

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**División de Ciencias Exactas y Naturales**  
Departamento de Matemáticas

Control de Oscilaciones en Sistemas No  
Lineales alrededor de Puntos de Equilibrio  
No Hiperbólicos

**TESIS**  
que para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias  
(Matemáticas)

presenta

**Francisco Armando Carrillo Navarro**

Director de Tesis:  
Dr. Fernando Verduzco G.

Hermosillo, Sonora,

Junio 23 de 2006.

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



A la memoria de mi Madre  
**Doña Alicia,**

A mi Esposa  
**Elsa Gabriela,**

A mis hijos  
**Francisco Armando,  
Héctor Guillermo y  
Jimena Donají.**



Agradezco a todas las personas que de manera directa e indirecta tuvieron parte en la realización de este trabajo, a mis Maestros del Posgrado, a mis compañeros de estudio. Agradezco también a los compañeros Maestros que se tomaron la molestia y el tiempo de revisar el contenido de esta tesis, Dr. Martín Gildardo García, M.C. Horacio Leyva C., Dr. Eduardo Frías A., Dr. Joaquín Delgado, y Dr. Rubén Flores E., por sus valiosas aportaciones, sugerencias y correcciones.

Finalmente agradezco muy especialmente a quien fue el Director de esta tesis, y también mi Maestro, Dr. Fernando Verduzco G. por su asesoría y apoyo permanentes.

Atentamente,

**Francisco Armando Carrillo Navarro.**



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Comentarios iniciales . . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	5
<b>2. Preliminares Matemáticos</b>	<b>9</b>
2.1. La ecuación de Sylvester . . . . .	9
2.2. Teoría de la Variedad Central . . . . .	12
2.2.1. Campos Vectoriales . . . . .	12
2.2.2. Campos Vectoriales parametrizados . . . . .	15
2.3. Formas Normales . . . . .	16
2.4. Bifurcación de Hopf . . . . .	23
2.4.1. Primer coeficiente de Lyapunov . . . . .	26
<b>3. Bifurcación de Hopf Controlable</b>	<b>29</b>
3.1. Introducción . . . . .	29
3.2. Teorema de la bifurcación de Hopf controlable . . . . .	30
3.3. Nueva versión del teorema . . . . .	31
3.3.1. Lemas preliminares . . . . .	31
3.3.2. Expresión explícita del cambio de coordenadas . . . . .	40
3.3.3. El teorema en su nueva versión . . . . .	42



3.4. Un ejemplo . . . . .	43
<b>4. Control de oscilaciones alrededor de la bifurcación <math>k</math>-cero</b>	<b>45</b>
4.1. Introducción . . . . .	45
4.2. Formulación del problema . . . . .	46
4.3. Control de las oscilaciones para el caso $k = 2$ . . . . .	47
4.3.1. Diseño de la ley de control . . . . .	47
4.3.2. Cambio de coordenadas . . . . .	48
4.3.3. Diseño de $v(z, \mu, \lambda)$ . . . . .	50
4.3.4. Teorema principal . . . . .	51
4.4. Control de las oscilaciones para el caso general . . . . .	52
4.4.1. Reducción al caso $k = 2$ . . . . .	52
4.4.2. Cambio de coordenadas . . . . .	54
4.4.3. Diseño de la ley de control . . . . .	56
4.4.4. Teorema principal . . . . .	58
<b>5. Control de oscilaciones alrededor de la Bifurcación <math>k</math>-cero Hopf</b>	<b>61</b>
5.1. Introducción . . . . .	61
5.2. Planteamiento del Problema . . . . .	62
5.3. Control de las oscilaciones . . . . .	62
5.4. Cambio de coordenadas . . . . .	65
5.5. Diseño de la ley de control . . . . .	67
5.6. Resultado principal . . . . .	68
<b>6. Control de Oscilaciones para Sistemas más Generales</b>	<b>71</b>
6.1. Introducción . . . . .	71
6.2. El problema general . . . . .	71
6.2.1. Control de las oscilaciones . . . . .	73

## ÍNDICE GENERAL

---

v

6.2.2. Cambio de coordenadas . . . . .	80
6.2.3. Diseño del Control . . . . .	83
6.3. Resultado final . . . . .	84
<b>Conclusiones</b>	<b>87</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Comentarios iniciales

La teoría de los sistemas dinámicos no lineales juega un papel muy importante en casi todas las áreas de la ciencia y la ingeniería, ya que los modelos matemáticos de los fenómenos del mundo real son de hecho no lineales. La teoría de la dinámica es particularmente útil en el estudio de comportamientos complejos tales como la inestabilidad, la bifurcación y el caos, los cuales son encontrados en mecánica, aeronáutica, circuitos eléctricos, sistemas controlables, problemas poblacionales, economía, sistemas financieros, acciones de mercado, sistemas ecológicos, etc. En general, el análisis del comportamiento de las soluciones de sistemas no lineales puede ser dividido en dos categorías principales: **análisis local** y **análisis global**. Por ejemplo, comportamientos *post-crítico* tales como la bifurcación silla-nodo y la bifurcación de Hopf pueden ser estudiadas localmente en una vecindad del punto crítico, mientras que órbitas heteroclínicas y homoclínicas, y caos son esencialmente comportamientos globales y lógicamente tienen que ser estudiados globalmente. Las dos categorías mencionadas necesitan ser tratadas con diferentes teorías y metodologías.

Para el análisis dinámico local (el que nos ocupa en nuestro caso), usualmente el primer paso es para simplificar un sistema dado tanto como sea posible, mientras se mantenga sin cambio el comportamiento cualitativo del sistema dinámico. Existen diversas y excelentes metodologías muy estudiadas ya para sistemas dinámicos, como son la teoría de la variedad central, la teoría de las formas normales, el método de promedios, escalas de tiempo múltiple, reducción de Lyapunov-Schmidt, el método

de sucesión de funciones, la técnica de balanceo armónico intrínseco, etc. Esos métodos pueden ser usados para obtener ecuaciones “simplificadas” en una vecindad del punto de interés. El sistema “simplificado” es topológicamente equivalente al sistema original, y entonces el comportamiento dinámico del sistema original puede ser estudiado en el sistema “simplificado”, haciendo el análisis mucho más fácil. Usualmente, la teoría de formas normales (por ejemplo ver [9], [10], [11]) es aplicada junto con la teoría de la variedad central [6], la cual es aplicada primero para reducir el sistema a una variedad central de menor dimensión. Entonces se emplea el método de formas normales para obtener una simplificación adicional para el sistema. Sin embargo, existen aproximaciones que combinan las dos teorías en un procedimiento unificado (ver [3], [18]-[22]).

En general, una forma normal no se define de manera única y calcular la fórmula explícita de una forma normal en términos de los coeficientes de el sistema original no es fácil, por lo que desde hace algunos años, el cálculo simbólico de formas normales usando software computacional como Maple, Mathematica, etc., ha recibido una considerable atención. En las dos décadas pasadas se dió un creciente interés en lo que respecta al estudio de bifurcaciones de sistemas controlables, incluyendo controles o anticonroles de bifurcaciones y caos, y existe una basta variedad de aplicaciones potenciales del control de bifurcaciones y caos. En general, el objetivo en el control de bifurcaciones es diseñar un controlador tal que las características de bifurcación de un sistema no lineal experimente una bifurcación que pueda ser modificada para lograr algún comportamiento dinámico deseable. Platicaremos con más detalle esto último más adelante.

Ahora bien, una tarea importante en el estudio de los sistemas dinámicos no lineales que dependen de uno o más parámetros, es investigar la ocurrencia de bifurcaciones. Una bifurcación es un cambio cualitativo en la dinámica del sistema, el cual puede ocurrir cuando los parámetros los hacemos variar desde un cierto valor *crítico* [2]. Ellos expresan la transición entre las diversas regiones de funcionamiento y es esencial su conocimiento ya sea en el análisis de la dinámica del sistema, donde diferentes comportamientos de un proceso dado necesitan ser predeterminadas, y en el diseño del control, donde un regulador puede ser empleado para garantizar las dinámicas requeridas para el proceso. De hecho, en muchas aplicaciones prácticas se requiere un comportamiento dado en una cierta región del espacio paramétrico. Por ejemplo, en muchos sistemas biológicos las condiciones de operación estandar son a menudo caóticas o cuasi-periódicas [1], mientras que en diferentes aplicaciones un objetivo común es la estabilización de órbitas periódicas inestables encajadas en un atractor caótico. En este contexto, un reciente e interesante reto en problemas de

dinámica no lineal tiene que ver con control de bifurcaciones. Los objetivos típicos del control de bifurcaciones incluyen retardo en el inicio de una bifurcación inherente, estabilización de una órbita bifurcada, cambio en el valor del parámetro de un punto existente de la bifurcación, modificar la forma o tipo de una cadena de bifurcación, introducir una nueva bifurcación en un algún valor predeterminado del parámetro, establecer la multiplicidad, amplitud, frecuencia y estabilidad en algunos ciclos límite que surgen de la bifurcación, optimizar el funcionamiento del sistema cerca de un punto de bifurcación, etc.

Retomando el tema de control de bifurcaciones, podemos decir que éste en realidad es un nuevo campo de la investigación en el cual los cambios cualitativos del comportamiento de sistemas dinámicos después de variar un parámetro distinguido, son modificados convenientemente por cierto control específico. Las herramientas matemáticas de la teoría de bifurcación son readaptadas para proveer de un marco de trabajo adecuado teniendo en mente algunos objetivos como los siguientes:

- Suavizar los cambios cualitativos en los diagramas de bifurcación locales asociados,
- Cambiar el tipo de bifurcación,
- Crear un ciclo límite en una cierta región del espacio de estados pudiendo modificar su amplitud, frecuencia y estabilidad,
- Modificar la cuenca de atracción de los puntos analizados o de los conjuntos atractores,
- etc.

En otras palabras, el control de bifurcaciones usa el conocimiento de las características cualitativas de las diferentes bifurcaciones para ayudar a diseñar controles en sistemas no lineales.

El objetivo en este trabajo es determinar bajo que condiciones, en un sistema de control no lineal con ciertas características, es posible diseñar una ley de control escalar que permita predecir la ocurrencia de ciclos límite alrededor de puntos de equilibrio no hiperbólicos, y al mismo tiempo, que sea posible establecer *a priori* dos cosas:

- a) la estabilidad del ciclo límite que emerge en la bifurcación,

- b) la dirección del ciclo límite, es decir, que sea posible determinar si el ciclo límite nacerá o desaparecerá al pasar el parámetro de bifurcación por el valor de bifurcación.

Si en un sistema de control no lineal es posible diseñar una ley de control que satisfaga *a)* y *b)*, diremos entonces que el sistema ha experimentado la *bifurcación de Hopf controlable*. El diseño de esta ley de control permitiría además, establecer la estabilidad del punto de equilibrio no hiperbólico, es decir, la ley de control resolvería el problema de estabilización en un punto de equilibrio no hiperbólico. Lo anterior se hizo en el siguiente orden:

En el capítulo 2, que llamamos Preliminares Matemáticos, presentamos los conceptos y resultados matemáticos de los que se echa mano para lograr nuestro objetivo, conceptos y resultados como la *ecuación de Sylvester*, de la cual se demuestra un resultado muy importante que pudieramos llamar, el *Lema de Sylvester* que es un resultado sumamente útil durante todo el desarrollo del trabajo, como ya se podrá apreciar más adelante. También se estudia la *Teoría de la Variedad Central* y la *Teoría de las Formas Normales* que se utilizarán en la sección siguiente correspondiente a la *Bifurcación de Hopf* donde se enuncia el *Teorema de la bifurcación de Hopf* del cual no se escribe su demostración pero que es un teorema ya muy conocido y estudiado en la literatura como por ejemplo en [9], [16], [10], etc., y también se hará uso de estas teorías en el siguiente capítulo.

En el capítulo 3 llamado Bifurcación de Hopf Controlable, se establece inicialmente un resultado demostrado en [13] el cual se conoce como *Teorema de la bifurcación de Hopf controlable*, y es aquí donde se da la primera aportación original de este trabajo, que consiste en demostrar un nuevo resultado al que consideramos como una **nueva versión del teorema de la bifurcación de Hopf controlable**, que a nuestro parecer mejora de cierta manera (la cual se detalla en este mismo capítulo), la primera versión, que fué presentada en [13]. Se concluye el capítulo resolviendo un ejemplo donde se aplica la nueva versión del teorema de la bifurcación de Hopf controlable.

En el capítulo 4, denominado Control de oscilaciones alrededor de la bifurcación *k*-cero, se presenta el diseño de un control escalar para un tipo de sistemas no lineales muy particulares, este trabajo desarrollado en [12], se aplica a sistemas no lineales, los cuales en su linealización alrededor del origen tiene un valor propio cero de multiplicidad *k* y *n - k* valores propios con parte real menor que cero. Este diseño se logra mediante un cambio de coordenadas adecuado y resolviendo primeramente el caso particular *k = 2*, el cual después se generaliza para cualquier valor de *k*.

De manera un tanto similar, en el capítulo 5, llamado Control de oscilaciones alrededor de la bifurcación  $k$ -cero Hopf se logra construir una ley de control escalar, la cual es la segunda aportación original del presente escrito. El diseño de este control es ahora para sistemas no lineales cuya linealización alrededor del origen tiene dos valores propios puramente imaginarios, un valor propio cero de multiplicidad  $k$  y  $n - (k + 2)$  valores propios con parte real negativa. Aquí, la idea es que mediante un cambio adecuado en la entrada de control, convertir los  $k$  valores propios cero a valores propios con parte real negativa y después, mediante un cambio suave de coordenadas, aplicar el resultado obtenido en el capítulo 3.

En el capítulo 6 al cual nombramos como Control de oscilaciones para sistemas más generales, que es en su totalidad la tercera aportación del trabajo, hacemos uso de todos los resultados analizados hasta esta parte, con el fin de lograr diseñar la ley de control de realimentación, que nos controle valga la redundancia, las órbitas periódicas que surgen al transformar el sistema no lineal, cuya parte lineal de su campo vectorial contiene  $p$  parejas de valores propios puramente imaginarios con sus correspondientes multiplicidades  $r_p$  (cuya suma supondremos igual a  $r$ ), un valor propio cero de multiplicidad  $k$  y  $n - 2r - k$  valores propios con parte real negativa, a la forma  $k$ -cero Hopf y de ahí, a su vez transformar dicho sistema a la forma normal de la bifurcación de Hopf controlable, para finalmente aplicar la nueva versión del teorema de la bifurcación de Hopf controlable.

Terminamos nuestro trabajo dando una serie de conclusiones en las cuales se rescata lo más relevante del mismo.

## 1.2. Planteamiento del problema

En esta sección daremos una breve descripción del objetivo principal planteado en la presente tesis, así como también los pasos que se siguieron para alcanzar dicho objetivo.

Considere el sistema de control no lineal

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)u, \quad (1.1)$$



donde  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\xi = \begin{pmatrix} z \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ , con  $z \in \mathbb{R}^{2r}$ ,  $w_1 \in \mathbb{R}^k$  y  $w_2 \in \mathbb{R}^s$  ( $2r+k+s = n$ ),

$$J = \begin{pmatrix} J_M & 0 & 0 \\ 0 & J_K & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

donde

$$J_M = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & J_p \end{pmatrix}_{2r \times 2r}, \quad J_i = \begin{pmatrix} C_i & I & & \\ & C_i & I & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ & & & & C_i \end{pmatrix}_{2r_i \times 2r_i}, \quad \sum_{i=1}^p r_i = r$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_i > 0, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

y  $J_S \in \mathbb{R}^{s \times s}$  es Hurwitz;  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son campos vectoriales suaves tales que  $F(0) = DF(0) = 0$  y  $G(0) = \begin{pmatrix} b \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ .

El objetivo de control es diseñar una realimentación del estado

$$u = u(z, \mu, \gamma), \quad (1.3)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  es un parámetro artificial de bifurcación y  $\gamma \in \mathbb{R}^4$  es un vector de parámetros artificiales de control, tal que el sistema en lazo cerrado (1.1-1.3) experimente la llamada *bifurcación de Hopf controlable* en  $\xi = 0$  cuando  $\mu = 0$ .

Para conseguir el mencionado objetivo de control, primeramente se estudia, en el capítulo 4, el caso particular en que la matriz (1.2) sólo posee un valor propio cero de multiplicidad  $k$  en el eje imaginario del plano complejo; enseguida, en el capítulo

5 se estudia el caso particular en que la matriz (1.2) posee un único par de valores propios imaginarios de multiplicidad uno y un valor propio cero de multiplicidad  $k$  en el eje imaginario del plano complejo. Finalmente, en el capítulo 6 se desarrolla el problema general.



# Capítulo 2

## Preliminares Matemáticos

En este capítulo, recordaremos algunos conceptos y resultados que desempeñan un papel muy importante en el análisis y desarrollo del trabajo que presentamos en los capítulos posteriores. Comenzaremos con la llamada *ecuación de Sylvester* [8], continuaremos con el *Teorema de la bifurcación de Hopf* [9], y finalmente presentaremos un resultado que es básico en el presente trabajo y se conoce como *El teorema de la bifurcación de Hopf controlable* [13]. El último resultado, establece condiciones para, controlar la bifurcación de Hopf de sistemas no lineales con dos valores propios en el eje imaginario, y sin hipótesis de controlabilidad.

El teorema de la bifurcación de Hopf controlable usa a su vez el *Teorema de la variedad central*, el cual no enunciamos aquí pero puede estudiarse con gran detalle en [16], este teorema reduce la dinámica del sistema a una variedad de dos dimensiones. También se diseña un controlador que nos permite decidir la estabilidad y dirección de las soluciones periódicas que surgen.

### 2.1. La ecuación de Sylvester

**Definición 2.1** *i) El espectro de una matriz cuadrada  $A$ , denotado por  $\sigma(A)$ , es definido por*

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ es un valor propio de } A \}$$

*ii) Una ecuación lineal matricial de la forma*

$$AX - XB = C, \tag{2.1}$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas, posiblemente de dimensión diferente, donde la matriz incógnita es  $X$  y el término independiente es la matriz  $C$ , es conocida como la **ecuación de Sylvester**.

**Lema 2.1** [8]

La ecuación de Sylvester (2.1) tiene solución única  $X$  para cada  $C$ , si y sólo si  $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ .

**Prueba.** Dada la ecuación (2.1), sean  $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ,  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ,  $X = [x_{ij}]_{m \times n}$  y  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ .

Primeramente, consideremos la matriz  $C$  como la matriz nula, es decir  $C = 0$ . Entonces la ecuación (2.1) queda de la forma

$$AX = XB \quad (2.2)$$

los divisores elementales de  $A$  y  $B$  (en el campo de los complejos) son:

$$(A) : (\lambda - \lambda_1)^{p_1}, (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \dots, (\lambda - \lambda_u)^{p_u}, \text{ con } \sum_{i=1}^u p_i = m.$$

$$(B) : (\lambda - \mu_1)^{q_1}, (\lambda - \mu_2)^{q_2}, \dots, (\lambda - \mu_v)^{q_v}, \text{ con } \sum_{i=1}^v q_i = n.$$

Y de acuerdo con esos divisores elementales, reducimos  $A$  y  $B$  a sus formas normales de Jordan

$$A = U\tilde{A}U^{-1}, \quad B = V\tilde{B}V^{-1} \quad (2.3)$$

donde  $U$  y  $V$  son matrices cuadradas no-singulares de orden  $m$  y  $n$  respectivamente, y  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  son matrices en forma de Jordan,

$$\tilde{A} = \{\lambda_1 I_{p_1} + H_{p_1}, \lambda_2 I_{p_2} + H_{p_2}, \dots, \lambda_u I_{p_u} + H_{p_u}\},$$

$$\tilde{B} = \{\mu_1 I_{q_1} + H_{q_1}, \mu_2 I_{q_2} + H_{q_2}, \dots, \mu_v I_{q_v} + H_{q_v}\},$$

donde  $I_j$  es la matriz identidad de orden  $j$  y  $H_j$  es la matriz nilpotente

$$H_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{j \times j}, \quad \text{tal que, } H^j = 0.$$

Reemplazando  $A$  y  $B$  en (2.2) por sus expresiones dadas en (2.3), obtenemos

$$U\tilde{A}U^{-1}X = XV\tilde{B}V^{-1},$$

multiplicando ambos lados de esta ecuación, a la izquierda por  $U^{-1}$  y a la derecha por  $V$ , nos queda  $\tilde{A}U^{-1}XV = U^{-1}XV\tilde{B}$ . Haciendo

$$\tilde{X} = U^{-1}XV, \quad (2.4)$$

tenemos que

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{X}\tilde{B}. \quad (2.5)$$

Hasta aquí, reemplazamos (2.2) por (2.5) que es una ecuación de la misma forma, pero sus componentes están en la forma normal de Jordan.

Particionando la matriz  $\tilde{X}$  en bloques correspondientes a la forma cuasi-diagonal de las matrices  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ :

$$\tilde{X} = (X_{\alpha\beta}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, u; \quad \beta = 1, 2, \dots, v, \quad (2.6)$$

aquí,  $X_{\alpha\beta}$  es una matriz de orden  $p_\alpha \times q_\beta$ , usando la regla para multiplicar una matriz particionada por una cuasi-diagonal (ver [8], p.42), realizamos la multiplicación de las matrices en los lados izquierdo y derecho de la ecuación (2.5). Entonces esta ecuación se transforma en  $uv$  ecuaciones matriciales de la forma

$$(\lambda_\alpha I_{p_\alpha} + H_{p_\alpha})X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}(\mu_\beta I_{q_\beta} + H_{q_\beta}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, u; \quad \beta = 1, 2, \dots, v,$$

las cuales se pueden reescribir como sigue:

$$(\mu_\beta - \lambda_\alpha)X_{\alpha\beta} = H_\alpha X_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta}G_\beta, \quad (2.7)$$

donde

$$H_\alpha = H_{p_\alpha}, \quad G_\beta = H_{q_\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, u; \quad \beta = 1, \dots, v. \quad (2.8)$$

Ahora,  $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ , si y sólo si  $\mu_\beta \neq \lambda_\alpha$ , iteramos la ecuación (2.7)  $r - 1$  veces\*

$$(\mu_\beta - \lambda_\alpha)^r X_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma+\tau=r} (-1)^\tau \binom{r}{\tau} H_\alpha^\sigma X_{\alpha\beta} G_\beta^\tau, \quad (2.9)$$

---

\*Multiplicamos ambos lados de (2.7) por  $\mu_\beta - \lambda_\alpha$  y en cada término del lado derecho reemplazamos  $(\mu_\beta - \lambda_\alpha)X_{\alpha\beta}$  por  $H_\alpha X_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta}G_\beta$ . Este proceso se repite  $r - 1$  veces.

nótese que por (2.8)

$$H_\alpha^{p_\alpha} = G_\beta^{q_\beta} = 0, \quad (2.10)$$

si en (2.9) tomamos  $r \geq p_\alpha + q_\beta - 1$ , entonces, en cada término de la suma en el lado derecho de (2.9) al menos una de las relaciones  $\sigma \geq p_\alpha$ ,  $\tau \geq q_\beta$  se satisface, así por (2.10) ya sea  $H_\alpha^\sigma = 0$  o  $G_\beta^\tau = 0$ . Además, como  $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$  si y sólo si  $\lambda_\alpha \neq \mu_\beta$ , encontramos que debido a (2.9),  $X_{\alpha\beta} = 0$ , así por (2.6),  $\tilde{X} = 0$  y por (2.4),  $X = 0$  es la única solución de (2.2).

