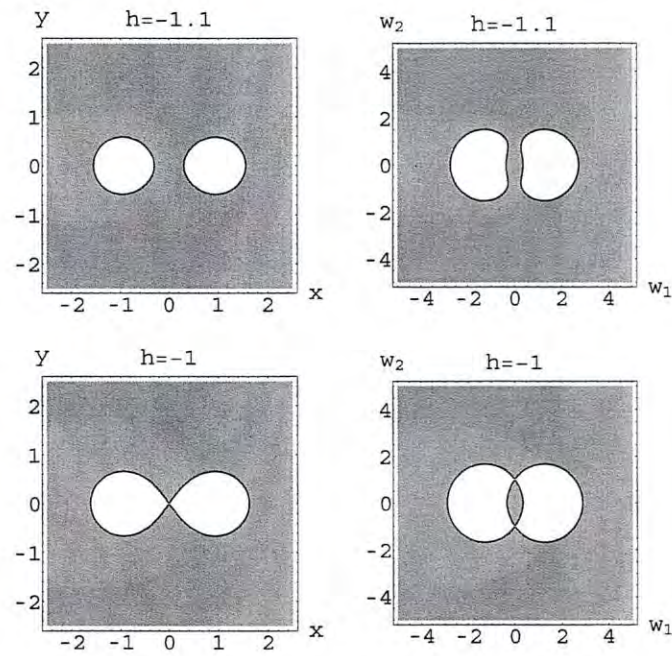


Figura 4.3: Regiones de Hill regularizada (derecha) y las correspondientes regiones de Hill en las variables originales (izquierda).

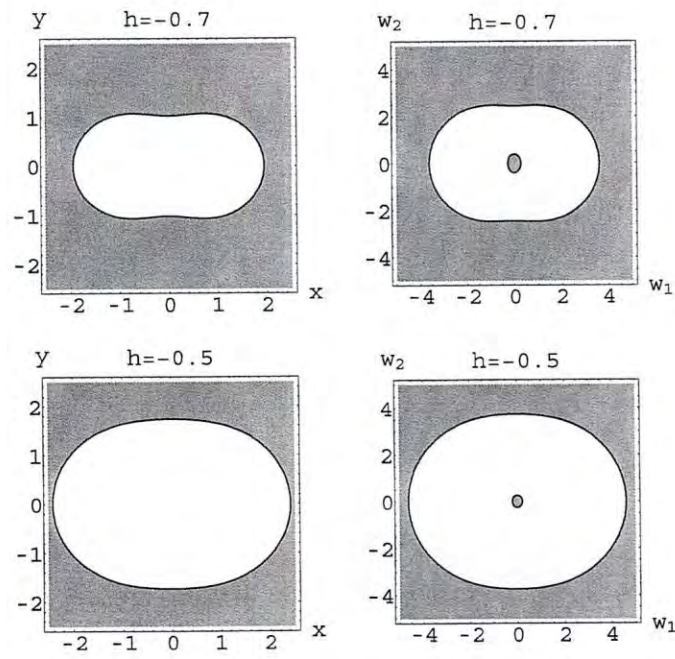


Figura 4.4: Regiones de Hill regularizada (derecha) y las correspondientes regiones de Hill en las variables originales (izquierda).

Capítulo 5

Teorema de Hamilton Jacobi

La idea de *función principal* de Hamilton está sugerida por una técnica que es importante en óptica geométrica. Esta es una función de la cual se puede derivar la dinámica posible del sistema. Explícitamente la función principal S es la integral de acción

$$S = \int_{t_0}^{t_f} L dt \quad (5.0.1)$$

tomada a lo largo de una solución de las ecuaciones de Lagrange, es decir, un camino en el q -espacio satisfaciendo la ecuación de movimiento. Al menos localmente es posible obtener una expresión en la que se obtiene a S como función de las posiciones iniciales, finales y los tiempos de salida y arribo.

$$S = S(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}; q_{1f}, q_{2f}, \dots, q_{nf}; t_0, t_f) \quad (5.0.2)$$

para ello es necesario que $q_{1f}, q_{2f}, \dots, q_{nf}$ pertenezca un *campo de extremales* (véase por ejemplo Arnold, Métodos Matemáticos de la Mecánica). Nosotros, sin embargo no usaremos esta expresión.

5.1. El teorema de Hamilton–Jacobi

Una *integral completa* para la ecuación diferencial parcial de Hamilton

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q; \frac{\partial S}{\partial q}; t\right) = 0 \quad (5.1.1)$$

es una función S de clase C_2 conteniendo n constantes arbitrarias independientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tales que el determinante

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial \alpha_s} \right\| \neq 0 \quad (5.1.2)$$

en cierto dominio del plano q - α .

De esta manera la función principal se expresa en términos de q 's y t y los n parámetros α .

El recíproco es precisamente el corazón del Teorema de Hamilton–Jacobi.

Teorema 2. Si $S(q_1, q_2, \dots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; t)$ es una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \alpha, t) = 0 \quad (5.1.3)$$

entonces las soluciones de las ecuaciones de Hamilton vienen dadas por las integrales de las ecuaciones Hamilton

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r}(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) = -\beta_r, \quad (5.1.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_r}(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) = p_r, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (5.1.5)$$

donde las β 's son n constantes arbitrarias.

Demostración: Las ecuaciones (5.1.4), (5.1.5) determinan las q 's y las p 's como funciones de t y los vectores de parámetros arbitrarios α, β . En efecto, por el teorema de la función implícita, la condición (5.1.2) permite expresar a partir de (5.1.4) a $q_r = q_r(\alpha, \beta, t)$ y al sustituir en (5.1.5) se obtiene

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}(q(\alpha, \beta, t), \alpha, t)$$

es decir

$$q_r = q_r(\alpha; \beta; t), \quad (5.1.6)$$

$$p_r = p_r(\alpha; \beta; t), \quad (5.1.7)$$

Tenemos que mostrar que las funciones así obtenidas satisfacen las ecuaciones de Hamilton para valores arbitrarios de α 's y β 's al menos en algún dominio de (α, β) . Ahora S satisface (5.1.1) para todos los valores de $q; \alpha; t$ en el dominio apropiado, así que sustituyendo (5.1.6), (5.1.7) y derivando parcialmente respecto a α_1 , tenemos

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial t} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} \left(q; \frac{\partial S}{\partial q}; t \right) = 0 \quad (5.1.8)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial t} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} (q; p; t) = 0 \quad (5.1.9)$$

como función de $(\alpha; \beta; t)$.

De la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\beta_1 \quad (5.1.10)$$

si sustituimos $q_r = q_r(\alpha; \beta; t)$, $p_r = p_r(\alpha; \beta; t)$ de (5.1.6), (5.1.7) y derivamos parcialmente respecto a t , tenemos

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_1} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial \alpha_1} \frac{\partial q_r}{\partial t} = 0, \quad (5.1.11)$$

Como S es de clase C^2 las derivadas mixtas pueden intercambiarse a voluntad; así de (5.1.8) y (5.1.11) tenemos

$$\sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial \alpha_1} \left\{ \frac{\partial q_r}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial p_r}(q; p; t) \right\} = 0. \quad (5.1.12)$$

y dado que el determinante (5.1.2) es no nulo, entonces

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1.13)$$

que es la primera de las ecuaciones de Hamilton.

En seguida sustituimos de nuevo la integral completa en (5.1.1) y derivamos parcialmente con respecto a q_1 ,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_1}(q; p; t) + \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r}(q; p; t) = 0. \quad (5.1.14)$$

como función de $(\alpha; \beta; t)$. Ahora en la ecuación

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} \quad (5.1.15)$$

donde hemos sustituido q 's sus valores en términos de α 's, β 's y t ; así derivando parcialmente respecto a t , tenemos

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_1} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial q_1} \frac{\partial q_r}{\partial t}. \quad (5.1.16)$$

Ahora

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_1}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_r} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_r \partial q_1}, \quad (5.1.17)$$

y por lo tanto, en virtud de (5.1.14 y 5.1.13), (5.1.16) es equivalente a

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -H_{q_1}(q; p; t). \quad (5.1.18)$$

El mismo método establece las n ecuaciones similares

$$\frac{\partial p_r}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}(q; p; t), \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1.19)$$

Las ecuaciones (5.1.13) y (5.1.19) prueban que las funciones q_r y p_r satisfacen las ecuaciones de Hamilton.

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{\partial p_r}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.20)$$

para valores arbitrarios de α 's y β 's y el teorema queda probado. \square

Observación 2. Las ecuaciones (5.1.3), (5.1.4) y (5.1.5) se llaman comunmente las *integrales de las ecuaciones de Hamilton*, por razón de que al expresar a partir de (5.1.4), (5.1.5) las q 's yp 's como funciones de los parámetros arbitrarios α y β se obtienen soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Es importante considerar los casos donde L y H no contiene a t explícitamente, esto es

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (5.1.21)$$

en este caso existe la integral de energía

$$H = h. \quad (5.1.22)$$

Para determinar la integral completa escribimos

$$S = -ht + K, \quad (5.1.23)$$

donde $h = \alpha_1$ es una de las constantes arbitrarias y K es una función de (q_1, q_2, \dots, q_n) involucrando $h = \alpha_1$ y $n - 1$ constantes arbitrarias adicionales $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. En este caso la ecuación diferencial parcial de Hamilton queda

$$H\left(q; \frac{\partial K}{\partial q}\right) = h, \quad (5.1.24)$$

que se conoce como la *ecuación modificada de Hamilton-Jacobi*. Ahora necesitamos una integral completa para esta ecuación, una que involucre $n - 1$ nuevas constantes arbitrarias, ninguna de las cuales es meramente aditiva. Las integrales de las ecuaciones de movimiento son

$$t - t_0 = \frac{\partial K}{\partial h}, \quad (5.1.25)$$

$$-\beta_r = \frac{\partial K}{\partial \alpha_r}, \quad r = 2, 3, \dots, n, \quad (5.1.26)$$

$$p_r = \frac{\partial K}{\partial q_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.27)$$

donde hemos escrito t_0 en lugar de β_1 , es decir el origen del tiempo t_0 es una de las constantes arbitrarias β_1 .

Las ecuaciones (5.1.26) determinan la trayectoria en el espacio de configuración q , sin referencia a la velocidad con las que se recorre la trayectoria; la ecuación (5.1.25) determina la relación entre la posición en la trayectoria y el tiempo, a partir de la cual se obtienen las segundas derivadas de la posición respecto del tiempo; estas son precisamente las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange Finalmente, las ecuaciones (5.1.27), (5.1.25) determinan los momentos como función del tiempo que completan la solución al problema de Hamilton.

5.2. Un ejemplo sencillo

Consideremos el caso del oscilador armónico en una dimensión (véase por ejemplo [8] [p. 434-436]):

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2)$$

Como el sistema es autónomo podemos considerar la ecuación modificada de Hamilton–Jacobi (5.1.24)

$$\frac{2}{2m} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2q^2 \right] = \alpha$$

donde podemos identificar la constante de integración α como la energía. Esta ecuación se puede integrar de inmediato,

$$K = \sqrt{2m\alpha} \int dq \sqrt{1 - \frac{m\omega^2q^2}{2\alpha}} \quad (5.2.1)$$

de modo que

$$S = \sqrt{2m\alpha} \int dq \sqrt{1 - \frac{m\omega^2q^2}{2\alpha}} - \alpha t. \quad (5.2.2)$$

Aunque la integral (5.2.1) no presenta dificultad alguna, no es necesario calcularla sino su derivada parcial. La ecuación para la trayectoria se deduce de la integral

$$\beta' = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha} \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2q^2}{2\alpha}}}}$$

(donde hemos denotado la constante de integración por β' para reservar la notación β para más adelante), que después de integrar nos da

$$t + \beta' = \frac{1}{\omega} \arcsen \left(q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}} \right).$$

Esta última ecuación puede invertirse para dar a q en función de t :

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta) \quad (5.2.3)$$

donde $\beta = \beta'\omega$, que es la forma familiar de la solución para el oscilador armónico. La integral para el momento se obtiene vía

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q^2} \quad (5.2.4)$$

que al sustituir a q como función de t nos da

$$p = \sqrt{2m\alpha} \cos(\omega t + \beta).$$

No es difícil encontrar una relación entre las condiciones iniciales q_0, p_0 en $t = 0$ con las constantes α y β : Aplicando la relación de energía en $t = 0$ obtenemos

$$2m\alpha = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2.$$

Finalmente la constante de fase β se relaciona con q_0, p_0 por

$$\tan \beta = m\omega \frac{q_0}{p_0}.$$

Vemos entonces que las coordenadas canónicas β, α son en realidad la fase de la oscilación y la energía.

Podemos comprobar la relación (5.0.2) *a posteriori*. En efecto si sustituimos (5.2.3) en la expresión (7.2.3) obtenemos

$$S = 2\alpha \int \cos^2(\omega t + \beta) dt - \alpha t = 2\alpha \int (\cos^2(\omega t + \beta) - \frac{1}{2}) dt. \quad (5.2.5)$$

Por otro lado el Lagrangiano evaluado a lo largo de la solución dada por (5.2.3) y (5.2.4) y recordando que $p = m\dot{q}$, es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2m}(p^2 - m^2\omega^2 q^2) = \alpha(\cos^2(\omega t + \beta) - \sin^2(\omega t + \beta)) \\ &= 2\alpha(\cos^2(\omega t + \beta) - \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Comparando (5.2.5) con (5.2.6) vemos que se verifica (5.0.1)

Capítulo 6

Sistemas separables con dos grados de libertad

En algunos casos sucede que podemos determinar K como una suma de funciones de coordenadas separadas, cada función involucra precisamente una de las q_r (por supuesto las α 's o algunas de ellas). Si tal integral completa de (5.1.24) existe el sistema se dice *separable* en las coordenadas elegidas. La separabilidad es una propiedad ligada al sistema y a las coordenadas elegidas para describir el problema.

6.1. Condiciones necesarias para la separabilidad

Vamos a considerar únicamente sistemas de coordenadas generalizadas ortogonales, es decir la energía cinética T contiene sólo términos cuadrados, no términos mixtos. Denotamos las coordenadas Lagrangianas por x, y y la función Hamiltoniana por

$$H = \frac{1}{2} (ap_x^2 + bp_y^2) + V, \quad (6.1.1)$$

donde a, b y V están dadas por funciones de (x, y) ; también supondremos que estas funciones son de clase C^1 en el dominio apropiado (x, y) . Primero establecemos las condiciones que son *necesarias* para la separabilidad. La ecuación diferencial parcial modificada de Hamilton-Jacobi para el sistema (6.1.1) es

$$\frac{1}{2} \left\{ a \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)^2 \right\} + V = h. \quad (6.1.2)$$

Si ésta admite una integral completa de la forma

$$K(x, y, \alpha, h) = F(x, h, \alpha) + G(y, h, \alpha), \quad (6.1.3)$$

donde α es una segunda constante arbitraria, entonces

$$\frac{1}{2} \left\{ a \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \right\} = h - V, \quad (6.1.4)$$

para (x, y, h, α) en un dominio apropiado. Por el momento escribimos (6.1.4) en una forma más simple

$$a\theta + b\varphi = h - V, \quad (6.1.5)$$

donde $\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2$ involucra sólo a x, h, α y $\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2$ involucra sólo a y, h, α . De (6.1.5) tenemos que

$$a\theta_h + b\varphi_h = 1, \quad (6.1.6)$$

$$a\theta_\alpha + b\varphi_\alpha = 0, \quad (6.1.7)$$

donde el sufijo $_h$ denota diferenciación respecto a h y el sufijo $_\alpha$ denota diferenciación respecto a α . Notemos que a y b son positivos para todos los valores de (x, y) dado que son coeficientes en la fórmula para la energía cinética. Vemos de (6.1.7) que ni θ_α ni φ_α pueden hacerse cero idénticamente, y de (6.1.6) que ni θ_h ni φ_h tampoco pueden hacerse cero idénticamente. Además

$$\theta_h\varphi_\alpha - \theta_\alpha\varphi_h = \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(h, \alpha)} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial}{\partial(h, \alpha)} \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right)$$

tampoco es idénticamente nulo dado que $F + G$ es una integral completa de la ecuación (6.1.2). Obtenemos la solución de las ecuaciones lineales (6.1.5, 6.1.6, 6.1.7) para a, b y V utilizando regla de Cramer.

$$V = \frac{\frac{h\theta_h - \theta}{\theta_\alpha} - \frac{h\varphi_h - \varphi}{\varphi_\alpha}}{\frac{\theta_h}{\theta_\alpha} - \frac{\varphi_h}{\varphi_\alpha}} = \frac{p + q}{X + Y}, \quad (6.1.8)$$

donde p, X son funciones sólo de x, q, Y son funciones solo de y . Estos valores deben ser independientes de valores fijos de h y α que hemos elegido, y esto sugiere que h y α aparecen linealmente en θ y φ , veremos que esta conjetura es correcta. Así

$$a = \frac{\frac{1}{\theta_\alpha}}{\frac{\theta_h}{\theta_\alpha} - \frac{\varphi_h}{\varphi_\alpha}} = \frac{P}{X + Y}, \quad (6.1.9)$$

$$b = \frac{-\frac{1}{\varphi_\alpha}}{\frac{\theta_h}{\theta_\alpha} - \frac{\varphi_h}{\varphi_\alpha}} = \frac{Q}{X + Y}, \quad (6.1.10)$$

donde $P = P(x), Q = Q(y)$; y P y Q también deben ser independientes de los valores asignados de h y de α . Así finalmente *si el sistema es separable, H debe tener la forma*

$$H = \frac{1}{2(X + Y)} (Pp_x^2 + Qp_y^2) + \frac{p + q}{X + Y}, \quad (6.1.11)$$

donde X, P, p son funciones sólo de x , y Y, Q, q son funciones sólo de y .

6.2. Sistemas de Liouville

Veamos ahora que estas condiciones son suficientes, es decir, el sistema para el cual

$$T = \frac{1}{2}(X + Y) \left(\frac{\dot{x}^2}{P} + \frac{\dot{y}^2}{Q} \right) = \frac{1}{2(X + Y)} (Pp_x^2 + Qp_y^2) \quad (6.2.1)$$

$$V = \frac{p + q}{X + Y},$$

donde las funciones involucradas satisfacen las condiciones de separabilidad antes mencionadas, es separable. La ecuación diferencial parcial modificada para tal sistema es

$$\frac{1}{X+Y} \left\{ \frac{1}{2} P \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} Q \left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)^2 + p + q \right\} = h, \quad (6.2.2)$$

y podemos encontrar una integral completa para la forma requerida $F+G$ si hacemos

$$\frac{1}{2} P \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 = hX - p + \alpha \quad (6.2.3)$$

$$\frac{1}{2} Q \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 = hY - q - \alpha$$

Entonces obtenemos la integral completa requerida

$$F + G = K = \int \sqrt{\frac{2}{P}(hX - p + \alpha)} dx + \int \sqrt{\frac{2}{Q}(hY - q - \alpha)} dy \quad (6.2.4)$$

donde las integrales se interpretan en el sentido usual. Volviendo un poco atrás a la prueba de la necesidad, nos damos cuenta que se verifican las fórmulas

$$\theta = \frac{hX - p + \alpha}{P}, \quad \varphi = \frac{hY - q - \alpha}{Q}.$$

6.3. Estudio del movimiento

Las integrales de las ecuaciones de movimiento (5.1.25), (5.1.26) y (5.1.27) son

$$t - t_0 = \frac{\partial K}{\partial h} = \int \frac{X}{\sqrt{2P(hX - p + \alpha)}} dx + \int \frac{Y}{\sqrt{2Q(hY - q - \alpha)}} dy, \quad (6.3.1)$$

$$-\beta = \frac{\partial K}{\partial \alpha} = \int \frac{1}{\sqrt{2P(hX - p + \alpha)}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{2Q(hY - q - \alpha)}} dy, \quad (6.3.2)$$

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial x} = \sqrt{\frac{2}{P}(hX - p + \alpha)}, \quad (6.3.3)$$

$$p_y = \frac{\partial K}{\partial y} = \sqrt{\frac{2}{Q}(hY - q - \alpha)}. \quad (6.3.4)$$

Para la solución del problema de Lagrange, es decir el movimiento en el espacio de configuración (x, y) , sólo necesitamos las ecuaciones (6.3.1), (6.3.2), las cuales

podemos escribir de manera compacta, en la forma

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{dy}{\sqrt{S}} = \frac{dt}{X + Y}, \quad (6.3.5)$$

donde

$$R = R(x) = 2P(hX - p + \alpha)$$

y

$$S = S(y) = 2Q(hY - q - \alpha).$$

Capítulo 7

Separabilidad en coordenadas elípticas cofocales

En esta sección mostraremos que el Hamiltoniano de los dos centros fijos es separable de acuerdo a la definición de las secciones anteriores. Supondremos que la partícula en movimiento tiene masa m_0 y los puntos fijos tienen masa m_1 y m_2 , los cuales están situados en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ respectivamente. Se denota por r_1 y r_2 las distancias de m_0 a m_1 y m_2 , respectivamente como se indica en la Figura 7.1. Aunque desde un principio hemos usado variables adimensionales, en esta sección usaremos variables dimensionales con el fin de aclarar el papel que juegan los parámetros involucrados en el sistema de coordenadas.

Se usarán coordenadas elípticas cofocales (λ, μ) definidas como sigue¹: Sean

$$\lambda = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad \mu = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) \quad (7.0.1)$$

y note que las curvas $\lambda = cte.$ describen elipses cofocales, en tanto que $\mu = cte.$ representa hipérbolas cofocales.

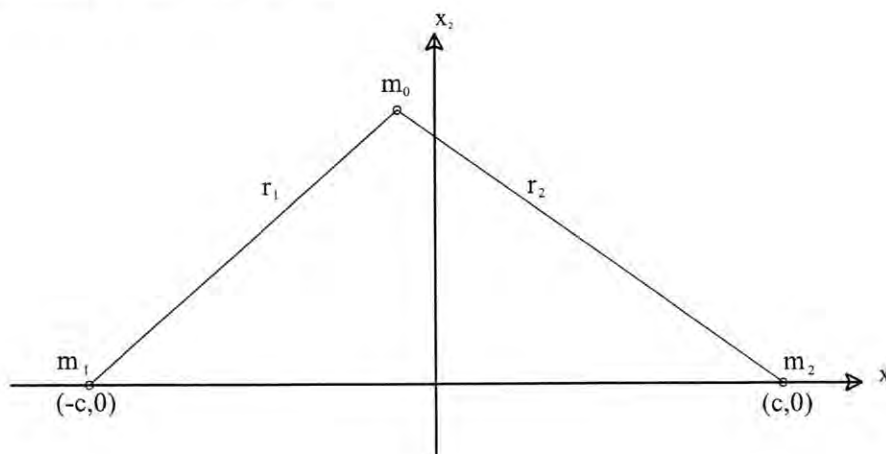


Figura 7.1: Problema de los dos centros fijos

¹No confundir la variable μ con el parámetro de masas usado anteriormente

Así la curva $\lambda = cte.$ es una elipse con focos en los puntos fijos y $\mu = cte.$ es una hipérbola con los mismos focos.

Nótese que la distancia entre los puntos fijos es $2c$ y que el mínimo valor de $r_1 + r_2$ se obtiene cuando la partícula de masa m_0 se encuentra en el segmento que une a los puntos fijos y su valor es $2c$, por lo que se cumple que

$$\lambda \geq c. \quad (7.0.2)$$

Por otra parte las hipérbolas cortan al segmento antes mencionado, así el máximo valor de $|r_1 - r_2|$ es $2c$, cuando alguna hipérbola pasa por uno de los puntos fijos, es por ello que se cumple que

$$-c \leq \mu \leq c. \quad (7.0.3)$$

Utilizando estas coordenadas, el eje vertical esta dado por $\mu = 0$, el segmento que une a los puntos fijos por $\lambda = c$, en el rayo $(-\infty, -c)$ por $\mu = c$ y en el rayo (c, ∞) por $\mu = -c$, como se muestra en la Figura 7.2 .

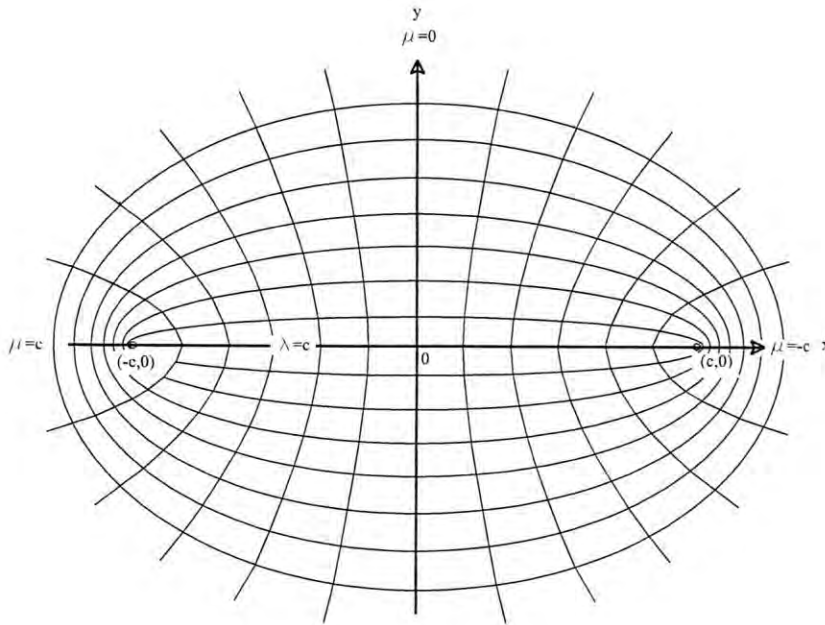


Figura 7.2: Coordenadas elípticas cofocales

7.1. Relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas elípticas (λ, μ)

En esta parte retomamos el uso de de las variables sin adimensionar, ya que es importante distinguir la abscisa de los focos o centros fijos $-c$ y c de los valores -1 y

1 que toman en las variables adimensionales. Al final, si se desea, se pueden aplicar las sustituciones requeridas para adimensionar el sistema.

