

**Universidad de Sonora
Departamento de Investigación en Física**

**Difracción de luz por medios inhomogéneos periódicos
unidimensionales**

Tesis

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIA (FÍSICA)

Presenta:

L. M. Ramón Antonio Munguia Arvayo

Director:

Dr. Raúl García Llamas

Hermosillo, Sonora, septiembre del 2007

11.9096

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

DEDICATORIA

A mis padres Rita Arvayo Pacheco y Miguel Munguía Ortiz que han dado todo su apoyo por ayudarme a salir adelante.

A mi esposa Verónica A. Domínguez Soto e Hijas Mitzi Airi y Melanie Guadalupe que las amo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco ampliamente:

A mi asesor de tesis Dr. Raúl García Llamas por haberme guiado en este trabajo y por sus consejos que de alguna manera influyeron en la culminación de este.

A secretarias, profesores y personal del DIFUS.

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su ayuda económica brindada.

APROBACIÓN DEL TRABAJO

Este trabajo fue aprobado por el comité de tesis integrado por:

Dr. Raúl García Llamas

Dr. Jorge Alberto Gaspar Armenta

Dr. Raúl Aceves Torres

Dr. Felipe Ramos Mendieta

ÍNDICE

RESUMEN.....	1
INTRODUCCIÓN.....	3
1. TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE MEDIOS INHOMOGÉNEOS.....	6
1.1. Las ecuaciones de Maxwell.....	6
1.2. La ecuación de onda.....	7
1.3. Cálculo de los modos TM.....	9
1.4. La función dieléctrica.....	12
2. PROPIEDADES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO.....	14
2.1. El sistema estudiado.....	14
2.2. Los órdenes difractados.....	17
2.3. El flujo de energía y la intensidad del campo.....	21
3. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	25
3.1. Relación de dispersión.....	25
3.2. Flujo total de energía reflejada y transmitida.....	27
3.3. La intensidad del campo cercano y lejano.....	29
3.4. La fibra óptica.....	41
3.5. Patrón de difracción.....	42
CONCLUSIONES.....	45
BIBLIOGRAFÍA.....	46
APÉNDICE I.....	47
APÉNDICE II.....	52
APÉNDICE III.....	54

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio de la interacción de una guía de onda plana (fibra óptica) con los campos evanescentes que se producen en la configuración de reflexión total interna (RTI).

Para lograr este objetivo se resuelve el problema de la difracción de ondas electromagnéticas linealmente polarizadas por dos medios semi-infinitos, uno homogéneo y el otro inhomogéneo, separados por una capa de aire (o vacío). La onda electromagnética plana incide oblicuamente por el medio homogéneo con constante dieléctrica positiva y mayor que la del vacío, configurándose así el sistema de RTI. El medio semi-infinito inhomogéneo es periódico en la dirección y , que es paralela a la capa de aire, con periodo a y caracterizado por una constante dieléctrica dependiente de la posición y de la frecuencia.

Este trabajo está basado en el método de expansión periódica multimodal del campo desarrollado por Burckhardt en 1966¹.

De las ecuaciones de Maxwell se obtiene la ecuación de onda para medios inhomogéneos periódicos, posteriormente suponiendo que la periodicidad es unidimensional y usando una expansión de los campos se obtiene una ecuación matricial la cual establece los modos electromagnéticos soportados por el medio.

Mediante un programa hecho en Fortran, se obtienen numéricamente la relación de dispersión de los modos TM (el campo magnético oscila en la dirección x), el flujo total de energía en la dirección z (que es la dirección perpendicular a la capa de aire), la eficiencia de los órdenes difractados en el medio por donde incide la luz, la intensidad del campo magnético (lejano y cercano) y el patrón de difracción.

En todos los casos estudiados el sistema inhomogéneo es periódico en una dirección y y binario, es decir está formado por capas de aire (vacío) alternadas con capas de dieléctrico, estas últimas con espesores fijos a $3\lambda_0/16$, donde $\lambda_0 = 0.6328\mu\text{m}$, lo que garantiza que exista un solo modo que se puede propagar por el dieléctrico. La constante dieléctrica de la envoltura o el vacío $\epsilon_e = 1.0$, del corazón o dieléctrico $\epsilon_c = 5.5225$, del medio semi-infinito homogéneo es de $\epsilon_1 = 2.25$.

En un primer caso se usa un periodo igual a $1.5\lambda_0$, así el espesor de la capa envoltura (vacío) es de $21\lambda_0/16$. Encontramos que el flujo de energía total reflejada (transmitida) como función del ángulo de incidencia pasa abruptamente de tener valores cercanos a cero (uno) a tener valores de uno (cero), a este ángulo se le denominó pseudo-crítico. La intensidad de campo magnético demuestra que existe propagación de energía, principalmente por las capas dieléctricas, siempre y cuando el ángulo de incidencia sea menor que el ángulo pseudo-crítico, y viceversa.

Enseguida se estudia el caso de la interacción de una guía de onda plana con los campos evanescentes que se producen en la configuración de RTI, para lo cual se incrementa el periodo hasta un valor de $6\lambda_0$, esto hace que el espesor de la envoltura sea $87\lambda_0/16$. El resultado que se obtuvo es que para ángulos mayores al ángulo pseudo-crítico no hay energía que se propague por la guía de onda es decir la fibra óptica.

Aunque el espesor físico del corazón es 119 nm, se encuentra justo por encima del límite superior de lo que se considera nano-ciencias, no fue posible encontrar acoplamiento entre la fibra óptica y las ondas evanescentes que se forman en RTI para ángulos mayores que el ángulo pseudo-crítico. Tal análisis es pertinente para entender los mecanismos de interacción en la técnica conocida como microscopia de barrido de campo cercano (SNOM). En el SNOM la fibra óptica termina en una forma de cono truncado cuya abertura es menor que 100 nm.

INTRODUCCIÓN

La microscopía óptica convencional ha sido una herramienta imprescindible durante los últimos 100 años en la investigación de microorganismos, de dispositivos micro-electrónicos, y en usos rutinarios. Sin embargo, su resolución lateral se restringe a un límite de difracción de aproximadamente $\lambda/2$.

La formación de una imagen se puede visualizar de la siguiente manera, cuando el tamaño de la muestra es mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente el ángulo de difracción es grande y solo una pequeña cantidad de luz puede ser captada por el lente de observación por lo cual no se obtiene una imagen precisa de la muestra, en caso contrario cuando el tamaño de la muestra es del orden (o mayor) que la longitud de onda de la luz incidente el haz de luz es levemente difractado así el máximo de luz es captado por el lente y por tanto se forma una imagen clara de la muestra.

Esta limitación fue superada a principios de 1980 con el invento del microscopio óptico de barrido de campo cercano (SNOM Scanning Near-field Optical Microscopy)², en el que una fuente de luz nanoscópica, generalmente una punta de fibra óptica afilada con una apertura más pequeña que 100 nm, barre la superficie de la muestra en la región llamada **Campo Cercano** (campo producido por contribuciones de ondas evanescentes y ondas propagantes). La energía captada por la punta, permite registrar simultáneamente la topografía y la imagen óptica (en modo transmisión o reflexión) de la muestra. La resolución óptica del SNOM típica es de alrededor de $\lambda/10$, aunque también se han reportado valores menores, estando determinada principalmente por el tamaño de la apertura de la sonda y por la distancia entre la sonda y la superficie.

La motivación de este trabajo esta dirigida a establecer cual es la influencia de una fibra óptica en el campo cercano producido por ondas evanescentes. Por tal motivo empezamos este trabajo haciendo una breve reseña de algunos trabajos relacionado con el método empleado.

La difracción de luz por sistemas que presentan periodicidad es un tópico que ha sido estudiado durante mucho tiempo. Un método riguroso desarrollado por Burckhardt¹ consistió en encontrar una ecuación matricial de valores propios, asociadas con el cuadrado de la constante de propagación de onda, y fue aplicado a resolver el

problema de difracción de ondas planas por medios dieléctricos modulados periódicamente. Esta metodología fue posteriormente usada por otros investigadores, los cuales consideraron medios dieléctricos no absorbentes y con constantes dieléctricas de valor positivo.

En particular Glass y Maradudin³ aplicaron este método considerando semiconductores de ancho de banda prohibida correspondiente al infrarrojo, metales en el visible e infrarrojo, y semiconductores en el ultravioleta, que para algunos valores de frecuencia presentaban valores de constantes dieléctricas negativas. Saldaña⁴ *et al.* extendieron el trabajo de la ref.(3) considerando un guía de ondas encima del medio periódicamente modulado, aunque no muestra resultados numéricos concluyentes.

Una técnica conocida como análisis de ondas acopladas (RCWA por sus siglas en Inglés) fue aplicado por Moharam⁵ *et al.* para describir la difracción de ondas electromagnéticas por estructuras periódicas.

Brok y Urbach⁶ encontraron una solución rigurosa, usando el método del elemento finito (FEM por sus siglas en Ingles), al problema de difracción de ondas por una rejilla y lo aplicaron a la lectura en los DVD (Disco de Video Digital).

En este trabajo se estudia precisamente la difracción de luz por un medio semi-infinito inhomogéneo periódico en la configuración de reflexión total interna.

Es importante mencionar que gran parte de la información de este trabajo esta complementada por la bibliografía que representa básicamente el material académico al respecto, tal es el caso de los autores John David Jackson⁷, John R. Reitz y Frederick J. Milford⁸, Max Born y Emil Wolf⁹, Daniel Malacara¹⁰ y Eugene Hecht¹¹.

El desarrollo de la tesis está hecho de la siguiente manera:

En el capítulo I, partiendo de las ecuaciones de Maxwell; se obtiene la ecuación de onda para medios inhomogéneos la cual posteriormente se resuelve para encontrar una ecuación matricial de valores propios cuya solución proporcionará los modos electromagnéticos que puede soportar dicho medio. El medio inhomogéneo presenta un periodo a a lo largo del eje y y es binario, es decir esta compuesto por dos capas alternadas de espesor d y $(a-d)$; cada capa esta caracterizada por constantes dieléctricas ϵ_c y ϵ_e respectivamente. Como se mencionó anteriormente este cálculo esta basado en el método de expansión periódica multimodal desarrollado por Burckhardt¹ en 1966.

Los modos, los cuales son campos electromagnéticos que pueden existir en algunos medios; pueden ser en general de dos tipos: modos transversales magnéticos TM en los cuales el campo magnético oscila solo en la dirección x , modos transversal eléctricos TE en los cuales el campo eléctrico oscila solo en la dirección x . En nuestro caso particular, se calculan los modos TM.

En el capítulo II se obtienen analíticamente las amplitudes de los órdenes difractados en cada uno de los medios, la eficiencia del n -ésimo orden, el flujo de energía y la intensidad del campo cercano. Esto cuando una onda electromagnética P-polarizada incide oblicuamente sobre un sistema, el cual esta compuesto por dos medios semi-infinitos separados por una capa de aire de espesor d_2 . Uno de los medios es semi-infinito periódico inhomogéneo en la dirección y , con constante dieléctrica dependiente de la posición y de la frecuencia (medio 3), el medio 2 es considerado la capa de aire (o vacío) la cual es paralela al eje y y el medio 1 es semi-infinito homogéneo con constante dieléctrica dependiente únicamente de la frecuencia. Por este medio incide la onda electromagnética.

Por último, en el capítulo III se presentan algunos resultados numéricos de la relación de dispersión de los modos TM (el campo magnético oscila en la dirección x), se calculan la eficiencia del orden cero difractado, así como el flujo total de energía en la dirección z (que es la dirección perpendicular a la capa de aire), la intensidad del campo (lejano y cercano) y el patrón de difracción. En un primer caso se consideran los siguientes parámetros: un periodo $a = 1.5\lambda_0$ donde $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ es la longitud de onda de la luz incidente, y una fracción de llenado $f = d/a = 0.125$. Enseguida se estudia el caso de la interacción de una sola guía de onda con los campos evanescentes que se producen en la configuración de RTI, para lo cual se incrementa el periodo hasta un valor de $6\lambda_0$.

Cabe aclarar que los resultados numéricos fueron obtenidos mediante un programa hecho en Fortran mismo que se comprobó su veracidad reproduciendo algunos resultados numéricos publicados en revistas internacionales tal es el caso de la relación de dispersión en el artículo publicado por F. Ramos-Mendieta y P. Halevi¹² y del artículo publicado Ramírez-Duverger¹³ *et al.* También se verificó la conservación de la energía para validar los resultados.