Finalmente, considerando en la ecuación (2.1) a  $C \neq 0$ , esta ecuación es equivalente a  $mn$  ecuaciones escalares en la entradas de  $X$ :

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_{jk} - \sum_{l=1}^n x_{il}b_{lk} = c_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

El correspondiente sistema homogéneo ya vimos que tiene únicamente como solución a  $X = 0$  si y sólo si  $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ , y esto implica que (2.1) tiene solución única.

■

## 2.2. Teoría de la Variedad Central

La teoría será desarrollada en dos casos: (i) Campos Vectoriales y (ii) Campos Vectoriales parametrizados.

### 2.2.1. Campos Vectoriales

Considere el sistema no lineal

$$\dot{w} = X(w), \quad (2.12)$$

donde  $w \in \mathbb{R}^n$  y  $X$  es un campo vectorial suave. Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es una *Variedad Invariante Local* para (2.12), si para  $w_0 \in S$ , la solución  $w(t)$  de (2.12) con  $w(0) = w_0$  está en  $S$  para  $|t| < T$  donde  $T > 0$ . Si siempre podemos elegir  $T = \infty$ , entonces decimos que  $S$  es una *Variedad Invariante*.

Supóngase que  $X(0) = 0$  y que  $DX(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , donde  $A$  es una matriz  $k \times k$  con valores propios con parte real cero y  $B$  una matriz  $(n - k) \times (n - k)$  con

valores propios con parte real negativa. Luego, de manera natural podemos hacer  $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , con  $x \in \mathbb{R}^k$  y  $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ , obteniendo la siguiente representación para el sistema (2.12),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y),\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$  y  $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$ , y  $f, g \in \mathcal{C}^r$ , con  $r \geq 2$ .

**Definición 2.2** Una variedad invariante  $W^c$  será llamada **Variedad Central** para el sistema (2.13) si puede ser representada, de manera local, como sigue

$$W_{loc}^c(0) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid y = h(x), \ |x| < \delta, \ h(0) = 0, \ Dh(0) = 0 \}$$

para  $\delta$  suficientemente pequeña.

**Observación 2.1** El hecho de que  $h(0) = 0$  y  $Dh(0) = 0$  nos garantiza que la variedad central  $W_{loc}^c(0)$  es tangente al eigenespacio central  $E^c$  en el origen.

Los siguientes tres teoremas que enunciaremos, están demostrados en [6]. El primero de ellos nos garantiza la existencia de la variedad central.

**Teorema 2.1** Existe una  $\mathcal{C}^r$  variedad central para el sistema (2.13). La dinámica del sistema (2.13), restringida a la variedad central, está dada, para  $v$  suficientemente pequeña, por el siguiente sistema  $k$ -dimensional

$$\dot{v} = Av + f(v, h(v)),\tag{2.14}$$

con  $v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k$ .

El siguiente resultado establece que la dinámica de (2.14) cerca de  $u = 0$ , determina la dinámica de (2.13) cerca de  $(x, y) = (0, 0)$ .

**Teorema 2.2** (i) Suponga que  $v = 0$  es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (2.14), entonces  $(x, y) = (0, 0)$  es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (2.13).



(ii) Suponga que el equilibrio  $(x, y) = (0, 0)$  del sistema (2.13) es estable. Entonces, si  $(x(t), y(t))$  es una solución de (2.13) con  $(x(0), y(0))$  lo suficientemente pequeño, entonces existe una solución  $v(t)$  de (2.14) tal que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= v(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= h(v(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}),\end{aligned}$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante

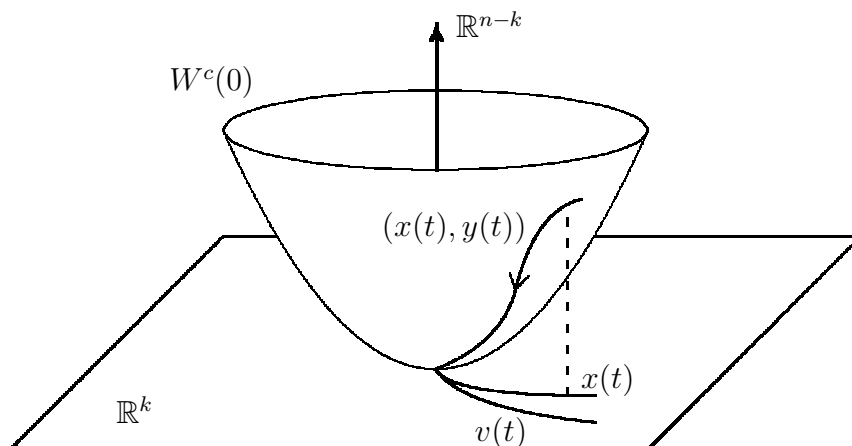


Figura 2.1: Esquematización gráfica del teorema 2.2.

**Observación 2.2** Lo que nos dice el teorema 2.2 es que la solución  $u(t)$  del sistema (2.14), representa, de manera aproximada, la proyección de la solución  $(x(t), y(t))$  del sistema (2.13), sobre el eigenespacio  $E^c \cong \mathbb{R}^k$ . Ver figura 2.1.

El último teorema proporciona un método para aproximar la función  $h(x)$ , cuya gráfica es la variedad central. Antes de enunciarlo, encontraremos una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya incógnita es justamente nuestra función  $h(x)$ .

Sea  $(x(t), y(t)) \in W_{loc}^c(0)$ , luego, se cumple que  $y(t) = h(x(t))$ , y derivando con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (2.15)$$

Pero todo punto sobre la variedad central satisface la ecuación (2.13), por lo tanto, la ecuación (2.15) es equivalente a

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))).$$

Hagamos

$$\mathcal{N}(h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) \equiv 0. \quad (2.16)$$

Luego, nuestro problema es encontrar  $h(x)$  tal que satisfaga la ecuación (2.16), a esta ecuación se le conoce como *ecuación homológica* ver [1]. Encontrar la solución de esta ecuación en derivadas parciales es en general más difícil que resolver el sistema (2.13), sin embargo, el siguiente teorema nos permitirá aproximar la solución de (2.16) con el grado de precisión que se desee.

**Teorema 2.3** *Sea  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , con  $\phi(0) = D\phi(0) = 0$  tal que  $\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$  cuando  $x \rightarrow 0$ , para algún  $q > 1$ . Entonces*

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q) \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

### 2.2.2. Campos Vectoriales parametrizados

Considere el sistema no lineal parametrizado, escrito ya en bloques de Jordan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu) \end{aligned} \quad (2.17)$$

con  $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^p$ , donde  $A$  posee valores propios con parte real cero y  $B$  posee valores propios con parte real negativa, con  $f(0) = Df(0) = 0$  y  $g(0) = Dg(0) = 0$ . Supongamos por un momento que  $\mu \in \mathbb{R}^p$  es un vector de estados, luego podemos reescribir (2.17) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (2.18)$$

llamado el *sistema suspendido*, que a su vez lo reescribimos como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu). \end{aligned}$$

Tenemos entonces un eigenspacio central de dimensión  $k + p$ , por lo tanto existe una función  $y = h(x, \mu)$  cuya gráfica es la variedad central, localmente alrededor del origen  $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$ , del sistema (2.18). Luego, la dinámica sobre esta variedad central está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, h(x, \mu), \mu) \\ \dot{\mu} &= 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

y la ecuación (2.16) para determinar  $h(x, \mu)$  se reduce a

$$\mathcal{N}(h(x, \mu)) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, \mu) (Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)) - Bh(x, \mu) - g(x, h(x, \mu), \mu) \equiv 0. \tag{2.20}$$

### 2.3. Formas Normales

La teoría de formas normales consiste en, dado un sistema no lineal

$$\dot{x} = X(x),$$

con  $X(0) = 0$ , buscar un cambio de coordenadas  $x = y + h(y)$  tal que el sistema en las nuevas coordenadas tenga la expresión “más simple posible”.

Supongamos que el campo  $X$  ha sido desarrollado en serie de Taylor alrededor del equilibrio  $x = 0$ , y que, además, su parte lineal se encuentra en forma de Jordan,

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots, \tag{2.21}$$

donde  $F_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ . Supongamos que el campo  $X$  posee términos no lineales de grado  $r$  en adelante, es decir,

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots. \tag{2.22}$$

Considere el cambio de coordenadas

$$x = y + h_r(y), \tag{2.23}$$

donde  $h_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ , tal que  $\|h_r(y)\| \ll 1$ . La idea es encontrar  $h_r$  tal que, el sistema (2.22) en las nuevas coordenadas no posea términos de grado  $r$ . Derivando (2.23) obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{y} + Dh_r(y)\dot{y} \\ &= (I + Dh_r(y))\dot{y},\end{aligned}\tag{2.24}$$

pero en  $I + Dh_r(y)$  tenemos que  $\|Dh_r(y)\| < 1^{**}$ , entonces es una matriz invertible, tal que

$$(I + Dh_r(y))^{-1} = I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots,$$

luego, de (2.24) se sigue que

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (I + Dh_r(y))^{-1}\dot{x} \\ &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots)(Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots).\end{aligned}$$

Pero  $F_r(y + h_r(y)) = F_r(y) + DF_r(y)h_r(y) + \dots$ , luego entonces

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \dots)(J(y + h_r(y)) + F_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1})) \\ &= Jy + (F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}) \\ &= Jy + \tilde{F}_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{r+1}),\end{aligned}$$

donde  $\tilde{F}_r(y) = F_r(y) - (Dh_r(y)Jy - Jh_r(y))$ .

**Observación 2.3** *Observe que si el campo vectorial  $X$  posee términos no lineales a partir de orden  $r$ , entonces el cambio de coordenadas  $x = y + h_r(y)$  produce un nuevo campo vectorial también con términos no lineales a partir de orden  $r$ .*

Veamos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de  $h_r$  tal que  $\tilde{F}_r = 0$ . Considere el espacio vectorial  $H^r$  de los campos vectoriales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ , y sea  $L_J : H^r \rightarrow H^r$  el operador lineal dado por

$$L_J(h_r(y)) = Dh_r(y)Jy - Jh_r(y).$$

Tal operación se conoce como el *paréntesis de Lie* (o *corchete de Lie*) de los campos vectoriales  $Jy$  y  $h_r(y)$ . Basta probar que  $L_J$  es invertible, ya que  $\tilde{F}_r = 0$

---

\*\*Aquí  $\|\cdot\|$  representa a la norma euclidiana, es decir,  $\|A\| = \sqrt{\lambda}$ , donde  $\lambda$  es el valor propio mayor de  $A$ .

$\Leftrightarrow h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y))$ . Ahora bien,  $L_J$  será invertible si y sólo si todos sus valores propios son diferentes de cero. Calculemos entonces sus valores propios.

Supongamos que  $J$  posee  $n$  valores propios reales diferentes  $\lambda_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , y como está en forma de Jordan, entonces es diagonal, y además sus vectores propios son los elementos de la base canónica en  $\mathbb{R}^n$ ,  $e_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Regresemos ahora al espacio vectorial  $H^r$  y tratemos de ubicar su base canónica. Por ejemplo, para  $r = 2$  y  $n = 2$ , la base canónica posee seis elementos

$$\mathcal{B}_{H^2} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si definimos  $y^{\mathbf{m}} = y_1^{m_1} y_2^{m_2}$ , con  $m_1 + m_2 = 2$  y  $m_i \geq 0$ , entonces

$$\mathcal{B}_{H^2} = \{ y^{\mathbf{m}} e_i \mid m_1 + m_2 = 2, i = 1, 2 \}.$$

En general, si  $y^{\mathbf{m}} = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$ , con  $\sum_{j=1}^n m_j = r$  y  $m_j \geq 0$ , entonces la base canónica en  $H^r$  está dada por

$$\mathcal{B}_{H^r} = \left\{ y^{\mathbf{m}} e_i \mid \sum_{j=1}^n m_j = r, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Ahora bien,

$$L_J(y^{\mathbf{m}} e_i) = D(y^{\mathbf{m}} e_i) J y - J(y^{\mathbf{m}} e_i),$$

pero

$$D(y^{\mathbf{m}} e_i) = D \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ \frac{m_1}{y_1} y^{\mathbf{m}} & \frac{m_2}{y_2} y^{\mathbf{m}} & \dots & \frac{m_n}{y_n} y^{\mathbf{m}} \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$\text{y } Jy = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto}$$

$$D(y^{\mathbf{m}}e_i) Jy = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_1 \lambda_1 y^{\mathbf{m}} + \cdots + m_n \lambda_n y^{\mathbf{m}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (m \cdot \lambda) y^{\mathbf{m}}e_i,$$

donde  $m = (m_1, \dots, m_n)$  y  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} L_J(y^{\mathbf{m}}e_i) &= D(y^{\mathbf{m}}e_i) Jy - J(y^{\mathbf{m}}e_i) \\ &= (m \cdot \lambda) y^{\mathbf{m}}e_i - \lambda_i y^{\mathbf{m}}e_i \\ &= (m \cdot \lambda - \lambda_i) y^{\mathbf{m}}e_i, \end{aligned}$$

es decir,  $y^{\mathbf{m}}e_i$  es un vector propio de  $L_J$  con valor propio

$$\Lambda_{m,i} = (m \cdot \lambda) - \lambda_i. \quad (2.25)$$

Luego,  $L_J$  será invertible si y sólo si  $\Lambda_{m,i} \neq 0$  para toda  $m$  y toda  $i = 1, \dots, n$ . Esto nos lleva al siguiente concepto,

**Definición 2.3** Diremos que la  $n$ -tupla de valores propios  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  es **resonante de orden  $r$**  si es posible encontrar una relación entera de la forma

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j,$$

para algún  $m$  con  $\sum_{j=1}^n m_j = r$ , y alguna  $i = 1, \dots, n$ .

**Observación 2.4** Puede probarse que la expresión (2.25) también es válida para el caso en que  $J$  no es diagonal, ver [1].

Tenemos entonces probado el teorema de linealización de Poincaré

**Teorema 2.4 (Poincaré)** *Si los valores propios de la matriz  $J$  son no resonantes, entonces el sistema no lineal*

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots$$

*puede ser reducido al sistema lineal*

$$\dot{y} = Jy$$

*por un cambio formal de coordenadas  $x = y + h_r(y) + \dots$ , para  $r = 2, 3, \dots$*

Veamos como determinar  $h_r$  tal que  $\tilde{F}_r = 0$ , es decir, determinar  $h_r$  tal que  $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$ . Expresemos  $h_r$  y  $F_r$  en términos de los vectores canónicos de  $H^r$ ,

$$\begin{aligned} h_r(y) &= \sum_{m,i} h_{m,i} y^m e_i \\ F_r(y) &= \sum_{m,i} F_{m,i} y^m e_i, \end{aligned}$$

con  $\sum_{j=1}^n m_j = r$ , luego,

$$\begin{aligned} L_J(h_r(y)) &= L_J \left( \sum_{m,i} h_{m,i} y^m e_i \right) \\ &= \sum_{m,i} h_{m,i} L_J(y^m e_i) \\ &= \sum_{m,i} h_{m,i} (m \cdot \lambda - \lambda_i) y^m e_i. \end{aligned}$$

Ahora bien,  $L_J(h_r(y)) = F_r(y)$  si y sólo si

$$h_{m,i} = \frac{F_{m,i}}{(m \cdot \lambda - \lambda_i)}. \quad (2.26)$$

Como los valores propios de  $J$  son no resonantes, la expresión anterior siempre tiene sentido.

Consideremos ahora el caso en que ocurre resonancia, es decir, el caso en que algunos valores propios  $\Lambda_{m,i}$  de  $L_J$  son cero. Los vectores propios de  $L_J$  que provienen de valores propios diferentes de cero forman una base de la imagen  $B^r = L_J(H^r)$ . Sea

$F_r \in H^r$ , luego, las componentes de  $F_r$  que estén en  $B^r$  pueden ser aniquilados mediante el cambio de coordenadas  $x = y + h_r(y)$ , donde  $h_r$  se escoge de tal manera que sus coeficientes esten de acuerdo a la fórmula (2.26). Las componentes  $w_r$  de  $F_r$  que pertenezcan a algún subespacio complementario,  $G^r$ , de  $B^r$ , permanecerán sin cambio mediante el cambio de coordenadas  $x = y + h_r(y)$  obtenido de  $B^r$ . Así que estos términos resonantes permanecerán en el nuevo campo vectorial. Esto nos prueba el siguiente teorema

**Teorema 2.5 (Teorema de Poincaré-Dulac)** *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = X(x), \quad (2.27)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $X(0) = 0$  y  $X$  un campo vectorial suave. Existe una transformación polinomial  $x = y + h(y)$ , tal que transforma el sistema (2.27) en

$$\dot{y} = Jy + \sum_{r=2}^N w_r(y) + \mathcal{O}(|y|^{N+1}), \quad (2.28)$$

donde todos los monomios en  $w_r(y)$  son resonantes.

El lado derecho en (2.28) es llamado **la forma normal** del campo  $X$ .

**Ejemplo 2.1** *Para dar una breve ilustración de los conceptos anteriores, determinaremos la forma normal del campo vectorial*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

**Solución:**

Observe que la Jacobiana del campo vectorial tiene los valores propios imaginarios  $\lambda = i\omega_0$  y su conjugado  $\bar{\lambda}$ . Cuando se tienen valores propios complejos, es conveniente cambiar de variables para representar la Jacobiana en forma diagonal, y de esta forma utilizar la metodología desarrollada líneas arriba. Introducimos las variables complejas  $z = x + iy$  y  $\bar{z} = x - iy$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$



Luego, después de ciertos cálculos obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_0 & 0 \\ 0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z, \bar{z}) \\ F_2(z, \bar{z}) \end{pmatrix},$$

donde  $F_1 = f_1 + if_2$  y  $F_2 = f_1 - if_2 = \bar{F}_1$ . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda z + F_1(z, \bar{z}) \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{\lambda} \bar{z} + \bar{F}_1(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

Observe que la segunda ecuación es conjugada de la primera. Busquemos términos resonantes de orden  $r$ , es decir, busquemos  $m$  e  $j$ , en la ecuación (2.25) tal que  $\Lambda_{m,j} = 0$ . Tenemos entonces que

$$m_1\lambda + m_2\bar{\lambda} = \lambda_i \Leftrightarrow (m_1 - m_2)\lambda = \lambda_i,$$

con  $\lambda_1 = \lambda$  y  $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ , además  $m_1 + m_2 = r$ . Para  $j = 1$ , la ecuación anterior se reduce a  $m_1 - m_2 = 1$ , por lo tanto, los términos resonantes son  $z^{k+1}\bar{z}^k e_1$ , para  $k = 1, 2, \dots$ . Para  $j = 2$ , tenemos la ecuación  $m_1 - m_2 = -1$ , por lo tanto, los términos resonantes son  $z^k\bar{z}^{k+1} e_2$ , para  $k = 1, 2, \dots$ . Luego, la forma normal del campo, en variables complejas, está dado por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k+1} \bar{z}^k \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{\lambda} \bar{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k z^k \bar{z}^{k+1} \end{aligned}$$

Pasemos el sistema a variable real, pero antes, observe que, si  $c_k = \alpha_{k-1} + i\beta_{k-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} c_k z^{k+1} \bar{z}^k &= c_k z (z \bar{z})^k \\ &= (\alpha_{k-1} + i\beta_{k-1})(x + iy)(x^2 + y^2)^k \\ &= [(\alpha_{k-1}x - \beta_{k-1}y) + i(\beta_{k-1}x + \alpha_{k-1}y)](x^2 + y^2)^k. \end{aligned}$$

Usando los cambios de coordenadas anteriores, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) \\ \frac{i}{2}(-\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) \end{pmatrix},$$

donde  $\mathcal{F}(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k+1} \bar{z}^k$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) &= \operatorname{Re}(\mathcal{F}(z, \bar{z})) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k-1}x - \beta_{k-1}y)(x^2 + y^2)^k, \\ \frac{i}{2} (-\mathcal{F}(z, \bar{z}) + \bar{\mathcal{F}}(z, \bar{z})) &= \operatorname{Im}(\mathcal{F}(z, \bar{z})) = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{k-1}x + \alpha_{k-1}y)(x^2 + y^2)^k, \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k-1}x - \beta_{k-1}y)(x^2 + y^2)^k \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{k-1}x + \alpha_{k-1}y)(x^2 + y^2)^k \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k-1}x - \beta_{k-1}y)(x^2 + y^2)^k \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{k-1}x + \alpha_{k-1}y)(x^2 + y^2)^k \end{aligned}$$

No es difícil verificar que este mismo campo, escrito en coordenadas polares se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k-1} r^{2k+1} \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k-1} r^{2k} \end{aligned}$$

## 2.4. Bifurcación de Hopf

Consideremos aquí un sistema de la forma

$$\dot{x} = f_{\mu}(x), \tag{2.29}$$

con  $\mu = \mu_0$  y un punto de equilibrio  $p(\mu_0)$ , en el cual  $Df_{\mu_0}$  tiene un par de valores propios puramente imaginarios,  $\pm i\omega$ , con  $\omega > 0$  y ningún otro valor propio con parte

real cero. El teorema de la función implícita garantiza (ya que  $Df_{\mu_0}$  es invertible) que para cada  $\mu$  cerca de  $\mu_0$  existirá un punto de equilibrio  $p(\mu)$  cerca de  $p(\mu_0)$  el cual varía suavemente con  $\mu$ . No obstante las dimensiones de las variedades estable e inestable en  $p(\mu)$  cambian si los valores propios de  $Df(p(\mu))$  cruzan el eje imaginario en  $\mu_0$ . Este cambio cualitativo en el flujo local cerca de  $p(\mu)$  se debe marcar por algunos otros cambios locales en los retratos fase que no implican puntos fijos.

