UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EL USO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN QUE HACEN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA, EN EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA
GUADALUPE GASTELUM NEUMAN

Director de Tesis:
Dr. Ramiro Ávila Godoy

Miembros del Comité Revisor y del Jurado:

M.en C. José Álvaro Encinas Bringas
M.en C. Jorge Ruperto Vargas Castro
M.en C. Agustín Grijalva Monteverde
Dr. Ramiro Ávila Godoy

Hermosillo Sonora, México. Mayo de 2004

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La Matemática en general y el Cálculo en particular, son considerados, no sólo una herramienta importante, sino indispensable en la formación de ingenieros, por lo que todo estudiante de las carreras de ingeniería debe cursar y aprobar varias asignaturas de Cálculo, entre otras de Matemáticas, antes de iniciar el estudio de las materias específicas de su carrera, de tal forma que esté preparado para poder analizar, interpretar y resolver problemas propios de su profesión.

De los conceptos del Cálculo y en general de las Matemáticas, el concepto de función es, de acuerdo con algunos investigadores y autores de libros de texto, el más importante por ser el concepto básico para el estudio de la variación. El reconocer la importancia de este concepto en el aprendizaje del Cálculo nos motivó a plantearnos el problema de tratar de determinar en qué medida los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UABC usan el concepto de función en el análisis, interpretación y resolución de problemas de variación

En el capítulo I, "Marco de Referencia", se describe la situación en la que surge y adquiere sentido el problema a investigar, se hace una caracterización de la Facultad de Ingeniería, Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California, unidad académica donde estudian los grupos participantes en la investigación, se hace una descripción de la formación del personal docente, de la carta descriptiva donde se ubica el concepto de función, los principales textos recomendados por la carta descriptiva y utilizados por la mayoría de los profesores que imparten la materia de Matemáticas I y se describe brevemente el tipo de clase que es tradicional en la Facultad.

En el capítulo II, "Planteamiento del Problema", se hacen algunas consideraciones preliminares, se plantea la importancia del concepto de función, algunos estudios antecedentes, se define y plantea el problema a investigar, expresando también el propósito fundamental y objetivos específicos de la investigación.

En el capítulo III, "Marco Teórico", se establecen las premisas que sirven de base para justificar la formulación y desarrollo del proyecto de investigación. Tales premisas se refieren a la concepción del aprendizaje, al papel de los registros de representación en dicho proceso, a la concepción de la enseñanza y a la concepción del conocimiento matemático. También se presenta una concepción sobre los niveles de desarrollo del pensamiento variacional, los cuales se asumen como la referencia para determinar el nivel de dominio del concepto de función que tienen los estudiantes.

En el capítulo IV, "La Metodología", se justifica el porqué de la utilización de una metodología cualitativa, se describen las acciones a realizar para el desarrollo de la investigación, se presentan y comentan los problemas seleccionados para utilizarse en la investigación y, finalmente, se describen las etapas en las que se llevó a cabo la investigación.

El criterio utilizado para la selección de los problemas fue que sirvieran para evaluar el nivel de dominio del concepto de función de acuerdo con los niveles de desarrollo del pensamiento variacional presentados en el marco teórico. En una primera etapa se aplica un cuestionario a dos grupos de materias de semestres intermedios, en una segunda etapa a estos mismos grupos se proporcionan algunas clases utilizando tecnología, específicamente, se utilizó la T-I 92 y el VewScreen y en la tercera etapa se agregaron tres problemas al primer cuestionario para aplicarse a cinco grupos, los dos anteriores más un grupo de primer, semestre otro de segundo semestre y otro más con alumnos de séptimo y octavo semestre.

En el capítulo V, "Los Resultados", se hace una descripción del desarrollo de la experimentación describiendo cuáles fueron los resultados obtenidos en cada una de las etapas, analizando dichos resultados, a la luz de las premisas teóricas establecidas y evaluándolos a partir del problema de investigación.

En el capítulo de "Conclusiones", se hace un resumen de los principales resultados, se hace la interpretación de los mismos en función del problema de investigación, es decir se emite opinión sobre el nivel de dominio del concepto de función que los estudiantes muestran al analizar, interpretar y resolver problemas de variación. También se hace una serie de reflexiones y conjeturas sobre las posibles razones por las cuales los resultados fueron los obtenidos, en especial son reflexiones sobre la relación entre las concepciones de los estudiantes y la enseñanza.

En la última parte de este apartado se hacen comentarios sobre las debilidades de este trabajo y las investigaciones futuras que podrían ampliar la información sobre este problema.

Finalmente, se presenta la bibliografía y cuatro anexos con información sobre los problemas aplicados, el tratamiento de la segunda etapa, respuestas de la tercera etapa y ejemplos fotográficos de algunas respuestas de la tercera etapa.

CAPÍTULO I

MARCO REFERENCIAL

I.1. LA FACULTAD DE INGENIRÍA, MEXICALI. U. A. B. C.

La facultad de ingeniería nace como una necesidad de retener, en el Estado de Baja California, a sus jóvenes que partían hacia el centro del país o a otros estados ha instruirse en la profesión. Algunos al terminar sus estudios volvían pero otros no, esto afectaba y retrasaba el desarrollo de la región. Esto motivó a que autoridades y sociedad en 1967 realizarán un esfuerzo por abrir la Escuela de Ingeniería con la carrera de Ingeniero Topógrafo y Geodesta, tiempo después se ofrece la carrera de Ingeniero Civil, Ingeniero mecánico, Ingeniero Electricista, Ingeniero en Electrónica, Ingeniero en Computación, Licenciado en Sistemas computacionales y Ingeniero Industrial. En agosto de 1998 se convierte en facultad por el hecho de ofrecer las maestrías en Comunicaciones e Instrumentación y Control, y en el área de Ingeniería Industrial la Maestría en Procesos Industriales.

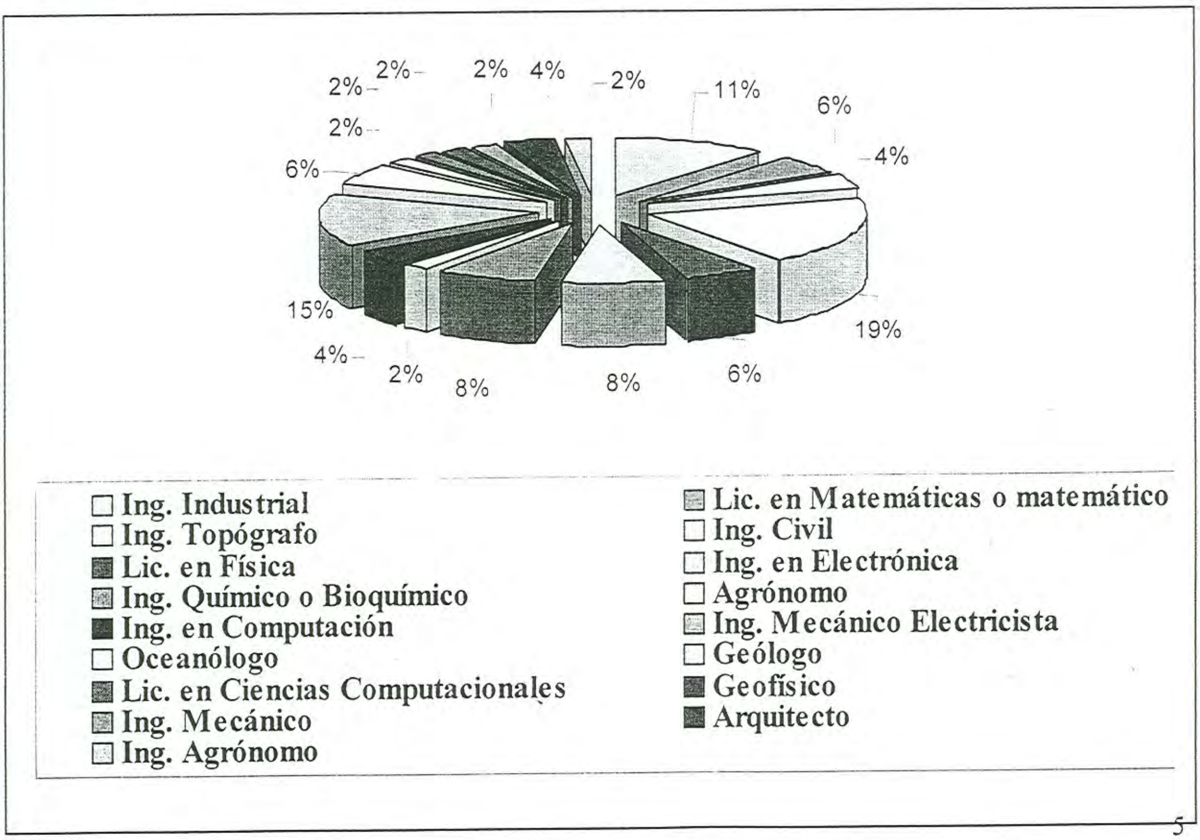
Administrativamente se organiza alrededor de tres autoridades que son: Director de la Facultad, Subdirector Administrativo y Subdirector Académico. Tiempos completos definitivos, tiempos completos sin definitividad, tiempos completos que cubren plazas de profesores definitivos que se encuentran en año sabático o comisionados, profesores de asignatura, técnicos académicos que prestan servicio en los laboratorios de las diferentes carreras y un departamento de mantenimiento.

I.2. EL CUERPO ACADÉMICO

El profesorado está compuesto por alrededor de 360 profesores y está aumentando, conforme aumenta la demanda estudiantil, sobre todo en la carrera de Ingeniero Industrial que es de nueva creación (relativamente). El 15% (53) de la planta docente se dedica a las materias relacionadas con las matemáticas, es decir, a la etapa básica. La planta docente que se dedica a impartir cursos de matemáticas está conformada por profesores cuya formación profesional es muy variada: ingenieros civiles, industriales, arquitectos, etc., ver tabla siguiente.

Distribución de los profesores de la Facultad de Ingeniería de la U.A.B.C., Unidad Mexicali en función de su formación profesional a nivel licenciatura.

Licenciatura de egreso	No. de maestros	% de maestros
Ing. Industrial	6	11.32%
Lic. En Matemáticas o matemático	3	5.66%
Ing. Topógrafo	2	3.77%
Ing. Civil	10	18.87%
Lic. En Física	3	5.66%
Ing. En Electrónica	4	7.55%
Ing. Químico o Bioquímico	4	7.55%
Agrónomo	1	1.89%
Ing. En Computación	2	3.77%
Ing. Mecánico Electricista	8	15.09%
Oceanólogo	3	5.66%
Geólogo	1	1.89%
Lic. En Ciencias Computacionales	1	1.89%
Geofísico	1	1.89%
Ing. Mecánico	1	1.89%
Arquitecto	2	3.77%
Ing. Agrónomo	1	1.89%



Es pues, una diversidad de profesiones las representadas en la planta docente.

I. 2 LA MATEMÁTICA EN EL CURRICULUM DE LA FACULTAD

El plan está dividido en tres etapas, la primera es la "Etapa Básica" y es un tronco común, es decir, las materias que conforman esta etapa todos los alumnos las deben de aprobar. Estas materias son: Un Curso Propedéutico que tiene carácter de obligatorio, Matemáticas I, II, III y IV, Física General, Dibujo Técnico, Probabilidad, Organización de Sistemas de Computo, Electricidad y Magnetismo, Estadística, Óptica-Acústica y Calor, Métodos Numéricos, Lectura y Redacción, Química, Circuitos I, Álgebra Lineal, Lenguaje C, Expresión Oral, Ecuaciones Diferenciales y Ética. Haciendo un total de 20 materias que abarcan alrededor de tres semestres.

La siguiente es la "Etapa Disciplinaria", he de aclarar que la carrera en la cual trabajo es la carrera de Ingeniero en Electrónica y a la cual comúnmente me referiré. Las materias que conforman esta área son: semiconductores, circuitos II, Electrónica I, Mediciones Eléctricas y Electrónicas, Señales y Sistemas, Circuitos lógicos I, Electrónica II, Circuitos Lógicos II, Electrónica III, Control I y Circuitos Lógicos III. Además, el alumno debe completar su carga académica con materias llamadas optativas como Socioeconomía de México, Derecho Laboral, Administración y otras.

La última es la "Etapa terminal o profesional", en la carrera de Electrónica se ofrecen tres salidas terminales una es en Comunicaciones, otra es en Industrial y la tercera es en Instrumentación y Control que es a la que me referiré cuando sea necesario, por ser el área en donde más he trabajado y en los dos últimos semestres he impartido la materia de Ecuaciones Diferenciales en la etapa básica. Las materias que se ofrecen en esta etapa correspondientes a Instrumentación y Control son: Lenguaje Ensamblador, Electrónica de Potencia I, Instrumentación I, Física Médica, Diseño y Evaluación de Proyectos, Control II, Mantenimiento Electrónico Industrial, Electrónica de Potencia II, Microprocesadores y Periféricos, Instrumentación II, Análisis Instrumental, Control Electrónico de Sistemas de

Potencia, Microcontroladores, Sistemas Hidráulicos y Neumáticos, Robótica, Instrumentación Biomédica y Control Digital. No todas las materias de esta etapa son necesarias para lograr los créditos que les falta a los alumnos para terminar su plan de estudios, los alumnos acuerdan con sus tutores las materias que necesitan según sus intereses, además de que algunas materias no se ofrecen por falta de maestro con dominio en esa área del conocimiento.

Como se puede ver, en la etapa básica, son alrededor de 10 materias del área de Matemáticas que pretenden dotar de las herramientas necesarias que requiere el estudiante para enfrentar su segunda etapa la cual persigue el objetivo de que el alumno comprenda y aprenda su disciplina por lo que deberá analizar, modelar y diseñar sistemas lo cual sólo será posible si está dotado con el conocimiento de las matemáticas que le permitan simular e interpretar el comportamiento de los componentes, dispositivos y sistemas.

I. 2. 1 CARTA DESCRIPTIVA

Todo aquel profesionista que se involucra en la docencia en la Facultad de Ingeniería debe tener la carta descriptiva de la materia que va intentar enseñar, este documento contiene la siguiente información: Nombre de la materia, clave de la materia, etapa a la que pertenece la materia, cantidad de horas teóricas, cantidad de horas prácticas, si es obligatoria o optativa, requisitos para cursar la asignatura, propósito general del curso, objetivos generales (formativo y informativo) del curso, desarrollo por unidades: título del capítulo, objetivo del capítulo, cantidad de horas estimadas para el capítulo, contenido temático. Metodología de trabajo, criterios de evaluación, bibliografía básica y complementaria. En la mayoría de los casos es fácil observar que el contenido temático ha sido trasladado, en el mismo orden, del libro de texto al documento llamado carta descriptiva.

En el caso de Matemáticas I, que es donde se ubica el concepto de función, la carta descriptiva (Plan 1995-1), en su apartado propósito general del curso dice "Este curso está dirigido a estudiantes del primer semestre de ingeniería y el propósito de este curso es de que el alumno adquiera los conocimientos básicos de las matemáticas, ejercite y amplíe la habilidad de razonamiento con cierta metodología".

E inmediatamente después, en el apartado objetivos generales del curso dice "*Formativo*: Al terminar el curso el alumno tendrá la habilidad de observar en términos de una ecuación las formas de ciertos cuerpos, la trayectoria de objetos en movimiento y ciertos fenómenos naturales. *Informativo*: El alumno adquirirá los conocimientos para expresar, describir y evaluar las ecuaciones matemáticas que describen las formas de ciertos cuerpos, la trayectoria de objetos en movimiento y ciertos fenómenos."

En la Unidad II el tema es FUNCIONES, cuyo objetivo dice "*Comprenderá el concepto de relación y de función y será capaz de diferenciarlos. Aprenderá a graficar y encontrar el dominio y el rango* en las siguientes funciones; a) lineales, b) cuadráticas, c) radicales en lineales y cuadráticas, d) racionales, e) valores absolutos, f) combinaciones en llaves, g) mayor entero y h) signo."

Esta unidad tiene como contenido temático:

-Definición y gráfica de funciones.

-Notación funcional y operaciones con funciones.

-Tipos de funciones y algunas funciones especiales.

-Funciones trigonométricas.

La carta descriptiva en la sección bibliografía recomienda cinco libros como básico, El Cálculo con Geometría Analítica de Louis Leithold. Cálculo con Geometría Analítica de Dennis G Zill. El Cálculo con Geometría Analítica de Larson Hostetier, El Cálculo con Geometría Analítica de Earl W. Swolowsky, y Geometría analítica y el Cálculo Diferencial no dice quien es el autor sólo que es de la editorial Mc Graw Hill.

I. 2. 2 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LOS CURSOS DE MATEMÁ QUE FORMAN PARTE DEL PLAN DE ESTUDIOS DE LAS CARRERAS DE INGENIERÍA.

Siendo la ingeniería una aplicación de los conocimientos de las llamadas Ciencias Naturales las cuales de alguna manera estudian algún tipo de variación o de cambio utilizan como herramienta fundamental LA MATEMÁTICA DEL CAMBIO de la cual una rama fundamental es EL CÁLCULO. El conocimiento del Cálculo al ingeniero le permite tener una herramienta para la toma de decisiones.

En el caso de la ingeniería electrónica como ya se comentó los ingenieros en electrónica desarrollan sistemas a partir del conocimiento de las leyes físicas y especialmente en lo que a teoría de circuitos se refiere para analizar el comportamiento de los componentes individual y en conjunto, el comportamiento de dichos sistemas es variable y esto se representa por una ecuación particular o varias (específicamente por una *ecuación diferencial*) que describen la relación entre las razones de cambio de las diferentes variables. Establecida la ecuación diferencial o un conjunto de ellas que modelan el sistema, es necesario utilizar un aparato conceptual (tanto teórico como numérico) para intentar resolver dichas ecuación(es) diferencial(es), esto es, para tratar de determinar el modelo matemático *(una función)* que explique el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones. Pues bien, lograr que los estudiantes sean eficaces para plantear y resolver las ecuaciones diferenciales que modelan la variación en los sistemas y esta es una meta ambiciosa en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en las carreras de ingeniería. He aquí la importancia de aprehender a construir ese modelo o función como una herramienta para la toma de decisiones.

Las anteriores son las razones por las cuales, en la currícula se encuentran las materias de Matemáticas I, II, III, IV y Ecuaciones Diferenciales y que tienen por objeto fundamental el concepto de función.

I. 3 LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA, EN ESPECIAL LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Regularmente cuando se ingresa al cuerpo docente de la Facultad de Ingeniería se le entrega al profesor la carta descriptiva de la materia o el contenido temático de la misma, el siguiente paso para el profesor es determinar en que libro se apoyará, por lo tanto, la clase está estrechamente relacionada con el texto elegido por el profesor, más no el tipo de clase, regularmente el profesor hace sus notas del procedimiento que sigue el autor sobre cierto tema, sus notas del texto intentan una síntesis del tema y es lo que expone en clase para posteriormente resolver algunos ejercicios, encargando como tarea o como preparación para el examen parcial la solución de algunos ejercicios que regularmente están al final del capítulo correspondiente. La evaluación que hace el profesor del aprendizaje de cada capítulo o grupo de capítulos es la solución de un conjunto de problemas regularmente seleccionados del conjunto de problemas que el autor propone al final de cada capítulo.

Es una clase con la característica de que la actividad principal la ejerce el profesor, por lo tanto, es de tipo expositiva y con la urgencia de mostrar el objetivo principal que se impuso con anterioridad el profesor, a veces alcanzado por el profesor sin mediar ningún trayecto. Es decir, se exponen temas no se resuelven problemas.

Desde el punto de vista sistémico podemos describir un proceso de la siguiente forma, algunos objetos conocidos como entradas son introducidos al sistema el cual los procesa y sus salidas son conocidas como productos. Existen dos tipos de organización sistémica básica, un tipo de organización es el conocido como lazo abierto, este tipo de sistemas tienen como factor primordial el tiempo. Un ejemplo concreto es el caso de una lavadora, donde se introduce ropa y mediante algún instrumento integrado en la lavadora se asigna un tiempo de lavado una vez terminado el tiempo la lavadora se detiene sin considerar si alcanzó el objetivo, es decir, no tiene importancia si la ropa se limpió o no, sólo que el tiempo asignado se terminó. En las cartas descriptivas parece que se invita a usar este tipo de sistema porque existe un factor de tiempo estimado, regularmente no se sabe cómo se obtuvo este valor.

El otro tipo de organización sistémica es el de lazo cerrado, este tipo de sistemas tienen como factor primordial la realimentación. Básicamente, un instrumento mide la salida o objetivo alcanzado por el sistema y lo convierte de tal forma que pueda ser diferenciado con el objetivo deseado. El objetivo deseado es la entrada al sistema, si la diferencia es cero se puede interpretar que se alcanzó el objetivo. Un ejemplo concreto es el llenado, con líquido, de un depósito. El objetivo deseado es un cierto nivel del líquido en el depósito, una llave permite el paso del líquido en tanto no alcance una bola, llamada flotador (este es el instrumento que mide la salida y realimenta la información a la entrada), cuando el líquido alcanza el nivel del flotador éste presiona al flotador hacia arriba y éste a su vez presiona un mecanismo que obstruye el paso del líquido a través de la llave, en ese momento el objetivo alcanzado y el objetivo deseado son iguales, la diferencia es cero. Este es un sistema más eficiente pero más complejo, sobre todo si intentamos una analogía con el proceso enseñanza-aprendizaje. Es cierto que la carta descriptiva también nos informa acerca del objetivo deseado del curso y el objetivo deseado para cada capítulo pero rara vez diferenciamos el objetivo deseado con el objetivo alcanzado.

Sin embargo, los resultados del proceso de enseñanza expresan que el índice de deserción en el inicio de la carrera es muy alto y los índices de reprobación son los siguientes, de acuerdo con el coordinador del tronco común éstos varían semestre a semestre pero el promedio es más o menos el mismo:

Materia	*Indice de reprobación*	*Materia*	*Indice de reprobación*
Matemáticas I	60%	Probabilidad	40%
Matemáticas II	37%	Estadística	31%
Matemáticas III	[illegible]	Ecuaciones Difer.	27%
Matemáticas IV	17%	Algebra lineal	16%

I. 3. 1. LOS TEXTOS

Veamos cuál es el proceso de cómo tratan el concepto de función los dos primeros textos: El primer libro de texto EL CÁLCULO de Louis Leithold, séptima edición, dice que el concepto de función es fundamental en el cálculo y que en el transcurso del libro servirá como concepto unificador. Es en el capítulo I, que lleva por título: Funciones, límites y continuidad en donde expone el concepto de función.

En la sección 1.1: Funciones y sus gráficas, el autor expresa que *una función es una correspondencia entre dos conjuntos de números reales* y presenta cinco ejemplos "ilustrativos" en los cuales siempre parte de una expresión analítica de la cual obtiene el dominio y contradominio, en notación de intervalos, de la función definida por la ecuación:

Ej 1. $y = x^2$; Ej. 2. $y = \sqrt{x-2}$; Ej. 3. $y = \sqrt{x^2-9}$; Ej. 4. $y = \sqrt{x-2} \rightarrow f = \{(x,y)\, y = \sqrt{x-2}\}$; Ej. 5. $y = \sqrt{x^2-9} \rightarrow f = \{(x,y)| y = \sqrt{x^2-9}\}$

Como se puede observar el alumno no ha realizado ninguna actividad para construir las expresiones analíticas y es normal que el alumno quede supeditado al registro de partida, Por lo tanto, de aquí en adelante tendrán que darle el objeto, que no construirlo, es decir, darle la expresión analítica para que él obtenga el o los intervalos del dominio y contradominio, que tampoco se ve cuál es la razón para ello.

A continuación, la definición de función que proporciona el autor *"Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x,y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y reciben el nombre de contradominio de la función."*

El ejemplo 1 dice, dada $f(x) = x^2 + 3x - 4$, determine (a) $f(0)$; (b) $f(2)$; (c) $f(h)$; (d) $f(2h)$; (e) $f(2x)$; (f) $f(x+h)$; (g) $f(x)+ f(h)$. Otra vez el registro de partida es el registro analítico, esto refuerza la dependencia o la creencia que la "fórmula" siempre la tiene que proporcionar el profesor o el texto. Además, el autor utiliza el inciso (f) para comentar que "en el capítulo 2 se requerirá calcular cocientes de la forma" $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $h \neq 0$ y en el ejemplo 2 aplica la expresión anterior a $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$; resultando $f(x) = 8x - 5 + 4h$, y eso es todo. Queda pues la promesa de que en un futuro se requerirá.

A continuación proporciona la, definición de grafica de una función. "Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano R^2 para los cuales (x,y) es un par ordenado de f" y nueve ejemplos en donde comenta algunas situaciones que se pueden presentar, como discontinuidades, formas de expresar funciones, expresiones que no son funciones y que la gráfica las puede evidenciar con la regla de que "una recta vertical interfecta la gráfica de una función a lo más en un punto".

En la sección 1.2: Operaciones con funciones y tipos de funciones. Expone como obtener nuevas funciones por medio de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones. Además, la función compuesta. Posteriormente, utiliza las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x-4}$ para ejemplificar como se hace.

En la sección 1.3: Funciones como modelos matemáticos. Parece ser que el autor parte de la premisa de que el alumno debe tener algunos conocimientos antes de enfrentarse a los problemas, que el considera, en otro contexto que no es el matemático. Dice al inicio de la sección "En las aplicaciones del Cálculo, se necesita expresar una situación del mundo real en términos de una relación funcional, denominada modelo matemático de la situación." Y propone cinco sugerencias para resolver problemas que impliquen una función como modelo matemático (p.21), básicamente: (1) Comprender el problema; (2) Determinar los datos conocidos y desconocidos; (3) escribir cualquier hecho conocido de la variable y del valor de la función; (4) utilizar dos expresiones del paso anterior para formar una ecuación que defina la función, y (5) escribir una conclusión, de una o más oraciones, que respondan a las preguntas del problema. Finaliza la sección con seis ejemplos y 28 ejercicios.

Hasta aquí me parece que cabe una aclaración, *el proceder de un profesor*, y lo es porque ya tiene el conocimiento, es primero acercarse de todo lo que va a necesitar para construir, que es el caso del autor. *El proceder de un estudiante*, y lo es porque desconoce ese conocimiento, es ir buscando o construyendo las herramientas o materiales que se le van presentando como necesidades para construir, ¿construir qué? Construir la solución del problema que ha aceptado resolver. Es decir, son dos posiciones diferentes uno sabe de antemano por qué motivos involucra ciertos conocimientos en tanto el otro no le queda claro por qué se vio algún tema o concepto; sin embargo, el profesor asume la posición del autor sin considerar la del estudiante y es por eso que las preguntas de los estudiantes, ante el profesor, pueden parecerle desesperantes pues para él las herramientas o materiales ya están dados, pero ¿qué sentido tienen para el estudiante si no participó en la construcción de dichos objetos y, por lo tanto, no los ha asimilado?. Se puede argumentar que muchas personas utilizan herramientas sin haber participado en su construcción pero también cabe la pregunta, una vez que utiliza por primera vez una herramienta ¿qué tanto conoce sus capacidades y, por lo tanto, sus límites? Eso sólo puede ser solventado por medio de actividades que permitan las necesidades y descubrimientos de dichos objetos, dichas actividades deben ser *apoyadas* por el profesor, mas no ejecutadas por él, sino por los estudiantes.