De la Figura 7.1 se tiene que

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \quad (7.1.1)$$

$$r_2^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2. \quad (7.1.2)$$

Al calcular la semisuma de (7.1.1) y (7.1.2) se obtiene

$$\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) = x^2 + y^2 + c^2. \quad (7.1.3)$$

Por otra parte se tiene que

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 = \frac{1}{4}(r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) \quad (7.1.4)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4}(r_1 - r_2)^2 = \frac{1}{4}(r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2), \quad (7.1.5)$$

y al sumar las ecuaciones (7.1.4) y (7.1.5) se obtiene

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2). \quad (7.1.6)$$

Así de (7.1.3) y (7.1.6) se obtiene

$$\lambda^2 + \mu^2 = x^2 + y^2 + c^2 \quad (7.1.7)$$

Al calcular la resta de (7.1.1) y (7.1.2) se obtiene

$$r_2^2 - r_1^2 = (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) - (x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = 4xc$$

de ahí que

$$xc = \frac{1}{4}(r_1^2 - r_2^2). \quad (7.1.8)$$

Por otra parte al calcular el producto de λ por μ se obtiene

$$\lambda\mu = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\frac{1}{2}(r_1 - r_2) = \frac{1}{4}(r_1^2 - r_2^2),$$

por lo que

$$-\lambda\mu = \frac{1}{4}(r_2^2 - r_1^2). \quad (7.1.9)$$

Así de (7.1.8) y (7.1.9) se obtiene la primera ecuación que relaciona a x , λ y μ .

$$xc = -\lambda\mu. \quad (7.1.10)$$

Enseguida se utilizan (7.1.7) y (7.1.10), para obtener una ecuación que relacione a y con λ y μ .

A la ecuación (7.1.7) se le multiplica por c^2 y se sustituye xc de la ecuación (7.1.10).

$$c^2x^2 + c^2y^2 + c^2c^2 = c^2(\lambda^2 + \mu^2),$$

eso implica que

$$\lambda^2\mu^2 + c^2y^2 + c^2c^2 = c^2(\lambda^2 + \mu^2).$$

Al despejar c^2y^2 se obtiene

$$\begin{aligned} c^2y^2 &= \lambda^2c^2 - \lambda^2\mu^2 - c^2c^2 + c^2\mu^2 \\ &= \lambda^2(c^2 - \mu^2) - c^2(c^2 - \mu^2) \\ &= (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2), \end{aligned}$$

así se obtiene la ecuación que relaciona a y con λ y μ

$$c^2y^2 = (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2). \quad (7.1.11)$$

Ahora, la energía cinética en coordenadas cartesianas es:

$$T = \frac{1}{2}m_0(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (7.1.12)$$

es por ello que se necesitan ecuaciones que relacionen las derivadas de las variables de ambos sistemas coordenados respecto al tiempo. Al derivar (7.1.10) respecto a t se obtiene

$$\dot{x} = -\frac{1}{c}(\lambda\dot{\mu} + \mu\dot{\lambda}), \quad (7.1.13)$$

al derivar (7.1.11) respecto a t se obtiene

$$2c^2y\dot{y} = (\lambda^2 - c^2)(-2\mu\dot{\mu}) + (c^2 - \mu^2)2\lambda\dot{\lambda}, \quad (7.1.14)$$

al dividir (7.1.14) por $2c^2y^2$ usando (7.1.11) se obtiene

$$\frac{2c^2y\dot{y}}{2c^2y^2} = \frac{(\lambda^2 - c^2)(-2\mu\dot{\mu})}{2(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} + \frac{(c^2 - \mu^2)2\lambda\dot{\lambda}}{2(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)},$$

eso implica que

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\lambda\dot{\lambda}}{\lambda^2 - c^2} - \frac{\mu\dot{\mu}}{c^2 - \mu^2},$$

de allí que

$$\dot{y}^2 = y^2 \left(\frac{\lambda\dot{\lambda}}{\lambda^2 - c^2} - \frac{\mu\dot{\mu}}{c^2 - \mu^2} \right)^2. \quad (7.1.15)$$

Así se obtiene, al sustituir y^2 en (7.1.15) usando (7.1.11), la ecuación que relaciona a \dot{y} con las coordenadas (λ, μ)

$$\dot{y}^2 = \frac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2} \left(\frac{\lambda\dot{\lambda}}{\lambda^2 - c^2} - \frac{\mu\dot{\mu}}{c^2 - \mu^2} \right)^2. \quad (7.1.16)$$

Enseguida se utilizan los resultados anteriores para expresar a la energía cinética en coordenadas elípticas. La expresión para T usando (7.1.13) y (7.1.16) es

$$T = \frac{m_0}{2}(\lambda^2 - \mu^2) \left(\frac{\dot{\mu}^2}{c^2 - \mu^2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - c^2} \right) \quad (7.1.17)$$

De aquí en adelante se considerará que $m_0 = 1$.

Recordando que los momento conjugados se obtienen mediante

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = \dot{\lambda} \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} \\ P_\mu &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\mu}} = \dot{\mu} \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\dot{\lambda}^2 = P_\lambda^2 \left(\frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2} \right)^2, \quad (7.1.18)$$

$$\dot{\mu}^2 = P_\mu^2 \left(\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2} \right)^2. \quad (7.1.19)$$

Al sustituir (7.1.18) y (7.1.19) en (7.1.17), se obtiene la expresión para la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2(\lambda^2 - \mu^2)} ((\lambda^2 - c^2)P_\lambda^2 + (c^2 - \mu^2)P_\mu^2). \quad (7.1.20)$$

Por otra parte la energía potencial es

$$V = -\gamma m_0 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right),$$

donde γ es la constante de gravitación, una constante positiva. De (7.0.1) se observa que $\lambda + \mu = r_1$ y que $\lambda - \mu = r_2$ por lo que

$$\begin{aligned} V &= -\gamma \left(\frac{m_1}{\lambda + \mu} + \frac{m_2}{\lambda - \mu} \right) \\ &= -\gamma \left(\frac{m_1(\lambda - \mu) + m_2(\lambda + \mu)}{\lambda^2 - \mu^2} \right) \\ &= -\frac{\gamma(m_1 + m_2)\lambda - \gamma(m_1 - m_2)\mu}{\lambda^2 - \mu^2}, \end{aligned}$$

Definiendo,

$$k_1 = \gamma(m_1 + m_2) \quad (7.1.21)$$

$$k_2 = \gamma(m_1 - m_2), \quad (7.1.22)$$

se obtiene una expresión reducida para la energía potencial V en términos de λ y μ .

$$V = -\frac{k_1\lambda - k_2\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \quad (7.1.23)$$

En lo sucesivo se supondrá que $m_1 > m_2 > 0$, luego

$$k_1 > k_2 > 0. \quad (7.1.24)$$

con $k_2 = 0$ en el caso límite $m_1 = m_2$.

Así de (7.1.20) y (7.1.23) se obtiene que la expresión para el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2(\lambda^2 - \mu^2)} ((\lambda^2 - c^2)P_\lambda^2 + (c^2 - \mu^2)P_\mu^2) - \frac{k_1\lambda - k_2\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \quad (7.1.25)$$

La cual es la suma de las energías cinética y potencial, y resulta ser una ecuación separable por tener la forma 6.2.2, es decir es un sistema de Liouville.

7.2. Restricción del movimiento

Las integrales (6.3.5) para la trayectoria se pueden escribir en la forma

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R}} = \frac{d\mu}{\sqrt{S}} = \frac{dt}{\lambda^2 - \mu^2}, \quad (7.2.1)$$

donde

$$R = 2(\lambda^2 - c^2)(h\lambda^2 + k_1\lambda + \alpha) \quad (7.2.2)$$

$$S = -2(c^2 - \mu^2)(h\mu^2 + k_2\mu + \alpha). \quad (7.2.3)$$

Las integrales (7.2.1) son integrales elípticas, para resolverlas es necesario separarlas en casos, donde se consideran las relaciones entre las raíces de R y las raíces de S . Haciendo

$$L = h\lambda^2 + k_1\lambda + \alpha \quad (7.2.4)$$

$$M = h\mu^2 + k_2\mu + \alpha, \quad (7.2.5)$$

se observa que, para que el movimiento sea posible, se debe cumplir que

$$L \geq 0 \quad \text{y} \quad M \leq 0, \quad (7.2.6)$$

pues R y S deben ser no negativos, ya que los términos $(\lambda^2 - c^2)$ y $(c^2 - \mu^2)$ son no negativos, por las cotas (7.0.2) y (7.0.3).

A los ceros L se les denota por λ_1, λ_2 y a los ceros de M por μ_1, μ_2 , enseguida se demuestra que λ_1, λ_2 son reales.

Lema 4. Las raíces λ_1, λ_2 de $L = h\lambda^2 + k_1\lambda + \alpha$ son reales.

Demostración: Supóngase que L tiene raíces complejas, eso implica que el discriminante

$$k_1^2 - 4h\alpha < 0. \quad (7.2.7)$$

Por otra parte (7.1.24) implica que $k_2^2 - 4h < k_1^2 - 4h$, que junto con (7.2.7) implica que $k_2^2 - 4h < 0$, lo cual significa que M tendría soluciones complejas y dado que h aparece en ambas parábolas acompañando a los términos cuadráticos, se violaría la condición (7.2.6). \square

El hecho que λ_1 y λ_2 son reales, nos permite realizar la clasificación de las trayectorias del problema en el plano (λ_1, λ_2) en lugar de usar el plano (h, α) .

La condición (7.2.6) implica que si $h < 0$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ y si μ_1 y μ_2 son reales, $\mu \in (\mu_1, \mu_2)^c$ ver Figura 7.3, mientras que si $h > 0$, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)^c$ y $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$; además en el caso $h > 0$, μ_1, μ_2 no pueden ser complejos, pues si lo fueran entonces $M > 0$ lo cual contradice la condición $M \leq 0$. Ver Figura 7.4.

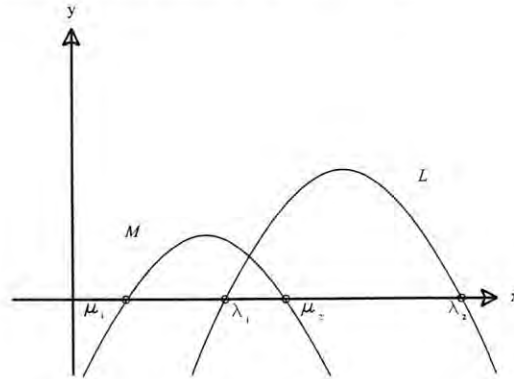


Figura 7.3: Los polinomios $L = h\lambda^2 + k_1\lambda + \alpha$ y $M = h\mu^2 + k_2\mu + \alpha$ para $h < 0$, los valores permitidos son $L \geq 0$ y $M \leq 0$.

Ahora se encuentran curvas en el plano (λ_1, λ_2) relacionadas con las raíces de R y S , dado que en ellas y alrededor de ellas se dan comportamientos diferentes en las soluciones del problema. A dichas curvas se les llaman *curvas críticas*.

Definición 1. Una curva en el plano λ_1 - λ_2 se llama crítica si las raíces de alguno de los polinomios $L(\lambda)$ o $M(\mu)$ coinciden o bien alguna de las raíces coinciden con los valores extremos $\lambda \geq c$, $-c \leq \mu \leq c$.

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Lema 5. Sea $\theta > 0$ definida como $k_1/k_2 = \cosh \theta$. Las curvas críticas $\mu_1 = \mu_2$ son el par de rectas en el plano (λ_1, λ_2) definidas por $\lambda_1 = e^{\pm\theta}\lambda_2$.

Demostración: De (7.2.4) se observa que λ_1 y λ_2 son raíces de

$$\lambda^2 + \frac{k_1}{h}\lambda + \frac{\alpha}{h} = 0,$$

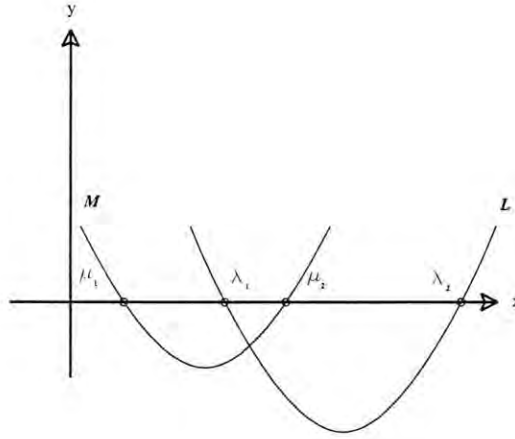


Figura 7.4: Los polinomios $L = h\lambda^2 + k_1\lambda + \alpha$ y $M = h\mu^2 + k_2\mu + \alpha$ para $h > 0$, los valores permitidos son $L \geq 0$ y $M \leq 0$.

en general se cumple que

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Por lo tanto se cumple que

$$\frac{k_1}{h} = -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (7.2.8)$$

$$\frac{\alpha}{h} = \lambda_1\lambda_2 \quad (7.2.9)$$

Por otra parte nótese de (7.2.5) que μ_1 y μ_2 son raíces de

$$\mu^2 + \frac{k_2}{h}\mu + \frac{\alpha}{h} = 0 \quad (7.2.10)$$

Sustituyendo $\frac{1}{h}$ de (7.2.8) y $\frac{\alpha}{h}$ de (7.2.9) en (7.2.10) se obtiene que μ_1 y μ_2 son raíces de

$$\mu^2 - \frac{k_2}{k_1}(\lambda_1 + \lambda_2)\mu + \lambda_1\lambda_2 = 0. \quad (7.2.11)$$

Si $\mu_1 = \mu_2$, el discriminante de la ecuación (7.2.11) es cero, lo que implica que

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 4\lambda_1\lambda_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2. \quad (7.2.12)$$

De la relación (7.1.24) se sigue que $\frac{k_1}{k_2} \geq 1$, eso nos permite escribir

$$\frac{k_1}{k_2} = \cosh \theta, \quad (7.2.13)$$

con $\theta \geq 0$. El caso límite $k_2 = 0$ (es decir de masas iguales $m_1 = m_2$) se obtiene cuando $\theta = \infty$ y $\theta = 0$ corresponde a tomar $m_2 = 0$ que es el problema de Kepler.

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}\tanh^2(\theta/2) &= \frac{\sinh^2(\theta/2)}{\cosh^2(\theta/2)} \\ &= \frac{\cosh \theta - 1}{\cosh \theta + 1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2},\end{aligned}$$

usando (7.1.21) y (7.1.22) se obtiene que

$$\tanh^2(\theta/2) = \frac{m_2}{m_1}. \quad (7.2.14)$$

Si además se divide a (7.2.12) por λ_2^2 , se transforma en

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 + 2 \left(1 - 2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2\right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 = 0 \quad (7.2.15)$$

La cual es una ecuación de segundo grado en λ_1/λ_2 , para resolverla se simplifica primero el término lineal.

$$\begin{aligned}2 \left(1 - 2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2\right) &= 2(1 - 2 \cosh^2(\theta)) \\ &= 2 \left(1 - 2 \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2\right) = 2 \left(1 - \frac{e^{2\theta} + 2 + e^{-2\theta}}{2}\right) \\ &= 2 - (e^{2\theta} + 2 + e^{-2\theta}) = -(e^{2\theta} + e^{-2\theta})\end{aligned}$$

De esta manera la ecuación (7.2.15) se transforma en

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 - (e^{2\theta} + e^{-2\theta}) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 = 0. \quad (7.2.16)$$

Utilizando la fórmula para la ecuación cuadrática se tiene que

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{\pm 2\theta}.$$

De esta manera se concluye que si $\mu_1 = \mu_2$ entonces

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{\pm 2\theta} \quad (7.2.17)$$

es decir

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^{2\theta}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^{-2\theta}\right) = 0 \quad (7.2.18)$$

□

Las ecuaciones (7.2.17) representan un par de rectas en el plano (λ_1, λ_2) con la misma inclinación respecto a los ejes. Estas son dos de las curvas críticas correspondientes a raíces iguales de $M(\mu)$: $\mu_1 = \mu_2$.

Consideremos ahora el caso en el que alguna de las raíces μ_1, μ_2 es un valor extremo: $-c \leq \mu \leq c$.

Lema 6. Las curvas críticas $\mu_1 = c$ o $\mu_2 = c$ están contenidas en la hipérbola del plano (λ_1, λ_2) ,

$$(\lambda_1 - ck_2/k_1)(\lambda_2 - ck_2/k_1) = -c^2 \tanh^2 \theta. \quad (7.2.19)$$

Demostración: Se considera de nuevo la ecuación (7.2.11)

$$\mu^2 - \frac{k_2}{k_1}(\lambda_1 + \lambda_2)\mu + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

y que una de las raíces de (7.2.5) es $\mu_1 = c$ o $\mu_2 = c$, eso implica que

$$c^2 - \frac{k_2}{k_1}(\lambda_1 + \lambda_2)c + \lambda_1\lambda_2 = 0. \quad (7.2.20)$$

Para determinar el lugar geométrico que representa (7.2.20), re-escribamos esta expresión de otra forma:

$$\begin{aligned} c^2 - \frac{k_2}{k_1}(\lambda_1 + \lambda_2)c + \lambda_1\lambda_2 + c^2 \frac{k_2}{k_1} &= c^2 \frac{k_2}{k_1} \\ \left(\lambda_1 - c \frac{k_2}{k_1}\right) \left(\lambda_2 - c \frac{k_2}{k_1}\right) &= c^2 \left(\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 - 1 \right) \\ &= c^2 (\operatorname{sech}^2 \theta - 1) = -c^2 \tanh^2 \theta, \end{aligned}$$

así el lugar geométrico es la hipérbola

$$\left(\lambda_1 - c \frac{k_2}{k_1}\right) \left(\lambda_2 - c \frac{k_2}{k_1}\right) = -c^2 \tanh^2 \theta. \quad (7.2.21)$$

□

Lema 7. Las curvas críticas $\mu_1 = -c$ o $\mu_2 = -c$ están contenidas en la hipérbola del plano (λ_1, λ_2) ,

$$(\lambda_1 + ck_2/k_1)(\lambda_2 + ck_2/k_1) = -c^2 \tanh^2 \theta. \quad (7.2.22)$$

Demostración: La prueba es idéntica al lema anterior: formalmente basta cambiar c por $-c$ en (7.2.19) para obtener (7.2.24). □

Lema 8. La recta $\lambda_1 = e^{2\theta}\lambda_2$ es tangente a la hipérbola (7.2.19) en el punto $(ce^\theta, ce^{-\theta})$.

Demostración: Sustituyendo λ_1 de la relación $\lambda_1 = e^{2\theta}\lambda_2$ en (7.2.20) se obtiene

$$c^2 - \frac{k_2}{k_1}(e^{2\theta} + 1)c\lambda_2 + e^{2\theta}\lambda_2^2 = 0,$$

al normalizar se obtiene

$$\lambda_2^2 - \frac{k_2}{k_1}(1 + e^{-2\theta})c\lambda_2 + c^2 e^{-2\theta} = 0. \quad (7.2.23)$$

una ecuación cuadrática en λ_2 . La condición de tangencia es que esta ecuación tenga una única raíz para λ_2 : Se calcula primero el discriminante,

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{k_2}{k_1}(1+e^{-2\theta})c\right)^2 - 4c^2e^{-2\theta} = \left(\frac{1}{\cosh\theta}(1+e^{-2\theta})c\right)^2 - 4c^2e^{-2\theta} \\ &= \left(\frac{2}{e^\theta+e^{-\theta}}(1+e^{-2\theta})c\right)^2 - 4c^2e^{-2\theta} = 4c^2 \left(\left(\frac{1+e^{-2\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}\right)^2 - e^{-2\theta} \right) \\ &= \frac{4c^2}{(e^\theta+e^{-\theta})^2} \left((1+e^{-2\theta})^2 - e^{-2\theta}(e^\theta+e^{-\theta})^2 \right) \\ &= \frac{4c^2}{(e^\theta+e^{-\theta})^2} (1+2e^{-2\theta}+e^{-4\theta} - 1 - 2e^{-2\theta} - e^{-4\theta}) = 0;\end{aligned}$$

así la ecuación (7.2.23) tiene solución única, cuando

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{\frac{k_1}{k_2}(1+e^{-2\theta})c}{2} = \frac{2(1+e^{-2\theta})c}{(e^\theta+e^{-\theta})^2} \\ &= \frac{(1+e^{-2\theta})c}{e^\theta+e^{-\theta}} = \frac{(1+e^{-2\theta})c}{e^\theta(1+e^{-2\theta})} = ce^{-\theta},\end{aligned}$$

al sustituir $\lambda_2 = ce^{-\theta}$ en la relación $\lambda_1 = e^{2\theta}\lambda_2$ se obtiene que $\lambda_1 = ce^\theta$. De esta manera el punto de intersección de la recta $\lambda_1 = e^\theta\lambda_2$ (donde $\mu_1 = \mu_2$) con la hipérbola (7.2.19) (donde $\mu_1 = c$ o $\mu_2 = c$) es el punto $(ce^\theta, ce^{-\theta})$. \square

Lema 9. La recta $\lambda_1 = e^{-2\theta}\lambda_2$ es tangente a la hipérbola

$$(\lambda_1 + ck_2/k_1)(\lambda_2 + ck_2/k_1) = -c^2 \tanh^2 \theta. \quad (7.2.24)$$

en el punto $(ce^{-\theta}, ce^\theta)$.

Demostración: Es idéntica a la del Lema 8. \square

También es necesario determinar que parte de la hipérbola (7.2.19) corresponde a $\mu_1 = c$ y que parte corresponde a $\mu_2 = c$. Sin pérdida de generalidad se supondrá que $\mu_1 \geq \mu_2$.

Lema 10. Sobre la curva crítica (7.2.19) se satisface $\mu_2 = c$ a la derecha del punto de tangencia $(ce^\theta, ce^{-\theta})$ (ver 8) y $\mu_1 = c$ a la izquierda del mismo.

Demostración: Si $\mu_2 = c$ entonces $\mu_1 \geq c$ por lo que

$$\mu_1 + \mu_2 \geq 2c. \quad (7.2.25)$$

Por otra parte $\mu_2 = c$ es raíz de

$$(c - \mu_1)(c - \mu_2) = c^2 - (\mu_1 + \mu_2)c + \mu_2\mu_1 = 0$$

y dado que $\mu_2 = c$ también es raíz de (7.2.20) se obtiene que

$$\frac{k_2}{k_1}(\lambda_1 + \lambda_2) = \mu_1 + \mu_2, \quad (7.2.26)$$

de (7.2.25) se obtiene que

$$\frac{k_2}{k_1}(\lambda_1 + \lambda_2) \geq 2c, \quad (7.2.27)$$

de aquí que $\lambda_2 \geq -\lambda_1 + 2c \cosh \theta = -\lambda_1 + c(e^\theta + e^{-\theta})$, esta región es la parte superior de una recta de pendiente negativa que pasa por el punto de tangencia $(ce^\theta, ce^{-\theta})$. De esta manera se deduce que $\mu_2 = c$ corresponde al lado derecho de dicho punto y en consecuencia $\mu_1 = c$ corresponde al lado izquierdo. \square

Recordemos que si $h > 0$ μ_1, μ_2 no pueden ser complejos. En el caso que $h \leq 0$ se tiene

Lema 11. *Si $h \leq 0$ entonces las raíces μ_1, μ_2 son complejas en las regiones*

Si la ecuación (7.2.12) tiene raíces complejas, entonces su discriminante es negativo lo que implica que

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 < 4\lambda_1\lambda_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2. \quad (7.2.28)$$

De la misma manera que se concluyó (7.2.18) a partir de (7.2.12), sucede que

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^{2\theta}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^{-2\theta}\right) < 0. \quad (7.2.29)$$

De aquí se tienen dos casos:

- I. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^{2\theta} > 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^{-2\theta} < 0$;
- II. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^{2\theta} < 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - e^{-2\theta} > 0$;

Del primer caso se desprende

$$e^{2\theta} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < e^{-2\theta}$$

lo cual es inconsistente. Por lo tanto sólo el caso [II] es posible:

$$e^{-2\theta} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < e^{2\theta}$$

como el término de lado izquierdo es positivo, se sigue que λ_1, λ_2 tienen el mismo signo; así hay dos subcasos posibles:

- a) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; se sigue entonces,

$$\lambda_1 e^{-2\theta} < \lambda_2 < \lambda_1 e^{2\theta}$$

b) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$; se sigue entonces,

$$\lambda_1 e^{2\theta} < \lambda_2 < \lambda_1 e^{-2\theta}.$$

Ahora, la restricción $\lambda_1 \geq \lambda_2$ implica en cada caso:

a) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$:

$$\lambda_1 e^{-2\theta} < \lambda_2 < \lambda_1 e^{2\theta} \quad \& \quad \lambda_2 \leq \lambda_1$$

que implican

$$\lambda_1 e^{-2\theta} < \lambda_2 \leq \lambda_1.$$

b) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$:

$$\lambda_1 e^{2\theta} < \lambda_2 < \lambda_1 e^{-2\theta} \quad \& \quad \lambda_2 \leq \lambda_1$$

que implican

$$\lambda_1 e^{2\theta} < \lambda_2 \leq \lambda_1.$$

Así, las regiones donde μ_1, μ_2 son complejas se muestran en la Figura 7.6.