Una pista de qué sucede en el problema genérico de la bifurcación que implica un equilibrio con valores propios imaginarios puros se puede obtener de examinar los sistemas lineales en los cuales hay un cambio de este tipo. Por ejemplo, considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - \omega y \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y\end{aligned}\tag{2.30}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \text{sen } \omega t \\ \text{sen } \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.\tag{2.31}$$

Cuando  $\mu < 0$ , las soluciones espirales convergen al origen, y cuando  $\mu > 0$  las soluciones espirales se alejan del origen. Cuando  $\mu = 0$ , todas las soluciones son periódicas. Incluso en una familia uni-paramétrica de ecuaciones, es frecuente encontrar un valor del parámetro en el cual haya una familia completa de órbitas periódicas, más aún, hay una superficie de órbitas periódicas que aparece en el problema genérico (2.29).

El ejemplo 2.1 nos da la información que requerimos acerca de como el problema genérico difiere de el sistema (2.30). Mediante cambios de coordenadas suaves, las series de Taylor de grado 3 (tomando  $k=1$ ), para el problema general puede ser trasladado a la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_0 y + (\alpha_0 x - \beta_0 y)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \omega_0 x + (\beta_0 x + \alpha_0 y)(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{2.32}$$

la cual puede ser expresada en coordenadas polares como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha_0 r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \beta_0 r^2\end{aligned}\tag{2.33}$$

Como el lado derecho de la ecuación  $\dot{r}$  en (2.33) es independiente de  $\theta$ , vemos que existen órbitas periódicas de (2.32) las cuales son círculos de radio  $r = \text{constante}$ ,

obtenidos de las soluciones diferentes de cero de  $\dot{r} = 0$  en (2.33). Si  $\alpha_0 \neq 0$  y  $d \neq 0$  (el teorema líneas abajo especifica quien es y que representa esta constante) esas soluciones permanecen a lo largo de la parábola  $\mu = -l_1 r^2/d$ . Esto implica que la superficie de órbitas periódicas tiene una tangencia cuadrática con su plano tangente  $\mu = 0$  en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . El teorema de la bifurcación de Hopf establece que las propiedades cualitativas de (2.32) cerca del origen permanecen sin cambio si se agregan los términos de orden superior al sistema:

**Teorema 2.6** (*Teorema de la bifurcación de Hopf*) *Supongamos que el sistema  $\dot{x} = f(x, \mu)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , tiene un punto de equilibrio  $(x_0, \mu_0)$  tal que*

(H1)  $D_x f(x_0, \mu_0)$  tiene un par de valores propios imaginarios puros y ningún otro valor propio con parte real cero.

(H2) Sean  $\lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu)$  los valores propios de  $D_x f(x_0, \mu)$  los cuales son imaginarios en  $\mu = \mu_0$ , tales que

$$d = \frac{d}{d\mu} (\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0. \quad (2.34)$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional que pasa por  $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  y un sistema de coordenadas suave para el cual la expansión de Taylor de grado tres sobre la variedad central, en coordenadas polares, es dada por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r, \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2. \end{aligned}$$

Si  $l_1 \neq 0$ , entonces existe una superficie de soluciones periódicas en la variedad central, la cual tiene tangencia cuadrática con el eigenespacio de  $\lambda(\mu_0)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu_0)$  que coincide en dimensión dos, con el paraboloides  $\mu = -\frac{l_1}{d}r^2$ . Si  $l_1 < 0$ , entonces, esas soluciones periódicas son estables, mientras que si  $l_1 > 0$ , son ciclos límite inestables.

Los coeficientes de estabilidad  $d$  y  $l_1$  son llamados *velocidad de cruce* y *primer coeficiente de Lyapunov*, respectivamente.

Como puede verificarse en [10], este teorema puede ser probado por una aplicación directa de los teoremas de la variedad central y de las formas normales que se estudiaron en las secciones anteriores.

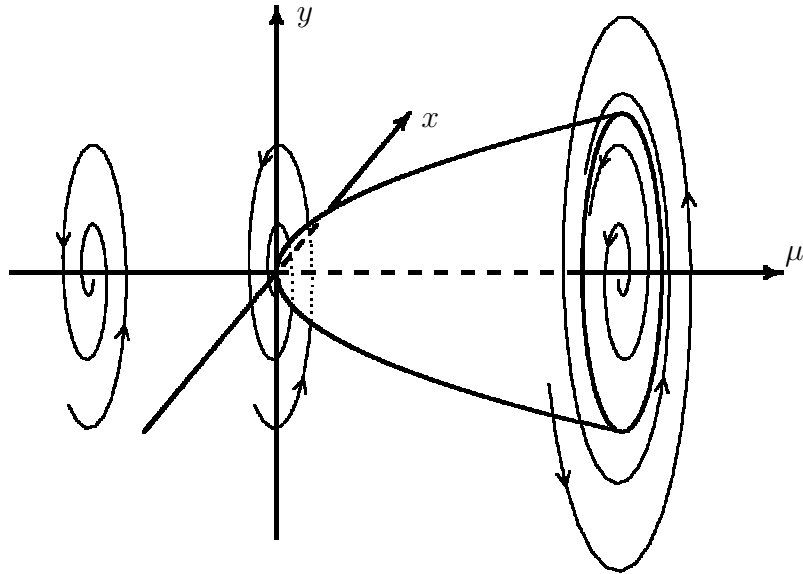


Figura 2.2: Familia uni-paramétrica de órbitas periódicas  $S$  resultantes de la bifurcación de Hopf, en un punto de equilibrio no hiperbólico  $x_0$  y un valor de bifurcación  $\mu_0$ .

**Observación 2.5** *La dirección hacia donde abre la superficie de soluciones periódicas en la variedad central nos la proporciona el signo del producto  $d \cdot l_1$ , si  $d \cdot l_1 > 0$  abre hacia la izquierda del valor de bifurcación, si  $d \cdot l_1 < 0$  abre hacia la derecha del valor de bifurcación.*

### 2.4.1. Primer coeficiente de Lyapunov

Existe una expresión en los sistemas bidimensionales, para encontrar el primer coeficiente de Lyapunov  $l_1$  (ver [9]). Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x),$$

donde  $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ ,  $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$  con  $F(0) = 0$  y  $DF(0) = 0$ . Entonces

$$l_1 = \frac{1}{16\omega}(R_1 + \omega R_2), \quad (2.35)$$

donde

$$R_1 = [F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2}]|_{x=0},$$

$$R_2 = [F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2}]|_{x=0}.$$



# Capítulo 3

## Bifurcación de Hopf Controlable

### 3.1. Introducción

En este capítulo aportaremos una prueba diferente a la que se presenta en [13] para el Teorema de la bifurcación de Hopf controlable, esta nueva demostración es más simple y más completa, ya que estamos aportando de manera adicional el como obtener de manera explícita el primer coeficiente de Lyapunov, guiándonos por la fórmula dada en (2.35).

Como ya se ha mencionado al principio de este trabajo, el Teorema de la bifurcación de Hopf controlable, es un resultado básico para lograr los objetivos del mismo, por lo cual consideramos que la prueba aquí expuesta, aparte de ser clave en el desarrollo y análisis total que presentamos, es por si misma una aportación muy importante y novedosa en la teoría de la bifurcación de Hopf, por lo que le dedicaremos todo un capítulo.

Existen diferentes formas para controlar la bifurcación de Hopf. Dependiendo de las herramientas matemáticas que se empleen, podemos distinguir tres aproximaciones: Las que usan el método de proyección, la forma de Brunowsky, y la forma de Jordan. Siendo la última de éstas la más simple, la usaremos como una forma normal. Por lo cual exponemos primeramente la siguiente



**Definición 3.1** De entre los sistemas que experimentan la bifurcación de Hopf y que es posible controlarla, llamaremos la **forma normal de la bifurcación de Hopf controlable** al sistema

$$\dot{\eta} = J\eta + F(\eta) + G(\eta)u, \quad (3.1)$$

donde  $\eta \in \mathbb{R}^n$  es el estado, y  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada del control. Los campos vectoriales  $F(\eta)$  y  $G(\eta)$  se suponen suficientemente suaves, con  $F(0) = DF(0) = 0$ . Se supone también que  $J = \begin{pmatrix} J_H & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$  con  $J_H = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$  y  $\sigma(J_S) \subset \mathbb{C}^-$ ,  $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ ,  $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ , con  $F_1, G_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y  $G(0) = \bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}$  con  $0 \neq \bar{b}_1 \in \mathbb{R}^2$ .

## 3.2. Teorema de la bifurcación de Hopf controlable

El siguiente teorema permite establecer *a priori*, para un sistema en la forma normal de la bifurcación de Hopf controlable, los valores de  $l_1$  y  $d$ , esto permite controlar la dirección y estabilidad de las soluciones periódicas que surgen de la bifurcación de Hopf.

**Teorema 3.1** (Teorema de la bifurcación de Hopf controlable)[13]

Dado el sistema (3.1), donde  $\eta = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ , con  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , y  $\bar{b}_1 \neq 0$ , entonces, el control de realimentación de estado

$$u(z, \mu, \beta, \gamma) = \mu(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2) + \gamma_1 z_1^3 + \gamma_2 z_2^3, \quad (3.2)$$

es tal que el sistema a lazo-cerrado (3.1-3.2) experimenta la bifurcación de Hopf controlable en  $\eta = 0$  cuando  $\mu = 0$ . Más aún, la velocidad de cruce  $d$  y el primer coeficiente de Lyapunov  $l_1$ , están dados por

$$d = \frac{1}{2}\beta \cdot \bar{b}_1 \quad y \quad l_1 = c_0 + \frac{3}{8}\gamma \cdot \bar{b}_1, \quad (3.3)$$

donde  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  y  $c_0$  es una constante que depende de los campos vectoriales  $F$  y  $G$ .

No presentaremos aquí la prueba de este teorema la cual puede consultarse en [13]. Pero si presentamos otra versión del teorema, que a nuestro juicio representa una mejora en el sentido de que es posible dar explícitamente el valor de la constante  $c_0$  que aparece en el primer coeficiente de Lyapunov  $l_1$ . Analizaremos enseguida, algunos resultados que nos ayudaran a simplificar y entender mejor la prueba de esta nueva versión del teorema 3.1.

### 3.3. Nueva versión del teorema

#### 3.3.1. Lemas preliminares

**Lema 3.1** *Dado el sistema (3.1), existe un cambio de coordenadas*

$$\eta = \xi + H(x), \quad (3.4)$$

donde  $\xi = (x, y)^T$ , tal que el sistema (3.1) se transforma en

$$\dot{\xi} = J\xi + f(\xi) + g(\xi)u \quad (3.5)$$

donde  $f(\xi) = f_2(\xi) + f_3(\xi) + \dots$ , con  $f_i$  un vector cuyas entradas son polinomios homogéneos de grado  $i$ . Además,

(i)  $f_2(\xi)$  no posee términos de la forma  $x_i x_j$  para  $i, j = 1, 2$ ,

(ii)  $f_3(\xi) = \begin{pmatrix} f_{31}(\xi) \\ f_{32}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{31}^r(x) + \hat{f}_{31}(\xi) \\ f_{32}(\xi) \end{pmatrix}$ , donde

$$f_{31}^r(x) = \begin{pmatrix} (\alpha_0 x_1 - \beta_0 x_2)(x_1^2 + x_2^2) \\ (\beta_0 x_1 + \alpha_0 x_2)(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

(iii)  $\hat{f}_{31}(\xi)$  no posee términos de la forma  $x_i^2 x_j$ , para  $i, j = 1, 2$ ,

(iv)  $g(0) = \bar{b}$ .

**Prueba.** Sea

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_2(x) + h_3(x) \\ j_2(x) \end{pmatrix},$$

donde  $h_2(x)$  y  $j_2(x)$  son polinomios homogéneos de grado dos y  $h_3(x)$  es un polinomio homogéneo de grado tres. Luego,

$$\begin{aligned} z &= x + h_2(x) + h_3(x), \\ w &= y + j_2(x). \end{aligned}$$

Derivando obtenemos

$$\dot{z} = \dot{x} + Dh_2(x)\dot{x} + Dh_3(x)\dot{x}, \quad (3.7)$$

$$\dot{w} = \dot{y} + Dj_2(x)\dot{x}. \quad (3.8)$$

Substituyendo (3.7) en la primera ecuación del sistema (3.1), obtenemos

$$\dot{x} = (I + D(h_2(x) + h_3(x)))^{-1} (J_H(x + h_2(x) + h_3(x)) + \bar{f}_1(x, y) + \bar{g}_1(x, y)u) \quad (3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(x, y) &= F_1(x + h_2(x) + h_3(x), y + j_2(x)), \\ \bar{g}_1(x, y) &= G_1(x + h_2(x) + h_3(x), y + j_2(x)). \end{aligned}$$

Como  $F_1(0) = DF_1(0) = 0$ , entonces el desarrollo de Taylor de  $F_1$  alrededor del origen es

$$F_1(\eta) = \frac{1}{2}D^2F_1(0)(\eta, \eta) + \frac{1}{6}D^3F_1(0)(\eta, \eta, \eta) + \dots .$$

Considerando que  $F_1(\eta) = F_1(z, w) = \begin{pmatrix} F_1^1(z, w) \\ F_1^2(z, w) \end{pmatrix}$ , con  $F_1^j : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}$  para  $j = 1, 2$ , entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}D^2F_1(0)(\eta, \eta) &= \frac{1}{2}(z^T, w^T) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1^1(0)}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 F_1^1(0)}{\partial z \partial w} \\ \frac{\partial^2 F_1^1(0)}{\partial w \partial z} & \frac{\partial^2 F_1^1(0)}{\partial w^2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1^2(0)}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 F_1^2(0)}{\partial z \partial w} \\ \frac{\partial^2 F_1^2(0)}{\partial w \partial z} & \frac{\partial^2 F_1^2(0)}{\partial w^2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (z^T F_{1zz}^1(0) + w^T F_{1wz}^1(0)) & (z^T F_{1zw}^1(0) + w^T F_{1ww}^1(0)) \\ (z^T F_{1zz}^2(0) + w^T F_{1wz}^2(0)) & (z^T F_{1zw}^2(0) + w^T F_{1ww}^2(0)) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z^T F_{1zz}^1(0)z + w^T F_{1wz}^1(0)z + z^T F_{1zw}^1(0)w + w^T F_{1ww}^1(0)w \\ z^T F_{1zz}^2(0)z + w^T F_{1wz}^2(0)z + z^T F_{1zw}^2(0)w + w^T F_{1ww}^2(0)w \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z^T F_{1zz}^1(0)z + 2z^T F_{1zw}^1(0)w + w^T F_{1ww}^1(0)w \\ z^T F_{1zz}^2(0)z + 2z^T F_{1zw}^2(0)w + w^T F_{1ww}^2(0)w \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(z^T F_{1zz}^1(0)z + 2z^T F_{1zw}^1(0)w + w^T F_{1ww}^1(0)w) \\
&= \frac{1}{2}z^T F_{1zz}^1(0)z + z^T F_{1zw}^1(0)w + \frac{1}{2}w^T F_{1ww}^1(0)w.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\frac{1}{6}D^3F_1(0)(\eta, \eta, \eta) = \frac{1}{6}F_{1zzz}(0)(z, z, z) + \dots$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1(x, y) &= \frac{1}{2}(x + h_2(x) + h_3(x))^T F_{1zz}(0, 0)(x + h_2(x) + h_3(x)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(y + j_2(x))^T F_{1ww}(0, 0)(y + j_2(x)) \\
&\quad + (x + h_2(x) + h_3(x))^T F_{1zw}(0, 0)(y + j_2(x)) + \frac{1}{6}F_{1zzz}(0, 0)(x, x, x) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1(x, y) &= \left( \frac{1}{2} x^T F_{1zz}(0, 0) x \right) + \left( x^T F_{1zw}(0) y + \frac{1}{2} y^T F_{1ww}(0) y \right) \\
&\quad + \left( x^T F_{1zz}(0, 0) h_2(x) + x^T F_{1zw}(0, 0) j_2(x) + \frac{1}{6} F_{1zzz}(0, 0)(x, x, x) \right) \\
&\quad + \left( y^T F_{1ww}(0) j_2(x) + y^T F_{1wz}(0) h_2(x) \right) + \mathcal{O}(|\xi|^4) \\
&= f_{21}(x) + \bar{f}_{21}(x, y) + f_{31}(x) + \bar{f}_{31}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^4),
\end{aligned}$$

donde

$$f_{21}(x) = \frac{1}{2} x^T F_{1zz}(0, 0) x, \quad (3.10)$$

$$f_{31}(x) = x^T F_{1zz}(0, 0) h_2(x) + x^T F_{1zw}(0, 0) j_2(x) + \frac{1}{6} F_{1zzz}(0, 0)(x, x, x), \quad (3.11)$$

ya se puede observar que  $f_{j1}(x)$  posee términos homogéneos en  $x$  de grado  $j$  y  $\bar{f}_{j1}(x, y)$  no posee términos homogéneos en  $x$  de grado  $j$ . Similarmente, si  $G_1(\eta) = \bar{b}_1 + \dots$ , entonces,  $\bar{g}_1(x, y) = \bar{b}_1 + \dots$ . Regresando a (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (I - Dh_2(x) - Dh_3(x) + (Dh_2(x))^2 + \dots) (J_H x + J_H h_2(x) + f_{21}(x) + \bar{f}_{21}(x, y) \\
&\quad + J_H h_3(x) + f_{31}(x) + \bar{f}_{31}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^4) + \bar{g}_1(x, y) u) \\
&= J_H x + (J_H h_2(x) + f_{21}(x) - Dh_2(x) J_H x) + (J_H h_3(x) + f_{31}(x) \\
&\quad - Dh_2(x) (J_H h_2(x) + f_{21}(x)) + ((Dh_2(x))^2 - Dh_3(x)) J_H x) \\
&\quad + \bar{f}_{21}(x, y) + \bar{f}_{31}(x, y) + Dh_2(x) \bar{f}_{21}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^4) + (I - Dh_2(x) + \dots) \bar{g}_1(x, y) u \\
&= J_H x + \hat{f}_{21}(x) + \bar{f}_{21}(x, y) + \hat{f}_{31}(x) + \bar{f}_{31}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^4) + g_1(x, y) u,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{21}(x) &= J_H h_2(x) + f_{21}(x) - Dh_2(x) J_H x, \\
\tilde{f}_{31}(x) &= J_H h_3(x) + f_{31}(x) - Dh_2(x) (J_H h_2(x) + f_{21}(x)) \\
&\quad + ((Dh_2(x))^2 - Dh_3(x)) J_H x, \\
\hat{f}_{31}(x, y) &= \bar{f}_{31}(x, y) + Dh_2(x) \bar{f}_{21}(x, y), \\
g_1(x, y) &= (I - Dh_2(x) + \dots) \bar{g}_1(x, y) = \bar{b}_1 + \dots.
\end{aligned} \quad (3.12)$$

Por el teorema 2.5 de formas normales debido a Poincaré-Dulac, existen  $h_2$  y  $h_3$  tales que  $\tilde{f}_{21}(x) \equiv 0$  y

$$\hat{f}_{31}(x) = f_{31}^r(x) = \begin{pmatrix} (\alpha_0 x_1 - \beta_0 x_2)(x_1^2 + x_2^2) \\ (\beta_0 x_1 + \alpha_0 x_2)(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

son los términos resonantes de orden tres. Por lo tanto, tenemos que

$$\dot{x} = J_H x + \bar{f}_{21}(x, y) + f_{31}^r(x) + \hat{f}_{31}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^4) + g_1(x, y)u. \quad (3.14)$$

Ahora bien, de (3.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{w} + Dj_2(x)\dot{x} \\ &= J_S(y + j_2(x)) + \bar{f}_2(x, y) + \bar{g}_2(x, y)u - Dj_2(x) (J_H x + \bar{f}_{21}(x, y) + f_{31}^r(x) \\ &\quad + \bar{f}_{31}(x, y) + Dh_2(x)\bar{f}_{21}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^4) + g_1(x, y)u) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(x, y) &= F_2(x + h_2(x) + h_3(x), y + j_2(x)) = f_{22}(x) + \bar{f}_{22}(x, y) + (\mathcal{O})(|\xi|^3), \\ \bar{g}_2(x, y) &= G_2(x + h_2(x) + h_3(x), y + j_2(x)) = \bar{b}_2 + \dots, \end{aligned}$$

con  $f_{22}(x) = \frac{1}{2}x^T F_{2zz}(0)x$  un polinomio homogéneo de grado dos en  $x$  y  $\bar{f}_{22}(x, y)$  no posee términos homogéneos de grado dos en  $x$ . Tenemos entonces que

$$\dot{y} = J_S y + \tilde{f}_{22}(x) + \bar{f}_{22}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^3) + g_2(x, y)u,$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{22}(x) &= J_S j_2(x) + f_{22}(x) - Dj_2(x)J_H x, \\ g_2(x, y) &= \bar{g}_2(x, y) - Dj_2(x)g_1(x, y) = \bar{b}_2 + \dots. \end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos por un momento el sistema

$$\begin{aligned} \dot{z} &= J_H z + F_1(z, w), \\ \dot{w} &= J_S w + F_2(z, w). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Es claro que posee una variedad central invariante de dimensión dos, la cual podemos determinar como la gráfica de una función  $j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ ,  $w = j(z)$ , que satisface la ecuación homológica

$$Dj(z) (J_H z + F_1(z, j(z))) - J_S j(z) - F_2(z, j(z)) \equiv 0.$$

Si consideramos una aproximación hasta orden dos,  $j(z) = j_2(z) + \mathcal{O}(|z|^3)$ , entonces obtenemos la ecuación

$$Dj_2(z)J_H z - J_S j_2(z) - \frac{1}{2}z^T F_{2zz}(0)z \equiv 0, \quad (3.16)$$

Luego entonces, si seleccionamos  $j_2(x)$  en el cambio de coordenadas (3.4) de tal forma que sea la aproximación cuadrática de la variedad central del sistema (3.15), entonces  $\tilde{f}_{22}(x) \equiv 0$ , y entonces

$$\dot{y} = J_S y + \bar{f}_{22}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^3) + g_2(x, y)u.$$

Resumiendo, mediante el cambio de coordenadas (3.4) se ha transformado el sistema (3.1), en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J_H x + \bar{f}_{21}(x, y) + f_{31}^r(x) + \hat{f}_{31}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^4) + g_1(x, y)u, \\ \dot{y} &= J_S y + \bar{f}_{22}(x, y) + \mathcal{O}(|\xi|^3) + g_2(x, y)u. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Esto termina la prueba.

