



El Saber de mis Hijos
hará mi Grandeza

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Inferencia estadística sobre $\theta = P(X < Y)$: Caso
exponencial

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Lic. Gilberto Molina Aguilar

Director de Tesis: Dr. José Arturo Montoya Laos

Hermosillo, Sonora, México, 17 de Octubre, 2014.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

SINODALES

Dra. Gudelia Figueroa Preciado
Universidad de Sonora

Dr. Enrique Villa Diharce
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Dr. Oscar Vega Amaya
Universidad de Sonora

Dr. José Arturo Montoya Laos
Universidad de Sonora

Agradecimientos

A mi esposa y a mis hijas. A ellas estoy inmensamente agradecido por tanto amor, apoyo y paciencia.

A mi maestro el Dr. José Arturo Montoya Laos por su apoyo, dentro y fuera del aula, por dirigir este trabajo y por compartir su conocimiento. ¡Gracias maestro!

También quiero agradecer de forma muy especial a los maestros investigadores: Dra. Gudelia Figueroa Preciado, Dr. Enrique Villa Diharce y Dr. Oscar Vega Amaya, por revisar y enriquecer con sus observaciones el contenido de este trabajo.

Índice general

Prefacio	1
1. Motivación e introducción al problema	3
1.1. Introducción	3
1.2. Modelos Tensión-Fuerza	4
1.3. Curvas ROC	4
1.4. Problema de tesis	5
2. Teoría de inferencia estadística	7
2.1. Introducción	7
2.2. La función de verosimilitud	7
2.3. Aproximación continua a la función de verosimilitud	8
2.4. Plausibilidad	9
2.5. Estimador de máxima verosimilitud	9
2.6. Invarianza funcional	10
2.7. La función de verosimilitud relativa	11
2.8. Regiones de verosimilitud	12
2.9. Verosimilitud perfil	16
2.10. Intervalos de estimación bajo el uso de la aproximación normal a la verosimilitud	19
2.11. Intervalos de estimación bajo el uso de cantidades pivotaes	27
3. Estimación por intervalos para $\theta = P(X < Y)$: Caso exponencial	30
3.1. Introducción	30
3.2. Caso I: Sin censura	31
3.2.1. Uso de la verosimilitud perfil	32
3.2.2. Reparametrización y aproximación normal a la verosimilitud perfil	33
3.2.3. Uso de una cantidad pivotal	38
3.3. Caso II: Censura por la derecha de Tipo II	39
3.3.1. Uso de la verosimilitud perfil	40
3.3.2. Reparametrización y aproximación normal a la verosimilitud perfil	40
3.3.3. Uso de una cantidad pivotal	41
3.4. Caso III: Censura Progresiva de Tipo II	41

3.4.1. Uso de la verosimilitud perfil	42
3.4.2. Reparametrización y aproximación normal a la verosimilitud perfil	43
3.4.3. Uso de una cantidad pivotal	43
3.5. Aplicaciones	44
4. Estudio de simulación	50
4.1. Caso I: Sin censura	51
4.2. Caso II: Censura por la derecha de Tipo II	52
4.3. Caso III: Censura Progresiva de Tipo II	55
Conclusiones	61
Bibliografía	63

Prefacio

El problema de hacer inferencia estadística sobre el parámetro $\theta = P(X < Y)$ ha sido de gran interés desde sus inicios (Birnbaum, 1956) hasta los tiempos actuales (Díaz-Francés y Montoya, 2013; Al-Mutairi *et al.*, 2013; Gunasekera, 2014). En todo este periodo, se han planteado diversas suposiciones sobre la distribución de probabilidad de (X, Y) y se han utilizado diferentes enfoques estadísticos para proporcionar soluciones al problema. En particular, el problema de hacer estimación por intervalos sobre el parámetro θ , cuando se supone que X y Y son variables aleatorias independientes con función de densidad de probabilidad exponencial bajo situaciones de datos sin censura o con censura, ha recibido gran atención por muchos investigadores, siendo la estimación insesgada de mínima varianza, máxima verosimilitud, cantidades pivotaes y bootstrap, los enfoques más usados para solucionar este problema.

Recientemente, el problema de hacer estimación por intervalos sobre $\theta = P(X < Y)$ en el caso exponencial ha sido abordado con un enfoque diferente a los mencionados anteriormente. Díaz-Francés y Montoya (2013) presentan un método para construir intervalos de verosimilitud-confianza para θ a través de la técnica de aproximación normal a la verosimilitud; pero usando previamente una reparametrización que simetriza a la verosimilitud. Es importante mencionar aquí que la estimación que produce este método no ha sido comparada en forma amplia con la de otros métodos estadísticos, especialmente en casos con censura.

El objetivo de esta tesis es comparar los intervalos de verosimilitud-confianza para $\theta = P(X < Y)$, presentados en Díaz-Francés y Montoya (2013), con intervalos pivotaes, en términos de frecuencia de cobertura y longitud del intervalo, bajo tres tipos de muestra: sin censura, con censura por la derecha de Tipo II y con censura progresiva de Tipo II. A continuación se describen los aspectos más importantes de cada capítulo.

En el Capítulo 1 se presenta la descripción del parámetro $\theta = P(X < Y)$ y se enfatiza su importancia a través de la relación que tiene con los modelos Tensión-Fuerza y las curvas ROC. Estas herramientas matemáticas han sido ampliamente usadas en diversas aplicaciones de ingeniería, medicina, entre otras. Además, se describe el problema que se abordará en esta tesis.

En el Capítulo 2 se definen conceptos importantes del enfoque de verosimilitud para la estimación de parámetros. En particular, se presenta con detalle el método de verosimilitud perfil y la metodología de estimación por intervalos bajo el uso de la aproximación normal a la

verosimilitud y reparametrizaciones que simetrizan a la verosimilitud. En este capítulo también se presenta el método pivotal para estimación por intervalos.

En el Capítulo 3 se aplican los conceptos y metodologías definidas en el Capítulo 2 para hacer inferencias sobre el parámetro $\theta = P(X < Y)$ en el caso exponencial, bajo tres esquemas: sin censura, con censura por la derecha de Tipo II y con censura progresiva de Tipo II. Para cada caso se utilizan los siguientes métodos: (1) La verosimilitud perfil, (2) Una reparametrización de la verosimilitud junto con el enfoque de aproximación normal a la verosimilitud y (3) Estimación a través de una cantidad pivotal. Además, se presentan dos aplicaciones relevantes de estos métodos y sus correspondientes inferencias sobre $\theta = P(X < Y)$. Es importante mencionar que el enfoque de verosimilitud perfil, aunque es ilustrado en este capítulo, no será considerado para el estudio comparativo de inferencias desarrollado más adelante.

En el Capítulo 4 se hace un estudio de simulación, considerando los escenarios de muestras sin censura, muestras con censura por la derecha de Tipo II y con censura progresiva de Tipo II, con el objetivo de comparar el comportamiento de los intervalos de confianza propuestos por Díaz-Francés y Montoya (2013) y los intervalos de confianza pivotaes. Dicha comparación se hace en términos de frecuencia de cobertura y longitud del intervalo.

Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones generales de este trabajo.

Capítulo 1

Motivación e introducción al problema

1.1. Introducción

La estimación de $\theta = P(X < Y)$ ha sido objeto de gran estudio desde su aparición en los años 50 del siglo XX hasta la actualidad. Esta cantidad es de interés en áreas como confiabilidad, ingeniería, medicina, psicología, epidemiología, economía, etc. Desde sus inicios hasta hoy, el problema de hacer inferencia estadística sobre el parámetro $\theta = P(X < Y)$ ha sido abordado considerando diferentes escenarios observacionales y varias suposiciones sobre la distribución de las variables aleatorias X y Y . Por ejemplo, se han considerado modelos paramétricos, modelos no paramétricos, situaciones que producen diferentes tipos de censura, entre otros.

El problema de hacer inferencia sobre el parámetro $\theta = P(X < Y)$ cuando X y Y son variables aleatorias independientes con funciones de densidad que pertenecen a la misma familia paramétrica (tal como la exponencial, normal, lognormal, Weibull, entre otras) también ha sido ampliamente discutido en la literatura estadística; véase Kotz *et al.* (2003). En particular, el problema de hacer estimación por intervalos sobre $\theta = P(X < Y)$ en el caso exponencial, cuando se tienen observaciones sin censura o con censura, ha recibido atención especial por muchos investigadores [Enis y Geisser (1971), Tong (1974), (1975), Kelley *et al.* (1976), Sathe y Shah (1981), Chao (1982), Cramer y Kamps (1997), Kotz *et al.* (2003), Jiang y Wong(2008), Ventura y Racugno (2011), Saracoglu *et al.* (2011), Díaz-Francis y Montoya (2013)]. El enfoque usual es calcular intervalos de confianza a través de cantidades pivotaes, cuando es posible, o intervalos de confianza asintóticos usando alguno de los siguientes métodos: estimación de máxima verosimilitud, estimación insesgada de mínima varianza o bootstrap. Recientemente este problema ha sido tratado bajo un enfoque de verosimilitud perfil usando transformaciones y la aproximación normal a la verosimilitud, véase Díaz-Francis y Montoya (2013).

Una de las razones fundamentales que motiva la investigación científica sobre $\theta = P(X < Y)$ es la fuerte conexión que existe entre esta cantidad y los modelos Tensión-Fuerza (*stress-strength models*). En esta clase de modelos se tiene especial interés en la probabilidad de que una variable aleatoria X exceda a otra variable aleatoria Y ; esto es, $\theta = P(X < Y)$. Otro argumento que se aduce para motivar la relevancia del problema de hacer inferencias sobre $\theta = P(X < Y)$ es la relación que tiene esta cantidad con las curvas ROC (acrónimo de *Receiver Operating*

Characteristic). Si X y Y son variables aleatorias continuas, entonces el área bajo la curva ROC es igual a $\theta = P(X < Y)$. Es importante mencionar aquí que tanto los modelos Tensión-Fuerza como las curvas ROC son de gran utilidad y aplicación en muchas áreas de la ciencia, en particular en ingeniería (confiabilidad) y medicina. Además, el caso de variables aleatorias X y Y con distribución exponencial es de especial relevancia debido a que muchos fenómenos aleatorios son modelados adecuadamente con esta distribución.

1.2. Modelos Tensión-Fuerza

Los modelos Tensión-Fuerza han recibido gran atención por muchos años gracias a su aplicabilidad en distintas áreas. El principal interés en este tipo de modelos es la cantidad $\theta = P(X < Y)$. En estos modelos X representa la tensión que sufre un componente cuando éste realiza su trabajo y Y representa la fuerza que tiene el componente para resistir dicha tensión. Si la tensión sobrepasa a la fuerza del componente ($X > Y$), entonces éste falla. En caso contrario, el componente no falla. Entonces $\theta = P(X < Y)$ representa la *confiabilidad* del sistema y se le denomina parámetro de confiabilidad. El germen de esta idea fue introducido por Birnbaum (1956) y posteriormente desarrollada en Birnbaum y McCarty (1958). En este último artículo se incluye por primera vez en su título la expresión $P(Y < X)$. Sin embargo, el término *stress-strength* aparece de manera formal en Church y Harris (1970). El desarrollo de la probabilidad y de la estadística para los modelos Tensión-Fuerza, durante cuatro décadas, se resume de manera muy completa en el libro de Kotz *et al.* (2003). En este libro se presentan muchos resultados teóricos sobre los modelos Tensión-Fuerza, así como algunas de sus aplicaciones en la industria, la economía y la medicina.

1.3. Curvas ROC

La curva ROC es una técnica estadística de suma importancia para una variedad muy amplia de campos científicos: radiología, cardiología, química clínica, epidemiología, sociología, psicología experimental, teoría de detección de señales, ciencias de la tierra y la atmósfera, finanzas, minería de datos, entre otros. Por ejemplo, en la teoría de detección de señales una curva ROC es una representación gráfica de la tasa de éxito (probabilidad de detectar correctamente una señal cuando dicha señal está presente) frente a la tasa de falsa alarma (probabilidad de detectar una señal cuando no está presente) para tareas de detección con sólo dos resultados posibles (sí / no, presente / ausente). Otras aplicaciones importantes de la curva ROC aparecen en la evaluación experimental médica, donde se utilizan de forma cotidiana los conceptos de sensibilidad y especificidad de una prueba diagnóstica. La sensibilidad es la tasa de éxito y la especificidad es uno menos la tasa de falsa alarma. Estos conceptos son muy usados para evaluar

la sensibilidad y especificidad de pruebas diagnósticas según se varía el punto de corte o umbral para que un diagnóstico sea “positivo”. Es importante mencionar aquí que desde los años 70 se están usando las curvas ROC en diferentes ámbitos de la medicina, por su capacidad para resumir en una única medida el rendimiento o precisión o eficacia diagnóstica. Esta medida es el área bajo la curva ROC, o en sus siglas inglesas AUC (*Area Under Curve*).

La curva ROC es simplemente la gráfica de los puntos $T(w) = [P(X \leq w), P(Y \leq w)] = [F_X(w), F_Y(w)]$, con $w \in \mathbb{R}$, donde X y Y son variables aleatorias con función de distribución F_X y F_Y , respectivamente. Nótese que las coordenadas de $T(w)$ yacen entre 0 y 1, de manera que la curva ROC siempre se encuentra en el cuadrado unitario. Además, al permitir que $w = \pm\infty$ se concluye que la curva siempre empieza en (0,0) y termina (1,1).

La relación entre la curva ROC y $\theta = P(X < Y)$ fue señalada originalmente por Bamber (1975) y trajo consigo una variedad de métodos desarrollados para hacer inferencias sobre $\theta = P(X < Y)$. Bamber (1975) observó que el área bajo la curva ROC para variables aleatorias continuas es

$$\begin{aligned} \text{AUC} &= \int_0^1 P(X \leq w) dP(Y \leq w) \\ &= \int_0^1 F_X(w) f_Y(w) dw \\ &= P(X < Y) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde F_X es función de distribución de X y f_Y es la función de densidad de Y . Es decir, $\text{AUC} = \theta = P(X < Y)$ cuando X y Y son variables aleatorias continuas.

1.4. Problema de tesis

La estimación por intervalos del parámetro $\theta = P(X < Y)$ cuando X y Y son variables aleatorias exponenciales es de suma importancia para una gran variedad de áreas de la ciencia. Muchos investigadores abordan el problema de construir intervalos de confianza para θ , considerando diferentes escenarios de censura, a través del uso de cantidades pivotaes. Esta técnica estadística elegante requiere habilidad para identificar una cantidad pivotal para θ (cuando es posible) y calcular su distribución, en cada caso bajo estudio. Recientemente, Díaz-Francés y Montoya (2013) proponen una metodología interesante para construir intervalos de confianza para $\theta = P(X < Y)$ en el caso de la distribución exponencial, considerando censura por la derecha de Tipo II, con base en el uso de la función verosimilitud perfil, transformaciones que simetrizan a la verosimilitud y la aproximación normal a la verosimilitud. Ellos usan datos particulares (simulados y reales) para calcular y comparar sus intervalos con los obtenidos a través de cantidades pivotaes. Sin embargo, no presentan ningún estudio de simulación para evaluar de manera más general el desempeño de sus intervalos; a pesar de que aparentemente sus resultados

se pueden generalizar a otras distribuciones y a otros tipos de censura.

En esta tesis se abordará el problema de estimación por intervalos del parámetro $\theta = P(X < Y)$ cuando X y Y son variables aleatorias independientes con distribución exponencial. Se considerará el caso de datos sin censura y el caso de datos con censura. Los escenarios de censura que serán contemplados son: (a) Censura por la derecha de Tipo II y (b) Censura progresiva de Tipo II. El objeto de la tesis es comparar, mediante estudios de simulación, la frecuencia de cobertura y la longitud los intervalos de confianza para $\theta = P(X < Y)$ obtenidos mediante el enfoque de cantidades pivotaes y el enfoque de verosimilitud dado por Díaz-Francis y Montoya (2013).

Capítulo 2

Teoría de inferencia estadística

En este capítulo se presentan conceptos del enfoque de verosimilitud como: la función de verosimilitud, la función de verosimilitud relativa, la aproximación normal a la verosimilitud y la verosimilitud perfil. Se presenta también conceptos y métodos importantes para la obtención de intervalos de confianza. En particular, el método pivotal, el de verosimilitud perfil y el de aproximación normal a la verosimilitud que usa reparametrizaciones, serán aplicados en el siguiente capítulo para hacer inferencias sobre el parámetro $\theta = P(X < Y)$ en el caso exponencial, considerando muestras sin censura y datos censurados.

2.1. Introducción

Supóngase que un modelo de probabilidad se ha formulado para un fenómeno aleatorio de interés y que éste involucra a un vector de parámetros desconocidos $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k) \in \Psi \subset \mathbb{R}^k$, donde Ψ es el espacio parametral. El fenómeno aleatorio de interés es observado y algunos datos son obtenidos. Se desea entonces usar estos datos para estimar el valor de ψ . Más generalmente, se desea determinar cuáles de los valores posibles de ψ son más plausibles o creíbles a la luz de los datos observados.

Los datos observados pueden ser considerados como un evento observado E_x en el espacio muestral del modelo de probabilidad. La probabilidad del evento observado E_x se puede determinar del modelo, y en general, será una función del vector de parámetros desconocidos ψ , $P(E_x; \psi)$.

2.2. La función de verosimilitud

La función de verosimilitud juega un papel fundamental en la inferencia estadística. Su rol principal es inferir qué valores del vector de parámetros $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ son razonables para la función de probabilidad $P(E_x; \psi)$ que haya sido elegida para el fenómeno aleatorio de interés a partir de un evento observado (datos). Ésto es particularmente relevante después de un experimento, cuando ya fueron observados los datos.

Definición 2.1. (Función de verosimilitud) Supóngase que $X = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector de variables aleatorias y E_x es un evento observado en términos de X con probabilidad $P_X(E_x; \psi)$. La función verosimilitud de ψ es una función $L(\psi; E_x) : \Psi \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$L(\psi; E_x) = P_X(E_x; \psi). \quad (2.1)$$

En particular si $X = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector de variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $f(x; \psi) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$ es el evento observado E_x , entonces la función de verosimilitud de ψ es

$$\begin{aligned} L(\psi; E_x) &= P_X(E_x; \psi) \\ &= f(x; \psi) \\ &= f(x_1, \dots, x_n; \psi). \end{aligned}$$

Ahora, si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con función de probabilidad $f(x; \psi) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, entonces la verosimilitud de ψ es

$$L(\psi; E_x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \psi).$$

Para el caso de variables aleatorias continuas X_1, \dots, X_n iid con función de densidad $f(x; \psi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ se tiene que $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \psi) = 0$ para todo $x = (x_1, \dots, x_n)$ y ψ . Por ello, no se puede definir a la función de verosimilitud a partir de dichas probabilidades. Pero si $x_i - \epsilon/2 \leq X_i \leq x_i + \epsilon/2$ es el evento observado, donde x_i y $\epsilon > 0$ son valores fijos conocidos que representan al valor observado en el instrumento de medición y su error de medición (considerado simétrico), respectivamente, entonces la verosimilitud de ψ esta dado por

$$\begin{aligned} L(\psi; E_x) &= P_X(E_x; \psi) \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{x_i - \frac{1}{2}\epsilon}^{x_i + \frac{1}{2}\epsilon} f(t; \psi) dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La expresión (2.2) puede ser difícil de manejar a la hora de hacer cálculos matemáticos, por ejemplo calcular derivadas y máximos. Una forma de aproximar la verosimilitud dada en (2.2) y que tiene por objetivo obtener una expresión más simple se describe a continuación.

2.3. Aproximación continua a la función de verosimilitud

El teorema del valor medio para la integral definida establece que si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número z en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(z)(b - a).$$

De este modo, si la función de densidad $f(x; \psi)$ cumple con las condiciones del teorema antes mencionado, entonces la i -ésima integral en (2.2) es $\epsilon f(x'; \psi)$ para algún $x' \in [x_i - \epsilon/2, x_i + \epsilon/2]$. Si $f(x; \psi)$ es aproximadamente constante en $[x_i - \epsilon/2, x_i + \epsilon/2]$, para cada valor plausible de ψ , entonces se tiene que $f(x'; \psi) \approx f(x_i; \psi)$. Si esto es válido para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y ϵ no depende de ψ , una aproximación a la función de verosimilitud dada en (2.2) es

$$\begin{aligned}
 L(\psi; E_x) &= \prod_{i=1}^n \int_{x_i - \frac{1}{2}\epsilon}^{x_i + \frac{1}{2}\epsilon} f(t; \psi) dt \\
 &= \prod_{i=1}^n \epsilon f(x'_i; \psi) \\
 &\approx \prod_{i=1}^n \epsilon f(x_i; \psi) \\
 &\propto \prod_{i=1}^n f(x_i; \psi).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

A la expresión (2.3) se le llama “aproximación continua” a la función de verosimilitud.

En esta tesis específicamente se empleará la aproximación (2.3) puesto que es adecuada y como se verá en los Capítulos 3 y 4, no produce problemas inferenciales como los discutidos por Kalbfleisch (1985, Sección 9.4), Edwards (1992, Pág. 6, Pág. 167), Lindsey (1999), Sprott (2000, Pág. 19, Págs. 203-294), Lawless (2003, Pág. 186), Meeker y Escobar (1998, Pág. 275), Montoya *et al.* (2009, Págs. 195-202), entre otros.

2.4. Plausibilidad

La función de verosimilitud $L(\psi; E_x)$ permite ordenar la credibilidad o plausibilidad entre los valores de ψ con base en el evento observado E_x . Si $L(\psi_1; E_x) > L(\psi_2; E_x)$ entonces de (2.1) se sigue que $P_X(E_x; \psi_1) > P_X(E_x; \psi_2)$. Es decir, el evento observado E_x es más probable cuando el parámetro ψ toma el valor ψ_1 que cuando toma el valor ψ_2 . Así, el cociente de verosimilitudes

$$\frac{L(\psi_1; E_x)}{L(\psi_2; E_x)} = \frac{P_X(E_x; \psi_1)}{P_X(E_x; \psi_2)},$$

es una medida de la plausibilidad de ψ_1 relativa a ψ_2 basada en el evento observado E_x . El cociente $L(\psi_1; E_x)/L(\psi_2; E_x) = k$ significa que el valor ψ_1 es k veces más plausible que el valor ψ_2 en el sentido de que ψ_1 hace al evento observado k veces más probable de lo que lo hace ψ_2 .

2.5. Estimador de máxima verosimilitud

La función de verosimilitud $L(\psi; E_x)$ es una medida de plausibilidad de diferentes valores posibles de ψ . Así, un estimador puntual razonable de ψ es aquel valor de ψ que maximiza

$L(\psi; E_x)$.