Las curvas críticas asociadas a los ceros de $R(\lambda)$ son fáciles de determinar, pues son simplemente $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 = c$ ó $\lambda_2 = c$. Con ello completamos todas las curvas críticas. Estas se muestran en la Figura 7.7, junto con las regiones críticas. Incluso se puede verificar que se mantienen las relaciones de vecindad en regiones del plano (μ_1, μ_2) , ver Figura 7.5, respecto a las regiones en el plano (λ_1, λ_2) , ver Figura 7.7.

Una vez calculadas las curvas críticas es necesario determinar las regiones donde el movimiento es posible. Un análisis directo pero que no se incluye aquí² muestra que las regiones no permitidas son las regiones sombreadas en la Figura 7.7. La región permitida se particiona en exactamente ocho regiones numeradas como 1, 2, ..., 8. Mas adelante mostramos una órbita de cada región.

7.3. Coordenadas elípticas polares (η, ξ)

Las coordenadas elípticas (λ, μ) nos permiten estudiar las trayectorias sólo en algún cuadrante en particular, pues existen dificultades al cambiar de un cuadrante a otro. Por ese motivo introducimos las *coordenadas elípticas polares* (η, ξ) , con las cuales logramos establecer una relación biyectiva con las coordenadas originales (x, y) . El cambio entre ambos tipos de coordenadas elípticas está dado por:

$$\lambda = c \cosh \eta \quad \mu = -c \cos \xi, \quad (7.3.1)$$

donde $0 \leq \xi < 2\pi$ y $\eta \in \mathbb{R}$.

Ahora la relación entre las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas elípticas polares, la obtenemos como sigue: de (7.1.10) y de (7.3.1) obtenemos que

$$x = -\frac{1}{c} \lambda \mu = c \cosh \eta \cos \xi,$$

²Ver [16] [p. 312-313]

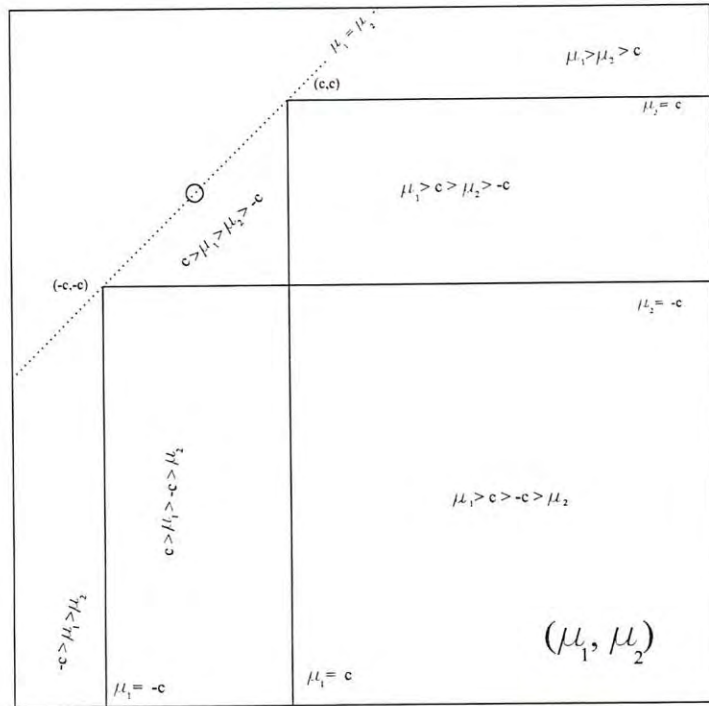


Figura 7.5: Regiones en (μ_1, μ_2)

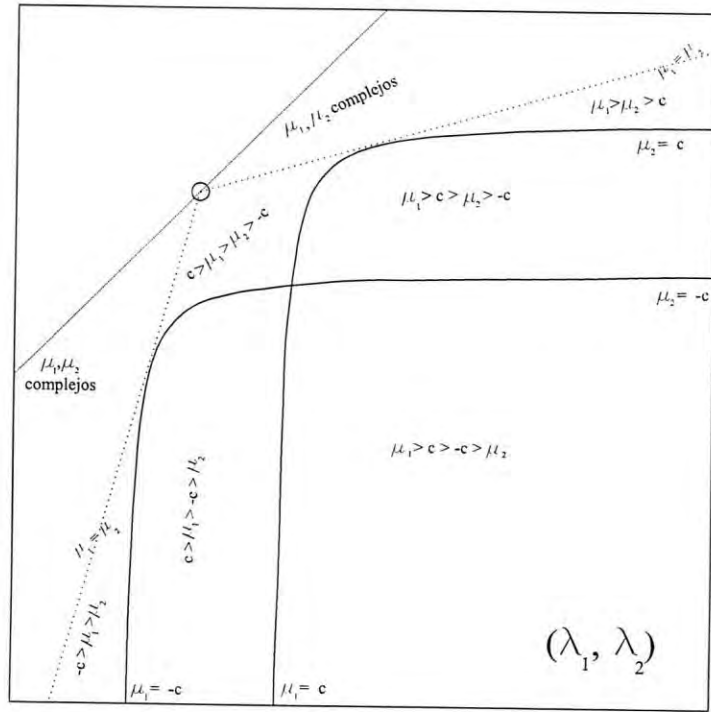


Figura 7.6: Curvas críticas en (λ_1, λ_2)

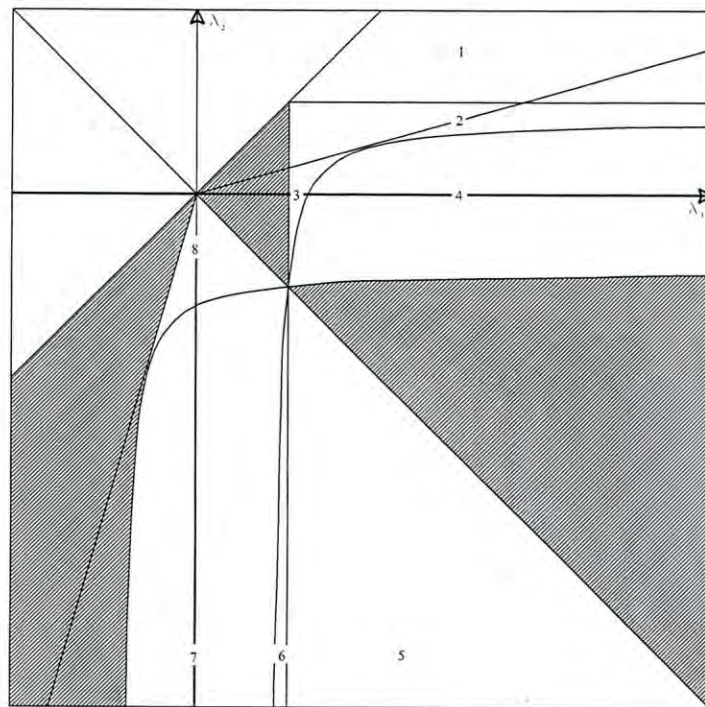


Figura 7.7: Regiones críticas

y de (7.1.11) y de (7.3.1) se obtiene que

$$y^2 = \frac{1}{c^2}(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2) = \sinh^2 \eta c^2 \sin^2 \xi.$$

Así

$$\begin{aligned}x &= c \cosh \eta \cos \xi \\y &= c \sinh \eta \sin \xi.\end{aligned}$$

observación: Si fijamos η y hacemos variar ξ de 0 a 2π , generamos una elipse, y si fijamos ξ y hacemos variar η generamos una rama de una hipérbola.

Ahora obtengamos el Hamiltoniano en las coordenadas elípticas polares; para ello utilizaremos la función generadora

$$W = \mu P_\mu + \lambda P_\lambda = -c \cos \xi P_\mu + c \cosh \eta P_\lambda$$

De esta manera los momentos P_ξ y P_η son

$$P_\xi = \frac{\partial W}{\partial \xi} = c \sin \xi P_\mu$$

$$P_\eta = \frac{\partial W}{\partial \eta} = c \sinh \eta P_\lambda$$

Por otra parte la energía cinética está dada por

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2(\lambda^2 - \mu^2)} ((\lambda^2 - c^2)P_\lambda^2 + (c^2 - \mu^2)P_\mu^2) \\&= \frac{1}{2c^2(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} \left(c^2 \sinh^2 \eta \frac{p_\eta^2}{c^2 \sinh^2 \eta} + c^2 \sin^2 \xi \frac{P_\xi^2}{c^2 \sin^2 \xi} \right) \\&= \frac{1}{2c^2(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} (P_\eta^2 + P_\xi^2),\end{aligned}$$

la energía potencial es

$$V = -\frac{k_1 \lambda - k_2 \mu}{\lambda^2 - \mu^2} = -c \frac{k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi}{c^2(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)}; \quad P = 1, \quad Q = 1.$$

De acuerdo a (6.1.11), al tomar $X = c^2 \cosh^2 \eta$, $Y = -c^2 \cos^2 \xi$, $p = ck_1 \cosh \eta$ y $q = ck_2 \cos \xi$ el nuevo Hamiltoniano también es separable, donde

$$P_x^2 = \frac{2}{P}(hX - p + \alpha)$$

$$P_y^2 = \frac{2}{Q}(hY - q - \alpha)$$

De ahí que

$$P_\eta = \sqrt{2(hc^2 \cosh^2 \eta + ck_1 \cosh \eta + \alpha)} \quad (7.3.2)$$

$$P_\xi = \sqrt{2(-hc^2 \cos^2 \xi + ck_2 \cos \xi - \alpha)} \quad (7.3.3)$$

Verifiquemos que al realizar la sustitución anterior obtenemos la relación de energía

$$\begin{aligned}
 H = T + V &= \frac{P_\eta^2 + P_\xi^2}{2c^2(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} - \frac{k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} \\
 &= \frac{2(hc^2 \cosh^2 \eta + k_1 c \cosh \eta + \alpha) + 2(-hc^2 \cos^2 \xi + ck_2 \cos \xi - \alpha)}{2c^2(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} \\
 &\quad - \frac{k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} \\
 &= \frac{(hc \cosh^2 \eta + k_1 \cosh \eta) + (-hc \cos^2 \xi + k_2 \cos \xi)}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} \\
 &\quad - \frac{k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} \\
 &= \frac{ch(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi) + (k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi)}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} \\
 &\quad - \frac{k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} \\
 &= h + \frac{k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} - \frac{k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} = h
 \end{aligned}$$

resumiendo

$$H = \frac{P_\eta^2 + P_\xi^2}{2c^2(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} - \frac{k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi}{c(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi)} = h.$$

Este Hamiltoniano tiene singularidades, por lo cual se requiere regularizar sobre el nivel de energía h . Esto se realiza con el truco de Poincaré haciendo

$$\bar{H} = (H - h)(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi), \quad c = 1,$$

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(P_\eta^2 + P_\xi^2) - h(\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi) - (k_1 \cosh \eta + k_2 \cos \xi) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
 \frac{dt}{d\tau} &= \cosh^2 \eta - \cos^2 \xi \\
 \eta' &= \frac{\partial H}{\partial P_\eta}, & P_\eta' &= -\frac{\partial H}{\partial \eta} \\
 \xi' &= \frac{\partial H}{\partial P_\xi}, & P_\xi' &= -\frac{\partial H}{\partial \xi}
 \end{aligned}$$

Capítulo 8

Trayectorias en las regiones del plano (λ_1, λ_2) .

8.1. Trayectorias acotadas

Consideraremos en detalle sólo cuando la energía $h < 0$, en este caso $\lambda_1 > c$ y la órbita se encuentra dentro de la elipse $\lambda = \lambda_1$. Si μ_1, μ_2 son reales, $\mu \in (\mu_1, \mu_2)^c$, con estas observaciones se evidencian las formas de cuatro tipos de órbitas. En la región 1, $\lambda_1 > \lambda_2 > c$, y el movimiento en λ es una libración entre λ_1 y λ_2 . En las regiones 2,3,4, $\lambda_1 > c > \lambda_2$, y el movimiento en λ es una libración entre λ_1 y c . En las regiones 1 y 2 las raíces de M son ambos complejos o reales con $\mu_1 > \mu_2$, y el movimiento en μ es una libración entre $+c$ y $-c$. En la región 3, $c > \mu_1 > \mu_2 > -c$, y las dos posibilidades para el movimiento en μ son (a) una libración entre c y μ_1 , (b) una libración entre μ_2 y $-c$. En la región 4, $\mu_1 > c > -c$, y el movimiento en μ entre μ_2 y $-c$.

Así en la región 1 la órbita es una curva ovalada, en general no es cerrada, y se encuentra en el anillo entre las elipses $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$ ver Figura 8.1. La curva es cerrada y por tanto periódico, si

$$\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda/\sqrt{R}}{\int_{-c}^c d\mu/\sqrt{S}} \quad (8.1.1)$$

es racional. En la región 2 la órbita tiene figura de ocho encerrando a los dos centros

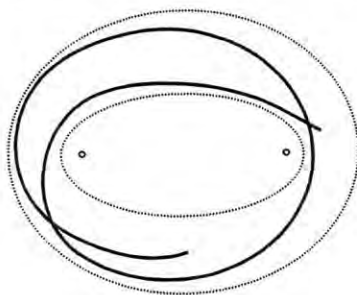


Figura 8.1: Órbita entre dos elipses.

fijo, ver Figura 8.2. En la región 3 la masa en movimiento gira alrededor de uno de los centros, ver Figura 8.3.

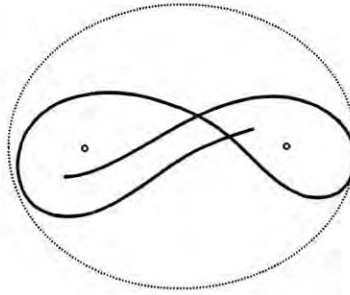


Figura 8.2: Órbita en forma de ocho.

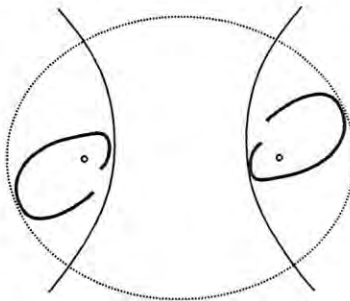


Figura 8.3: Órbitas alrededor de un centro fijo.

8.2. Integración en términos de funciones elípticas

Según sea la forma de descomponer R y S , de acuerdo a sus raíces, es la técnica de integración para que utilizando los cambios de variable adecuados, transformemos las integrales en formas conocidas, en [16] [p. 316,317] se muestra el ejemplo que desarrollamos a continuación, para ver otros ejemplos consultar [3]. Cabe mencionar que obtener la expresión explícita de todas las regiones posibles, es una ardua tarea.

Consideremos sólo la región 1, donde en general la órbita no es cerrada, encierra ambos centros y se encuentra en el anillo $\lambda_1 \geq \lambda \geq \lambda_2$. La forma del recorrido de la curva se deriva de la ecuación

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - c)(\lambda + c)}} = \frac{d\mu}{\sqrt{(c - \mu)(\mu + c)(\mu_1 - \mu)(\mu_2 - \mu)}}, \quad (8.2.1)$$

donde $\lambda_1 > \lambda_2 > c > -c$. El λ -movimiento es una libración entre c y $-c$.

Si equiparamos cada miembro de (8.2.1) a $2d\theta$ podemos expresar a λ y μ en términos de θ usando funciones elípticas de Jacobi¹ o de Weierstrass, en una gran variedad de formas. Encontramos entonces una representación paramétrica de la curva en la forma $\lambda = \lambda(\theta)$, $\mu = \mu(\theta)$. Como una ilustración, damos un método de integración, como sigue:

¹Pasa saber un poco de estas funciones ver [15] [p. 187]

Al usar la sustitución

$$\frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda} = \frac{\lambda_2 - c}{\lambda_1 - c} \frac{x^2}{1 - x^2},$$

el primer miembro de (8.2.1) toma la forma

$$\frac{2}{\sqrt{(\lambda_1 - c)(\lambda_2 + c)}} \frac{1 - x^2}{1 - k^2 x^2}, \quad (8.2.2)$$

donde

$$k^2 = \frac{2c(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - c)(\lambda_2 + c)}. \quad (8.2.3)$$

Así $x = \text{sn } u$, donde $u = \sqrt{(\lambda_1 - c)(\lambda_2 + c)}\theta$ y

$$\lambda = \frac{\lambda_1(\lambda_2 - c) \text{sn}^2 u + \lambda_2(\lambda_1 - c) \text{cn}^2 u}{(\lambda_2 - c) \text{sn}^2 u + (\lambda_1 - c) \text{cn}^2 u}. \quad (8.2.4)$$

Similarmente al usar la sustitución

$$\frac{\mu + c}{c - \mu} = \frac{\mu_1 + c}{\mu_1 - c} \frac{y^2}{1 - y^2} \quad (8.2.5)$$

el segundo miembro de (8.2.1) se convierte en

$$\frac{2}{\sqrt{(\mu_1 - c)(\mu_2 + c)}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}, \quad (8.2.6)$$

donde

$$k^2 = \frac{2c(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 - c)(\mu_2 + c)}. \quad (8.2.7)$$

Así $y = \text{sn } v$, donde $v = \sqrt{(\mu_1 - c)(\mu_2 + c)}(\theta - \theta_0)$ y

$$\mu = c \frac{(\mu_1 + c) \text{sn}^2 v - (\mu_1 - c) \text{cn}^2 v}{(\mu_1 + c) \text{sn}^2 v + (\mu_1 - c) \text{cn}^2 v}. \quad (8.2.8)$$

De esta manera tenemos expresada la curva en la forma $\lambda = \lambda(\theta)$, $\mu = \mu(\theta)$. El parámetro k^2 para la función elíptica Jacobiana en (8.2.4) está dada por (8.2.3), y el correspondiente parámetro k^2 en (8.2.8) está dado por (8.2.7). La parametrización anterior es útil para comparar con la correspondiente solución numérica, sin embargo cabe recordar que las órbitas que nos interesan son las órbitas periódicas y de muy bajo periodo.

8.3. Trayectorias

Las trayectorias expresadas en coordenadas elípticas, requieren ser generadas en trayectorias elípticas polares para no detenernos en detalles de signos cuando éstas pasen de cuadrante a cuadrante. Además que entre este último tipo de coordenadas y las coordenadas cartesianas existe una correspondencia biunívoca.

Para generar las trayectorias, se realiza el procedimiento siguiente: Se selecciona un punto (λ_1, λ_2) de cada una de las ocho regiones determinadas por las curvas críticas, después se calculan los momentos P_η, P_ξ usando las integrales de Hamilton-Jacobi, luego se integran las ecuaciones de Hamilton regularizadas en las variables $(\eta, \xi, P_\eta, P_\xi)$ respecto el nuevo tiempo $\frac{dt}{d\tau} = \cosh^2 \eta - \cos^2 \xi$, por último se proyectan en las coordenadas $(\eta(\tau), \xi(\tau))$. El procedimiento anterior, salvo la elección del punto de cada región se implementa en Mathematica.

Los puntos elegidos de las trayectorias se muestran en la Figura 8.4 En seguida

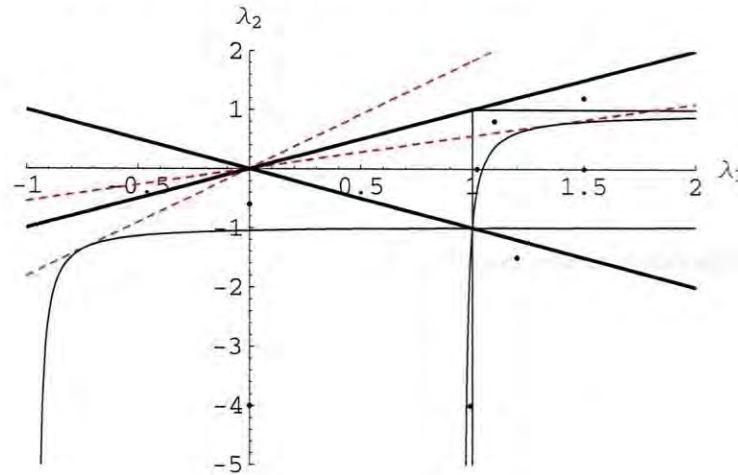


Figura 8.4: Elección de puntos en cada región

de muestra una órbita de cada una de las regiones permitidas en el plano (λ_1, λ_2) .

Región 1, ver Figura 8.5: Un punto de la región es $\lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 1.2$, la trayectoria se mantiene alrededor de los centros entre las elipses correspondientes a los valores de λ_1 y λ_2 .

Región 2, ver Figura 8.5: Un punto de la región es $\lambda_1 = 1.1, \lambda_2 = 0.8$, la trayectoria se mantiene dentro de una elipse girando alrededor de cada centro en sentidos contrarios, en forma de ocho.

Región 3, ver Figura 8.6: Un punto de la región es $\lambda_1 = 1.02, \lambda_2 = 0$, la trayectoria se mantiene dentro de una elipse alrededor de uno de los centros, también se muestra un acercamiento.

Región 4, ver Figura 8.7: Un punto de la región es $\lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 0$, la trayectoria se mantiene dentro de una elipse, a la derecha de una recta y alrededor de uno de los centros.

Región 5, ver Figura 8.7: Un punto de la región es $\lambda_1 = 1.1, \lambda_2 = -1.5$, la trayectoria pasa por fuera de una elipse, de manera tangencial y es una trayectoria de escape (la energía es de signo positivo y su valor es $h = 2.5$).

