

Universidad de Sonora
Departamento de Investigación en Física
Maestría en Ciencias (Física)



**"Sintonización de conos de Dirac en cristales fotónicos
bidimensionales"**

Tesis que para obtener el título de
Maestro en Ciencias

Presenta:

CÉSAR AUGUSTO ROMERO RAMOS

Director:

FELIPE RAMOS MENDIETA †

Codirector:

JESÚS MANZANARES MARTÍNEZ

Agosto de 2019

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos:

-Al Dr. Felipe Ramos Mendieta, por haberme permitido trabajar en este proyecto de tesis bajo su tutela; por sus extraordinarias clases y todas las enseñanzas que me dejó. Pero sobre todo, por siempre haberme motivado a seguir adelante. Q.E.P.D.

-Al Dr. Jesús Manzanares Martínez, por su inestimable apoyo y dirección. Sin su ayuda, no podría haber concluido este trabajo.

-Al Dr. Iván Fuentes Cárcamo, quien con su infinita paciencia y con mucha claridad, me ha impartido un excelente curso de física del estado sólido, que me ha permitido asimilar conceptos fundamentales para la realización de este trabajo.

-Al Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, por brindarme todas las facilidades necesarias para llevar a cabo mis estudios de posgrado.

-Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por los apoyos económicos recibidos.

Resumen:

En el presente trabajo se hace un estudio sobre los conos de Dirac en cristales fotónicos bidimensionales. Los cristales analizados son estructuras 2D periódicas compuestas por cilindros dieléctricos, en arreglos de red cuadrada y hexagonal. Se considera únicamente la propagación de ondas electromagnéticas en el plano de periodicidad. Para obtener las relaciones de dispersión $\omega(\vec{k})$, se hace uso del método de expansión en ondas planas. Obtenidas las relaciones de dispersión, se buscan conos de Dirac en las estructuras de bandas fotónicas. Una vez identificados los sistemas que presentan conos de Dirac, se procede a estudiar la relación que guardan dichos conos con las propiedades físicas del cristal. Se analiza la dependencia de la frecuencia de Dirac de los conos con el contraste dieléctrico y con el factor de llenado del cristal. Por último, se analiza la apertura del cono de Dirac, como resultado del rompimiento de la simetría de espejo del cristal fotónico.

*Con todo mi amor para
Minerva*

1	Introducción	1
2	Teoría	6
2.1	Ecuaciones de Maxwell	6
2.2	La red recíproca	8
2.2.1	Construyendo los vectores de la red recíproca	8
2.2.2	Ondas de Bloch	9
2.3	Redes Bidimensionales	10
2.3.1	Ejemplos representativos	10
2.4	Ecuación de onda como un problema de eigenvalores	13
2.4.1	Polarización E	13
2.4.2	Polarización H	14
2.5	Solución explícita del problema de eigenvalores	15
2.5.1	Red cuadrada	15
2.5.2	Normalización	17
3	Cristales fotónicos bidimensionales	18
3.1	Simulación con el método de expansión de ondas planas	18
3.1.1	Red cuadrada	18

Contenido

3.1.2	Red hexagonal	21
3.2	Conos de Dirac en estructuras periódicas 2D	23
4	Sintonización del cono de Dirac	27
4.1	Sintonización por modulación de parámetros constitutivos . .	27
4.1.1	Variación de ϵ_a	28
4.1.2	Variación del factor de llenado	30
4.1.3	Mapa del cono de Dirac de la red cuadrada	31
4.2	Sintonización por variación de la geometría	33
4.3	Rompimiento de la simetría de espejo	36
5	Conclusiones	43
	Referencias	45

Lista de Figuras

1.1. Cristales fotónicos clasificados según las dimensiones en las que presentan periodicidad: (a) Unidimensionales, (b) bidimensionales y (c) tridimensionales. (Fuente: Ref. [1]).	1
1.2. La presencia de un cono de Dirac en una estructura de bandas fotónicas de un cristal fotónico bidimensional compuesto por una serie de cilindros metálicos paralelos, en un arreglo de red hexagonal. (Fuente: Ref. [2]).	4
2.1. Red directa de la red cuadrada con vectores primitivos \vec{a}_1 y \vec{a}_2 , y la red recíproca correspondiente con vectores primitivos \vec{b}_1 y \vec{b}_2 .	10
2.2. Bandas de la red cuadrada vacía, y zona irreducible de Brillouin de la red cuadrada.	11
2.3. Red directa de la red hexagonal con vectores primitivos $\vec{a}_1 = a(\hat{x} + \hat{y}\sqrt{3})/2$ y $\vec{a}_2 = a(\hat{x} - \hat{y}\sqrt{3})/2$, y la red recíproca correspondiente con vectores primitivos $\vec{b}_1 = (2\pi/a)(\hat{x} + \hat{y}/\sqrt{3})$ y $\vec{b}_2 = (2\pi/a)(\hat{x} - \hat{y}/\sqrt{3})$	12
2.4. Bandas de la red hexagonal vacía, y zona irreducible de Brillouin de la red hexagonal.	12
2.5. Red cuadrada de cilindros cuadrados dieléctricos de permitividad ϵ_a , inmersos en un medio de permitividad ϵ_b	15
3.1. Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de $\epsilon_2 = 5$ en red cuadrada, inmersos en aire. El factor de llenado es $f = 0.785$. Polarización TE.	19

Lista de Figuras

3.2. Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de $\epsilon_2 = 10$ en red cuadrada, inmersos en aire. El factor de llenado es $f = 0.526$. Polarización TM.	20
3.3. Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de $\epsilon_1 = 5$ en red hexagonal, inmersos en aire. El factor de llenado es $f = 0.169$. Polarización TE.	22
3.4. Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de $\epsilon_1 = 14$ en red hexagonal, inmersos en aire. El factor de llenado es $f = 0.431$. Polarización TM.	23
3.5. Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de constante dieléctrica $\epsilon_a = 11.4$ inmersos en aire ($\epsilon_b = 1$), formando una red hexagonal. El radio de los cilindros es $R = 0.3a$. Polarización TE.	24
3.6. Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de constante dieléctrica $\epsilon_a = 11.4$ inmersos en aire ($\epsilon_b = 1$), formando una red hexagonal. El radio de los cilindros es $R = 0.3a$. Polarización TM.	26
4.1. Cristal fotónico de cilindros circulares en red hexagonal, con radio $R = 0.3a$, y contraste dieléctrico (a) $\epsilon = 1$, (b) $\epsilon = 5$, (c) $\epsilon = 9$, (d) $\epsilon = 11.4$, (e) $\epsilon = 15$, (f) $\epsilon = 20$	29
4.2. Cristal fotónico de cilindros circulares en red hexagonal, con contraste dieléctrico $\epsilon = 11.4$, y radio (a) $R = 0.1a$, (b) $R = 0.2a$, (c) $R = 0.3a$, (d) $R = 0.4a$, donde a es la constante de la red. . .	31
4.3. Mapa de parámetros constitutivos de un cristal fotónico de cilindros circulares en red hexagonal. La región sombreada corresponde a todos los puntos en los que existe el cono de Dirac.	32
4.4. Mapa de parámetros constitutivos de un cristal fotónico de cilindros cuadrados en red cuadrada. La región sombreada corresponde a todos los puntos en los que existe el cono de Dirac.	32

Lista de Figuras

4.5. Diagramas de bandas fotónicas de un cristal de red cuadrada. La permitividad de los bastones que componen la base es $\epsilon_a = 12.5$, y se encuentran inmersos en un medio de permitividad $\epsilon_b = 2.25$. (a) La base de cilindros cuadrados con dimensiones $L_a/a = L_b/a = 0.36$, donde a es la constante de la red. (b) La base de cilindros rectangulares con dimensiones $L_a/a = 0.27$ y $L_b/a = 0.53$	34
4.6. Relación de dispersión y diagrama de bandas proyectadas del caso cuadrado.	35
4.7. Eigencampos de las bandas que se cruzan en el cono de Dirac. (a) Campo par. (b) Campo impar.	36
4.8. Base circular (a), pasa a ser trisectada y se rellena el espacio entre las secciones con el mismo material dieléctrico, resultando la base (b).	37
4.9. Cono de Dirac de la base circular. El cruce se da a una frecuencia de Dirac de $f_D = 0.819$	37
4.10 Rotación de la base de cilindros cuadrados.	38
4.11 Diagrama de bandas fotónicas y de bandas proyectadas para la base cuadrada rotada 45°	39
4.12 Bandas proyectadas para la red cuadrada a un ángulo $\theta = 0^\circ$. Los prismas cuadrados de lado $L = 0.36a$ tienen permitividad $\epsilon_b = 12.5$, y están inmersos en un medio de $\epsilon_a = 2.25$	40
4.13 Bandas proyectadas para la red cuadrada a un ángulo $\theta = 20^\circ$. Los prismas cuadrados de lado $L = 0.36a$ tienen permitividad $\epsilon_b = 12.5$, y están inmersos en un medio de $\epsilon_a = 2.25$	40
4.14 Acercamiento a la región del cono de Dirac de las figuras 4.12 y 4.13 . (a) Para la base sin rotar ($\theta = 0^\circ$) se aprecia el cono de Dirac. (b) Para la base rotada a un ángulo $\theta = 20^\circ$, se ha roto la simetría de espejo, y se aprecia la apertura del cono de Dirac.	41

Durante el siglo XX se vieron grandes avances en la física del estado sólido, y particularmente en el área de la cristalografía. La teoría de los cristales electrónicos permitió el desarrollo de dispositivos tecnológicos tales como el transistor, que supusieron una revolución tecnológica de alto impacto en la sociedad. La electrónica tiene como objeto de estudio a los sistemas físicos que son periódicos en su estructura química [3]. De forma análoga, existen sistemas físicos que son periódicos en sus propiedades ópticas. Estos últimos son conocidos como cristales fotónicos [4]. Estas estructuras se suelen clasificar según presenten periodicidad en una, dos o tres dimensiones, como se esquematiza en la figura 1.1. También se suelen clasificar según su composición, como cristales dieléctricos, con componentes metálicos, superconductores, etc.

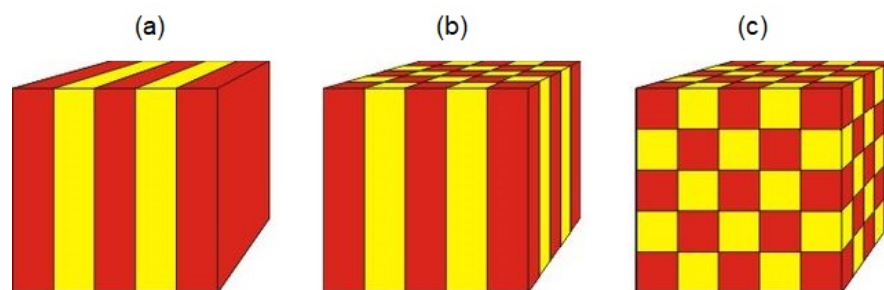


Figura 1.1: Cristales fotónicos clasificados según las dimensiones en las que presentan periodicidad: (a) Unidimensionales, (b) bidimensionales y (c) tridimensionales. (Fuente: Ref. [1]).

1 Introducción

En las últimas décadas, el estudio e investigación de cristales fotónicos ha crecido rápidamente. Las aplicaciones tecnológicas son muy diversas, como recubrimientos de lentes y espejos [5], guías de onda [6], dispositivos para confinar luz [7], etc. La importancia de los cristales fotónicos radica en su capacidad para controlar o modificar el comportamiento de las ondas electromagnéticas que se propagan a través de ellos. Esta capacidad del cristal fotónico para influir en la propagación de la luz, viene determinada tanto por la geometría del cristal, como por sus propiedades ópticas (índice de refracción).

El estudio de los cristales fotónicos tiene su comienzo cuando en 1987, Eli Yablonovitch y Sajeev John, de forma independiente, publicaran un par de artículos [8, 9] en los que definirían este campo de estudio. Yablonovitch buscaba la manera de construir un material en el cual fuera posible evitar las pérdidas de energía por emisión espontánea. Mientras que John por otra parte, estudiaba la localización de fotones en el interior de un material periódico en sus propiedades ópticas. En este par de trabajos se definiría por vez primera el concepto de cristal fotónico, pero no sería sino hasta 1991 cuando Yablonovitch crearía el primero de estos cristales, el cual recibiría el nombre de Yablonovita [10]. A partir de ese momento, el campo de estudio de los cristales fotónicos fue creciendo rápidamente. De la investigación en cristales fotónicos y su capacidad para controlar la luz que pasa a través de ellos, fueron surgiendo varias aplicaciones tales como celdas solares [11], LEDs [12, 13] y fibras ópticas [14].

Al igual que en los cristales electrónicos, se descubrió que los cristales fotónicos presentan una relación de dispersión $\omega(\vec{k})$ que da lugar a gaps de energía prohibidos para la propagación de ondas electromagnéticas. Al rango de frecuencias en las que la propagación está prohibida, se le conoce como gap prohibido. Cuando existe un rango de frecuencias prohibidas, para todas las direcciones de propagación y para todas las polarizaciones de la luz, se

1 Introducción

dice que el gap es completo o absoluto. Conociendo las características tanto físicas como geométricas que dan lugar al gap, es posible diseñar un material que permita el control del mismo. Es decir, que se pueden determinar las condiciones de un cristal fotónico para que presente un gap en una región deseada. Esta es la esencia de la búsqueda de aplicaciones para cristales fotónicos; diseñarlos a partir de las propiedades que permitan sintonizar o controlar la luz de forma precisa.

Una gran variedad de materiales dieléctricos han sido usados para la construcción de cristales fotónicos, consiguiendo con ello una reducción en las pérdidas durante el proceso de propagación. Sin embargo, también han surgido muchas aplicaciones nuevas con el uso de estructuras dispersivas con componentes metálicos, tales como antirreflejantes omnidireccionales o fuentes de luz visible [15–17]. En años recientes también han surgido aplicaciones de superconductores en cristales fotónicos [18, 19]. Los efectos disipativos pueden considerarse despreciables en este último tipo de cristales, en relación con los que emplean metales. Y también son estructuras en las cuales se puede sintonizar el gap de frecuencias prohibidas, a partir de modular parámetros tales como la temperatura [20].

Existe una estructura conocida como *Cono de Dirac* que ha sido de gran interés durante los últimos años en el área de cristales fotónicos. Los conos de Dirac son estructuras que aparecen en un diagrama de bandas fotónicas, cuando dos bandas se cruzan en un gap, como se aprecia en la figura **1.2**. Los conos de Dirac fueron estudiados originalmente en estructuras de bandas para electrones, y más recientemente ha comenzado su estudio en cristales fotónicos. El cono de Dirac se da para una frecuencia en específico, en donde se tocan únicamente en un punto las bandas que se cruzan en el gap. A dicha frecuencia se le conoce como la frecuencia de Dirac f_D . El nombre como tal, viene de su estudio en cristales electrónicos, en donde los electrones en la presencia de estos cruces de bandas tienen un compor-

tamiento que es descrito por la ecuación de Dirac. Este concepto ha sido trasladado como analogía a la fotónica.