Definición 2.2. (Estimador de máxima verosimilitud) El estimador de máxima verosimilitud (EMV) de ψ , es el valor $\hat{\psi}$ en el espacio parametral $\Psi \subset \mathbb{R}^k$ que satisface la condición

$$L(\hat{\psi}; E_x) = \sup_{\psi \in \Psi} L(\psi; E_x).$$

Nótese que $0 \leq L(\psi; E_x) \leq 1$ debido a que es una probabilidad como función de ψ . Así, el supremo de $L(\psi; E_x)$ en $[0, 1]$ existe y es finito. Sin embargo, puede darse el caso en que el EMV no exista, o si existe, puede que no sea único. En lo que sigue se actuará como si existiera un único valor $\hat{\psi} \in \Psi$ que maximiza a la función de verosimilitud $L(\psi; E_x)$. Es decir, se supondrá que el EMV existe y es único.

El EMV del parámetro ψ es el valor más plausible de ψ , bajo el evento observado. Es decir, el EMV $\hat{\psi}$ es el valor de ψ que explica mejor al evento observado en el sentido de que maximiza su probabilidad bajo el modelo de probabilidad propuesto para el fenómeno aleatorio de interés.

Cabe hacer notar que algunas veces, encontrar el valor de ψ que maximiza $L(\psi; E_x)$ puede ser complicado debido a la forma que toma el producto de probabilidades y en consecuencia la verosimilitud. Usualmente es conveniente trabajar con la siguiente función.

Definición 2.3. (Función log-verosimilitud) La función log-verosimilitud de ψ se define como el logaritmo natural de $L(\psi; E_x)$,

$$l(\psi; E_x) = \log [L(\psi; E_x)]. \quad (2.4)$$

Muchas veces es más fácil realizar procesos de optimización (maximización-minimización) cuando la función objetivo es una suma de funciones que cuando la función objetivo es un producto de funciones. Nótese que el valor $\hat{\psi}$ que maximiza la verosimilitud $L(\psi; E_x)$ también maximiza la log-verosimilitud $l(\psi; E_x)$ puesto que el logaritmo natural es una transformación monótona.

Es importante señalar que definir a la verosimilitud como proporcional a la probabilidad del evento observado [no igual como en (2.1)] no afecta el resultado de la optimización; sin embargo, es posible simplificar expresiones que resultan irrelevantes; quizá esta sea una de las razones por la cual Fisher (1921) definió a la verosimilitud como proporcional a una probabilidad.

2.6. Invarianza funcional

En muchas ocasiones se utilizan reparametrizaciones de un modelo de probabilidad por conveniencia matemática, conveniencia computacional, propio interés de un parámetro que es función de otro que aparece en el modelo, etc. En estas situaciones, la invarianza funcional es una propiedad muy conveniente de la verosimilitud y significa que, en términos de plausibilidad,

cualquier declaración cuantitativa acerca de ψ implica una declaración cuantitativa correspondiente acerca de cualquier función uno a uno de ψ . Una función $g(\psi)$ es uno a uno si $g(\psi_1) = g(\psi_2)$ implica que $\psi_1 = \psi_2$.

Teorema 2.4. *Supóngase que $L(\psi; E_x)$ es la función de verosimilitud de $\psi \in \Psi$. Sea $g(\psi) : \Psi \rightarrow \Delta$ una función uno a uno. Si*

$$\frac{L(\psi_1; E_x)}{L(\psi_2; E_x)} = k$$

entonces

$$\frac{L(\delta_1; E_x)}{L(\delta_2; E_x)} = k,$$

donde $\delta_1 = g(\psi_1)$ y $\delta_2 = g(\psi_2)$.

La demostración del teorema anterior se sigue por directa sustitución algebraica.

Una consecuencia inmediata de la propiedad de invarianza de la función de verosimilitud $L(\psi; E_x)$ es la invarianza del EMV de ψ para funciones uno a uno.

Teorema 2.5. *Si $g(\psi) : \Psi \rightarrow \Delta$ es una función uno a uno y $\hat{\psi}$ es el EMV de ψ , entonces el EMV de $\delta = g(\psi)$ es $\hat{\delta} = g(\hat{\psi})$.*

Cabe mencionar aquí que Casella y Berger (2002, Pág. 320) muestran que la propiedad de invarianza del EMV se cumple para cualquier función $g(\psi)$, no únicamente para funciones uno a uno.

Un ejemplo simple de la propiedad de invarianza de la verosimilitud es el siguiente. Si $\psi > 0$ y $\delta = \log(\psi)$, entonces la verosimilitud del nuevo parámetro δ es $L(\delta; E_x) = L[\psi = \exp(\delta); E_x]$. Como consecuencia se tiene que el EMV de δ es $\hat{\delta} = \log(\hat{\psi})$.

2.7. La función de verosimilitud relativa

Definición 2.6. (Función de verosimilitud relativa) La función de verosimilitud relativa $R(\psi; E_x) : \Psi \rightarrow [0, 1]$ se define como

$$R(\psi; E_x) = \frac{L(\psi; E_x)}{\sup_{\psi \in \Psi} L(\psi; E_x)}, \quad (2.5)$$

donde $L(\psi; E_x)$ es la función de verosimilitud de ψ .

Esta función está bien definida ya que el supremo de $L(\psi; E_x)$ en $[0, 1]$ existe y es finito. Además nótese que $R(\psi; E_x)$ yace entre cero y uno para todo valor de ψ en el espacio parametral. Valores de ψ con $R(\psi; E_x)$ cercanos a uno son muy razonables o creíbles mientras que valores de ψ con $R(\psi; E_x)$ cercanos a cero son poco creíbles a la luz de los datos.

La función de verosimilitud relativa se puede utilizar para hacer declaraciones cuantitativas acerca del grado sobre el cual valores del parámetro describen mejor el fenómeno aleatorio de interés, con base en la muestra observada.

En la práctica, generalmente es posible encontrar un único valor de ψ en el espacio parametral que maximiza la función de verosimilitud $L(\psi; E_x)$. Cuando esto sucede entonces la función de verosimilitud relativa dada en (2.5) se puede escribir como la estandarización de la verosimilitud con respecto a la verosimilitud evaluada en dicho valor. Es decir, cuando el EMV $\hat{\psi}$ del parámetro ψ existe y es único, la función de verosimilitud relativa de ψ es

$$R(\psi; E_x) = \frac{L(\psi; E_x)}{L(\hat{\psi}; E_x)}. \quad (2.6)$$

La función de verosimilitud relativa dada en (2.6) proporciona la plausibilidad de cualquier valor especificado de ψ relativo al máximo verosímil $\hat{\psi}$, a la luz de los datos. Es decir, valores de ψ con $R(\psi; E_x)$ cercanos a $R(\hat{\psi}; E_x) = 1$ hacen a la muestra observada casi tan probable como lo hace el EMV $\hat{\psi}$. En contraste, valores de ψ con $R(\psi; E_x)$ cercanos a cero hacen que la probabilidad de la muestra observada sea pequeña con respecto a su máxima probabilidad alcanzada en $\hat{\psi}$.

De forma análoga a la definición de la función log-verosimilitud, también es posible definir la función log-verosimilitud relativa. Esta función es particularmente útil en el desarrollo de las propiedades asintóticas de la verosimilitud.

Definición 2.7. (Función log-verosimilitud relativa) La función log-verosimilitud relativa se define como el logaritmo natural de la función de verosimilitud relativa,

$$r(\psi; E_x) = \log [R(\psi; E_x)] = \log [L(\psi; E_x)] - \log [L(\hat{\psi}; E_x)].$$

Así,

$$r(\psi; E_x) = l(\psi; E_x) - l(\hat{\psi}; E_x), \quad (2.7)$$

donde $l(\psi; E_x)$ es la función log-verosimilitud. Como $0 \leq R(\psi) \leq 1$, se tiene que $-\infty \leq r(\psi) \leq 0$ para todos los posibles valores del parámetro.

2.8. Regiones de verosimilitud

En la sección anterior, mediante la verosimilitud relativa, se obtuvo la plausibilidad de un cierto valor específico de ψ con respecto al EMV $\hat{\psi}$ dada la muestra observada. Sin embargo, en ocasiones puede ser de interés especificar una región o intervalo para ψ , donde cada valor de ψ dentro de esta región o intervalo tenga al menos una plausibilidad especificada. Esta es una manera, diferente a la estimación puntual, de hacer inferencias sobre el parámetro ψ usando el enfoque de verosimilitud.

Definición 2.8. (Región de verosimilitud de nivel c) Súpongase que $R(\psi; E_x)$ es la función de verosimilitud relativa de ψ . Una región de verosimilitud de nivel de plausibilidad c para ψ se define como el conjunto

$$C(c; E_x) = \{\psi : R(\psi; E_x) \geq c\},$$

donde $c \in [0, 1]$

Las regiones de verosimilitud indican los valores de ψ que son más plausibles a un nivel c . Esto es, cualquier valor de ψ en $C(c; E_x)$ tendrá verosimilitud relativa igual o mayor que c y cualquier valor de ψ fuera de $C(c; E_x)$ tendrá verosimilitud relativa menor que c . Ésta es la forma en que la región $C(c; E_x)$ separa los valores plausibles de ψ de los no plausibles a un nivel c (Spratt, 2000, Pág. 14).

En particular cuando ψ es de dimensión uno, una región de verosimilitud para un determinado nivel de plausibilidad c puede ser un intervalo o la unión de intervalos disjuntos, esto dependerá de la forma que tome la función de verosimilitud, en estos casos se adoptará la notación $IV(c)$ para denotar a la región de verosimilitud $C(c; E_x)$. Gráficamente el $IV(c)$ se puede obtener dibujando una línea horizontal en la gráfica de $R(\psi; E_x)$, paralela al eje cartesiano de ψ y a una distancia c , y coleccionando todos los valores de ψ cuya verosimilitud relativa $R(\psi; E_x)$ se encuentra por encima de dicha línea, con esta idea se pueden elaborar algoritmos computacionales muy precisos y con ellos obtener los intervalos de verosimilitud. Es importante resaltar aquí, que obtener estos algoritmos puede ser a veces muy complicado y más aun obtener una expresión analítica, con base en la relación $R(\psi; E_x) \geq c$, de los intervalos de verosimilitud. Por ésta razón, más adelante en éste capítulo se desarrollará una técnica para la solución a este problema.

Cuando c varía desde 0 hasta 1 se obtiene una familia de regiones de verosimilitud jerarquizadas y anidadas que convergen al EMV $\hat{\psi}$ cuando c tiende a 1. Véase la siguiente proposición.

Proposición 2.9. Si $\{k_m\}_{m \geq 0}$ es un sucesión monótona creciente de números reales, donde $k_m \in [0, 1]$, entonces las regiones de verosimilitud de nivel $\{k_m\}_{m \geq 0}$ son conjuntos anidados.

Demostración. Sea $R(\psi; E_x)$ la función de verosimilitud relativa de ψ . Supóngase que $C(k_m; E_x)$ es una región de verosimilitud de nivel de plausibilidad k_m para ψ , donde $0 \leq k_m \leq 1$, para todo $m \geq 0$. Sea n cualquier valor de m . Si $C(k_n; E_x) = \emptyset$ entonces $C(k_n; E_x) \subseteq C(k_{n-1}; E_x)$. Si $C(k_n; E_x) \neq \emptyset$ y $\psi \in C(k_n; E_x)$ entonces $R(\psi; E_x) \geq k_n$. Ahora, si $\{k_m\}_{m \geq 0}$ es una sucesión monótona creciente de números reales en $[0, 1]$ entonces $0 \leq k_{i-1} \leq k_i \leq 1$, para todo $i \geq 1$. Así,

$$R(\psi) \geq k_n \geq k_{n-1}.$$

Es decir, ψ también pertenece a $C(k_{n-1}; E_x)$. Entonces, $C(k_n; E_x) \subseteq C(k_{n-1}; E_x)$. Al repetir este proceso para $n-1, n-2, \dots, 0$ se tiene que $C(k_{i+1}; E_x) \subseteq C(k_i; E_x)$, para $i = n-2, n-3, \dots, 0$. Así, para todo $n \geq 0$ se cumple que

$$C(k_n; E_x) \subseteq C(k_{n-1}; E_x) \subseteq \cdots \subseteq C(k_0; E_x),$$

por lo tanto, $\{C(k_m; E_x)\}_{m \geq 0}$ son conjuntos anidados. \square

Nótese que el EMV $\hat{\psi}$ de ψ pertenece a todas las regiones de verosimilitud porque $R(\hat{\psi}; E_x) = 1$. Entonces, esta familia de regiones son equivalentes a la función de verosimilitud completa y reproduce la gráfica de $R(\psi; E_x)$.

Una región de verosimilitud por sí sola puede resultar poco informativa y en consecuencia insuficiente para mostrar el cambio en la plausibilidad de los valores de ψ en la región; por ejemplo, cuando ψ es un escalar se recomienda utilizar distintos intervalos de verosimilitud de nivel c e indicar en ellos al EMV $\hat{\psi}$ de ψ . Esto permite identificar posibles asimetrías de la función de verosimilitud. En lo posible se recomienda graficar y analizar la función de verosimilitud relativa completa.

Regiones de verosimilitud confianza

A continuación se verá que es posible asociar una confianza deseada a las regiones de verosimilitud, y que dicha confianza depende de la elección del nivel de plausibilidad c . En particular cuando el parámetro ψ es un escalar, niveles de plausibilidad de $c = 0.036, 0.15, 0.25$ se encuentran asociados con niveles del 99, 95 y 90 % de confianza (aproximadamente).

Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ una muestra observada proveniente de una distribución del vector de variables aleatorias $X = (X_1, \dots, X_n)$ con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x; \psi)$, donde $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k) \in \Psi \subset \mathbb{R}^k$ es un vector de parámetros desconocidos y fijos en un vector ψ_0 . Entonces, con base en esta muestra se puede construir una región C para el valor “verdadero” ψ_0 . Ahora, si se construye nuevamente una región C pero con otra muestra del mismo experimento o fenómeno aleatorio de interés, casi seguramente se obtendrá una región diferente a la anterior. Esto ocurre debido a que la región C es aleatoria. Así, cada vez que se varíe la muestra, las región C algunas veces cubrirá el valor “verdadero” ψ_0 y otras no.

Definición 2.10. (Probabilidad de cobertura) Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector de variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x; \psi)$. La probabilidad de cobertura de una región para $\psi = \psi_0$ se define como

$$PC(\psi_0) = P(\psi_0 \in C; \psi = \psi_0).$$

Así, la probabilidad de cobertura $PC(\psi_0)$ expresa el porcentaje de veces que la región C cubre al valor “verdadero” ψ_0 en un número muy grande de repeticiones de un experimento.

Obsérvese que en principio, la probabilidad de cobertura de una región C se puede calcular a partir de la densidad de probabilidad conjunta de X , $f(x; \psi)$; en consecuencia, generalmente depende del valor “verdadero” del parámetro ψ , ψ_0 . Cuando la probabilidad de cobertura de una región C no depende de ψ_0 , es decir, cuando el valor de $PC(\psi_0)$ es el mismo para todo valor del parámetro ψ_0 entonces la región C es llamada región de confianza.

Definición 2.11. (Región de confianza) Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector de variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x; \psi)$. Una región de confianza $100(1-\alpha)\%$ para ψ_0 es una región C para $\psi = \psi_0$ cuya probabilidad de cobertura es $(1-\alpha)$.

Definición 2.12. (Región de verosimilitud-confianza) Una región de verosimilitud-confianza para cualquier $\psi_0 \in \Psi \subset \mathbb{R}^k$ es una región de verosimilitud que tiene probabilidad de cobertura de $(1-\alpha)$ para ψ_0 .

La probabilidad de cobertura de una región de verosimilitud $C = C(c, X)$ se puede aproximar a través de la distribución de probabilidad de la estadística de la razón de verosimilitud para un ψ fijo en ψ_0 , $D_n = -2 \log [R(\psi_0, X)]$. A continuación se muestra esta metodología.

Para un valor particular $\psi = \psi_0$ se tiene la siguiente cadena de implicaciones,

$$\psi_0 \in C \Leftrightarrow R(\psi_0, X) \geq c \Leftrightarrow -2 \log [R(\psi_0, X)] \leq -2 \log (c).$$

De aquí que la probabilidad de cobertura de C sea

$$\begin{aligned} PC(\psi_0) &= P(\psi_0 \in C; \psi = \psi_0) \\ &= P(D_n \leq -2 \log (c); \psi = \psi_0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Serfling (1980, Págs. 155-156) prueba que, bajo ciertas condiciones, para todo $\psi_0 \in \Psi \subset \mathbb{R}^k$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n \leq x; \psi = \psi_0) = P[\chi_{(k)}^2 \leq x], \forall x > 0.$$

Es decir que bajo ciertas condiciones llamadas de regularidad, $D_n = -2 \log [R(\theta_0)]$ converge en distribución a una Ji-cuadrada con k grados de libertad para todo $\psi_0 \in \Psi \subset \mathbb{R}^k$.

Tomando en cuenta este resultado y la expresión (2.8) se tiene que la probabilidad de cobertura de C es aproximadamente $P[\chi_{(k)}^2 \leq x]$, donde $x = -2 \log (c)$. Así, cuando $x = q_{(\alpha,1)}$, donde $q_{(\alpha,1)}$ es el cuantil $(1-\alpha)$ de una distribución Ji-cuadrada con k grados de libertad, se tiene que la región de verosimilitud de nivel c , con $c = \exp(-q_{(\alpha,1)}/2)$, heredará una probabilidad de cobertura aproximada del $100(1-\alpha)\%$. Nótese que la probabilidad de cobertura de la región C no depende de ψ_0 de modo que la región de verosimilitud es también una región de confianza.

La Tabla 2.1 muestra los valores de c (cuando el parámetro ψ es unidimensional, $k = 1$) que se utilizan para calcular regiones de verosimilitud-confianza con probabilidades de cobertura del 90, 95 y 99%. Por ejemplo, el valor 2.706 corresponde al cuantil 0.90 de una distribución Ji-cuadrada con un grado de libertad. Entonces una región de verosimilitud de nivel $c = \exp(-2.706/2) = 0.258$ tiene una probabilidad de cobertura del 90%. Análogamente, se pueden encontrar los valores de c que asocian una confianza del 95 y 99% a las región de verosimilitud.

$(1 - \alpha)$	c	$q_{(\alpha,1)}$
0.90	0.258	2.706
0.95	0.146	3.841
0.99	0.036	6.635

Tabla 2.1: Confianza aproximada de regiones de verosimilitud cuando ψ es unidimensional.

2.9. Verosimilitud perfil

Generalmente el modelo paramétrico, elegido para ajustar a las observaciones de un fenómeno de interés, suele tener varios parámetros, de los cuales algunos pueden llegar a ser de gran interés y el resto considerarse como de poca trascendencia para responder preguntas asociadas al fenómeno aleatorio bajo estudio. De manera más formal se les denomina usualmente como parámetros de interés y parámetros de estorbo, respectivamente. Sin embargo, es importante hacer notar que un parámetro puede ser considerado en algunos casos como de estorbo y en otros casos no. Por ejemplo, si se tiene una muestra de variables aleatorias normales con media μ y varianza σ^2 y se desea estimar la media poblacional μ , entonces σ es un parámetro de estorbo. En contraste, si el parámetro de interés es σ , entonces ahora el parámetro de estorbo es μ .

Existen diferentes métodos para abordar el problema de estimación en presencia de parámetros de estorbo, véase Montoya (2008). En esta tesis se utilizará la verosimilitud maximizada o perfil ya que es un método estadístico general, sencillo y adecuado para los objetivos de este trabajo.

Definición 2.13. (Función de verosimilitud perfil) Sea $L(\psi; E_x)$ la función de verosimilitud de $\psi = (\delta, \lambda) \in \Psi \subset \mathbb{R}^k$, donde $\delta \in \Delta \subset \mathbb{R}^r$ es un parámetro de interés de dimensión $r \geq 1$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^{k-r}$ es considerado un parámetro de estorbo de dimensión $k - r \geq 1$ y $\Psi = \Delta \times \Lambda$. La verosimilitud perfil de δ es una función $L_P(\delta; E_x) : \Delta \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$L_P(\delta; E_x) = \sup_{\lambda \in \Lambda | \delta} L[\psi = (\delta, \lambda); E_x]. \quad (2.9)$$

Como $L[\psi = (\delta, \lambda); E_x]$ es una probabilidad para cualquier valor particular (δ, λ) , entonces el supremo de $L[\psi = (\delta, \lambda); E_x]$ en $[0, 1]$ existe y es finito para todo $\delta \in \Delta$. Así, la verosimilitud perfil existe y se puede usar para ordenar la plausibilidad entre los valores de δ .

Definición 2.14. (Verosimilitud perfil relativa) La verosimilitud perfil relativa de δ es una función $R_P(\delta; E_x) : \Delta \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$R_P(\delta; E_x) = \frac{L_P(\delta; E_x)}{\sup_{\delta \in \Delta} L_P(\delta; E_x)}, \quad (2.10)$$

donde $L_P(\delta; E_x)$ es la función de verosimilitud perfil de δ .

La función de verosimilitud perfil relativa se puede utilizar, de la misma forma como se utiliza la verosimilitud relativa dada en (2.5), para hacer declaraciones cuantitativas acerca del grado sobre el cual valores del parámetro de interés δ son plausibles a la luz de la muestra observada.

Definición 2.15. (Estimador de máxima verosimilitud restringido) El estimador de máxima verosimilitud restringido (EMVR) de λ es cualquier valor $\hat{\lambda}(\delta; E_x)$ en el espacio parametral Δ , que cumple que

$$L \left\{ \psi = \left[\delta, \hat{\lambda}(\delta; E_x) \right]; E_x \right\} = \sup_{\lambda \in \Lambda | \delta} L[\psi = (\delta, \lambda); E_x],$$

para cualquier valor especificado de $\delta \in \Delta$.

Si $\hat{\lambda}(\delta; E_x)$ existe y es único para cada valor especificado de δ entonces la función de verosimilitud perfil de δ se puede escribir como

$$L_P(\delta; E_x) = L \left\{ \psi = \left[\delta, \hat{\lambda}(\delta; E_x) \right]; E_x \right\}.$$

Más aún, el estimador de máxima de verosimilitud de $\psi = (\delta, \lambda)$ es $\hat{\psi} = (\hat{\delta}, \hat{\lambda}) = \left[\hat{\delta}, \hat{\lambda}(\hat{\delta}, E_x) \right]$, donde $\hat{\delta}$ y $\hat{\lambda}$ son los EMV de δ y λ , respectivamente. Así, la función de verosimilitud perfil relativa de δ es

$$R_P(\delta; E_x) = \frac{L_P(\delta; E_x)}{L \left[\hat{\psi} = (\hat{\delta}, \hat{\lambda}); E_x \right]} = \frac{L \left\{ \psi = \left[\delta, \hat{\lambda}(\delta; E_x) \right]; E_x \right\}}{L \left\{ \hat{\psi} = \left[\hat{\delta}, \hat{\lambda}(\hat{\delta}; E_x) \right]; E_x \right\}}.$$

Cuando δ y λ son parámetros unidimensionales ($k = 2, r = 1$) entonces la función de verosimilitud de ambos parámetros, $L(\delta, \lambda; E_x)$, es una superficie en \mathbb{R}^3 cuyo dominio es el plano cartesiano correspondiente al espacio parametral $\Delta \times \Lambda$. Es decir, la verosimilitud es una función con valores reales definida para cada pareja $(\delta, \lambda) \in \Delta \times \Lambda$. Así, cuando uno se posiciona en un punto muy distante sobre el eje de estorbo λ , entonces la silueta o perfil que se observa de esta verosimilitud $L(\delta, \lambda; E_x)$ es justamente la función de verosimilitud perfil de δ . A manera de ilustración véase la Figura 2.1 donde δ es el parámetro de interés y λ es el parámetro de estorbo.

