

Estudio perturbativo de la dispersión de partículas en las teorías ϕ^4 y *sigma lineal*

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora para el Grado de Maestro en Ciencias (Física) por

Luis Juan Ortiz Valdivia

Marzo de 2010

Resumen

En este trabajo hacemos una presentación de los temas básicos de la Teoría Cuántica de Campos, necesarios para el cálculo de observables relevantes en experimentos de altas energías. Concretamente desarrollamos las técnicas diagramáticas de Feynman en teoría de perturbaciones y las aplicamos al cálculo de los elementos de la matriz de dispersión de partículas interactuantes, en el contexto de las teorías ϕ^4 y *sigma lineal*. La teoría ϕ^4 es relevante en la descripción actual de algunas interacciones contempladas en el Modelo Estándar de las Partículas Elementales y la teoría *sigma lineal* para campos escalares que utilizamos en este trabajo, proporciona un escenario didáctico para explorar la simetría y el rompimiento de la misma.

Abstract

In this work we provide a presentation of the basic topics in Quantum Field Theory which are needed for the calculation of observables that are relevant in high energy experiments. More precisely, we develop Feynman diagrammatic techniques within perturbation theory and we use them to calculate scattering matrix elements for particles interacting in the context of ϕ^4 and *sigma linear* theories. The ϕ^4 theory is relevant in the description of some interactions within the Standard Model of Elementary Particles. The *sigma linear* theory for scalar fields that we use in this work, provides a didactic scenario to explore the symmetry and its spontaneous breaking.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Estudio perturbativo de la dispersión de partículas en las teorías ϕ^4 y *sigma lineal*

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora
para la obtención del Título de
Maestro en Ciencias (Física)

por

Luis Juan Ortíz Valdivia



Departamento de Investigación en Física

Universidad de Sonora

Marzo de 2010

Dedicatoria

*D*edico este trabajo a quien desde temprana edad me enseñó que el amor, el esfuerzo, la dedicación, la honestidad... son las sobrevivientes. A Esthela, mi madre.

lo bello
de este transcurrir
del tiempo
es que el viento
nunca mece
las hojas del árbol
de la misma manera

Agradecimientos

Esta es mi primera tesis de grado académico. Sin duda en el transcurso de su elaboración aprendí no sólo cosas nuevas académicamente importantes, sino también mayor claridad sobre el conjunto de conocimientos adquiridos con anterioridad. Esto significó además de un esfuerzo personal, la colaboración necesaria de quienes han estado en mi entorno académico. El aprendizaje desde la más mínima observación hasta la de mayor elaboración, fue sin duda un proceso interactivo. Allí reside la belleza de todo este tiempo que ahora culmina con un trabajo que espero pueda alimentar la curiosidad de otros.

Por todo ello, agradezco enormemente a aquellos con quienes he estado involucrado académicamente y en particular, en este trabajo de tesis, a quien dirigió el proceso del mismo: Maria Elena Tejeda Yeomans.

Finalmente agradezco a la Universidad de Sonora y al CONACyT por todo lo brindado para mi formación académica.

Contenido

| | |
|--|-----------|
| Lista de Figuras | IV |
| Introducción | 1 |
| 1 Antecedentes | 4 |
| 1.1. Notación Relativista | 4 |
| 1.2. Ecuación de Klein-Gordon | 6 |
| 1.3. Teoría Clásica de Campos Escalares | 6 |
| 2 Cuantización de la teoría: campos escalares libres | 9 |
| 2.1. Cuantización Canónica | 9 |
| 2.2. Operadores de creación y aniquilación | 11 |
| 2.3. Espectro de Energías | 13 |
| 2.4. El propagador de campos escalares | 15 |
| 2.4.1. Propagación temporaloide | 16 |
| 2.4.2. Propagación espacialoide | 17 |
| 3 Métodos perturbativos en la teoría: campos escalares interactuantes | 21 |
| 3.1. Campos interactuantes | 21 |
| 3.2. Estudio perturbativo de la teoría interactuante | 22 |
| 3.2.1. Estado base de la teoría interactuante | 29 |
| 3.3. Funciones de correlación y el teorema de Wick | 31 |
| 3.3.1. Función de correlación de dos puntos | 33 |
| 3.3.2. Función de correlación de tres puntos | 35 |
| 3.3.3. Función de correlación de cuatro puntos | 36 |
| 3.3.4. El teorema de Wick | 38 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Dispersión en la teoría ϕ^4 | 40 |
| 4.1. | Diagramas de Feynman: campos no interactuantes | 40 |
| 4.2. | Diagramas de Feynman: campos interactuantes | 41 |
| 4.2.1. | Reglas de Feynman | 47 |
| 4.2.2. | Exponenciación de diagramas desconectados | 50 |
| 4.2.3. | Burbujas de vacío | 54 |
| 4.3. | Sección de dispersión y la matriz S | 55 |
| 4.3.1. | Sección de dispersión | 56 |
| 4.3.2. | La matriz S | 57 |
| 4.4. | Cálculo de probabilidad de dispersión | 60 |
| 4.4.1. | Sección transversal para procesos dos a dos | 64 |
| 4.4.2. | Cálculo diagramático de los elementos de la matriz S | 66 |
| 4.4.3. | Elementos de la matriz S en la teoría ϕ^4 | 67 |
| 4.4.3.1. | Contribución a orden más bajo | 68 |
| 4.4.3.2. | Contribución a primer orden | 68 |
| 4.4.3.3. | Contribución a segundo orden | 73 |
| 5 | Dispersión en la teoría σ lineal | 80 |
| 5.1. | Teoría ϕ^4 con N campos reales ϕ^i masivos | 80 |
| 5.1.1. | Teoría de perturbaciones y reglas de Feynman | 81 |
| 5.1.2. | Sección de dispersión para algunos procesos | 83 |
| 5.1.2.1. | $\phi^1\phi^1 \longrightarrow \phi^1\phi^1$ | 83 |
| 5.1.2.2. | $\phi^1\phi^2 \longrightarrow \phi^1\phi^2$ | 84 |
| 5.1.2.3. | $\phi^1\phi^1 \longrightarrow \phi^2\phi^2$ | 84 |
| 5.1.3. | Análisis de $V(\phi^i)$ | 85 |
| 5.1.3.1. | Caso $m^2 > 0$ | 85 |
| 5.1.3.2. | Caso $m^2 < 0$ | 86 |
| 5.2. | Teoría ϕ^4 con $N - 1$ campos reales Π^i sin masa y un campo real σ masivo | 88 |
| 5.2.1. | Sección de dispersión | 92 |
| 5.2.1.1. | $\Pi^i(p_1)\Pi^j(p_2) \longrightarrow \Pi^k(p_3)\Pi^l(p_4)$ | 93 |
| 5.2.2. | Reglas de Feynman | 94 |
| 5.3. | Teoría sigma lineal | 96 |

| | |
|---|------------|
| Conclusiones | 100 |
| A Notación relativista | 101 |
| A.1. Unidades naturales | 101 |
| A.2. La métrica | 101 |
| B Ecuaciones de Euler-Lagrange | 104 |
| C Relaciones de conmutación | 108 |
| C.1. Conmutadores de $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$ | 108 |
| C.2. El Hamiltoniano H en términos de $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$ | 109 |
| D Operador de evolución temporal | 114 |
| D.1. Representación en serie | 114 |
| D.2. Generalización y propiedades | 116 |
| E Teorema de Wick | 120 |
| F Método de Cardano | 124 |
| Bibliografía | 126 |

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Propagación temporaloide. | 16 |
| 2.2. Propagación espacialoide. | 18 |
| 2.3. Transformación de Lorentz para $D(x - y)$ a $D(y - x)$ | 20 |
| 4.1. Un blanco de partículas en reposo con una densidad volumétrica $\rho_{\mathcal{A}}$ y un haz de partículas avanza a una velocidad v con una densidad volumétrica $\rho_{\mathcal{B}}$ | 56 |
| 4.2. Paquetes de ondas \mathcal{B} distribuidas uniformemente dentro de un parámetro de impacto \vec{b} y desplazándose hacia un paquete de ondas \mathcal{A} en reposo. | 58 |
| 4.3. Paquetes de ondas \mathcal{B} dispersados, cada uno con un momento \vec{p}_i | 59 |
| 5.1. Potencial $V(\phi^2)$ para los casos $m^2 < 0$, línea continua y $m^2 > 0$, línea discontinua. | 86 |
| 5.2. Potencial $V(\phi)$ para el caso $m^2 = -\mu^2 < 0$ | 87 |
| 5.3. Potencial $V(\phi)$ para el caso $m^2 = -\mu^2 < 0$, rotando los N campos iguales. | 88 |
| 5.4. Potenciales $V(\sigma + v)$ y $V(\Pi)$ desplazados uno con respecto al otro. | 91 |
| 5.5. Potencial $V + \Delta V$ | 99 |

Introducción

La Teoría Cuántica de Campos (TCC) es esencial en el estudio de la física de partículas elementales. Pero además los métodos que aquí se desarrollan, con unas pequeñas modificaciones, son los mismos que juegan un papel central en áreas recientes de la física atómica, física nuclear y física de la materia condensada. Básicamente, la TCC es la aplicación de la Mecánica Cuántica a sistemas dinámicos de campos, así como la Mecánica Cuántica misma, trata sobre la cuantización de sistemas dinámicos de partículas.

En la física de partículas nos interesa estudiar procesos que ocurren en escalas muy pequeñas (sistemas cuánticos) y a altas energías (sistemas relativistas) utilizando TCC. La TCC ha resultado del trabajo de muchos y muchas, al observar que no es suficiente construir una teoría que surge del matrimonio de la Mecánica Cuántica y la Relatividad, para describir los fenómenos de la física de partículas. La Mecánica Cuántica Relativista ha demostrado ser una teoría que nos ayuda a estudiar este tipo de fenómenos con cierta perspectiva, sin embargo, en diferentes ámbitos de dicha teoría surgen inconsistencias que no permiten hacer una descripción completa de sistemas de muchas partículas. La necesidad de una teoría de muchas partículas se vuelve evidente al notar que (para más detalles ver por ejemplo [1, 2, 4]):

- Las ecuaciones de onda relativistas para una partícula tales como la ecuación de Klein-Gordon o la ecuación de Dirac, generan estados con energía negativa y, en el caso de la primera, densidades de probabilidad negativas.
- No podemos asumir que cualquier proceso relativista puede ser explicado en términos de una teoría de partícula única, ya que en estos procesos se tiene la creación de pares partícula-antipartícula.
- Aún cuando no hay la energía disponible para la producción de pares partícula-antipartícula, en teoría de perturbaciones a segundo orden por ejemplo, aparecen estados intermedios (por un tiempo muy corto, i.e. *partículas virtuales*) de muchas partículas.
- Como veremos en la sección 2.4, la necesidad de una teoría de muchas partículas surge,

de manera menos obvia, de consideraciones de causalidad: la amplitud de propagación de una partícula libre en la Mecánica Cuántica No Relativista es no nula para todo tiempo y posición, lo cual es una violación de causalidad. Más aún, cuando consideramos la propagación fuera del cono de luz en el contexto de la Mecánica Cuántica Relativista, se sigue violando causalidad.

La TCC provee de un esquema en el cual se pueden estudiar estados de muchas partículas y transiciones entre estados de diferentes números de partículas. También resuelve el problema de causalidad y explica la relación entre espín y estadística. Es importante enfatizar, dado que nuestro trabajo se centra en ello, que la TCC provee de las herramientas necesarias para calcular secciones de dispersión, tiempos de vida media y otras cantidades que se pueden comparar directamente con el experimento.

En las décadas de los 60s y 70s, emergieron un conjunto de TCCs que describen todas las interacciones de partículas elementales, excepto la gravedad. A este conjunto de TCCs es a lo que ahora se le denomina el *Modelo Estándar de las Partículas Elementales* (MEPE). Desde su conformación oficial en 1978, el MEPE ha superado todas las pruebas experimentales que se han realizado hasta la fecha. Con el advenimiento de experimentos de altas energías como los que se realizan este año en CERN y en Fermilab, el MEPE seguramente será extendido. Dichos experimentos rompen las barreras establecidas en años anteriores, de energía de centro de masa y de estadística en los procesos de dispersión de hadrones (tales como los protones), de átomos y núcleos pesados. Este año los datos experimentales recopilados en dichos experimentos, nos darán acceso a un nuevo régimen en la física y verificarán ó refutarán algunas extensiones propuestas al MEPE. Hay algunas TCCs que han probado ser útiles en la descripción de interacciones en el contexto del MEPE y de dichas extensiones propuestas. Como veremos en la sección 2.3, en este trabajo describiremos la interacción de *bosones* (partículas que obedecen la estadística de *Bose-Einstein*) utilizando campos cuánticos escalares reales en el contexto de las teorías ϕ^4 y *sigma lineal*.

Escogimos estas teorías porque precisamente queremos hacer una presentación de las herramientas básicas de la TCC en cuanto al cálculo de observables tales como la sección de dispersión con métodos perturbativos. Estas teorías de interacción simples pero fenomenológicamente relevantes, nos permiten evidenciar la mejor metodología a seguir en estos temas. De hecho, el estudio de la dinámica de fermiones con estas herramientas, una vez que se tiene cubierto el caso de los bosones, se vuelve un poco más sencilla.

La teoría ϕ^4 es relevante en la descripción de algunas de las interacciones contempladas en el MEPE. De hecho dichas interacciones son similares a las que se describen en la sección 4.2 del presente trabajo. En este contexto, el estudio de la teoría ϕ^4 y sus variantes, nos permiten entrar en discusiones sobre mecanismos de rompimiento espontáneo de la simetría que no introducen nuevos parámetros al modelo y que preservan las propiedades fundamentales de la teoría. Este tema es medular en la descripción actual de la generación de masa de las partículas elementales en el MEPE. Por otro lado, la teoría *sigma lineal* para campos escalares que utilizamos en este trabajo, exhibe las propiedades básicas del *modelo sigma lineal* para fermiones y proporciona un escenario didáctico para explorar la simetría y el rompimiento de la misma.

La presentación de la discusión y de los resultados la llevaremos a cabo de la siguiente manera: en los Capítulos 1 a 2 daremos una breve presentación de los antecedentes básicos tales como notación y nociones de teoría clásica de campos y cuantización canónica. Estos temas están discutidos ampliamente en la mayoría de los textos introductorios a la teoría cuántica de campos (ver por ejemplo [1, 2, 3, 4, 5]). En el Capítulo 3 damos una presentación original* del tema de funciones de correlación y el Teorema de Wick, que también está presente en la literatura, pero que consideramos no se discute con tal detalle, a pesar de lo relevante de su naturaleza para la descripción de campos interactuantes. Finalmente en los Capítulos 4 y 5, presentamos los resultados obtenidos del análisis perturbativo de las interacciones de campos escalares bajo potenciales tipo ϕ^4 y *sigma lineal*. Más aún, en este último capítulo complementamos el estudio con un análisis de la evolución del potencial a medida que nos acercamos a el modelo *sigma lineal*, con el propósito de exhibir el mecanismo de rompimiento espontáneo de la simetría.

La presentación del trabajo realizado como se explica anteriormente, es un reflejo de nuestro interés en enfatizar ciertos aspectos y resultados en un contexto que permite la iniciación a la TCC basada en ciertos antecedentes de Teoría Clásica de Campos y Mecánica Cuántica Relativista. Sin embargo, para los lectores que deseen una lectura alternativa en donde se parte de la construcción de observables, sugerimos lo siguiente: comenzar la lectura del trabajo a partir de la sección 4.3 y utilizar los capítulos previos como referencia cuando se implementen los cálculos relevantes en el análisis de la dispersión tanto en el contexto de la teoría ϕ^4 como en la teoría *sigma lineal*.

*Presentada en la sesión de posters de la *XIII Mexican School on Particles and Fields*, organizada por la División de Partículas y Campos de la Sociedad Mexicana de Física

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo establecemos los antecedentes necesarios para construir una teoría cuántica de campos. Primeramente planteamos las unidades y la notación relativista que usamos en este trabajo. A continuación damos un breve resumen de teoría clásica de campos sobre lo que consideramos relevante para nuestro trabajo en los siguientes capítulos. Concretamente estableceremos la teoría clásica libre de Klein-Gordon ya que en los siguientes capítulos la cuantizamos y la usamos para describir la dinámica de los campos escalares.

1.1. Notación Relativista

A lo largo de este estudio utilizamos unidades naturales (ver Apéndice A) donde $\hbar = c = 1$ y asumimos que el *cuadrivector contravariante* x^μ del *espaciotiempo* con $\mu = 0, 1, 2, 3$ es

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Es importante recordar que cuando cambiamos nuestra descripción de un sistema de referencia inercial S a otro S' , las coordenadas específicas de un evento cambian, pero hay una combinación de dichas coordenadas que no cambia: la de los *invariantes*, i.e.

$$I \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2.$$

Para describir *invariantes* introducimos la métrica $g_{\mu\nu}$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que nos permite escribir el invariante I como

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

donde se asume la convención de Einstein para la suma sobre índices repetidos.

A raíz de lo anterior, definimos el *cuadrivector covariante* x_μ

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$$

con el cual, el invariante I se escribe como

$$I = x_\mu x^\mu = x^2.$$

Similarmente introducimos notación para

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

que cumplen con la transformación

$$\partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial^\nu.$$

Con lo anterior podemos construir el operador derivada de segundo orden e invariante de Lorentz

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square$$

que es el operador de D'Alembert.

Por otro lado definimos el *cuadrivector de momenergía* como

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \vec{p}) \\ p_\mu &= (E, -p_x, -p_y, -p_z) = (E, -\vec{p}), \end{aligned}$$

y su magnitud al cuadrado la podemos obtener a partir de lo anterior

$$\begin{aligned} p^2 &= p_\mu p^\mu \\ &= E^2 - |\vec{p}|^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Además sabemos que la energía total para un sistema relativista es

$$E^2 = m^2 + |\vec{p}|^2 \tag{1.2}$$

donde m es la masa en reposo. Entonces de (1.1) y (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} E^2 - |\vec{p}|^2 &= m^2 \\ p^2 &= m^2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.2. Ecuación de Klein-Gordon

Dado que en este estudio estamos interesados en describir la dinámica de campos escalares, es necesario partir de la construcción de una ecuación relativista para una partícula sin spin o *partícula escalar*. Como la partícula no tiene spin, la función de onda solo tiene una componente y la denotamos por ϕ .

De la ecuación (1.2) sabemos cual es la energía total de un sistema relativista clásico pero ahora queremos apelar al principio de correspondencia

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} &\longrightarrow -i\nabla \end{aligned}$$

para obtener a partir de (1.1), lo siguiente

$$\begin{aligned} p^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \\ &= -\square. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Es precisamente de la correspondencia que lleva a (1.4) y de la relación entre la energía total del sistema relativista y la masa en reposo en (1.3), de donde surge la siguiente ecuación de onda de Klein-Gordon de la Mecánica Cuántica Relativista

$$(\square + m^2)\phi = 0 \tag{1.5}$$

donde todos los términos son invariantes de Lorentz.

1.3. Teoría Clásica de Campos Escalares

La cantidad fundamental de la teoría clásica de campos es la acción,

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi),$$

escrita como la integral espacial de la densidad Lagrangiana \mathcal{L}^* que depende de las coordenadas generalizadas del sistema: el campo ϕ y sus derivadas $\partial_\mu\phi \equiv \partial\phi/\partial x^\mu$.

El criterio para tener una acción estacionaria o mínima está dado por el principio de mínima acción. Este principio nos dice que la trayectoria seguida por un sistema físico para moverse en

*ya que la Lagrangiana L de la teoría es $L = \int \mathcal{L}d^3x$

el espaciotiempo, es aquella que hace mínima la acción S . Entonces, cuando la variación de la acción toma el valor extremal de cero en un intervalo de tiempo

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x = 0$$

se cumple que (ver Apéndice B)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (1.6)$$

que es la ecuación de movimiento o ecuación de Euler-Lagrange del sistema descrito por \mathcal{L} .

Entonces para obtener la ecuación de movimiento de Klein-Gordon correspondiente a un sistema clásico descrito por una densidad Lagrangiana, proponemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2, \quad (1.7)$$

que contiene un término de energía cinética y un término de masa, ϕ es un campo escalar real y usamos la notación $(\partial_\mu \phi)^2 \equiv \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$.

Dada la densidad Lagrangiana en (1.7), calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= \partial^\mu \phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -m^2 \phi \end{aligned}$$

que al sustituirlas en (1.6) y usando (1.4), nos permite obtener la ecuación de movimiento correspondiente a la densidad Lagrangiana (1.7), la ecuación de Klein-Gordon (1.5)

La formulación Lagrangiana en teoría de campos es muy útil en la descripción de la dinámica de sistemas relativistas porque en dicho esquema todo es explícitamente invariante de Lorentz. En la práctica son las densidades Lagrangianas las que usaremos para hacer nuestros cálculos.

Sin embargo, la formulación Hamiltoniana de la teoría clásica de campos nos permitirá hacer la transición a la teoría cuántica de campos de una manera didáctica y fácil. En este contexto la densidad Hamiltoniana es **

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.8)$$

donde

$$\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (1.9)$$

** porque la Hamiltoniana H del sistema es $H = \int \mathcal{H} d^3x$

y π es la *densidad de momento* conjugado a ϕ .

La densidad Hamiltoniana (1.8) correspondiente a la densidad Lagrangiana que describe el campo de Klein-Gordon (1.7), se obtiene observando que en este caso

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (1.10)$$

que en (1.8) nos dá

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2] + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2 \phi^2] \end{aligned}$$

o bien usando (1.10), tenemos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (1.11)$$

que es la densidad Hamiltoniana que describe la dinámica del campo de Klein-Gordon. Vemos que los primeros dos términos son de energía debida al movimiento del campo y el tercero es debido a la masa del campo.

Capítulo 2

Cuantización de la teoría: campos escalares libres

Dados los antecedentes presentados en el capítulo anterior, procedemos a realizar la cuantización canónica de la teoría que describe campos escalares que se propagan libremente. Una vez realizado lo anterior, construiremos los operadores de creación y aniquilación y daremos el espectro de la teoría. Finalmente, estudiaremos el propagador de la teoría y verificaremos su consistencia en la descripción de propagación de campos cuánticos relativistas.

2.1. Cuantización Canónica

En el capítulo 1 se discutió brevemente la teoría clásica del campo real de Klein-Gordon y vimos que su dinámica esta descrita por una densidad Lagrangiana dada por (1.7) que nos permitió obtener la ecuación de movimiento en (1.5).

Para cuantizar la teoría realizamos el procedimiento que se sigue para cualquier otro sistema dinámico: promovemos ϕ y π a operadores y les imponemos relaciones de conmutación adecuadas. Entonces para el campo ϕ y la densidad de momento π canónicos de Klein-Gordon, imponemos las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales (RCTI):

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] &= [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0 \\ [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde hemos descrito a los operadores en el esquema de Heisenberg con la dependencia temporal explícita a través de

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(\vec{x}, t) = e^{iHt} \mathcal{O}(\vec{x}) e^{-iHt}. \quad (2.2)$$

donde \mathcal{O} es tanto ϕ como π , quienes satisfacen la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$[\mathcal{O}, H] = i\dot{\mathcal{O}}, \quad (2.3)$$

que nos permite descubrir la evolución temporal de dichos operadores.

Por lo anterior, el Hamiltoniano H y cualquier otra función que depende de ϕ y de π también se promueven a operadores. Pero además considerando la RCTI impuestas debemos de tener una descripción de la dinámica, autoconsistente. En el capítulo anterior descubrimos la ecuación de movimiento de Klein-Gordon para el campo ϕ . Ahora, después del proceso de cuantización, ¿qué nos permitirá describir la dinámica del campo de Klein-Gordon?

A continuación descubriremos la dependencia temporal de ϕ y de π , utilizando (1.8) y (2.1). Estudiemos primero $[\phi, H]$, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), H(t)] &= \int d^3y [\phi(\vec{x}, t), \mathcal{H}(\vec{y}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)^2 + (\nabla\phi(\vec{y}, t))^2 + m^2\phi^2(\vec{y}, t)]. \end{aligned}$$

Los últimos dos términos de la densidad Hamiltoniana son funciones del campo, entonces los conmutadores con él mismo son cero y tenemos

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), H(t)] &= \frac{1}{2} \int d^3y \{ \pi(\vec{y}, t) [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] + [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] \pi(\vec{y}, t) \} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y \{ 2i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \pi(\vec{y}, t) \} \\ &= i \pi(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Pero en la teoría de Klein-Gordon $\pi = \dot{\phi}$, entonces

$$[\phi(\vec{x}, t), H(t)] = i\dot{\phi}(\vec{x}, t)$$

que es precisamente la ecuación de Heisenberg para el campo de Klein-Gordon.

De manera análoga usamos (1.8) y (2.1) para estudiar el conmutador del Hamiltoniano con la densidad de momento canónico π

$$\begin{aligned} [\pi(\vec{x}, t), H(t)] &= \int d^3y [\pi(\vec{x}, t), \mathcal{H}(\vec{y}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)^2 + (\nabla\phi(\vec{y}, t))^2 + m^2\phi^2(\vec{y}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y \left\{ \nabla_{\vec{y}}\phi(\vec{y}, t) \cdot \nabla_{\vec{y}}[\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] + \nabla_{\vec{y}}[\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] \cdot \nabla_{\vec{y}}\phi(\vec{y}, t) \right. \\ &\quad \left. + m^2\phi(\vec{y}, t)[\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] + m^2[\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)]\phi(\vec{y}, t) \right\} \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación $\nabla \equiv \nabla_{\vec{y}}$ para recordar explícitamente que el gradiente solo actúa sobre el operador de campo $\phi(\vec{y}, t)$, lo cual nos facilita algunos procedimientos algebraicos. Con

esto le damos seguimiento a la expresión anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [\pi(\vec{x}, t), H(t)] &= -i \int d^3y \left\{ \nabla_{\vec{y}}\phi(\vec{y}, t) \cdot \nabla_{\vec{y}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + m^2\phi(\vec{y}, t)\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \right\} \\ &= -im^2\phi(\vec{x}, t) - i \int d^3y \nabla_{\vec{y}}\phi(\vec{y}, t) \cdot \nabla_{\vec{y}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además, considerando que*

$$\int d^3y \nabla\phi(\vec{y}, t) \cdot \nabla\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = -\nabla^2\phi(\vec{x}, t),$$

se tiene que

$$[\pi(\vec{x}, t), H(t)] = i(\nabla^2 - m^2)\phi(\vec{x}, t). \quad (2.5)$$

Para verificar que efectivamente se tiene una expresión de la forma (2.3), podemos usar la ecuación de Klein-Gordon (1.5) observando que se satisface

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{x}, t) = (\nabla^2 - m^2)\phi(\vec{x}, t),$$

y sustituyendo en (2.5), el cálculo del conmutador queda en términos de la derivada temporal del momento $\pi = \dot{\phi}$:

$$\begin{aligned} [\pi(\vec{x}, t), H(t)] &= i\ddot{\phi}(\vec{x}, t) \\ &= i\dot{\pi}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2. Operadores de creación y aniquilación

Podemos ahora reestructurar nuestra discusión al utilizar operadores de creación y aniquilación. Esto nos permite hacer una discusión del espectro de la teoría de Klein-Gordon de manera que sea similar a lo que se haría en la Mecánica Cuántica.

Partimos de la representación del campo de Klein-Gordon en el espacio de Fourier como

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) \quad (2.7)$$

donde $\vec{p} = -i\nabla$. Recordemos que debe cumplirse que $\phi^*(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t)$ o bien $\phi^*(\vec{p}, t) = \phi(-\vec{p}, t)$ dado que se trata de un campo escalar.

*Ver por ejemplo la sección 1.5.2 *Propiedades de la Delta* de la referencia [6].

Entonces, considerando que $\vec{p} = -i\nabla$ y la ecuación (1.5) pero en el espacio de momentos, el campo de Klein-Gordon satisface

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right) \phi(\vec{p}, t) = 0 \quad (2.8)$$

que es una ecuación diferencial parcial tipo oscilador armónico simple.

Esto nos permite entonces proponer una solución para el campo libre de Klein-Gordon en términos de los operadores de creación y aniquilación

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-i(E_{\vec{p}}t - \vec{p}\cdot\vec{x})} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{i(E_{\vec{p}}t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \right), \quad (2.9)$$

como $\pi = \dot{\phi}$

$$\pi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{-i(E_{\vec{p}}t - \vec{p}\cdot\vec{x})} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{i(E_{\vec{p}}t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \right). \quad (2.10)$$

Estas expresiones en términos de operadores de asenso y descenso hacen explícita la dualidad partícula-onda cuando analizamos el campo cuántico ϕ : la expresión (2.9) esta escrita en términos de operadores que crean y destruyen partículas que surgen de las excitaciones del campo cuántico, pero además estamos escribiéndola como combinación lineal de funciones de onda que son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon.

Considerando las expresiones anteriores y dado que hemos establecido reglas de conmutación en (2.1) para ϕ y π , automáticamente quedan definidas las reglas de conmutación entre $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$ como sigue

$$\begin{aligned} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] &= 0, \\ [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] &= 0, \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (2.11)$$

En el Apéndice C verificamos que efectivamente recuperamos las reglas (2.1) cuando usamos (2.11) en (2.9) y en (2.10). También en dicho Apéndice podemos verificar que con las expresiones para el campo (2.9) y el momento (2.10) se expresa la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} en (1.8), en términos de los operadores de creación y aniquilación y obtenemos así

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + 4\pi^3 \delta^3(0) \right). \end{aligned}$$

Vemos que el segundo término $\delta^3(\vec{0})$, diverge al infinito. Esta constante de energía infinita representa la suma sobre todos los modos de energía de punto cero. La energía de punto cero o

energía posible más baja es la energía de cada modo de Fourier o bien de cada punto del vacío que ha sido modelado como un oscilador armónico simple. Esta constante se interpreta como un desplazamiento en el estado base de la teoría y como cualquier medición experimental sólo involucra diferencias entre el vacío y los estados excitados, la energía de vacío se cancela en dichos cálculos (ver Apéndice C). Entonces, en este contexto

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}, \quad (2.12)$$

es decir, ignoramos dicha constante.

2.3. Espectro de Energías

Dada la discusión anterior, podemos utilizar la expresión para el operador Hamiltoniano H de la teoría de Klein-Gordon obtenido anteriormente y analizar el espectro de dicha teoría.

Primero escogemos el estado base o vacío de la teoría como $|0\rangle$, tal que $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ y con (2.12) vemos que

$$\begin{aligned} H a_{\vec{p}}|0\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}|0\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

no hay un estado con menor energía que el estado $|0\rangle$, que tiene una energía $E_{\vec{p}} = 0$ para todo \vec{p} .

Luego para obtener un estado de momento \vec{p} y de energía $E_{\vec{p}}$ lo creamos con $a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$ y consecuentemente la energía asociada a ese estado será

$$H a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$$

pero como

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger - a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

entonces

$$\begin{aligned} H a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} a_{\vec{p}'}^\dagger \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \right) |0\rangle \\ &= \int d^3p' E_{\vec{p}'} a_{\vec{p}'}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) |0\rangle \\ &= E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

En general, podemos ver que el estado $a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger \cdots |0\rangle$ es un eigenestado del H con energía $E_{\vec{p}} + E_{\vec{p}'} + \cdots$. Considerando todos los estados posibles, saturamos el espectro de energía de Klein-Gordon.

También es importante mencionar que las partículas de Klein-Gordon obedecen la estadística de Bose-Einstein ya que los operadores de creación $a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger$ conmutan por lo que el estado $a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger |0\rangle$ es *idéntico* al estado $a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$. Esto se reafirma también porque un sólo modo \vec{p} de excitación puede tener un número arbitrario de partículas.