CAPÍTULO I

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE MEDIOS INHOMOGÉNEOS

En este capítulo se calculan analíticamente los modos electromagnéticos que puede soportar un medio periódico inhomogéneo de periodo a , el cual consiste de un sistema binario que esta compuesto por dos capas alternadas de espesor d y $(a-d)$; cada capa esta caracterizada por constantes dieléctricas ϵ_c y ϵ_e respectivamente (Ver Figura 1). Utilizamos el lenguaje de las fibras ópticas, así el subíndice c y e de las constantes dieléctricas corresponden a corazón y envoltura, respectivamente.

Se obtiene primero, mediante las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de onda para este medio y posteriormente considerando modos TM, la ecuación matricial cuya solución proporciona los eigenvalores y los eigenvectores una vez dada la función dieléctrica periódica. Es decir, formalmente se obtienen los modos electromagnéticos TM que puede soportar el sistema. Este cálculo esta basado en el método de expansión periódica multimodal desarrollado por Burckhardt en 1966.¹

1.1 Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell de manera general y en unidades Gaussianas consisten de cuatro ecuaciones las cuales están dadas por:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

Cada una de estas ecuaciones representa expresiones matemáticas de ciertos resultados experimentales y son las que gobiernan todos los campos electromagnéticos producidos por cargas superficiales ρ y densidades de corriente \vec{J} . \vec{E} es el vector de campo eléctrico, \vec{D} es el vector desplazamiento eléctrico que contiene a la densidad de polarización, \vec{B} es el vector de inducción magnética, \vec{H} es el vector de campo magnético y c la velocidad de la luz en el vacío.

Las relaciones que describen el comportamiento lineal de sustancias bajo la influencia del campo electromagnético, se les conoce como relaciones constitutivas las cuales son:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Donde ϵ es llamada la constante dieléctrica del medio o constante de permitividad que para algunos casos es compleja (en nuestro caso particular es real) y μ es llamada la permeabilidad magnética que en nuestro caso $\mu = 1$ ya que consideramos medios no magnéticos.

1.2 La ecuación de onda

Una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de Maxwell es la ecuación de onda electromagnética asociada a un medio con respuesta lineal. Consideremos en este caso que el comportamiento del campo en el tiempo es armónico, es decir;

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t)$$

donde $\vec{A}(\vec{r}, t)$ es el campo eléctrico o magnético; además, no hay carga externa ($\rho = 0$) y el medio es no conductor ($\vec{J} = 0$). Tendremos entonces que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en la forma:

$$\nabla \cdot \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i\omega}{c} \vec{B}(\vec{r}), \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.4)$$

La ecuación de onda para el campo magnético puede obtenerse tomando el rotacional de (1.4), de esta manera

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = -\frac{i\omega}{c} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}),$$

y utilizando la relación vectorial $\nabla \times (\psi \vec{A}) = \nabla \psi \times \vec{A} + \psi \nabla \times \vec{A}$ tenemos

$$\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}) \mu} \right) \times (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) + \frac{1}{\varepsilon(\vec{r}) \mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}(\vec{r}).$$

Ahora como $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ entonces la ecuación anterior se puede expresar como

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r})) - \nabla^2 \vec{B}(\vec{r}) + \varepsilon(\vec{r}) \mu \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}) \mu} \right) \times (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}) \mu \vec{B}(\vec{r}).$$

Además de la ecuación (1.2) $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$, por lo cual tenemos finalmente

$$-\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}) + \varepsilon(\vec{r}) \mu \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}) \mu} \right) \times (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}) \mu \vec{B}(\vec{r}). \quad (1.5)$$

Por otra parte, la ecuación de onda para el campo eléctrico es diferente a la obtenida para el campo magnético como se muestra a continuación.

Tomando el rotacional de la ecuación (1.3)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r})) = \frac{i\omega}{c} \nabla \times \vec{B}(\vec{r}).$$

Como $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ y de ecuación (1.4) se tiene

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})) - \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i\omega}{c} \left(-\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\vec{r}) \mu \vec{E}(\vec{r}) \right).$$

Además $\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}) \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \nabla \varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$ entonces

$$-\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) - \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \nabla \varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r}) \mu \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.6)$$

Las ecuaciones (1.5) y (1.6) se les llama **ecuaciones de onda** para medios inhomogéneos.

1.3 Cálculo de los modos TM.

El medio infinito inhomogéneo de periodo a estudiado para calcular los modos TM lo muestra la figura 1,

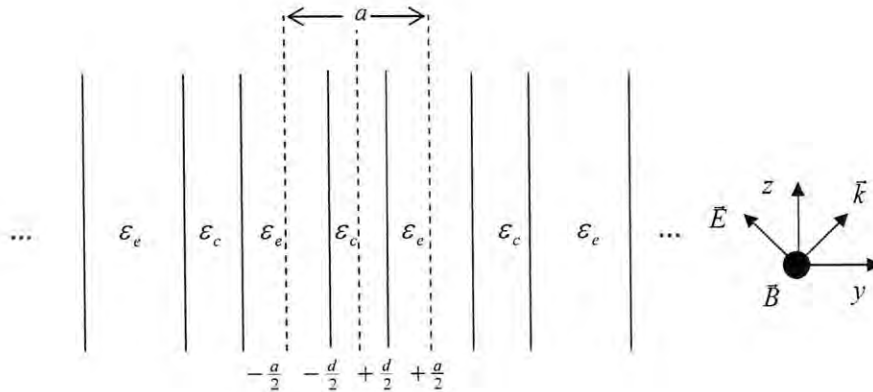


Figura 1. El sistema inhomogéneo es binario y está compuesto por dos capas alternadas de espesores d y $(a-d)$ con constantes dieléctricas ε_c y ε_e respectivamente.

Aunque el medio inhomogéneo estudiado en este trabajo es binario, puede ser terciario, etc. Es decir, este cálculo no está restringido a sistemas binarios.

Considerando modos transversales magnéticos (el campo magnético oscila solo en la dirección x), entonces $B_y = B_z = 0$ y $B_x(y, z) \neq 0$; además ε depende de y , bajo estas condiciones la ecuación de onda (1.5) toma la siguiente forma,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu \varepsilon(y)} \frac{\partial B_x(y, z)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu \varepsilon(y)} \frac{\partial B_x(y, z)}{\partial z} \right) = -\frac{\omega^2}{c^2} B_x(y, z). \quad (1.7)$$

Dado que el medio es periódico y satisface la condición de Bloch-Floquet para el campo, la cual establece que en un medio periódico el campo puede ser escrito como el producto de dos funciones: La primera es una onda plana electromagnética y la segunda una función periódica con el mismo periodo de la red, utilizando para ello una base ortogonal adecuada. De esta manera, para resolver la ecuación (1.7) se expande $\varepsilon(y)$ en series de Fourier (Ver Apéndice II)

$$\frac{1}{\varepsilon(y)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varepsilon_n^- \exp(iG_n y), \quad (1.8)$$

y $B_x(y, z)$ como el producto de dos funciones de la siguiente manera,

$$B_x(y, z) = \sum_n B_n \exp[i(K + G_n)y + i\gamma z], \quad (1.9)$$

donde K es el vector de onda de Bloch-Floquet, $G_n = 2\pi n/a$, γ es la componente del vector de onda difractado (es decir los eigenvalores del sistema) dentro del medio inhomogéneo que es paralela a las interfaces de las capas y B_n es la n -ésima componente del eigenvector de campo magnético asociado al eigenvalor γ .

Sustituyendo las ecuaciones (1.8) y (1.9) en la ecuación (1.7) y derivando se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_n \sum_m (K + G_n + G_m)(K + G_m) \varepsilon_n^- B_m \exp[i(K + G_n + G_m)y] \exp(i\gamma z) + \\
& \sum_n \sum_m \gamma^2 \varepsilon_n^- B_m \exp[i(K + G_n + G_m)y] \exp(i\gamma z) = \\
& \frac{\omega^2}{c^2} \sum_m B_m \exp[i(K + G_m)y] \exp(i\gamma z).
\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\exp[-i(K + G_l)y]$ e integrando en un periodo y usando la orto-normalidad de las funciones $\exp(+iG_l y)$ tenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_m (K + G_m + G_{l-m})(K + G_m) \varepsilon_{l-m}^- B_m \exp(i\gamma z) + \\
& \sum_m \gamma^2 \varepsilon_{l-m}^- B_m \exp(i\gamma z) = \frac{\omega^2}{c^2} B_l \exp(i\gamma z).
\end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos semejantes llegamos a

$$\sum_m \left[\frac{\omega^2}{c^2} \delta_{lm} - (K + G_l)(K + G_m) \varepsilon_{l-m}^- \right] B_m = \gamma^2 \sum_m \varepsilon_{l-m}^- B_m,$$

ó escrito de manera compacta,

$$\sum_m T_{lm} B_m = \gamma^2 \sum_m \varepsilon_{l-m}^- B_m, \tag{1.10}$$

donde

$$T_{lm} = \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{lm} - (K + G_l)(K + G_m) \varepsilon_{l-m}^-.$$

La ecuación (1.10) se puede escribir en forma matricial como

$$T \bar{B} = \gamma^2 \varepsilon^- \bar{B}.$$

Multiplicando por la inversa de ε^- a ambos lados de la igualdad anterior tenemos

$$(\varepsilon^-)^{-1} T \bar{B} = \gamma^2 \bar{B}. \tag{1.11}$$

La ecuación matricial (1.11) es una ecuación de valores propios, cuya solución proporciona los eigenvalores y eigenvectores una vez conocida la inversa del recíproco de la función dieléctrica. Dicho de otra manera estamos obteniendo los modos TM que puede soportar el sistema estudiado. Para calcular tales modos, K varía de 0 a π/a .

Esta ecuación fue obtenida por primer vez en el trabajo de Burckhardt en 1966¹.

1.4 La función dieléctrica

Para encontrar los modos TM de la ecuación (1.11) es necesario conocer los coeficientes de Fourier del inverso multiplicativo de la constante dieléctrica del sistema inhomogéneo (Ver Apéndice II), de esta manera; se calcula la transformada de Fourier para el caso particular donde la función dieléctrica del medio está dada por

$$\frac{1}{\varepsilon(y)} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_e} & an + \frac{d}{2} \leq y \leq a(n+1) - \frac{d}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon_c} & an - \frac{d}{2} \leq y \leq an + \frac{d}{2} \end{cases}, \quad (1.12)$$

donde n es un entero.

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^- &= \frac{1}{a\varepsilon_e} \int_{-d/2}^{-d/2} \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{a}ny\right)\right] dy + \frac{1}{a\varepsilon_c} \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{a}ny\right)\right] dy + \\ &\quad \frac{1}{a\varepsilon_e} \int_{d/2}^{a/2} \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{a}ny\right)\right] dy \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales llegamos a que los coeficientes de Fourier están dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^- &= \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e}\right) + \frac{1}{n\pi\varepsilon_e} \sin(n\pi) \\ &= \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e}\right) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^- &= \frac{1}{a\varepsilon_e} \left(\frac{a-d}{2} \right) + \frac{d}{a\varepsilon_c} + \frac{1}{a\varepsilon_e} \left(\frac{a-d}{2} \right), \\ &= \frac{a-d}{a\varepsilon_e} + \frac{d}{a\varepsilon_c}.\end{aligned}\tag{1.13}$$

si m y n son números enteros entonces $m-n$ es un entero así

$$\varepsilon_{m-n}^- = \frac{1}{(m-n)\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{d(m-n)\pi}{a} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e} \right).\tag{1.14}$$

En términos de la fracción de llenado $f = d/a$ las ecuaciones (1.13) y (1.14) se pueden expresar como.

$$\varepsilon_0^- = \frac{1-f}{\varepsilon_e} + \frac{f}{\varepsilon_c},\tag{1.15}$$

$$\varepsilon_{m-n}^- = \frac{1}{(m-n)\pi} \operatorname{sen}[f\pi(m-n)] \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e} \right).\tag{1.16}$$

Las ecuaciones (1.15) y (1.16) son los coeficientes de la serie de Fourier del inverso multiplicativo de la función dieléctrica (ecuación 1.12), utilizados para calcular los modos TM del sistema.

Una vez que se tienen los coeficientes de Fourier de $1/\varepsilon(y)$ podemos resolver la ecuación (1.11), los resultados numéricos serán presentados en el capítulo III.

CAPÍTULO II

PROPIEDADES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Algunas de las propiedades del campo electromagnético se verán en este capítulo, tal es el caso de la difracción de una onda plana electromagnética por un medio periódico inhomogéneo, el flujo de energía, las condiciones en la frontera y la intensidad del campo magnético entre otras.