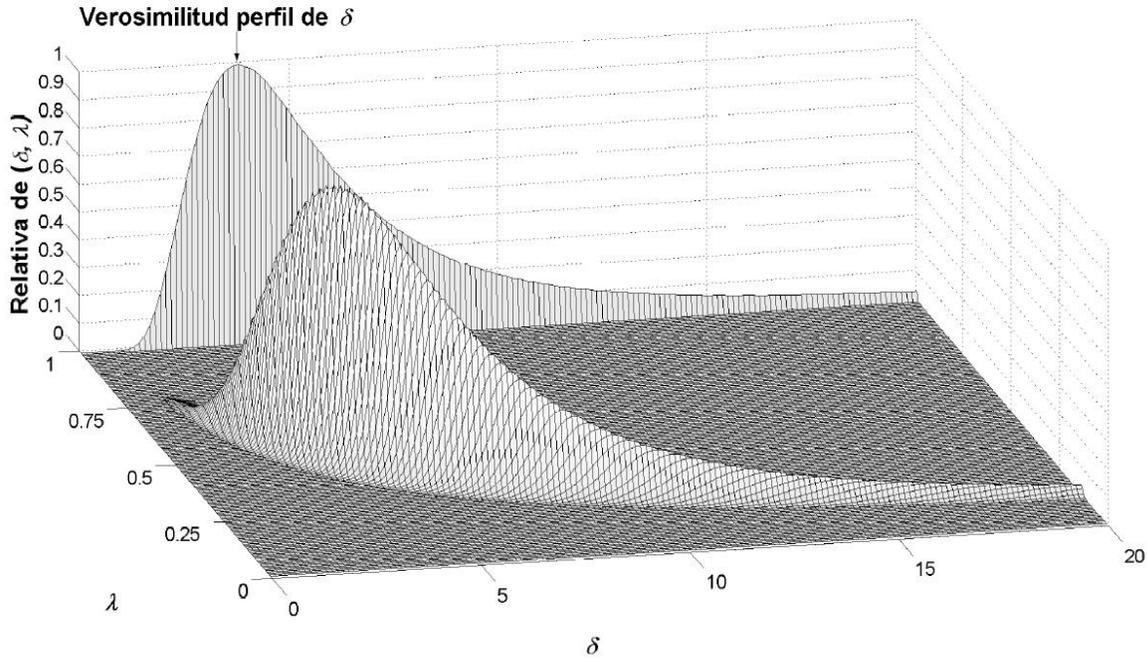


Figura 2.1: Superficie de verosimilitud relativa (δ, λ)

Cuando $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^{k-r}$, $r = 2$ y $k \geq 1$, entonces la función de verosimilitud perfil de $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, $L_P[(\delta_1, \delta_2); E_x]$, es una superficie en \mathbb{R}^3 cuyo dominio es el plano cartesiano correspondiente al espacio parametral $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. Es decir, la verosimilitud perfil es una función real valuada, que está definida para cada pareja $(\delta_1, \delta_2) \in \Delta_1 \times \Delta_2$.

Definición 2.16. (Región de verosimilitud perfil) Supóngase que $R_P(\delta; E_x)$ es la función de verosimilitud perfil relativa de δ . Una región de verosimilitud perfil de nivel de plausibilidad c para δ se define como el conjunto

$$C_P(c; E_x) = \{\delta : R_P(\delta; E_x) \geq c\},$$

donde $0 \leq c \leq 1$.

La probabilidad de cobertura de una región de verosimilitud perfil de nivel de plausibilidad c se puede calcular, al igual que la verosimilitud, a través de la distribución de probabilidad de la estadística de la razón de verosimilitud perfil para un δ fijo en δ_0 , $-2 \log [R_P(\delta_0; X)]$. Aquí, $X = (X_1, \dots, X_n)$ es el vector de variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x; \psi)$ empleada en el cálculo de la verosimilitud perfil relativa $R_P(\delta; X)$. Al fijar

$\delta = \delta_0$ se tiene que $R_P(\delta_0; X)$ es una cantidad aleatoria por que es función del vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$. Un valor particular δ_0 está en una región de verosimilitud perfil de nivel c sí y sólo sí $R_P(\delta_0; X) \geq c$, o de forma equivalente, $-2 \log [R_P(\delta_0; X)] \leq -2 \log(c)$. Entonces, la probabilidad de cobertura de una región de verosimilitud perfil de nivel c para δ , $C_P(c; X)$, es

$$\begin{aligned} PC(\delta_0) &= P[\delta_0 \in C_P(c; X); \delta = \delta_0] \\ &= P[-2 \log [R_P(\delta_0; X)] \leq -2 \log(c); \delta = \delta_0]. \end{aligned}$$

Muchas veces es difícil encontrar la distribución de probabilidad exacta de la estadística de la razón de verosimilitud perfil; sin embargo, existen resultados asintóticos que en muchos casos dan una aproximación buena a ésta distribución. Así, bajo algunas condiciones, llamadas de regularidad, $-2 \log [R_P(\delta_0; X)]$ converge en distribución a una Ji-cuadrada con r grados de libertad para todo $\delta_0 \in \Delta \subset \mathbb{R}^r$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{-2 \log [R_P(\delta_0; X)] \leq x; \delta = \delta_0\} = P[\chi_{(r)}^2 \leq x],$$

para todo $x > 0$. Para detalles de la prueba véase Serfling (1980).

Definición 2.17. (Región de verosimilitud perfil-confianza) Una región de verosimilitud perfil-confianza para cualquier $\delta_0 \in \Delta \subset \mathbb{R}^r$ es una región de verosimilitud perfil que tiene probabilidad de cobertura $1 - \alpha$ para δ_0 .

Si se selecciona

$$c = \exp\left(-\frac{1}{2}q_{r,1-\alpha}\right),$$

donde $q_{r,1-\alpha}$ es el cuantil $1 - \alpha$ de una Ji-cuadrada con r grados de libertad, entonces una región de verosimilitud perfil para δ con este nivel c tiene una probabilidad de cobertura aproximada de $1 - \alpha$. Así, una región de verosimilitud perfil también es una región de confianza y toma consecuentemente el nombre de región de verosimilitud perfil-confianza para δ .

Cuando δ es un parámetro escalar ($r = 1$), entonces una región de verosimilitud perfil-confianza para δ puede ser tratada como una región de verosimilitud-confianza de una verosimilitud típica.

2.10. Intervalos de estimación bajo el uso de la aproximación normal a la verosimilitud

Aproximación normal a la verosimilitud

Sea $l(\psi) = l(\psi; E_x)$ y $R(\psi) = R(\psi; E_x)$ la función log-verosimilitud y la función de verosimilitud relativa del parámetro escalar ψ que toma valores en Ψ . Supúngase que $l(\psi)$ es

infinitamente diferenciable en una vecindad del EMV $\hat{\psi}$. Entonces, la expansión en serie de Taylor de la log-verosimilitud de ψ alrededor de $\hat{\psi}$ es la siguiente serie de potencias:

$$l(\psi) = l(\hat{\psi}) + \frac{\psi - \hat{\psi}}{1!} l'(\hat{\psi}) + \frac{(\psi - \hat{\psi})^2}{2!} l''(\hat{\psi}) + \frac{(\psi - \hat{\psi})^3}{3!} l'''(\hat{\psi}) + \dots \quad (2.11)$$

Como $\hat{\psi}$ es el EMV de ψ entonces $l'(\hat{\psi}) = 0$. Así, (2.11) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r(\psi) &= -\frac{1}{2}(\psi - \hat{\psi})^2 \mathcal{I}(\hat{\psi}) + \frac{(\psi - \hat{\psi})^3}{3!} l'''(\hat{\psi}) + \dots \\ &= -\frac{1}{2} u_{\psi}^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} F_i(\hat{\psi}) u_{\psi}^i, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $r(\psi) = l(\psi) - l(\hat{\psi}) = \log[R(\psi)]$ es la log-verosimilitud relativa de ψ , $u_{\psi} = (\hat{\psi} - \psi) \sqrt{\mathcal{I}(\hat{\psi})}$, $\mathcal{I}(\hat{\psi})$ es la información observada de Fisher definida como $\mathcal{I}(\hat{\psi}) = -l''(\hat{\psi})$ y $F_i(\hat{\psi}) = l^{(i)}(\hat{\psi}) \mathcal{I}^{-\frac{i}{2}}(\hat{\psi})$ [véase Sprott (2000, Pág. 165)].

La aproximación normal para $r(\psi)$ es definida como sigue:

$$r_N(\psi) = -\frac{1}{2} u_{\psi}^2 = -\frac{1}{2} (\psi - \hat{\psi})^2 \mathcal{I}(\hat{\psi}). \quad (2.13)$$

Así, la correspondiente aproximación normal a la función de verosimilitud realtiva es

$$R_N(\psi) = \exp[r_N(\psi)] = \exp\left[-\frac{1}{2}(\psi - \hat{\psi})^2 \mathcal{I}(\hat{\psi})\right]. \quad (2.14)$$

Nótese que este tipo de aproximación es adecuada cuando los términos de $\sum_{i=3}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} F_i(\hat{\psi}) u_{\psi}^i$ en (2.12) son cero o aproximadamente cero. Generalmente, esto ocurre cuando la función de verosimilitud es simétrica alrededor del EMV y tiene forma acampanada.

Un intervalo de verosimilitud para ψ de plausibilidad c es el conjunto de valores de ψ que cumplen que $R(\psi) \geq c$, o equivalentemente, $r(\psi) \geq \log c$. Tomando $r_N(\psi) \geq \log(c)$ se tiene que

$$\psi \in \hat{\psi} \pm \sqrt{-2 \log(c) / \mathcal{I}(\hat{\psi})} \quad (2.15)$$

es una aproximación para el intervalo de verosimilitud para ψ de nivel c . Más aún, si para un tamaño de muestra fijo se supone que $u_{\psi} = (\hat{\psi} - \psi) \sqrt{\mathcal{I}(\hat{\psi})}$ tiene una distribución normal y $c = \exp(z_{1-\alpha/2}^2/2)$, donde $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil de probabilidad $(1 - \alpha/2)$ de una variable normal estandar, entonces la aproximación normal para el intervalo de verosimilitud-confianza para ψ de nivel de confianza $(1 - \alpha)$ es

$$\psi \in \hat{\psi} \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{\mathcal{I}(\hat{\psi})}}. \quad (2.16)$$

Surge aquí una pregunta importante ¿Es apropiado usar la aproximación normal con muestras pequeñas? Esto depende mucho de la situación que se esté analizando. Existen ejemplos

donde se puede mostrar que $r(\psi) = r_N(\psi)$ para todo tamaño de muestra, tal como el caso normal. En contraste, existen situaciones donde la aproximación normal no es buena incluso con 500 observaciones. En estos casos el intervalo (2.15) es una mala aproximación para el intervalo verosimilitud que se obtiene de la verosimilitud legítima. Por lo tanto, es necesario verificar la exactitud de la aproximación normal en cada nueva situación. Para hacer esto, se recomienda graficar ambas funciones en la misma figura y comprobar que tienen aproximadamente la misma forma. Así, cualquier intervalo de verosimilitud legítimo de nivel de plausibilidad c será aproximado adecuadamente con el intervalo dado en (2.15). Adicionalmente, se recomienda verificar la probabilidad de cobertura del intervalo de verosimilitud-confianza dado en (2.16) mediante simulaciones. A continuación se presenta un ejemplo que ilustra una mala aproximación normal a la verosimilitud.

Ejemplo 2.18. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector de variables aleatorias iid con distribución exponencial con media $\psi > 0$. Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ una muestra observada de X . Entonces la función de verosimilitud de ψ es (aproximación continua)

$$L(\psi; x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\psi} \exp\left(-\frac{x_i}{\psi}\right) = \psi^{-n} \exp\left(-\frac{1}{\psi} \sum_{i=1}^n x_i\right). \quad (2.17)$$

Luego, aplicando el logaritmo natural a la función de verosimilitud de ψ dada en (2.17) se obtiene la siguiente expresión para la función log-verosimilitud de ψ :

$$l(\psi) = -n \log \psi - \frac{1}{\psi} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.18)$$

Así, la primera y segunda derivada de la log-verosimilitud de ψ dada en (2.18) son

$$l'(\psi) = -\frac{n}{\psi} + \frac{1}{\psi^2} \sum_{i=1}^n x_i \quad y \quad l''(\psi) = \frac{n}{\psi^2} - \frac{2}{\psi^3} \sum_{i=1}^n x_i,$$

respectivamente. Por lo tanto, el EMV de ψ y la información observada de Fisher son $\hat{\psi} = \bar{x}$ y $\mathcal{I}(\hat{\psi}) = n/\hat{\psi}^2$, respectivamente. Así, las expresiones para la función log-verosimilitud relativa de ψ y su correspondiente aproximación normal son las siguientes:

$$r(\psi) = l(\psi) - l(\hat{\psi}) = -n \left[\frac{\hat{\psi}}{\psi} - 1 - \log\left(\frac{\hat{\psi}}{\psi}\right) \right] \quad (2.19)$$

y

$$r_N(\psi) = -\frac{1}{2}(\psi - \hat{\psi})^2 \mathcal{I}(\hat{\psi}) = -\frac{n}{2} \left(\frac{\psi}{\hat{\psi}} - 1 \right)^2. \quad (2.20)$$

Nótese que basta aplicar la función exponencial en ambas expresiones para encontrar la función de verosimilitud relativa de ψ y su correspondiente aproximación normal,

$$R(\psi) = \left(\frac{\hat{\psi}}{\psi} \right)^n \exp \left[-n \left(\frac{\hat{\psi}}{\psi} - 1 \right) \right] \quad (2.21)$$

y

$$R_N(\psi) = \exp \left[-\frac{n}{2} \left(\frac{\psi}{\hat{\psi}} - 1 \right)^2 \right] \quad (2.22)$$

La Figura 2.2 muestra la gráfica de la función de verosimilitud relativa de ψ y su correspondiente aproximación normal, dadas en (2.21) y (2.22), para datos reales de tiempos de vida componentes electrónicos: 70, 11, 66, 5, 20, 4, 35, 40, 29, 8 (véase Kalbfleisch 1985, Pág. 26).

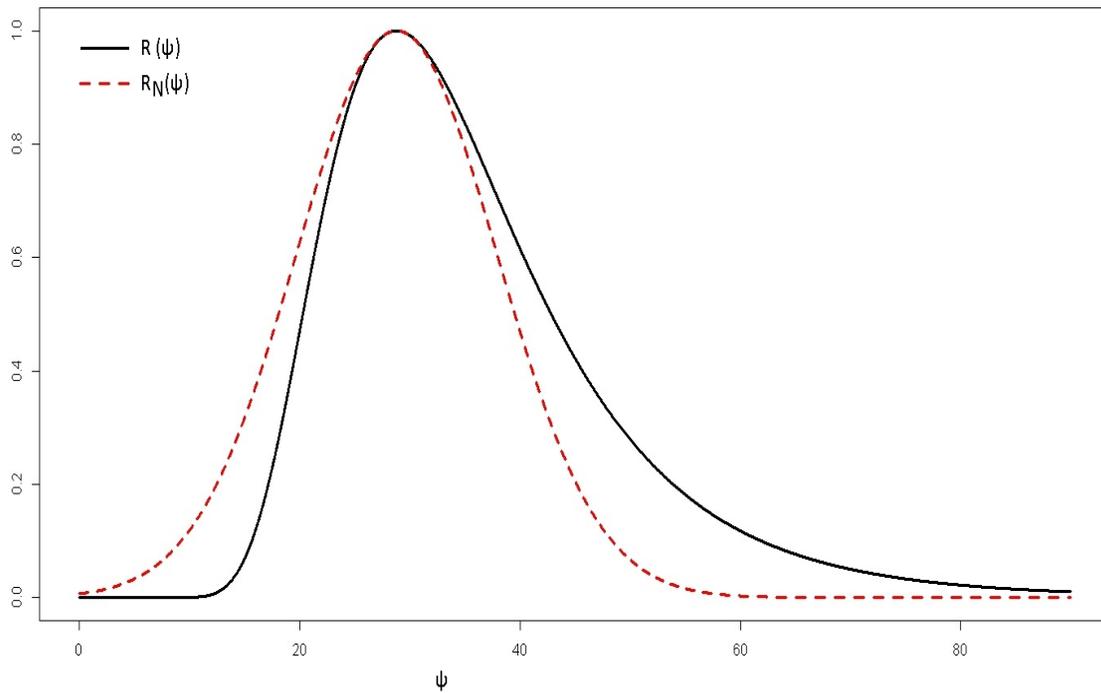


Figura 2.2: Verosimilitud relativa y su aproximación normal

Es evidente que en este caso no se debe utilizar la aproximación normal para estimar un intervalo de verosimilitud-confianza para el parámetro de interés ψ . En la siguiente sección se verá que es posible algunas veces emplear una transformación uno a uno del parámetro de interés, la cual permite que la verosimilitud del nuevo parámetro y su correspondiente aproximación normal sean prácticamente idénticas. Así, es posible usar la aproximación normal para obtener expresiones muy simples para los intervalos de verosimilitud-confianza del nuevo parámetro [véase (2.15) y (2.16)] y posteriormente obtener los intervalos para el parámetro de interés usando la propiedad de invarianza de la verosimilitud para funciones uno a uno.

Transformación de parámetros

Cuando la función de verosimilitud es asimétrica con respecto al EMV, es claro que la aproximación normal no será adecuada debido a que este tipo de aproximación corta la expansión de series de Taylor de la función de log-verosimilitud en el término cuadrático, despreciando en particular el tercer y cuarto término los cuales tienen información de la asimetría y curtosis de la verosimilitud, respectivamente. En estos casos, antes de usar la aproximación normal a la verosimilitud, es recomendable reparametrizar la función de log-verosimilitud del parámetro de interés ψ a través de una transformación uno a uno $\psi = g(\lambda)$, con el objetivo de conseguir una función de verosimilitud de λ que sea aproximadamente simétrica y acampanada para asegurar que pueda ser aproximada adecuadamente. Esto generalmente se logra cuando la transformación g es tal que la tercera derivada de la función de log-verosimilitud de λ se hace cero al ser evaluada en el EMV de λ , ó equivalentemente que $F_3(\hat{\lambda})$ sea cero. Así, la aproximación normal a la verosimilitud de λ es apropiada y producirá intervalos de verosimilitud-confianza para λ con una estructura matemática muy simple [véase (2.15) y (2.16)]. Luego, por la propiedad de invarianza de la verosimilitud para transformaciones uno a uno, descritas en la Sección 2.6, se obtienen de manera inmediata expresiones matemáticas muy simples para los intervalos de verosimilitud-confianza del parámetro de interés ψ . A continuación se ejemplifica este procedimiento estadístico de inferencia.

Ejemplo 2.19. En el Ejemplo 2.18 se mostró que la aproximación normal a la función de verosimilitud de ψ , la media de una variable aleatoria exponencial, es inadecuada. Aquí se mostrará una reparametrización de la función de log-verosimilitud de ψ que permite obtener una adecuada aproximación normal a la verosimilitud. Más aún, como se trata de una reparametrización uno a uno, entonces por la propiedad de invarianza de la verosimilitud se obtiene de manera inmediata y simple intervalos de verosimilitud-confianza para ψ .

Considérese la familia de transformaciones de potencia $\psi = \lambda^a$, donde $a \neq 0$. Por la propiedad de invarianza de la verosimilitud se tiene que $\hat{\psi} = \hat{\lambda}^a$, donde $\hat{\psi} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$. Así, la función log-verosimilitud de λ es

$$\begin{aligned} l_*(\lambda) &= l(\psi = \lambda^a) \\ &= -n \log \lambda^a - \frac{1}{\lambda^a} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= -na \log \lambda - \frac{n\hat{\lambda}^a}{\lambda^a}. \end{aligned}$$

Luego, las primeras tres derivadas con respecto a λ son:

$$\begin{aligned} l'_*(\lambda) &= \frac{-na}{\lambda} + \frac{na\hat{\lambda}^a}{\lambda^{a+1}}, \\ l''_*(\lambda) &= \frac{na}{\lambda^2} - \frac{na(a+1)\hat{\lambda}^a}{\lambda^{a+2}}, \\ l'''_*(\lambda) &= \frac{-2na}{\lambda^3} + \frac{na(a+1)(a+2)\hat{\lambda}^a}{\lambda^{a+3}}. \end{aligned}$$

De aquí que la información observada de Fisher y la tercera derivada de la función log-verosimilitud de λ evaluadas en el EMV $\hat{\lambda}$ sean

$$\mathcal{I}_*(\hat{\lambda}) = -l''_*(\hat{\lambda}) = \frac{na^2}{\hat{\lambda}^2}$$

y

$$l'''_*(\hat{\lambda}) = \frac{na^2(a+3)}{\hat{\lambda}^3},$$

respectivamente.

Nótese que la tercer derivada es cero para $a = -3$; esto es, para $\psi = \lambda^{-3}$. Así, el término cúbico en la expansión de serie de Taylor de $l_*(\lambda)$ evaluado en $\lambda = \hat{\lambda}$ es cero, y entonces la verosimilitud de λ será aproximadamente simétrica y de forma acampanada.

Ahora, de (2.19) se obtiene la log-verosimilitud relativa reparametrizada en términos de λ , $r_*(\lambda)$,

$$r_*(\lambda) = r(\psi = \lambda^{-3}) = -n \left[\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right)^{-3} - 1 + 3 \log \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right) \right] \quad (2.23)$$

La aproximación normal de la log-verosimilitud relativa reparametrizada en términos de λ , $r_{N*}(\lambda)$, es

$$\begin{aligned} r_{N*}(\lambda) &= -\frac{1}{2} (\lambda - \hat{\lambda})^2 \mathcal{I}_*(\hat{\lambda}) \\ &= -\frac{9n}{2\hat{\lambda}^2} (\lambda - \hat{\lambda})^2, \text{ donde } \hat{\lambda} = \hat{\psi}^{-\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Luego, aplicando la función exponencial a (2.23) y (2.24) se obtienen las correspondientes expresiones, en términos de λ , de la función de verosimilitud relativa y la aproximación normal a la verosimilitud relativa,

$$R_*(\lambda) = \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right)^3 \exp \left\{ -n \left[\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right)^{-3} - 1 \right] \right\} \quad (2.25)$$

y

$$R_{N^*}(\lambda) = \exp \left[-\frac{9n}{2\hat{\lambda}^2} (\lambda - \hat{\lambda})^2 \right]. \tag{2.26}$$

Ahora si se consideran los datos del Ejemplo 2.18, se puede observar en la Figura 2.3 que la verosimilitud reparametrizada (2.25) y su respectiva aproximación normal (2.26) prácticamente se empalman.