En el caso del segundo texto, Cálculo con Geometría Analítica de Dennis G. Zill, argumenta que "el concepto de función es básico (el profesor ¿cómo interpreta esto?, ¿sin importancia?) y se requiere para aplicaciones posteriores de la derivada." Y procede de la siguiente manera:

Los números reales, recta numérica, desigualdades, intervalos, valor absoluto, valores absolutos y desigualdades, y desigualdad del triángulo.

El plano cartesiano, cuadrantes, fórmula de la distancia, punto medio de un segmento de una recta, gráficas, trazos de puntos, simetría, coordenadas de la intersección con los ejes, circunferencias y secciones cónicas.

Rectas, pendiente, rectas paralelas y perpendiculares, ecuaciones de rectas, ecuación lineal($ax+by+c=0$) y gráficas.

Funciones:

Primero, dice que "Una función es una regla, o una correspondencia, que relaciona dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto." Y a continuación presenta la siguiente definición "Una función f desde un conjunto X hacia un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento x en X un elemento único y en Y. El conjunto x se llama dominio de f. El conjunto de elementos correspondientes y en Y se denomina contradominio o ámbito de f".

Tipos de funciones: función polinomial, función racional, función potencia, funciones definidas por secciones.

Combinación de funciones: suma, diferencia, producto y cociente, función compuesta.

Funciones trigonométricas: Coseno, seno, tg, secante, cotg, cosec.

Este autor, en el ejemplo 1 de la sección 1.4 (funciones), plantea seis incisos en los cuales hace ver la relación o correspondencia entre variables de una situación dada, por ejemplo, (a) El área de un círculo es una función de su radio. Además, a partir del problema 57, de los ejercicios correspondientes a la sección 1.4, hasta el problema 71 plantea situaciones tales como "Exprese el perímetro P de un cuadrado en función de su área A." De nuevo procede como autor de un libro que potencialmente se puede convertir en un libro de texto, es decir, su planteamiento es proponer los elementos que necesitará posteriormente pero el profesor debe cuestionar si didácticamente le es conveniente seguir el orden y la forma que sigue el autor simplemente porque son dos objetivos diferentes.

I. 3. 2 APUNTES DE CLASE CONDUCENTES AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Son alrededor de veintitrés grupos de MATEMÁTICAS I, veamos el orden que sigue un profesor que tiene alrededor de diez años con esta materia:

Números reales, punto, recta, distancia entre dos puntos, punto medio.

Propiedades de las desigualdades, Intervalos: notación de intervalos, notación de conjuntos y notación gráfica.

Valor absoluto y operaciones con valor absoluto.

Ecuación de un círculo, elipse, hipérbola y parábola.

Gráficas de ecuaciones: simetría, asíntotas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, obtener el centro, puntos y vértices de el círculo, elipse, hipérbola y de la parábola.

Definición de función: "Una función f de un conjunto "X" en otro "Y" es una correspondencia que asigna a cada elemento x de X exactamente un elemento y de Y. Diremos que y es la imagen de x bajo f, denotando f en función de x. El dominio de f es el conjunto X, y su recorrido consta de todas las imágenes f a función de x de los elementos x de X."

"Si a cada valor de su recorrido le corresponde un elemento en su dominio, la función se llama inyectiva. Además, si el recorrido de f es todo el conjunto Y, suprayectiva.
"Clasificaciones y combinaciones de funciones: a finales del SXVIII los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que la mayoría de los fenómenos naturales pueden representarse por modelos matemáticos tomados de una colección básica de funciones, las llamadas funciones elementales: 1. Algebraicas. 2. Logarítmicas y exponenciales. 3. Trigonométricas.
Definición informal de límite y tipos de límites.
Tal parece que el profesor toma como referencia y guía la secuencia de los libros y, por lo tanto, la posición de los autores en cuanto a la exposición de una serie de temas sin considerar nociones acerca de cómo se aprende, cómo se enseña y el libro de texto cómo puede jugar un mejor papel en las actividades de enseñanza y aprendizaje.

I.4 EL USO DE TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y ESPECIALMENTE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

En la etapa básica sólo la materia de Matemáticas I tiene cinco horas de clase teórica y dos horas de taller en donde los alumnos se dedican a resolver problemas. En el semestre 2003-1 entró en vigor un nuevo plan en donde se modificó esta situación, ahora tiene tres horas de clase teórica y dos de taller.

En las etapas disciplinaria y terminal la mayoría de las materias tienen asignadas dos horas/semana de laboratorio con excepción de la materia de Mediciones Eléctricas y Electrónicas con cuatro horas/semana. El laboratorio cuenta con tres salones con computadoras, cinco salones con equipo para "inyectarle" voltaje directo o alterno que simulan señales en los circuitos, equipo de medición como osciloscopio, multímetro y trazador de curvas y un salón con equipo básico para analizar señales de audio y video.

I.5 LOS ALUMNOS

La aptitud de los estudiantes de nuevo ingreso es avalada primero, por una constancia expedida por una institución oficial de procedencia y por un examen de admisión. La actitud del estudiante de nuevo ingreso es de expectativa y participación al menos en sus primeros días o semanas. Sin embargo, el tipo de clase anteriormente descrito es el tradicional en nuestras aulas, este proceso se repite en la mayoría de las clases lo cual va formando un estudiante pasivo porque como ya se dijo la clase es de tipo expositivo y no hay tiempo para que el estudiante asimile el conocimiento nuevo. Un factor que pudiera ser motivador es el laboratorio, alrededor del cuarto semestre en adelante aparecen materias con horas de laboratorio en donde el supuesto es poner en práctica la teoría pero en realidad en la mayoría de los casos se convierte en otra materia en donde el énfasis está en el funcionamiento práctico del circuito o sistema, es decir, regularmente, no existe un complemento entre la teoría y la práctica, esto se propicia, principalmente, entre otras cosas, porque el profesor de la teoría no es el mismo que el de la práctica. Las clases con laboratorio podrían ofrecer una motivación en el alumno para participar en la construcción de su conocimiento pero los profesores, a lo más, lo utilizamos para comprobar la teoría no como medio para construir el conocimiento y los alumnos se preocupan más por que el circuito se comporte de la manera esperada por el profesor, cuando es así los alumnos expresan ¡si funciono!. En la mayoría de los casos, no se enfatiza en la interpretación matemática como argumento para explicar el comportamiento del circuito, sobre todo cuando el tiempo para la entrega los está rebasando. En conclusión, la actividad en clase se centra en el profesor con un procedimiento expositivo provocando pasividad en el estudiante y en el laboratorio (la práctica) un estudiante presionado por que el circuito funcione.

CAPÍTULO II

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

II. 1 CONSIDERACIONES PRELIMINARES

La mayor parte del tiempo como profesor de la Facultad de Ingeniería, Mexicali, me he desempeñado en las carreras de Ingeniero en Electrónica (carrera de la que egresé), Ingeniero en Computación y, en los últimos tres semestres, en la etapa básica, también llamada Tronco común. Las pláticas entre compañeros profesores era que la mayoría de los alumnos tenían dificultades, no para comprender el tema o problema, sino para aplicar lo que *supuestamente* habían aprendido en la exposición hecha por el profesor, cosa que se ponía en evidencia al ver que no eran ***capaces de resolver los problemas*** propuestos. Incluso, aún volviendo a explicar o después de aclarar dudas, los resultados de los exámenes ponían en evidencia que el problema subsistía. Estos comentarios entre compañeros muestran que la mayoría, si no es que todos los profesores de la Facultad, está consciente de este problema: *los alumnos no pueden utilizar las herramientas de Cálculo que habían adquirido durante la etapa básica o Tronco Común.* Las opiniones de los profesores con respecto al problema son variadas, por ejemplo: "las carreras de ingeniería se han "masificado" y la mayoría de los alumnos "no tienen vocación", otra es que "los profesores del Tronco común no están haciendo su función". Ninguna de estas respuestas aclaran el problema porque qué significa tener vocación o a qué se refieren específicamente con la función del profesor del tronco común. La pauta a seguir la sugiere [9]Farfán, cuando dice "Indagación (plantear preguntas, evidencias y teoría son las tres componentes principales que establecen la diferencia entre la investigación y la especulación."

Estas interrogantes y otras merecen una investigación que arroje luz sobre el problema de por qué no pueden aplicar sus conocimientos del Cálculo en la solución de aquellos problemas que así lo requieren. Es por estos motivos, de trabajo en la docencia, que solicité ingresar al programa de Maestría en Matemática Educativa ofertada por convenio entre la UNISON y la U.A.B.C.

De las Fuentes (1998), también egresado de este programa, en su tesis dice "*uno de los problemas detectados en la enseñanza de las matemáticas en la Facultad de Ingeniería es la disociación algoritmia-conceptualización, es decir, la incapacidad de los estudiantes para conectar los conceptos matemáticos y los algoritmos necesarios para la resolución de problemas (capítulo 1, página 1, párrafo 1).*" Y agrega, "*la verdad es que difícilmente un alumno puede aplicar conceptos como la derivada, la integral, **funciones**, raíces, sistemas de ecuaciones, por mencionar algunos, en el mejor de los casos tan sólo los recuerda (capítulo I, página 3, párrafo 1. De la referencia [4]).*"

Otro compañero, Encinas Bringas, Álvaro (2001), egresado del mismo programa dice en su tesis (Febrero del 2001, página 197, inciso f) "*Particular dificultad se observa en la construcción de la gráfica de la **rapidez** a partir de **la magnitud variable**. Se considera que esto puede deberse a un deficiente aprendizaje o algún tipo de obstáculo de la relación entre la pendiente de la tangente a la curva de la variación de la magnitud y la rapidez. Tal vez esto también explique el por qué del bajo rendimiento en las preguntas que involucran rapidez*".

Lo anterior pone de manifiesto un problema en el aprendizaje y manejo conceptual sobre todo en un concepto que reviste especial interés, dado que se ha identificado como un concepto unificador en el Cálculo, el de ***"función"***.

II. 2 LA IMPORTANCIA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

En el marco referencial hemos señalado la cantidad de materias del área de matemáticas y en especial de Cálculo, que se requieren en la formación de ingenieros; además hemos hecho algunas consideraciones sobre la importancia que el concepto de función tiene como modelo de la variación, tomando en cuenta que los ingenieros en general, y en particular los egresados de esta Facultad deben ser capaces de analizar y resolver problemas que se presentan en situaciones del área de electrónica, electricidad, mecánica, etc., en donde la variación es el objeto de estudio y la función es el modelo por medio del cual se representa y estudia, de tal manera que en la carta descriptiva de

Matemáticas I se expresa el objetivo de formar un ingeniero **que tenga la habilidad de "observar en términos de una ecuación las formas de ciertos cuerpos, la trayectoria de objetos en movimiento y ciertos fenómenos naturales."** Y por lo tanto, el objetivo informativo es que **"el alumno adquiera los conocimientos para expresar, describir y evaluar las ecuaciones matemáticas que describen las formas de ciertos cuerpos, la trayectoria de objetos en movimiento y la de ciertos fenómenos."**

También en los de libros sobre Cálculo se dice en la introducción o en la introducción capítulo correspondiente, que el concepto de función es fundamental. Por ejemplo: Louis Leithold, en su libro "EL CÁLCULO", en séptima edición dice: "Indudablemente habrá tratado funciones en sus cursos anteriores de matemáticas, y debido a que son fundamentales en Cálculo y *sirven como un concepto unificador a lo largo de este texto,....*"

II. 3 LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA, MEXICALI

Es lógico hacer, en este trabajo, la pregunta ¿Cómo intentan los profesores alcanzar el objetivo planteado en la carta descriptiva, en referencia al concepto de función? Es decir, ¿qué estrategias y actividades ponen en juego los profesores? Como ya se describió en el Marco Referencial, en la sección "apuntes de clase conducentes al concepto de función", es una exposición, simplificada y en secuencia sobre temas, de tal forma que el profesor sigue la misma estrategia del autor del texto, es decir, intenta conducir los temas para que la conclusión sea aceptada. Sin embargo, habría que ver si ésta es una buena estrategia didáctica para el aprendizaje. Según los apuntes de los alumnos, se observa la falta de interacción, destacándose el carácter eminentemente expositivo de las clases.

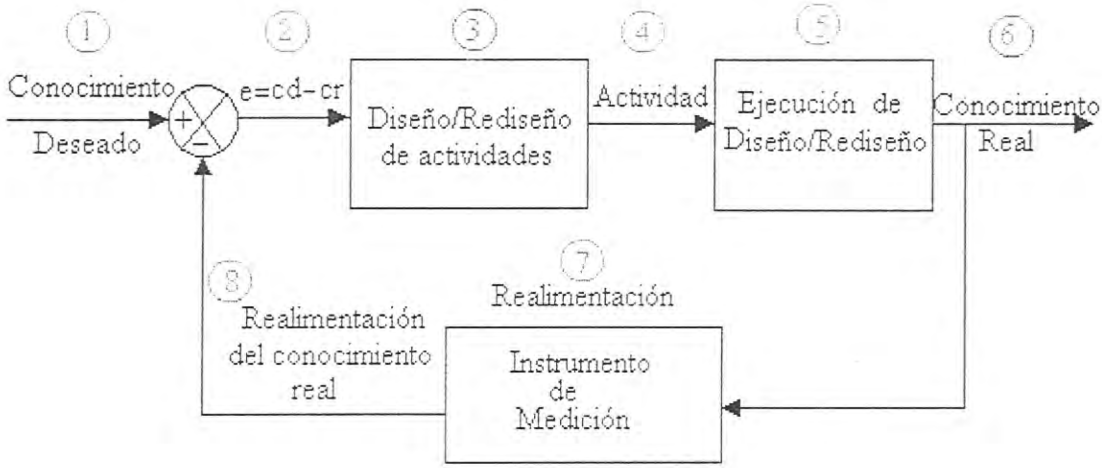
La percepción de que los alumnos tienen un conocimiento deficiente, si no es que nulo, del concepto de función, se debe a los problemas que enfrentan al tratar de resolver problemas que involucran dicho concepto; además, los porcentajes proporcionados en el capítulo anterior, Marco Referencial, sobre la materia de Matemáticas I es de alrededor del

60 % de alumnos reprobados, lo cual habla de las dificultades que tienen para de aprender los conceptos y métodos fundamentales del Cálculo.

El sistema de enseñanza imperante tiene una fuerte dependencia de la variable tiempo, es decir, todas las acciones son planeadas y desarrolladas en función del tiempo. Creo que pudiera explorarse otros sistemas de enseñanza que dependieran de otras variables, en particular, pudiera explorarse un sistema de "lazo cerrado" cuya variable fundamental fuera la "realimentación"; lo cual implicaría que las actividades se diseñaran y planearan como un proceso de "aproximaciones sucesivas" al objeto de conocimiento.

Un sistema como este pudiera corresponderse, de mejor manera, con lo expresado por Piaget en Historia y Psicogénesis de la Ciencia, citado por Ávila (Tesis Doctoral. 1998) *"Para Piaget (y, en esencia, para todos los constructivistas), el sujeto se acerca al objeto del conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La nueva información produce modificaciones -acomodaciones- en las estructuras intelectuales, de tal manera que cuando "el sujeto se acerca nuevamente" al objeto lo "ve" de manera distinta a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente como lo hacen sus estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto."*

La idea de un sistema de realimentación se ilustra en el siguiente diagrama:



En el cual la primera etapa plantea la necesidad de determinar qué conocimiento se desea enseñar. En esta etapa es importante establecer el objetivo que se pretende alcanzar. Tomando en cuenta que en este momento todavía no se ha cerrado el primer ciclo, no existe realimentación, por lo que, el error es igual al conocimiento deseado.

En una segunda etapa se hace un diseño de actividades de enseñanza, a través de las cuales se pretendería propiciar la actividad de aprendizaje de los estudiantes (este diseño puede concretarse en un documento que sirva de guía para la realización de las actividades planeadas).

Durante el desarrollo de esta etapa, esto es, la etapa de la realización de las actividades planeadas, es necesario observar los procesos de aprendizaje que tienen lugar en los estudiantes (observar el tipo de estrategias que utilizan, la forma en que usan los conceptos y métodos requeridos, etc) para el diseño y la planeación de la etapa de realimentación.

En la siguiente etapa se requiere evaluar el conocimiento realmente adquirido.

Esto implica el diseño de instrumentos adecuados para llevar a cabo dicha evaluación de manera tal que la información que nos proporcione nos permita formar un juicio objetivo sobre los aprendizajes de los estudiantes.

Después de la etapa anterior, de evaluación, se está en condiciones de determinar "el error" (la diferencia entre el conocimiento deseado y el conocimiento adquirido, determinado por la evaluación). A partir de esta diferencia será necesario el diseño de nuevas actividades de enseñanza y, en consecuencia, nuevas actividades de aprendizaje, cuyo propósito será disminuir "el error" en el siguiente ciclo.

II. 4 ESTUDIOS ANTECEDENTES

Hitt y Torres (1994) describen brevemente cómo se llegó históricamente al concepto de función poniendo en evidencia el nivel de abstracción que alcanzó y las diferentes definiciones que sobre el concepto en cuestión han hecho diversos autores de libros, una definición pone el énfasis de función en términos de relación entre variables, otra en términos de conjuntos y otra más en términos de regla de correspondencia. También manifiestan que la experiencia de profesores e investigadores han encontrado que no existe equivalencia entre las definiciones dado un contexto educativo, es decir, que para cursos de pre-cálculo o cálculo se utiliza la definición de relación entre variables, en cursos de análisis se utiliza la definición de regla de correspondencia y en cursos avanzados de matemáticas se utiliza la definición de conjuntos lo cual provoca que el alumno tenga dificultades para crear un puente entre la definición y una imagen conceptual y la pregunta que los autores se plantean es *¿no estaremos provocando un obstáculo* didáctico debido a la forma en que se enseña este concepto?.

Esta situación, de la existencia de diferentes definiciones del concepto de función que pudieran resultar unas y otras, más o menos útiles en dependencia del contexto en que se usen, Ramiro Ávila Godoy lo plantea en su tesis Doctoral en los siguientes términos: "¿cómo lograr que ese repertorio lo adquieran los estudiantes lo más rápidamente posible y que puedan utilizarlo de manera apropiada, moviéndose con fluidez de una significación a otra, según la situación (contexto) lo requiera?"

La pregunta formulada por Hitt y Tores plantea la posibilidad de que el efecto producido por esta diversidad de acepciones del concepto de función se la provocación de un obstáculo didáctico; mientras que la pregunta formulada por Ávila plantea la conveniencia de generar un repertorio amplio de significados del concepto de función, con la condición de que pueda ser utilizado de manera apropiada, en cada caso.

En realidad, sobre el concepto de función se han realizado diversas y numerosas investigaciones. Ed Dubinsky publicó (1992) una antología "THE CONCEPT OF FUNCTION. ASPECTS OF EPISTEMOLOGY AND PEDAGOGY" en la cual aparecen varias de ellas, algunas de ellas plantean que no se ha entendido la importancia que tiene el concepto de función en EL CÁLCULO y que por lo tanto la manera en la que se enseña no es la más adecuada. También se plantea la conveniencia de *aproximarse* a la definición del concepto de función de una manera menos formal, esto es, en términos de relación entre variables, antes de llegar a la regla de correspondencia entre conjuntos de números. Los elementos que se consideraron en las investigaciones son los siguientes:

Las representaciones.

Se dice que para un experto una de las representaciones le permitirá convertirla a otra. Sin embargo, se ha detectado que regularmente sólo se domina una y esto impide el desarrollo y entendimiento de los otras (Dubinsky & Harel, Norman, Monk). Por lo tanto, el punto de partida y la secuencia del material utilizado puede ser de importancia considerable en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones (Artigue, Dubinsky & Harel, Goldenberg et al., Schwartz, Sfard; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990).

Las definiciones.

Como pares ordenados, como correspondencia, como una acción, como un proceso, como objetos o entidades.

En cuanto a las definiciones, Anna Sfard dice que la definición de pares ordenados propuesta por Nicolás Bourbakí en 1939, es considerada excesivamente abstracta para los estudiantes preuniversitarios. "Los estudiantes, algunas veces, simplemente ignoran la definición, ellos sólo repiten como una imposición y frecuentemente adquieren ideas inexactas de las funciones, así lo reportan los trabajos de Vinner, Norman, Sfard, Schwartz. Esto no quiere decir, que no se utilice, sino que el nivel de abstracción obliga a una secuencia de aproximaciones partiendo de actividades prácticas.

Las concepciones.

Las definiciones conducen, en muchos casos, a que los estudiantes adquieran "concepciones" (ideas) erróneas, como ejemplos:

a) Que las funciones constantes no son funciones.
b) La función frecuentemente sólo es identificada con una de sus representaciones, ya sea simbólica o gráfica y esto puede conducir a la interpretación de la función como fórmula (Vinner). Dreyfus (et al., 1990) dice: *"Algunas de las dificultades se pueden ver como el resultado de las discrepancias entre la definición matemática de función, la definición del concepto que recuerda el estudiante, y la imagen mental del concepto que el estudiante usa cuando es confrontado en una situación problemática".*

Osornio y Lara[17] realizaron una investigación en la cual aplicaron un conjunto de cuestionarios a un grupo de estudiantes de bachillerato y de nivel superior a través de los cuales observaron que los problemas más comunes que obstaculizan la comprensión del concepto de función son:

a) Un incompleto conocimiento de las distintas definiciones de función.
b) Considerar que una relación es función sí y sólo sí la relación es unívoca.
c) Considerar a las funciones como meras ecuaciones y a las variables como incógnitas.
d) Considerar que la función sólo puede estar dada por una fórmula.
e) Dificultad para identificar a los subconceptos del concepto de función (dominio y rango).
f) Dificultades para transitar entre las distintas representaciones de una función.

Como puede verse, el problema de la construcción del concepto de función no es privativo de la Facultad de Ingeniería de la UABC, sin embargo, esto no debe influir en el ánimo de esperar soluciones provenientes de otras partes, sino motivarnos en la búsqueda de soluciones.

II. 5 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Con base en las consideraciones anteriores y la convicción de la necesidad de que un uso adecuado del concepto de función en el análisis, interpretación y solución de problemas de variación, permitiría a los estudiantes tener éxito en los cursos de su especialidad como estudiantes de ingeniería, planteamos el siguiente:

Problema de investigación.

¿Cuál es el nivel de dominio del concepto de función, que logran los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la U.A.B.C., unidad Mexicali, a través de los diversos cursos que constituyen el plan de estudios de su carrera, en especial los que corresponden al área de matemáticas?

Formulado el problema, es necesario explicitar que, al hablar del "nivel de dominio del concepto de función" nos estamos refiriendo a la medida en que los estudiantes pueden analizar, interpretar, describir y evaluar la variación de una variable en función de otra u otras, en diferentes contextos, a partir de la información presentada a través de los diversos registros que se utilizan para representarla (verbal, numérico, gráfico y analítico).

Lo anterior nos lleva a establecer, como el ***propósito fundamental de la investigación***, el siguiente:

Determinar el nivel de dominio que los estudiantes tienen para usar el concepto de función en el análisis, interpretación, descripción y evaluación de la variación de una variable en función de otra u otras, en diferentes contextos.

Para tratar de lograr este objetivo general, consideramos necesario formular y alcanzar los siguientes:

Objetivos específicos.

Determinar en qué medida los estudiantes pueden:

a) Identificar las magnitudes variables y establecer las relaciones de dependencia entre ellas.

b) Percibir las características de la variación (dirección y rapidez) y los tipos básicos de variación, en función de estas características.

c) Interpretar y proporcionar información sobre variación a través de los diferentes registros de representación: verbal, gráfico, numérico y analítico.

d) Identificar los diferentes modelos de variación y sus respectivas representaciones; así como caracterizarlos.

e) Utilizar con propiedad y creatividad los diferentes modelos de variación, en el análisis, interpretación y resolución de problemas de variación en diferentes contextos.

Debe quedar claro que nosotros, de acuerdo con la teoría que se expresará en el capítulo correspondiente, consideraremos que *un alumno que maneje un repertorio amplio de significaciones y representaciones del concepto de función y sea capaz de utilizarlas con propiedad y creatividad en el análisis, interpretación y resolución de problemas, en diferentes contextos, será un alumno con un alto nivel de dominio de dicho concepto.*

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

III.1 CONCEPCIÓN DEL APRENDIZAJE

En este trabajo asumimos que la matemática es una construcción social, en otras palabras, es cultura y que quien participa de ella asume una forma de vida y de enfocarla. El conocimiento en general, y en particular el conocimiento matemático, es el producto de un proceso constructivo del sujeto cognoscente, dicho de otra manera, *el sujeto construye su propio conocimiento*, nadie puede construirlo por otro. La construcción se lleva a cabo a través de interacciones que son de dos tipos: unas, las interacciones del sujeto cognoscente con el objeto de conocimiento; y otras, las interacciones entre sujetos con respecto al objeto de conocimiento. Estas últimas pueden ser simétricas, cuando los sujetos interactuantes se consideran iguales (en cuanto al conocimiento que tienen del objeto) o asimétricas (cuando los sujetos interactuantes son un aprendiz y un experto).

Cuando un sujeto enfrenta un problema, con preconcepción a cerca del objeto y de la manera de abordar el problema. Este es el punto de partida del sujeto, si estas preconcepciones resultan suficientes para analizar y resolver el problema, éste asimila a su esquema cognitivo el nuevo conocimiento. De no ser así, es decir, si esas preconcepciones no son suficientes, el sujeto entra en un conflicto cognitivo que lo lleva a interactuar con el objeto. Cuando el sujeto interactúa con el objeto, pone en juego sus habilidades intelectuales para explorar, comparar, clasificar, conjeturar, deducir, representar, etc., actividades a través de las cuales va construyendo su conocimiento del objeto.

Lo anterior está de acuerdo con las ideas de Piaget, De acuerdo con Coll (1998), dice, refiriéndose a Piaget, que asume el concepto de esquema como la unidad funcional para explicar las interacciones entre el sujeto y el objeto y los procesos de asimilación y acomodación, lo mismo que para contestar al cuestionamiento de ¿Cómo se pasa de cierto nivel de conocimientos a otro de mayor validez? Castorina (1998), dice que esta pregunta responde a la tesis, "la construcción de sistemas nuevos a partir de otros más elementales". Y agrega (p. 62) que a fines de la década de 1950 se llevaron a cabo algunas investigaciones cuyos resultados mostraron que los estímulos aplicados a los sujetos no son, por si solos, suficientes para que el sujeto les asigne algún significado, sólo adquieren significado cuando son asimilados en algún tipo de sistema previo.

El resultado de la interacción entre el sujeto y el objeto es una modificación en el esquema del sujeto, es decir, en su red conceptual, esa diferencia entre el esquema anterior y el nuevo es lo que consideramos como aprendizaje.

De estas interacciones entre el sujeto y el objeto, el sujeto adquiere un cierto conocimiento del objeto y este conocimiento le permite interactuar con otros sujetos en una interacción comunicativa a acerca del objeto.

Este nuevo tipo de interacciones propicia que el sujeto realice nuevas actividades de aprendizaje como son la verbalización, la contrastación, la refutación, entre otras.

Las interacciones entre sujetos pueden ser simétricas, cuando se dan entre sujetos considerados iguales en cuanto al nivel de conocimiento del objeto o asimétricas, cuando se realizan entre un aprendiz y un experto.