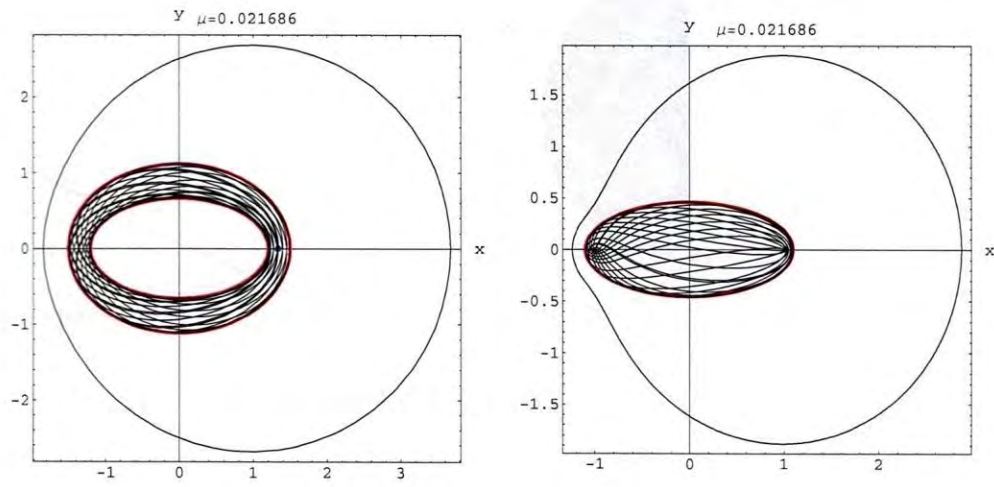


Figura 8.5: Regiones 1 y 2

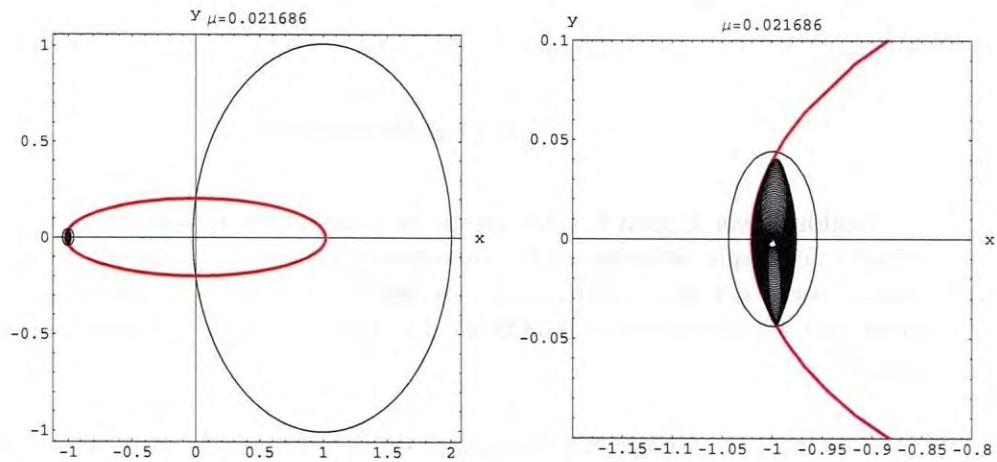


Figura 8.6: Región 3 y un acercamiento

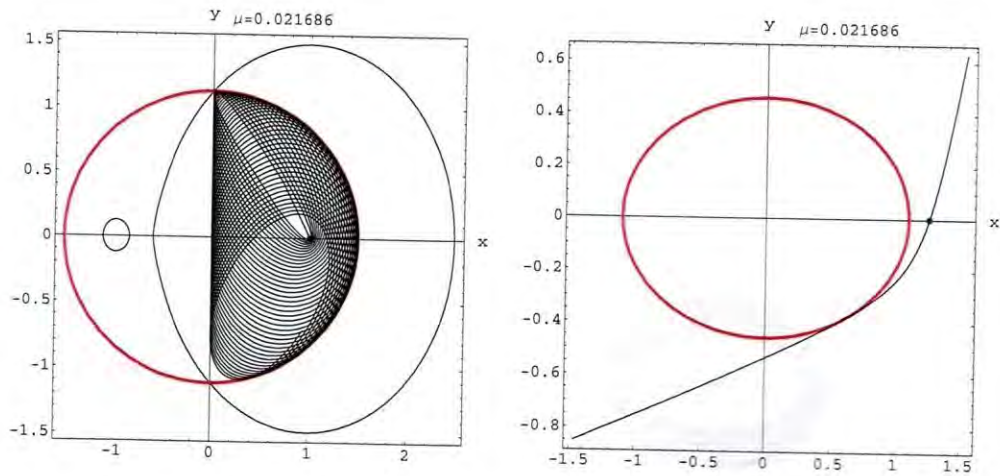


Figura 8.7: Regiones 4 y 5

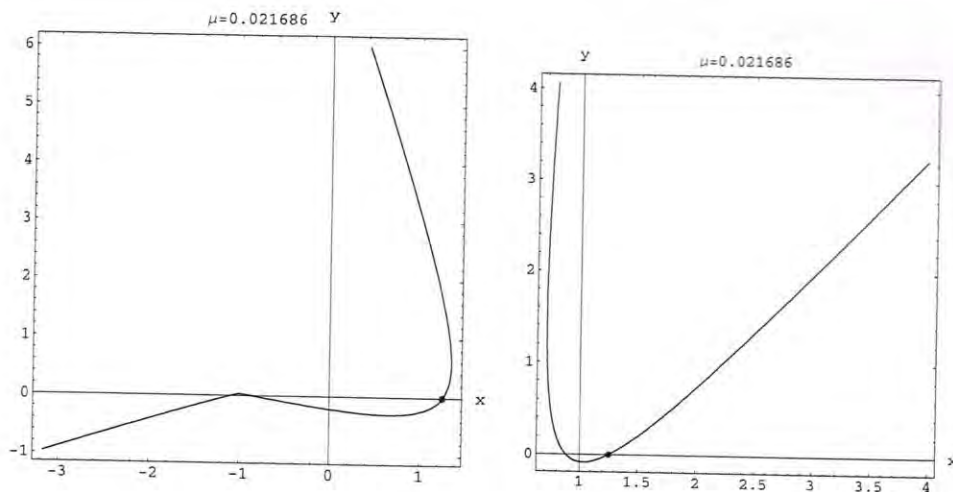


Figura 8.8: Regiones 6 y 7

Región 6, ver Figura 8.8: Un punto de la región es $\lambda_1 = 0.99$, $\lambda_2 = -4$, no existe elipse cofocal que delimite a esta trayectoria, pasa cerca de uno de los centros, entre ellos y cerca del otro centro, es una trayectoria de escape (la energía es de signo positivo y su valor es $h = 0.332226$). La región de Hill correspondiente es todo el plano.

Región 7, ver Figura 8.8: Un punto de la región es $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, no existe elipse cofocal que delimite a esta trayectoria, pasa muy cerca de uno de los centros, es una trayectoria de escape (la energía es de signo positivo y su valor es $h = 1/4$). La región de Hill correspondiente es todo el plano.

Región 8, ver Figura 8.9: Un punto de la región es $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.6$, no existe elipse cofocal que delimite a esta trayectoria, pasa entre los centros, es una

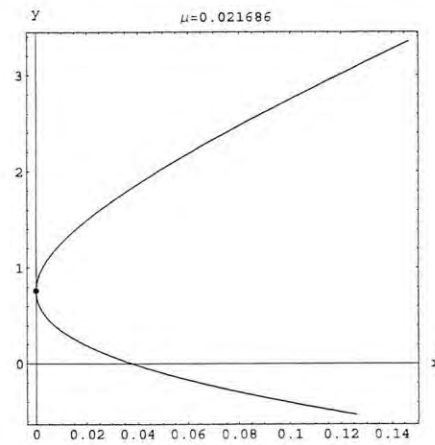


Figura 8.9: Región 8

trayectoria de escape ($h = 1.6666$), parece que es una parábola. La región de Hill correspondiente es todo el plano.

Capítulo 9

Simetrías del problema

Recordemos que las ecuaciones de movimiento del problema de los dos centros fijos en variables adimensionales es

$$x'' = -\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3}, \quad (9.0.1)$$

$$y'' = -\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3}, \quad (9.0.2)$$

donde $r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Las ecuaciones se puede expresar como un sistema de primer orden,

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ y' &= v, \\ u' &= -\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3}, \\ v' &= -\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3}. \end{aligned} \quad (9.0.3)$$

El sistema escrito en esta la forma presenta la simetría mecánica

$$S_1(t, x, y, u, v) = (-t, x, y, -u, -v) \quad (9.0.4)$$

y la simetría respecto del eje x ,

$$S_2(t, x, y, u, v) = (-t, x, -y, -u, v) \quad (9.0.5)$$

Proposición 1. *Cualquiera de los cambios de variable $S_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definidos en (9.0.4), (9.0.5) deja invariante las ecuaciones (9.0.3).*

Demostración: Efectuando el cambio de variable (9.0.4) en (9.0.3) obtenemos

$$\begin{aligned} (-x') &= -u, \\ (-y') &= -v, \\ -(-u') &= -\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3}, \\ -(-v') &= -\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3}. \end{aligned} \quad (9.0.6)$$

donde el cambio de signo $(-x')$, $(-y')$, $(-u')$, $(-v')$, viene de aplicar la regla de la cadena al cambio de variable $t \rightarrow -t$. Vemos que el sistema queda invariante.

Análogamente efectuando el cambio de variable (9.0.5) en (9.0.3) obtenemos

$$\begin{aligned}(-x') &= -u, \\ -(-y') &= v, \\ -(-u') &= -\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3}, \\ (-v') &= +\frac{\mu y}{r_1^3} + \frac{(1-\mu)y}{r_2^3}.\end{aligned}\tag{9.0.7}$$

que se puede escribir

$$\begin{aligned}x' &= u, \\ y' &= v, \\ u' &= -\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3}, \\ v' &= -\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3}.\end{aligned}\tag{9.0.8}$$

obtenemos de nuevo el sistema (9.0.3). \square

Para masas iguales se tiene la simetría adicional respecto del eje y :

$$S_3(t, x, y, u, v) = (-t, -x, y, u, -v)\tag{9.0.9}$$

Proposición 2. Para masas iguales: $\mu = 1/2$, el cambio de variable $S_3: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ (9.0.9), deja invariante las ecuaciones (9.0.3).

Demostración:

Para $\mu = 1/2$, el sistema (9.0.3) queda

$$\begin{aligned}x' &= u, \\ y' &= v, \\ u' &= -\frac{x+1}{2r_1^3} - \frac{x-1}{2r_2^3}, \\ v' &= -\frac{y}{2r_1^3} - \frac{y}{2r_2^3}.\end{aligned}\tag{9.0.10}$$

con $r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Efectuemos el cambio de variable indicado en (9.0.9):

$$\begin{aligned}-(-x)' &= u, \\ (-y)' &= -v, \\ (-u)' &= -\frac{-x+1}{2r_1^3} - \frac{-x-1}{2r_2^3}, \\ -(-v)' &= -\frac{y}{2r_1^3} - \frac{y}{2r_2^3}.\end{aligned}$$

donde ahora $r_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. Este sistema puede reescribirse como

$$\begin{aligned}x' &= u, \\y' &= v, \\u' &= \frac{-x+1}{2r_1^3} + \frac{-x-1}{2r_2^3}, \\v' &= -\frac{y}{2r_1^3} - \frac{y}{2r_2^3}.\end{aligned}$$

Haciendo $\rho_1 = r_2 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, $\rho_2 = r_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, queda

$$\begin{aligned}x' &= u, \\y' &= v, \\u' &= -\frac{x+1}{2\rho_1^3} - \frac{x-1}{2\rho_2^3}, \\v' &= -\frac{y}{2\rho_1^3} - \frac{y}{2\rho_2^3}.\end{aligned}$$

el mismo sistema (9.0.10). □

9.1. Simetrías como equivariancias

Es conveniente entender las simetrías que se han introducido desde un punto de vista más funcional. Para ello denotemos un sistema dinámico general por

$$z' = f(z), \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (9.1.1)$$

Definición 2. Decimos que un mapeo lineal $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una simetría del sistema dinámico (10.0.1) si

$$f(\sigma(z)) = \pm \sigma(f(z)). \quad (9.1.2)$$

Si el signo es $-$ decimos que la simetría invierte el tiempo; en caso contrario decimos que preserva el tiempo.

Cuando $f(\sigma(z)) = \sigma(f(z))$ se dice también que f conmuta con σ o que f es σ -equivariante. Análogamente, si $f(\sigma(z)) = -\sigma(f(z))$ se dice que f es σ -antievvariante. Estaremos interesados principalmente en simetrías que invierten el tiempo es decir respecto de las cuales el campo es antievvariante.

Proposición 3. Si $z(t)$ es una solución definida en $[0, T]$ y σ una simetría que preserva el tiempo entonces $\sigma(z(t))$ es una solución definida en $[0, T]$. Si la simetría σ invierte el tiempo entonces $\sigma(z(-t))$ es una solución definida en $[-T, 0]$.

Demostración: Supongamos que σ preserva el tiempo. Sea $\gamma(t) = \sigma(z(t))$. Por la regla de la cadena y debido a que σ es lineal,

$$\gamma'(t) = \sigma(z'(t)) = \sigma(f(z(t))) = f(\sigma(z(t))) = f(\gamma(t))$$

donde usamos la propiedad (9.1.2) con el signo +. Por lo tanto $\gamma(t)$ es solución que está definida en $[0, T]$.

Supongamos ahora que σ invierte el tiempo y sea como antes $\gamma(t) = \sigma(z(-t))$ para $t \in [-T, 0]$. Usando los mismos argumentos llegamos a

$$\gamma'(t) = \sigma(-z'(-t)) = -\sigma(f(z(-t))) = f(\sigma(z(-t))) = f(\gamma(t))$$

por lo que $\gamma(t)$ es una solución definida en $[-T, 0]$ \square

Podemos ahora rephrasing los resultados de las Proposiciones 1 y 2 como sigue: Definamos las simetrías $\sigma_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ como sigue

- $\sigma_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = (x_0, y_0, -u_0, -v_0)$
- $\sigma_2(x_0, y_0, u_0, v_0) = (x_0, -y_0, -u_0, v_0)$

y en el caso $\mu = 1/2$

- $\sigma_3(x_0, y_0, u_0, v_0) = (-x_0, y_0, u_0, -v_0)$

es decir σ_i no son sino las restricciones de las simetrías S_i definidas en el espacio fase extendido $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$, a \mathbb{R}^4 . Podemos verificar entonces que las simetrías σ_1, σ_2 son simetrías que invierten el tiempo, de acuerdo a la Definición 2.

La existencia de una simetría permite extender una solución bajo ciertas condiciones.

Definición 3. Sea $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una simetría lineal del sistema (10.0.1) y denotemos los puntos fijos de Σ por

$$\Sigma = \{z_0 \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(z_0) = z_0\} \quad (9.1.3)$$

al cual llamaremos el plano de simetría.

Proposición 4. Sea $z(t)$ una solución definida en $[0, T]$ tal que $z(0) \in \Sigma$ entonces

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} z(t) & t \in [0, T] \\ \sigma(z(-t)) & t \in [-T, 0] \end{cases} \quad (9.1.4)$$

es la única solución definida en $[-T, T]$ con condición inicial $z(0)$.

Demostración: Se sigue de la Proposición 3 que $\tilde{z}(t)$ es solución en $[-T, 0]$ y en $[0, T]$ por separado, pero como $z(0) \in \Sigma$ entonces ambas partes coinciden en $t = 0$. Por unicidad de soluciones $\tilde{z}(t)$ es la única solución definida en $[-T, T]$ con la condición inicial $z(0)$. \square

Mediante una modificación del argumento anterior podemos generar órbitas periódicas

Teorema 3. Sea $z(t)$ una solución definida en $[0, T/2]$ tal que $z(0), z(T/2) \in \Sigma$ entonces $z(t)$ puede extenderse a una solución periódica de período T .

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} z(t) & t \in [0, T/2] \\ \sigma(z(-t)) & t \in [-T/2, 0] \end{cases} \quad (9.1.5)$$

Demostración: Por la Proposición anterior $\tilde{z}(t)$ es una solución definida en $[-T/2, T/2]$ pero como además $z(T/2) \in \Sigma$ entonces $\tilde{z}(T/2) = z(T/2)$ y $\tilde{z}(-T/2) = \sigma(z(T/2)) = z(T/2)$, es decir

$$\tilde{z}(T/2) = \tilde{z}(-T/2)$$

y por unicidad $\tilde{z}(t)$ debe ser una órbita periódica de período T . \square

9.2. Órbitas periódicas σ_2 -simétricas

Vamos ahora a concretar las condiciones que nos da el Teorema 9.1.5 para obtener órbitas periódicas simétricas para el problema de los centros fijos respecto de la simetría

$$S_2(t, x, y, u, v) = (-t, -x, y, -u, v).$$

Denotemos la solución del sistema (9.0.3) al tiempo t por

$$z(t, z_0) = (x(t, x_0, y_0, u_0, v_0), y(t, x_0, y_0, u_0, v_0), u(t, x_0, y_0, u_0, v_0), v(t, x_0, y_0, u_0, v_0))$$

con $z_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$, la condición inicial al tiempo $t = 0$.

Proposición 5. Si una órbita $z(t, z_0)$ con $z_0 = (x_0, 0, 0, v_0)$ satisface

$$y(T/2, x_0, 0, 0, v_0) = 0 \quad (9.2.1)$$

$$u(T/2, x_0, 0, 0, v_0) = 0 \quad (9.2.2)$$

para algún $T > 0$, entonces $z(t, z_0)$ es una solución periódica de período T que es simétrica respecto de la simetría σ_2 .

Demostración: El plano de simetría de σ_2 es

$$\Sigma_2 = \{(x_0, y_0, u_0, v_0) \mid y_0 = u_0 = 0\} \quad (9.2.3)$$

y las condiciones (9.2.1) y (9.2.2) son precisamente las condiciones para que la curva corte dos veces el plano de simetría. El resultado se sigue entonces del Teorema 9.1.5. \square

La condición inicial y las condiciones en (9.2.1, 9.2.2) significa que la trayectoria tiene dos cruces perpendiculares con el eje x , uno al inicio y el otro al tiempo $T/2$ tal como se muestra en la Figura 9.2.

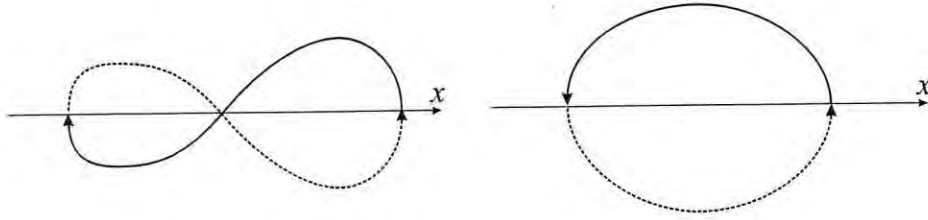


Figura 9.1: Ejemplos de órbitas periódicas simétricas

Para la condición inicial en (9.2.1,9.2.2) sólo dos parámetros son independientes el tiempo de corte con el eje x , t_0 , y x_0 ya que v_0 se puede despejar de la relación de energía

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) = \frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} + h, \quad (9.2.4)$$

poniendo en ésta $u = 0$, $y = 0$; es decir

$$v_0 = \vartheta(x_0, h, \mu) = \sqrt{2 \left(h + \frac{\mu}{|x_0 + 1|} + \frac{1-\mu}{|x_0 - 1|} \right)}. \quad (9.2.5)$$

9.3. Líneas de simetría

Consideremos la sección de Poincaré Σ definida por la ecuación $y = 0$. Si fijamos la energía genéricamente esta sección tiene dimensión 2. Esta sección tiene dos componentes definidas por el signo al despejar v de la relación de energía (9.2.5), las cuales denotamos por Σ^\pm .

Consideremos Σ^+ , la cual puede parametrizarse por $x-u$. La relación de energía define la región accesible en la sección Σ^+ definida por la ecuación

$$\left\{ (x, u) \mid 2 \left(h + \frac{\mu}{|x-1|} + \frac{1-\mu}{|x+1|} \right) - u^2 \geq 0 \right\}$$

a la cual seguiremos llamando región de Hill. En la Figura 9.2 se muestra la región de Hill para un valor negativo de la energía y masas iguales. Las asíntotas verticales corresponden a colisión con los primarios. La línea de simetría se muestra en rojo.

El plano de simetría (9.2.3) se intersecta con Σ^+ a lo largo del eje x que llamaremos entonces la línea de simetría asociada a la simetría σ_2 ,

$$\Gamma_0 = \{(x, u) \in \Sigma^+ \mid u = 0\}.$$

Podemos tomar como condiciones iniciales puntos sobre la línea Γ_0 y seguirlos por el flujo hasta su próxima intersección con la misma sección Σ^+ . De hecho podemos tomar toda la línea de simetría exceptuando sus extremos.

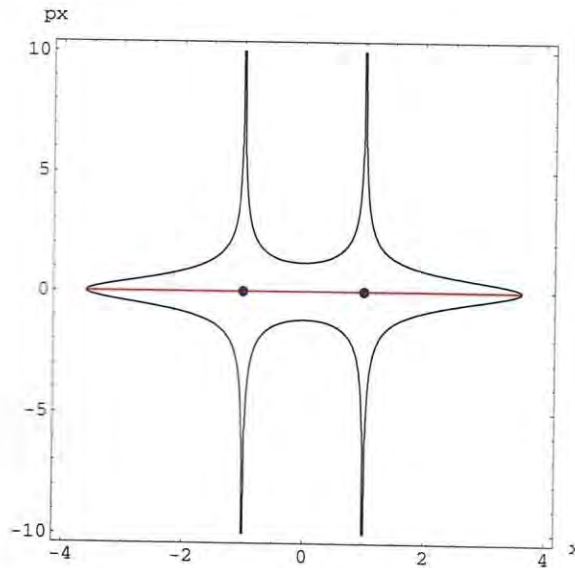


Figura 9.2: Región de Hill en la sección de Poincaré Σ^+ parametrizada por $x-u$. La línea de simetría Γ_0 se muestra en rojo. Deberán omitirse los puntos que corresponden a colisión.

Los extremos de Γ_0 corresponden a $v = 0$ que junto con $y = 0$ implican $\dot{v} = \dot{y} = 0$ de (9.0.3) y por lo tanto la solución permanece sobre el plano $y = 0$ para toda t ; en particular no es transversal a Σ^+ y no está definida su siguiente intersección con Σ^+ .

Pues bien siguiendo por el flujo la línea Γ_0 , se obtienen las sucesivas intersecciones de la imagen de Γ_0 con la sección Σ^+ que se denotan por $\Gamma_2, \Gamma_4, \dots$. No es difícil probar el siguiente resultado

Proposición 6. *La intersección de líneas de simetría $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ son puntos periódicos de período divisor de $|i - j|$.*

Cabe notar que llamamos “período” el número de veces que la solución interseca a la sección Σ^+ antes de coincidir. Así por ejemplo la intersecciones $\Gamma_2 \cap \Gamma_0$ son puntos periódicos de período 2, la intersección $\Gamma_4 \cap \Gamma_0$ contiene la intersección $\Gamma_2 \cap \Gamma_0$ y puntos periódicos de período 4, etc. La intersección $\Gamma_4 \cap \Gamma_2$ son puntos periódicos de período 2, etc. En la Figura 9.3 se muestran algunos ejemplos de estas curvas que por abuso de lenguaje llamaremos “líneas de simetría” (en realidad) sólo Γ_0 debía llamarse línea de simetría).

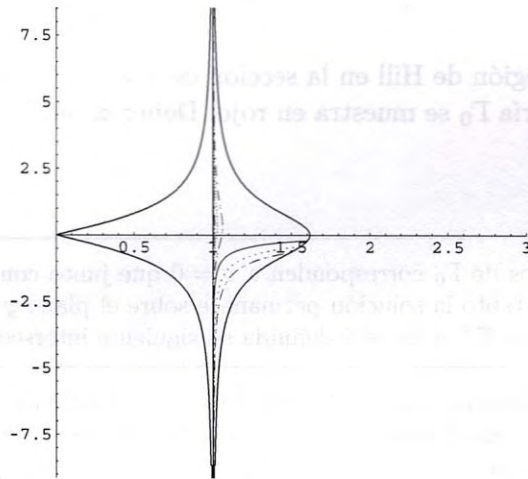


Figura 9.3: Intersecciones sucesivas de la imagen de Γ_0 por el flujo con la sección Σ^+

Capítulo 10

El método de continuación analítica

En esta sección veremos un método clásico debido a Poincaré, para obtener órbitas periódicas de un sistema autónomo dependiente de un parámetro. Consideremos el sistema de clase C^1 respecto de la coordenada x y el parámetro real μ en una región $D \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (10.0.1)$$

El método consiste en obtener órbitas periódicas cercanas a órbitas conocidas del sistema cuando $\mu = 0$, aplicando el teorema de la función implícita. Por ello se conoce también como el método de continuación analítica.

10.1. Motivación

Denotemos la solución al tiempo t del sistema (10.0.1) que tiene por condición inicial ξ al tiempo $t = 0$, por $x(t, \xi, \mu)$. Suponga que para $\mu = 0$ se tiene una órbita periódica de periodo T_0 , con condición inicial $\xi^{(0)}$: $x(t + T_0, \xi^{(0)}, 0) = x(t, \xi^{(0)}, 0)$. Para un valor del parámetro μ cercano a 0, buscamos una solución periódica de periodo T cercano a T_0 y condición inicial ξ cercana a ξ_0 . Por unicidad, esto es equivalente a resolver la *ecuación de periodicidad*

$$x(T, \xi, \mu) - \xi = 0. \quad (10.1.1)$$

Este es un sistema de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas: la condición inicial ξ y el periodo T ; es necesario imponer restricciones adicionales para poder resolver dicha ecuación. Busquemos por ejemplo, órbitas de periodo fijo T_0 (en general en sistemas autónomos este tipo de órbitas no existen, pero lo tomaremos como una motivación). Por hipótesis, el sistema (10.1.1) admite una solución para $\mu = 0$, $\xi = \xi_0$. Denotemos en lo sucesivo $X(T, \xi, \mu) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi, \mu)$.

Por teorema de la función implícita, si el operador¹ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$X(T_0, \xi_0, 0) - I_n \quad (10.1.2)$$

es invertible, entonces existe una curva diferenciable $\xi(\mu)$ definida en un entorno de 0 en una vecindad de ξ_0 tal que $\xi(0) = \xi_0$, satisfaciendo

$$x(T_0, \xi(\mu), \mu) - \xi(\mu) = 0; \quad (10.1.3)$$

es decir la curva de condiciones iniciales $\xi(\mu)$ define una familia de órbitas periódicas dependientes del parámetro μ . Ahora bien, ¿Cómo calcular el Jacobiano (10.1.2)? La respuesta la dan las *ecuaciones variacionales*. Estas son ecuaciones lineales con coeficientes dependientes del tiempo que se obtienen al linealizar a lo largo de una órbita de referencia.

¹ I_n denota la función identidad en \mathbb{R}^n .

10.2. Las ecuaciones variacionales

En esta sección veremos algunas propiedades de las ecuaciones variacionales de sistemas autónomos. En las siguientes dos proposiciones, el parámetro μ no juega ningún papel, por lo cual lo omitiremos de la notación:

$$\dot{x} = F(x) \quad (10.2.1)$$

donde F es continuamente diferenciable en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$.