■

**Corolario 3.1** *La constante  $\alpha_0$  contenida en (3.6), es el primer coeficiente de Lyapunov del sistema*

$$\dot{x} = J_H x + f_{31}(x), \quad (3.18)$$

donde  $f_{31}(x)$  es dado por (3.11).

**Prueba.** Dado el sistema (3.18), por el teorema de las formas normales, podemos tomar un cambio de coordenadas de la forma  $x = \varphi + h_3(\varphi)$ , tal que es posible simplificar (3.18) al sistema

$$\dot{\varphi} = J_H \varphi + f_{31}^r(\varphi), \quad (3.19)$$

donde

$$f_{31}^r(\varphi) = \begin{pmatrix} (\alpha_0 \varphi_1 - \beta_0 \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \\ (\beta_0 \varphi_1 + \alpha_0 \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{pmatrix},$$

y podemos observar claramente que el primer coeficiente de Lyapunov de (3.19) es precisamente  $\alpha_0$ .

■

Ahora estamos en condiciones de poder enunciar un segundo lema,

**Lema 3.2** *Dado el sistema (3.17), entonces, el control de realimentación de estado*

$$u(x, \mu) = \mu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) + \gamma_1 x_1^3 + \gamma_2 x_2^3, \quad (3.20)$$

*es tal que el sistema a lazo-cerrado (3.17-3.20) experimenta la bifurcación de Hopf controlable en  $\xi = 0$  cuando  $\mu = 0$ . Más aún, la velocidad de cruce  $d$  y el primer coeficiente de Lyapunov  $l_1$ , están dados por*

$$d = \frac{1}{2}\beta \cdot \bar{b}_1 \quad y \quad l_1 = \alpha_0 + \frac{3}{8}\gamma \cdot \bar{b}_1, \quad (3.21)$$

*donde  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  y  $\alpha_0$  es el primer coeficiente de Lyapunov del sistema (3.18).*

**Prueba.** Sea  $Dg(0) = M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ , y dada la ley de control (3.20), la podemos reescribir como

$$u(x, \mu) = \mu\beta x + C(x), \quad (3.22)$$

donde  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ , y  $C(x)$  representa los términos cúbicos. Entonces, usando (3.22) en (3.17), obtenemos el sistema a lazo-cerrado

$$\dot{x} = J_H x + \mathcal{F}_1(x, y, \mu), \quad (3.23)$$

$$\dot{y} = J_S y + \mathcal{F}_2(x, y, \mu), \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x, y, \mu) &= \bar{f}_{21}(x, y) + \hat{f}_{31}^r(x) + \hat{f}_{31}(x, y) + \mu\beta x \bar{b}_1 + C(x) \bar{b}_1 \\ &\quad + \mu\beta x (M_1 x + M_2 y + \dots) + \dots, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{F}_2(x, y, \mu) = \bar{f}_{22}(x, y) + \mu\beta x \bar{b}_2 + C(x) \bar{b}_2 + \mu\beta x (M_3 x + M_4 y + \dots) + \dots.$$

La ecuación (3.23) representa una familia de sistemas  $\mu$ -parametrizada, la cual podemos escribir como un sistema suspendido, y agregando la ecuación (3.24), tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x, \mu, y) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(x, \mu, y) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$



En esta forma, el sistema tiene una variedad central tridimensional que pasa a través del origen,

$$y = h(x, \mu) = \frac{1}{2}x^T S_1 x + x^T S_2 \mu + \frac{1}{2}\mu^T S_3 \mu + \dots \quad (3.27)$$

tal que  $h(0, 0) = Dh(0, 0) = 0$ . Substituyendo (3.27) en (3.26) y usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} [J_H x + \mathcal{F}_1(x, \mu, h(x, \mu))] - J_S h(x, \mu) - \mathcal{F}_2(x, \mu, h(x, \mu)) \equiv 0. \quad (3.28)$$

De (3.25) es claro que  $\mathcal{F}_2(x, \mu, h(x, \mu))$  no posee términos homogéneos de grado dos en  $x$ , por lo tanto, substituyendo (3.27) en (3.28) obtenemos

$$(x^T S_1) J_H x - \frac{1}{2} J_S x^T S_1 x + \dots \equiv 0,$$

concluyendo entonces que  $S_1 = 0$ , es decir, al igual que  $\mathcal{F}_2$ , la variedad central tampoco posee términos homogéneos de grado dos en  $x$ . Luego entonces, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J_H x + \mathcal{F}_1(x, \mu, h(x, \mu)) \\ &= J_H x + \bar{f}_{21}(x, h(x, \mu)) + f_{31}^r(x) + \hat{f}_{31}(x, h(x, \mu)) + \mu\beta x \bar{b}_1 + C(x) \bar{b}_1 \\ &\quad + \mu\beta x (M_1 x + M_2 h(x, \mu) + \dots) + \dots \\ &= J_H x + \mu(\bar{b}_1 \beta) x + C(x) \bar{b}_1 + f_{31}^r(x) + \mathcal{O}(|x, \mu|^2) \\ &= J_\mu x + C(x) \bar{b}_1 + f_{31}^r(x) + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde  $J_\mu = J_H + \mu \mathcal{L}$  con  $\mathcal{L} = \bar{b}_1 \beta$ .

Ahora probaremos que el sistema (3.29) experimenta la bifurcación de Hopf, en  $x = 0$  y  $\mu = 0$ . Para esto, necesitamos calcular los valores propios de  $J_\mu$  y probar que éstos cruzan el eje imaginario cuando  $\mu = 0$ , y necesitamos probar que el primer coeficiente de Lyapunov es diferente de cero. Sea  $J_\mu = J_H + \mu \mathcal{L}$ , la parte lineal del sistema (3.29). El polinomio característico es dado por

$$\lambda^2 - tr(J_\mu)\lambda + det(J_\mu) = 0,$$

donde  $tr(J_\mu) = \mu \cdot tr(\mathcal{L})$ ,  $det(J_\mu) = \omega(\mathcal{L}_{21} - \mathcal{L}_{12})\mu + \omega^2$ , con  $\mathcal{L} = [\mathcal{L}_{ij}]$ . Entonces, para  $\mu$  suficientemente pequeña, sus valores propios están dados por

$$\lambda(\mu) = \frac{1}{2} tr(J_\mu) \pm i \sqrt{det(J_\mu) - \left(\frac{1}{2} tr(J_\mu)\right)^2}.$$

Por lo tanto,  $\lambda(0) = \pm i\omega$  y  $Re(\lambda(\mu)) = \frac{1}{2}\mu \cdot tr(\mathcal{L})$ , pero

$$tr(\mathcal{L}) = tr(\bar{b}_1\beta) = tr\left(\begin{pmatrix} \bar{b}_{11} \\ \bar{b}_{12} \end{pmatrix} (\beta_1, \beta_2)\right) = tr\begin{pmatrix} \bar{b}_{11}\beta_1 & \bar{b}_{11}\beta_2 \\ \bar{b}_{12}\beta_1 & \bar{b}_{12}\beta_2 \end{pmatrix} = \bar{b}_{11}\beta_1 + \bar{b}_{12}\beta_2 = \beta \cdot \bar{b}_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d &= \frac{d}{d\mu} (Re(\lambda(\mu)))|_{\mu=0} \\ &= \frac{d}{d\mu} \left( \frac{1}{2}\mu tr(\mathcal{L}) \right) |_{\mu=0} \\ &= \frac{1}{2} tr(\mathcal{L}) \\ d &= \frac{1}{2} \beta \cdot \bar{b}_1 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Usaremos la fórmula (2.35) para calcular el primer coeficiente de Lyapunov  $l_1$ . Haciendo  $\mu = 0$  en (3.29) obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (\gamma_1 x_1^3 + \gamma_2 x_2^3) \bar{b}_1 \\ &+ \begin{pmatrix} \alpha_0 x_1^3 + \alpha_0 x_1 x_2^2 - \beta_0 x_1^2 x_2 - \beta_0 x_2^2 \\ \beta_0 x_1^3 + \beta_0 x_1 x_2^2 + \alpha_0 x_1^2 x_2 + \alpha_0 x_2^3 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Es claro que  $R_1 = 0$  y

$$\begin{aligned} R_2 &= f_{1x_1x_1x_1} + f_{1x_1x_2x_2} + f_{2x_1x_1x_2} + f_{2x_2x_2x_2} \\ &= 6\gamma_1 \bar{b}_{11} + 6\alpha_0 + 2\alpha_0 + 2\alpha_0 + 6\gamma_2 \bar{b}_{12} + 6\alpha_0 \\ &= 16\alpha_0 + 6(\gamma_1 \bar{b}_{11} + \gamma_2 \bar{b}_{12}) \\ &= 16\alpha_0 + 6\gamma \cdot \bar{b}_1, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{16\omega} (R_1 + \omega R_2) \\ &= \frac{1}{16} R_2 \\ &= \alpha_0 + \frac{3}{8} \gamma \cdot \bar{b}_1. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Esto termina la prueba.

■

### 3.3.2. Expresión explícita del cambio de coordenadas

En esta sección encontraremos las formas explícitas de los polinomios homogéneos  $h_2(x)$  y  $h_3(x)$ , incluidos en el cambio de coordenadas del lema 3.1 como parte de la función  $H(x)$ . Primero resolveremos la ecuación,

$$J_H h_2(x) - Dh_2(x) J_H x + f_{21}(x) \equiv 0, \quad (3.32)$$

donde

$$h_2(x) = h_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} h_{21}(x_1, x_2) \\ h_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

con

$$h_{2i}(x_1, x_2) = a_i x_1^2 + b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2,$$

y

$$f_{21}(x) = f_{21}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{21}^1(x_1, x_2) \\ f_{21}^2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

con

$$f_{21}^i(x_1, x_2) = r_i x_1^2 + s_i x_1 x_2 + t_i x_2^2,$$

entonces, (3.32) se reduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \equiv -\frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \\ r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned} h_{21}(x_1, x_2) &= -\frac{s_1 + r_2 + 2t_2}{3\omega} x_1^2 + \frac{2r_1 - 2t_1 + s_2}{3\omega} x_1 x_2 + \frac{s_1 - 2r_2 - t_2}{3\omega} x_2^2, \\ h_{22}(x_1, x_2) &= \frac{r_1 + 2t_1 - s_2}{3\omega} x_1^2 + \frac{2r_2 - s_1 - 2t_2}{3\omega} x_1 x_2 + \frac{2r_1 + t_1 + s_2}{3\omega} x_2^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ahora bien, sabemos por el teorema 2.5, que existe  $h_3(x)$ , tal que  $\tilde{f}_{31}(x) \equiv f_{31}^r(x)$ , donde el lado derecho de la equivalencia está dado por (3.6). De (3.12) tenemos que

$$\tilde{f}_{31}(x) = J_H h_3(x) + f_{31}(x) - Dh_2(x)(J_H h_2(x) + f_{21}(x)) + ((Dh_2(x))^2 - Dh_3(x)) J_H x,$$

donde  $f_{31}(x)$  es dado por (3.11). Por lo tanto, debemos encontrar  $h_3(x)$ , tal que

$$J_H h_3(x) - Dh_3(x)J_H x - Dh_2(x)[J_H h_2(x) - Dh_2(x)J_H x + f_{21}(x)] + f_{31}(x) \equiv f_{31}^r(x)$$

como ya se obtuvo  $h_2(x)$  tal que el término entre corchetes es cero, entonces la equivalencia a resolver es

$$J_H h_3(x) - Dh_3(x)J_H x \equiv f_{31}^r(x) - f_{31}(x). \quad (3.34)$$

De manera similar al cálculo anterior, hagamos ahora,

$$h_3(x) = \begin{pmatrix} h_{31}(x_1, x_2) \\ h_{32}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_{31}(x) = \begin{pmatrix} f_{31}^1(x_1, x_2) \\ f_{31}^2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

tales que,

$$\begin{aligned} h_{3i}(x_1, x_2) &= a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3 \\ f_{31}^j(x_1, x_2) &= n_j x_1^3 + o_j x_1^2 x_2 + p_j x_1 x_2^2 + q_j x_2^3 \end{aligned} \quad \text{para } i, j = 1, 2,$$

entonces, en base a la forma de la matriz  $J_H$ , resolver (3.34) se reduce a resolver el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \alpha_0 - n_1 \\ -\beta_0 - o_1 \\ \alpha_0 - p_1 \\ -\beta_0 - q_1 \\ \beta_0 - n_2 \\ \alpha_0 - o_2 \\ \beta_0 - p_2 \\ \alpha_0 - q_2 \end{bmatrix}$$

se puede observar fácilmente que la matriz de coeficientes del sistema no es invertible, esto nos lleva a obtener una infinidad de soluciones, las cuales las hacemos dependientes del valor que tomen los términos  $a_2$  y  $b_2$ , lo cual implica que cada una

de las entradas de  $h_3(x)$  son

$$\begin{aligned} h_{31}(x_1, x_2) &= \left( b_2 - \frac{5n_2 + o_1 - p_2 + 3q_1}{8\omega} \right) x_1^3 + \left( -a_2 + \frac{5n_1 - o_2 - p_1 - 3q_2}{8\omega} \right) x_1^2 x_2 \\ &\quad + \left( b_2 - \frac{3n_2 - o_1 - p_2 + 3q_1}{4\omega} \right) x_1 x_2^2 + \left( -a_2 + \frac{n_1 - o_2 + p_1 - q_2}{4\omega} \right) x_2^3, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} h_{32}(x_1, x_2) &= a_2 x_1^3 + b_2 x_1^2 x_2 + \left( a_2 + \frac{n_1 + 3o_2 - p_1 - 3q_2}{8\omega} \right) x_1 x_2^2 \\ &\quad + \left( b_2 - \frac{3n_2 - o_1 - 3p_2 + q_1}{8\omega} \right) x_2^3. \end{aligned}$$

considerando que

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{8}(3n_1 + o_2 + p_1 + 3q_2) \quad y \\ \beta_0 &= \frac{1}{8}(3n_2 - o_1 + p_2 - 3q_1), \end{aligned}$$

lo cual es consistente con las fórmulas

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{16} (f_{31x_1x_1x_1}^1 + f_{31x_1x_2x_2}^1 + f_{31x_1x_1x_2}^2 + f_{31x_2x_2x_2}^2) \quad y \\ \beta_0 &= \frac{1}{16} (f_{31x_1x_1x_1}^2 + f_{31x_1x_2x_2}^2 - f_{31x_1x_1x_2}^1 - f_{31x_2x_2x_2}^1). \end{aligned}$$

### 3.3.3. El teorema en su nueva versión

Recordemos que para pasar del sistema original (3.1) al sistema (3.5), utilizamos el cambio de coordenadas  $\eta = \xi + H(x)$ , es decir  $z = x + h_2(x) + h_3(x)$  y  $w = y + j_2(x)$ , entonces, si nos “regresamos” a las coordenadas originales, principalmente en el caso de la coordenada  $z$ , tendremos que

$$\begin{aligned} x &= z - h_2(x) - h_3(x) \\ &= z - h_2(z - h_2(x) - h_3(x)) - h_3(z - h_2(x) - h_3(x)) \\ &= z - (h_2(z) + Dh_2(z)(-h_2(x) - h_3(x)) + \mathcal{O}(|z|^4)) \\ &\quad - (h_3(z) + Dh_3(z)(-h_2(x) - h_3(x)) + \mathcal{O}(|z|^5)) \\ &= z - h_2(z) + Dh_2(z)h_2(x) - h_3(z) + \mathcal{O}(|z|^4) \\ &= z - h_2(z) + Dh_2(z)[h_2(z) - Dh_2(z)(h_2(x) + h_3(x))] - h_3(z) + \mathcal{O}(|z|^4) \\ &= z - h_2(z) + Dh_2(z)h_2(z) - h_3(z) + \mathcal{O}(|z|^4), \end{aligned}$$

esto implica que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial h_{21}}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial h_{21}}{\partial z_2}(z) \\ \frac{\partial h_{22}}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial h_{22}}{\partial z_2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21}(z) \\ h_{22}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{21}(z) \\ h_{22}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{31}(z) \\ h_{32}(z) \end{pmatrix} + \dots,$$

es decir, si hacemos  $Z_i = x_i$  para  $i = 1, 2$ , entonces

$$Z_i = z_i + \nabla h_{2i}(z) \cdot h_2(z) - h_{2i}(z) - h_{3i}(z) + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (3.36)$$

donde  $h_2(z)$  y  $h_3(z)$ , están dados por (3.33) y (3.35) respectivamente.

En base a los resultados anteriores y considerando el regreso en el cambio de coordenadas que acabamos de desarrollar, hemos demostrado una nueva versión para el teorema (3.1), la cual enunciamos en el siguiente

**Teorema 3.2** *Dado el sistema no lineal en la forma normal de la bifurcación de Hopf controlable (3.1),*

$$\dot{\eta} = J\eta + F(\eta) + G(\eta)u,$$

*entonces el control de realimentación de estado*

$$u(Z, \mu, \beta, \gamma) = \mu(\beta \cdot Z) + \gamma_1 Z_1^3 + \gamma_2 Z_2^3, \quad (3.37)$$

*es tal que el sistema a lazo-cerrado (3.1)-(3.37), experimenta la bifurcación de Hopf controlable en  $\eta = 0$  cuando  $\mu = 0$ . Además la velocidad de cruce  $d$  y el primer coeficiente de Lyapunov  $l_1$ , están dados por*

$$d = \frac{1}{2}\beta \cdot \bar{b}_1, \quad l_1 = \alpha_0 + \frac{3}{8}\gamma \cdot \bar{b}_1, \quad (3.38)$$

*donde  $Z = (Z_1, Z_2)^T$ , cuyas entradas se calculan en (3.36),  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  y  $\alpha_0$  es el primer coeficiente de Lyapunov del sistema (3.18).*

## 3.4. Un ejemplo

Consideremos el siguiente sistema, dado en la forma (3.17)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\omega_0 z_2 + \alpha_0 z_1(z_1^2 + z_2^2) + u \\ \dot{z}_2 &= \omega_0 z_1 + \alpha_0 z_2(z_1^2 + z_2^2) \\ \dot{w} &= \lambda_0 w + a_1 z_1 w. \end{aligned} \quad (3.39)$$

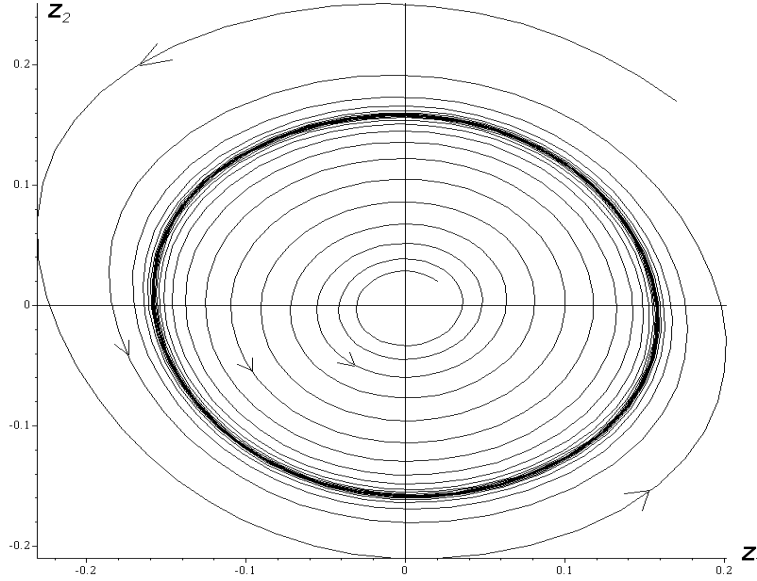


Figura 3.1: Órbita periódica atractora alrededor del origen, del sistema (3.39).

donde  $\omega_0 > 0$  y  $\lambda_0 < 0$ .

Es claro que si tomamos  $u = 0$ , el origen es un punto de equilibrio no hiperbólico. Aplicando el teorema 3.2, proponemos el control escalar  $u$  de la forma

$$u(z, \mu, \beta, \gamma) = \mu\beta_1 z_1 + \gamma_1 z_1^3, \quad (3.40)$$

con los coeficientes de estabilidad

$$d = \frac{1}{2}\beta_1 \quad \text{y} \quad l_1 = \alpha_0 + \frac{3}{8}\gamma_1, \quad (3.41)$$

nótese que la forma que toman tanto el control  $u$  como los coeficientes de estabilidad  $d$  y  $l_1$ , se deben a que en (3.39)  $g_1(0,0) = (1,0)^T$  y  $g_2(0,0) = 0$ . Entonces si  $\beta_1 = 1$ ,  $\alpha_0 = 1$ , y  $\gamma_1 = -8$ , tenemos que  $d > 0$  y  $l_1 < 0$ , lo cual nos dice que para  $\mu > 0$  tendremos una superficie de órbitas cerradas alrededor del origen que son atractoras. En particular si asignamos los siguientes valores a los diferentes parámetros del sistema (3.39),  $\omega_0 = 1$ ,  $\lambda_0 = -1$ ,  $a_1 = 1$ , y consideramos  $\mu = 0,1$ , obtenemos la dinámica dada por figura 3.1.

# Capítulo 4

## Control de oscilaciones alrededor de la bifurcación $k$ -cero

En este capítulo, se presenta un método analítico para el análisis y el control de oscilaciones en sistemas de control no lineales, cuya linealización alrededor del origen tiene un valor propio cero de multiplicidad  $k$ . La idea principal consiste en explotar, para el caso  $k = 2$ , la existencia de una curva de puntos de bifurcación tipo Hopf sobre su deformación versal, para controlar las oscilaciones usando el teorema 3.2. Entonces el caso general se reduce al caso doble-cero a través de un cambio de coordenadas y un cambio en el control.

### 4.1. Introducción

La bifurcación  $k$ -cero ocurre cuando la parte lineal del campo vectorial tiene un valor propio cero de multiplicidad  $k$  y el resto de los valores propios tiene parte real diferente de cero. En la presente sección consideramos el caso no diagonalizable.