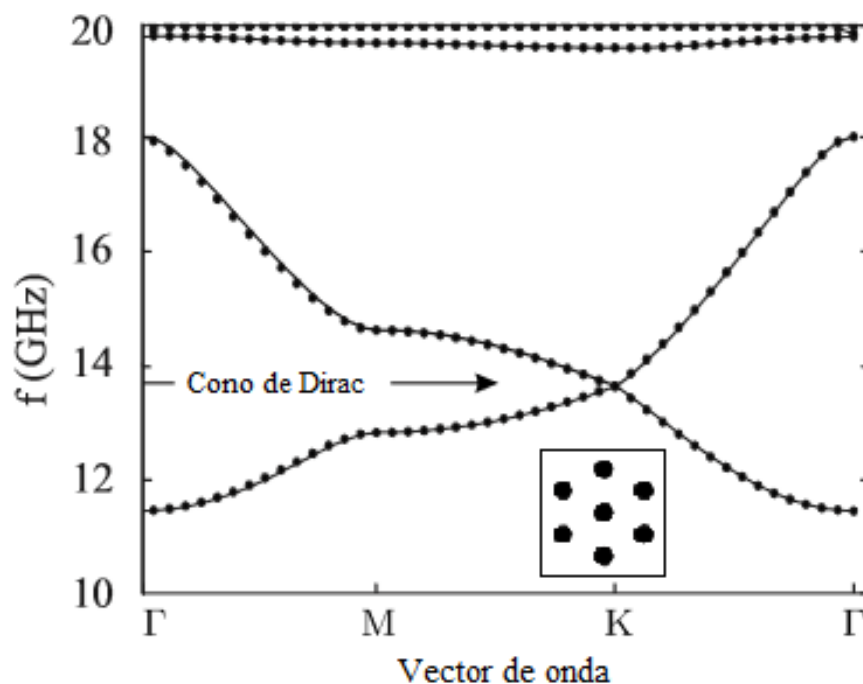


Figura 1.2: La presencia de un cono de Dirac en una estructura de bandas fotónicas de un cristal fotónico bidimensional compuesto por una serie de cilindros metálicos paralelos, en un arreglo de red hexagonal. (Fuente: Ref. [2]).

El cono de Dirac en cristales fotónicos ha sido objeto de investigación, al menos durante la última década. Dicha investigación ha explorado conceptos interesantes como el efecto Zitterbewegung fotónico, que tiene lugar en la presencia de un cono de Dirac [21]; o el efecto de localización de campo [22]. Se ha estudiado también la forma en la que la densidad de estados permitidos decrece en las cercanías del cono de Dirac [23]. Este tipo particular de cruce de bandas se ha encontrado para las distintas redes de Bravais, e incluso para redes arquimedianas [24].

En el presente trabajo se presentará un estudio sobre el cono de Dirac en cristales fotónicos bidimensionales. Sin embargo, dicho estudio no buscará hacer una exploración exhaustiva de sus aplicaciones, ni se centrará

1 Introducción

en alguna de ellas en particular. Más bien se hará una exploración de cómo los distintos parámetros físicos que definen a un cristal fotónico influyen en la presencia del cono de Dirac. Esto es, cómo estas características pueden fungir como elementos de control de un cono de Dirac para un sistema dado, para realizar una aplicación tecnológica en donde se propone un mecanismo de sintonización.

En el presente trabajo se procederá a estudiar la sintonización del Cono de Dirac en cristales fotónicos bidimensionales, compuestos únicamente por materiales dieléctricos (sin pérdidas). El método utilizado para estudiar el problema será el método de expansión en ondas planas [25]. La teoría necesaria para emplear dicho método, será presentada en el capítulo 2. Con este método se procederá a realizar simulaciones numéricas. En el capítulo 3, se presentarán algunos resultados notables, en los cuales se muestre la física elemental de los cristales fotónicos bidimensionales, para probar la validez de los resultados arrojados por los códigos empleados para este proyecto. Posteriormente, en el capítulo 4 se presentarán los resultados obtenidos del estudio de los conos de Dirac, discutiendo los efectos que tiene la manipulación de las propiedades físicas de los cristales, sobre el cono mismo. Se concluirá mostrando los efectos del rompimiento de la simetría de espejo en un cristal que presente un cono de Dirac como último elemento sintonizador. En el capítulo 5 se darán las conclusiones finales de este trabajo.

En este capítulo se desarrollará la teoría necesaria para poder estudiar la propagación de ondas electromagnéticas a través de cristales fotónicos 2D, y obtener así relaciones de dispersión que permitan extraer información sobre los conos de Dirac, en este tipo de materiales. Se presenta el método de ondas planas que se propagan en el plano de periodicidad de estas estructuras. En particular, se presentará el análisis teórico para la red cuadrada, que es la que se verá con más detalle en los capítulos siguientes de este trabajo.

2.1. Ecuaciones de Maxwell

La propagación de ondas electromagnéticas a través del espacio tiene un comportamiento dictado por las ecuaciones de Maxwell. Las cuatro ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (2.4)$$

2 Teoría

Los campos en el dominio del tiempo se transforman al dominio de la frecuencia de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.5)$$

En ausencia de fuentes de cargas $[\rho(\vec{r}, t)]$ y corrientes locales $[\vec{J}(\vec{r}, t)]$, las ecuaciones de Maxwell para fenómenos estacionarios pueden escribirse como:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) = i\omega \vec{B}(\vec{r}, \omega) \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = -i\omega \vec{D}(\vec{r}, \omega) \quad (2.9)$$

Las relaciones constitutivas relacionan el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ y el desplazamiento eléctrico $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$ de la forma

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega), \quad (2.10)$$

donde

$$\epsilon(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\vec{r}, \omega), \quad (2.11)$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío y $\epsilon_r(\vec{r}, \omega)$ es la permitividad relativa.

La relación entre la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, \omega)$ y el campo magnético $\vec{H}(\vec{r}, \omega)$ es

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\vec{r}, \omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega). \quad (2.12)$$

2 Teoría

La permeabilidad del medio es derivada de la relación

$$\mu(\vec{r}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\vec{r}, \omega), \quad (2.13)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío y $\mu_r(\vec{r}, \omega)$ es la permeabilidad relativa. En este trabajo se consideran medios no magnéticos, es decir

$$\mu_r(\vec{r}, \omega) = 1. \quad (2.14)$$

Combinando las ecuaciones (2.8)-(2.14), tenemos las ecuaciones de onda para $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ y $\vec{H}(\vec{r}, \omega)$ de la forma

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r(\vec{r}, \omega)} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad (2.16)$$

donde hemos usado la identidad

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (2.17)$$

2.2. La red recíproca

2.2.1. Construyendo los vectores de la red recíproca

Dado un conjunto de vectores de la red directa \vec{R} , se necesitan determinar los vectores \vec{G} de la red recíproca tales que $\vec{G} \cdot \vec{R}$ es un múltiplo entero de 2π , para todo \vec{R} . Los vectores \vec{R} pueden expresarse en términos de los vectores primitivos de la red directa, denotados comúnmente como $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Así, \vec{R} queda expresado como

$$\vec{R} = l\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + n\vec{a}_3, \quad (2.18)$$

con l , m y n enteros.

Los vectores de la red recíproca $\{\vec{G}\}$ también tienen una base de vectores primitivos \vec{b}_i , tales que

$$\vec{G} = l'\vec{b}_1 + m'\vec{b}_2 + n'\vec{b}_3. \quad (2.19)$$

Requiriendo que $\vec{R} \cdot \vec{G} = 2\pi N$,

$$(l\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + n\vec{a}_3) \cdot (l'\vec{b}_1 + m'\vec{b}_2 + n'\vec{b}_3) = 2\pi N, \quad (2.20)$$

se ve que lo anterior se satisface si $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi$ cuando $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Dicho de otra forma, si $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Así, dado el conjunto $\{\vec{a}\}$, se tiene que encontrar el correspondiente conjunto $\{\vec{b}\}$ tal que $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Esto se consigue mediante la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \frac{2\pi\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)} \\ \vec{b}_2 &= \frac{2\pi\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)} \\ \vec{b}_3 &= \frac{2\pi\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.2.2. Ondas de Bloch

El teorema de Bloch describe la propagación de ondas electromagnéticas en un cristal fotónico, basándose en las siguientes hipótesis:

- Los dieléctricos que conforman al cristal fotónico están dispuestos en la forma de una de las redes de Bravais [26].
- La función dieléctrica del cristal es periódica y de la forma $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r} + \vec{R})$, para todo vector de traslación \vec{R} de la red.

Partiendo de que tales hipótesis son ciertas, el teorema de Bloch establece que los eigencampos $\vec{E}(\vec{r})$ se pueden expresar como el producto de una onda

plana y una función periódica en \vec{R} , llamada función de Bloch:

$$\vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{U}_{\vec{k}}(\vec{r}). \quad (2.22)$$

En la anterior ecuación, \vec{k} es el vector de onda y $\vec{U}_{\vec{k}}(\vec{r})$ es una función periódica cualquiera (pero que comparte la periodicidad de la red cristalina).

2.3. Redes Bidimensionales

2.3.1. Ejemplos representativos

Para una red cuadrada de longitud a , los vectores de la red directa son $\vec{a}_1 = a\hat{x}$ y $\vec{a}_2 = a\hat{y}$. Para usar la transformación (2.21), se puede tomar \vec{a}_3 con cualquier longitud en la dirección \hat{z} , pues el cristal es homogéneo en esa dirección. Los resultados son $\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\hat{x}$ y $\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\hat{y}$. Así, la red recíproca es también una red cuadrada pero con longitud $2\pi/a$, como se aprecia en la figura 2.1. De aquí se ve como el nombre *red recíproca* resulta muy *ad hoc*. En la figura 2.2 se puede observar la forma de la zona irreducible de Brillouin de esta red cuadrada.

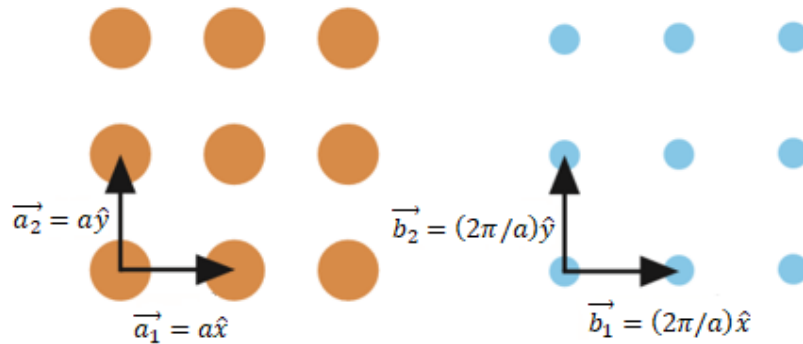


Figura 2.1: Red directa de la red cuadrada con vectores primitivos \vec{a}_1 y \vec{a}_2 , y la red recíproca correspondiente con vectores primitivos \vec{b}_1 y \vec{b}_2 .

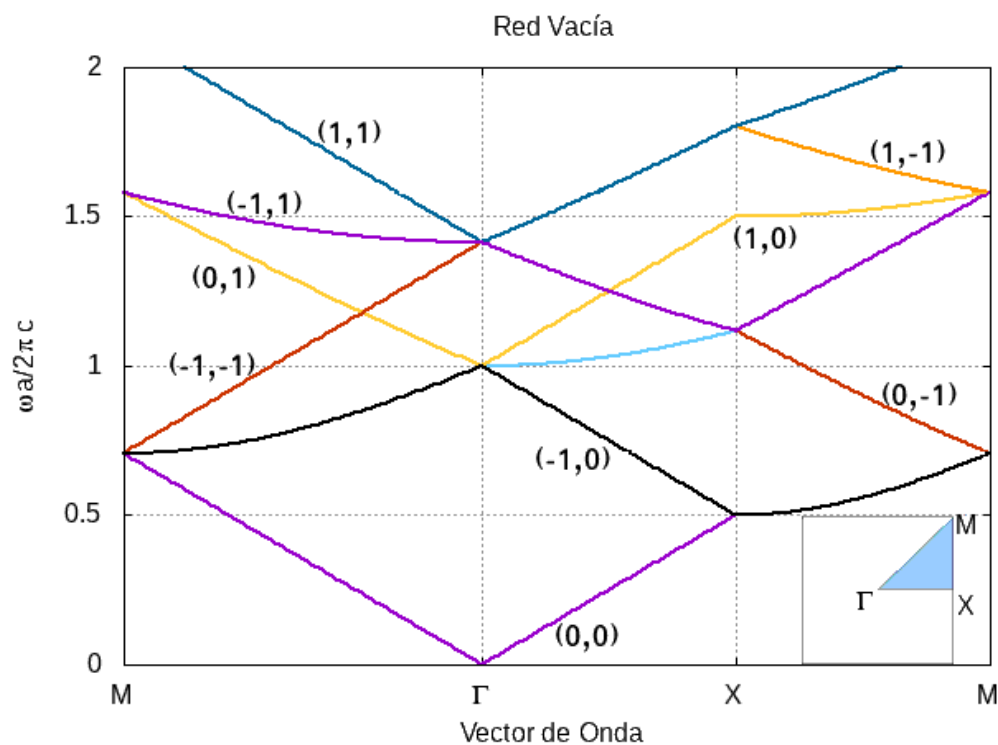


Figura 2.2: Bandas de la red cuadrada vacía, y zona irreducible de Brillouin de la red cuadrada.

Trabajando de forma análoga la red hexagonal, los vectores de la red directa son $(\hat{x} + \hat{y}\sqrt{3})a/2$ y $(\hat{x} - \hat{y}\sqrt{3})a/2$. Usando la transformación (2.21) se obtienen los vectores primitivos de la red recíproca $(2\pi/a)(\hat{x} + \hat{y}/\sqrt{3})$ y $(2\pi/a)(\hat{x} - \hat{y}/\sqrt{3})$. Esto es otra red hexagonal pero rotada 90° respecto a la red directa, y con espaciamiento $4\pi/a\sqrt{3}$, como se aprecia en la figura **2.3**. La primera zona de Brillouin de esta red resulta ser un hexágono, y la zona irreducible de Brillouin puede apreciarse en la figura **2.4**.

2 Teoría

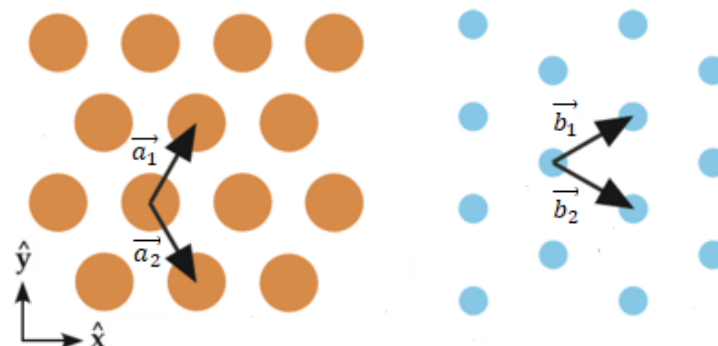


Figura 2.3: Red directa de la red hexagonal con vectores primitivos $\vec{a}_1 = a(\hat{x} + \hat{y}\sqrt{3})/2$ y $\vec{a}_2 = a(\hat{x} - \hat{y}\sqrt{3})/2$, y la red recíproca correspondiente con vectores primitivos $\vec{b}_1 = (2\pi/a)(\hat{x} + \hat{y}/\sqrt{3})$ y $\vec{b}_2 = (2\pi/a)(\hat{x} - \hat{y}/\sqrt{3})$.