Las interacciones intersubjetivas dan como resultado el establecimiento de significados concensados en una comunidad que asume que dichos significados constituyen el concepto del objeto en cuestión.

III.2 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Hemos dicho que el sujeto para llevar a cabo acciones de aprendizaje sobre el objeto de estudio tiene que interactuar con él, también hemos dicho que una de las actividades que el sujeto realiza es la de abstraer algunas características del objeto, fenómeno o situación y de ser posible establecer sus relaciones. Para llevar a cabo este tipo de interacciones el sujeto cognoscente requiere del uso de representaciones del objeto de estudio. Los sistemas de representación que se utilizan dan pie, por una parte, a la formación de imágenes mentales (internas) del objeto y, por otra, a la construcción de sistemas semióticos de representación, que son representaciones externas del objeto y que juegan, fundamentalmente, el papel de medios en el proceso comunicativo.

Al respecto de los sistemas semióticos Duval (1993) dice "*un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionada con la semiósis:*"

La presencia de una representación identificable....
El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada....
La conversión de una representación que es la representación de la transformación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial..."

La sémiosis es la aprehensión o producción de representaciones semióticas (símbolos o signos) y se le llama noésis a la aprehensión conceptual de un objeto.

En este caso, tratamos acerca del objeto llamado función el cual es un concepto que estudiaremos en su acepción matemática, el cual tiene cuatro registros de representación, a saber: con una descripción en palabras, es decir, por medio de una expresión verbal. Numéricamente, con una tabla de valores que la describen. Geométricamente, es decir, utilizando una gráfica y, algebraicamente, por medio de una expresión analítica.

De acuerdo con Hitt (1995) *"se considera que un conocimiento asociado a un concepto es estable en un individuo, si éste puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones."* Por articular, entendemos coordinar las diferentes representaciones para que funcionen como un todo. De lo anterior se desprende que un requerimiento para conseguir que un alumno adquiera un buen nivel de dominio del concepto de función es que sea capaz de articular las diferentes representaciones.

III. 3 CONCEPCIÓN DE LA ENSEÑANZA

Como una consecuencia de la teoría de aprendizaje expresada con anterioridad asumimos que la enseñanza tiene que ver, por parte del profesor, con la selección o diseño de situaciones problémicas que se plantearán a los estudiantes con el propósito de provocar una relación entre el sujeto y el objeto de estudio, así como el de conducir al sujeto o sujetos por medio de cuestionamientos y, finalmente, el precisar y definir el objeto.

Es deseable que los materiales seleccionados o diseñados y la acción didáctica permitan un desajuste desequilibrio óptimo, es decir, que estén dentro de las posibilidades de comprensión que en ese momento tiene el sujeto. En otras palabras, el conflicto cognitivo provocado debe desembocar en perturbaciones que los alumnos puedan reconocer y asociar parte del problema con alguno ya conocido permitiendo la búsqueda de equilibrio de orden superior.

R. Ávila cita en su tesis Doctoral (1998, p. 15) dice "El tipo de actividades diseñadas y la forma de llevarlas a cabo, llevan implícita una concepción del conocimiento matemático y del proceso de aprendizaje, incluso en el caso de que éste, el profesor, no esté totalmente consciente de ello."

No es fácil que cuestionemos nuestras creencias, aún cuando reconozcamos que de alguna manera son un obstáculo para lograr la solución de algunos problemas, y menos aceptar que otra persona lo haga, podemos estar conscientes de los deficientes logros alcanzados ciclo tras ciclo pero las creencias la mayoría de las veces son muy fuertes, por ejemplo, creencias como la que cita R. Ávila (1998, p.15) "el profesor aparece como poseedor de un conocimiento que no tienen los alumnos, pero que se suponen quieren tener (y si no quieren tenerlo, es problema de ellos; piensan algunos profesores); en virtud de lo cual su responsabilidad como docente, es conseguir (o al menos procurar) que los estudiantes entren en posesión de tal conocimiento; para ello, el profesor planea y diseña una serie de acciones a realizar, por él o por los alumnos: todas ellas encaminadas al logro de lo pretendido."

El enfoque de enseñanza de problematizar, conducir a través de cuestionamientos y precisar el objeto de estudio debe permitir que además de la formación y desarrollo del sistema de conceptos, tal y como lo expresa R. Ávil,. en su tesis Doctoral, que le permitirán al estudiante analizar, interpretar y resolver problemas relativos a la variación es necesario desarrollar una serie de habilidades y formar ciertas actitudes que le permitan usar con propiedad y creatividad los conceptos y métodos que se requieren para resolver problemas de variación. Lo expresa de la siguiente manera *"A medida que se van adquiriendo los sentidos mencionados (se refiere a todas aquellas características que le dan sentido a las gráficas, a las tablas de datos y a las expresiones analíticas como representantes de la variación), se van construyendo los significados de los conceptos de función y derivada de una función y a la vez, se van desarrollando las habilidades para analizar e interpretar información relacionada con la variación y formándose una actitud que permite mirar una diversidad de situaciones desde una perspectiva variacional."*

III.4 LA CONCEPCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Para emitir opinión sobre el nivel de dominio que tiene un sujeto en el uso del concepto de función para analizar, interpretar y resolver problemas de variación, asumimos, en este trabajo, que la construcción de los conceptos y métodos de la matemática del cambio (en especial del Cálculo) se manifiesta en el desarrollo de una serie de habilidades intelectuales que permiten percibir la variación y analizarla. Estas serie de habilidades constituyen lo que denominamos pensamiento variacional, el cual puede evolucionar, según R. Ávila (Tesis Doctoral, 1998) desde un nivel cero hasta un nivel cinco. Estos niveles constituyen para nosotros, nuestra referencia para determinar el nivel de dominio que tienen los estudiantes para usar el concepto de función en el análisis, interpretación y resolución de problemas de variación.

Los niveles de referencia son los siguientes:

Nivel 0

La persona sólo percibe los cambios en el objeto o la situación de manera global, sin precisar qué propiedades o magnitudes han cambiado.

Se caracteriza por:

a) Representar los cambios por medio de dibujos.
b) Las representaciones simbólicas (gráficas, numéricas y analíticas) de la variación no tienen ningún sentido.

Nivel 1

La persona identifica las magnitudes que varían en un objeto, situación o hecho, puede referirse a ellas utilizándolas como sustantivos en las expresiones del lenguaje; aunque concibe la variación sólo en términos cuantitativos discretos, es decir, en términos de qué tanto cambió una magnitud al pasar de un estado a otro.

Se caracteriza por:

a) Sigue mostrando tendencia a representar la variación en forma icónica.
b) Las representaciones numéricas y gráficas las interpreta como conjuntos de valores discretos de la magnitud y puede utilizarlas para determinar qué tanto cambió una magnitud.
c) La dirección del cambio tiene sentido, más no su rapidez. Las expresiones analíticas no tienen sentido como representaciones de la variación.

Nivel 2

La persona tiene un sentido cualitativo y continuo de la variación. Interpreta la dirección y la rapidez en la representación gráfica.

Se caracteriza por:

a) Asociar la dirección de la curva con la dirección de la variación y la concavidad con la variación de la rapidez.

b) Interpretar que las rectas representan la variación de rapidez constante y asocia la inclinación con el valor de la rapidez pudiendo determinar que una variable está cambiando más rápido que otra a partir del ángulo de inclinación de las rectas que representan dichas variaciones.

c) En el caso de las curvas asocia las concavidades con el cambio de la rapidez.

d) No puede determinar, y ni siquiera comparar, los valores de la rapidez.

e) El término de rapidez instantánea no tiene sentido.

f) Utilizar las tablas de datos para determinar la dirección de la variación y para caracterizar la rapidez en constante o variable.

g) Utilizar las expresiones analíticas para generar tablas de datos.

Nivel 3

La persona adquiere un sentido cuantitativo de la variación continua. Esto es, adquiere sentido la expresión "rapidez instantánea de cambio de una magnitud".

Se caracteriza por:

a) En el caso de las gráficas, adquiere sentido la pendiente de las tangentes a la curva como medida del valor de la rapidez en un punto o instante.

b) En el caso de las tablas, interpreta que el cociente de las diferencias entre dos parejas de valores de las variables relacionadas, determina la rapidez promedio de cambio y entiende que el valor de la rapidez instantánea de cambio no puede obtenerse a partir de los valores consignados en una tabla.

c) Respecto a las expresiones analíticas, las concibe como representaciones de la variación y entiende que éstas, al igual que las gráficas y a diferencia de las tablas, representan la totalidad de los valores que tiene cada una de las variables; pero que, al igual que las tablas y a diferencia de las gráficas, permiten calcular de manera exacta los valores de la variable dependiente que le corresponden a los diversos valores de la variable independiente, lo mismo que los valores exactos de los incrementos y la rapidez promedio de cambio. Además entiende que sólo esta representación permite calcular, de manera exacta, el valor de la rapidez instantánea de cambio de una variable con respecto a la otra y entiende que esto sólo puede determinarse calculando el límite de la sucesión de valores del cociente de los incrementos cuando los incrementos tienden a valer cero.

d) Interpretar la expresión analítica de la derivada como una fórmula que permite calcular la rapidez instantánea de cambio de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente y que eso es equivalente a determinar el valor de la pendiente de la tangente a la gráfica que representa la variación en cada punto; y el valor numérico de la derivada para un valor dado de la variable independiente, como el valor de la rapidez instantánea de la variable dependiente comparada con la rapidez con que está cambiando la variable independiente cuando tiene ese valor.

Nivel 4

La persona puede determinar analíticamente las características de la variación de una magnitud en cada punto de un intervalo e interpretarlas en términos de su representación gráfica.

Se caracteriza por:

a) Interpretar el signo de la derivada como indicador de la dirección de la variación y, en consecuencia, de la dirección de la curva.

b) Interpretar que los valores de la variable independiente para los cuales la derivada vale cero, son candidatos a puntos en los cuales o cambia la dirección de la variación o cambia la dirección de la rapidez y con respecto a la curva, los identifica como los puntos en los que o cambia la dirección o cambia la concavidad.

c) Interpreta el signo de la segunda derivada como un indicador del crecimiento o decrecimiento de la rapidez, a la vez que lo relaciona con la concavidad de la curva, etc.

d) Entiende que las expresiones analíticas son modelos que representan variaciones que tienen una cierta regularidad y que tales modelos pueden constituirse en objeto de estudio.

e) También entiende que el estudio de las expresiones analíticas como modelos de la variación da lugar a una clasificación de los mismos en función de su comportamiento; lo que después permite interpretar la variación determinando el modelo que mejor le acomode.

Nivel 5

La persona conoce las posibilidades y limitaciones de las diversas formas de representación de la variación y las utiliza de manera simultánea, con propiedad y creatividad, para analizar, interpretar y resolver problemas.

Se caracteriza por:

a) Conoce los modelos analíticos básicos y saber cuáles son sus propiedades fundamentales, (que incluso puede probar en un sistema axiomático formal).

b) Además, puede reducir cualquier otro modelo analítico a una composición de modelos básicos.

c) Tiende a interpretar una diversidad de problemas de matemáticas y de otras disciplinas, en términos de problemas sobre variación y esto también lo hace apropiadamente y con creatividad.

III.5 RESUMEN DE CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Resumiendo, (1) la concepción del aprendizaje y la enseñanza, en general, pero particularmente sobre las matemáticas en que se basa este trabajo son:

1. La matemática es una construcción social y, por lo tanto, es cultura, y como tal, es susceptible de modificación.
2. El conocimiento, en general y, en particular el conocimiento matemático, es el producto de un proceso constructivo del sujeto cognoscente, es decir, *el sujeto construye su propio conocimiento*, quien utiliza básicamente dos mecanismos: abstracciones y generalizaciones.
3. Esta construcción se lleva a cabo, en un primer momento, por medio de una interacción entre el sujeto y el objeto de estudio (que es el objeto de enseñanza).
4. Dicha interacción se lleva a cabo con base en el nivel de partida del sujeto, es decir, el sujeto sólo puede intentar conocer el objeto con sus preconcebidas ideas o conceptos, este nivel le permite *abstraer* (seleccionar) *y representar* (codificar) características del objeto permitiendo crear imágenes internas sobre las cuales *reflexionar.*
5. Cuando el nivel de partida le permite al sujeto resolver problemas nuevos entonces ha *asimilado* la situación problémica y como consecuencia las ideas o conceptos que le permitieron dicha asimilación se robustecen y se hacen más fuerte las creencias en esas ideas o conceptos.
6. Cuando el nivel de partida no le es suficiente al sujeto para resolver nuevos problemas, entonces, el sujeto puede enfrentar un conflicto cognitivo, convirtiéndose sus ideas o conceptos preconcebidos (sus creencias) en un obstáculo.
7. Para resolver un conflicto cognitivo se requiere un segundo momento, en el cual, una sucesión de interacciones entre sujeto y objeto, es decir, interactúan uno en el otro, el objeto actúa sobre el sujeto modificándole sus ideas y el sujeto actúa (realiza acciones) sobre el objeto como consecuencia de esas ideas y, por lo tanto, generando expectativas de respuesta del objeto.
8. No es suficiente esta experimentación entre sujeto y objeto sino que además se requiere la interacción entre sujetos que también han interactuado con el objeto, es decir, que establezcan una comunicación en donde afirmen lo que creen conocer del objeto, contrasten y refuten entre ellos a cerca de sus diferencias de ideas que sobre

el objeto tienen, de tal forma, que dicha acción social concluya en consenso de significado. Lo anterior permitirá, por un lado, que las nuevas ideas o conceptos se *acomoden* en la estructura conceptual del individuo y, por otro, que se forme y se acepte, socialmente, un lenguaje que permita posteriores avances en el conocimiento del mismo objeto.

9. En un último momento, bajo la dirección del profesor, los significados adquiridos se negociarán confrontando lo aprendido en una discusión grupal para institucionalizar el conocimiento adquirido en todo el proceso, es decir, *generalizarlo*.

10. La articulación de dos o más registros de representación de un concepto es condición necesaria para que el conocimiento asociado a ese concepto sea estable en el sujeto. Asumiremos, de acuerdo a la teoría de Duval (1998), que un registro de representación semiótica permite tres tipos de actividades cognitivas:
    a) La producción de una representación identificable.
    b) La actividad de tratamiento, es decir, la posibilidad de hacer transformaciones de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada, y
    c) La actividad de conversión, es decir, la actividad a través de la cual se pasa de un sistema de representación a otro en el que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación del primer sistema.

11. Llevar a cabo actividades como: explorar, abstraer, representar, conjeturar, experimentar, etc., para desarrollar habilidades y actitudes las cuales son determinantes para usar con propiedad los conceptos y métodos necesarios en la resolución de problemas sobre variación.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

IV.1 CONSIDERACIONES GENERALES

La metodología empleada en este trabajo es de orden cualitativo, ya que pretendemos investigar los usos que hacen los estudiantes de los diferentes registros de representación del concepto de función cuando enfrentan problemas de variación y, a partir de dichos usos determinar el nivel dominio que tienen del mismo, con respecto a este tipo de investigaciones [10]Farfán, Rosa María dice "Hay métodos de investigación en los cuales una situación existe y las evidencias específicas pueden ser recolectadas." Y agrega, "Estudio descriptivo: Este método es usado para estudiar preguntas orientadas al presente. El procedimiento es preguntar a una muestra elegida cuidadosamente de participantes en situación a responder, un conjunto predeterminado de preguntas."

Con la intención de observar y describir dicho dominio, se seleccionaron cinco problemas (ver anexo 1) de un conjunto de cuestionarios diseñados por R. Ávila para aplicarse en una primera etapa, considerada de carácter exploratorio, a una muestra de estudiantes de Ingeniería de la UABC, unidad Mexicali. Los que los problemas elegidos sólo se refieren a los niveles intermedios de la formación y desarrollo del concepto de función.

El primer problema de eligió para indagar en qué medida los estudiantes perciben e identificar las variables presentes en una situación descrita y en qué medida pueden establecer relaciones de dependencia entre ellas. Los problemas 2, 3, y 4 se seleccionaron para evaluar el nivel de dominio de los estudiantes para utilizar información proporcionada en forma numérica , sobre el movimiento de un objeto y relacionarla con las condiciones en que se llevó a cabo el experimento.

El quinto problema se eligió para indagar sobre la percepción de la capacidad que los estudiantes manifestaban para trazar una gráfica a partir de información proporcionada en lenguaje coloquial, es decir, ver de que forma plasmaban en la gráfica su interpretación de expresiones de dirección de la variación y rapidez de la variación.

La investigación se llevó a cabo en tres etapas, que a continuación describiremos en que consistieron.

IV. 2 PRIMERA ETAPA

El propósito de esta primera etapa fue explorar sobre el nivel de dominio que tienen los alumnos acerca del concepto de función seleccionando a dos grupos, que por una parte, se tuviera disposición de ellos un tiempo suficiente y que, por otra parte, se encontraran en semestres intermedios de sus carreras correspondientes, es decir, cuarto o quinto semestre ya que han aprobado las materias donde se adquiere el concepto de función y sus derivadas así como algunas materias de otras áreas. Estas condiciones se cumplieron con dos de mis grupos de clase.

Uno de los dos grupos, consta de siete alumnos que pertenecen a la materia de Ecuaciones Diferenciales, son alumnos de diferentes áreas de la ingeniería, el otro grupo está formado por ocho alumnos del Laboratorio de Mediciones Eléctricas y Electrónicas de la carrera de Ingeniería Electrónica.

Esta etapa se llevo a cabo al inicio del semestre, se hizo ver a los estudiantes la importancia que revestía el concepto de función para la materia de Ecuaciones Diferenciales, es decir, que una Ecuación Diferencial es el modelo matemático que representa adecuadamente el comportamiento de una situación o sistema y que la solución de ese modelo o Ecuación Diferencial significa obtener mediante alguna técnica una función que satisface a dicha ecuación y que también esa función es a su vez un modelo de la variación entre dos magnitudes. Así se justificó el trabajo que tendrían que realizar sobre ese cuestionario que trataba acerca de la variación. A los estudiantes de Laboratorio de Mediciones Eléctricas y Electrónicas se les mostró el equipo con el trabajarían en el laboratorio, indicándoles que ese equipo mostraría de forma analógica o digital, números o graficas, según el instrumento utilizado, y que esos números o gráficas se correspondían con dos magnitudes relacionadas que se podían modelar a través de una función como modelo de la variación, por ejemplo, cómo está variando la corriente eléctrica con respecto al tiempo. Las mediciones las llevarían a cabo en diferentes elementos electrónicos como por ejemplo, resistencias, inductor, capacitor o transistor, diodo, etc. Justificando así el primer trabajo que realizarían, responder un cuestionario sobre la variación. A ambos grupos se les informó que en un primer momento trabarían individualmente en las respuestas y, que posteriormente, trabarían en equipos para entregar una solución por equipo. Además, se aclaró que el profesor no podría afirmar o negar respuestas, que sólo intervendría cuando considerara que se estaban alejando del objetivo planteado, dar respuesta al cuestionario.

La estrategia era que si los resultados del cuestionario mostraban que los estudiantes de estos semestres tenían un buen dominio del concepto de función entonces la siguiente acción sería investigar en los grupos de los primeros semestres sobre cuál era el nivel de dominio que adquirían sobre dicho concepto. De resultar que los grupos de los primeros semestres, primero y segundo, adquirían un buen nivel de dominio de dicho concepto entonces habría que buscar si son las materias disciplinarias las que provocan que el alumno no logre la conversión de contextos, es decir, del contexto matemático al de la disciplina correspondiente. Pero, en el caso de que los resultados mostraran un dominio deficiente, en esos grupos intermedios, entonces se procedería a investigar cuál era el nivel de dominio que logran los estudiantes de varios semestres, de ser posible, desde el primer semestre hasta el noveno con el fin determinar cuales son las diferencias, debido a los grados con respecto a los semestres, en los niveles de dominio que alcanzan los estudiantes de la Facultad.

IV. 2 SEGUNDA ETAPA

La evaluación de las respuestas del cuestionario mostraron deficiencias o bajo dominio del concepto de función. Pero antes de proceder, según la estrategia, a aplicar un cuestionario a un conjunto de grupos que representaran la mayoría de los semestres se decidió llevar a cabo un actividad, que denominaremos segunda etapa, los grupos que participaron en esta segunda etapa fueron los mismos que los de la etapa anterior, está actividad tenía como pretensión observar qué efecto tendría el uso de tecnología en la enseñanza pero con carácter expositivo, es decir, ¿se podrá remediar deficiencias en el conocimiento del concepto de función con el uso de tecnología continuando con un tipo de clase expositivo?. Aunque esta actividad no estaba considerada originalmente, quisimos aprovechar la oportunidad de observar el efecto antes mencionado.

Una de las actividades que se llevó a cabo durante este pequeño curso fue la descripción del comportamiento de algún fenómeno por medio de funciones, por ejemplo, posición de objetos con respecto al tiempo, su velocidad, su aceleración, la magnitud de voltaje en un capacitor con respecto al tiempo como una consecuencia de la rapidez de carga o descarga eléctrica.

Las sesiones se dedicaron a mostrar a los estudiantes lo siguiente, principalmente: términos y procedimientos para analizar la variación a partir de los registros numérico, gráfico: el concepto de "pendiente" de la tangente, valor y signo de la primera y segunda diferencia, el cociente de las diferencias, el significado de la derivada geométricamente. Se utilizó como herramienta la calculadora TI-92, VewScreen y proyector de acetatos. Se puede decir que el tipo de sesión es considerada como "tradicional", es decir, expositiva y con un ritmo que permite muy poco la participación de los estudiantes.
(ver anexo 2: SESIONES CON TI-92 Y VEW SCREEN).

IV. 3 TERCERA ETAPA

Antes de que finalizaran las clases del semestre se llevó a cabo la tercera etapa, en donde se aplicó de nueva cuenta los cinco problemas de la primera etapa pero ampliando el cuestionario al agregar tres problemas, también se amplió el número de grupos. Además de los dos grupos iniciales ahora se incluyó en la investigación a tres grupos de diferentes niveles (con respecto a los semestres). A uno de los nuevos grupos que se le aplicó el cuestionario fue a uno de primer semestre que pertenece a la carrera de Ingeniería

Electrónica, facilitando el acceso al grupo el profesor de la materia de Matemáticas I. Otro grupo que se agregó pertenece al segundo semestre, compuesto por estudiantes de varias carreras de Ingeniería, facilitando el acceso al grupo, para aplicar el cuestionario, el profesor de la materia de Matemáticas II y el tercer grupo está integrado por estudiantes de séptimo y octavo semestre de la carrera de Ingeniería Electrónica, este es otro de mis grupos de clase, la materia donde se aplicó el cuestionario es Control I.

Quienes aplicaron el cuestionario a los grupos de Matemáticas I y Matemáticas II fueron los profesores de clase a quienes previamente se explicó que se estaba haciendo y cuales eran los propósitos. Es conveniente aclarar que en esta etapa de la investigación se solicitó a los estudiantes respondieran el cuestionario individualmente.

Con la inclusión del problema (ver anexo 1) evaluamos que tanta habilidad tienen estos estudiantes en la determinación de magnitudes variables presentes en una situación y que tanto pueden establecer relaciones de dependencia entre ellas. En este caso, ver en que medida pueden detectar los parámetros que influyen en el alargamiento de un resorte (efecto).

Con el problema número siete (ver anexo 1) se incluyo en la investigación el registro algebraico, se evaluó en que medida los estudiantes podían convertir el registro algebraico en el registro gráfico, además, de en que medida podían determinar en que forma varía "y" con respecto "x", en que medida podían describir (con palabras) ese tipo de variación.

En el problema número ocho se evaluó en que medida los estudiantes interpretan las características de la variación y de la rapidez de la variación interpretadas en el contexto matemático, y ver en que medida el estudiante detecta información contradictoria en el inciso c) comprobando así su dominio en este contexto.

CAPÍTULO V

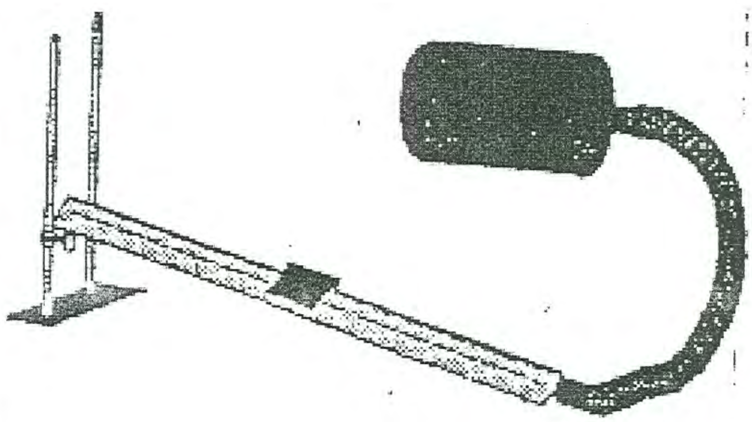
LOS RESULTADOS

Los resultados muestran en que medida utilizan el concepto de función los estudiantes de la Facultad de Ingeniería cuando se enfrentan a problemas de variación en el contexto del movimiento. La capacidad que tienen para identificar magnitudes que varían en una situación dada y sus relaciones de dependencia, de cómo perciben las características de variación en función de su dirección y rapidez de variación, de cómo utilizan el registro numérico, gráfico, verbal y analítico para interpretar y dar información sobre la variación, de la capacidad para identificar los diferentes modelos o comportamientos de la variación con sus respectivas representaciones y sus características para analizar, interpretar y resolver problemas de variación en diferentes contextos.

V.1 RESULTADOS DE LA PRIMERA ETAPA

Problema 1

A continuación, se muestra un dispositivo de Laboratorio para estudiar el movimiento en un plano inclinado. El plano es un riel de aire, cuya inclinación puede variar y por él se desplaza un carrito como el que puede observarse en la figura 1.



¿Cómo supone que será el movimiento del carrito al desplazarse por el riel?

Analice la situación lo más detalladamente posible y haga todas las consideraciones que crea pertinente para describir el movimiento del carrito, explicitando lo que cree que ocurrirá con la velocidad del mismo.

Las respuestas al cuestionario se pueden ver en el anexo 3, a continuación describiremos e interpretaremos algunas respuestas, al cuestionario de esta primera etapa, desde el punto de vista del problema de investigación.

Las respuestas de los equipos, al problema 1, dan muestra de hacer consideraciones muy deficientes para determinar el movimiento del carrito, no tienen claridad para determinar cuales son las magnitudes que varían en dicha situación y determinar sus relaciones, expresiones como la del equipo # 2 de la materia de Mediciones que dicen "es un movimiento lineal con un incremento en la velocidad y aceleración" o como el equipo # 2 de la materia de Ecuaciones Diferenciales que dicen es "uniformemente acelerado" y "La velocidad variará con respecto a la inclinación del riel". El equipo que responde con algo más de coherencia es el equipo # 3 que dice "Si el carrito se pone en marcha desde la parte superior del plano su velocidad irá en aumento debido a la gravedad, más a parte, el impulso que se le pueda dar con algún dispositivo del riel, sin embargo, si el punto de partida es desde la parte inferior del riel, la velocidad irá disminuyendo conforme avance hacia arriba".