El caso  $k = 2$  es llamado bifurcación Takens-Bognadov (doble-cero) y fue estudiada independientemente por Takens [11] en 1974 y Bognadov [5] en 1975. Ellos encontraron una deformación versal y probaron que en el plano de los parámetros existen curvas con puntos de bifurcación silla-nodo, puntos de bifurcación tipo Hopf y puntos de bifurcación tipo órbitas homoclínicas, ver [9, 16] para más detalles. Existen pocos trabajos sobre el análisis y control para el caso  $k \geq 3$ . En [23, 24] la bifurcación y el comportamiento inestable son estudiados para el caso  $k = 3$ , mien-



tras que en [4] las formas normales son calculadas para los casos  $k = 2$  y  $k = 3$ . En [7] se estudió un método para asegurar una bifurcación *horquilla* (*pitchfork*) para el caso general  $k$ .

En [13, 15] se desarrolló una aproximación para establecer la estabilidad y la dirección de los ciclos límite que surgen de la bifurcación de Hopf, esto es, un método para controlar las oscilaciones en la bifurcación de Hopf. En [14] fue reportado un método analítico para controlar las oscilaciones de la bifurcación doble-cero, el cual es basado en [13, 15].

La idea en esta sección es presentar de manera conjunta los métodos desarrollados en [12] y [14], para usarlo en un sistema de control no lineal con bifurcación  $k$ -cero en el origen. En la presente sección procederemos como sigue. Primero, se da la formulación del problema. Enseguida, se resuelve el caso particular  $k = 2$ , y se sigue con el caso general.

## 4.2. Formulación del problema

Consideremos el sistema de control no lineal

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)u \quad (4.1)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$ ,  $J = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$ , con

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

y  $J_S \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$  es Hurwitz;  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son campos vectoriales suaves, tales que  $F(0) = DF(0) = 0$  y  $G(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , donde  $b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1k} \end{pmatrix}$ , y  $\xi = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ , con  $z \in \mathbb{R}^k$  y  $w \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Entonces, nuestro objetivo es diseñar un control de realimentación

$$u = u(z, \mu) \quad (4.2)$$

tal que el sistema a lazo-cerrado (4.1)-(4.2) experimente la llamada *bifurcación de Hopf controlable* en  $\xi = 0$  cuando  $\mu = 0$ .

### 4.3. Control de las oscilaciones para el caso $k = 2$

En esta parte, dado un sistema de control no lineal, cuya linealización tiene un valor propio cero de multiplicidad dos y el resto de los valores propios con parte real menor que cero, la idea es diseñar un control de realimentación tal que, primero, transforme el valor propio cero doble en un par de valores propios imaginarios, sin cambiar el resto de los valores propios, y enseguida usar el teorema 3.2 para controlar la bifurcación de Hopf.

#### 4.3.1. Diseño de la ley de control

Consideremos el sistema de control no lineal (4.1), para el caso  $k = 2$ ,

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)u \quad (4.3)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$ ,  $J = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$ , con  $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $J_S \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$  es Hurwitz;  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son campos vectoriales suaves tales que  $F(0) = DF(0) = 0$  y  $G(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , donde  $b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}$ , y  $\xi = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ , con  $z \in \mathbb{R}^2$  y  $w \in \mathbb{R}^{n-2}$ .

Considérese

$$u = \alpha z + v, \quad (4.4)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ . La idea es encontrar  $\alpha$  tal que transforme el valor propio cero doble de  $J$ , en un par de valores propios imaginarios sin cambiar los otros valores propios de  $J$ . Substituyendo (4.4) en (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= J\xi + F(\xi) + G(\xi)(\alpha z + v) \\ &= J\xi + F(\xi) + G(\xi)\alpha z + G(\xi)v \\ &= \tilde{J}\xi + \tilde{F}(\xi) + G(\xi)v. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si  $G(\xi) = G(0) + G_1(\xi)$ , entonces  $\tilde{F}(\xi) = F(\xi) + G_1(\xi)\alpha z$ , y

$$\begin{aligned}\tilde{J}\xi &= J\xi + G(0)\alpha z \\ &= \begin{pmatrix} J_2 z \\ J_S w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \alpha z \\ b_2 \alpha z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_2 + b_1 \alpha & 0 \\ b_2 \alpha & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},\end{aligned}$$

esto es,  $\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_2 + b_1 \alpha & 0 \\ b_2 \alpha & J_S \end{pmatrix}$ .

Recuerde que nuestro objetivo es encontrar  $\alpha$  tal que un par de valores propios de  $\tilde{J}$  esten sobre el eje imaginario. Obsérvese que  $\tilde{J}$  es triangular por bloques, entonces, sus valores propios estan dados por los valores propios de  $J_2 + b_1 \alpha$  y  $J_S$ . Entonces, es suficiente encontrar  $\alpha$  de tal manera que los dos valores propios de  $J_2 + b_1 \alpha$  esten sobre el eje imaginario, esto es,

$$\begin{aligned}tr(J_2 + b_1 \alpha) &= 0 & \text{y} \\ |J_2 + b_1 \alpha| &= \omega_0^2,\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde  $|\cdot|$  denota el determinante de la matriz, y  $\omega_0 > 0$ . Si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  entonces el sistema (4.6) se reduce a

$$\begin{aligned}b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 &= 0 \\ -b_{12}\alpha_1 &= \omega_0^2.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Si suponemos que  $b_{12} \neq 0$ , la solución de (4.7) es dada por

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{\omega_0^2}{b_{12}} \\ \alpha_2 &= \frac{b_{11}\omega_0^2}{b_{12}^2}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Resumiendo, el control de realimentación de estado (4.4), con  $\alpha_1, \alpha_2$  dados por (4.8), transforma el par de valores propios cero de la matriz  $J$  en un par de valores propios imaginarios  $\pm i\omega_0$ , y el resto de los valores propios permanecen igual.

### 4.3.2. Cambio de coordenadas

Para usar el teorema 3.2 en el sistema (4.5), necesitamos cambiar las coordenadas para poner la parte lineal en forma de Jordan, *i.e.*, debemos encontrar  $\eta = \Phi^{-1}\xi$  tal que

$$\Phi^{-1}\tilde{J}\Phi = \begin{pmatrix} J_H & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix},$$

donde  $J_H = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Lema 4.1** *Existen  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $B \in \mathbb{R}^{(n-2) \times 2}$  únicas, tales que*

$$A^{-1}(J_2 + b_1\alpha)A = J_H \quad (4.9)$$

$$J_S B - B J_H = -b_2\alpha A. \quad (4.10)$$

**Prueba.** Sabemos que  $J_2 + b_1\alpha$ , con  $\alpha$  dada por (4.8), tiene como valores propios a  $\pm i\omega_0$ , entonces, si  $v = v_1 + iv_2$  es el vector propio de  $J_2 + b_1\alpha$  para el valor propio  $i\omega_0$ , entonces

$$A \doteq \begin{pmatrix} v_2 & v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{b_{11}}{b_{12}}\omega_0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

resuelve la ecuación (4.9). La ecuación (4.10) es una ecuación de Sylvester, y por el lema 2.1 tiene solución única  $B$  para cada  $-b_2\alpha A$ .

■

**Lema 4.2** *Sean  $A$  y  $B$  soluciones del sistema (4.9-4.10). Entonces la matriz*

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & I \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

es tal que  $\Phi^{-1}\tilde{J}\Phi = \begin{pmatrix} J_H & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$ .

**Prueba.** Sólo obsérvese que

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

■

Finalmente, usando el cambio de coordenadas  $\eta = \Phi^{-1}\xi$  con  $\Phi$  dado por (4.12) en el sistema (4.5), obtenemos

$$\dot{\eta} = \bar{J}\eta + f(\eta) + g(\eta)v, \quad (4.13)$$

donde  $\eta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\bar{J} = \begin{pmatrix} J_H & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$ ,  $f(\eta) = \Phi^{-1}\tilde{F}(\Phi\eta)$  y  $g(\eta) = \Phi^{-1}G(\Phi\eta)$ .

Definiendo

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = g(0) = \Phi^{-1}G(0) = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}b_1 \\ -BA^{-1}b_1 + b_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} \\ \bar{b}_{12} \end{pmatrix} = A^{-1}b_1 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{b_{11}}{\omega_0} \\ 0 & \frac{b_{12}}{\omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b_{12}}{\omega_0} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4.14)$$

Resumiendo, el sistema (4.3) ha sido llevado a través del cambio en el control (4.4), y el cambio de coordenadas (4.12) a la forma normal de la bifurcación de Hopf controlable (4.13).

### 4.3.3. Diseño de $v(z, \mu, \lambda)$

Siguiendo el teorema 3.2, proponemos el control de realimentación de estado (3.37) para el sistema (4.13)

$$v(X, \mu, \beta, \gamma) = \mu(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2) + \gamma_1 X_1^3 + \gamma_2 X_2^3,$$

con

$$X_i = x_i + \nabla h_{2i}(x) \cdot h_2(x) - h_{2i}(x) - h_{3i}(x) + \mathcal{O}(|x|^4), \quad i = 1, 2, \quad (4.15)$$

para  $h_2(x)$  y  $h_3(x)$  dados por (3.33) y (3.35) respectivamente.

Sin embargo, tenemos que  $\bar{b}_{11} = 0$ , ver (4.14), y de las expresiones de  $l_1$  y  $d$ , dadas por (3.38), es posible hacer  $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ , entonces, proponemos el control

$$v(X, \mu, \beta_2, \gamma_2) = \mu\beta_2 X_2 + \gamma_2 X_2^3, \quad (4.16)$$

para  $X_2$  calculada en (4.15). Ahora, tenemos que poner esta ley de control en las variables originales, pero sabemos que  $\xi = \Phi\eta$ , y por (4.11)-(4.12), concluimos que  $x_2 = \frac{z_2}{\omega_0}$ , y substituyendo en (4.16) obtenemos

$$v(Z, \mu, \beta_2, \gamma_2) = \frac{\mu\beta_2}{\omega_0} Z_2 + \frac{\gamma_2}{\omega_0^3} Z_2^3, \quad (4.17)$$

donde

$$Z_2 = z_2 + \nabla h_{22}(\mathbf{z}) \cdot h_2(\mathbf{z}) - h_{22}(\mathbf{z}) - h_{32}(\mathbf{z}) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^4), \quad (4.18)$$

donde  $\mathbf{z} = A^{-1}z$ .

Finalmente, para este control se sigue de (3.38)-(4.14) que

$$d = \frac{1}{2} \frac{b_{12}}{\omega_0} \beta_2 \quad \text{y} \quad l_1 = \alpha_0 + \frac{3}{8} \frac{b_{12}}{\omega_0} \gamma_2. \quad (4.19)$$

**Observación 4.1** Recordemos que el cómo obtener el cálculo de los polinomios  $h_2$  y  $h_3$  que aparecen en (4.18), y la constante  $\alpha_0$  en (4.19), están dados de manera explícita en el capítulo 3, más concretamente en la sección 3.3.2 y en el corolario 3.1 respectivamente.

#### 4.3.4. Teorema principal

Con los controles de realimentación (4.4) y (4.17), establecemos el resultado principal para el caso  $k = 2$ .

**Teorema 4.1** Considerando el sistema de control no lineal

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)u, \quad (4.20)$$

donde  $\xi = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ , con  $z \in \mathbb{R}^2$  y  $w \in \mathbb{R}^{n-2}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $J = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$ , con  $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $J_S$  es Hurwitz, y  $G(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , con  $b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}$ . Si  $b_{12} \neq 0$ , entonces el control de realimentación de estado

$$u(z, \mu, \alpha, \beta_2, \gamma_2) = \alpha \cdot z + \frac{\mu\beta_2}{\omega_0} Z_2 + \frac{\gamma_2}{\omega_0^3} Z_2^3, \quad (4.21)$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_1 = -\omega_0^2/b_{12}$ ,  $\alpha_2 = b_{11}\omega_0^2/b_{12}^2$ ,  $Z_2$  es calculado en (4.18), son tales que el sistema a lazo-cerrado (4.20)-(4.21) experimenta la bifurcación de Hopf controlable en  $\xi = 0$  cuando  $\mu = 0$ . Además, los coeficientes de estabilidad pueden ser calculados de (4.19).

## 4.4. Control de las oscilaciones para el caso general

La idea es encontrar un control de realimentación de estado  $u = \alpha z + v$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}^k$ , y un cambio de coordenadas, tal que (4.1) pueda ser transformado en el sistema (4.3), y entonces aplicar el teorema 4.1 para controlar las oscilaciones de la bifurcación  $k$ -cero.

### 4.4.1. Reducción al caso $k = 2$

Consideremos el sistema no lineal (4.1) y la ley de control  $u = \alpha z + v$ , entonces

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= J\xi + F(\xi) + G(\xi)u \\ &= J\xi + F(\xi) + G(\xi)(\alpha z + v) \\ &= \tilde{J}\xi + \tilde{F}(\xi) + G(\xi)v,\end{aligned}\tag{4.22}$$

donde  $\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_k + b_1\alpha & 0 \\ b_2\alpha & J_S \end{pmatrix}$ . Observe que esta matriz es triangular por bloques, entonces sus valores propios son dados por los valores propios de  $J_k + b_1\alpha$  y  $J_S$ . Entonces debemos encontrar  $\alpha$  tal que dos valores propios de  $J_k + b_1\alpha$  sean cero y el resto de ellos tengan parte real negativa. Consideremos ahora,  $\alpha = (0, 0, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_k) = (0, \bar{\alpha})$ , entonces  $J_k + b_1\alpha = \begin{pmatrix} J_2 & \mathcal{B}_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ , donde

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{11}\alpha_3 & b_{11}\alpha_4 & \cdots & b_{11}\alpha_k \\ b_{12}\alpha_3 + 1 & b_{12}\alpha_4 & \cdots & b_{12}\alpha_k \end{pmatrix}_{2 \times (k-2)},$$

y

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{13}\alpha_3 & b_{13}\alpha_4 + 1 & b_{13}\alpha_5 & \cdots & b_{13}\alpha_k \\ b_{14}\alpha_3 & b_{14}\alpha_4 & b_{14}\alpha_5 + 1 & \cdots & b_{14}\alpha_k \\ & & \vdots & & \\ b_{1,k-1}\alpha_3 & b_{1,k-1}\alpha_4 & b_{1,k-1}\alpha_5 & \cdots & b_{1,k-1}\alpha_k + 1 \\ b_{1k}\alpha_3 & b_{1k}\alpha_4 & b_{1k}\alpha_5 & \cdots & b_{1k}\alpha_k \end{pmatrix}_{k-2 \times k-2}.$$

Observe ahora, que la matriz  $J_k + b_1\alpha$  es triangular por bloques con dos valores propios cero y el resto de los valores propios, son los valores propios de  $B_1$ . El siguiente lema nos dá  $\bar{\alpha}$  tal que, ésta coloca los valores propios de  $B_1$  en cualquier lugar del semiplano complejo izquierdo.

**Observación 4.2** Aún cuando el siguiente lema está en términos de un lema de existencia, en realidad la existencia de  $\bar{\alpha}$  la asegura el Teorema de asignación de polos, este teorema surge en la teoría de control lineal y es ampliamente tratado en [17]. Sin embargo, se establece el lema de esta manera ya que en su demostración se proporciona la forma explícita que tiene este vector  $\bar{\alpha}$ .

**Lema 4.3** Si  $b_{1k} \neq 0$ , entonces existe  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^{k-2}$  tal que

- (i)  $\sigma(B_1) \subset \mathbb{C}^-$
- (ii)  $\sigma(B_1) \cap \sigma(J_S) = \emptyset$

**Prueba.** Sea  $\tilde{J}_S \in \mathbb{R}^{k-2 \times k-2}$  una matriz tal que  $\sigma(\tilde{J}_S) \subset \mathbb{C}^-$  y  $\sigma(\tilde{J}_S) \cap \sigma(J_S) = \emptyset$ , con polinomio característico

$$p_{\tilde{J}_S}(\lambda) = \lambda^{k-2} + c_{k-2}\lambda^{k-3} + \cdots + c_2\lambda + c_1.$$

Debemos encontrar  $\bar{\alpha} = (\alpha_3, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k-2}$  tal que

$$p_{B_1}(\lambda) \equiv p_{\tilde{J}_S}(\lambda). \tag{4.23}$$

Luego entonces, no es difícil ver que

$$p_{B_1}(\lambda) = \lambda^{k-2} + p_{k-2}(\bar{\alpha})\lambda^{k-3} + \cdots + p_2(\bar{\alpha})\lambda + p_1(\bar{\alpha}),$$

donde

$$\begin{aligned} p_1(\bar{\alpha}) &= -b_{1k}\alpha_3 \\ p_2(\bar{\alpha}) &= -(b_{1,k-1}\alpha_3 + b_{1k}\alpha_4) \\ &\vdots \\ p_{k-2}(\bar{\alpha}) &= -(b_{13}\alpha_3 + b_{14}\alpha_4 + \cdots + b_{1k}\alpha_k). \end{aligned}$$

Entonces, (4.23) es equivalente a

$$\begin{cases} p_1(\bar{\alpha}) = c_1 \\ p_2(\bar{\alpha}) = c_2 \\ \vdots \\ p_{k-2}(\bar{\alpha}) = c_{k-2} \end{cases}$$



si y sólo si

$$\begin{pmatrix} -b_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{1,k-1} & -b_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ -b_{13} & -b_{14} & -b_{15} & \cdots & -b_{1k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{k-2} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$T\bar{\alpha} = C, \quad \text{lo cual implica que} \quad \bar{\alpha} = T^{-1}C, \quad (4.24)$$

donde  $\det(T) = (-1)^{k-2}b_{1k}^{k-2} \neq 0$ .

■

Finalmente, si  $b_2\alpha = (0, \mathcal{B}_2)_{(n-k) \times k}$ , donde  $\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} b_{21}\alpha_3 & \cdots & b_{21}\alpha_k \\ \vdots & & \vdots \\ b_{2,n-k}\alpha_3 & \cdots & b_{2,n-k}\alpha_k \end{pmatrix}$ , y  $\bar{\alpha}$

es dado por (4.24), entonces

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_k + b_1\alpha & 0 \\ b_2\alpha & J_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2 & \mathcal{B}_1 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 & J_S \end{pmatrix},$$

tiene dos valores propios cero y el resto de ellos esta en  $\mathbb{C}^-$ .

#### 4.4.2. Cambio de coordenadas

Para usar el teorema 4.1, necesitamos encontrar un cambio de coordenadas  $\eta = \mathcal{P}^{-1}\xi$ , para poner  $\tilde{J}$  en forma de bloques de Jordan.

**Lema 4.4** *Existen  $P \in \mathbb{R}^{2 \times k-2}$  y  $Q \in \mathbb{R}^{n-k \times k-2}$  tales que*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I & P & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & Q & I \end{pmatrix},$$

la cual satisface que

$$\mathcal{P}^{-1}\tilde{J}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & \bar{J}_S \end{pmatrix} = \bar{J}, \quad (4.25)$$

donde  $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , y  $\bar{J}_S = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$ , con  $\sigma(\bar{J}_S) \subset \mathbb{C}^-$ .

**Prueba.** Primero, observe que

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -P & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -Q & I \end{pmatrix}.$$

Enseguida,

$$\mathcal{P}^{-1}\tilde{J}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} J_2 & X_1 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & X_2 & J_S \end{pmatrix},$$

donde  $X_1 = J_2P - PB_1 + \mathcal{B}_1$  y  $X_2 = J_SQ - QB_1 + \mathcal{B}_2$ . Pero, por el lema 2.1, existen  $P$  y  $Q$  tales que la ecuación matricial

$$\begin{aligned} J_2P - PB_1 + \mathcal{B}_1 &= 0 \\ J_SQ - QB_1 + \mathcal{B}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

tiene solución única para cada  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$ .

■

El cambio de coordenadas  $\eta = \mathcal{P}^{-1}\xi$  transforma (4.22) en el sistema

$$\dot{\eta} = \bar{J}\eta + \bar{F}(\eta) + \bar{G}(\eta)v \quad (4.27)$$

donde  $\bar{J}$  es dado por (4.25) y  $\bar{G}(\eta) = \mathcal{P}^{-1}G(\mathcal{P}\xi)$ . Si  $b_1 = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \hat{b}_1 \end{pmatrix}$ , donde  $\tilde{b}_1 =$

$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}$  y  $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ \vdots \\ b_{1k} \end{pmatrix}$ , y  $\bar{G}(0) = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}$ , donde  $\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} \\ \bar{b}_{12} \end{pmatrix}$ , de esto se sigue que,

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \bar{G}(0) = \mathcal{P}^{-1}G(0) = \begin{pmatrix} I & -P & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \hat{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 - P\hat{b}_1 \\ \hat{b}_1 \\ -Q\hat{b}_1 + b_2 \end{pmatrix},$$

esto es,  $\bar{b}_1 = \tilde{b}_1 - P\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} \\ \bar{b}_{12} \end{pmatrix}$ . Luego entonces, si  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,k-2} \\ p_{21} & \cdots & p_{2,k-2} \end{pmatrix}$ , entonces

$$\bar{b}_{11} = b_{11} - \sum_{j=1}^{k-2} p_{1j}b_{1,j+2} \quad \text{y} \quad \bar{b}_{12} = b_{12} - \sum_{j=1}^{k-2} p_{2j}b_{1,j+2}. \quad (4.28)$$

Finalmente, para usar el teorema 4.1, tenemos que probar que  $\bar{b}_{12} \neq 0$ .

**Lema 4.5**  $\bar{b}_{12} = \frac{b_{1k}}{c_1}$ , donde  $c_1 = \det(B_1) \neq 0$ .

**Prueba.** Sabemos que  $P$  satisface (4.26), esto es,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,k-2} \\ p_{21} & \cdots & p_{2,k-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,k-2} \\ p_{21} & \cdots & p_{2,k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13}\alpha_3 & \cdots & b_{13}\alpha_k \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1k}\alpha_3 & \cdots & b_{1k}\alpha_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}\alpha_3 & \cdots & b_{11}\alpha_k \\ b_{12}\alpha_3 + 1 & \cdots & b_{12}\alpha_k \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left( -\sum_{j=1}^{k-2} p_{2j} b_{1,j+2} \alpha_3 \right) + (b_{12}\alpha_3 + 1) &= 0 \\ \left( b_{12} - \sum_{j=1}^{k-2} p_{2j} b_{1,j+2} \right) \alpha_3 + 1 &= 0 \\ \bar{b}_{12}\alpha_3 + 1 &= 0 \\ \bar{b}_{12} &= -\frac{1}{\alpha_3}, \end{aligned}$$

pero, por (4.24),  $\alpha_3 = -\frac{c_1}{b_{1k}}$ .