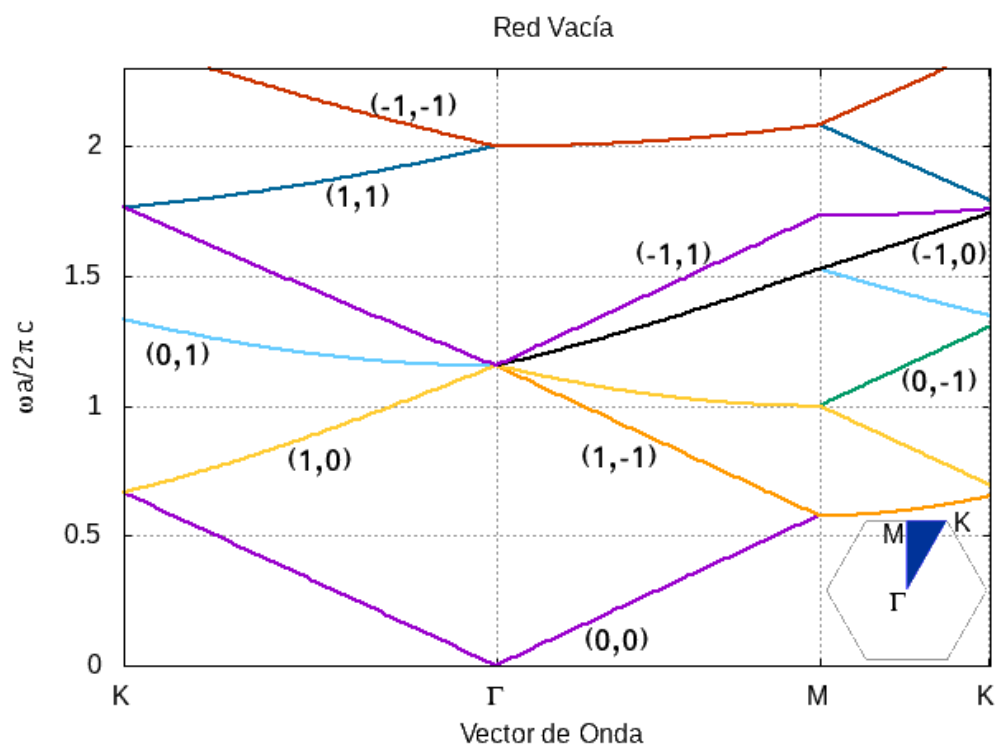


Figura 2.4: Bandas de la red hexagonal vacía, y zona irreducible de Brillouin de la red hexagonal.

2.4. Ecuación de onda como un problema de eigenvalores

2.4.1. Polarización E

Partiendo de la ecuación de onda (2.15) para el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$, donde \vec{r} está restringido al plano de periodicidad, se tiene

$$\nabla^2 E + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r E = 0. \quad (2.23)$$

Para obtener soluciones tipo Bloch [eq. (2.22)], se expresan la componente del campo en la dirección de periodicidad y el inverso de la función periódica, $\epsilon_r(\vec{r})$, como series de Fourier

$$E_{\vec{k}} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left\{ \sum_{\vec{G}} E_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \right\} \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\epsilon_r} = \sum_{\vec{G}} \mu_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}}. \quad (2.25)$$

En la expresión (2.24), la serie de Fourier $\sum_{\vec{G}} E_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}}$, es la función periódica de Bloch referida en la ecuación (2.22).

Dividiendo (2.23) entre ϵ_r y desarrollando según (2.24)-(2.25), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{G}} \mu_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \nabla^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sum_{\vec{G}'} E_{\vec{G}'} e^{i\vec{G}'\cdot\vec{r}} + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}} E_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= 0, \\ - \sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{G}'} \mu_{\vec{G}} [(\vec{k} + \vec{G}')^2] E_{\vec{G}'} e^{i(\vec{G} + \vec{G}')\cdot\vec{r}} + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}} E_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} &= 0, \end{aligned}$$

en la primera sumatoria se hace el cambio $\vec{G} + \vec{G}' = \vec{G}''$ y se agrupa para obtener

$$\sum_{\vec{G}''} \left[\sum_{\vec{G}'} \mu_{\vec{G}'' - \vec{G}'} E_{\vec{G}'} [(\vec{k} + \vec{G}')^2] - \frac{\omega^2}{c^2} E_{\vec{G}''} \right] e^{i\vec{G}''\cdot\vec{r}} = 0.$$

2 Teoría

Por independencia lineal de las funciones $e^{i\vec{G}'' \cdot \vec{r}}$, se tiene

$$\sum_{\vec{G}'} \mu_{\vec{G}-\vec{G}'} [(\vec{k} + \vec{G}')^2] E_{\vec{G}'} = \frac{\omega^2}{c^2} E_{\vec{G}} \quad (2.26)$$

2.4.2. Polarización H

Partiendo de la ecuación de onda (2.16) para el campo magnético $\vec{H}(\vec{r}, \omega) = H(\vec{r})e^{-i\omega t} \hat{z}$, donde \vec{r} está restringido al plano de periodicidad, y expresando H y $1/\epsilon_r$ como series de Fourier, se tiene

$$H_{\vec{k}} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left[\sum_{\vec{G}} H_{\vec{G}} e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \right],$$

$$\frac{1}{\epsilon_r} = \sum_{\vec{G}} \mu_{\vec{G}} e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}},$$

desarrollando la ecuación de onda y haciendo $\vec{G} + \vec{G}' = \vec{G}''$ y reagrupando

$$\sum_{\vec{G}'} \left\{ \sum_{\vec{G}''} \mu_{\vec{G}''-\vec{G}'} H_{\vec{G}'} [(\vec{k} + \vec{G}') \cdot (\vec{k} + \vec{G}'')] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\vec{G}'' \cdot \vec{r}} - \frac{\omega^2}{c^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} H_{\vec{G}'} e^{i\vec{G}' \cdot \vec{r}} \right\} = 0,$$

cambiando los índices y utilizando la condición de ortogonalidad de las funciones $e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}$, se tiene

$$\sum_{\vec{G}'} \mu_{\vec{G}-\vec{G}'} [(\vec{k} + \vec{G}') \cdot (\vec{k} + \vec{G}')] H_{\vec{G}'} = \frac{\omega^2}{c^2} H_{\vec{G}}. \quad (2.27)$$

Como se ha visto, para polarización E se obtuvo la ecuación (2.26), y para la polarización H se obtuvo la ecuación (2.27). Para ambas polarizaciones, se llega a ecuaciones del tipo

$$MA = \lambda^2 A \quad (2.28)$$

y por lo tanto la solución a la ecuación de onda para ambos tipos de polarización, se redujo a un problema algebraico de eigenvalores. Para proceder a resolver este problema de eigenvalores, solo falta determinar los coeficientes $\mu_{\vec{G}-\vec{G}'}$, que serán característicos de la geometría de cada cristal, y que son conocidos como *coeficientes de Fourier*.

2.5. Solución explícita del problema de eigenvalores

2.5.1. Red cuadrada

Considérese la función dieléctrica periódica en el plano xy , del sistema que se muestra en la figura **2.5**, donde la función dieléctrica es de la forma

$$\epsilon(x, y) = \epsilon(x + d, y + d).$$

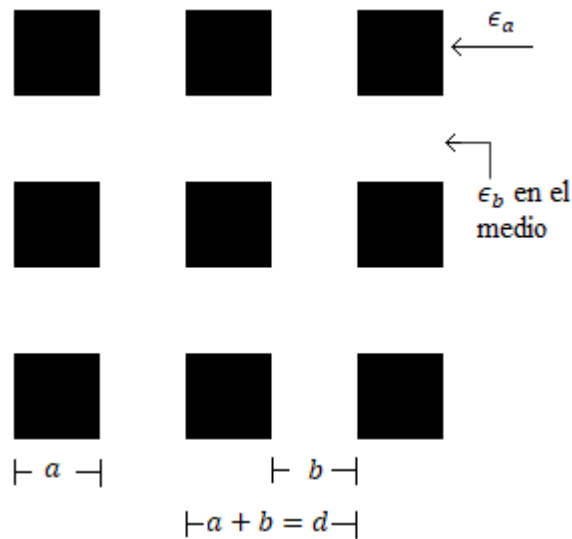


Figura 2.5: Red cuadrada de cilindros cuadrados dieléctricos de permitividad ϵ_a , inmersos en un medio de permitividad ϵ_b .

2 Teoría

Haciendo el desarrollo en serie de la función dieléctrica

$$\frac{1}{\epsilon(x, y)} = \sum_{\vec{G}} \mu_{\vec{G}} e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad (2.29)$$

donde $\vec{G} = G_x \hat{x} + G_y \hat{y}$ y $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$. Usando una función escalón,

$$\frac{1}{\epsilon(x, y)} = \frac{1}{\epsilon_b} + \left(\frac{1}{\epsilon_a} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) \Theta \left(\frac{a}{2} - |x|, \frac{a}{2} - |y| \right) \quad (2.30)$$

donde

$$\Theta = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{a}{2} \text{ y } |y| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{a}{2} \text{ o } |y| > \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Usando lo anterior para determinar $\mu_{\vec{G}}$,

$$\begin{aligned} \mu_{\vec{G}} &= \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{+d/2} \int_{-d/2}^{+d/2} \left[\frac{1}{\epsilon_b} + \left(\frac{1}{\epsilon_a} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) \Theta \right] e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{r}, \\ &= -\frac{1}{\epsilon_b G_x G_y d^2} \left[-2i \text{Sen} \left(\frac{G_x d}{2} \right) \right] \left[-2i \text{Sen} \left(\frac{G_y d}{2} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{4}{d^2} \left(\frac{1}{\epsilon_a} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) \frac{1}{G_x G_y} \text{Sen} \left(\frac{G_x a}{2} \right) \text{Sen} \left(\frac{G_y a}{2} \right), \end{aligned}$$

Como $\vec{G} = \frac{2\pi}{d} \vec{n}$, entonces

$$\mu_{\vec{G}} = \frac{1}{\epsilon_b} \frac{\text{Sen}(n_x \pi)}{n_x \pi} \frac{\text{Sen}(n_y \pi)}{n_y \pi} + f \left(\frac{1}{\epsilon_a} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) \frac{\text{Sen}(n_x \pi f)}{n_x \pi f} \frac{\text{Sen}(n_y \pi f)}{n_y \pi f} \quad (2.32)$$

donde $f = a^2/d^2$ es el factor de llenado. Así,

$$\mu_{\vec{G}} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_b} + f \left(\frac{1}{\epsilon_a} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) & \text{si } \vec{G} = 0 \\ f \left(\frac{1}{\epsilon_a} - \frac{1}{\epsilon_b} \right) \frac{\text{Sen}(n_x \pi f)}{n_x \pi f} \frac{\text{Sen}(n_y \pi f)}{n_y \pi f} & \text{si } \vec{G} \neq 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

son los coeficientes de Fourier del cristal de red cuadrada.

2.5.2. Normalización

Es posible normalizar o adimensionalizar el problema, introduciendo en la ecuación de eigenvalores el factor normalizador $d^2/4\pi^2$,

$$\left(\sum_{\vec{G}'} \mu_{\vec{G}-\vec{G}'} [(\vec{k} + \vec{G}')^2] E_{\vec{k}}(\vec{G}') \right) \frac{d^2}{4\pi^2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} E_{\vec{k}}(\vec{G}) \right) \frac{d^2}{4\pi^2},$$

$$\sum_{\vec{G}'} \mu_{\vec{G}-\vec{G}'} \left(\frac{\vec{k}d}{2\pi} + \frac{\vec{G}'d}{2\pi} \right)^2 E_{\vec{k}}(\vec{G}') = \left(\frac{\omega d}{2\pi c} \right)^2 E_{\vec{k}}(\vec{G}).$$

Ahora es posible trabajar con nuevas cantidades normalizadas o reducidas

$$\sum_{\hat{\vec{G}}'} \mu_{\hat{\vec{G}}-\hat{\vec{G}}'} (\hat{\vec{k}} + \hat{\vec{G}}')^2 E_{\hat{\vec{k}}}(\hat{\vec{G}}) = \hat{\omega}^2 E_{\hat{\vec{k}}}(\hat{\vec{G}}) \quad (2.34)$$

donde $\hat{\vec{G}} = \frac{\vec{G}d}{2\pi}$, $\hat{\vec{k}} = \frac{\vec{k}d}{2\pi}$, $\hat{\omega} = \frac{\omega d}{2\pi c}$. Esto es, que las nuevas cantidades así definidas carecen de dimensiones. En lo que resta de este trabajo, solo se utilizarán cantidades reducidas, salvo que se especifique lo contrario.

Cristales fotónicos bidimensionales

En el presente capítulo, se mostrará la reproducción de algunos resultados notables obtenidos a partir del método de expansión de ondas planas. La posibilidad de reproducir resultados conocidos, es el equivalente experimental de saber que el equipo con el que se está trabajando funciona correctamente. En ese sentido, se muestra que los programas numéricos construidos, arrojan resultados coherentes, y que serán la base para estudiar los conos de Dirac en el capítulo siguiente.

3.1. Simulación con el método de expansión de ondas planas

3.1.1. Red cuadrada

El primer sistema a analizar es un cristal fotónico bidimensional, que se caracteriza por tener una función dieléctrica periódica en dos direcciones y homogénea en la otra dirección. Este tipo de periodicidad se puede satisfacer cuando la geometría del cristal es descrita por cualquiera de las redes de Bravais bidimensionales. Particularmente, el sistema que se analizará a continuación, es un cristal fotónico bidimensional compuesto por una serie de cilindros circulares acomodados en un arreglo cuadrado; es decir, que los

3 Cristales fotónicos bidimensionales

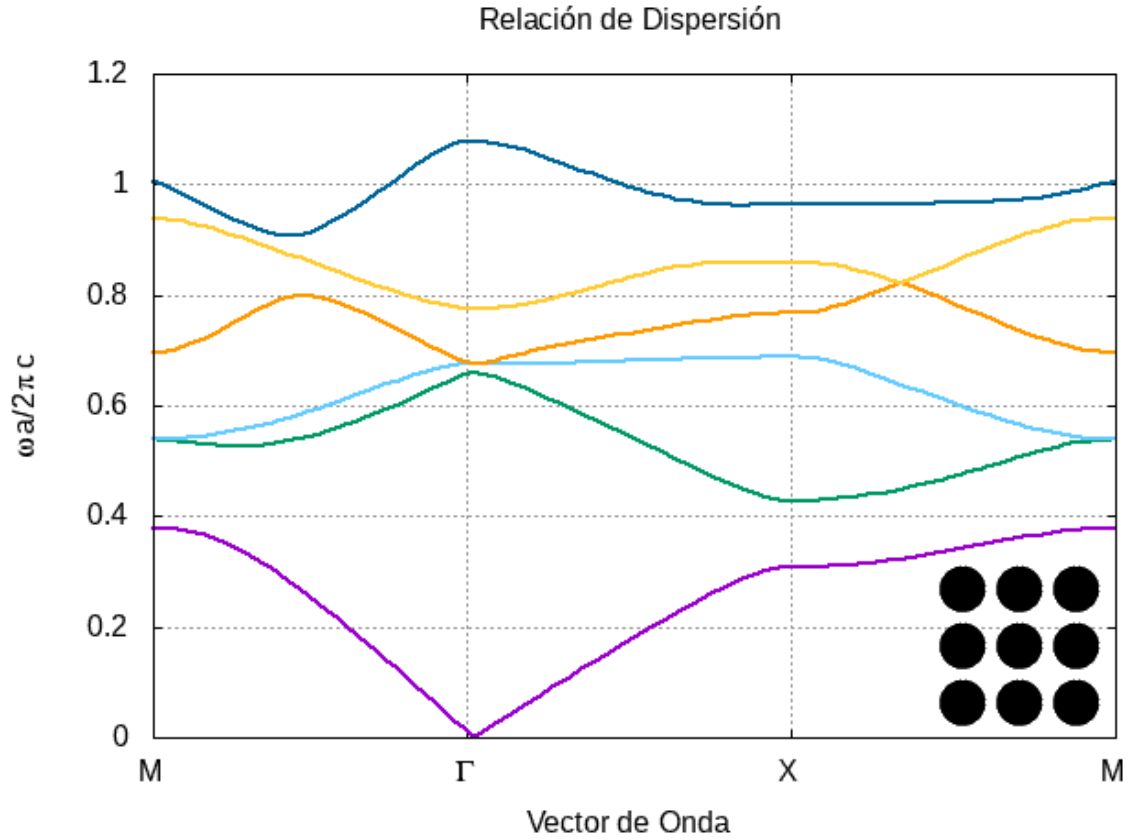


Figura 3.1: Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de $\epsilon_2 = 5$ en red cuadrada, inmersos en aire. El factor de llenado es $f = 0.785$. Polarización TE.

ejes axiales de cada cilindro cortan al plano de periodicidad en los puntos de una red cuadrada.

Considérese el trabajo publicado por M. Plihal et. al. (1991) [27], en donde se estudia un cristal fotónico de red cuadrada. Plihal et. al. encuentran la existencia de gaps prohibidos para ambas polarizaciones en la estructura de bandas y estudian su relación con el factor de llenado.