Proposición 7. Sea $x(t, \xi)$ una solución del sistema (10.2.1) con condición inicial $x(0, \xi) = \xi$. Entonces la matriz de derivadas parciales $X(t, \xi) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)$ satisface el sistema lineal con coeficientes variables

$$\frac{d}{dt} X(t, \xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot X(t, \xi) \quad (10.2.2)$$

y la condición inicial

$$X(0, \xi) = I_n. \quad (10.2.3)$$

Demostración. Ya que $x(t, \xi)$ es solución,

$$\dot{x}(t, \xi) = F(x(t, \xi)),$$

Como F y el flujo son funciones de clase C^1 , la composición es diferenciable, así que derivando respecto de ξ y la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi}(t, \xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)$$

pero $x(t, \xi)$ es de clase C^2 , ya que el campo es de clase C^1 , luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi}(t, \xi) &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial t}(t, \xi) \\ &= \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \xi}(t, \xi) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

Observaciones:

Observación 3. La ecuación (10.2.2) es una ecuación diferencial matricial y junto con (10.2.3) es equivalente a los n problemas de condición inicial

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi)) \delta x, \quad \delta x(0) = \delta_i \quad (10.2.4)$$

donde $\delta_i, i = 1, 2, \dots, n$ son los vectores canónicos en \mathbb{R}^n . El sistema (10.2.2) o equivalentemente (10.2.4) se llaman las ecuaciones variacionales a lo largo de la órbita $x(t, \xi)$.

Observación 4. Si la solución de referencia $x(t, \xi)$ es periódica, entonces el sistema variacional (10.2.2) o (10.2.4) tienen coeficientes periódicos. En este caso, la matriz $X(T, \xi) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi)$ se llama una matriz de monodromía (cualquier otra solución de 10.2.2 con condición inicial $|X(0, \xi)| \neq 0$ se llama una matriz de monodromía).

Observación 5. Para un sistema lineal con coeficientes periódicos $\dot{x} = A(t)x$, $A(t+T) = A(t)$, el teorema de Floquet afirma que existe un cambio lineal de coordenadas con coeficientes T -periódicos $x = P(t)y$ que lo reduce a un sistema lineal con coeficientes constantes: $\dot{y} = By$. En el caso más simple que B sea diagonalizable: $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y $M(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ es una matriz fundamental que satisface $M(0) = I_n$; en particular $M(T) = \text{diag}(e^{\lambda_1 T}, \dots, e^{\lambda_n T})$ es una matriz de monodromía; los números, en general complejos, $\rho_i = e^{\lambda_i T}$ se llaman multiplicadores característicos y $\lambda_i T$ son los exponentes de Floquet.

Proposición 8. Para el sistema (10.2.1), si $x(t, \xi)$ es una solución periódica de periodo T , entonces 1 es valor propio de la matriz de monodromía $X(T, \xi)$ con vector propio $F(\xi)$.

Demostración. En efecto de

$$\dot{x}(t, \xi) = F(x(t, \xi)),$$

se obtiene derivando respecto de t ,

$$\ddot{x}(t, \xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot \dot{x}(t, \xi)$$

es decir $\dot{x}(t, \xi)$ es solución del sistema variacional, como $\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)$ es una matriz fundamental, existe un vector c tal que

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \cdot c = \dot{x}(t, \xi)$$

evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$c = \dot{x}(0, \xi)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi) \cdot \dot{x}(0, \xi) = \dot{x}(T, \xi) = \dot{x}(0, \xi)$$

la última igualdad se sigue de que la solución es periódica. Por lo tanto $\dot{x}(0, \xi) = F(x(0, \xi)) = F(\xi)$ es un vector propio con valor propio 1. \square

La última proposición trae como consecuencia que el operador (10.1.2) sea degenerado pues 1 es siempre valor propio de $X(T_0, \xi_0, 0)$ por ser el sistema (10.0.1) autónomo.

La idea de Poincaré para eliminar la degeneración de la matriz de monodromía asociada a una órbita periódica $x(t, \xi_0)$ de un sistema autónomo como (10.2.1), consiste en tomar un hiperplano² Σ que pase por ξ_0 y transversal a $F(\xi_0)$. Por la continuidad respecto de condiciones iniciales y la transversalidad, la aplicación $\tau: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada $\xi \in \Sigma$ el tiempo del siguiente cruce con Σ , está bien definida en una vecindad de ξ_0 en Σ . La aplicación de Poincaré

$$\psi(\xi) = x(\tau(\xi), \xi); \tag{10.2.5}$$

está bien definida y es de clase C^1 en un entorno $U \subset \Sigma$ conteniendo a ξ_0 (véase la Figura 10.1). Si el sistema depende de un parámetro μ tal como (10.0.1), entonces también $\tau(\xi, \mu)$ y $\psi(\xi, \mu)$ dependen de la misma manera; en este caso usaremos la notación $\psi_\mu(\cdot) = \psi(\cdot, \mu)$, para enfatizar la dependencia del parámetro.

²Se puede considerar en vez de Σ una hipersuperficie local transversal a $F(\xi_0)$.

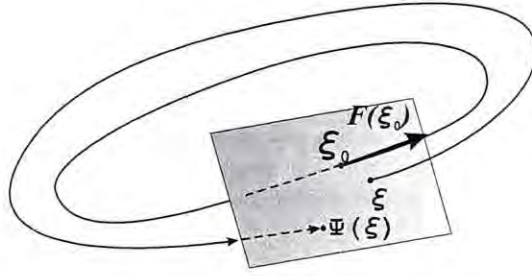


Figura 10.1: Mapeo de Poincaré

Teorema 4. Considere el sistema (10.2.1) con $x(t, \xi_0)$ una solución periódica de periodo T_0 . Sea $X(T_0, \xi_0)$ la matriz de monodromía; Σ un hiperplano que pasa por ξ_0 transversal a $F(\xi_0)$, Σ_0 el hiperplano por el origen paralelo a Σ ; $\psi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ la aplicación de Poincaré definido en un entorno $U \subset \Sigma$ conteniendo a ξ_0 . Entonces el polinomio característico se factoriza como

$$|X(T_0, \xi_0) - \lambda I_n| = (\lambda - 1) \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi \Sigma}(\xi_0) - \lambda I_{\Sigma_0} \right|$$

Véase ([14]).

10.3. Presencia de integrales primeras

Los sistemas hamiltonianos poseen una integral primera, lo cual agrega un grado más de degeneración a la matriz de monodromía.

Proposición 9. Suponga que el sistema (10.2.1), posee una integral primera: $H(x(t, \xi)) = H(\xi)$. Si $x(t, \xi)$ es una solución periódica de periodo T , entonces 1 es un valor propio de multiplicidad 2 de la matriz de monodromía $X(T, \xi)$.

Demostración. Diferenciando respecto de ξ la relación $H(x(t, \xi)) = H(\xi)$ y de la definición de gradiente se tiene que para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \cdot v &= \frac{\partial H}{\partial x}(\xi) \cdot v \\ \langle \nabla H(x(t, \xi)), \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \cdot v \rangle &= \langle \nabla H(\xi), v \rangle \\ \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)^T \nabla H(x(t, \xi)), v \right\rangle &= \langle \nabla H(\xi), v \rangle \end{aligned}$$

en particular evaluando en $t = T$,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi)^T \nabla H(\xi) = \nabla H(\xi) \quad (10.3.1)$$

lo cual dice que $\nabla H(\xi)$ es un vector propio izquierdo de $\frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi)$ o bien un valor propio derecho de $\frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi)^T$, con valor propio 1. Como los valores propios de una matriz y su transpuesta son iguales, lo tanto 1 es valor propio de $\frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi)$. \square

Corolario 1. Con las mismas hipótesis de la proposición anterior, el plano Σ ortogonal a $\nabla H(\xi)$ es invariante bajo la matriz de monodromía $X(T, \xi)$.

Demostración. Sea $v \in \Sigma$, por lo tanto $\langle v, \nabla H(\xi) \rangle = 0$. De (10.3.1) se sigue

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi) \cdot v, \nabla H(\xi) \right\rangle = \left\langle v, \frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi)^T \nabla H(\xi) \right\rangle = \langle v, \nabla H(\xi) \rangle = 0$$

y por lo tanto $\frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi) \cdot v \in \Sigma$. \square

Observación 6. El corolario anterior es la versión infinitesimal del teorema de conservación de la energía, es decir la hipersuperficie $H^{-1}(H(\xi))$ es invariante bajo el flujo $x(t, \xi)$.

Teorema 5. *Suponga que el sistema (10.2.1) posee una integral primera y una solución periódica $x(t, \xi)$ de periodo T . Existe una base de \mathbb{R}^n tal que*

$$|X(T, \xi) - \lambda I_n| = (\lambda - 1)^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi) - \lambda I_{n-2} \right|.$$

donde ψ es la aplicación de Poincaré asociada a un plano Σ' de codimensión 2 ortogonal a $\nabla H(\xi_0)$ y transversal a $F(\xi_0)$.

Demostración. Por el teorema anterior, el hiperplano Σ con normal $\nabla H(\xi)$ es invariante bajo $X(T, \xi)$. Sea $\sigma_1 = \nabla H(\xi)$ y $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ una base de Σ . En esta base la matriz de monodromía se expresa como

$$X(T_0, \xi) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ * & X(T, \xi)|_{\Sigma} \end{array} \right) \quad (10.3.2)$$

Para determinar la primera columna, escribamos

$$X(T, \xi) \cdot \sigma_1 = c_1 \sigma_1 + (c_2 \sigma_2 + \dots + c_n \sigma_n).$$

Por definición del plano Σ , el término entre paréntesis es ortogonal a σ_1 ; luego usando (10.3.1) se tiene

$$\begin{aligned} c_1 \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle &= \langle \sigma_1, X(T, \xi) \cdot \sigma_1 \rangle \\ &= \langle X(T, \xi)^T \sigma_1, \sigma_1 \rangle \\ &= \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto $c_1 = 1$ y la descomposición (10.3.2) es

$$X(T, \xi) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ * & X(T, \xi)|_{\Sigma} \end{array} \right). \quad (10.3.3)$$

Ahora aplicamos la misma idea que en el Teorema 5, pero esta vez considerando la restricción $X(T, \xi)|_{\Sigma}: \Sigma \rightarrow \Sigma$, es decir consideremos un hiperplano $\Sigma' \subset \Sigma$ transversal al campo $F(\xi_0)$; de esta manera se factoriza

$$X(T, \xi)|_{\Sigma} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\nabla_{\Sigma} \tau(\xi_0) \\ 0 & \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi_0) \end{array} \right). \quad (10.3.4)$$

Sustituyendo (10.3.4) en (10.3.3) se obtiene el resultado. \square

Este teorema se generaliza naturalmente

Teorema 6. Suponga que el sistema (10.2.1) posee r integrales primeras H_i , $i = 1, 2, \dots, r$ y una solución periódica $x(t, \xi)$ de periodo T . Si los gradientes ∇H_i , $i = 1, 2, \dots, r$ son linealmente independientes a lo largo de la órbita periódica $x(t, \xi)$, entonces existe una base de \mathbb{R}^n tal que

$$|X(T, \xi) - \lambda I_n| = (\lambda - 1)^{r+1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi) - \lambda I_{n-2} \right|.$$

donde ψ es la aplicación de Poincaré asociada a un plano Σ' de codimensión $r+1$, ortogonal al subespacio generado

$$\text{Span}(\nabla H_1(\xi_0), \nabla H_2(\xi_0), \dots, \nabla H_r(\xi_0))$$

y transversal a $F(\xi_0)$. En particular 1 es un multiplicador característico de multiplicidad $r+1$.

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = F(x, \mu)$$

con r integrales primeras H_i , $i = 1, 2, \dots, r$ dependientes de μ posiblemente. Denotemos por

$$S_{c,\mu} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H_i(x, \mu) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, r\}.$$

Suponemos que para $\mu = 0$ el sistema posee una órbita periódica de período T sobre la superficie integral $S_{0,0}$.

Teorema 7. Si la matriz de monodromía asociada a la órbita periódica $p(t)$ para $\mu = 0$, posee $r+1$ multiplicadores característicos iguales a 1, entonces existe, para μ pequeño, una familia de órbitas periódicas $p(t, c, \mu)$ dependientes de c y μ con períodos $T(c, \mu)$ cercanos a T contenidas en la superficie integral $S_{c,\mu}$. Precisamente: $p(t, c, \mu) \rightarrow p(t)$ y $T(c, \mu) \rightarrow T$ cuando $c \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$. La familia $p(t, c, \mu)$ es tan suave como F y las H_i .

Véase [14].

En particular para un sistema Hamiltoniano se tiene

Proposición 10. Si un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad tiene una integral primera que sea independiente del Hamiltoniano a lo largo de la órbita periódica $p(t)$ entonces sus multiplicadores característicos son todos iguales a 1.

Demostración: Porque entonces 1 tendría multiplicidad 3 como multiplicador característico, por ser autónomo y tener dos integrales primeras independientes. Por el teorema del valor propio simpléctico (véase apéndice B) el cuarto valor propio tiene que ser 1. \square

Capítulo 11

Imposibilidad de continuar órbitas Keplerianas

Para $\mu = 0$ el problema de los centros fijos se reduce a un problema de Kepler. Una pregunta natural es determinar si las órbitas Keplerianas se pueden continuar analíticamente para μ pequeño al problema de los dos centros fijos.

En el problema circular restringido de tres cuerpos Poincaré llama órbitas del primer tipo aquellas que se obtienen por continuación analítica a partir de órbitas circulares y del segundo tipo aquellas que se obtienen a partir de órbitas elípticas. En este problema las órbitas circulares se pueden continuar debido a que las integrales primeras de energía y momento angular se vuelven independientes a lo largo de las soluciones circulares para $\mu = 0$, por lo que la Proposición 10 no se aplica. De hecho se prueba que existen dos multiplicadores característicos iguales a 1 y otros dos de la forma $\exp(i2\pi/\beta)$ siendo β la frecuencia angular (movimiento medio) de la órbita circular; por lo tanto si se evitan las resonancia es posible continuar la órbita circular al problema restringido. Para las órbitas elípticas, las integrales de energía y momento angular son independientes, de modo que los multiplicadores son todos iguales a 1 por el mismo teorema (10) por lo que el teorema de continuación 7 no se puede aplicar. En cambio se puede usar un argumento de simetría y variables apropiadas llamadas de Delaunay que permiten probar que es posible continuar órbitas elípticas. En esta sección probaremos que no es posible continuar las órbitas circulares.

Teorema 8. *Para cualquier valor de la energía $h < 0$, ninguna órbita circular $x = 1 + ae^{i\omega t}$, $a^3\omega^2 = 1$, del problema de Kepler con $\mu = 0$, se puede continuar a una órbita periódica, ni a una órbita σ_2 -simétrica del problema de los centros fijos para μ suficientemente pequeño y positivo.*

Comencemos por escribir las ecuaciones del problema de los dos centros fijos (3.2.1) en notación compleja $z = x + iy'$ como

$$z'' = -\frac{\mu(z+1)}{|z+1|^3} - \frac{(1-\mu)(z-1)}{|z-1|^3} = -\frac{z-1}{|z-1|^3} + \mu \left(\frac{z-1}{|z-1|^3} - \frac{z+1}{|z+1|^3} \right) \quad (11.0.1)$$

Para $\mu = 0$ se reduce al problema de Kepler con origen en $z = 1$,

$$\zeta'' = -\frac{\zeta}{|\zeta|^3} \quad (11.0.2)$$

con $\zeta = z - 1$. Como es bien sabido, la ecuación (11.0.2) admite las soluciones periódicas circulares

$$\zeta = ae^{i\omega t}, \quad a^3\omega^2 = 1 \quad (\text{Tercera ley de Kepler}). \quad (11.0.3)$$

La energía de una órbita circular es $h = -1/(2a)$.

11.1. Multiplicadores característicos iguales a 1, órbita circulares

De acuerdo a la teoría general, si las integrales de la energía y de Euler son independientes a lo largo de la órbita circular, entonces los 4 multiplicadores característicos son iguales a 1 y no es posible hacer la continuación analítica respecto de μ pequeño. Verifiquemos esta afirmación

Proposición 11. *Los multiplicadores característicos de las ecuaciones variacionales de (11.0.2) a lo largo de la órbita circular $\zeta = ae^{i\omega t}$ son todos iguales a 1.*

Demostración: Escribamos $\zeta = x + iy$, $\delta\zeta = \delta x + i\delta y$. Las ecuaciones variacionales de la ecuación (11.0.2) son

$$\delta\dot{\zeta} = -\frac{\delta\zeta}{|\zeta|^3} + \frac{3\zeta}{|\zeta|^5}(x\delta x + y\delta y) \quad (11.1.1)$$

o bien

$$\delta\ddot{\zeta} + \frac{\delta\zeta}{|\zeta|^3} - \frac{3\zeta}{|\zeta|^5} \operatorname{Re}(\bar{\zeta}d\zeta) = 0. \quad (11.1.2)$$

donde $\bar{\zeta}$ es el conjugado de ζ y Re denota la parte real. Evaluando los coeficientes a lo largo de la órbita periódica circular (11.0.3) obtenemos el sistema lineal con coeficientes periódicos

$$\delta\ddot{\zeta} + \frac{\delta\zeta}{a^3} - \frac{3e^{i\omega t}}{a^3} \operatorname{Re}(e^{-i\omega t}d\zeta) = 0. \quad (11.1.3)$$

De acuerdo a la teoría de Floquet, existe un cambio lineal de coordenadas que reduce el sistema (11.1.3) a un sistema lineal con coeficientes constantes. En este caso podemos hacer explícito el cambio de coordenadas:

$$\delta\zeta = ue^{i\omega t}. \quad (11.1.4)$$

en efecto se tiene

$$\begin{aligned} \delta\zeta &= ue^{i\omega t}, \\ \delta\dot{\zeta} &= (\dot{u} + i\omega u)e^{i\omega t} \\ \delta\ddot{\zeta} &= (\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 u)e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (11.1.2) se obtiene, usando la tercera ley de Kepler (11.0.3),

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2i\omega\dot{u} + \left(-\omega^2 + \frac{1}{a^3}\right)u - \frac{3}{a^3} \operatorname{Re} u &= 0 \\ \ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \frac{3}{2}\omega^2(u + \bar{u}) &= 0. \end{aligned} \quad (11.1.5)$$

La solución general de esta ecuación con coeficientes constantes es

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{3ie^{-it\omega}}{2\omega} + \frac{ie^{it\omega}}{2\omega} - \frac{2i}{\omega}\right)c_1 + \left(-3it - \frac{3e^{-it\omega}}{\omega} + \frac{e^{it\omega}}{\omega} + \frac{2}{\omega}\right)c_2 \\ &+ \left(-6it\omega - \frac{9}{2}e^{-it\omega} + \frac{3}{2}e^{it\omega} + 4\right)c_3 + ic_4 \end{aligned}$$

y por lo tanto la solución general en $\delta\zeta$ es:

$$\delta\zeta = \frac{i(3 - 4e^{it\omega} + e^{2it\omega})c_1}{2\omega} + \frac{(e^{it\omega}(2 - 3it\omega) + e^{2it\omega} - 3)c_2}{\omega} \quad (11.1.6)$$

$$+ \frac{1}{2}(4e^{it\omega}(2 - 3it\omega) + 3e^{2it\omega} - 9)c_3 + ie^{it\omega}c_4, \quad (11.1.7)$$

Calculemos ahora la matriz de monodromía. Antes de proceder comentemos sobre las condiciones iniciales: Recordemos que $\delta\zeta = \delta x + i\delta y$, $\delta\zeta' = \delta u + i\delta v$. Por lo tanto:

- Sea $\delta\zeta_1$ la solución con condiciones iniciales: $\delta\zeta(0) = 1$, $\delta\zeta'(0) = 0$ entonces $\delta x(0) = 1$, $\delta y(0) = 0$, $\delta x'(0) = 0$, $\delta y'(0) = 0$ y por lo tanto,

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial x_0}, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \delta u = \frac{\partial u}{\partial x_0}, \quad \delta v = \frac{\partial v}{\partial x_0}$$

es decir

$$\delta\zeta_1 = \frac{\partial x}{\partial x_0} + i \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \delta\zeta_1' = \frac{\partial u}{\partial x_0} + i \frac{\partial v}{\partial x_0}.$$

- Sea $\delta\zeta_2$ la solución con condiciones iniciales: $\delta\zeta(0) = i$, $\delta\zeta'(0) = 0$ entonces $\delta x(0) = 0$, $\delta y(0) = 1$, $\delta x'(0) = 0$, $\delta y'(0) = 0$ y por lo tanto,

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial y_0}, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \delta u = \frac{\partial u}{\partial y_0}, \quad \delta v = \frac{\partial v}{\partial y_0},$$

es decir

$$\delta\zeta_2 = \frac{\partial x}{\partial y_0} + i \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \delta\zeta_2' = \frac{\partial u}{\partial y_0} + i \frac{\partial v}{\partial y_0}.$$

- Sea $\delta\zeta_3$ la solución con condiciones iniciales: $\delta\zeta(0) = 0$, $\delta\zeta'(0) = 1$ entonces $\delta x(0) = 0$, $\delta y(0) = 0$, $\delta x'(0) = 1$, $\delta y'(0) = 0$ y por lo tanto,

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u_0}, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial u_0}, \quad \delta u = \frac{\partial u}{\partial u_0}, \quad \delta v = \frac{\partial v}{\partial u_0},$$

es decir

$$\delta\zeta_3 = \frac{\partial x}{\partial u_0} + i \frac{\partial y}{\partial u_0}, \quad \delta\zeta_3' = \frac{\partial u}{\partial u_0} + i \frac{\partial v}{\partial u_0}.$$

- Sea $\delta\zeta_4$ la solución con condiciones iniciales: $\delta\zeta(0) = 0$, $\delta\zeta'(0) = i$ entonces $\delta x(0) = 0$, $\delta y(0) = 0$, $\delta x'(0) = 0$, $\delta y'(0) = 1$ y por lo tanto,

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial v_0}, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial v_0}, \quad \delta u = \frac{\partial u}{\partial v_0}, \quad \delta v = \frac{\partial v}{\partial v_0},$$

es decir

$$\delta\zeta_4 = \frac{\partial x}{\partial v_0} + i \frac{\partial y}{\partial v_0}, \quad \delta\zeta_4' = \frac{\partial u}{\partial v_0} + i \frac{\partial v}{\partial v_0}.$$

Para ello primero calculamos las soluciones correspondientes a las condiciones iniciales:

- $\delta\zeta_1(0) = 1$, $\delta\zeta_1'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \delta\zeta_1(t) = & e^{it\omega} \left(-6it\omega - \frac{9}{2}e^{-it\omega} + \frac{3}{2}e^{it\omega} + 4 \right) - e^{it\omega} \left(-3it - \frac{3e^{-it\omega}}{\omega} + \frac{e^{it\omega}}{\omega} + \frac{2}{\omega} \right) \omega \\ & (11.1.8) \end{aligned}$$

- $\delta\zeta_2(0) = i$, $\delta\zeta_2'(0) = 0$:

$$\delta\zeta_2(t) = e^{it\omega} \left(\frac{3ie^{-it\omega}}{2\omega} + \frac{ie^{it\omega}}{2\omega} - \frac{2i}{\omega} \right) \omega + ie^{it\omega} \quad (11.1.9)$$

- $\delta\zeta_3(0) = 0, \delta\zeta_3'(0) = 1$:

$$\delta\zeta(t) = e^{it\omega} \left(\frac{3ie^{-it\omega}}{2\omega} + \frac{ie^{it\omega}}{2\omega} - \frac{2i}{\omega} \right) \quad (11.1.10)$$

- $\delta\zeta_4(0) = 0, \delta\zeta_4'(0) = i$:

$$\delta\zeta(t) = e^{it\omega} \left(-3it - \frac{3e^{-it\omega}}{\omega} + \frac{e^{it\omega}}{\omega} + \frac{2}{\omega} \right) \quad (11.1.11)$$

Luego la matriz de monodromía

$$M = \begin{pmatrix} \delta\zeta_1(T) & \delta\zeta_2(T) & \delta\zeta_3(T) & \delta\zeta_4(T) \\ \delta\zeta_1'(T) & \delta\zeta_2'(T) & \delta\zeta_3'(T) & \delta\zeta_4'(T) \end{pmatrix}$$

con $T = 2\pi/\omega$. Resulta en

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6\pi & 1 & 0 & -\frac{6\pi}{\omega} \\ 6\pi\omega & 0 & 1 & 6\pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.1.12)$$

El último renglón muestra que $\lambda = 1$ es un valor propio; quitando el último renglón y la última columna obtenemos una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, de donde se sigue que $\lambda = 1$ es un valor propio de multiplicidad 4. \square

11.2. Imposibilidad de continuar órbitas circulares por simetría

Veamos ahora si es posible continuar la órbita circular imponiendo la condición de que sea simétrica respecto de a simetría σ_2 . Para ello consideremos las ecuaciones de periodicidad (9.2.1), (9.2.2)

$$\begin{aligned} f(t_0, x_0, \mu) = y(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, h, \mu), \mu) &= 0 \\ g(t_0, x_0, \mu) = u(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, h, \mu), \mu) &= 0 \end{aligned}$$

Hagamos $\mu = 0$ y fijemos la energía h en un valor negativo. La solución circular (11.0.3), concretamente

$$x(t) = 1 + a \cos(\omega t) \quad (11.2.1)$$

$$y(t) = a \sin(\omega t) \quad (11.2.2)$$

$$u(t) = x'(t) = -a\omega \sin(\omega t) \quad (11.2.3)$$

$$v(t) = y'(t) = a\omega \cos(\omega t) \quad (11.2.4)$$

tiene por condición inicial en $t = 0$,

$$(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1 + a, 0, 0, a\omega)$$

y para $t_0 = \pi/\omega$ se satisface

$$\begin{aligned} f(\pi/\omega, a, 0) = y(\pi/\omega, 1 + a, 0, 0, a\omega, \mu = 0) &= a \sin(\pi) = 0 \\ g(\pi/\omega, a, 0) = u(\pi/\omega, 1 + a, 0, 0, a\omega, \mu = 0) &= -a\omega \sin(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de la función implícita, si el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial x_0} \\ \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial x_0} \end{pmatrix} \quad (11.2.5)$$

evaluado en $t_0 = \pi/\omega$, $x_0 = 1 + a$, $\mu = 0$, es diferente de cero, entonces existe una curva de clase C^1 , $t_0(\mu)$, $x_0(\mu)$ definida en una vecindad de $\mu = 0$, que satisface las ecuaciones de periodicidad

$$\begin{aligned} y(t_0(\mu), x_0(\mu), 0, 0, \vartheta(x_0(\mu), h, \mu), \mu) &= 0 \\ u(t_0(\mu), x_0(\mu), 0, 0, \vartheta(x_0(\mu), h, \mu), \mu) &= 0 \end{aligned}$$

además de $t_0(0) = \pi/\omega$, $x_0(0) = 1 + a$. Así $x_0(\mu)$ es una curva de condiciones iniciales para una solución periódica σ_2 -simétrica de período $2t_0(\mu)$.