■

#### 4.4.3. Diseño de la ley de control

Si  $\xi = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ , donde  $z = \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ , con  $\tilde{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  y  $\hat{z} = \begin{pmatrix} z_3 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}$ , y  $\eta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,

donde  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \eta = \mathcal{P}^{-1}\xi = \begin{pmatrix} I & -P & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \hat{z} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z} - P\hat{z} \\ \hat{z} \\ -Q\hat{z} + w \end{pmatrix},$$

esto es,

$$x_1 = (\tilde{z} - P\hat{z})^T \cdot e_1 \quad y \quad x_2 = (\tilde{z} - P\hat{z})^T \cdot e_2, \quad (4.30)$$

donde  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Para aplicar el teorema 4.1, necesitamos encontrar la matriz  $P$ . Se sigue de (4.29) y (4.28) que

$$p_{21} + \bar{b}_{11}\alpha_3 = 0, \quad (4.31)$$

$$p_{2i} + \bar{b}_{11}\alpha_{i+2} - p_{1,i-1} = 0 \quad \text{para } i = 2, \dots, k-2, \quad (4.32)$$

$$-p_{2i} + \bar{b}_{12}\alpha_{i+3} = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, k-3,$$

esto es,

$$\bar{b}_{11} = -p_{21}/\alpha_3, \quad (4.33)$$

$$p_{1i} = \bar{b}_{11}\alpha_{i+3} + \bar{b}_{12}\alpha_{i+4} \quad \text{para } i = 1, \dots, k-4,$$

$$p_{2i} = \bar{b}_{12}\alpha_{i+3} \quad \text{para } i = 1, \dots, k-3.$$

De (4.31) y (4.33) se sigue que  $\bar{b}_{11} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3^2}$ . Luego entonces, observe que,

$$\begin{aligned} \bar{b}_{12} &= b_{12} - \sum_{j=1}^{k-2} p_{2j}b_{1,j+2} \\ &= b_{12} - \sum_{j=1}^{k-3} p_{2j}b_{1,j+2} - p_{2,k-2}b_{1k}, \end{aligned}$$

así

$$p_{2,k-2} = \frac{1}{b_{1k}} \left( b_{12} + \frac{1}{\alpha_3} \left( 1 + \sum_{j=1}^{k-3} \alpha_{j+3}b_{1,j+2} \right) \right).$$

Substituyendo  $i = k-2$  en (4.32) obtenemos  $p_{1,k-3} = p_{2,k-2} + \frac{\alpha_4}{\alpha_3^2}\alpha_k$ . Finalmente, obsérvese que

$$\begin{aligned} \bar{b}_{11} &= b_{11} - \sum_{j=1}^{k-2} p_{1j}b_{1,j+2} \\ &= b_{11} - \sum_{j=1}^{k-4} p_{1j}b_{1,j+2} - p_{1,k-3}b_{1,k-1} - p_{1,k-2}b_{1k}, \end{aligned}$$

entonces

$$p_{1,k-2} = \frac{1}{b_{1k}} \left( b_{11} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3^2} \left( 1 + \sum_{j=1}^{k-4} \alpha_{j+3}b_{1,j+2} \right) + \frac{1}{\alpha_3} \sum_{j=1}^{k-4} \alpha_{j+4}b_{1,j+2} - p_{1,k-3}b_{1,k-1} \right).$$

con esto, completamos las entradas de  $P$ . Ahora, por el teorema 4.1, el control de realimentación de estado, es dado por

$$v = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \frac{\beta_2 \mu}{\omega_0} X_2 + \frac{\gamma_2}{\omega_0^3} X_2^3,$$

donde, de nuevo  $X_i$ , para  $i = 1, 2$  se obtiene de (4.15), y

$$\alpha_1 = \omega_0^2 \alpha_3 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = -\bar{b}_{11} \omega_0^2 \alpha_3, \quad (4.34)$$

con los coeficientes de estabilidad

$$d = \frac{1}{2} \frac{b_{1k}}{\omega_0 c_1} \beta_2, \quad \text{y} \quad l_1 = \alpha_0 + \frac{3}{8} \frac{b_{1k}}{\omega_0 c_1} \gamma_2, \quad (4.35)$$

por lo tanto, en términos de las variables originales,

$$\begin{aligned} u &= \bar{\alpha} \hat{z} + \alpha(\tilde{z} - P\hat{z}) + \frac{\beta_2 \mu}{\omega_0} Z_2 + \frac{\gamma_2}{\omega_0^3} Z_2^3 \\ u &= \alpha \tilde{z} + (\bar{\alpha} - \alpha P) \hat{z} + \frac{\beta_2 \mu}{\omega_0} Z_2 + \frac{\gamma_2}{\omega_0^3} Z_2^3, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde

$$Z_2 = (\underline{z}^T \cdot e_2) + \nabla h_{22}(\underline{z}) \cdot h_2(\underline{z}) - h_{22}(\underline{z}) - h_{32}(\underline{z}) + \mathcal{O}(|\underline{z}|^4), \quad (4.37)$$

donde  $\underline{z} = \tilde{z} - P\hat{z}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  es dado por (4.34), y  $\bar{\alpha}$  es dado por (4.24).

Aquí también debemos tener en cuenta la observación 4.1.

#### 4.4.4. Teorema principal

Hasta aquí, hemos probado ya el teorema principal de esta sección.

**Teorema 4.2** *Consideremos el sistema de control no lineal*

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)u \quad (4.38)$$

donde  $\xi = \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \hat{z} \\ w \end{pmatrix}$ , con  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\hat{z} \in \mathbb{R}^{k-2}$  y  $w \in \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $J = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$ , con

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{k \times k} \quad \text{y } J_S \text{ es Hurwitz, } G(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \text{ donde } b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1k} \end{pmatrix}.$$

Si  $b_{1k} \neq 0$ , entonces el control de realimentación de estado

$$u = \alpha \tilde{z} + (\bar{\alpha} - \alpha P) \hat{z} + \frac{\beta_2 \mu}{\omega_0} Z_2 + \frac{\gamma_2}{\omega_0^3} Z_2^3, \quad (4.39)$$

donde  $Z_2$  se obtiene de (4.37),  $\alpha = (\omega_0^2 \alpha_3, -\omega_0^2 \alpha_4 / \alpha_3)$  y  $\bar{\alpha}$  es dado por (4.24), es tal que el sistema a lazo-cerrado (4.38)-(4.39) experimenta la bifurcación de Hopf controlable, con los coeficientes de estabilidad (4.35).

Finalmente, podemos decir que hemos desarrollado hasta ahora, un método analítico para controlar oscilaciones en una cierta clase de sistemas de control no lineales. Este método se presentó en dos partes: en la primera parte se desarrolló para el caso particular de la bifurcación doble-cero, y aquí se trata de encontrar un cambio en el control y en las coordenadas de manera tal que el sistema es transformado en la forma normal de la bifurcación de Hopf controlable. La segunda parte consiste en transformar el caso general que llamamos la bifurcación  $k$ -cero en el caso particular  $k = 2$  (bifurcación doble-cero) para entonces aplicar el resultado obtenido en esta parte (Teorema 4.1).



# Capítulo 5

## Control de oscilaciones alrededor de la Bifurcación $k$ -cero Hopf

### 5.1. Introducción

La bifurcación  $k$ -cero Hopf ocurre cuando la parte lineal del campo vectorial tiene dos valores propios imaginarios,  $k$  valores propios cero y el resto son valores propios con parte real negativa. En este desarrollo consideramos otra vez, el caso no diagonalizable. El caso  $k = 1$  es llamado bifurcación cero Hopf.

En [13, 15] como ya hemos mencionado anteriormente, se desarrolló un método para establecer la estabilidad del ciclo límite que emerge de la bifurcación de Hopf, y la dirección hacia donde abre dicha bifurcación, esto es, un método para controlar el ciclo límite que surge en tal bifurcación. En esta sección estudiaremos un sistema controlable no lineal, cuya linealización tiene dos valores propios imaginarios, un valor propio cero de multiplicidad  $k$  y el resto de los valores propios tienen parte real negativa.

Entonces la idea es diseñar el control de realimentación tal que, primero transforme el valor propio cero de multiplicidad  $k$  en valores propios con parte real negativa, sin alterar las multiplicidades de los valores propios con parte real negativa ya existentes, para después usar el teorema 3.2, para controlar la bifurcación de Hopf obtenida.



## 5.2. Planteamiento del Problema

Consideremos el sistema no lineal de control

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)\mathbf{u} \quad (5.1)$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ ,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_k & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

con  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\omega > 0$ , y

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

y  $J_S \in \mathbb{R}^{n-(k+2) \times n-(k+2)}$  es Hurwitz;  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son campos vectoriales suaves,

tales que,  $F(0) = DF(0) = 0$  y  $G(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ , donde  $b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}$ ,  $b_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{2k} \end{pmatrix}$

y  $\xi = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ , con  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^k$  y  $w \in \mathbb{R}^{n-(k+2)}$ . Entonces, nuestro objetivo es diseñar un control de realimentación

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(z, \mu) \quad (5.3)$$

tal que el sistema a lazo-cerrado (5.1)-(5.3) experimenta la llamada *bifurcación de Hopf controlable* en  $\xi = 0$  cuando  $\mu = 0$ .

## 5.3. Control de las oscilaciones

La idea es encontrar un control de realimentación  $\mathbf{u} = \alpha z_2 + \nu$ , donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$  con  $z_2$  definido como antes, y un cambio de coordenadas, tal que (5.1) pueda ser

transformado en el sistema (3.1), y entonces aplicar el teorema 3.2 para controlar las oscilaciones de la bifurcación  $k$ -zero Hopf.

Consideremos el sistema no lineal (5.1) y la ley de control  $\mathbf{u} = \alpha z_2 + \nu$ , entonces

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= J\xi + F(\xi) + G(\xi)\mathbf{u} \\ &= J\xi + F(\xi) + G(\xi)(\alpha z_2 + \nu) \\ &= \tilde{J}\xi + \tilde{F}(\xi) + G(\xi)\nu,\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde  $\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & b_1\alpha & 0 \\ 0 & J_k + b_2\alpha & 0 \\ 0 & b_3\alpha & J_S \end{pmatrix}$ . Obsérvese que esta matriz es triangular por bloques, entonces sus valores propios están dados por los valores propios de  $J_1$ ,  $J_k + b_2\alpha$  y  $J_S$ . Entonces debemos encontrar  $\alpha$  tal que los valores propios de  $J_k + b_2\alpha$  tengan parte real negativa, y de tal manera que no esten en  $\sigma(J_S)$ . Aquí de nuevo la observación 4.2 es válida, ahora para el vector  $\alpha$ , y sin embargo de nuevo se establece el lema para obtener la forma explícita de dicho vector. Nótese que

$$J_k + b_2\alpha = \begin{pmatrix} b_{21}\alpha_1 & b_{21}\alpha_2 + 1 & b_{21}\alpha_3 & \cdots & b_{21}\alpha_k \\ b_{22}\alpha_1 & b_{22}\alpha_2 & b_{22}\alpha_3 + 1 & \cdots & b_{22}\alpha_k \\ & & \vdots & & \\ b_{2,k-1}\alpha_1 & b_{2,k-1}\alpha_2 & b_{2,k-1}\alpha_3 & \cdots & b_{2,k-1}\alpha_k + 1 \\ b_{2k}\alpha_1 & b_{2k}\alpha_2 & b_{2k}\alpha_3 & \cdots & b_{2k}\alpha_k \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

**Lema 5.1** Si  $b_{2k} \neq 0$ , entonces existe  $\alpha \in \mathbb{R}^k$  tal que

- (i)  $\sigma(J_k + b_2\alpha) \subset \mathbb{C}^-$
- (ii)  $\sigma(J_k + b_2\alpha) \cap \sigma(J_S) = \emptyset$

**Prueba.** Sea  $\bar{J}_S \in \mathbb{R}^{k \times k}$  una matriz tal que  $\sigma(\bar{J}_S) \subset \mathbb{C}^-$  y  $\sigma(\bar{J}_S) \cap \sigma(J_S) = \emptyset$ , con polinomio característico

$$p_{\bar{J}_S}(\lambda) = \lambda^k + c_k\lambda^{k-1} + \cdots + c_2\lambda + c_1.$$

Debemos encontrar  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$  tal que

$$p_{J_k + b_2\alpha}(\lambda) \equiv p_{\bar{J}_S}(\lambda).\tag{5.5}$$

Luego entonces, no es difícil ver que

$$p_{J_k+b_2\alpha}(\lambda) = \lambda^k + p_k(\alpha)\lambda^{k-1} + \dots + p_2(\alpha)\lambda + p_1(\alpha),$$

donde

$$\begin{aligned} p_1(\alpha) &= -b_{2k}\alpha_1 \\ p_2(\alpha) &= -(b_{2,k-1}\alpha_1 + b_{2k}\alpha_2) \\ &\vdots \\ p_k(\alpha) &= -(b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \dots + b_{2k}\alpha_k). \end{aligned}$$

Entonces, (5.5) es equivalente a

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_1(\alpha) = c_1 \\ p_2(\alpha) = c_2 \\ \vdots \\ p_k(\alpha) = c_k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b_{2k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b_{2,k-1} & -b_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & \dots & -b_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{T}\alpha = C \\ &\Leftrightarrow \alpha = \mathcal{T}^{-1}C. \end{aligned} \tag{5.6}$$

■

Finalmente, si  $b_1\alpha = \begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1 & \dots & b_{11}\alpha_k \\ b_{12}\alpha_1 & \dots & b_{12}\alpha_k \end{pmatrix} = \mathbb{B}_1$ ,

$$b_3\alpha = \begin{pmatrix} b_{31}\alpha_1 & \dots & b_{31}\alpha_k \\ \vdots & & \\ b_{3,n-(k+2)}\alpha_1 & \dots & b_{3,n-(k+2)}\alpha_k \end{pmatrix} = \mathbb{B}_2,$$

entonces

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{B}_1 & 0 \\ 0 & J_k + b_2\alpha & 0 \\ 0 & \mathbb{B}_2 & J_S \end{pmatrix},$$

tiene dos valores propios imaginarios, y el resto de ellos pueden estar en cualquier lugar del lado izquierdo del eje imaginario.

## 5.4. Cambio de coordenadas

Para usar el teorema 3.2, necesitamos encontrar un cambio de coordenadas  $\eta = \mathbb{P}^{-1}\xi$ , para poner  $\tilde{J}$  en bloques de Jordan.

**Lema 5.2** Si  $b_{2k} \neq 0$ , entonces existe  $E \in \mathbb{R}^{2 \times k}$  y  $L \in \mathbb{R}^{n-(k+2) \times k}$  tal que

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} I & E & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & L & I \end{pmatrix},$$

satisface

$$\mathbb{P}^{-1} \tilde{J} \mathbb{P} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_S & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix} = \bar{J}. \quad (5.7)$$

**Prueba.** Primero, obsérvese que

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -E & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -L & I \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathbb{P}^{-1} \tilde{J} \mathbb{P} = \begin{pmatrix} J_1 & \mathcal{X}_1 & 0 \\ 0 & \bar{J}_S & 0 \\ 0 & \mathcal{X}_2 & J_S \end{pmatrix},$$

donde  $\mathcal{X}_1 = J_1 E - E \bar{J}_S + \mathbb{B}_1$  y  $\mathcal{X}_2 = J_S L - L \bar{J}_S + \mathbb{B}_2$ . Pero, por el lema 2.1, existen  $E$  y  $L$  tal que la ecuación matricial

$$\begin{aligned} J_1 E - E \bar{J}_S + \mathbb{B}_1 &= 0 \\ J_S L - L \bar{J}_S + \mathbb{B}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

tiene solución única para cada  $\mathbb{B}_1$  y  $\mathbb{B}_2$ .

■

El cambio de coordenadas  $\eta = \mathbb{P}^{-1}\xi$  transforma (5.4) en el sistema

$$\dot{\eta} = \bar{J}\eta + \bar{F}(\eta) + \bar{G}(\eta)\nu \quad (5.9)$$

donde  $\bar{J}$  es dado por (5.7) y  $\bar{G}(\eta) = \mathbb{P}^{-1}G(\mathbb{P}\xi)$ . Si  $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} \hat{b}_{11} \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix}$ , donde  $\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} \hat{b}_{21} \\ \vdots \\ \hat{b}_{2k} \end{pmatrix}$

y  $\hat{b}_3 = \begin{pmatrix} \hat{b}_{31} \\ \vdots \\ \hat{b}_{3,n-(k+2)} \end{pmatrix}$ , y  $\bar{G}(0) = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix}$ , de aquí se sigue que,

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \bar{G}(0) = \mathcal{P}^{-1}G(0) = \begin{pmatrix} I & -E & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -L & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - Eb_2 \\ b_2 \\ -Lb_2 + b_3 \end{pmatrix},$$

esto es,  $\hat{b}_1 = b_1 - Eb_2 = \begin{pmatrix} \hat{b}_{11} \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix}$ . Luego entonces, si  $E = \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & \cdots & e_{2k} \end{pmatrix}$ , entonces

$$\hat{b}_{11} = b_{11} - \sum_{j=1}^k e_{1j}b_{2j} \quad y \quad \hat{b}_{12} = b_{12} - \sum_{j=1}^k e_{2j}b_{2j}. \quad (5.10)$$

Finalmente, para usar el teorema 3.2, debemos establecer cuando  $\hat{b}_1 \neq 0$ .

**Lema 5.3** Si  $b_1 \neq 0$  entonces  $\hat{b}_1 \neq 0$ .

**Prueba.** Sabemos que  $E$  satisface (5.8), esto es,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & \cdots & e_{2k} \end{pmatrix} - \\ &\quad \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & \cdots & e_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21}\alpha_1 & b_{21}\alpha_2 + 1 & b_{21}\alpha_3 & \cdots & b_{21}\alpha_k \\ b_{22}\alpha_1 & b_{22}\alpha_2 & b_{22}\alpha_3 + 1 & \cdots & b_{22}\alpha_k \\ & & \vdots & & \\ b_{2,k-1}\alpha_1 & b_{2,k-1}\alpha_2 & b_{2,k-1}\alpha_3 & \cdots & b_{2,k-1}\alpha_k + 1 \\ b_{2k}\alpha_1 & b_{2k}\alpha_2 & b_{2k}\alpha_3 & \cdots & b_{2k}\alpha_k \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1 & \cdots & b_{11}\alpha_k \\ b_{12}\alpha_1 & \cdots & b_{12}\alpha_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por lo tanto, de (5.11) es claro que

$$\omega e_{1i} - e_{2,i-1} + \hat{b}_{12}\alpha_i = 0 \quad \text{y} \quad \omega e_{2i} + e_{1,i-1} - \hat{b}_{11}\alpha_i = 0, \quad (5.12)$$

para  $i = 1, \dots, k$  donde  $e_{10} = e_{20} = 0$ .

Supongamos que  $\hat{b}_1 = 0$ , esto es  $\hat{b}_{11} = 0$  y  $\hat{b}_{12} = 0$ . Entonces, de (5.12) obtenemos

$$\omega e_{1i} - e_{2,i-1} = 0 \quad \text{y} \quad \omega e_{2i} + e_{1,i-1} = 0, \quad \forall \quad i = 1, \dots, k,$$

esto es

$$e_{1i} = \frac{e_{2,i-1}}{\omega} \quad \text{y} \quad e_{2i} = -\frac{e_{1,i-1}}{\omega}, \quad \forall \quad i = 1, \dots, k.$$

Si  $i = 1$ , entonces

$$e_{11} = \frac{0}{\omega} = 0 \quad \text{y} \quad e_{21} = -\frac{0}{\omega} = 0.$$

Si  $i = 2$ ,

$$e_{12} = \frac{0}{\omega} = 0 \quad \text{y} \quad e_{22} = -\frac{0}{\omega} = 0,$$

y así sucesivamente. Entonces  $E = [e_{ij}] = 0$ , por lo tanto  $\hat{b}_1 = b_1 = 0$ , lo cual es una contradicción. Entonces  $\hat{b}_1 \neq 0$ .

■

## 5.5. Diseño de la ley de control

Si  $\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}$ , donde  $z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}$ , y  $z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ \vdots \\ z_{2k} \end{pmatrix}$ , y  $\eta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \eta = \mathbb{P}^{-1}\xi = \begin{pmatrix} I & -E & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -L & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - Ez_2 \\ z_2 \\ -Lz_2 + w \end{pmatrix},$$

esto es,

$$x_{1i} = z_{1i} - \sum_{j=1}^k e_{ij}z_{2j}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \quad (5.13)$$

Ahora, del teorema 3.2, el sistema (5.9) experimenta la llamada bifurcación de Hopf controlable si el control de realimentación de estado  $\nu$  es dado por

$$\nu = \mu(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2) + \gamma_1 X_1^3 + \gamma_2 X_2^3,$$

donde

$$X_i = x_{1i} + \nabla h_{2i}(x_1) \cdot h_2(x_1) - h_{2i}(x_1) - h_{3i}(x_1) + \mathcal{O}(|x_1|^4), \quad i = 1, 2, \quad (5.14)$$

entonces

$$\nu = \mu[\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2] + \gamma_1 Z_1^3 + \gamma_2 Z_2^3,$$

donde

$$Z_i = \left( z_{1i} - \sum_{j=1}^k e_{1j} z_{2j} \right) + \nabla h_{2i}(z^*) \cdot h_2(z^*) - h_{2i}(z^*) - h_{3i}(z^*) + \mathcal{O}(|z^*|^4), \quad i = 1, 2, \quad (5.15)$$

sabiendo que  $z^* = z_1 - E z_2$ , con los coeficientes de estabilidad

$$d = \frac{1}{2} \beta \hat{b}_1 \quad \text{y} \quad l_1 = \alpha_0 + \frac{3}{8} \gamma \hat{b}_1. \quad (5.16)$$

donde  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  y  $\alpha_0$  es el primer coeficiente de Lyapunov descrito en el corolario 3.1. Entonces el sistema (5.1) experimenta la bifurcación de Hopf controlable cuando

$$u = \alpha z_2 + \mu[\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2] + \gamma_1 Z_1^3 + \gamma_2 Z_2^3, \quad (5.17)$$

donde  $\alpha$  es dada por (5.6).