Para polarización TE, M. Plihal, et. al. consideraron un medio de constante dieléctrica $\epsilon_1 = 1$ (aire) y cilindros de constante $\epsilon_2 = 5$, con factor de llenado $f = 0.785$. Para este sistema reportan un diagrama de bandas fotónicas, en el cual señalan la presencia de un gap entre las bandas 1 y 2.

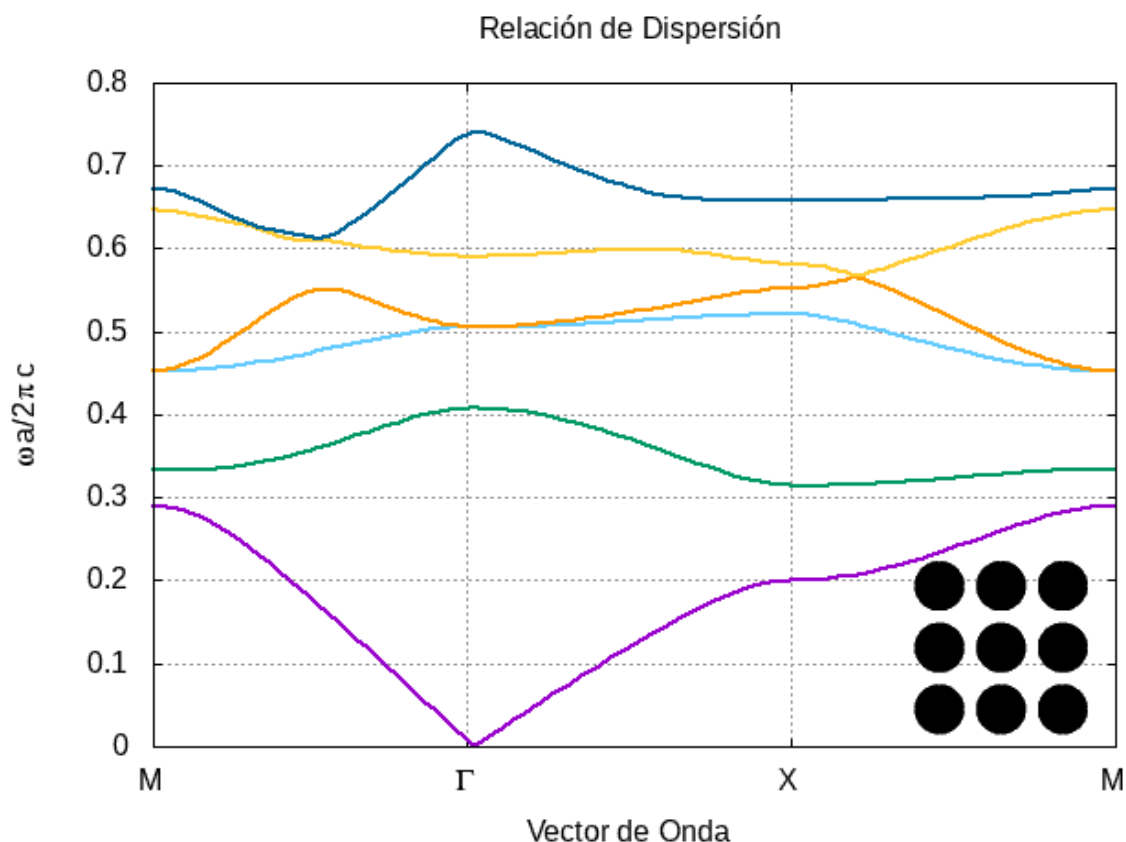


Figura 3.2: Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de $\epsilon_2 = 10$ en red cuadrada, inmersos en aire. El factor de llenado es $f = 0.526$. Polarización TM.

Reproduciendo numéricamente ese sistema con el método de ondas planas (usando 289 ondas planas), se obtuvo el diagrama de bandas fotónicas que se muestra en la figura 3.1. El resultado obtenido concuerda notablemente con el original, y el gap se ha localizado en el rango de frecuencias reducidas que va desde 0.39 hasta 0.43.

Para polarización TM, los autores cambian los parámetros; constante dieléctrica $\epsilon_1 = 1$, constante $\epsilon_2 = 10$ y factor de llenado $f = 0.526$. Los autores reportan la existencia de 2 gaps prohibidos; uno de ellos entre las primeras dos bandas, y el otro entre las bandas segunda y tercera. Reproduciendo este sistema con el método de ondas planas (usando 361 ondas planas) se

obtuvo el diagrama de bandas fotónicas de la figura **3.2**. De nuevo, se aprecia una correspondencia notable entre el resultado obtenido y el original. Se han medido ambos gaps, resultando estos en los rangos de $0.3-0.32$ y $0.418-0.463$, en frecuencia reducida.

3.1.2. Red hexagonal

El siguiente sistema a analizar consiste de un cristal fotónico bidimensional de red hexagonal. Al igual que con la red cuadrada, en este caso se estudiará un sistema compuesto por cilindros de sección transversal circular. Ahora, dichos cilindros cortan perpendicularmente al plano de periodicidad, con sus ejes coincidiendo con los puntos de una red hexagonal.

A continuación, se considerará el trabajo de A. A. Maradudin et. al. (1991) [28], donde se estudia un cristal fotónico descrito por una red hexagonal. Maradudin et. al. consideran la incidencia de ondas electromagnéticas con dirección de propagación en el plano de periodicidad, y tomando en cuenta ambas polarizaciones. En su análisis encuentran la existencia de gaps prohibidos para ambas polarizaciones, y estudian su relación con el contraste dieléctrico del sistema y su factor de llenado.

Para polarización TE, los autores consideraron un cristal de constantes dieléctricas $\epsilon_1 = 5$ y $\epsilon_2 = 1$ (aire), con factor de llenado $f = 0.169$. Para este sistema reportan un diagrama de bandas en el cual muestran la existencia de un gap de frecuencias prohibidas, situado entre las primeras dos bandas. Reproduciendo numéricamente ese sistema físico usando el método de ondas planas (271 ondas planas), se obtuvo el diagrama de bandas que se muestra en la figura **3.3**, que concuerda con el presentado por los autores. De los datos obtenidos, se ha podido localizar el gap en el rango de frecuencias reducidas $0.397 - 0.522$.

Para polarización TM, los autores consideraron los parámetros $\epsilon_1 = 14$, $\epsilon_2 = 1$ y $f = 0.431$. En el diagrama de bandas fotónicas reportado por Mara-

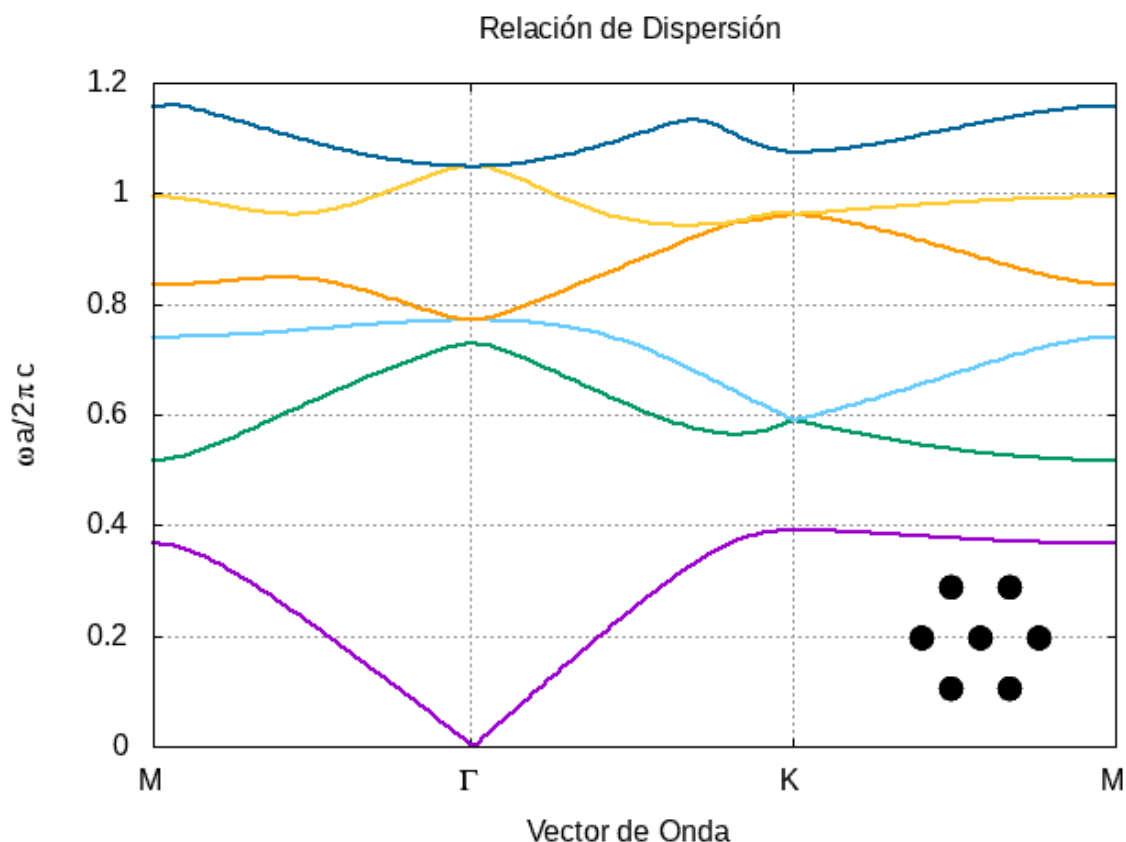


Figura 3.3: Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de $\epsilon_1 = 5$ en red hexagonal, inmersos en aire. El factor de llenado es $f = 0.169$. Polarización TE.

dudin et. al. aparece un gap de frecuencias prohibidas entre las primeras dos bandas. En el diagrama reproducido para este trabajo se utilizaron 271 ondas planas, y se encuentra en la figura 3.4. Ambos diagramas de bandas concuerdan, y presentan el mismo gap prohibido en el rango de frecuencias $0.296 - 0.343$.

Resumiendo: de la reproducción de resultados de los artículos de Plihal [27] y Maradudin [28], se puede constatar que los programas numéricos construidos y con los que se está trabajando, arrojan resultados confiables. Así, es posible proceder con ellos a analizar sistemas más complejos, o profundizar en el estudio del cono de Dirac.

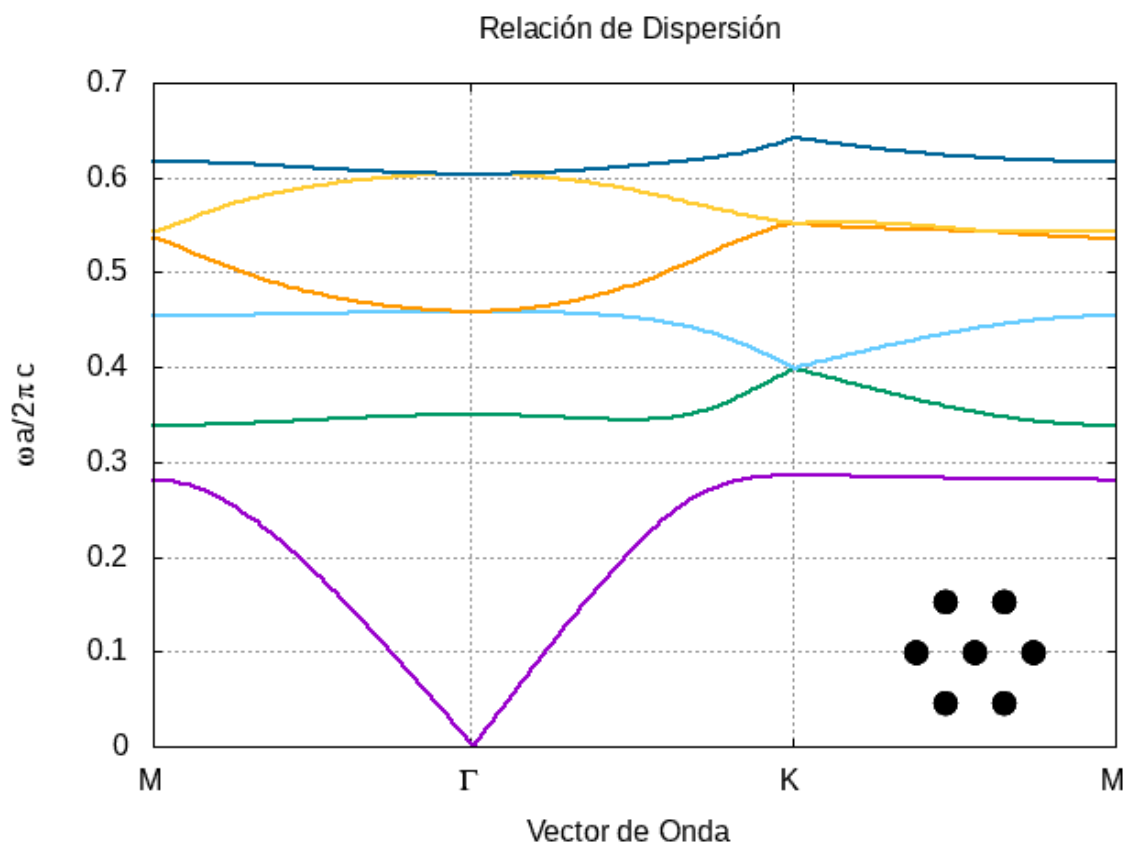


Figura 3.4: Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de $\epsilon_1 = 14$ en red hexagonal, inmersos en aire. El factor de llenado es $f = 0.431$. Polarización TM.

3.2. Conos de Dirac en estructuras periódicas 2D

A continuación se procederá a estudiar un cristal fotónico bidimensional que presente un cono de Dirac. En este caso se analizará un cristal formado por una serie de cilindros dieléctricos circulares paralelos, cuyos ejes axiales cortan a un plano en los puntos de una red hexagonal. Los cilindros tienen una constante dieléctrica $\epsilon_a = 11.4$, y están inmersos en aire ($\epsilon_b = 1$). El radio de los cilindros es $R = 0.3a$, donde a es la constante de la red (véase figura 2.3).

3 Cristales fotónicos bidimensionales

Al analizar este problema de forma numérica con el método de expansión de ondas planas, considerando ondas electromagnéticas con polarización TE, es posible obtener la relación de dispersión $\omega(\vec{k})$ que se observa en el diagrama de bandas fotónicas en la figura 3.5. En dicho diagrama es posible observar que, justo en el punto de máxima simetría $K = (-1/3, 1/3)$ (es decir, justo en la arista de la primera zona de Brillouin), existe un cono de Dirac que se da por el cierre de la segunda y la tercera banda. La frecuencia de Dirac correspondiente es $f_D = 0.4659$.