Proposición 12. *El determinante de la matriz jacobiana (11.2.5) es igual a cero*

Demostración: La matriz (11.2.5) en forma explícita es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial y}{\partial v_0} \vartheta'_{x_0} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial v_0} \vartheta'_{x_0} \end{pmatrix}, \quad (11.2.6)$$

donde las derivadas parciales van evaluadas en $(\pi/\omega, 1+a, 0, 0, a\omega)$, para $\mu = 0$. Las derivadas respecto de t se calculan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y'(t) = v(t) = a\omega \cos(\omega t),$$

usando (11.2.4). En particular en $t = \pi/\omega$,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -a\omega. \quad (11.2.7)$$

De la misma manera,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u'(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t),$$

usando (11.2.3). En particular en $t = \pi/\omega$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\omega^2. \quad (11.2.8)$$

Las derivadas parciales respecto de x_0 se obtienen resolviendo las ecuaciones variacionales (12.2.3), (12.2.4) con la condición inicial (12.2.5). La solución a dichas variacionales se obtienen precisamente de (11.1.8), vgr.

$$\delta\zeta_1 = \frac{\partial x}{\partial x_0} + i \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \delta\zeta'_1 = \frac{\partial u}{\partial x_0} + i \frac{\partial v}{\partial x_0}$$

como funciones de t y de las condiciones iniciales, de aquí que

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = \Im(\delta\zeta_1), \quad \frac{\partial u}{\partial x_0} = \operatorname{Re}(\delta\zeta'_1),$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x_0} &= -3t\omega \cos(t\omega) + 2 \sin(t\omega) + \frac{1}{2} \sin(2t\omega), \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} &= \omega(3t\omega \cos(t\omega) + \sin(t\omega) - \sin(2t\omega)).\end{aligned}$$

Evaluando en $t = \pi/\omega$,

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = -3\pi \quad (11.2.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = -3\pi\omega. \quad (11.2.10)$$

Análogamente

$$\frac{\partial y}{\partial v_0} = \Im(\delta\zeta_4), \quad \frac{\partial u}{\partial v_0} = \operatorname{Re}(\delta\zeta_4'),$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial v_0} &= \frac{-3t\omega \cos(t\omega) + 2 \sin(t\omega) + \sin(2t\omega)}{\omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial v_0} &= 3t\omega \cos(t\omega) + \sin(t\omega) - 2 \sin(2t\omega)\end{aligned}$$

Evaluando en $t = \pi/\omega$,

$$\frac{\partial y}{\partial v_0} = \frac{3\pi}{\omega} \quad (11.2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v_0} = -3\pi. \quad (11.2.12)$$

Finalmente la expresión (9.2.5) para ϑ con $\mu = 0$ es

$$\vartheta(x_0, h, \mu = 0) = \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{|x_0 - 1|} \right)}$$

por lo que $\vartheta(1+a, h, \mu = 0) = \sqrt{2(h + \frac{1}{a})}$ y

$$\vartheta'_{x_0}(x_0, h, 0) = \frac{-\frac{x_0-1}{|x_0-1|^3}}{\sqrt{2 \left(h + \frac{1}{|x_0-1|} \right)}}$$

sustituyendo $x_0 = 1 + a$ con $a > 0$ obtenemos

$$\vartheta'_{x_0}(1+a, h, 0) = \frac{-\frac{1}{a^2}}{\sqrt{2(h + \frac{1}{a})}}$$

pero para una órbita circular $h = -1/(2a)$, luego

$$\vartheta'_{x_0}(1+a, h, 0) = \frac{-\frac{1}{a^2}}{\sqrt{\frac{1}{a}}} = -\frac{1}{a^{3/2}} = -\omega \quad (11.2.13)$$

Sustituyendo todos estos valores: (11.2.7), (11.2.8), (11.2.9), (11.2.10), (11.2.11), (11.2.12), (11.2.13) en la matriz (11.2.5) obtenemos

$$\begin{pmatrix} -a\omega & 3\pi + \left(\frac{3\pi}{\omega}\right)(-\omega) \\ a\omega^2 & -3\pi\omega + (-3\pi)(-\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\omega & 0 \\ a\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

cuyo determinante es 0. □

Capítulo 12

Continuación numérica respecto de μ

Supongamos que para $\mu = \mu_0$ se conoce la condición inicial $(x_0, 0, 0, v_0)$ de una órbita periódica simétrica, el método de continuación analítica consiste en encontrar las condiciones iniciales necesarias para obtener otra órbita periódica vecina con parámetro $\mu_0 + \Delta\mu$ y condición inicial $(x_0 + \Delta x_0, 0, 0, v_0 + \Delta v_0)$. Es importante remarcar que a lo largo de esta sección mantenemos *el valor de la energía fijo*. La continuación respecto del parámetro μ , para un valor fijo de la energía h , lo realizaremos con un algoritmo de dos etapas. En la primera etapa se predice la condición inicial de la órbita periódica vecina y en la segunda etapa la corregimos usando el método de Newton. Contar con una buena predicción es necesario, pues el método de Newton es de convergencia local.

12.1. El Método predictor

En lo sucesivo haremos explícita la dependencia de $\vartheta(x_0, \mu)$ omitiendo la dependencia en h , ya que se mantendrá constante. En el método predictor (9.2.1), (9.2.2) debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y(t_0 + \Delta T, x + \Delta x_0, 0, 0, \vartheta(x_0 + \Delta x_0, \mu_0 + \Delta\mu), \mu_0 + \Delta\mu) &= 0, \\ u(t_0 + \Delta T, x + \Delta x_0, 0, 0, \vartheta(x_0 + \Delta x_0, \mu_0 + \Delta\mu), \mu_0 + \Delta\mu) &= 0 \end{aligned}$$

para los incrementos Δt_0 , Δx_0 y $\Delta\mu$. Si expandimos respecto de los incrementos y retenemos sólo los términos de primer orden, obtenemos el sistema lineal aproximado

$$\begin{aligned} & \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \Delta t_0 + \\ & \frac{\partial y}{\partial x_0}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \Delta x_0 + \frac{\partial y}{\partial v_0}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0), \mu_0) \vartheta'_{x_0}(x_0, \mu_0) \Delta x_0 \\ = & - \frac{\partial y}{\partial v_0}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_{\mu_0}(x_0, \mu_0) \Delta\mu - \frac{\partial y}{\partial \mu}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0), \mu_0) \Delta\mu \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \Delta t_0 + \\ & \frac{\partial u}{\partial x_0}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \Delta x_0 + \frac{\partial u}{\partial v_0}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0), \mu_0) \vartheta'_{x_0}(x_0, \mu_0) \Delta x_0 \\ = & - \frac{\partial u}{\partial v_0}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_{\mu_0}(x_0, \mu_0) \Delta\mu - \frac{\partial u}{\partial \mu}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0), \mu_0) \Delta\mu \end{aligned}$$

Si el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial y}{\partial v_0} \vartheta'_{x_0} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial v_0} \vartheta'_{x_0} \end{pmatrix}, \quad (12.1.1)$$

donde las derivadas parciales de y, u van evaluadas en $(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0)$ y la derivada parcial ϑ'_{x_0} en (x_0, μ_0) , es diferente de cero, entonces podemos determinar Δt_0 y Δx_0 en función de $\Delta\mu$ como solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial y}{\partial v_0} \vartheta'_{x_0} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial v_0} \vartheta'_{x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_0 \\ \Delta x_0 \end{pmatrix} = -\Delta\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial v_0} \vartheta'_{\mu} \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} + \frac{\partial u}{\partial v_0} \vartheta'_{\mu} \end{pmatrix} \quad (12.1.2)$$

con la matriz de coeficientes evaluada $(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0)$ y la derivada parcial ϑ'_{x_0} en (x_0, μ_0) .

12.2. Las ecuaciones variacionales

Las derivadas parciales del sistema (12.1.2) se calculan mediante las ecuaciones variacionales como sigue: reescribamos las ecuaciones de movimiento como

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ y' &= v, \\ u' &= -\frac{\mu(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(x-1)}{r_2^3}, \\ v' &= -\frac{\mu y}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)y}{r_2^3}. \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= y'(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \\ &= v(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= u'(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \\ &= -\frac{\mu_0(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu_0)(x-1)}{r_1^3} \end{aligned}$$

con $r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ evaluados en la solución $x(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0)$, $y(t_0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0)$.

El resto de las derivadas parciales que aparecen en (12.1.2) se obtienen como sigue: ya que

$$\vartheta(x_0, \mu_0) = \sqrt{2 \left(h + \frac{\mu}{|x_0+1|} + \frac{1-\mu}{|x_0-1|} \right)}$$

entonces

$$\vartheta'_{x_0}(x_0, \mu_0) = -\frac{\frac{\mu_0(x_0+1)}{|x_0+1|^3} + \frac{(1-\mu_0)(x_0-1)}{|x_0-1|^3}}{\vartheta(x_0, \mu_0)}. \quad (12.2.2)$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial x_0}$, $\frac{\partial u}{\partial x_0}$ del sistema lineal (12.1.2) se obtienen resolviendo las ecua-

ciones variacionales

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} \end{bmatrix}, \quad (12.2.3)$$

donde A denota la matriz derivada del campo vectorial definido por el sistema (12.2.1):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu}{r_1^3} - \frac{1-\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu(x+1)^2}{r_1^5} + \frac{3(1-\mu)(x-1)^2}{r_2^5} & \frac{3\mu(x+1)y}{r_1^5} + \frac{3(1-\mu)(x-1)y}{r_2^5} & 0 & 0 \\ \frac{3\mu(x+1)y}{r_1^5} + \frac{3(1-\mu)(x-1)y}{r_2^5} & -\frac{\mu}{r_1^3} - \frac{1-\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu y^2}{r_1^5} + \frac{3(1-\mu)y^2}{r_2^5} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.2.4)$$

Al sistema variacional (12.2.3) se le adjunta la condición inicial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.2.5)$$

En efecto, de las condiciones iniciales para la solución

$$\begin{aligned} x(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0)) &= x_0, \\ y(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0)) &= 0, \\ u(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0)) &= 0, \\ v(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0)) &= \vartheta(x_0, \mu_0). \end{aligned} \quad (12.2.6)$$

se obtiene, derivando ambos miembros respecto de x_0 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) + \frac{\partial x}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_{x_0}(x_0, \mu_0) &= 1, \\ \frac{\partial y}{\partial x_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) + \frac{\partial y}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_{x_0}(x_0, \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) + \frac{\partial u}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_{x_0}(x_0, \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) + \frac{\partial v}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_{x_0}(x_0, \mu_0) &= \vartheta'_{x_0}(x_0, \mu_0), \end{aligned} \quad (12.2.7)$$

Por otro lado para calcular las derivadas respecto a v_0 partimos de:

$$\begin{aligned} x(0, x_0, 0, 0, v_0) &= x_0, \\ y(0, x_0, 0, 0, v_0) &= 0, \\ u(0, x_0, 0, 0, v_0) &= 0, \\ v(0, x_0, 0, 0, v_0) &= v_0. \end{aligned} \tag{12.2.8}$$

y ahora derivamos respecto a v_0 y evaluamos en $(0, x_0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0)$ para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 1. \end{aligned} \tag{12.2.9}$$

Sustituyendo (12.2.9) en (12.2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 1, \\ \frac{\partial y}{\partial x_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \end{aligned} \tag{12.2.10}$$

que es la condición inicial (12.2.5) para la variacional (12.2.3).

Las derivadas respecto a v_0 , satisfacen el sistema variacional

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v_0} \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} \\ \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v_0} \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} \\ \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{bmatrix} \tag{12.2.11}$$

donde A es la misma matriz (12.2.4) y la condición inicial que ya hemos deducido antes en (12.2.9), vgr.,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v_0} \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} \\ \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{12.2.12}$$

Finalmente las derivadas parciales respecto de μ en (12.1.2) se calculan resolviendo el sistema variacional inhomogéneo

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} \\ \frac{\partial v}{\partial \mu} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} \\ \frac{\partial v}{\partial \mu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{x+1}{r_1^3} - \frac{x-1}{r_2^3} \\ -y \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \end{bmatrix}. \quad (12.2.13)$$

La ecuación variacional inhomogénea (12.2.13) se supe de la condición inicial homogénea

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} \\ \frac{\partial v}{\partial \mu} \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.2.14)$$

Justifiquemos esta afirmación: a partir de las condiciones iniciales para la solución

$$\begin{aligned} x(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= x_0, \\ y(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ u(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ v(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= \vartheta(x_0, \mu_0). \end{aligned} \quad (12.2.15)$$

Derivando (12.2.15) respecto de μ y evaluando en $(0, x_0, 0, 0, v_0(x_0, \mu_0), \mu_0)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_\mu(x_0, \mu_0) + \frac{\partial x}{\partial \mu}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_\mu(x_0, \mu_0) + \frac{\partial y}{\partial \mu}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_\mu(x_0, \mu_0) + \frac{\partial u}{\partial \mu}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) \vartheta'_\mu(x_0, \mu_0) + \frac{\partial v}{\partial \mu}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= \vartheta'_\mu(x_0, \mu_0). \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial v_0}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 1, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \mu}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \mu}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mu}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \mu}(0, x_0, 0, 0, \vartheta(x_0, \mu_0), \mu_0) &= 0,\end{aligned}$$

que es la condición inicial (12.2.14).

12.3. El método corrector

El método predictor nos da aproximaciones iniciales $t_1^{(0)}, x_1^{(0)}$ para las raíces del sistema

$$\begin{aligned}y(t_1, x_1, 0, 0, v_1) &= 0, \\ u(t_1, x_1, 0, 0, v_1) &= 0,\end{aligned}$$

para un valor de $\mu_1 = \mu_0 + \Delta\mu$ y energía h . Al igual que antes, de las tres incógnitas t_1, x_1, v_1 podemos eliminar v_1 de la relación de energía

$$v_1 = \vartheta(x_1, h, \mu_1) \equiv \vartheta(x_1)$$

donde hemos simplificado la notación pues, h y μ_1 permanecerán fijos en lo sucesivo.

Al aplicar el método de Newton para resolver el sistema

$$f(t_1, x_1) = y(t_1, x_1, 0, 0, \vartheta(x_1)) = 0, \quad (12.3.1)$$

$$g(t_1, x_1) = u(t_1, x_1, 0, 0, \vartheta(x_1)) = 0, \quad (12.3.2)$$

obtenemos la recurrencia

$$\begin{pmatrix} t_1^{(n+1)} \\ x_1^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^{(n)} \\ x_1^{(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta t_1^{(n)} \\ \Delta x_1^{(n)} \end{pmatrix}$$

donde $(\Delta t_1^{(n)}, \Delta x_1^{(n)})^T$ es la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial t_1} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_1^{(n)} \\ \Delta x_1^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)})) \\ u(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)})) \end{pmatrix}. \quad (12.3.3)$$

Para la primera columna de la matriz (12.3.3) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}) &= y'(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)})) = v(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)})), \\ \frac{\partial g}{\partial t_1}(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}) &= u'(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)})) = -\frac{\mu_1(x+1)}{r_1^3} - \frac{(1-\mu_1)(x-1)}{r_2^3}\end{aligned}$$

con $r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ evaluados en la solución $x(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)}))$, $y(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)}))$.

La segunda columna de (12.3.3) está constituida por las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}) &= \frac{\partial y}{\partial x_1}(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)})) + \frac{\partial y}{\partial v_1}(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)}))\vartheta'(x_1^{(n)}), \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}) &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)})) + \frac{\partial u}{\partial v_1}(t_1^{(n)}, x_1^{(n)}, 0, 0, \vartheta(x_1^{(n)}))\vartheta'(x_1^{(n)}).\end{aligned}\tag{12.3.4}$$

donde las parciales respecto de x_1 se obtienen del sistema variacional análogo a (12.2.3) con la condición inicial (12.2.5), explícitamente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \tag{12.3.5}$$

y

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12.3.6}$$

De la misma manera las derivadas parciales respecto de v_1 en (12.3.4) se calculan a partir del sistema variacional

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v_1} \\ \frac{\partial y}{\partial v_1} \\ \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v_1} \\ \frac{\partial y}{\partial v_1} \\ \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{bmatrix}, \tag{12.3.7}$$

y la condición inicial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v_1} \\ \frac{\partial y}{\partial v_1} \\ \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{12.3.8}$$

Capítulo 13

Resultados numéricos

En esta sección se presentan algunos resultados numéricos del problema de los dos centros fijos. Se presentan como sigue: En la Sección 13.1 se presentan algunos mapas de Poincaré tomando como sección transversal el plano $y = 0$ y cualquier dirección de cruce, es decir $\dot{y} > 0$ o $\dot{y} < 0$. Primero fijamos $h = -0.7$ y variamos μ desde $\mu = 0.5$ a $\mu = 0.99$. Para $\mu = 1$ todos los puntos son puntos fijos del mapeo de Poincaré. En seguida mostramos algunos mapas de Poincaré para $\mu = 1/2$ y variando la energía por varlores negativos.

En la Sección 13.2 aplicamos la técnicas de líneas de simetría para calcular algunas órbitas periódicas simétricas para $\mu = 1/2$. Calculamos las primeras tres líneas de simetría tan sólo para mostrar la gran riqueza de órbitas periódicas. Se muestran también algunas de esas órbitas periódicas.

13.1. Mapas de Poincaré

Se toma la sección $y = 0$ con cualquier signo de \dot{y} al momento de cruce. En las siguientes Figuras se muestran los mapas de Poincaré en el plano fase regularizado w_1-W_1 (ver sección 4.2) y en el plano fase original $x-p_x$

13.2. Líneas de simetría

En esta sección se presentan algunos ejemplos de líneas de simetría calculadas para $\mu = 1/2$ y $h = -1$. Este es el valor crítico de la energía para el cual la frontera de la región de Hill tiene una punto crítico que corresponde a un punto de equilibrio del sistema que no

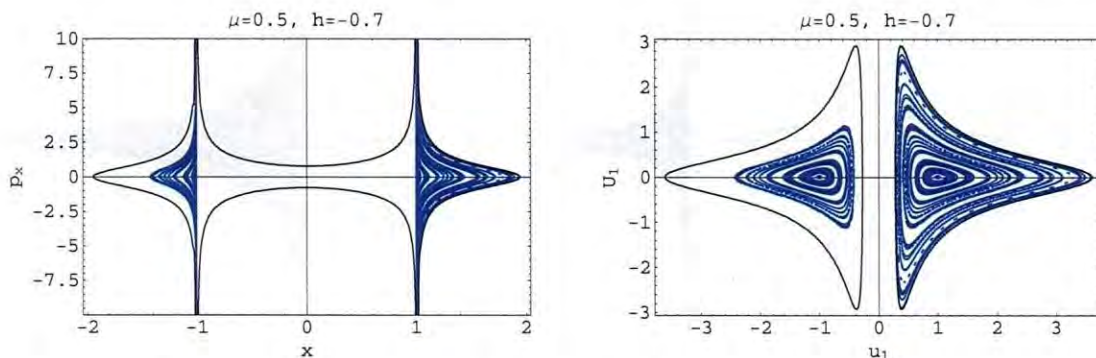


Figura 13.1: Mapas de Poincaré. Plano fase original $x-p_x$ (izq.) y plano fase regularizado w_1-W_1 (der.)

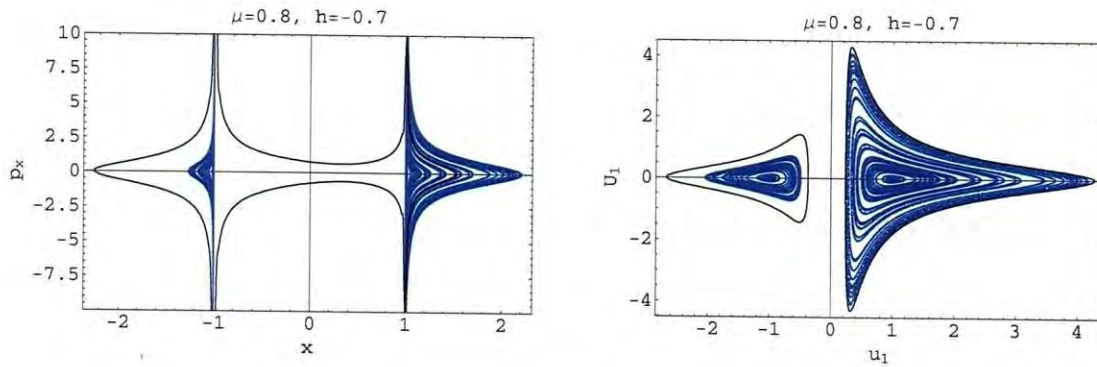


Figura 13.2: Mapas de Poincaré. Plano fase original $x-p_x$ (izq.) y plano fase regularizado w_1-W_1 (der.)

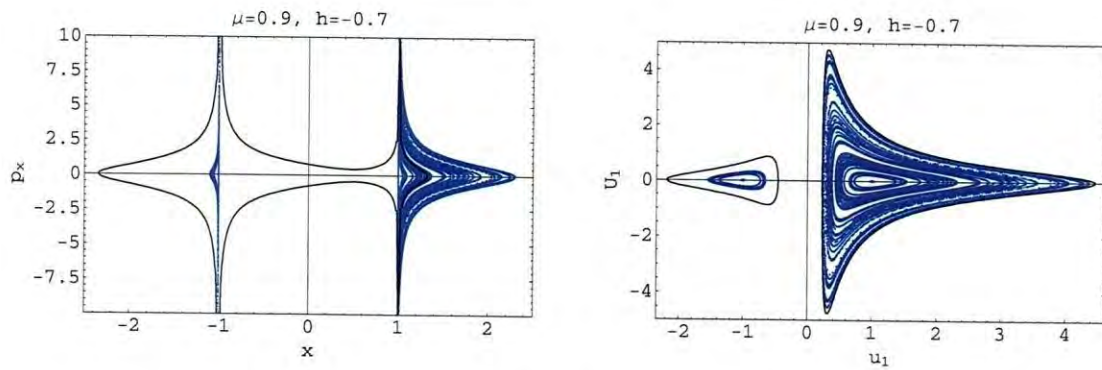


Figura 13.3: Mapas de Poincaré. Plano fase original $x-p_x$ (izq.) y plano fase regularizado w_1-W_1 (der.)

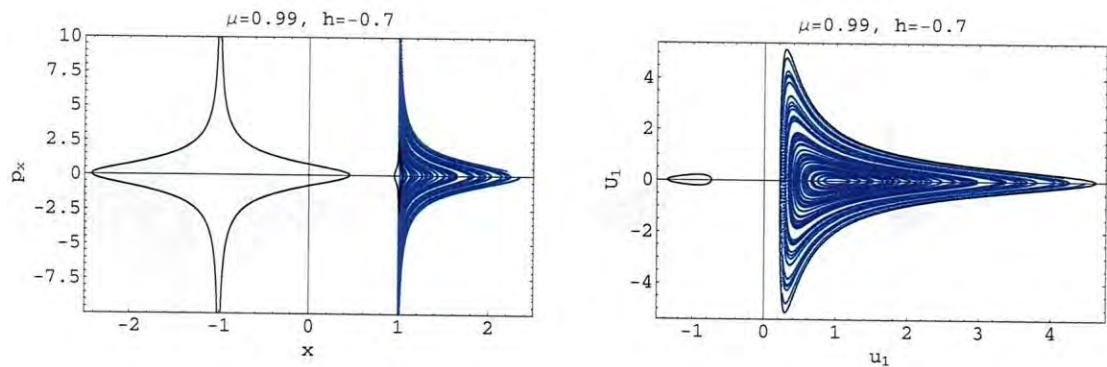


Figura 13.4: Mapas de Poincaré. Plano fase original $x-p_x$ (izq.) y plano fase regularizado w_1-W_1 (der.)