En esta parte, la observación 4.1 también es válida en las ecuaciones (5.15) y (5.16).

## 5.6. Resultado principal

Concluimos la sección con un teorema que resume todo el desarrollo realizado en ésta.

**Teorema 5.1** *Consideremos el sistema de control no lineal*

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)u,$$

---

donde  $J$  es dado por (5.2), y  $G(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ , donde  $b_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{2k} \end{pmatrix}$ . Si  $b_1 \neq 0$ , y  $b_{2k} \neq 0$ , entonces el sistema a lazo-cerrado (5.1)-(5.17) experimenta la bifurcación de Hopf controlable, con los coeficientes de estabilidad (5.16).





# Capítulo 6

## Control de Oscilaciones para Sistemas más Generales

### 6.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar una clase más general de sistemas no lineales de control. Nos referimos a la clase de sistemas que tienen como la parte lineal del campo vectorial, a una matriz cuyos valores propios son: parejas de la forma  $\pm i\omega_j$  con sus respectivas multiplicidades  $r_j$ , donde  $j = 1, \dots, p$ ; un valor propio cero de multiplicidad  $k$ ; y el resto de los valores propios con parte real negativa.

A esta clase de sistemas, les aplicaremos la misma idea de los casos particulares del capítulo anterior, con el propósito de reducirlos a la forma  $k$ -cero Hopf estudiada en la sección 2.2, y una vez de esta forma, aplicaremos el resultado obtenido en 2.2.6, es decir, el Teorema 5.1.

### 6.2. El problema general

Consideremos el sistema de control no-lineal

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)u \tag{6.1}$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\xi = \begin{pmatrix} z \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ , con  $z \in \mathbb{R}^{2r}$ ,  $w_1 \in \mathbb{R}^k$  y  $w_2 \in \mathbb{R}^s$  ( $2r+k+s = n$ ),

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ \vdots \\ z_{2,r-1} \end{pmatrix}, \quad \text{con } z_{2j} = \begin{pmatrix} z_{2j}^1 \\ z_{2j}^2 \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, \dots, r-1,$$

$$J = \begin{pmatrix} J_M & 0 & 0 \\ 0 & J_K & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

con

$$J_M = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & J_p \end{pmatrix}_{2r \times 2r}, \quad J_i = \begin{pmatrix} C_i & I & & \\ & C_i & I & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ & & & & C_i \end{pmatrix}_{2r_i \times 2r_i}, \quad \sum_{i=1}^p r_i = r$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_i > 0, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

y  $J_S \in \mathbb{R}^{s \times s}$  es Hurwitz;  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son campos vectoriales suaves tales que

$$F(0) = DF(0) = 0 \quad \text{y} \quad G(0) = \begin{pmatrix} b \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \quad \text{con } b_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{i,r_i} \end{pmatrix}, \quad \text{para } i = 1, \dots, p, \quad \text{y } b_{ij} = \begin{pmatrix} b_{ij}^1 \\ b_{ij}^2 \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, \dots, r_i.$$

(6.3)

### 6.2.1. Control de las oscilaciones

La idea es encontrar un control de realimentación  $u = \varrho z + v$ , donde  $\varrho$  tiene la misma estructura que el vector  $b$ , es decir,  $\varrho \in \mathbb{R}^{2r}$ ,  $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_p)$ , con  $\varrho_i = (\varrho_{i1}, \dots, \varrho_{i,2r_i})$ , y  $\varrho_{ij} = (\varrho_{ij}^1, \varrho_{ij}^2)$ , tal que (6.1) pueda ser transformado en un sistema de control donde la parte lineal del campo vectorial contenga un par de valores propios imaginarios, un valor propio cero con multiplicidad  $k$  y el resto de los valores propios con parte real negativa.

Así, consideremos el sistema no-lineal (6.1) y la ley de control  $u = \varrho z + v$ , entonces

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= J\xi + F(\xi) + G(\xi)u \\ &= J\xi + F(\xi) + G(\xi)(\varrho x + v) \\ &= \tilde{J}\xi + \tilde{F}(\xi) + G(\xi)v,\end{aligned}\tag{6.4}$$

donde  $\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_M + b\varrho & 0 & 0 \\ c_1\varrho & J_K & 0 \\ c_2\varrho & 0 & J_S \end{pmatrix}$ . Observemos que esta matriz es triangular por bloques, entonces sus valores propios están dados por los valores propios de  $J_M + b\varrho$ ,  $J_K$  y  $J_S$ . Luego, debemos encontrar  $\varrho$  tal que  $J_M + b\varrho$  tenga dos valores propios imaginarios, y el resto tengan parte real negativa, pero de manera que no esten en  $\sigma(J_S)$ .

Atendiendo a la observación 4.2, si suponemos que el vector  $b$  satisface que sus entradas del tipo  $b_{i,r_i}$  son distintas de cero, entonces, podemos ver fácilmente que la matriz  $J_M$  y el vector  $b \neq 0$ , son tales que la matriz  $\mathcal{J} = [J_M, J_M b, J_M^2 b, \dots, J_M^{2r-1} b]$  es de rango máximo, es decir,  $\text{rango}(\mathcal{J}) = 2r$ , por lo tanto podemos aplicar el teorema de asignación de polos, dado en [17] pág. 48, por lo cual podemos asegurar que existe  $\varrho$  tal que  $\sigma(J_M + b\varrho) = \{\pm i\omega_1, \lambda_i \in \mathbb{C} | \omega_1 \in \mathbb{R}^+, \text{Re}\lambda_i < 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, 2r - 2\}$ . Esto es equivalente al

**Lema 6.1** Si  $b_{i,r_i} \neq 0$  para toda  $i = 1, 2, \dots, p$ , entonces existe  $\varrho \in \mathbb{R}^{2r}$  tal que

$$(i) \quad \sigma(J_M + b\varrho) = \{i\omega, -i\omega, \lambda \in \mathbb{C} | \omega \in \mathbb{R}, \text{Re}\lambda < 0\},$$

$$(ii) \quad \sigma(J_M + b\varrho) \cap \sigma(J_S) = \emptyset$$

**Prueba.** Sea  $\bar{J}_S \in \mathbb{R}^{2r \times 2r}$  una matriz tal que  $\sigma(\bar{J}_S) = \{i\omega_1, -i\omega_1, \lambda \in \mathbb{C} | \omega_1 \in$

$\mathbb{R}$ ,  $Re\lambda < 0$  y  $\sigma(\bar{J}_S) \cap \sigma(J_S) = \emptyset$ , con polinomio característico

$$\begin{aligned} p_{\bar{J}_S}(\lambda) &= (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^{2r-2} + c_{2r-2}\lambda^{2r-3} + \cdots + c_2\lambda + c_1) \\ &= \lambda^{2r} + c_{2r-2}\lambda^{2r-1} + (c_{2r-3} + \omega_1^2)\lambda^{2r-2} + \cdots + (c_2 + c_4\omega_1^2)\lambda^3 + (c_1 + c_3\omega_1^2)\lambda^2 \\ &\quad + c_2\omega_1^2\lambda + c_1\omega_1^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

Debemos encontrar  $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_p) \in \mathbb{R}^{2r}$  tal que

$$p_{J_M + b\varrho}(\lambda) \equiv p_{\bar{J}_S}(\lambda). \quad (6.6)$$

Como

$$J_M + b\varrho = \begin{pmatrix} J_1 + b_1\varrho_1 & b_1\varrho_2 & \cdots & b_1\varrho_p \\ b_2\varrho_1 & J_2 + b_2\varrho_2 & \cdots & b_2\varrho_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_p\varrho_1 & b_p\varrho_2 & \cdots & J_p + b_p\varrho_p \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

donde,

$$J_i + b_i\varrho_i = \begin{bmatrix} C_i + b_{i1}\varrho_{i1} & I + b_{i1}\varrho_{i2} & b_{i1}\varrho_{i3} & \cdots & b_{i1}\varrho_{i,r_i} \\ b_{i2}\varrho_{i1} & C_i + b_{i2}\varrho_{i2} & I + b_{i2}\varrho_{i3} & \cdots & b_{i2}\varrho_{i,r_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i,r_i-1}\varrho_{i1} & b_{i,r_i-1}\varrho_{i2} & b_{i,r_i-1}\varrho_{i3} & \cdots & I + b_{i,r_i-1}\varrho_{i,r_i} \\ b_{i,r_i}\varrho_{i1} & b_{i,r_i}\varrho_{i2} & b_{i,r_i}\varrho_{i3} & \cdots & C_i + b_{i,r_i}\varrho_{i,r_i} \end{bmatrix}_{2r_i \times 2r_i}, \quad (6.8)$$

donde a su vez

$$C_i + b_{ij}\varrho_{ij} = \begin{pmatrix} b_{ij}^1\varrho_{ij}^1 & b_{ij}^1\varrho_{ij}^2 - \omega_i \\ b_{ij}^2\varrho_{ij}^1 + \omega_i & b_{ij}^2\varrho_{ij}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

$$I + b_{ij}\varrho_{i,j+1} = \begin{pmatrix} b_{ij}^1\varrho_{i,j+1}^1 + 1 & b_{ij}^1\varrho_{i,j+1}^2 \\ b_{ij}^2\varrho_{i,j+1}^1 & b_{ij}^2\varrho_{i,j+1}^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$b_m\varrho_n = \begin{pmatrix} b_{m1}\varrho_{n1} & b_{m1}\varrho_{n2} & \cdots & b_{m1}\varrho_{n,r_n} \\ b_{m2}\varrho_{n1} & b_{m2}\varrho_{n2} & \cdots & b_{m2}\varrho_{n,r_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,r_m}\varrho_{n1} & b_{m,r_m}\varrho_{n2} & \cdots & b_{m,r_m}\varrho_{n,r_n} \end{pmatrix}_{2r_m \times 2r_n}, \quad (6.11)$$

y

$$b_{ij}\varrho_{ik} = \begin{pmatrix} b_{ij}^1\varrho_{ik}^1 & b_{ij}^1\varrho_{ik}^2 \\ b_{ij}^2\varrho_{ik}^1 & b_{ij}^2\varrho_{ik}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

por lo que el polinomio característico de  $J_M + b\varrho$  es de la forma

$$p_{J_M + b\varrho}(\lambda) = \lambda^{2r} + m_{2r}(\varrho)\lambda^{2r-1} + m_{2r-1}(\varrho)\lambda^{2r-2} + \cdots + m_2(\varrho)\lambda + m_1(\varrho),$$

donde

$$\begin{aligned} m_{2r}(\varrho) &= -\sum_{k=1}^p \left( \sum_{i=1}^{r_k} \sum_{j=1}^2 b_{ki}^j \varrho_{ki}^j \right) \\ m_{2r-1}(\varrho) &= \sum_{i=1}^p \left[ \sum_{j=1}^{r_i} (\varrho_{ij}^1 (\omega_i b_{1j}^2 - b_{i,j+1}^1) - \varrho_{ij}^2 (\omega_i b_{ij}^1 + b_{i,j+1}^2)) \right] + \sum_{i=1}^p r_i \omega_i^2 \\ &\vdots \\ m_1(\varrho) &= \sum_{i=1}^p \left\{ \left( \prod_{q=1, q \neq i}^p \omega_q^{2r_q} \right) \left[ \sum_{j=1}^{r_i} (\omega_i^{r_i+j-1} \varrho_{ij}^1 (\omega_i^{r_i-j} b_{i,j}^2 + \omega_i^{r_i-j-1} b_{i,j+1}^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega_i^{r_i-j-2} b_{i,j+2}^2 - \omega_i^{r_i-j-3} b_{i,j+3}^1 + \cdots) + \omega_i^{r_i+j-1} \varrho_{ij}^2 (-\omega_i^{r_i-j} b_{ij}^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega_i^{r_i-j-1} b_{i,j+1}^2 + \omega_i^{r_i-j-2} b_{1,j+2}^1 - \omega_i^{r_i-j-3} b_{i,j+3}^2 - \cdots) \right] \right\} + \prod_{i=1}^p \omega_i^{2r_i}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Entonces, de (6.6) y (6.13) tenemos que

$$\begin{aligned} c_{2r-2} &= -\sum_{k=1}^p \left( \sum_{i=1}^{r_k} \sum_{j=1}^2 b_{ki}^j \varrho_{ki}^j \right) \\ c_{2r-3} + \omega_1^2 - \sum_{i=1}^p r_i \omega_i^2 &= \sum_{i=1}^p \left[ \sum_{j=1}^{r_i} (\varrho_{ij}^1 (\omega_i b_{ij}^2 - b_{i,j+1}^1) - \varrho_{ij}^2 (\omega_i b_{ij}^1 + b_{i,j+1}^2)) \right] \\ &\vdots \\ c_1 \omega_1^2 - \prod_{i=1}^p \omega_i^{2r_i} &= \sum_{i=1}^p \left\{ \left( \prod_{q=1, q \neq i}^p \omega_q^{2r_q} \right) \left[ \sum_{j=1}^{r_i} (\omega_i^{r_i+j-1} \varrho_{ij}^1 (\omega_i^{r_i-j} b_{i,j}^2 + \omega_i^{r_i-j-1} b_{i,j+1}^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega_i^{r_i-j-2} b_{i,j+2}^2 - \omega_i^{r_i-j-3} b_{i,j+3}^1 + \cdots) + \omega_i^{r_i+j-1} \varrho_{ij}^2 (-\omega_i^{r_i-j} b_{ij}^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega_i^{r_i-j-1} b_{i,j+1}^2 + \omega_i^{r_i-j-2} b_{1,j+2}^1 - \omega_i^{r_i-j-3} b_{i,j+3}^2 - \cdots) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

El sistema (6.14) lo podemos expresar como la ecuación matricial

$$\mathcal{M}\varrho = H \quad (6.15)$$

donde  $\mathcal{M} = [M_{ij}]_{2r \times 2r}$ , con

$$\begin{aligned}
 M_{1k} &= - \begin{cases} b_{ij}^1, & \text{si } k \text{ es impar,} \\ b_{ij}^2, & \text{si } k \text{ es par} \end{cases} \\
 M_{2k} &= \begin{cases} (\omega_i b_{ij}^2 - b_{i,j+1}^1), & \text{si } k \text{ es impar,} \\ -(\omega_i b_{ij}^1 + b_{i,j+1}^2), & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases} \\
 &\vdots \\
 M_{2r,k} &= \begin{cases} \left( \prod_{q=1, q \neq i}^p \omega_q^{2r_q} \right) \omega_i^{r_i+j-1} (\omega_i^{r_i-j} b_{i,j}^2 + \omega_i^{r_i-j-1} b_{i,j+1}^1 - \omega_i^{r_i-j-2} b_{i,j+2}^2 \\ - \omega_i^{r_i-j-3} b_{i,j+3}^1 + \dots), & \text{si } k \text{ es impar,} \\ \left( \prod_{q=1, q \neq i}^p \omega_q^{2r_q} \right) \omega_i^{r_i+j-1} (-\omega_i^{r_i-j} b_{i,j}^1 + \omega_i^{r_i-j-1} b_{i,j+1}^2 + \omega_i^{r_i-j-2} b_{i,j+2}^1 \\ - \omega_i^{r_i-j-3} b_{i,j+3}^2 - \dots), & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde para cada

$$i = 1, 2, \dots, p,$$

tenemos que

$$j = 1, 2, \dots, r_i, \quad \text{y} \quad k = 1, \dots, 2r,$$

$q$  es como se definió anteriormente, y

$$H = \left( c_{2r-2}, c_{2r-3} + \omega_1^2 - \sum_{i=1}^p r_i \omega_i^2, \dots, c_1 \omega_1^2 - \prod_{i=1}^p \omega_i^{2r_i} \right)^T.$$

Ahora bien, si aplicamos eliminación gaussiana a la matriz  $\mathcal{M}$ , con pivoteo por renglones y sin intercambio de éstos, podemos observar que la matriz triangular superior resultante es de la forma

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \triangle & & & \\ M_{11} & \triangle & \cdots & \triangle \\ & M_{22} & \cdots & \triangle \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \triangle \\ & & & M_{pp} \end{bmatrix},$$

donde las entradas de interés son de la forma  $M_{ii}^{\Delta}$ , para  $i = 1, \dots, p$ , para las cuales

$$M_{11}^{\Delta} =$$

$$\begin{bmatrix} -b_{11}^1 & -b_{11}^2 & -b_{12}^1 & \cdots & -b_{1, [\frac{r_1}{2}] + 1}^2 & -b_{1, [\frac{r_1}{2}] + 1}^1 & \cdots & -b_{1, r_1}^2 \\ 0 & -\frac{D_{22}^{(0)}}{b_{11}^1} & -\frac{D_{23}^{(0)}}{b_{11}^1} & \cdots & -\frac{D_{2, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{(0)}}{b_{11}^1} & -\frac{D_{2, [\frac{r_1}{2}] + 2}^{(0)}}{b_{11}^1} & \cdots & -\frac{D_{2, 2r_1}^{(0)}}{b_{11}^1} \\ 0 & 0 & -\frac{D_{33}^{(1)}}{D_{22}^{(0)}} & \cdots & -\frac{D_{3, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{(1)}}{D_{22}^{(0)}} & -\frac{D_{3, [\frac{r_1}{2}] + 2}^{(1)}}{D_{22}^{(0)}} & \cdots & -\frac{D_{3, 2r_1}^{(1)}}{D_{22}^{(0)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{2^{t_1} \omega_1 D_{[\frac{r_1}{2}] + 1, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{([\frac{r_1}{2}] - 1)}}{D_{[\frac{r_1}{2}], [\frac{r_1}{2}] - 2}^{([\frac{r_1}{2}] - 2)}} & -\frac{D_{[\frac{r_1}{2}] + 1, [\frac{r_1}{2}] + 2}^{([\frac{r_1}{2}] - 1)}}{D_{[\frac{r_1}{2}], [\frac{r_1}{2}] - 2}^{(r_1 - 2)}} & \cdots & -\frac{D_{[\frac{r_1}{2}] + 1, 2r_1}^{([\frac{r_1}{2}] - 1)}}{D_{[\frac{r_1}{2}], [\frac{r_1}{2}] - 2}^{([\frac{r_1}{2}] - 2)}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2^{t_2} \omega_1^3 D_{[\frac{r_1}{2}] + 2, [\frac{r_1}{2}] + 2}^{([\frac{r_1}{2}] - 1)}}{D_{[\frac{r_1}{2}] + 1, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{([\frac{r_1}{2}] - 1)}} & \cdots & -\frac{D_{[\frac{r_1}{2}] + 2, 2r_1}^{([\frac{r_1}{2}] - 1)}}{D_{[\frac{r_1}{2}] + 1, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{([\frac{r_1}{2}] - 1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\frac{2^{t_1 r_1} \omega_1^{2r_1 - 1} \|b_{1, r_1}\|^{2r_1}}{D_{2r_1 - 1, 2r_1 - 1}^{(2r_1 - 3)}} \end{bmatrix}$$

denotando como  $D_{ij}^{(l)}$  al determinante del menor  $(i, j)$  de la submatriz de orden  $i \times i$  de  $M_{11}^{\Delta}$  después del  $l$ -ésimo pivoteo, y  $\sum_{i=1}^{r_1} t_i = r_1(r_1 - 1)$ .

Y en general, para  $i = 2, \dots, p$ , tenemos que

$$M_{ii}^{\Delta} = \begin{bmatrix} \mathfrak{m}_{r_i, 1}^1 & -\Theta_{r_i, 1}^{2, 1} & -\Theta_{r_i, 2}^{1, 1} & \cdots & -\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{2, 1} & -\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{1, 1} & \cdots & -\Theta_{r_i, r_i}^{2, 1} \\ 0 & \mathfrak{m}_{r_i, 1}^2 & -\frac{\Theta_{r_i, 2}^{1, 2}}{\Theta_{r_i, 1}^{2, 1}} & \cdots & -\frac{\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{2, 2}}{\Theta_{r_i, 1}^{2, 1}} & -\frac{\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{1, 2}}{\Theta_{r_i, 1}^{2, 1}} & \cdots & -\frac{\Theta_{r_i, r_i}^{2, 2}}{\Theta_{r_i, 1}^{2, 1}} \\ 0 & 0 & \mathfrak{m}_{r_i, 2}^1 & \cdots & -\frac{\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{2, 3}}{\Theta_{r_i, 2}^{1, 2}} & -\frac{\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{1, 3}}{\Theta_{r_i, 2}^{1, 2}} & \cdots & -\frac{\Theta_{r_i, r_i}^{2, 3}}{\Theta_{r_i, 2}^{1, 2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{m}_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^2 & -\frac{\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{1, [\frac{r_1}{2}] + 1}}{\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{1, [\frac{r_1}{2}] - 1}} & \cdots & -\frac{\Theta_{r_i, r_i}^{2, [\frac{r_1}{2}] + 1}}{\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{1, [\frac{r_1}{2}] - 1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{m}_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^1 & \cdots & -\frac{\Theta_{r_i, r_i}^{2, [\frac{r_1}{2}] + 1}}{\Theta_{r_i, [\frac{r_1}{2}] + 1}^{2, [\frac{r_1}{2}] + 1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{m}_{r_i, r_i}^2 \end{bmatrix}$$

considerando



$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{r_i,1}^1 &= -\Theta_{r_i,1}^{1,1} \prod_{s=1}^{i-1} (\omega_s^2 - \omega_i^2)^{\tau_1}, \\
\mathfrak{M}_{r_i,1}^2 &= -\frac{\Theta_{r_i,1}^{2,2} \prod_{s=1}^{i-1} (\omega_s^2 - \omega_i^2)^{\tau_2}}{\Theta_{k_i+1, k_i+1}}, \\
\mathfrak{M}_{r_i,2}^1 &= -\frac{\Theta_{r_i,2}^{1,3} \prod_{s=1}^{i-1} (\omega_s^2 - \omega_i^2)^{\tau_3}}{\Theta_{k_i+2, k_i+2}}, \\
&\vdots \\
\mathfrak{M}_{r_i, \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor}^2 &= -\frac{2^{\bar{\tau}_1} \omega_i \Theta_{r_i, \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor}^{2, \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor} \prod_{s=1}^{i-1} (\omega_s^2 - \omega_i^2)^{\tau_{r_i+1}}}{\Theta_{k_i+r_i, k_i+r_i}}, \\
\mathfrak{M}_{r_i, \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor + 1}^1 &= -\frac{2^{\bar{\tau}_2} \omega_i^3 \Theta_{r_i, \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor + 1}^{1, \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor + 1} \prod_{s=1}^{i-1} (\omega_s^2 - \omega_i^2)^{\tau_{r_i+2}}}{\Theta_{k_i+r_i+1, k_i+r_i+1}}, \\
&\vdots \\
\mathfrak{M}_{r_i, r_i}^2 &= -\frac{2^{\bar{\tau}_{r_i}} \omega_i^{2r_i-1} \|b_{i, r_i}\|^{2r_i} \Theta_{r_i, r_i}^{2, r_i} \prod_{s=1}^{i-1} (\omega_s^2 - \omega_i^2)^{\tau_{2r_i}}}{\Theta_{k_i+r_i+2, k_i+r_i+2}},
\end{aligned}$$

donde  $\Theta_{i,j}$  son funciones de  $\omega_i$ ,  $b_{r_i, j}^k$ , con  $j = 1, \dots, r_i$  y  $k = 1, 2$ , además suponemos que  $\sum_{i=1}^{r_i} \bar{\tau}_i = r_i(r_i - 1)$ .