Para completar el análisis de la teoría de Klein-Gordon, consideremos la acción del operador de campo $\phi(\vec{x})$ sobre el estado $|0\rangle$

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x})|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{2E_{\vec{p}}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle\end{aligned}\quad (2.14)$$

que es una superposición lineal de estados de una sola partícula que tienen un momento bien definido. De acuerdo con el desarrollo anterior, hemos denotado al estado de una partícula como

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \quad (2.15)$$

cuya normalización es

$$\begin{aligned}\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}'}} \sqrt{2E_{\vec{p}}} \langle 0 | a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \sqrt{4E_{\vec{p}'} E_{\vec{p}}} \langle 0 | \left(a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \right) | 0 \rangle \\ &= \sqrt{4E_{\vec{p}'} E_{\vec{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \langle 0 | 0 \rangle \\ &= \sqrt{4E_{\vec{p}'} E_{\vec{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}),\end{aligned}$$

que es invariante de Lorentz. Nótese que hemos normalizado el estado base $\langle 0|0\rangle = 1$.

Si observamos la ecuación (2.14), vemos que es la misma que la expresión no relativista para el eigenestado de posición $|x\rangle$, salvo el factor de $\frac{1}{2E_{\vec{p}}}$. Esto nos permite hacer la interpretación de que el operador $\phi(\vec{x})$ actuando sobre el vacío $|0\rangle$ crea una partícula en la posición \vec{x} . Esta interpretación se confirma cuando calculamos

$$\begin{aligned}\langle 0 | \phi(\vec{x}) | \vec{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} \left(a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right) | \vec{p} \rangle \\ &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} \langle 0 | a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} | \vec{p} \rangle + \langle 0 | a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} | \vec{p} \rangle\end{aligned}$$

el segundo término se anula debido a la actuación del operador a^\dagger sobre el estado base y el primer

término genera una delta

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}'}} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle \\
&= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}'}} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \sqrt{2E_{\vec{p}'}2E_{\vec{p}}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \\
&= e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}.
\end{aligned}$$

Vemos que podemos interpretar a $\langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle$ como la representación espacial de la función de onda de una partícula en el estado $|\vec{p}\rangle$.

2.4. El propagador de campos escalares

En el presente trabajo estamos interesados en describir campos interactuantes, pero primero necesitamos explorar la propagación de un campo libre. Para ello estudiamos a continuación el comportamiento de la amplitud de propagación de campos de Klein-Gordon: el propagador.

En nuestro presente formalismo, todavía trabajando en el esquema de Heisenberg, el propagador ó la amplitud para que una partícula se propague entre dos puntos del espaciotiempo x y y la definimos como

$$D(x - y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle. \quad (2.16)$$

Considerando que $\phi(x) = \phi(\vec{x}, t)$ esta dada por la ecuación (2.9), podemos evaluar el propagador como sigue

$$\begin{aligned}
D(x - y) &= \langle 0| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \times \\
&\quad \left(a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \left(a_{\vec{p}'} e^{-ip'\cdot y} + a_{\vec{p}'}^\dagger e^{ip'\cdot y} \right) |0\rangle \\
&= \langle 0| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i(p\cdot x - p'\cdot y)} |0\rangle \\
&= \langle 0| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \times \\
&\quad \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \right) e^{-i(p\cdot x - p'\cdot y)} |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} \langle 0|0\rangle
\end{aligned}$$

Es decir, el propagador de Klein-Gordon, invariante de Lorentz, es

$$D(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)}. \quad (2.17)$$

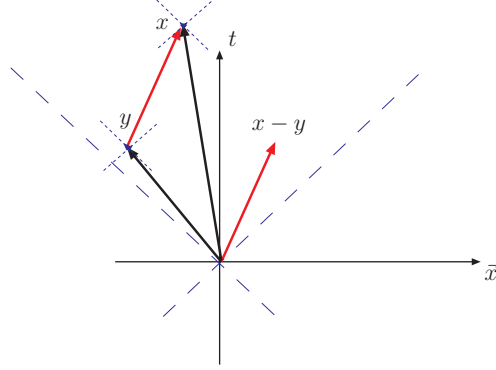


Figura 2.1: Propagación temporaloide.

Estudiemos el comportamiento del propagador para dos casos relevantes en nuestra discusión: cuando $x - y$ es *temporaloide* y cuando es *espacialoide* (ver Apéndice A para más detalles sobre esta denominación).

2.4.1. Propagación temporaloide

Si $x - y$ es *temporaloide*, es decir $(x - y)^2 > 0$, el intervalo de separación entre los eventos x e y cae en la región dentro del cono de luz (ver Figura 2.1). Concretamente consideremos por ejemplo que

$$x^0 - y^0 = t \quad \text{y} \quad \vec{x} - \vec{y} = 0 \quad (2.18)$$

y además considerando las relaciones en (1.2) tenemos ahora

$$p(x - y) = E_{\vec{p}} t = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} t.$$

En este caso el propagador en (2.17) es

$$D(x - y)|_{(x-y)^2 > 0} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} t}. \quad (2.19)$$

Podemos realizar la integral en coordenadas esféricas, considerando que podemos integrar la parte angular directamente con $|\vec{p}|^2 = \ell^2$ y $d^3 p = 4\pi \ell^2 d\ell$ de manera que

$$D(x - y)|_{(x-y)^2 > 0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\ell \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\ell^2 + m^2} t}.$$

Por conveniencia sumamos y restamos un término proporcional a m^2 para tener

$$\begin{aligned} D(x - y)|_{(x-y)^2 > 0} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\ell \frac{(\ell^2 + m^2)}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\ell^2 + m^2} t} - \frac{m^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\ell \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\ell^2 + m^2} t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{I}_1(m, it) - \frac{m^2}{(2\pi)^2} \mathcal{I}_2(m, it), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde hemos identificado las integrales definidas como combinación lineal de funciones Bessel modificadas^{**}.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1(\gamma, \beta) &= \int_0^\infty dx \sqrt{\gamma^2 + x^2} e^{-\beta\sqrt{\gamma^2 + x^2}} \\ &= \gamma^2 K_0(\gamma\beta) + \frac{\gamma}{\beta} K_1(\gamma\beta), \\ \mathcal{I}_2(\gamma, \beta) &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} e^{-\beta\sqrt{\gamma^2 + x^2}} \\ &= K_0(\gamma\beta).\end{aligned}$$

Podemos reescribir la expresión del propagador en (2.20) en términos de las funciones Bessel y observamos que

$$D(x - y)|_{(x-y)^2 > 0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{it} K_1(imt)$$

que en el límite para tiempos muy grandes tiene un comportamiento asintótico

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(x - y)|_{(x-y)^2 > 0} = \sqrt{\frac{im}{2^5 \pi^3}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-imt}. \quad (2.21)$$

Vemos que $D(x - y)|_{(x-y)^2 > 0}$ es muy pequeño pero no nulo para tiempos grandes. En otras palabras, dentro del cono de luz la amplitud de propagación se desvanece exponencialmente pero no es cero: ¿se preserva causalidad en la teoría de Klein-Gordon para eventos dentro del cono de luz? Al parecer si, veamos más adelante.

2.4.2. Propagación espacialoide

Si ahora $x - y$ es *espacialoide*, es decir $(x - y)^2 < 0$, el intervalo de separación entre los eventos x e y cae fuera de la región del cono de luz (ver Figura 2.2). Procederemos de manera similar al caso anterior y tomaremos un ejemplo concreto haciendo

$$x^0 - y^0 = 0 \quad \text{y} \quad \vec{x} - \vec{y} = \vec{r} \quad (2.22)$$

y además considerando las relaciones en (1.2) tenemos ahora

$$p(x - y) = -\vec{p} \cdot \vec{r} = -|\vec{p}| |\vec{r}| \cos \theta.$$

^{**}Que se definen como

$$K_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{n - \frac{1}{2}} e^{-xt} \quad (n > \frac{1}{2}, x > 0)$$

y que se comportan como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

Para más información sobre propiedades y comportamiento asintótico ver [7]

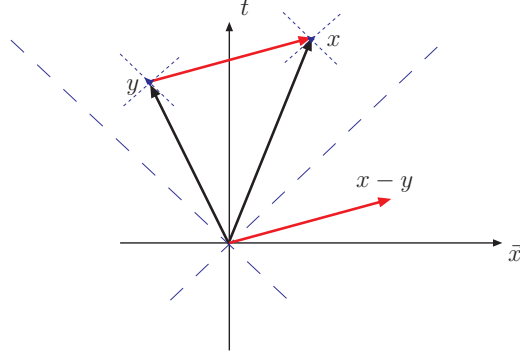


Figura 2.2: Propagación espacial.

Así mismo, tendremos que considerar la integración de (2.19) en coordenadas esféricas pero, con un integrando que si depende de la parte polar. De manera que con $|\vec{p}| = \ell$, $|\vec{r}| = r$ y $d^3p = 2\pi\ell^2 \sin\theta d\theta d\ell = -2\pi\ell^2 d(\cos\theta) d\ell$ tenemos

$$\begin{aligned}
 D(x-y)|_{(x-y)^2 < 0} &= - \int_{-1}^1 \int_0^\infty \frac{d(\cos\theta)d\ell}{2(2\pi)^2} \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} e^{i\ell r \cos\theta} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty d\ell \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \sin \ell r \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \mathcal{I}_3(m, 0, r),
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde hicimos un cambio de variable para integrar la parte angular considerando que

$$\int_{-1}^1 e^{i\ell r \cos\theta} d(\cos\theta) = \frac{1}{i\ell r} \int_{-i\ell r}^{i\ell r} du e^u = \frac{2 \sin \ell r}{\ell r}$$

y hemos identificado la integral definida como una función Bessel modificada [7] similar a las tratadas en la sección anterior:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_3(\gamma, \beta, b) &= \int_0^\infty dx \frac{x}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} e^{-\beta\sqrt{\gamma^2 + x^2}} \sin bx \\
 &= \frac{\gamma b}{\sqrt{\beta^2 + b^2}} K_1(\gamma\sqrt{\beta^2 + b^2}).
 \end{aligned}$$

Podemos reescribir la expresión del propagador en (2.23) en términos de las funciones Bessel y observamos que

$$D(x-y)|_{(x-y)^2 < 0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{r} K_1(mr)$$

que en el límite para distancias muy grandes tiene un comportamiento asintótico

$$\lim_{r \rightarrow \infty} D(x-y)|_{(x-y)^2 < 0} = \sqrt{\frac{m}{2^5 \pi^3}} r^{-\frac{3}{2}} e^{-mr}. \tag{2.24}$$

De nuevo, pero ahora fuera del cono de luz, la amplitud de propagación se desvanece exponencialmente pero no es nula, lo que requiere velocidades mayores a la de la luz: ¿se viola causalidad en la teoría de Klein-Gordon para eventos fuera del cono de luz?

Hasta aquí hemos estudiado el comportamiento del propagador bajo dos situaciones extremas y hemos hecho una pregunta con respecto a la congruencia de nuestra descripción del propagador dentro de un contexto relativista: ¿se preserva o se viola causalidad con dicha descripción? Para poder hablar realmente de causalidad no debemos preguntarnos si una partícula puede o no propagarse en intervalos *temporaloides* o *espacialoides*, más bien debemos cuestionarnos: ¿una medición realizada en $x = (\vec{x}, t)$, afecta otra medición realizada en $y = (\vec{y}, t)$ cuando $(x - y)^2$ es *temporaloide* o *espacialoide*?

Una de las mediciones más simples que podemos hacer es la que caracteriza al campo $\phi(x)$ en el espaciotiempo, el conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$. Nosotros ya planteamos en (2.1) que el conmutador $[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})]$ es cero en el caso de que de $x^0 = y^0 = t$, es decir, dicho conmutador a tiempos iguales es nulo. Pero, para el caso $x^0 \neq y^0$, el conmutador también debe anularse cuando $(x - y)^2 < 0$ para poder preservar causalidad de manera más general en la teoría de Klein-Gordon.

En concreto calcularemos el conmutador antes mencionado y haremos el análisis para diferentes intervalos al final. Considerando que $\phi(x)$ esta dado en términos de operadores de creación y aniquilación en (2.9) y conociendo las reglas de conmutación de dichos operadores en (2.11), tenemos

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p \, d^3p'}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \\
&\quad \left[\left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right), \left(a_{\vec{p}'} e^{-ip' \cdot y} + a_{\vec{p}'}^\dagger e^{ip' \cdot y} \right) \right] \\
&= \int \frac{d^3p \, d^3p'}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \\
&\quad \left([a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] e^{-i(p \cdot x - p' \cdot y)} - [a_{\vec{p}'}, a_{\vec{p}}^\dagger] e^{-i(p' \cdot y - p \cdot x)} \right) \\
&= \int \frac{d^3p \, d^3p'}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \\
&\quad \left(\delta^3(\vec{p} - \vec{p}') e^{-i(p \cdot x - p' \cdot y)} - \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) e^{-i(p' \cdot y - p \cdot x)} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)} \right),
\end{aligned}$$

pero como sabemos que el propagador de la teoría es (2.17), entonces

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x).$$

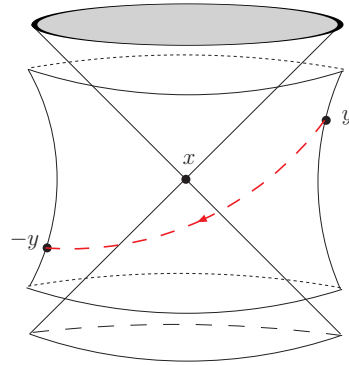


Figura 2.3: Transformación de Lorentz para $D(x - y)$ a $D(y - x)$.

Cuando $x - y$ es *espacialoide*, i.e. $(x - y)^2 < 0$, podemos realizar una transformación de Lorentz continua de $D(x - y)$ a $D(y - x)$ o viceversa (ver Figura 2.3). Es decir que la amplitud para que la partícula se propague de x a y es igual a la amplitud de propagación de y a x : $D(x - y) = D(y - x)$. De manera tal que para mediciones entre x y y donde $(x - y)^2 < 0$ y de acuerdo con (2.24)

$$[\phi(x), \phi(y)] \sim e^{-mr} - e^{-mr} = 0$$

esto es, no hay manera de que se afecten las mediciones y, por tanto, se preserva causalidad.

Cuando $x - y$ es *temporaloide*, i.e. $(x - y)^2 > 0$, no existe una transformación de Lorentz continua que logre $(x - y) \rightarrow -(x - y)$. Pero de acuerdo con (2.21), afortunadamente en este caso no es necesario que el conmutador se anule para preservar causalidad. Aquí si se puede tener efectos de una medición sobre otra, lo cual es consistente con que las mediciones se separan por intervalos dentro del cono de luz. También en este caso se preserva causalidad.

Con esto terminamos la construcción de la teoría cuántica de campos de Klein-Gordon y verificamos que el proceso de cuantización de la teoría nos permitió construir los objetos básicos, tales como el propagador, con los que procedemos ahora a calcular observables relevantes. En el siguiente capítulo nos adentramos en los métodos perturbativos que son parte de las técnicas más utilizadas para el cálculo de probabilidad de dispersión en la física de partículas.

Capítulo 3

Métodos perturbativos en la teoría: campos escalares interactuantes

Una vez cuantizada la teoría de campos escalares libres, en el presente capítulo procedemos a presentar los métodos perturbativos que nos permiten describir campos interactuantes. Además desarrollaremos el formalismo para construir funciones de correlación que nos permitirá describir las propiedades de los campos interactuantes que se propagan en el espaciotiempo. Para este último tema, se hace una presentación detallada del teorema de Wick y de sus implicaciones para los próximos capítulos.

3.1. Campos interactuantes

En el capítulo anterior discutimos la cuantización de la teoría de campo libre de Klein-Gordon. Vimos por ejemplo, que los estados de las partículas libres son eigenestados del Hamiltoniano sin términos de interacción, es decir, sin que haya dispersión de campos en algún punto del espaciotiempo durante la propagación.

Ahora queremos considerar campos interactuantes y para ello incluimos términos no lineales en la Lagrangiana que acoplarán los diferentes modos de Fourier uno con otro, lo que resulta en una descripción de partículas interactuantes que oscilan con dichos modos. Para hacer una descripción causal de la dinámica, los nuevos términos de interacción deben contener productos del campo en el mismo punto del espacio-tiempo, por ejemplo $\phi(x)^n$ en el Hamiltoniano o en el Lagrangiano de interacción ($H_{int} = -L_{int}$).

En este capítulo nos interesa discutir sobre teorías en las cuales \mathcal{L}_{int} es función solo de los campos mas no de sus derivadas. Más concretamente nos interesa la teoría ϕ^4 , es decir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (3.1)$$

donde λ es una constante de acoplamiento adimensional. El modelo estándar de las partículas elementales contiene interacciones del tipo ϕ^4 . El ejemplo más importante en física de partículas es la autointeracción del campo de Higgs en el sector electrodébil de dicho modelo.

La teoría ϕ^4 descrita a través de su Lagrangiana anteriormente, nos permite obtener la ecuación de movimiento asociada (tal y como se hizo en la teoría libre en la sección 1.3), recurriendo a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) &= 0 \\
 \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) &= 0 \\
 \left(-m^2 \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \right) - \partial_\mu (\partial^\mu \phi) &= 0 \\
 -m^2 \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 - \square \phi &= 0 \\
 (m^2 + \square) \phi &= -\frac{\lambda}{3!} \phi^3. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial no puede ser resuelta por análisis de Fourier como se hace para la teoría libre en la ecuación de Klein-Gordon, que es el caso $\lambda = 0$.

3.2. Estudio perturbativo de la teoría interactuante

En esta sección desarrollaremos el estudio perturbativo para teorías con campos interactuantes. Deseamos llevar la discusión hacia lograr un formalismo que nos permita visualizar los términos de las series perturbativas que surgen de dichos estudios, como procesos de interacción en el espaciotiempo. No necesitamos una reformulación de mecánica cuántica pero si revisaremos primero la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo en un contexto y con estructuras convenientes para nuestros propósitos.

Comenzamos calculando una cantidad simple y útil que nos permite caracterizar la propagación de campos en el espaciotiempo. Nos referimos a la función de correlación de dos puntos o función de Green de dos puntos en teoría ϕ^4

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle, \tag{3.3}$$

donde $|\Omega\rangle$ denota el estado base de la teoría interactuante, el cual generalmente es diferente del estado base de la teoría libre $|0\rangle$. El símbolo T de ordenamiento temporal es insertado por conveniencia posterior. Como mencionamos anteriormente, la función de correlación puede ser

interpretada como la amplitud de propagación de una partícula entre y y x . En la teoría libre esta función es *el propagador de Feynman*

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle_{\text{libre}} &= D_F(x-y) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.4)$$

que ya lo hemos analizado. Lo haremos ahora para teoría de perturbaciones, generalizando nuestros resultados para una función de correlación de orden más alto en la cual aparecen más de dos operadores de campo. Después analizaremos las funciones de correlación eventualmente desarrollando el formalismo de los diagramas de Feynman para evaluarla perturbativamente y finalmente, calcularemos secciones de dispersión usando la misma técnica.

Para abordar este problema, escribimos el Hamiltoniano de la teoría ϕ^4 como

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\text{int}} \\ H &= H_{\text{Klein-Gordon}} + \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Desarrollaremos una expresión para la función de correlación de dos puntos como una serie de potencias de λ . El Hamiltoniano de interacción aparece explícitamente en la representación de Heisenberg para el campo

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt} \quad (3.6)$$

como en la definición del estado base interactuante $|\Omega\rangle$. Debemos expresar ambos, $\phi(x)$ y $|\Omega\rangle$ en términos de cantidades que sabemos como manipular: operadores de campo libre y el vacío de la teoría libre.

Podemos empezar con $\phi(x)$. Para algún tiempo fijo $t = t_0$, podemos desarrollar el campo ϕ en términos de operadores de creación y aniquilación

$$\phi(t_0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (3.7)$$

Y el campo $\phi(t, \vec{x})$ para un $t \neq t_0$ en la representación de Heisenberg es

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (3.8)$$

para $\lambda = 0$, H se reduce a H_0

$$\phi(t, \vec{x})|_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \phi_I(t, \vec{x}) \quad (3.9)$$

Cuando λ es pequeña esta expresión nos da la parte más importante de la dependencia temporal de $\phi(x)$; a esta expresión se le da el nombre de *campo en la representación de interacción* $\phi_I(t, \vec{x})$. Es como una representación de Heisenberg del campo interactuante, pero sin potencial de interacción.

Dado que podemos diagonalizar H_0 , podemos construir explícitamente ϕ_I :

$$\begin{aligned}
 \phi_I(t, \vec{x}) &= e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \\
 &= e^{iH_0(t-t_0)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) e^{-iH_0(t-t_0)} \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(e^{iH_0(t-t_0)} a_{\vec{p}} e^{-iH_0(t-t_0)} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \right. \\
 &\quad \left. e^{iH_0(t-t_0)} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-iH_0(t-t_0)} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

desarrollando términos por separado:

$$\begin{aligned}
 e^{iH_0(t-t_0)} a_{\vec{p}} e^{-iH_0(t-t_0)} &= (1 + iH_0(t-t_0) + \dots) a_{\vec{p}} (1 - iH_0(t-t_0) + \dots) \\
 &= a_{\vec{p}} + i(t-t_0)(H_0 a_{\vec{p}} - a_{\vec{p}} H_0) + \dots \\
 &= a_{\vec{p}} + i(t-t_0)[H_0, a_{\vec{p}}] + \dots \\
 &= a_{\vec{p}} + i(t-t_0)(-E_0 a_{\vec{p}}) + \dots \\
 &= a_{\vec{p}} e^{-iE_0(t-t_0)}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

y de igual forma para el término que contiene a^\dagger pero con signo diferente en la exponencial. Además hemos usado los conmutadores del Hamiltoniano de la teoría libre con los operadores de creación y aniquilación (ver sección 2.3)

$$\begin{aligned}
 [H, a_{\vec{p}}] &= -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}, \\
 [H, a_{\vec{p}}^\dagger] &= E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger.
 \end{aligned}$$

De manera que el campo en la representación de interacción nos queda en términos de los operadores escalar

$$\begin{aligned}
 \phi_I(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-iE_0(t-t_0)} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{iE_0(t-t_0)} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\
 \phi_I(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \Big|_{x^0=t-t_0}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

que es justo la expresión familiar para el campo libre. Es importante acentuar que es el campo en la representación de interacción, pero que no contiene potencial de interacción ya que $\lambda = 0$.

Lo que sigue ahora es expresar el campo completo ϕ en términos del potencial de interacción ϕ_I . El campo completo $\phi(t, \vec{x})|_{t \neq t_0}$ en la representación de Heisenberg está dado por la expresión (3.8)

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)}\phi(t_0, \vec{x})e^{-iH(t-t_0)}$$

y el campo en la representación de interacción está dado por la ecuación (3.9)

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0, \vec{x})e^{-iH_0(t-t_0)}.$$

Si a esta última expresión le agregamos los factores $e^{-iH_0(t-t_0)}$ por la izquierda y $e^{iH_0(t-t_0)}$ por la derecha, a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(t, \vec{x})e^{iH_0(t-t_0)} &= e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0, \vec{x}) \\ &= e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)} \end{aligned}$$

obtenemos el campo para un tiempo fijo $t = t_0$ como una representación de Heisenberg en términos de ϕ_I :

$$\phi(t_0, \vec{x}) = e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(t, \vec{x})e^{iH_0(t-t_0)}. \quad (3.13)$$

Al substituir esta expresión en (3.8), logramos que el campo completo quede en términos del potencial de interacción:

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \left(e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(t, \vec{x})e^{iH_0(t-t_0)} \right) e^{-iH(t-t_0)}. \quad (3.14)$$

Definimos entonces el operador unitario $U(t, t_0)$:

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}, \quad (3.15)$$

de manera que

$$\phi(t, \vec{x}) = U^\dagger(t, t_0)\phi_I(t, \vec{x})U(t, t_0). \quad (3.16)$$

A $U(t, t_0)$ se lo conoce como el *propagador en la representación de interacción* u *operador de evolución temporal*.

Expresaremos ahora $U(t, t_0)$ en términos de ϕ_I . Para lograr esto derivamos parcialmente primero $U(t, t_0)$ con respecto a t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)}(iH_0)e^{-iH(t-t_0)} + e^{iH_0(t-t_0)}(-iH)e^{-iH(t-t_0)} \\ &= -i \left(e^{iH_0(t-t_0)}(-H_0)e^{-iH(t-t_0)} + e^{iH_0(t-t_0)}(H)e^{-iH(t-t_0)} \right), \end{aligned}$$

es decir

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \quad (3.17)$$

que es una ecuación diferencial simple cuya solución única es $U(t, t_0)$ con la condición inicial $U(t, t_0)|_{t=t_0} = 1$; es la ecuación de Schrödinger. Ahora resolveremos esta ecuación diferencial para expresar a $U(t, t_0)$ en términos de ϕ_I . De (3.5)

$$H - H_0 = H_{int}$$

y del operador unitario

$$\mathbb{I} = e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)},$$

la expresión (3.17) se transforma de la siguiente manera

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H_{int}) \left(e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} \right) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} (H_{int}) e^{-iH_0(t-t_0)} U(t, t_0) \\ &= H_I(t) U(t, t_0) \end{aligned} \quad (3.18)$$

con $H_I(t)$ definido como el *Hamiltoniano de interacción en la representación de interacción*

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} (H_{int}) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (3.19)$$

que lo podemos poner en términos de ϕ_I

$$\begin{aligned} H_I(t) &= \int d^3x \frac{\lambda}{4!} e^{iH_0(t-t_0)} \phi^4(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= \int d^3x \frac{\lambda}{4!} e^{iH_0(t-t_0)} \left(e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I^4(t, \vec{x}) e^{iH_0(t-t_0)} \right) e^{-iH_0(t-t_0)} \\ H_I(t) &= \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si resolvemos la ecuación diferencial en su forma (3.17) debemos obtener consistentemente la definición de $U(t, t_0)$:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (-iH) e^{-iH(t-t_0)} + e^{iH_0(t-t_0)} (iH_0) e^{-iH(t-t_0)} \end{aligned}$$

Integrando respecto a t y resolviendo el primer término por partes:

$$\begin{aligned} u &= e^{iH_0(t-t_0)} \longrightarrow du = (iH_0) e^{iH_0(t-t_0)} dt \\ dv &= (-iH) e^{-iH(t-t_0)} dt \longrightarrow v = e^{-iH(t-t_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) &= ce^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} - \int dt e^{iH_0(t-t_0)} (iH_0) e^{-iH_0(t-t_0)} + \\
&\quad \int dt e^{iH_0(t-t_0)} (iH_0) e^{-iH(t-t_0)} \\
&= ce^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}
\end{aligned}$$

con la condición inicial de $U(t, t_0)|_{t=t_0} = 1$ regresamos de manera congruente con la definición del propagador en la expresión (3.15).

Pero si resolvemos la ecuación diferencial en su forma (3.18)

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_I(t) U(t, t_0)$$

podemos obtener una solución para $U(t, t_0)$ en términos del Hamiltoniano de interacción en la representación de interacción H_I . Dada la dependencia temporal explícita de H_I y U podemos expresar la ecuación en términos de diferenciales y resolver por separación de variables

$$\begin{aligned}
\frac{dU(t, t_0)}{dt} &= -iH_I(t)U(t, t_0) \\
\frac{dU(t, t_0)}{U(t, t_0)} &= -iH_I(t)dt \\
c' + \ln |U(t, t_0)| &= -i \int dt H_I(t) \\
e^{c' + \ln |U(t, t_0)|} &= e^{-i \int dt H_I(t)} \\
U(t, t_0) &= ce^{-i \int_{t_0}^t dt H_I(t)}
\end{aligned}$$

con la condición inicial $U(t, t_0)|_{t=t_0} = 1$, c toma valor de 1 y así

$$U(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \quad (3.21)$$

Como $\lambda \ll 1$ y en consecuencia $H_I \ll 1$, $U(t, t_0)$ puede ser desarrollada en una serie de potencias

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{1}{2!} (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) + \\
&\quad \frac{1}{3!} (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_3) + \dots + \\
&\quad \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_n) + \dots \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Observando que los factores de cada término de la serie tienen un *orden temporal*, nos permite introducir el símbolo T de ordenamiento temporal. En general si consideramos la representación en serie

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t) \quad (3.23)$$

definimos *ordenamiento temporal* T de $\Psi(t)$ a la serie con los factores de cada término ordenados cronologicamente:

$$T\{\Psi(t)\} = T\{\psi_0 + \psi_1(t) + \psi_1(t)\psi_2(t_1) + \psi_1(t)\psi_2(t_1)\psi_3(t_2) + \dots\} \quad (3.24)$$

nuestro caso particular es

$$T\left\{exp^{\phi(t)}\right\} = T\left\{1 + \psi_1(t) + \psi_1(t)\psi_2(t_1) + \psi_1(t)\psi_2(t_1)\psi_3(t_2) + \dots\right\}$$

Considerando lo anterior podemos ver que $U(t, t_0)$ se representa como

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{1}{2!} (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \\ & \frac{1}{3!} (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\} + \dots + \\ & \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)\} + \dots \end{aligned}$$

que podemos simplificar (ver Apéndice D)

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{1}{2!} (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \\ & \frac{1}{3!} (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 dt_3 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\} + \dots + \\ & \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \cdots dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)\} + \dots \end{aligned}$$

De manera que la forma compacta de escribir el operador de evolución temporal es

$$U(t, t_0) = T\left\{e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')}\right\}. \quad (3.25)$$

Así el campo completo en su forma (3.16) se transforma como

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \phi_I(t, \vec{x}) e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')}. \quad (3.26)$$

Generalizando la definición del operador U para permitir que tome otros valores diferentes al tiempo de referencia (ver Apéndice D) tenemos

$$U(t, t') = T\left\{e^{-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'')}\right\}_{t \geq t'}, \quad (3.27)$$

que satisface la ecuación diferencial $i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H_I(t) U(t, t')$ con la condición inicial de

$U(t, t')|_{(t=t')} = 1$ y además cumple con las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) &= U(t_1, t_3) \\
U(t_1, t_3)U^\dagger(t_2, t_3) &= U(t_1, t_2) \\
U^\dagger(t_1, t_3)U(t_2, t_3) &= U^\dagger(t_1, t_2) \equiv U^{-1}(t_1, t_2) \\
U^\dagger(t_1, t_2)U(t_1, t_3) &= U(t_2, t_3) \\
U(t_1, t_2)U^\dagger(t_1, t_3) &= U^\dagger(t_2, t_3) \equiv U^{-1}(t_2, t_3)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Hasta aquí dejamos la discusión del campo $\phi(t, \vec{x})$ y abordaremos ahora el análisis del estado base interactuante $|\Omega\rangle$.

3.2.1. Estado base de la teoría interactuante

$|\Omega\rangle$ es el estado base del Hamiltoniano completo H . $|0\rangle$ es el estado base del Hamiltoniano libre H_0 . Si hacemos evolucionar a $|0\rangle$ a travez del tiempo con H tendremos

$$\begin{aligned}
e^{-iHT}|0\rangle &= e^{-iHT}\mathbb{I}|0\rangle \\
&= \sum_{n=0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle
\end{aligned} \tag{3.29}$$

si corremos la suma para $n = 0$, corresponde al estado base del Hamiltoniano completo H

$$e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle \tag{3.30}$$

y para que H_I sea verdaderamente una perturbación a H_0 entonces debe haber un traslape entre $|0\rangle$ y $|\Omega\rangle$, es decir

$$\langle \Omega|0\rangle \neq 0 \tag{3.31}$$

de manera que la serie nos queda

$$e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle \tag{3.32}$$

con

$$E_0 = \langle \Omega|H|\Omega\rangle \tag{3.33}$$

Dado que $E_n > E_0$ para toda $n \neq 0$ podemos deshacernos de todos los términos en la serie con $n \neq 0$ enviando a T al infinito en una dirección ligeramente imaginaria. De manera que si

$T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$, el factor exponencial $e^{-iE_n T}$ cae más lento para $n = 0$ que para $n \neq 0$ pues $E_n > E_0$. Esto significa que el término $\sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle$ se va acercando a cero mucho más rápido que el término $e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle$. Esto nos permite tomar la $\sum_{n \neq 0}$ como cero en el límite cuando $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$. Bajo esta consideración (3.32) se simplifica a

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |0\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega|0\rangle) |\Omega\rangle \quad (3.34)$$

y de aquí podemos obtener una expresión para $|\Omega\rangle$ en términos de $|0\rangle$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle. \quad (3.35)$$

En el $\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)}$ donde $T \gg 1$, podemos cambiar

$$T \rightarrow T + t_0 \quad \text{con} \quad t_0 \ll 1$$

Así la expresión para (3.35) cambia a

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle \quad (3.36)$$

Además dado que

$$\begin{aligned} H_0 |0\rangle &= H_{(KG)} |0\rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

usando (2.12), nos permite introducir un factor operador de $e^{iH_0(T+t_0)}$ sin que se altere el estado $|\Omega\rangle$. También podemos regresar de $T' \rightarrow T$ ya que son letras mudas y reexpresar la suma $T + t_0 = t_0 - (-T)$

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{iH_0(t_0 - (-T))} e^{-iH(t_0 - (-T))} |0\rangle \\ |\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} U(t_0, -T) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.38)$$

es decir, podemos obtener $|\Omega\rangle$ por una simple evolución temporal del estado $|0\rangle$ del tiempo $-T$ al tiempo t_0 con el operador $U(t_0, -T)$.