Es evidente que existen algunas deficiencias en el análisis de la variación en el contexto del movimiento, sólo identifican como causa la dirección descendente del carrito, sólo el equipo # 3 de la materia de Ecuaciones Diferenciales identifican como posibilidad que la dirección sea ascendente lo cual tendría como consecuencia otro comportamiento el movimiento pero ningún equipo considera la posibilidad de que el riel estuviera paralelo al plano y un impulso provocara el movimiento o que el riel variara su inclinación durante el trayecto.

Problema 2

Mediante un dispositivo electrónico que permite medir la posición del carrito -distancia a que se encuentra del dispositivo- y capturarla en ese momento en el computador (ver figura 3), fue posible elaborar las tablas que se dan a continuación, en las que los valores en la columna izquierda representan los instantes medidos en segundos y los que están en la columna derecha, representan la posición del carrito medida en metros.

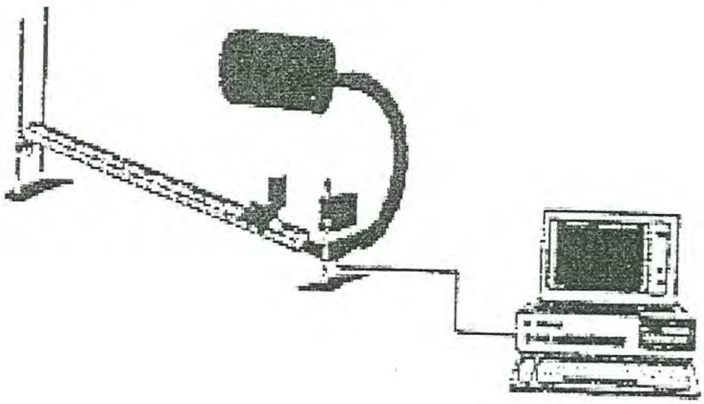


Figura 3

Explore la Tabla I lo más detalladamente posible y realice todas las consideraciones que crea pertinentes sobre las condiciones del experimento para determinar si el movimiento real del carrito, que se desprende de dicha tabla, corresponde al descrito con anticipación. Describan el movimiento del carrito, según la tabla.

Tiempo en segundos	Distancia en metros
0.0	1.407
0.1	1.401
0.2	1.393
0.3	1.383
0.4	1.371
0.5	1.356
0.6	1.341
0.7	1.323
0.8	1.304
0.9	1.282

Tiempo en segundos	Distancia en metros
1.0	1.260
1.1	1.236
1.2	1.209
1.3	1.182
1.4	1.154
1.5	1.123
1.6	1.090
1.7	1.056
1.8	1.019
1.9	0.981
2.0	0.941

En el problema 2 se solicita a los estudiantes que comparen sus expectativas respecto al movimiento del carrito, expresadas en el problema 1 con el movimiento que describe la tabla de datos que se proporciona, es decir, si de la tabla de datos, que representa el movimiento real del carrito, se concluye que el movimiento de éste, fue como ellos lo habían predicho. Un solo equipo hace referencia a esta situación, como se puede ver en el anexo 3, el equipo # 1, de la materia de Ecuaciones Diferenciales, sólo traza una gráfica con a partir de la tabla de datos y no hace comentario alguno, la mayoría de los equipos muestran una interpretación incorrecta de la situación a partir de la tabla de datos. Por ejemplo, el quipo # 2 dice "La velocidad va disminuyendo". Pero el equipo # 1 de Mediciones dice "En la tabla se observa que el objeto si va acelerándose conforma avanza el tiempo", lo cual es correcto en algunos intervalos de tiempo.

Problema 3

Las Tablas 2 y *3* se obtuvieron de la misma manera que la tabla 1, sólo que en cada caso, se hizo algún cambio en el experimento. A partir de cada tabla, intenten determinar en qué consistió el cambio en las condiciones del experimento respecto a la situación registrada en la tabla 1.

Tabla 2

Tiempo en segundos	Distancia en metros
0.0	0.31
0.1	0.39
0.2	0.48
0.3	0.56
0.4	0.63
0.5	0.69
0.6	0.75
0.7	0.81
0.8	0.86
0.9	0.91
1.0	0.95
1.1	0.99
1.2	1.03
1.3	1.06
1.4	1.09
1.5	1.11
1.6	1.12
1.7	1.13
1.8	1.14
1.9	1.14
2.0	1.14

Tabla 3

Tiempo en segundos	Distancia en metros
0.0	0.38
0.1	0.43
0.2	0.50
0.3	0.55
0.4	0.59
0.5	0.63
0.6	0.68
0.7	0.71
0.8	0.75
0.9	0.79
1.0	0.83
1.1	0.86
1.2	0.88
1.3	0.90
1.4	0.92
1.5	0.94
1.6	0.96
1.7	0.97
1.8	0.98
1.9	0.98
2.0	0.99

Las respuestas al problema 3 muestran que utilizan la tabla de datos para hacer la conversión al registro gráfico y de sus expresiones vemos que detectan, con algunos errores, que el movimiento fue variable pero no pueden caracterizar la variación y en el caso del equipo # 1, de la materia de Ecuaciones Diferenciales quienes convierten la tabla 2 a una gráfica de donde interpretan que "EL CARRITO COMENZÓ A BAJAR DE LA

PARTE MÁS ALTA DEL RIEL AUMENTANDO SU VELOCIDAD LLEGÓ A LA PARTE FINAL DEL RIEL Y REBOTÓ REGRESANDO EN EL RIEL." No hay una correcta interpretación de la situación a partir del registro grafico. Se observa que el registro numérico no es un registro en el cual estén habituados hacer análisis e interpretaciones, por eso lo hacen con deficiencias y por lo regular sólo lo utilizan para hacer conversión al registro grafico.

El equipo # 1 de Ecuaciones Diferenciales hace una conversión de la tabla de datos al registro gráfico y dice "En este caso, al riel se le aplicó movimiento, hacia arriba y hacia abajo." Lo cual es una posibilidad. Otro ejemplo, el equipo 2 de Mediciones dice "en ambos casos el carrito fue empujado en sentido contrario, el ángulo de inclinación es más grande para la tabla 3 que para la 2." No hacen una comparación con el experimento de la tabla 1, y no hacen uso del registro numérico para hacer un análisis minucioso e interpretar que sucedió en este experimento y compararlo con el de la tabla 1.

Problema 4

En la tabla que aparece a continuación se registra la altura, con respecto a la Tierra, a que se encontraba, en el instante que en cada caso se indica, una pelota que se lanzó verticalmente hacia arriba. De acuerdo con la información contenida en dicha tabla describa el movimiento de la pelota y conteste específicamente las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la altura de la pelota un segundo después de haber sido lanzada?

b) ¿En cuánto tiempo alcanzó 18 metros de altura?

c) ¿Qué distancia recorrió en los primeros dos décimos de segundo?

d) ¿y en los segundos y terceros *dos décimos de segundo* qué distancia recorrió?

e) ¿Qué distancia recorrió en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes t = 0.6 seg. y t = 1.2 seg. ?

f) ¿Con qué velocidad se movió durante el primer segundo?

g) ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido durante el segundo segundo?

h) ¿Y durante los dos segundos. cuál fue la velocidad media?

i) En el instante t = 1 seg. ¿cuál era la velocidad de la pelota?

j) Bosqueja las graficas de la altura con respecto al tiempo y de la velocidad con respecto al tiempo.

Tiempo	Altura
0	0
0.2	3.8
0.4	7.22
0.6	10.24
0.8	13.36
1.0	15.1
1.2	16.94
1.4	18.4
1.6	19.46
1.8	20.12
2.0	20.4

El problema 4, los incisos f) y i) ponen en evidencia que no establecen diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea, algunos equipos realizaron operaciones sin tener conciencia qué es lo que estaban obteniendo como resultado, por ejemplo, el dividir cada par ordenado e interpretarlo como velocidad media en cada intervalo y no al intervalo del que tomaron los valores. El inciso j) pone en evidencia la dificultad que presentan los estudiantes para trazar la gráfica de la velocidad con respecto al tiempo a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo.

Problema 5

De la siguiente situación, grafica la variación de la temperatura con respecto a! tiempo. Hoy me levanté temprano, eran las 5:00 A.M., el aire estaba bastante fresco, se sentía frió; sin embargo, más o menos como a las 6:00, cuando salió el sol, empezó a subir la temperatura y, aunque al principio lo hizo lentamente, como a las 12:00 se sentía bastante calor e iba para largo. Afortunadamente como a las 3:00 P.M., se nubló y ya no se sintió tanto calor, sobre todo cuando empezó a llover, que serian casi las 5:00 , pues en poco tiempo hasta volvió a sentirse frió. Si sigue así, esta noche la temperatura estará muy baja.

Las respuestas a este quinto problema se pueden ver en el anexo 3, el problema solicita representar gráficamente el comportamiento de la temperatura, la información proporcionada es en el registro verbal, las respuestas muestran deficiencias al intentar la rapidez con que está cambiando la temperatura, utilizan rectas y en los punto de unión de estas rectas lo hacen a través de curvas, expresan en la gráfica que la temperatura alcanza un nivel máximo e inmediatamente empieza a descender de forma constante.

En general, se puede decir, que la falta de una correcta coordinación entre los registros y el desconocimiento de las limitaciones y fortalezas de cada uno de los registros los llevaron a cometer errores cuando lo solicitado no era directamente observable en el registro, es decir, sólo por observación. Lo anterior permite suponer que la instrucción hasta ahora realizada no es en el desarrollo y formación de conceptos a través de la coordinación de registros, que permita construir un lenguaje formado por conceptos para hacer análisis e interpretación cuando se enfrentan situaciones problémicas sobre variación y, cuando los problemas se caracterizan por ser de los no rutinarios, es decir, son del tipo de problemas de análisis e interpretación de resultados y confirmados a través de la coordinación de registros.

De acuerdo a los niveles propuestos en el marco teórico vemos que si identifican las magnitudes que varían en una situación, en este caso distancia con respecto al tiempo, y aunque utilizan expresiones aceleración, desaceleración, aumento de velocidad, etc., algunos equipos lo hicieron sin tener una idea clara de lo que estaban expresando. Además, se observa que conciben y manejan con sentido la dirección del cambio más no la rapidez del cambio, por ejemplo, las respuestas al quinto problema. Estas son características de un nivel 1. Algunos equipos mostraron una correcta interpretación de la dirección a partir de la tabla de datos y además, identificaron cuando la rapidez de variación era constante o variable, pero en su gran mayoría no distinguieron en el problema cuatro la velocidad media y la velocidad instantánea, por lo que este o estos equipos consideramos, según los niveles, tiene un nivel dos.

Creíamos que estos dos grupos mostrarían un mejor dominio de las habilidades en el manejo de problemas de variación por ser grupos que han aprobado un considerable número de materias de Cálculo y de otras áreas del conocimiento, sin embargo, los resultados nos orientan hacia la observación de grupos de diferentes semestres de la carrera con el objetivo de determinar el nivel de dominio del concepto de función en situaciones problémicas, tanto en los grupos de los primeros semestres como en los semestres superiores.

V.2 RESULTADOS DE LA SEGUNDA ETAPA (ver anexo 2)

Como se puede ver en el anexo 2, esta segunda etapa tiene como objetivos por un lado *presentar* a los alumnos de las materias Ecuaciones Diferenciales y Laboratorio de Mediciones Eléctricas y Electrónicas una serie de conceptos, utilizando la calculadora Ti-92, VewScreen y el proyector de acetatos, utilizando los diferentes registros de representación: numérico, gráfico y analítico del concepto de función para analizar, interpretar situaciones, por ejemplo, movimiento de un objeto, carga o descarga de un capacitor, corriente a través de un circuito eléctrico, etc. Y por otro ver que efecto tiene la presentación de esta información y la forma en que se presenta sobre la solución de problemas que involucran el conocimiento del concepto de función los resultados de esta etapa se pondrán en evidencia en la tercera etapa.

De manera muy breve describiré la secuencia de las actividades que se realizaron, se inició mostrándoles la gráfica de una recta por ser una función con la cual no parece que tengan problemas y por que a través de ella han conocido del concepto de pendiente y aceptan fácilmente que la inclinación de la recta, considerada la lectura de izquierda a derecha, indique la dirección, es decir, si es creciente o decreciente.

Y_5 presenta la oportunidad de comentar la dirección y rapidez con que la pendiente de la recta tangente va variando en cada punto. Por ejemplo, una actividad es el proceso de convertir la recta secante en tangente y comentar cuál es su significado, más o menos el planteamiento fue así: si un objeto se desplazó de acuerdo a la siguiente gráfica (y_5) con respecto al tiempo y queremos saber cuál fue la velocidad a la cual se desplazó de un punto a otro, por ejemplo, (utilizando F_3) entre el punto $P_1(3.1092437,3.7332963)$ y $P_2(8.8235294,81.414733)$ ¿cómo podríamos determinar la velocidad?

→ Se esperan comentarios o propuestas de parte de los alumnos, inmediatamente después se continua con la exposición.

Con respecto a la pregunta anterior ¿Qué significa y_2-y_1?; ¿Qué significa x_2-x_1? y ¿Qué significaría $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$?

Con los valores de y_2, y_1, x_2 y x_1, sin mostrar la operaciones ni la expresión analítica, se obtiene m y b para obtener y=mx+b que es la recta secante, se consideramos P_1 como punto fijo. m=13.5942585 y b=-38.5345663. Se escribe en la calculadora y se traza. Y_{50}= 13.5942585x-38.5345663. ¿Qué representa la pendiente de esta recta secante? ¿Existe algún error o diferencia entre la velocidad real del objeto y la que obtuvimos nosotros?

Ahora, se propone a los alumnos otra recta secante, sin eliminar de la grafica la anterior, se selecciona un punto P_3 más próximo a P_1 que P_2. En este caso, utilizando F_3 se obtiene $P_3(7.1428571,34.567367)$, se realizan las mismas operaciones que en el inciso anterior y se obtiene que y_{51}=7.64428011-20.0346335. Se escribe en la calculadora y se traza la grafica para mostrarla a los alumnos (ahora ven las tres graficas). ¿Cómo sería el error utilizando esta pendiente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con respecto al anterior?

Aritméticamente, ¿qué tan pequeña podemos hacer la diferencia entre $x_2 - x_1$? Es decir, ¿qué tanto podemos acercar x_2 a x_1?

¿Existirá una recta que pase por el punto P_1? Si así fuera, ¿cuál es el error o diferencia entre lo real y lo obtenido? ¿Cómo interpretamos la pendiente con respecto a nuestro problema?

F_3 para posicionar el cursor en el punto P_1, después F_5 se teclea, A. Enter. Ahora los alumnos pueden ver las tres gráficas.

Otra secuencia, como se puede ver en el apéndice 2, que también se siguió fue y_6, ahora y_{11} obtiene el valor de la variable mas un incremento, es decir, $y_{11}(x+\Delta x)$ y $y_{12}=\Delta y/\Delta x=(y_{11}-y_6)/\Delta x$, asignándole valores a Δx, primero 0.5, después 0.1, después 0.01, mostrando sus graficas para finalmente compararla con la grafica de la derivada de la función.

Algunos permanecieron atentos, otros hicieron apuntes, también recuerdo que algunos hicieron expresiones como ¡Ah! (que se interpreta como, ya me cayó el veinte), sin embargo, esperamos que en la tercera etapa los alumnos integren, en sus respuestas, el conocimiento expuesto en esta etapa.

V. 3 RESULTADO DE LA TERCERA ETAPA

En esta tercera etapa se amplió el cuestionario, se agregaron tres problemas (ver anexo 1) y también el número de grupos.

Con el fin de facilitar el análisis de las respuestas a los problemas 1, 2, 4, y 5 la información se concentró en tablas, ya que las respuestas son muy diversas.

Problema 1.

Se tiene un resorte suspendido por uno de sus extremos. Si en el extremo libre del mismo se aplica una fuerza, éste sufrirá una deformación. ¿De qué factores depende que tanto se deformará el resorte?. Enlista todos aquellos factores que consideres que influyen.

Para la leer la información contenida en las tablas de respuestas al primer problema lo haremos de la siguiente manera, las filas indican la respuesta y la columna el número del alumno. La última columna hace referencia al número total de alumnos que respondieron con ese reactivo. Por ejemplo, los diez alumnos respondieron con el reactivo 1, el cual buscamos en la lista de RESPUESTA DEL ALUMNO y encontramos "Magnitud de la fuerza" o también podemos poner nuestra atención en las columnas, por ejemplo, en la columna marcada con el número 2 y vemos que este alumno respondió 1,2 y 3 lo que significa que "Magnitud de la fuerza, Fuerza del resorte y Dirección de la fuerza"

El escrito RESPUESTA DEL ALUMNO en la parte derecha tienen

RESPUESTAS DEL ALUMNO

F: 1. Magnitud de la fuerza externa. 2. Fuerza del resorte. 3. Dirección de la fuerza.

K: 5. Material del resorte. 6. Elasticidad del resorte. 7. resistencia del resorte. 8. Inercia.

A: 17. Grosor (área transversal) 18. Radio

L: 14. Tamaño. 15. Número de vueltas.

OTROS: 4. Gravedad. 9. Peso del resorte. 10. Aceleración de la gravedad. 11. Tensión. 12. Tiempo de esfuerzo. 13. Temperatura. 16. Rozamiento del aire.

Resp/Almno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTALES/COMENTARIOS
1	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	10
2		×									1
3		×			×						2
4	×							×			2
5			×	×	×	×					4
6				×						×	2
7					×		×		×		3
8								×			1
9					×						1
10					×						1
11							×				1
12							×				1
13						×					1
14							×				1
15							×				1
16								×			1
17						×					1
18						×					1

TABLA V. 1. GRUPO: MATEMÁTICAS I.

Con el fin de facilitar el análisis de las respuestas de los alumnos a este primer problema se procedió a hacer una tabla que muestra la información de la siguiente manera, en la primer columna está la respuesta dada por el estudiante, que se identifica con un número que corresponde con el mostrado en RESPUESTA DEL ALUMNO que a continuación escribimos. Cada respuesta fue asociada a un tipo de respuesta, por ejemplo, con la letra "F" reunimos para su identificación a aquellas respuestas que tienen que ver con la Fuerza.

En el primer renglón los números del uno al diez identifican al estudiante, las "x" son para identificar la respuesta utilizada por el estudiante, por ejemplo, el alumno 1 tiene marcas en las filas 1 y 4, lo que significa que utilizó en su respuesta: la magnitud de la fuerza y la gravedad. De aquí en adelante inmediatamente después de la tabla pondré el concentrado RESPUESTA DEL ALUMNO .

Resp/Almno	1	2	3	4	5	6	TOTALES/COMENTARIOS
1	×	×	×	×	×		5 #5 Si es jalado o empujado (3)
2			×	×			2 #2 Superficie donde está el resorte
3			×		×		2 #3,Atmosfera, constancia(12)
4				×			1
5							
6	×		×				2
7							
8							
9							
10							
11							
12	×		×				2
13	×		×		×		3
14							
15							
16							
17		×	×				2
18							

TABLA V. 2. GRUPO: MATEMÁTICAS II

RESPUESTAS DEL ALUMNO

F: 1. Magnitud de la fuerza externa. 2. Fuerza del resorte. 3. Dirección de la fuerza.

K: 5. Material del resorte. 6. Elasticidad del resorte. 7. resistencia del resorte. 8. Inercia.

A: 17. Grosor (área transversal) 18. Radio

L: 14. Tamaño. 15. Número de vueltas.

OTROS: 4. Gravedad. 9. Peso del resorte. 10. Aceleración de la gravedad. 11. Tensión. 12. Tiempo de esfuerzo. 13. Temperatura. 16. Rozamiento del aire.

Resp/Almno	1	2	3	4	5	6	7	TOTALES/COMENTARIOS
1	×	×	×	×	×	×	×	7 #1 Fuerza al jalarlo, es determinante
2								#2 Dureza del resorte
3								#3 Cantidad de fuerza
4				×				1 #5 Si es para estirarlo o reducirlo
5								#6 La Fricción. Depende de donde esté sujetado.
6			×					1
7		×	×	×		×		4
8								#7 Distancia a la cual es aplicada la F.
9								Soporte del resorte, regreso del
10								Resorte, movimiento hasta
11								Detenerse.
12	×						×	2
13								
14		×				×		2
15								
16								
17								
18								

TABLA V. 3. GRUPO: ECUACIONES DIFERENCIALES

RESPUESTAS DEL ALUMNO

F: 1. Magnitud de la fuerza externa. 2. Fuerza del resorte. 3. Dirección de la fuerza.

K: 5. Material del resorte. 6. Elasticidad del resorte. 7. resistencia del resorte. 8. Inercia.

A: 17. Grosor (área transversal) 18. Radio

L: 14. Tamaño. 15. Número de vueltas.

OTROS: 4. Gravedad. 9. Peso del resorte. 10. Aceleración de la gravedad. 11. Tensión. 12. Tiempo de esfuerzo. 13. Temperatura. 16. Rozamiento del aire.

Resp/Almno	1	2	3	4	5	6	7	8	TOTALES/COMENTARIOS
1	×	×	×	×	×	×	×	×	8 #1 Con que se jala el resorte (1)
2									#2 Dureza del resorte (7), si se
3			×	×					2 cuelga un objeto de su peso.
4				×	×		×		3 #3 Posición inicial donde fue soltado
5									o aplicada la fuerza.
6		×		×		×			3 #4 Constante de deformación según
7	×								1 el material (6), ángulo de
8			×		×		×		3 estiramiento (3). Pero estas no
9									No son importantes.
10									#5 Si la fuerza es constante (12).
11									Variación de la fuerza con
12		×			×	×			3 respecto al tiempo. Objeto
13									Colgado: peso.
14									#6 Rigidez del resorte (6).
15									#7 Del medio ambiente.
16									#8 De la distancia que se estire.
17									
18									

TABLA V. 4. GRUPO: LABORATORIO DE MEDICIONES ELECTRICAS Y ELECTRÓNICAS

RESPUESTAS DEL ALUMNO

F: 1. Magnitud de la fuerza externa. 2. Fuerza del resorte. 3. Dirección de la fuerza.

K: 5. Material del resorte. 6. Elasticidad del resorte. 7. resistencia del resorte. 8. Inercia.

A: 17. Grosor (área transversal) 18. Radio

L: 14. Tamaño. 15. Número de vueltas.

OTROS: 4. Gravedad. 9. Peso del resorte. 10. Aceleración de la gravedad. 11. Tensión. 12. Tiempo de esfuerzo. 13. Temperatura. 16. Rozamiento del aire.

Resp/Almno	1	2	3	4	5	TOTALES/COMENTARIOS
1	×	×	×	×	×	5 #1 De la masa (9).
2						#3 De la masa (9). De la fricción (16).
3		×				1 #4 De la constante del resorte.
4		×	×			2 #5 Masa colgante, peso. Desplazamiento,
5	××	×				3 velocidad. Constante del resorte, rigidez (6).
6			×		×	2 Fricción de la masa sobre la superficie.
7						
8						
9						
10	×					1
11						
12				×		1
13		×				1
14						
15						
16			×			1
17						
18						

TABLA V. 5. GRUPO: CONTROL I

RESPUESTAS DEL ALUMNO

F: 1. Magnitud de la fuerza externa. 2. Fuerza del resorte. 3. Dirección de la fuerza.

K: 5. Material del resorte. 6. Elasticidad del resorte. 7. resistencia del resorte. 8. Inercia.

A: 17. Grosor (área transversal) 18. Radio

L: 14. Tamaño. 15. Número de vueltas.

OTROS: 4. Gravedad. 9. Peso del resorte. 10. Aceleración de la gravedad. 11. Tensión. 12. Tiempo de esfuerzo. 13. Temperatura. 16. Rozamiento del aire.

Grupo/# A	F	E	A	λ
Mate I/10	10 (100%)	10 (100%)	1 (10%)	1 (10%)
Mate II/6	5 (83%)	2 (33%)	2 (33%)	0
EcsDifs/7	7 (100%)	4 (57%)	0	2 (28.5%)
LabMed/8	8 (100%)	7 (87.5%)	0	0
Control I/5	5 (100%)	4 (80%)	0	0

TABLA V. 6

F = Fuerza; **E** = Propiedad del tipo de material; **A**= Área transversal; λ = Longitud

La tabla V.6 muestra en la primera columna el grupo de la materia correspondiente: Matemáticas I, Matemáticas II, Ecuaciones Diferenciales, Mediciones y Control I y el número de alumnos de cada grupo. Las demás columnas concentran en un parámetro las respuestas utilizadas asociadas a la respuesta por alumno. Por ejemplo, La fila de Matemáticas I, con 10 alumnos, todos, es decir, los 10, utilizaron expresiones asociados con la fuerza. También con respecto al tipo de material utilizado, no así con el área transversal, sólo uno de los diez estudiantes lo hizo; igual que con el parámetro de la longitud del resorte.

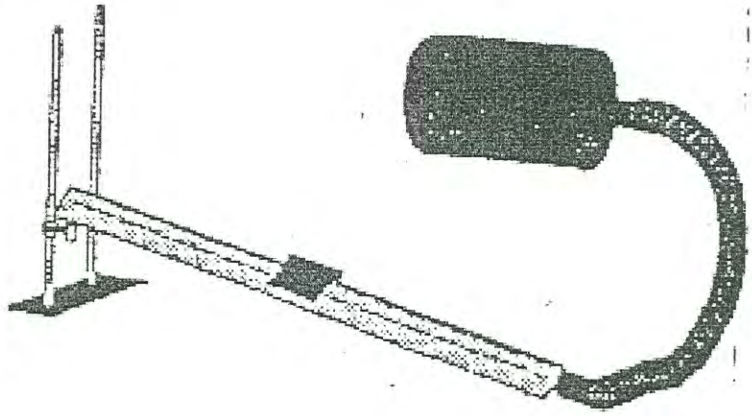
De la información proporcionada por la tabla V.6, podemos deducir que perciben los cambios en el resorte de forma global, es decir, sólo precisan que depende del tipo de material utilizado, no consideran parámetros como el área transversal y la longitud, en cambio es alto el porcentaje de estudiantes que considera que en gran medida, y en algunos casos únicamente, depende de la fuerza aplicada. En algunos casos consideran parámetros que no tienen nada que ver como por ejemplo, *"la gravedad y el rozamiento del aire"*, *"Depende de la fricción de la masa sobre la superficie"*. *"Posición inicial de donde fue soltado o aplicada la fuerza"*, o la expresión siguiente, como recuerdo de alguna materia, *"Depende de la constante del resorte"*.

Estudiantes Se esperaría que después de aprobar una cierta cantidad de materias, no sólo de matemáticas, sino de otras áreas del conocimiento, la formación y el desarrollo de una capacidad de análisis estuviera más avanzada, sin embargo, la instrucción recibida no ha logrado consolidar una buena formación en el análisis, en este caso de las magnitudes que varían y sus relaciones en el contexto del movimiento.

RESPUESTA DEL SEGUNDO PROBLEMA

Problema 2

A continuación, se muestra un dispositivo de Laboratorio para estudiar el movimiento en un plano inclinado. El plano es un riel de aire, cuya inclinación puede variar y por él se desplaza un carrito como el que puede observarse en la figura 1.



¿Cómo supone que será el movimiento del carrito al desplazarse por el riel?