Por lo anterior podemos decir que

$$\det \mathcal{M} = \prod_{i=1}^p \left[ 2^{r_i(r_i-1)} \omega_i^{r_i^2} \|b_{i, r_i}\|^{2r_i} \left( \prod_{j=1, j \neq i}^p (\omega_i^2 - \omega_j^2)^{r_i r_j} \right) \right]$$

y como por hipótesis  $b_{i, r_i} \neq 0$  para toda  $i = 1, 2, \dots, p$ , entonces  $\det \mathcal{M} \neq 0$ , por lo tanto existe la matriz inversa  $\mathcal{M}^{-1}$  de  $\mathcal{M}$ , luego

$$\varrho = \mathcal{M}^{-1} H. \tag{6.16}$$

■

**Observación 6.1** Como el objetivo que se persigue es transformar el sistema (6.1) a un sistema que experimente la bifurcación  $k$ -cero Hopf, entonces debemos tomar

$\varrho$ , de tal manera que todos los valores propios imaginarios puros se muevan hacia el lado izquierdo del eje imaginario, salvo la pareja  $\pm i\omega_1$ , esto lo conseguimos tomando  $\varrho_{11} = 0$ .

Finalmente, obtenemos la matriz  $\tilde{J}$  como

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_M + b\varrho & 0 & 0 \\ c_1\varrho & J_K & 0 \\ c_2\varrho & 0 & J_S \end{pmatrix},$$

tiene dos valores propios imaginarios, un valor propio cero de multiplicidad  $k$ , y el resto están en el lado izquierdo del eje imaginario, y en base a las matrices definidas desde (6.7) hasta (6.12) y como  $\varrho_{11} = 0$ , podemos considerar que  $J_M + b\varrho$  es una matriz de la forma

$$J_M + b\varrho = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} & D \\ E & D_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$B_1 = (I + b_{11}\varrho_{12} \quad b_{11}\varrho_{13} \quad \cdots \quad b_{11}\varrho_{1r_1}),$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} C_1 + b_{12}\varrho_{12} & I + b_{12}\varrho_{13} & \cdots & b_{12}\varrho_{1,r_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1,r_1-1}\varrho_{12} & b_{1,r_1-1}\varrho_{13} & \cdots & I + b_{1,r_1-1}\varrho_{1,r_1} \\ b_{1,r_1}\varrho_{12} & b_{1,r_1}\varrho_{13} & \cdots & C_1 + b_{1,r_1}\varrho_{1,r_1} \end{pmatrix},$$

$$D = (b_1\varrho_2 \quad \cdots \quad b_1\varrho_p),$$

$$E = \begin{pmatrix} b_2\varrho_1 \\ \vdots \\ b_p\varrho_1 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} J_2 + b_2\varrho_2 & \cdots & b_2\varrho_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_p\varrho_2 & \cdots & J_p + b_p\varrho_p \end{pmatrix},$$

y es fácil ver que

$$D = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}^1 \\ b_{11}^2 \end{pmatrix} (\varrho_{21} \quad \cdots \quad \varrho_{2p}) \\ \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1r_1} \end{pmatrix} (\varrho_{21} \quad \cdots \quad \varrho_{2p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & b_2(\varrho_{12}, \dots, \varrho_{1r_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

entonces, podemos reescribir

$$J_M + b\varrho = \begin{pmatrix} C_1 & B_1 & D_1 \\ 0 & B_2 & D_2 \\ 0 & E_1 & D_3 \end{pmatrix},$$

lo que finalmente podemos simplificar, tomando  $\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} B_2 & D_2 \\ E_1 & D_3 \end{pmatrix}$  y

$$J_M + b\varrho = \begin{pmatrix} C_1 & \tilde{B}_1 \\ 0 & \tilde{B}_2 \end{pmatrix},$$

donde  $\tilde{B}_2$  tiene todos sus valores propios a la izquierda del eje imaginario, de tal manera que  $\sigma(\tilde{B}_2) \cap \sigma(J_S) = \emptyset$ .

Por otro lado, haciendo  $\bar{\varrho} = (\varrho_{12}, \dots, \varrho_{1r_1}, \varrho_2, \dots, \varrho_p)$ , podemos ver que

$$c_i\varrho = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ \vdots \\ c_{ik} \end{pmatrix} (0, 0, \bar{\varrho}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{i1}\varrho_{12}^1 & \cdots & c_{i1}\varrho_{pr_p}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_{ik}\varrho_{12}^1 & \cdots & c_{ik}\varrho_{pr_p}^2 \end{pmatrix} = (0, \tilde{D}_i),$$

para  $i = 1, 2$ , entonces

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} C_1 & \tilde{B}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_1 & J_K & 0 \\ 0 & \tilde{D}_2 & 0 & J_S \end{pmatrix}.$$

### 6.2.2. Cambio de coordenadas

Ahora necesitamos encontrar un cambio de coordenadas  $\eta = \mathcal{P}^{-1}\xi$ , para poner  $\tilde{J}$  en bloques de Jordan.

**Lema 6.2** Si  $b_{i,r_i} \neq 0$  para toda  $i = 1, 2, \dots, p$ , entonces existen matrices  $P_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2(r-1)}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{k \times 2(r-1)}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{s \times 2(r-1)}$  y la matriz identidad  $I_j \in \mathbb{R}^{j \times j}$ , tales que para

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2(r-1)} & 0 \\ 0 & I_k & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & I_s \end{pmatrix},$$

se satisface

$$\mathcal{P}^{-1}\tilde{J}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_S \end{pmatrix} = \bar{J}. \quad (6.17)$$

**Prueba.** Primero, observemos que

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & -P_1 & 0 & 0 \\ 0 & -P_2 & I_k & 0 \\ 0 & I_{2(r-1)} & 0 & 0 \\ 0 & -P_3 & 0 & I_s \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathcal{P}^{-1}\tilde{J}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ 0 & J_K & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & J_S \end{pmatrix},$$

donde  $S_1 = C_1P_1 - P_1\tilde{B}_2 + \tilde{B}_1$ ,  $S_2 = J_KP_2 - P_2\tilde{B}_2 + \tilde{D}_1$  y  $S_3 = J_S P_3 - P_3\tilde{B}_2 + \tilde{D}_2$ . Pero, por el lema 2.1, existen  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  tales que el sistema de ecuaciones matriciales  $S = 0$ , con  $S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$  tiene solución única para cada  $\tilde{B}_1$ ,  $\tilde{D}_1$ , y  $\tilde{D}_2$ .

Así

$$\mathcal{P}^{-1}\tilde{J}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_S \end{pmatrix}.$$

■

El cambio de coordenadas  $\tilde{\eta} = \mathcal{P}^{-1}\xi$  transforma (6.4) en el sistema

$$\dot{\tilde{\eta}} = \bar{J}\tilde{\eta} + \bar{F}(\tilde{\eta}) + \bar{G}(\tilde{\eta})v \quad (6.18)$$

donde  $\bar{J}$  es dado por (6.17),  $\bar{F}(\eta) = \mathcal{P}^{-1}\tilde{F}(\mathcal{P}\xi)$  y  $\bar{G}(\eta) = \mathcal{P}^{-1}G(\mathcal{P}\xi)$ . Si la primera entrada del vector  $G(0)$ ,  $b$ , es de la forma

$$b = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11}^1 \\ b_{11}^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \dots \\ b_{1r_1} \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

de igual manera podemos definir el vector  $\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}$ , tal que

$$\bar{G}(0) = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix},$$

de esto se sigue que,

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix} = \bar{G}(0) = \mathcal{P}^{-1}G(0) = \begin{pmatrix} I_2 & -P_1 & 0 & 0 \\ 0 & -P_2 & I_k & 0 \\ 0 & I_{2(r-1)} & 0 & 0 \\ 0 & -P_3 & 0 & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 - P_1\tilde{b}_2 \\ c_1 - P_2\tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_2 \\ c_2 - P_3\tilde{b}_2 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

obsérvese que

$$\bar{b}_1 = \tilde{b}_1 - P_1 \quad \text{y} \quad \bar{b}_2 = c_1 - P_2\tilde{b}_2. \quad (6.21)$$

Si  $\eta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , entonces el sistema (6.18) es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= C_1x_1 + \bar{F}_1(x_1, x_2, y_1, y_2) + \bar{G}_1(x_1, x_2, y_1, y_2)v \\ \dot{x}_2 &= J_Kx_2 + \bar{F}_2(x_1, x_2, y_1, y_2) + \bar{G}_2(x_1, x_2, y_1, y_2)v \\ \dot{y}_1 &= \tilde{B}_2y_1 + \bar{F}_{31}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \bar{G}_{31}(x_1, x_2, y_1, y_2)v \\ \dot{y}_2 &= J_Sy_2 + \bar{F}_{32}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \bar{G}_{32}(x_1, x_2, y_1, y_2)v. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Ahora bien, las matrices  $\tilde{B}_2$  y  $J_S$  son Hurwitz, entonces la matriz  $J_h = \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & J_S \end{bmatrix}$ , también lo es, luego definimos el vector  $y = (y_1, y_2)^T$ , y también el vector  $\bar{F}_3 =$

$(\bar{F}_{31}, \bar{F}_{32})^T$ , por lo que el sistema (6.22) quede de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= C_1 x_1 + \bar{F}_1(x_1, x_2, y) + \bar{G}_1(x_1, x_2, y)v \\ \dot{x}_2 &= J_K x_2 + \bar{F}_2(x_1, x_2, y) + \bar{G}_2(x_1, x_2, y)v \\ \dot{y} &= J_h y + \bar{F}_3(x_1, x_2, y) + \bar{G}_3(x_1, x_2, y)v.\end{aligned}\tag{6.23}$$

Hemos logrado entonces, transformar el sistema (6.1), en el sistema (6.23), el cual está en forma tal, que experimenta la bifurcación  $k$ -cero-Hopf.

### 6.2.3. Diseño del Control

En base al cambio de coordenadas que hemos aplicado, podemos ver entonces que

$$\bar{F}(0) = 0 \quad \text{y por (6.20),} \quad \bar{G}(0) = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix},$$

con

$$\bar{b}_1 = \tilde{b}_1 - P_1 \tilde{b}_2, \quad \bar{b}_2 = c_1 - P_2 \tilde{b}_2,$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son las matrices dadas en el lema 6.2.

Si aseguramos que  $\bar{b}_1 \neq 0$ ,  $\bar{b}_{2k} \neq 0$ , entonces, la ley de control (5.17) queda de la forma

$$v = \alpha x_2 + \sum_{i=1}^2 (\mu \beta_i X_i + \gamma_i X_i^3),\tag{6.24}$$

donde

$$X_i = (x_1 - Ex_2)_i + \nabla h_{2i}(x_1 - Ex_2) \cdot h_2(x_1 - Ex_2) - h_{2i}(x_1 - Ex_2) - h_{3i}(x_1 - Ex_2) + \mathcal{O}(|x_1 - Ex_2|^4),\tag{6.25}$$

de tal manera que el sistema a lazo-cerrado (6.23)-(6.24) experimenta la bifurcación de Hopf controlable, con los coeficientes de estabilidad

$$d = \frac{1}{2} \hat{\beta} \hat{b}_1, \quad l_1 = \alpha_0 + \frac{3}{8} \gamma \hat{b}_1,\tag{6.26}$$

donde

$$\hat{b}_1 = (\tilde{b}_1 - P_1 \tilde{b}_2) - E(c_1 - P_2 \tilde{b}_2),$$

$E$  satisfice

$$\begin{aligned} C_1 E - E \bar{J}_S + \hat{B}_1, \\ \bar{J}_S = J_K + (C_1 - P_2 b_2) \alpha, \quad \hat{B}_1 = (\tilde{b}_1 - P_1 \tilde{b}_2) \alpha, \\ \alpha = \mathcal{T}^{-1} C \text{ (ecuación (5.6))}, \quad \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{-1} (C_1 - P_2 b_2). \end{aligned}$$

Por otra parte, recordemos que nuestra variable de estado original es  $\xi = (z_1, z_2, w_1, w_2)^T$ , donde  $z_1 = (z_{11}, z_{12})^T$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^{2(r-1)}$ ,  $w_1 \in \mathbb{R}^k$ , y  $w_2 \in \mathbb{R}^s$ , sabemos que  $\eta = \mathcal{P}^{-1} \xi$ , esto es que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & -P_1 & 0 & 0 \\ 0 & -P_2 & I_k & 0 \\ 0 & I_{2(r-1)} & 0 & 0 \\ 0 & -P_3 & 0 & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - P_1 z_2 \\ w_1 - P_2 z_2 \\ z_2 \\ w_2 - P_3 z_2 \end{pmatrix},$$

por lo que el control  $v$ , en las variables iniciales toma la forma

$$v = \alpha(w_1 - P_2 z_2) + \sum_{i=1}^2 (\mu \beta_i Z_i + \gamma_i Z_i^3), \quad (6.27)$$

donde

$$Z_i = \mathbf{z}_i + \nabla h_{2i}(\mathbf{z}) \cdot h_2(\mathbf{z}) - h_{2i}(\mathbf{z}) - h_{3i}(\mathbf{z}) + \mathcal{O}(|\mathbf{z}|^4), \quad (6.28)$$

con  $\mathbf{z} = (z_1 - P_1 z_2) - E(w_1 - P_2 z_2)$ .

Nuevamente, es importante recordar lo que se indica en la observación 4.1, sólo que ahora es aplicable en las ecuaciones (6.28) y (6.26).

### 6.3. Resultado final

Concluimos nuestro trabajo enunciando el resultado final que se demostró con el desarrollo de los capítulos anteriores y el presente capítulo.

**Teorema 6.1** *Consideremos el sistema de control no lineal*

$$\dot{\xi} = J\xi + F(\xi) + G(\xi)u,$$

donde  $J$  es dado por (6.2), y  $G(0) = \begin{pmatrix} b \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ , donde  $b$  es dado por (6.19). Si  $b_{i,r_i} \neq 0$ ,

$\bar{b}_1 \neq 0$ ,  $\bar{b}_{2k} \neq 0$ , y el control de realimentación de estado

$$u(z, \varrho, v) = \varrho z + v, \quad (6.29)$$

---

*donde  $v$  es dada por (6.27), entonces el sistema a lazo-cerrado (6.1)-(6.29) experimenta la bifurcación de Hopf controlable, en  $\xi = 0$  y  $\mu = 0$  con los coeficientes de estabilidad (6.26).*





# Conclusiones

En este trabajo, comenzamos nuestro estudio en el capítulo uno, con algunos conceptos matemáticos preliminares, dándose en algunos casos una justificación detallada de resultados importantes de los cuales hicimos uso en desarrollos posteriores, como por ejemplo, el lema de Sylvester de la sección 1.1, dicho lema fué de suma importancia para el desarrollo de nuestro material, ya que se usa una y otra vez en la demostración de varios resultados posteriores. Se estudiaron con algún detalle teorías muy importantes como la teoría de la variedad central y la teoría de las formas normales, en las secciones 1.2 y 1.3 respectivamente, estas teorías son básicas en el estudio de la bifurcación de Hopf, cuyo principal teorema se muestra en sección 1.4.

El capítulo dos es quizá el más importante de esta tesis, ya que en el analizamos y demostramos una versión simplificada del teorema de la bifurcación de Hopf controlable que se enunció y se demostró primeramente en [13], esta nueva versión es la base donde se apoya todo el estudio, análisis y desarrollo de los tres capítulos posteriores.

En el capítulo tres, hicimos una presentación de la bifurcación  $k$ -cero y en el capítulo cuatro de la bifurcación  $k$ -cero Hopf, donde en ambos casos es posible trasladarlos a la forma normal de la bifurcación de Hopf controlable, para finalmente diseñarles un control apoyados en el teorema 3.2. Estos casos particulares son generalizados en el capítulo cinco.

Las conclusiones que podemos mencionar acerca de este trabajo pueden ser las siguientes:

- El primer resultado original que se aporta, se desarrolló en el capítulo dos, y es la demostración de una nueva versión del teorema de la bifurcación de Hopf controlable. La aportación, es la simplificación de los cálculos de los coeficientes de estabilidad, en el control de las órbitas periódicas que surgen

en un sistema de control no lineal que experimenta la bifurcación de Hopf, al ser transformado a la forma normal de la bifurcación de Hopf controlable, control dado por el teorema 3.1, particularmente lo que simplificamos es el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov. Este resultado lo enunciamos en el teorema 3.2, y es posiblemente la aportación más importante que se dá.

- Otro resultado novedoso que conseguimos, es la generalización de la bifurcación  $k$ -cero, la cual llamamos bifurcación  $k$ -cero Hopf, esto consiste en tomar la idea trabajada en [12] y aplicarla a un sistema de control no lineal, cuya linealización contiene dos valores propios puramente imaginarios, un valor propio cero con multiplicidad  $k$ , y el resto de los valores propios tienen parte real negativa. En este tipo de sistemas, el objetivo es trasladar el sistema de control no lineal dado con las características antes sealadas, a su forma normal de bifurcación de Hopf controlable y después hacer uso de nuestro resultado enunciado en el teorema 3.2.
- El desarrollo del resultado final que conseguimos, se refiere a su vez a generalizar la bifurcación  $k$ -cero Hopf, es decir aplicamos el resultado obtenido para este último tipo de bifurcación a un sistema de control no lineal, cuya parte lineal contiene  $r$  valores propios puramente imaginarios, donde estos valores propios pueden tener diferentes multiplicidades, también contiene un valor propio cero con multiplicidad  $k$  y  $s$  valores propios con parte real negativa. Una vez transformado el sistema dado con las características antes mencionadas en forma tal que experimenta la bifurcación  $k$ -cero Hopf, procedemos a diseñar una ley de control, basándonos en el resultado conseguido en el capítulo cuatro, para este tipo de bifurcación.

# Bibliografía

- [1] V.I. Arnold. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1983.
- [2] V.I. Arnold. Lectures on bifurcation in versal families. Russ. Math. Surv., No. 27, pp 54-123. 1972.
- [3] Q. Bi, P. Yu. Symbolic software development for computing the normal forms of double Hopf bifurcation. J. Math & Computer Modelling, No. 29, pp 49-70. 1999.
- [4] Q. Bi, P. Yu. "Computation of normal forms of differential equations associated with non-semisimple zero eigenvalues". Int J of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 12, pp 2279-2319. 1998.
- [5] R. I. Bognadov. "Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues". Functional analysis and its applications 9, pp 144-145. 1975.
- [6] J. Carr. Applications of Center Manifold Theory. Springer-Verlag. New York. 1981.
- [7] J. H. Fu. Bifurcation analysis and control of nonlinear systems with a non-semisimple zero at criticality y application. Int J of Bifurcation and Chaos, Vol. 10, No. 8, pp 1887-1901. 2000.
- [8] F.R. Gantmacher. "The Theory of MATRICES", Vol. I, Ed. Chelsea, New York, N.Y., 1990.
- [9] J. Guckenheimer y P. Holmes. *Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag. 1993.

- 
- [10] J.E. Marsden, M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer-Verlag. New York. 1976.
- [11] F. Takens. "Forced oscillations and bifurcation". *Applications of Global Analysis I*. Comm. Math. Inst. Rijksuniversitat Utrecht, 3, pp 1-59. 1974.
- [12] F. Verduzco. "Control of oscillations from the  $k$ -zero bifurcation". *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Por aparecer.
- [13] F. Verduzco, J. Alvarez. "Hopf bifurcation control: a new approach". *Systems and Control Letters*, No. 55, pp 437-451. 2006.
- [14] F. Verduzco, M.E. Frias. "Control of limit cycles at Takens-Bognadov bifurcation". *International Conference on Control and Synchronization of Dynamical Systems*. León Guanajuato, México. 2005.
- [15] F. Verduzco, J. Alvarez. "Hopf bifurcation control for affine systems". *American Control Conference 2004*. Boston, USA.
- [16] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 2. Springer-Verlag. Second Edition. 2003.
- [17] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control, A Geometric Approach*. Text of Applications of Mathematics, Vol. 10. Springer-Verlag, New York. Third Edition. 1985.
- [18] P. Yu. A simple and efficient method for computing center manifold and normal forms associated with semi-simple cases. *Special Issue of Dynamics of Continuous. Discrete and Impulsive Systems for DCDIS'01*. 2002.
- [19] P. Yu. Analysis on double Hopf bifurcation using computer algebra with the aid of multiple scales. *Nonl. Dynam.*, No. 27 pp 19-53. 2002.
- [20] P. Yu. Symbolic computation of normal forms for resonant double Hopf bifurcations using multiple time scales. *J. Sound Vib.* No. 247, pp 615-632. 2001.
- [21] P. Yu. A method for computing center manifold and normal forms. *EQUADIFF 99*. No. 2, pp 832-837. Singapore: World Scientific. 2000.
- [22] P. Yu. Computation of normal forms via a perturbation technique. *J. Sound Vib.*, No. 211, pp 19-38. 1998.

- [23] P. Yu, K. Huseyin. "On generic dynamics related to a three-fold zero eigenvalue". *Dynamics and Stability of Systems*, Vol. 5, No. 2, pp 113-126. 1990.
- [24] P. Yu, K. Huseyin. "Bifurcation associated with a three-fold zero eigenvalue". *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. XLVI, No. 2, pp 193-216. June 1988.