En este capítulo, primero se calcularán analíticamente las amplitudes de los órdenes difractados en cada uno de los medios considerados, el flujo de energía, así como la eficiencia del orden n y la intensidad del campo cercano. Esto para un sistema compuesto por dos medios semi-infinitos, uno homogéneo y el otro inhomogéneo, separados por una capa de aire (vacío) de espesor d_2 .

2.1 El sistema estudiado

Imaginemos que el medio del capítulo anterior (figura 1) se corta en una dirección perpendicular a las interfaces de las capas que lo componen. Entonces, el sistema que resulta consiste de dos medios semi-infinitos uno homogéneo con constante dieléctrica dependiente de la frecuencia (el vacío) y el otro no homogéneo con constante dieléctrica dependiente de la posición y la frecuencia. A este sistema le agregamos otro medio semi-infinito por el cual se hará incidir una onda electromagnética, de tal manera que obtenemos dos medios semi-infinitos uno inhomogéneo periódico y otro homogéneo separados por una capa de aire de espesor d_2 el cual es considerado otro medio homogéneo, obteniendo así el sistema a estudiar como se muestra en la figura 2.

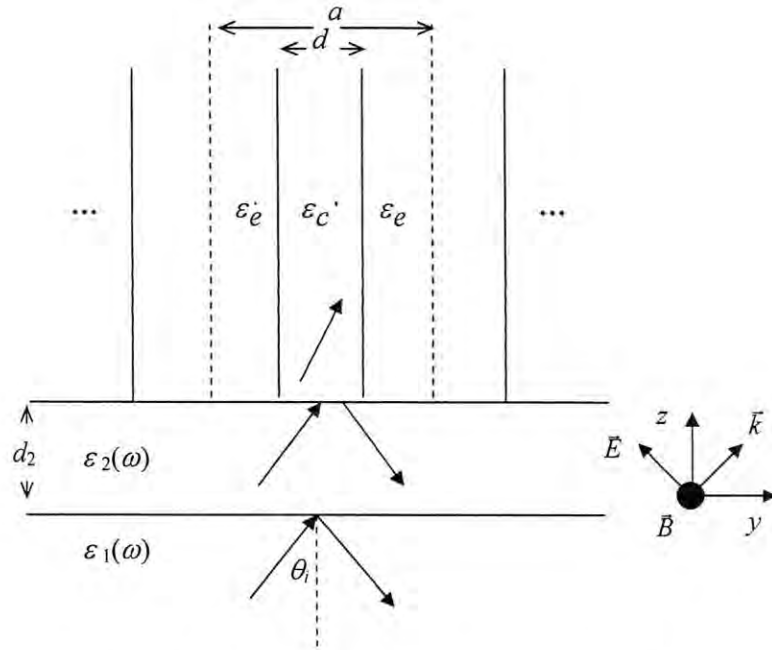


Figura 2. El sistema estudiado consiste de dos medios semi-infinitos separados por una capa de aire: El medio de la parte inferior ($z < 0$) es homogéneo con constante dieléctrica dependiente de la frecuencia $\epsilon_1(\omega)$, luego se tiene un capa de aire (vacío) de espesor d_2 y constante dieléctrica $\epsilon_2 = 1$ y el medio en la parte superior ($z > d_2$) es un sistema inhomogéneo binario compuesto por dos capas alternadas de espesores d y $(a-d)$ caracterizadas por constantes dieléctricas ϵ_c y ϵ_e respectivamente.

Haciendo incidir una onda electromagnética P-polarizada (el campo magnético oscila solo en la dirección x) a través del medio 1 (en la región $z < 0$), a un ángulo θ_i , sobre la capa de aire esta se difractará en cada uno de los medios. Así, las soluciones para las componentes- x del campo magnético en este sistema son una expansión tipo Rayleigh para el medio 1 y 2. Es decir en el medio 1 se tiene

$$B_1(y, z) = B_0' \exp[+i(k_y y + \beta_{10} z)] + \sum_n B_n' \exp[+i(k_y + G_n)y - i\beta_{1n} z], \quad (2.1)$$

donde el primer término de la ecuación (2.1) corresponde a la onda incidente y el segundo término a las ondas difractadas; $k_y = (\omega/c) \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \theta_i$ es la componente y del vector de onda incidente, β_{1n} la componente z del vector de onda difractado, B_n' son

las amplitudes complejas de los órdenes y $G_n = 2\pi/a$. Dado que $B_1(y, z)$ es solución de la ecuación de onda en un medio homogéneo, entonces

$$\beta_{1n} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_1 \varepsilon_1 - (k_y + G_n)^2}.$$

La suma en la ecuación (2.1) contiene tanto ondas propagantes como ondas evanescentes dependiendo de si β_{1n} es real o imaginario, es decir:

Si $\frac{\omega^2}{c^2} \mu_1 \varepsilon_1 < \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \theta_i + \frac{2\pi}{a} n \right)^2$ entonces β_{1n} es imaginario puro y se tiene una onda evanescente,

Si $\frac{\omega^2}{c^2} \mu_1 \varepsilon_1 > \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \theta_i + \frac{2\pi}{a} n \right)^2$ entonces β_{1n} es puramente real y se tiene una onda propagante.

En el medio 2, o sea en la capa de aire ($0 \leq z \leq d_2$),

$$B_2(y, z) = \sum_n B'_{2n} \exp[+i(k_y + G_n)y + i\beta_{2n}z] + \sum_n B''_{2n} \exp[+i(k_y + G_n)y - i\beta_{2n}z]. \quad (2.2)$$

Como $B_2(y, z)$ es también solución de la ecuación de onda homogénea se tendrá una condición similar a la anterior para establecer cuando un orden es propagante o evanescente en la capa de aire.

Y una expansión multimodal del campo en el medio inhomogéneo (medio 3),

$$B_3(y, z) = \sum_k B'_k \exp[+i\gamma_k z] \sum_n A_{nk} \exp[+i(k_y + G_n)y], \quad (2.3)$$

donde

$$G_n = 2\pi n / a, \quad (2.4)$$

y γ_k es la componente z del vector de onda difractado (los eigenvalores del sistema) dentro del medio inhomogéneo, es decir es la componente paralela a las interfaces de las capas; de tal manera que si γ_k es real tenemos una onda propagante, si es imaginario

tenemos una onda evanescente y A_{nk} es la n -ésima componente del eigenvector asociado al eigenvalor γ_k .

2.2 Los órdenes difractados

Para calcular los órdenes difractados en cada uno de los medios se aplican condiciones en la frontera (Ver Apéndice I) para los campos.

Aplicando estas condiciones tenemos primero:

En la superficie $z = 0$, la componente tangencial del campo magnético debe ser continua es decir

$$B_2(y,0) = B_1(y,0),$$

substituyendo (2.1) y (2.2) en la ecuación anterior se tiene,

$$\sum_n B'_{2n} \exp[+i(k_y + G_n)y] + \sum_n B^r_{2n} \exp[+i(k_y + G_n)y] = B'_0 \exp[+i(k_y)y] + \sum_n B^r_n \exp[+i(k_y + G_n)y]$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones $\exp[+i(G_m)y]$, multiplicamos la ecuación anterior por $\exp[-i(K + G_l)y]$ e integramos en un periodo obtenemos

$$B'_{2m} + B^r_{2m} = B'_m \delta_{m,0} + B^r_m. \quad (2.5)$$

Luego, de la siguiente condición de frontera (continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico)

$$\frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial B_2(y,0)}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial B_1(y,0)}{\partial z},$$

substituyendo las ecs. (2.1) y (2.2) en la ecuación anterior se llega a

$$\frac{i}{\epsilon_2} \sum_n B'_{2n} \beta_{2n} \exp[+i(k_y + G_n)y] - \frac{i}{\epsilon_2} \sum_n B^r_{2n} \beta_{2n} \exp[+i(k_y + G_n)y] = \frac{i}{\epsilon_1} B'_n \beta_{10} \exp[+i(k_y)y] - \frac{i}{\epsilon_1} \sum_n B^r_n \beta_{1n} \exp[+i(k_y + G_n)y]$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\exp[-i(K + G_l)y]$, integrando en un periodo y usando la propiedad de ortogonalidad de las funciones $\exp(+iG_l y)$ tenemos

$$\frac{B'_{2m}\beta_{2m}}{\varepsilon_2} - \frac{B^r_{2m}\beta_{2m}}{\varepsilon_2} = \frac{B'_m\beta_{10}}{\varepsilon_1} \delta_{m,0} - \frac{B^r_m\beta_{1m}}{\varepsilon_1}. \quad (2.6)$$

Ahora multiplicando la ecuación (2.5) por $\frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2}$ y sumando con la ecuación (2.6) obtenemos

$$\frac{2\beta_{2m}}{\varepsilon_2} B'_m = \left(\frac{\beta_{1m}}{\varepsilon_1} + \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \right) B'_m \delta_{m,0} - \left(\frac{\beta_{1m}}{\varepsilon_1} - \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \right) B^r_m. \quad (2.7)$$

Luego multiplicando la ecuación (2.5) por $-\frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2}$ y sumando con la ecuación (2.6) se obtiene

$$-\frac{2\beta_{2m}}{\varepsilon_2} B^r_m = \left(\frac{\beta_{1m}}{\varepsilon_1} - \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \right) B'_m \delta_{m,0} - \left(\frac{\beta_{1m}}{\varepsilon_1} + \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \right) B^r_m. \quad (2.8)$$

En la superficie $z = d_2$

$$B_3(y, d_2) = B_2(y, d_2).$$

Así

$$\sum_k B'_k \exp[+i\gamma_k d_2] \sum_n A_{nk} \exp[+i(k_y + G_n)y] = \sum_n B'_{2n} \exp[+i(k_y + G_n)y + i\beta_{2n}d_2] + \sum_n B^r_{2n} \exp[+i(k_y + G_n)y - i\beta_{2n}d_2].$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones $\exp(+iG_l y)$, multiplicamos la ecuación anterior por $\exp[-i(K + G_l)y]$ e integrando en un periodo obtenemos

$$\sum_k B'_k A_{m,k} \exp[+i\gamma_k d_2] = B'_{2m} \exp[+i\beta_{2m}d_2] + B^r_{2m} \exp[-i\beta_{2m}d_2]. \quad (2.9)$$

Despejando B'_{2m} y B^r_{2m} de las ecuaciones (2.7), (2.8) y sustituyendo en ecuación (2.9)

$$\sum_k B'_k A_{m,k} \exp[+i\gamma_k d_2] = \frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} (C_{12m} B'_m \delta_{m,0} - D_{12m} B_m^r) \exp[+i\beta_{2m} d_2] - \frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} (D_{12m} B'_m \delta_{m,0} - C_{12m} B_m^r) \exp[-i\beta_{2m} d_2] \quad (2.10)$$

Donde

$$C_{12m} = \left(\frac{\beta_{1m}}{\varepsilon_1} + \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \right), \quad D_{12m} = \left(\frac{\beta_{1m}}{\varepsilon_1} - \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \right).$$

Agrupando términos semejantes y factorizando en la ecuación (2.10)

$$\sum_k B'_k A_{m,k} \exp[+i\gamma_k d_2] = \frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} (C_{12m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] - D_{12m} \exp[-i\beta_{2m} d_2]) B'_m \delta_{m,0} - \frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} (D_{12m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] - C_{12m} \exp[-i\beta_{2m} d_2]) B_m^r \quad (2.11)$$

Haciendo

$$H'_{2m} = C_{12m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] - D_{12m} \exp[-i\beta_{2m} d_2] \\ H_{2m} = D_{12m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] - C_{12m} \exp[-i\beta_{2m} d_2]$$

La ecuación (2.11) se puede reescribir como

$$\sum_k B'_k A_{m,k} \exp[+i\gamma_k d_2] = \frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} H'_{2m} B'_m \delta_{m,0} - \frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} H_{2m} B_m^r \quad (2.12)$$

Por otro lado de la siguiente condición de frontera en $z = d_2$

$$\frac{1}{\varepsilon_3(y)} \frac{\partial B_3(y, d_2)}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial B_2(y, d_2)}{\partial z},$$

se tiene

$$i \sum_s \varepsilon_s^- \exp(+iG_s y) \sum_{n,k} \gamma_k B'_k A_{n,k} \exp[+i(k_y + G_n)y + i\gamma_k d_2] = \frac{i}{\varepsilon_2} \sum_s \beta_{2s} B'_{2s} \exp[+i(k_y + G_s)y + i\beta_{2s} d_2] - \frac{i}{\varepsilon_2} \sum_s \beta_{2s} B'_{2s} \exp[+i(k_y + G_s)y - i\beta_{2s} d_2] \quad (2.13)$$