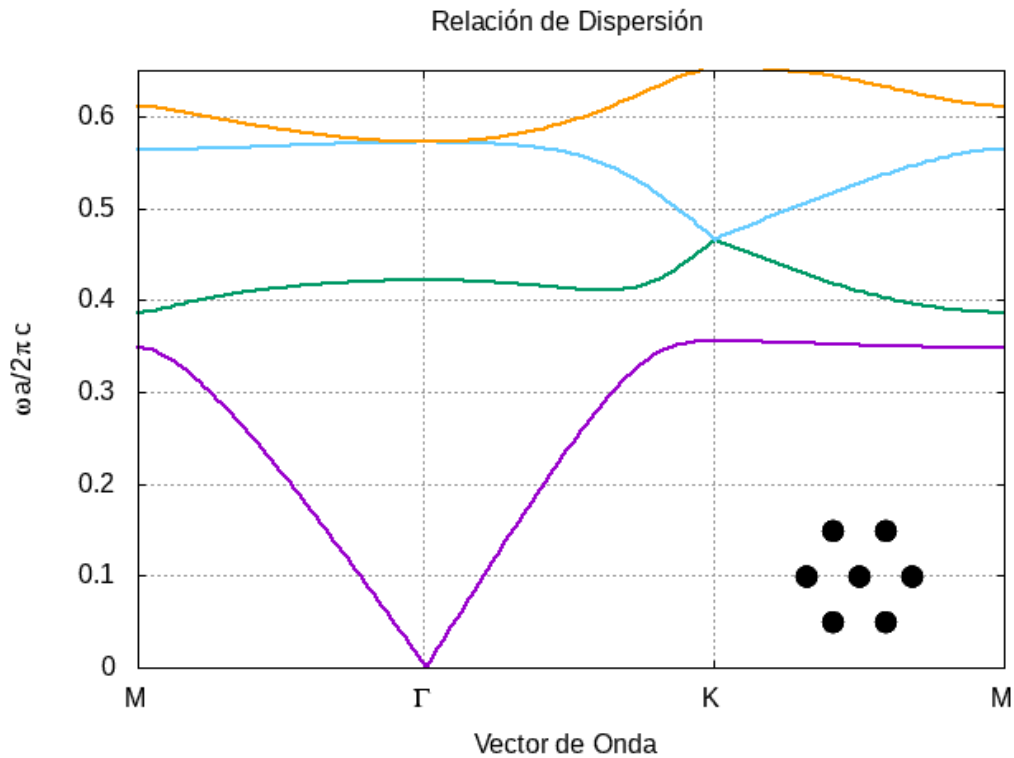


Figura 3.5: Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de constante dieléctrica $\epsilon_a = 11.4$ inmersos en aire ($\epsilon_b = 1$), formando una red hexagonal. El radio de los cilindros es $R = 0.3a$. Polarización TE.

Además del cono de Dirac, es posible observar en la figura 3.5 la existencia de un gap prohibido que se abre entre la primera banda y la segunda. De los resultados numéricos (donde se utilizaron 169 ondas planas) se ha

3 Cristales fotónicos bidimensionales

determinado que ese gap se da en el rango de frecuencias comprendido entre 0.3554 y 0.3866. Es decir, que es imposible la propagación de ondas electromagnéticas con polarización TE a través de este cristal, si las ondas oscilan a una frecuencia que esté en el rango del gap.

Estos resultados concuerdan con los obtenidos por X. Zhang en 2008 [21], quien estudió el cono de Dirac que aparece en este sistema, utilizando exactamente los mismos parámetros.

Además, analizando el mismo sistema, pero considerando la incidencia de ondas electromagnéticas con polarización TM, se ha llegado a la relación de dispersión que se observa en el diagrama de bandas de la figura **3.6**. Para esta polarización, la relación de dispersión es muy distinta a la obtenida para el caso TE. Lo primero que se puede notar es la ausencia total de una estructura tipo cono de Dirac. Es decir que la aparición de estos conos depende de la polarización de las ondas incidentes. Además, el gap prohibido entre las primeras dos bandas es más amplio, yendo desde 0.2297 hasta 0.319. El ancho de esta región prohibida es de 0.0893, en contraste con el ancho de gap de 0.0312 del caso con polarización TE. El ancho del gap en polarización TM es 2.86 veces más grande que el del caso TE. Y por último, hay que notar la aparición de un segundo gap, esta vez entre las bandas tercera y cuarta. Dicho gap va desde 0.4218 hasta 0.5414.

En conclusión, aplicando la metodología que se ha presentado en este capítulo, es posible obtener relaciones de dispersión $\omega(\vec{k})$, donde no solo es posible estudiar los gaps que emergen de forma natural en las estructuras dieléctricas periódicas, sino que también es posible estudiar la esencia de este trabajo, que es el cono de Dirac. Esto será puesto en práctica en el capítulo siguiente, en donde se presentará un estudio sobre la relación que existe entre los parámetros que definen a un cristal fotónico, y la aparición del cono de Dirac.

3 Cristales fotónicos bidimensionales

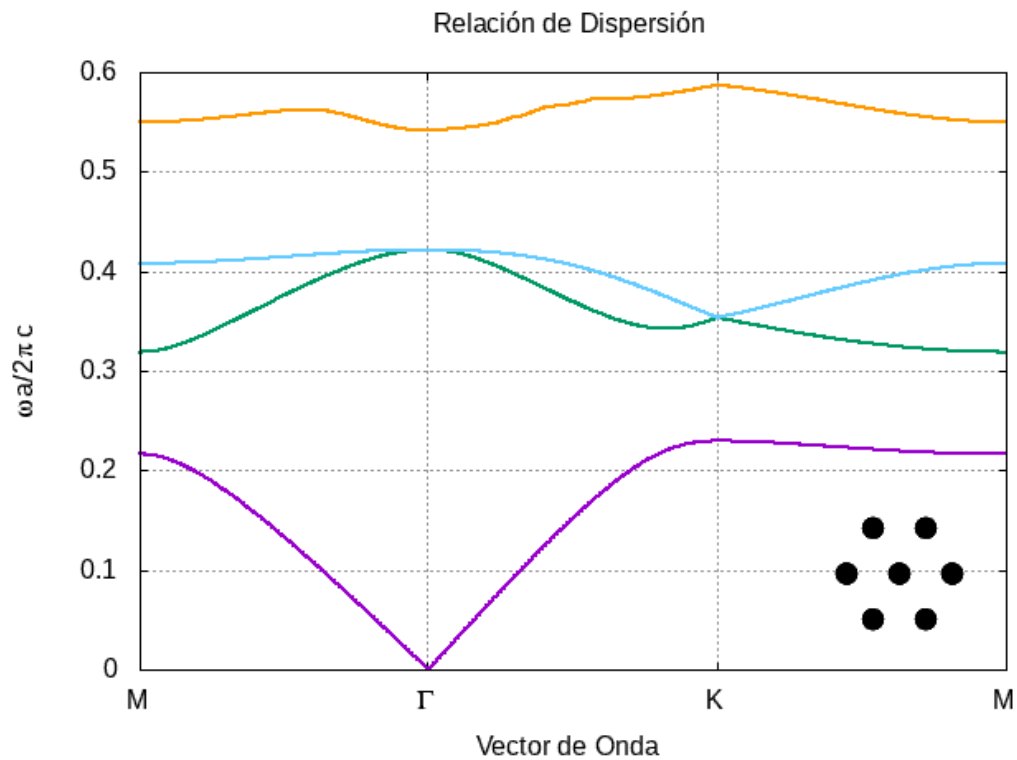


Figura 3.6: Diagrama de bandas fotónicas de un cristal formado por cilindros circulares de constante dieléctrica $\epsilon_a = 11.4$ inmersos en aire ($\epsilon_b = 1$), formando una red hexagonal. El radio de los cilindros es $R = 0.3a$. Polarización TM.

Sintonización del cono de Dirac

En el presente capítulo, se estudiará la sintonización del cono de Dirac en cristales fotónicos bidimensionales. La modulación de parámetros físicos tales como el contraste dieléctrico o el factor de llenado, es muy importante a la hora de diseñar un cristal fotónico en el que se quiera tener un cono de Dirac; y más aún, en donde se pueda controlar la frecuencia de Dirac de dicho cono. Además, se estudiará el efecto que tiene el rompimiento de la simetría de espejo en los conos de Dirac en este tipo de estructuras.

4.1. Sintonización por modulación de parámetros constitutivos

A continuación se analizará un cristal fotónico bidimensional que presente un cono de Dirac, y se procederá a modular tanto el contraste dieléctrico del sistema, como su factor de llenado. De tal proceso de modulación, se espera obtener conclusiones sobre cómo se relacionan dichas propiedades con el cono de Dirac, y obtener conclusiones que sirvan para el diseño de este tipo de estructuras.

El cristal fotónico a analizar será una estructura dieléctrica 2D, conformada de cilindros circulares dispuestos en una red hexagonal. Ya se ha demostrado que este tipo de estructuras, con polarización TE, puede pre-

sentar un cono de Dirac, cuando la constante dieléctrica del medio es $\epsilon_b = 1$ y la constante dieléctrica de los cilindros es $\epsilon_a = 11.4$, con el radio de las barras $R = 0.3a$, donde a es la constante de la red [21] (véase la sección 3.2).

4.1.1. Variación de ϵ_a

En esta ocasión, se mantendrán exactamente las mismas características del cristal, pero haciendo variar el contraste dieléctrico, para ver qué efecto tiene en la relación de dispersión $\omega(\vec{k})$. Haciendo una exploración para la constante dieléctrica ϵ_a variando su valor desde 1 hasta 20, es posible observar un comportamiento como el que se muestra en la figura 4.1.

Lo primero a señalar es el hecho de que las bandas se van desplazando a valores cada vez más bajos en la frecuencia. No para todos los valores de la constante dieléctrica existen conos de Dirac, o gaps. Estos se van generando como una consecuencia del incremento de la constante dieléctrica de los cilindros. Por ejemplo, para una constante dieléctrica de $\epsilon_a = 5$ (fig. 4.1(b)), no es posible apreciar gap alguno, ni la presencia de un cono de Dirac. Para este valor de la constante dieléctrica, las primeras cuatro bandas quedan por debajo de una frecuencia de 0.9. En 4.1(c) y 4.1(d) se tienen valores de $\epsilon = 9$ y $\epsilon = 11.4$, respectivamente. Estos dos casos muestran un diagrama de bandas fotónicas muy similares entre sí, compartiendo la existencia tanto del cono de Dirac entre las bandas segunda y tercera, como de un gap entre las primeras dos bandas. La única diferencia es que para $\epsilon_a = 11.4$ el gap es más grande y el cono de Dirac se encuentra a una frecuencia menor. Sin embargo, es importante hacer notar que para $\epsilon_a = 9$ es que el cono de Dirac aparece por primera vez. Esto último debido a que, aunque las bandas se cruzan para valores menores del contraste, el cruce no se da en un gap. Para valores mayores del contraste dieléctrico (figs. 4.1(e) y 4.1(f)), se sigue observando un gap entre las primeras dos bandas, y cono de Dirac, en una frecuencia cada vez menor.

4 Sintonización del cono de Dirac

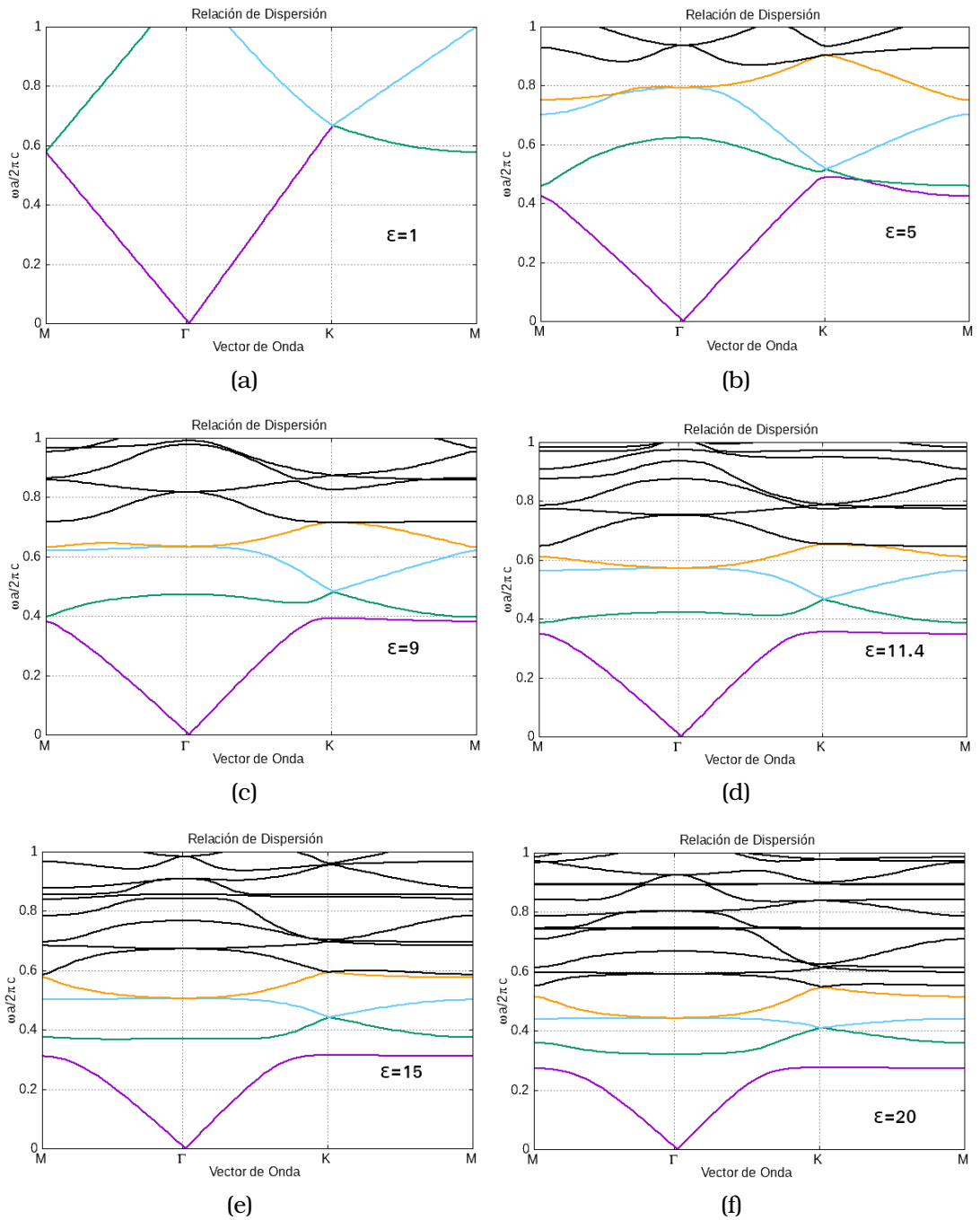


Figura 4.1: Cristal fotónico de cilindros circulares en red hexagonal, con radio $R = 0.3a$, y contraste dieléctrico (a) $\epsilon = 1$, (b) $\epsilon = 5$, (c) $\epsilon = 9$, (d) $\epsilon = 11.4$, (e) $\epsilon = 15$, (f) $\epsilon = 20$.

Como se puede observar, al aumentar el contraste dieléctrico se ha podido controlar la frecuencia a la que se da el cono de Dirac, o incluso hacerlo desaparecer para valores bajos del contraste. En general, a mayor valor de ϵ_a , el cono de Dirac se va desplazando hacia frecuencias menores.

4.1.2. Variación del factor de llenado

A continuación se hace un análisis similar al anterior, pero ahora haciendo variar el factor de llenado del cristal. El sistema a estudiar será el mismo: cristal bidimensional en red heagonal, con cilindros dieléctricos de constante dieléctrica fija $\epsilon_a = 11.4$, y $\epsilon_b = 1$ para el medio. El radio de los cilindros se hará variar desde $R = 0.1a$ hasta $R = 0.4a$, donde a es la constante de la red. Haciendo esta modulación en el radio, se observa el comportamiento mostrado en la figura **4.2**.

Se observa que al incrementar el radio de los cilindros, las bandas se van desplazando hacia valores menores en la frecuencia. Para radios mayores a $0.4a$, las primeras cuatro bandas quedan acotadas bajo frecuencias menores a 0.7 . Para el menor de estos radios, $R = 0.1a$ (fig. 4.2(a)), no se tiene ni gap prohibido ni cono de Dirac. De hecho el gap entre las primeras dos bandas, aparece hasta radios mayores a $0.2a$, al igual que el cono de Dirac entre la segunda y la tercera banda, que no aparece para radios menores a $0.2a$.

De lo anterior es posible concluir que los parámetros de contraste dieléctrico o radio de la base del cristal, al ser modulados, pueden fungir como elemento de control del cono de Dirac. En la figura **4.3** se presenta un mapa de contraste dieléctrico ϵ contra el radio R del cilindro. La región sombreada en ese mapa corresponde a todas las combinaciones de parámetros constitutivos que dan lugar a la existencia del cono de Dirac entre la segunda y la tercera banda.