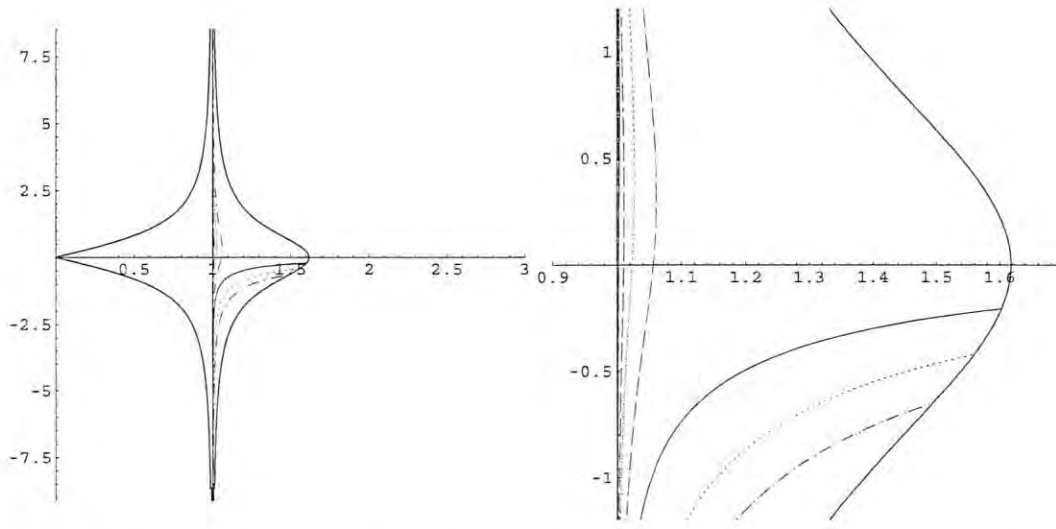


Figura 13.5: Líneas de simetría en el plano $x-u$ (izq.) y un acercamiento (der.)

es más que el punto de reposo inestable a la mitad entre los primarios. En las siguientes figuras se muestran las primeras tres líneas de simetría Γ_2 , Γ_4 y Γ_6 , tanto en el plano original $x-u$ como en el plano regularizado w_1-W_1 .

Como puede observarse en el plano original, es muy difícil extraer información sobre las intersecciones de las líneas de simetría debido a que son asintóticas a la recta de colisión $x = 1$. En las siguientes figuras se muestran las líneas de simetría en las variables regularizadas y se observa claramente la dinámica de las líneas de simetría.

A partir de las intersecciones de líneas de simetría se puede obtener una aproximación a la condición inicial de la órbita periódica simétrica en la Figura 13.7.

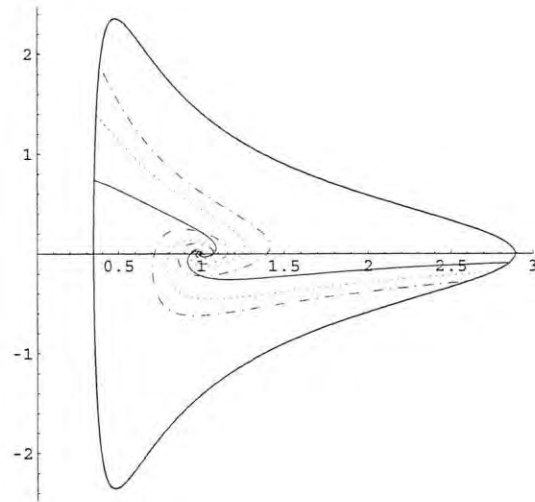


Figura 13.6: Las primeras tres líneas de simetría Γ_2 (-), Γ_4 (...) y Γ_6 (-.-)

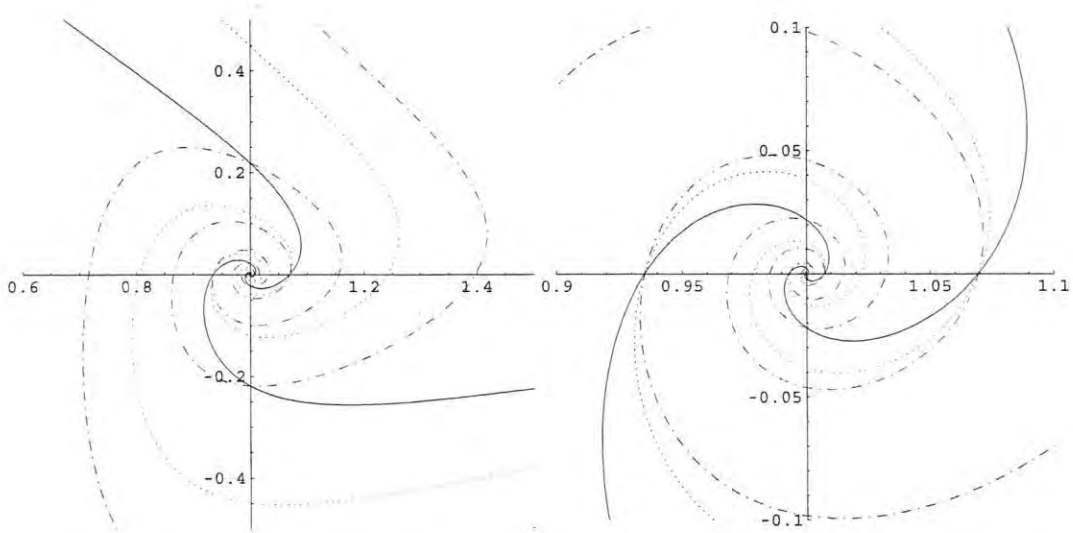


Figura 13.7: Acercamiento de las primeras tres líneas de simetría Γ_2 (-), Γ_4 (...) y Γ_6 (-.-)

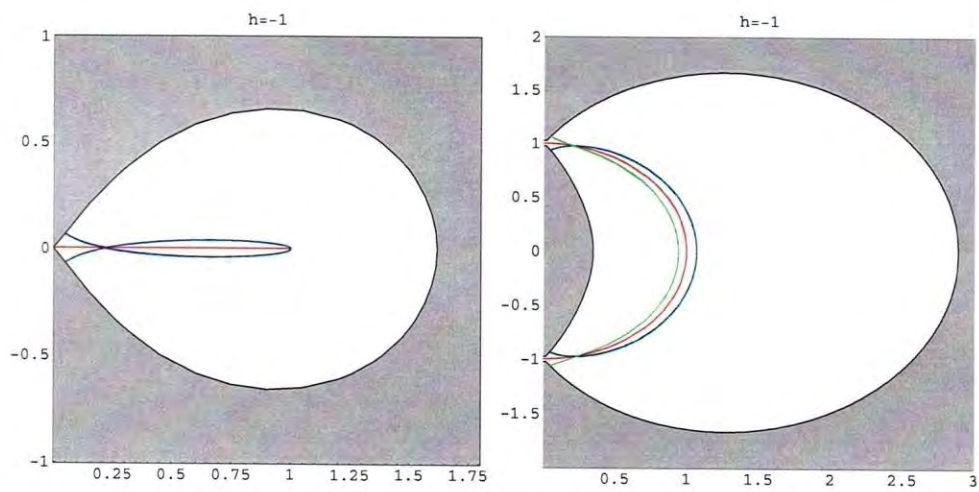


Figura 13.8: Órbitas periódicas simétricas en el plano original (izq.) y en el plano regularizado (der.) La órbita en rojo que conecta los puntos críticos (der) se mapea en una órbita de colisión (izq.) y las órbitas en verde y azul (der.) se mapean en una misma órbita en azul (izq.)



Figura 1.3. (a) Diagrama de un cuadrado con un agujero circular. (b) Diagrama de un cuadrado con un agujero circular y una región sombreada azul.

Capítulo 14

Continuación de órbitas periódicas

Para $\mu = 0$ las órbitas Keplerianas circulares no se pueden continuar analíticamente, debido a que los multiplicadores son todos iguales a 1 y el determinante relevante para continuarlas por simetría (11.2.5) se anula. Las órbitas elípticas tampoco pueden continuarse pues sus multiplicadores son todos iguales a 1 debido a que las integrales de energía y de Euler son independientes a lo largo de éstas. Las órbitas elípticas tampoco pueden continuarse por simetría ya que usando coordenadas de Delaunay (l, g, L, G) como en el problema restringido, para $\mu = 0$ el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2L}$$

y el determinante equivalente a (11.2.5) es igual a cero. Por lo tanto no es posible continuar las órbitas Keplerianas al problema de los centros fijos. Esto habla del alto grado de degeneración del problema de Kepler, un hecho bien conocido.

Sin embargo para $\mu = 1/2$ se pueden calcular algunas órbitas periódicas simétricas mediante el método de líneas de simetría, y una vez calculadas se puede intentar su continuación analítica de manera numérica.

Esto fue hecho para dos órbitas particulares: La órbita ocho y una órbita que llamamos de “carnero” pues la mitad de ella semeja el carnero (Aries) del horóscopo.

14.1. Continuación de la órbita ocho

En las Figuras 14.1, 14.2 se muestran cuatro fases de la órbita ocho para un valor fijo de la energía, comenzando con $\mu = 1/2$ y finalizando con el último valor de μ antes de que la familia termine en colisión con el primario en $(1, 0)$. Por simetría, esta familia nace en colisión con el primario $(-1, 0)$ para $\mu = 0.9186$. Así, tenemos completamente descrito el origen y final de esta familia, al menos para el valor de energía $h = -0.7$. El diagrama de bifurcación de la familia se muestra en la Figura 14.3.

14.2. Continuación de la órbita del carnero

En las siguientes figuras se muestran cuatro fases de la órbita del carnero para un valor fijo de la energía $h = -0.7$, comenzando con $\mu = 1/2$ y finalizando con el último valor de μ antes de que la familia termine en colisión con el primario en $(1, 0)$. Por simetría, esta familia nace en colisión con el primario $(-1, 0)$ para $\mu = .9488$. Así, tenemos completamente descrito el origen y final de esta familia, al menos para este valor de la energía..

El diagrama de bifurcación de la familia se muestra en la Figura 14.6

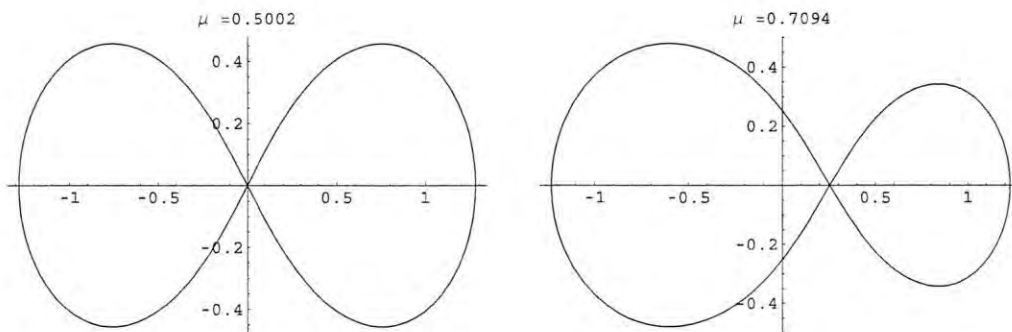


Figura 14.1: Fases de la familia de la órbita ocho

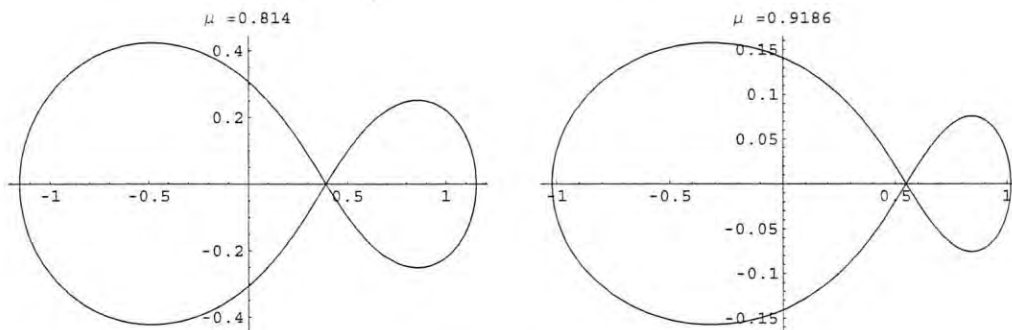
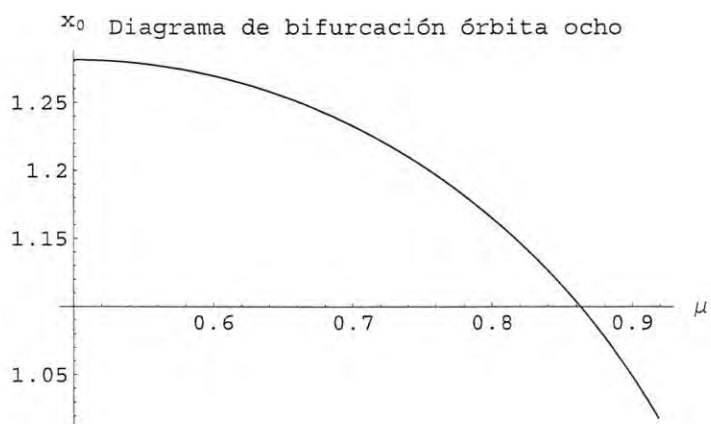


Figura 14.2: Fases de la familia de la órbita ocho

Figura 14.3: Diagrama de bifurcación de la familia ocho para $\mu \in [0.5, 0.9186)$

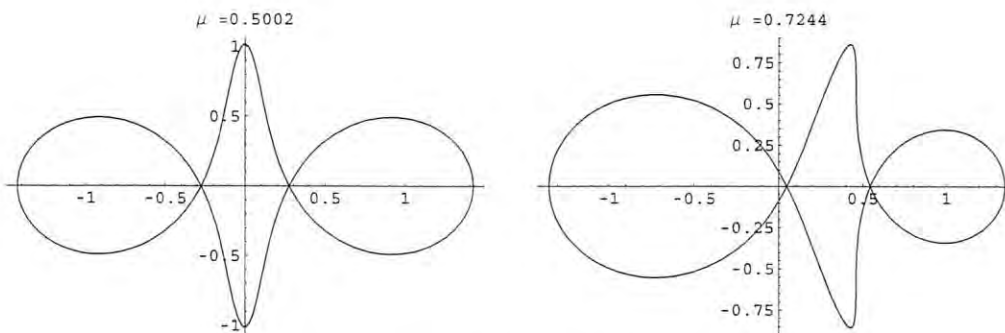


Figura 14.4: Fases de la familia de la órbita del carnero

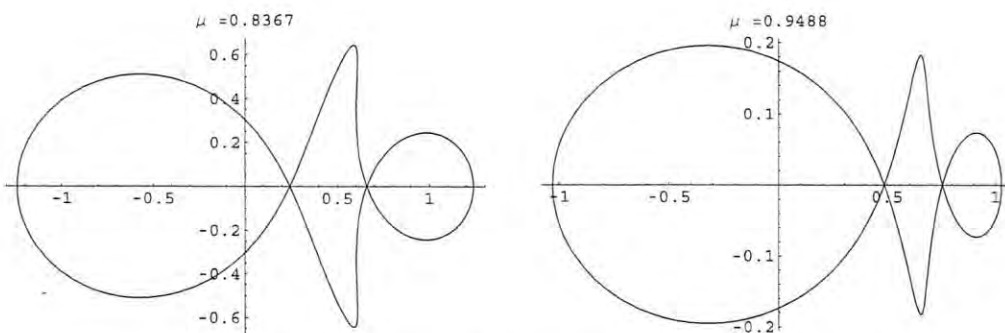


Figura 14.5: Fases de la familia de la órbita del carnero

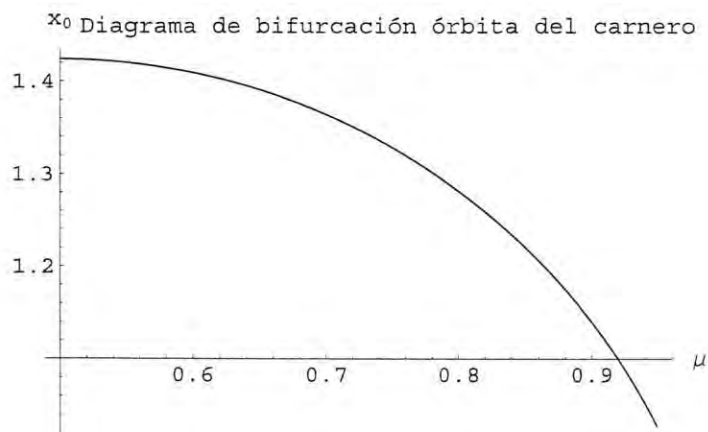


Figura 14.6: Diagrama de bifurcación de la familia del carnero para $\mu \in [0.5, .9488)$

Capítulo 15

Conclusiones

- El problema de los dos centros fijos en el plano es integrable, como fue exhibido por Euler, pues existen dos integrales primeras: la energía y la integral de Euler. La energía nos permitió calcular las regiones de Hill; en particular mostrar que para energía negativa las regiones de Hill son acotadas. Éste resultado se interpreta de la siguiente manera: si la energía cinética no domina sobre la energía potencial entonces la masa en movimiento no alcanza a escapar de la acción gravitatoria de los centros fijos, lo que implica que el movimiento tiene lugar en una región de área finita.
- Debido a que el problema presenta singularidades debidas a colisión con alguno de los primarios es necesario regularizar las ecuaciones, al realizarse lo anterior, las órbitas pueden pasar cerca de los centros fijos, incluso pueden continuar aún si la trayectoria colisiona con uno de éstos centros, incluso la colisión no es obstáculo para continuar órbitas.
- Se regularizaron las ecuaciones usando varios métodos:
 - El mapeo de Birkhoff y regularización Lagrangianas.
 - El mapeo de Birkhoff y regularización Hamiltoniana.
 - Regularización Hamiltoniana usando coordenadas elípticas cofocales.
 - Regularización Hamiltoniana usando coordenadas elípticas cofocales polares.
- Se estudiaron las condiciones bajo las cuales un sistema con dos grados de libertad es separable en el sentido de la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable.
- Se mostró la separabilidad del problema en coordenadas elípticas cofocales y elípticas polares.
- Se estudiaron las simetrías del problema.
- El estudio de las líneas de simetría proporcionó una buena herramienta para visualizar la existencia de órbitas periódicas de diferentes periodos.
- Se calcularon algunas familias de órbitas periódicas simétricas para masas iguales.
- Se aplicó el método de continuación analítica para seguir las órbitas periódicas simétricas para masas distintas.
- Las órbitas circulares no cumplen las condiciones para que funcione la continuación analítica.
- Las órbitas que permitieron la continuación analítica, fueron la órbita en forma de ocho y la órbita del carnero.

Apéndice A

Formas diferenciales

A.1. Pullback y derivada exterior

Una 1-forma diferencial en \mathbb{R}^n con coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ es una expresión formal

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i. \quad (\text{A.1.1})$$

Una 2-forma diferencial en \mathbb{R}^n es una expresión formal

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j. \quad (\text{A.1.2})$$

Las 1-formas diferenciales se integran sobre curvas: si $C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = x(t)$, es suave a trozos,

$$\int_C \alpha = \int_C \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i \equiv \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(x(t)) \frac{dx_i}{dt} dt,$$

y la integral no depende de la parametrización de la curva C .

Las 2-formas diferenciales se integran sobre superficies: si $S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $S(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_k(u, v)) = x(u, v)$, es suave excepto en un conjunto de medida cero entonces se define

$$\int_S \omega = \int_S \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j = \int_{[0,1]^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x(u, v)) \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} du dv$$

donde

$$\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial x_i}{\partial v} \\ \frac{\partial x_j}{\partial u} & \frac{\partial x_j}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Estas integrales son invariantes bajo reparametrizaciones de la superficie que preservan la orientación.

En general una k -forma diferencial es una expresión formal

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (\text{A.1.3})$$

que integra sobre k -superficies parametrizadas,

$$\begin{aligned} S(u_1, u_2, \dots, u_k) &= (x_1(u_1, u_2, \dots, u_k), \dots, x_n(u_1, u_2, \dots, u_k)) \\ &= x(u_1, u_2, \dots, u_k) \end{aligned}$$

$$\int_S \beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x(u_1, u_2, \dots, u_k)) \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} du_1 du_2 \dots du_k$$

donde

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_k}{\partial u_k} \end{vmatrix}$$

Definición 4. Sea β una k -forma diferencial (A.1.3), $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un cambio de coordenadas, $x = f(u)$ el pullback de β bajo el cambio de coordenadas es

$$f^*(\beta) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x(u_1, u_2, \dots, u_k)) \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_k. \quad (\text{A.1.4})$$

La diferencial exterior de una 1-forma (A.1.1) se define como

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_i \quad (\text{A.1.5})$$

y de la 2-forma (A.1.2) como

$$d\omega = \sum_k \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x) dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j. \quad (\text{A.1.6})$$

En general,

Definición 5. La diferencial exterior de la k -forma (A.1.3) es la $k+1$ -forma

$$d\beta = \sum_k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_k}(x) dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (\text{A.1.7})$$

Definición 6. Una k -forma β se dice cerrada, si $d\beta = 0$ y exacta, si existe una $k-1$ -forma γ tal que $\beta = d\gamma$.

El siguiente resultado se conoce como el *Lema de Poincaré*

Lema 12. Si β es una k -forma cerrada entonces para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de x donde β es exacta.

Observación 7. El Lema de Poincaré depende fuertemente de la topología del dominio donde esté definida la forma cerrada. Por ejemplo si sólo está definida en una vecindad de x en \mathbb{R}^n , es suficiente que la vecindad sea estrellada respecto de x , i.e. si $y \in U$ entonces todo el segmento \overline{xy} está contenido en U .

Los siguientes resultados se conocen como naturalidad del pullback.

Proposición 13. Se satisfacen la siguientes propiedades

1. $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.
2. $f^*(d\alpha) = d f^*(\alpha)$.

A.2. Formas simplécticas y campos Hamiltonianos

De las diversas operaciones exteriores, para nuestro propósito será necesario revisar cómo una k -forma se puede contraer con un campo vectorial resultando en una $k - 1$ forma.

Definición 7. La contracción de la k -forma β (A.1.3) y el campo vectorial

$$X = \sum_i X^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

es la $k - 1$ -forma

$$i_X \beta = \sum_{i_1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) X^{i_1}(x) \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Observación 8. En terminología tensorial se dice que $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ es un tensor covariante antisimétrico y que X^i es un tensor contravariante. Entonces $a_{i_1 i_2 \dots i_k} X^{i_1}$ es la contracción de los tensores respecto del índice i_1 , donde el índice repetido i_1 indica suma.

Sea ω una 2-forma X, Y dos campos vectoriales. Entonces podemos contraer repetidamente resultando en un escalar (una función escalar de x)

$$i_Y i_X \omega \equiv \omega(X, Y) \quad (\text{A.2.1})$$

La aplicación así definida resulta bilineal antisimétrica:

$$\begin{aligned} \omega(X, Y) &= -\omega(Y, X) \\ \omega(\lambda X + Y, Z) &= \lambda \omega(X, Z) + \omega(Y, Z) \end{aligned}$$

siendo X, Y, Z campos vectoriales y λ un escalar.

Definición 8. Una 2-forma se dice que es no degenerada, si $\omega(X, Y) = 0$, para todo campo vectorial Y implica $X = 0$. En otras palabras, la aplicación de campos vectoriales a 1-formas en \mathbb{R}^n , $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, $X \mapsto i_X \omega$ es inyectiva.

Definición 9. Una forma simpléctica ω en \mathbb{R}^{2n} es una 2-forma cerrada no degenerada; si además $\omega = d\alpha$ la forma se dice exacta simpléctica. Se dice que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ es un espacio simpléctico.

Ejemplo 1. La 2-forma en \mathbb{R}^{2n} con coordenadas (q, p) :

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \quad (\text{A.2.2})$$

es una forma simpléctica exacta. Por ejemplo $\omega = d(\sum_i p_i dq_i)$, pero también $\omega = -d(\sum_i q_i dp_i)$. Es no degenerada porque si

$$X = \sum_j \left(A^j \frac{\partial}{\partial q_j} + B^j \frac{\partial}{\partial p_j} \right)$$

entonces

$$i_X \omega = \sum_{i=1}^n B^i dq_i - A^i dp_i = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

implica $A^i = B^i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Observación 9. La forma simpléctica (A.2.2) se llama la forma simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2n} . Observe que la forma (A.2.2) tiene coeficientes constantes (no dependen de x). En este caso la 2-forma se puede identificar con una forma bilineal antisimétrica como sigue: Sean

$$X = \sum_i A^i \frac{\partial}{\partial q_i} + B^i \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad Y = \sum_i L^i \frac{\partial}{\partial q_i} + M^i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

campos vectoriales, entonces (A.2.1) se reduce a

$$\omega(X, Y) = i_Y \left(\sum_{i=1}^n B^i dq_i - A^i dp_i \right) = \sum_{i=1}^n B^i L^i - A^i M^i$$

que se puede escribir como

$$\omega(X, Y) = (L, M) \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.4})$$

La matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

se llama la matriz simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2n} . Con esto (\mathbb{R}^{2n}, J) es un *espacio vectorial simpléctico*.