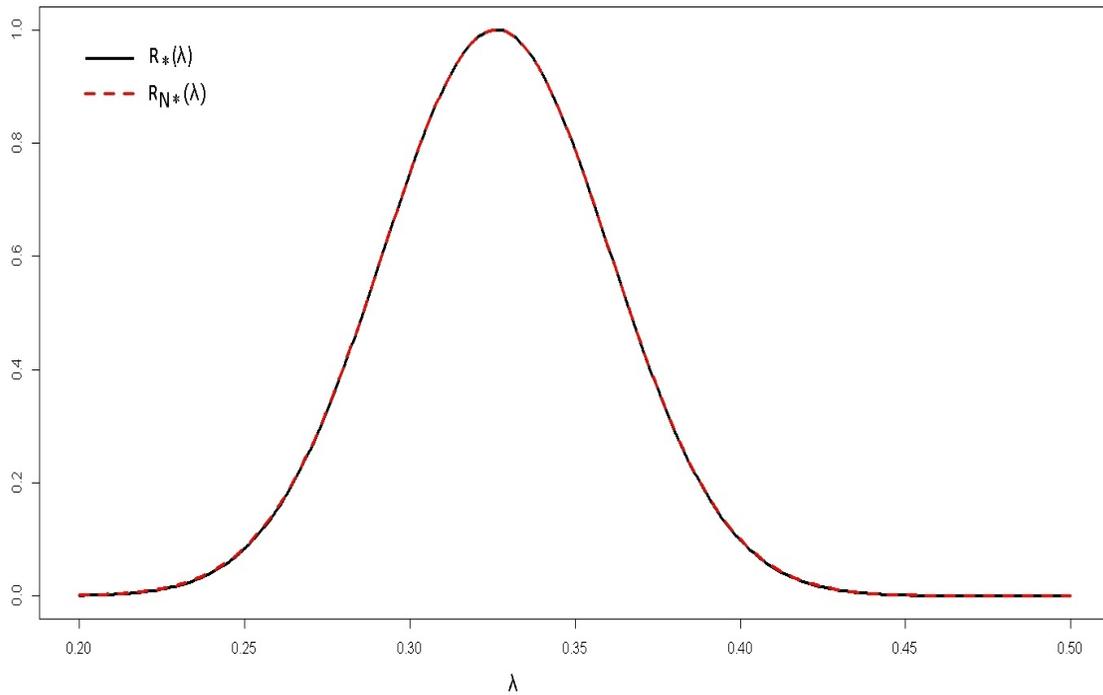


Figura 2.3: Verosimilitud relativa y su aproximacion normal

Luego, al reparametrizar la aproximación normal de la función de verosimilitud relativa de λ , dada en (2.26), en términos de ψ vía la transformación $\psi = \lambda^3$ (regresar a la escala del parámetro de interés ψ), se obtiene la siguiente aproximación normal de la función de verosimilitud relativa de ψ :

$$R_{N^*}(\psi) = \exp \left[-\frac{9n\hat{\psi}^{\frac{2}{3}}}{2} \left(\frac{1}{\psi^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{\hat{\psi}^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \right]. \tag{2.27}$$

La Figura 2.4 muestra en la misma gráfica, la función de verosimilitud relativa de ψ dada en (2.21) y su de aproximación normal (2.27). En esta figura se observa que ambas funciones prácticamente se empalman. Así, la aproximación normal (2.27) de la función de verosimilitud relativa de ψ , obtenida al emplear una transformación adecuada (transformación uno a uno que

hace cero la tercera derivada de la verosimilitud) y que tiene una estructura matemática simple, se puede emplear para hacer inferencias sobre ψ . Por ejemplo, bajo esta aproximación normal, el intervalo de verosimilitud de nivel c para ψ , obtenido de (2.15), es

$$\psi \in \hat{\psi} \left[1 \pm \sqrt{-2 \log(c)/9n} \right]^{-3}. \quad (2.28)$$

Nótese que si se selecciona $c = \exp(z_{1-\alpha/2}^2/2)$, donde $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil $(1 - \alpha/2)$ de una normal estándar, entonces el intervalo de verosimilitud dado en (2.28) es también un intervalo de confianza para ψ de nivel de confianza $(1 - \alpha)$.

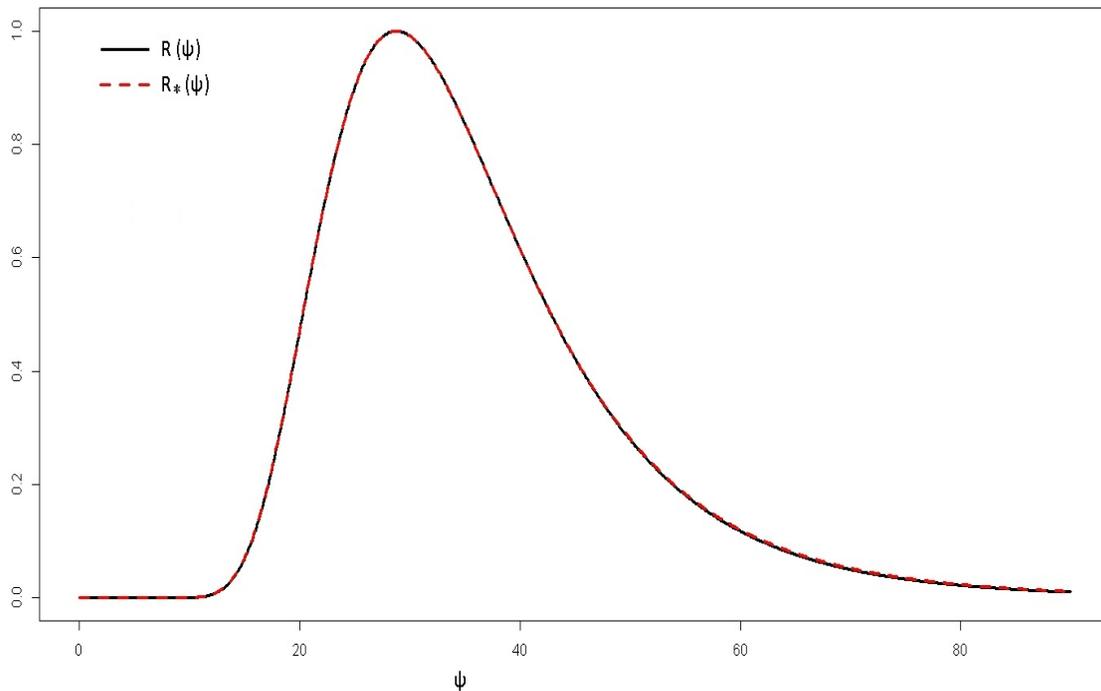


Figura 2.4: Verosimilitud relativa y su aproximación normal

Nótese que encontrar una expresión analítica para el intervalo de verosimilitud $\{\psi : R(\psi) \geq c\}$ es muchas veces complicado y entonces se tienen que calcular a través de algún método computacional; por ejemplo, el método de bisección. En la Tabla 2.2 se hace un comparativo de intervalos de verosimilitud-confianza para ψ , obtenidos de la verosimilitud de ψ dada en (2.21) y de la expresión analítica dada en (2.28) correspondiente a la aproximación normal (2.27). Se puede observar que las dos estimaciones están muy cercanas una de la otra.

$(1 - \alpha)$	c	Verosimilitud		Aproximación normal	
		Límite inferior	Límite superior	Límite inferior	Límite superior
0.90	0.258	17.8	50.9	17.82	51.01
0.95	0.146	16.3	57.6	16.38	57.70
0.99	0.036	14.0	74.4	14.0	74.58

Tabla 2.2: Intervalos de verosimilitud-confianza para ψ , la media de una exponencial, obtenidos de la verosimilitud de ψ y de su aproximación normal.

2.11. Intervalos de estimación bajo el uso de cantidades pivotaes

Tal vez uno de los métodos más elegantes para construir intervalos de estimación y calcular probabilidades de cobertura es aquél que usa cantidades pivotaes. El uso de cantidades pivotaes para la construcción de intervalos de confianza, resultado que se ha llamado inferencia pivotal, se debe principalmente a Barnard (1949, 1977).

La idea general de este método es partir de una prueba de hipótesis $H_0 : \psi = \psi_0$ y considerar una cantidad pivotal $Q(X, \psi)$, con el parámetro fijo en ψ_0 , como estadística de prueba. Luego, utilizar el método de inversión de una prueba para encontrar un intervalo de confianza para ψ . A continuación se presentan tres definiciones (cantidad pivotal, nivel de una prueba y región de no rechazo de una prueba) y un teorema que serán de utilidad para explicar de manera clara y formal la construcción de intervalos a través de una cantidad pivotal.

Definición 2.20. Una variable aleatoria $Q(X, \psi) = Q(X_1, \dots, X_n; \psi)$ es una cantidad pivotal (o pivote) si la distribución de $Q(X, \psi)$ no depende del vector de parámetros ψ .

Definición 2.21. Una prueba se considera de nivel α si

$$\sup_{\psi \in \Psi_0} P_\psi [T \in C] \leq \alpha,$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Recuérdese que una prueba de hipótesis esta conformada por la pareja (T, C) , donde T es una estadística de prueba y C es un subconjunto de valores posibles de T denominado la región crítica de la prueba. La hipótesis H_0 se rechaza si $T \in C$, en otro caso no rechazar H_0 . Así, cuando una prueba es de nivel α entonces se tiene controlada la probabilidad de cometer error Tipo I, rechazar H_0 cuando no debió de rechazarse.

Nótese que si una prueba es de nivel α entonces

$$\sup_{\psi \in \Psi_0} P_\psi [T \notin C] \geq 1 - \alpha,$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$. En particular, si la hipótesis nula es $H_0 : \psi = \psi_0$ entonces se tiene que

$$P_{\psi_0} [T \notin C] \geq 1 - \alpha. \quad (2.29)$$

Definición 2.22. La región de no rechazo de una prueba de hipótesis se define como el conjunto $\mathcal{A}(\psi_0)$ en el espacio muestral para los cuales $H_0 : \psi = \psi_0$ es no rechazada; es decir,

$$\mathcal{A}(\psi_0) = \{(x_1, \dots, x_n) : T(x_1, \dots, x_n; \psi_0) \notin C\},$$

donde $T(x_1, \dots, x_n; \psi_0)$ es la estadística de prueba.

Teorema 2.23. Para cada ψ_0 en el espacio parametral Ψ , sea $\mathcal{A}(\psi_0)$ la región de no rechazo de una prueba de nivel α de $H_0 : \psi = \psi_0$. Para cada x en el espacio muestral, se define un conjunto $\mathcal{C}(x)$ en el espacio parametral por

$$\mathcal{C}(x) = \{\psi_0 : x \in \mathcal{A}(\psi_0)\}. \quad (2.30)$$

Entonces el conjunto aleatorio $\mathcal{C}(X)$ es un conjunto de confianza $1 - \alpha$. Inversamente, sea $\mathcal{C}(X)$ un conjunto de confianza $1 - \alpha$. Para cualquier $\psi_0 \in \Psi$, se define

$$\mathcal{A}(\psi_0) = \{x : \psi_0 \in \mathcal{C}(x)\}.$$

Entonces $\mathcal{A}(\psi_0)$ es la región de no rechazo de una prueba de nivel α de $H_0 : \psi = \psi_0$.

Demostración. Para la primer parte, como $\mathcal{A}(\psi_0)$ es la región de no rechazo de una prueba de nivel α , entonces

$$P_{\psi_0} [X \notin \mathcal{A}(\psi_0)] \leq \alpha$$

y por lo tanto

$$P_{\psi_0} [X \in \mathcal{A}(\psi_0)] \geq 1 - \alpha.$$

La anterior desigualdad junto con (2.30) muestra que la probabilidad de cobertura del conjunto $\mathcal{C}(X)$ está dado por

$$P_{\psi_0} [\psi_0 \in \mathcal{C}(X)] = P_{\psi_0} [X \in \mathcal{A}(\psi_0)] \geq 1 - \alpha,$$

para cada $\psi_0 \in \Psi$. Así, $\mathcal{C}(X)$ es un conjunto de confianza $1 - \alpha$.

Para la segunda parte, la probabilidad de cometer error Tipo I para la prueba $H_0 : \psi = \psi_0$ con región de no rechazo $\mathcal{A}(\psi_0)$ es

$$P_{\psi_0} [X \notin \mathcal{A}(\psi_0)] = P_{\psi_0} [\psi_0 \notin \mathcal{C}(X)] \leq \alpha$$

Por lo tanto esta es una prueba de nivel α . □

Para construir un región de confianza a partir de una cantidad pivotal, se procede de la siguiente forma. Supóngase que se desea considera la hipótesis $H_0 : \psi = \psi_0$ versus $H_1 : \psi \neq \psi_0$ y una estadística de prueba $T = Q(X; \psi_0)$, donde $Q(X; \psi)$ es una cantidad pivotal y $\psi_0 \in \Psi \subset \mathbb{R}$. Entonces para el valor fijo α se pueden encontrar números a y b , que no dependen de ψ , que satisfacen

$$P_\psi(a \leq Q(X; \psi) \leq b) \geq 1 - \alpha.$$

Entonces, para cada $\psi_0 \in \Psi$,

$$\mathcal{A}(\psi_0) = \{x : a \leq T = Q(x; \psi_0) \leq b\}$$

es la región de no rechazo para una prueba de nivel α de $H_0 : \psi = \psi_0$. Nótese que se usa la cantidad pivotal para determinar la forma específica de la región de no rechazo. Luego, usando el Teorema 2.23 para invertir la prueba, se obtiene que

$$\mathcal{C}(x) = \{\psi_0 : a \leq T = Q(x; \psi_0) \leq b\}. \quad (2.31)$$

es una región de confianza $1 - \alpha$ para ψ . Con el fin de ilustrar esta metodología se presenta a continuación el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.24. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector de variables aleatorias independientes con distribución exponencial y media ψ . Considérese las hipótesis $H_0 : \psi = \psi_0$ versus $H_1 : \psi \neq \psi_0$ y la estadística de prueba $T = Q(X_1, \dots, X_n; \psi_0)$, donde $Q(X_1, \dots, X_n; \psi) = (2S/\psi)$, $S = \sum X_i$. Nótese que $Q(X_1, \dots, X_n; \psi)$ es una cantidad pivotal con distribución Ji-cuadrada con $2n$ grados de libertad, denotada como χ_{2n}^2 .

Sean a y b dos constantes que satisfacen que $P_\psi(a \leq T = Q(X_1, \dots, X_n; \psi) \leq b) = 1 - \alpha$. Entonces, para cada $\psi_0 \in \Psi$,

$$P_{\psi_0}(a \leq T \leq b) = P_{\psi_0}\left(a \leq \frac{2S}{\psi_0} \leq b\right) = P(a \leq \chi_{2n}^2 \leq b) = 1 - \alpha.$$

Como la anterior cadena de igualdades es cierta para cada $\psi_0 \in \Psi$, entonces se puede escribir ψ en vez de ψ_0 . Así, $\mathcal{A}(\psi) = \{s : a \leq 2s/\psi \leq b\}$ es la región de no rechazo de una prueba de nivel α para $H_0 : \psi = \psi_0$. Ahora, invirtiendo la prueba se obtiene un intervalo de confianza $1 - \alpha$ para ψ

$$\mathcal{C}(s) = \left\{ \psi : \frac{2s}{b} \leq \psi \leq \frac{2s}{a} \right\}.$$

La metodología para construir intervalos de confianza a través de cantidades pivotaes es relativamente sencilla y elegante. Sin embargo, para su aplicación se requiere tener una cantidad pivotal para el parámetro de interés. Esto no siempre es posible y limita el uso del enfoque pivotal para construir intervalos de confianza. Una interesante discusión de las fortalezas y debilidades de este método es dado en Berger y Wolpert (1984).

Capítulo 3

Estimación por intervalos para $\theta = P(X < Y)$: Caso exponencial

En este Capítulo se abordará el problema de hacer inferencia estadística sobre el parámetro $\theta = P(X < Y)$ cuando X y Y son variables aleatorias independientes con distribución exponencial. Se considerarán los casos de datos sin censura y con censura. Los escenarios de censura que serán contemplados son: (a) Censura por la derecha de Tipo II y (b) Censura progresiva de Tipo II. Para cada caso se usarán tres metodologías para hacer inferencias sobre el parámetro $\theta = P(X < Y)$: (1) La verosimilitud perfil, (2) Una reparametrización de la verosimilitud junto con el enfoque de aproximación normal de la verosimilitud y (3) Estimación a través de una cantidad pivotal. Es importante mencionar que el enfoque de verosimilitud perfil, aunque es ilustrado en este capítulo, no será considerado para el estudio comparativo de inferencias desarrollado en el Capítulo 4.

3.1. Introducción

En esta sección se verá cual es la forma o expresión matemática que toma el parámetro $\theta = P(X < Y)$ para el caso exponencial. Se supondrá que X y Y son dos variables aleatorias independientes con función de densidad de probabilidad exponencial

$$f_X(x; \alpha) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right)$$

y

$$f_Y(y; \beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right),$$

respectivamente, donde α y β son parámetros no negativos, fijos y desconocidos.

Por definición,

$$\theta = P(X < Y; \alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y; \alpha, \beta) I(x < y) dx dy, \quad (3.1)$$

donde $f_{X,Y}(x, y; \alpha, \beta)$ es la función de densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) y $I(\cdot)$ es la función indicadora. Como X y Y son variables aleatorias exponenciales independientes, entonces son no negativas y su función de densidad conjunta es el producto de sus densidades de probabilidad, $f_{X,Y}(x, y; \alpha, \beta) = f_X(x; \alpha) f_Y(y; \beta)$. Así, el parámetro de interés θ dado en (3.1) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^\infty \int_0^y f_X(x; \alpha) f_Y(y; \beta) dx dy \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^y f_X(x; \alpha) dx \right] f_Y(y; \beta) dy \\ &= \int_0^\infty F_X(y; \alpha) f_Y(y; \beta) dy, \end{aligned}$$

donde $F_X(\cdot; \alpha)$ es la función de distribución de X . Entonces, el parámetro de interés es

$$\theta = \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{\alpha}\right) \right] \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) dy = \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \quad (3.2)$$

Nótese que $\theta = 0.5$ si y solo si $\alpha = \beta$. Es decir, probar la hipótesis $H_0 : \theta = 0.5$ es equivalente a probar que las distribuciones exponenciales de X y Y son iguales. Entonces, aplicando la inversión de una prueba de hipótesis, se rechaza que las distribuciones exponenciales de X y Y son iguales, con un nivel de confianza del 95 %, si el intervalo de verosimilitud-confianza para θ de nivel de plausibilidad $c = 0.15$, no cubre el valor $\theta = 0.5$. En caso contrario, no se rechaza que $F_X(z)$ y $F_Y(z)$ sean iguales, para todo $z \geq 0$.

3.2. Caso I: Sin censura

Supóngase que se cuenta con dos muestras observadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_m)$ provenientes de $f_X(x; \alpha)$ y $f_Y(y; \beta)$, respectivamente, las cuales no cuentan con ningún tipo de censura. Es decir, los datos fueron observados de manera completa. Bajo este escenario de observación, en las siguientes secciones se hace inferencia sobre el parámetro θ con base en tres metodologías estadísticas descritas en el capítulo anterior: (1) La verosimilitud perfil, (2) Una reparametrización de la verosimilitud junto con el enfoque de aproximación normal de la verosimilitud y (3) Estimación a través de una cantidad pivotal.

3.2.1. Uso de la verosimilitud perfil

Dado que X y Y son independientes, se tiene que la función de verosimilitud de (α, β) es

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta; x, y) &= \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \alpha) \prod_{j=1}^m f_Y(y_j; \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x_i}{\alpha}\right) \prod_{j=1}^m \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y_j}{\beta}\right) \\ &= \alpha^{-n} \beta^{-m} \exp\left(-\frac{t}{\alpha} - \frac{s}{\beta}\right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $t = \sum_{i=1}^n x_i$ y $s = \sum_{j=1}^m y_j$. Nótese que los EMV de α y β son $\hat{\alpha} = t/n$ y $\hat{\beta} = s/m$, respectivamente. Así, de la relación (3.2) y de la propiedad de invarianza de la verosimilitud se tiene que el EMV de θ es $\hat{\theta} = \hat{\beta}/(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Luego, como el parámetro de intrerés es θ , de la relación (3.2) se obtiene la expresión

$$\alpha = \frac{\beta(1-\theta)}{\theta}$$

que se usará para reparametrizar la función de verosimilitud en términos de θ y β . Nótese que esta reparametrización es uno a uno, $(\alpha, \beta) \longleftrightarrow (\theta, \beta)$. Así, la función de verosimilitud de (θ, β) es

$$\begin{aligned} L(\theta, \beta; x, y) &= \left[\frac{\beta(1-\theta)}{\theta}\right]^{-n} \beta^{-m} \exp\left[-\frac{t}{\frac{\beta(1-\theta)}{\theta}} - \frac{s}{\beta}\right] \\ &= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^n \beta^{-(n+m)} \exp\left[-\frac{1}{\beta} \left(\frac{\theta t}{1-\theta} + s\right)\right]. \end{aligned}$$

Entonces, la función log-verosimilitud de (θ, β) es

$$\begin{aligned} l(\theta, \beta; x, y) &= \log[L(\theta, \beta; x, y)] \\ &= n \log \theta - n \log(1-\theta) - (n+m) \log \beta - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\theta t}{1-\theta} + s\right). \end{aligned}$$

Nótese que el estimador de máxima verosimilitud restringido de β para θ fijo es

$$\hat{\beta}(\theta) = \frac{\left(\frac{\theta t}{1-\theta} + s\right)}{(n+m)} = \frac{\theta t + (1-\theta)s}{(1-\theta)(n+m)}.$$

Así, la función de verosimilitud perfil $L_p(\theta; x, y)$ de θ es

$$\begin{aligned} L_p(\theta; x, y) &= L\left[\theta, \hat{\beta}(\theta); x, y\right] \\ &= K \theta^n (1-\theta)^m [\theta t + (1-\theta)s]^{-(n+m)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $K = (n + m)^{n+m} \exp[-(n + m)]$ es una constante como función de θ . Su correspondiente verosimilitud perfil relativa es

$$\begin{aligned}
R_p(\theta; x, y) &= \frac{L_p(\theta; x, y)}{\sup_{\theta \in \Theta} L_p(\theta; x, y)} \\
&= \frac{K\theta^n [\theta t + (1 - \theta)s]^{-(n+m)} (1 - \theta)^m}{K\hat{\theta}^n [\hat{\theta}t + (1 - \hat{\theta})s]^{-(n+m)} (1 - \hat{\theta})^m} \\
&= \left(\frac{\theta}{\hat{\theta}}\right)^n \left(\frac{1 - \theta}{1 - \hat{\theta}}\right)^m \left[\frac{\hat{\theta}t + (1 - \hat{\theta})s}{\theta t + (1 - \theta)s}\right]^{n+m} \\
&= C\theta^n (1 - \theta)^m [\theta t + (1 - \theta)s]^{-(n+m)}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

donde $C = (n + m)^{n+m} s^m t^n / n^n m^m$.