4 Sintonización del cono de Dirac

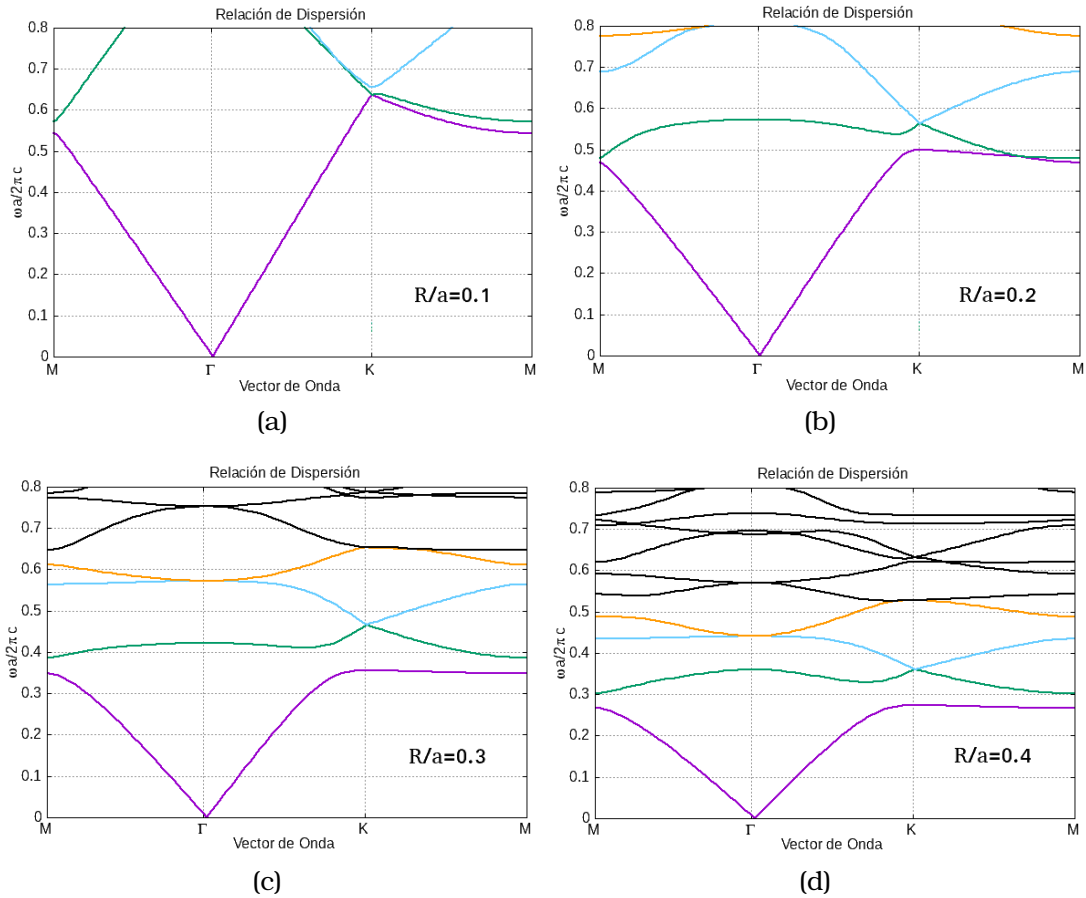


Figura 4.2: Cristal fotónico de cilindros circulares en red hexagonal, con contraste dieléctrico $\epsilon = 11.4$, y radio (a) $R = 0.1a$, (b) $R = 0.2a$, (c) $R = 0.3a$, (d) $R = 0.4a$, donde a es la constante de la red.

4.1.3. Mapa del cono de Dirac de la red cuadrada

La misma exploración se puede plantear para un cristal fotónico de cilindros cuadrados en red cuadrada. En la figura 4.4 se presenta un mapa de la constante dieléctrica ϵ_a contra el lado L del prisma cuadrangular. La región sombreada nuevamente está conformada por todos los puntos que permiten un cono de Dirac que se da entre las bandas cuarta y quinta de este sistema (vease fig. 4.7(a)). Estos mapas (figs. 4.3 y 4.4) representan un valioso compendio de información, al permitir conocer los parámetros constitutivos que dan lugar a un cono de Dirac en un cristal fotónico dado, facilitando la labor de diseño en la búsqueda de posibles aplicaciones.

4 Sintonización del cono de Dirac

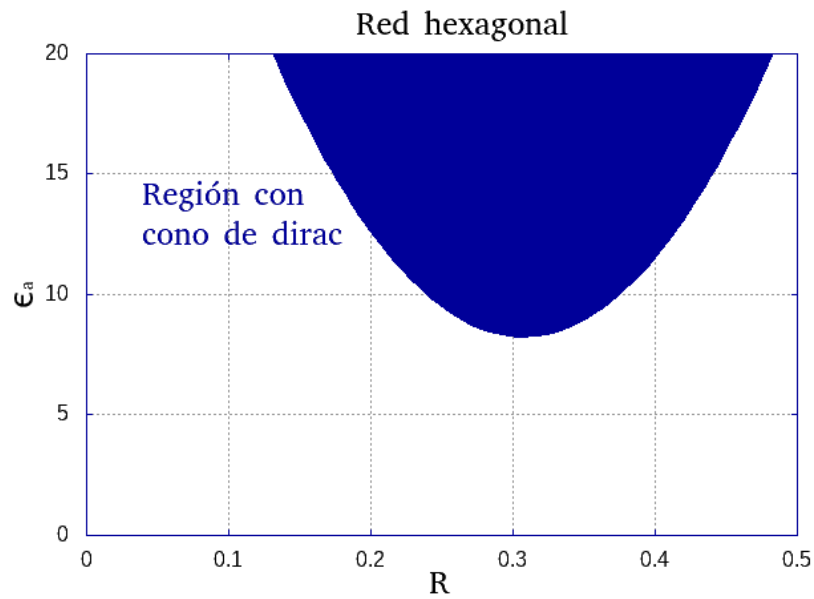


Figura 4.3: Mapa de parámetros constitutivos de un cristal fotónico de cilindros circulares en red hexagonal. La región sombreada corresponde a todos los puntos en los que existe el cono de Dirac.

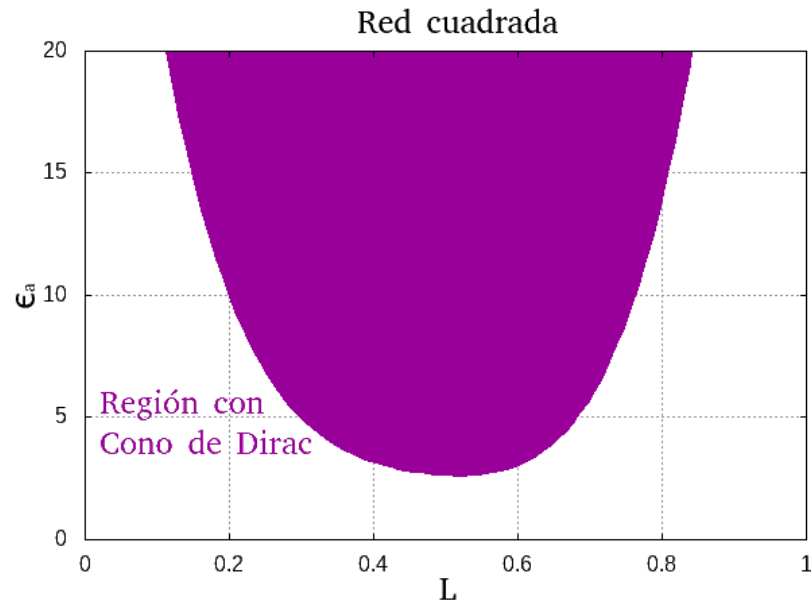


Figura 4.4: Mapa de parámetros constitutivos de un cristal fotónico de cilindros cuadrados en red cuadrada. La región sombreada corresponde a todos los puntos en los que existe el cono de Dirac.

4.2. Sintonización por variación de la geometría

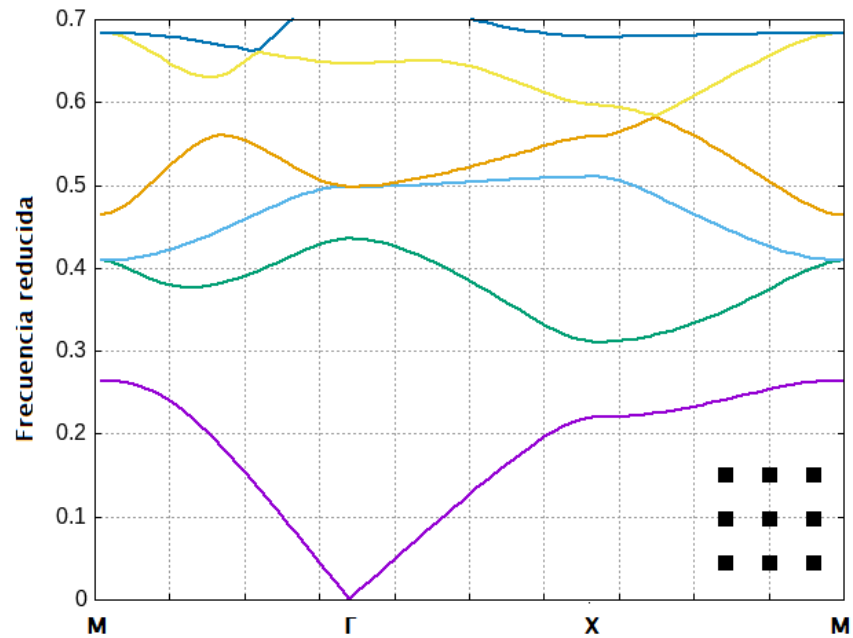
A continuación se presenta un cristal fotónico en red cuadrada que presenta un cono de Dirac entre la cuarta y la quinta banda. En este caso se lleva a cabo una sintonización del cono de Dirac por medio de una variación de la geometría de la base, al pasar de cilindros dieléctricos cuadrados a rectangulares. Este sistema fue estudiado por Changqing Xu et. al. en [29].

Xu et. al. analizan únicamente dos configuraciones diferentes de la base. En una de las configuraciones los cilindros que componen la base son cuadrados, con dimensiones $L_a/a = L_b/a = 0.36$, y en la otra configuración los cilindros son rectángulos con dimensiones $L_a/a = 0.27$ y $L_b/a = 0.53$. En ambos casos los cilindros de la base tienen constante dieléctrica $\epsilon_a = 12.5$, y se encuentran inmersos en un medio de constante $\epsilon_b = 2.25$. El sistema se ha estudiado con polarización TM.

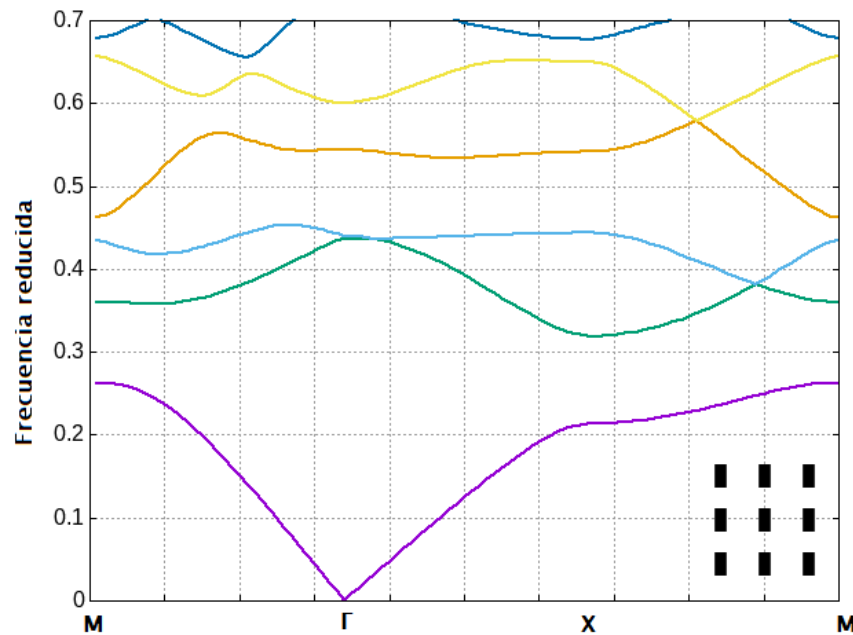
Se han comprobado y reproducido esos resultados haciendo uso del método de ondas planas. El cono de Dirac se ubica en la dirección cristalográfica $X - M$ para las dos configuraciones propuestas (base cuadrada y base rectangular). Para la base cuadrada (fig. 4.7(a)), el cono se localiza específicamente en $\vec{k}_D = (0.5, 0.117284)$, con una frecuencia de Dirac $f_D = 0.5823$. Para la base rectangular (fig. 4.7(b)), el cono se localiza en $\vec{k}_D = (0.5, 0.209877)$, con una frecuencia de Dirac $f_D = 0.5791$. Los resultados se muestran en los diagramas de bandas fotónicas de las gráficas de la figura 4.5.

Se ha añadido la gráfica de bandas proyectadas del caso cuadrado (fig. 4.6) para barrer el vector de onda sobre el primer cuadrante de la primera zona de Brillouin, ya que dadas las simetrías del sistema, con eso se tiene toda la información de los modos del cristal. Tanto en la figura 4.5 como en la 4.6 se puede observar la existencia de un cono de Dirac, que surge entre la cuarta y la quinta banda, en la dirección cristalográfica $X - M$. Para la base cuadrada (fig. 4.7(a)) existe un cruce adicional, entre las bandas quinta y sexta ($\vec{k} = (0.185185, 0.185185)$, $f_D = 0.6614395$), en la dirección cristalográfica

4 Sintonización del cono de Dirac



(a)



(b)

Figura 4.5: Diagramas de bandas fotónicas de un cristal de red cuadrada. La permitividad de los bastones que componen la base es $\epsilon_a = 12.5$, y se encuentran inmersos en un medio de permitividad $\epsilon_b = 2.25$. (a) La base de cilindros cuadrados con dimensiones $L_a/a = L_b/a = 0.36$, donde a es la constante de la red. (b) La base de cilindros rectangulares con dimensiones $L_a/a = 0.27$ y $L_b/a = 0.53$.

4 Sintonización del cono de Dirac

$M - \Gamma$; sin embargo, este cruce no representa un cono de Dirac, ya que no se da dentro de un gap. Por otra parte, en las figuras del caso cuadrado se puede apreciar que el cono de Dirac que surge entre las bandas cuarta y quinta, sí que se da en un gap.

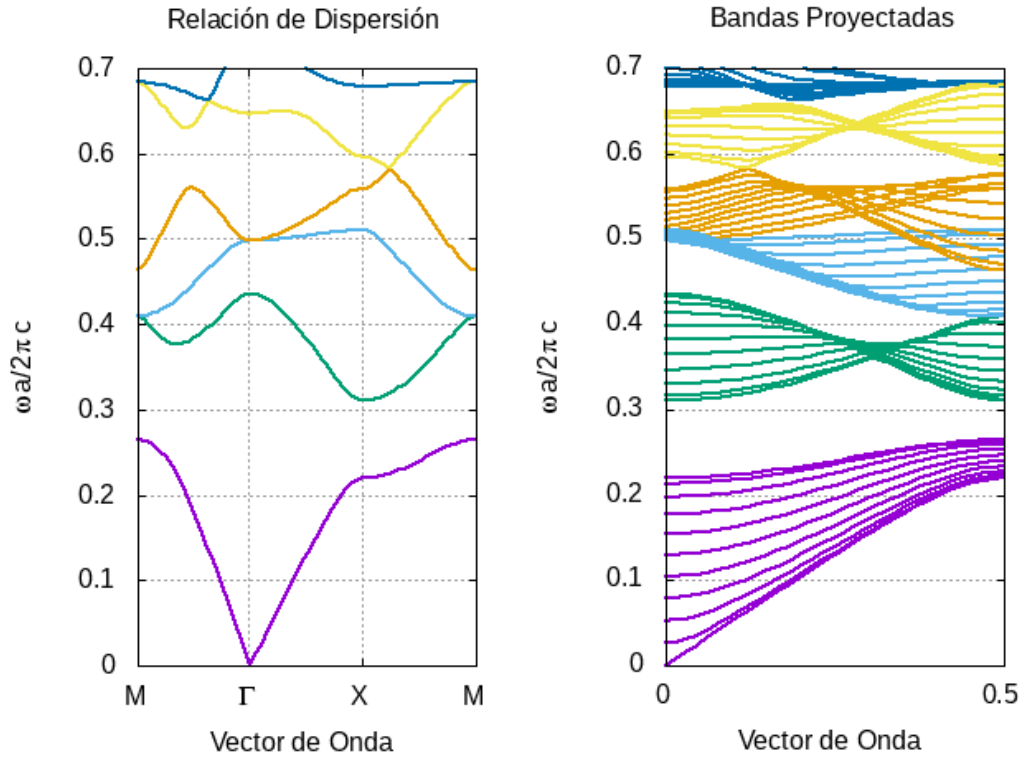


Figura 4.6: Relación de dispersión y diagrama de bandas proyectadas del caso cuadrado.