Multiplicando la ecuación (2.13) por $\exp[-i(K + G_l)y]$ e integrando en un periodo, aplicando la propiedad de ortogonalidad de $\exp[+i(G_m)y]$ tenemos

$$\sum_{n,k} \gamma_k \varepsilon_{m-n}^- B'_k A_{nk} \exp[+i\gamma_k d_2] = \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} B'_{2m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] - \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} B^r_{2m} \exp[-i\beta_{2m} d_2]. \quad (2.14)$$

Substituyendo B'_{2m} y B^r_{2m} de ecuación (2.7) y (2.8) en (2.14) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} \gamma_k \varepsilon_{m-n}^- B'_k A_{nk} \exp[+i\gamma_k d_2] &= \frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \left[\frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} (C_{12m} B'_m \delta_{m,0} - D_{12m} B^r_m) \right] \exp[+i\beta_{2m} d_2] + \\ &\frac{\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \left[\frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} (D_{12m} B'_m \delta_{m,0} - C_{12m} B^r_m) \right] \exp[-i\beta_{2m} d_2] \end{aligned}$$

Factorizando se llega a

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} \gamma_k \varepsilon_{m-n}^- B'_k A_{nk} \exp[+i\gamma_k d_2] &= \frac{1}{2} (C_{12m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] + D_{12m} \exp[-i\beta_{2m} d_2]) B'_m \delta_{m,0} - \\ &\frac{1}{2} (D_{12m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] + C_{12m} \exp[-i\beta_{2m} d_2]) B^r_m. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Haciendo

$$\begin{aligned} G'_{2m} &= (C_{12m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] + D_{12m} \exp[-i\beta_{2m} d_2]) \\ G_{2m} &= (D_{12m} \exp[+i\beta_{2m} d_2] + C_{12m} \exp[-i\beta_{2m} d_2]) \end{aligned}$$

La ecuación (2.15) se puede escribir de la forma

$$\sum_{n,k} \gamma_k \varepsilon_{m-n}^- B'_k A_{nk} \exp[+i\gamma_k d_2] = \frac{1}{2} G'_{2m} B'_m \delta_{m,0} - \frac{1}{2} G_{2m} B^r_m \quad (2.16)$$

Despejando B^r_m de la ecuación (2.12) y sustituyendo en (2.16) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} \gamma_k \varepsilon_{m-n}^- B'_k A_{nk} \exp[+i\gamma_k d_2] &= \\ &\frac{1}{2} G'_{2m} B'_m \delta_{m,0} - \frac{1}{2} G_{2m} \left(-\frac{2\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \frac{1}{H_{2m}} \sum_k B'_k A_{m,k} \exp[+i\gamma_k d_2] \right) - \\ &\frac{1}{2} G_{2m} \left(+\frac{2\beta_{2m}}{\varepsilon_2} \frac{1}{H_{2m}} \frac{\varepsilon_2}{2\beta_{2m}} H'_{2m} B'_m \delta_{m,0} \right) \end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos semejantes obtenemos

$$\sum_{n,k} \left(\gamma_k \varepsilon_{m-n}^- - \frac{\beta_{2n}}{\varepsilon_2} \frac{G_{2n}}{H_{2n}} \delta_{n,m} \right) B'_k A_{nk} \exp[+i\gamma_k d_2] = \frac{1}{2} \left(G'_{2m} - \frac{H'_{2m}}{H_{2m}} G_{2m} \right) B'_m \delta_{m,0} \quad (2.17)$$

Haciendo

$$T_{mk} = \sum_n \left(\gamma_k \varepsilon_{m-n}^- - \frac{\beta_{2n}}{\varepsilon_2} \frac{G_{2n}}{H_{2n}} \delta_{n,m} \right) A_{nk} \exp[+i\gamma_k d_2]$$

$$U_m = \frac{1}{2} \left(G'_{2m} - \frac{H'_{2m}}{H_{2m}} G_{2m} \right) B'_m \delta_{m,0}$$

La ecuación (2.17) se transforma en

$$\sum_k T_{mk} B'_k = U_m \quad (2.18)$$

La cual es una ecuación matricial que junto con la ecuación (2.7), (2.8) y (2.12) darán las amplitudes de los órdenes difractados en cada uno de los medios para el sistema estudiado.

2.3 El flujo de energía y la intensidad del campo

El flujo total de energía reflejada y transmitida por unidad de área en la dirección z esta dada por la razón de la potencia reflejada (o flujo de energía) y la potencia incidente, así como la razón del flujo de energía transmitida y el flujo incidente respectivamente; dicho de otra manera

$$P_z^r = \frac{P_z^{r'}}{P_z^{i'}} \quad \text{y} \quad P_z^t = \frac{P_z^{t'}}{P_z^{i'}}$$

Donde

$$P_z^{i'} = \frac{L_x}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} S_z^i dy, \quad P_z^{r'} = \frac{L_x}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} S_z^r dy, \quad P_z^{t'} = \frac{L_x}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} S_z^t dy \quad (2.19)$$

y S_z es la componente z del vector de Poynting, la cual esta dada por

$$S_z = -\frac{4\pi}{c} E_y B_x^* \quad (2.20)$$

De esta manera, de las ecuaciones de Maxwell sabemos que

$$E_y(y, z) = i \frac{1}{\varepsilon} \frac{c}{\omega} \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.21) en la ecuación (2.20) para la componente x del campo magnético incidente se tiene

$$\begin{aligned} S_z^i &= \frac{4\pi}{c} \left(\frac{c}{\omega} \right) B_0' \beta_{10} \exp[+i(k_y y + \beta_{10} z)] B_0'^* \exp[-i(k_y y + \beta_{10} z)] \\ &= \frac{4\pi}{\varepsilon_1 c} \left(\frac{c}{\omega} \right) |B_0'|^2 \beta_{10} \end{aligned}$$

Resolviendo la integral correspondiente en (2.19) obtenemos el flujo total de energía incidente por unidad de área en la dirección z el cual está dado por.

$$P_z^i = \frac{4\pi}{\varepsilon_1 c} \left(\frac{c}{\omega} \right) |B_0'|^2 \beta_{10}. \quad (2.22)$$

De la misma manera, sustituyendo la ecuación (2.21) en la ecuación (2.20) pero ahora para la componente x del campo magnético difractado en el medio incidente tenemos

$$\begin{aligned} S_z^r &= \frac{4\pi}{\varepsilon_1 c} \left(\frac{c}{\omega} \right) \sum_n B_n^r \beta_{1n} \exp[+i((k_y + G_n)y - \beta_{1n}z)]^* \\ &\quad \sum_{n''} B_{n''}^{r*} \exp[-i((k_y + G_{n''})y - \beta_{1n''}z)] \\ &= \frac{4\pi}{\varepsilon_1 c} \left(\frac{c}{\omega} \right) \sum_n \sum_{n''} \beta_{1n} B_n^r B_{n''}^{r*} \exp[+i(G_n - G_{n''})y] \exp[-i(\beta_{1n} - \beta_{1n''})z] \end{aligned} \quad (2.23)$$

sustituyendo la ecuación (2.23) en la expresión correspondiente en (2.19) y resolviendo la integral llegamos a que el flujo total de energía reflejada por unidad de área en la dirección z está dado por

$$P_z^r = \frac{1}{|B_0^i|^2 \beta_{10}} \sum_n \beta_{1n} |B_n^r|^2 \exp[-i(\beta_{1n} - \beta_{1n}^*)z] \quad (2.24)$$

y la eficiencia del orden n difractado como

$$e_n = \frac{\beta_{1n} |B_n^r|^2}{\beta_{10} |B_0^i|^2}. \quad (2.25)$$

Por otro lado, calculando la componente z del vector de Poynting para la componente x del campo magnético difractado en el medio inhomogéneo se llega a

$$\begin{aligned} S_z^i &= \frac{4\pi}{c} \left(\frac{c}{\omega} \right) \sum_m \sum_{k,k'} \sum_{n,n'} \gamma_k \varepsilon_m^- A_{nk} B_k^i \exp[i(k_y + G_n)y] \exp[i(G_m)y] \exp[i(\gamma_k)z] * \\ &\quad A_{n'k'}^* B_{k'}^{i*} \exp[-i(k_y + G_{n'})y] \exp[-i(\gamma_{k'})z] \\ &= \frac{4\pi}{c} \left(\frac{c}{\omega} \right) \sum_m \sum_{k,k'} \sum_{n,n'} \gamma_k \varepsilon_m^- A_{nk} B_k^i A_{n'k'}^* B_{k'}^{i*} \exp[i(G_n + G_m - G_{n'})y] \exp[i(\gamma_k - \gamma_{k'})z] \end{aligned} \quad (2.26)$$

por lo que el flujo total de energía transmitido es

$$P_z^i = \frac{\varepsilon_1}{\beta_{10} |B_0^i|^2} \sum_{k,k'} \sum_{n,n'} \gamma_k \varepsilon_{n-n}^- A_{nk} B_k^i A_{n'k'}^* B_{k'}^{i*} \exp[+i(\gamma_k - \gamma_{k'})z]. \quad (2.27)$$

Las intensidades del campo (cercano, lejano) en cada uno de los medios para polarización P están dadas por el producto escalar entre el campo magnético y su conjugado, es decir

$$I(y, z) = \vec{B}(y, z) \cdot \vec{B}^*(y, z),$$

de esta manera para $z > d_2$, o sea en el medio inhomogéneo cuyo campo magnético esta dado por ecuación (2.3) tenemos

$$I_{3z}(y, z) = \sum_{k,k'} \sum_{n,n'} A_{nk} B_k^i A_{n'k'}^* B_{k'}^{i*} \exp\left[+i \frac{2\pi}{a} (n - n')y\right] \exp[+i(\gamma_k - \gamma_{k'})z]. \quad (2.28)$$

El campo magnético para $0 < z < d_2$ es decir en la capa de aire esta dado por ecuación (2.2), así la intensidad del campo es

$$\begin{aligned}
 I_{2z}(y, z) = & \sum_{n, n'} B_{2n}' B_{2n'}^{r*} \exp\left[+i \frac{2\pi}{a} (n - n')y\right] \exp\left[+i(\beta_{2n} - \beta_{2n'}^*)z\right] + \\
 & 2 \operatorname{Re}\left\{ \sum_{n, n'} B_{2n}' B_{2n}^{r*} \exp\left[+i \frac{2\pi}{a} (n - n')y\right] \exp\left[+i(\beta_{2n} + \beta_{2n'}^*)z\right] \right\} +, \\
 & \sum_{n, n'} B_{2n}^r B_{2n'}^{r*} \exp\left[+i \frac{2\pi}{a} (n - n')y\right] \exp\left[-i(\beta_{2n} - \beta_{2n'}^*)z\right]
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

y para $z < 0$ o sea en el medio incidente el campo magnético esta dado por ecuación (2.1) de esta manera se obtiene que la intensidad del campo esta dada por

$$\begin{aligned}
 I_{1z}(y, z) = & |B_0'|^2 + 2 \operatorname{Re}\left\{ \sum_n B_0' B_n^{r*} \exp\left[+i \frac{2\pi}{a} ny\right] \exp\left[+i(\beta_{10} + \beta_{1n}^*)z\right] \right\} + \\
 & \sum_{n, n'} B_n^r B_{n'}^{r*} \exp\left[+i \frac{2\pi}{a} (n - n')y\right] \exp\left[-i(\beta_{1n} - \beta_{1n'}^*)z\right]
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

En el siguiente capítulo se discutirán los resultados numéricos de algunas de las expresiones obtenidas en este capítulo y en el anterior.

CAPÍTULO III

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se presentan algunos resultados numéricos los cuales se obtuvieron mediante un programa en Fortran mismo que se comprobó su veracidad reproduciendo algunos resultados publicados en revistas internacionales como es el caso de la relación de dispersión^{12, 13}.

Primero se obtuvo la relación de dispersión $\omega(\gamma)$ de los modos TM para el sistema considerado anteriormente en la figura 1, la cuál proporciona las bandas permitidas (regiones del espacio $\omega(\gamma)$ en las cuales existen modos propagantes) y las bandas prohibidas (regiones del espacio $\omega(\gamma)$ donde no existen modos que se puedan propagar) del sistema.