La función de verosimilitud perfil de θ dada en (3.5) se puede usar para hacer inferencias sobre θ ; véase Capítulo 2.

3.2.2. Reparametrización y aproximación normal a la verosimilitud perfil

Otro enfoque para hacer inferencias estadística sobre θ es el uso de la aproximación normal a la verosimilitud. Sin embargo, como se mostró en la Sección 2.10 del Capítulo 2, este enfoque proporciona inferencias razonables sobre un parámetro de interés cuando la función de verosimilitud a aproximar es casi simétrica alrededor del EMV y de forma acampanada. Cuando este no es el caso, es necesario reparametrizar adecuadamente la función de verosimilitud. Por lo tanto, antes de usar la aproximación normal, es necesario estudiar la asimetría de la verosimilitud perfil de θ para valorar si será necesario reparametrizarla o no.

Asimetría de la verosimilitud perfil

La función de verosimilitud perfil de θ , dada en (3.4), será casi simétrica alrededor de $\hat{\theta}$ y de forma acampanada si los términos $F_3(\hat{\theta})$ y $F_4(\hat{\theta})$, de su respectiva expansión en serie de Taylor, son muy cercanos a cero [véase ecuación (2.12) del Capítulo 2]. En este caso se tiene que

$$\mathcal{J}(\hat{\theta}) = -l''(\hat{\theta}) = \frac{nm}{(n + m) [\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})]^2}, \tag{3.6}$$

$$F_3(\hat{\theta}) = l^{(3)}(\hat{\theta}) \mathcal{J}^{-\frac{3}{2}}(\hat{\theta}) = \frac{2 [n + (n + m)(1 - 3\hat{\theta})]}{\sqrt{nm(n + m)}} \tag{3.7}$$

y

$$F_4(\hat{\theta}) = l^{(4)}(\hat{\theta}) \mathcal{J}^{-\frac{4}{2}}(\hat{\theta}) = \frac{-6}{nm(n + m)} [c_1 \hat{\theta}^2 - c_2 \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}) + c_3 (1 - \hat{\theta})^2], \tag{3.8}$$

donde $c_1 = 3m^2 + 3nm + n^2$, $c_2 = 2m^2 + 6nm + 2n^2$ y $c_3 = m + 3nm + 3n^2$. Así, para valores de $\hat{\theta}$ cercanos a 0 ó 1 y muestras pequeñas se tiene que $F_3(\hat{\theta})$ y $F_4(\hat{\theta})$ no son cero. Por ejemplo, en

la Tabla 3.1 se muestran cuatro casos, muestras pequeñas y $\hat{\theta}$ cercano a uno, donde los valores de F_3 y F_4 son distintos de cero. Estos resultados indican que las correspondientes funciones de verosimilitud de θ son asimétricas con respecto a $\hat{\theta} = 0.99$. La Figura 3.1 muestra en la misma gráfica la función de verosimilitud perfil de θ , dada en (3.4), correspondiente a cada caso de la Tabla 3.1. Nótese que, en efecto, en los cuatro casos se presenta la asimetría. En particular se observa que la verosimilitud que se obtiene en el caso (d) es la menos asimétrica, con respecto a $\hat{\theta} = 0.99$, tiene asociada el valor más pequeño de F_3 en la Tabla 3.1 y corresponde a un tamaño de muestra $n = m = 8$, el más grande con respecto a los otros casos.

Caso	n	m	$\hat{\theta}$	$F_3(\hat{\theta})$	$F_4(\hat{\theta})$
(a)	4	4	0.99	-2.08	-5.07
(b)	4	8	0.99	-2.0	-4.6
(c)	8	4	0.99	-1.60	-3.13
(d)	8	8	0.99	-1.47	-2.54

Tabla 3.1: Estudio de asimetría de la verosimilitud de θ .

En conclusión, para hacer inferencias sobre θ a través del enfoque de la aproximación normal de la verosimilitud se requiere que ésta sea reparametrizada adecuadamente, ya que puede ser muy asimétrica; en particular para muestras pequeñas y valores de θ positivos y cercanos a 0 ó 1. Una reparametrización adecuada será presentada en la siguiente sección.

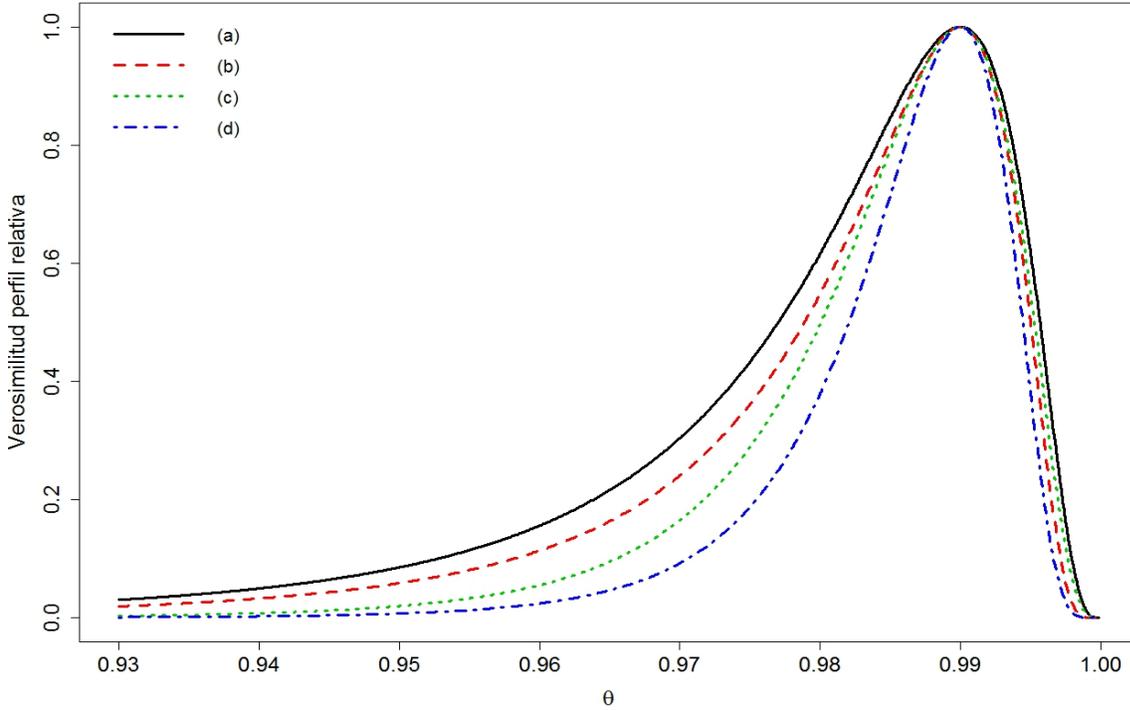


Figura 3.1: Estudio de asimetría de la verosimilitud de θ .

Reparametrización

Como se mostró en la sección anterior, la verosimilitud del parámetro θ puede ser muy asimétrica con respecto a $\hat{\theta}$. Por tal razón no es adecuado aplicar directamente el método de aproximación normal a la verosimilitud. Este problema es observado y abordado por Díaz-Francés y Montoya (2013). Ellos proponen una reparametrización de la verosimilitud que hace que se simetrice para posteriormente utilizar la aproximación normal.

El procedimiento utilizado por Díaz-Francés y Montoya (2013) fue buscar una reparametrización $\lambda = g(\theta)$ tal que $F_3(\hat{\lambda})$ sea igual a cero, donde $\hat{\lambda}$ es el EMV de λ . Bajo este enfoque, ellos proponen la siguiente reparametrización:

$$\lambda = \begin{cases} \log[\theta/(1-\theta)] = \log(\beta/\alpha), & \text{si } n = m, (k = 0), \\ [\theta/(1-\theta)]^k = (\beta/\alpha)^k, & \text{si } n \neq m, (k \neq 0), \end{cases} \quad (3.9)$$

donde

$$k = \frac{(n-m)}{3(n+m)}. \quad (3.10)$$

El EMV de λ se obtiene reemplazando el EMV $\hat{\theta}$ ó $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ en (3.9). La transformación inversa

correspondiente a (3.9) es

$$\theta = \begin{cases} 1/(1 + e^{-\lambda}), & \text{si } n = m, (k = 0), \\ 1/(1 + \lambda^{-1/k}), & \text{si } n \neq m, (k \neq 0). \end{cases} \quad (3.11)$$

La información observada de λ es

$$\mathcal{I}(\hat{\lambda}) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n = m, \\ nm [(n + m) k^2 \hat{\lambda}^2]^{-1}, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Luego, por construcción $F_3(\hat{\lambda}) = 0$ y el valor de $F_4(\hat{\lambda})$ es

$$F_4(\hat{\lambda}) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } n = m, \\ -(2/9) [n^{-1} + m^{-1} - 13(n + m)^{-1}], & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

En esta última expresión, si los tamaños de muestra n y m crecen entonces la cantidad $F_4(\hat{\lambda})$ se hace más pequeña. Por ejemplo, en la Tabla 3.2 se muestran los valores de $\hat{\lambda}$, F_3 y F_4 correspondientes a los cuatro casos de la Tabla 3.1. En la Tabla 3.2 se observa que, en todos los casos, $F_3 = 0$ (por construcción de la transformación) y que los valores de F_4 son cercanos a cero.

Caso	n	m	$\hat{\lambda}$	$F_3(\hat{\lambda})$	$F_4(\hat{\lambda})$
(a)	4	4	4.59	0	0.25
(b)	4	8	0.60	0	0.16
(c)	8	4	1.67	0	0.16
(d)	8	8	4.59	0	0.125

Tabla 3.2: Estudio de asimetría de la verosimilitud de λ .

Estos resultados indican que las correspondientes funciones de verosimilitud de λ son aproximadamente simétricas con respecto a $\hat{\lambda}$. La Figura 3.2 muestra la función de verosimilitud perfil de λ y su aproximación normal para cada caso de la Tabla 3.2. En efecto, en los cuatro casos la verosimilitud es aproximadamente simétrica alrededor del EMV $\hat{\lambda}$. En particular en el caso (d), donde las muestras son iguales y de tamaño $n = m = 8$, se observa que la aproximación normal es prácticamente idéntica a la verosimilitud perfil de λ , para cada valor plausible de λ en el espacio paramétrico.

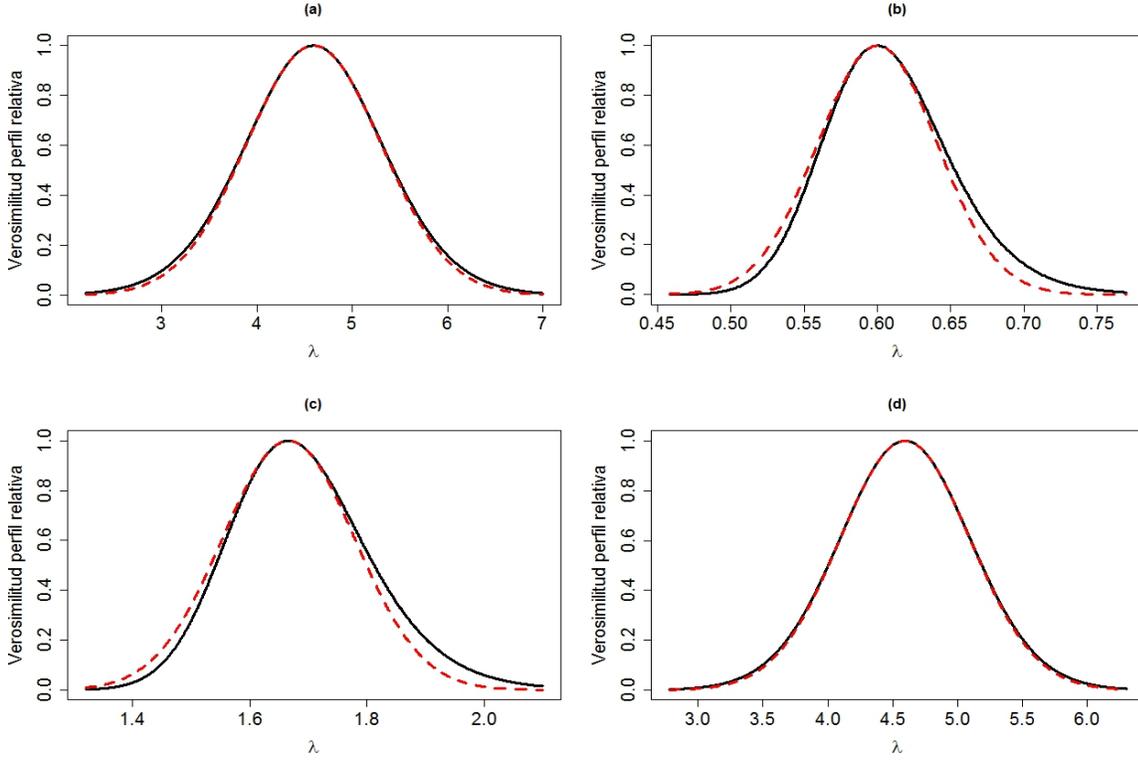


Figura 3.2: Estudio de asimetría de la verosimilitud de λ .

Ahora, con base en el enfoque de aproximación normal a la verosimilitud, se puede encontrar un intervalo de verosimilitud-confianza para λ usando la expresión (2.16) del Capítulo 2. El intervalo de verosimilitud-confianza para θ se obtiene regresando el intervalo de verosimilitud-confianza para λ a la escala original de θ a través de la transformación inversa dada en (3.11). Díaz-Francés y Montoya (2013) proporcionan las siguientes expresiones matemáticas cerradas para el intervalo de verosimilitud-confianza de θ :

- si $n = m$,

$$\left[\left(1 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{\exp\left(-z_{1-\gamma/2}\sqrt{2/n}\right)} \right)^{-1}, \left(1 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{\exp\left(z_{1-\gamma/2}\sqrt{2/n}\right)} \right)^{-1} \right], \text{ si } n = m, \quad (3.12)$$

- si $n \neq m$,

$$\left[\left(1 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{\left[1 + z_{1-\gamma/2}k\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right]^{1/k}} \right)^{-1}, \left(1 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{\left[1 - z_{1-\gamma/2}k\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right]^{1/k}} \right)^{-1} \right], \text{ si } k > 0, \quad (3.13)$$

ó

$$\left[\left(1 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{\left[1 - z_{1-\gamma/2} k \sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right]^{1/k}} \right)^{-1}, \left(1 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{\left[1 + z_{1-\gamma/2} k \sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right]^{1/k}} \right)^{-1} \right], \text{ si } k < 0, \quad (3.14)$$

donde $z_{1-\gamma/2}$ es el cuantil $1 - \gamma/2$ de una distribución normal estándar.

Nótese que estas expresiones son simples y que antes de Díaz-Francés y Montoya (2013), hasta lo investigado, no se tienen registros en la literatura estadística de que hayan sido presentadas. El nivel de verosimilitud $c = \exp(-z^2/2)$ de este intervalo es exacto y el nivel de confianza $(1 - \gamma)$ es aproximado. En el Capítulo 4 estos intervalos serán comparados con los intervalos de confianza para θ obtenidos a través de una cantidad pivotal.

3.2.3. Uso de una cantidad pivotal

A continuación se presentará una cantidad pivotal para θ y se usará para construir un intervalo de confianza para este parámetro. Del Ejemplo 2.24, se tiene que cuando $X = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector de variables aleatorias independientes con distribución exponencial de media α , entonces la cantidad $G(\alpha, x) = 2t/\alpha \sim \chi_{2n}^2$, donde $t = \sum_{i=1}^n x_i$, es una cantidad pivotal para α . Análogamente, si $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ es un vector de variables aleatorias independientes con distribución exponencial de media β , entonces la cantidad $G(\beta, y) = 2s/\beta \sim \chi_{2m}^2$, donde $s = \sum_{j=1}^m y_j$, es una cantidad pivotal para β . Así, la cantidad

$$Q = \frac{G(\alpha, x)/2n}{G(\beta, y)/2m} \sim F_{(2n, 2m)}, \quad (3.15)$$

donde $F_{(2n, 2m)}$ denota a la distribución F con $2n$ y $2m$ grados de libertad. Ahora nótese que de la ecuación (3.2) se tiene que

$$\frac{\alpha}{\beta} = \theta^{-1} - 1, \quad (3.16)$$

por lo que

$$Q = \frac{G(\alpha, x)/2n}{G(\beta, y)/2m} = \frac{(2t/\alpha)/2n}{(2s/\beta)/2m} = \frac{\hat{\alpha}/\hat{\beta}}{\theta^{-1} - 1} \sim F_{(2n, 2m)}. \quad (3.17)$$

Entonces, Q es una cantidad pivotal para el parámetro θ y se puede usar de la siguiente forma para obtener un intervalo de confianza para θ ; véase Sección 2.11. Si q_1 y q_2 son los cuantiles de probabilidad $\gamma/2$ y $(1 - \gamma/2)$ de una distribución F con $2n$ y $2m$ grados de libertad, entonces

se sigue que

$$\begin{aligned}
 (1 - \gamma) &= P[q_1 \leq Q \leq q_2] \\
 &= P \left[q_1 \leq \frac{\hat{\alpha}/\hat{\beta}}{\theta^{-1} - 1} \leq q_2 \right] \\
 &= P \left[\left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{q_1} + 1 \right)^{-1} \leq \theta \leq \left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{q_2} + 1 \right)^{-1} \right]. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, un intervalo de confianza pivotal para θ de probabilidad exacta $(1 - \gamma)$ para todo valor de n y m es

$$\left[\left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{q_1} + 1 \right)^{-1}, \left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \frac{1}{q_2} + 1 \right)^{-1} \right]. \tag{3.19}$$

3.3. Caso II: Censura por la derecha de Tipo II

En estadística la censura es el fenómeno que ocurre cuando el valor de una observación sólo se conoce parcialmente. En particular, la censura por la derecha ocurre cuando una observación está por encima de cierta cantidad T ; pero no se conoce su valor específico. En este contexto, cuando en un experimento T es una cantidad fija y especificada entonces se dice que se tiene censura por la derecha de Tipo I. En cambio, si el experimento termina cuando sólo queda un cierto número fijo de elementos en la muestra sin registrar, que son los que quedan censurados por la derecha, entonces se dice que se tiene censura por la derecha de Tipo II. Esta clase de censura es la que se considerará en esta sección. Cabe señalar aquí que los cálculos que se mostrarán bajo este escenario de censura pueden ser fácilmente replicados para el caso de censura por la derecha de Tipo I.

Supóngase que $x_{(1)}, \dots, x_{(n_1)}$ son las primeras n_1 observaciones ordenadas de una muestra de tamaño n de variables aleatorias iid con función de densidad de probabilidad exponencial de media α . De las $(n - n_1)$ observaciones remanentes de la muestra, sólo se conoce que son mayores que $T_1 = x_{(n_1)}$. Análogamente, supóngase que $y_{(1)}, \dots, y_{(m_1)}$ son las primeras m_1 observaciones ordenadas de una muestra de tamaño m de variables aleatorias iid con función de densidad de probabilidad exponencial de media β . De las $(m - m_1)$ observaciones remanentes de la muestra, sólo se conoce que son mayores que $T_2 = y_{(m_1)}$.

Bajo este escenario de censura, en las siguientes secciones se hace inferencia sobre el parámetro θ con base en las siguientes metodologías estadísticas: (1) La verosimilitud perfil, (2) Una reparametrización de la verosimilitud junto con el enfoque de aproximación normal de la verosimilitud y (3) Estimación a través de una cantidad pivotal.

3.3.1. Uso de la verosimilitud perfil

Al considerar el escenario de censura por la derecha de Tipo II, descrito en la sección anterior, se tiene que la función de verosimilitud de (α, β) es

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \beta; x, y) &= \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} f_X [x_{(i)}; \alpha] \prod_{j=1}^{n-n_1} [1 - F(T_1)] \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{m_1} f_Y [y_{(i)}; \beta] \prod_{j=1}^{m-m_1} [1 - F(T_2)] \right\} \\
&= \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\alpha} \exp \left[-\frac{x_{(i)}}{\alpha} \right] \prod_{j=1}^{n-n_1} \left\{ 1 - \left[1 - \exp \left(\frac{-T_1}{\alpha} \right) \right] \right\} \\
&\quad \prod_{i=1}^{m_1} \frac{1}{\beta} \exp \left[-\frac{y_{(i)}}{\beta} \right] \prod_{j=1}^{m-m_1} \left\{ 1 - \left[1 - \exp \left(\frac{-T_2}{\alpha} \right) \right] \right\} \\
&= \alpha^{-n_1} \beta^{-m_1} \exp \left(-\frac{t'}{\alpha} - \frac{s'}{\beta} \right), \tag{3.20}
\end{aligned}$$

donde $t' = \sum_{i=1}^{n_1} x_{(i)} + (n - n_1) T_1$ y $s' = \sum_{i=1}^{m_1} y_{(i)} + (m - m_1) T_2$. Nótese que la verosimilitud (3.20) es idéntica a la verosimilitud dada en (3.3), sólo que ahora $n = n_1$, $m = m_1$, $t = t'$ y $s = s'$. Así, los EMV de α y β son $\hat{\alpha} = t'/n_1$ y $\hat{\beta} = s'/m_1$, respectivamente y la correspondiente función de verosimilitud perfil de θ es

$$L_p(\theta; x, y) = K \theta^{n_1} (1 - \theta)^{m_1} [\theta t' + (1 - \theta) s']^{-(n_1 + m_1)}, \tag{3.21}$$

donde $K = (n_1 + m_1)^{n_1 + m_1} \exp[-(n_1 + m_1)]$ es una constante como función de θ . Su verosimilitud perfil relativa es

$$R_p(\theta; x, y) = C \theta^{n_1} (1 - \theta)^{m_1} [\theta t' + (1 - \theta) s']^{-(n_1 + m_1)}, \tag{3.22}$$

donde $C = (n_1 + m_1)^{n_1 + m_1} s'^{m_1} t'^{n_1} / n_1^{n_1} m_1^{m_1}$.

La función de verosimilitud perfil relativa de θ dada en (3.22) se puede usar para hacer inferencias sobre θ ; véase Capítulo 2.

