

*Correcciones radiativas
en QCD a un lazo:
 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}(g)$*

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora
para el
Grado de Maestro en Ciencias
por

Jesús Javier Cobos Martínez



DIFUS

Universidad de Sonora
2006

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

BIBLIOTECA
D.I.F.U.S. - UNISON

*Correcciones radiativas
en QCD a un lazo:
 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}(g)$*

una tesis de Maestría en Ciencias Física presentada por

Jesus Javier Cobos Martinez

Junio 2006

Resumen

En este trabajo presentamos correcciones radiativas a un lazo en la producción de partones ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$) en la teoría de norma SU(3) relevantes para el cálculo de la sección de dispersión en la producción de hadrones a ese mismo orden. Para lograr esto, primero presentamos los ingredientes básicos de una teoría cuántica de norma y su desarrollo perturbativo en términos de diagramas de Feynman.

Agradecimientos

Dedico este trabajo a mis padres y hermanos por apoyarme siempre en todas y cada una de las decisiones que he tomado, sin importar si son las mejores. Agradezco a mi madre por haberme preguntado sólo una vez si estaba contento por haberme cambiado de carrera. Aunque hoy no me lo pregunte, puedo decirle que es la mejor decisión que he tomado hasta este momento. Deseo expresar profundamente (y sé que mis palabras nunca serán suficientes) mi agradecimiento a la Dra. Maria Elena Tejeda Yeomans y al Dr. Carlos A. Calcáneo Roldán, profesores del Departamento de Física (donde me formé), todo el apoyo que me han brindado desde que los conozco: A Maria Elena Tejeda Yeomans por haberme permitido trabajar con ella, ayudarme en mis dudas, recomendarme con mucho gusto cada vez que se lo pedí, orientarme en mis viajes de estudio,...,en fin, por ayudarme en todo, pero sobre todo por hacerlo siempre con mucho gusto. A Carlos A. Calcáneo Roldán por el apoyo que me ha dado desde que fui su alumno en el curso Física Moderna I. Él fue el primer profesor de Física Teórica que tuve, y con creces me motivó para seguir en ella. A Maria Elena y a Carlos por ser esas personas tan importantes para mí y apoyarme siempre. De todo corazón les agradezco lo que han hecho por mí. Quiero agradecer también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico que me brindaron en estos dos años: Sin este apoyo mis estudios de tiempo completo hubiesen sido imposibles. A mis amigos de la maestría Alex, Carlos, y Meño de quienes siempre tendré los mejores recuerdos: Creo que nos divertimos de igual manera estudiando o jugando billar (por su puesto que con unas cervezas). Finalmente, y muy importante para mí, quiero expresar mi agradecimiento a mi novia Telma por ser siempre paciente y comprenderme por todo el tiempo que no he estado con ella. Ya tendremos todo el tiempo del mundo!

Contenido

1	Introducción	1
2	Teoría Clásica de Campos	3
2.1	Formulación Lagrangiana y Leyes de Conservación	3
2.2	Teorías del Campo Clásicas sin Interacciones	8
3	Principio de Invarianza de Norma	14
3.1	Origen de la Invarianza de Norma.	14
3.2	Invarianza de Norma como un Principio Dinámico.	16
3.2.1	Invarianza de Norma Abeliana	17
3.2.2	Invarianza de Norma no Abeliana	22
4	Cuantización Funcional	28
4.1	Integrales de Camino en Mecánica Cuántica.	28
4.2	Cuantización Funcional de la Teoría del Campo	32
4.2.1	Funciones de Correlación	33
4.2.2	Funcional Generadora	36
4.3	Electrodinámica Cuántica	37
4.3.1	Propagador del Fotón	37
4.3.2	Propagador del Fermión de Dirac	39
4.4	Cromodinámica Cuántica	41
4.4.1	Simetría de Norma SU(3)	41
4.4.2	Reglas de Feynman	42

5	Producción de Hadrones	44
5.1	Aniquilación Electrón-Positrón en Hadrones: $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$	45
5.1.1	Sección de Dispersión a Nivel Árbol en la Producción de Hadrones	46
5.1.2	Funciones de Fragmentación	49
5.2	Regularización.	50
5.3	Renormalización	55
5.4	Correcciones Radiativas	57
5.4.1	Emisión Virtual	58
5.4.2	Emisiones Reales	60
5.5	Cancelación de las Divergencias	62
6	Conclusiones	64
A	Sumas sobre Spins y Álgebra de Matrices de Dirac	66
A.1	Sumas sobre Spins	66
A.2	Trazología de Gammas	68
A.3	Identidades de Contracción	69
B	Integración sobre el Espacio Fase	71
C	Parámetros de Feynman	73
D	Libertad Asintótica	75
D.1	Corrimiento de la Constante de Acoplamiento	75
D.2	La Función Beta	76
	Bibliografía	78

Capítulo 1

Introducción

En el presente entendimiento de las interacciones fuertes, dado por la Cromodinámica Cuántica, todos los hadrones están compuestos por fermiones de Dirac, llamados quarks. Existen 6 tipos de estas partículas y cada una tiene su masa y carga eléctrica. Además de poseer carga eléctrica, los quarks poseen un tipo especial de carga de color. La carga de color de cualquier quark solamente puede tomar tres valores. Los quarks, junto con los gluones, son los responsables de las características del protón y del neutrón, entre otras partículas. Aunque existe evidencia indirecta de su existencia, estos no han sido observados libremente. Lo único que se observa son los compuestos formados por estos, i.e. los hadrones, los cuales no poseen carga de color. Se dice entonces que cada una de estas partículas forma un singlete en el espacio de color. En este mismo sentido, cada uno de los quarks forma un triplete en este espacio. De esto se deduce que no importa la orientación en el espacio de color de cada uno de los quarks que constituyen el hadrón siempre y cuando este resulte blanco, i.e. sin color. Matemáticamente, podemos expresar este resultado diciendo que los quarks se transforman en la representación fundamental del grupo de color $SU(3)$.

La motivación de este trabajo es estudiar algunas de las consecuencias de esta simetría. Para hacer esto, dividimos el trabajo de la siguiente manera. En el capítulo dos establecemos el lenguaje de la formulación Lagrangiana e introducimos la Lagrangiana prototipo que describe estos fermiones de manera *libre*. En el tercer capítulo, apelamos al principio de invarianza de norma para construir una teoría clásica de las interacciones de color. Esto nos lleva a la introducción del grupo de color $SU(3)$. Posteriormente, en el capítulo cuatro introducimos la integral funcional, primeramente en la mecánica cuántica para después extenderla a la teoría cuántica de norma $SU(3)$. Al aplicar este procedimiento a $SU(3)$ encontramos dificultades debido a la invarianza de norma. Sin embargo, para tener una teoría cuántica consistente tenemos que introducir un conjunto de partículas

que finalmente nos sirven como grados de libertad negativos que cancelan estados de polarización no físicos. Después de cuantizar correctamente la teoría, derivamos los diagramas de Feynman que nos sirven de partida, junto con la libertad asintótica, para el tratamiento perturbativo. Finalmente, en el capítulo cinco tenemos la oportunidad de hacer cálculos reales. En la primera parte de ese capítulo calculamos la sección de dispersión para la producción de partones ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$) a orden más bajo en la constante de interacción fuerte. Después de esto, y teniendo como objetivo las correcciones radiativas, advertimos la necesidad de parametrizar las divergencias provenientes de ciertas configuraciones físicas del estado final y de la naturaleza misma de la teoría. Una vez satisfecha esa necesidad, hablamos un poco acerca del contexto donde nuestros cálculos son relevantes. Esto es, hablamos de las funciones de fragmentación, las cuales nos dan una descripción del proceso de hadronización y de la física de tiempos largos. Como parte final del trabajo, calculamos las correcciones radiativas a la sección de dispersión obtenida al inicio del capítulo. En esa parte, consideramos las correcciones debidas a la emisión de un gluón virtual y un gluón real en el estado final; calculamos ambas secciones de dispersión por separado y mostramos explícitamente que cada una de ellas es divergente en el infrarojo. Mencionamos en ese capítulo que este tipo de divergencias se deben, en el caso de emisiones virtuales, al hecho de que la teoría no permite bosones de norma masivos y que los quarks consideramos carecen de masa; otro origen de este tipo de divergencia, en el caso de emisiones reales, se debe al hecho de que el gluón que es emitido por el quark (antiquark) en el estado final es colineal con la dirección del quark (antiquark) o es emitido con una energía prácticamente nula comparada con la energía disponible para la reacción en el centro de masa del sistema. Mostramos sin embargo, para un proceso inclusivo como este, que al combinar ambos efectos, las divergencias provenientes de la emisión real son canceladas por aquellas provenientes de la emisión virtual, dejándonos una expresión extremadamente simple para la sección de dispersión a orden α_s .

Capítulo 2

Teoría Clásica de Campos

En este capítulo establecemos algunos de los conceptos y resultados más importantes de la teoría clásica del campo, necesarios para la discusión subsecuente de la teoría cuántica correspondiente. Después de un breve resumen de la teoría del campo, damos algunos ejemplos de Lagrangianas clásicas que describen campos no interactuantes.

2.1 Formulación Lagrangiana y Leyes de Conservación

La formulación Lagrangiana de las teorías clásicas de campos, juega un papel medular en la manera en la que formulamos y entendemos las interacciones y las simetrías de dichas teorías. Sabemos que la teoría del campo puede considerarse como el límite de un sistema con n grados de libertad cuando n tiende a infinito y además, la covarianza relativista de las ecuaciones de la dinámica de los campos es manifiesta, ya que las cuatro coordenadas del espacio-tiempo, $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$, entran simétricamente. Es por ello, que la formulación Lagrangiana, permite una discusión sistemática de los principios de invarianza y las leyes de conservación asociadas a estos, además del hecho de que un principio variacional provee una relación directa entre la Lagrangiana y las ecuaciones de movimiento. Como veremos más adelante, en la teoría cuántica del campo, la Lagrangiana \mathcal{L} es la especificación más fundamental de la teoría. Estas características y propiedades de las teorías y su formulación son de gran valor para el estudio de teorías de norma, en donde las interacciones surgen como consecuencia de lo que posteriormente llamaremos simetrías de norma locales.

Formulación Lagrangiana

La cantidad fundamental de la teoría del campo es la acción funcional S , la integral en el tiempo de la función Lagrangiana L . En una teoría local del campo, la función Lagrangiana puede escribirse como la integral espacial de la densidad Lagrangiana, denotada por \mathcal{L} , la cual es función de N campos, $\phi^i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$ y sus primeras derivadas $\partial_\mu \phi^i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, esto es*

$$S[\phi_i(x)] = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_\mu \phi^i) d^4x. \quad (2.1)$$

El Principio de Mínima Acción establece que cuando un sistema evoluciona de una configuración, en un instante dado t_1 a otra en t_2 , este lo hace a lo largo de la “trayectoria” en el espacio de configuración para la cual S es un extremo. Esta condición se escribe como

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \sum_{i=1}^N \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta (\partial_\mu \phi^i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \delta \phi^i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right) \right] \end{aligned}$$

El último término puede convertirse en una integral de superficie sobre la frontera de la región de integración en el espacio-tiempo cuatro-dimensional. Dado que la configuración inicial y final están fijas, entonces $\delta \phi^i$ es cero para todo i en estos dos instantes. Si además restringimos la discusión a las deformaciones $\delta \phi$ que se anulan en la frontera espacial de esta región, entonces el término de superficie es cero. La integral sobre los términos restantes se anulará para deformaciones arbitrarias de los campos, $\delta \phi$, siempre que se satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} = 0 \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2) dan la dinámica de “movimiento” para los campos. Evidentemente, estas ecuaciones serán covariantes bajo transformaciones de

*Inversamente, se dice que una teoría del campo es local si la Lagrangiana puede escribirse como $\int d^3x \mathcal{L}$.

Lorentz, si la Lagrangiana se transforma como un escalar.

Leyes de Conservación

Cuando las ecuaciones de movimiento son derivadas a partir de un principio variacional surge un procedimiento general y sistemático para establecer los teoremas de conservación que resultan de los principios de invarianza. Las leyes de conservación encontradas en la naturaleza pueden imponerse, entonces, como simetrías de la Lagrangiana, restringiendo o precibiendo la forma de ésta. La relación entre las leyes de conservación y las simetrías del sistema se resumen en el teorema de Noether: Por cada transformación continua de simetría de la Lagrangiana existe una ley de conservación.

Como una aplicación del teorema de Noether consideremos dos casos importantes de transformaciones continuas: transformaciones globales (las cuales no afectan las coordenadas del espacio-tiempo) y transformaciones geométricas del espacio-tiempo.

Consideremos primero las transformaciones globales en su forma infinitesimal:

$$\phi^i \rightarrow \phi'^i = \delta^{ij} \phi^j + \epsilon^a \tau_a^{ij} \phi^j, \quad (2.3)$$

donde los ϵ^a son parámetros ($\ll 1$) de la transformación, independientes del espacio-tiempo. El índice a , sobre el cual se suma, toma tantos valores como transformaciones independientes de simetría existan y los τ_a^{ij} son constantes. La invarianza de la Lagrangiana ante la transformación global (2.3) significa que

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i + \delta \phi^i, \partial_\mu \phi^i + \delta \partial_\mu \phi^i) - \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) \quad (2.4)$$

se anula, donde

$$\begin{aligned} \delta \phi^i &= \epsilon^a \tau_a^{ij} \phi^j \\ \delta(\partial_\mu \phi^i) &= \epsilon^a \tau_a^{ij} \partial_\mu \phi^j. \end{aligned}$$

Desarrollando el primer término del lado derecho de (2.4) en serie de Taylor, reteniendo

términos de orden ϵ y usando la independencia de los parametros ϵ^a de la transformaci3n (2.3), obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \tau_a^{ij} \phi^j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \tau_a^{ij} \partial_\mu \phi^j = 0. \quad (2.5)$$

Luego, usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2) para escribir

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \tau_a^{ij} \phi^j$$

en lugar del primer término de (2.5). Haciendo esto, los dos términos resultantes pueden combinarse en una derivada total, i.e. en una corriente conservada,

$$\partial_\mu j_\mu^a = 0, \quad (2.6)$$

donde

$$j_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \tau_a^{ij} \phi^j. \quad (2.7)$$

es la corriente de Noether. Es importante notar que la corriente de Noether en (2.7) se conserva solamente si los campos satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2). Note además que, el teorema de Noether lleva al mismo tiempo a la construcci3n explícita de la corriente (2.7).

La ley de conservaci3n (2.6) puede parafrasearse diciendo que la carga

$$\mathcal{Q}^a \equiv \int j^{a0} d^3x \quad (2.8)$$

es una constante en el tiempo.

Como ejemplo de transformaci3n geométrica, consideremos translaciones en el espacio-tiempo $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$:

$$\phi^i(x^\mu) \rightarrow \phi^i(x^\mu + \epsilon^\mu),$$

donde ϵ^μ son cuatro parámetros independientes de la transformaci3n. Como la Lagrangiana que aparece en (2.1) no depende explícitamente de las coordenadas del espacio-tiempo, su ley de transformaci3n es de la forma

$$\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(x^\mu + \epsilon^\mu). \quad (2.9)$$

Nótese que en el lado derecho la Lagrangiana para el campo ϕ^i es evaluada en el punto $x^\mu + \epsilon^\mu$. A orden más bajo en ϵ se tiene que la ec.(2.9) es

$$\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial_\nu \phi^i \epsilon^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\nu \partial_\mu \phi^i \epsilon^\nu.$$

Por otro lado, dado que \mathcal{L} es un escalar

$$\mathcal{L}(x^\mu + \epsilon^\mu) = \mathcal{L}(x) + \partial_\nu \mathcal{L} \epsilon^\nu.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en (2.9), y usando la arbitrariedad de ϵ^μ resulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial_\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\nu \partial_\mu \phi^i = \partial_\nu \mathcal{L}.$$

De nuevo, usando las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (2.2) es posible reducir el lado izquierdo a una derivada total:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\nu \phi^i - \delta_\nu^\mu \partial_\nu \mathcal{L} \right) = 0.$$

Resumiendo: Si la Lagrangiana es invariante ante translaciones en el espacio-tiempo, entonces el tensor de energía-momento

$$T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\nu \phi^i - \delta_\nu^\mu \partial_\nu \mathcal{L} \quad (2.10)$$

se conserva.

La carga conservada asociada con las translaciones temporales es la energía del campo

$$\begin{aligned} E &= \int T^{00} d^3x \\ &= \int \mathcal{H} d^3x, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde \mathcal{H} es la densidad Hamiltoniana; y aquella asociada con traslaciones espaciales es el momento del campo

$$P^i = \int T^{0i} d^3x. \quad (2.12)$$

Haremos uso de estos resultados, cuando hablemos de la cuantización funcional. Ahí, la formulación natural será a través del Hamiltoniano, sin embargo para una gran variedad de estos siempre es posible empezar directamente con la Lagrangiana. De hecho, postularemos a la Lagrangiana como la especificación más fundamental de la teoría.

2.2 Teorías del Campo Clásicas sin Interacciones

En muchas situaciones físicas de interés es posible establecer las ecuaciones de movimiento para los campos directamente. Esto es, no necesariamente derivamos las ecuaciones por primera vez a partir del Principio de Mínima Acción. Cuando esto puede hacerse, la Lagrangiana se convierte en una herramienta que permite una cuantización sistemática y el estudio de los principios de invarianza. Para los propósitos de construcción de teorías de norma, a partir de simetrías, será conveniente obtener primero la Lagrangiana mediante algún principio, y luego las ecuaciones de movimiento como consecuencias de esta y del Principio de Mínima Acción. Aún cuando procedamos de esta manera, la construcción de la Lagrangiana será guiada por el objetivo de reproducir ciertas características de ecuaciones de movimiento simples. En esta sección presentamos algunas de las Lagrangianas más simples y comunes, que nos servirán como laboratorio para la construcción de las teorías de norma y el estudio de sus consecuencias, tema que trataremos en el siguiente capítulo.

El campo escalar real

La más simple de todas las teorías del campo es aquella de un sólo campo escalar real de Lorentz. La Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (2.13)$$

lleva a la ecuación de Klein-Gordon[†]

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0, \quad (2.14)$$

[†]Esta ecuación fue derivada en el marco de la mecánica cuántica relativista por Klein, Gordon, y otros autores en los años 20's al cuantizar conómicamente la relación energía-masa-momento de Einstein.

la cual describe partículas[†] de spin cero y masa m .

El campo escalar complejo

El campo escalar complejo $\phi(x)$,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)), \quad (2.15)$$

representado en términos de dos campos escalares $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ reales independientes, es apropiado para la descripción de partículas que posean un número cuántico aditivo, tal como la carga eléctrica. Para la mayoría de los propósitos es conveniente escribir la Lagrangiana para el campo escalar complejo en términos de $\phi(x)$ y su complejo conjugado, $\phi^*(x)$, en lugar de $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$. La Lagrangiana del campo escalar complejo es una generalización de la del campo escalar real y se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_1)(\partial_\mu \phi_1) \frac{1}{2}m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_2)(\partial_\mu \phi_2) \frac{1}{2}m^2 \phi_2^2 \\ &= (\partial_\mu \phi)^*(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \end{aligned} \quad (2.16)$$

Variaciones independientes de ϕ y ϕ^* (o equivalentemente de ϕ_1 y ϕ_2) dan las ecuaciones de movimiento para estos campos, las cuales resultan ser ecuaciones tipo Klein-Gordon (2.14). Además de representar partículas de spin cero y masa m , estos campos, en presencia de las interacciones adecuadas (i.e. interacciones tipo electromagnéticas) representan partículas de carga eléctrica opuesta.