Por último y para su uso posterior, tomamos el adjunto de $|\Omega\rangle$ para obtener

$$\begin{aligned} \langle \Omega| &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0| e^{iH(-T+t_0)} (e^{iE_0(-T+t_0)} \langle 0|\Omega\rangle)^{-1} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0| e^{iH_0(T-T_0)} e^{-iH(T-t_0)} (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle)^{-1} \\ \langle \Omega| &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0| U(T, t_0) (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.3. Funciones de correlación y el teorema de Wick

Conocidos $\langle \Omega |$, $|\Omega \rangle$ y $\phi(x)$, podemos conocer de manera explícita la función de correlación de dos puntos:

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left\{ \left(e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle \right)^{-1} \langle 0 | U(T, t_0) \times \right. \\
&\quad \left(U^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) U(x^0, t_0) \right) \left(U^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U(y^0, t_0) \right) \times \\
&\quad \left. U(t_0, -T) | 0 \rangle \left(e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} \right\} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0(2T)} \right)^{-1} \langle 0 | U(T, t_0) U^\dagger(x^0, t_0) \times \\
&\quad \phi_I(x) U(x^0, t_0) U^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U(y^0, t_0) U(t_0, -T) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{3.40}$$

asumiendo que

$$-T < t_0 < y^0 < x^0 < T \tag{3.41}$$

y usando las identidades entre los operadores (D.29), nos permiten reducir los factores U 's de manera significativa

$$\begin{aligned}
\left(U(T, t_0) U^\dagger(x^0, t_0) \right) \left(U(x^0, t_0) U^\dagger(y^0, t_0) \right) \left(U(y^0, t_0) U(t_0, -T) \right) &= U(T, x^0) U(x^0, y^0) U(y^0, -T) \\
&= U(T, y^0) U(y^0, -T) \\
&= U(T, -T)
\end{aligned}$$

y la función de correlación se reduce a

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\phi_I(x) \phi_I(y) U(T, -T)}{(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0(2T)})}. \tag{3.42}$$

El factor exponencial puede ser trabajado de manera indirecta calculando $\langle \Omega | \Omega \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left\{ \left(e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle \right)^{-1} \langle 0 | U(T, t_0) \times \right. \\
&\quad \left. U(t_0, -T) | 0 \rangle \left(e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} \right\} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0(2T)} \right)^{-1} \langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

pero como $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$, entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0(2T)} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle) \tag{3.43}$$

así que

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | \phi_I(x) \phi_I(y) U(T, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle} \quad (3.44)$$

y en términos del producto temporalmente ordenado

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) T \{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \} | 0 \rangle}. \quad (3.45)$$

Si hubiésemos asumido $-T < t_0 < x^0 < y^0 < T$ el cálculo no cambiaría en nada ya que

$$\begin{aligned} \left(U(T, t_0) U^\dagger(y^0, t_0) \right) \left(U(y^0, t_0) U^\dagger(x^0, t_0) \right) \left(U(x^0, t_0) U(t_0, -T) \right) &= \left(U(T, y^0) U(y^0, x^0) \right) U(x^0, -T) \\ &= U(T, x^0) U(x^0, -T) \\ &= U(T, -T). \end{aligned}$$

Es decir, como ya habíamos visto en la sección anterior, el orden en el que suceden las interacciones en medio del proceso no importa, el operador U sólo depende del tiempo inicial y el tiempo final. Para funciones de correlación de más de dos campos es importante darse cuenta de que por cada factor extra de $\phi(x_i)$ en la función del desarrollo anterior, tenemos un factor $U^\dagger(x_i^0, t_0) \phi_I(x_i) U(x_i^0, t_0)$ en la expresión (3.40) que no altera el resultado final de la multiplicación de los operadores U 's

$$U(T, t_0) U^\dagger(x_1^0, t_0) U(x_1^0, t_0) \cdots U^\dagger(x_n^0, t_0) U(x_n^0, t_0) U(t_0, -T) = U(T, -T) \quad (3.46)$$

por lo que podemos generalizar el cálculo de funciones de correlación con los campos que necesitamos

$$\langle \Omega | T \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \phi(x_n) \right\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \phi_I(x_n) T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} | 0 \rangle} \quad (3.47)$$

Esta formulación nos dice que hemos reducido el cálculo de funciones de correlación a evaluar valores esperados de productos de operadores de campo libre temporalmente ordenados

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \} 0 \rangle.$$

Para $n = 2$, esta expresión es justo el propagador de Feynman

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \} 0 \rangle$$

que ya calculamos con anterioridad. Lo haremos de nuevo con un método que nos permite facilitar su desarrollo y posteriormente generalizar para n campos.

3.3.1. Función de correlación de dos puntos

Ya vimos que el cálculo de la función de correlación se reduce al cálculo de valores esperados en el vacío del producto temporalmente ordenado de los campos involucrados. A continuación estudiaremos este objeto para una función de correlación de dos puntos.

Tomemos el campo en la representación de interacción en términos de los operadores escalera escrito en (3.12)

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{x^0=t-t_0}$$

y lo descomponemos en dos partes definidas como

$$\begin{aligned} \phi_I(x) &= \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \\ \phi_I^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} \\ \phi_I^-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Esta descomposición es útil porque

$$\begin{aligned} \phi_I^+(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} |0\rangle = 0 \\ \langle 0|\phi_I^-(x) &= \langle 0| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

De manera que el producto temporalmente ordenado $T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\}$ con $x^0 > y^0$ nos queda

$$\begin{aligned} T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} &= (\phi_I^+(x) + \phi_I^-(y)) (\phi_I^+(x) + \phi_I^-(y)) \\ &= \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^+(x)\phi_I^-(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) + \\ &\quad \left(\phi_I^-(y)\phi_I^+(x) - \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) \right) \\ &= \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) + \\ &\quad [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] \end{aligned} \quad (3.50)$$

si $y^0 > x^0$, se obtiene los mismos términos, pero con x y y intercambiados

$$\begin{aligned} T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} &= \phi_I^+(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)\phi_I^-(x) + \\ &\quad [\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)] \end{aligned}$$

En todos los términos, excepto los del conmutador, los operadores $a_{\vec{p}}$'s están a la derecha de los operadores $a_{\vec{p}}^\dagger$'s. Para imponer un ordenamiento de este tipo, consideremos lo siguiente: sea el

producto de operadores

$$\prod_{i=1}^n a_i^{()} = a_1^{()} \cdots a_i^{()} \cdots a_n^{()}$$

donde el símbolo $()$ representa uno de dos los siguientes símbolos

$$() = \dagger, - \text{ y } a^- \equiv a$$

definimos *ordenamiento normal* de un producto de operadores $\prod_{i=1}^n a_i^{()}$ al producto con todos los factores a^- a la derecha de todos los factores a^\dagger

$$N \left\{ \prod_{i=1}^n a_i^{()} \right\} = a_j^\dagger a_k^\dagger \cdots a_l^\dagger a_m \cdots a_g a_h$$

de manera que

$$T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} = N \{ \phi_I(x) \phi_I(y) + [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] \}$$

con

$$N \{ [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] \} = [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)]$$

Además, definimos la *contracción de Wick de dos campos* como $\overline{\phi(x)\phi(y)}$, cuya representación en términos de conmutadores es

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{si } x^0 > y^0 \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (3.51)$$

con la convención de aquí en adelante de que los campos que consideremos serán $\phi_I \equiv \phi$ ya que las contracciones de Wick siempre involucran campos en la representación de interacción. De esta manera

$$T \{ \phi(x)\phi(y) \} = N \left\{ \phi(x)\phi(y) + \overline{\phi(x)\phi(y)} \right\}. \quad (3.52)$$

El valor esperado en el vacío de un producto de operadores a y a^\dagger con ordenamiento normal es cero

$$\begin{aligned} \langle 0 | N \left\{ \prod_{i=1}^n a_i^{()} \right\} | 0 \rangle &= \langle 0 | a_j^\dagger a_k^\dagger \cdots a_l^\dagger a_m \cdots a_g a_h | 0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

de manera que el valor esperado de $\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle$ es

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle &= \langle 0|N\left\{\phi(x)\phi(y) + \overline{\phi(x)\phi(y)}\right\}|0\rangle \\ &= \langle 0|\overline{\phi(x)\phi(y)}|0\rangle \\ &\equiv D_F(x-y)\end{aligned}\tag{3.54}$$

que es exactamente el propagador de Feynman como se mencionó anteriormente.

3.3.2. Función de correlación de tres puntos

Si consideramos el producto temporalmente ordenado de campos $\phi_i \equiv \phi(x_i)$, en $n = 3$ puntos del espaciotiempo

$$\begin{aligned}T\{\phi_1\phi_2\phi_3\} &= (\phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^+\phi_2^- + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^-)(\phi_3^+\phi_3^-) \\ &= \underline{\phi_1^+\phi_2^+\phi_3^+} + \phi_1^+\phi_2^-\phi_3^+ + \underline{\phi_1^-\phi_2^+\phi_3^+} + \underline{\phi_1^-\phi_2^-\phi_3^+} + \\ &\quad \phi_1^+\phi_2^+\phi_3^- + \phi_1^+\phi_2^-\phi_3^- + \phi_1^-\phi_2^+\phi_3^- + \underline{\phi_1^-\phi_2^-\phi_3^-}\end{aligned}\tag{3.55}$$

y donde los términos subrayados ya tienen un ordenamiento normal. Lo que sigue es agregar términos nulos y usar las reglas de conmutación para generar conmutadores sencillos formados sólo por dos campos, en este proceso aparecen nuevos términos con orden normal. En la formulación subsiguiente omitiremos los términos con orden normal y sólo pondremos entre paréntesis el número de ellos:

$$\begin{aligned}T\{\phi_1\phi_2\phi_3\} &= (4) + [\phi_1^+\phi_2^+, \phi_3^-] + \underline{\phi_3^-\phi_1^-\phi_2^+} + [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3^+ + \underline{\phi_2^-\phi_1^+\phi_3^+} + \\ &\quad [\phi_1^+, \phi_2^-\phi_3^-] + \underline{\phi_2^-\phi_3^-\phi_1^+} + \phi_1^-[\phi_2^+\phi_3^-] + \underline{\phi_1^-\phi_3^-\phi_2^+} \\ &= (8) + \phi_1^+[\phi_2^+, \phi_3^-] + [\phi_1^+, \phi_3^-]\phi_2^+ + [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3^+ + \phi_2^-[\phi_1^+, \phi_3^-] + \\ &\quad [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3^- + \phi_1^-[\phi_2^+, \phi_3^-] \\ &= (8) + (\phi_1^+ + \phi_1^-)[\phi_2^+, \phi_3^-] + [\phi_1^+, \phi_3^-](\phi_2^+ + \phi_2^-) + \\ &\quad [\phi_1^+, \phi_2^-](\phi_3^+ + \phi_3^-) \\ &= (8) + \phi_1^+[\phi_2^+, \phi_3^-] + [\phi_1^+, \phi_3^-]\phi_2 + [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3 \\ &= (8) + \overline{\phi_1^+\phi_2^+\phi_3} + \overline{\phi_1^+\phi_2^-\phi_3} + \phi_1^-\overline{\phi_2^+\phi_3} \\ &= N\left\{\phi_1\phi_2\phi_3 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3} + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3} + \phi_1\overline{\phi_2\phi_3}\right\},\end{aligned}\tag{3.56}$$

es decir podemos expresar directamente el producto de campos temporalmente ordenado en términos de la suma del producto normal de los campos más todas las contracciones posibles, en

el entendido de que las contracciones involucran sólo campos en la representación de interacción.

Tomando el valor esperado en el vacío

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\}|0\rangle &= \langle 0|N\left\{\phi_1\phi_2\phi_3 + \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3} + \phi_1\overline{\phi_2\phi_3}\right\}|0\rangle \\
 &= D_F(x_1 - x_2)\langle 0|\phi_3|0\rangle + D_F(x_1 - x_3)\langle 0|\phi_2|0\rangle + \\
 &\quad D_F(x_2 - x_3)\langle 0|\phi_1|0\rangle \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

ya que

$$\langle 0|\phi_i|0\rangle = \langle 0|\phi_i^+|0\rangle + \langle 0|\phi_i^-|0\rangle = 0. \tag{3.58}$$

3.3.3. Función de correlación de cuatro puntos

Si ahora consideramos el producto temporalmente ordenado de campos en $n = 4$ puntos del espaciotiempo

$$\begin{aligned}
 T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} &= (5) + \phi_1^+\phi_2^+\phi_3^+\phi_4^- + \phi_1^+\phi_2^+\phi_3^-\phi_4^+ + \phi_1^+\phi_2^+\phi_3^-\phi_4^- + \phi_1^+\phi_2^-\phi_3^+\phi_4^+ + \\
 &\quad \phi_1^+\phi_2^-\phi_3^+\phi_4^- + \phi_1^+\phi_2^-\phi_3^-\phi_4^+ + \phi_1^+\phi_2^-\phi_3^-\phi_4^- + \phi_1^-\phi_2^+\phi_3^+\phi_4^- + \\
 &\quad \phi_1^-\phi_2^+\phi_3^-\phi_4^+ + \phi_1^-\phi_2^+\phi_3^-\phi_4^- + \phi_1^-\phi_2^-\phi_3^+\phi_4^- + \phi_1^-\phi_2^-\phi_3^+\phi_4^-.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Analizando término a término con la misma metodología usada anteriormente

$$\begin{aligned}
\phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^+ \phi_4^- &= [\phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^+, \phi_4^-] + \phi_4^- \phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^+ \\
&= \phi_1^+ [\phi_2^+ \phi_3^+, \phi_4^-] + [\phi_1^+, \phi_4^-] \phi_2^+ \phi_3^+ + \phi_4^- \phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^+ \\
&= (1) + \phi_1^+ \phi_2^+ [\phi_3^+ \phi_4^-] + \phi_1^+ [\phi_2^+, \phi_4^-] \phi_3^+ + [\phi_1^+, \phi_4^-] \phi_2^+ \phi_3^+ \\
\phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^- \phi_4^+ &= (1) + \phi_1^+ [\phi_2^+, \phi_3^-] \phi_4^+ + [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_4^+ \phi_2^+ \\
\phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^- \phi_4^- &= (1) + \phi_4^- \phi_1^+ [\phi_2^+, \phi_3^-] + \phi_3^- \phi_1^+ [\phi_2^+, \phi_4^-] + [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_4^- \phi_2^+ + \\
&\quad [\phi_1^+, \phi_4^-] \phi_3^- \phi_2^+ + [\phi_1^+, \phi_4^-] [\phi_2^+, \phi_3^-] + [\phi_1^+, \phi_3^-] [\phi_2^+, \phi_4^-] \\
\phi_1^+ \phi_2^- \phi_3^+ \phi_4^+ &= (1) + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3^+ \phi_4^+ \\
\phi_1^+ \phi_2^- \phi_3^+ \phi_4^- &= (1) + [\phi_1^+, \phi_2^-] [\phi_3^+, \phi_4^-] + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_4^- \phi_3^+ + \phi_2^- \phi_1^+ [\phi_3^+, \phi_4^-] + \\
&\quad \phi_2^- [\phi_1^+, \phi_4^-] \phi_3^+ \\
\phi_1^+ \phi_2^- \phi_3^- \phi_4^+ &= (1) + \phi_2^- [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_4^+ + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3^- \phi_4^+ \\
\phi_1^+ \phi_2^- \phi_3^- \phi_4^- &= (1) + \phi_2^- [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_4^- + \phi_2^- \phi_3^- [\phi_1^+, \phi_4^-] + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3^- \phi_4^- + \\
\phi_1^- \phi_2^+ \phi_3^+ \phi_4^- &= (1) + \phi_1^- [\phi_2^+, \phi_4^-] \phi_3^+ + \phi_1^- \phi_2^+ [\phi_3^+, \phi_4^-] \\
\phi_1^- \phi_2^+ \phi_3^- \phi_4^+ &= (1) + \phi_1^- [\phi_2^+, \phi_3^-] \phi_4^+ \\
\phi_1^- \phi_2^+ \phi_3^- \phi_4^- &= (1) + \phi_1^- \phi_3^- [\phi_2^+, \phi_4^-] + \phi_1^- [\phi_2^+, \phi_3^-] \phi_4^- \\
\phi_1^- \phi_2^- \phi_3^+ \phi_4^- &= (1) + \phi_1^- \phi_2^- [\phi_3^+, \phi_4^-]
\end{aligned} \tag{3.60}$$

la expresión de arriba es el resultado acabado para cada término y es de observarse que todos presentan un ordenamiento normal, por lo que si en este momento tomamos el valor esperado en el vacío sólo sobreviven las contracciones completas, pero primero asociaremos términos para tener una expresión más sencilla y clara de la relación entre ordenamiento temporal y ordenamiento

normal

$$\begin{aligned}
 T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} &= N \left\{ (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-)(\phi_3^+ + \phi_3^-)(\phi_4^+ + \phi_4^-) + \overbrace{\phi_1\phi_2}(\phi_3^+ + \phi_3^-)(\phi_4^+ + \phi_4^-) + \right. \\
 &\quad \overbrace{\phi_1\phi_3}(\phi_2^+ + \phi_2^-)(\phi_4^+ + \phi_4^-) + \overbrace{\phi_1\phi_4}(\phi_2^+ + \phi_2^-)(\phi_3^+ + \phi_3^-) + \\
 &\quad (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_4^+ + \phi_4^-)\overbrace{\phi_2\phi_3} + (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_3^+ + \phi_3^-)\overbrace{\phi_2\phi_4} + \\
 &\quad \left. (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-)\overbrace{\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2}\overbrace{\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \right\} \\
 &= N \left\{ \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \right. \\
 &\quad \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \\
 &\quad \left. \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \right\}. \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

Tomando el valor esperado en el vacío de $T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle &= \langle 0|N \left\{ \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \right. \\
 &\quad \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \\
 &\quad \left. \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \right\} |0\rangle \\
 &= D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) \\
 &\quad + D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3). \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

3.3.4. El teorema de Wick

Para los casos particulares vistos anteriormente, vemos que la relación entre el producto ordenado temporalmente y el producto ordenado normalmente es

$$T \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right\} = N \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) + (\text{todas las contracciones posibles}) \right\} \tag{3.63}$$

Esta relación se obtiene del *Teorema de Wick* (ver Apéndice E). Es importante hacer tres observaciones en este desarrollo que son útiles posteriormente:

1. El número de términos del producto ordenado temporalmente es: 2^n términos sin contracciones más 3^{n-2} términos con contracciones. De estos últimos $(2n-1)!!$ llevan contracciones completas. Todos los términos tienen ordenamiento normal, por lo tanto

$$\text{el número de términos de } T \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right\} = 2^n + (3^{n-2} - (2n-1)!!) + (2n-1)!! \Big|_{n \geq 2}.$$

2. El número de términos del valor esperado en el vacío del $T\{\prod_{i=1}^n \phi(x_i)\}$ para n impar

$$\text{el número de términos de } \langle 0|T\left\{\prod_{i=1}^n \phi(x_i)\right\}|0\rangle = 0.$$

3. El número de términos del valor esperado en el vacío del $T\{\prod_{i=1}^n \phi(x_i)\}$ para n par

$$\text{el número de términos de } \langle 0|T\left\{\prod_{i=1}^n \phi(x_i)\right\}|0\rangle = (2n - 1)!!.$$

Con esto terminamos la construcción de las herramientas de una teoría interactuante con métodos de perturbativos. Lo hemos hecho con un término de interacción que depende de $\lambda \ll 1$. En los siguientes capítulos aplicaremos las herramientas desarrolladas hasta ahora, para el caso concreto de la interacción de campos escalares en las teorías ϕ^4 y *sigma lineal*.

Capítulo 4

Dispersión en la teoría ϕ^4

En este capítulo aplicaremos todo lo desarrollado anteriormente, a la descripción de campos escalares que interactúan bajo un potencial de tipo ϕ^4 . Veremos como se puede describir dicha interacción usando diagramas de Feynman y exploraremos los diferentes tipos de contribuciones para lograr la descripción fundamental de la interacción. Además calcularemos la sección transversal diferencial de la dispersión, haciendo un cálculo diagramático de los elementos de la matriz correspondiente.

4.1. Diagramas de Feynman: campos no interactuantes

Retomamos el caso del valor esperado en el vacío del producto temporalmente ordenado de cuatro campos

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle &= D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + \\ &D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) + \\ &D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Vamos a representar cada coordenada x_i por un punto y cada propagador $D_F(x_i - x_j)$ por una línea juntando los puntos x_i y x_j , de la siguiente manera

$$D_F(x_i - x_j) \equiv \bullet \text{---} \bullet$$

$x_i \qquad \qquad \qquad x_j$

Entonces el valor esperado de $\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle$ puede representarse como una suma de tres diagramas llamados *diagramas de Feynman*, a saber

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle \equiv$$

A pesar de que esto no es exactamente una cantidad medible, los diagramas sugieren una interpretación: las partículas son creadas en dos puntos del espacio-tiempo, cada una se propaga a uno de los otros puntos y entonces son aniquiladas. En este caso puede suceder de tres maneras diferentes correspondientes a las tres formas de conectar los puntos en pares, como se muestran en los tres diagramas. La amplitud total del proceso es la suma de los tres diagramas.

4.2. Diagramas de Feynman: campos interactuantes

La situación se vuelve más interesante cuando la expresión contiene más de un campo en el mismo punto del espacio-tiempo. Regresando a la evaluación de la función de correlación de dos puntos dada en la ecuación (3.45)

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) T \{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \} | 0 \rangle}$$

Tomamos el numerador de la parte derecha y desarrollamos primer orden

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) T \{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \} \} | 0 \rangle &= \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) \left(1 + (-i) \int_{-T}^T H_I(t) dt \right) \right\} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle + \\ &\quad \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) (-i) \int_{-T}^T H_I(t) dt \right\} | 0 \rangle \\ &= D_F(x-y) + \\ &\quad \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) (-i) \int_{-T}^T H_I(t) dt \right\} | 0 \rangle \end{aligned}$$

el primer término $D_F(x-y)$ es la contribución a orden cero, ya calculada. El segundo término corresponde a la contribución a primer orden, la cual desarrollaremos

$$\begin{aligned} I &\equiv \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) (-i) \int_{-T}^T H_I(t) dt \right\} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) (-i) \int_{-T}^T dt \left(\frac{\lambda}{4!} \int d^3 z \phi^4(z) \right) \right\} | 0 \rangle \\ &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) \int \phi^4(z) d^4 z \right\} | 0 \rangle \\ &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \} | 0 \rangle \\ &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z \langle 0 | N \{ \phi(x) \phi(y) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z) + \text{contracciones} \} | 0 \rangle \end{aligned}$$

Dado que en el cálculo del valor esperado en el vacío del producto con ordenamiento normal sólo sobreviven los términos con contracciones completas, la expresión se reduce a

$$\begin{aligned}
 I &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \langle 0 | N \{ \text{contracciones completas} \} | 0 \rangle \\
 &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \langle 0 | (\text{contracciones completas}) | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

donde el número de términos con contracciones completas es $(2n - 1)!!$ que para nuestro caso son $5!! = 15$. Veamos cuales son estos términos: Si consideramos primero la contracción entre los campos externos ϕ_x y ϕ_y

$$\overbrace{\phi_x \phi_y \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z}$$

podemos formar $4!$ combinaciones con los otros campos ϕ_z 's. Por ejemplo las contracciones entre los primero y segundo, tercero y cuarto ϕ_z 's nos generan los primeros ocho términos con la forma

$$\overbrace{\phi_x \phi_y} \overbrace{\phi_z \phi_z} \overbrace{\phi_z \phi_z}$$

Estos ocho términos son los siguientes: si fijamos la primera contracción de ϕ_z 's e intercambiamos los ϕ_z 's de la segunda contracción nos genera el primer factor de 2; si intercambiamos los ϕ_z 's de la primera contracción nos generan otro factor de 2 y si intercambiamos las posiciones de las contracciones de ϕ_z 's obtenemos el tercer factor de 2. De manera que son 2^3 términos iguales. Los otros términos contraídos que podemos distinguir son uno con contracciones entre los campos primero y tercero, segundo y cuarto y otro con contracciones entre los campos primero y cuarto, segundo y tercero

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\phi_x \phi_y} \overbrace{\phi_z \phi_z} \overbrace{\phi_z \phi_z} \\
 \overbrace{\phi_x \phi_y} \overbrace{\phi_z \phi_z} \overbrace{\phi_z \phi_z}
 \end{array}$$

cada una también con 2^3 términos iguales. De manera que la suma nos dan los $4!$ términos. Pero dado que los términos ϕ_z son indistinguibles debemos dividir $4!$ entre 2^3 para obtener el total de contracciones: 3. Luego si consideramos la contracción entre ϕ_x y un ϕ_z , por ejemplo

$$\overbrace{\phi_x \phi_y} \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z$$

podemos formar también $4!$ términos que contendrán todos una contracción de $\phi_z \phi_z$ que nos genera un factor de 2. De manera que hay $\frac{4!}{2}$ términos de este tipo. Así el número total de

términos con contracciones los podemos condensar en dos tipos diferentes

$$\begin{aligned}
 I &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \langle 0 | \left[\frac{4!}{2^3} \left(\overbrace{\phi_x \phi_y \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} \right) + \frac{4!}{2} \left(\overbrace{\phi_x \phi_y \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} \right) \right] | 0 \rangle \\
 &= 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x-y) D_F(z-z) D_F(z-z) + \\
 &\quad 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-z)
 \end{aligned}$$

que sumada a la contribución a orden cero nos da el numerador de la función de correlación de dos puntos a primer orden

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} \right\} | 0 \rangle &= D_F(x-y) + \\
 &\quad 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z) + \\
 &\quad 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-z)
 \end{aligned}$$

donde el número de integrales de la contribución de orden uno es en efecto 5!!. Simplificando los coeficientes

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} \right\} | 0 \rangle &= D_F(x-y) + \\
 &\quad \left(\frac{-i\lambda}{2^3} \right) D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z) + \\
 &\quad \left(\frac{-i\lambda}{2} \right) \int d^4z D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-z)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Definimos *puntos externos* a los puntos que representan las coordenadas de los campos de la función de correlación que para nuestro caso son x y y ; y *puntos internos* a los puntos que nos representan las coordenadas de los campos que vienen de las contribuciones a diferente orden de la serie de potencias, en este caso particular es z a primer orden. Cada punto interno estará asociado con el factor $(-i\lambda)$. En consecuencia el numerador de la Ec. (4.2) queda representado con diagramas de Feynman a orden más bajo y a primer orden como sigue

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} | 0 \rangle^{(0)} &\equiv \text{---} \bullet_x \text{---} \bullet_y \text{---} \\
 \langle 0 | T \left\{ \phi(x) \phi(y) e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} | 0 \rangle^{(1)} &\equiv \text{---} \bullet_x \text{---} \bullet_y \text{---} \quad \bigcirc_z \quad + \quad \text{---} \bullet_x \text{---} \bullet_z \text{---} \bullet_y \text{---}
 \end{aligned}$$

donde hemos ignorado los factores constantes.

En los diagramas nos referimos a las líneas como propagadores $D_F(x-y)$, que son la amplitud de propagación para la partícula libre de Klein-Gordon entre los puntos del espaciotiempo x e y . Los puntos internos donde se encuentran cuatro líneas los definiremos como *vértices*. Ahora los diagramas representan una expresión matemática asociada al cálculo de la probabilidad de un proceso de creación, propagación y aniquilación de una partícula en el espaciotiempo.

Para pasar de la representación diagramática a la formulación analítica simplemente interpretamos cada símbolo diagramático de acuerdo con las definiciones dadas. Para obtener el número de veces que un diagrama se repite asociamos a cada vértice un factor de $4!$ dividido por el factor de simetría del diagrama. Definimos el *factor de simetría* de un diagrama como el número de intercambios posibles de elementos del diagrama sin que este se vea alterado: por cada lóbulo o línea que empieza y termina en el mismo punto nos da un factor de 2, el número de líneas que conectan a dos puntos nos da otro factor de $l!$ que es el factorial del número de líneas, el intercambio de lóbulos simétricos nos da otro factor de 2. Con las definiciones hechas y con la restricción de que los puntos externos no forman vértices, bastan para hacer todas las combinaciones posibles de diagramas para obtener la expresión analítica.

El cálculo de la contribución a segundo orden que denominaremos II es

$$II = \frac{2!}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z d^4u \langle 0 | T \{ \phi_x \phi_y \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u \} | 0 \rangle. \quad (4.3)$$

Al considerar que sólo sobreviven los términos con contracciones completas y fijando primero la contracción entre ϕ_x y ϕ_y

$$\overbrace{\phi_x \phi_y \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u}$$

obtenemos tres tipos de términos diferentes

$$D_F(x-y) D_F(z-z) D_F(z-z) D_F(u-u) D_F(u-u)$$

$$D_F(x-y) D_F(z-z) D_F(z-u) D_F(z-u) D_F(u-u)$$

$$D_F(x-y) D_F(z-u) D_F(z-u) D_F(z-u) D_F(z-u)$$

Fijando la contracción entre un punto externo y uno interno, como por ejemplo entre ϕ_x y ϕ_z

$$\overbrace{\phi_x \phi_y \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u}$$

obtenemos cuatro tipos de términos diferentes

$$D_F(x-z)D_F(y-z)D_F(z-z)D_F(u-u)D_F(u-u)$$

$$D_F(x-z)D_F(y-z)D_F(z-u)D_F(z-u)D_F(u-u)$$

$$D_F(x-z)D_F(y-u)D_F(z-z)D_F(z-u)D_F(u-u)$$

$$D_F(x-z)D_F(y-u)D_F(z-u)D_F(z-u)D_F(z-u)$$

El $2!$ que aparece en la expresión (4.3), es debido al intercambio de posición entre ϕ_z^4 y ϕ_u^4 . Esto nos dice que el orden que estamos calculando sugiere que agreguemos un $\mathcal{O}!$, donde \mathcal{O} es el orden.