De forma adicional, Xu et. al. muestran en su trabajo [29] los eigencampos correspondientes a las dos bandas que se cruzan para formar el cono de Dirac, para el caso de la base cuadrada. Reportan que dichos eigencampos son de paridad opuesta. Para este trabajo se han reproducido los perfiles de campo de las bandas que forman este cono de Dirac, y se pueden observar en la figura 4.7. Toda vez que el cruce del cono se da en la dirección cristalográfica $X - M$, es importante notar que la paridad de los eigencampos se debe evidenciar según la simetría del perfil de campo con respecto al eje Y .

En ese sentido, los modos que se muestran en la figura 4.7 y que forman el cono son simétrico y antisimétrico respectivamente, o par e impar. La idea de la paridad de los perfiles de campo es expuesta y estudiada en [30, 31].

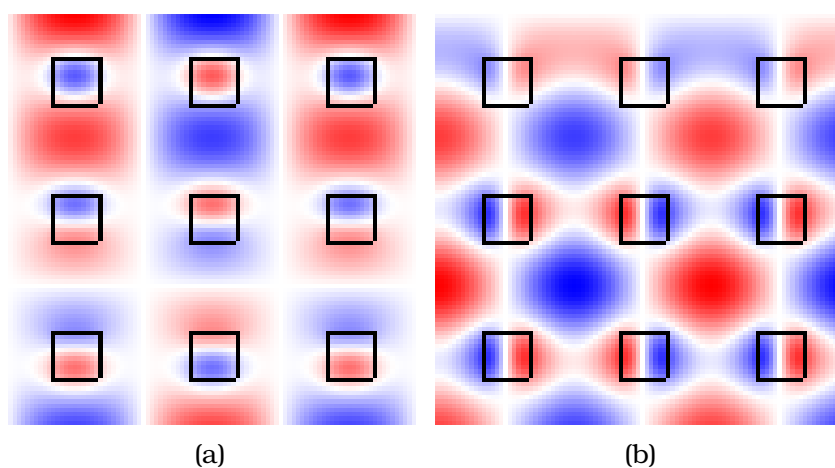


Figura 4.7: Eigencampos de las bandas que se cruzan en el cono de Dirac. (a) Campo par. (b) Campo impar.

4.3. Rompimiento de la simetría de espejo

En esta sección se estudiará la apertura del cono de Dirac como consecuencia del rompimiento de la simetría de espejo del cristal fotónico. Esta idea fue planteada por Wen-Yu He y C. T. Chan en [32]. El rompimiento del cono de Dirac implica la disociación de las bandas que lo conforman; es decir, que las bandas dejen de tocarse, y se forme por consiguiente un gap entre ellas. En [32], los autores estudian la aparición de conos de Dirac en cristales fotónicos que posean simetría de espejo. Particularmente estudian un cristal fotónico bidimensional conformado por cilindros circulares en un arreglo de red cuadrada. Para romper la simetría de espejo, llevan a cabo una transformación de la base, que implica trisectar los cilindros circulares, desplazar las partes y rellenar el espacio creado entre ellas (fig.4.8).

4 Sintonización del cono de Dirac

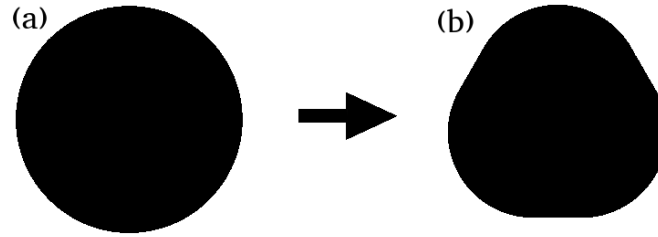


Figura 4.8: Base circular (a), pasa a ser trisectada y se rellena el espacio entre las secciones con el mismo material dieléctrico, resultando la base (b).

Para la base circular, en [32] se utilizó un contraste dieléctrico de $\epsilon = 7.2$, y un radio de la base $R = 0.2a$, donde a es la constante de la red. Para dicha configuración, que tiene simetría en cualquier dirección, se obtiene un cono de Dirac en la dirección $X - M$. Este cono de Dirac se da entre las bandas cuarta y quinta, aparece en la frecuencia $f_D = 0.819$, y puede observarse en la figura 4.9, que fue reproducida a partir del método de ondas planas.

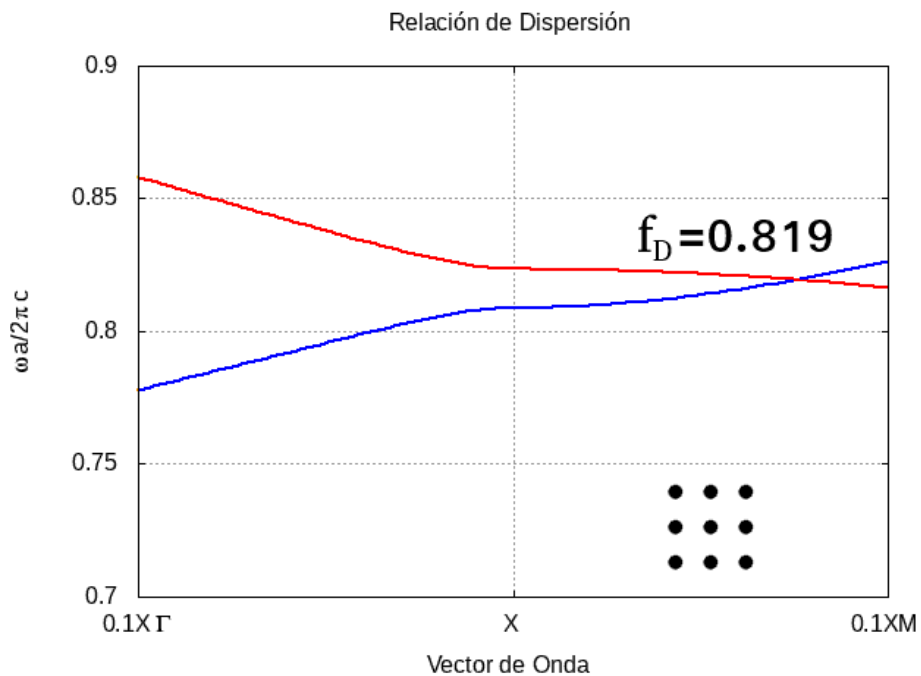


Figura 4.9: Cono de Dirac de la base circular. El cruce se da a una frecuencia de Dirac de $f_D = 0.819$.

4 Sintonización del cono de Dirac

En su trabajo [32], W.Y. He y C.T. Chan reportan que para una configuración de rotación de la base trisectada mostrada en **4.8(b)**, tal que el cristal fotónico no tenga simetría de espejo ni en la dirección X ni en la dirección Y , se da un rompimiento del cono de Dirac, o una disociación de las bandas que lo conforman. Es decir, que al romper la simetría de espejo se ha conseguido abrir un gap donde había un cono de Dirac.

Llevar a cabo el proceso de transformación de la base propuesto en la figura **4.8** para romper la simetría de espejo puede llegar a ser complicado en la práctica. Como una alternativa mas asequible, a continuación se propone un rompimiento de la simetría de espejo por medio de una rotación de los cilindros cuadrados del sistema presentado en [29]. Para este sistema se considerarán los mismos parámetros que los de la base cuadrada que da lugar a las figuras 4.7(a) y **4.6** ($\epsilon_a = 12.5$, $\epsilon_b = 2.25$, $L = 0.36a$).

Es posible estudiar la rotación de la base (fig **4.10**) desde 0° hasta 360° . Sin embargo, dada la alta simetría del problema, es suficiente con que se estudie la rotación solo en el rango de 0° a 90° , y con eso se consiguen todas las configuraciones posibles de la primera zona de Brillouin. La respuesta más allá de los 90° se vuelve redundante. Además, particularmente para el ángulo de 45° , no existe ningún tipo de rompimiento de la simetría de espejo. Por tal motivo, cabría esperar que para tal ángulo exista un cono de Dirac. Y así sucede, tal como se aprecia de la figura **4.11**.

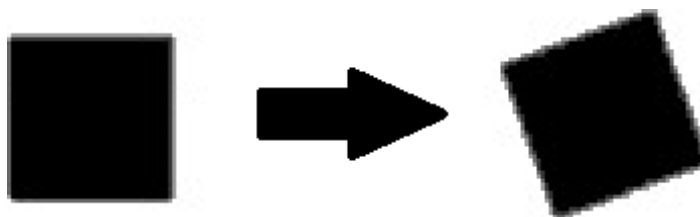


Figura 4.10: Rotación de la base de cilindros cuadrados.

4 Sintonización del cono de Dirac

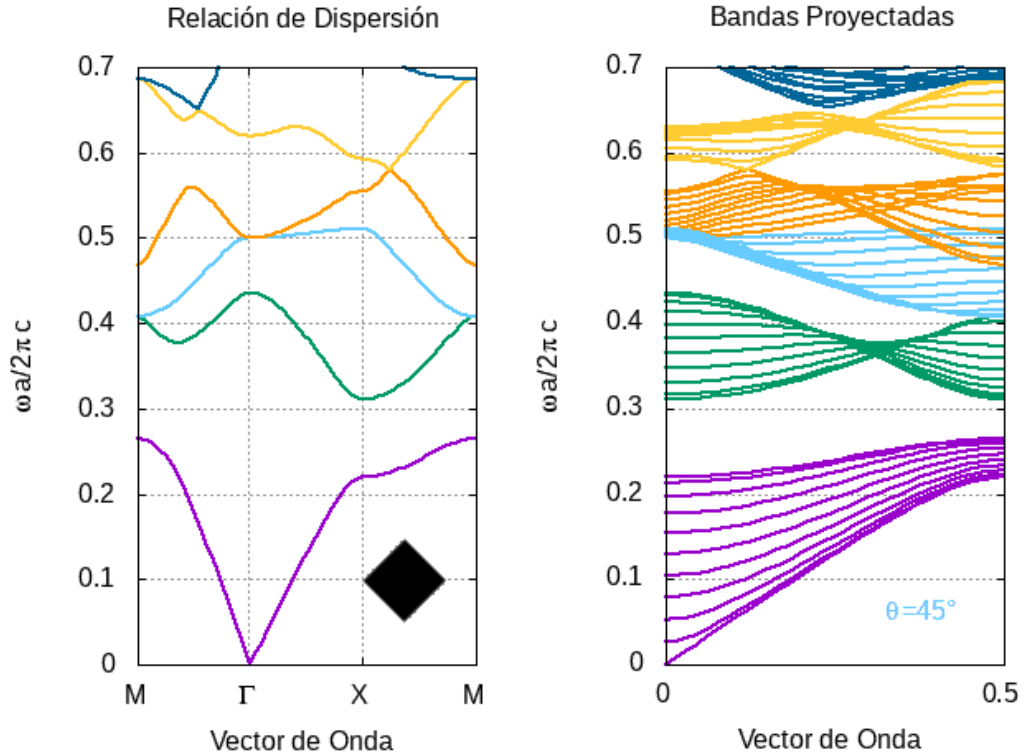


Figura 4.11: Diagrama de bandas fotónicas y de bandas proyectadas para la base cuadrada rotada 45° .

Sin embargo, analizando el sistema con la base rotada a un ángulo de 20° , se tiene un sistema en el cual efectivamente se ha roto la simetría de espejo. Para tal caso en particular, se obtiene el diagrama de bandas proyectadas que aparecen en la figura 4.13. Para poder apreciar mejor lo que ha pasado con el cono de Dirac, se hace un acercamiento en los diagramas anteriores, justo donde se daba el cruce de bandas. Este acercamiento se puede observar en la figura 4.14. Al igual que como ocurriera con el caso de la trisección propuesta en [32], en este caso se obtiene también que al haber rotado la base de forma tal que se rompa la simetría de espejo, se tiene como consecuencia la apertura del cono de Dirac. Las bandas que formaban al cono antes de la rotación, se han separado, formando un pequeño gap prohibido.

4 Sintonización del cono de Dirac

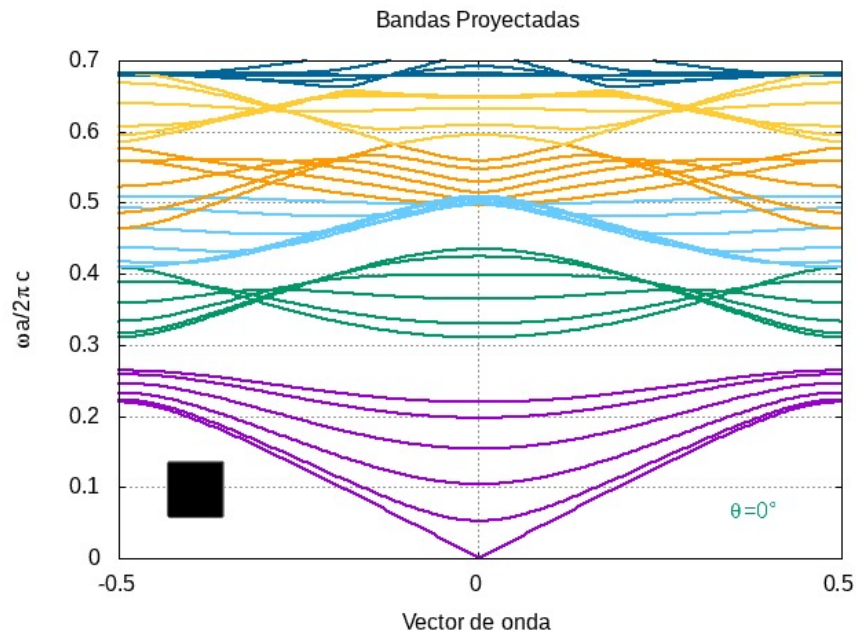


Figura 4.12: Bandas proyectadas para la red cuadrada a un ángulo $\theta = 0^\circ$. Los prismas cuadrados de lado $L = 0.36a$ tienen permitividad $\epsilon_b = 12.5$, y están inmersos en un medio de $\epsilon_a = 2.25$.