El campo de Dirac

Partículas de espín 1/2, fermiones, en el espacio-tiempo cuatro-dimensional son descritas por la Lagrangiana de Dirac para el campo ψ de cuatro componentes dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi - m\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (2.17)$$

[†]Vease Greiner, W. and Reinhardt, J., *Field Quantization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Aplicando el Principio de Mínima Acción, encontramos que ψ satisface la ecuación de Dirac[§]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (2.18)$$

donde las γ^μ son las matrices de Dirac, de dimensión 4×4 y el “conjugado de Dirac” se define como $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$. La relación relativista $p^2 = m^2$ es válida si las matrices de Dirac satisfacen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski, definido por $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. El álgebra de Dirac, ecn. (??), implica en particular que $(\gamma^0)^2 = 1$. Multiplicando la ecuación (??) por γ^0 e introduciendo la notación $\beta = \gamma^0$, $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$, obtenemos la ecuación de Dirac tipo Schrödinger,

$$i \frac{\partial}{\partial x^0} \psi = \left[\alpha^i \left(-i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) + m\beta \right] \psi. \quad (2.20)$$

Note la relación lineal energía-momento-masa. Es precisamente en esta forma como la ecuación de Dirac es usada en mecánica cuántica relativista para la descripción de la dinámica de partículas relativistas.

El álgebra de Dirac comprende la definición y propiedades de las matrices γ^μ . En particular, el número de componentes del campo de Dirac (cuatro) queda determinado por el hecho de que la dimensión mínima de la representación del álgebra de Dirac es 4×4 . La forma específica de estas matrices es determinada por conveniencia. Para nuestra conveniencia, una representación apropiada de las matrices de Dirac es la representación Quiral o de Weyl. En esta representación las matrices de Dirac toman la forma en bloques de 2×2

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

[§]Dirac derivó su ecuación en los años 20's en un intento por resolver los problemas planteados por la ecuación de Klein-Gordon. Para esto, Dirac buscó una relación lineal entre la energía, el momento y la masa, la cual sólo pudo resolver el problema de las densidades de probabilidad negativas. El problema de las energías negativas, que aún subsistía, lo resolvió reinterpretando su ecuación diciendo que esta describía, a la vez, tanto partículas como antipartículas las cuales, al igual que las partículas, poseen spin $\frac{1}{2}$, carga positiva, y ocupan todos los estados de energía negativa (el mar de Dirac).

donde $\sigma^\mu \equiv (1, \sigma)$, $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\sigma)$, siendo σ las matrices de Pauli en forma de vector renglón, i.e. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Cualquier otra representación de las matrices γ^μ se obtiene a partir de ésta por una transformación unitaria, $\gamma^\mu \rightarrow U\gamma^\mu U^{-1}$, donde U es un matriz unitaria. Usando este hecho y la ley de transformación de ψ bajo transformaciones de Lorentz se prueba que la ecuación de Dirac, escrita como en (2.18), es covariante ante transformaciones de Lorentz[¶]. En el apéndice A usamos este resultado para encontrar las soluciones a esta ecuación.

Como comentario final, note que la Lagrangiana de Dirac es invariante ante la transformación de fase global

$$\psi \rightarrow \exp \{i\alpha\psi\}. \quad (2.22)$$

La simetría de la Lagrangiana de Dirac ante esta transformación, y la aplicación del teorema de Noether, ecn. (2.7), llevan a la conservación de la corriente

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (2.23)$$

En el siguiente capítulo abordaremos de nuevo este resultado y veremos que como consecuencia de postular invarianza ante transformaciones de fase locales es posible derivar las interacciones entre el campo de Dirac y el campo electromagnético. Veremos además, que la Lagrangiana de dicho campo surge de la imposición del principio de invarianza de norma.

EL campo electromagnético

Una formulación conveniente de la teoría de Maxwell de la electrodinámica puede obtenerse expresando el campo eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} en términos del campo vectorial de potencial $A_\mu(x) = (\Phi, \mathbf{A})$. En ausencia de fuentes, la Lagrangiana apropiada para el campo electromagnético es

[¶]Una prueba explícita de esto se da en Greiner, W., *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations* (Third edition), Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 2000.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor antisimétrico de campo electromagnético

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.25)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que resultan de \mathcal{L} son la ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.26)$$

La energía del campo electromagnético, expresada en términos de los campos eléctrico y magnético, es

$$E = \frac{1}{2} \int d^3(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (2.27)$$

Otras cantidades dinámicas pueden expresarse también en términos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , o en términos del tensor de campo $F_{\mu\nu}$.

Finalmente, y como motivación del siguiente capítulo, notemos que el tensor de campo electromagnético, la acción construida a partir de éste, la energía electromagnética y las ecuaciones de campo de Maxwell son invariantes ante la transformación

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (2.28)$$

donde $\alpha(x)$ es una función arbitraria de las coordenadas del espacio-tiempo. Por ejemplo, para el tensor de campo electromagnético:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu(A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

A las transformaciones de los campos que dependen de manera arbitraria de las coordenadas del espacio-tiempo se les conoce como *transformaciones de norma*. En este

sentido, la transformación (2.28) es una transformación de norma.

El postulado principal de las *teorías de norma* es el requerimiento de que todos los observables físicos, la acción y las ecuaciones de campo, sean invariantes ante transformaciones de norma. Dado que este principio se satisface en electrodinámica, entonces esta es un ejemplo de teoría de norma. De hecho, y como veremos mas adelante, la electrodinámica constituye el ejemplo más simple de teoría de norma que existe. En el siguiente capítulo, veremos como generalizar estos resultados para transformaciones de norma menos triviales y además aprenderemos como construir dichas teorías.

Capítulo 3

Principio de Invarianza de Norma

Como vimos en el capítulo anterior, el potencial electromagnético, que se introduce para generar los campos eléctrico y magnético, no está unívocamente definido. La libertad que resulta de escoger varios potenciales que generan los mismos campos es la invarianza de norma. Más adelante, veremos que la invarianza de norma del electromagnetismo es una consecuencia de una simetría continua de la Lagrangiana.

Aunque es claramente posible considerar la invarianza de norma como una consecuencia de la unificación de Maxwell, uno podría invertir el argumento y preguntarse e investigar si estas, las ecuaciones de Maxwell, surgen como resultado de la imposición de la invarianza de norma. En este capítulo tomamos esta posición, e invertimos el argumento, para generalizar la transformación de fase global, ecn. (2.22), del campo de Dirac a una transformación de simetría local. Como lo demostraremos explícitamente, este procedimiento nos llevará a las ecuaciones de Maxwell, junto con la transformación de norma para $A_\mu(x)$. Posteriormente generalizamos este procedimiento a transformaciones de fase más generales.

3.1 Origen de la Invarianza de Norma.

La idea de la invarianza de norma como un principio dinámico tiene su origen en los esfuerzos de Herman Weyl (1921) de encontrar una base geométrica para la gravitación y el electromagnetismo. Sin embargo, el intento de Weyl de unificar las interacciones fundamentales conocidas en ese momento, a través de la invarianza bajo un cambio de escala dependiente del espacio-tiempo, fue fallido. A pesar de ello, su terminología, *eichinvarianz* (eich = calibración estándar), ha sobrevivido y vale la pena revisar brevemente su

idea.

Consideremos el cambio de una función $f(x)$ entre los puntos x_μ y $x_\mu + dx_\mu$. En el espacio-tiempo con escala o unidad de medida uniforme, el valor de esta función es

$$f(x + dx) = f(x) + \partial^\mu f(x) dx_\mu.$$

Si además de esto, la escala para $f(x)$ cambia por un factor $(1 + S^\mu dx_\mu)$ al ir de x_μ a $x_\mu + dx_\mu$, el valor de la función será

$$\begin{aligned} f(x + dx) &= (f(x) + \partial^\mu f(x) dx_\mu)(1 + S^\nu dx_\nu) \\ &= f(x) + (\partial^\mu f(x) + S^\mu f(x)) dx_\mu + \mathcal{O}(dx^2), \end{aligned}$$

donde los S^μ son independientes de las coordenadas del espacio-tiempo. A primer orden en la traslación infinitesimal dx_μ , el incremento de la función es, por lo tanto,

$$\Delta f = (\partial^\mu + S^\mu) f(x) dx_\mu.$$

Weyl intentó basar su teoría en el operador diferencial modificado $(\partial^\mu + S^\mu)$, e identificar el cuatro-vector del electromagnetismo $A_\mu(x)$ con el generador de escalas dependiente del espacio-tiempo $S^\mu(x)$. De esta forma, pensó Weyl, el electromagnetismo encontraría una base geométrica.

Veamos porque la identificación propuesta por Weyl no fue exitosa. Recordemos que en mecánica cuántica el cuatro-vector de momento

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$

es reemplazado por el operador diferencial

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = (i\partial^0, -i\nabla).$$

Para una partícula con carga eléctrica e , el acoplamiento minimal, i.e. a través de los potenciales, lleva al reemplazamiento canónico

$$(p^\mu - eA^\mu) \rightarrow i(\partial^\mu + ieA^\mu).$$

Esto sugiere que el programa de Weyl hubiese sido implementado exitosamente con la identificación

$$S^\mu(x) = ieA^\mu(x),$$

e impuesto invarianza ante un cambio de fase

$$1 + ieA^\mu dx_\mu \simeq \exp ieA^\mu dx_\mu,$$

en lugar de un cambio de escala. Siguiendo los trabajos de Fock y London (1927), Weyl empezó (1929) a estudiar invarianza bajo transformaciones de fase, pero retuvo su terminología de *eichinvarianz*.

3.2 Invarianza de Norma como un Principio Dinámico.

Cuando en el capítulo anterior hablamos del campo electromagnético sin fuentes y escribimos su Lagrangiana, notamos el hecho de que ésta es invariante bajo un grupo muy grande de transformaciones, permitiendo transformaciones de simetría en cada punto del espacio-tiempo. Hablamos, en ese entonces de invarianza de norma local. Desde el punto de vista moderno, sin embargo, la invarianza de norma no es un simple accidente, sino un principio fundamental que determina, o restringe, la forma de la Lagrangiana. Por ejemplo, este principio ha probado su utilidad en la construcción de lo que hoy se conoce como el Modelo Estándar de las Partículas Elementales.

Tomemos este punto de vista como punto de partida para construir las teorías de norma. En particular, comencemos construyendo la teoría de las interacciones electromagnéticas o electrodinámica clásica. Esta teoría consiste en la interacción del campo de fermiones de Dirac con el campo electromagnético de Maxwell a través de un término de interacción que surge de la imposición del principio de invarianza de norma.

3.2.1 Invarianza de Norma Abeliana

Para construir una teoría que involucre fermiones, comencemos con el campo de Dirac y demandemos que la teoría sea invariante bajo transformaciones de fase locales

$$\psi \rightarrow V(x)\psi(x), \quad (3.1)$$

donde

$$V(x) = \exp \{i\alpha(x)\}. \quad (3.2)$$

Esto es, una transformación de fase por un ángulo $\alpha(x)$ que varía arbitrariamente en el espacio-tiempo. Al final del capítulo anterior vimos que la teoría de Dirac es invariante ante transformaciones de fase globales, donde $\alpha(x) = cte = \alpha$. Esta simetría nos llevó a la conservación de la corriente $j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$. Por lo menos dos preguntas surgen de manera natural al pedir invarianza ante la transformación (3.1): ¿Cuáles son las consecuencias de este tipo de invarianza?, y ¿Cómo construir una Lagrangiana que sea invariante bajo estas transformaciones?. Una de las consecuencias de exigir covarianza ante estas transformaciones, es que las interacciones de la teoría, en este caso la de Dirac, surgen de manera natural y sistemática. Con respecto a la segunda pregunta, mientras consideremos términos en la Lagrangiana que no contengan derivadas esto es fácil: simplemente escribimos los mismos términos que son invariantes ante transformaciones de fase global. Por ejemplo, el término de masa del fermión de Dirac,

$$m\bar{\psi}\psi,$$

es invariante ante la transformación de fase global y por lo tanto es permitido, i.e. es invariante ante (3.1). La dificultad surge cuando tratamos de incluir términos en la Lagrangiana que contengan derivadas. Veámos porque: La derivada de $\psi(x)$ en la dirección del vector n^μ se define a partir del proceso de límite

$$n^\mu \partial_\mu \psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)].$$

En una teoría donde se demande invarianza de fase local, esta definición no es muy útil dado que los campos que se están restando, $\psi(x + \epsilon n)$ y $\psi(x)$, tienen transformaciones

distintas. En otras palabras, la cantidad ∂_μ no tiene una ley de transformación simple, lo cual dificulta la construcción de una teoría que sea covariante ante la transformación (3.1). Para poder restar los valores de $\psi(x)$ en dos puntos distintos de una manera conveniente, debemos introducir un factor que compense la diferencia entre las transformaciones de fase de un punto a otro. Para hacer esto, definimos una cantidad escalar $U(y, x)$, que dependa de dos puntos y y x y que satisfaga la ley de transformación

$$U(y, x) \rightarrow V(y)U(y, x)V^\dagger(x), \quad (3.3)$$

simultáneamente con (3.1). Para $y = x$, definimos $U(x, x) = 1$. Sin pérdida de generalidad, es posible escribir $U(y, x)$ como una fase: $U(y, x) = \exp\{i\phi(y, x)\}$. Con esta definición, los objetos $\psi(y)$ y $U(y, x)\psi(x)$ tienen la misma ley de transformación, y por lo tanto podemos restarlos consistentemente a pesar de la transformación de simetría local.

Definimos, entonces, una derivada conveniente, conocida como *Derivada Covariante* a través del proceso de límite

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x)\psi(x)]. \quad (3.4)$$

Para hacer explícita esta definición, escribimos una expresión para el “comparador” $U(y, x)$ para puntos y y x infinitesimalmente separados. Si la fase de $U(y, x)$ es una función continua de los puntos y y x , entonces $U(y, x)$ puede desarrollarse en una serie de Taylor en la separación de estos:

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 - ie\epsilon n^\mu A_\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.5)$$

Note que hemos extraído arbitrariamente la constante e , la cual pudimos haber definido junto con la función $\alpha(x)$ como $i\alpha(x) \rightarrow ie\alpha(x)$. Más adelante identificaremos la “constante” e con la carga del fermión de Dirac. El coeficiente del desplazamiento ϵn^μ es un nuevo campo vectorial que aparece en el límite infinitesimal del “comparador” de las transformaciones de simetría locales y es llamado “conexión”. En este límite, la derivada covariante toma la forma

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + ieA_\mu \psi(x). \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.3) encontramos que A_μ se transforma como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (3.7)$$

Observe que la transformación (3.7) es, por definición, una transformación de norma, idéntica a (2.28).

Hasta ahora, con estas definiciones, hemos construido una derivada que se transforma de la misma manera que el campo $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[\partial_\mu + ie \left(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right) \right] \exp \{i\alpha(x)\} \psi(x) \\ &= \exp \{i\alpha(x)\} (\partial_\mu + ie A_\mu) \psi(x) \\ &= V(x) D_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Desde este punto de vista, la definición de la derivada covariante y la ley de transformación para la "conexión" se siguen del postulado de invarianza de la teoría ante transformaciones de fase locales. De hecho, la introducción del campo vectorial A_μ es una consecuencia de la simetría local. Sin la introducción de este campo no sería posible escribir una Lagrangiana invariante que tuviese derivadas de ψ .

En términos generales, el presente análisis nos da una idea de como construir todas las posibles Lagrangianas invariantes ante transformaciones de fase locales (en cualquier término con derivadas de ψ , se reemplaza esta por derivadas covariantes, quienes, de acuerdo con (3.8), se transforman de la misma manera que ψ). Luego entonces, cualquier combinación de ψ y sus derivadas que sean invariantes ante transformaciones de fase globales serán también invariantes localmente. Para completar la construcción de una teoría con simetría local, debemos encontrar un término cinético para A_μ . Esto es, un término que dependa sólo de A_μ y sus derivadas, pero no de ψ . Podemos construir este término usando el "comparador" en su forma infinitesimal o a partir del conmutador de derivadas covariantes. Trabajando a partir de la forma infinitesimal de $U(y, x)$, ecn. (3.5), necesitamos extender esta expresión al siguiente término en el desarrollo en ϵ . Asumiendo que $U(y, x)$ es una fase pura y usando la restricción $(U(y, x))^\dagger = U(y, x)$ podemos escribir

$$U(x + \epsilon n, x) = \exp \left\{ -i\epsilon n^\mu A_\mu \left(x + \frac{\epsilon}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right\}. \quad (3.9)$$

Usando este desarrollo para $U(y, x)$, multiplicamos cuatro “comparadores” de fase a lo largo de un pequeño cuadrado en el espacio-tiempo. Por simplicidad, elegimos este cuadrado en el plano 1 – 2, definido por los vectores unitarios $\hat{1}$, $\hat{2}$, como se muestra en la siguiente figura:

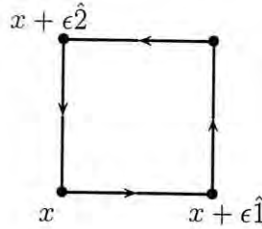


Fig. 1. Construcción de $F_{\mu\nu}$ usando un producto de comparadores alrededor de un pequeño cuadro en el plano $\hat{1} - \hat{2}$.

Definimos $\mathcal{U}(x)$ como el producto de cuatro comparadores, uno por cada cara del cuadrado, como

$$\mathcal{U}(x) = U(x, x + \epsilon\hat{2})U(x + \epsilon\hat{2}, x + \epsilon\hat{1} + \epsilon\hat{2})U(x + \epsilon\hat{1} + \epsilon\hat{2}, x + \epsilon\hat{1})U(x + \epsilon\hat{1}, x). \quad (3.10)$$

La ley de transformación (3.3) para $U(y, x)$ implica que $\mathcal{U}(x)$ es localmente invariante. En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, $\mathcal{U}(x)$ dará una función de A_μ con simetría local. Para encontrar la forma de esta función, combinemos (3.9) con la expresión para $\mathcal{U}(x)$, para obtener

$$\mathcal{U}(x) = \exp \left\{ -i\epsilon e \left[-A_2 \left(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{2} \right) - A_1 \left(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{1} + \epsilon \hat{2} \right) + A_2 \left(x + \epsilon \hat{1} + \frac{\epsilon}{2} \hat{2} \right) + A_1 \left(x + \frac{\epsilon}{2} \hat{1} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \right\}.$$

Desarrollando esta expresión en potencias de ϵ se obtiene

$$\mathcal{U}(x) = 1 - ie [\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)] \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Por lo tanto, la estructura

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.11)$$

es localmente invariante. Note que $F_{\mu\nu}$, encontrado aquí, tiene exactamente la misma forma que el tensor de campo electromagnético. Por lo tanto podemos identificar a A_μ con el cuatro-vector de potencial definido en el capítulo 2. La invarianza de $F_{\mu\nu}$ bajo la transformación (3.7) es obvia.

De esta forma, cualquier función que dependa de A_μ , a través de $F_{\mu\nu}$, y sus derivadas, será localmente invariante. Funciones más generales, tales como el término de masa del campo vectorial $A_\mu A^\mu$ se transforman bajo (3.7) de tal forma que no pueden compensarse y por lo tanto no pueden aparecer en una Lagrangiana que sea localmente invariante. Dicho de otra forma, la aparición de un término de masa para el campo electromagnético rompe la simetría de norma.

Una forma alternativa de construir el tensor de campo (3.11), y la que usaremos más adelante, es como sigue. Hemos visto que si el campo $\psi(x)$ tiene la ley de transformación (3.1), entonces, por construcción, su derivada covariante también tiene la misma ley de transformación. La misma conclusión es válida para el conmutador de derivadas covariantes:

$$[D_\mu, D_\nu] \rightarrow V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi(x). \quad (3.12)$$

Sin embargo, el conmutador de derivadas covariantes no es operador diferencial:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= \{[\partial_\mu, \partial_\nu] + ie([\partial_\mu, A_\nu] - [\partial_\nu, A_\mu]) - e^2[A_\mu, A_\nu]\} \psi(x) \\ &= ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \psi(x). \end{aligned}$$

Esto es,

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

De el lado derecho de (3.12), el factor $\psi(x)$ involucra la ley de transformación completa, por lo tanto el factor de multiplicación $F_{\mu\nu}$ deberá ser invariante.

Cualquiera que sea el método para probar la invarianza de $F_{\mu\nu}$, tenemos ahora todos los ingredientes necesarios para escribir la Lagrangiana más general para el campo de Dirac y su "conexión" asociada A_μ . Esta Lagrangiana deberá ser una función de ψ , su derivada covariante, de $F_{\mu\nu}$ y sus derivadas, y deberá ser invariante ante transformaciones (3.1) y (3.7).