Así la expresión analítica de la contribución a segundo orden queda

$$\begin{aligned} II = & \frac{2!}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \left\{ c_1 D_F(x-y) \int d^4z d^4u D_F(z-z) D_F(z-z) D_F(u-u) D_F(u-u) + \right. \\ & c_2 D_F(x-y) \int d^4z d^4u D_F(z-z) D_F(z-u) D_F(z-u) D_F(u-u) + \\ & c_3 D_F(x-y) \int d^4z d^4u D_F(z-u) D_F(z-u) D_F(z-u) D_F(z-u) + \\ & c_4 \int d^4z d^4u D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-z) D_F(u-u) D_F(u-u) + \\ & c_5 \int d^4z d^4u D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-u) D_F(z-u) D_F(u-u) + \\ & c_6 \int d^4z d^4u D_F(x-z) D_F(y-u) D_F(z-z) D_F(z-u) D_F(u-u) + \\ & \left. c_7 \int d^4z d^4u D_F(x-z) D_F(y-u) D_F(z-u) D_F(z-u) D_F(z-u) \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

cuya representación diagramática es

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)e^{-i\int_{-T}^T dt H_I(t)}\}|0\rangle^{(2)} \equiv & c_1 \left(\text{diagrama 1} \right) + c_2 \left(\text{diagrama 2} \right) \\
 & + c_3 \left(\text{diagrama 3} \right) + c_4 \left(\text{diagrama 4} \right) \\
 & + c_5 \left(\text{diagrama 5} \right) + c_6 \left(\text{diagrama 6} \right) \\
 & + c_7 \left(\text{diagrama 7} \right)
 \end{aligned}$$

Las constantes son más fáciles de visualizar en los diagramas de acuerdo a las reglas para su cálculo descritas arriba:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{(4!)(4!)}{(2^3)(2^3)} = 9 \\
 c_2 &= \frac{(4!)(4!)}{2^3} = 72 \\
 c_3 &= \frac{(4!)(4!)}{4!} = 24 \\
 c_4 &= \frac{(2!)(4!)(4!)}{(2)(2^3)} = 72 \\
 c_5 &= \frac{(2!)(4!)(4!)}{2^2} = 288 \\
 c_6 &= \frac{(2!)(4!)(4!)}{2^2} = 288 \\
 c_7 &= \frac{(2!)(4!)(4!)}{3!} = 192
 \end{aligned}$$

en total suman 945 integrales con 7 de ellas realmente diferentes y que son exactamente las $(n - 1)!! = (10 - 1)!!$ previstas por la expresión (3.64). Al igual que en el cálculo a primer orden nos damos cuenta que todos los factores numéricos de las integrales se reducen a una sola constante:

$$\frac{1}{\text{factor de simetría}} \tag{4.5}$$

tomemos como ejemplo las constantes numéricas de la primera integral

$$\frac{2!}{2!} \left(\frac{1}{4!}\right)^2 c_1 = \frac{2!}{2!} \left(\frac{1}{4!}\right)^2 \frac{(4!)(4!)}{(2^3)(2^3)} = \frac{1}{(2^3)(2^3)} \quad (4.6)$$

cuyo denominador no es otra cosa que el factor de simetría del diagrama en cuestión.

En el cálculo de la contribución de segundo orden hemos reducido grandemente el desarrollo analítico con el uso de definiciones como las de ordenamiento normal y ordenamiento temporal, con el uso del teorema de Wick y al ir construyendo reglas diagramáticas que nos permiten representar de manera condensada sólo los términos que sobreviven al final del cálculo. Sin estas herramientas debimos haber trabajado con $2^{10} + 3^{10-2} = 7585$ integrales generadas al principio del cálculo de la contribución de segundo orden.

En sentido inverso cada sumando del diagrama nos representa un término de la expresión analítica a cierto orden en la serie perturbativa. Cada línea del diagrama nos representa un propagador D_F y cada punto del diagrama es también un punto en el espacio-tiempo. Cada punto interno está asociado con el factor $(-i\lambda \int d^4z)$ de la expresión analítica, es decir, podemos asociar este factor con cada vértice del diagrama. En síntesis el numerador de la función de correlación de dos puntos nos queda en términos de la suma de todos los diagramas de Feynman posibles con dos puntos externos

$$\langle 0|T \left\{ \phi(x)\phi(y)e^{-i \int_{-T}^T H_I(t)dt} \right\} |0\rangle = \sum \left(\begin{array}{l} \text{todos los diagramas posibles} \\ \text{con dos puntos externos} \end{array} \right) \quad (4.7)$$

4.2.1. Reglas de Feynman

Podemos resumir ciertas reglas para el cálculo del numerador de la función de correlación de dos puntos que nos permiten asociar las expresiones analíticas con piezas de los diagramas: propagadores, vértices y puntos externos. Estas reglas son llamadas Reglas de Feynman para la teoría ϕ^4 :

1. Por cada propagador

$$\begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ x \qquad \qquad y \end{array} = D_F(x - y)$$

2. Por cada vértice

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = (-i \lambda) \int d^4z$$

3. Por cada punto externo

$$\bullet \text{---} = 1$$

4. Dividir por el factor de simetría.

Una manera de interpretar las reglas es pensar en el factor del vértice ($-i\lambda$) como la amplitud para la emisión y/o absorción de partículas en el vértice. La integral se interpreta como la suma sobre todos los puntos donde este proceso puede ocurrir. Este es el principio de superposición de mecánica cuántica: cuando un proceso puede ocurrir en diferentes formas, sumamos las amplitudes por cada forma posible. Para calcular cada amplitud individual, las reglas de Feynman nos dicen multiplicar las amplitudes, propagadores, factores y vértices, por cada parte independiente del proceso.

Las reglas descritas anteriormente están escritas en términos de los puntos en el espacio-tiempo x, y, \dots , que son llamadas reglas de Feynman en el espacio posición o configuracional.

En la mayoría de los cálculos es más simple expresar las reglas de Feynman en términos del momento introduciendo el desarrollo de Fourier de cada propagador

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \tag{4.8}$$

Para representar esto en el diagrama se asigna un quadri-momento p a cada propagador, indicando la dirección con una flecha. cuando $D_F(x - y) = D_F(y - x)$ la dirección es arbitraria. Entonces cuando cuatro líneas se encuentran en un vértice los factores dependientes de z del diagrama son:

$$\begin{array}{c}
 \swarrow \quad p_4 \quad p_1 \quad \searrow \\
 \nearrow \quad p_3 \quad p_2 \quad \nwarrow
 \end{array}
 = \int d^4 z e^{-i(p_1+p_2+p_3-p_4)z} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - p_4)$$

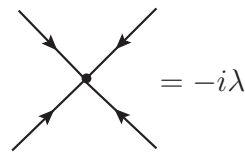
en otras palabras el momento se conserva en cada vértice. Las funciones delta pueden ser usadas para representar alguna de las integrales de momento de los propagadores.

Las reglas de Feynman en el espacio de momento quedan:

1. Por cada propagador

$$\bullet \xrightarrow{p} \bullet = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

2. Por cada vértice



3. Por cada punto externo



4. Imponemos la conservación de momento en cada vértice

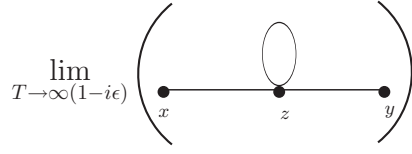
5. Integramos sobre cada momento indeterminado

6. Dividimos por el factor de simetría

De nuevo podemos interpretar cada factor como la amplitud de parte del proceso con las integraciones viniendo del principio de superposición. El factor exponencial para un punto externo es la amplitud para un partícula con un cierto momento encontrado en el punto.

Tomar el $\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)}$ de la expresión para el numerador de la función de correlación es tomar el límite a cada diagrama. Pero la dependencia explícita sobre T de cada integral ha desaparecido pues ahora el argumento de las integrales queda en términos del momento y esto implica que el $\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)}$ queda sin sentido.

Veamos un ejemplo

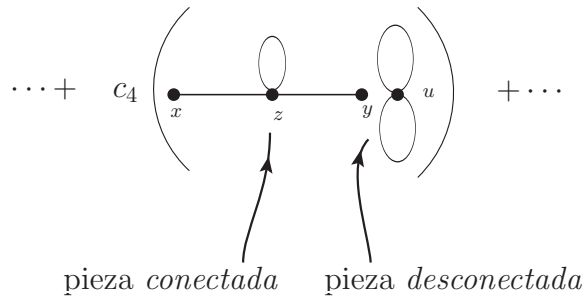


$$\begin{aligned}
 &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (-i\lambda) \int d^4z D(x-z)D(z-z)D(y-z) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (-i\lambda) \int d^4z \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_1 \cdot (x-z)} \\
 &\quad \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_2 \cdot (z-z)} \\
 &\quad \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_3 \cdot (y-z)} \\
 &= (-\lambda) \int d^4z \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &\quad e^{iz(p_1+p_3)} e^{-ip_1x} e^{-ip_3y} \\
 &= (-\lambda) \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_3) e^{-ip_1x} e^{-ip_3y} \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

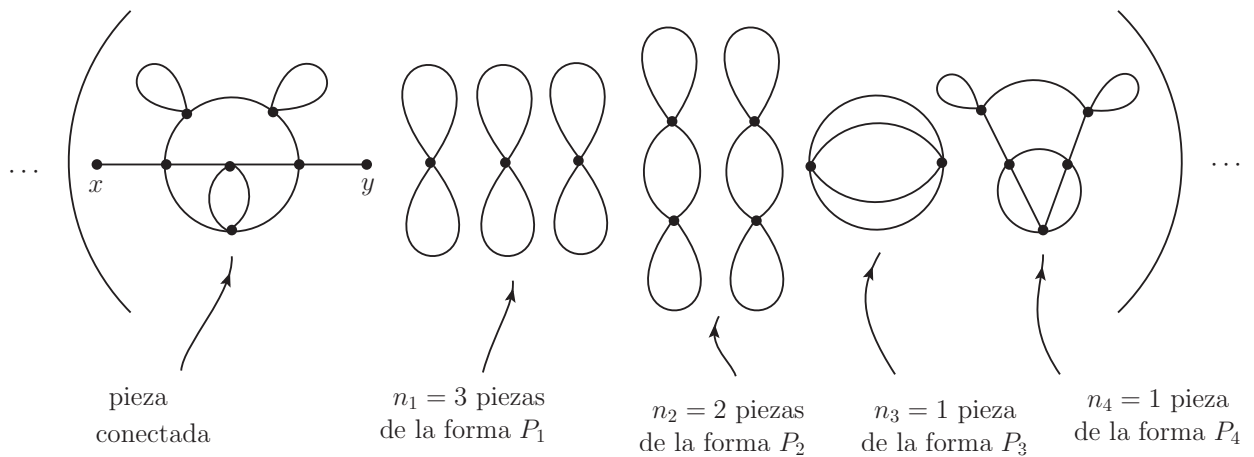
el resultado final de esta expresión es como si hubiésemos aplicado directamente las reglas de Feynman en el espacio de momento, la cual no tiene dependencia explícita de T .

4.2.2. Exponenciación de diagramas desconectados

Ya hemos visto que el numerador de la función de correlación de dos puntos queda expresado como la suma de todos los diagramas posibles con dos puntos externos. Cada diagrama puede estar formado por piezas conectadas y/o desconectadas. Definimos *pieza conectada* a la pieza que está conectada a un punto externo y *pieza desconectada* a la pieza que no está conectada a un punto externo. Por ejemplo en el diagrama



Pensemos en un diagrama de la contribución de orden 20



con una pieza conectada y algunas piezas desconectadas. Las posibilidades para las piezas desconectadas las representaremos por P_i y definiremos n_i al número de piezas de la forma P_i , por cada i elemento de un diagrama.

Si denotamos V_i al valor de la pieza P_i , entonces el valor de tal diagrama es

$$\left(\text{valor del diagrama} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Valor de la} \\ \text{pieza conectada} \end{array} \right) \cdot \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \quad (4.10)$$

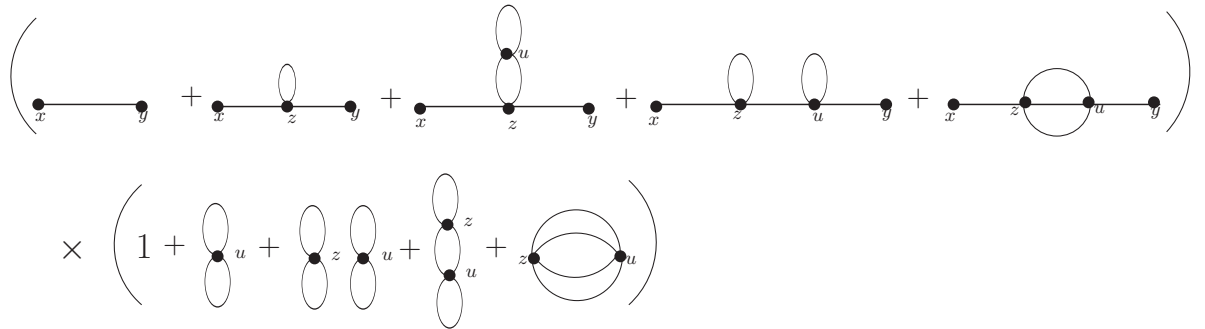
donde $\frac{1}{n_i!}$ es el factor de simetría que viene del intercambio de las n_i copias de P_i . La suma de todos los diagramas que representan al numerador de la función de correlación de dos puntos será

$$\left(\begin{array}{c} \text{Suma de todos} \\ \text{los diagramas} \end{array} \right) = \sum_P \sum_{\{n_i\}} \left(\begin{array}{c} \text{Valor de la} \\ \text{pieza conectada} \end{array} \right) \cdot \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \quad (4.11)$$

donde \sum_P va sobre todas las piezas conectadas posibles y $\sum_{\{n_i\}}$ va sobre todos los conjuntos ordenados n_1, n_2, \dots , es decir $\sum_{\{n_i\}} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \dots$

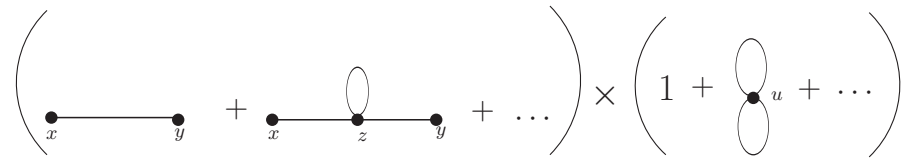
Si observamos con atención la representación diagramática de la ecuación (4.4) asociada con el cálculo de $\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)e^{-i\int_{-T}^T H_I(t)dt}\}|0\rangle^{(2)}$, vemos que podemos expresar esta suma de diagramas como un producto de la suma de las piezas conectadas por la suma de las piezas desconectadas, tomando sólo los términos que generan hasta dos vértices

$$\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)e^{-i\int_{-T}^T dt H_I(t)}\}|0\rangle^{(2)} \sim$$



La expresión general que nos genera los diagramas a todos los órdenes es en consecuencia

$$\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)e^{-i\int_{-T}^T dt H_I(t)}\}|0\rangle =$$



que es el producto de la suma de todas las piezas conectadas por la suma de todas las piezas desconectadas, generando así todos los órdenes de la serie de potencias

$$\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)e^{-i\int_{-T}^T H_I(t)dt}\}|0\rangle = \sum(\text{conectados}) \times \sum(\text{desconectados}) \quad (4.12)$$

Llamaremos de aquí en adelante diagramas conectados y desconectados en lugar de piezas de diagramas conectadas y desconectadas. Formalizando la parte de los diagramas desconectados nos queda

$$\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)e^{-i\int_{-T}^T H_I(t)dt}\}|0\rangle = \sum(\text{conectados}) \times \sum_{\{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) \quad (4.13)$$

tomando el segundo factor de los diagramas desconectados y desarrollando

$$\begin{aligned}
\sum_{\{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) &= \sum_{\{n_i\}} \left(\frac{1}{n_1!} V_1^{n_1} \frac{1}{n_2!} V_2^{n_2} \frac{1}{n_3!} V_3^{n_3} \dots \right) \\
&= \left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} V_1^{n_1} \sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} V_2^{n_2} \sum_{n_3} \frac{1}{n_3!} V_3^{n_3} \dots \right) \\
&= \left(\frac{1}{0!} V_1^0 + \frac{1}{1!} V_1^1 + \frac{1}{2!} V_1^2 + \frac{1}{3!} V_1^3 \dots \right) \times \\
&\quad \left(\frac{1}{0!} V_2^0 + \frac{1}{1!} V_2^1 + \frac{1}{2!} V_2^2 + \frac{1}{3!} V_2^3 \dots \right) \times \\
&\quad \left(\frac{1}{0!} V_3^0 + \frac{1}{1!} V_3^1 + \frac{1}{2!} V_3^2 + \frac{1}{3!} V_3^3 \dots \right) \times \dots \\
&= e^{V_1} e^{V_2} e^{V_3} \dots \\
\sum_{\{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) &= e^{\sum_i V_i} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Esta identidad es llamada *exponenciación de los diagramas desconectados* y representa la contribución de los diagramas desconectados a la función de correlación de dos puntos. La expresión para el numerador queda

$$\langle 0|T \left\{ \phi(x)\phi(y) e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \right\} |0\rangle = \sum \left(\text{conectados} \right) \times e^{\sum_i V_i} \tag{4.15}$$

Por otro lado el denominador de la función de correlación es

$$\langle 0|T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \right\} |0\rangle$$

es decir, la misma expresión que el numerador, pero sin los campos externos. De manera que haciendo el desarrollo anterior sin los campos externos obtenemos consistentemente que el denominador de la función de correlación es

$$\langle 0|T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \right\} |0\rangle = e^{\sum_i V_i} \tag{4.16}$$

Así la función de correlación sólo se sirve de los diagramas conectados

$$\begin{aligned}
\langle \Omega|T \left\{ \phi(x)\phi(y) \right\} \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} \right\} |0\rangle}{\langle 0|T \left\{ T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} \right\} |0\rangle} \\
&= \frac{\sum (\text{conectados}) \times e^{\sum_i V_i}}{e^{\sum_i V_i}} \\
\langle \Omega|T \left\{ \phi(x)\phi(y) \right\} \Omega \rangle &= \sum \left(\text{conectados} \right) \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Esto es que para el cálculo de la función de correlación de dos puntos sólo basta con calcular los propagadores contenidos en la suma de todos los diagramas conectados con dos puntos externos.

La generalización de la función de correlación de N puntos es

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_N) \} | \Omega \rangle = \sum \left(\begin{array}{l} \text{de todos los} \\ \text{diagramas} \\ \text{conectados} \\ \text{con } N \text{ puntos} \\ \text{externos} \end{array} \right) \quad (4.18)$$

4.2.3. Burbujas de vacío

Aún cuando los diagramas desconectados no sobreviven al final del cálculo, qué podemos decir acerca de ellos y cuál es su interpretación física?

Consideremos el diagrama



$$\begin{aligned} &= (-i\lambda) \int d^4z D(z-z) D(z-z) \\ &= (-i\lambda) \int d^4z \frac{d^4p_1}{(2\pi)^2} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_1(z-z)} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_2(z-z)} \\ &= (i\lambda) \int d^4z \left(\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right) e^{-iz(p_1+p_2-p_1-p_2)} \\ &= i\lambda k (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \end{aligned}$$

esto es como hacerlo directamente en el espacio de momento. La constante k absorbe las dos integrales sobre los momentos p_1 y p_2 . Pero también podemos integrar por otro camino



$$\begin{aligned} &= (-i\lambda) \int d^4z \frac{d^4p_1}{(2\pi)^2} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_1(z-z)} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_2(z-z)} \\ &= (i\lambda) \int d^4z \left(\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\ &= (i\lambda) k \int_{-T}^T dz^0 \int d^3z \\ &= i\lambda k 2T \cdot V \end{aligned}$$

esto nos dice que el proceso en el espacio-tiempo del diagrama puede pasar en algún lugar en el espacio de volumen V y en un tiempo entre $-T$ y T . Cada pieza desconectada de un diagrama

tendrá un factor de

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = 2T \cdot V \quad (4.19)$$

Recordando la expresión para la función de correlación de dos puntos en su forma (3.40)

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \left(\langle 0 | U(T, t_0) U^\dagger(x^0, t_0) \right. \\ &\quad \left. \phi_I(x) U(x^0, t_0) U^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U(y^0, t_0) U(t_0, -T) | 0 \rangle \right) \times \\ &\quad \left(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0(2T)} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

tomamos el denominador de esta y lo igualamos con su forma acabada de la ecuación (4.16)

$$e^{\sum_i V_i} = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0(2T)} \quad (4.20)$$

de donde podemos establecer que

$$e^{\sum_i V_i} \propto e^{-iE_0(2T)} \longrightarrow \sum_i V_i \propto iE_0(2T)$$

y con la ayuda de la identidad (4.19)

$$\begin{aligned} \sum_i V_i &\propto iE_0 \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)}{V}, \\ \frac{E_0}{V} &\propto \frac{i \sum_i V_i}{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

que es la densidad de energía del vacío, relativa a la energía cero del Hamiltoniano del campo libre. El lado derecho de la expresión (4.21) es independiente de T y del volumen V , lo que nos dice

$$E_0 \propto \left(\text{Volumen del espacio} \right) \quad (4.22)$$

Podemos interpretar a los diagramas desconectados como una interacción de una partícula consigo misma. Los diagramas desconectados son llamados *burujas de vacío*.

Con esto damos por terminado nuestro análisis de la función de correlación de dos puntos.

4.3. Sección de dispersión y la matriz S

La función de correlación es una cantidad abstracta que nos sirve para calcular cantidades que puedan ser medibles y útiles en el estudio de las partículas elementales. Los experimentos que

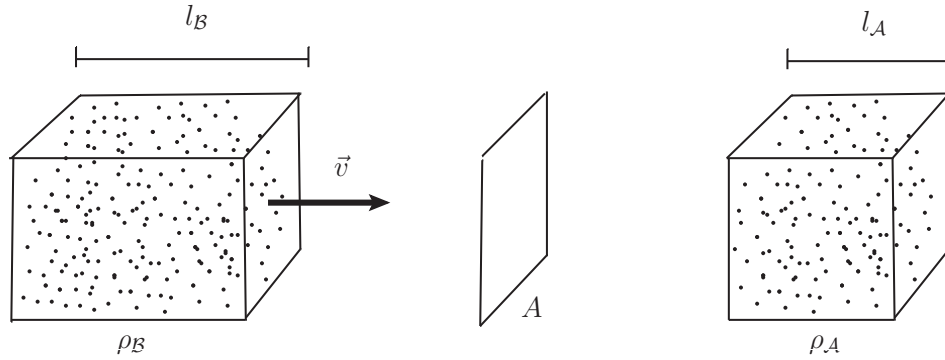


Figura 4.1: Un blanco de partículas en reposo con una densidad volumétrica ρ_A y un haz de partículas avanza a una velocidad v con una densidad volumétrica ρ_B .

prueban el comportamiento de las partículas elementales, especialmente en el régimen relativista, son experimentos de dispersión. Se hacen colisionar dos haces de partículas con un momento bien definido. La posibilidad de que se de un estado final en particular puede ser expresado en términos de la sección transversal y por lo tanto nos permite la comparación de dos experimentos con haces de diferente tamaño e intensidad.

4.3.1. Sección de dispersión

Consideremos la Fig. (4.1) donde se muestra un blanco de partículas en reposo \mathcal{A} con una densidad volumétrica ρ_A y un haz de partículas \mathcal{B} con una densidad volumétrica ρ_B . El haz de partículas avanza contra el blanco de partículas a una velocidad v .

El número total N de partículas \mathcal{B} dispersadas es proporcional a ρ_A , ρ_B , l_A , l_B y al área A común entre los dos haces de partículas

$$N = k\rho_A\rho_B l_A l_B A$$

la constante k de proporcionalidad es por definición *la sección de dispersión transversal* σ , es decir

$$\sigma = \frac{N}{\rho_A\rho_B l_A l_B A} A \quad (4.23)$$

La sección transversal σ es el área efectiva de la interacción entre la partícula incidente y la partícula blanco. En un experimento real ρ_A y ρ_B no son constantes. La densidad de partículas es generalmente más grande en el centro del haz que en las orillas. De cualquier manera asumimos que tanto el rango de interacción entre las partículas y el ancho de paquetes de onda son muy

pequeños comparados con el diámetro del haz. De aquí que $\rho_{\mathcal{A}}$ y $\rho_{\mathcal{B}}$ serán consideradas como constantes. Por lo tanto el número de eventos de partículas dispersadas lo podemos expresar mediante la integral sobre el área del haz

$$\begin{aligned} N &= \int dx^2 \sigma \rho_{\mathcal{A}} \rho_{\mathcal{B}} l_{\mathcal{A}} l_{\mathcal{B}} A \\ &= \sigma \frac{N_{\mathcal{A}}}{V_{\mathcal{A}}} l_{\mathcal{A}} \frac{N_{\mathcal{B}}}{V_{\mathcal{B}}} l_{\mathcal{B}} \int dx^2 \\ &= \sigma \frac{N_{\mathcal{A}} N_{\mathcal{B}}}{A} = \sigma n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} A = \sigma N_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

de manera que la sección transversal es una fracción del área común entre los dos bunches de partículas en $\frac{N}{N_{\mathcal{A}} N_{\mathcal{B}}}$ veces

$$\sigma = \frac{N}{N_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}}} = A \frac{N}{N_{\mathcal{A}} N_{\mathcal{B}}} \quad (4.24)$$

donde $N_{\mathcal{A}}, N_{\mathcal{B}}$ son el número total de partículas \mathcal{A} y \mathcal{B} , respectivamente. Además $n_{\mathcal{A}}$ y $n_{\mathcal{B}}$ son las densidades superficiales de partículas correspondiente a cada tipo.

4.3.2. La matriz S

Podemos representar el estado inicial de las partículas con un paquete de ondas

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \phi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle \quad (4.25)$$

donde $\phi(\vec{k})$ es la transformada de Fourier de la función de onda espacial y $|\vec{k}\rangle$ es el estado de una partícula de momento \vec{k} de la teoría interactuante.

Este estado inicial puede evolucionar a tiempos muy grandes con el operador de evolución temporal de la teoría de campo interactuante, e^{-iHt} y traslaparse con el estado final de las partículas. Este traslape nos da la amplitud de probabilidad del estado final deseado, el cual está relacionado con la sección transversal.

$$\langle \phi | \phi \rangle = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}'}}} \phi^*(\vec{k}') \langle \vec{k}' | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \phi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle \quad (4.26)$$

con $|\vec{k}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle$

$$\langle \phi | \phi \rangle = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{k}'}} \sqrt{2E_{\vec{k}}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}'}} \sqrt{2E_{\vec{k}}}} \langle 0 | a_{\vec{k}'} a_{\vec{k}}^\dagger \phi(\vec{k}') \phi(\vec{k}) | 0 \rangle$$

pero de (2.11)

$$[a_{\vec{k}'}, a_{\vec{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') = a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'}^\dagger - a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}}$$

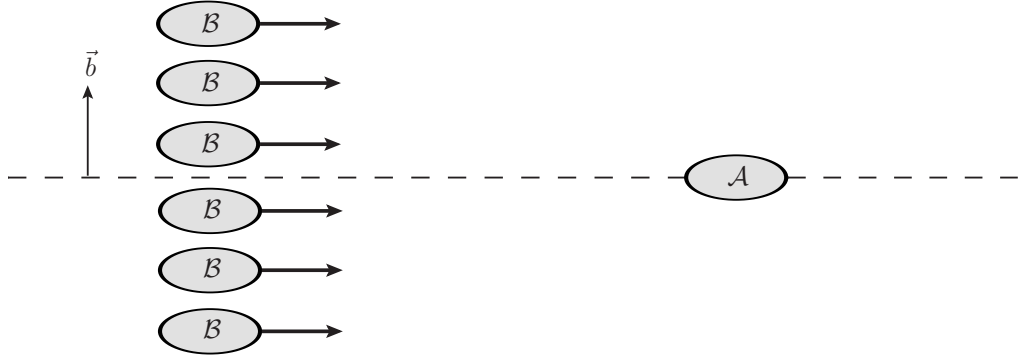


Figura 4.2: Paquetes de ondas \mathcal{B} distribuidas uniformemente dentro de un parámetro de impacto \vec{b} y desplazándose hacia un paquete de ondas \mathcal{A} en reposo.

$$\begin{aligned}
\langle \phi | \phi \rangle &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \langle 0 | \left((2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) + a_k^\dagger a_{\vec{k}'} \right) \phi^*(\vec{k}') \phi(\vec{k}) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\phi(\vec{k})|^2 \langle 0 | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\phi(\vec{k})|^2 \\
&\equiv 1
\end{aligned} \tag{4.27}$$

que es la normalización convencional, en la cual la suma de todas las probabilidades suman 1.

Consideremos la Fig. (4.2) y pensemos ahora en paquetes de ondas \mathcal{B} distribuidas uniformemente dentro de un parámetro de impacto \vec{b} y desplazándose hacia un paquete de ondas \mathcal{A} en reposo. Si tomamos el límite en el cual los paquetes de ondas se concentran alrededor de un momento \vec{p}_i podemos definir los vectores de estado iniciales $|\vec{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{in}$ y $|\vec{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{in}$ o bien $|\vec{p}_{\mathcal{A}}\vec{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{in}$, con un momento inicial bien definido.

Luego entonces la función de onda para el paquete de ondas \mathcal{B} queda en función del momento inicial $\vec{k}_{\mathcal{B}}$: $\phi_{\mathcal{B}}(\vec{k})$, es decir, expresado en el espacio de momento.

Dado que \vec{b} y $\vec{k}_{\mathcal{B}}$ son vectores ortogonales, $\vec{b} \cdot \vec{k}_{\mathcal{B}} = 0$, podemos escribir la función de onda con un factor unitario que incluya la traslación espacial

$$\phi_{\mathcal{B}}(\vec{k}_{\mathcal{B}}) e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}_{\mathcal{B}}} \tag{4.28}$$

de esta manera el estado inicial para el paquete de ondas \mathcal{B} queda

$$|\phi_{\mathcal{B}}\rangle_{ini} = \int \frac{d^3 k_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathcal{B}}}} \phi_{\mathcal{B}}(\vec{k}_{\mathcal{B}}) e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}_{\mathcal{B}}} |\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle_{ini} \tag{4.29}$$

y para el paquete de ondas \mathcal{A}

$$|\phi_{\mathcal{A}}\rangle_{ini} = \int \frac{d^3 k_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathcal{A}}}} \phi_{\mathcal{A}}(\vec{k}_{\mathcal{A}}) |\vec{k}_{\mathcal{A}}\rangle_{ini} \tag{4.30}$$

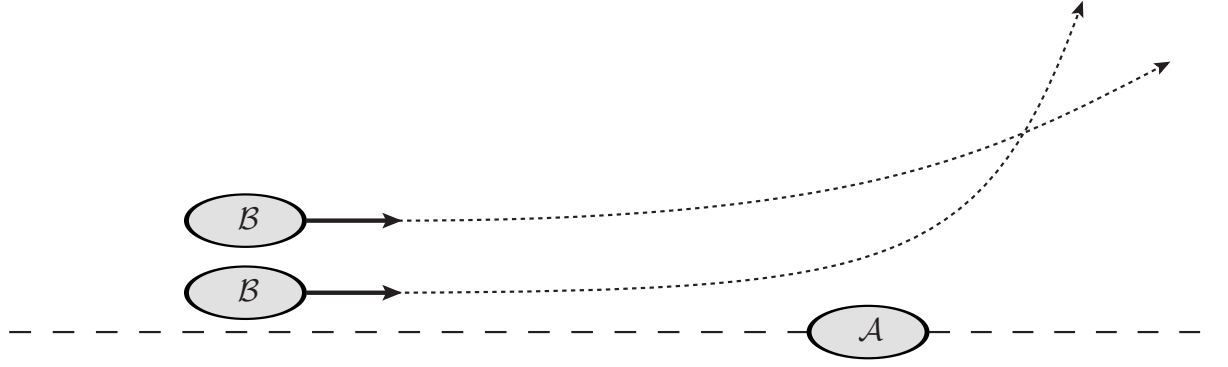


Figura 4.3: Paquetes de ondas \mathcal{B} dispersados, cada uno con un momento \vec{p}_i .

pudiéndose representar el estado inicial del sistema como

$$|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle_{ini} = \int \frac{d^3k_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathcal{A}}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathcal{B}}}} \phi_{\mathcal{A}}(\vec{k}_{\mathcal{A}}) \phi_{\mathcal{B}}(\vec{k}_{\mathcal{B}}) e^{-i\vec{b}\cdot\vec{k}_{\mathcal{B}}} |\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle_{ini} \quad (4.31)$$

Por otro lado la situación en el futuro es: paquetes de ondas \mathcal{B} dispersados, cada uno con un momento \vec{p}_i , como se muestra en la Fig. (4.3), de manera que podemos representar el estado final en el futuro asintótico como

$${}_{fin}\langle\phi_1\phi_2\cdots| = \prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \phi_f(\vec{p}_f) {}_{fin}\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots| \quad (4.32)$$

un paquete de onda por cada partícula en el estado final.