3.3.2. Reparametrización y aproximación normal a la verosimilitud perfil

Dado que la verosimilitud perfil (3.4), obtenida para el caso sin censura, es idéntica a la verosimilitud perfil de θ dada en (3.21), a excepción que ahora $n = n_1$, $m = m_1$, $t = t'$ y $s = s'$, entonces, el resultado del análisis realizado para la asimetría de la verosimilitud perfil hecho en la Sección 3.2.2 es el mismo para el caso de censura por la derecha de Tipo II. Es decir, en esta situación de censura la verosimilitud perfil de θ también puede ser muy asimétrica; en particular, cuando θ es cercano a 1 o 0. Por lo tanto, para hacer inferencias sobre θ a través del enfoque de la aproximación normal de la verosimilitud se requiere que ésta sea reparametrizada adecuadamente.

Díaz-Francés y Montoya (2013) aplican su metodología de reparametrización y construcción de intervalos de verosimilitud-confianza para θ , descrita en la Sección (3.2), para el caso de censura por la derecha de Tipo II. Las expresiones matemáticas que ellos obtienen para estos intervalos son las mismas que obtuvieron para el caso sin censura, (3.12)-(3.14), excepto que ahora los valores de n , m , t y s son reemplazados por n_1 , m_1 , t' y s' , respectivamente. En el siguiente capítulo se hará un estudio de simulación para comparar estos intervalos con aquellos que se obtienen a través de una cantidad pivotal.

3.3.3. Uso de una cantidad pivotal

Si se consideran las cantidades pivotaes $G(\alpha, x) = 2t'/\alpha \sim \chi_{2n_1}^2$ y $G(\beta, y) = 2s'/\beta \sim \chi_{2m_1}^2$ entonces se tiene que

$$Q = \frac{G(\alpha, x)/2n_1}{G(\beta, y)/2m_1} \sim F_{(2n_1, 2m_1)}. \quad (3.23)$$

Por lo tanto, si q_1 y q_2 son los cuantiles de probabilidad $\gamma/2$ y $(1 - \gamma/2)$ de una distribución F con $2n_1$ y $2m_1$ grados de libertad, entonces el intervalo de confianza pivotal para θ se obtiene reemplazando $\hat{\alpha} = t'/n_1$, $\hat{\beta} = s'/m_1$, q_1 y q_2 en (3.19).

3.4. Caso III: Censura Progresiva de Tipo II

El esquema general de la censura progresiva de Tipo II abordada en este trabajo es el siguiente. Al iniciar el experimento se cuenta con n unidades que se ponen a trabajar al mismo tiempo. Luego, inmediatamente después de la primera falla, R_1 unidades de las $n - 1$ que no han fallado se retiran del experimento de forma aleatoria. De manera similar, inmediatamente después de la segunda falla, R_2 unidades de las $n - R_1 - 2$ que no han fallado se retiran de manera aleatoria del experimento. Este proceso sigue hasta el momento de la n_1 -ésima falla observada, donde las restantes $R_{n_1} = n - R_1 - R_2 - \dots - R_{n_1-1} - n_1$ unidades que no han fallado son retiradas del experimento. En este esquema de censura, denotado como $\{n, n_1, R_1, R_2, \dots, R_{n_1}\}$, se tiene que n, n_1 y R_1, \dots, R_{n_1} son números naturales predeterminados que cumplen que $R_1 + \dots + R_{n_1} = n - n_1 > 0$. Nótese que si $R_1 = R_2 = \dots = R_{n_1-1} = 0$, tal que $R_{n_1} = n - n_1$, entonces el esquema de censura progresiva de Tipo II se reduce al caso de censura por la derecha de Tipo II, descrito en la sección anterior.

Ahora, supóngase que $\{n, n_1, R_1, R_2, \dots, R_{n_1}\}$ y $\{m, m_1, R_1, R_2, \dots, R_{m_1}\}$ son esquemas de censura progresiva de Tipo II para X y Y , respectivamente, donde X y Y son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros α y β , respectivamente. Bajo estas condiciones se observan dos muestras independientes $x = (x_{1:n_1:n}, \dots, x_{n_1:n_1:n})$ y $y = (y_{1:m_1:m}, \dots, y_{m_1:m_1:m})$.

En las siguientes secciones, considerando este escenario de observación, nuevamente se hace

inferencia sobre el parámetro θ con base en las siguientes metodologías estadísticas: (1) La verosimilitud perfil, (2) Una reparametrización de la verosimilitud junto con el enfoque de aproximación normal de la verosimilitud y (3) Estimación a través de una cantidad pivotal.

3.4.1. Uso de la verosimilitud perfil

La función de densidad de probabilidad conjunta para una muestra aleatoria de un esquema de censura progresiva de Tipo II es presentada por Balakrishnan y Aggarwala (2000) y se puede escribir de la siguiente manera:

$$f_{X_{1:n_1:n}, \dots, X_{n_1:n_1:n}}(x_{1:n_1:n}, \dots, x_{n_1:n_1:n}) = c \prod_{i=1}^{n_1} f(x_{i:n_1:n}) [1 - F(x_{i:n_1:n})]^{R_i}, \quad (3.24)$$

donde $0 < x_{1:n_1:n} < \dots < x_{n_1:n_1:n} < \infty$ y $c = n_1 (n_1 - R_1 - 1) \dots (n_1 - R_1 - \dots - R_{k_1-1} - k_1 + 1)$ es una constante de normalización que hace que la función de densidad conjunta integre uno. En consecuencia, la función de verosimilitud de los parámetros α y β es

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta; x, y) &= \left[f_{X_{1:n_1:n}, \dots, X_{n_1:n_1:n}}(x_{1:n_1:n}, \dots, x_{n_1:n_1:n}) \right] \\ &\quad \left[f_{Y_{1:m_1:m}, \dots, Y_{m_1:m_1:m}}(y_{1:m_1:m}, \dots, y_{m_1:m_1:m}) \right] \\ &= \left[c_1 \prod_{i=1}^{n_1} f(x_{i:n_1:n}) [1 - F(x_{i:n_1:n})]^{R_i} \right] \left[c_2 \prod_{j=1}^{m_1} f(y_{j:m_1:m}) [1 - F(y_{j:m_1:m})]^{S_j} \right] \\ &= \frac{c_1}{\alpha^{n_1}} \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n_1} (R_i + 1) x_{i:n_1:n} \right] \right\} \frac{c_2}{\beta^{m_1}} \exp \left\{ -\frac{1}{\beta} \left[\sum_{j=1}^{m_1} (S_j + 1) y_{j:m_1:m} \right] \right\} \\ &\propto \alpha^{-n_1} \beta^{-m_1} \exp \left(-\frac{t^*}{\alpha} - \frac{s^*}{\beta} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $t^* = \sum_{i=1}^{n_1} (R_i + 1) x_{i:n_1:n}$ y $s^* = \sum_{j=1}^{m_1} (S_j + 1) y_{j:m_1:m}$. Nótese que la verosimilitud (3.25) es proporcional a la verosimilitud dada en (3.3), cuando $n = n_1$, $m = m_1$, $t = t^*$ y $s = s^*$. Así, los EMV de α y β son $\hat{\alpha} = t^*/n_1$ y $\hat{\beta} = s^*/m_1$, respectivamente, y la correspondiente función de verosimilitud perfil de θ es

$$L_p(\theta; x, y) \propto \theta^{n_1} (1 - \theta)^{m_1} [\theta t^* + (1 - \theta) s^*]^{-(n_1 + m_1)}. \quad (3.26)$$

Entonces, la verosimilitud perfil relativa de θ es

$$R_p(\theta; x, y) = C \theta^{n_1} (1 - \theta)^{m_1} [\theta t^* + (1 - \theta) s^*]^{-(n_1 + m_1)}, \quad (3.27)$$

donde $C = (n_1 + m_1)^{n_1 + m_1} s^{*m_1} t^{*n_1} / n_1^{n_1} m_1^{m_1}$.

La función de verosimilitud perfil relativa de θ dada en (3.27) se puede usar para hacer inferencias sobre θ ; véase Capítulo 2.

3.4.2. Reparametrización y aproximación normal a la verosimilitud perfil

Dado que la verosimilitud perfil (3.4), obtenida para el caso sin censura, es proporcional a la verosimilitud perfil de θ dada en (3.26) cuando $n = n_1$, $m = m_1$, $t = t^*$ y $s = s^*$, entonces el resultado del análisis realizado para la asimetría de la verosimilitud perfil hecho en la Sección 3.2.2 es el mismo para el caso de censura progresiva de Tipo II. Es decir, en esta situación de censura la verosimilitud perfil de θ también puede ser muy asimétrica. Por lo tanto, para hacer inferencias sobre θ a través del enfoque de la aproximación normal de la verosimilitud se requiere nuevamente que ésta sea reparametrizada adecuadamente.

Díaz-Francés y Montoya (2013) no consideran este caso de censura. Sin embargo, dado que la verosimilitud perfil (3.4), obtenida para el caso sin censura, es proporcional a la verosimilitud perfil de θ dada en (3.26) cuando $n = n_1$, $m = m_1$, $t = t^*$ y $s = s^*$, entonces la metodología de reparametrización y construcción de intervalos de verosimilitud-confianza para θ , descrita en la Sección (3.2), al caso de censura progresiva de Tipo II es válida. Así, las expresiones matemáticas que ellos obtienen para estos intervalos son las mismas que obtuvieron para el caso sin censura, (3.12)-(3.14), excepto que ahora los valores de n , m , t y s son reemplazados por n_1 , m_1 , t^* y s^* , respectivamente. En el siguiente capítulo se hará un estudio de simulación para comparar estos intervalos con aquellos que se obtienen a través de una cantidad pivotal.

3.4.3. Uso de una cantidad pivotal

Sea $X_{1:n_1:n}, \cdot, X_{n_1:n_1:n}$ una muestra aleatoria correspondientes al esquema de censura progresiva de Tipo II, $\{n, n_1, R_1, R_2, \cdot, R_{n_1}\}$, para el caso exponencial de parámetro α . Considérese la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} Z_1 &= nX_{1:n_1:n}, \\ Z_2 &= (n - R_1 - 1)(X_{2:n_1:n} - X_{1:n_1:n}), \\ Z_3 &= (n - R_1 - R_2 - 2)(X_{3:n_1:n} - X_{2:n_1:n}), \\ &\vdots \\ Z_{n_1} &= [n - R_1 - \cdots - R_{n_1-1} - (n_1 - 1)](X_{n_1:n_1:n} - X_{n_1-1:n_1:n}). \end{aligned}$$

Balakrishnan y Aggarwala (2000) demuestran que los Z_i son variables aleatorias iid con distribución exponencial de parámetro α . Además, muestran que

$$\sum_{i=1}^{n_1} Z_i = \sum_{i=1}^{n_1} (R_i + 1) X_{i:n_1:n} = S$$

y por lo tanto, se tiene que S tiene una distribución Gamma(n_1, α).

Análogamente, se tiene que

$$T = \sum_{j=1}^{m_1} (S_j + 1) Y_{j:m_1:m}$$

tiene una distribución Gamma(m_1, β).

Así, si se consideran las cantidades pivotaes $G(\alpha, x) = 2t^*/\alpha \sim \chi_{2n_1}^2$ y $G(\beta, y) = 2s^*/\beta \sim \chi_{2m_1}^2$ entonces se tiene que

$$Q = \frac{G(\alpha, x)/2n_1}{G(\beta, y)/2m_1} \sim F_{(2n_1, 2m_1)}. \quad (3.28)$$

Por lo tanto, si q_1 y q_2 son los cuantiles de probabilidad $\gamma/2$ y $(1 - \gamma/2)$ de una distribución F con $2n_1$ y $2m_1$ grados de libertad, entonces el intervalo de confianza pivotal para θ se obtiene reemplazando $\hat{\alpha} = t^*/n_1$, $\hat{\beta} = s^*/m_1$, q_1 y q_2 en (3.19).

3.5. Aplicaciones

A continuación se presentan dos ejemplos simples y relevantes donde se ilustra la estimación por intervalos sobre $\theta = P(X < Y)$ que proporcionan las tres metodologías estadísticas discutidas anteriormente. El primer ejemplo corresponde al caso sin censura y el segundo a censura por la derecha de Tipo II.

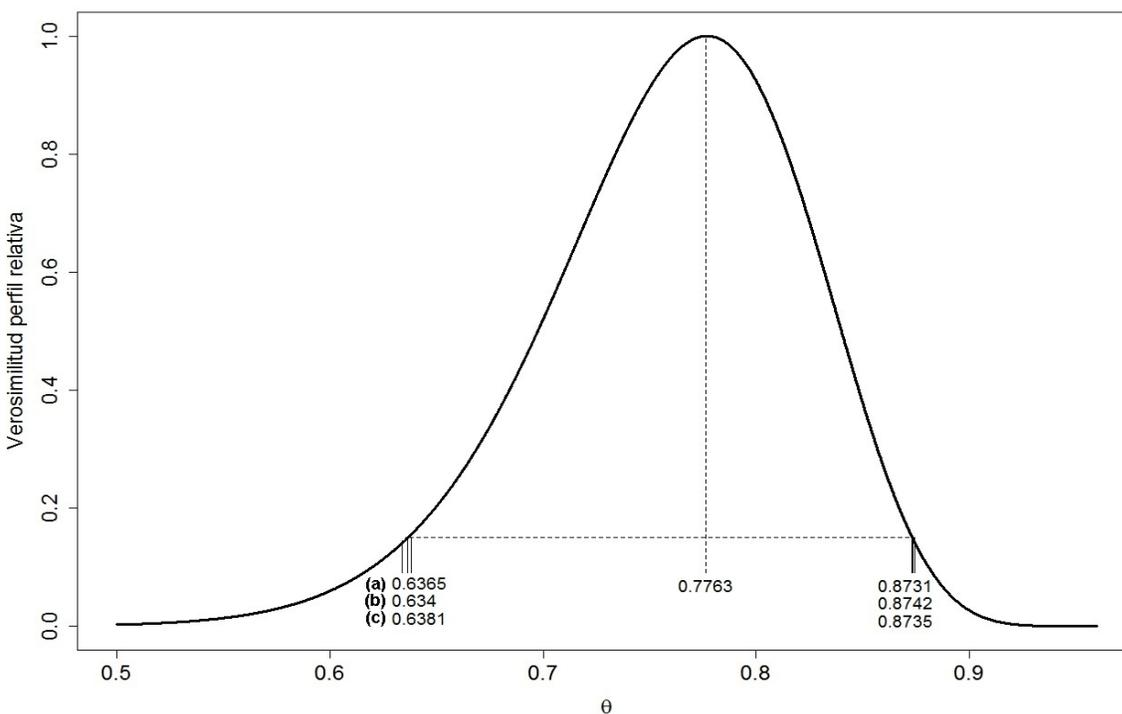
Ejemplo 3.1. (Datos de Leucemia)

Feigl y Zelen (1965) presentan datos de tiempos de supervivencia, en semanas, de pacientes que fueron diagnosticados con Leucemia. Los pacientes fueron clasificados de acuerdo a dos características en las células de glóbulos blancos, AG+ y AG-. Los $n=17$ tiempos para el grupo AG+, desde su diagnóstico hasta su muerte, son: 65, 156, 100, 134, 16, 108, 121, 4, 39, 143, 56, 26, 22, 1, 1, 5, 65. Las $m=16$ observaciones para el grupo AG- son : 56, 65, 17, 7, 16, 22, 3, 4, 2, 3, 8, 4, 3, 30, 4, 43. Nótese que no se tienen datos censurados.

Se desean comparar ambos grupos y el parámetro de interés es $\theta = P(X < Y)$, donde X es una variable aleatoria que representa el tiempo de supervivencia de los individuos del grupo AG- y Y es otra variable aleatoria que representa el tiempo de supervivencia de los individuos del grupo AG+. Se supondrá que X y Y son variables independientes con distribución exponencial de parámetros α y β , respectivamente.

En la Tabla 3.3 se presenta: (a) Intervalo de confianza para $\theta = P(X < Y)$ calculado a través de la verosimilitud perfil de θ dada en (3.4), (b) Intervalo de confianza para $\theta = P(X < Y)$ de Díaz-Francés y Montoya (2013) dado en (3.13) y (c) Intervalo de confianza pivotal para $\theta = P(X < Y)$ dado en (3.19), todos del 95 % de confianza. También se muestra la longitud de cada intervalo. Claramente se observa que los extremos de estos intervalos son similares y en consecuencia sus longitudes. La Figura 3.3 muestra en la misma gráfica la verosimilitud perfil de θ , el EMV de θ y los intervalos de confianza para θ dados en la Tabla 3.3.

IVC (95%)	Limite Inf.	Limite Sup.	Long. del Intervalo
(a)	0.6364	0.8731	0.2366
(b)	0.6381	0.8735	0.2353
(c)	0.6340	0.8742	0.2402

Tabla 3.3: Intervalos de confianza para θ .Figura 3.3: Verosimilitud perfil del parámetro $\theta = P(X < Y)$, donde X representa a el grupo AG- y Y al grupo AG+.

Nótese que el EMV de θ , el valor más creíble de θ a la luz de los datos, es $\hat{\theta} = 0.7763$. Además, obsérvese que ninguno de los intervalos cubre el valor $\theta = 0.5$. De hecho, la plausibilidad o credibilidad que le asigna la verosimilitud al valor $\theta = 0.5$ es casi cero. Esto da evidencia acerca de que el verdadero valor de θ es relativamente grande lo que implica que, en términos del problema, los pacientes en el grupo AG+ tienden a tener mejores perspectivas de supervivencia que los pacientes AG-.

Ejemplo 3.2. (Tiempos de espera de ratas al realizar una tarea de aprendizaje)

El grupo de investigación dirigido por el Dr. Roberto Prado Alcalá, del Instituto de Neuro-

biología de la UNAM, campus Querétaro, efectuó el siguiente experimento con el propósito de explorar y evaluar el efecto que tiene una droga, que se supone es amnésica, en la memoria y en los procesos de aprendizaje de ratas experimentales. Se realiza un experimento en el cual, para el caso particular de 2.4 miliamperios (mA), se asignaron 20 ratas blancas, al azar, a dos grupos. El primer grupo de diez ratas fue inyectado con una droga supuestamente amnésica y el otro grupo, también de diez ratas fue inyectado con un placebo. A continuación se describe de manera general el experimento.

Se inicia con un periodo de liberación de tensión, que consiste en manipular y acariciar a la rata, durante tres días. Pasado ese tiempo se forman aleatoriamente los dos grupos de 10 ratas. La inyección del fármaco ocurre 30 minutos antes de llevar a cabo el experimento. El ambiente de trabajo adaptado es una habitación libre de ruido en la cual se prepara la cámara de ensayos. Esta cámara consta de dos compartimentos: El compartimento del lado izquierdo es un ambiente iluminado que por ende se convierte en un medio hostil para la rata ya que este tipo de ratas no soporta la luz. El compartimento del lado derecho es un ambiente oscuro pero susceptible de transmitir corriente eléctrica a voluntad del experimentador; véase Figura 3.4.

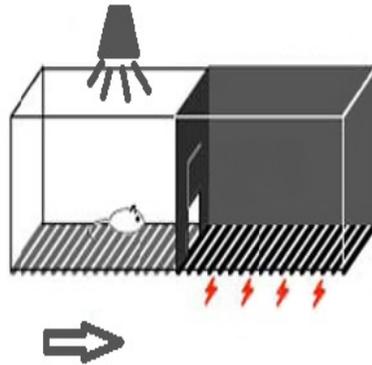


Figura 3.4: Caja experimental para medir los tiempos de latencia de retención.

Durante el experimento se obtienen tres datos de interés, el tiempo de entrada al lado oscuro, el tiempo de escape una vez aplicada cierta descarga eléctrica hacia el lado iluminado y el tiempo de retención, dato de interés en este ejemplo. El procedimiento para obtener estos datos es el siguiente. Se deposita una rata por vez en el lado izquierdo de la cámara se cierra la compuerta superior, se enciende la luz y se empieza a medir el tiempo de entrada. Al momento de pasar al lado derecho se cierra una compuerta que separa ambos compartimentos (se registra el tiempo de entrada) y durante 5 segundos se aplica una descarga eléctrica en los pies de la rata, en este caso 2.4 mA, luego de ello se abre la compuerta entre cámaras y se contabiliza el tiempo que le tome a la rata salir del compartimento. Este tiempo se denomina tiempo de escape. Al día siguiente se introduce cada rata, una por vez, en el lado izquierdo de la cámara y se mide el tiempo que

tarda en pasar al compartimento oscuro. Si en 10 minutos (600 segundos) la rata no cruza al lado oscuro entonces se retira y se registra este hecho. Hay que notar que en esta etapa, no se realiza descarga eléctrica, únicamente se espera a que la rata cruce el umbral o que finalice el tiempo máximo de 600 segundos. Estos tiempos, llamados latencias de retención, son altamente informativos en cuanto a la relación entre la droga de interés, por su posible efecto amnésico y el proceso de aprendizaje.

Debido a que no se cuenta con la infraestructura para replicar físicamente este experimento y que por derechos de autor no es posible utilizar los datos reales, en este ejemplo se simularán tiempos de latencia de retención exponenciales. Supóngase que X es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro α que representa el tiempo de latencia de retención de las ratas inyectadas con la droga. Sea Y otra variable aleatoria exponencial, independiente de X , de parámetro β que representa el tiempo de latencia de retención de las ratas inyectadas con el placebo. En la Tabla 3.4 se presenta en la primera fila una muestra de tamaño $n=10$ simulada de X con $\alpha = 837.3$. En la segunda una muestra de tamaño $m=10$ simulada de Y con $\beta = 2518.65$. Para ambas muestras se considero un tiempo máximo de observación de $T_1 = T_2 = 600$ segundos por lo que en los casos donde supera este valor se etiqueto como censurado. Los parámetros α y β considerados aquí fueron tomados de las estimaciones obtenidas en la tesis de maestría de L.C. Castillo (2010). Nótese que bajo este escenario de simulación, el valor verdadero del parámetro de confiabilidad es $\theta = \beta/(\alpha + \beta)=0.75$.

X	Y
$x_1 = \textit{censurado}$	$y_1 = 385.33$
$x_2 = \textit{censurado}$	$y_2 = 598.80$
$x_3 = 491.60$	$y_3 = \textit{censurado}$
$x_4 = \textit{censurado}$	$y_4 = \textit{censurado}$
$x_5 = 153.43$	$y_5 = \textit{censurado}$
$x_6 = \textit{censurado}$	$y_6 = \textit{censurado}$
$x_7 = 185.43$	$y_7 = \textit{censurado}$
$x_8 = 207.59$	$y_8 = \textit{censurado}$
$x_9 = 88.41$	$y_9 = \textit{censurado}$
$x_{10} = \textit{censurado}$	$y_{10} = \textit{censurado}$

Tabla 3.4: Datos simulados para tiempos de espera de ratas al realizar una tarea de aprendizaje.

Se desean comparar ambos grupos y el parámetro de interés es $\theta = P(X < Y)$. En la Tabla 3.5 se presenta: (a) Intervalo de confianza para $\theta = P(X < Y)$ calculado a través de la verosimilitud perfil de θ dada en (3.4), (b) Intervalo de confianza para $\theta = P(X < Y)$ de Díaz-Francés y Montoya (2013) dado en (3.13) y (c) Intervalo de confianza pivotal para $\theta = P(X < Y)$ dado en (3.19), todos del 95 % de confianza. También se muestra la longitud de cada intervalo.