En un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, la Lagrangiana más general posible que podemos escribir es*

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (3.14)$$

De esta forma, la Lagrangiana contiene solamente dos parámetros libres, el factor de escala e y el coeficiente m . Esta Lagrangiana, apropiadamente cuantizada, se conoce como la Lagrangiana de la electrodinámica cuántica, i.e. la teoría cuántica de las interacciones electromagnéticas entre el campo de Dirac y el campo de Maxwell. Para hacer más evidente esta interpretación, escribamos explícitamente la derivada covariante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu \\ &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{Interaccion}. \end{aligned}$$

Note, finalmente, que el término de interacción es consecuencia únicamente de exigir que la teoría de fermiones de Dirac sea invariante ante transformaciones de fase locales.

3.2.2 Invarianza de Norma no Abelianas

En 1954, Yang y Mills[†] propusieron que el principio de invarianza ante transformaciones de fase locales podría ser generalizado a cualquier grupo de transformaciones continuas. En particular, Yang y Mills tomaron como grupo de simetrías al grupo de isospin o $SU(2)$ global. Su motivación para hacer esto fue la casi degeneración de las masas del protón

*Implícitamente postulamos las transformaciones de paridad y de inversión temporal como simetrías de la teoría. Si este no fuera el caso habría que agregar el término $-c\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$. Es posible escribir otras Lagrangianas que posean simetría de norma pero estas involucran interacciones que no son renormalizables

[†]C.N Yang and R. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954)

y del neutrón, y la independencia de la carga en las interacciones fuertes, entre otras observaciones. La conservación del isospin, se refiere a que la teoría debería ser invariante ante rotaciones en el espacio de isospin y que el protón y el neutrón deberían de aparecer simétricamente en todas las ecuaciones. Esto, a su vez, significa que si las interacciones electromagnéticas son ignoradas, entonces la distinción entre el protón y el neutrón sería sólo por conveniencia. Sin embargo, esta restricción parecería contradictoria con una teoría del campo local, ya que una vez establecido quién es el protón y quién el neutrón esto debería respetarse en todos los puntos del espacio-tiempo, debido a que la transformación de isospin es global. En esta sección generalizamos la idea de Yang y Mills a un grupo de simetrías locales. En particular, presentamos el procedimiento general para la construcción de una teoría de norma local basado en el grupo de transformaciones $SU(N)$.

Consideremos la generalización del grupo de rotaciones de fase (3.1) [‡], es decir, en lugar de este grupo, consideremos el grupo $SU(N)$. El campo $\psi(x)$, fermiónico para nuestro caso, se transformará entonces como un vector bajo alguna representación de $SU(N)$. Escribimos la transformación como

$$\psi(x) \rightarrow V(x)\psi(x), \quad (3.15)$$

donde

$$V(x) = \exp \{i\alpha^a(x)t^a\}. \quad (3.16)$$

Para construir una Lagrangiana invariante ante $SU(N)$ procedemos de la misma manera que en la sección anterior. Esta vez, sin embargo, encontraremos algunas complicaciones debido a la naturaleza no conmutativa de los generadores del grupo t^a . El hecho de que estas matrices no conmuten da el nombre a las teorías que son invariantes ante un grupo de esta naturaleza: Nos referimos a estas teorías como *teorías de norma no abelianas*. En este sentido, la electrodinámica es una teoría de norma con simetría abeliana.

Procediendo como antes, debemos definir una derivada covariante. Para hacer esto

[‡]En teoría de grupos, este grupo de transformaciones se conoce como $U(1)$.

usamos la definición (3.4) siendo ahora el comparador $U(y, x)$ una matriz de $N \times N$ sujeto a la misma ley de transformación, ecn. (3.3), pero con $V(x)$ dado por (3.16). De nuevo, escogemos $U(y, y) = 1$. Para puntos $y \neq x$, restringimos $U(y, x)$ a una matriz unitaria. Cerca de la identidad, $U = 1$, cualquier matriz unitaria puede desarrollarse en terminos de los generadores de $SU(N)$. Luego entonces, para una separación infinitesimal podemos escribir

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 + i g \epsilon n^\mu A_\mu^a t^a + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.17)$$

donde g es una constante similar a e , la carga del electrón. Substituyendo esta expresión en la definición para la derivada covariante, ecn. (3.4), encontramos

$$D_\mu = \partial_\mu - i g A_\mu^a t^a. \quad (3.18)$$

Esta expresión para la derivada covariante requiere $N^2 - 1$ campos de norma A_μ^a , uno por cada generador del grupo de transformaciones.

Para encontrar la ley de transformación de los campos de norma, insertamos la forma infinitesimal del comparador, ecn. (3.17), en la ley de transformación (3.3):

$$1 + i g \epsilon n^\mu A_\mu^a t^a \rightarrow V(x + \epsilon n) (1 + i g \epsilon n^\mu A_\mu^a t^a) V^\dagger(x).$$

Debemos, ahora, desarrollar el lado derecho hasta orden ϵ . Para hacer esto, desarrollamos $V(x + \epsilon n)$ en potencias de ϵn . Luego, usamos la identidad $\frac{\partial V(x)}{\partial x^\mu} V^\dagger(x) = -V(x) \frac{\partial V^\dagger(x)}{\partial x^\mu}$ para obtener

$$A_\mu^a t^a \rightarrow V(x) \left(A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x).$$

Para transformaciones infinitesimales podemos desarrollar $V(x)$ hasta orden α . Haciendo esto obtenemos

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha^a(x)) + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c(x). \quad (3.19)$$

donde las f^{acb} son las constantes de estructura del grupo, definidas a través del conmutador de los generadores como

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c. \quad (3.20)$$

Note que el último término en (3.19) es nuevo y, a diferencia con QED, surge de la no conmutatividad de las transformaciones locales. Combinando esta relación, ecn. (3.19), con la forma infinitesimal de la ley de transformación del campo,

$$\psi(x) \rightarrow (1 + i\alpha^a t^a) \psi(x)$$

encontramos que la derivada covariante se transforma de la misma manera que éste[§]:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \{ \partial_\mu - igA_\mu^a t^a - i(\partial_\mu \alpha^a(x)) t^a + g[\alpha^a(x)t^a, A_\mu^b t^b] \} (1 + i\alpha^c(x)t^c) \psi(x) \\ &= (1 + i\alpha^a(x)t^a) D_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Usando la derivada covariante es posible construir Lagrangianas invariantes ante $SU(N)$ que involucren a $\psi(x)$. Sin embargo, al igual que antes, para construir una Lagrangiana completa, debemos encontrar un término cinético para A_μ^a . Para hacer esto, necesitamos construir el análogo del tensor de campo electromagnético. La forma más fácil de hacer esto es usando el conmutador de derivadas covariantes. La ley de transformación para la derivada covariante implica que

$$[D_\mu, D_\nu] \psi \rightarrow V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi. \quad (3.22)$$

Sin embargo, al igual que en el caso Abeliano el conmutador $[D_\mu, D_\mu]$ no es un operador diferencial sino un factor multiplicativo actuando sobre ψ . Desarrollando el conmutador, encontramos

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a t^a, \quad (3.23)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.24)$$

[§]Aquí sólo lo hacemos para transformaciones infinitesimales, sin embargo la derivada covariante tiene la misma transformación que el campo aún para transformaciones finitas.

es el tensor de campo. La aparición del último término en el tensor de campo tiene su origen en las propiedades del grupo de simetría, es decir, la no conmutatividad de los generadores del grupo. La ley de transformación para este tensor se sigue de las ecuaciones (3.15) y (3.22):

$$F_{\mu\nu}^a t^a \rightarrow V(x) F_{\mu\nu}^a t^a V^\dagger(x). \quad (3.25)$$

En su forma infinitesimal,

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a - f^{abc} F_{\mu\nu}^b \alpha^c. \quad (3.26)$$

Note que el tensor de campo ya no es más un invariante de norma, sin embargo, no es difícil construir, a partir de éste, un objeto que si lo sea:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2. \quad (3.27)$$

Es muy fácil probar que este término es invariante ante $SU(N)$: simplemente sustituimos en él la ley de transformación para el tensor de campo y usamos el hecho de que las constantes de estructura f^{abc} son completamente antisimétricas. Note, de la expresión para el término cinético del campo de norma, que esta Lagrangiana contiene términos cúbicos y cuárticos en A_μ^a . Luego entonces, esta Lagrangiana describe una teoría no trivial interactuante, i.e. los campos de norma son autointeractuantes.

Finalmente, para construir una teoría de campos de norma interactuando con fermiones, ponemos juntas la Lagrangiana de los campos de norma y la Lagrangiana de Dirac con las derivadas ordinarias reemplazadas por derivadas covariantes:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - m\bar{\psi}\psi. \quad (3.28)$$

Es importante notar que los términos de interacción entre el campo de Dirac y el campo de norma son proporcionales a t^a , mientras que los términos de interacción entre los campos de norma mismos (los términos cúbicos y cuárticos) son proporcionales a f^{abc} . Entonces, la forma de las interacciones en una teoría de norma no Abeliiana esta dictada por el grupo de simetría local. Dicho de otra forma, las interacciones entre los campos

de norma mismos, proporcionales a las constantes de estructura del grupo, se dán por la naturaleza no abeliana de este.

Capítulo 4

Cuantización Funcional

En este capítulo introducimos el método de la integral de camino en mecánica cuántica con el propósito de extenderlo a la cuantización funcional de la teoría del campo. Una vez que tenemos la expresión para la funcional generadora empezamos rápidamente a derivar las reglas de Feynman de las teorías de norma que desarrollamos en el capítulo anterior. Al hacer esto, encontraremos algunos problemas debidos a la invarianza de norma de dichas teorías.

4.1 Integrales de Camino en Mecánica Cuántica.

En la formulación canónica de la mecánica cuántica, las cantidades clásicas q y p son reemplazadas por los operadores \hat{q} y \hat{p} , los cuales satisfacen relaciones de conmutación de Heisenberg. Por otro lado, la formulación de la mecánica cuántica mediante integrales de camino está basada directamente en el concepto de *propagador*. Dada una función de onda $\psi(q_a, t_a)$, el propagador da la correspondiente función de onda a un tiempo posterior t_b :

$$\psi(q_b, t_b) = \int K(q_b, t_b; q_a, t_a) \psi(q_a, t_a) dq_a.$$

Esta relación es conocida como el principio de Huygens generalizado y meramente expresa causalidad.

De acuerdo a la interpretación estándar de la mecánica cuántica, $\psi(q_b, t_b)$ es la amplitud de probabilidad de encontrar al sistema en la configuración descrita por el vector de estado $|q_b\rangle$ al tiempo t_b . Entonces, $K(q_b, t_b; q_a, t_a)$ es la amplitud de probabilidad para la *propagación* del sistema de la configuración $|q_a\rangle$ en t_a a la configuración $|q_b\rangle$ en t_b , con $t_b > t_a$. La probabilidad de que el sistema se encuentre en $|q_b\rangle$ al tiempo t_b es

$$P(q_b, t_b; q_a, t_a) = |K(q_b, t_b; q_a, t_a)|^2.$$

De hecho, el propagador es una cantidad muy familiar: $K(q_a, q_b; t_a, t_b) = \langle q_b | \exp \{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_b - t_a)\} | q_a \rangle$, donde \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema.

Dicho esto, escribamos una expresión para el propagador en términos de la integral de trayectoria. Para esto, consideremos un sistema cuántico descrito por un Hamiltoniano $H(\hat{q}^i, \hat{p}^i)$ (Como una aclaración en la notación, $H(\hat{q}^i, \hat{p}^i)$ y \hat{H} denotan el mismo operador Hamiltoniano). La forma de \hat{H} no es relevante por el momento. Supongamos que queremos calcular la amplitud de probabilidad de propagación de este sistema, de la configuración descrita por $|q_a\rangle$ (El símbolo q_a se refiere a todas las coordenadas necesarias para especificar el estado del sistema inicialmente, i.e. $q_a = \{q_a^i, i = 1, 2, \dots\}$) a la configuración descrita por $|q_b\rangle$, en un tiempo $t \equiv t_b - t_a$. Luego, la amplitud de propagación está dada por

$$K(q_a, q_b; t) = \langle q_b | \exp \left\{ \frac{-i}{\hbar} \hat{H} t \right\} | q_a \rangle. \quad (4.1)$$

Por otro lado, recordemos que en mecánica cuántica existe un principio de superposición: cuando un proceso puede ocurrir en más de una forma, la amplitud de probabilidad total es igual a la suma de las amplitudes de probabilidad individuales, una por cada forma en que el proceso puede ocurrir. Apelando a este principio, podemos escribir la amplitud de probabilidad de propagación (4.1) como

$$K(q_a, q_b; t) = \sum_{\text{trayectorias}} \exp \{i * \text{fase}\} = \int \mathcal{D}(t) \exp \{i * \text{fase}\}, \quad (4.2)$$

donde hemos escrito la amplitud de probabilidad de propagación para cada trayectoria como una fase pura, de tal forma que ninguna sea más importante; el símbolo $\int \mathcal{D}(t)$ es simplemente otra manera de escribir la suma sobre todas las trayectorias; dado que hay una trayectoria por cada función que empieza en q_a y termina en q_b , la suma es de hecho una integral sobre un conjunto contínuo de funciones $q(t)$. Podemos definir esta integral como una generalización del cálculo al espacio de funciones. El integrando que aparece en (4.2) es una funcional $F[q(t)]$, dado que asocia una amplitud de probabilidad compleja con cada función $q(t)$. De la misma manera que una función $f(t)$ puede ser integrada

sobre un conjunto de puntos t , una funcional puede *integrarse* sobre un conjunto de funciones. Además, la *derivada funcional* (cuando la funcional es derivada con respecto de su argumento) se denota por $\frac{\delta}{\delta q(t)}$. Más adelante, cuando sea necesario, daremos algunas propiedades de la integración y derivación funcional.

Volviendo a (4.2), note que dejamos la fase indicada solamente. Para encontrar esta fase, recordemos que en el límite clásico solamente la trayectoria clásica contribuye. Tomando esto en cuenta, esperamos poder evaluar la integral (4.2) mediante el método de fase estacionaria e identificar la trayectoria clásica q_{cl} mediante la condición

$$\frac{\delta}{\delta q(t)} (fase[q(t)]) |_{q=q_{cl}} = 0.$$

Pero recordemos que la trayectoria clásica es la que satisface el Principio de Mínima Acción

$$\frac{\delta}{\delta q(t)} (S[q(t)]) |_{q=q_{cl}} = 0,$$

donde $S = \int dqL$ es la acción clásica. Guiándonos con esto, podemos identificar la fase en (4.2) con S , hasta una constante. Luego, dado que la aproximación de fase estacionaria deberá ser válida sólo en el límite clásico (esto es cuando $S \gg \hbar$) entonces podemos usar $\frac{S}{\hbar}$ como la fase. La expresión final para la amplitud de probabilidad de propagación será

$$K(q_a, q_b; T) = \int \mathcal{D}(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[q(t)] \right\}. \quad (4.3)$$

Para evaluar la integral funcional (4.3), debemos definir precisamente el símbolo $\int \mathcal{D}(t)$. Hacemos esto mediante un proceso de discretización, partiendo el intervalo de 0 a t en N pequeños intervalos, cada uno de duración ϵ ; aproximamos una trayectoria cualquiera por una secuencia de líneas rectas, una en cada pequeño intervalo de tiempo. Definimos la integral sobre las trayectorias por

$$\int \mathcal{D}(t) \equiv \frac{1}{C(\epsilon)} \int \frac{dq_1}{C(\epsilon)} \cdots \int \frac{dq_{N-1}}{C(\epsilon)} = \frac{1}{C(\epsilon)} \left(\prod_k \int \frac{dq_k}{C(\epsilon)} \right), \quad (4.4)$$

donde $C(\epsilon)$ es una constante que se escoge por conveniencia, ya que al final del cálculo tomamos $\epsilon \rightarrow 0$.

Ya que tenemos una expresión general* para (4.3) consideremos un sistema cuántico descrito por un conjunto de coordenadas $\{q^i, i = 1, 2, \dots\}$ (tal que $\hat{q}^i | q^i \rangle = q^i | q^i \rangle$), momentos canónicos $\{p^i, i = 1, 2, \dots\}$ (tal que $\hat{p}^i | p^i \rangle = p^i | p^i \rangle$), y Hamiltoniano $H(\hat{q}, \hat{p})$. Conforme avancemos especificaremos la forma de \hat{H} . La amplitud de propagación que queremos calcular es (escribiendo $\hbar = 1$)

$$K(q_a = q_0, q_b = q_N; t) = \langle q_N | \exp \{-i\hat{H}t\} | q_0 \rangle. \quad (4.5)$$

Para escribir esta amplitud de propagación como una integral de trayectoria, partimos el intervalo temporal en N intervalos, cada uno de duración ϵ . Esto nos permite escribir la exponencial del Hamiltoniano como un producto de N exponenciales, con t reemplazado por ϵ ; luego insertamos un conjunto completo de estados intermedios, uno por cada factor k , en la forma $1 = (\prod_i \int dq_k^i | q_k \rangle \langle q_k |$, para obtener los productos genéricos

$$\langle q_{k+1} | \exp \{-i\hat{H}\epsilon\} | q_k \rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \langle q_{k+1} | (1 - i\hat{H}\epsilon + \dots) | q_k \rangle. \quad (4.6)$$

Mientras consideremos términos en el Hamiltoniano de la forma $f(\hat{q})$ o $f(\hat{p})$, el elemento de matriz del Hamiltoniano entre dos estados intermedios es

$$\langle q_{k+1} | H(\hat{q}, \hat{p}) | q_k \rangle = \left(\prod_i \int \frac{dp^i}{2\pi} \right) H\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, p_k\right) \exp \left\{ i \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) \right\}. \quad (4.7)$$

Es muy importante notar que esta expresión no es la más general posible, dado que existirán Hamiltonianos donde haya términos que contengan productos de los operadores \hat{p} y \hat{q} , los cuales no conmutan. Sin embargo, para Hamiltonianos que poseen un ordenamiento especial, llamado ordenamiento de Weyl (En este ordenamiento los operadores de posición, en los productos de \hat{p} 's con \hat{q} 's, aparecen simétricamente a la izquierda y a la derecha dentro del bracket), es posible retener esta expresión. Asumiendo que $H(\hat{q}, \hat{p})$ posee un ordenamiento de Weyl, la amplitud de probabilidad de propagación (4.5) esta dada por

*Hasta aquí, hemos escrito la amplitud de propagación K en dos formas distintas: una puramente cuántica en términos de el operador Hamiltoniano y otra puramente clásica en términos de la acción. Sin embargo estas dos cantidades son equivalentes, ya que ambas satisfacen la misma ecuación diferencial (La ecuación de Schrödinger) sujeta a la misma condición de frontera. De hecho, en el ejemplo que sigue, partiendo de la forma cuántica llegamos a la forma clásica, para un Hamiltoniano bastante general.

$$K(q_a, q_b; t) = \left(\prod_{i,k} \int dq_k^i \int \frac{dp^i}{2\pi} \right) \exp \left\{ i \sum_k \left(i \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) - \epsilon H \left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, p_k \right) \right) \right\}.$$

Como hay una integral de momento, y una de posición, por cada k , desde 0 hasta $N - 1$, entonces esta expresión es la forma discretizada de

$$K(q_a, q_b; T) = \left(\prod_i \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \right) \exp \left\{ i \int_0^T dt \left(\sum_i p^i \dot{q}^i - H(q, p) \right) \right\}, \quad (4.8)$$

donde las funciones $q(t)$ están constreñidas en los extremos del intervalo temporal. La expresión (4.8) es la integral funcional o de trayectoria para la amplitud de probabilidad de propagación de (q_a, t_a) hasta (q_b, t_b) .

Como dijimos al inicio, la forma más común de trabajar en mecánica cuántica es resolver la ecuación de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$, donde \hat{H} es un operador, sujeta a ciertas condiciones de frontera. En la formulación mediante la integral funcional tenemos una forma explícita para la amplitud de probabilidad de transición la cual es útil para trabajar con problemas de dispersión. Además de esto, es muy importante mencionar que las cantidades que aparecen en la integral funcional son cantidades clásicas, no operadores. En la siguiente sección pondremos en uso esta expresión cuando empecemos a cuantizar las teorías del campo que tenemos.