Ahora debemos calcular la probabilidad de que se presente un estado en particular, es decir

$$\mathcal{P} \equiv |{}_{fin}\langle\phi_1\phi_2\cdots|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle_{ini}|^2. \quad (4.33)$$

Dado que queremos ver la evolución temporal de un estado inicial en el pasado lejano o asintótico a un estado final en el futuro lejano o asintótico o dicho de otra manera ver el traslape entre un estado inicial y un estado final en el tiempo, podemos escribir la expresión anterior como

$${}_{fin}\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots|\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle_{ini} = \lim_{T\rightarrow\infty} \underbrace{\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots|}_{T} \underbrace{|\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle}_{-T} \quad (4.34)$$

que en términos del operador unitario temporal se ve

$$\begin{aligned} {}_{fin}\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots|\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle_{ini} &= \lim_{T\rightarrow\infty} \langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots|e^{-iH(T-(-T))}|\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle \\ &= \lim_{T\rightarrow\infty} \langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots|e^{-iH(2T)}|\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle \\ &= \langle\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots|S|\vec{k}_{\mathcal{A}}\vec{k}_{\mathcal{B}}\rangle \end{aligned} \quad (4.35)$$

definida la matriz S como

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-iH(2T)} \quad (4.36)$$

Así los estados ini y fin están relacionados por el límite de una secuencia de operadores unitarios.

Si definimos

$$S = \mathbb{I} + iT \quad (4.37)$$

La matriz S tiene la siguiente estructura: si las partículas en cuestión no interactúan, la matriz S es simplemente el operador identidad. O bien aún cuando la teoría contenga interacciones existe alguna probabilidad de que las partículas no se encuentren relacionadas unas con otras. La matriz T nos representa la parte debido a las interacciones.

La matriz S debe reflejar la conservación del cuadrimomento del sistema, así que S o T deben contener siempre un factor de $\delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f)$. De manera que podemos definir los elementos de la matriz \mathcal{M} como

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots | iT | \vec{k}_{\mathcal{A}} \vec{k}_{\mathcal{B}} \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f) \cdot i\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \longrightarrow p_f) \quad (4.38)$$

4.4. Cálculo de probabilidad de dispersión

La probabilidad para que el estado inicial $|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle$ evolucione a un estado final de dispersión de n partículas $\langle \phi_1\phi_2 \cdots |$ cuyos momentos caen en una pequeña región $d^3p_1 \cdots d^3p_n$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \longrightarrow 1, 2, \dots, n) &= |{}_{fin}\langle \phi_1\phi_2 \cdots | \phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}} \rangle_{ini}|^2 \\ &= \left| \prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \phi_f(\vec{p}_f) {}_{fin}\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}} \rangle_{ini} \right|^2 \\ &= \prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \phi_f^*(\vec{p}_f) \phi_f(\vec{p}_f) |{}_{fin}\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}} \rangle_{ini}|^2 \\ &= \prod_f \left(\int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} |\phi_f(\vec{p}_f)|^2 \right) \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^2} \frac{1}{2E_f} |{}_{fin}\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}} \rangle_{ini}|^2 \\ \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \longrightarrow 1, 2, \dots, n) &= \left(\prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |{}_{fin}\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}} \rangle_{ini}|^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

que es la probabilidad de que la partícula \mathcal{B} sea dispersada por la partícula \mathcal{A} .

Tomando el caso de un haz incidente con muchas partículas \mathcal{B} con diferentes parámetros de impacto \vec{b} , incidiendo sobre una partícula \mathcal{A} , el número total de eventos dispersados N es

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\substack{\text{todas las partículas} \\ \text{incidentes } i}} \mathcal{P}_i(\vec{b}) \\ &= \int d^2b \left(n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \mathcal{P}(\vec{b}) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Hemos asumido con anterioridad que los números de densidad $n_{\mathcal{A}}$ y $n_{\mathcal{B}}$ son constantes; además para este caso donde sólo hay una partícula \mathcal{A} , $n_{\mathcal{A}} = 1$. Así

$$\begin{aligned} N &= n_{\mathcal{B}} \int d^2b \mathcal{P}(\vec{b}) \\ \frac{N}{n_{\mathcal{B}}} &= \int d^2b \mathcal{P}(\vec{b}) \end{aligned}$$

y usando (4.24)

$$\sigma = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} N_{\mathcal{A}}} = \frac{N}{n_{\mathcal{B}}}$$

obtenemos dos igualdades para $\frac{N}{n_{\mathcal{B}}}$ de donde se desprende una expresión para σ

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d^2b \mathcal{P}(\vec{b}) \\ &= \left(\prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^2b |{}_{fin} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle_{ini}|^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Tomamos el diferencial $d\sigma$ y desarrollamos

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^2b |{}_{fin} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle_{ini}|^2 \\ &= \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^2b \int \frac{d^3 k_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathcal{A}}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathcal{B}}}} \phi_{\mathcal{A}}(\vec{k}_{\mathcal{A}}) \phi_{\mathcal{B}}(\vec{k}_{\mathcal{B}}) e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}_{\mathcal{B}}} \\ &\quad \int \frac{d^3 k'_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E'_{\mathcal{A}}}} \frac{1}{\sqrt{2E'_{\mathcal{B}}}} \phi_{\mathcal{A}}^*(\vec{k}'_{\mathcal{A}}) \phi_{\mathcal{B}}^*(\vec{k}'_{\mathcal{B}}) e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}'_{\mathcal{B}}} \\ &\quad \left({}_{fin} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \vec{k}_{\mathcal{A}} \vec{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{ini} \right) \left({}_{fin} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \vec{k}'_{\mathcal{A}} \vec{k}'_{\mathcal{B}} \rangle_{ini} \right)^* \\ &= \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int \left(d^2b e^{-i\vec{b} \cdot (\vec{k}_{\mathcal{B}} - \vec{k}'_{\mathcal{B}})} \right) \left(\prod_{i=\mathcal{A}, \mathcal{B}} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \phi_i(\vec{k}_i) \frac{d^3 k'_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E'_i}} \phi_i^*(\vec{k}_i) \right) \\ &\quad \left({}_{fin} \langle \vec{p}_f | \vec{k}_i \rangle_{ini} \right) \left({}_{fin} \langle \vec{p}'_f | \vec{k}'_i \rangle_{ini} \right)^*. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Los elementos primados son variables mudas de integración provenientes del cuadrado de la amplitud. La integral sobre d^2b es una función delta donde sólo sobrevive la componente de perpendicular del momento

$$\int d^2b e^{-i\vec{b}\cdot(\vec{k}_B - \vec{k}'_B)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_B^\perp - k_B'^\perp)$$

Asumiendo el interés únicamente por la parte debido a las interacciones podemos dejar a un lado el \mathbb{I} de S y así el producto interior de los últimos factores de la expresión anterior quedan

$$\begin{aligned} \left({}_{fin} \langle \{\vec{p}_f\} | \{\vec{k}_i\} \rangle_{ini} \right) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum k_i - \sum p_f \right) \cdot i\mathcal{M}(\{k_i\} \longrightarrow \{p_f\}) \\ \left({}_{fin} \langle \{\vec{p}'_f\} | \{\vec{k}'_i\} \rangle_{ini} \right)^* &= -(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum k'_i - \sum p'_f \right) \cdot i\mathcal{M}(\{k_i\} \longrightarrow \{p_f\}) \end{aligned}$$

Los factores que corren dentro de $\prod_{i=\mathcal{A},\mathcal{B}}$ nos dan las amplitudes de las funciones de onda $\phi_{\mathcal{A}}$ y $\phi_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=\mathcal{A},\mathcal{B}} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \phi_i(\vec{k}_i) \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E'_i}} \phi_i^*(\vec{k}_i) \right) &= \left(\int \frac{d^3k_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} |\phi_{\mathcal{A}}(\vec{k}_{\mathcal{A}})|^2 \right) \int \frac{d^3k'_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}} \times \\ &= \left(\int \frac{d^3k_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} |\phi_{\mathcal{B}}(\vec{k}_{\mathcal{B}})|^2 \right) \int \frac{d^3k'_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathcal{B}}} \\ &= \int \frac{d^3k'_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}} \int \frac{d^3k'_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

de manera que $d\sigma$ se simplifica a

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int \frac{d^3k'_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}(\{k_i\} \longrightarrow \{p_f\})|^2}{(2E_{\mathcal{A}})(2E_{\mathcal{B}})} \\ &= (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_B^\perp - k_B'^\perp) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum k_i - \sum p_f \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum k'_i - \sum p_f \right) \\ &= \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^3k'_{\mathcal{A}} d^3k'_{\mathcal{B}} \delta^{(2)}(k_B^\perp - k_B'^\perp) \delta^{(4)} \left(k'_{\mathcal{A}} + k'_{\mathcal{B}} - \sum p_f \right) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f \right) \frac{|\mathcal{M}(\{k_i\} \longrightarrow \{p_f\})|^2}{(2E_{\mathcal{A}})(2E_{\mathcal{B}})}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Para hacer el cálculo de las integrales sobre $d^3k'_A$ y $d^3k'_B$ debemos descomponer las deltas

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int d^3k'_A d^3k'_B \delta^{(2)}(k_B - k'_B) \delta^{(4)}\left(k'_A + k'_B - \sum p_f\right) \\
&= \int d^3k'_A d^3k'_B \delta(k_B^x - k'^x_B) \delta(k_B^y - k'^y_B) \\
&\quad \delta\left(E'_A + E'_B - \sum E_f\right) \delta\left(k'^x_A + k'^x_B - \sum p_f^x\right) \\
&\quad \delta\left(k'^y_A + k'^y_B - \sum p_f^y\right) \delta\left(k'^z_A + k'^z_B - \sum p_f^z\right) \\
&= \int dk'^x_A dk'^x_B \delta(k_B^x - k'^x_B) \delta\left(k'^x_A + k'^x_B - \sum p_f^x\right) \\
&\quad \int dk'^y_A dk'^y_B \delta(k_B^y - k'^y_B) \delta\left(k'^y_A + k'^y_B - \sum p_f^y\right) \\
&\quad \int dk'^z_A dk'^z_B \delta\left(E'_A + E'_B - \sum E_f\right) \delta\left(k'^z_A + k'^z_B - \sum p_f^z\right)
\end{aligned}$$

con excepción de la integral cuyo argumento es la $\delta(E'_A + E'_B - \sum E_f)$, todas las demás integrales valen uno cada una. Así

$$\begin{aligned}
I &= \int dk'^z_A \delta\left(E'_A + E'_B - \sum E_f\right) \\
&= \int dk'^z_A \delta\left(\sqrt{k'^2_A + m_A^2} + \sqrt{k'^2_B + m_B^2} - \sum E_f\right)
\end{aligned}$$

por conservación de momento

$$k_A + k_B = \sum p_f$$

$$I = \int dk'^z_A \delta\left(\sqrt{k'^2_A + k'^y2_A + k'^z2_A + m_A^2} + \sqrt{k'^2_B + k'^y2_B + \left(\sum p_f^z - k'^z_A\right)^2 + m_B^2} - \sum E_f\right)$$

con un cambio de variable adecuado se resuelve directamente

$$u = \sqrt{k'^2_A + k'^y2_A + k'^z2_A + m_A^2} + \sqrt{k'^2_B + k'^y2_B + \left(\sum p_f^z - k'^z_A\right)^2}$$

$$du = \left(\frac{k'^z_A}{E_A} - \frac{k'^z_B}{E_B}\right) dk'^z_A$$

de modo que

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{du}{\frac{k'^z_A}{E_A} - \frac{k'^z_B}{E_B}} \delta\left(u - \sum E_f\right) \\
&= \frac{1}{\left|\frac{k'^z_A}{E_A} - \frac{k'^z_B}{E_B}\right|} \\
&= \frac{1}{|v_A - v_B|}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

De tal manera que la forma final de la relación entre los elementos de la matriz S y la sección transversal queda

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(k_A, k_B \longrightarrow \{p_f\})|^2}{(2E_A)(2E_B)|v_A - v_B|} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_A + k_B - \sum p_f \right). \quad (4.45)$$

Con antelación asumimos que el estado inicial evoluciona a un estado final cuyas partículas caen alrededor de una pequeña región de momento dp_i . En congruencia con esto los paquetes de onda en el espacio de momento están centrados en \vec{p}_A y \vec{p}_B , esto significa que podemos evaluar todos los factores que son funciones de \vec{k}_A y \vec{k}_B en \vec{p}_A y \vec{p}_B

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}(p_A, p_B \longrightarrow \{p_f\})|^2}{(2E_A)(2E_B)|v_A - v_B|} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(P - \sum p_f \right) \quad (4.46)$$

con

$$P = p_A + p_B$$

y así toda la dependencia sobre las formas de los paquetes de onda han desaparecido. Integrando $d\sigma$

$$\int d\sigma = \frac{|\mathcal{M}(p_A, p_B \longrightarrow \{p_f\})|^2}{(2E_A)(2E_B)|v_A - v_B|} \left(\prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(P - \sum p_f \right) \quad (4.47)$$

definimos

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(P - \sum p_f \right) \quad (4.48)$$

conocida como espacio fase invariante.

4.4.1. Sección transversal para procesos dos a dos

Para el caso de dos partículas en el estado final, podemos evaluar las integrales del espacio fase en el sistema de referencia centro de masa. Designamos a los momentos finales de dos partículas como p_1 y p_2

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{2\pi} \frac{1}{(2E_1)(2E_2)} (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_{cm} - (p_1 + p_2)) \quad (4.49)$$

La función delta garantiza que el momento final total sea igual al momento inicial total

$$\begin{aligned} P_{cm} &= \sum p_f \\ p_A + p_B &= p_1 + p_2 \end{aligned}$$

y el momento en el centro de masa es igual a cero

$$P_{cm} = p_A + p_B = 0 = p_1 + p_2.$$

Para hacer la integración descomponemos primero la delta y después integramos sobre dp_2

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{(16\pi^2)} \frac{\delta(E_{cm} - (E_1 + E_2))}{(E_1 E_2)} \int d^3 p_2 \delta^{(3)}(\vec{P}_{cm} - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{(16\pi^2)} \frac{1}{(E_1 E_2)} \delta(E_{cm} - (E_1 + E_2)) \\ &= \int \frac{dp_1 p_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{(16\pi^2)} \frac{1}{(E_1 E_2)} \delta(E_{cm} - (E_1 + E_2)) \end{aligned}$$

con E_{cm} energía del centro de masa

$$\begin{aligned} E_{cm} &= E_A + E_B = 0 = E_1 + E_2 \\ E_1 &= \sqrt{p_1^2 + m_1^2} \\ E_2 &= \sqrt{p_2^2 + m_2^2} \\ d\Omega &= \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{dp_1 d\Omega p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \delta(\sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2} - E_{cm})$$

mediante el cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2} \\ du &= \left(\frac{p_1}{E_1} - \frac{p_2}{E_2} \right) dp_1 \\ (u - E_2)^2 - m_2^2 &= p_1^2 \\ \sum p_f &= p_1 + p_2 \end{aligned}$$

la integral se transforma

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega \int \frac{du (u - E_2)^2 - m_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2 \left(\frac{p_1}{E_1} - \frac{p_2}{E_2} \right)} \delta(u - E_{cm}) \\ &= \int d\Omega \frac{(E_{cm} - E_2)^2 - m_1^2}{16\pi^2 (E_2 p_1 - E_1 p_2)} \\ &= \int d\Omega \frac{E_1^2 - m_1^2}{16\pi^2 (E_2 p_1 - E_1 p_2)} \\ &= \int d\Omega \frac{p_1^2}{16\pi^2 (E_2 p_1 - E_1 p_2)} \end{aligned}$$

por conservación de momento $|\vec{p}_1| = -|\vec{p}_2|$

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega \frac{|\vec{p}_1||\vec{p}_1|}{16\pi^2(E_2 + E_1)|\vec{p}_1|} \\ &= \int d\Omega \frac{|\vec{p}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

de manera que $d\sigma$ para dos partículas en el estado final queda

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} d\Omega \frac{|\vec{p}_1|}{16\pi^2 E_{cm}}, \quad (4.51)$$

o bien

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{E_A E_B |v_A - v_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{64\pi^2 E_{cm}} |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p_1, p_2)|^2 \quad (4.52)$$

que es la sección transversal diferencial con respecto al ángulo sólido en el sistema de referencia centro de masa.

4.4.2. Cálculo diagramático de los elementos de la matriz S

Recordando que la matriz S es un operador de evolución temporal en el límite para tiempos muy grandes, con $t_0 = -T$

$$S = e^{-iH(T-t_0)} = e^{-iH(2T)}$$

establecimos que

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots | e^{-iH(2T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

La idea ahora es expresar los estados inicial $|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$ y final $|\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots\rangle$ en términos de la teoría libre tal como lo hicimos con el estado $|\Omega\rangle$ en el desarrollo de la función de correlación (3.35)

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle$$

De manera análoga podemos decir

$$|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} e^{-iHT} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_0 \quad (4.53)$$

En el desarrollo de $|\Omega\rangle$ usamos el hecho de que el vacío era el estado de energía más bajo. Ahora sólo podemos usar la afirmación mucho más débil: con las partículas inicial y final bien

separadas que tienen la energía más baja consistente con el valor del momento diferente de cero predeterminado.

Definimos $|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_0$ como el estado de energía más baja. Siendo así podemos reescribir la matriz S

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} {}_0 \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | e^{-iH(2T)} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \quad (4.54)$$

Sea

$$\begin{aligned} U &= e^{-iH(T-(-T))} = e^{-iH_0(T-(-T))} e^{iH_0(T-(-T))} e^{-iH(T-(-T))} \\ &= e^{-iH_0(T-(-T))} U_c \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde

$$U_c = e^{iH_0(T-(-T))} e^{-iH(T-(-T))} \quad (4.56)$$

es un operador idéntico a (3.15) pero con límites diferentes y que además puede ser expresado de la forma (3.25)

$$U_c = T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T dt H(t)_I} \right\}. \quad (4.57)$$

Esto nos permite decir que nuestro nuevo operador U de la ecuación (4.55) es proporcional a U_c , lo que implica que la expresión (4.54) queda

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = k \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} {}_0 \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \quad (4.58)$$

donde k acumula todos los factores de proporcionalidad. Si nos limitamos al caso de dos partículas en el estado final se reduce a

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | S | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = k \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} {}_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0. \quad (4.59)$$

4.4.3. Elementos de la matriz S en la teoría ϕ^4

Calcularemos ahora los elementos de matriz en términos de diagramas de Feynman en teoría ϕ^4 .

4.4.3.1. Contribución a orden más bajo

La contribución a orden cero es:

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \mathbb{I} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 &= {}_0\langle \vec{p}_1 | \vec{p}_A \rangle_0 \langle \vec{p}_2 | \vec{p}_B \rangle_0 + {}_0\langle \vec{p}_1 | \vec{p}_B \rangle_0 \langle \vec{p}_2 | \vec{p}_A \rangle_0 \\
 &= 2E_A (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_A - \vec{p}_1) 2E_B (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \\
 &\quad 2E_B (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_B - \vec{p}_1) 2E_A (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \\
 &= 2E_A 2E_B (2\pi)^6 (\delta(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \delta(\vec{p}_B - \vec{p}_1) \delta(\vec{p}_A - \vec{p}_2)) \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

Las funciones delta obligan al estado final a ser idéntico al estado inicial. Este término es parte del \mathbb{I} de $S = \mathbb{I} + i\mathbb{T}$ y no contribuye a la matriz de dispersión. Definimos una función delta con una línea

$$\delta(p_i - p_j) \equiv \begin{array}{ccc} \bullet & \text{-----} & \bullet \\ & p_i & p_j \end{array}$$

Con esta definición podemos hacer una representación diagramática de la contribución a orden cero

$${}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \mathbb{I} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = \begin{array}{c} 1 \\ | \\ A \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ B \end{array} + \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \diagdown & / \\ A & B \end{array} \quad (4.61)$$

En estos diagramas las líneas no están conectadas entre sí.

4.4.3.2. Contribución a primer orden

La contribución a orden uno:

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle |i\mathbb{T}| \rangle_0^{(1)} &\equiv {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \left\{ -i \int_{-T}^T H_I(t) dt \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \\
 &= {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ -i \int_{-T}^T \int d^3 \vec{x} \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \vec{x}) dt \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \\
 &= {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 x T \{ \phi_I^4(x) \} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0
 \end{aligned}$$

usando el teorema de Wick

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle |i\mathbb{T}| \rangle_0^{(1)} &= {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 x N \{ \phi_I^4(x) + \text{contracciones} \} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \\
 &= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 x_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ \phi \phi \phi \phi + \overline{\phi} \phi \phi \phi + \overline{\phi} \phi \overline{\phi} \phi \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0. \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

El primer término es el producto con ordenamiento normal y encierra 4! formas de combinarse. Los términos segundo y tercero son los dos tipos de contribuciones con contracciones que aparecen en el producto de cuatro campos. Dado que los estados externos $|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle_0$ y $|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0$ no son los estados base de la partícula libre, entonces los términos que no están completamente contraídos no necesariamente se anulan.

Antes de calcular la contribución de los dos tipos de términos observemos que:

$$\begin{aligned}
\phi_I^+(x)|\vec{p}\rangle_0 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} e^{-ik \cdot x} \left([a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}} \right) |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} e^{-ik \cdot x} (2\pi)^3 \delta(k - p) |0\rangle \\
&= e^{-ip \cdot x} |0\rangle \\
{}_0\langle \vec{p} | \phi_I^+(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{k}} e^{ik \cdot x} \\
\phi_I^-(x)|\vec{p}\rangle_0 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} e^{-ik \cdot x} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\
{}_0\langle \vec{p} | \phi_I^-(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \langle 0 | e^{ik \cdot x} a_{\vec{p}} a_{\vec{k}}^\dagger \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \langle 0 | e^{ik \cdot x} \delta(k - p) \\
&= \langle 0 | e^{ip \cdot x}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

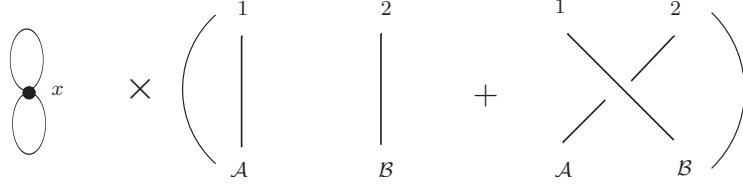
Definimos la *contracción de operadores de campo con estados externos* como

$$\begin{aligned}
\overline{\phi_I^+(x)|\vec{p}\rangle} &= e^{-ip \cdot x} \equiv \overline{\phi_I(x)|\vec{p}\rangle} \\
\overline{\langle \vec{p} | \phi_I^-(x)} &= e^{ip \cdot x} \equiv \overline{\langle \vec{p} | \phi_I(x)}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Ahora bien, la contribución del término $\overline{\phi\phi\phi\phi}$ es:

$$\begin{aligned}
{}_0\langle \vec{p}_1\vec{p}_2 | \int d^4x N \left\{ \overline{\phi\phi\phi\phi} \right\} | \vec{p}_A\vec{p}_B \rangle_0 &= \int d^4x D(x-x) D(x-x) {}_0\langle \vec{p}_1\vec{p}_2 | \vec{p}_A\vec{p}_B \rangle_0 \\
&= \int d^4x D(x-x) D(x-x) \\
&\quad \delta(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \delta(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \delta(\vec{p}_B - \vec{p}_1)
\end{aligned} \tag{4.65}$$

que en términos diagramáticos queda



Las funciones delta obligan a los estados finales a ser idénticos a los estados iniciales, lo que coloca a este término en la matriz unitaria \mathbb{I} de S .

La contribución del término $\overline{\phi\phi\phi\phi}$

$$\begin{aligned}
{}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|\int d^4xN\left\{\overline{\phi\phi\phi\phi}\right\}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 &= \int d^4xD(x-x){}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|N\left\{(\phi^++\phi^-)(\phi^++\phi^-)\right\}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 \\
&= \int d^4xD(x-x) \\
&\quad {}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|N\left\{(\phi^+\phi^++\phi^+\phi^-+\phi^-\phi^++\phi^-\phi^-)\right\}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 \\
&= \int d^4xD(x-x) \\
&\quad {}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|(\phi^+\phi^++\phi^-\phi^++\phi^-\phi^++\phi^-\phi^-)|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0
\end{aligned} \tag{4.66}$$

dado que sólo sobreviven los términos con igual número de a 's que de a^\dagger 's, la expresión se reduce al cálculo de $\phi^-\phi^+$. Esto lo podemos hacer expresando los estados en función del vacío de la partícula libre o bien usando directamente los resultados de (4.63) y (4.64), tal como lo haremos aquí

$$\begin{aligned}
\int d^4xD(x-x){}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|\phi^-\phi^+|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 &= \int d^4xD(x-x) \\
&\quad \left({}_0\langle\overline{\vec{p}_1}|\overline{\phi^-\phi^+}|\vec{p}_A\rangle_0{}_0\langle\vec{p}_2\vec{p}_B\rangle_0+ \right. \\
&\quad {}_0\langle\overline{\vec{p}_1}|\overline{\phi^-\phi^+}|\vec{p}_B\rangle_0{}_0\langle\vec{p}_2\vec{p}_A\rangle_0+ \\
&\quad {}_0\langle\overline{\vec{p}_2}|\overline{\phi^-\phi^+}|\vec{p}_A\rangle_0{}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_B\rangle_0+ \\
&\quad \left. {}_0\langle\overline{\vec{p}_2}|\overline{\phi^-\phi^+}|\vec{p}_B\rangle_0{}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_A\rangle_0 \right) \\
&= \int d^4xD(x-x) \\
&\quad \left(e^{-i(p_A-p_1)\cdot x}\delta(\vec{p}_B-\vec{p}_2)+ \right. \\
&\quad e^{-i(p_B-p_1)\cdot x}\delta(\vec{p}_A-\vec{p}_2)+ \\
&\quad e^{-i(p_A-p_2)\cdot x}\delta(\vec{p}_B-\vec{p}_1)+ \\
&\quad \left. e^{-i(p_B-p_2)\cdot x}\delta(\vec{p}_A-\vec{p}_1) \right)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Definimos *lineas externas*

$$\begin{aligned}
 \overline{\phi_I(x)|\vec{p}} &\equiv \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \text{---} \leftarrow p \\ x \end{array} \\
 \langle \vec{p}|\phi_I(x) &\equiv \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow p \\ \bullet \\ \diagdown \\ x \end{array}
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Los diagramas de Feynman para los elementos de matriz de S tendrán líneas externas en lugar de puntos externos como en la función de correlación. De modo que la contribución del término $\overline{\phi\phi\phi\phi}$ en la representación diagramática queda:

$${}_0\langle \vec{p}_1\vec{p}_2|\int d^4x N\{\overline{\phi\phi\phi\phi}\}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 \equiv \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \bullet \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

La integración $\int d^4x$ produce una conservación de momento dada por una función delta en cada vértice incluyendo el momento externo, así estos diagramas describen de nuevo los procesos en los cuales los estados inicial y final son idénticos, es decir que estos términos tampoco contribuyen a la matriz de dispersión.

El término $\phi\phi\phi\phi$:

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle \vec{p}_1\vec{p}_2|\int d^4x N\{\phi\phi\phi\phi\}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 &= {}_0\langle \vec{p}_1\vec{p}_2|\int d^4x (\phi^+\phi^+\phi^+\phi^+ + \phi^-\phi^+\phi^+\phi^+ + \\
 &\quad \phi^-\phi^-\phi^+\phi^+ + \phi^-\phi^-\phi^-\phi^+) |\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

hemos usado el resultado (3.59) y omitido el número de veces que se repiten los términos. De igual manera sólo sobrevive el término con igual número de a 's que de a^\dagger 's

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle \vec{p}_1\vec{p}_2|\int d^4x N\{\phi\phi\phi\phi\}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 &= \int d^4x {}_0\langle \vec{p}_1\vec{p}_2|(\phi^-\phi^-\phi^+\phi^+)|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 \\
 &= \int d^4x {}_0\langle \vec{p}_1\vec{0}|e^{ip_2\cdot x}\phi^-\phi^+e^{-ip_A\cdot x}|\vec{0}\vec{p}_B\rangle_0 \\
 &= \int d^4x e^{-i(p_B-p_1)\cdot x} e^{-i(p_A-p_2)\cdot x} \\
 &= (4!) \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)
 \end{aligned}$$

en el último paso hemos recuperado los factores omitidos: $(4!)$ corresponde al número de formas de hacer el producto $\phi\phi\phi\phi$ y el $\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)$ que acompaña a la integral a primer orden. Así

$${}_0\langle \vec{p}_1\vec{p}_2|\int d^4x N\{\phi\phi\phi\phi\}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 = -i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \tag{4.70}$$

cuya representación diagramática es

$${}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \int d^4x N\{\phi\phi\phi\phi\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \equiv \begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathcal{A} \qquad \mathcal{B} \end{array} = -i\lambda(2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - p_1 - p_2)$$

de nuevo aparece la función delta que representa la conservación del momento final respecto al momento inicial. Pero hay una variante importante en esta delta, la suma de los momentos iniciales $p_A + p_B$ significa una interacción entre las partículas \mathcal{A} y \mathcal{B} . Después de esta interacción se ponen de manifiesto los momentos finales p_1 y p_2 de las partículas, cuya suma $p_1 + p_2$ debe ser igual a la suma de los momentos iniciales. Esta contribución se ubica en la matriz \mathbb{T} .

La contribución total a primer orden en términos de los diagramas es la suma de todos los obtenidos

$${}_0\langle i\mathbb{T} \rangle_0^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{loop } x \\ \bullet \end{array} \times \left(\begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ | \qquad | \\ \mathcal{A} \qquad \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{A} \qquad \mathcal{B} \end{array} \right) + \\ + \begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ | \qquad | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ | \qquad | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \\ + \begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \mathcal{A} \qquad \mathcal{B} \end{array} \end{array} \quad (4.71)$$

Pero sólo el último diagrama contribuye a la matriz de dispersión, así que

$${}_0\langle i\mathbb{T} \rangle_0^{(1)} = \begin{array}{c} 1 \qquad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \mathcal{A} \qquad \mathcal{B} \end{array} = -i\lambda(2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - p_1 - p_2) \quad (4.72)$$

que es exactamente de la forma $i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_1 - p_2)$ con $\mathcal{M} = -\lambda$. Es decir, es igual a la expresión 4.38

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots | i\mathbb{T} | \vec{k}_{\mathcal{A}} \vec{k}_{\mathcal{B}} \rangle = i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f)$$

A este orden de contribución podemos ver que la expresión que nos relaciona los elementos de la matriz de interacción de los estados interactuantes con los elementos de la matriz de los estados externos, expresión (4.59)

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | i\mathbb{T} | \vec{p}_{\mathcal{A}} \vec{p}_{\mathcal{B}} \rangle = k \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \right\} | \vec{p}_{\mathcal{A}} \vec{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0$$

vemos la igualdad entre

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | i\mathbb{T} | \vec{p}_{\mathcal{A}} \vec{p}_{\mathcal{B}} \rangle = {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | i\mathbb{T} | \vec{p}_{\mathcal{A}} \vec{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \quad (4.73)$$

Lo que implica que el cálculo del valor esperado para la matriz de dispersión es igual que en teoría ϕ^4 pura, en otras palabras la constante de proporcionalidad que los relaciona vale 1.