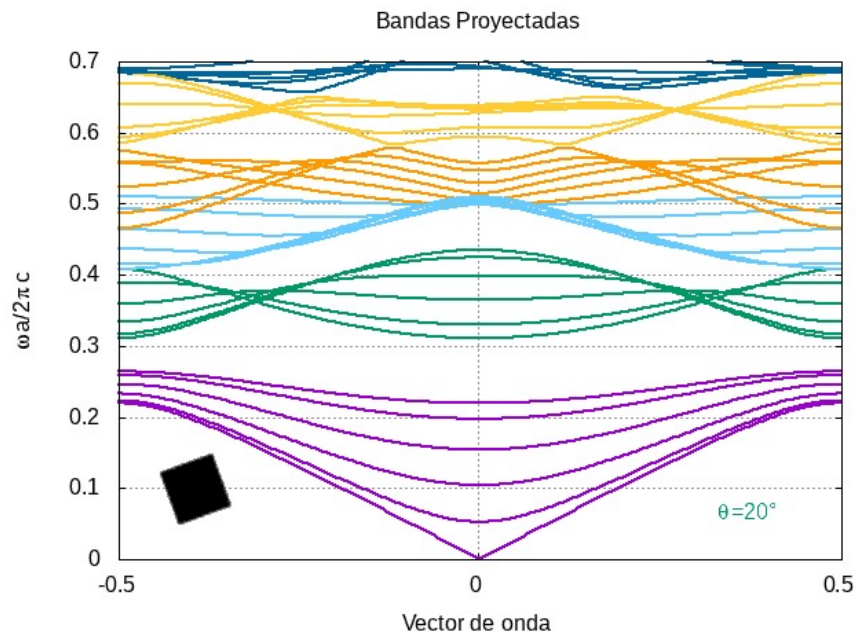
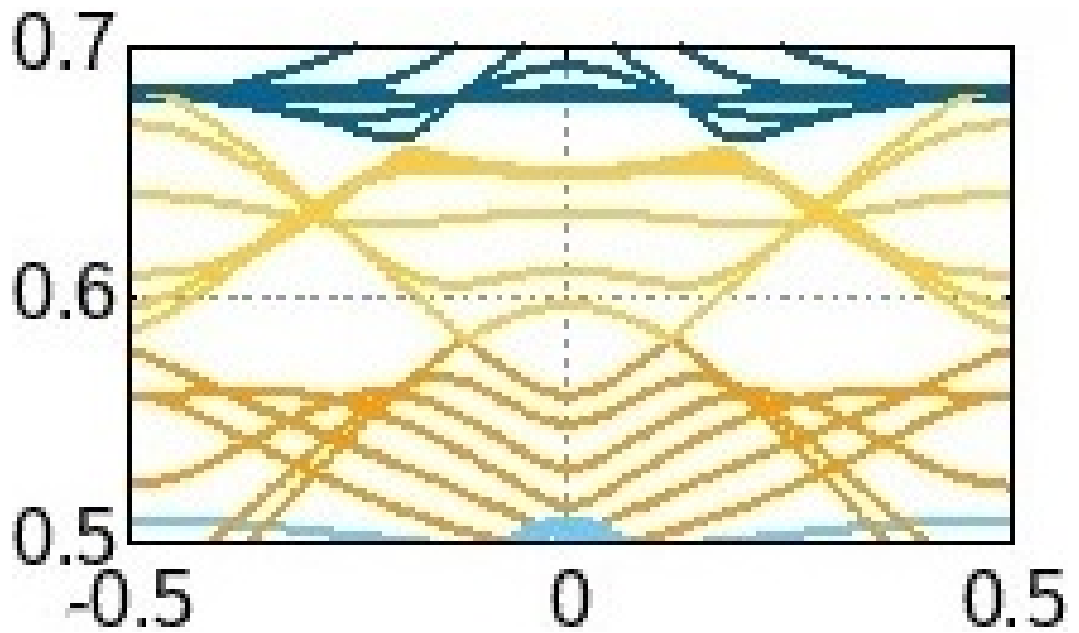
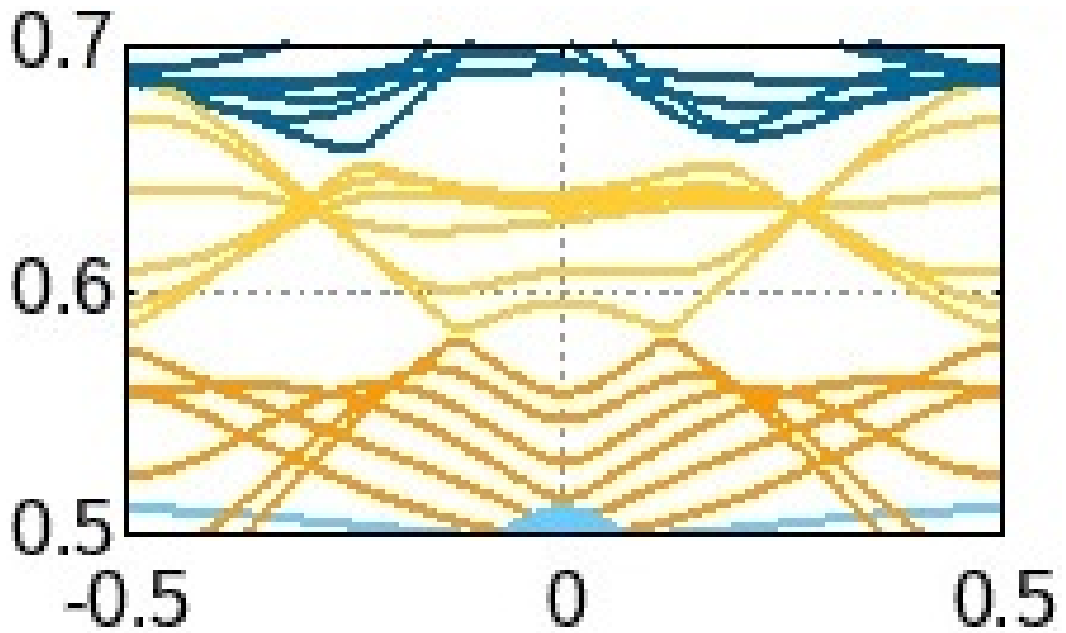


Figura 4.13: Bandas proyectadas para la red cuadrada a un ángulo $\theta = 20^\circ$. Los prismas cuadrados de lado $L = 0.36a$ tienen permitividad $\epsilon_b = 12.5$, y están inmersos en un medio de $\epsilon_a = 2.25$.



(a)



(b)

Figura 4.14: Acercamiento a la región del cono de Dirac de las figuras 4.12 y 4.13. (a) Para la base sin rotar ($\theta = 0^\circ$) se aprecia el cono de Dirac. (b) Para la base rotada a un ángulo $\theta = 20^\circ$, se ha roto la simetría de espejo, y se aprecia la apertura del cono de Dirac.

4 Sintonización del cono de Dirac

De los resultados anteriores se comprueba el hecho de que es posible abrir o cerrar el cono de Dirac por medio de una rotación de la base del cristal fotónico, de tal forma que la rotación implique el rompimiento de la simetría de espejo. Además la rotación de la base es en términos prácticos más viable que manipulaciones como la que se propone en [32]. De tal forma, es posible decir que la manipulación de la simetría de espejo es otro más de los posibles elementos de control que permiten modular el cono de Dirac en cristales fotónicos bidimensionales para posibles aplicaciones. Este elemento de control es equivalente a un interruptor del cono de Dirac.

Haciendo uso del método de expansión en ondas planas, ha sido posible calcular las relaciones de dispersión $\omega(\vec{k})$ de cristales fotónicos bidimensionales. Particularmente, de cristales de cilindros dieléctricos formando redes cuadradas y hexagonales.

Se ha demostrado, que para ciertas condiciones en los parámetros físicos, se tiene la presencia de conos de Dirac en su estructura de bandas fotónicas. Esto es, que se da un cruce de dos bandas que se tocan solo en un punto en la presencia de un gap.

Analizando este tipo de sistemas, y considerando variaciones de sus parámetros constitutivos, se han encontrado relaciones importantes entre el cono de Dirac y las características físicas del cristal 2D. Por ejemplo, se ha podido demostrar que el cono de Dirac es sensible a los parámetros de factor de llenado y contraste dieléctrico de la estructura. Esto debido a que la existencia del cono está acotada para ciertos rangos de valores de estos parámetros. En particular, se ha demostrado que a medida que se incrementa el contraste dieléctrico del cristal, la frecuencia de Dirac en la que se ubica el cono se va haciendo cada vez menor. Se ha mostrado también que un fenómeno análogo ocurre cuando se hace variar el factor de llenado. A medida que éste aumenta, el cono de Dirac se va dando a frecuencias cada vez más bajas. Además se ha explorado la existencia del cono de Dirac para las redes

5 Conclusiones

hexagonal y cuadrada, en un amplio rango de valores de sus parámetros constitutivos. Como resultado de esto último, se han construido mapas que denotan la presencia del cono de Dirac en diagramas de contraste dieléctrico contra factor de llenado.

Por último, se ha demostrado que existe una relación entre la simetría de espejo de un cristal 2D, y la presencia de un cono de Dirac en la relación de dispersión del mismo. Si el cristal con simetría de espejo presenta un cono en su estructura de bandas, es posible hacer que este desaparezca por medio de un rompimiento de la simetría. Particularmente, se ha demostrado que en un cristal fotónico formado por cilindros cuadrados en un arreglo de red cuadrada, es posible abrir el cono de Dirac rompiendo la simetría de espejo por medio de una rotación de la base.

Estos resultados brindan un conocimiento importante sobre dos elementos de control que se tienen sobre el cono de Dirac. Primero, la capacidad de sintonizar la frecuencia de Dirac del cono por medio de la manipulación del contraste dieléctrico, o del factor de llenado; segundo, la posibilidad de abrir el cono haciendo romper la simetría de espejo del cristal. Estas posibilidades permiten tener herramientas de diseño de cristales fotónicos 2D, que pueden ser de utilidad en la búsqueda de posibles aplicaciones.

Referencias

- [1] D.M.B., “Comparison of 1d, 2d and 3d photonic crystal structures (from left to right, respectively) (creative commons).url: en.wikipedia.org/wiki/photonic_crystal/media/file:pc123.jpg,” 2008.
- [2] S. Bittner, B. Dietz, M. Miski-Oglu, P. O. Iriarte, A. Richter, and F. Schäfer, “Observation of a dirac point in microwave experiments with a photonic crystal modeling graphene,” *Physical review B*, 2010.
- [3] C. Kittel, *Introducción a la Física del Estado Sólido*. Editorial Reverté, tercera ed., 1975.
- [4] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade, *Photonic crystals: Molding the flow of light*. Princeton University Press, second ed., 2008.
- [5] Y. Choi, Y. Ha, J.-E. Kim, H. Y. Park, and K. Kim, “Antireflection film in one-dimensional metallo-dielectric photonic crystals,” *Optics Communications*, 2004.
- [6] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, and S. Fan, “Photonic crystals: putting a new twist on light,” *Nature*, 1997.

Referencias

- [7] D. Zhou and R. Biswas, "Photonic crystal enhanced light-trapping in thin film solar cells," *Journal of applied physics*, 2008.
- [8] E. Yablonovitch, "Inhibited spontaneous emission of radiation in solid-state physics and electronics," *Physical review letters*, 1987.
- [9] S. John, "Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices," *Physical review letters*, 1987.
- [10] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, and K. M. Leung, "Photonic band structure: The face-centered-cubic case employing nonspherical atoms," *Physical review letters*, 1991.
- [11] S. Guldin, S. Hüttner, M. Kolle, M. Welland, P. Müller-Buschbaum, R. Friend, U. Steiner, and N. Tétreault, "Dye-sensitized solar cell based on a three-dimensional photonic crystal," *Nano letters*, 2010.
- [12] C. Wiesmann, K. Bergeneck, N. Linder, and U. Schwarz, "Photonic crystal leds – designing light extraction," *Laser Photonics Review*, 2009.
- [13] J. J. Wierer, M. R. Krames, J. E. Epler, N. F. Gardner, M. G. Craford, J. R. Wendt, J. A. Simmons, and M. M. Sigalas, "Ingan/gan quantum-well heterostructure light-emitting diodes employing photonic crystal structures," *Applied physics letters*, 2004.
- [14] N. V. Wheeler, A. M. Heidt, N. K. Baddela, E. N. Fokoua, J. R. Hayes, S. R. Sandoghchi, F. Poletti, M. N. Petrovich, and D. J. Richardson, "Low-loss and low-bend-sensitivity mid-infrared guidance in a hollow-core-photonic-bandgap fiber," *Optics letters*, 2014.
- [15] A. Pimenov and A. Loidl, "Conductivity and permittivity of two-dimensional metallic photonic crystals," *Physical Review Letters*, 2006.

Referencias

- [16] G. Veronis, R. W. Dutton, and S. Fan, "Metallic photonic crystals with strong broadband absorption at optical frequencies over wide angular range," *Journal of applied physics*, 2005.
- [17] S. Belousov, M. Bogdanova, A. Deinega, S. Eyderman, I. Valuev, Y. Lozovik, I. Polischuk, B. Potapkin, B. Ramamurthi, T. Deng, and V. Midha, "Using metallic photonic crystals as visible light sources," *Physical Review B*, 2012.
- [18] H. Takeda and K. Yoshino, "Tunable photonic band schemes in two-dimensional photonic crystals composed of copper oxide high-temperature superconductors," *Physical Review B*, 2003.
- [19] N. N. Dadoenkova, A. E. Zabolotin, I. L. Lyubchanskii, Y. P. Lee, and T. Rasing, "One-dimensional photonic crystal with a complex defect containing an ultrathin superconducting sublayer," *Journal of applied physics*, 2010.
- [20] T.-H. Peia and Y.-T. Huang, "A temperature modulation photonic crystal mach-zehnder interferometer composed of copper oxide high-temperature superconductor," *Journal of applied physics*, 2007.
- [21] X. Zhang, "Observing zitterbewegung for photons near the dirac point of a two-dimensional photonic crystal," *Physical review letters*, 2008.
- [22] G. D'Aguanno, N. Mattiucci, C. Conti, and M. J. Bloemer, "Field localization and enhancement near the dirac point of a nite defectless photonic crystal," *Physical review B*, 2013.
- [23] T. Ochiai and M. Onoda, "Photonic analog of graphene model and its extension - dirac cone, symmetry, and edge states," *Physical review B*, 2009.

Referencias

- [24] Q. P. Mao, K. Xie, L. Hu, Q. Li, W. Zhang, H. M. Jiang, Z. J. Hu, and E. L. Wang, "Light trapping at dirac point in 2d triangular archimedean-like lattice photonic crystal," *Applied optics*, 2016.
- [25] R. Archuleta-García, M. B. Manzanares-Martínez, and J. Manzanares-Martínez, "Una descripción del método de ondas planas para el cálculo de bandas fotónicas," *Revista Boliviana de Física*, 2007.
- [26] T. Hahn, *International tables for crystallography*. Springer, 2005.
- [27] M. Plihal, A. Shambrook, and A. Maradudin, "Two-dimensional photonic band structures," *Optics communications*, 1991.
- [28] A. Maradudin and M. Plihal, "Photonic band structure of two-dimensional systems: the triangular lattice," *Physical Review B*, 1991.
- [29] C. Xu, A. Fang, H. Chu, J. Luo, C. T. Chan, Z. H. Hang, and Y. Lai, "Angular selection of incident waves by photonic crystals with position-varying dirac points at the brillouin zone boundary," *Physical Review B*, 2016.
- [30] W. M. Robertson, G. Arjavalingam, R. D. Meade, K. D. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos, "Measurement of photonic band structure in a two-dimensional periodic dielectric array," *Physical review letters*, 1992.
- [31] J. B. Pendry and A. MacKinnon, "Calculation of photon dispersion relations," *Physical review letters*, 1992.
- [32] W. He and C. T. Chan, "The emergence of dirac points in photonic crystals with mirror symmetry," *Scientific reports*, 2015.
- [33] A. P. Vinogradov, A. V. Dorofeenko, S. G. Erokhin, M. Inoue, A. A. Lisyansky, A. M. Merzlikin, and A. B. Granovsky, "Surface state peculiari-

Referencias

- ties in one-dimensional photonic crystal interfaces,” *Physical Review B*, 2006.
- [34] Z. Zhang and S. Satpathy, “Electromagnetic wave propagation in periodic structures: Bloch wave solution of maxwell’s equations,” *Physical review letters*, 1990.
- [35] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. John Wiley and Sons Inc., third ed., 1999.
- [36] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid state physics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [37] P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media*. John Wiley and Sons Inc, 1988.