IVC (95%)	Limite Inf.	Limite Sup.	Long. del Intervalo
(a)	0.4326	0.9600	0.5274
(b)	0.3510	0.9386	0.5876
(c)	0.4395	0.9687	0.5292

Tabla 3.5: Intervalos de confianza para θ .

Se observa que los extremos del intervalos (b) son algo diferentes que los extremos de los intervalos (a) y (c). La Figura 3.5 muestra en la misma gráfica la verosimilitud perfil de θ y los intervalos de confianza para θ (a), (b) y (c) dados en la Tabla 3.5.

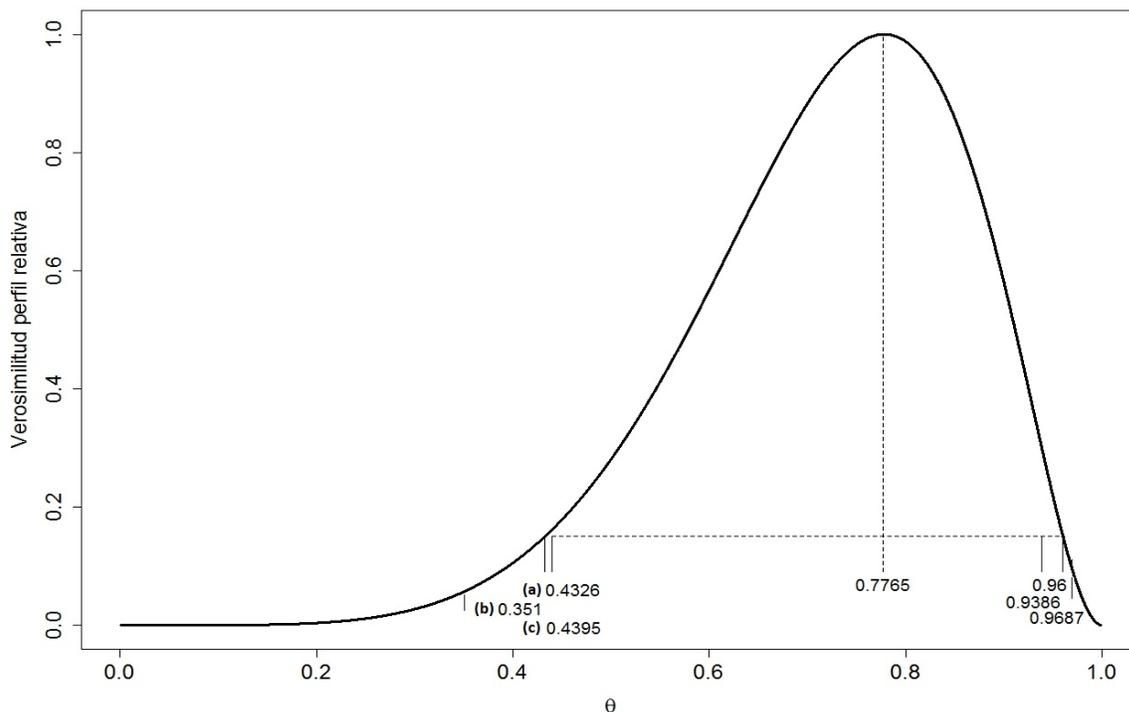


Figura 3.5: Verosimilitud perfil del parámetro $\theta = P(X < Y)$ donde X representa el tiempo de latencia de retención de las ratas inyectadas con la droga y Y representa el tiempo de latencia de retención de las ratas inyectadas con el placebo.

Se observa que el EMV, el valor más creíble a la luz de los datos, es 0.7765 y que considerando el intervalo de 95% de confianza (a), el cual es más corto que los otros dos, se tiene que el verdadero valor se encuentra entre 0.4326 y 0.9600. Esto se interpreta como evidencia acerca de que el verdadero valor de θ es relativamente grande lo que implica que, en términos del problema,

el tiempo en que se espera entre la rata al segundo compartimento después de ser inyectada con la droga y de haber recibido un estímulo doloroso es menor al de las ratas inyectadas con el placebo y aplicado el mismo estímulo doloroso. Es decir, la droga sí esta inhibiendo la memoria y que las ratas parecen olvidar la descarga eléctrica recibida.

Capítulo 4

Estudio de simulación

En general, los estudios de simulación son de gran utilidad en la ciencia porque, entre otras cosas, permiten conocer el comportamiento de ciertos fenómenos bajo diferentes escenarios virtuales propiciados por el investigador a través de algún modelo y/o *software* especializado. En particular, en el campo de la estadística son muy comunes y muchos de ellos son utilizados para observar el comportamiento de una estimación ante diferentes situaciones que pudieran presentarse en la realidad.

En este capítulo se presenta un estudio de simulación para el caso sin censura en los datos y para los casos donde existe censura por la derecha de Tipo II y censura progresiva de Tipo II. El objetivo general de este estudio es evaluar el comportamiento de los intervalos de confianza pivotaes y los intervalos de confianza propuestos por Díaz Francés-Montoya, para el parámetro de confiabilidad $\theta = P(X < Y)$.

En general, el proceso de simulación se realizó de la siguiente manera. Para cada valor verdadero de θ , se simularon 10,000 muestras (tanto para X como para Y) y se calcularon los intervalos pivotaes y los intervalos de confianza propuestos por Díaz Francés-Montoya, con nivel de confianza del 95 %, para el parámetro θ . Luego se calculó la frecuencia de cobertura (FC) de estos intervalos. También se calculó la frecuencia de error de cobertura por la izquierda (FEI) y por la derecha (FED). Es decir, FEI y FED representan la frecuencia relativa de veces que el intervalo de confianza no cubrió el valor verdadero de θ por encontrarse a la izquierda y a la derecha de éste, respectivamente. Por último, también se calculó la longitud promedio de todos los intervalos que cubrieron el valor verdadero de θ . En todos los casos considerados en este estudio de simulación, los valores verdaderos de θ fueron 0.5, 0.75 y 0.95.

Este estudio de simulación fue realizado en una computadora de escritorio personal con procesador Intel Celeron D, memoria RAM de 1 Gb y sistema operativo Windows 7. Los programas se llevaron a cabo en el lenguaje de programación R versión 3.0.1.

4.1. Caso I: Sin censura

Los escenarios de simulación utilizados para el caso sin censura son similares a los usados por Kundu *et al.* (2005) y representan bastante bien a las diferentes situaciones que pudieran presentarse en la realidad. Los tamaños de muestra de X y Y fueron: $(n, m) \in \{(15, 15), (20, 20), (30, 30), (15, 20), (20, 15), (15, 30), (30, 15), (20, 30), (30, 20)\}$.

Las Tabla 4.1, 4.2 y 4.3 muestran los resultados del estudio de simulación cuando θ vale 0.5, 0.75 y 0.95, respectivamente. En todos los casos se observa que los intervalos de confianza pivotaes y los intervalos de confianza propuestos por Díaz Francés-Montoya tienen frecuencias de cobertura similares y son aproximadamente iguales a la probabilidad de cobertura nominal del 95 %. Además, FEI y FED indican que no hay sesgo en la estimación. Por último, en todos los casos, se observa que la longitud promedio de ambos intervalos (que cubrieron el valor verdadero de θ) es aproximadamente la misma.

$\theta = 0.5$ (n,m)	Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(15,15)	0.0247	0.9529	0.0224	0.3417	0.0270	0.9480	0.0250	0.3357
(20,20)	0.0219	0.9529	0.0252	0.2992	0.0230	0.9503	0.0267	0.2952
(30,30)	0.0230	0.9537	0.0233	0.2470	0.0235	0.9524	0.0241	0.2448
(15,20)	0.0255	0.9490	0.0255	0.3216	0.0324	0.9442	0.0234	0.3167
(20,15)	0.0237	0.9515	0.0248	0.3216	0.0217	0.9465	0.0318	0.3167
(15,30)	0.0241	0.9514	0.0245	0.2997	0.0345	0.9484	0.0171	0.2958
(30,15)	0.0251	0.9501	0.0248	0.2997	0.0179	0.9460	0.0361	0.2958
(20,30)	0.0240	0.9504	0.0256	0.2749	0.0314	0.9476	0.0210	0.2718
(30,20)	0.0257	0.9498	0.0245	0.2749	0.0230	0.9466	0.0304	0.2718

Tabla 4.1: Resultados del estudio de simulación para el caso sin censura cuando $\theta = 0.5$.

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta=0.75$									
(n,m)	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom	
(15,15)	0.0244	0.9513	0.0243	0.2686	0.0262	0.9474	0.0264	0.2637	
(20,20)	0.0243	0.9511	0.0246	0.2321	0.0260	0.9478	0.0262	0.2289	
(30,30)	0.0261	0.9516	0.0223	0.1896	0.0274	0.9495	0.0231	0.1878	
(15,20)	0.0241	0.9505	0.0254	0.2526	0.0323	0.9447	0.0230	0.2456	
(20,15)	0.0255	0.9501	0.0244	0.2491	0.0226	0.9446	0.0323	0.2481	
(15,30)	0.0238	0.9524	0.0238	0.2355	0.0366	0.9462	0.0172	0.2267	
(30,15)	0.0250	0.9490	0.0260	0.2300	0.0170	0.9444	0.0386	0.2325	
(20,30)	0.0252	0.9497	0.0251	0.2140	0.0340	0.9454	0.0206	0.2089	
(30,20)	0.0233	0.9502	0.0265	0.2106	0.0204	0.9464	0.0332	0.2108	

Tabla 4.2: Resultados del estudio de simulación para el caso sin censura cuando $\theta=0.75$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta=0.95$									
(n,m)	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom	
(15,15)	0.0237	0.9528	0.0235	0.0762	0.0260	0.9484	0.0256	0.0746	
(20,20)	0.0206	0.9537	0.0257	0.0641	0.0218	0.9510	0.0272	0.0631	
(30,30)	0.0260	0.9533	0.0207	0.0509	0.0270	0.9515	0.0215	0.0504	
(15,20)	0.0256	0.9478	0.0266	0.0711	0.0321	0.9442	0.0237	0.0682	
(20,15)	0.0229	0.9519	0.0252	0.0691	0.0198	0.9488	0.0314	0.0695	
(15,30)	0.0251	0.9501	0.0248	0.0657	0.0395	0.9434	0.0171	0.0617	
(30,15)	0.0245	0.9491	0.0264	0.0627	0.0178	0.9437	0.0385	0.0648	
(20,30)	0.0268	0.9478	0.0254	0.0585	0.0344	0.9444	0.0212	0.0564	
(30,20)	0.0233	0.9489	0.0278	0.0571	0.0197	0.9441	0.0362	0.0577	

Tabla 4.3: Resultados del estudio de simulación para el caso sin censura cuando $\theta=0.95$

4.2. Caso II: Censura por la derecha de Tipo II

Para el estudio de simulación presentado a continuación se consideraron los mismos tamaños de muestra n y m que en el caso sin censura, presentados al inicio de la sección anterior. La cantidad de datos censurados $n - n_1$ y $m - m_1$ se eligió de modo que para cada tamaño de muestra de X y Y , la censura sea aproximadamente del 50, 30 y 20%. Por ejemplo, si $n=15$ y $n_1=7$ se está censurando aproximadamente un 50% del total de los datos, si $n=15$ y $n_1=10$ se está censurando aproximadamente un 30% y si $n=15$ y $n_1=12$ entonces se está censurando aproximadamente un 20% de los datos. De igual modo para la cantidad de datos censurados de Y .

Las Tabla 4.4, 4.5 y 4.6 muestran los resultados del estudio de simulación cuando θ vale

0.5, 0.75 y 0.95, respectivamente. Nótese que en cada tabla se considera que la censura sea aproximadamente del 50, 30 y 20 %, para cada caso. En todas las tablas se observa que ambos intervalos de confianza, pivotaes y los propuestos por Díaz Francés-Montoya, tienen frecuencias de cobertura similares y son aproximadamente iguales a la probabilidad de cobertura nominal, elegida del 95 %. Además, FEI y FED indican que no hay sesgo en la estimación. También se observa, en todos los casos, que la longitud promedio de ambos intervalos (que cubrieron el valor verdadero de θ) es aproximadamente la misma. Referente al aumento en la censura de los datos, se observa una ligera disminución en la frecuencia de cobertura de ambos intervalos.

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.5$		FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(n,m)	(n_1, m_1)								
(15,15)	(7, 7)	0.0254	0.9494	0.0252	0.4776	0.0312	0.9385	0.0303	0.4612
(15,15)	(10, 10)	0.0280	0.9470	0.0250	0.4100	0.0314	0.9400	0.0286	0.3997
(15,15)	(12, 12)	0.0250	0.9510	0.0240	0.3781	0.0281	0.9455	0.0264	0.3700
(20,20)	(10, 10)	0.0237	0.9517	0.0246	0.4101	0.0268	0.9451	0.0281	0.3997
(20,20)	(14, 14)	0.0252	0.9506	0.0242	0.3528	0.0275	0.9449	0.0276	0.3463
(20,20)	(16, 16)	0.0243	0.9521	0.0236	0.3319	0.0260	0.9484	0.0256	0.3264
(30,30)	(15, 15)	0.0259	0.9504	0.0237	0.3419	0.0284	0.9454	0.0262	0.3359
(30,30)	(21, 21)	0.0254	0.9495	0.0251	0.2926	0.0265	0.9468	0.0267	0.2889
(30,30)	(24, 24)	0.0250	0.9503	0.0247	0.2748	0.0264	0.9481	0.0255	0.2717
(15,20)	(7, 10)	0.0267	0.9519	0.0214	0.4463	0.0411	0.9401	0.0188	0.4332
(15,20)	(10, 14)	0.0259	0.9492	0.0249	0.3832	0.0358	0.9428	0.0214	0.3749
(15,20)	(12, 16)	0.0254	0.9515	0.0231	0.3562	0.0338	0.9455	0.0207	0.3495
(20,15)	(10, 7)	0.0243	0.9505	0.0252	0.4467	0.0202	0.9397	0.0401	0.4334
(20,15)	(14, 10)	0.0243	0.9504	0.0253	0.3833	0.0204	0.9456	0.0340	0.3749
(20,15)	(16, 12)	0.0252	0.9495	0.0253	0.3563	0.0222	0.9446	0.0332	0.3496
(15,30)	(7, 15)	0.0226	0.9547	0.0227	0.4199	0.0455	0.9424	0.0121	0.4091
(15,30)	(10, 21)	0.0258	0.9523	0.0219	0.3590	0.0417	0.9451	0.0132	0.3523
(15,30)	(12, 24)	0.0226	0.9543	0.0231	0.3326	0.0383	0.9475	0.0142	0.3273
(30,15)	(15, 7)	0.0260	0.9477	0.0263	0.4200	0.0157	0.9385	0.0458	0.4094
(30,15)	(21, 10)	0.0276	0.9471	0.0253	0.3590	0.0184	0.9385	0.0431	0.3523
(30,15)	(24, 12)	0.0258	0.9477	0.0258	0.3326	0.0171	0.9417	0.0412	0.3273
(20,30)	(10, 15)	0.0247	0.9511	0.0242	0.3785	0.0371	0.9439	0.0190	0.3705
(20,30)	(14, 21)	0.0258	0.9505	0.0237	0.3247	0.0343	0.9467	0.0190	0.3197
(20,30)	(16, 24)	0.0237	0.9503	0.0260	0.3052	0.0316	0.9463	0.0221	0.3010
(30,20)	(15, 10)	0.0275	0.9479	0.0246	0.3785	0.0220	0.9431	0.0349	0.3704
(30,20)	(21, 14)	0.0262	0.9495	0.0243	0.3248	0.0210	0.9443	0.0347	0.3198
(30,20)	(24, 16)	0.0254	0.9521	0.0225	0.3053	0.0234	0.9448	0.0318	0.3011

Tabla 4.4: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura por la derecha de Tipo II cuando $\theta = 0.5$.

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.75$									
(n,m)	(n_1, m_1)	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(15,15)	(7, 7)	0.0209	0.9528	0.0263	0.3894	0.0241	0.9447	0.0312	0.3748
(15,15)	(10, 10)	0.0208	0.9503	0.0289	0.3275	0.0246	0.9432	0.0322	0.3187
(15,15)	(12, 12)	0.0219	0.9525	0.0256	0.3002	0.0246	0.9463	0.0291	0.2933
(20,20)	(10, 10)	0.0236	0.9511	0.0253	0.3276	0.0274	0.9443	0.0283	0.3187
(20,20)	(14, 14)	0.0243	0.9477	0.0280	0.2770	0.0263	0.9438	0.0299	0.2716
(20,20)	(16, 16)	0.0250	0.9492	0.0258	0.2594	0.0270	0.9446	0.0284	0.2550
(30,30)	(15, 15)	0.0242	0.9523	0.0235	0.2676	0.0263	0.9485	0.0252	0.2627
(30,30)	(21, 21)	0.0238	0.9515	0.0247	0.2263	0.0253	0.9479	0.0268	0.2233
(30,30)	(24, 24)	0.0262	0.9502	0.0236	0.2119	0.0275	0.9478	0.0247	0.2094
(15,20)	(7, 10)	0.0238	0.9497	0.0265	0.3657	0.0362	0.9413	0.0225	0.3443
(15,20)	(10, 14)	0.0228	0.9515	0.0257	0.3070	0.0334	0.9440	0.0226	0.2940
(15,20)	(12, 16)	0.0214	0.9536	0.0250	0.2825	0.0287	0.9479	0.0234	0.2729
(20,15)	(10, 7)	0.0260	0.9499	0.0241	0.3545	0.0212	0.9411	0.0377	0.3527
(20,15)	(14, 10)	0.0264	0.9484	0.0252	0.2999	0.0225	0.9400	0.0375	0.2988
(20,15)	(16, 12)	0.0265	0.9451	0.0284	0.2774	0.0234	0.9415	0.0351	0.2759
(15,30)	(7, 15)	0.0222	0.9530	0.0248	0.3444	0.0427	0.9413	0.0160	0.3184
(15,30)	(10, 21)	0.0248	0.9524	0.0228	0.2878	0.0418	0.9415	0.0167	0.2719
(15,30)	(12, 24)	0.0234	0.9527	0.0239	0.2638	0.0377	0.9459	0.0134	0.2518
(30,15)	(15, 7)	0.0241	0.9516	0.0243	0.3279	0.0131	0.9412	0.0457	0.3355
(30,15)	(21, 10)	0.0234	0.9492	0.0274	0.2775	0.0142	0.9406	0.0452	0.2823
(30,15)	(24, 12)	0.0225	0.9520	0.0255	0.2561	0.0160	0.9419	0.0421	0.2594
(20,30)	(10, 15)	0.0261	0.9486	0.0253	0.3036	0.0378	0.9410	0.0212	0.2901
(20,30)	(14, 21)	0.0275	0.9437	0.0288	0.2563	0.0378	0.9387	0.0235	0.2478
(20,30)	(16, 24)	0.0271	0.9443	0.0286	0.2395	0.0352	0.9400	0.0248	0.2325
(30,20)	(15, 10)	0.0256	0.9490	0.0254	0.2961	0.0215	0.9421	0.0364	0.2962
(30,20)	(21, 14)	0.0250	0.9489	0.0261	0.2510	0.0213	0.9433	0.0354	0.2512
(30,20)	(24, 16)	0.0251	0.9497	0.0252	0.2352	0.0207	0.9446	0.0347	0.2354

Tabla 4.5: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura por la derecha de Tipo II cuando $\theta = 0.75$.

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.95$									
(n,m)	(n_1, m_1)	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(15,15)	(7, 7)	0.0250	0.9509	0.0241	0.1256	0.0286	0.9418	0.0296	0.1195
(15,15)	(10, 10)	0.0262	0.9497	0.0241	0.0983	0.0296	0.9433	0.0271	0.0951
(15,15)	(12, 12)	0.0239	0.9524	0.0237	0.0875	0.0267	0.9472	0.0261	0.0852
(20,20)	(10, 10)	0.0245	0.9507	0.0248	0.0982	0.0277	0.9440	0.0283	0.0950
(20,20)	(14, 14)	0.0232	0.9529	0.0232	0.0796	0.0259	0.9484	0.0257	0.0779
(20,20)	(16, 16)	0.0226	0.9526	0.0248	0.0733	0.0251	0.9477	0.0272	0.0719
(30,30)	(15, 15)	0.0266	0.9512	0.0222	0.0758	0.0278	0.9480	0.0242	0.0742
(30,30)	(21, 21)	0.0261	0.9507	0.0232	0.0621	0.0270	0.9488	0.0242	0.0612
(30,30)	(24, 24)	0.0252	0.9523	0.0225	0.0576	0.0268	0.9493	0.0268	0.0569
(15,20)	(7, 10)	0.0262	0.9490	0.0248	0.1161	0.0386	0.9405	0.0209	0.1050
(15,20)	(10, 14)	0.0276	0.9472	0.0252	0.0911	0.0366	0.9416	0.0218	0.0852
(15,20)	(12, 16)	0.0293	0.9440	0.0267	0.9203	0.0376	0.9389	0.0235	0.0778
(20,15)	(10, 7)	0.0231	0.9520	0.0249	0.1082	0.0195	0.9443	0.0362	0.1102
(20,15)	(14, 10)	0.0238	0.9489	0.0273	0.0866	0.0208	0.9424	0.0368	0.0877
(20,15)	(16, 12)	0.0237	0.9502	0.0261	0.0789	0.0203	0.9457	0.0340	0.0794
(15,30)	(7, 15)	0.0257	0.9474	0.0269	0.1073	0.0453	0.9398	0.0149	0.0933
(15,30)	(10, 21)	0.0268	0.9476	0.0256	0.0841	0.0424	0.9418	0.0158	0.0763
(15,30)	(12, 24)	0.0252	0.9514	0.0234	0.0754	0.0373	0.9476	0.0151	0.0698
(30,15)	(15, 7)	0.0250	0.9481	0.0269	0.0962	0.0135	0.9357	0.0508	0.1035
(30,15)	(21, 10)	0.0261	0.9465	0.0274	0.0784	0.0165	0.9405	0.0430	0.0825
(30,15)	(24, 12)	0.0239	0.9490	0.0271	0.0712	0.0157	0.9430	0.0413	0.0741
(20,30)	(10, 15)	0.0236	0.9520	0.0244	0.0894	0.0351	0.9452	0.0197	0.0831
(20,30)	(14, 21)	0.0227	0.9498	0.0275	0.0722	0.0321	0.9462	0.0217	0.0685
(20,30)	(16, 24)	0.0225	0.9529	0.0246	0.0667	0.0304	0.9490	0.0206	0.0637
(30,20)	(15, 10)	0.0230	0.9543	0.0227	0.0854	0.0183	0.9476	0.0341	0.0871
(30,20)	(21, 14)	0.0233	0.9503	0.0264	0.0700	0.0193	0.9458	0.0349	0.0711
(30,20)	(24, 16)	0.0227	0.9500	0.0273	0.0648	0.0191	0.9471	0.0338	0.0657

Tabla 4.6: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura por la derecha de Tipo II cuando $\theta = 0.95$.