4.4.3.3. Contribución a segundo orden

Veamos la contribución a orden dos es

$$\begin{aligned} {}_0\langle | i\mathbb{T} | \rangle_0^{(2)} &\equiv {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \frac{2!}{2!} (4!)^2 (-i)^2 \int_{-T}^T dt_1 dt_2 T \{ H_I(t_1) H(t_2)_I \} | \vec{p}_{\mathcal{A}} \vec{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \\ &= \frac{2!}{2!} (4!)^2 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \{ \phi_I^4(x) \phi_I^4(y) \} | \vec{p}_{\mathcal{A}} \vec{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \\ &= (-i\lambda)^2 \int d^4x d^4y {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \{ \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y \} | \vec{p}_{\mathcal{A}} \vec{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

con $\phi_x, \phi_y \equiv \phi_I(x), \phi_I(y)$. Tomando como referencia el desarrollo hecho para la contribución a segundo orden para la función de correlación a dos puntos y considerando que para el actual caso los términos que no están completamente contraídos no necesariamente se anulan, los diferentes

tipos de contracciones son

$$\begin{aligned}
{}_0\langle i\mathbb{T} | \rangle_0^{(2)} &= (-i\lambda)^2 {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \int d^4x d^4y \\
&N \left\{ \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y + \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \right. \\
&\phi_x \phi_x \phi_x \overbrace{\phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \\
&\overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \\
&\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \\
&\overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \\
&\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \\
&\overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} + \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} \left. \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Para el cálculo del valor esperado de los primeros tres términos es importante observar que tendremos ocho, seis y seis campos sin contracciones en el primer, segundo y tercer términos respectivamente. Esto significa que:

$$\begin{aligned}
N \{ {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \} &= \left(\text{Diagramas} \right) \times \langle 0 | \phi^- \phi^- \phi^+ \phi^+ | 0 \rangle = 0 \\
N \left\{ {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right\} &= \left(\text{Diagramas} \right) \times \langle 0 | \phi^- \phi^+ | 0 \rangle = 0 \\
N \left\{ {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi_x \phi_x \phi_x \overbrace{\phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right\} &= \left(\text{Diagramas} \right) \times \langle 0 | \phi^- \phi^+ | 0 \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Así la contribución a segundo orden se reduce un poco

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle |i\mathbb{T}| \rangle_0^{(2)} = & \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \left((D(x-x))^2 \phi_y^- \phi_y^- \phi_y^+ \phi_y^+ + \right. \\
 & D(x-x)D(y-y) (\phi_x^- \phi_x^- \phi_y^+ \phi_y^+ + \phi_x^- \phi_y^- \phi_x^+ \phi_y^+) + \\
 & D(x-x)D(x-y) \phi_y^- \phi_y^- \phi_y^+ \phi_x^+ + \\
 & (D(x-y))^2 (\phi_x^- \phi_x^- \phi_y^+ \phi_y^+ + \phi_x^- \phi_y^- \phi_x^+ \phi_y^+) + \\
 & (D(x-x))^2 D(y-y) \phi_y^- \phi_y^+ + \\
 & D(x-x)D(x-y)D(y-y) \phi_x^- \phi_y^+ + \\
 & D(x-x)(D(x-y))^2 \phi_y^- \phi_y^+ + \\
 & (D(x-y))^3 \phi_x^- \phi_y^+ + (D(x-x))^2 (D(y-y))^2 + \\
 & \left. (D(x-y))^2 D(x-x)D(y-y) + (D(x-y))^4 \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

los términos que contienen $\phi^- \phi^- \phi^+ \phi^+$ no generan factores de funciones delta, lo que significa que todas las líneas están conectadas entre sí; los términos que contienen $\phi^- \phi^+$ generan un factor delta y por último los términos que sólo contienen propagadores de Feynman generan dos factores delta.

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle |i\mathbb{T}| \rangle_0^{(2)} = & \\
 & \begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\
 + \text{Diagram 4} + \dots + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
 + \text{Diagram 7} + \dots + \text{Diagram 8} + \dots + \\
 + \text{Diagram 9} + \dots + \text{Diagram 10} + \dots + \\
 + \left(\text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \dots \right) \times \left| \right|
 \end{array}
 \end{aligned} \quad (4.78)$$

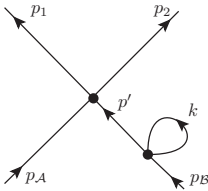
Así el valor esperado para ${}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|S|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0$ en términos de diagramas de Feynman queda

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|S|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 = & \\
 & \left[\begin{array}{l}
 | | | \times \left(1 + \text{loop} + \text{two loops} + \text{three loops} + \text{four loops} + \dots \right) \\
 + \text{loop on line} + \text{loop on line} + \text{loop on line} + \text{loop on line} + \text{loop on line} + \dots \end{array} \right] \\
 & + \left\{ \begin{array}{l}
 \text{cross} + \text{fish} + \text{box} + \text{triangle} + \dots \end{array} \right\} \\
 & + \left\{ \begin{array}{l}
 \text{cross loop} + \text{fish loop} + \text{box loop} + \text{triangle loop} + \dots \end{array} \right\} \\
 & + \left(\left(\begin{array}{l}
 \text{cross bubble} + \text{fish bubble} + \text{box bubble} + \dots \end{array} \right) \right) \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

Si quitamos los primeros dos términos nos quedamos con la matriz debido sólo a las interacciones, \mathbb{T} .

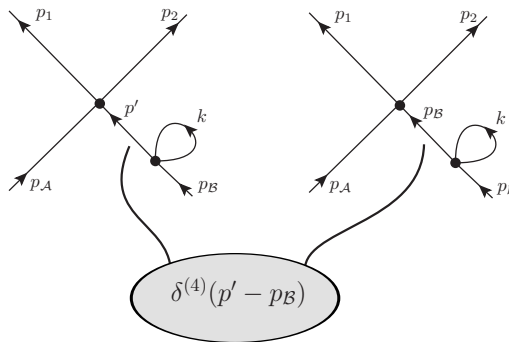
Todos los diagramas asociados entre corchetes son diagramas en los cuales las líneas externas no están conectadas completamente entre sí, por lo que no contribuyen a las interacciones. Los diagramas asociados entre llaves son diagramas con líneas externas completamente conectadas sin piezas desconectadas; el primero de estos términos nos da la contribución a primer orden, los siguientes tres nos dan la corrección a segundo orden que corresponden a la creación y aniquilación de partículas *virtuales* adicionales. Los diagramas asociados entre dobles llaves son diagramas completamente conectados con piezas desconectadas, ya con anterioridad argumentamos que la exponenciación de las piezas desconectadas nos da el cambio de energía del vacío interactuante donde tiene lugar la dispersión, de esta manera estos términos son irrelevantes para la matriz S . Los diagramas asociados entre doble paréntesis también son diagramas completamente conectados, pero con burbujas de vacío conectadas a líneas externas. Veamos un caso donde evaluamos

el término



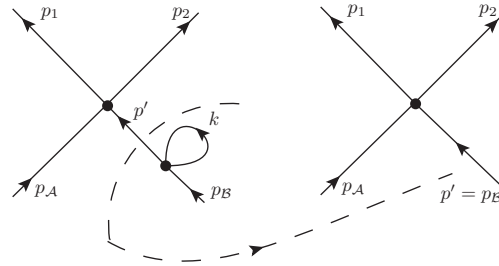
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 (4!)^2 \int d^4x d^4y e^{-ip_A \cdot x} e^{-ip_B \cdot y} D(y-y) D(x-y) e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} \\
 &= \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int d^4x d^4y \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-ip_A \cdot x} e^{-ip_B \cdot y} \\
 &\quad \left(\frac{i}{k^2 - m^2} e^{-ik \cdot (y-y)} \right) \left(\frac{i}{p'^2 - m^2} e^{-ip' \cdot (x-y)} \right) e^{ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot x} \\
 &= \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int d^4x d^4y \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i(p_A + p' - p_1 - p_2) \cdot x} e^{-i(p_B - p') \cdot y} \\
 &\quad \left(\frac{i}{k^2 - m^2} \right) \left(\frac{i}{p'^2 - m^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p' - p_1 - p_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_B - p') \\
 &\quad \left(\frac{i}{k^2 - m^2} \right) \left(\frac{i}{p'^2 - m^2} \right), \\
 &= \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) \left(\frac{i}{k^2 - m^2} \right) \left(\frac{i}{p_B^2 - m^2} \right), \tag{4.80}
 \end{aligned}$$

donde la $\delta^{(4)}(p' - p_B)$ ha obligado al estado con momento p' a tener un momento idéntico a p_B , esto es

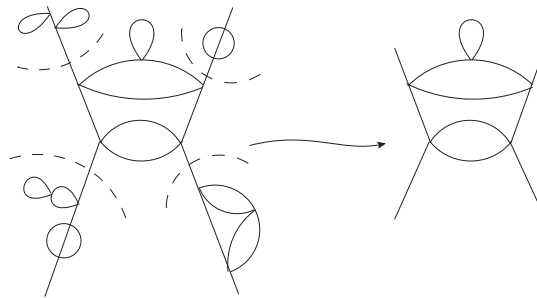


Pero como el momento de la partícula externa B que esta *on-shell* (ó *sobre la capa de masa*), es es $p_B^2 = m^2$, esto significa que el factor $\left(\frac{i}{p_B^2 - m^2} \right)$ se hace infinito. En otras palabras en el proceso de dispersión la partícula incidente que viene del infinito o pasado asintótico puede tener interacciones con el vacío que se representan con diagramas de este tipo, en donde las líneas

externas tienen inserciones de burbujas. La corrección que nos representa una burbuja conectada a una línea externa es la evolución del estado externo de menor energía $|\vec{p}\rangle_0$ hacia el estado de la teoría interactuante $|\vec{p}\rangle$. Como en este trabajo nuestra descripción de la evolución de los campos interactuantes es entre los estados ${}_0\langle\vec{p}|$ y $|\vec{p}\rangle_0$, este tipo de diagramas no será necesario tomarlo en cuenta. De tal manera que sólo consideraremos los diagramas amputados, por ejemplo



Definimos *amputación* de un diagrama al proceso de cortar y quitar en la parte de las líneas externas que contienen puntos de interacción con el vacío o burbujas. Es decir debemos remover la parte del diagrama desde el inicio de la línea externa hasta el último vértice ubicado sobre la misma, por ejemplo



De manera que los diagramas que consideramos son aquellos con líneas externas completamente conectadas entre sí y en su caso también amputadas, es decir

$$\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|i\mathbb{T}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle = \left(\begin{array}{l} \text{La suma de todos los diagramas} \\ \text{de Feynman completamente conectados} \\ \text{y amputados con momentos iniciales} \\ \vec{p}_A \text{ y } \vec{p}_B \text{ y momentos finales } \vec{p}_1 \text{ y } \vec{p}_2 \end{array} \right), \quad (4.81)$$

cuya forma analítica es

$$\langle\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n|i\mathbb{T}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle = \left(\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n|T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \right\} |\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 \right) \begin{array}{l} \text{conectados} \\ \text{y amputados} \end{array} .$$

Comparando la expresión anterior con (4.38)

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | i\mathbb{T} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = i\mathcal{M}(p_A, p_B \longrightarrow p_f) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f)$$

resulta que la matriz \mathcal{M} queda

$$i\mathcal{M}(p_A, p_B \longrightarrow p_f) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f) = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} {}_0 \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T H_I(t) dt} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right) \substack{\text{conectados} \\ \text{y amputados}} \quad (4.82)$$

Esto significa que el valor esperado para la matriz de dispersión a un orden perturbativo deseado, es la suma de los diagramas de Feynman completamente conectados y amputados.

Capítulo 5

Dispersión en la teoría sigma lineal

En este capítulo concluimos la presentación del estudio completo de la teoría ϕ^4 pero ahora con rompimiento de simetría. Esto nos permite generar la teoría *sigma lineal*. En el proceso de romper la simetría hacemos un análisis del potencial de interacción y vemos como evolucionan los términos de masa asociados a los campos interactuantes bajo la nueva teoría. Además, desarrollamos las reglas de Feynman asociadas y con ello calculamos las secciones transversales de algunos procesos relevantes.

5.1. Teoría ϕ^4 con N campos reales ϕ^i masivos

Este modelo consiste de N campos reales escalares acoplados por una interacción ϕ^4 que es simétrica bajo rotaciones de los N campos. Sea

$$\phi^i(x)_{(i=1,2,\dots,N)} \quad (5.1)$$

un conjunto de N campos gobernados por el Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\Pi^i)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi^i)^2 + V(\phi^2) \right] \quad (5.2)$$

con

$$\begin{aligned} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} &= (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N) \cdot (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N) \\ &= (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 + \dots + (\phi^N)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (\phi^i)^2 \\ &\equiv (\phi^i)^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

y con un potencial donde incluimos el término de masa:

$$V(\phi^2) = \frac{1}{2}m^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}((\phi^i)^2)^2 \quad (5.4)$$

donde $V(\phi^2)$ es una función simétrica bajo rotaciones de $\vec{\phi}$. Para configuraciones de campo clásico $\phi^i(x)$ es constante en el espaciotiempo, de esta manera $V(\phi^2)$ nos da la única contribución para H donde V es la energía potencial del campo.

Considerando el Hamiltoniano dado anteriormente y usando la ecuación de Euler-Lagrange tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) &= 0 \\ -m^2 \phi^i - \lambda (\phi^i)^3 - \partial_\mu (\partial^\mu \phi^i) &= 0 \\ (\partial_\mu^2 + m^2) \phi^i &= -\lambda (\phi^i)^3 \end{aligned} \tag{5.5}$$

que es la ecuación de movimiento en la teoría ϕ^4 . Si $\lambda = 0$ obtenemos N ecuaciones de Klein-Gordon para N campos.

5.1.1. Teoría de perturbaciones y reglas de Feynman

Nos interesa calcular las amplitudes de dispersión como una serie perturbativa en el parámetro λ . Recordando que el propagador de Feynman ha sido descrito por la contracción de dos campos

$$[\phi(x)^+, \phi(y)^-] = \overline{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x-y)$$

que no es otra cosa que la amplitud para que un campo se propague de un punto a otro bajo la acción de un operador de campo ϕ . Por ejemplo si el operador de campo ϕ^1 es el que se propaga, tendremos

$$\overline{\phi^1(x)\phi^1(y)} = D_F(x-y) \longrightarrow \begin{array}{c} \phi^1 \\ \bullet \text{-----} \bullet \\ x \qquad \qquad y \end{array} \tag{5.6}$$

Esto nos da la amplitud de propagación del campo ϕ^1 del punto y al punto x . Y como tenemos N campos podemos generalizar

$$\overline{\phi^i(x)\phi^i(y)} = D_F(x-y) \longrightarrow \begin{array}{c} \phi^i \\ \bullet \text{-----} \bullet \\ x \qquad \qquad y \end{array} \tag{5.7}$$

Si la contracción es con dos campos diferentes en diferentes posiciones

$$\overline{\phi^1(x)\phi^2(y)}$$

no tiene sentido hablar de amplitud de propagación, pues $\phi^1(x)$ es el campo ϕ^1 en la posición x y $\phi^2(y)$ es otro campo diferente ϕ^2 en otra posición también diferente y . Necesitamos medir el

mismo campo en dos posiciones diferentes para poder hablar de la amplitud de propagación de ese campo y por ende del propagador de Feynman. De manera que

$$\overline{\phi^i(x)\phi^j(y)}_{(i \neq j)} = 0 \quad (5.8)$$

Podemos generalizar ambos casos con una delta de Kroenecker

$$\overline{\phi^i(x)\phi^j(y)} = \delta^{ij} D_F(x-y) \quad (5.9)$$

Podemos calcular la contribución a primer orden de la matriz de dispersión con este modelo

$$\begin{aligned} {}_0\langle |iT_\sigma| \rangle_0^{(1)} &\equiv {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ -i \int_{-T}^T H_I(t) dt \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \\ &= {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ -i \int d^4x \frac{\lambda}{4} ((\phi^i)^2)^2 \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \end{aligned}$$

Y con la ayuda de la expresión 5.3

$$(\phi^i)^2 = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^N)^2$$

podemos obtener

$$\begin{aligned} ((\phi^i)^2)^2 &= ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^N)^2) ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^N)^2) \\ &= \sum_{i=1}^N (\phi^i)^4 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\phi^i)^2 (\phi^j)^2 \\ &= (\phi^i)^4 + (\phi^i)^2 (\phi^j)^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

de manera que la contribución a orden uno la desarrollamos como sigue

$$\begin{aligned} {}_0\langle |iT_\sigma| \rangle_0^{(1)} &= \frac{-i\lambda}{4} \int d^4x_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left\{ (\phi^i)^4 + (\phi^i \phi^j)^2 \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \\ &= \frac{-i\lambda}{4} \int d^4x_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ (\phi^i)^4 + (\phi^i \phi^j)^2 + \text{contracciones} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \\ &= \frac{-i\lambda}{4} \int d^4x_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ \phi^i \phi^i \phi^i \phi^i + \phi^i \phi^i \phi^j \phi^j + \overline{\phi^i \phi^i} \phi^i \phi^i + \overline{\phi^i \phi^i} \overline{\phi^i \phi^i} + \right. \\ &\quad \left. \overline{\phi^i \phi^i} \phi^j \phi^j + \phi^i \overline{\phi^i \phi^j} \phi^j + \overline{\phi^i \phi^i} \overline{\phi^j \phi^j} + \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \end{aligned}$$

Cuando hicimos el análisis de dispersión en teoría ϕ^4 observamos que a orden uno, sólo los términos que carecen de contracciones contribuyen a la matriz de dispersión. Es la misma situación que enfrentamos en este momento

$${}_0\langle |iT_\sigma| \rangle_0^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4} \int d^4x_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ \phi^i \phi^i \phi^i \phi^i + \phi^i \phi^i \phi^j \phi^j \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

con $4!$ formas para el primer término y $(2!)^3$ formas para el segundo. Los dos tipos de términos obtenidos son

$$\begin{aligned}
 {}_0\langle |iT_\sigma| \rangle_0^{(1)} &= \frac{-i\lambda}{4} \int d^4x_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | (4!) \phi^{i-} \phi^{i-} \phi^{i+} \phi^{i+} + (2!)^3 \phi^{i-} \phi^{i-} \phi^{j+} \phi^{j+} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \\
 &= (-6i\lambda) \int d^4x_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^{i-} \phi^{i-} \phi^{i+} \phi^{i+} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 + \\
 &\quad (-2i\lambda) \int d^4x_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^{i-} \phi^{i-} \phi^{j+} \phi^{j+} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

cuyos diagramas y valores para sus vértices son

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} i \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i \end{array} & = -6i\lambda & \begin{array}{c} j \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i \end{array} & = -2i\lambda
 \end{array}$$

Observando la relación de ambos casos y los valores de sus vértices, podemos generalizar con una delta de Kroenecker

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i \end{array} & & \begin{array}{c} l \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ j \end{array} & = -2i\lambda (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{il} \delta^{jk} + \delta^{ik} \delta^{jl})
 \end{array} \tag{5.12}$$

así si todos los campos son iguales $i = j = k = l$ sobreviven las tres deltas y obtenemos un valor para el vértice de $-6i\lambda$ y si tenemos dos pares de campos iguales sobrevive una sola delta y nos colocamos en el segundo caso.

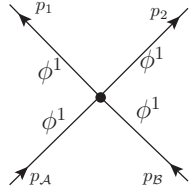
5.1.2. Sección de dispersión para algunos procesos

Con las reglas de Feynman encontradas anteriormente podemos calcular la sección transversal diferencial con respecto al ángulo sólido en el sistema centro de masa $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$ para diferentes procesos de dispersión.

5.1.2.1. $\phi^1 \phi^1 \longrightarrow \phi^1 \phi^1$

Para

$$\phi^1 \phi^1 \longrightarrow \phi^1 \phi^1 \tag{5.13}$$



$$\begin{aligned}
 &= -2i\lambda (\delta^{11}\delta^{11} + \delta^{11}\delta^{11} + \delta^{11}\delta^{11}) (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - p_1 + p_2) \\
 &= -6i\lambda(2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - p_1 + p_2)
 \end{aligned}$$

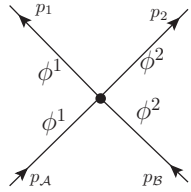
donde $\mu = -6\lambda$, por lo que la sección transversal diferencial es

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{|\mu|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{36\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{9\lambda^2}{16\pi^2 E_{cm}^2}$$

5.1.2.2. $\phi^1\phi^2 \longrightarrow \phi^1\phi^2$

Para un proceso

$$\phi^1\phi^2 \longrightarrow \phi^1\phi^2 \tag{5.14}$$



$$\begin{aligned}
 &= -2i\lambda (\delta^{12}\delta^{12} + \delta^{12}\delta^{12} + \delta^{11}\delta^{22}) (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - p_1 + p_2) \\
 &= -2i\lambda(2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - p_1 + p_2)
 \end{aligned}$$

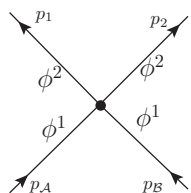
con $\mu = -2\lambda$ y la sección transversal diferencial es

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{4\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2 E_{cm}^2}$$

5.1.2.3. $\phi^1\phi^1 \longrightarrow \phi^2\phi^2$

Para un proceso

$$\phi^1\phi^1 \longrightarrow \phi^2\phi^2 \tag{5.15}$$



$$\begin{aligned}
 &= -2i\lambda (\delta^{11}\delta^{22} + \delta^{12}\delta^{12} + \delta^{12}\delta^{12}) (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - p_1 + p_2) \\
 &= -2i\lambda(2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - p_1 + p_2)
 \end{aligned}$$

con $\mu = -2\lambda$ y la sección transversal diferencial es

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{4\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2 E_{cm}^2}$$

5.1.3. Análisis de $V(\phi^i)$

En preparación para la construcción de la teoría *sigma lineal*, en esta sección analizaremos el potencial de la teoría y las implicaciones de tomar diferentes casos para el valor de la masa m^2 de los campos ϕ^i . Queremos motivar el hecho de que al haber rompimiento de simetría en el potencial, el espectro de la teoría cambia.

5.1.3.1. Caso $m^2 > 0$

El potencial para $m^2 > 0$ es

$$V(\phi^2) = \frac{1}{2}m^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}((\phi^i)^2)^2 \quad (5.16)$$

cuyas raíces están en

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^i)^2\right)(\phi^i)^2 &= 0 \\ \implies (\phi^i)^2 &= 0, \frac{-2m^2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Por otro lado, el punto crítico del potencial

$$\begin{aligned} V'(\phi^2) &= \frac{m^2}{2} + \frac{\lambda}{2}(\phi^i)^2 = 0 \\ \implies (\phi^i)^2 &= -\frac{m^2}{\lambda} \end{aligned} \quad (5.18)$$

que resulta ser mínimo ya que

$$V''(\phi^2) = \frac{\lambda}{2} > 0 \longrightarrow \text{mínimo} \quad (5.19)$$

y además $V(\phi^2)_{min} = -\frac{m^4}{4\lambda}$.

Los campos ϕ^i 's están definidos como campos escalares reales y las raíces obtenidas para el potencial $V(\phi^2)$ con $m^2 > 0$ son negativas, lo que implica que ϕ^i no es real. Esto nos obliga al análisis para $m^2 < 0$.

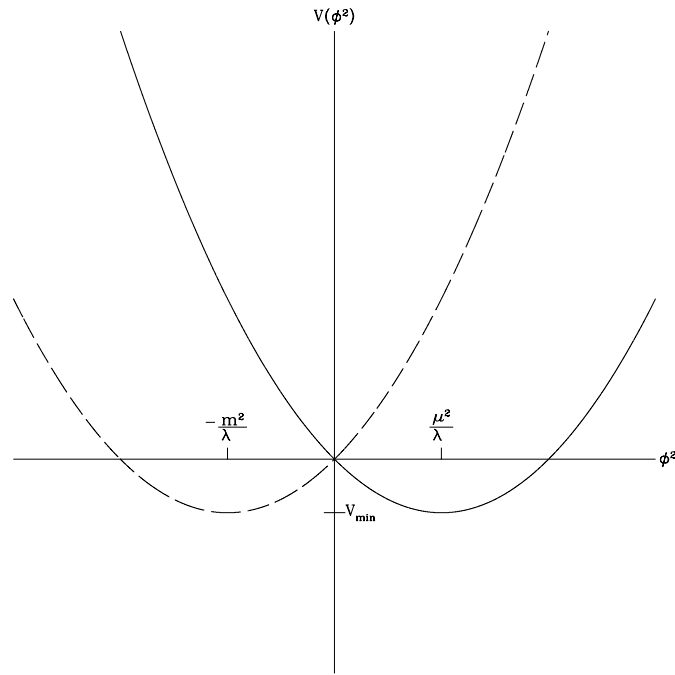


Figura 5.1: Potencial $V(\phi^2)$ para los casos $m^2 < 0$, línea continua y $m^2 > 0$, línea discontinua.

5.1.3.2. Caso $m^2 < 0$

El potencial para $m^2 < 0$ lo analizaremos considerando que ahora $m^2 = -\mu^2$, con $\mu^2 > 0$

$$V(\phi^2) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}((\phi^i)^2)^2 \quad (5.20)$$

cuyas raíces están en

$$(\phi^i)^2 = 0, \frac{2\mu^2}{\lambda}$$

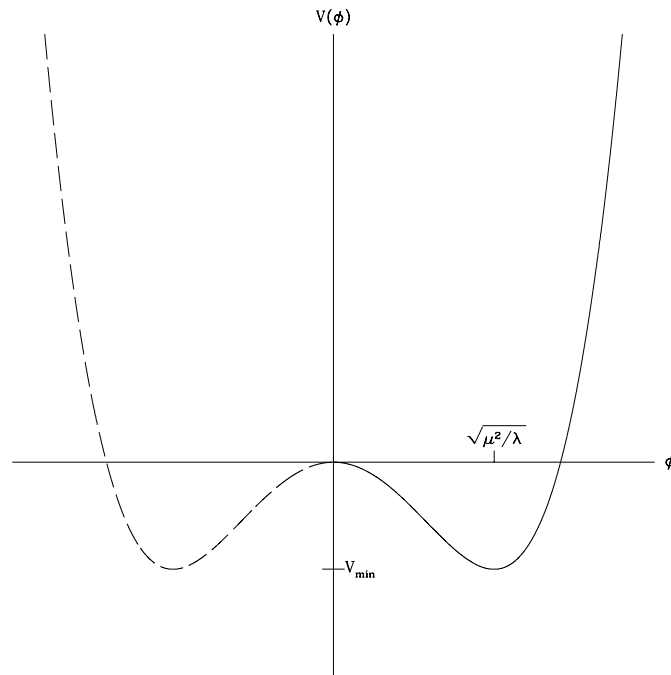
y el mínimo de potencial es

$$(\phi^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \Rightarrow V(\phi^2)_{min} = -\frac{\mu^4}{4\lambda}.$$

En la Fig. (5.1) se muestra el comportamiento de $V(\phi^2)$ en los dos casos anteriores.

Dado que para $m^2 < 0$, $V(\phi^2)$ tiene raíces reales, ahora si podemos analizar explícitamente como es $V(\phi)$,

$$\begin{aligned} (\phi_{1,2}^i) &= 0 \\ (\phi_{3,4}^i) &= \pm \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Figura 5.2: Potencial $V(\phi)$ para el caso $m^2 = -\mu^2 < 0$

Los puntos críticos del potencial

$$\begin{aligned}
 V'(\phi) &= -\mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \\
 &= (-\mu + \lambda\phi^2)\phi = 0 \\
 \phi_1^i &= 0 \\
 \phi_{2,3}^i &= \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \\
 V'' &= -\mu^2 + 3\lambda\phi^2 \\
 V''(0) &= -\mu^2 < 0 \longrightarrow \text{máximo} \\
 V''\left(\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\right) &= 2\mu^2 > 0 \longrightarrow \text{mínimos} \\
 V(0) &= 0 \equiv V_{max} \\
 V\left(\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\right) &= -\frac{\mu^4}{4\lambda} \equiv V_{min}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Observamos en la Fig. (5.2) que en $V(\phi^i = 0) = 0$ hay un máximo local, lo cual implica que el estado base de la teoría no está cerca de $\phi^i = 0$ como era de esperarse. Más bien el estado base de la teoría está cercano al mínimo de V , es decir, en $V\left(\phi^i = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\right)$. Para obtener el estado base de la teoría cercano a $\phi^i = 0$ debemos cambiar a ϕ^i cercana al mínimo de V .

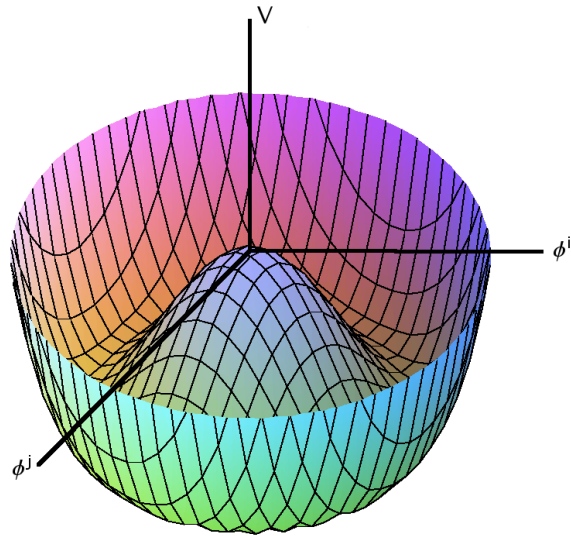


Figura 5.3: Potencial $V(\phi)$ para el caso $m^2 = -\mu^2 < 0$, rotando los N campos iguales.

Además, en la Fig. (5.3) hacemos evidente que el potencial tiene simetría rotacional ante la rotación de los N campos. Esto es una cualidad que se pierde en lo que presentamos a continuación y tiene sus implicaciones sobre el espectro de la teoría nueva.

5.2. Teoría ϕ^4 con $N - 1$ campos reales Π^i sin masa y un campo real σ masivo

Gracias a la invariancia rotacional del potencial podemos cambiar el mínimo del potencial a $\phi^i = 0$. Este cambio podemos pensarlo en la N -ésima dirección y para hacerlo redefinimos

$$\begin{aligned} \phi^i(x) &\equiv \Pi^i(x) \text{ con } i = 1, 2, \dots, N - 1 \\ \phi^N(x) &= v + \sigma(x) \end{aligned} \tag{5.23}$$

v es la constante que nos permite colocarnos en el estado base de la teoría. De manera que el potencial de la Lagrangiana se transforma como sigue

$$\begin{aligned}
 V(\phi^2) &= \frac{1}{2}m^2 \left(\sum_{i=1}^N \phi^{i2} \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\sum_{i=1}^N \phi^{i2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}m^2 \left(\sum_{i=1}^{N-1} \phi^{i2} + \phi^{N2} \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \phi^{i2} + \phi^{N2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}m^2 \left(\sum_{i=1}^{N-1} \Pi^{i2} + \Pi^{N2} \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \Pi^{i2} + \Pi^{N2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}m^2 \left(\Pi^{i2} + (v + \sigma)^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\Pi^{i2} + (v + \sigma)^2 \right)^2
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

El potencial para los $N - 1$ campos Π^i 's

$$V(\Pi^2) = \frac{1}{2}m^2\Pi^{i2} + \frac{\lambda}{4} \left(\Pi^{i2} \right)^2 \tag{5.25}$$

es idéntico al potencial original y en consecuencia tiene las mismas soluciones y mínimo de potencial que $V(\phi^2)$,

$$\begin{aligned}
 \Pi^i(x)_{1,2} &= 0 \\
 \Pi^i(x)_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} \\
 V \left(\pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \right) &= V_{min} = -\frac{\mu^4}{4\lambda}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Analicemos ahora el potencial para el N 'ésimo campo $(v + \sigma)$

$$V(v + \sigma) = \frac{1}{2}m^2(v + \sigma)^2 + \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^4$$

Las raíces para $m^2 < 0$ y con $m^2 = -\mu^2$ y $\mu^2 > 0$, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^2 \right) (v + \sigma)^2 &= 0 \\
 \sigma_{1,2} &= -v \\
 \sigma_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} - v
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

sus puntos críticos son

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial \sigma} &= -\mu^2(v + \sigma) + \lambda(v + \sigma)^3 = 0 \\
 \sigma_{c1} &= -v \longrightarrow \text{máximo} \\
 \sigma_{c2,c3} &= \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} - v \longrightarrow \text{mínimos}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

que al evaluarlos en $V(v + \sigma)$ nos dan los potenciales máximo y mínimo:

$$\begin{aligned} V_{max} &= 0 \\ V_{min} &= -\frac{1}{2}\mu^2 \left(\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \right)^4 = -\frac{\mu^4}{4\lambda} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Observando los resultados para $V(v + \sigma)$ vemos que tiene una de sus raíces en $\sigma = -v$ que también es un máximo local. Si calculamos la distancia sobre el eje de los campos entre el máximo y el mínimo de este potencial y la comparamos con la distancia entre los mismos puntos, pero en $V(\Pi)$ nos damos cuenta que son iguales. Esto significa que los puntos críticos donde se encuentran los mínimos de $V(v + \sigma)$ son en $\sigma_{c_2, c_3} = 0$, que es lo que realmente nos importa. Esta observación geométrica no siempre es fácil de hacerse. Lo que nos interesa es que el mínimo del potencial coincida con el cero del campo, en cuyos alrededores se encuentra el estado base de la teoría y eso implica hacer que el punto crítico del mínimo del potencial sea igual a cero

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} - v = 0 \\ v &= \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

que nos permite conocer el valor de v . A este proceso se le conoce como *minimizar al potencial*.