Analice la situación lo más detalladamente posible y haga todas las consideraciones que crea pertinente para describir el movimiento del carrito, explicitando lo que cree que ocurrirá con la velocidad del mismo.. ~. -

Para el análisis de este problema se procedió de la misma manera que con el problema anterior.

Resp/Almno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTALES/COMENTARIOS
7				×							1
8					×		×	×			3
9											
5				×	×	×	×	×			5 #1 El movimiento será hacia la derecha.
10											#4 Al inicio del riel (7).
14									×	×	2 #6 Porque la gravedad es constante (1).
1	×		×			×					3 Si el riel varía (11) y (12) . No entendí
2		×									1 lo que quieren decir con "riel de aire".
3		×			×						2
4			×			×					2
6				×		×					2
12						×					1
11						×					1
13							×				1

TABLA V. 7. GRUPO: MATEMÁTICAS I

Al igual que en las tablas anteriores, la primer columna identifica la respuesta dada por el alumno, la primera fila identifica el número del alumno y, la última columna identifica la cantidad de alumnos que contestaron con esa respuesta y algún comentario sobre la respuesta de algún alumno.

Por ejemplo, el alumno 4 respondió "la velocidad dependerá de la posición inicial" que está asociada al número 7. Cada número se está en la LISTA DE RESPUESTA POR ALUMNO que a continuación escribimos. De aquí en adelante se colocará la lista de respuesta por alumno debajo de cada tabla.

LISTA DE RESPUESTAS POR ALUMNO

FACTORES: dirección, fuerza de gravedad, fuerza de impulso y variación de la inclinación del riel.

A) Punto de partida del carrito: 7. La velocidad que alcanzará dependerá de la posición inicial.

B) La inclinación del riel: 8. La velocidad dependerá de la inclinación del riel, 9. El desplazamiento con respecto al tiempo dependerá de la inclinación.

C) La magnitud de la fuerza aplicada al carrito en el inicio y durante el trayecto: **5.** El movimiento se deberá a la gravedad. **10.** La velocidad dependerá del peso del carrito.

D) Si la inclinación del riel varía durante el trayecto del carrito: **14.** La rapidez dependerá de la inclinación del riel.

E) Efectos: **1**. Velocidad constante. **2**. El movimiento será lineal. **3**. La velocidad aumentará con respecto al tiempo. **4**. Movimiento rectilíneo uniforme. **6**. La velocidad aumentará conforme descienda **12.** La velocidad va ir cambiando.

F) Otros: **11.** La trayectoria describe una parábola. **13.** La velocidad dependerá de la distancia del riel.

Resp/Almno	1	2	3	4	5	6	TOTALES/COMENTARIOS
7							#1 Descendente, lentamente, incrementará velocidad con cierta
8		×	×	×	×	×	4 aceleración, terminará su descenso al terminarse el riel, al final la
9							velocidad será la más alta.
5	×	×					2 #2 Hasta que la energía cinética sea igual a la energía potencial del
10							punto de partida.
14							#3 Subirá lentamente y bajará con más velocidad.
1							#4 subirá lento al empujarlo y bajará con más velocidad debido a la
2							pendiente del riel.
3	×	×					2 #5 Si está en la parte superior la velocidad se incrementará conforme
4							descienda y disminuirá si asciende.
6							
12							
11							
13							

TABLA V. 8. GRUPO: MATEMÁTICAS II

LISTA DE RESPUESTAS POR ALUMNO

FACTORES: dirección, fuerza de gravedad, fuerza de impulso y variación de la inclinación del riel.

A) Punto de partida del carrito: 7. La velocidad que alcanzará dependerá de la posición inicial.

B) La inclinación del riel: **8**. La velocidad dependerá de la inclinación del riel, **9.** El desplazamiento con respecto al tiempo dependerá de la inclinación.

C) La magnitud de la fuerza aplicada al carrito en el inicio y durante el trayecto: **5.** El movimiento se deberá a la gravedad. **10**. La velocidad dependerá del peso del carrito.

D) Si la inclinación del riel varía durante el trayecto del carrito: **14.** La rapidez dependerá de la inclinación del riel.

E) Efectos: **1**. Velocidad constante. **2**. El movimiento será lineal. **3**. La velocidad aumentará con respecto al tiempo. **4**. Movimiento rectilíneo uniforme. **6**. La velocidad aumentará conforme descienda **12.** La velocidad va ir cambiando.

F) Otros: **11.** La trayectoria describe una parábola. **13.** La velocidad dependerá de la distancia del riel.

Resp/Almno	1	2	3	4	5	6	7	COMENTARIOS
7								#1 Por la figura, poca inclinación, la velocidad disminuirá
8	×	×					×	con respecto al tiempo.
9								#3 NO RESPONDIO
5				×				#4 Afectará dirección, gravedad y fuerza que se aplique.
10								#5 Uniformemente acelerado (4)
14								#6 Variable acelerado.
1		×						#7 No se a que se refiere con "riel de aire".
2								
3								
4					#5			
6								
12						×		
11								
13								

TABLA V. 9. GRUPO: ECUACIONES DIFERENCIALES

Resp/Almno	1	2	3	4	5	6	7	8	TOTALES/COMENTARIOS
7									#1 Va ir acelerando su velocidad.
8					×	×			2 #3 Velocidad y aceleración se incrementará.
9									#5 Dice "el movimiento dependerá de la inclinación del plano".
5	×		×						#6 Aceleración constante debido a la fricción del aire.
10									Velocidad variable creciente dependiendo de la fricción (8).
14									#7 Movimiento descendente.
1							×		1
2				×					1
3	×	×	×						3
4									
6									
12									
11									
13									

TABLA V. 10. GRUPO: MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTRÓNICAS I

Resp/Almno	1	2	3	4	5	TOTALES/COMENTARIOS
7						#1 También depende de la fuerza del aire.
8	×			×	×	3 #2 "Se hace una sumatoria de fuerzas en los ejes debido a la gravedad y se le
9						resta la fuerza de fricción."
5						
10						#3 Hace un figura (eje y-x; traza una recta con pendiente negativa y sobre ella
14						un cuadrado que simula el carrito) cita la segunda ley de Newton y escribe
1						"podemos considerar el carrito en un movimiento en plano, pero existe un
2						cambio de fuerzas dependiendo de la fuerza aplicada. Bien la fuerza que
3					×	1 origina el cambio es la gravedad y la fuerza que se oponen, la fricción; que
4						la considera de manera constante."
6						#4 Y será más rápido cuando vaya en descenso (8).
12						#5 También influirá la fricción, su velocidad máxima
11						la alcanzará a la mitad de la distancia recorrida.
13						

TABLA V. 11. GRUPO: CONTROL

En las tablas V.7 a V.11 se pueden ver las consideraciones que hicieron los estudiantes para describir el movimiento del carrito. La gran mayoría, sino es que todos los alumnos, sólo consideran la posibilidad de que el movimiento sea descendente, es decir, que el riel este inclinado y el movimiento se inicie en la parte superior y, por lo tanto, la gravedad provocará el descenso del carrito.

Algunos alumnos advierten otras posibilidades, el alumno de la materia de Matemáticas II, por ejemplo, el alumno # 3 dice "Subirá lentamente y bajará con más velocidad", otro alumno, el # 4 dice "Subirá lento al empujarlo y bajará con más velocidad debido a la pendiente del riel." Otro más, el #5 dice "La velocidad se incrementará conforme descienda y disminuirá conforme ascienda."

Sin embargo, ninguno hace referencia a la identificación de las magnitudes que variaran ya sus relaciones. Dos alumnos hacen referencia a la segunda ley de Newton e intentan un análisis de fuerzas en el carrito para intentar dar respuesta al movimiento del carrito, uno de ellos dice "Se hace una sumatoria de fuerzas en los ejes debido a la gravedad y se le resta la fuerza de fricción", el otro dice, después de citar la segunda ley de Newton, "podemos considerar el carrito en un movimiento en un plano, pero existe un cambio de fuerzas dependiendo de la fuerza aplicada. Bien la fuerza que origina el cambio es la gravedad y la fuerza que se oponen, la fricción; que la considera de manera constante."

El resto de los alumnos utilizan algunas expresiones tales como "uniformemente acelerado." O "el movimiento será a la derecha" O "Aceleración constante debido a la fricción del aire."

De acuerdo los niveles enunciados en el Marco Teórico podemos identificar que se encuentran en un nivel 1, porque utilizan expresiones como disminuirá, incrementará, etc., pero con deficiencias, es decir, no es todavía un nivel consolidado.

RESPUESTA AL TERCER PROBLEMA (ver anexo 1)

Se solicita "explore la tabla I lo más detalladamente posible y realice todas las consideraciones que crea pertinentes sobre las condiciones del experimento para determinar si el movimiento real del carrito, que se desprende de dicha tabla, corresponde al descrito con anticipación. Describa el movimiento del carrito, según la tabla."

Una de las cosas que está ausente en las respuestas de casi todos los alumnos es la comparación del movimiento según la tabla y las expectativas expuestas por ellos en el problema anterior, hay un intento constante por obtener una expresión analítica como lo muestra un alumno de Matemáticas I, que hace la siguiente operación con los tres primeros pares de datos de la tabla, $v = \frac{x_1 - x_2}{t}$ y concluye que "la velocidad aumenta con una aceleración constante". Otro alumno, de la misma materia dice "como la distancia aumenta de la forma 0.006, 0.008, 0.010 la ecuación de la recta va a ser $y = \frac{x}{1000} + 1.401$". El resto de los alumnos observa la tabla y dicen cosas como las siguientes: alumno número dos, "su distancia se tomo desde el final, conforme al tiempo pasa el carrito se acerca más y su velocidad va aumentando". El Alumno número tres dice "**la partícula** se está moviendo en un plano inclinado, la partícula desciende". El alumno número diez dice "Lo que nos dice es que la distancia varia con respecto al tiempo, puesto que a mayor tiempo menor distancia".

Alumnos de la materia de Matemáticas II, hacen lo siguiente, por ejemplo, el alumno número uno dibuja una recta con pendiente negativa y sobre ella dibuja dos rectángulos, uno en la parte superior de la recta y otro en la parte inferior, en el rectángulo que está dibujado en la parte inferior escribe "máxima velocidad". El alumno número tres dice "los datos dados en la tabla corresponden a una recta inclinada decrecientemente y se puede observar que entre más tiempo transcurre, menor es la distancia restante hacia la base".

Un alumno de la materia de Ecuaciones Diferenciales procedió de la siguiente manera: "Hizo una tabla de tres columnas que tituló: tiempo, distancia y velocidad (d/t): (0,1.407, 1er paso)(0.2, 1.393, 6.965)(0.5, 1.356, 2.712)(0.9, 1.282, 1.424)(1.2, 1.209, 1.0075)(1.5, 1.123, 0.7487)(1.8, 1.019, 0.5661)(2, 0.941, 0.4705). y dice: $\therefore$ si va disminuyendo la velocidad con respecto al tiempo, se comprobó analíticamente con $v(t) = \frac{d}{t}$"

Otro alumno perteneciente de esa materia, alumno número cuatro, dice "Al iniciar el experimento el movil se localiza a 1.407 m del dispositivo, y al transcurrir 2 seg el movil ha reducido la distancia casi a la mitad, si el dispositivo se encuentra en la parte inferior del riel indica que el movimiento es descendente y la tabla muestra que la distancia en metros recorrida cada .1 seg se incrementa igualmente."

En el grupo de Mediciones el alumno número tres dice "las tablas mostradas si podrían ser las del carrito dado que los números indican que entre más tiempo pase, el carrito va recorriendo distancias más grandes"

El alumno número ocho dice "dicho carro siempre se fue acercando a la fuente computo pero con distinta velocidad."

En el grupo de la materia de Control I

El alumno número dos, trazó una gráfica de forma parabólica sin indicar que operaciones realizó para obtener los valores de la ordenada, aunque parece que el valor 1.407 lo tomo como igual a cero luego hizo la operación 1.407-1.401=0.006 a continuación 1.401-1.393=0.008+0.006 ahora 1.393-1.383=0.010+0.008 y así sucesivamente, entonces dice "Si es al parecer la función que esperaba ya que es la mitad de una parábola lo que indica que tiene una aceleración constante que sería la gravedad, y la fricción será sólo una fuerza constante que se opone." Y a un lado de la gráfica añade $y = x^2$; $y' = 2x$; $y'' = 2$ "*Trate de encontrar una ecuación del movimiento respecto al tiempo."

El alumno número cinco dice "Al contrario de este problema yo pondría el dispositivo electrónico al inicio del riel no al final pues esta tabla nos arroja a mi ver, una información errónea <u>*porque*</u> *yo tome como consideración inicial que el carrito se va* *deslizando hacia abajo, por lo tanto, si el dispositivo estuviera en el lado contrario al que se encuentra marcaría bien los datos que yo necesito respecto al punto más alto, aunque con esos datos yo reestructuraría esta tabla, para las condiciones que yo he tomado, por lo tanto: el tiempo=0 le corresponde por lógica la distancia =0 a partir de este momento el carrito empezará a desplazarse una cierta distancia respecto al tiempo, por lo cual mi tabla quedaría así:*

Tiempo	Distancia	Tiempo	Distancia
0	*0*	*1*	*.022*
0.1	*.006*	*1.1*	*.024*
0.2	*.008*	*1.2*	*.027*
0.3	*.010*	*1.3*	*.027*
0.4	*.012*	*1.4*	*.028*
0.5	*.015*	*1.5*	*.031*
0.6	*.015*	*1.6*	*.033*
0.7	*.018*	*1.7*	*.034*
0.8	*.019*	*1.8*	*.037*
0.9	*.022*	*19*	*.038*
		2	*.040*

Creo que a partir ya de esta tabla, los resultados son erróneos a los que yo había supuesto en el problema anterior, esta tabla de acuerdo a la definición de la velocidad=distancia/tiempo me di cuenta que la velocidad máxima es en el instante en que empieza a desplazarse, mientras que la velocidad mínima la alcanzará un poco antes de detenerse en el extremo inferior, por lo cual creo que confundí el término velocidad con aceleración en el inciso anterior" (habla del problema 2)."

Lo anterior muestra un intento de la mayoría de los alumnos por obtener alguna expresión algebraica y al no poder obtenerla no saben que concluir, muestran la capacidad para detectar cuales son las magnitudes que varían, por ejemplo, "Lo que nos dice es que la distancia varia con respecto al tiempo, puesto que a mayor tiempo menor distancia", pero no pueden determinar la magnitud de la variación, por ejemplo, cuando dicen "dicho carro siempre se fue acercando a la fuente computo pero con distinta velocidad.". Un alumno de la materia de Control I utiliza los datos proporcionados por la tabla para hacer una grafica y dice "El movimiento tiene cambios, pues no es totalmente lineal, porque podemos ubicar 4 partes en la grafica, donde los cambios de x son mayores que en los anteriores. La pendiente o inclinación están relacionados linealmente con la posición, bien si mi *(pendiente) es mas* pequeña, x_2-x_1 aumenta. Por lo que decimos que la velocidad cambia, al tener m (masa) constante y las fuerzas también en suma; F(g)+F(k)" y agrega, "NOTA: Se trató de encontrar una ecuación que describiera el sistema en función del tiempo pero no se encontró, además no sé exactamente como funciona un riel de aire (si es afectado por la fricción, gravedad, fuerza, etc.). No recuerdo bien las condiciones que se toman en cuenta para un plano inclinado o para movimiento en dos dimensiones."

En general, muestran un dominio caracterizado por el nivel 2, donde utilizan la tabla de datos para determinar la dirección de la variación y pueden caracterizar la rapidez como constante o variable, no todos, pero no es un nivel consolidado pues no asocian la rapidez de la variación con la concavidad.

RESPUESTAS AL CUARTO PROBLEMA (ver anexo 1)

Se solicita que tomen como punto de partida cada tabla (tabla 2 y tabla 3) para intentar ***determinar*** en qué consistió el cambio en las condiciones del experimento con respecto a la situación registrada en la tabla I.

De acuerdo a la lista de respuestas de los alumnos al problema cuatro trataremos de determinar como interpretan la nueva información dada en el registro numérico.

De la tabla V.13 a la tabla V.17 se pueden ver cuales fueron las respuestas, por ejemplo del grupo de Matemáticas I, los alumnos 1, 5, hacen referencia a la velocidad, no como comparación con la de la tabla I, sólo que "no es constante" y "que disminuye". Los alumnos del grupo de Matemáticas II, 2, 4 y 5 identifican un cambio de dirección del carrito, es decir, que ahora asciende. Y dos de ellos, los alumnos 2 y 4, dicen que "aumenta lentamente" y "varía". Además, que "se detuvo a los 1.8 seg."

También en el grupo de Ecuaciones Diferenciales, los alumno 2, 4 y 6 identifican un cambio de dirección del carrito, y que la velocidad "disminuye" y "decrece conforme avanza". El alumno número 5 lo expresa así "Acelera lentamente". Los alumnos 1, 4 y 6 expresan que se detiene en d=1.14 y t=1.8, "se queda suspendido", "avanza más lento, plano está más inclinado".

También los del grupo de Laboratorio de Mediciones Eléctricas y Electrónicas identifican un cambio de dirección, los alumnos 7 y 8, dicen, respectivamente, la velocidad es decreciente y el otro dice cambiante pequeña. Todos los alumnos dicen que hubo cambio en el ángulo de inclinación.

Del grupo de Control I, el alumno número 4 dice "Acelera negativa por la gravedad". Los alumnos 2, 3 y 4 hacen gráficas con los datos que los lleva a concluir que el cambio en la velocidad se debe al cambio en el ángulo de inclinación.

Se observa que, en general, utilizan la tabla para determinar la dirección de la variación, por ejemplo el alumno número seis de la materia de Matemáticas I, dice, "Los puntos no describen una recta, sólo cambia la pendiente.", otros comentan con respecto a la tabla 3, que se detuvo a los 1.8 seg y los 2 seg se volvió a mover. El nivel de ubicación según estas respuestas es un nivel 2.

#A/Res	Dirección	Velocidad	Aceleración	Operaciones	Conclusión
01: T2	Computador en el otro extremo		De 0.2 a $1 m/s^2$		Aumentó la inclinación.
T3		No constante, tampoco el desplazamiento	No constante	Cálculo de Δs	Por el aire
02: T2	Desde el inicio y en T1 desde el final				Ninguna
T3					Resistencias en el camino provoca que la velocidad Aumente y disminuya
03: T2	Trayectoria diferente, asciende. Recorre más distancia (error).				
T3	También asciende				
04: T2	La partícula asciende. Recorre más distancia (error).				
	También asciende, más dist q' la tabla I.				
05: T2		Disminuye			Por falta de inclinación.
T3		Casi constante.	Se mueve más rápido que los demás.		Está más inclinado
06: T2					Con dos puntos obtuvo la ecuación de una recta y dice "los puntos no describen una recta". "Lo único que varía es la inclinación de la pendiente."
T3					
07: T2					"Varía la inclinación del riel."
T3					
08: T2	Bajara más lento				"Varía la inclinación del riel."
T3					
09: T2					"Ahora su recorrido o distancia está dada por el tiempo y la velocidad."
T3					
10: T2					"Ahora su recorrido o distancia está dada por el tiempo y la velocidad."
T3					

TABLA V. 13. Materia: Matemáticas I.

Respuestas al cuarto problema. En la primera columna se identifica el número de alumno y la respuesta a la tabla de datos 2 (T2) y tabla de datos 3 (T3).

A/Resp	Dirección	Velocidad	Aceleración	Operaciones	Conclusión
01: T2					Inclinación invertida
T3					Menos inclinación
02: T2	Asciende	Ritmo que va disminuyendo			Cambio en la inclinación del riel
T3					
03: T2					.
T3					
04: T2	Asciende	Aumenta lentamente			Se empuja con una fuerza constante. Se detiene antes de llegar al tope.
T3	Asciende	Varía			No llega al final
05: T2	Se aleja del dispositivo				Se detuvo a 1.8 seg.
T3					Se detuvo a 1.8 seg. y siguió a los 2 seg.
06: T2					
T3					

TABLA V. 14. Materia: Matemáticas II.

Respuestas al cuarto problema. En la primera columna se identifica el número de alumno y la respuesta a la tabla de datos 2 (T2) y tabla de datos 3 (T3).

A/Resp	Dirección	Velocidad	Aceleración	Operaciones	Conclusión
01: T2		Disminuye			Se detiene en d=1.14 y t=1.8
T3		Disminuye			Se detiene en t=1.8 avanza en t=2 seg
02: T2	Cambió, asciende	Decrece conforme avanza			
T3					
03: T2					
T3					
04: T2	Asciende				Conforme avanza la distancia es menor pero se aleja del dispositivo
T3	Ascendente				Avance más lento, plano está más inclinado.
05: T2		Aumenta rápidamente			
T3				Acelera lentamente	
06: T2	Va en aumento				Se queda suspendido (subraya los tres últimos datos)
T3					Pasa lo mismo
07: T2					
T3					

TABLA V. 15. Materia: Ecuaciones Diferenciales.

Respuestas al cuarto problema. En la primera columna se identifica el número de alumno y la respuesta a la tabla de datos 2 (T2) y tabla de datos 3 (T3).

A/Resp	Dirección	Velocidad	Aceleración	Operaciones	Conclusión
01: T2					Inicia en 0.31, el plano se inclina en forma contraria
T3					Igual, inicia 0.38
02: T2	Asciende				Se subió la pendiente y se empujo.
T3	Asciende				Mayor pendiente, se empujó.
03: T2					Mayor inclinación en la tabla 2 que en 3. En la tabla 2 se detiene al final.
T3					
04: T2					Se cambió en ángulo de inclinación
T3					
05: T2	Se aleja del dispositivo				Aumentó el ángulo de inclinación.
T3	Se sigue alejando				Mismo ángulo que el anterior.
06: T2			Aceleración rapidez variable.		Inclinación más prolongada.
T3			Desaceleración con respecto a la tabla 2		Disminución del plano o aumento de fricción del aire
07: T2		Decrece hasta casi ser constante			
T3		Decreciente			Desinclinación del carro, lo pusieron más horizontalmente.
08: T2	Se aleja de la fuente	Cambiante			
T3	Se aleja	Pequeña			

TABLA V. 16. Materia: Laboratorio de Mediciones Eléctricas y Electrónicas.

Respuestas al cuarto problema. En la primera columna se identifica el número de alumno y la respuesta a la tabla de datos 2 (T2) y tabla de datos 3 (T3).

A/Resp	Dirección	Velocidad	Aceleración	Operaciones	Conclusión
01: T2	Sentido contrario al sensor			Vp=0.66/0.5=1.32 Vp=1.09/1.5=0.706 Vp=(1.32+0.706)/2=1.01	Velocidad menor con respecto a la tabla I, por lo tanto más lento
T3	También se aleja del sensor			Vp=0.621/0.5=1.24 Vp=0.938/1.5=0.605 Vp=(0.605+1.24)/2=0.922	Más lento que el anterior
02: T2				Traza una curva	Superficie con ángulo pequeño después superficie sin inclinación
T3				Traza una curva	Ángulo más pequeño después superficie sin inclinación y sin fricción.
03: T2	Se aleja del medidor			Hace una gráfica y observa que..	Fuerza externa constante
T3				Hace una gráfica y observa que..	Fuerza menor que la anterior
04: T2		Disminuye	Negativa	Hace una gráfica y observa que..	Por la fuerza de gravedad. Menor distancia. Se detiene en t=1.8
T3		Promedio menor. Velocidad inicial mayor que en el experimento 1 y 2.		Hace una gráfica y observa que..	Menor distancia. La inclinación del riel aumentó.
05: T2	Ahora el dispositivo está en la parte superior.	Velocidad inicial mayor que en la tabla 1.			Aumentó la inclinación
T3	Ahora el dispositivo está en la parte superior.	Velocidad inicial mayor que en la tabla 1 y 2			Mayor inclinación con respecto a los dos casos anteriores.

TABLA V. 17. Materia: Control I.

Respuestas al cuarto problema. En la primera columna se identifica el número de alumno y la respuesta a la tabla de datos 2 (T2) y tabla de datos 3 (T3).

RESPUESTA AL QUINTO PROBLEMA (ver anexo 3)

De la tabla V.19 a la tabla V. 23 podemos ver lasa respuestas grupo de grupo, y de las cuales se obtuvo la siguiente tabla tratando de ver globalmente el comportamiento de cada grupo, no perdemos de vista que esta es una investigación de tipo cualitativo, por lo que esta tabla solo pretender que veamos de forma más clara cual es el nivel de formación y desarrollo del concepto de función.

Para este caso identificaremos a N1, como aquellas preguntas que pueden ser respondidas por observación directa de la tabla y N2 aquellas preguntas que requieran realizarse algunas operaciones con los datos.

INCISO	MAT I	MATII	EcsDif	Med	Control I
1	0	0	0	0	2/5
N1) A	100	67	72	100	100
N1) C	100	84	86	100	100
N1) E	90	67	72	88	100
N1) F	70	**34**	57	75	**40**
N1) H	70	**17**	**43**	**38**	60
N1) J-1	50	0	42	62	40
N2) B	60	17	0	0	**40**
N2) D	30	0	0	13	20
N2) G	30	0	15	25	**60**
N2) I	0	0	0	0	0
N2) J-2	0	0	42	62	40

TABLA V. 18.

Es claro que el inciso 1 nadie lo contesto, es decir, nadie describió el movimiento de la pelota, no tienen un lenguaje para describir el movimiento a partir del registro numérico ni gráfico.

De los incisos identificados como N1 que tiene el más bajo porcentaje de respuesta es el h), en dicho inciso se solicita que obtengan la ***velocidad media*** durante los dos segundos, por ejemplo, en matemáticas II sólo dos alumno contestaron el inciso, uno respondió que 40.8 es decir multiplicó la distancia (20.4) por (2). El alumno número uno de la materia de mediciones contestó 20.4 m/seg, es decir, el valor que aparece en la tabla de datos para t=2 seg.

En cuanto a los incisos que considerados como N2, como se puede ver en la tabla, existen muchos ceros que representan que ningún alumno del grupo contestó correctamente el inciso, pero en el mejor de los casos fue un 60 % del grupo de matemáticas I al inciso b). Estos resultados aproximados fueron obtenidos por medio de una gráfica y algunos casos de resultados erróneos fueron los siguientes, por ejemplo, el alumno número tres de la materia de matemáticas I obtuvo el resultado al despejar $y=(1/2)gt^2$, entonces t=1.917 seg., varios dijeron entre 1.2 y 1.4 y otros (1.2+1.4)/2=1.3

Una de las respuestas más comunes fue 1.369 pero como no dejaron registro de operaciones investigue las respuestas del grupo de control I que aparece con 40 % de respuestas y encontré que también ellos dieron esa respuesta pero uno de ellos dice que por la gráfica se ve que es aproximadamente 1.36.

El alumno número dos de Control I, dice de los incisos b) y f) "no encuentro la ec. por medio de la gráfica y no recuerdo la fórmula" j) "no puedo ya que no podido descubrir el movimiento".

Al observar las respuestas a los incisos f) y i) nos damos cuenta que es claro que no hacen diferencia alguna entre velocidad media y velocidad instantánea. Además, de las deficiencias que presentan al tratar de comprender los décimos de segundo por lo que los lleva a cometer errores en el cálculo.