4.2 Cuantización Funcional de la Teoría del Campo

En lo que resta de este capítulo generalizamos la integral funcional (4.8) a la teoría cuántica del campo. Nuestro objetivo es poder derivar la reglas de Feynman directamente de la expresión para la integral funcional, y en particular poder hacerlo desde la Lagrangiana de la correspondiente teoría.

Dado que la expresión para la integral funcional (4.8) de la sección anterior es válida para cualquier sistema cuántico que posea un ordenamiento de Weyl, entonces deberá ser válida para la teoría cuántica del campo. Recordando que en el límite en el que el número

de grados de libertad del sistema tiende a infinito este queda descrito por un campo, entonces en el límite $i \rightarrow \infty$ las coordenadas q^i son reemplazadas por las amplitudes del campo $\phi(\mathbf{x})$. En este límite la integral funcional (4.8), para un sólo campo, toma la forma[†]

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | \exp \{-i\hat{H}t\} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L} \right\}, \quad (4.9)$$

donde \mathcal{L} es la Lagrangiana clásica del sistema, y las funciones $\phi(x)$ sobre las cuales integramos están constreñidas en los extremos a las configuraciones $\phi_a(\mathbf{x})$ en $x^0 = t_a$ y $\phi_b(\mathbf{x})$ en $x^0 = t_b$.

4.2.1 Funciones de Correlación

En el esquema de la cuantización canónica de la teoría del campo, y en particular del campo de Klein-Gordon, la amplitud de probabilidad de propagación o propagador de una excitación del campo entre los puntos x y y , está dada por

$$\langle 0 | T \hat{\phi}_H(x) \hat{\phi}_H(y) | 0 \rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} \exp \{-ip \cdot (x-y)\}, \quad (4.10)$$

donde: $|0\rangle$ es el estado base de la teoría, $\hat{\phi}_H(x)$ es un operador en la descripción de Heisenberg que crea una partícula en la posición \mathbf{x} ; T es el operador de ordenamiento temporal, el cual coloca las operaciones en orden creciente en el tiempo de derecha a izquierda y $D_F(x-y)$ es llamado el propagador de Feynman. Cuando hacemos interactuar el campo de Klein-Gordon con algún otro campo, el estado base de la teoría pasa a ser $|\Omega\rangle$.

Antes de continuar, es conveniente revisar la idea de propagador desde otro punto de vista. Como vimos anteriormente, el propagador en mecánica cuántica, es la función de Green del operador de Schrödinger. Recordemos como se define la función de Green en la teoría de ecuaciones diferenciales. Por simplicidad, trabajamos en una dimensión. Supongamos que $\mathcal{O}(x)$ es un operador diferencial que satisface la ecuación

[†]Note que no escribimos la integral sobre los momentos, sin embargo es posible postular esta expresión ó más precisamente la Lagrangiana como la especificación más fundamental de la teoría cuántica del campo. Además, siempre que el Hamiltoniano sea cuadrático en los momentos la integral sobre estos puede hacerse.

$$\mathcal{O}(x)f(x) = j(x),$$

donde $j(x)$ es una función conocida. Se dice que $G(x, y)$ es una función de Green del operador $\mathcal{O}(x)$ si $f(x)$ puede escribirse como

$$f(x) = i \int G(x, y)j(y)dy.$$

Sustituyendo esta expresión arriba encontramos que i veces la función de Green es el inverso del operador diferencial \mathcal{O} . Esto es,

$$\mathcal{O}G(x, y) = -i\delta(x - y).$$

Como ejemplo, tomemos el operador de Klein-Gordon y definamos su propagador mediante la ecuación

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)D_F(x - y) = -i\delta(x - y).$$

Para resolver esta ecuación a favor del propagador, escribamos a este en términos de su transformada de Fourier, $D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\{-ip^\mu(x - y)_\mu\} \tilde{D}_F(p)$. Sustituyendo arriba obtenemos

$$(-p^2 + m^2)\tilde{D}_F(p) = -i.$$

Resolviendo para $\tilde{D}_F(p)$ obtenemos finalmente

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} \exp\{-ip \cdot (x - y)\}$$

la cual es idéntica a (4.10). Otra forma de identificar al propagador de Klein-Gordon es partiendo de la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Usando la identidad $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi$ podemos reescribir a \mathcal{L}_{KG} como $\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$. Dado que siempre integramos a \mathcal{L}_{KG} sobre todo el espacio, el primer término puede convertirse en una integral de superficie y dado que los campos van a cero en el infinito, nos quedamos con

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\phi(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi.$$

Luego, podemos definir el propagador de Klein-Gordon como la inversa del operador que aparece en el término cuadrático de la Lagrangiana. De esta forma, tenemos

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)D_F(x-y) = -i\delta(x-y).$$

Ya que sabemos que el propagador es una cantidad muy familiar podemos continuar un nuestro camino y encontrar aquellas reglas de Feynman que nos serán útiles.

En términos de la integral funcional, la función de correlación de dos puntos [‡] (4.10) está dada por

$$\langle 0 | T\hat{\phi}_H(x_1)\hat{\phi}_H(x_2) | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2) \exp\{i\int_{-t}^t d^4x\mathcal{L}\}}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp\{i\int_{-t}^t d^4x\mathcal{L}\}}. \quad (4.11)$$

Para funciones de correlación de más puntos, i.e. con más factores de $\hat{\phi}_H$, sólo necesitamos insertar más factores de ϕ a la derecha.

Nuestro objetivo es calcular funciones de correlación usando el lado derecho de (4.11). En otras palabras, queremos usar (4.11) para derivar las reglas de Feynman de la correspondiente teoría. Aunque estamos haciendo esto para el caso particular del campo de Klein-Gordon, estas igualdades son válidas para cualquier teoría del campo que consideremos aquí. El procedimiento que se sigue para derivar las reglas de Feynman partiendo del lado derecho de (4.11) es muy similar al que usamos en la sección anterior para calcular el propagador en mecánica cuántica: Definimos la integral funcional (de dimension infinita) como el límite de un número muy grande (pero finito) de integrales; luego reemplazamos las variables del campo $\phi(x)$, definidas sobre un continuo, por las variables $\phi(x_i)$ definidas sobre los puntos x_i de una red; al final del cálculo tomamos $\epsilon \rightarrow 0$, donde ϵ es la constante de separación de la red.

[‡]En la teoría libre, la función de correlación de dos puntos es idéntica a (4.10). Sin embargo en la teoría con interacciones, donde el lado derecho de (4.11) aún define funciones de correlación, éste ya no es igual al propagador (4.10). En este caso, el propagador recibe contribuciones adicionales debido a las interacciones.

En lugar de hacer esto, que en general es un procedimiento muy laborioso, introducimos un método más formal basado en la derivada funcional de un objeto llamado la *funcional generadora*. Este método evita los desarrollos de Fourier mencionados anteriormente.

4.2.2 Funcional Generadora

Para introducir este método, es conveniente definir primero la derivada funcional. En analogía con la derivación ordinaria, la derivada de una funcional $F[J(x)]$ con respecto de su argumento $J(x)$ se define mediante el proceso de límite

$$\frac{\delta F[J(y)]}{\delta J(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[J(y) + \epsilon \delta^4(x - y)] - F[J(y)]}{\epsilon}. \quad (4.12)$$

Por ejemplo, para el caso en que $\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y)\phi(y) = \phi(x)$ y para funciones más complicadas simplemente usamos las reglas de la derivación ordinaria (i.e. $\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \{i \int d^4y J(y)\phi(y)\} = i\phi(x) \exp \{i \int d^4y J(y)\phi(y)\}$). Para funciones que dependan de la derivada de $J(x)$, primero integramos por partes antes de aplicar la derivada funcional.

Ahora estamos en posición de introducir la funcional generadora $Z[J]$ de funciones de correlación. En la teoría del campo escalar, $Z[J]$ se define como

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \{i \int d^4x (\mathcal{L} + J(x)\phi(x))\}, \quad (4.13)$$

donde el término $J(x)\phi(x)$ se conoce como el término de fuente[§].

Las funciones de correlación pueden calcularse tomando la derivada funcional de la funcional generadora. Tomamos tantas derivadas funcionales dependiendo del tipo de función de correlación que busquemos, i.e. para funciones de correlación de n puntos simplemente tomamos n derivadas funcionales. Por ejemplo, en la teoría de Klein-Gordon, la función de correlación de dos puntos o propagador puede escribirse como

[§]Este lenguaje, usando fuentes, se debe a Schwinger. Podemos interpretar a el término de fuente como sigue: Lo que ocurre en los experimentos es que las partículas son creadas (por una colisión por ejemplo), interactúan, y luego son destruidas por la observación (i.e. por detección). La acción de crear a una partícula puede ser representada por una fuente y la acción de destruirla puede representarse genéricamente por otra. Esto es, la fuente $J(x)$ juega un rol análogo al de la corriente electromagnética, la cual actúa como una fuente de campo electromagnético. De esta manera cualquier campo puede ser creado por una fuente apropiada.

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{\phi}_H(x_1) \hat{\phi}_H(x_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{Z[J=0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) Z[J] |_{J=0} \quad (4.14) \\ &= D_F(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

donde reescribimos (4.13) como $Z[J] = Z[J=0] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right\}$.

Es importante notar que el método de la funcional generadora usado para construir funciones de correlación en la teoría sin interacciones puede usarse también para calcular funciones de correlación en la teoría interactuante. Por lo tanto, la expresión (4.14) es independiente de si la teoría contiene o no interacciones. El factor $Z[J=0]$ sin embargo es no trivial en el caso de una teoría interactuante, pero simplemente es el denominador de (4.11).

4.3 Electrodinámica Cuántica

Como las ecuaciones de la electrodinámica cuántica (QED) no pueden resolverse de forma cerrada, es necesario un tratamiento perturbativo de la teoría. Para hacer este procedimiento perturbativo más simple necesitamos derivar lo que se conoce como las reglas de Feynman. Este desarrollo perturbativo se hace alrededor de la teoría sin interacciones. Con la herramientas que hemos desarrollado hasta ahora estamos en posición de obtener la reglas de Feynman de dicha teoría.

4.3.1 Propagador del Fotón

Similarmente a como definimos el propagador de Klein-Gordon en la sección anterior, definimos el propagador del fotón mediante la ecuación (escrita en el espacio de momentos)

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu^\rho.$$

Multiplicando por k^ν encontramos

$$0 \times k_\nu \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = i\delta^\rho,$$

de donde se ve que $\tilde{D}_F^{\nu\rho}(k)$ es infinito y por lo tanto $(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)$ no tiene inversa. Este problema se debe a la invarianza de norma. Recordemos que $F_{\mu\nu}$, y por lo tanto

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$, son invariantes bajo la transformación de norma $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$. Los modos problemáticos son aquellos para los cuales $A_\mu(x) = \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$. Esto es, aquellos que son físicamente equivalentes a $A_\mu(x) = 0$. Si trazamos esto hasta la integral funcional encontramos que esta es divergente debido a que estamos integrando redundantemente sobre un conjunto infinito de configuraciones físicamente equivalentes. Para resolver este problema, debemos introducir alguna condición adicional que nos permita eliminar los grados de libertad superfluos de tal manera que la integral funcional no se extienda sobre configuraciones que están relacionadas mediante una transformación de norma y por lo tanto físicamente equivalentes. Para ser más precisos, y como condición adicional, escogemos la norma de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. De esta forma, el propagador del fotón (en el espacio de momentos) es

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = -i\frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \quad (4.15)$$

!Esta es nuestra primera regla de Feynman! Usando la condición de Lorentz, podemos reescribir la Lagrangiana como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{GF}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.17)$$

es el término que fija la norma. Más generalmente, en lugar de (4.16), pudimos haber sumado a la Lagrangiana una cantidad arbitraria de \mathcal{L}_{GF} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\partial^2 + (\frac{1}{\xi} - 1)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu. \end{aligned} \quad (4.18)$$

De esta manera el propagador del fotón[¶] es

[¶]Existe un procedimiento general sistemático para aislar los modos físicamente importantes y derivar esta expresión para el propagador. Este método se debe a Faddeev y Popov: L.D. Faddeev and N. Popov, Phys. Lett. **25B**, 29(1967).

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2} (g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}), \quad (4.19)$$

donde ξ es un cualquier constante finita, conocida como el parámetro de norma.

4.3.2 Propagador del Fermión de Dirac

Dado que $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ no es invariante ante transformaciones de norma, esperamos no encontrar problemas cuando buscamos una expresión para el propagador del fermión de Dirac. Siendo así, definimos la funcional generadora para el fermión de Dirac como

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\psi \exp \left\{ i \int d^4x (\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right\}, \quad (4.20)$$

donde $\eta(x)$ es una fuente para el campo de Dirac, cuyos valores se encuentran en el álgebra de Grassmann.^{||} Podemos reescribir (4.20) como

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = Z[0, 0] \exp \left\{ - \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x - y) \eta(y) \right\}, \quad (4.21)$$

donde

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp \{-ik \cdot (x - y)\} \frac{i}{\not{k} - m} \quad (4.22)$$

es el propagador del fermión de Dirac. Para obtener funciones de correlación necesitamos derivar Z con respecto de $\bar{\eta}$ y η . Sin embargo, primero debemos adoptar una convención de signo para las derivadas. Si θ y η son números de Grassmann, definimos

$$\frac{d}{d\eta} \theta \eta = - \frac{d}{d\eta} \eta \theta = -\theta.$$

De esta forma, la función de correlación de dos puntos o propagador de Dirac está dado por

^{||}El álgebra de Grassmann está formada por un conjunto de números que anticonmutan. Estos es, si ξ y η son dos números cualesquiera dentro del álgebra, entonces estos satisfacen la relación de anticonmutación $\{\xi, \eta\} = 0$. Dentro de este álgebra también podemos definir la integración. Si asumimos que una función cualquiera puede desarrollarse en una serie de Taylor, entonces su forma más general es $f(\eta) = A + B\eta$. Para integrar una función cualquiera $f(\eta) = A + B\eta$, definimos $\int d\eta = 0$ y $\int d\eta \eta = 1$. El hecho de que $\eta(x)$ sea una función con valores dentro del álgebra de Grassmann se debe a que $\psi(x)$ es un campo fermiónico que obedece relaciones de anticonmutación. En la descripción de la teoría del campo mediante la integral funcional, la funcional generadora de las funciones de correlación se escribe como una integral funcional sobre los campos, los cuales son tratados como funciones clásicas, esto es, como números complejos. Para extender los métodos funcionales a campos fermiónicos necesitamos, por lo tanto, que en la integral funcional estos sean considerados como números complejos que anticonmutan.

$$\langle 0 | T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0,0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \right) Z[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = S_F(x_1 - x_2).$$

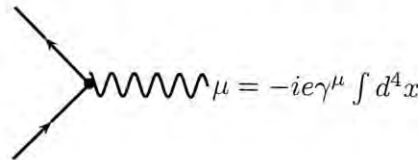
La razón por la cual decidimos introducir el método de la integral funcional es porque este nos permite leer las reglas de Feynman para los vértices directamente de la Lagrangiana de la teoría interactuante. Para la Electrodinámica Cuántica, la Lagrangiana completa es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \end{aligned}$$

Para evaluar las funciones de correlación desarrollamos la exponencial del término de interacción

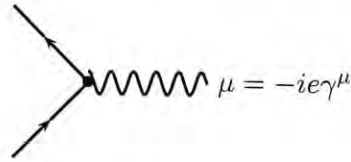
$$\exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{QED} \right\} = \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_0 \right\} \left(1 - ie \int d^4x \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \dots \right).$$

Los dos primeros términos de la Lagrangiana libre dan el propagador del fotón y el propagador de Dirac derivados antes. El término de interacción genera el vértice de QED



Una forma de interpretar estas reglas es pensar en el factor del vértice $-ie\gamma^\mu$ como la amplitud de probabilidad para la creación o destrucción de partículas en dicho vértice. La integral nos dice que debemos de sumar sobre todos los puntos del espacio-tiempo donde esto puede ocurrir. Esto es justamente el principio de superposición de la mecánica cuántica. Para calcular las amplitudes individuales, las reglas de Feynman nos dicen que debemos de multiplicar las amplitudes de cada parte independiente del proceso. Hasta ahora hemos escrito las reglas de Feynman en la función de las coordenadas del espacio-tiempo, sin embargo podemos simplificar un poco más estas expresiones haciendo la integración sobre las posiciones del vértice. De esta forma obtenemos conservación de momento en el vértice mediante funciones delta de Dirac en los momentos. Luego podemos

usar estas funciones delta para calcular las integrales de momento en los propagadores. Haciendo esto, obtenemos las reglas de Feynman en el espacio de momentos:



$$\text{Wavy line with } \vec{p} \text{ below it} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} (\xi = 1)$$

$$\text{Straight line with } p \text{ below it} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

Es precisamente en esta forma como utilizaremos las reglas de Feynman en el siguiente capítulo cuando calculemos secciones de dispersión.

4.4 Cromodinámica Cuántica

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría de norma no abeliana de las interacciones fuertes. Esta teoría contiene quarks y gluones como sus ingredientes básicos. QCD tiene como su punto de partida la *libertad asintótica*, la cual revela que sólo en el límite de altas energías los métodos perturbativos pueden ser aplicados legítimamente. En el apéndice D se presenta una breve exposición sobre este punto.

4.4.1 Simetría de Norma SU(3)

La cromodinámica clásica es la teoría de norma no abeliana SU(3) de la carga del color. En esta teoría, los fermiones (poseen carga de color) son los quarks, cada uno con un campo ψ_j^α , donde $\alpha = u, d, c, s, b, t$ son los sabores de quarks observados y $j = 1, 2, 3$ es el índice de color del quark. Los bosones de norma (también poseen carga de color) son llamados gluones, y cada uno es representado por un campo vectorial A_μ^a , $a = 1, 2, \dots, 8$. La cromodinámica clásica está definida por la Lagrangiana (3.28) del capítulo anterior

$$\mathcal{L}_{color} = \sum_{\alpha} \bar{\psi}^{\alpha} (i\not{D} - m^{\alpha}) \psi^{\alpha}. \quad (4.23)$$

El tensor de campo de norma está dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.24)$$

donde g es la constante de acoplamiento, y la derivada covariante es

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a t^a. \quad (4.25)$$

La Lagrangiana de la ecuación (4.23) es invariante ante transformaciones locales de $SU(3)$ del grado de libertad del color, donde los quarks y gluones se transforman de acuerdo con (3.15) y (3.19).

4.4.2 Reglas de Feynman

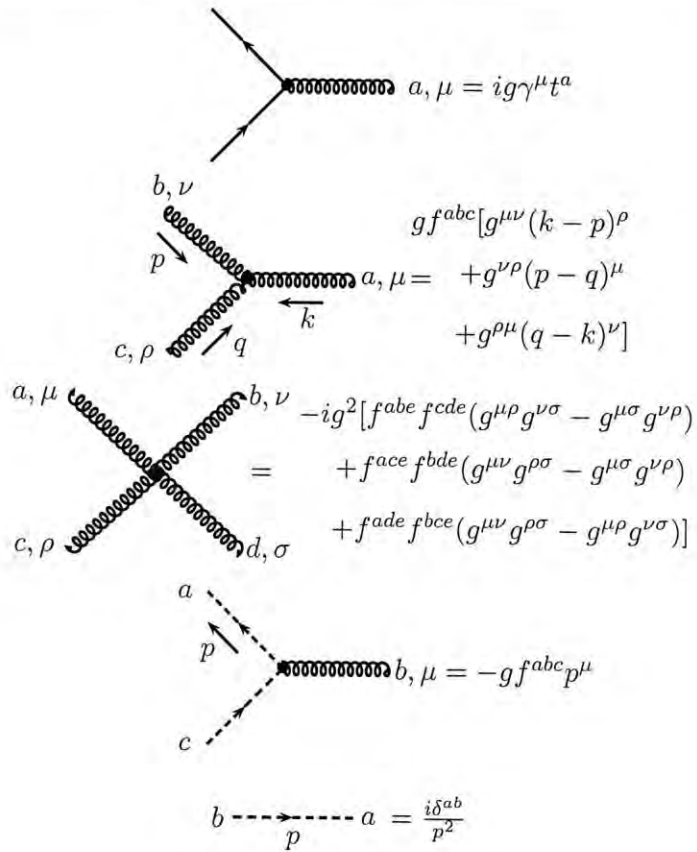
Para derivar las reglas de Feynman de la Cromodinámica cuántica, debemos, primero, promover la Lagrangiana (4.23) al nivel cuántico. Al hacer esto, sin embargo, enfrentaremos el mismo problema que con QED: tendremos problemas debidos a la invarianza de norma de la teoría. Cuando enfrentamos este problema en la sección anterior, lo resolvimos agregando un término a la Lagrangiana clásica que fijara la norma. La situación es análoga para $SU(3)$, pero un poco más complicada debido a su estructura no abeliana. De hecho, además del término $\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2$ que agregamos a la Lagrangiana de la electrodinámica clásica debemos agregar nuevas partículas, llamadas fantasmas**, descritas por la Lagrangiana $\mathcal{L}_{Fantasmas} = \bar{\eta}^a(-\partial^2\delta^{ab} - g\partial^\mu f^{abc}A_\mu^b)\eta^c$.