Luego se calcula el flujo total de energía reflejada y transmitida así como la eficiencia del orden cero difractado en función del ángulo de incidencia, la intensidad de campo magnético (lejano y cercano).

Posteriormente se muestran resultados de la interacción de una guía de onda plana “fibra óptica” con los campos evanescentes en la configuración RTI y se grafica también el patrón de difracción para este caso.

3.1 Relación de Dispersión

Se considera un medio inhomogéneo periódico binario con un periodo $a = 1.5\lambda_0$ donde $\lambda_0 = 0.6328\mu\text{m}$, una fracción de llenado $f = d/a = 1/8$ y constantes dieléctricas $\epsilon_e = 1.0$ y $\epsilon_c = 5.5225$ para la envoltura y el corazón respectivamente. Con esta fracción de llenado el espesor del corazón es $d = 0.119\mu\text{m}$, con esta dimensión se toca el límite máximo de lo que se considera nano-fotónica.

Para obtener la relación de dispersión de los modos TM, se resuelve numéricamente la ecuación (1.11) usando los coeficientes de Fourier del inverso de la constante dieléctrica dados por las ecuaciones (1.15) y (1.16). Dado que la ecuación (1.11) es una ecuación matricial de dimensión infinita, se hace una aproximación

truncando la matriz a una de dimensión finita $2N$. En este trabajo los cálculo con $2N = 256$ es suficiente ya que los resultados convergen en tres cifras decimales significativas.

Considerando los parámetros antes mencionados y suponiendo que los medios son no dispersivos obtenemos la figura 3.

En la figura 3, se muestra la relación de dispersión de los modos TM para un medio inhomogéneo periódico, como el de la figura 1. Esta se calculó para valores de K en los bordes de las bandas los cuales corresponden a $K = 0$ y $K = \pi/a$ respectivamente y haciendo un barrido en energía ($E = \hbar\omega$), la gráfica muestra los γ cuyos valores son reales. Los espacios entre dos curvas del mismo color corresponden a las bandas permitidas, mientras que los espacio entre curvas adyacentes de diferente color corresponde a las bandas prohibidas.

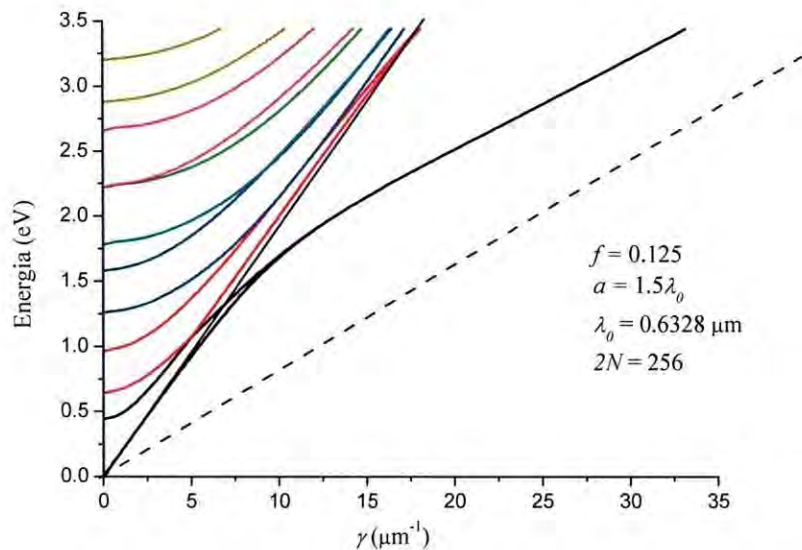


Figura 3. Relación de dispersión de los modos TM para un sistema como el de la figura 1. Las regiones entra curvas de un mismo color corresponden a las bandas permitidas del sistema. La línea continua representa a la línea de luz en el vacío, la línea discontinua corresponde a la línea de luz en el medio con índice de refracción igual a 2.35

Las bandas prohibidas se deben a efectos de interferencia destructiva de las ondas difractadas. Se generan ondas estacionarias que no permiten que haya propagación de energía.

Existe un punto (γ, E) en el cual se toca el borde superior de una banda con el borde inferior de la banda adyacente. Este punto solo ocurre para modos TM en lo que se conoce como el ángulo de Brewster¹². Es decir; la condición de Brewster se da cuando no hay ondas reflejadas y por tanto no habrá bandas prohibidas debido a que no existirá interferencia con la onda incidente.

La línea continua representa la línea de luz en el vacío, y la línea discontinua representa la línea de luz en el medio con constante dieléctrica $\epsilon_c = 5.5225$.

La fracción de llenado utilizada, garantiza que para energías mayores a 1.5 eV y menores que 3.5 eV se tendrá que la primera banda permitida degenera en un solo modo que se pueda propagar por las capas cuyo índice de refracción es mayor, es decir se tendrá un único “modo guiado”, mientras que en las capas con índices de refracción menor el comportamiento del modo será evanescente.

Por otro lado, resultó que al aumentar el periodo, manteniendo el espesor del corazón constante (la fracción de llenado disminuye) tienden a aparecer más bandas permitidas y si aumentamos el espesor del corazón, manteniendo el periodo constante (la fracción de llenado aumenta) se reduce el número de bandas permitidas.

Una vez que se obtienen los modos que puede soportar el medio inhomogéneo considerado, es posible estudiar la difracción, lo cual se muestra más adelante.

3.2 Flujo total de Energía Reflejada y Transmitida

El sistema estudiado es ahora el mostrado en la figura 2. Una onda electromagnética que se propaga en el medio 1, cuyo índice de refracción es igual a 1.5, e incide sobre el medio inhomogéneo, el cual difractará energía. Ambos medios semi-infinitos se encuentran separados por una capa de vacío de espesor d_2 .

Para calcular el flujo total de energía reflejada y transmitida se resuelven numéricamente las ecuaciones (2.24) y (2.27) respectivamente, considerando para ello una matriz de difracción de dimensión $2N = 128$, para el medio inhomogéneo un periodo $a = 1.5\lambda_0$, una fracción de llenado $f = 1/8$ y constantes dieléctricas $\epsilon_c = 1.0$, $\epsilon_c = 5.5225$ respectivamente. Todo esto se hace variando el ángulo de incidencia y fijando la longitud de onda en λ_0 .

La parte izquierda vista de arriba de la figura 4, muestra la energía total reflejada (línea discontinua) y la energía total transmitida (línea continua) en función del ángulo de incidencia. Los picos que se forman en 19° y 34.5° corresponden a la transición del orden -3 de ser evanescente a propagante y el $+1$ de propagante a evanescente respectivamente. La transición de algunos de los órdenes ocurre cuando se cumple la siguiente condición $\beta_{1n} = 0$ o bien,

$$\left| \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_i + \frac{2\pi}{a} n \right| = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1} \quad (3.1)$$

De aquí que el orden $n = +1$ cambia a evanescente exactamente en 33.7° y que el orden $n = -3$ cambia a propagante en 19.5° . La pequeña diferencia de estos valores con los que se obtienen de la figura se debe a la convergencia en las cantidades calculadas, ya que estamos tomando una matriz de dimensión $2N = 128$ para el cálculo.

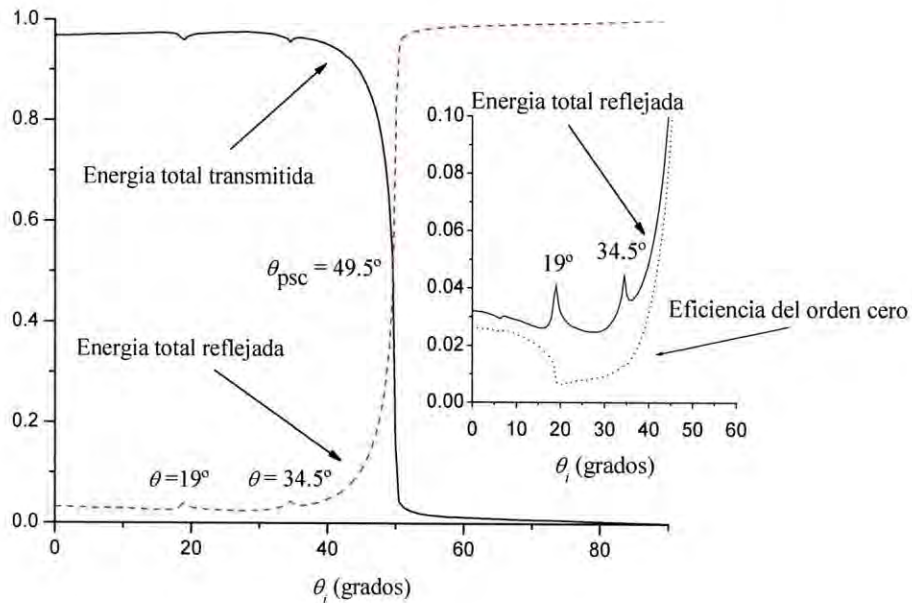


Figura 4. Energía total reflejada (línea discontinua) y la energía total transmitida (línea continua) como función del ángulo de incidencia. En el recuadro se muestra la eficiencia del orden cero y la energía total reflejada. El valor θ_{psc} corresponde al ángulo pseudo-crítico de acuerdo a la definición dada en el texto.

Como podemos observar en la figura 4 encontramos un ángulo pseudo-crítico a $\theta_{psc} = 49.5^\circ$. Llamamos a este ángulo pseudo-crítico ya que la transmisión pasa de tener valores cercanos a la unidad a cero en este ángulo, y porque ocurre en la presencia de un medio inhomogéneo.

Si consideramos que este resultado proviene de la reflexión por la superficie plana y lisa que separa dos medio homogéneos en reflexión total interna, uno de los medios con índice de refracción 1.5 (en el medio incidente), entonces el otro medio debe tener un índice de refracción efectivo igual a 1.141.

Se verificó la conservación de la energía al sumar la energía total reflejada y transmitida comprobando que es igual a uno para todos los ángulos de incidencia.

En el recuadro de la figura (4) se tiene la eficiencia del orden cero difractado (línea discontinua) y la energía total reflejada (línea continua) como función del ángulo de incidencia. Para el cálculo de la eficiencia del orden cero se uso la ecuación (2.25) numéricamente con los mismos parámetros.

La diferencia entre la energía total reflejada y la eficiencia del orden cero se debe a que el orden -1 y -2 están asociadas a ondas viajeras, sin importar el ángulo de incidencia y por tanto conlleva una pequeña fracción de la energía total incidente, el resto de los órdenes corresponden a ondas evanescentes.

3.3 La intensidad del campo cercano y lejano

Para obtener las intensidades del campo (cercano, lejano) en un sistema como el de la figura 2, se resuelven numéricamente las ecuaciones (2.28), (2.29) y (2.30) para el campo electromagnético en los tres medios haciendo un barrido en y y z las cuales están dadas en micras. Los parámetros usados son los siguientes: Una matriz de difracción de dimensión $2N = 128$, en el medio 1 (por el cual se hace incidir una onda electromagnética) un índice de refracción igual a 1.5, el espesor de la película de aire (medio 2) es de $0.05 \mu\text{m}$ y para el medio inhomogéneo (medio 3) un periodo igual a $1.5\lambda_0$ donde λ_0 es la longitud de onda de la luz incidente la cual equivale a $0.6328\mu\text{m}$, una fracción de llenado igual a $1/8$, el índice de refracción de la envoltura $n_e = 1.0$ y el índice de refracción del corazón $n_c = 2.35$.

En la figura 5, se grafica la proyección de la intensidad del campo sobre el plano y - z dentro de un área de; (a) $A = 36 \mu\text{m}^2$, (b) $A = 0.36 \mu\text{m}^2$. La onda incide normalmente y la longitud de onda es de $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$. Las regiones de color rojo (azul) corresponden a zonas de alta (baja) densidad de campo magnético. Para $z > d_2$ la intensidad del campo se multiplicó por 0.25, esto se hizo con el fin de tener buen contraste en cada una de las regiones.

En la figura 5(a) para la región $z > d_2$ se muestra la intensidad del campo en el medio inhomogéneo; la oscilación que se forma a lo largo del eje y (ver gráfica superior) y paralelas a z tienen un periodo de $1.5\lambda_0$. La energía tiende a propagarse por cada una de las capas, que conforman el medio inhomogéneo, cuyo índice de refracción es mayor que el de la otra.