Observación 10. El teorema de Darboux afirma que localmente, toda forma simpléctica es equivalente a la forma canónica bajo un cambio de coordenadas simpléctico.

Definición 10. Un campo vectorial

$$X = A_i(q, p) \frac{\partial}{\partial q_i} + B_i(q, p) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

se dice *Hamiltoniano*, si existe una función escalar $H(q, p)$ diferenciable tal que

$$i_X \Omega = -dH \quad (\text{A.2.6})$$

Proposición 14. Sea

$$X = A_i(q, p) \frac{\partial}{\partial q_i} + B_i(q, p) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

un campo vectorial con Hamiltoniano $H(q, p)$ entonces las componentes del campo vectorial son

$$X = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

y las curvas integrales satisfacen las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Demostración: De la expresión (A.2.3) y por se Hamiltoniano, se tiene

$$i_X \omega = \sum_{i=1}^n B^i dq_i - A^i dp_i = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

comparando coeficientes se sigue el resultado. \square

Apéndice B

Transformaciones canónicas y funciones generadoras

Las transformaciones simplécticas son aquellas que preservan la forma de las ecuaciones de Hamilton. Una clase importante se obtiene a partir de lo que se llama una *función generadora*. En esta sección recordamos los aspectos más elementales que son necesarios para desarrollar con soltura la ecuación de Hamilton–Jacobi.

Definición 11. La forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con coordenadas $z = (q, p)^T$ es la forma bilineal antisimétrica definida por la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.1})$$

donde I_n denota la matriz identidad $n \times n$, vgr.,

$$\omega(z, w) = z^T J w, \quad z, w \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{B.0.2})$$

Observación 11. Note que se la matriz J satisfacen las siguientes propiedades: $J^T = -J$, $J^2 = -I_{2n}$, $J^3 = -J$, $J^{-1} = -J$.

Definición 12. Una transformación lineal $M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ se dice simpléctica si $M^T J M = J$, equivalentemente $\omega(Mz, Mw) = \omega(z, w)$. Una difeomorfismo $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (cambio de coordenadas) se dice simpléctico (simpléctica) si $M = Df(x): \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es simpléctica para toda $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Lema 13. Si M es una matriz simpléctica, entonces $M^{-1} = -JM^T J$.

Demostración:

$$(-JM^T J)M = -J(M^T J M) = -J^2 = I_n$$

de donde se sigue el resultado. □

Proposición 15. El conjunto de transformaciones lineales simplécticas forman un subgrupo del grupo del grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$.

Demostración:

Es claro que la identidad es simpléctica. Si M y N son simplécticas entonces $M^T J M = J$ y $N^T J N = J$, luego

$$(MN)^T J (MN) = N^T (M^T J M) N = N^T J N = J$$

y por lo tanto MN es simpléctica. Para ver que M^{-1} es simpléctica, usaremos el lema anterior: $M^{-1} = -JM^T J$.

$$(M^{-1})^T J M^{-1} = (-J M^T J)^T J M^{-1} = -(J M J) J M^{-1} = J M M^{-1} = J$$

□

Lema 14. Sea M una matriz simpléctica; entonces $|M| = \pm 1$.

Demostración: Como $M^T J M = J$ se sigue que $|M^T| |J| |M| = |J|$, luego $|M|^2 = 1$, por lo tanto $|M| = \pm 1$. □

Observación 12. De hecho se puede probar que para una matriz simpléctica se satisface $|M| = 1$. La prueba es más elaborada y usa la idea de escribir el polinomio característico de una matriz antisimétrica como el cuadrado de un polinomio, llamado Pfafiano.

Teorema 9 (del valor propio simpléctico). si $p(\lambda)$ es el polinomio característico de una matriz simpléctica M , entonces

$$p(\lambda) = \lambda^{2n} p\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Demostración: Como $M^{-1} = -J M^T J$ se sigue que $M = -J(M^T)^{-1} J$, luego

$$\begin{aligned} |M - \lambda I| &= | -J(M^T)^{-1} J - \lambda I | = |J|^2 | -(M^T)^{-1} + \lambda I | \\ &= | -(M^T)^{-1} + \lambda M^t (M^T)^{-1} | = | -I + \lambda M^T | | (M^T)^{-1} | \\ &= | -I + \lambda M | = \lambda^{2n} | M - \frac{1}{\lambda} J | = \lambda^{2n} p\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

□

Si $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es una transformación de coordenadas y escribimos $f(Q, P) = (q(Q, P), p(Q, P))$, en términos de sus componentes, entonces la matriz Jacobiana puede entonces particionarse como

$$M = \frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.3})$$

La siguiente proposición caracteriza entonces a una transformación simpléctica, en términos de la partición (B.0.3) de su matriz Jacobiana:

Proposición 16. Un cambio de coordenadas (B.0.3) es simpléctico si y sólo si

(a) $A^T C$ y $B^T D$ son simétricas.

(b) $D^T A - B^T C = I_n$.

En particular para toda j, l

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) = 0. \quad (\text{B.0.4})$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_l} - \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) = 0. \quad (\text{B.0.5})$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) = \delta_{jl}. \quad (\text{B.0.6})$$

Demostración: la condición $M^T J M = J$ equivale a

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Comparando bloques se tiene

$$\begin{aligned} A^T C - C^T A &= 0 \\ B^T D - D^T B &= 0 \\ A^T D - C^T B &= I_n \\ B^T C - D^T A &= -I_n \end{aligned}$$

Las primeras dos igualdades dan la afirmación (a); las siguientes son equivalentes a la afirmación (b).

De (B.0.3) se tiene

$$(A_{ij}) = \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right), \quad (C_{ij}) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \right), \quad (B_{ij}) = \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right), \quad (D_{ij}) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right).$$

y de la condición $(A^T C - C^T A)_{lj} = 0$ se sigue

$$0 = \sum_i (A_{il} C_{ij} - C_{il} A_{ij}) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right).$$

Análogamente la condición $B^T D - D^T B = 0$ es = 0 es

$$0 = \sum_i (B_{il} D_{ij} - D_{il} B_{ij}) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_l} \frac{\partial p_i}{\partial P_j} - \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_l} \frac{\partial p_i}{\partial P_j} - \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \right).$$

que son las identidades (B.0.4) y (B.0.5). Las relación (B.0.6) se obtiene de la identidad $(D^T A - B^T C)_{lj} = \delta_{lj}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \delta_{jl} &= \sum_i (D_{ij} A_{il} - B_{ij} C_{il}) = \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right). \end{aligned}$$

□

Corolario 2. El conjunto de difeomorfismos simplécticos $\text{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ es un subgrupo del grupo de difeomorfismos de \mathbb{R}^{2n} , $\text{Diff}(\mathbb{R}^{2n})$, ambos de dimensión infinita.

Definición 13. La 2-forma simpléctica canónica en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con coordenadas (q, p) es

$$\omega = dp \wedge dq = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \quad (\text{B.0.7})$$

Observación 13. Para simplificar la notación, en lo sucesivo índices repetidos indican suma.

Proposición 17. Consideremos un cambio de coordenadas $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(q, p) = f(Q, P)$ y las formas simplécticas canónicas $\omega = dp \wedge dq$, $\Omega = dP \wedge dQ$. La transformación de coordenadas es simpléctica si y sólo si

$$f^*(\omega) = \Omega \quad (\text{B.0.8})$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
f^*(dp_i \wedge dq_i) &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial p_i}{\partial P_j} dP_j \right) \wedge \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_l} dQ_l + \frac{\partial q_i}{\partial P_l} dP_l \right) \\
&= \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} dQ_j \wedge dQ_l + \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_l} dP_j \wedge dP_l \\
&\quad + \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_l} dQ_j \wedge dP_l + \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} dP_j \wedge dQ_l \\
&= \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) dQ_j \wedge dQ_l + \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_l} - \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) dP_j \wedge dP_l \\
&\quad + \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) dP_j \wedge dQ_l
\end{aligned}$$

Los coeficientes de $dQ_j \wedge dQ_l$, $dP_j \wedge dP_l$ son cero debido a (B.0.4) y (B.0.5), por (B.0.6) el último término es

$$\delta_{jl} dP_j \wedge dQ_l = dP_j \wedge dQ_j = \Omega.$$

□

Consideremos ahora las 1-formas diferencial en el contradominio \mathbb{R}^{2n} con coordenadas (q, p) y en el dominio \mathbb{R}^{2n} con coordenadas (Q, P)

$$\alpha = pdq = \sum_{i=1}^n p_i dq_i, \quad A = PdQ = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i. \quad (\text{B.0.9})$$

y observe que $\omega = d\alpha$, $\Omega = dA$, es decir las formas simplécticas son exactas.

Proposición 18. Si el cambio de coordenadas $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es simpléctico; α, A son las 1-formas (B.0.9), entonces existe una función $W(Q, P)$, posiblemente definida localmente, tal que

$$f^*(\alpha) - A = dW \quad (\text{B.0.10})$$

Demostración: Como

$$d(f^*(\alpha) - A) = d f^*(\alpha) - dA = f^*(d\alpha) - \Omega = \Omega - \Omega = 0.$$

por lema de Poincaré toda forma cerrada es localmente exacta, luego existe una función $W(Q, P)$ localmente definida posiblemente, tal que (B.0.10). □

Observación 14. La relación (B.0.10) se acostumbra escribir como

$$p_i dq_i - P_i dQ_i = dW. \quad (\text{B.0.11})$$

“donde p_i y la diferencial dq_i se expresan como funciones de Q y P a través del cambio de coordenadas” (véase por ejemplo Pollard [p. 67]) y W es función de Q, P . Alternativamente podemos considerar que el lado izquierdo de (B.0.11) es una 1-forma $\tilde{\alpha}$ en el espacio producto $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ de coordenadas (Q, P, q, p) . De hecho $\tilde{\omega} = dp_i \wedge dq_i - dP_i \wedge dQ_i$ es una forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ exacta pues $\tilde{\omega} = d\tilde{\alpha}$. El espacio simpléctico $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \tilde{\omega})$ contiene a la gráfica de f :

$$\Gamma_f = \{(Q, P, q, p) \mid (q, p) = f(Q, P)\}.$$

y si $i_{\Gamma_f}: \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ denota la inclusión, entonces

$$i_{\Gamma_f}^*(\tilde{\omega}) = i_{\Gamma_f}^*(d\tilde{\alpha}) = d(i_{\Gamma_f}^*(\tilde{\alpha})) = 0$$

Por el lema de Poincaré

$$i_{\Gamma_f}^*(\tilde{\alpha}) = dW \quad (\text{B.0.12})$$

para alguna función local W definida sobre Γ_f con coordenadas (Q, P) . La última expresión es precisamente (B.0.10).

Lema 15. Las siguientes 1-formas diferenciales en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} F_1 &= p_k dq_k - P_k dQ_k \\ F_2 &= q_k dp_k + P_k dQ_k \\ F_3 &= p_k dq_k + Q_k dP_k \\ F_4 &= q_k dp_k - Q_k dP_k \end{aligned}$$

difieren por la diferencial de una función escalar.

Demostración: Se puede verificar que

$$\begin{aligned} F_1 &= -F_2 + d \sum_i p_i q_i \\ F_1 &= F_3 + d \sum_i Q_i P_i \\ F_1 &= -F_4 + d \sum_i (p_i q_i - P_i Q_i) \end{aligned}$$

Veamos la verificación de la primera identidad para ilustrar el proceso conocido como *transformada de Legendre*. Primero notemos que

$$F_1 = p_k dq_k - P_k dQ_k = -(P_k dQ_k - p_k dq_k)$$

Las variables independientes son Q_k y q_k debemos sustituir q_k por p_k como variable independiente así que sumamos y restamos

$$\begin{aligned} F_1 &= -(P_k dQ_k - p_k dq_k \pm q_k dp_k) = -(P_k dQ_k + q_k dp_k - (p_k dq_k + q_k dp_k)) \\ &= -(P_k dQ_k + q_k dp_k - d(p_k q_k)) = -(P_k dQ_k + q_k dp_k) + d(p_k q_k) \\ &= -F_2 + d(p_k q_k) \end{aligned}$$

□

Corolario 3. Si el cambio de coordenadas $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es simpléctico entonces existen funciones $W_i(Q, P)$, $i = 1, 2, 3, 4$ tales que

$$\begin{aligned} f^*(p_k dq_k) - P_k dQ_k &= dW_1 \\ f^*(q_k dp_k) + P_k dQ_k &= dW_2 \\ f^*(p_k dq_k) + Q_k dP_k &= dW_3 \\ f^*(q_k dp_k) - Q_k dP_k &= dW_4 \end{aligned}$$

Teorema 10. Si el cambio de coordenadas $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es simpléctico entonces

1. Si

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial P} \right| \neq 0, \quad (\text{B.0.13})$$

entonces existe una función $S(q, Q)$ tal que

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_k} = -P_k. \quad (\text{B.0.14})$$

2. Si

$$\left| \frac{\partial f_2}{\partial P} \right| \neq 0, \quad (\text{B.0.15})$$

entonces una función $S(p, Q)$ tal que

$$\frac{\partial S}{\partial p_k} = q_k, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_k} = P_k \quad (\text{B.0.16})$$

3. Si

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial Q} \right| \neq 0, \quad (\text{B.0.17})$$

entonces existe una función $S(q, P)$ tal que

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k, \quad \frac{\partial S}{\partial P_k} = Q_k \quad (\text{B.0.18})$$

4. Si

$$\left| \frac{\partial f_2}{\partial Q} \right| \neq 0, \quad (\text{B.0.19})$$

entonces existe una función $S(p, P)$ tal que

$$\frac{\partial S}{\partial p_k} = q_k, \quad \frac{\partial S}{\partial P_k} = -Q_k \quad (\text{B.0.20})$$

Demostración: La relación ,

$$p_k dq_k - P_k dQ_k = dW_1$$

es una relación entre formas diferenciales sobre la variedad Γ_f de dimensión $2n$, la cual naturalmente está parametrizada por (Q, P) , así que W_1 es función de (Q, P) . Si el cambio de coordenadas es $q = f_1(Q, P)$, $p = f_2(Q, P)$ y se satisface la condición (B.0.13), entonces es posible despejar $P = g_1(q, Q)$ y se puede parametrizar Γ_f con las variables (q, Q) como sigue

$$\Gamma_f = \{(Q, P, q, p) \mid P = g_1(q, Q), p = f_2(Q, g_1(q, Q))\}.$$

Si hacemos, $S(q, Q) = W_1(Q, g_1(q, Q))$ entonces

$$p_k dq_k - P_k dQ_k = dS(q, Q)$$

con (q, Q) variables independientes, implica

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad (\text{B.0.21})$$

$$-P_k = \frac{\partial S}{\partial Q_k}. \quad (\text{B.0.22})$$

En el resto de los casos, las condiciones de no degenericidad respectivas implican que Γ_f se puede parametrizar como sigue:

Caso 2: $q = f_1(Q, P)$, $p = f_2(Q, P)$,

$$\left| \frac{\partial f_2}{\partial P} \right| \neq 0 \Rightarrow P = g_2(p, Q)$$

luego

$$\Gamma_f = \{(Q, P, q, p) \mid P = g_2(p, Q), q = f_1(Q, g_2(p, Q))\}, \quad S(p, Q) = W_2(Q, g_2(p, Q)).$$

Luego

$$q_k dp_k + P_k dQ_k = dS(p, Q)$$

con (p, Q) variables independientes, implica

$$q_k = \frac{\partial S}{\partial p_k} \quad (\text{B.0.23})$$

$$P_k = \frac{\partial S}{\partial Q_k}. \quad (\text{B.0.24})$$

Caso 3: $q = f_1(Q, P)$, $p = f_2(Q, P)$,

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial Q} \right| \neq 0 \Rightarrow Q = g_1(q, P)$$

luego

$$\Gamma_f = \{(Q, P, q, p) \mid Q = g_1(q, P), p = f_2(g_1(q, P), P)\}, \quad S(q, P) = W_2(g_1(q, P), P).$$

Luego

$$p_k dq_k + Q_k dP_k = dS(q, P)$$

con (q, P) variables independientes, implica

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad (\text{B.0.25})$$

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}. \quad (\text{B.0.26})$$

Caso 4: $q = f_1(Q, P)$, $p = f_2(Q, P)$,

$$\left| \frac{\partial f_2}{\partial Q} \right| \neq 0 \Rightarrow Q = g_2(p, P)$$

luego

$$\Gamma_f = \{(Q, P, q, p) \mid Q = g_2(p, P), q = f_1(g_2(p, P), P)\}, \quad S(p, P) = W_2(g_2(p, P), P).$$

Luego

$$q_k dp_k - Q_k dP_k = dS(p, P)$$

con (p, P) variables independientes, implica

$$q_k = \frac{\partial S}{\partial p_k} \quad (\text{B.0.27})$$

$$-Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}. \quad (\text{B.0.28})$$

□

El teorema anterior tiene una versión recíproca: Supongamos que está dada una función S de $2n$ variables con las correspondientes ecuaciones de transformación (B.0.14), (B.0.16), (B.0.18) y (B.0.20), queremos dar condiciones suficientes para que dichas ecuaciones definan una transformación canónica; al menos localmente.

Teorema 11. 1. Sea $S(q, Q)$ una función escalar de clase C^2 . Las ecuaciones implícitas

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, Q) \quad (\text{B.0.29})$$

$$-P_k = \frac{\partial S}{\partial Q_k}(q, Q). \quad (\text{B.0.30})$$

bajo la condición de no degeneración

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial Q_k \partial q_j} \right| \neq 0 \quad (\text{B.0.31})$$

definen una transformación de coordenadas

$$q = f_2(Q, P), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}(f_2(Q, P), Q)$$

que es simpléctico.

2. Sea $S(p, Q)$ una función escalar de clase C^2 . Las ecuaciones implícitas

$$q_k = \frac{\partial S}{\partial p_k}(p, Q) \quad (\text{B.0.32})$$

$$P_k = \frac{\partial S}{\partial Q_k}(p, Q). \quad (\text{B.0.33})$$

bajo la condición de no degeneración

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial Q_k \partial p_j} \right| \neq 0 \quad (\text{B.0.34})$$

definen una transformación de coordenadas

$$p = f_2(Q, P), \quad q = \frac{\partial S}{\partial p}(f_2(Q, P), Q)$$

que es simpléctico.

3. Sea $S(q, P)$ una función escalar de clase C^2 . Las ecuaciones implícitas

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, P) \quad (\text{B.0.35})$$

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}(q, P). \quad (\text{B.0.36})$$

bajo la condición de no degeneración

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial P_k \partial q_j} \right| \neq 0 \quad (\text{B.0.37})$$

definen una transformación de coordenadas

$$q = f_2(Q, P), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}(f_2(Q, P), P)$$

que es simpléctico.

4. Sea $S(p, P)$ una función escalar de clase C^2 . Las ecuaciones implícitas

$$q_k = \frac{\partial S}{\partial p_k}(p, P) \quad (\text{B.0.38})$$

$$-Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}(p, P). \quad (\text{B.0.39})$$

bajo la condición de no degeneración

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial P_k \partial p_j} \right| \neq 0 \quad (\text{B.0.40})$$

definen una transformación de coordenadas

$$p = f_2(Q, P), \quad q = \frac{\partial S}{\partial p}(f_2(Q, P), P)$$

que es simpléctico.

B.1. Ecuaciones de Hamilton

Si $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 , las ecuaciones de Hamilton están definidas por el sistema dinámico

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q} \quad (\text{B.1.1})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad q, p \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.1.2})$$

donde $\frac{\partial H}{\partial q} = (\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n})^T$, etc. que se pueden escribir como

$$\dot{z} = J\nabla H(z), \quad z = (q, p)^T. \quad (\text{B.1.3})$$

Proposición 19. Sea $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un cambio simpléctico de coordenadas de clase C^1 , $z = f(Z)$. Entonces las ecuaciones (B.1.3) se transforman en las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{Z} = J\nabla \tilde{H}(Z), \quad Z = (Q, P)^T, \quad (\text{B.1.4})$$

con Hamiltoniano $\tilde{H}(Z) = H(f(Z))$.

Probaremos primer el siguiente lema

Lema 16. $\nabla \tilde{H}(Z) = Df(Z)^T \nabla H(f(Z))$.

Demostración: Por definición de gradiente, para cualquier $W \in \mathbb{R}^{2n}$ se cumple,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \tilde{H}(Z), W \rangle &= D\tilde{H}(Z) \cdot W = DH(f(Z)) \cdot Df(Z) \cdot W \\ &= \langle \nabla H(f(Z)), Df(Z) \cdot W \rangle = \langle \nabla Df(Z)^T \cdot H(f(Z)), W \rangle, \end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación. \square

Veamos ahora la demostración de la Proposición. Por la regla de la cadena y con $z = f(Z)$, de (B.1.3) se sigue

$$\begin{aligned} Df(Z) \cdot \dot{Z} &= J\nabla H(f(Z)) \\ \dot{Z} &= Df(Z)^{-1} J\nabla H(f(Z)) \\ &= -JDf(Z)^T J^2 \nabla H(f(Z)) \\ &= JDf(Z)^T \nabla H(f(Z)) \\ &= J\nabla \tilde{H}(Z). \end{aligned}$$



Bibliografía

- [1] Anzaldo Meneses Alfonso; Delgado Joaquín; Monroy Pérez Felipe. *El Legado Matemático de Leonhard Euler a Trescientos Años de su Nacimiento*. Innovación Editorial Lagares de México S.A. de C.V. 2007.
- [2] Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, segunda edición. Springer-Verlag, 1989.
- [3] Charlier Carl Ludwig. *Die Mechanik des Himmels*. Leipzig Verlag Von Veit & Comp, 1902.
- [4] Contopoulos, G.; Papadaki, H. Newtonian and relativistic periodic orbits around two fixed black holes. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer Netherlands ISSN 0923-2958, Volume 55, Number 1, 1993.
- [5] Demin, V. G. Orbits In the Problem of Two Fixed Centers. *Soviet Astronomy*, Vol. 4, Num. 6. 1961.
- [6] Diarmuid Ó Mathúna. *Integrable Systems in Celestial Mechanics*. Progress in Mathematical Physics, Volume 51, Birkäuser.
- [7] Erikson, Henry; Hill, E. L.. A Note on the One-electron States of Diatomic Molecules. *Physical Review*, Vol. 75, Num. 1, 1949.
- [8] Goldstein Herbert; Poole Charles; Safko John. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002.
- [9] Euler, Leonard. Probleme. Un corps etant attiré en raison reciproque des distances vers deux points fixed donnés, trouver les cas ou la courbe décrite par ce sera algébrique. En *Memories de L' Academie de Sciences de Berlin* 16, 1767, 228-249. En The Euler Archieve: Código E337.
- [10] Jacobi, Carl Gustav Jacob. *Vorlesungen Uber Dynamik*. Reiner Berlin 1884.
- [11] Jakas Mario M. Trapping of Classical Electron Between Two Heavy Scattering centers. *Physical Review A*. Vol. 52, Num. 1, 1995.
- [12] Legendre A-M *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, Tome troisiè, pp. 411-517, Huzard-Courcier, Paris (1828).
- [13] Lukyanov, L.G.; Emeljanov N. V.; Shirmin, G. I. Generalized Problem of Two Fixed Center or the Darboux-Gredeaks Problem. *Cosmic Research*, Vol. 43, No. 3, 2005.
- [14] Moser, Jurgen; Zhender, Eduard, J. *Notes on Dynamical Systems*. Courant Lecture Notes vol. 12, AMS, 2005.
- [15] Murray R. Spiegel; John Liu; Lorenzo Abellanas. *Fórmulas y tablas de Matemática aplicada*. Schaum, 2005.
- [16] Pars, L. A. *A Treatise on Analytical Dynamic*. Heinemann London, 1965.
- [17] Pollard, Harry *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*. Prentice Hall, 1966.
- [18] Strand, Michael P; Reinhardt, William P. Semiclassical Quantization of The Low Lying Electronic states of H_2^+ . *Jounal of Chemical Physics*, Vol. 70, Issue 8, 1979.

- [19] Waalkens, Holger; Dullin, Holger R.; Richter Peter. The Problem of Two Fixed Centers: bifurcations, actions, monodromy. *Physica D* 196 (2004) 265-310.
- [20] Varvoglis, H.; Vozikis, Ch.; Wornar, K. The Two Fixed Centers: an exceptional integrable system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 89: 343-356, 2004.
- [21] Whittaker, E. T. *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies; with an introduction to the problem of three bodies*. Cambridge University Press, 1917.