Conocida v podemos calcular las raíces, el máximo y el mínimo del potencial $V(v + \sigma)$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \\ \sigma_{3,4} &= \pm\sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = (\pm\sqrt{2}\pm 1)\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \\ \sigma_{c_1} &= \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \\ \sigma_{c_2, c_3} &= \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = (\pm 1 \pm 1)\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \end{aligned}$$

Si cambiamos de signo al potencial y a su variable de $V(\sigma)$ a $-V(-\sigma)$ y evaluamos esta nueva situación (ver Fig. (5.4)), nos damos cuenta que tiene otros valores para las raíces y los puntos críticos, de hecho son las mismas cantidades, pero con signo diferente. Esto implica que $V(\sigma) \neq -V(-\sigma)$, es decir, el potencial para el N -ésimo campo ha perdido la simetría respecto a las coordenadas originales, sin embargo preserva simetría respecto al eje que pasa por su máximo. Nuestra nueva situación es: $N - 1$ campos Π 's con un potencial máximo V_{max} en $\Pi^i = 0$ y un campo minimizado σ cuyo mínimo de potencial V_{min} sí coincide con $\sigma = 0$ donde se encuentra el estado base de la teoría.

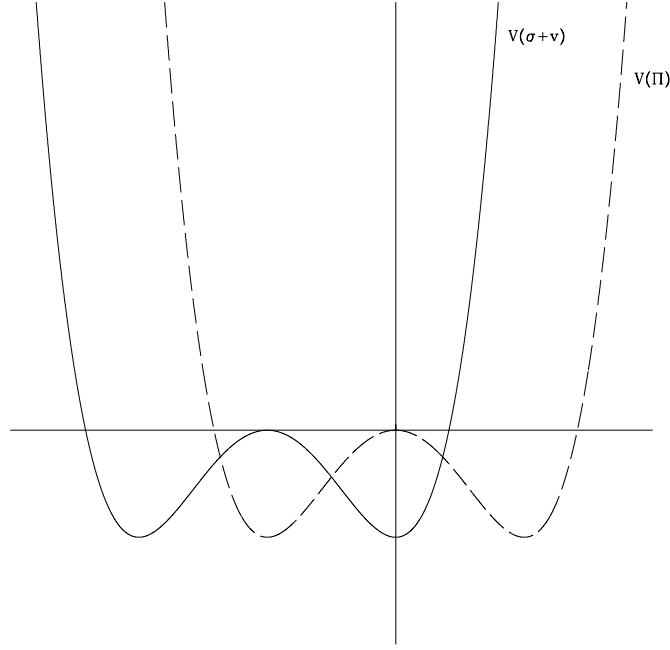


Figura 5.4: Potenciales $V(\sigma + v)$ y $V(\Pi)$ desplazados uno con respecto al otro.

Si desarrollamos el potencial de esta nueva Lagrangiana en las nuevas coordenadas al que denominaremos V

$$\begin{aligned}
 V &\equiv -\frac{1}{2}\mu^2 \left(\Pi^{i2} + (v + \sigma)^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\Pi^{i2} + (v + \sigma)^2 \right)^2 \\
 &= -\frac{1}{2}\mu^2 \left(\Pi^{i2} + v^2 + \sigma^2 + 2v\sigma \right) + \\
 &\quad \frac{\lambda}{4} \left(\Pi^{i4} + 2\Pi^{i2}v^2 + 2\Pi^{i2}\sigma^2 + 4\Pi^{i2}v\sigma + v^4 + 4v^3\sigma + 6v^2\sigma^2 + 4v\sigma^3 + \sigma^4 \right)
 \end{aligned}$$

con $v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{1}{2}\mu^2 \left(\Pi^{i2} + \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) + \sigma^2 + 2\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\sigma \right) + \\
 &\quad \frac{\lambda}{4} \left(\Pi^{i4} + 2\Pi^{i2} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) + 2\Pi^{i2}\sigma^2 + 4\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\Pi^{i2}\sigma + \left(\frac{\mu^4}{\lambda^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. 4 \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\sigma + 6 \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) \sigma^2 + 4\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\sigma^3 + \sigma^4 \right) \\
 &= \mu^2\sigma^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\Pi^{i4} + 2\Pi^{i2}\sigma^2 + 4\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\Pi^{i2}\sigma + 4\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\sigma^3 + \sigma^4 \right) - \frac{\mu^4}{4\lambda^2} \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

nos damos cuenta de manera clara que se han generado $N - 1$ campos Π sin masa denominados *bosones de Goldstone* y un campo masivo σ . Esta situación se vuelve muy interesante e importante

porque si partimos de las nuevas coordenadas como nuestra nueva situación original, tenemos entonces una teoría que puede generar términos de masa si consideramos la situación inicial de $N - 1$ campos Π y un campo σ ; o bien generar términos sin masa si partimos de $N - 1$ campos σ y un campo Π .

5.2.1. Sección de dispersión

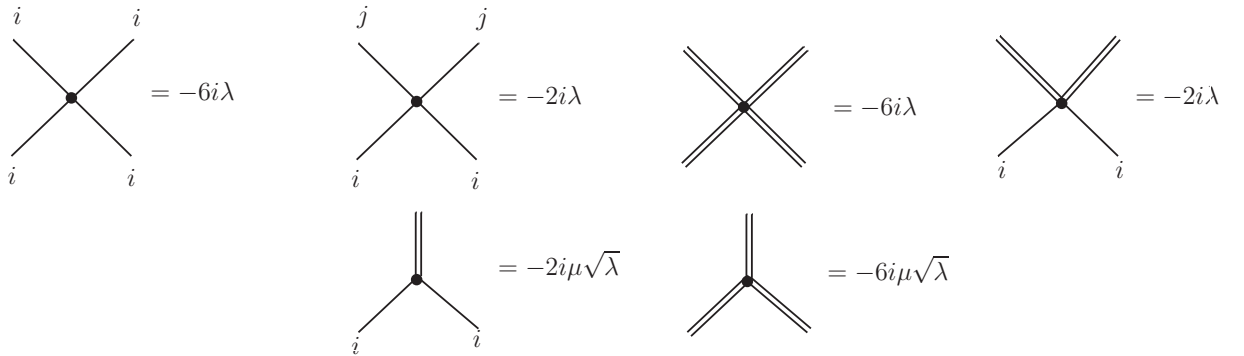
Para obtener los diferentes tipos de diagramas involucrados en esta teoría basta con observar la nueva Lagrangiana en la que utilizamos lo obtenido en la ecuación (5.31)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \Pi^i)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - (\mu^2) \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \left(\Pi^{i4} + 2\Pi^{i2} \sigma^2 + 4\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \Pi^{i2} \sigma + 4\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \sigma^3 + \sigma^4 \right) + \frac{\mu^4}{4\lambda} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \Pi^i)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} (2\mu^2) \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \Pi^{i4} - \frac{\lambda}{2} \Pi^{i2} \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4 - \sqrt{\lambda} \mu \Pi^{i2} \sigma - \sqrt{\lambda} \mu \sigma^3 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \end{aligned}$$

Para diferenciar la propagación de campos Π de la propagación del campo σ en los diagramas de Feynman, utilizaremos líneas sencillas y dobles, respectivamente. De tal manera que los propagadores son

$$\begin{aligned} \overline{\Pi^i \Pi^i} &= \overrightarrow{i \quad i} \\ \overline{\sigma \sigma} &= \overline{\overrightarrow{\quad \quad}} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Además, podemos extraer las reglas de Feynman para los vértices directamente de los términos de interacción del potencial, de manera que



El cálculo de los vértices enlistados a la derecha de los diagramas se hace simplemente tomando los coeficientes de los campos del potencial de interacción de la Lagrangiana multiplicados por las combinaciones del arreglo diagramático y hemos agregado $-i$ para completarlo. Los valores

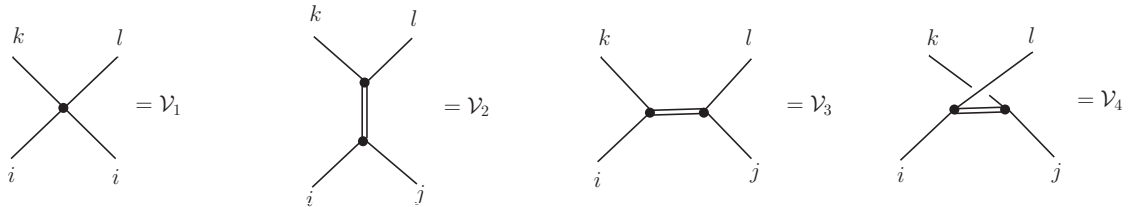
de los vértices con cuatro líneas externas son congruentes con la delta de Kroenecker obtenida en el cálculo del vértice en las coordenadas originales, expresión (5.12). Pero adicional a estos vértices cuádruples propios de la teoría ϕ^4 , también se han generado vértices triples cuyos valores van como $\sqrt{\lambda}$. Debido a que el desarrollo perturbativo en serie se hizo con una constante de acoplamiento λ y no de $\sqrt{\lambda}$, esto implica que los vértices triples generan nuevos tipos de diagramas que son la unión de dos vértices triples para dar una contribución mínima de primer orden a la matriz de dispersión. La combinación de cuatro diagramas triples generan una contribución de segundo orden y así sucesivamente. De nuevo el cálculo de la matriz de dispersión para un proceso de dos partículas en el estado inicial y dos partículas en el estado final se restringe al cálculo analítico de estos nuevos diagramas y sus combinaciones.

5.2.1.1. $\Pi^i(p_1)\Pi^j(p_2) \longrightarrow \Pi^k(p_3)\Pi^l(p_4)$

Para un proceso

$$\Pi^i(p_1)\Pi^j(p_2) \longrightarrow \Pi^k(p_3)\Pi^l(p_4)$$

los diagramas involucrados a primer orden en λ son



La amplitud de dispersión \mathcal{V}_1 ya fué calculada anteriormente, y el resto de las amplitudes de dispersión son

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= (-2i\mu\sqrt{\lambda})^2 \int \frac{dp_\sigma}{(\pi)^4} \frac{i}{p_\sigma - \mu^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_\sigma) (2\pi)^4 \delta(p_\sigma - p_3 - p_4) \\ &= \frac{-4i\mu^2\lambda}{(p_1 + p_2)^2 - \mu^2} (2\pi)^4 \delta(p_\sigma - p_3 - p_4) \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{M}_2 = \frac{-4\mu^2\lambda}{(p_1 + p_2)^2 - \mu^2}$$

y

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} &= \frac{|\mathcal{M}_2|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{16\mu^4 \lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2 ((p_1 + p_2)^2 - \mu^2)^2} \\ &= \frac{\mu^4 \lambda^2}{4\pi^2 E_{cm}^2 ((p_1 + p_2)^2 - \mu^2)^2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3 &= (-2i\mu\sqrt{\lambda})^2 \int \frac{dp_\sigma}{(\pi)^4} \frac{i}{p_\sigma - \mu^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_3 - p_\sigma) (2\pi)^4 \delta(p_2 - p_\sigma - p_4) \\ &= \frac{-4i\mu^2 \lambda}{(p_1 - p_3)^2 - \mu^2} (2\pi)^4 \delta(p_\sigma - (p_4 - p_2)) \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{M}_3 = \frac{-4\mu^2 \lambda}{(p_1 - p_3)^2 - \mu^2}$$

y

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} &= \frac{|\mathcal{M}_3|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{16\mu^4 \lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2 ((p_1 - p_3)^2 - \mu^2)^2} \\ &= \frac{\mu^4 \lambda^2}{4\pi^2 E_{cm}^2 ((p_1 - p_3)^2 - \mu^2)^2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_4 &= (-2i\mu\sqrt{\lambda})^2 \int \frac{dp_\sigma}{(\pi)^4} \frac{i}{p_\sigma - \mu^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_4 - p_\sigma) (2\pi)^4 \delta(p_2 - p_\sigma - p_3) \\ &= \frac{-4i\mu^2 \lambda}{(p_1 - p_4)^2 - \mu^2} (2\pi)^4 \delta(p_\sigma - (p_3 - p_2)) \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{M}_4 = \frac{-4\mu^2 \lambda}{(p_1 - p_4)^2 - \mu^2}$$

y

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} &= \frac{|\mathcal{M}_4|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{16\mu^4 \lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2 ((p_1 - p_4)^2 - \mu^2)^2} \\ &= \frac{\mu^4 \lambda^2}{4\pi^2 E_{cm}^2 ((p_1 - p_4)^2 - \mu^2)^2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

5.2.2. Reglas de Feynman

Entonces, en resumen, las reglas de Feynman para esta teoría son:

- En el espacio de configuración

1. Por cada propagador

$$\overline{\Pi^i \Pi^i} = D(x - y) = \overrightarrow{i \quad j}$$

$$\overline{\sigma \sigma} = D(x - y) = \overline{\overrightarrow{i \quad j}}$$

2. Por cada vértice

Diagram 1: A four-point vertex with external lines labeled k (top-left), l (top-right), i (bottom-left), and j (bottom-right). The value is $-2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})$.

Diagram 2: A four-point vertex with two double lines (representing σ) and two single lines (representing Π^i). The value is $-6i\lambda$.

Diagram 3: A three-point vertex with two double lines and one single line. The value is $-2i\lambda \delta^{ij}$.

Diagram 4: A three-point vertex with one double line and two single lines. The value is $-2i\mu\sqrt{\lambda} \delta^{ij}$.

Diagram 5: A three-point vertex with one double line and two double lines. The value is $-6i\mu\sqrt{\lambda}$.

3. Por cada línea externa

Diagram 1: A vertex with a single line entering from the left (momentum x) and a single line exiting to the right (momentum p). The value is e^{-ipx} .

Diagram 2: A vertex with a double line entering from the left (momentum x) and a double line exiting to the right (momentum p). The value is e^{-ipx} .

4. Dividir por el factor de simetría

■ En el espacio de momento

1. Por cada propagador

$$\overline{\Pi^i \Pi^j} = \frac{i \delta^{ij}}{p^2} = \overrightarrow{i \quad j}$$

$$\overline{\sigma \sigma} = \frac{i}{p^2 - 2\mu^2} = \overline{\overrightarrow{i \quad j}}$$

2. Por cada vértice

3. Por cada línea externa

4. Imponer la conservación de momento en cada vértice
5. Integrar sobre cada momento de lazo
6. Dividir por el factor de simetría

5.3. Teoría sigma lineal

Exploremos el potencial anterior con un término adicional de la forma

$$\Delta V = -a\phi^N = -a(v + \sigma(x)) \tag{5.36}$$

con $a \ll 1$.

Los ϕ^{N-1} campos no sufren ningún cambio por lo que las soluciones para Π^i son las mismas. Para el N-ésimo campo que se le ha agregado un término lineal en σ , el potencial queda

$$V = \frac{1}{2}m^2(v + \sigma)^2 + \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^4 - a(v + \sigma) \tag{5.37}$$

cuyas soluciones para $m^2 < 0$ con $m^2 = -\mu$ y $\mu > 0$ son

$$V = -\frac{1}{2}\mu^2(v + \sigma)^2 + \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^4 - a(v + \sigma) \quad (5.38)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\mu^2(v + \sigma) + \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^3 - a\right)(v + \sigma) = 0$$

$$\sigma_1 = -v \quad (5.39)$$

quedando la ecuación cúbica

$$(v + \sigma)^3 - \frac{2\mu^2}{\lambda}(v + \sigma) - \frac{4a}{\lambda} = 0$$

la cual tiene una solución real dada por la fórmula de Tartaglia para ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + px = q$ obtenida mediante el método de Cardano (ver Apéndice F):

$$v + \sigma = \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

con

$$q = \frac{4a}{\lambda}$$

$$p = -\frac{2\mu^2}{\lambda}$$

así la segunda solución para σ

$$\sigma_2 = \left(\frac{2a}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2a}{\lambda} - \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} - v$$

esta solución está condicionada a

$$-\sqrt{\left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^3} \geq \left(\frac{2a}{\lambda}\right) \geq \sqrt{\left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^3}$$

Si evaluamos la raíz en

$$\left(\frac{2a}{\lambda}\right) = \pm \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.40)$$

nos queda

$$\sigma_2 = \pm 2 \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} - v \quad (5.41)$$

que al sustituirla en el nuevo potencial (5.38) nos percatamos de que efectivamente es una raíz. Para el cálculo de los puntos críticos del potencial necesitamos la primera derivada del mismo, encontrando de nuevo una ecuación cúbica que resolvemos con el mismo método:

$$V' = -\mu^2(v + \sigma) + \lambda(v + \sigma)^3 - a = 0 \quad (5.42)$$

$$q = \frac{a}{\lambda}$$

$$p = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

de manera que el punto crítico donde se encuentra el mínimo del potencial es

$$\sigma_c = \sqrt[3]{-2 \left(\frac{\mu^2}{3\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}} - v \quad (5.43)$$

que cumple con $V'(\sigma_c) = 0$ y $V''(\sigma_c) > 0$. El mínimo para el potencial es

$$V(\sigma_c) = -\frac{1}{2}\mu^2 \left(\sqrt[3]{-2 \left(\frac{\mu^2}{3\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\sqrt[3]{-2 \left(\frac{\mu^2}{3\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)^4 - a \left(\sqrt[3]{-2 \left(\frac{\mu^2}{3\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \equiv V_{min}$$

$$V_{min} = -\frac{2}{9} (1 + \sqrt{2}) \left(\frac{\mu^4}{\lambda} \right) \quad (5.44)$$

Haciendo el cambio de $V(\sigma)$ por $-V(-\sigma)$ nos queda un potencial

$$V = \frac{1}{2}\mu^2(v - \sigma)^2 - \frac{\lambda}{4}(v - \sigma)^4 + a(v - \sigma) \quad (5.45)$$

con soluciones

$$\sigma_1 = v$$

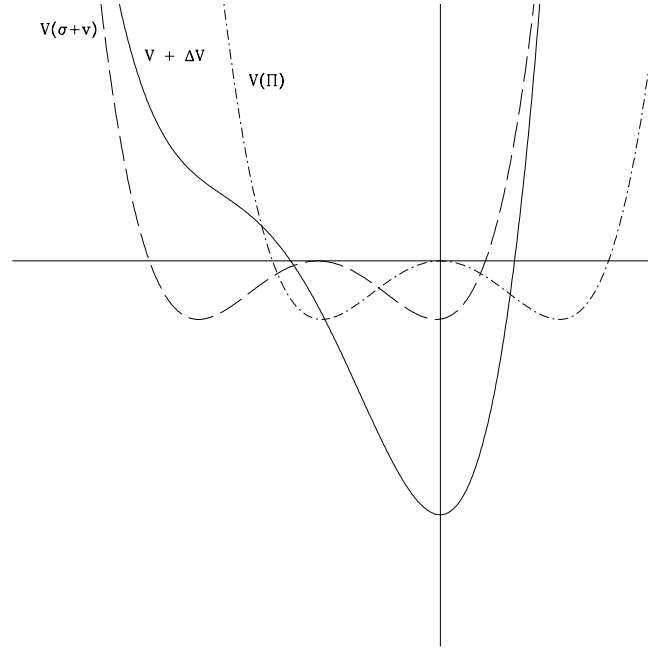
$$\sigma_2 = v - \left(\frac{2a}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{2a}{\lambda} - \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

que no coinciden con las raíces del potencial original. $V(\sigma) \neq -V(-\sigma)$ y por lo tanto no hay simetría en el potencial.

En esta situación no hay un punto crítico del potencial que coincida con alguna raíz u otra referencia geométrica que nos permita inferir el valor de v que minimiza al potencial, pero si podemos calcularlo haciendo coincidir al punto crítico del mínimo del potencial con el cero del campo,

$$\sigma_c = \sqrt[3]{-2 \left(\frac{\mu^2}{3\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}} - v \equiv 0$$

$$v = \sqrt[3]{-2 \left(\frac{\mu^2}{3\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.46)$$

Figura 5.5: Potencial $V + \Delta V$.

Esto nos permite calcular los valores de las raíces

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \pm 2\sqrt{\frac{\mu^2}{3\lambda}} \\ \sigma_2 &= \pm 2\sqrt{\frac{2\mu^2}{3\lambda}} - 2\sqrt{\mu^2 3\lambda} = \pm 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{\mu^2}{3\lambda}}\end{aligned}\quad (5.47)$$

y conocer de manera precisa el nuevo potencial, que ha perdido totalmente la simetría con el término lineal en σ y constante de acoplamiento a (ver Fig. (5.5)).

Si tomamos la expresión 5.40 podemos conocer el orden de la constante de acoplamiento

$$\begin{aligned}\left(\frac{2a}{\lambda}\right) &= \pm \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \\ a &= \frac{\sqrt{2}}{6}\mu^2 \left(2\sqrt{\frac{\mu^2}{3\lambda}}\right) \\ a &= \left(\frac{\sqrt{2}}{6}v\right)\mu^2\end{aligned}\quad (5.48)$$

que en efecto $a \ll 1$ y además nos dice que el cuadrado de la masa del Π generado va como

$$m_{\Pi}^2 \sim a \quad (5.49)$$

Conclusiones

Aún después de revisar los conceptos clásicos de la teoría libre de Klein-Gordon para partículas escalares reales, de cuantizar la teoría y luego construir los propagadores de campos que cumplan con el principio de causalidad; no imaginaba el fascinante formalismo que se avecinaba para la descripción de los campos cuánticos relativistas interactuantes.

La construcción de la función de correlación, el teorema de Wick y las definiciones de campos con orden temporal y normal, sentaron las bases del *edificio* de la teoría ϕ^4 y posteriormente, de la teoría *sigma lineal*.

Estos conceptos nos permitieron construir una bella herramienta diagramática que nos ayudó a simplificar el análisis matemático y representar adecuadamente la situación física: los diagramas de Feynman. Con ellos se logra un análisis perturbativo de las teorías ϕ^4 y sigma lineal para el cálculo de secciones de dispersión de campos cuánticos.

El análisis de campos interactuantes en teoría ϕ^4 primero para uno y después para N campos, nos permitió el estudio de procesos de dispersión entre bosones masivos de espín cero. Además nos permitió extender este tratamiento para la descripción de $N - 1$ campos sin masa y un campo masivo. Esto nos ayudó a mostrar el mecanismo mediante el cual se da la generación de masa a partir de un rompimiento de simetría en la teoría *sigma lineal* y mostrar la relación entre el parámetro de rompimiento de simetría y la masa generada.

Finalmente, es importante mencionar que las herramientas que desarrollé en este trabajo, se pueden utilizar como base para el estudio posterior de dispersión de bosones utilizando campos escalares complejos, dispersión de fermiones, etc.

Apéndice A

Notación relativista

A.1. Unidades naturales

Trabajaremos en unidades naturales donde $\hbar = c = 1$, lo cual implica que

$$[\text{longitud}] = [\text{tiempo}] = [\text{energía}]^{-1} = [\text{masa}]^{-1}.$$

Es decir, la masa m de una partícula es igual a su energía en reposo y además son iguales a su longitud inversa mc^2 y a su longitud de onda Compton inversa $\frac{mc}{\hbar}$. Por ejemplo la masa del electrón,

$$m_e = 9.109 \times 10^{-28} \text{gr} = 0.511 \text{MeV} = 3.862 \times 10^{-11} \text{cm}^{-1} \quad (\text{A.1})$$

A.2. La métrica

Consideremos dos eventos en el espacio-tiempo (x, y, z, t) y $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Generalizamos la noción de *distancia* entre dos eventos al de *intervalo* entre dos puntos en el espaciotiempo: ds . Podemos tomar la métrica

$$d^2s = d^2t + d^2x + d^2y + d^2z \quad (\text{A.2})$$

pero esta métrica no es invariante ante las transformaciones de Lorentz. Para que ds sea el mismo para todo observador, es decir, para todo sistema de referencia inercial, ds debe ser invariante ante las transformaciones de Lorentz y bajo rotaciones; así que usaremos la métrica

$$d^2s = d^2t - (d^2x + d^2y + d^2z) \quad (\text{A.3})$$

Con esta definición para ds se pueden presentar tres casos:

- $d^2s > 0$: eventos separados por un intervalo *como el tiempo* o *temporaloides* (ver Fig. 2.1)
- $d^2s < 0$: eventos separados por un intervalo *como el espacio* o *espacialoides* (ver Fig. 2.2)
- $d^2s = 0$: eventos separados por un intervalo *como la luz* o *nulos*

En el espacio, el vector (x, y, z) asociado con $d^3r = d^2x + d^2y + d^2z$ es invariante ante rotaciones y es definido positivo. Para generalizar esta idea al espaciotiempo, tenemos el problema de que el intervalo invariante ya no es definido positivo. Por lo anterior, introducimos la notación de *vector contravariante*

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\text{A.4})$$

y de *vector covariante*

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3). \quad (\text{A.5})$$

El producto interno de un vector covariante con un vector contravariante en un *invariante* (escalar):

$$x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3. \quad (\text{A.6})$$

Para nuestro caso los vectores quedan

$$x^\mu = (t, x, y, z), \quad x_\mu = (t, -x, -y, -z) \quad (\text{A.7})$$

y el producto interior es

$$x^\mu x_\mu = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \quad (\text{A.8})$$

De manera que la métrica d^2s la podemos representar en términos de vectores covariantes y contravariantes:

$$\begin{aligned} d^2s &= dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ &= dx^\mu dx_\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde se usa la convención de Einstein para suma sobre índices repetidos.

La relación entre un vector covariante y uno contravariante la podemos explorar planteando lo siguiente

$$x_\mu = K x^\mu \quad (\text{A.10})$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

donde la matriz incógnita de 4×4 es la matriz de transformación que nos da la relación entre un vector covariante y uno contravariante. Considerando que

$$x_0 = x^0, \quad x_1 = -x^1, \quad x_2 = -x^2, \quad x_3 = -x^3 \quad (\text{A.12})$$

se resuelve la matriz K

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Definimos el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

de manera que

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu. \quad (\text{A.15})$$

Además vemos que el determinante de $g_{\mu\nu}$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad (\text{A.16})$$

lo que implica que su inversa existe

$$\left(g_{\mu\nu} \right)^{-1} = \frac{1}{\det(g_{\mu\nu})} \text{Adj}(g_{\mu\nu}) = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu},$$

es decir

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

Apéndice B

Ecuaciones de Euler-Lagrange

En teoría clásica de campo la acción puede ser escrita como la integral espacial de la densidad Lagrangiana, denotada por \mathcal{L} ,

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \quad (\text{B.1})$$

que debe cumplir que

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4x$$

o bien

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \partial_\mu \phi(\vec{x}, t)) d^4x \quad (\text{B.2})$$

sometemos a las coordenadas del espacio-tiempo x_μ y al campo ϕ , a pequeñas variaciones que se anulen en la frontera.

Las variaciones en las coordenadas son:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (\text{B.3})$$

La variación del campo en el mismo punto es:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (\text{B.4})$$

La variación total del campo es:

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x) \quad (\text{B.5})$$

o bien

$$\phi'(x') = \phi(x') + \delta\phi(x') \quad (\text{B.6})$$

de manera que

$$\phi(x) + \Delta\phi = \phi(x') + \delta\phi(x')$$

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \phi(x') + \delta\phi(x') - \phi(x) \\
&= \phi(x + \delta x) + \delta\phi(x') - \phi(x)
\end{aligned} \tag{B.7}$$

dado que δx es muy pequeña, podemos hacer una aproximación a primer orden de $\phi(x') = \phi(x + \delta x)$

$$\begin{aligned}
\phi(x') &= \phi(x + \delta x) \\
&= \phi(x) + (\partial_\mu\phi(x)) \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x^2)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

de manera que $\Delta\phi$ nos queda

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \phi(x_\mu) + (\partial_\mu\phi(x)) \delta x^\mu - \phi(x_\mu) + \delta\phi(x') \\
&= (\partial_\mu\phi(x)) \delta x^\mu + \delta\phi(x')
\end{aligned} \tag{B.9}$$

El término $\delta\phi(x')$ es también pequeño, por lo que podemos hacer un desarrollo en serie y tomar la aproximación a primer orden

$$\begin{aligned}
\delta\phi(x') &= \delta\phi(x + \delta x) \\
&= \delta\phi(x) + (\partial_\mu\delta\phi(x)) \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x^2)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

pero

$$\begin{aligned}
\partial_\mu(\delta\phi(x)) &= \partial_\mu(\phi(x') - \phi(x)) \\
&= \partial_\mu\phi(x') - \partial_\mu\phi(x) \\
&= \delta(\partial_\mu\phi(x))
\end{aligned} \tag{B.11}$$

así

$$\delta\phi(x') = \delta\phi(x) + \delta(\partial_\mu\phi(x)) \cdot \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x^2) \tag{B.12}$$

por lo que $\Delta\phi(x)$ a primer orden nos queda

$$\Delta\phi(x) = (\partial_\mu\phi(x)) \cdot \delta x^\mu + \delta(\partial_\mu\phi(x)) \cdot \delta x^\mu + \delta\phi(x) \tag{B.13}$$

El segundo término es una delta al cuadrado que corresponde a una contribución a segundo orden, razón por la que podemos descartarla. El tercer término es la variación del campo en el mismo punto por lo que no contribuye a la variación total del campo. Siendo así, la variación

total del campo queda en términos del producto punto de la cuadriderivada del campo por la cuadvvariación del mismo:

$$\Delta\phi(x) = (\partial_\mu\phi(x)) \cdot \delta x^\mu \quad (\text{B.14})$$

lo que implica que la expresión para la variación total del campo en la ecuación (B.5) nos queda

$$\phi'(x') = \phi(x) + \partial(x) \cdot \delta x^\mu \quad (\text{B.15})$$

Luego la variación de la acción es:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu) d^4x \\ &= \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x'^\mu) d^4x' - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu) d^4x \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

donde la transformación de coordenadas entre x' y x está dada por el Jacobiano

$$d^4x' = \mathcal{J}(x', x) d^4x \quad (\text{B.17})$$

que tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x', x) &= \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \det \left(\frac{\partial(x^\mu + \delta x^\mu)}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \det(\delta_\nu^\mu + \partial_\nu(\delta x^\mu)) \\ &= \prod_{\mu=0,1,2,3} (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

de manera que la variación de la acción de la ecuación (B.16) queda

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x'^\mu) \mathcal{J}(x', x) d^4x - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu) d^4x \\ &= \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x'^\mu) (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)) d^4x - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu) d^4x \\ &= \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x'^\mu) dx^4 - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu) d^4x + \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x'^\mu) \partial_\mu(\delta x^\mu) d^4x \\ &= \int \delta\mathcal{L} d^4x + \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x'^\mu) \partial_\mu(\delta x^\mu) d^4x \\ &= \int [\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x'^\mu) \partial_\mu(\delta x^\mu)] d^4x \\ &= \int \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right) + \mathcal{L} \cdot \partial_\mu(\delta x^\mu) \right] d^4x \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

aplicando el resultado (B.11) al segundo término de la expresión anterior y reexpressando el tercer término

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \cdot \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \partial_\mu \delta \phi + \partial_\mu \mathcal{L} \cdot \delta x^\mu + \mathcal{L} \cdot \partial_\mu(\delta x^\mu) \right] d^4 x \quad (\text{B.20})$$

observando que

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta \phi \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \partial_\mu \delta \phi + \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta \phi \quad (\text{B.21})$$

nos da el segundo término de la expresión (B.20) como la diferencia

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \partial_\mu \delta \phi = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta \phi \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta \phi \quad (\text{B.22})$$

y aplicando la regla de la cadena a la asociación de los términos tercero y cuarto, δS nos queda

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \cdot \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta \phi \right) + \partial_\mu (\mathcal{L} \cdot \delta x^\mu) \right] d^4 x \\ &= \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \cdot \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta \phi + \mathcal{L} \cdot \delta x^\mu \right) \right] d^4 x \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

El segundo término podemos expresarlo como una integral de superficie sobre la frontera de la región de integración del espacio-tiempo cuadri-dimensional. Dada las configuraciones de campo inicial y final, $\delta \phi$ y δx son cero en t inicial y t final de esta región; de manera que este término se anula. De modo que δS se reduce a

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \cdot \delta \phi \right] d^4 s \\ &\equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

asumiendo que $\delta \phi \neq 0$ entonces obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (\text{B.25})$$

Apéndice C

Relaciones de conmutación

C.1. Conmutadores de $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$

Tomando la parte espacial de las expresiones para ϕ y π podemos verificar estas relaciones entre los operadores $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ \pi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

Veamos

$$\begin{aligned}[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] &= \phi(\vec{x})\pi(\vec{x}') - \pi(\vec{x}')\phi(\vec{x}) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{(-i)}{2} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{E_{\vec{p}}}} \\ &\quad \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \left(a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} - a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \right) - \\ &\quad \left(a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} - a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \right) \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{(-i)}{2} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{E_{\vec{p}}}} \\ &\quad \left(-a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} \right) + \\ &\quad \left(-a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} + a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} \right) + \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{E_{\vec{p}}}} \\ &\quad \left([a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} + [a_{\vec{p}'}^\dagger, a_{\vec{p}}] e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} \right)\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

los términos generados por la multiplicación de $a_{\vec{p}}$ con $a_{\vec{p}'}$ o bien por $a_{\vec{p}}^\dagger$ con $a_{\vec{p}'}$ nos producen conmutadores de la forma $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}]$ y $[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger]$ los cuales valen cero. Haciendo uso de la misma

definición (2.11) podemos continuar con

$$\begin{aligned}
 [\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{(-i)}{2} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{E_{\vec{p}}}} \\
 &\quad (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} + \\
 &\quad (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')}
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

tomando la propiedad de la delta que refiere $\delta(-x) = \delta(x)$ e integrando con respecto \vec{p}' primero y después con respecto a \vec{p}

$$\begin{aligned}
 [\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} \left(e^{i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')} + e^{-i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')} \right) \\
 &= \frac{i}{2} \left(\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') + \delta^{(3)}(-(\vec{x} - \vec{x}')) \right) \\
 &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

si reescribimos las expresiones (C.1) como

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\
 \pi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

el cálculo del conmutador $[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')]$ puede verse de manera más directa.