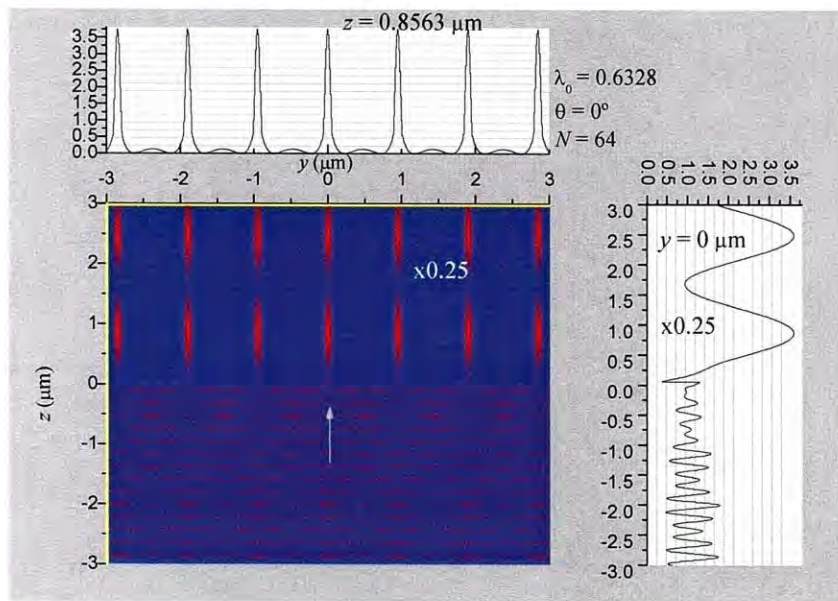


Figura 5(a). La intensidad del campo proyectada en el plano y - z calculada en un área de $36 \mu\text{m}^2$ a incidencia normal y a una longitud de onda de $0.6328 \mu\text{m}$. La gráfica en la parte lateral derecha muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- z para $y = 0 \mu\text{m}$. La gráfica en la parte superior muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- y para $z = 0.8563 \mu\text{m}$.

Por otro lado en la gráfica lateral derecha de la figura 5(a) se puede observar que la oscilación que se forma a lo largo del eje z (para $z > d_2$) tiene un periodo igual a $1.61 \mu\text{m}$, mismo que se puede obtener analíticamente de la siguiente expresión

$$P_{z > d_2} = \frac{2\pi}{|\gamma_2 - \gamma_1|} = 1.614 \mu\text{m} \quad (3.3)$$

donde $\gamma_1 = 12.6627$ y $\gamma_2 = 8.7699$ son dos valores, correspondientes a la primera y segunda banda permitida, de la constante de propagación del modo calculados para k_y igual a cero. Esta expresión se obtiene de la ecuación (2.28) considerando dos términos que son predominantes de acuerdo con los resultados numéricos, de esta manera obtenemos un término de interferencia cuyo periodo está dado por la ecuación (3.3).

En la región $z < 0$ de la figura 5(a) tenemos la intensidad del campo en el medio homogéneo cuyo índice de refracción es 1.5. De la gráfica podemos observar que las franjas de interferencia, que se forman a lo largo del eje z tienen un periodo igual $0.22 \mu\text{m}$. Este periodo puede ser obtenido de manera analítica a partir de la ecuación (2.30) considerando solamente la onda incidente y el orden cero difractado el cual es más predominante en magnitud, según los resultados obtenidos, en comparación con los otros órdenes cuya magnitudes son pequeñas y su contribución por lo tanto es mínima, de esta manera obtenemos un término que proviene de la interferencia entre la onda incidente y el orden cero difractado mediante el cual extraemos el periodo de oscilación a lo largo del eje z , es decir:

$$P_{z \leq 0} = \frac{1}{2\beta_{10}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i} = 0.21 \mu\text{m}. \quad (3.4)$$

El valor mostrado se obtuvo considerando incidencia normal.

El análisis hecho para la figura 5(a) es también válido para la figura 5(b) ya que esta es simplemente un acercamiento de la anterior, la razón de agregar esta figura es para estudiar la región de campo cercano o campo evanescente.

Para establecer esta región se hace un análisis de los valores de las componentes perpendiculares de los vectores de ondas en cada uno de los medios.

La onda evanescente decae $1/e$ de su amplitud, ver las expresiones para los campos en los medios 1 y 2 (ecuaciones (2.1) y (2.2)), cuando $\beta_n z = 1$. De esta manera podemos encontrar la longitud de decaimiento en z (L_z^j) de una onda evanescente en los medios 1 y 2 la cual esta dada por:

$$L_z^j = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \theta_i + \lambda n / a)^2 - \mu_j \epsilon_j}}. \quad (3.5)$$

Así, tomando el primer orden evanescente en la capa de aire (medio 2) el cual corresponde al orden ± 2 se tiene que la longitud de decaimiento es $L_z^2 = +0.114 \mu\text{m}$, calculado a incidencia normal. Se escoge el primer orden evanescente debido a que el resto de los órdenes decaerán más rápidamente que este.

De igual forma considerando el primer orden evanescente en el medio incidente (medio 1) el cual es ± 3 se tiene una longitud de decaimiento de $L_z^1 = +0.076 \mu\text{m}$.

Por otra parte para encontrar la longitud de decaimiento en el medio inhomogéneo (L_z^3) considerando que la onda evanescente decae $1/e$ su amplitud, de la expresión para el campo en este medio (ecuación 2.3) tenemos que esto sucede cuando $\gamma_k z = 1$, de aquí que la longitud de decaimiento esta dada por:

$$L_z^3 = \frac{1}{\gamma_k}. \quad (3.6)$$

Así, de los resultados numéricos obtenidos, tomando el modo con γ_k imaginario cuyo valor es menor en comparación con los otros modos evanescente, se tiene que la longitud de decaimiento es igual a $L_z^3 = 0.173 \mu\text{m}$ para $\gamma_k = 5.7647 \mu\text{m}^{-1}$.

De esta manera obtenemos una región de campo cercano o campo evanescente comprendida entre $-L_z^1 = -0.076 \mu\text{m}$ y $L_z^3 = 0.173 \mu\text{m}$, en la figura 5(b) se puede apreciar esta región. Cabe mencionar que en la capa de aire las ondas evanescentes no alcanzan a decaer totalmente ya que su longitud de decaimiento $L_z^2 = +0.114 \mu\text{m}$ es mayor que el espesor de la capa de aire ($d_2 = 0.05 \mu\text{m}$).

La densidad de energía que se forma en el centro de la capa de aire, según los resultados numéricos obtenidos es debido a los órdenes 0, ± 1 propagantes y ± 2 evanescentes.

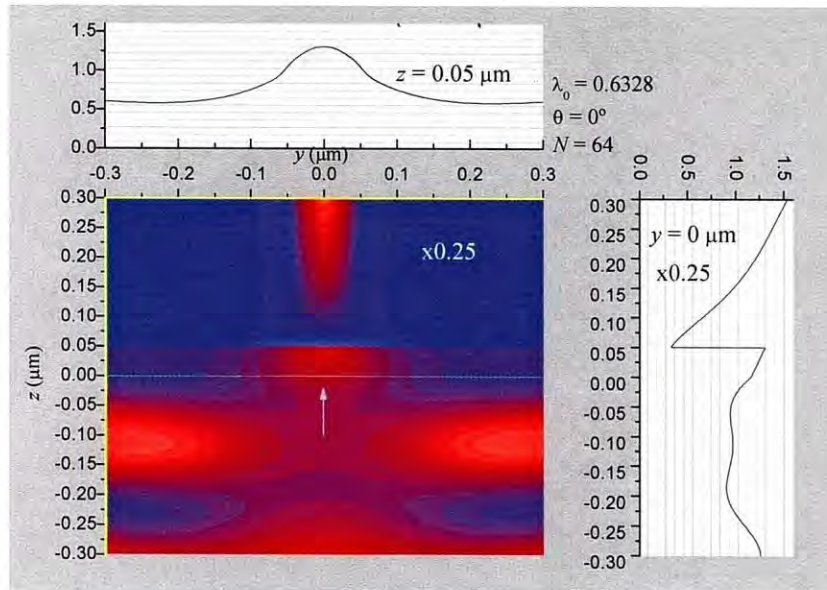


Figura 5(b). La intensidad del campo proyectada en el plano y - z calculada en un área $0.036 \mu\text{m}^2$ a incidencia normal y a una longitud de onda de $0.6328 \mu\text{m}$. La región de campo cercano se localiza en un rango entre $-0.076 \mu\text{m}$ y $0.173 \mu\text{m}$ sobre el eje z y cuya intensidad es causa de las ondas evanescentes. La gráfica en la parte superior muestra la intensidad del campo en la capa de aire para $z = 0.05 \mu\text{m}$. La gráfica en la parte lateral derecha muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- z para $y = 0 \mu\text{m}$.

En esta región existe una contribución a la intensidad de campo cercano que proviene tanto de órdenes propagantes como de evanescentes; el orden cero es el que porta la mayor energía seguido del orden ± 1 , los otros órdenes son menos predominantes.

En el medio incidente la intensidad del campo esta determinada básicamente por los órdenes 0, ± 1 , ± 2 propagantes y ± 3 evanescente, los cuales tienen una amplitud más predominante que el resto de ellos. Las franjas que se forman a ángulos de $\pm 26.38^\circ$ con

respecto a la normal corresponden a los órdenes ± 1 reflejado, el orden cero se refleja de manera perpendicular a la superficie y el orden ± 2 se refleja formando ángulos de $\pm 62.7^\circ$ con la normal. Estos ángulos se obtienen de la componente- y del vector de onda difractado (ver el exponente del segundo término de la ec. 2.1) lo cual lleva a la ecuación de la rejilla,

$$\theta_n = \text{sen}^{-1} \left[\left(\sqrt{\epsilon_1} \text{sen} \theta_i + \frac{\lambda}{a} n \right) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \right] \quad (3.7)$$

donde n es el orden reflejado.

En la figura 6 se grafica la proyección de la intensidad del campo en el plano y - z en un área de: (a) $A = 100 \mu\text{m}^2$, (b) $A = 1.0 \mu\text{m}^2$. El ángulo de incidencia es de 19° , se escoge este ángulo porque se aproxima al ángulo en el cual el orden -3 sufre una transición de evanescente a propagante, la longitud de onda es de $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$. Para $z > d_2$ la intensidad del campo se multiplicó por 0.3, esto con el propósito de tener buen contraste en cada uno de los medios.

Como se puede ver de la figura 6(a) (ver gráfica lateral derecha), el periodo de oscilación en $z > d_2$ debido a las ondas que se propagan por las capas del medio inhomogéneo es igual a $2.1 \mu\text{m}$. Este periodo corresponde al resultado de la ecuación (3.3) con los correspondientes $\gamma_1 = 12.6534$ y $\gamma_2 = 9.5901$ para incidencia de 19° según los resultados numéricos, y cuyo valor es igual a $2.05 \mu\text{m}$.

Las densidades de energía que se forman a lo largo del eje- y cerca de la superficie con periodo $1.5\lambda_0$ son debido a que tienen contribución tanto de ondas propagantes como de ondas evanescentes ya que para estas últimas la longitud de decaimiento es grande como se vera más adelante.

Para la región $z < 0$ (en el medio incidente), podemos observar que las franjas de interferencia oscilan con un periodo igual $0.25 \mu\text{m}$ (ver gráfica lateral derecha en figura 6(b)), el cual se puede obtenerse de la ecuación (3.4), utilizando las mismas consideraciones hechas para incidencia normal pero ahora con un ángulo de incidencia de 19° por lo que se tiene $0.22 \mu\text{m}$.