4.3. Caso III: Censura Progresiva de Tipo II

Para el estudio de simulación que se presenta en esta sección, se consideraron tamaños de muestra n y m idénticos a los utilizados en el estudio de simulación para el caso de censura por la derecha de Tipo II, presentado en la sección anterior. En este caso la cantidad de datos censurados $n - n_1 = R_1 + \dots + R_{n_1} > 0$ y $m - m_1 = R_1 + \dots + R_{m_1} > 0$ se eligió de modo que para cada tamaño de muestra de X y Y , la censura en los datos sea aproximadamente del 50%. Es decir, casi la mitad de los datos serán censurados.

Nótese que dado el tamaño de muestra y la cantidad de datos a censurar para X , n

y $n - n_1$, existen diferentes formas de definir el esquema de censura progresiva de Tipo II $\{n, n_1, R_1, R_2, \dots, R_{n_1}\}$. De igual modo para la variable aleatoria Y y su esquema de censura $\{m, m_1, R_1, R_2, \dots, R_{m_1}\}$. Aquí se considerarán los siguientes casos de censura progresiva de Tipo II [véase Kundu et al. (2005)]:

Caso	Variable X	Variable Y
(a)	$R_1 = R_2 = \dots = R_{n_1} = 1$	$R_1 = R_2 = \dots = R_{m_1} = 1$
(b)	$R_1 = R_2 = \dots = R_{n_1} = 1$	$R_1 = R_2 = \dots = R_{m_1-1} = 0$ y $R_{m_1} = 1$
(c)	$R_1 = R_2 = \dots = R_{n_1-1} = 0$ y $R_{n_1} = 1$	$R_1 = R_2 = \dots = R_{m_1} = 1$

Tabla 4.7: Casos de censura progresiva de Tipo II para las variables aleatorias X y Y .

Las Tablas 4.8-4.10, 4.11- 4.13 y 4.14-4.16 muestran los resultados del estudio de simulación para el caso (a), (b) y (c) de la Tabla 4.7, respectivamente. Nótese que para cada caso se tienen tres tablas, una para cada valor verdadero de θ considerado en este estudio (0.5, 0.75 y 0.95).

En todas las tablas se observa que los intervalos de confianza pivotaes y los intervalos de confianza propuestos por Díaz Francés-Montoya tienen frecuencias de cobertura similares y son aproximadamente iguales a la probabilidad de cobertura nominal elegida del 95%. Además, FEI y FED indican que no hay sesgo en la estimación. También se observa, en todos los casos, que la longitud promedio de ambos intervalos (que cubrieron el valor verdadero de θ) es aproximadamente la misma.

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya				
$\theta = 0.5$	(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
	(14,14)	(a)	0.0259	0.9486	0.0255	0.4778	0.0299	0.9400	0.0301	0.4614
	(20,20)	(a)	0.0214	0.9539	0.0247	0.4099	0.0234	0.9491	0.0275	0.3996
	(30,30)	(a)	0.0239	0.9518	0.0243	0.3418	0.0257	0.9478	0.0265	0.3359
	(14,20)	(a)	0.0271	0.9490	0.0239	0.4466	0.0400	0.9390	0.0210	0.4334
	(20,14)	(a)	0.0214	0.9521	0.0265	0.4467	0.0184	0.9414	0.0402	0.4336
	(14,30)	(a)	0.0237	0.9517	0.0246	0.4198	0.0438	0.9422	0.0140	0.4091
	(30,14)	(a)	0.0248	0.9475	0.0277	0.4201	0.0121	0.9374	0.0505	0.4095
	(20,30)	(a)	0.0223	0.9533	0.0244	0.3785	0.0334	0.9459	0.0207	0.3705
	(30,20)	(a)	0.0243	0.9495	0.0262	0.3786	0.0200	0.9422	0.0378	0.0371

Tabla 4.8: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (a) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.5$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.75$									
(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(14,14)	(a)	0.0257	0.9481	0.0262	0.3892	0.0313	0.9377	0.0310	0.3746
(20,20)	(a)	0.0235	0.9516	0.0239	0.3285	0.0276	0.9460	0.0264	0.3196
(30,30)	(a)	0.0255	0.9495	0.0250	0.2676	0.0270	0.9465	0.0265	0.2627
(14,20)	(a)	0.0248	0.9499	0.0253	0.3658	0.0383	0.9406	0.0211	0.3445
(20,14)	(a)	0.0254	0.9502	0.0244	0.3558	0.0209	0.9417	0.0374	0.3540
(14,30)	(a)	0.0249	0.9490	0.0261	0.3440	0.0468	0.9373	0.0159	0.3180
(30,14)	(a)	0.0242	0.9512	0.0246	0.3272	0.0143	0.9407	0.0450	0.3349
(20,30)	(a)	0.0242	0.9412	0.0246	0.3272	0.0143	0.9407	0.0450	0.3349
(30,20)	(a)	0.0237	0.9519	0.0244	0.2960	0.0194	0.9443	0.0363	0.2961

Tabla 4.9: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (a) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.75$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.95$									
(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(14,14)	(a)	0.0281	0.9459	0.0260	0.1256	0.0324	0.9374	0.0302	0.1195
(20,20)	(a)	0.0268	0.9467	0.0265	0.0977	0.0316	0.9381	0.0303	0.0944
(30,30)	(a)	0.0217	0.9541	0.0242	0.0759	0.0234	0.9506	0.0260	0.0743
(14,20)	(a)	0.0253	0.9448	0.0259	0.1156	0.0397	0.9376	0.0227	0.1046
(20,14)	(a)	0.0280	0.9483	0.0237	0.1084	0.0237	0.9402	0.0367	0.1104
(14,30)	(a)	0.0236	0.9529	0.0235	0.1066	0.0467	0.9402	0.0131	0.0926
(30,14)	(a)	0.0279	0.9468	0.0253	0.0963	0.0157	0.9343	0.0500	0.1036
(20,30)	(a)	0.0264	0.9492	0.0244	0.0888	0.0371	0.9429	0.0200	0.0825
(30,20)	(a)	0.0248	0.9514	0.0238	0.0855	0.0200	0.9456	0.0344	0.0873

Tabla 4.10: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (a) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.95$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.5$									
(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(14,14)	(b)	0.0235	0.9509	0.0256	0.4776	0.0294	0.9408	0.0298	0.4612
(20,20)	(b)	0.0223	0.9539	0.0238	0.4100	0.0252	0.9479	0.0269	0.3997
(30,30)	(b)	0.0235	0.9508	0.0257	0.3418	0.0255	0.9474	0.0271	0.3359
(14,20)	(b)	0.0258	0.9496	0.0246	0.4467	0.0388	0.9401	0.0211	0.4335
(20,14)	(b)	0.0240	0.9532	0.0228	0.4463	0.0201	0.9442	0.0357	0.4330
(14,30)	(b)	0.0253	0.9491	0.0256	0.4197	0.0476	0.9379	0.0145	0.4091
(30,14)	(b)	0.0228	0.9512	0.0260	0.4200	0.0125	0.9369	0.0506	0.4095
(20,30)	(b)	0.0213	0.9507	0.0280	0.3787	0.0306	0.9476	0.0218	0.3707
(30,20)	(b)	0.0237	0.9536	0.0227	0.3785	0.0194	0.9471	0.0335	0.3705

Tabla 4.11: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (b) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.5$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.75$									
(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(14,14)	(b)	0.0241	0.9512	0.0247	0.3898	0.0286	0.9421	0.0293	0.3751
(20,20)	(b)	0.0238	0.9498	0.0264	0.3280	0.0260	0.9445	0.0295	0.3192
(30,30)	(b)	0.0239	0.9506	0.0255	0.2681	0.0262	0.9453	0.0285	0.2632
(14,20)	(b)	0.0249	0.9512	0.0239	0.3662	0.0386	0.9415	0.0199	0.3449
(20,14)	(b)	0.0225	0.9509	0.0266	0.3558	0.0187	0.9422	0.0391	0.3540
(14,30)	(b)	0.0258	0.9509	0.0233	0.3453	0.0476	0.9384	0.0140	0.3194
(30,14)	(b)	0.0245	0.9515	0.0240	0.3285	0.0134	0.9447	0.0419	0.3361
(20,30)	(b)	0.0246	0.9507	0.0247	0.3042	0.0351	0.9445	0.0204	0.2907
(30,20)	(b)	0.0256	0.9517	0.0227	0.2967	0.0212	0.9444	0.0344	0.2967

Tabla 4.12: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (b) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.75$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.95$									
(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(14,14)	(b)	0.0270	0.9486	0.0244	0.1267	0.0315	0.9403	0.0282	0.1207
(20,20)	(b)	0.0243	0.9538	0.0219	0.0980	0.0272	0.9474	0.0254	0.0948
(30,30)	(b)	0.0237	0.9520	0.0243	0.0761	0.0269	0.9469	0.0262	0.0745
(14,20)	(b)	0.0251	0.9496	0.0253	0.1155	0.0377	0.9413	0.0210	0.1045
(20,14)	(b)	0.0239	0.9530	0.0231	0.1089	0.0201	0.9436	0.0363	0.1109
(14,30)	(b)	0.0255	0.9493	0.0252	0.1069	0.0478	0.9380	0.0142	0.0929
(30,14)	(b)	0.0226	0.9535	0.0239	0.0969	0.0127	0.9403	0.0470	0.1042
(20,30)	(b)	0.0229	0.9535	0.0236	0.0888	0.0344	0.9467	0.0189	0.0825
(30,20)	(b)	0.0247	0.9554	0.0199	0.0859	0.0205	0.9486	0.0309	0.0877

Tabla 4.13: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (b) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.95$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.5$									
(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(14,14)	(c)	0.0296	0.9435	0.0279	0.4782	0.0358	0.9313	0.0329	0.4618
(20,20)	(c)	0.0232	0.9544	0.0224	0.4101	0.0258	0.9495	0.0247	0.3997
(30,30)	(c)	0.0242	0.9516	0.0242	0.3417	0.0265	0.9470	0.0265	0.3357
(14,20)	(c)	0.0268	0.9489	0.0243	0.4465	0.0403	0.9393	0.0203	0.4333
(20,14)	(c)	0.0270	0.9472	0.0258	0.4466	0.0234	0.9370	0.0396	0.4333
(14,30)	(c)	0.0275	0.9479	0.0246	0.4197	0.0513	0.9347	0.0140	0.4091
(30,14)	(c)	0.0237	0.9496	0.0267	0.4200	0.0140	0.9371	0.0489	0.4094
(20,30)	(c)	0.0246	0.9515	0.0239	0.3785	0.0359	0.9454	0.0187	0.3706
(30,20)	(c)	0.0239	0.9523	0.0238	0.3783	0.0181	0.9478	0.0341	0.3703

Tabla 4.14: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (c) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.5$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.75$									
(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(14,14)	(c)	0.0232	0.9526	0.0242	0.3897	0.0271	0.9435	0.0294	0.3751
(20,20)	(c)	0.0272	0.9498	0.0230	0.3272	0.0300	0.9432	0.0268	0.3184
(30,30)	(c)	0.0253	0.9508	0.0239	0.2677	0.0273	0.9468	0.0259	0.2627
(14,20)	(c)	0.0232	0.9530	0.0238	0.3668	0.0360	0.9446	0.0194	0.3454
(20,14)	(c)	0.0270	0.9503	0.0227	0.3544	0.0220	0.9413	0.0367	0.3527
(14,30)	(c)	0.0227	0.9525	0.0248	0.3449	0.0450	0.9412	0.0138	0.3190
(30,14)	(c)	0.0260	0.9517	0.0223	0.3279	0.0157	0.9431	0.0412	0.3355
(20,30)	(c)	0.0254	0.9504	0.0242	0.3021	0.0374	0.9433	0.0242	0.2885

Tabla 4.15: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (c) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.75$

		Intervalo Pivotal				Intervalo Díaz Francés-Montoya			
$\theta = 0.95$									
(n,m)	Caso	FEI	FC	FED	Prom	FEI	FC	FED	Prom
(14,14)	(c)	0.0242	0.9511	0.0247	0.1255	0.0290	0.9416	0.0294	0.1195
(20,20)	(c)	0.0246	0.9493	0.0261	0.0984	0.0274	0.9428	0.0298	0.0952
(30,30)	(c)	0.0248	0.9521	0.0231	0.0759	0.0279	0.9462	0.0259	0.0743
(14,20)	(c)	0.0274	0.9473	0.0274	0.1159	0.0405	0.9384	0.0211	0.1048
(20,14)	(c)	0.0259	0.9475	0.0266	0.1090	0.0211	0.9409	0.0380	0.1111
(14,30)	(c)	0.0246	0.9495	0.0259	0.1066	0.0463	0.9388	0.0149	0.0926
(30,14)	(c)	0.0248	0.9515	0.0237	0.0962	0.0128	0.9433	0.0439	0.1035
(20,30)	(c)	0.0251	0.9507	0.0242	0.0895	0.0338	0.9462	0.0200	0.0832
(30,20)	(c)	0.0275	0.9463	0.0262	0.0853	0.0224	0.9407	0.0369	0.0870

Tabla 4.16: Resultados del estudio de simulación para el caso de censura Progresiva de Tipo II, para el caso (c) de la Tabla 4.7 y cuando $\theta = 0.95$

Conclusiones

El problema de hacer inferencia estadística sobre el parámetro $\theta = P(X < Y)$ se ha planteado bajo diversas suposiciones sobre la distribución de probabilidad de (X, Y) y se han utilizado diferentes enfoques estadísticos para proporcionar soluciones. En particular, la reciente metodología presentada en Díaz-Francés y Montoya (2013) para calcular intervalos de verosimilitud-confianza para $\theta = P(X < Y)$, cuando X y Y son variables aleatorias independientes con distribución exponencial, ofrece una línea de investigación aparentemente relevante que incita a su desarrollo e innovación.

En esta tesis se desarrolló un estudio de simulación para comparar los intervalos de verosimilitud-confianza para $\theta = P(X < Y)$, presentados en Díaz-Francés y Montoya (2013), con intervalos pivotaes, en términos de frecuencia de cobertura y longitud del intervalo, bajo tres distintos tipos de muestra: Sin censura, censura por la derecha de Tipo II y censura progresiva de Tipo II. Es importante mencionar que en la literatura estadística revisada, no se tienen registros de la aplicación de la metodología de Díaz-Francés y Montoya (2013) al caso de muestras con censura progresiva de Tipo II. Así, todo lo presentado en esta tesis para este caso tiene carácter de novedoso.

Las conclusiones generales más relevantes del estudio de simulación son las siguientes. Para todos los casos (tipos de muestra) y escenarios explorados, las frecuencias de cobertura de ambos intervalos son similares a la probabilidad de cobertura nominal especificada y las frecuencias de error de cobertura por la izquierda y por la derecha no mostraron evidencia de sesgo en la estimación. Además, las longitudes promedio de ambos intervalos, que cubrieron el valor verdadero de θ , fueron aproximadamente las mismas. Por lo tanto, ambos intervalos son apropiados para hacer inferencias sobre θ .

El uso de la metodología de Díaz-Francés y Montoya (2013) para calcular intervalos de verosimilitud-confianza para θ es simple; sin embargo, requiere cierta estructura matemática para la verosimilitud y para $\theta = P(X < Y)$. En contraste, la metodología pivotal requiere la existencia de una cantidad pivotal para inferencias sobre θ y poder calcular su distribución. En los tres casos estudiados en esta tesis (sin censura, censura por la derecha de Tipo II y censura progresiva de Tipo II) bajo el modelo exponencial, las restricciones de ambas metodologías se cumplieron. Sin embargo, para otros casos donde la distribución de X y Y no es exponencial,

pareciera que revisar que se cumplen las condiciones del método presentado en Díaz-Francés y Montoya (2013) es menos complicado que encontrar una cantidad pivotal para inferencias sobre θ (si existe) y calcular su distribución de probabilidad.

Por último, para trabajo futuro se plantean dos problemas. El primero es encontrar otros casos donde se pueda aplicar de forma directa el método de Díaz-Francés y Montoya (2013) para hacer estimación sobre θ . El segundo problema es construir intervalos de verosimilitud-confianza para $\theta = P(X < Y)$ considerando una estructura matemática para la verosimilitud mucho más general que la presentada en Díaz-Francés y Montoya (2013). Una solución adecuada de este problema permitiría proporcionar una expresión matemática simple para intervalos de verosimilitud-confianza para θ que pudiera utilizarse bajo diferentes suposiciones sobre la distribución de probabilidad de (X, Y) y escenarios de censura. Al parecer, esta es una línea de investigación estadística interesante y novedosa.

Bibliografía

- [1] Al-Mutairi, D. K., Ghitany, M. E. y Kundu, D. (2013). Inferences on stress-strength reliability from lindley distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 42, Págs. 1443-1463.
- [2] Balakrishnan N. y Aggarwala R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications*. Boston: Springer Science & Business Media.
- [3] Bamber, D. (1975). The area above the ordinal dominance graph and the area below the receiver operating characteristic graph. *J. Math. Psychol.*, Vol. 12, Págs. 387-415.
- [4] Barnard, G. A. (1949). Statistical Inference (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society.*, Vol. 11, Págs. 115-149.
- [5] Barnard, G. A. (1977). Pivotal Inference and the Bayesian Controversy (with discussion). *Bulletin of the International Statistical Institute.*, Vol. 47, Págs. 543-551.
- [6] Berger, J. O. y Wolpert, R. W. (1984). *The Likelihood Principle. Institute of mathematical statistics Lecture Notes- Monograph Series*, Hayward, CA: IMS.
- [7] Birnbaum, Z.W. (1956). On a use of Mann-Whitney statistics. *Proc. Third Berkeley Symp. in Math. Statist. Probab.*, Vol. 1, Págs. 13-17.
- [8] Birnbaum, Z.W. y McCarty, B.C. (1958). A distribution-free upper confidence bounds for $Pr(V < X)$ based on independent samples of X and Y. *Ann. Math. Statist.*, Vol. 29, Págs. 558-562.
- [9] Castillo, L. C. (2010). *Comparación de distribuciones estadísticas para tiempos de espera en Neurobiología*. Tesis de Maestro en Ciencias con Orientación en Probabilidad y Estadística., CIMAT, Guanajuato, Gto., México.
- [10] Chao A. (1982). On Comparing Estimators of $P(Y < X)$ in the Exponential Case. *IEEE Trans. Reliability*, Vol. 31, Págs. 389-392.
- [11] Church, J.D. y Harris, B. (1970). The estimation of reliability from stress-strength relationship. *Technometrics*, Vol. 12, Págs. 49-54.

- [12] Cramer E. y Kamps U. (1997). A note on UMVUE of $Pr(X < Y)$ in the Exponential Case. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 26, Págs. 1051-1055.
- [13] Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*, Second Edition. California: Duxbury Press.
- [14] Cox, D. R. y Hinkley, D.V. (1974). *Theoretical Statistics*. Londres: Chapman and Hall.
- [15] Díaz-Francés, E. y Montoya, J. A. (2013). The simplicity of likelihood based inferences for $P(X < Y)$ and for the ratio of means in the exponential model. *Statistical Papers*, Vol. 54, Págs. 499-522.
- [16] Edwards, A. W. F. (1992). *Likelihood*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.
- [17] Enis P. y Geisser S. (1971). Estimation of the Probability that $Y > X$. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, Págs. 162-168.
- [18] Feigl P. y Zelen M. (1965). Estimation of exponential survival probabilities with concomitant information. *Biometrics*, Vol. 21, Págs. 826-833.
- [19] Fisher, R. A. (1921). On the “Probable Error” of a Coefficient of Correlation Deduced from a Small Sample. *Metron*, Vol. 1, Págs. 3-32.
- [20] Fisher, R. A. (1991). *Statistical Methods and Scientific Inference*. Oxford: Oxford University Press.
- [21] Gunasekera, S. (2014). Generalized inferences of $R = Pr(X > Y)$ for Pareto distribution. *Statistical Papers*, Págs. 1-19.
- [22] Jiang L. y Wong A.C.M. (2008). A Note on Inference for $P(X < Y)$ for Right Truncated Exponentially Distributed Data. *Stat Papers*, Vol. 49, Págs. 637-651.
- [23] Kalbfleisch, J. G. (1985). *Probability and Statistical Inference*, Vol. 2: Statistical Inference. Nueva York: Springer-Verlag.
- [24] Kelley G.D., Kelley J.A. y Schucany W.R. (1976) Efficient Estimation of $P(Y < X)$ in the Exponential Case. *Technometrics*, Vol. 18, Págs. 359-360.
- [25] Kotz S, Lumelskii y PenskyM (2003). *The stress-strength model and its generalizations: theory and applications*. World Scientific, River Edge.
- [26] Krzanowski W.J. y Hand D.J. (2009). *ROC curves for continuous data*. CRC Press, Boca Raton.

- [27] Kundu D. y Gupta R.D. (2005). Estimation of $P[Y < X]$ for generalized exponential distribution. *Metrika*, Vol. 61, Págs. 291-308.
- [28] Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- [29] Lindsey, J. K. (1999). Some Statistical Heresies (With discussion). *The Statistician*, Vol. 48, Págs. 1-40.
- [30] Meeker, W. Q. y Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- [31] Montoya, J. A., Díaz-Francés, E. y Sprott, D. A. (2009). On a Criticism of the Profile Likelihood Function. *Statistical Papers*, Vol. 50, Págs. 195-202.
- [32] Montoya, J. A. (2008). *La verosimilitud perfil en la Inferencia Estadística*. Tesis de Doctorado en Ciencias con Orientación en Probabilidad y Estadística, CIMAT, Guanajuato, Gto., México.
- [33] Mood, A. M., Graybill, F. A. y Boes, D. C. (1985). *Introduction to the Theory of Statistics*. Singapore: McGraw-Hill.
- [34] Saracoglu, B., Kinaci, I. y Kundu, D. (2011). On estimation of $R = P(Y < X)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring. *J Stat Comput Simul*, Volume 82, Págs. 729-744.
- [35] Sathe Y.S. y Shah S.P. (1981). On Estimating $P(X > Y)$ for the Exponential Distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 10, Págs. 39-47.
- [36] Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- [37] Sprott, D. A. (2000). *Statistical Inference in Science*. Nueva York: Springer-Verlag.
- [38] Tong H. (1974). A Note on the Estimation of $P(Y < X)$ in the Exponential Case. *Technometrics*, Vol. 16, Pág. 625.
- [39] Tong H. (1975). Errata: A Note on the Estimation of $P(Y < X)$ in the Exponential Case. *Technometrics*, Vol. 17, Pág. 395.
- [40] Ventura L. y Racugno W. (2011) Recent advances on Bayesian inference for $P(Y < X)$. *Bayesian Analysis*, Vol. 6, Págs. 1-18.