El nivel mostrado en este problema es un nivel 2, porque una característica es que no tiene aún sentido el término rapidez instantánea aunque presentan problemas en las gráficas que le solicitan, sobre todo, la de la velocidad con respecto al tiempo.

1. Descripción del movimiento de la pelota

A) ¿Cuál era la altura de la pelota, un segundo después de haber sido lanzada?

B) ¿En cuanto tiempo alcanzó 18 metros de altura?

C) ¿Qué distancia recorrió en los primeros dos décimos de segundo?

D) ¿Y en los segundos y terceros dos décimos de segundo qué distancia recorrió?

E) ¿Qué distancia recorrió en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes t=0.6 seg y t=1.2 seg?

F) ¿Con qué velocidad se movió durante el primer segundo?

G) ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido durante el segundo segundo?

H) ¿Y durante los dos segundos, cuál fue la velocidad media?

I) En el instante t=1 seg ¿cuál era la velocidad de la pelota?

J) Bosqueja las gráficas de la altura con respecto al tiempo y de la velocidad con respecto al tiempo?

Cod/Almno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTALES/COMENTARIOS
1											En la mayoría de los casos no aparecen
A	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	10 la operaciones.
B	×	#	#	×		#	×	×	×	×	6 #3 b)Despeja $y=1/2gt^2$; f)$v=gt$
C	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	10 #6 f) "Si encontrara la ecuación de la
D	×	×	#	#	#	#	#	×/2	×/2	×/2	3 velocidad salen todos los problemas"
E	×	×	×	×	×		×	×	×	×	9 Casi todos eligen t en eje vertical y
F	×	#	#	×	×		×	×	×	×	7 altura en el horizontal
G	×	×	×	#	#		#	#	#	#	3 ×/2 significa que sólo hacen la gráfica
H	×	#	×	×			×	×	×	×	7 de la altura con respecto al tiempo.
I		#		#			#	#	#	#	0
J			#	×	#	#	×	×/2	×/2	×/2	2

TABLA V. 19. GRUPO: MATEMÁTICAS I.

×=bien ; #=mal ; en "blanco" significa que no contestó.

Cod/Almno	1	2	3	4	5	6	TOTALES/COMENTARIOS
1							#1 j) utiliza una recta vertical.
A	×	#		×	×	×	4
B	×			#	#	#	1
C	×	×		×	×	×	5
D	#			#	#		0
E	×			×	×	×	4
F	×			×			2
G	#			#			0
H	×			#			1
I	#			#			0
J	#						0

TABLA V. 20. GRUPO: MATEMÁTICAS II.

Cod/Almno	1	2	3	4	5	6	7	TOTALES/COMENTARIOS
1								#6, 1 "el movimiento es vertical hacia
A	×	×		×	×	×	#	5 arriba".
B	#	×		#	#	#	#	0
C	×	×		×	×	×	×	6
D	#	#		#	#	#	#	0
E	×	×		×	×	×	#	5
F	#	×		×	×	×		4
G	#	#		×	#	#		1
H	#	#		×	×	×		3
I	#	#		#	#	#		0
J	×	×		×	#	#		3

TABLA V. 21. GRUPO: ECUACIONES DIFERENCIALES.

Cod/Almno	1	2	3	4	5	6	7	8	TOTALES/COMENTARIOS
1									
A	×	×	×	×	×	×	×	×	8
B	#	#	#	#	#		#		0
C	×	×	×	×	×	×	×	×	8
D	#	×	#	#	#		#	#	1
E	×	×	×	×	×	#	×	×	7
F	×	×	#	×	×	×	#	×	6
G	×	#	#	#	×	#	#	#	2
H	#	×	#	×	×	#	#	#	3
I	#	#	#	#	#	#	#	#	0
J	×/2	×		#	×	#	×	×	5.5

TABLA V. 22. GRUPO: MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTRÓNICAS.

Cod/Almno	1	2	3	4	5	TOTALES/COMENTARIOS
1	×				×	2 #1, 1 "fue lanzada con bastante fuerza. En 2 seg
A	×	×	×	×	×	5 alcanzó 20.4 mts oponiéndose a la fuerza de
B	#		×	#	×	2 Gravedad.
C	×	×	×	×	×	5 j) varias gráficas verticales.
D	#	#	×	#	#	1 #2 b) y f) "no encuentro la ec. Por medio de la
E	×	×	×	×	×	5 gráfica y no recuerdo la fórmula"
F	#		×	×	#	2 j) "no puedo ya que no podido descubrir el
G	#	×	×	×	#	3 movimiento".
H	#	×	×	×	#	3 #4 b) "no recuerdo fórmula para obtener velocidad"
I	#		#		#	0 i) y j) "no recuerdo como obtener la velocidad
J	#		×		×	2 instantánea."

TABLA V. 23. GRUPO: CONTROL I.

RESPUESTA AL SEXTO PROBLEMA (ver anexo 1, anexo 4)

En este problema se tiene como propósito identificar qué dificultades (obstáculos) tienen los alumnos para interpretar gráficamente información sobre variación dada en lenguaje natural, es decir, ver cómo utilizan la ***concavidad*** en las curvas. Por último, determinar si influye el contexto en el que se presenta la información.

El problema informa básicamente de seis situaciones que se reflejarán en la gráfica de la variación de la temperatura con respecto al tiempo, del texto identificamos que:

5:00 → frío

6:00 → subió la temperatura, al principio lentamente

12:00 → bastante calor e iba para largo

3:00 → se nubló y descendió la temperatura

5:00 → empezó a llover y en poco tiempo se sintió frío

x:00 → si sigue así esta noche la temperatura estará muy baja

De lo anterior se deriva que debemos observar como interpreta gráficamente:

La posición inicial y la rapidez de cambio de las 5:0A.M. a las 6:00 A.M.

El aumento de temperatura, al principio lentamente y la rapidez de cambio de las 6:00 A.M. a las 12:00 A.M.

La posición máxima, de las 12:00 a las 3:00 P.M.

La rapidez de cambio en el ligero descenso de temperatura a las 3:00 P.M.

El aumento en el descenso de la rapidez de cambio en la temperatura, casi a las 5:00 P.M. y posteriormente.

La rapidez de cambio de la temperatura representando la tendencia probable.

Como se puede ver en las gráficas del grupo de **matemáticas I**, ningún alumno maneja adecuadamente las concavidades para interpretar gráficamente la información. Los alumnos 2, 6, 7, 8 y 9 sólo utilizan rectas para expresar los cambios en las variables.

El grupo de **matemáticas II**, ningún alumno maneja adecuadamente las concavidades para interpretar gráficamente la información. De cinco alumnos que componen este grupo sólo el alumno numero dos utilizó rectas el resto utilizó curvas aunque con algunas deficiencias como, por ejemplo, tres alumno inician el trazo en el origen de los ejes coordenados, es decir, unen el origen con el primer punto del cual tienen información sin reflexionar acerca de si esa fue la trayectoria de la temperatura.

El grupo de **Ecuaciones diferenciales**, ningún alumno maneja adecuadamente las concavidades para interpretar gráficamente la información, todos utilizan curvas para interpretar la información proporcionada, sin embargo, se observa que no hay un conocimiento sobre el uso de la concavidad en las curvas para interpretar la razón de cambio entre las variables.

El grupo de **Mediciones Eléctricas y Electrónicas** presenta más o menos la misma situación que el grupo de Ecuaciones Diferenciales.

El grupo de **Control I** se compone de cinco alumnos de los cuales dos utilizan rectas para interpretar la información proporcionada

En general, se observa que el obstáculo o dificultad que tienen los alumnos para interpretar gráficamente información proporcionada en lenguaje natural es la falta de conocimiento de la razón de cambio de una variable con respecto a la otra y del ejercicio de dicho conocimiento en diferentes contextos. En este contexto, de la variación en una situación cotidiana muestran un nivel 2, ya que algunos asocian la rapidez de la variación con la concavidad de la curva, sin embargo, son algunos los estudiantes que utilizan solo rectas para interpretar la variación, por ejemplo, cinco alumnos de matemáticas I y dos de Control I. Ver anexo 4.

RESPUESTA AL SÉPTIMO PROBLEMA (ver anexo1)

Ejemplos de algunas fallas del grupo de matemáticas I es el alumno número dos que lee las operaciones de la expresión matemática, hace una tabla de correspondencia X-Y del **uno al cinco**, para cada gráfica. Traza tres rectas, dos con pendiente positiva y la tercera con pendiente negativa. El alumno número cuatro, solo considera valores positivos para las gráficas. El alumno número siete, no existe correspondencia entre los pares ordenados y la gráfica.

Del grupo de Matemáticas II, el alumno uno, no trazó las gráficas. El alumno número dos, solo considera valores positivos. El alumno número seis, calcula algunos valores para "x" y obtiene los valores correspondientes para "Y" pero en el inciso a) traza una curva cóncava hacia abajo, en el inciso b) sólo traza para valores positivos, y en el inciso c) traza una curva cóncava hacia abajo, uniendo cuatro puntos que calculó.

De la materia de Ecuaciones Diferenciales el alumno número cinco, no respondió el problema. El alumno número seis, solo calcula valores de "x" positivos, por lo tanto, las tres gráficas están en el primer cuadrante, la gráfica del inciso c) es una recta con pendiente negativa.

Del grupo de Mediciones Eléctricas y Electrónicas, el alumno uno, trazó una recta con pendiente positiva pero el trazo inicia en el origen. El alumno número tres, en el inciso c) traza dos curvas simétricas, para "y" positiva. El alumno número siete, calcula para valores negativos de "X" y traza una recta con pendiente negativa entre los cuadrantes dos y tres. Para valores positivos de "x" traza una recta con pendiente negativa en el primer cuadrante.

Del grupo de la materia de Control I, el alumno número uno, traza tres rectas. La gráfica correspondiente al inciso c) tiene pendiente negativa.

En general, es manifiesto que evalúan la variable "x" sólo para valores positivos. Por algún motivo sólo tienen sentido los valores positivos de la variable independiente. Que más o menos en su mayoría reconocen la recta y la parábola en su expresión analítica pero es evidente que desconocen el comportamiento gráfico de la función racional. Pero no tienen ningún estudiante palabras o conceptos para describir cómo varían los valores de "y" con respecto a "x", eso está ausente sin lugar a dudas. De hecho no tiene sentido para ellos esa solicitud, a cambio intentan describir algunas características de la expresión algebraica.

RESPUESTA AL OCTAVO PROBLEMA (ver anexo 1)

Problema 8. En cada uno de los siguientes incisos, bosqueja una gráfica con las características que se indican.

1. Decreciente, con ritmo de decrecimiento creciente.
2. Creciente, con tasa de crecimiento constante.
3. Negativa, creciente y con tasa de crecimiento negativo.

Gpo/Inciso	1)	2)	3)
MATE I	0/10 (0%)	8/10 (80%)	0/10 (0%)
MATE II	1/6 (17%)	4/6 (67%)	0/6 (0%)
Ecs Difs	3/7 (43%)	6/7 (86%)	0/7 (0%)
MEDICIONES	2/8 (25%)	8/8 (100%)	0/8 (0%)
CONTROL I	1/5 20 %)	5/5 (100%)	O/0 (0%)

TABLA V. 24. Esta tabla muestra en porcentajes la respuesta de los alumnos:

La respuesta con mayor número de aciertos es el inciso dos, una recta contendiente positiva. Del grupo de Ecuaciones Diferenciales tres de los siete alumnos responden correctamente trazan una curva cóncava hacia abajo en el inciso uno. Nadie responde correctamente el tercer problema, no pasaron la prueba, la gran mayoría de los alumnos trazó alguna curva pero no existía forma de cumplir con esas condiciones. No reconocen el lenguaje para describir la variación en términos de la dirección de la variación y de su rapidez de la variación.

GRUPO DE MATEMÁTICAS I

El primer inciso, lo contestan nueve de los diez alumnos, ninguno lo contesta correctamente. Siete responden con una recta, dos con curvas y uno no lo contesta.

El segundo inciso, ocho de los diez contestan correctamente. Es interesante observar la respuesta del alumno número cuatro.

El tercer inciso, nueve alumnos contestan con una recta o con una curva, sin embargo, no existe curva que satisfaga estas condiciones.

Casos interesante por observar son los alumnos: número nueve (en los tres incisos) y el número diez en lo que respecta al inciso c).

GRUPO DE MATEMÁTICAS II

El primer inciso, el alumno número uno describe una función decreciente con ritmo de decrecimiento creciente pero, por algún motivo, piensa que debe ser una función con valores negativos conforme la variable independiente crece a partir de cero. El alumno número dos responde con gráfica de barras. Sólo un alumno responde correctamente.

El segundo inciso, cuatro alumnos responden correctamente, y de nuevo el alumno número dos responde con gráfica discretas.

El tercer inciso, cinco de los seis alumnos trazan recta o una curva, sin embargo, no existe curva que satisfaga estas condiciones.

Casos interesante por observar son los alumnos: número dos (en los dos primeros incisos) y el número seis en los tres incisos.

ECUACIONES DIFERENCIALES

El primer inciso, tres alumnos de siete responden correctamente, los cuatro restantes trazan una recta con pendiente negativa.

El segundo inciso, seis de los siete alumnos responden correctamente, el alumno número siete responde con una recta vertical.

El tercer inciso, los siete alumnos trazan recta o una curva, sin embargo, no existe curva que satisfaga estas condiciones.

MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTRÓNICAS

El primer inciso, los alumnos cuatro y cinco respondieron correctamente. El segundo inciso, los ocho alumnos del grupo respondieron correctamente. El tercer inciso, ningún alumno respondió correctamente, respondieron trazando alguna recta o alguna curva a excepción del alumno número cinco que no trazó ninguna curva.

CONTROL I

El primer inciso, sólo el alumno número cuatro respondió correctamente. El alumno número tres trazó una gráfica tipo escalera. El segundo inciso, los cinco alumnos del grupo contestaron correctamente. El tercer inciso, ningún alumno contestó correctamente. El alumno número uno trazó una recta horizontal, y el alumno número tres trazó una curva y el resto trazó recta.

Desde el punto de vista del Marco Teórico podemos decir que estos estudiantes no tienen una construcción adecuada del objeto de estudio del cálculo, es decir, de la variación, no tienen un lenguaje conceptual que les permita analizar, interpretar y resolver problemas. Es posible que el sujeto no ha interactuado con el objeto, de tal forma que las habilidades intelectuales como explorar, comparar, clasificar, conjeturar, deducir, representar, etc., no hayan formado parte de sus actividades cuando este contenido temático formó parte de alguna materia. Estos resultados muestran que no tienen conciencia de que la función es un modelo de representación de la variación.

Existe la posibilidad de que este conocimiento lo hayan adquirido en su momento como una imposición, para aprobar la materia, pero sin asignarle ningún sentido. Pero tan bien dan luz a cerca de el nivel que se tiene y las características que hay que formar y fortalecer para lograr un estudiante de nivel cinco que sin duda será un estudiante mucho más preparado, no sólo para aprender matemáticas, Cálculo, sino para utilizarlo con propiedad en el análisis, interpretación y resolución de problemas.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los objetivos específicos planteados en esta investigación que pretende determinar en que medida los estudiantes pueden identificar las magnitudes variables y establecer las relaciones de dependencia entre ellas.

Los problemas 1, 2 y 3 del cuestionario muestran que los estudiantes en su mayoría detectan las variables fundamentales, por ejemplo, en el caso del resorte detectan que la variable fundamental es la fuerza que se le aplique al resorte pero muestran poca habilidad para detectar las paramétricas que en este caso son el tipo de material del resorte, el grosor del resorte, la longitud del resorte y todas las engloban en el material del resorte. En el caso del carrito, detectan que el carrito cambió su posición con respecto al tiempo o que aumentó o disminuyó su velocidad (con respecto al tiempo) y engloban las variables paramétricas en la inclinación del riel, sólo algunos detectan que se puede deber a una fuerza que le de impulso o a la variación del riel pero durante el trayecto. Es decir, hay poca habilidad para detectar las relaciones de dependencia. El problema 4 muestra que los estudiantes tienen pocas habilidades en el uso del registro numérico para analizar, interpretar y comparar situaciones.

Y, en qué medida pueden percibir las características de la variación (dirección y rapidez) y los tipos básicos de variación, en función de estas características.

Los resultados del problema 5 y 6, muestran que las características de variación en el registro numérico (problema 5), especialmente que no distinguen entre velocidad media y velocidad instantánea y en el registro verbal (problema 6) las características no son adecuadamente interpretadas. Hay evidencia de algunas dificultades para interpretar la información y proporcionar respuestas a partir de ellas, específicamente, el registro numérico y en el caso del problema 6 interpretan defectuosamente la información verbal, en función de su dirección de cambio y de su rapidez de cambio, utilizando principalmente las rectas para interpretar la variación.

También si interpretan y proporcionan información sobre variación a través de los diferentes registros de representación: verbal, gráfico, numérico y analítico.

Las respuestas al problema 7, dan muestra de algunas fallas en la conversión del registro algebraico al registro gráfico. Además de la falta de un lenguaje para describir como varía una variable con respecto a la otra, y dando por respuesta una caracterización de la expresión algebraica. El problema 8, muestra que no reconocen el lenguaje en el cual se solicita la conversión del registro verbal al registro gráfico.

Algunas debilidades de la investigación son la falta de entrevistas con aquellos grupos, en la primera etapa, o estudiantes que contestaron cosas incoherentes pero no dejaron registro de las operaciones o no fueron explícitos en sus declaraciones.

El propósito fundamental de la investigación, el siguiente:

Determinar el nivel de dominio que los estudiantes tienen para usar el concepto de función en el análisis, interpretación, descripción y evaluación de la variación de una variable en función de otra u otras, en diferentes contextos.

Desde el punto de vista del Marco Teórico podemos decir que estos estudiantes no tienen una construcción adecuada del objeto de estudio del cálculo, es decir, de la variación, no tienen un lenguaje conceptual que les permita analizar, interpretar y resolver problemas. Es posible que el sujeto no ha interactuado con el objeto, de tal forma que las habilidades intelectuales como explorar, comparar, clasificar, conjeturar, deducir, representar, etc., no hayan formado parte de sus actividades cuando este contenido temático formó parte de alguna materia. Estos resultados muestran que no tienen conciencia de que la función es un modelo de representación de la variación.

Existe la posibilidad de que este conocimiento lo hayan adquirido en su momento como una imposición, para aprobar la materia, pero sin asignarle ningún sentido. Pero tan bien dan luz a cerca de el nivel que se tiene y las características que hay que formar y fortalecer para lograr un estudiante de nivel cinco que sin duda será un estudiante mucho más preparado, no sólo para aprender matemáticas, Cálculo, sino para utilizarlo con propiedad en el análisis, interpretación y resolución de problemas.

ANEXO 1

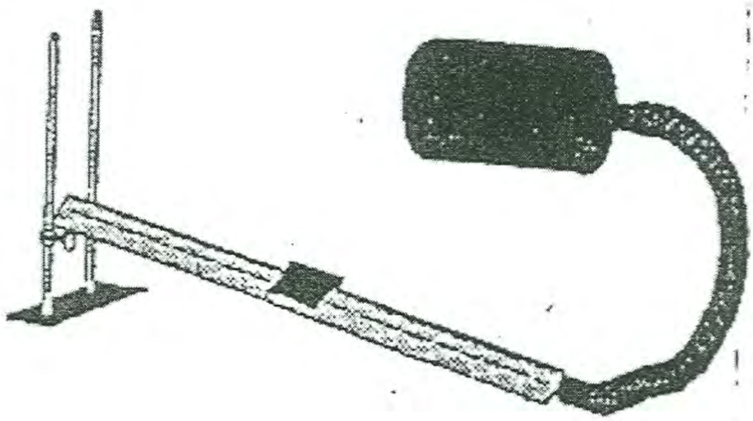
CUESTIONARIO UTILIZADO EN LA INVESTIGACIÓN

Problema 1 (se aplicó como problema 1, sólo en la tercera etapa).

Se tiene un resorte suspendido por uno de sus extremos. Si en el extremo libre del mismo se aplica una fuerza, éste sufrirá una deformación. ¿De qué factores depende que tanto se deformará el resorte?. Enlista todos aquellos factores que consideres que influyen.

Problema 2 (problema 1 de la primera etapa)

A continuación, se muestra un dispositivo de Laboratorio para estudiar el movimiento en un plano inclinado. El plano es un riel de aire, cuya inclinación puede variar y por él se desplaza un carrito como el que puede observarse en la figura 1.

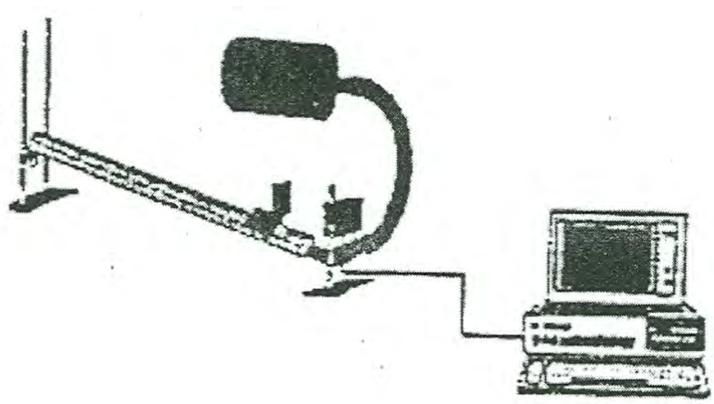


¿Cómo supone que será el movimiento del carrito al desplazarse por el riel?

Analice la situación lo más detalladamente posible y haga todas las consideraciones que crea pertinente para describir el movimiento del carrito, explicitando lo que cree que ocurrirá con la velocidad del mismo.. ~. -

Problema 3 (problema 2 de la primera etapa).

Mediante un dispositivo electrónico que permite medir la posición del carrito -



distancia a que se encuentra del dispositivo- y capturarla en ese momento en el computador (ver figura 3), fue posible elaborar las tablas que se dan a continuación, en las que los valores en la columna izquierda representan los instantes medidos en segundos y los que están en la columna derecha, representan la posición del carrito medida en metros.

Explore la Tabla I lo más detalladamente posible y realice todas las consideraciones que crea pertinentes sobre las condiciones del experimento para determinar si el movimiento real del carrito, que se desprende de dicha tabla, corresponde al descrito con anticipación. Describan el movimiento del carrito, según la tabla.

Tiempo en segundos	Distancia en metros
0.0	1.407
0.1	1.401
0.2	1.393
0.3	1.383
0.4	1.371
0.5	1.356
0.6	1.341
0.7	1.323
0.8	1.304
0.9	1.282

Tiempo en segundos	Distancia en metros
1.0	1.260
1.1	1.236
1.2	1.209
1.3	1.182
1.4	1.154
1.5	1.123
1.6	1.090
1.7	1.056
1.8	1.019
1.9	0.981
2.0	0.941

Problema 4 (problema 3 de la primera etapa).

Las Tablas 2 y *3* se obtuvieron de la misma manera que la tabla 1, sólo que en cada caso, se hizo algún cambio en el experimento. A partir de cada tabla, intenten determinar en qué consistió el cambio en las condiciones del experimento respecto a la situación registrada en la tabla 1.

Tabla 2

Tiempo en segundos	Distancia en metros
0.0	0.31
0.1	0.39
0.2	0.48
0.3	0.56
0.4	0.63
0.5	0.69
0.6	0.75
0.7	0.81
0.8	0.86
0.9	0.91
1.0	0.95
1.1	0.99
1.2	1.03
1.3	1.06
1.4	1.09
1.5	1.11
1.6	1.12
1.7	1.13
1.8	1.14
1.9	1.14
2.0	1.14

Tabla 3

Tiempo en segundos	Distancia en metros
0.0	0.38
0.1	0.43
0.2	0.50
0.3	0.55
0.4	0.59
0.5	0.63
0.6	0.68
0.7	0.71
0.8	0.75
0.9	0.79
1.0	0.83
1.1	0.86
1.2	0.88
1.3	0.90
1.4	0.92
1.5	0.94
1.6	0.96
1.7	0.97
1.8	0.98
1.9	0.98
2.0	0.99

Problema 5 (problema 4 de la primera etapa)

En la tabla que aparece a continuación se registra la altura, con respecto a la Tierra, a que se encontraba, en el instante que en cada caso se indica, una pelota que se lanzó verticalmente hacia arriba. De acuerdo con la información contenida en dicha tabla describa el movimiento de la pelota y conteste específicamente las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la altura de la pelota un segundo después de haber sido lanzada?

b) ¿En cuánto tiempo alcanzó 18 metros de altura?

c) ¿Qué distancia recorrió en los primeros dos décimos de segundo?

d) ¿y en los segundos y terceros *dos décimos de segundo* qué distancia recorrió?

e) ¿Qué distancia recorrió en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes t = 0.6 seg. y t = 1.2 seg. ?

f) ¿Con qué velocidad se movió durante el primer segundo?

g) ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido durante el segundo segundo?

h) ¿Y durante los dos segundos. cuál fue la velocidad media?

i) En el instante t = 1 seg. ¿cuál era la velocidad de la pelota?

j) Bosqueja las graficas de la altura con respecto al tiempo y de la velocidad con respecto al tiempo.

Tiempo	Altura
0	0
0.2	3.8
0.4	7.22
0.6	10.24
0.8	13.36
1.0	15.1
1.2	16.94
1.4	18.4
1.6	19.46
1.8	20.12
2.0	20.4

Problema 6 (problema 5 de la primera etapa)

De la siguiente situación, grafica la variación de la temperatura con respecto a! tiempo. Hoy me levanté temprano, eran las 5:00 A.M., el aire estaba bastante fresco, se sentía frió; sin embargo, más o menos como a las 6:00, cuando salió el sol, empezó a subir la temperatura y, aunque al principio lo hizo lentamente, como a las 12:00 se sentía bastante calor e iba para largo. Afortunadamente como a las 3:00 P.M., se nubló y ya no se sintió tanto calor, sobre todo cuando empezó a llover, que serian casi las 5:00 , pues en poco tiempo hasta volvió a sentirse frió. Si sigue así, esta noche la temperatura estará muy baja.

Problema 7

Cada una de las siguientes expresiones algebraicas (formulas) indica cómo están relacionadas la variable "y" y la variable "*x*". Sabiendo eso, analiza, describe (con palabras) y representa (gráficamente) cómo varían los valores de "y" con respecto a "*x*".

a) $y = 2x+1$ *b)* $y = x^2$ c) $y = 1/x$

Analiza como varían los valores de "*y*" con respecto a "*x*"

Describe (con palabras) cómo varían los valores de "*y*" con respecto a "*x*" .

Representa (gráficamente) como varían los valores de "*y*" con respecto a "*x*" .

Problema 8

En cada uno de los siguientes incisos, bosqueja una gráfica con las características que se indican.

a) Decreciente, con ritmo de decrecimiento creciente.
b) Creciente, con tasa de crecimiento constante.
c) Negativa, creciente y con tasa de crecimiento negativo.