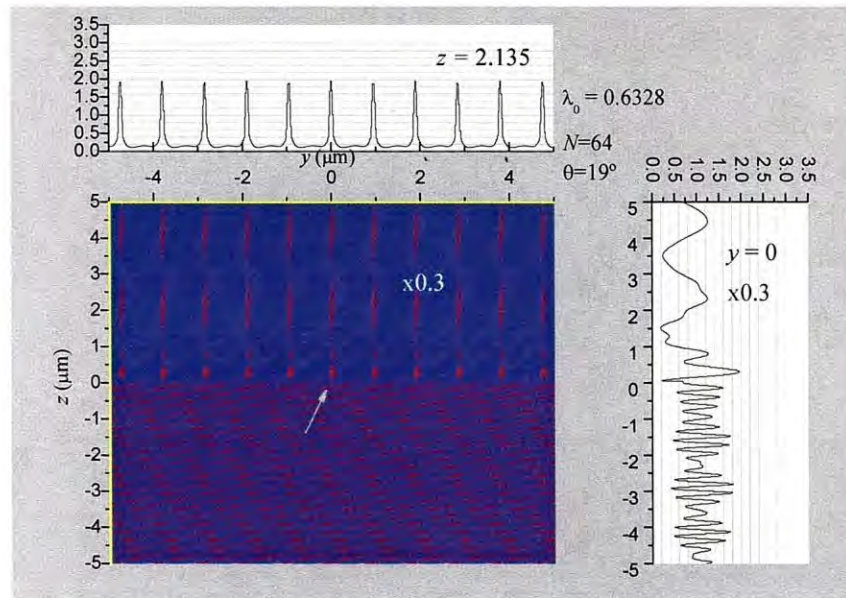


Figura 6(a). La intensidad del campo proyectada en el plano y - z calculada en un área de $100 \mu\text{m}^2$ a un ángulo de incidencia de 19° y con una longitud de onda de $0.6328 \mu\text{m}$. La gráfica en la parte lateral derecha muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- z para $y = 0 \mu\text{m}$. La gráfica en la parte superior muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- y para $z = 2.135 \mu\text{m}$.

Con el fin de estudiar el comportamiento del campo cercano para incidencia de 19° , se hace un acercamiento de la figura 6(a) como se muestra a continuación:

La longitud de decaimiento de las ondas evanescentes en el medio incidente de acuerdo a la ecuación (3.5) y para un ángulo de incidencia de 19° con el correspondiente orden evanescente (+2) es de $-0.097 \mu\text{m}$, y en la capa de aire la longitud de decaimiento es de $+0.173 \mu\text{m}$ considerando el orden +1. Para las ondas evanescentes en el medio inhomogéneo de acuerdo a los resultados numéricos y la ecuación (3.6), la longitud de decaimiento es de $+0.6572 \mu\text{m}$ para un $\gamma_k = 1.52 \mu\text{m}$. De esta manera tenemos una región de campo cercano comprendida entre $-0.097 \mu\text{m}$ y $0.6572 \mu\text{m}$.

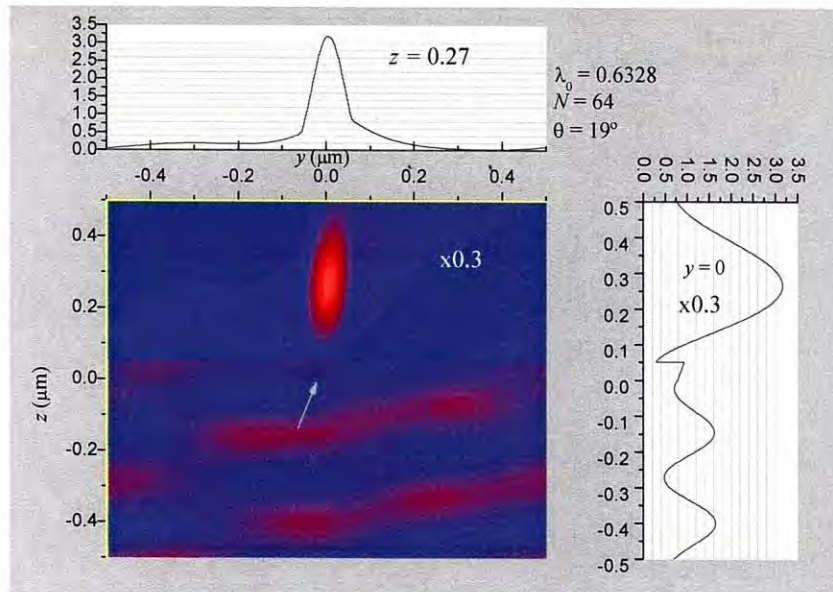


Figura 6(b). La intensidad del campo proyectada en el plano y - z calculada en un área $0.64 \mu\text{m}^2$ a un ángulo de incidencia de 19° y con una longitud de onda de $0.6328 \mu\text{m}$. La región de campo cercano esta localizada entre -0.097 y $0.657 \mu\text{m}$ sobre el eje z . La gráfica en la parte lateral derecha muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- z para $y = 0 \mu\text{m}$. La gráfica en la parte superior muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- y para $z = 0.27 \mu\text{m}$. La densidad de energía en el medio inhomogéneo tiene una gran contribución tanto de ondas evanescentes como propagantes ya que su intensidad decae $1/e$ en $0.657 \mu\text{m}$ a medida que se alejan de la interfaz.

Como se dijo anteriormente y como podemos observar en la figura 6(b) la densidad de mayor energía (puntos rojos mas intensos) que se forma en el medio inhomogéneo a lo largo del eje y queda dentro de la región de campo cercano por lo que tiene bastante contribución de las ondas evanescentes y las ondas viajeras e ahí esa densidad de energía.

Se ha analizado la intensidad de campo para el sistema propuesto a dos ángulos menores que el ángulo pseudo-crítico, ahora vamos a estudiar cual es el comportamiento para ángulos mayores que éste.

En la figura 7, se grafica la intensidad del campo proyectada en el plano y - z en un área de: (a) $A = 9 \mu\text{m}^2$, (b) $A = 0.16 \mu\text{m}^2$. El ángulo de incidencia es de 62.73° , este ángulo es mayor al ángulo pseudo-crítico el cual equivale a 49.5° como se mencionó anteriormente, la longitud de onda es de $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$.

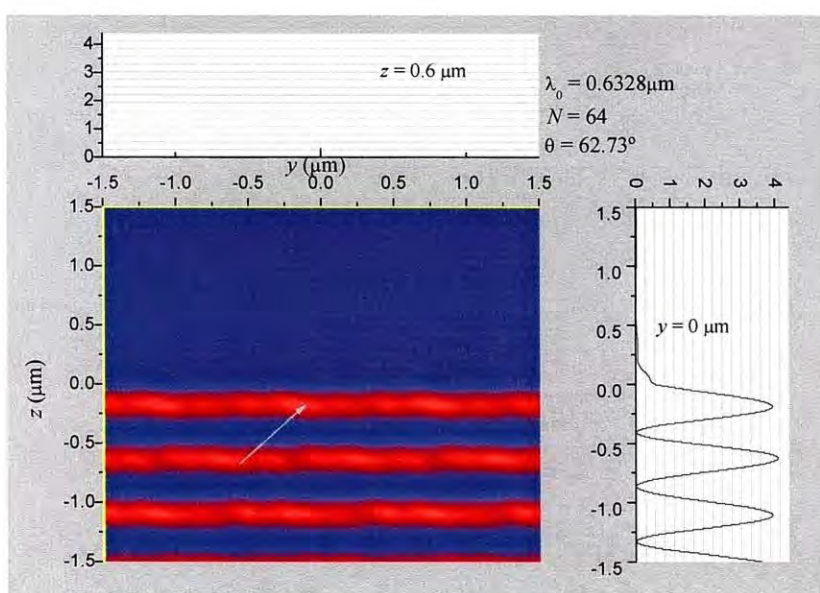


Figura 7(a). La intensidad del campo proyectada en el plano y - z calculada en un área de $9 \mu\text{m}^2$ a un ángulo de incidencia de 62.73° y con una longitud de onda de $0.6328 \mu\text{m}$. La gráfica en la parte lateral derecha muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- z para $y = 0 \mu\text{m}$, y la gráfica en la parte superior muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- y para $z = 0.6 \mu\text{m}$.

En la figura 7(a), las franjas de interferencia que se forman en el medio incidente oscilan con un periodo igual $0.44 \mu\text{m}$ como se puede ver en la gráfica, mismo que si se calcula utilizando la ecuación (3.4) se obtiene igual a $0.460 \mu\text{m}$.

Para $z > d_2$ es decir en el medio inhomogéneo, no existe energía que se propague por las guías de onda esto porque estamos incidiendo con un ángulo en el cual casi toda la energía se refleja y las ondas evanescentes correspondientes a los órdenes 0, +1, y +2 que se forman en la interfase no se acoplan con el modo TM que soporta el medio inhomogéneo.

En la figura 7(b) se tiene un acercamiento de la figura 7(a) para analizar la región de campo cercano

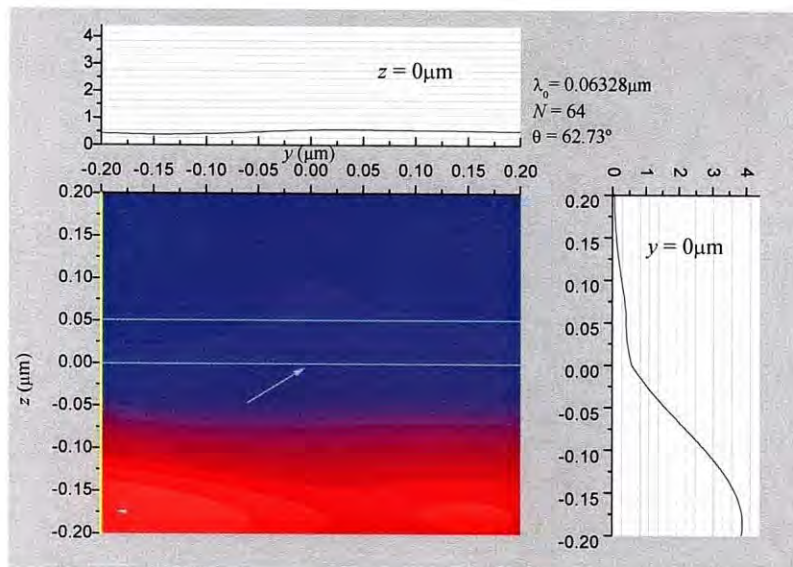


Figura 7(b). La intensidad del campo proyectada en el plano y - z calculada en un área de $0.16 \mu\text{m}^2$ a un ángulo de incidencia de 62.73° y con una longitud de onda de $0.6328 \mu\text{m}$. La gráfica en la parte lateral derecha muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- z para $y = 0 \mu\text{m}$, y la gráfica en la parte superior muestra la intensidad del campo a lo largo del eje- y para $z = 0 \mu\text{m}$. La región de campo evanescente está comprendida entre $-0.076 \mu\text{m}$ y $0.173 \mu\text{m}$.

La longitud de decaimiento de las ondas evanescentes en el medio inhomogéneo según la ecuación (3.6) y el correspondiente $\gamma_k = 5.7647$ es de $0.173 \mu\text{m}$, mientras que la longitud de decaimiento de las ondas evanescentes en el medio incidente de acuerdo a la ecuación (3.5) y el orden +1 se tiene que es de $-0.076 \mu\text{m}$. Esto para incidencia de 62.73° , por lo tanto tenemos una región de campo cercano comprendida entre -0.076 y $0.173 \mu\text{m}$. En la gráfica lateral derecha de la figura 7(b) se puede apreciar claramente la longitud de decaimiento en el medio inhomogéneo.

Por lo tanto podemos afirmar que para ángulos mayores que el ángulo pseudo-crítico no hay energía que se propague por la capa del medio inhomogéneo cuyo índice de refracción es mayor es decir la guía de onda.

Variación del espesor de la capa de aire.

En la figura 8, se gráfica el flujo total de energía reflejada y transmitida en función del ángulo de incidencia para diferentes espesores de la capa de aire es decir alejando el medio inhomogéneo del medio homogéneo, los otros parámetros permanecen constantes. Se observa que al aumentar el espesor de la capa de aire el ángulo pseudo-crítico tiende al ángulo crítico ($\theta_c = \sin^{-1}(1/\varepsilon_1^{1/2})$). Considerando que este resultado proviene de la reflexión de dos medio homogéneos en reflexión total interna, uno de los medios con índice de refracción 1.5 (en el medio incidente) y otro con un índice de refracción efectivo igual a 1.141 el cual se obtiene de la ecuación (5) del apéndice III, este valor de ángulo.

Por otro lado se observa que la intensidad del campo disminuye conforme se aumenta el espesor de la capa pero sigue habiendo un flujo de energía a través de las guías para ángulos menores que el ángulo pseudo-crítico, con respecto a lo demás se obtiene la misma información que en los casos anteriores por tal razón no se muestran gráficas de la intensidad del campo en los medios.