La Lagrangiana de la cromodinámica cuántica es entonces

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{Color} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{Fantasmas}. \quad (4.26)$$

De esta Lagrangiana se siguen las reglas de Feynman. Por ejemplo, los propagadores de los fermiones y de los bosones de norma son los mismos que en QED, multiplicados por la matriz identidad del espacio de grupo de norma, (i.e. por la matriz identidad de la representación en la cual se transforman). Las reglas de Feynman restantes son

**† Los campos que representan a estas partículas son campos que anticonmutan pero son escalares bajo transformaciones de Lorentz. De esta forma, las excitaciones cuánticas de estos campos tienen la relación incorrecta entre spin y estadística para ser partículas físicas



Con estas reglas en mano, estamos en posición de calcular amplitudes de probabilidad de transición y secciones de dispersión. Es precisamente este, el tema que discutimos en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Producción de Hadrones

Hasta ahora hemos derivado el formalismo necesario para empezar a hacer cálculos reales y obtener algunas de las predicciones de la Cromodinámica Cuántica (QCD). La idea de haber introducido las reglas de Feynman (y sus correspondientes diagramas) fue visualizar una amplitud de transición particular como un proceso en el espacio-tiempo. Ya que sabemos como hacer esto, podemos trabajar en orden inverso: Imaginemos cualquier proceso (que involucre fermiones y bosones de norma, y que sólo tenga interacciones permitidas por la correspondiente teoría) en el espacio tiempo, plasmemos esto como un diagrama de Feynman y luego usemos las reglas de Feynman para asignarle una amplitud de probabilidad a dicho proceso. Por ejemplo consideremos el diagrama

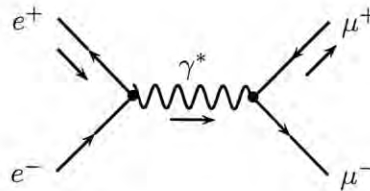


Fig.1. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

En Electrodinámica Cuántica, podemos interpretar este proceso como la aniquilación de un par electrón-positrón para dar origen a un fotón virtual*, el cual luego se trasmuta en un par muón-antimuón. De hecho, este es uno de los procesos más simples en QED pero el más importante en la física de altas energías ya que es fundamental para el

*Decimos que tenemos una partícula es virtual cuando esta no satisface la relación energía momento de Einstein, i.e. $p^2 \neq m^2$, donde p es su momento y m su masa. Un sinónimo de esto es decir que la partícula se encuentra "off-shell".

entendimiento de todas las reacciones en los colisionadores electrón-positrón, ya que se usa para calibrar tales máquinas. Un proceso relacionado con este es la aniquilación de un par electrón-positrón para dar origen a un par quark-antiquark a través de un fotón virtual intermedio. Este proceso es muy útil en la determinación de las propiedades de las partículas elementales. Usaremos este proceso en lo que resta de este trabajo para obtener las predicciones de las teorías de norma que hemos desarrollado.

5.1 Aniquilación Electrón-Positrón en Hadrones: $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$

En el presente entendimiento de las interacciones fuertes (las encargadas de mantener los nucleones ligados en el núcleo), dado por la Cromodinámica Cuántica, todos los hadrones están compuestos por fermiones de Dirac, llamados quarks. Los quarks aparecen en 6 tipos: u (up), d (down), s (strange), c (charm), b (bottom), t (top), llamados "sabores", cada uno con su propia masa m_f y carga eléctrica Q_f , en términos de la carga del protón. La siguiente tabla da cuenta de esto:

<i>Quark</i>	<i>Carga</i>	<i>Masa</i>
u	2/3	~ 4 MeV
d	-1/3	~ 7 MeV
c	2/3	~ 1.5 MeV
s	-1/3	~ 135 MeV
t	2/3	~ 175 GeV
b	-1/3	~ 5 GeV

Además, cada quark posee un número cuántico adicional, llamado 'color', el cual solamente puede tomar 3 valores.

De acuerdo con QCD, el proceso más simple e^+e^- que termina en hadrones es

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q},$$

la aniquilación de un par electrón-positrón a un par quark-antiquark, a través de un fotón intermedio. Después de que los quarks han sido creados, interactúan el uno

con el otro mediante el intercambio de gluones, produciendo más pares quark-antiquark. Eventualmente, los pares quark-antiquark se combinan para formar hadrones.[†] Haciendo uso de los diagramas de Feynman, el proceso más simple en el espacio-tiempo que podemos imaginar es

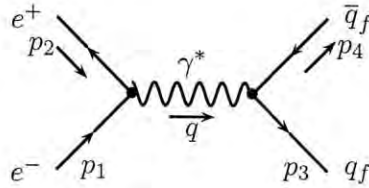


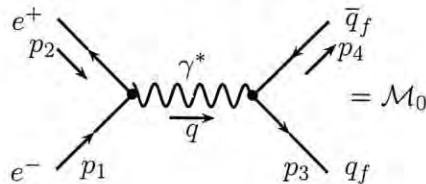
Fig.2. $e^+e^- \rightarrow \bar{q}_f q_f$

Orden Arbol

Esto es, el electrón y el positrón se aniquilan en cualquier punto del espacio-tiempo dando lugar a un fotón que se propaga de un punto a otro en un tiempo $T = \frac{1}{\sqrt{s}}$ (\sqrt{s} es la energía total disponible de la reacción e^+e^-) para dar origen a un par quark-antiquark, los cuales luego se propagan en el espacio-tiempo, para convertirse finalmente en hadrones.

5.1.1 Sección de Dispersión a Nivel Árbol en la Producción de Hadrones

Para empezar calculamos la sección de dispersión en la producción de hadrones a orden α^2 . Usando las reglas de Feynman del capítulo anterior, podemos asignar una amplitud de probabilidad \mathcal{M}_0 al proceso $e^+e^- \xrightarrow{\gamma^*} q_f \bar{q}_f$, a orden árbol[‡]



donde

[†]Note que no nos preocupamos por la forma en que el par quark-antiquark se hadroniza, i.e. se convierte en hadrones. Más adelante, platicamos un poco sobre eso, sin embargo tal proceso de hadronización no es descriptible en términos de la cromodinámica cuántica perturbativa.

[‡]Es convencional dibujar flechas sobre las líneas fermiónicas, como se muestra, para representar la dirección del flujo del número de partícula. De esta forma, el momento asignado al propagador del fermión en esta dirección, la de la flecha. Sin embargo, para antipartículas externas el momento fluye en la dirección opuesta. Es este caso es útil dibujar una segunda flecha, en la dirección del momento, a lo largo de la línea.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0 &= \bar{v}^{s'}(p_2)(-ie\gamma^\mu)u^s(p_1)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\bar{u}^r(p_3)(iQ_f e\gamma^\nu)v^{r'}(p_4) \\
&= -i\frac{Q_f e^2}{q^2}\left(\bar{v}^{s'}(p_2)\gamma^\mu u^s(p_1)\right)\left(\bar{u}^r(p_3)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)\right). \tag{5.1}
\end{aligned}$$

Para encontrar la sección total de dispersión a este orden, debemos calcular la probabilidad de este proceso, i.e. $|\mathcal{M}_0|^2$; sumar sobre todas las posibles polarizaciones en el espacio de colores y en el espacio de spins del estado inicial y final[§], y finalmente integrar sobre el espacio fase del estado final. De esta forma, la expresión esquemática para la sección total de dispersión partónica que se requiere para la de producción de hadrones, es

$$\sigma_0 = \frac{1}{2s} \int d\Pi_2 \sum_{spins, colores} |\mathcal{M}_0|^2, \tag{5.2}$$

donde $s^{\frac{1}{2}} = E = \sqrt{q^2}$ es la energía disponible, en el centro de masa, para la reacción, y $\int d\Pi_2$ es la integral sobre el espacio fase de dos partículas (el par quark-antiquark) en el estado final (ver apéndice B). De manera que

$$\begin{aligned}
\sum_{spins, colores} |\mathcal{M}_0|^2 &= \sum_{s, s', r, r'} \frac{Q_f^2 e^4}{q^4} \text{tr}\{\mathbf{1}_{3 \times 3}\} \\
&\times \left(\bar{v}^{s'}(p_2)\gamma^\mu u^s(p_1)\bar{u}^s(p_1)\gamma^\nu v^{s'}(p_2)\right)\left(\bar{v}^{r'}(p_4)\gamma_\nu u^r(p_3)\bar{u}^r(p_3)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)\right) \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Escribiendo explícitamente los índices matriciales de cada uno de los factores, podemos evaluar (5.4) usando las relaciones de completéz de los spinores de Dirac del apéndice A (ecs (A.7) y (A.8)). Haciendo esto (e ignorando las masas de todas la partículas presentes), obtenemos

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}_0|^2 = 3 \frac{Q_f^2 e^4}{q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}, \tag{5.4}$$

donde

$$L_{\mu\nu} = \text{tr}\{\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu\}, \tag{5.5}$$

$$H^{\mu\nu} = \text{tr}\{\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu\}. \tag{5.6}$$

[§]La sección de dispersión que se mide no está polarizada ni en el espacio de spins, ni en el espacio de colores. Además, la suma sobre las polarizaciones en el espacio de colores es solamente sobre el estado final, i.e. los electrones no interactúan fuertemente.

Lo único que nos resta por hacer para obtener σ_0 es calcular la integral sobre el espacio fase del estado final. Una vez que hayamos hecho esto, i.e. al final de la integración, $\int d\Pi_2 H^{\mu\nu}$ sólo dependerá de q^μ y escalares, y por lo tanto deberá tener la forma

$$\int d\Pi_2 H^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2})H, \quad (5.7)$$

donde H es un escalar, el cual se calcula como sigue: Contraemos (5.7) con $g^{\mu\nu}$ y usamos el hecho de que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ ($= 4 - \epsilon$ en $d = 4 - \epsilon$ dimensiones).

Sustituyendo (5.7) y (5.4) en (5.2) nos lleva a

$$\sigma_0 = \frac{3Q_f e^4}{2s^3} \frac{1}{3} (g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}) \int d\Pi_2 (g^{\mu\nu} H_{\mu\nu}). \quad (5.8)$$

Luego, usando los teoremas de trazas del apéndice A encontramos que

$$g^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \begin{cases} -4s & d = 4 \\ -\frac{1}{2}s(2 - \epsilon)(4 - \epsilon) & d = 4 - \epsilon \end{cases} \quad (5.9)$$

Finalmente, usando (5.9) y la expresión para $\int d\Pi_2$ del apéndice B, obtenemos la expresión final de la sección de dispersión partónica a orden árbol para la producción de hadrones.

$$\sigma_0 = \frac{16\pi\alpha^2}{3s} (3 \sum_f Q_f^2). \quad (5.10)$$

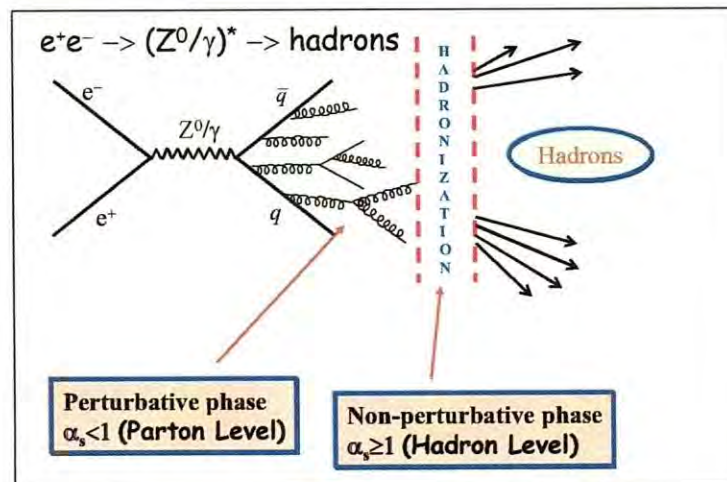
Es importante mencionar que la suma va sobre todos los quarks que podemos considerar sin masa. Esto es, la suma va sobre todos los quarks excepto el quark top, ya que su masa es muy grande. Considerar a este quark carente de masa requeriría una energía mucho mayor que 2×175 GeV. Sin embargo, a esta magnitud de energías también produciríamos el boson Z, en lugar del fotón intermedio. Esto nos daría un diagrama similar al de la Fig. 2, con γ^* reemplazado por Z. De cualquier manera, no consideramos este tipo de contribución.

5.1.2 Funciones de Fragmentación

Antes de continuar veamos el contexto en el que se encuentra la expresión (5.10). Hasta ahora, no hemos dicho ninguna palabra acerca de como los quarks se convierten en hadrones, que son los que realmente se detectan. Ha sido suficiente asumir que los quarks se transforman en hadrones con probabilidad uno. Esta suposición nos llevó a la expresión (5.10).

En el centro de masa, el par quark-antiquark producido se separa en direcciones opuestas con la misma magnitud de momento y se materializa en un par de jets de hadrones que viajan en direcciones colineales a las direcciones originales del par quark-antiquark.

Podemos visualizar la formación de jets de una manera similar al proceso de bremsstrahlung una vez que el par quark-antiquark se ha separado por una distancia considerable, de tal forma que la interacción quark-antiquark es muy intensa. Una vez separados por esta distancia, α_s se vuelve grande y la interacción fuerte trata de mantener unidos al par $q\bar{q}$. De esta forma, la energía potencial entre ellos se vuelve grande de tal manera que uno o más pares quark-antiquark se crean. Eventualmente, toda la energía se convierte en dos jets de hadrones que se mueven más o menos en la dirección original del par quark-antiquark.



Para tomar en cuenta la fragmentación de quarks en hadrones, debemos escribir la sección de dispersión para la producción de hadrones, a partir de un par electrón positrón, en la forma[¶]

[¶]J.C.Collins, D.E.Soper and G. Sterman, Factorization of Hard Processes in QCD en *Perturbative Quantum Chromodynamics*, Editor A.H. Mueller. World Scientific Publishing, Singapore, 1989.

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow hX)}{dz} = \sum_f \sigma(e^+e^- \rightarrow q_f\bar{q}_f)[D_{q_f}^h(z) + D_{\bar{q}_f}^h(z)]. \quad (5.11)$$

Esta expresión describe la producción de hadrones como dos eventos secuenciales: La producción de un par quark-antiquark, seguido de la fragmentación del quark o antiquark produciendo el hadron que es detectado. Por lo tanto, las funciones $D_{q_f}^h(z)$ y $D_{\bar{q}_f}^h(z)$ representan la probabilidad de que el hadron h sea encontrado como un producto de la fragmentación del quark (o antiquark) con una fracción de su energía z . Esto es,

$$z \equiv \frac{E_h}{E_{q_f}} = \frac{E_h}{E_{haz}} = \frac{2E_h}{Q}. \quad (5.12)$$

La suma en (5.11) sobre todos los "sabores" de quarks, da cuenta del hecho de que los detectores no distinguen los números cuánticos de los quarks que produjeron el hadron observado.

De esta forma, la función de fragmentación describe la transición parton \rightarrow hadron. Estas funciones están constreñidas por la conservación del momento y de la probabilidad:

$$\sum_h \int_0^1 D_{q_f}^h(z) dz = 1 \quad (5.13)$$

$$\sum_f \int_{z_{min}}^1 [D_{q_f}^h + D_{\bar{q}_f}^h(z)] dz = n_h, \quad (5.14)$$

donde z_{min} es la energía umbral $\frac{2m_h}{Q}$ para producir un hadron de masa m_h , y n_h es la multiplicidad promedio de hadrones del tipo h . La ecuación (5.13) simplemente expresa el hecho de que la suma de las energías de todos los hadrones es igual a la energía del quark (o antiquark) que los produjo. Por otro lado, la ecuación (5.14) dice que el número n_h de hadrones del tipo h está dado por la suma de las probabilidades de obtener h de todos los posibles quarks (o antiquarks) de cualquier sabor.

5.2 Regularización.

En principio, dadas las reglas de Feynman y sus correspondientes diagramas asociados, podemos construir cualquier diagrama uniendo los componentes básicos (propagadores y vértices) a cualquier orden en la constante de acoplamiento ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ para QED y $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$

para QCD). Por ejemplo, en Electrodinámica Cuántica, uniendo un par de vértices mediante un propagador pudimos construir el diagrama de la figura 1. Este tipo de diagrama es de orden α , y se conoce genéricamente como diagrama de árbol.

Podemos ser más ambiciosos, y pensar en el mismo proceso (dos partículas \rightarrow dos partículas), y agragarle más estructura interna a nuestro diagrama de orden árbol. Físicamente esto significa que tomamos en cuenta el hecho de que las partículas virtuales interactúan con los estados finales o den origen a pares de partícula-antipartícula. Por ejemplo, podríamos permitir que el par quark-antiquark interactúe intercambiando un gluón. Diagramáticamente tendríamos

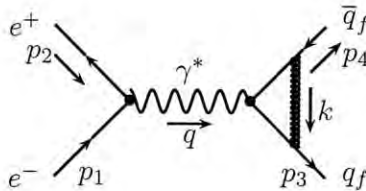


Fig.3. $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$

Diagrama de lazo.

Este diagrama es de orden $\alpha^2\alpha_s$ y se conoce genéricamente como diagrama de lazo (loop diagram). En principio, podríamos seguir calculando a órdenes más altos en α_s , sin embargo encontraremos un conjunto de complicaciones en el cálculo, debidas a la naturaleza misma de la teoría. Veamos porque: una aplicación de las reglas de Feynman nos lleva a que este diagrama es proporcional a la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(k^2)}{k^2(p_3 - k)^2(p_4 + k)^2}$$

Esta integral aparece por el hecho de que debemos considerar todos los posibles momentos que pueden correr por el lazo. Si inspeccionamos un poco esta integral podemos notar que esta es divergente cuando $k \rightarrow \infty$ y $k \rightarrow 0$. El primer tipo de divergencia se conoce como *divergencia al ultravioleta*, mientras que el segundo como *divergencia al infrarrojo*. Note que este último tipo de divergencia se debe al hecho de que las partículas que se propagan dentro del lazo carecen de masa. Si los propagadores fueran masivos, esto es, si $k^2 \rightarrow k^2 - m^2$, entonces la masa impediría este tipo de divergencia. En este

caso se dice que la masa juega el rol de *regulador*. Más adelante veremos que existen otros tipo de reguladores. Por lo pronto, es importante decir que *en teorías de norma la presencia de bosones de norma da origen a divergencias infrarrojas*, ya que la simetría de norma prohíbe la aparición de un término de masa para el boson de norma.