ANEXO 2

A) PRETENSIONES QUE GUIARÁN EL SIGUIENTE TRATAMIENTO

- Establecer la variable a analizar (dependiente) y en "función" de quien (independiente) se analizará.
- Describir el comportamiento de alguna situación o fenómeno a través del registro gráfico como representante de la variación, con respecto a la dirección y rapidez de cambio. Utilizando los siete comportamientos básicos de la variación.
- Hacer la conversión al registro numérico y obtener los incrementos de las variables, mostrando gráficamente, que significa la cantidad del incremento de una de las variables manteniendo el incremento de la otra constante. Por ejemplo, en el contexto del movimiento.
- Mostrar numérica y gráficamente el significado de hacer el incremento de la variable independiente cada vez más pequeña hasta compararla con la derivada de la función.

B) CONCEPTOS QUE CONFORMAN EL CAMPO CONCEPTUAL PERTENECIENTE AL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y QUE PERMITE ANALIZAR, INTERPRETAR Y DESCRIBIR LA VARIACIÓN.

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta no vertical mide (cuantifica) el número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de desplazamiento horizontal de izquierda a derecha $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $x_1 \neq x_2$

Razones y ritmos de cambio

La pendiente de una recta puede interpretarse como una *razón o proporción* o bien como una *tasa o ritmo de cambio.*

Si los ejes *x* o *y* tienen la misma unidad de medida de medida, la pendiente no tiene dimensión y es una *razón o proporción.*

Si los ejes *x* o *y* tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una *tasa o ritmo de cambio.*

Inclinación de la tangente.

Tangente es la recta que toca en un solo punto a una curva o a una superficie.

Dirección. Creciente o decreciente.

Si m, o sea, $f'(x)>0$ en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

Si m, o sea, $f'(x)<0$ en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

¿Qué significa este tipo de relación entre las variables con respecto al fenómeno estudiado? Esto posiblemente nos lleve hacia una *concavidad* hacia arriba o hacia abajo.

Concavidad. Hacia arriba o hacia abajo.

Si las pendientes de las rectas tangentes de la curva $y=f(x)$ crece de izquierda a derecha, esto indica que la curva aumenta a medida que *x* crece, como consecuencia la curva se dobla hacia arriba. Una curva de este tipo se llama cóncava hacia arriba.

Si las pendientes decrecen de izquierda a derecha la curva se dobla hacia abajo. Se le llama cóncava hacia abajo.

La consecuencia de esto es que seguramente tiene un mínimo y/o un máximo.

Puntos de inflexión.

Al punto donde una curva cambia su dirección de *concavidad*_se le llama "punto de inflexión" y significa que en este punto la *razón de variación* es máxima.

Máximo y mínimos. Relativos o absolutos.

Máximo absoluto: Si $f(c)\geq f(x)$ para toda x en D.

Mínimo absoluto: Si $f(c)\leq f(x)$ para toda x en D.

Máximo relativo: Si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cercano a c.

Mínimo relativo: Si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cercano a c.

Asíntota

Línea recta que, prolongada, se acerca indefinidamente a una curva sin llegar a encontrarla, es decir, tiende a unirse pero nunca se unen.

Picos en una curva.

Es un número crítico, porque $f'(x)$ no existe, o sea, no tiene pendiente.

Discontinuidad.

En el lenguaje cotidiano la palabra continuidad significa, que un proceso continuo tiene lugar gradualmente, sin interrupción ni cambio abrupto. En matemática se dice que una función f *es continua en un número* "a" *si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

De no ser así se dice que f es discontinua.

Valor y signo de la primera y segunda diferencias.

Los valores de un conjunto de diferencias (primeras diferencias) implica la razón a la que está cambiando la variable, o sea la rapidez de cambio, puede ser creciente, decreciente o cero, (si se divide sobre un delta o incremento muy pequeño, el cual se hace tender a cero, se obtiene la derivada). El signo indica si la pendiente es positiva o negativa. *Esta información indica la velocidad.*

Los valores de un conjunto de diferencias derivadas (o extraídas) del primer conjunto de diferencias, o sea, las segundas diferencias, también informan de la rapidez con que está cambiando la rapidez y el signo indica si esta nueva pendiente es positiva o negativa.

Los cocientes de las diferencias.

Si se divide la primera diferencia sobre un intervalo pequeño llamado "delta" obtenemos la derivada, es decir, la rapidez con que está cambiando la variable dependiente con respecto a rapidez con que está cambiando la variable independiente, es la rapidez de cambio, velocidad. *No hay que olvidar que obtenemos una nueva función "derivada" de la función original.*

Si repetimos la operación, es decir, dividir la diferencias obtenidas a partir de las primeras diferencias sobre un intervalo pequeño de la variable independiente obtenemos la rapidez de cambio de la rapidez de cambio primera, esta es la llamada "aceleración". *Esta nueva función es derivada (o extraída) de la derivada de la función original. En otras palabras es la segunda derivada.*

C) APLICACIÓN

UN ACERCAMIENTO CUALITATIVO

Los siete comportamientos básicos de la variación

ver archivo: comportamientos gráficos, está en Power Point.

VARIACIÓN
- *A DIRECCIÓN*
  - *CRECIENTE*
  - *DECRECIENTE*
  - *NI CRECIENTE NI DECRECIENTE*
- *B RAPIDEZ*
  - ***CONSTANTE***
  - ***VARIABLE***
    - ***CRECIENTE***
    - ***DECRECIENTE***

Se utilizarán los siete tipos básicos de variación describiendo el comportamiento de algún fenómeno o circuito conocido, por ejemplo, posición de algún objeto con respecto al tiempo, su velocidad, su aceleración, voltaje con respecto al tiempo en un capacitor como su rapidez de carga o descarga eléctrica.

Con las primeras 10 funciones intentaré abordar una aproximación cualitativa por medio de los siete tipos de variación básica: sólo mostrando los registros gráficos y numéricos.

$y_1(x) = x$, después, $y_1(x) - x$; Preparando los conceptos de creciente,

$y_2(x) = x + 1$, después $y_2(x) = -x + 1$; decreciente, pendiente, valor de la pendiente.

$y_3(x) = 2x + 1$, después, $y_3(x) = -2x + 1$; rapidez de cambio constante.

$y_4(x) = 0.5x$, después, $y_4(x) - 0.5x$; el valor de la pendiente (inclinación)

$y_5(x) = e^{0.5x} - 1$; Preparando dirección y rapidez de cambio,

$y_6(x) = 5(1 - e^{-0.9x})$; variable. y_5, por ejemplo, ver al final de

$y_7(x) = 5e^{-0.5x}$;escrito el "proceso de secante a tangente".

$y_8(x) = 5Cos(x)$;Preparando, máximo, mínimo, punto de

$y_9(x) = 5Cos(2x)$; inflexión, concavidad.

$y_{10}(x) = 5$;no hay variación en la dirección y la rapidez ;es cero.

Utilizando el análisis anterior intentaré darle sentido al concepto de pendiente de la tangente de la función, valor y signo de la primera y segunda diferencia, es decir,

$f(x+\Delta x)-f(x)$, así como al cociente de la diferencia, es decir, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

; para $\Delta x = 0.5, 0.1, 0.01$

$y_{11}(x+\Delta x)$ de $y_6(x)$, es decir, $y_{11}(x+\Delta x)=5[1-e^{0.9(x+0.1)}]$; Para obtener Δy

$y_{12}(x)=\frac{y_{11}(x)-y_6(x)}{0.1}$; $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Delta x = 0.1, 0.5, 0.01$

$y_{24}(x)=4.5e^{-0.9x}$; mostrar que $y_{12}(x)\approx y_{24}(x)=y'_6$

$y_{26}(x)=-4.05e^{-0.9x}$;La función y_{24} se derivó de la función y_6, la función y_{26} se derivó de la función y_{24}, por lo tanto, y_{26} es la segunda derivada de la función y_6. Con esto intentaré darle sentido a la palabra y concepto derivar, qué significa geométricamente y cómo derivar. Y qué significa la diferencia de la diferencia.

$y_{13}(x+\Delta x)$ de $y_5(x)$; $y_{14}(x)=\frac{y_{13}(x)-y_5(x)}{0.1}=y_{25}(x)=\frac{dy_5(x)}{dx}$;Reafirmando la relación del valor de la pendiente con la derivada, es decir, con la rapidez de cambio de una variable con respecto a la otra.

$y_{15}(x)=Sin(x)+2$; $y_{16}(x+\Delta x)$; $y_{17}(x)=\frac{y_{16}(x)-y_{15}(x)}{\Delta x}\rightarrow \Delta x = 0.1, 0.5, 0.01$

$y_{18}(x)=x^3$;Intentaré mostrar la modificación de una curva, en el registro analítico, para que se observe con cierta amplitud la concavidad hacia abajo y hacia arriba, sin que sea Cosenoidal

$y_{19}(x)=x^3-x^2$;para que los alumnos identifiquen los puntos de interés.

$y_{20}(x)=x^3-x^2-x$;Por la posición que tiene, gráficamente, primero se recorre

$y_{21}(x)=(x-1)^3-(x-1)^2-(x-1)$; hacia la derecha y luego hacia arriba, y_{21}, y_{22}.

$y_{22}(x)=(x-1)^3-(x-1)^2-(x-1)+2$;

$y_{23}(x)=3(x-1)^2-2(x-1)-1$;debido a las experiencias anteriores (sesiones) y

;queriendo avanzar (evolucionar) ya no utilizaré la
;ecuación "auxiliar" sino que directamente utilizaré la
;función derivada.

PROCESO DE SECANTE A TANGENTE Y SU SIGNIFICADO

Si un objeto se desplazó de acuerdo a la siguiente gráfica (y_5) con respecto al tiempo y queremos saber cuál fue la velocidad a la cual se desplazó de un punto a otro, por ejemplo, entre el punto $P_1(3.1092437,3.7332963)$ y $P_2(8.8235294,81.414733)$ ¿cómo podríamos determinar la velocidad?

→ Se esperan comentarios o propuestas de parte de los alumnos.

Con respecto a la pregunta anterior ¿Qué significa y_2-y_1?; ¿Qué significa x_2-x_1? y ¿Qué significa $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$?

Con los valores de y_2, y_1, x_2 y x_1, sin mostrar la operaciones ni la expresión analítica, se obtiene m y b para obtener **y=mx+b** que es la recta secante, se consideramos P_1 como punto fijo. m=13.5942585 y b=-38.5345663. Se escribe en la calculadora y se traza. Y_{50}= 13.5942585x-38.5345663. ¿Qué representa la pendiente de esta recta secante? ¿Existe algún error o diferencia entre la velocidad real del objeto y la que obtuvimos nosotros?

Ahora, se propone a los alumnos otra recta secante, sin eliminar de la grafica la anterior, se selecciona un punto P_3 más próximo a P_1 que P_2. En este caso, utilizando F_3 se obtiene $P_3(7.1428571,34.567367)$, se realizan las mismas operaciones que en el inciso anterior y se obtiene que y_{51}=7.64428011-20.0346335. Se escribe en la calculadora y se traza la grafica para mostrarla a los alumnos (ahora ven las tres graficas). ¿Cómo sería el error utilizando esta pendiente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con respecto al anterior?

Aritméticamente, ¿qué tan pequeña podemos hacer la diferencia entre $x_2 - x_1$? Es decir, ¿qué tanto podemos acercar x_2 a x_1?

¿Existirá una recta que pase por el punto P_1? Si así fuera, ¿cuál es el error o diferencia entre lo real y lo obtenido? ¿qué interpretación podemos hacer de la pendiente con respecto a nuestro problema?

F_3 para posicionar el cursor en el punto P_1, después F_5 se teclea, A. Enter. Ahora los alumnos pueden ver las tres gráficas.

ANEXO 3

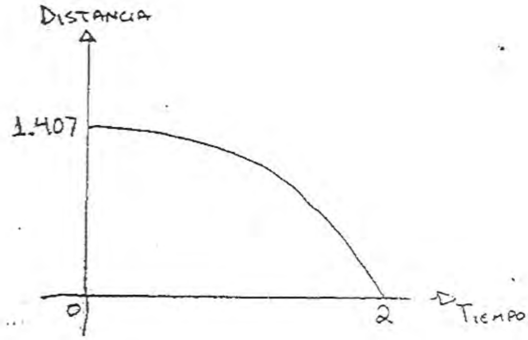
Fig. 1. Respuestas del equipo 1 de Ecuaciones Diferenciales

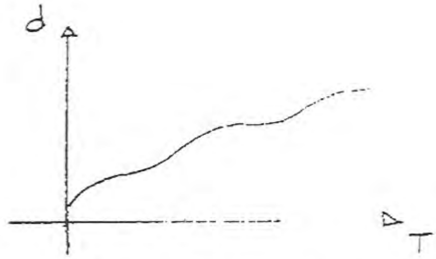
Problema 1

1.- Uniformemente acelerado

2.- La velocidad variaría con respecto a la inclinación del riel de aire.

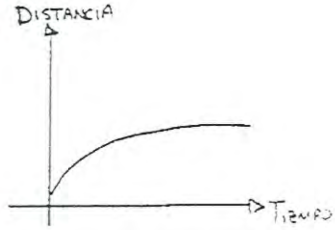
Problema 2





EN ESTE CASO, AL RIEL SE LE APLICÓ MOVIMIENTO, HACIA ARRIBA Y ABAJO.

Problema 3

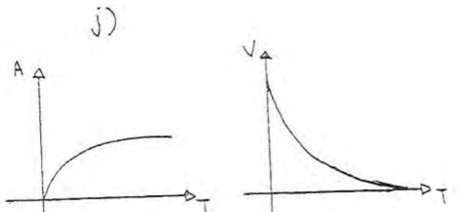


EL CARRITO COMENZÓ A BAJAR DE LA PARTE MÁS ALTA DEL RIEL AUMENTANDO SU VELOCIDAD. LLEGÓ A LA PARTE FINAL DEL RIEL Y REBOTÓ REGRESANDO EN EL RIEL

Problema 4

a) 15.1 mts.
b) 1.3 seg.
c) 3.8 m
d) 3.02 m
e) 6.7 m
f) 15.1 m/s
g) 8 m/s
h) 10.2 m/s
i) 15.1 m/s

j)



Problema 5

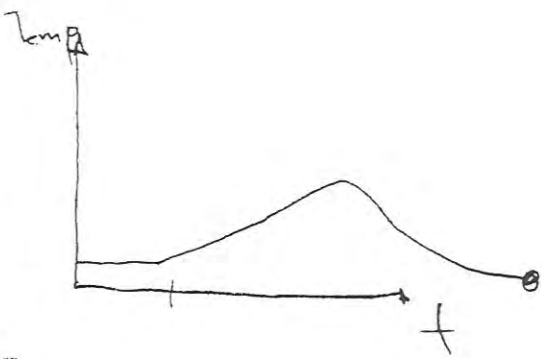


Fig 2. Respuestas del equipo 2 de Ecuaciones Diferenciales

Problema 1

¿Cómo suponen que será el movimiento del carrito al desplazarse por el riel?
De mayor a menor velocidad, hasta llegar al punto donde se acabe el riel y se para.

Problema 2

Describa el movimiento del carrito, según la tabla.
La velocidad va disminuyendo

problema 3

Determinar en qué consistió el cambio en las condiciones del experimento respecto a la situación registrada en la tabla 1.

Tabla 2. Conforme transcurría el tiempo, fué disminuyendo la velocidad del móvil, así como, el recorrido y, cuando llegó a los 1.8 segundos, se detuvo completamente.

Tabla 3. El móvil empezó rápido y fué disminuyendo su distancia hasta haber transcurrido 1.8 segundos y, a los 2 segundos, volvió a caminar.

Problema 4

Describan el movimiento de la pelota y contesten específicamente las siguientes preguntas:

¿Cuál era la altura de la pelota un segundo después de haber sido lanzada?
15.1m

¿En cuánto tiempo recorrió en los primeros dos décimos de segundos.
3.8m

-¿En cuánto tiempo alcanzó 18metros de altura?
1.37 seg.

-¿Y en los segundos y terceros dos décimos de segundo qué distancia recorrió?
7.22m y 10.24m respectivamente

-¿Qué distancia recorrió en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes t=0.6 seg y t= 1.2 seg?
6.7m

-¿Con qué velocidad se movió durante el primer segundo?
15.1m/s

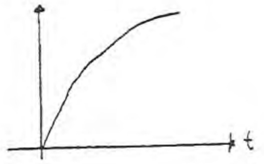
-¿Cuál fué la velocidad media del recorrido durante el segundo segundo?
15 m/s

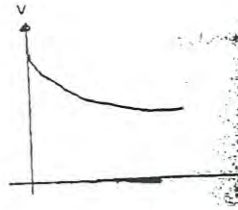
-¿Y durante los dos segundos, cuál fué la velocidad media?
14.6 m/s

- En el instante t= 1 seg, ¿Cuál era la velocidad de la pelota?

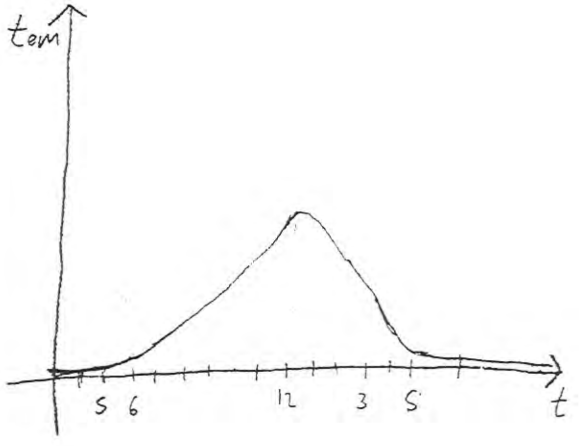
15.1 m/s

- Bosqueje los gráficas de la altura con respecto al tiempo y de la velocidad con respecto al tiempo.





Problema 5



ejemplo

El movil va deslizandose hacia abajo, conforme avanza aumenta su velocidad debido a la aceleración de la gravedad la cual va incrementandose conforme avanza.

Durante su recorrido hay dos intervalos enque la aceleración no aumento sino que permanecio igual al igual que la velocidad, pero tiempo despues cuando correspondía ese intervalo aumentó en uno.

Tiempo en segundos	Distancia en metros	f'	f''
0	1.407	6	
0.1	1.401	8	
0.2	1.393	10	
0.3	1.383	12	
0.4	1.371	15	0
0.5	1.356	15	
0.6	1.341	18	
0.7	1.323	[illegible]	
0.8	1.304	22	0
0.9	1.282.	22	
1	1.260	24	
1.1	1.236	28	
1.2	1.209	27	1
1.3	1.182	28	
1.4	1.154	31	
1.5	1.123	33	
1.6	1.090	34	
1.7	1.056	32	1
1.8	1.019	38	
1.9	0.981	40	
2	0.941		

Tabla 1. Tiempo v.s Distancia

Fig. 3. Respuestas del equipo 3 de Ecuaciones Diferenciales

Problema 1

Si el carrito es puesto en marcha desde la parte superior del plano, su velocidad irá aumentando debido a la gravedad, mas aparte, el impulso que se le pueda dar con algun dispositivo del riel; sin embargo, si el punto de partida es desde la parte inferior del riel, la velocidad irá disminuyendo conforme avance hacia arriba.

Problema 2

El movimiento del carrito es descendente con la aceleración de la gravedad; aunque de la tabla se puede deducir que en algunos lapsos se puede apreciar que no hay aumento de velocidad. De cualquier forma, el movil solo llega a un tercio del camino.

Problema 3

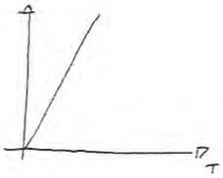
Tabla 1: En los ultimos segundos el plano llego a su fin, a 1.14m y no pudo avansar mas en el sig. tiempo, hubo variaciones de distancia y velocidad.

Tabla 2: Casi no hubo variaciones en su velocidad y no termino de cruzar el plano.

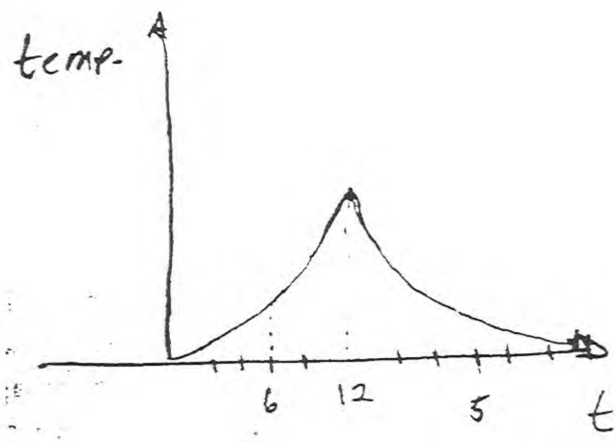
Problema 4

a) 15.1m
b) 1.46s
c) 20.4s
d) 4.0 y 5.01m
e) 6.7 m
f) .052 m/s
g)
h)
i) .066 m/s

* grafica de altura con respecto al tiempo



Problema 5



Trabajo de uno de los integrantes, problema 4

En la tabla que aparece a continuación se registra la altura, con respecto a la Tierra, a que se encontraba, en el instante que en cada caso se indica, una pelota que se lanzó verticalmente hacia arriba. De acuerdo con la información contenida en dicha tabla describan el movimiento de la pelota y contesten específicamente las siguientes preguntas:

V= m/s	Tiempo	Altura
	0	0
19	0.2	3.8
18.05	0.4	7.22
17.06	0.6	10.24
16.075	0.8	12.86
15.1	1.0	15.1
14.11	1.2	16.94
13.14	1.4	18.4
11.16	1.6	19.46
11.17	1.8	20.12
10.2	(2.0)	(20.4)

a) ¿Cuál era la altura de la pelota, un segundo después de haber sido lanzada? 15.1

b) ¿En cuánto tiempo alcanzó 18 metros de altura? 1.37 seg.

c) ¿ Qué distancia recorrió en los primeros dos décimos de segundo? 3.8 m

d) ¿ y en los segundos y terceros *dos décimos de segundo* qué distancia recorrió? 3.42 m y 10.24 m respectivamente

e) ¿ Qué distancia recorrió en el intervalo de tiempo comprendido entre los intantes t = 0.6 seg y t = 1.2 seg? 6.7 m

f) ¿ Con qué velocidad se movió durante el primer segundo? 15.1 m/s

g) ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido durante el segundo segundo? 15 m/s

h) ¿ Y durante los dos segundos, cuál fue la velocidad media? 14.6 m/s

i) En el instante t = 1 seg ¿ cuál era la velocidad de la pelota? 15.1 m/s

j) Bosqueja las gráficas de la altura con respecto al tiempo y de la velocidad con respecto al tiempo.

Fig. 4. **Respuestas del equipo 1 del Laboratorio de Mediciones Eléctricas y Electrónicas**

Problema 1

a) hacia abajo con una aceleración constante.
b) Empieza con una Velocidad cero y empieza a celerar constantemente con respecto al tiempo hasta llegar al final del riel.

Problema 2

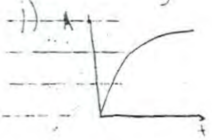
En la tabla se observa que el objeto si va acelerandose conforme avanza el tiempo

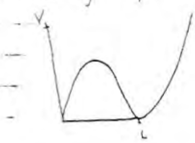
Problema 3

Tabla 1.
A nuestra forma de ver el riel del carrito se puso paralelo al piso, y se le dio un pequeño impulso para que adquiriera velocidad.
Tabla 2
El móvil empieza a correr del lado de la computadora con un angulo de inclinacion muy pequeño y se le da un impulso.

Problema 4

a) 15.1m b) 1.3 sg c) 3.8 m
d) 7.23 y 10.24 sg e) 6.7m f) 15.1 m/sg
g) 5.3 m/sg h) 10.2 m/sg i) 15.1 m/sg
j)





Problema 5

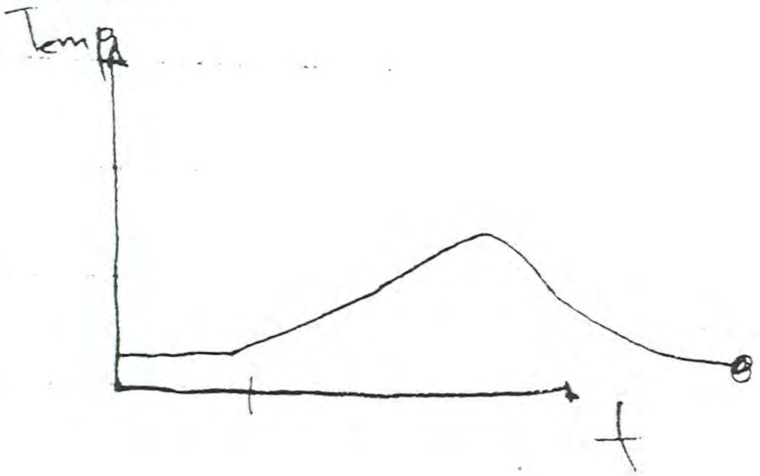


Fig. 5. Respuestas del equipo 2 del Laboratorio de Mediciones Eléctricas y Electrónicas

Problema 1

Es un movimiento lineal con un incremento en la velocidad y la aceleración

Problema 2

El carrito va perdiendo aceleracian debido al ángulo de inclinación.

Problema 3

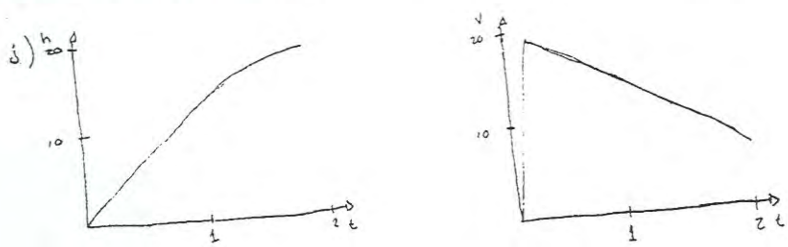
En ambos casos el carrito fue empujado en sentido contrario, el ángulo de inclinación fue más grande para la tabla 3 que para la 2.