C.2. El Hamiltoniano H en términos de $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$

Usando las expresiones para para el campo $\phi(\vec{x})$ y el momento $\pi(\vec{x})$ en (C.1) y la densidad Hamiltoniana de Klein-Gordon separada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{KG} &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\
 &= \mathcal{H}_{\pi^2} + \mathcal{H}_{(\nabla\phi)^2} + \mathcal{H}_{m^2\phi^2},
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

tendremos el Hamiltoniano H

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3\vec{x} \mathcal{H}_{\pi^2} + \int d^3\vec{x} \mathcal{H}_{(\nabla\phi)^2} + \int d^3\vec{x} \mathcal{H}_{m^2\phi^2} \\
 &= H_{\pi^2} + H_{(\nabla\phi)^2} + H_{m^2\phi^2}.
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Analizamos término a término:

$$\begin{aligned}
 \pi^2(\vec{x}) &= \pi(\vec{x})\pi(\vec{x}) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} (-i)^2 \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{2}} \\
 &\quad \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \left(a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}}{2} \\
 &\quad \left(-a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} + \right. \\
 &\quad \left. a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} \right) \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 H_{\pi^2} &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \pi^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} d^3\vec{x} \frac{\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}}{2} \\
 &\quad \left(-a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} + \right. \\
 &\quad \left. a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} \right) \tag{C.9}
 \end{aligned}$$

integrando primero sobre $d^3\vec{x}$ nos producen deltas de momento que después las podemos usar para integrar sobre $d^3\vec{p}'$

$$\begin{aligned}
 H_{\pi^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{(d^3\vec{p})(d^3\vec{p}')}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}}{2} \\
 &\quad \left(-a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'} \delta^3(\vec{p}' - (-\vec{p})) + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}^\dagger \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) + \right. \\
 &\quad \left. a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger \delta^3(\vec{p}' - (-\vec{p})) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\vec{p}}}{2} \left(-a_{\vec{p}}a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) \tag{C.10}
 \end{aligned}$$

Ahora con $(\nabla\phi)^2$, tenemos

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \tag{C.11}$$

tomando la derivada espacial

$$\nabla\phi = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{i\vec{p}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \tag{C.12}$$

elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}
 (\nabla\phi)^2 &= - \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}\vec{p}'}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \cdot \\
 &\quad \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \left(a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} - a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \right) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}\vec{p}'}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \cdot \\
 &\quad \left(-a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - (-\vec{p}))} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - \vec{p})} \right. \\
 &\quad \left. + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - \vec{p})} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - (-\vec{p}))} \right)
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

luego presentamos $H_{(\nabla\phi)^2}$ en términos de a y a^\dagger

$$\begin{aligned}
 H_{(\nabla\phi)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} d^3\vec{x} \frac{\vec{p}\vec{p}'}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \cdot \\
 &\quad \left(-a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - (-\vec{p}))} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - \vec{p})} \right. \\
 &\quad \left. + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - \vec{p})} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - (-\vec{p}))} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(d^3\vec{p})(d^3\vec{p}')}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}\vec{p}'}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \cdot \\
 &\quad \left(-a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'} \delta^3(\vec{p}' - (-\vec{p})) + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \right. \\
 &\quad \left. + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger \delta^3(\vec{p}' - (-\vec{p})) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{2E_{\vec{p}}} \left(a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right)
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Por último $m^2\phi^2$

$$\begin{aligned}
 m^2\phi^2 &= m^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \cdot \\
 &\quad \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \left(a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{2\sqrt{2E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \cdot \\
 &\quad \left(a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - (-\vec{p}))} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - \vec{p})} \right. \\
 &\quad \left. + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - \vec{p})} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}' - (-\vec{p}))} \right)
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

y de igual manera que lo hicimos con los otros términos

$$\begin{aligned}
 H_{m^2\phi^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} d^3\vec{x} \frac{m^2}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \cdot \\
 &\quad \left(a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-\vec{p})} \right. \\
 &\quad \left. + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-\vec{p})} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-(-\vec{p}))} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(d^3\vec{p})(d^3\vec{p}')}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}'}}} \cdot \\
 &\quad \left(a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}\delta^3(\vec{p}'-(-\vec{p})) + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}'}^\dagger\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) \right. \\
 &\quad \left. + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger\delta^3(\vec{p}'-(-\vec{p})) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{2E_{\vec{p}}} \left(a_{\vec{p}}a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) \tag{C.16}
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 H_{KG} &= H_{\pi^2} + H_{(\nabla\phi)^2} + H_{m^2\phi^2} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\vec{p}}}{2} \left(-a_{\vec{p}}a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{p^2}{2E_{\vec{p}}} \left(a_{\vec{p}}a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{m^2}{2E_{\vec{p}}} \left(a_{\vec{p}}a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) \right] \tag{C.17}
 \end{aligned}$$

dado que

$$\frac{p^2}{2E_{\vec{p}}} + \frac{m^2}{2E_{\vec{p}}} = \frac{p^2 + m^2}{2E_{\vec{p}}} = \frac{E_{\vec{p}}^2}{2E_{\vec{p}}} = \frac{E_{\vec{p}}}{2} \tag{C.18}$$

podemos asociar los tres términos en uno solo

$$\begin{aligned}
 H_{KG} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\vec{p}}}{2} \left(-a_{\vec{p}}a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger + \right. \\
 &\quad \left. a_{\vec{p}}a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right) \tag{C.19}
 \end{aligned}$$

pero el conmutador

$$\begin{aligned}
 [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] &= a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^\dagger - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \\
 &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{0}). \tag{C.20}
 \end{aligned}$$

De lo anterior, el Hamiltoniano nos queda

$$\begin{aligned}
 H_{KG} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) \right) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) \right) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] \right)
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

Vemos que el segundo término $\delta^3(\vec{0})$, diverge al infinito. Esta constante de energía infinita representa la suma sobre todos los modos de energía de punto cero. La energía de punto cero o energía posible más baja es la energía de cada modo de Fourier o bien de cada punto del vacío que ha sido modelado como un oscilador armónico simple.

Apéndice D

Operador de evolución temporal

D.1. Representación en serie

Sea la serie de potencias

$$U(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \quad (\text{D.1})$$

haciendo su desarrollo

$$a_0 + a_1(t - t_0)^1 + \dots = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \dots \quad (\text{D.2})$$

y dado que la función es analítica en el dominio, los coeficientes de Taylor son

$$a_n = \frac{U^{(n)}(t, t_0)}{n!} \Big|_{t=t_0} \quad (\text{D.3})$$

podemos calcular los coeficientes a_n

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{U^{(0)}(t, t_0)}{0!} \Big|_{t=t_0} = U^{(0)}(t_0, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^{t_0} dt' H_I(t')} \\ a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{U^{(1)}}{1!} \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \Big|_{t=t_0} = \left[e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \cdot (-i) \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right]_{t=t_0} \\ a_1 &= (-i H_I(t_0)) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{U^{(2)}}{2!} \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{2!} \frac{d}{dt} U^{(1)} \\
&= \frac{1}{2!} \left[e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \cdot (-i) \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') (-i) \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + \right. \\
&\quad \left. e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \cdot (-i) \frac{d}{dt'} \left(\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \right]_{t=t_0} \\
&= \frac{1}{2!} \left[(-i)^2 H_I^2(t_0) + (-i) \frac{d}{dt} H_I(t_0) \right] \\
&= \frac{1}{2!} \left[(-i)^2 H_I^2(t_0) + (-i) \frac{d}{dt} \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \Phi_I^4(t_0, \vec{x}) \right] \\
&= \frac{1}{2!} \left[(-i)^2 H_I^2(t_0) + (-i) \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \frac{d}{dt} \left(e^{iH_0(t-t_0)} \Phi^4(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2!} \left[(-i)^2 H_I^2(t_0) + (-i) \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \frac{d}{dt} \Phi^4(t_0, \vec{x}) (iH_0 t - iH_0 t) \right] \\
a_2 &= \frac{1}{2!} (-iH_I(t_0))^2 \\
a_3 &= \frac{U^{(3)}}{3!} = \frac{1}{3!} \frac{d^2}{dt^2} \\
&= \left[e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} (-i)^3 H_I^3(t) + 2(-i)^2 e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} H_I(t) \frac{d}{dt} H_I(t) + \right. \\
&\quad \left. e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} (-i) \frac{d}{dt} H_I(t) + e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} (-i) \frac{d^2}{dt^2} H_I(t) \right]_{t=t_0} \\
a_3 &= \frac{1}{3!} (-iH_I(t_0))^3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
a_n &= \frac{1}{n!} (-iH_I(t_0))^n \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Estableciendo un reconocimiento de los términos de ambos lados de la igualdad de la serie (D.2) podemos obtener $(t - t_0)$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1(t - t_0) &= (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \\
(t - t_0) &= \frac{1}{H_I(t_0)} \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \\
\frac{1}{2!} (-i H_I(t_0))^2 (t - t_0)^2 &= \frac{1}{2!} (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} \\
(t - t_0)^2 &= \frac{1}{H_I^2(t_0)} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Por último, la razón entre los términos n y $n - 1$ de la serie es

$$\begin{aligned}
\frac{a_n(t - t_0)^n}{a_{n-1}(t - t_0)^{n-1}} &= \frac{\frac{1}{n!} (-i H_I(t_0))^n (t - t_0)^n}{\frac{1}{(n-1)!} (-i H_I(t_0))^{n-1} (t - t_0)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} (-i H_I(t_0)) (t - t_0)_n \\
&= \frac{1}{n} (-i H_I(t_0)) \frac{1}{H_I(t_0)} \int_{t_0}^t dt_n H_I(t_n) \\
&= \frac{-i}{n} \int_{t_0}^t dt_n H_I(t_n)
\end{aligned} \tag{D.7}$$

de manera que cada término de la serie de $U(t, t_0)$ es $\frac{-i}{n} \int_{t_0}^t dt_n H_I(t_n)$ veces el término previo.

D.2. Generalización y propiedades

Es conveniente generalizar la definición del operador U permitiéndole que tome otros valores diferentes al tiempo de referencia t_0 , es decir,

$$t_0 \longrightarrow t' \longrightarrow t \quad \text{con} \quad t_0 \leq t' \leq t \tag{D.8}$$

El campo al tiempo t' es

$$\phi(x) = e^{iHt'} \phi(\vec{x}) e^{-iHt'} \tag{D.9}$$

pero como al tiempo t' condicionaremos que no existen interacciones del campo, entonces la expresión para el mismo nos queda en términos de H_0

$$\phi(x) = e^{iH_0 t'} \phi(\vec{x}) e^{-iH_0 t'} \quad (\text{D.10})$$

Ahora el campo de $t_0 \rightarrow t'$, o bien al tiempo t' con respecto a t_0 es

$$\phi(t', \vec{x}) = e^{iH_0(t'-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t'-t_0)} \quad (\text{D.11})$$

Luego el campo al tiempo t pero con respecto a t' , es decir el campo de $t' \rightarrow t$

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t')} \phi(t', \vec{x}) e^{-iH(t-t')} \quad (\text{D.12})$$

y combinando las dos expresiones anteriores

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t')} e^{iH_0(t'-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t'-t_0)} e^{-iH(t-t')} \quad (\text{D.13})$$

y de

$$\begin{aligned} e^{\pm i(H_i(t-t_1) + H_j(t_1-t_2))} &= 1_{\pm}^+ i \left(H_i(t-t_1) + H_j(t_1-t_2) \right)_{\pm}^+ \dots \\ &= 1_{\pm}^+ i \left(H_j(t_1-t_2) + H_i(t-t_1) \right)_{\pm}^+ \dots \end{aligned}$$

nos permite intercambiar la posición de las exponenciales de la expresión anterior

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t'-t_0)} e^{iH(t-t')} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} \quad (\text{D.14})$$

y dado que conocemos $\phi(t_0, \vec{x})$ en términos de ϕ_I

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= e^{iH_0(t'-t_0)} e^{iH(t-t')} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \vec{x}) \\ &\quad e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Definimos

$$U(t, t') = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} \quad (\text{D.16})$$

entonces

$$\phi(t, \vec{x}) = U^\dagger(t, t') \phi_I(t, \vec{x}) U(t, t') \quad (\text{D.17})$$

Derivando parcialmente con respecto a t a $U(t, t')$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}U(t, t') &= \left(e^{iH_0(t-t_0)}(iH_0)e^{-iH(t-t')} + e^{iH_0(t-t_0)}(-iH)e^{-iH(t-t')} \right) e^{-iH_0(t'-t_0)} \\
i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t') &= \left(e^{iH_0(t-t_0)}(H - H_0)e^{-iH(t-t_0)} \right) e^{-iH_0(t'-t_0)} \\
&= \left(e^{iH_0(t-t_0)}(H_{int}) \left(e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} \right) e^{-iH(t-t')} \right) e^{-iH_0(t'-t_0)} \\
i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t') &= H_I(t)U(t, t')
\end{aligned} \tag{D.18}$$

integrando con respecto a t con la condición inicial $U(t, t')|_{t=t'} = 1$ obtenemos $U(t, t')$ en términos de H_I

$$U(t, t') = e^{-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'')} \tag{D.19}$$

Haciendo el mismo procedimiento que hicimos para $U(t, t_0)$ desarrollando en serie de potencias y considerando el orden temporal de los factores de los términos de la serie, nos queda

$$U(t, t') = T \left\{ e^{-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'')} \right\}_{t \geq t'} \tag{D.20}$$

Podemos resumir que el operador unitario $U(t, t')$ definido arriba satisface la ecuación diferencial $i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t') = H_I(t)U(t, t')$ con la condición inicial de $U(t, t')|_{(t=t')} = 1$

Por último estableceremos relaciones de identidades entre los operadores U en sus diferentes fases temporales. Ya vimos que el operador U de $t_0 \longrightarrow t$ lo definimos como

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \tag{D.21}$$

de la misma manera podemos definir U de $t_0 \longrightarrow t'$ y de $t' \longrightarrow t$ respectivamente

$$U(t', t_0) = e^{iH_0(t'-t_0)} e^{-iH(t'-t_0)} \tag{D.22}$$

$$U(t, t') = e^{iH_0(t-t')} e^{-iH(t-t')} \tag{D.23}$$

Dado que en las definiciones de U se cumple que $t > t' > t_0$, condición bajo la cual podemos establecer las siguientes relaciones entre los operadores

$$\begin{aligned}
U(t, t')U(t', t_0) &= e^{iH_0(t-t')} e^{-iH(t-t')} e^{iH_0(t'-t_0)} e^{-iH(t'-t_0)} \\
&= e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\
U(t, t')U(t', t_0) &= U(t, t_0)
\end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}
U(t, t_0)U^\dagger(t', t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \left(e^{iH_0(t'-t_0)}e^{-iH(t'-t_0)} \right)^\dagger \\
&= e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}e^{iH(t'-t_0)}e^{-iH_0(t'-t_0)} \\
&= e^{iH_0(t-t')}e^{-iH(t-t')} \\
U(t, t_0)U^\dagger(t', t_0) &= U(t, t') \tag{D.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^\dagger(t, t_0)U(t', t_0) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t'-t_0)}e^{-iH(t'-t_0)} \\
&= e^{iH(t-t')}e^{-iH_0(t-t')} \\
U^\dagger(t, t_0)U(t', t_0) &= U^\dagger(t, t') \equiv U^{-1}(t, t') \tag{D.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^\dagger(t, t')U(t, t_0) &= e^{iH(t-t')}e^{-iH_0(t-t')}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\
&= e^{iH_0(t'-t_0)}e^{-iH(t'-t_0)} \\
U^\dagger(t, t')U(t, t_0) &= U(t', t_0) \tag{D.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(t, t')U^\dagger(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t')}e^{-iH(t-t')}e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)} \\
&= e^{iH(t'-t_0)}e^{-iH_0(t'-t_0)} \\
U(t, t')U^\dagger(t, t_0) &= U^\dagger(t', t_0) \equiv U^{-1}(t', t_0) \tag{D.28}
\end{aligned}$$

Si hacemos

$$t \longrightarrow t_1$$

$$t' \longrightarrow t_2$$

$$t_0 \longrightarrow t_3$$

podemos resumir las identidades anteriores con subíndices 1, 2 y 3

$$\begin{aligned}
U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) &= U(t_1, t_3) \\
U(t_1, t_3)U^\dagger(t_2, t_3) &= U(t_1, t_2) \\
U^\dagger(t_1, t_3)U(t_2, t_3) &= U^\dagger(t_1, t_2) \equiv U^{-1}(t_1, t_2) \\
U^\dagger(t_1, t_2)U(t_1, t_3) &= U(t_2, t_3) \\
U(t_1, t_2)U^\dagger(t_1, t_3) &= U^\dagger(t_2, t_3) \equiv U^{-1}(t_2, t_3) \tag{D.29}
\end{aligned}$$

Apéndice E

Teorema de Wick

Sea el $T \{\prod_{i=1}^n \phi(x_i)\}$ con $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_{n-1}^0 > x_n^0$ y denotaremos $\phi(x_i) \equiv \phi_i$

$$\begin{aligned}
T \{\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_{n-1} \phi_n\} &= (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-) \cdots (\phi_{n-1}^+ + \phi_{n-1}^-)(\phi_n^+ + \phi_n^-) \\
&= \left\{ (\phi_1^+ \cdots \phi_j^+ \cdots \phi_n^+) + (\phi_1^- \phi_2^+ \cdots \phi_j^+ \cdots \phi_n^+) + \right. \\
&\quad (\phi_1^- \phi_2^- \phi_3^+ \cdots \phi_j^+ \cdots \phi_n^+) + \dots + (\phi_1^- \cdots \phi_j^- \cdots \phi_n^-) \left. \right\} + \\
&\quad \left\{ (\phi_1^+ \phi_2^- \phi_3^+ \cdots \phi_j^+ \cdots \phi_n^+) + \dots + \right. \\
&\quad (\phi_1^- \phi_2^+ \phi_3^- \phi_4^+ \cdots \phi_j^+ \cdots \phi_n^+) + \dots + \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \left. (\phi_1^+ \phi_2^- \cdots \phi_j^- \cdots \phi_n^-) + \dots \right\} \tag{E.1}
\end{aligned}$$

el producto temporalmente ordenado se divide en dos grandes grupos de términos. En el primer grupo se encuentran los términos en donde todos los factores ϕ^+ están a la derecha de los ϕ^- , es decir ya tienen un orden normal. En el segundo grupo se encuentran el resto del total de términos. A este segundo grupo debemos aplicar la metodología usada en la sección 3.3: generar términos que contengan contracciones de dos campos, es decir conmutadores sencillos $[\phi_i^+, \phi_j^-]$. Esto se hace agregando términos nulos y usando las reglas de conmutación. En el proceso van apareciendo nuevos términos pertenecientes al primer grupo. Enseguida desarrollamos una primera etapa de

este proceso en la expresión anterior

$$\begin{aligned}
T \{ \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_{n-1} \phi_n \} &= (\text{términos con ordenamiento normal}) + \\
&+ ([\phi_1^+, \phi_2^-] + \phi_2^- \phi_1^+) \phi_3^+ \cdots \phi_{n-1}^+ \phi_n^+ + \\
&\phi_1^+ ([\phi_2^+, \phi_3^-] + \phi_3^- \phi_2^+) \phi_4^+ \cdots \phi_{n-1}^+ \phi_n^+ + \dots + \\
&\phi_1^+ \cdots \phi_{n-3}^+ ([\phi_{n-2}^+, \phi_{n-1}^-] + \phi_{n-1}^- \phi_{n-2}^+) \phi_n^+ \\
&\phi_1^+ \phi_2^+ \cdots \phi_{n-2}^+ ([\phi_{n-1}^+, \phi_n^-] + \phi_n^- \phi_{n-1}^+) + \\
&\phi_1^- ([\phi_2^+, \phi_3^-] + \phi_3^- \phi_2^+) \phi_4^+ \cdots \phi_{n-1}^+ \phi_n^+ + \\
&\phi_1^- \phi_2^+ ([\phi_3^+, \phi_4^-] + \phi_4^- \phi_3^+) \phi_5^+ \cdots \phi_{n-1}^+ \phi_n^+ + \dots + \\
&([\phi_1^+, \phi_2^-] + \phi_2^- \phi_1^+) \phi_3^- \phi_4^+ \phi_5^+ \cdots \phi_{n-1}^+ \phi_n^+ + \dots + \\
&\phi_1^+ \phi_2^+ \cdots \phi_{n-3}^+ ([\phi_{n-2}^+, \phi_{n-1}^-] + \phi_{n-1}^- \phi_{n-2}^+) \phi_n^- + \\
&([\phi_1^+, \phi_2^-] + \phi_2^- \phi_1^+) \phi_3^- \cdots \phi_{n-1}^- \phi_n^- + \\
&\phi_1^- ([\phi_2^+, \phi_3^-] + \phi_3^- \phi_2^+) \phi_4^- \cdots \phi_{n-1}^- \phi_n^- + \dots + \\
&\phi_1^- \phi_2^- \cdots \phi_{n-3}^- ([\phi_{n-2}^+, \phi_{n-1}^-] + \phi_{n-1}^- \phi_{n-2}^+) \phi_n^- + \\
&\phi_1^- \phi_2^- \cdots \phi_{n-2}^- ([\phi_{n-1}^+, \phi_n^-] + \phi_n^- \phi_{n-1}^+)
\end{aligned} \tag{E.2}$$

Este proceso se repite las veces que sean necesarias hasta que todos los términos queden expresados con contracciones y/o campos no contraídos con ordenamiento normal. Al final del proceso podemos identificar tres tipos de términos: términos con contracciones completas

$$\overline{\phi_i \phi_j} \cdots \overline{\phi_k \phi_l} \cdots \overline{\phi_m \phi_n} \tag{E.3}$$

términos con contracciones incompletas, es decir términos con campos no contraídos y con ordenamiento normal

$$\overline{\phi_i \phi_j} \cdots \overline{\phi_k \phi_l} \phi_g^- \cdots \phi_h^- \cdots \phi_s^- \phi_p^+ \cdots \phi_m^+ \cdots \phi_n^+ \tag{E.4}$$

y términos que sólo contienen campos con ordenamiento normal

$$\phi_i^- \cdots \phi_j^- \cdots \phi_k^- \phi_l^+ \cdots \phi_m^+ \cdots \phi_n^+ \tag{E.5}$$

Ejemplo de los segundos y los terceros se encuentran en el segundo, sexto y último renglones de la

expresión (E.2). De manera que en el producto temporal nos quedan tres conjuntos de términos

$$\begin{aligned}
T \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right\} &\equiv \sum \left(\phi_i^- \cdots \phi_j^- \cdots \phi_k^- \phi_l^+ \cdots \phi_m^+ \cdots \phi_n^+ \right) + \\
&\sum \left(\overline{\phi_i \phi_j} \cdots \overline{\phi_k \phi_l} \overline{\phi_g} \cdots \phi_h^- \cdots \phi_s^- \phi_p^+ \cdots \phi_m^+ \cdots \phi_n^+ \right) + \\
&\sum \left(\overline{\phi_i \phi_j} \cdots \overline{\phi_k \phi_l} \cdots \overline{\phi_m \phi_n} \right)
\end{aligned} \tag{E.6}$$

lo que nos permite expresarlo como un producto de campos con orden normal

$$\begin{aligned}
T \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right\} &= N \left\{ \sum \left(\phi_i \phi_j \cdots \phi_k \phi_l \cdots \phi_g \phi_h \right) + \right. \\
&\sum \left(\overline{\phi_i \phi_j} \cdots \overline{\phi_k \phi_l} \overline{\phi_g} \cdots \phi_d \cdots \phi_h \phi_m \cdots \phi_n \cdots \phi_s \right) + \\
&\left. \sum \left(\overline{\phi_i \phi_j} \cdots \overline{\phi_k \phi_l} \cdots \overline{\phi_m \phi_n} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

este brinco de la expresión nos permite asociar los campos con orden normal $(\phi_i^+ + \phi_i^-)$ generando de nuevo el campo completo ϕ_i .

$$\begin{aligned}
T \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right\} &= N \left\{ \sum \left(\prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right) + \sum \left(\prod_{i=1, j=1, i \neq j}^k \overline{\phi_i \phi_j} \prod_{i=k+1}^n \phi(x_n) \right) + \right. \\
&\left. \sum \left(\prod_{i=1, j=1, i \neq j}^n \overline{\phi_i \phi_j} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{E.8}$$

El producto temporalmente ordenado queda en términos de la suma del producto normalmente ordenado más todas las contracciones posibles con orden normal. Este teorema adquiere mayor relevancia cuando calculamos el valor esperado en el vacío del producto $T\{\phi_i \phi_j \cdots \phi_n\}$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right\} | 0 \rangle &= N \left\{ \langle 0 | \sum \left(\prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right) | 0 \rangle + \right. \\
&\langle 0 | \sum \left(\prod_{i=1, j=1, i \neq j}^k \overline{\phi_i \phi_j} \prod_{i=k+1}^n \phi(x_n) \right) | 0 \rangle + \\
&\left. \langle 0 | \sum \left(\prod_{i=1, j=1, i \neq j}^n \overline{\phi_i \phi_j} \right) | 0 \rangle \right\} \\
&= \langle 0 | \sum \left(\prod_{i=1, j=1, i \neq j}^n \overline{\phi_i \phi_j} \right) | 0 \rangle \\
&= \sum \left(\prod_{i=1, j=1, i \neq j}^n D_F(x_i - x_j) \right)
\end{aligned} \tag{E.9}$$

cuyo cálculo se ve grandemente simplificado al quedar en términos de una suma de productos de propagadores de Feynman. En consecuencia el teorema de Wick es una herramienta importante para encontrar la solución del cálculo del valor esperado de campos interactuantes.

Apéndice F

Método de Cardano

La ecuación cúbica a resolver es el potencial

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^3 - \frac{1}{2}\mu^2(v + \sigma) - a &= 0 \\ (v + \sigma)^3 - \frac{2\mu^2}{\lambda}(v + \sigma) - \frac{4a}{\lambda} &= 0\end{aligned}\tag{F.1}$$

Haciendo un cambio de variable para σ y etiquetando los coeficientes de la siguiente manera

$$\begin{aligned}v + \sigma &\longrightarrow x \\ \frac{2\mu^2}{\lambda} &\longrightarrow p \\ \frac{4a}{\lambda} &\longrightarrow q\end{aligned}\tag{F.2}$$

la expresión se simplifica a resolver una ecuación cúbica en x

$$x^3 - px - q = 0\tag{F.3}$$

Sean las variables auxiliares m y n tales que

$$x = m + n\tag{F.4}$$

sustituimos este cambio de variable en F.3 y desarrollamos de manera que nos quede

$$(m^3 + n^3 - q) + (m + n)(3mn - p) = 0\tag{F.5}$$

Si condicionamos que

$$3mn - p = 0\tag{F.6}$$

y nos auxiliamos con otro cambio de variable tal que

$$\begin{aligned}M &= m^3 \\ N &= n^3\end{aligned}\tag{F.7}$$

tendremos dos expresiones para M y N

$$\begin{aligned}M + N &= q \\ MN &= \frac{p^3}{27}\end{aligned}\tag{F.8}$$

de donde surge el polinomio auxiliar de segundo grado

$$M^2 - qM + \frac{p^3}{27} = 0 \quad (\text{F.9})$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= \frac{q_{\pm}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ N_{1,2} &= \frac{q_{\mp}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Si recuperamos los cambios de variable hechos en F.7, F.4 y F.2, las soluciones para el potencial quedan

$$(v + \sigma)_{1,2} = \left(\frac{2a_{\pm}}{\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2a_{\mp}}{\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\mu^2}{3\lambda}\right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{F.11})$$

Bibliografía

- [1] Greiner, Walter; *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*; Springer; 3ra edición (2000) 424 p.
- [2] Peskin, Michael Edward y Schroeder, Daniel V.; *An Introduction to quantum field theory*; Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [3] Ryder, Lewis H.; *Quantum Field Theory*; Cambridge University Press; 2da edición (1996) 507 p.
- [4] Itzykson, Claude y Zuber, Jean-Bernard; *Quantum Field Theory*; Dover Publications (2006) 752 p.
- [5] Reinhardt, Joachim y Greiner, Walter; *Field Quantization*, Springer (2008) 456 p.
- [6] Jáuregui, A. y Uribe A.; *Funciones Especiales*; Editorial Universidad de Sonora, Departamento de Física (2006)
- [7] Gradshteyn, I.S. y Ryzhik, I.M.; *Table of Integrals, Series and Products*; Academic Press; Sexta Edición; (2000)