En principio, parecería que la presencia de estas divergencias es un indicio de que la teoría no describe apropiadamente a la naturaleza. Sin embargo, las teorías de norma QED y QCD pueden tratarse de una manera sistemática de tal forma que las divergencias ultravioletas no se manifiesten, a ningun orden, en las predicciones físicas de la teoría. Este proceso es llamado *renormalización*. En general, esto significa que tenemos un conjunto de reglas bien definidas que nos permiten calcular cualquier observable, a cualquier orden, y este estará libre de divergencias ultravioletas, por lo menos. De cualquier manera, las divergencias infrarrojas aún persisten. Veremos más adelante que las divergencias infrarrojas se cancelan para un tipo particular de proceso. De hecho, lo haremos explícitamente para el proceso $e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}$ a un lazo. Esta demostración explícita constituye la motivación de este trabajo. Para hacer posible que esto ocurra, i.e. que las divergencias tanto infrarrojas como ultravioletas se cancelen, debemos tener una procedimiento sistemático para aislar apropiadamente la parte finita de la parte divergente de estas integrales. Este procedimiento se llama *regularización*, y antecede al proceso de renormalización que mencionamos unas líneas antes. En la literatura existen diferentes métodos para regularizar, sin embargo no todos preservan las simetrías^{||} de la teoría (en particular la simetría de norma y la simetría de Lorentz). Para revisar más apropiadamente estos métodos es conveniente trabajar con una integral particular. Tomamemos como ejemplo la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell}{(\ell^2 - \Delta + i\epsilon)^m}$$

donde m es un entero positivo; el término $i\epsilon$ es llamado la prescripción de Feynman y nos dice el sentido en el que hay que calcular la integral de contorno en ℓ^0 ; Δ es una constante, la cual es una combinación lineal de invariantes (i.e. q^2 y m^2). Nuestra intención es aislar las divergencias. Sin embargo, note que si no fuera por el signo

^{||}El hecho de que el método de regularización que escojamos preserve la simetría de norma es una exigencia del método de renormalización.

menos de la métrica de Minkowski podríamos evaluar la integral completa haciendo uso de coordenadas esféricas en cuatro dimensiones. Para remover este signo menos, hagamos lo que se conoce como una rotación de Wick. Esto es, rotemos el contorno de integración en ℓ^0 por $\frac{\pi}{2}$ radianes. Para hacer esto, definamos la variable Euclideana ℓ_E como

$$\ell^0 = i\ell_E^0; \quad \vec{\ell} = \vec{\ell}_E. \quad (5.15)$$

Nuestro contorno rotado va desde $\ell_E^0 = -\infty$ hasta $\ell_E^0 = \infty$. Con este cambio de variable, la integral a evaluar es

$$I = (-1)^{m+1} i \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^m}.$$

Ya que tenemos una variable Euclideana, entonces podemos pasar a coordenadas esféricas. Pasando a coordenadas esféricas, y usando el hecho de que el área de la esfera unitaria en cuatro dimensiones $\int d\Omega_4$ (ver 5.16) es $2\pi^2$ obtenemos

$$I = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}.$$

Luego entonces, la integral es divergente para $m \leq 3$. Ahora que sabemos explícitamente que la integral es divergente, veamos como podemos parametrizar esta divergencia, considerando los siguientes métodos de regularización.

Corte en el momento (Momentum Cutoff). Consideremos el caso $m = 3$. En lugar de hacer la integral en la parte radial de $\vec{\ell}_E$ desde $\ell_E = 0$ hasta $\ell_E = \infty$, escogemos un momento de corte Λ muy grande pero finito. Usando este regulador, la integral es

$$I_\Lambda = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda + \Delta}{\Delta} \right) + \frac{\frac{3}{2}\Lambda^2 + \Lambda\Delta}{(\Lambda + \Delta)^2} \right].$$

En el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ recobramos I , sin embargo hemos parametrizado la divergencia. Aunque regular con un corte en el momento es quizás la elección más obvia, no es la más apropiada. La razón es que la dependencia en el regulador viola la simetría de Lorentz.

Regularización de Pauli-Villars. La idea de este método se basa en la introducción de partículas ficticias en los lazos, extremadamente masivas, con el signo incorrecto en el propagador. Yendo hacia atrás en la expresión original para la integral de Feynman,

reemplazamos el propagador del boson de norma $\frac{1}{k^2}$ por $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}$, donde Λ es una masa muy grande. Haciendo esto, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left(\frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta)^3} - \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d^4 \ell_E \left(\frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 - \Delta)^3} - \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta_\Lambda)^3} \right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right) \\ &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{z\Lambda^2}{\Delta} \right) \end{aligned}$$

donde $\Delta_\Lambda = \Delta + z\Lambda^2$. Al igual que el método anterior, el regulador de Pauli-Villars rompe la simetría de norma.

Regularización Dimensional. Contrariamente a los dos métodos anteriores, el método de regularización dimensional preserva todas las simetrías de la teoría. La idea básica de la regularización dimensional es muy simple: Calculemos las integrales de Feynman como una función analítica de la dimensión d del espacio-tiempo. En el ejemplo que estamos trabajando, esta integral luce como (depués de una rotación de Wick):

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta)^3} &\xrightarrow{4 \rightarrow d} i \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell^2 + \Delta)^3} \\ &= i \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{\ell_E^{d+1}}{(\ell^2 + \Delta)^3} d\ell_E \\ &= i \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \Delta^{\frac{d}{2}-2} \int_0^1 (1-z)^{\left(\frac{d}{2}+1\right)-1} z^{(2-\frac{d}{2})-1} dz \\ &= i \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \Delta^{\frac{d}{2}-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(3)} \end{aligned}$$

donde, en la última línea usamos la definición de la función beta $\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt = B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. $\int d\Omega_d$ es el área de la esfera unitaria en d dimensiones, la cual se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int_0^\infty dx \exp\{-x^2\} \right)^d = \int_0^\infty d^d x \exp\left\{-\sum_{i=1}^d x_i^2\right\} \\ &= \left(\int d\Omega_d \right) \int_0^\infty dx x^{d-1} \exp\{-x^2\} = \left(\int d\Omega_d \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{\frac{d}{2}-1} \exp\{-t\} \\ &= \left(\int d\Omega_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Rightarrow \int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

De esta forma, la integral anterior es

$$I_d = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}}$$

$$\xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) - \gamma_E + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right),$$

donde, en la segunda línea, usamos la aproximación

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma_E + \mathcal{O}(x), \quad (5.17)$$

siendo $\epsilon = 4 - d$, y $\gamma_E \approx 0.5772$ la constante de Euler. Note que el polo $\frac{1}{\epsilon}$ en la regularización dimensional corresponde a una divergencia logarítmica en una integral de momento.

5.3 Renormalización

Hasta ahora, la técnica de regularización nos ha dado un método para parametrizar las divergencias (ultravioletas o infrarrojas). Sin embargo, debemos de tener un método que nos permita realizar cálculos predictivos que sean físicamente relevantes, a pesar de que tenemos dichas divergencias. Este método se llama renormalización**, y en lo que sigue explicaremos brevemente como funciona.

Hasta ahora hemos considerado la integral

$$I \equiv I(m, \alpha, \Lambda)$$

donde m y α son parámetros de la teoría; Λ es un regulador genérico. Sabemos que esta integral es divergente. Sin embargo, resulta que podemos “absorber” esta divergencia en los parámetros de la teoría mediante el siguiente cambio

$$m \rightarrow m(\Lambda) \equiv m + \delta m(\Lambda)$$

$$\alpha \rightarrow \alpha(\Lambda) \equiv \alpha + \delta \alpha(\Lambda)$$

$$I(m, \alpha, \Lambda) \rightarrow I(m(\Lambda), \alpha(\Lambda)).$$

**El método de renormalización sólo nos da una teoría libre de divergencias ultravioletas. Sin embargo, las divergencias infrarrojas se cancelan automáticamente para ciertos procesos. Más adelante mostraremos esto explícitamente.

Esto significa que hemos absorbido el comportamiento divergente en los parámetros físicos de la teoría, de tal forma que I ya no es más explícitamente divergente, sino que depende de cantidades que son divergentes^{††}. Una parte importante del proceso de renormalización son las condiciones que debemos establecer, i.e condiciones de renormalización, debido a que ni la carga (α) ni la masa (m) que observamos son infinitas. Luego, en el *límite físico*, las condiciones de renormalización son

$$m(\Lambda) \rightarrow m_R; \quad \alpha(\Lambda) \rightarrow \alpha_R$$

donde m_R y α_R son los parámetros renormalizados, i.e. los que observamos. De esta forma, nuestro resultado final es $I(m_R, \alpha_R)$, una cantidad finita. Es importante mencionar que el resultado no deberá depender del regulador usado. Sin embargo, es importante poner atención a como absorbemos el regulador en las cantidades físicas, ya que en general, dependiendo de el tipo de esquema en que regulemos, las cantidades finitas que aislemos serán distintas. Esto sugiere la siguiente pregunta: ¿Cómo sabemos con que parte finita nos quedamos? La respuesta a esto es que debemos de especificar estos detalles cuando demos los resultados finales. Esto es, debemos de especificar el procedimiento que usamos para renormalizar. Este último paso se conoce como esquema de substracción. Existen varios esquemas de substracción, pero dos de los más comunes son el de substracción mínima (MS), donde uno sustrae solamente la parte divergente de la amplitud; y el que usaremos aquí, es el método de de substracción modificada (\overline{MS}), donde uno sustrae, además de la parte divergente, terminos adicionales finitos como γ_E y $\ln(4\pi)$. Resumiendo, cuando demos el valor de una cantidad renormalizada debemos de hacer explícito que esquema de substracción utilizamos. Aunque existen varios esquemas de substracción que se adaptan a distintos cálculos, debemos de ser consistentes a lo largo del proceso y usar siempre el mismo esquema.

^{††}A primera impresión esto parecería contradictorio, sin embargo en la teoría cuántica del campo (TCC) los parámetros que aparecen en la Lagrangiana (tales como las masas y constantes de acoplamiento) son infinitos, i.e. cantidades “desnudas” (“bare”). Consideremos la carga del electrón como ejemplo (la cual en la TCC es divergente). La razón por la que no observamos que esta cantidad es infinita es por lo siguiente: Si el electrón tiene carga infinita, entonces este tiene una energía infinita debido a su campo eléctrico. Esta energía se manifiesta, a través del principio de incertidumbre, en la creación y aniquilación de partículas virtuales en tiempos muy cortos. Con esta gran cantidad de energía, el campo está en posibilidad de crear partículas con carga alrededor del electrón. Pero, debido a que estas partículas están cargadas, estas se alinean con el campo apantallando la carga, análogamente a como sucede con los dieléctricos en electrodinámica clásica. De esta forma, a medida que nos alejamos del electrón “desnudo” su carga efectiva es cada vez más débil debido al efecto dieléctrico, hasta que alcanza el valor que observamos. Contrariamente, a medida que nos acercamos a él su carga aumenta.

La conclusión de que en la teoría cuántica del campo la constante de acoplamiento depende de la energía a la que se lleve a cabo el experimento puede estudiarse usando el *grupo de renormalización*^{††}. En general, la idea básica del grupo de renormalización es hacer lo mismo que describimos arriba, sólo que debemos especificar la escala μ a la cual aplicamos las condiciones de renormalización. Nos referimos a esta escala como el *punto de substracción*. De esta forma, las condiciones de renormalización dependerán de la escala arbitraria μ , así como de el esquema de substracción. Ya que los parámetros físicos dependerán del punto de substracción, necesitamos un conjunto de ecuaciones que nos indiquen como estas varían con el punto de substracción. Las ecuaciones que nos dicen este comportamiento se conocen como las *ecuaciones del grupo de renormalización*. Estas ecuaciones han llevado al descubrimiento de la *libertad asintótica* (ver apéndice D) en QCD, donde las fuerzas son más débiles a medida que la energía a la que es llevada el experimento aumenta. Esto, a su vez, permite un análisis perturbativo de la cromodinámica cuántica a altas energías. Usaremos estos dos aspectos clave de QCD en lo que resta de este trabajo. Primero, en la siguiente sección consideramos correcciones radiativas en la constante de acoplamiento fuerte, a orden α_s . Además, dado que trabajamos a energías muy grandes ignoramos las masas de todas las partículas presentes.

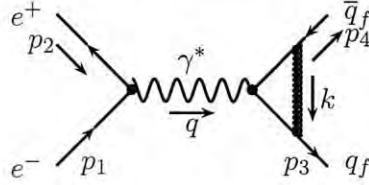
5.4 Correcciones Radiativas

Una vez que sabemos que la cromodinámica cuántica está libre de divergencias ultravioletas y sabemos como regular las integrales divergentes, podemos dar un paso más hacia adelante y calcular correcciones de orden α_s en la producción de hadrones. Primero, calculamos la contribución a la sección de dispersión debida a la aparición de un gluón virtual, después la contribución debida a la emisión de un gluón real. En ambos casos, parametrizamos las divergencias usando regularización dimensional, y como esquema de renormalización usamos el método \overline{MS} .

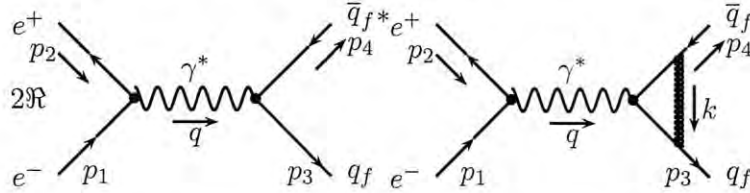
^{††}En el pasado, este efecto había sido calculado directamente usando el potencial de Uehling (Ver Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V., *An introduction to quantum field theory*, Westview Press Perseus Books, New York, 1995. Cap. 7), el cual es la corrección cuántica al potencial de Coulomb.

5.4.1 Emisión Virtual

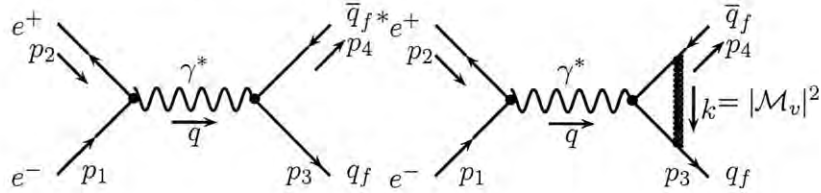
En esta sección vamos más allá del orden árbol y calculamos la corrección a la amplitud de probabilidad \mathcal{M}_0 de la sección anterior debida a la inclusión del diagrama



a orden α_s . Esto es, el par quark-antiquark interactúan intercambiando un gluón una vez que han sido producidos. A orden $\alpha^2\alpha_s$, la corrección a $|\mathcal{M}_0|$ esta dada por la interferencia del diagrama de árbol (fig.2) y el diagrama de un lazo (fig.3). Esto es,



Usando las reglas de Feynman y la notación mostrada en el los diagramas, junto con la conservación del momento, tenemos que



donde

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_v|^2 &= i \frac{Q_f e^2}{q^2} (\bar{u}(p_1) \gamma^\mu v(p_2)) (\bar{v}(p_4) \gamma_\mu u(p_3)) \\
 &\times (-1) \frac{Q_f e^2 g^2}{q^2} (\bar{v}(p_2) \gamma^\nu u(p_1)) \bar{u}(p_3) \\
 &\times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\alpha (\not{p}_3 - \not{k}) \gamma_\nu (\not{p}_4 + \not{k}) \gamma_\alpha v(p_4) (t^a t^a)}{k^2 (p_3 - k)^2 (p_4 + k)^2} \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

donde $t^a t^a$ es la representación matricial del operador cuadrático de Casimir en la representación fundamental de $SU(3)$: $t^a t^a = C_2(3) \cdot \mathbf{1}$, $C_2(3) = \frac{3^2-1}{2 \cdot 3}$. Nótese que hemos dejado implícitos los índices de spin y de colores; Además, nótese que ignoramos las masas de todas las partículas presentes (esto mismo hicimos cuando calculamos σ_0).

Esta suposición, aparte de simplificar los cálculos, es la responsable de la aparición de la divergencias infrarrojas.

Usando las identidades de contracción de matrices gamma (en $d = 4 - \epsilon$ dimensiones) del apéndice A, y los parámetros de Feynman del apéndice C, podemos escribir (5.18) como

$$|\mathcal{M}_v|^2 = \frac{Q_f e^4 g^2}{(4\pi)^2 s^2} (\bar{u}(p_1) \gamma^\mu v(p_2)) (\bar{v}(p_2) \gamma^\nu u(p_1)) (\bar{v}(p_4) \gamma_\mu u(p_3)) (\bar{u}(p_3) \gamma_\nu v(p_4)) (t^a t^a) (iI) \quad (5.19)$$

donde

$$iI = \left(\frac{4\pi}{s}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} (-1)^{1-\frac{\epsilon}{2}} \left(\frac{-4 + \epsilon - \epsilon^2}{2 - \epsilon}\right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2 - \epsilon)} \Gamma(-\frac{\epsilon}{2}) \Gamma(\frac{\epsilon}{2}). \quad (5.20)$$

Note que esta integral es divergente en $\epsilon = 0$. Sin embargo, la divergencia proviene de la integral de lazo, como dijimos. Al igual que antes, para obtener la sección total de dispersión, hay que sumar sobre las polarizaciones del estado inicial y final en el espacio de spins y sobre las polarizaciones en el espacio de colores del estado final. Haciendo esto obtenemos,

$$\sum_{spins, colores} |\mathcal{M}_v|^2 = \left(\sum_{spins} |\mathcal{M}_0|^2 \right) \underbrace{\frac{\alpha_s}{4\pi} C_2(3) iI}_{Correccion\ vertice\ QCD}. \quad (5.21)$$

Los pasos que restan son idénticos a los que nos llevaron a obtener (5.10). Luego entonces, la corrección a la sección de dispersión σ_0 debida a la aparición de un gluón virtual en el vértice del estado final está dada por

$$\sigma_v = \sigma_0 * \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{1}{3} * \underbrace{2 * \Re(iI)}_{Divergencia\ UV+IR}. \quad (5.22)$$

Para obtener σ_v alrededor de $d = 4$ desarrollamos el lado derecho en potencias de ϵ . Luego, renormalizamos usando el método \overline{MS} para obtener

$$\sigma_v = \sigma_0 * \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left(-\frac{16}{\epsilon^2} - \frac{12}{\epsilon} - 16 + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \quad (5.23)$$

5.4.2 Emisiones Reales

Otra contribución, a orden α_s , viene dada por por la inclusión del diagrama donde el quark o el antiquark tienen la posibilidad de radiar un gluón real. Esto es, a orden α_s , la amplitud de probabilidad \mathcal{M}_r para la producción de hadrones, tomando en cuenta la emisión de un gluón por el quark o antiquark está dada por los diagramas

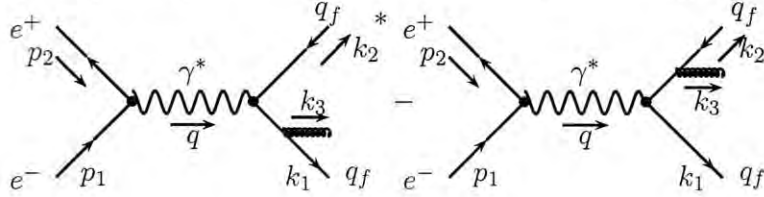


Fig.4. Contribucion a orden α_s en la produccion de hadrones

Antes de calcular la amplitud de probabilidad \mathcal{M}_r , es conveniente primero trabajar un poco la cinemática. Para esto, definimos las fracciones de energía x_i , $i = 1, 2, 3$ como

$$x_i \equiv \frac{2k_i \cdot q}{q^2}, \quad x_i > 0. \quad (5.24)$$

Esto es, las x_i representan la razón de la energía de la i -ésima partícula en el centro de masa, a la energía total disponible q^2 . Con esta definición para las fracciones de energía, y de la conservación del momento, se sigue que sólo dos de las fracciones de energía son independientes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_i &= \sum_i \frac{2k_i \cdot q}{q^2} \\ &= \frac{2(\sum_i k_i) \cdot q}{q^2} \\ \sum_{i=1}^3 x_i &= 2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Además de esto, todos los escalares de Lorentz que involucran solamente a los momentos del estado final pueden escribirse en términos de las fracciones de energía. Dado que estamos considerando partículas sin masa, podemos escribir una relación muy simple entre las fracciones de energía y los ángulos que hacen las direcciones de las partículas en el estado final. Por ejemplo, usando la conservación del momento en la forma $q - k_1 = k_2 + k_3$ podemos escribir

$$2(1 - x_3) = x_1 x_2 (1 - \cos \theta_{12}),$$

donde θ_{12} es el ángulo entre el par quark-antiquark. De la misma manera, permutando los índices 1, 2, 3, podemos derivar las siguientes relaciones

$$2(1 - x_1) = x_2 x_3 (1 - \cos \theta_{23}), \quad (5.26)$$

$$2(1 - x_2) = x_3 x_1 (1 - \cos \theta_{31}), \quad (5.27)$$

$$2(1 - x_3) = x_1 x_2 (1 - \cos \theta_{12}). \quad (5.28)$$

Luego, como $0 \leq \theta_{ij} \leq \pi$, entonces se sigue que $x_i \leq 1$. Con ecuaciones (5.27-5.28), podemos deducir algunas configuraciones físicas posibles. Por ejemplo, cuando $x_1 \rightarrow 0$ las partículas 2 y 3 emergen en direcciones prácticamente opuestas. Lo mismo sucede cuando $x_2, x_3 \rightarrow 0$. Por el contrario, cuando $x_1 \rightarrow 1$, las partículas 2 y 3 emergen en direcciones prácticamente colineales. De igual forma sucede cuando x_2 y $x_3 \rightarrow 1$. Podemos imaginar estos límites como las esquinas de un triángulo en el plano $x_1 - x_2$ definido por las ecuaciones $x_1 + x_2 = 2$ ($x_3 = 0$), $x_1 + x_2 = 1$ ($x_3 = 1$), y $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$.