Problema 4

a) 15.1 mts, b) 1.35 mts aproximadamente, c) 3.8 mts, d) 7.22 mts y 10.24 mts

e) 6.7 mts, f) 15.1 m/s, g) 10.2 m/s h) 10.2 m/s i) 15 m/s

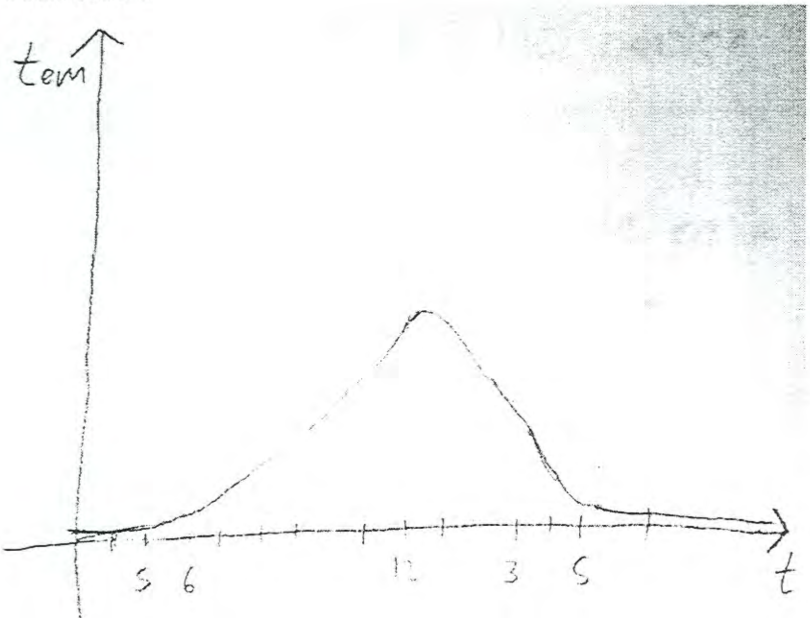
j)



altura vs tiempo

Velocidad vs tiempo

Problema 5



Ejemplo del problema 4

En la tabla que aparece a continuación se registra la altura, con respecto a la Tierra, a que se encontraba, en el instante que en cada caso se indica, una pelota que se lanzó verticalmente hacia arriba. De acuerdo con la información contenida en dicha tabla describan el movimiento de la pelota y contesten específicamente las siguientes preguntas:

Vel	Tiempo	Altura
	0	0
19 m/s	0.2	3.8
18.05 m/s	0.4	7.22
17.06 m/s	0.6	10.24
16.075 m/s	0.8	12.86
15.1 m/s	1.0	15.1
	1.2	16.94
	1.4	18.4
	1.6	19.46
	1.8	20.12
10.2 m/s	2.0	20.4

a) ¿Cuál era la altura de la pelota, un segundo después de haber sido lanzada? 15.1 m/s

b) ¿En cuánto tiempo alcanzó 18 metros de altura? aprox 1.4 s

c) ¿ Qué distancia recorrió en los primeros dos décimos de segundo? 3.8 m

d) ¿ y en los segundos y terceros [illegible] décimos de segundo, qué distancia recorrió? 7.22 ó [illegible] 24

e) ¿ Qué distancia recorrió en el intervalo de tiempo comprendido entre los intantes t = 0.6 seg y t = 1.2 seg? 6.7 m

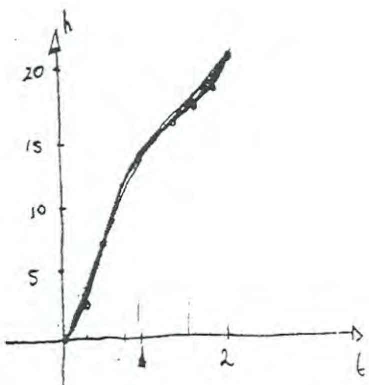
f) ¿ Con qué velocidad se movió durante el primer segundo? $V = d/t = 15.1$ m/s

g) ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido durante el segundo segundo? $20.4/2 = 10.2$ m/s

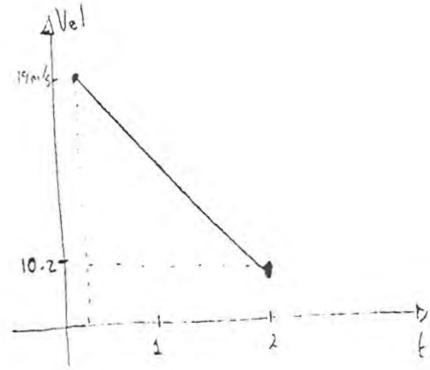
h) ¿ Y durante los dos segundos, cuál fue la velocidad media? 10.2 m/s

i) En el instante t = 1 seg ¿ cuál era la velocidad de la pelota? 15.1 m/s

j) Bosqueja las gráficas de la altura con respecto al tiempo y de la velocidad con respecto al tiempo.



h vs. t



Vel. vs t

ANEXO 4

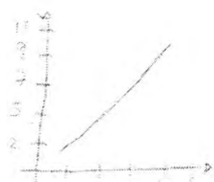
1)
1) la fuerza q se aplica en el extremo
2) la [illegible]
3) la fuerza q tenga el resorte para oponerse a la fuerza
4) la [illegible] del resorte

2) [illegible]

3)

4)

a) [illegible]

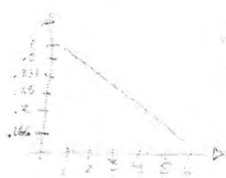


"Y" es igual al Doble [illegible] de X más uno.
"Y" aumenta proporcionalmente

b) $Y = X^2$

[illegible] X [illegible]

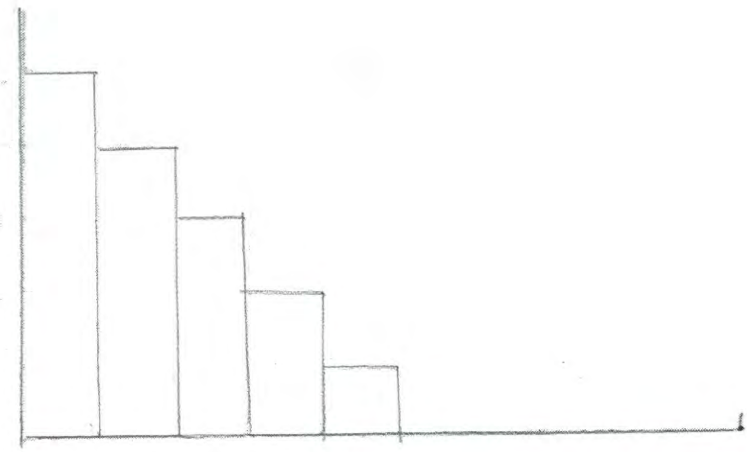
c) $Y = \frac{1}{X}$



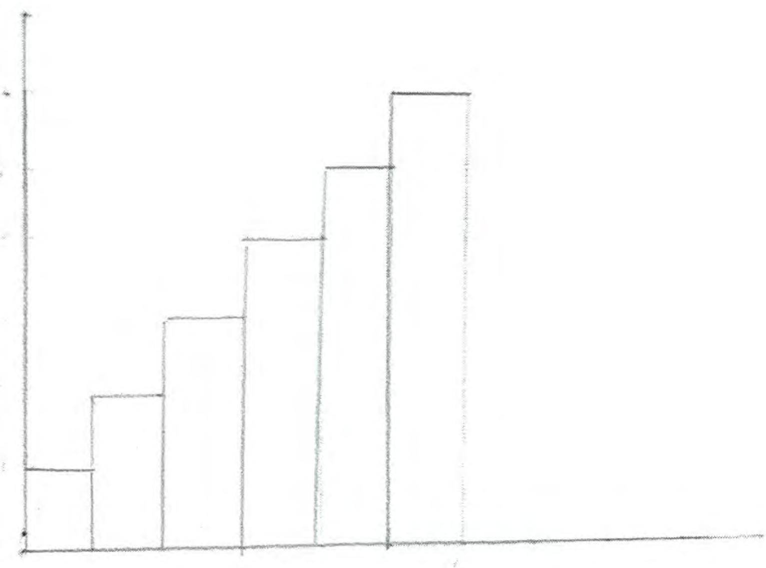
"Y" es igual a la unidad entre el [illegible] "X"
"Y" decrece de (1–∞)

Pregunta # 5

(1)



(2)

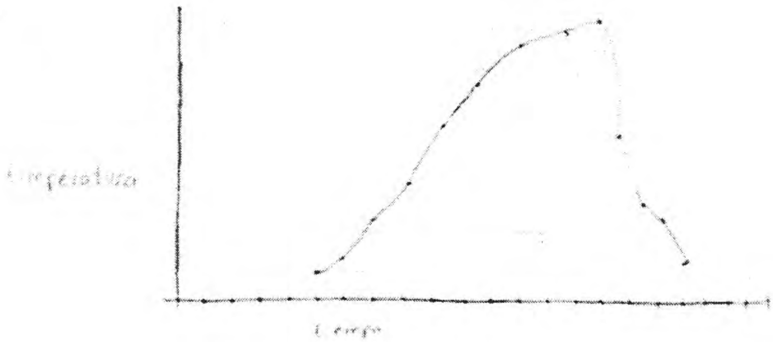


(3)

Problema 1

Dureza del resorte, fuerza aplicada al resorte, tamaño del resorte

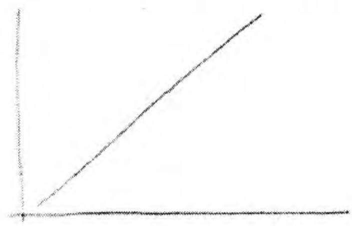
Problema 2



Problema 3

1.- Decreciente, con ritmo de decrecimiento decreciente

2.- Creciente con taza de crecimento constante

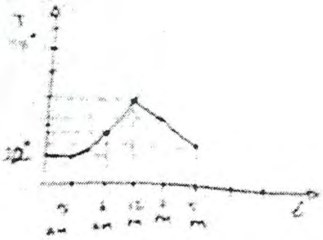


[illegible]

Los factores de los que depende la deformación del resorte pueden ser:

- La fuerza que se aplica
- La rigidez del resorte
- el tiempo que dure la aplicación de la fuerza sobre el resorte

2

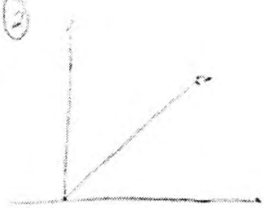


considerando en el problema como mínimo 22°C y como máximo
°C

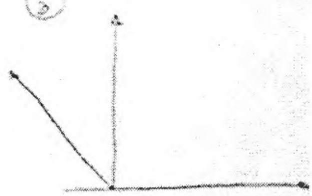
3

1

2



3

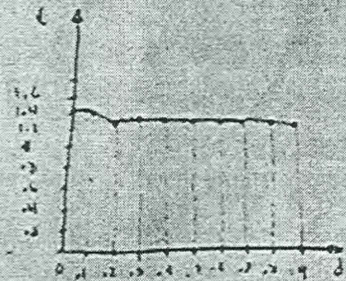


el movil llevara una aceleración constante debido ala friccion del aire.

si la fricción del aire fuera minima y la inclinación fuera mayor el carro tendria una velocidad de forma variable creciente.

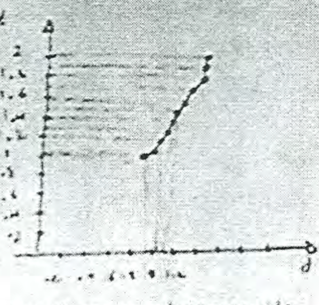
si la precion del aire fuera aumentado o la inclinación del plano disminuyera la velocidad del movil tendria una desaceleración.

6

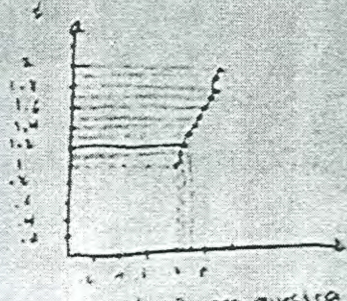


con los valores mostrados en la tabla uno, podemos apreciar como la velocidad del objeto es constante ya que tiene una variación muy insignificante

7



La tabla 2 nos muestra un cambio en donde tiene una aceleracion rapidez variable con respecto al tiempo. El cambio que pudo haber tenido pudo haber sido una inclinación mas prolongada.



La tabla 3 nos muestra una gran desaceleración con respecto ala tabla 2 esto puede ser causado por la disminución del plano de inclinación o aumento en la fricción del aire.

PROBLEMA # 3

- Si la altura está medida en metros, la pelota fué lanzada con bastante fuerza, ya que en 2.0 seg alcanzó una altura de 20.4 mts. [illegible] la fuerza de gravedad.

a):- 15.1 mt.

b):- entre 1.2 y 1.4 mts.

c) - 3.8 mts.

d): en los segundos 2/10 alcanzó 7.22 mts.
en los terceros 2/10 alcanzó 10.24 mts.

e):- 6.9 mts.

f): $t_{pm} = \frac{0.2+0.4+0.6+0.8+1}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$

$d_{pm} = \frac{3.8+7.22+10.24+[illegible]+15.1}{5} = 9.844$

La velocidad con que se movió durante el 1 seg =

$v = \frac{9.844}{0.6} = \boxed{16.406\ m/s}$

g) $t = \frac{1.2+1.4+1.6+1.8+2}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$

$d = \frac{15.74+18.4+19.46+20.02+20.4}{5} = \frac{95.32}{5} = 19.064$

Velocidad media del recorrido durante el segundo segundo =

$v = \frac{19.064}{1.6} = \boxed{11.915\ m/s}$

h) $v = \frac{16.406+11.915}{2}$

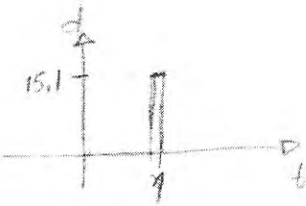
$\boxed{v = 14.16\ m/s}$

CONTROL I, ALUMNO N_0 1

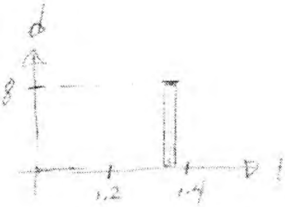
i):- $\boxed{V = 15.1\ m/s}$

j):-

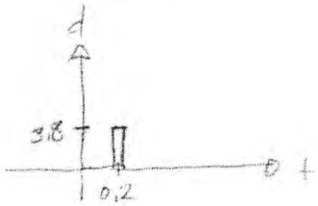
a):-



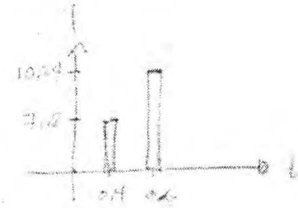
b):-



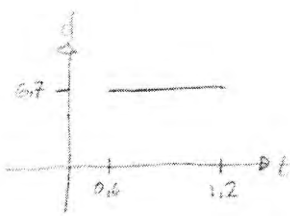
c):-



d):

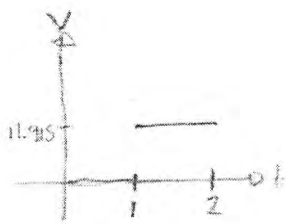


e):-

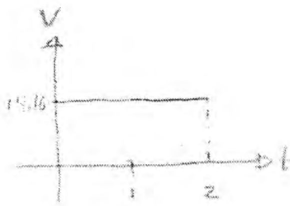


f):-

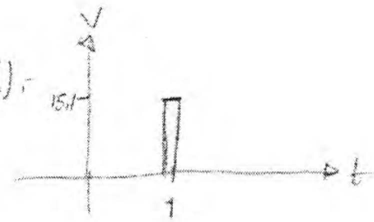
g):-



h):-



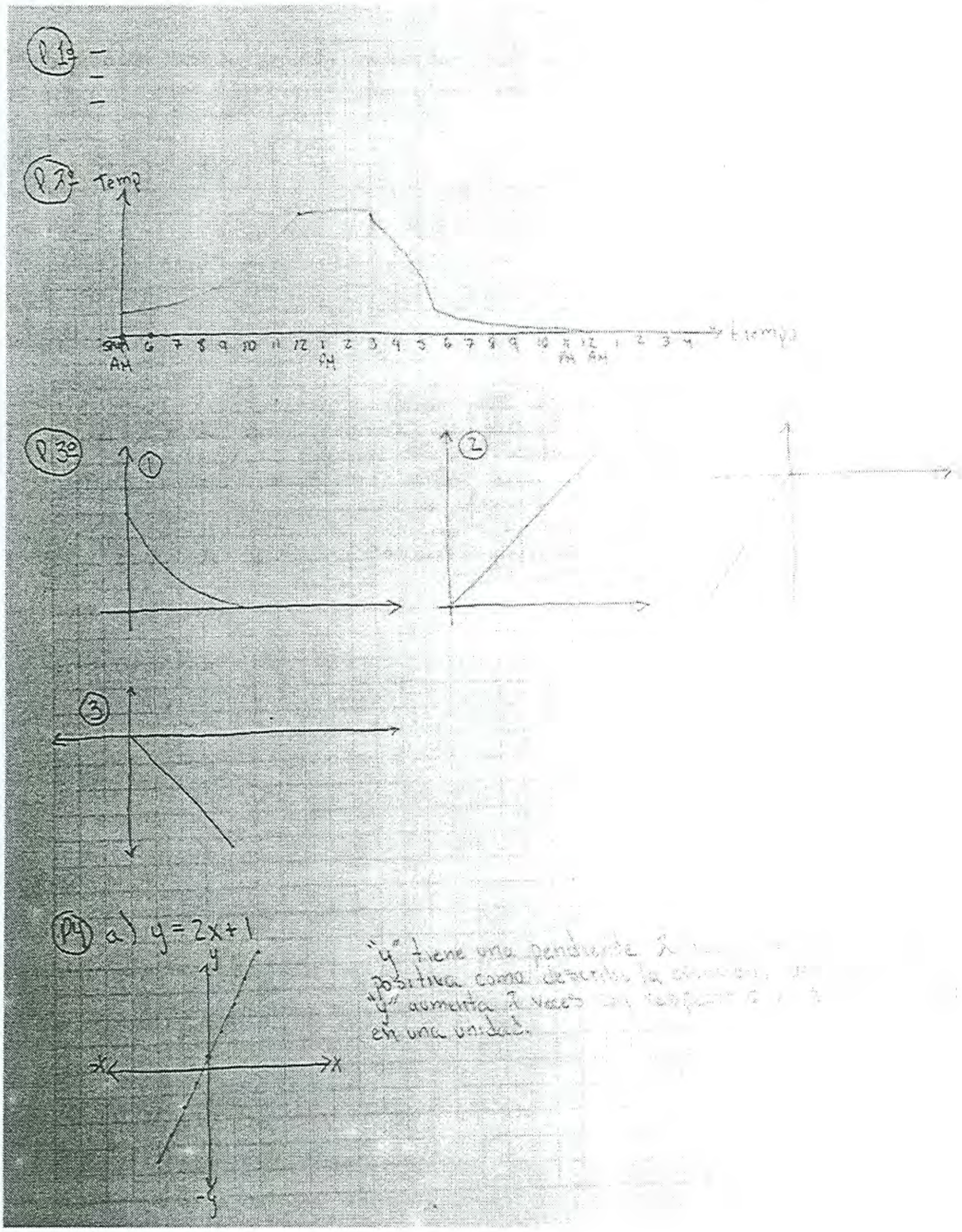
i):-



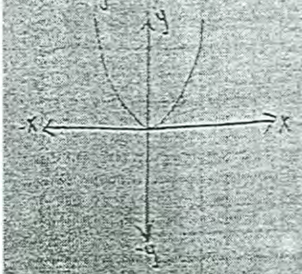
Problema 1.

Se tiene un resorte suspendido por uno de sus extremos. Si en el extremo libre del mismo se aplica una fuerza, éste sufrirá una deformación. ¿De qué factores depende qué tanto se deformará el resorte?. Enlista todos aquellos factores que consideres que influyen.

- De la Constante del resorte
- De la Magnitud de la Fuerza
- Del tiempo durante el cual se aplica la fuerza.

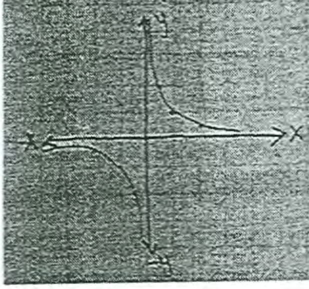


b) $y = x^2$



"y" siempre tiene un valor positivo [illegible] a que es el cuadrado de X,

c) $y = \frac{1}{x}$



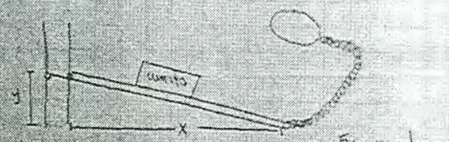
"y" resulta una función asíntota de X como lo muestra la gráfica, la cual [illegible] para valores positivos cercanos [illegible] infinito para valores negativos de "X", "y" tiende a $-\infty$.

para valores cercanos a [illegible] "y" tiende a cero

Problema 5

El movimento del carrito tendrá una velocidad diferente a medida que avance debido a la pendiente del riel.

El carrito se moverá más rápido cuando viaja en [illegible] es decir, cuando su posición de inicio sea [illegible].

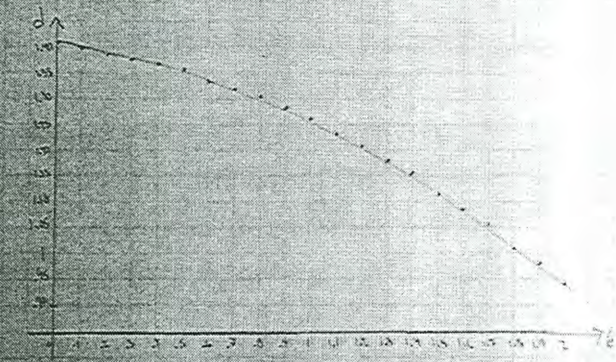


$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Fig. No. 1

La velocidad del carrito aumentará linealmente con el tiempo [illegible] carrito tenga una posición de inicio muy cercana al eje y.

Problema 6



La gráfica [illegible] el movimiento [illegible] [illegible] la gráfica [illegible] tablas, la posición de inicio del carrito está cerca del eje [illegible]

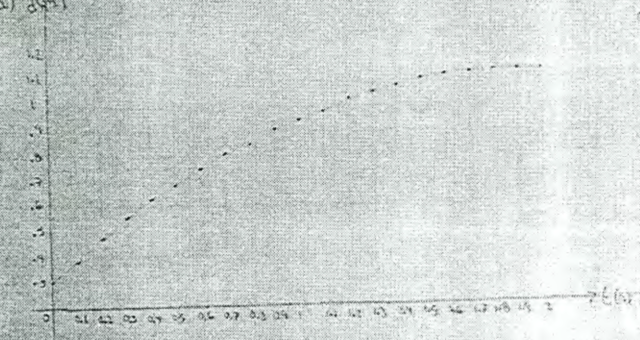
[illegible]

La velocidad aumenta linealmente con el tiempo y por lo tanto, [illegible] aumenta el tiempo el carrito recorre mayor distancia en un [illegible] de tiempo (0.1 s).

NOTA: Se trato de encontrar una ecuación que describiera el problema en [illegible] tiempo pero no se encontro, además no se [illegible] de aire (se es afectado por la fricción, gravedad, fuerza, etc). [illegible] condiciones q' se toman en cuenta para plano inclinado [illegible] en dos dimensiones

Problema 7

a) d(m)



Como muestra la gráfica, se tienen las condiciones iniciales $d_0 = 0.31$, $t = 0$

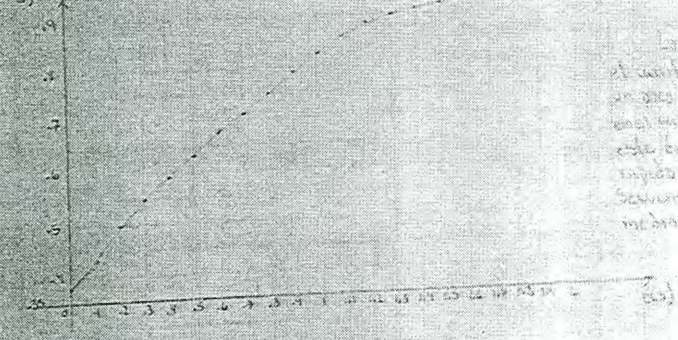
$d_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

En este problema la posición inicial del cuerpo es en $d = 0.31$ m

Por lo tanto, la velocidad disminuye a medida que aumenta el tiempo (debido a la aceleración negativa [illegible] por la fuerza de gravedad) lo que trae como consecuencia que al aumentar el tiempo, el carro recorra una distancia menor en el mismo periodo de tiempo. También se observa que el carrito se detiene en el instante $t = 1.9$ (o al menos su velocidad es tan baja que parece haberse detenido).

Problema 7

f) d(m)



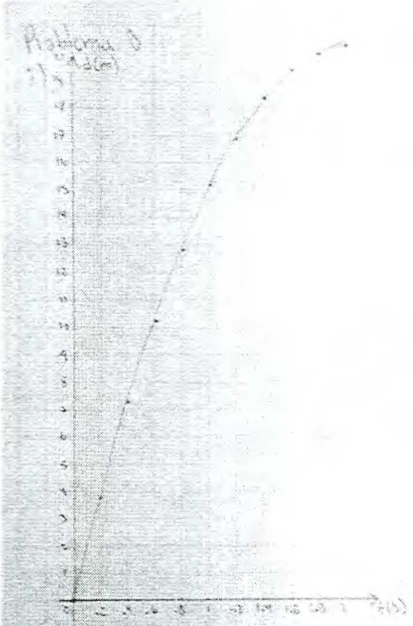
En este problema $d_0 = 0.33$ m, $t = 0$ s

En [illegible] el carrito recorre una distancia [illegible] mayor [illegible] en el inciso anterior, por lo que este tiende a disminuir más rápido su velocidad. En consecuencia, su velocidad promedio es menor.

La gráfica muestra que la distancia que recorre el carro es menor en el mismo periodo de tiempo conforme el mismo aumenta. Estas condiciones traen como consecuencia que el carro recorre una distancia menor que en el inciso anterior.

CONTROL I, ALUMNO N_0 4

Problema 1



a) R: 15.1 metros
b) R: aprox. 1.3 s.
No recuerdo fórmula para
obtener velocidad.

c) R: 3.8m
d) Segundos dos décimos d= 7.22m
terceros dos décimos d=10.24m
e) 6.7m
t=1.2s t=0.6s
16.94 − 10.24 = 6.7m
f) 15.1 m/s en promedio
g) 5.3 m/s en promedio
h) 10.2 m/s en promedio
i)
j) No recuerdo como obtener la velo-
cidad instantánea.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ávila Godoy, Ramiro. Tesis Doctoral (1998).
2. Castorina, José Antonio (1998). Piaget en la educación. Los problemas de una teoría del aprendizaje: una discusión crítica de la tradición psicogenética.
3. Coll, Cesar. Piaget en la educación. La teoría genética y el conocimiento en el aula. Ed. Paidós Educador (1998).
4. De las Fuentes Lara, Maximiliano, Tesis de Maestría (1998).
5. Dennis G. Zill. Cálculo con Geometría Analítica, (1985).
6. Dubinsky, Ed Título *THE CONCEPT OF FUNCTION. ASPECTS OF EPISTEMOLOGY AND PEDAGOGY.* (1992).
7. Duval, Raymund (1998). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II.
8. Encinas Bringas, Álvaro (2001), Tesis de Maestría, página 197, inciso f).
9. Farfán, Rosa María. Perspectivas y Métodos de Investigación en Matemática Educativa, p.66. Serie: Antologías. Número 2.
10. Farfán, Rosa María. Perspectivas y Métodos de Investigación en Matemática Educativa, p.66. Serie: Antologías. Número 2.
11. Hitt Espinoza, Fernando y Torres Orozco, Arturo. VISUALIZANDO LA FUNCIÓN CON LA PC (1994).
12. Hitt Espinoza, Fernando (1995). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. Educación Matemática. Vol. 7 – No 1. Abril.
13. Louis Leithold. EL CÁLCULO (1998), séptima edición.
14. Moreno Armella, Luis. COGNICIÓN, MEDIACIÓN Y TECNOLOGÍA. Matemática Educativa, CINVESTAV
15. Ontoria, Antonio (1992). Mapas Conceptuales. Una Técnica para Aprender. Ed. narcea.
16. Ortiz Huendo, Juan. Matemáticas I, carta descriptiva (Plan 1995-1).

17. Osorio Alcaraz, Laura y Lara Chávez Héctor. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ALGUNOS ESTUDIANTES DE LOS NIVELES MEDIO SUPERIOR Y SUPERIOR. Memoria del V simposio internacional sobre investigación en Matemática Educativa (pp. 165-171).