Después de esto, podemos asignarle una probabilidad al diagrama de la figura 4. Usando las reglas de Feynman y sumando sobre las polarizaciones del estado inicial y final tanto en el espacio de colores como en el espacio de spins, obtenemos

$$\sum_{spins, colores} |\mathcal{M}_r|^2 = (-1) \frac{Q_f^2 e^4 g^2}{s^4} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} C_2(3) tr\{\mathbf{1}_{3 \times 3}\}, \quad (5.29)$$

donde $L^{\mu\nu}$ está dado como en (5.6) y $H_{\mu\nu}$ está dado por

$$H^{\mu\nu} = tr \left[k_1 \left(\frac{\gamma^\alpha (\not{q} - k_2) \gamma_\mu}{(1 - x_2)} - \frac{\gamma_\mu (\not{q} - k_1) \gamma^\alpha}{(1 - x_1)} \right) k_2 \left(\frac{\gamma_\nu (\not{q} - k_2) \gamma_\alpha}{(1 - x_2)} - \frac{\gamma_\alpha (\not{q} - k_1) \gamma_\nu}{(1 - x_1)} \right) \right] \quad (5.30)$$

De esta forma, la sección total de dispersión, tomando en cuenta la emisión de un gluón real, es

$$\sigma_r = \frac{1}{2s} (-1) \frac{Q_f^2 e^4 g^2}{s^4} tr\{t^a t^a\} \frac{1}{3 - \epsilon} g^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \int \Pi_3 g^{\mu\nu} H_{\mu\nu} \quad (5.31)$$

Usando la integral sobre el espacio fase de tres partículas en el estado final del apéndice B, y la expresión (5.10) de la sección anterior, podemos reescribir esta expresión como

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_0 \left(\frac{4\pi}{s}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{2C_2(3)}{\Gamma(1 - \frac{\epsilon}{2})} \\ &\times \int \int \frac{[(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\epsilon}{2}(x_1 + x_2 - 2)^2]}{(1 - x_1)^{1+\frac{\epsilon}{2}}(1 - x_2)^{1+\frac{\epsilon}{2}}(x_1 + x_2 - 1)^{\frac{\epsilon}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

La región de integración está dada por $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

Note que en $d=4$ esta integral es divergente. En este límite la sección total de dispersión sería proporcional a la integral

$$\int \int \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}.$$

Esta integral diverge para los valores $x_i = 1$ ($i = 1, 2$). Cinemáticamente esto significa que el gluón emerge prácticamente colineal al quark (o al antiquark) ó es producido con una energía prácticamente nula. Podemos obtener estas conclusiones de las expresiones (5.27) y (5.28) reescribiéndolas, respectivamente, como: $1 - x_1 = x_2 \frac{E_g}{\sqrt{s}}(1 - \cos \theta_{2g})$ y $1 - x_2 = x_1 \frac{E_g}{\sqrt{s}}(1 - \cos \theta_{1g})$, donde E_g es la energía del gluón y θ_{ig} ($i = 1, 2$) es el ángulo entre los quarks y el gluón. Estas singularidades se manifestarán como polos en ϵ en la integral que aparece en (5.32). De hecho, si hacemos la integral, obtenemos

$$\sigma_r = \sigma_0 \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{4\pi}{s}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{3} [(1 - \epsilon)(8 - 4\epsilon + \epsilon^2)] \frac{\Gamma^2(-\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(3 - \frac{3}{2}\epsilon)}. \quad (5.33)$$

Finalmente, hacemos un desarrollo en ϵ y renormalizamos con \overline{MS} para obtener

$$\sigma_r = \sigma_0 * \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left(\frac{16}{\epsilon^2} + \frac{12}{\epsilon} + 19 + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \quad (5.34)$$

5.5 Cancelación de las Divergencias

Hasta aquí, hemos calculado la corrección a orden α_s a la sección de dispersión partónica para la producción de hadrones en dos partes, en las ecuaciones (5.23) y (5.34), y hemos visto que ambas parte son divergentes. Sin embargo cuando sumamos ambas, las divergencias se cancelan

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_0 &= \sigma_v + \sigma_r \\
&= \sigma_0 \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{1}{3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{16}{\epsilon^2} - \frac{12}{\epsilon} - 16 + \frac{16}{\epsilon^2} + \frac{12}{\epsilon} + 19 + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \\
&= \sigma_0 \frac{\alpha_s}{\pi}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Agregando este resultado a (5.10) y sumando sobre todos los sabores de quarks tenemos

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right]. \tag{5.36}$$

En realidad, la cancelación de las divergencias debidas a gluones colineales o gluones con energías prácticamente nulas no es un accidente. Existen teoremas que garantizan que este tipo de observables estarán libres de divergencias en el límite de masa cero. De esta forma, el resultado (5.36) no es más que un caso particular de estos resultados más generales. Sin embargo, no es difícil entender intuitivamente la cancelación de las divergencias infrarrojas. El proceso original $e^+e^- \rightarrow q_f\bar{q}_f$ es extremadamente rápido: El par quark-antiquark es creado en un tiempo $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Sin embargo, la emisión de gluones colineales, y las correcciones virtuales asociadas con el intercambio de gluones de muy baja energía ocurren en escalas de tiempo mucho mayores. En los diagramas sin emisión de gluones, el quark o antiquark virtual tiene un momento p_g^2 , donde p_g^2 es el momento transverso del gluón relativo al sistema $q_f\bar{q}_f$. De esta forma, el estado virtual sobrevive por un tiempo $\frac{1}{p_g^2}$ antes de que decaiga. Dado que p_g^2 es muy pequeño, entonces este proceso, i.e. la emisión del gluón de baja energía, no afecta la probabilidad de que el par $q_f\bar{q}_f$ sea producido; este proceso sólo puede afectar las propiedades del estado en el cual el par quark-antiquark evolucione. De esta manera, las correcciones perturbativas que pueden afectar la sección de dispersión total son aquellas para las cuales $p_g \sim \sqrt{s}$.

F. Bloch and A. Nordisiek, *Phys. Rev* **52** (1937) 54. T. Kinoshita, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 650; T.D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev.* **133B** (1964) 1549.

Capítulo 6

Conclusiones

A manera de conclusión, resumimos lo que hemos hecho hasta ahora. Hemos aprendido el procedimiento general para la construcción de teorías de norma, en particular SU(3). También hemos advertido las consecuencias que trae consigo esta simetría: Da origen a divergencias infrarrojas en el análisis perturbativo. Así mismo, hemos aprendido como trabajar con tales divergencias introduciendo un regulador apropiado. En particular hemos usado regularización dimensional, ya que este regulador preserva todas las simetrías de la teoría. Finalmente, hemos calculado la sección de dispersión partónica necesaria para el análisis de la producción de hadrones a orden α_s , y hemos mostrado explícitamente como las divergencias infrarrojas se cancelan para dichos procesos inclusivos. Lo anterior, considerando que todas las partículas tienen aproximadamente masa cero.

Expectativas

Como se mencionó anteriormente, hemos calculado la sección de dispersión partónica necesaria para el estudio de producción de hadrones a primer orden en la constante de interacción fuerte. Sin embargo, la gran precisión en los experimentos de hoy en día (y de los que se planean para un futuro inmediato) nos obliga a mejorar nuestras predicciones teóricas. Siendo este el caso, podemos preguntarnos por el siguiente orden en α_s para la producción de hadrones. Sin embargo, antes de apresurarnos y lanzarnos al cálculo de estas correcciones, debemos de estar preparados para los retos que estas nos presentan. Para poder obtener las correcciones a este orden (α_s^2) debemos de estar en condiciones de poder calcular, entre otras cosas, diagramas de Feynman a dos lazos, con seis propagadores en el denominador, e integrales sobre el espacio fase con cuatro partículas en el estado final. El hecho de que tengamos diagramas de Feynman a dos lazos implica también que tendremos que calcular integrales con hasta cuatro potencias del momento del lazo en el numerador.

Esquemáticamente, a orden α_s^2 , la sección total de dispersión para la producción de dos jets de hadrones es

$$\begin{aligned}\sigma_{2\text{ jets}} &= \int [\langle \mathcal{M}^0 | \mathcal{M}^0 \rangle]_4 d\Pi_4 \\ &+ \int [\langle \mathcal{M}^0 | \mathcal{M}^1 \rangle + \langle \mathcal{M}^1 | \mathcal{M}^0 \rangle]_3 d\Pi_3 \\ &+ \int [\langle \mathcal{M}^1 | \mathcal{M}^1 \rangle + \langle \mathcal{M}^0 | \mathcal{M}^2 \rangle + \langle \mathcal{M}^2 | \mathcal{M}^0 \rangle]_2 d\Pi_2,\end{aligned}$$

donde $[]_n$ indica el número de partículas en el estado final, con $\int d\Pi_n$ la correspondiente integral sobre el espacio fase y $| \mathcal{M}^i \rangle$ el i -ésimo orden de la amplitud de dispersión.

De esta expresión podemos ver que necesitamos calcular tres conjuntos de amplitudes:

- i. Amplitudes a orden árbol para la producción de cuatro partículas en el estado final
- ii. Amplitudes a orden árbol y a un lazo para la producción de tres partículas en el estado final.
- iii. Amplitudes a orden árbol, a uno lazo y dos lazos para la producción de dos partículas en el estado final.

Así mismo, es también interesante el análisis que se tendría para el caso en el cual se busca la descripción de producción de más jets en el estado final.

Por último, considero que estas tareas son de suma importancia para la descripción de procesos en los colisionadores de hadrones de las nuevas generaciones y son medulares en la búsqueda de señales de procesos de física nueva.

Apéndice A

Sumas sobre Spins y Álgebra de Matrices de Dirac

En la mayoría de los experimentos, las polarizaciones de los estados inicial y final no son medidas*, por lo tanto debemos de tomar en cuenta las distintas posibilidades de los estados de polarización. Esto es, cuando calculemos diagramas de Feynman, tendremos la necesidad de *sumar sobre las polarizaciones* de los estados inicial y final. Además de esto, tendremos la necesidad de calcular *trazas* de productos de matrices de Dirac. En algunos casos encontraremos que dos matrices están contraídas. En este caso, será más fácil eliminarlas primero y luego calcular la traza. Para hacer esto, haremos uso de la *identidades de contracción* de las matrices de Dirac. Cuando el número de matrices dentro de una traza sea pequeño esto puede hacerse fácilmente usando lápiz y papel, sin embargo habrá casos en que este número sea grande. En estos casos, es conveniente hacer uso de programas de manipulación algebraica, como FORM†. Aunque nosotros haremos uso de FORM en todos los casos, es conveniente saber como se obtienen estos resultados y para ello se desarrolla el presente apéndice

A.1 Sumas sobre Spins

Antes de obtener las relaciones de completéz para los vectores de polarización de los fermiones de Dirac es necesario tener una expresión apropiada para estos. Para ello, necesitamos resolver la ecuación de Dirac. La ecuación de Dirac admite dos soluciones: una con frecuencia positiva y otra con frecuencia negativa‡. Para encontrar la solución con frecuencia positiva, proponemos una solución de onda plana

$$\psi(x) = u(p) \exp \{-ip^\mu x_\mu\}; \quad p^2 = m^2 \quad (\text{A.1})$$

donde el vector columna $u(p)$ satisface

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Como la ecuación de Dirac es covariante ante transformaciones de Lorentz, es mucho más fácil resolverla en el marco de referencia donde la partícula se encuentra en reposo,

*La sección de dispersión que se mide es una suma sobre todas las polarizaciones posibles.

†André Heck, FORM for pedestrians, ©2000, A. J. P. and J. A. M. Vermaseren, Amsterdam, October 2000.

‡Ambas soluciones tienen energía positiva, sin embargo difieren en el signo que acompaña a p^0 : Aquellas con frecuencia negativa van acompañadas del signo + y aquellas con frecuencia negativa con el signo -.

esto es, donde $p_\mu = (m, \mathbf{0})$. La idea es entonces desarrollar en este marco de referencia usando una base particular y luego hacer uso de la invarianza de Lorentz, y de la independencia de la base. La solución para un p arbitrario puede encontrarse a partir de esta aplicando las transformaciones de Lorentz. En este marco de referencia, la solución de la ecuación de Dirac (A.2) es

$$u(p_0) = m^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

donde $m^{\frac{1}{2}}$ se introduce por conveniencia, y ξ es un spinor dos componentes, sujeto a la condición de normalización $\xi\xi^\dagger = 1$. Podemos interpretar al spinor ξ haciendo uso del generador de rotaciones de Lorentz $S^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j]$: ξ se transforma bajo una rotación como un spinor de dos componentes del grupo de rotación, y por lo tanto determina la orientación del spin de manera usual.

Note que después de aplicar la ecuación de Dirac (A.2), tenemos la libertad de escoger sólo dos de las cuatro componentes de $u(p)$. Esto es lo que necesitamos, ya que un fermión de spin $\frac{1}{2}$ tiene sólo dos estados físicos, spin hacia arriba y spin hacia abajo. En la práctica es conveniente elegir los spinores ξ de tal forma que sean eigenvectores de σ^3 :

$$\xi^{s=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{s=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La condición de normalización de $u(p)$ se escoge de tal forma que esta sea invariante de Lorentz. Para esto, definimos $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0$, de tal forma que $u\bar{u} = 2m^\S$ sea nuestra condición de normalización. Note que esto justifica el factor $m^{\frac{1}{2}}$ en (A.3). De esta forma $u(p)$ está dado por

$$u^s(p_0) = m^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2. \quad (\text{A.4})$$

De la misma manera, encontramos soluciones con frecuencia negativa

$$\psi(x) = v(p) \exp \{ip^\mu x_\mu\}; \quad p^2 = m^2, \quad (\text{A.5})$$

donde, en el marco de referencia en reposo, $v^s(p_0)$ tiene la forma

$$v^s(p_0) = m^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2. \quad (\text{A.6})$$

η^s es una base de spinores de dos componentes, de tal forma que $s = 1$ corresponde a $s = 2$ en ξ y $s = 2$ corresponde a $s = 1$. Ahora estamos en posición de escribir las relaciones de completéz de los spinores de Dirac en el marco de referencia en reposo. Por ejemplo

^{\S}Para una partícula sin masa esta relación es trivial. En este caso la condición de normalización es $u^\dagger u = 2E_p$

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1,2} u^s(p_0) \bar{u}^s(p_0) &= \sum_{s=1,2} \begin{pmatrix} m^{\frac{1}{2}} \xi^s \\ m^{\frac{1}{2}} \xi^s \end{pmatrix} \left(\xi^{s\dagger} m^{\frac{1}{2}}, \xi^{s\dagger} m^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= m \begin{pmatrix} \sum_{s=1,2} \xi \xi^{s\dagger} & \sum_{s=1,2} \xi \xi^{s\dagger} \\ \sum_{s=1,2} \xi \xi^{s\dagger} & \sum_{s=1,2} \xi \xi^{s\dagger} \end{pmatrix} \\
&= m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= p_0 \gamma^0 + m \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Esta expresión puede generalizarse fácilmente a

$$\sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m \mathbf{1}. \quad (\text{A.7})$$

Similarmente

$$\sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m \mathbf{1}. \quad (\text{A.8})$$

donde $\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$. Estas relaciones de completez son muy útiles cuando sumamos sobre todas las polarizaciones de los estados inicial y final en el cálculo de secciones de dispersión.

A.2 Trazología de Gammas

Como mencionamos antes, otro tipo de operación que nos encontramos muy frecuentemente en el cálculo de diagramas de Feynman es el de la traza de productos de matrices γ . El cálculo de trazas de dichas matrices es muy simple ya que se basa en la propiedad cíclica de esta operación y en el álgebra de Dirac. Antes de comenzar, es conveniente definir la matriz Hermitiana $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, con las siguientes propiedades $(\gamma^5)^2 = 1$ y $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$. Consideremos pues la traza de un producto de n matrices gamma: $\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}$, con $n > 0$ ya que $tr\{1\} = 4$. Introducimos la unidad en la forma $(\gamma^5)^2$ en el extremo izquierdo, luego anticonmutamos una γ^5 con todas las demás matrices gamma hacia la derecha y finalmente usamos la propiedad cíclica $tr\{AB\} = tr\{BA\}$ de la operación de traza para obtener:

$$tr\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}\} = (-1)^n tr\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}\}.$$

De aquí se desprende que

$$tr\{\text{numero impar de } \gamma^s\} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Cuando n es un número par, habrá que usar el álgebra de Dirac $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ hacia la derecha y luego la propiedad cíclica de la operación traza. Consideremos solamente el caso $n = 2$:

$$\begin{aligned}
tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} &= tr\{2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu\} \\
&= 2g^{\mu\nu}tr1 - tr\{\gamma^\nu\gamma^\mu\} \\
&= 8g^{\mu\nu} - tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\},
\end{aligned}$$

de donde resulta que

$$tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Haciendo exactamente el mismo procedimiento encontramos que

$$tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}). \quad (\text{A.11})$$

Para $n > 4$ el procedimiento se vuelve muy laborioso, y es aquí cuando es conveniente usar FORM.

A.3 Identidades de Contracción

En muchas ocasiones, dentro del mismo cálculo de trazas de matrices gamma, nos encontramos con el hecho de que dos ellas se encuentran contraídas. Cuando este es el caso, es conveniente primero eliminarlas y luego evaluar la traza. Para ello, recurrimos a las *identidades de contracción* de las matrices de Dirac. Es muy fácil obtener estas identidades usando las propiedades de anticonmutación de matrices γ , y notando que $\gamma^\mu\gamma_\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$. Haciendo uso de este resultado y del álgebra de Dirac podemos derivar, sin dificultad, las siguientes identidades de contracción:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu. \quad (\text{A.15})$$

Todas estas propiedades de las trazas de matrices de Dirac, junto con sus identidades de contracción son muy útiles en el cálculo de diagramas de Feynman. Sin embargo cuando consideramos lazos surgen complicaciones como las divergencias infrarrojas, las cuales deben ser parametrizadas de una manera conveniente para obtener resultados finitos. Un método para parametrizar estas divergencias, y que ha probado ser muy útil, es el método de regularización dimensional, sin embargo, este método induce algunos cambios en las identidades de contracción[¶] (A.12 - A.15). Dentro de este esquema tomamos la dimensión del espacio-tiempo igual a d , y consideramos un conjunto d de matrices gamma, con la única variación^{||} $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d$. Siguiendo el mismo procedimiento que nos llevó a las identidades de contracción (A.12 - A.15), obtenemos las siguientes identidades:

[¶]Los resultados (A.10) y (A.11) son independientes de la dimensión.

^{||}El álgebra de Dirac sigue siendo la misma y sorprendentemente también se conserva el hecho de que la traza de la matriz unidad es 4

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d \tag{A.16}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -(d-2)\gamma^\nu \tag{A.17}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - (4-d)\gamma^\nu \gamma^\rho \tag{A.18}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (4-d)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma. \tag{A.19}$$

Apéndice B

Integración sobre el Espacio Fase

En este apéndice, realizamos la integración sobre el espacio fase para el caso de dos y tres partículas en el estado final, utilizando integración en d dimensiones.

Dos Partículas en el Estado Final. Para dos partículas en el estado final, en el centro de masa, la integral que necesitamos es

$$\int d\Pi_2 = \frac{(2\pi)^d}{2^2((2\pi)^{d-1})^2} \int \frac{d^{d-1}\vec{p}_1}{E_1} \frac{d^{d-1}\vec{p}_2}{E_2} \delta^{d-1}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(E - E_1 - E_2), \quad (\text{B.1})$$

donde: \vec{p}_i , ($i = 1, 2$) es el vector de momento de la i -ésima partícula en $d - 1$ dimensiones; E_i ($i = 1, 2$) es su energía; y $E = \sqrt{s}$ es la energía total en el centro de masa.

Podemos simplificar un poco la expresión anterior, usando la delta de Dirac para eliminar la integral en \vec{p}_2 ; luego, usamos coordenadas esféricas en $d - 1$ dimensiones, de tal forma que

$$d^{d-1}\vec{p}_i = dp_i p_i^{d-2} d\Omega_{d-1} \text{ donde } |\vec{p}_i| = p_i, \quad (\text{B.2})$$

para obtener

$$\int d\Pi_2 = \frac{1}{2^2(2\pi)^{d-2}} \int d\Omega_{d-1} \int \frac{dp_1 p_1^{d-2}}{E_1 E_2} \delta(E - E_1 - E_2). \quad (\text{B.3})$$

Para eliminar la función delta restante, necesitamos cambiar el diferencial en el momento por un diferencial en la energía. Para hacer esto, recordemos que $dE = p dP$, $|\vec{p}| = p$; y además, de la conservación del momento $E_1 = E_2^*$. De esta forma nos quedamos con

$$\int d\Pi_2 = \frac{1}{2^2(2\pi)^{d-2}} \int d\Omega_{d-1} \int dE_1 E_1^{d-4} \delta(E - 2E_1). \quad (\text{B.4})$$

El resto de la integral no necesita ninguna suposición adicional. Sólo necesitamos $\int d\Omega_{d-1}$. Pero esto lo obtuvimos en el capítulo 4. De esta forma, tenemos finalmente

$$\Pi_2 = \frac{s^{\frac{d-4}{2}}}{2^{2d-4} \pi^{\frac{d-3}{2}} \Gamma(\frac{d-1}{2})}. \quad (\text{B.5})$$

Tres Partículas en el Estado Final. Para tres partículas en el estado final, en el centro de masa, la integral que necesitamos calcular es

*Esta expresión es válida únicamente cuando las dos partículas en el estado final tienen la misma masa. Esto incluye el caso en el que ambas carecen de masa.

$$\int d\Pi_3 = \frac{(2\pi)^d}{2^3((2\pi)^{d-1})^3} \int \frac{d^{d-1}\vec{p}_1}{E_1} \frac{d^{d-1}\vec{p}_2}{E_2} \frac{d^{d-1}\vec{p}_3}{E_3} \delta^{d-1}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(E - E_1 - E_2 - E_3), \quad (\text{B.6})$$

donde: \vec{p}_i , ($i = 1, 2, 3$) es el vector de momento de la i -ésima partícula en $d - 1$ dimensiones; E_i ($i = 1, 2, 3$) es su energía; y $E = \sqrt{s}$ es la energía total en el centro de masa.

Usando el mismo tipo de simplificaciones que nos llevaron a B.3 obtenemos

$$\int d\Pi_3 = \frac{1}{2^3(2\pi)^{2d-3}} \int d_1\Omega_{d-1} d_2\Omega_{d-1} \frac{dp_1 dp_2 p_1^{d-2} p_2^{d-2}}{E_1 E_2 E_3} \delta(E - E_1 - E_2 - E_3). \quad (\text{B.7})$$

Como consecuencia de la conservación del momento podemos escribir $d_1\Omega_{d-1} d_2\Omega_{d-1} = d_1\Omega_{d-1} (\sin \theta_{12})^{d-3} d\theta_{12} d_2\Omega_{d-2}$. De esta forma B.7 se convierte en

$$\int d\Pi_3 = \frac{1}{2^3(2\pi)^{2d-3}} \int d_1\Omega_{d-1} d_2\Omega_{d-2} \delta(E - E_1 - E_2 - E_3) \frac{dp_1 dp_2 p_1^{d-2} p_2^{d-2}}{E_1 E_2 E_3} (\sin \theta_{12})^{d-3} d\theta_{12} \quad (\text{B.8})$$

Para eliminar la función delta en la energía, usamos la relación usual $dE_i = p_i dp_i$, y la conservación del momento $E_3^2 = \vec{p}_3^2 = \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta_{12}$ para reescribir B.8 como

$$\int d\Pi_3 = \frac{1}{2^3(2\pi)^{2d-3}} \int d_1\Omega_{d-1} d_2\Omega_{d-2} (E_1 E_2 \sin \theta_{12})^{d-4} dE_1 dE_2 \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable a las fracciones de energía introducidas en el capítulo 4

$$E_i = \frac{\sqrt{s}}{2} x_i, \quad (\text{B.10})$$

y usando la conservación del momento, podemos escribir

$$\sin \theta_{12} = \frac{2}{x_1 x_2} ((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3))^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.11})$$

Tenemos finalmente

$$\Pi_3 = \frac{s^{d-3}}{2^{2d-3} (2\pi)^{\frac{2d-3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(\frac{d-2}{2})} \int ((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3))^{\frac{d-4}{2}} dx_1 dx_2. \quad (\text{B.12})$$

La región de integración está dada por $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

Apéndice C

Parámetros de Feynman

Para ilustrar la idea del método de los parámetros de Feynman consideremos la integral que aparece en la expresión (5.18) del capítulo 5:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\alpha (\not{p}_3 - \not{k}) \gamma_\nu (\not{p}_4 + \not{k}) \gamma_\alpha}{k^2 (p_3 - k)^2 (p_4 + k)^2}. \quad (\text{C.1})$$

Apliquemos la identidad

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2!}{(Ax + By + Cz)^2} \quad (\text{C.2})$$

al denominador de (C.1), para obtener, después de un poco de álgebra,

$$\frac{1}{k^2 (p_3 - k)^2 (p_4 + k)^2} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2!}{(k^2 - 2k(y p_3 - z p_4))^3}. \quad (\text{C.3})$$

Esto es, el objetivo de el método de los parámetros de Feynman es poner el lado izquierdo de (C.3) como un polinomio cuadrático en k . El método no termina aquí, hacemos ahora el cambio de variable

$$k \rightarrow \ell + (y p_3 - z p_4) \quad (\text{C.4})$$

para completar el cuadrado en el polinomio y evaluar la integral restante en coordenadas esféricas. El costo de esto es la introducción de los parámetros auxiliares x, y y z sobre los cuales habrá que integrar. Sin embargo, y debido a que $d^4 k = d^4 \ell$, la integración será más fácil ya que el denominador es ahora esféricamente simétrico en la variable de integración ℓ . Las variables x, y, z que hacen posible esta transformación se conocen como parámetros de Feynman*. Con el cambio de variable (C.4), mencionado antes, (C.3) toma la forma

$$\frac{1}{k^2 (p_3 - k)^2 (p_4 + k)^2} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2!}{(\ell^2 - \Delta)^3}, \quad (\text{C.5})$$

donde

$$\ell = k - (y p_3 - z p_4) \quad (\text{C.6})$$

$$\Delta = -y z q^2. \quad (\text{C.7})$$

*Un método similar a este fue introducido antes por Julian Schwinger.

El resto del cálculo ya no corresponde propiamente al método de los parámetros de Feynman, sin embargo lo haremos por que lo necesitamos en el capítulo 4 , y además para ver las consecuencias del método. Lo que sigue ahora es poner el numerador de (C.1) en términos de ℓ . Después de un poco de álgebra de Dirac d dimensional, encontramos que el numerador es

$$\begin{aligned} & -2(-\not{\ell}\gamma_\mu\not{k} + \not{k}\gamma_\mu((1-y)\not{p}_3 + z\not{p}_4) - (y\not{p}_3 + (1-z)\not{p}_4)\gamma_\mu\not{k} + (y\not{p}_3 + (1-z)\not{p}_4)\gamma_\mu((1-y)\not{p}_3 + z\not{p}_4)) \\ & + \epsilon(-\not{k}\gamma_\mu\not{\ell} - \not{k}\gamma_\mu(y\not{p}_3 + (1-z)\not{p}_4) + ((1-y)\not{p}_3 + z\not{p}_4)\gamma_\mu\not{\ell} + ((1-y)\not{p}_3 + z\not{p}_4)\gamma_\mu(y\not{p}_3 + (1-z)\not{p}_4)) \end{aligned} \quad (C.8)$$

Es posible simplificar aún más esta expresión. Para hacer esto, notemos que como (C.5) depende solamente de ℓ^2 entonces las siguientes identidades son válidas

$$\int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu}{(\ell^2 - \Delta^2)^3} = 0, \quad (C.9)$$

$$\int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu\ell^\nu}{(\ell^2 - \Delta^2)^3} = \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\frac{1}{d}\ell^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2 - \Delta^2)^3}. \quad (C.10)$$

La primera de estas expresiones se prueba con argumentos de simetría. Para probar la segunda, note que la integral se anula a menos que $\mu = \nu$. Luego, la invarianza de Lorentz requiere que el resultado sea proporcional $g^{\mu\nu}$. Finalmente, para encontrar la constante de proporcionalidad contraemos ambos lados con $g_{\mu\nu}$ y usamos $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = d = 4 - \epsilon$. Notado esto, y recordando que estamos integrando sobre ℓ , el numerador toma la forma

$$\begin{aligned} Num &= -2(-\not{\ell}\gamma_\mu\not{k} + (y\not{p}_3 + (1-z)\not{p}_4)\gamma_\mu((1-y)\not{p}_3 + z\not{p}_4)) \\ &+ \epsilon(-\not{k}\gamma_\mu\not{\ell} + ((1-y)\not{p}_3 + z\not{p}_4)\gamma_\mu(y\not{p}_3 + (1-z)\not{p}_4)). \end{aligned} \quad (C.11)$$

Finalmente, si recordamos del capítulo 4 que la integral (C.1) va en medio de los spinores $\bar{u}(p_3)$, $v(p_4)$, y usamos la ecuación de Dirac, obtenemos, después de otro poco de álgebra,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\alpha(\not{p}_3 - \not{k})\gamma_\nu(\not{p}_4 + \not{k})\gamma_\alpha}{k^2(p_3 - k)^2(p_4 + k)^2} &= \int dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ &\times \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{-\frac{(2-\epsilon)^2}{4-\epsilon}\ell^2 - ((1-y)(1-z) + yz)q^2}{(\ell^2 - \Delta)^3} \end{aligned}$$

Note que la integral del lado derecho luce más “integrable” y, de hecho, ¡lo es! Esta es la utilidad de la introducción de los parámetros de Feynman.

Este método puede emplearse a denominadores mucho más complicados, mediante la identidad

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{\prod x_i^{m_i - 1}}{(\sum x_i A_i)^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)}. \quad (C.12)$$

Apéndice D

Libertad Asintótica

En este apéndice presentamos brevemente el concepto de libertad asintótica. Este concepto explica porque el método de la teoría de perturbaciones aplicado a QCD es confiable a altas energías: A altas energías la constante de acoplamiento es pequeña. De hecho se dice que la constante de acoplamiento “corre”, siendo grande a bajas energías y pequeña a altas energías.

D.1 Corrimiento de la Constante de Acoplamiento

Para introducir el concepto de corrimiento de la constante de acoplamiento, consideremos como ejemplo un observable físico adimensional R , el cual depende de una sola escala Q , la cual es mucho mayor que cualquier otro parámetro dimensional de la teoría. El hecho de que exista una escala única sugiere que R deberá tener un valor constante, independiente de Q . Este resultado, sin embargo, no es posible en una teoría cuántica del campo renormalizable. Veámos porque: Cuando calculamos R como una serie perturbativa en $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$, esta requiere del proceso de renormalización para remover las divergencias ultravioletas. Luego, dado que el proceso de renormalización introduce una segunda escala μ , i.e. el punto de substracción, entonces R dependerá en general de la razón $\frac{Q^2}{\mu^2}$ y por lo tanto no será una constante. De esto se sigue también que la constante de acoplamiento renormalizada dependerá del punto de substracción. Sin embargo, μ es un parámetro arbitrario y por lo tanto cantidades físicas como R no deberán depender de la elección de μ . Debido a que R es adimensional, sólo podrá depender de la razón $\frac{Q^2}{\mu^2}$ y de la constante de acoplamiento α_s . Matemáticamente, la dependencia en μ , de R , puede expresarse como

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s\right) \equiv \left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R = 0 \quad (D.1)$$

Podemos reescribir esta ecuación en una forma más compacta si definimos

$$t = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right), \quad \beta(\alpha_s) = \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2}, \quad (D.2)$$

donde la derivada de la constante de acoplamiento en la definición de la función β se hace a una constante de acoplamiento desnuda fija. Con este cambio de variable, escribimos (D.1) como

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R(\exp\{t\}, \alpha_s) = 0. \quad (D.3)$$

Podemos resolver esta ecuación definiendo implícitamente una nueva función $\alpha_s(Q^2)$ como

$$t = \int_{\alpha_s}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad \alpha_s(\mu^2) \equiv \alpha_s. \quad (D.4)$$

De esta definición se sigue

$$\frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial t} = \beta(\alpha_s(Q^2)), \quad \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial \alpha_s} = \frac{\beta(\alpha_s(Q^2))}{\beta(\alpha_s)}. \quad (D.5)$$

Por lo tanto $R(1, \alpha_s(Q^2))$ es solución de (D.3). Esto muestra que toda la dependencia en la escala, de R , entra a través de $\alpha_s(Q^2)$, el corrimiento de la constante de acoplamiento. De esto se sigue que el conocimiento de $R(1, \alpha_s)$, a orden fijo en teoría de perturbaciones, nos permite predecir la variación de R con Q si podemos resolver (D.4).

D.2 La Función Beta

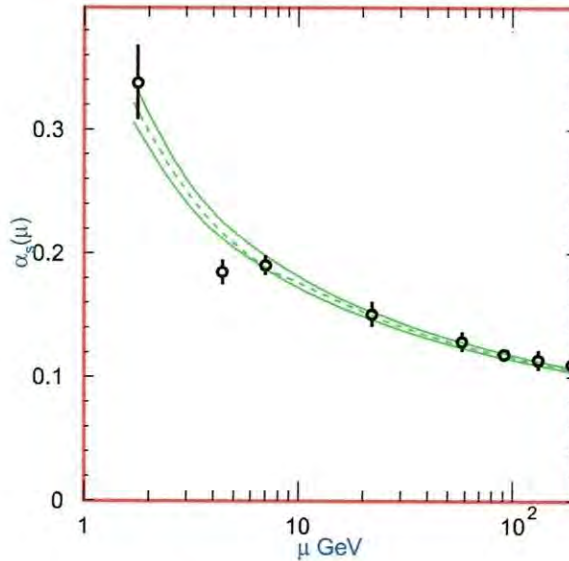
La variación de la constante de acoplamiento α_s está determinada por la ecuación del grupo de renormalización

$$\beta(\alpha_s) = Q^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial Q^2} \quad (D.6)$$

A un lazo, la función beta está dada por

$$\beta(\alpha_s) = -\left(\frac{33 - 2n_f}{12\pi}\right)\alpha_s^2, \quad (D.7)$$

donde n_f es, aproximadamente, el número de quarks sin masa. Los coeficientes de la función beta son extraídos de las correcciones altos órdenes de los vértices desnudos de la teoría.



Sustituyendo (D.7) en (D.6), encontramos que

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2)bt}, \quad b = \frac{33 - 2n_f}{12\pi}. \quad (\text{D.8})$$

Evidentemente, cuando t es grande $\alpha_s(Q^2)$ disminuye. Esta propiedad de la constante de acoplamiento se conoce como *Libertad asintótica*. Note que el número de tipo de fermiones es importante para que exista libertad asintótica. Con $n_f < \frac{33}{2}$ esta propiedad se conserva. Un signo positivo para b haría crecer la constante de acoplamiento a altas energías.

Volviendo a la observable R , supongamos que en teoría de perturbaciones R tiene el desarrollo

$$R = R_1\alpha_s + \dots \quad (\text{D.9})$$

La solución de (D.3), $R(1, \alpha_s(Q))$, puede reexpresarse en terminos de $\alpha_s(\mu^2)$ usando (D.8):

$$\begin{aligned} R(1, \alpha_s(Q^2)) &= R_1\alpha_s(\mu^2) \sum_{i=0}^{\infty} [-\alpha_s(\mu^2)bt]^i \\ &= R_1\alpha_s(\mu^2)[1 - \alpha_s(\mu^2)bt + \alpha_s^2(\mu^2)(bt)^2 + \dots] \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Luego entonces, en el desarrollo perturbativo existen logaritmos de $\frac{Q^2}{\mu^2}$ los cuales son automáticamente resumados usando la constante de acoplamiento $\alpha_s(Q^2)$.

Hemos visto entonces que el valor de la constante de acoplamiento α_s depende de la energía a la que estemos trabajando, sin embargo la cromodinámica cuántica perturbativa no nos dice el valor absoluto de esta. Este último tiene que obtenerse del experimento. De esta forma, podemos escoger como parámetro de la teoría el valor de la constante de acoplamiento a una escala de referencia apropiada, suficientemente grande para estar en el dominio perturbativo, M_Z^2 por ejemplo. Haciendo $\mu = M_Z$ en (D.8), podemos deducir el valor a cualquier otra escala Q^2 . Sin embargo, es una practica convencional introducir un parámetro con dimensiones de masa Λ definido por

$$1 = b\alpha_s(\mu^2) \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) \quad (\text{D.11})$$

De esta forma, la ecuación (D.8) puede reescribirse como

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{b \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (\text{D.12})$$

De esta expresión se ve claramente que $\alpha_s(Q^2)$ decrece como $(\ln(Q^2))^{-1}$ para valores grandes de Q . Es evidente también que la escala de momento Λ es la escala en la cual $\alpha_s(Q^2)$ se torna muy grande cuando Q decrece.

Medidas experimentales dan valores para Λ alrededor de 200 MeV. De esta forma, el tratamiento perturbativo de QCD es válido solamente para energías mucho mayores que 200 MeV (por ejemplo 1 GeV) ó para escalas espaciales mucho menores que $\frac{1}{\Lambda}$.

Bibliografía

- [1] Soper, Davison E., *Classical Field Theory*, Wiley, New York, 1976.
- [2] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *The Classical Theory of Fields* (fourth revised English edition, trans. Morton Hamermesh), Pergamon, Oxford, 1975.
- [3] Rubakov, Valery, *Classical Theory of Gauge Fields* (Trans. Wilson S. Stephen), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1999.
- [4] A.Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2003.
- [5] Ryder, Lewis H., *Quantum Field Theory* (Second edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [6] Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V., *An Introduction to Quantum Field theory*, Westview Press Perseus Books, New York, 1995.
- [7] Itzykson, Claude and Zuber, Jean-Bernard, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [8] Greiner, W. and Reinhardt, J., *Quantum Electrodynamics* (Third edition), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [9] Weinberg, Steven, *The Quantum Theory of Fields Volume I: Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [10] Weinberg, Steven, *The Quantum Theory of Fields Volume II: Modern Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [11] Faddeev, L. D. and Slavnov, A. A., *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, Benjamin-Cummings, London, 1980.
- [12] Greiner, W. and Reinhardt, J., *Field Quantization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [13] Aitchison, I. J. R. and Hey, A.J. G., *Gauge Theories in Particle Physics Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QED* (Third edition) Institute of Physics Publishing, Bristol, 2003.
- [14] Aitchison, I. J. R. and Hey, A.J. G., *Gauge Theories in Particle Physics Volume II: QCD and the Electroweak Theory* (Third edition) Institute of Physics Publishing, Bristol, 2004.

- [15] Collins, John, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [16] Georgi, Howard, *Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories* (Second edition), Frontiers in Physics Perseus Books, New York, 1999.
- [17] Halzen, Francis and Martin, Alan D., *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, Wiley, New York, 1984.
- [18] R.K. Ellis, W.J. Stirling, and B.R. Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1996.
- [19] J.F. Donoghue, E. Golowich, and B.R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1992.
- [20] Greiner, Schrm, Stein and Bromley, *Quantum Chromodynamics* (Second edition), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- [21] Greiner, W. and Muller, B., *Quantum Mechanics Symmetries* (Second edition), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [22] Greiner, W., *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations* (Third edition), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.
- [23] M.E. Tejada Yeomans, Durham University Ph.D. Thesis, (2001)
- [24] G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **47**, 849 (1975)
- [25] Stefan Weinzierl,(2006), hep-ph/0604068
- [26] Bertrand Delamotte,(2003), hep-th/0212049