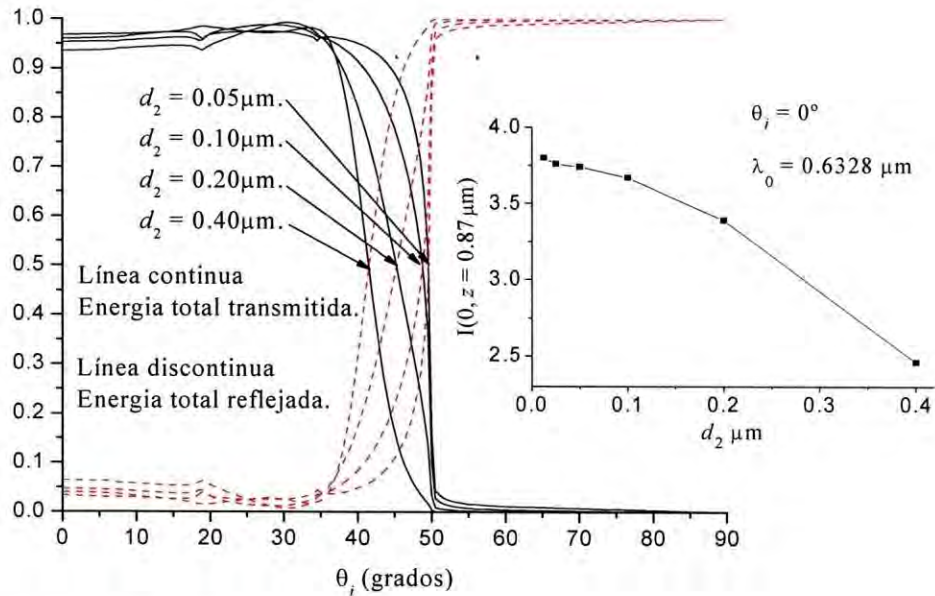


Figura 8. Gráfica de la energía total reflejada (curvas discontinuas) y transmitida (curvas continuas) en función del ángulo de incidencia a diferentes espesores de la capa de aire. En el recuadro se muestra la variación de la intensidad del campo en función del espesor de la capa de aire para $y = 0$ y $z = 0.87 \mu\text{m}$ a incidencia normal.

En el recuadro de la figura 8 se grafica como varía la intensidad del campo para un punto $y = 0$ y $z = 0.87 \mu\text{m}$, conforme aumenta el espesor de la capa de aire. Esto para un ángulo de incidencia de cero grados y una longitud de onda $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$.

3.4 La Fibra Óptica

Con el fin de aproximarnos al caso de una sola guía de onda (una fibra óptica) vamos a aumentar el periodo, manteniendo el espesor del corazón constante ($d = 3\lambda_0/16$), como consecuencia la fracción de llenado, disminuirá.

En la figura 9 se grafica la energía total reflejada (línea discontinua) y transmitida (línea continua) para tres diferentes valores del periodo ($a = 1.5\lambda_0, 3.0\lambda_0, 6.0\lambda_0$), y con el resto de los parámetros invariantes. Se observa que cuando se aumenta el periodo, la capa de aire y la guía de onda tienden a comportarse como un medio homogéneo ya que el ángulo pseudo-crítico se aproxima al ángulo crítico entre dos medios homogéneos en la configuración de reflexión total interna, es decir el medio inhomogéneo afecta menos a la configuración RTI a medida que el periodo aumenta.

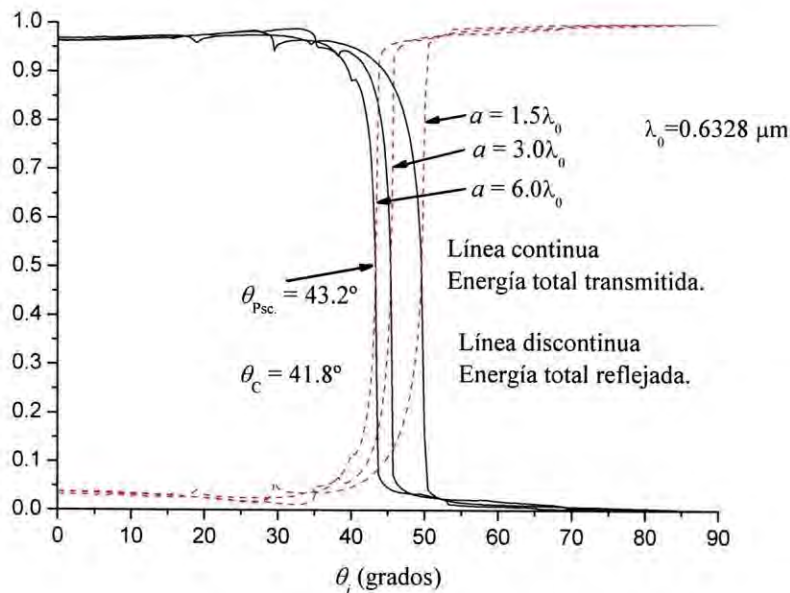


Figura 9. La energía total reflejada (línea discontinua) y transmitida (línea continua) como función del ángulo de incidencia, para tres valores del periodo, $a = 1.5\lambda_0, 3.0\lambda_0$ y $6.0\lambda_0$. Con el fin de simular una fibra óptica, la fracción de llenado es $f = 1/32$, el ángulo pseudo-crítico se da en 43.2° . El espesor de la capa de aire es de $0.05 \mu\text{m}$.

La intensidad de campo para el caso del periodo mayor ofrece la misma información que cuando se utilizó un periodo menor, así que no mostramos estas curvas. No se intentó ir a periodos mayores ya que necesitamos considerar dimensiones más grandes para la matriz de difracción pero esto consume mucho tiempo y no ha sido posible obtener hasta ahora dichos resultados

3.5 El patrón de difracción

En la figura 10 y 11 se grafica las eficiencias de los órdenes difractados (el patrón de difracción) como función de su ángulo de propagación, correspondiente a las ondas propagantes a incidencia normal y a un ángulo de incidencia mayor al ángulo pseudo-crítico. Se muestra resultados para el caso donde se tiene una sola guía de onda plana (fibra óptica), los parámetros tomados son los siguientes: un periodo igual a $6\lambda_0$ donde λ_0 es longitud de onda de la luz incidente la cual equivale a $0.6328 \mu\text{m}$, la fracción de llenado es igual a $1/32$, los índices de refracción de los dos medios que componen el medio inhomogéneo son 1 y 2.35 respectivamente, la luz incide por el medio homogéneo con índice de refracción 1.5, la capa de aire que separa el medio homogéneo de la fibra tiene un ancho de $0.05 \mu\text{m}$.

En la figura 10, se tiene el patrón de difracción a incidencia normal el orden cero difractado a cero grados es el más predominante en amplitud seguido de los órdenes ± 1 difractado a $\pm 6.37^\circ$ y ± 2 difractado a $\pm 12.8^\circ$ como se puede observar en la gráfica.

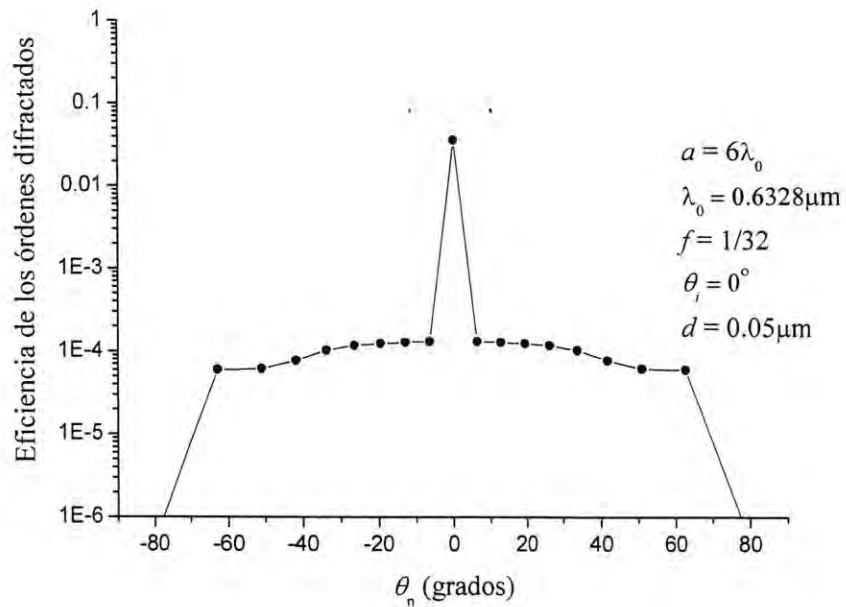


Figura 10. Se grafica la eficiencia de los órdenes difractados que son propagantes como función del ángulo de difracción. Se puede observar que el orden cero predomina en intensidad ante los otros órdenes.

En la figura 11, se grafica el patrón de difracción para un ángulo de 62.73° el cual es mayor al ángulo pseudocrítico. El orden cero cuyo ángulo de difracción es de 62.73° es el más predominante en amplitud seguido del orden -2 a 41.8° y el orden -1 a 51.05° .

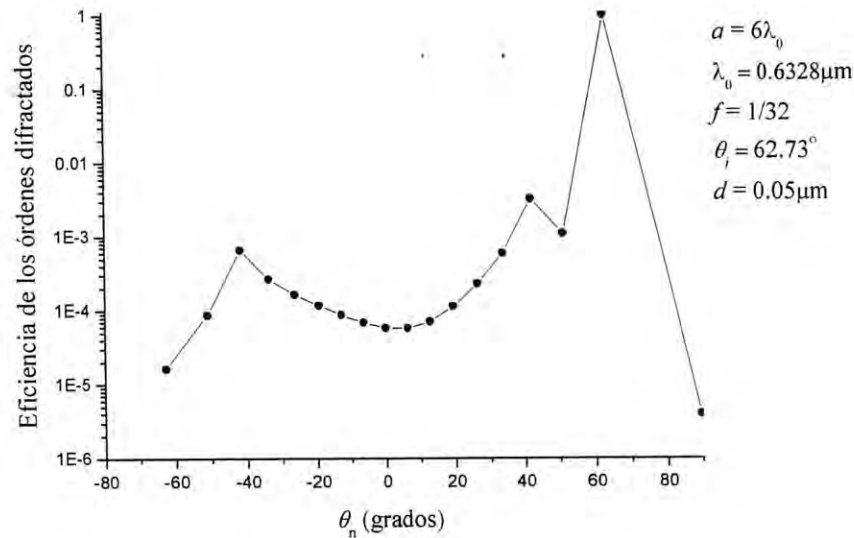


Figura 11. La eficiencia de los órdenes difractados propagantes como función del ángulo de difracción. Se puede observar que el orden cero difractado a un ángulo de 62.73° predomina en intensidad ante los otros órdenes.

Como se puede observar en ambas figuras, el patrón presenta características de un continuo, hasta ahora son discretos. La difracción es producida por la terminación abrupta de la guía y esperamos obtener un patrón continuo debido a la guía de onda o fibra óptica a medida que aumentemos el periodo del medio inhomogéneo y se mantenga constante el espesor de la fibra.

Un trabajo que se plantea a futuro es incluir una capa metálica en la que se pueda excitar al plasmón de superficie (PS) para determinar si el campo evanescente producido por el plasmón puede interactuar con la guía de onda plana y poder cuantificar el campo del PS.

CONCLUSIONES

Encontramos que el flujo de energía total reflejada (transmitida) como función del ángulo de incidencia pasa abruptamente de tener valores cercanos a cero (uno) a tener valores de uno (cero), a este ángulo se le denominó ángulo pseudo-crítico, en analogía al ángulo crítico que proviene de la reflexión por la superficie plana y lisa que separa dos medio homogéneos en reflexión total interna.

La intensidad de campo cercano demuestra que existe propagación de energía, por las capas que componen al medio inhomogéneo cuyo índice de refracción es mayor, siempre y cuando el ángulo de incidencia sea menor que el ángulo pseudo-crítico. Se obtuvo que esta energía oscila a lo largo de la guía con un periodo dado por $P_{z>d_2} = 2\pi |\gamma_2 - \gamma_1|$ donde γ_1 y γ_2 son dos valores, correspondientes a la primera y segunda banda permitida, de la constante de propagación de los modos.

Se observó que la intensidad del campo magnético disminuye conforme se aumenta el espesor de la capa de vacío pero sigue habiendo un flujo de energía a través de las guías.

De la interacción de una fibra óptica con los campos evanescentes que se producen en la configuración de RTI, encontramos que para ángulos mayores al ángulo pseudo-crítico no hay energía que se propague por la guía de onda, es decir no existe acoplamiento entre las ondas evanescentes y el modo que soporta la fibra óptica.

Aunque en realidad una fibra óptica esta caracterizada por dos capas de dieléctrico y el vacío, en este trabajo se consideró la fibra como un medio formado por una capa de dieléctrico y el vacío por lo que posteriormente se pretende estudiar el caso considerando las dos capas, es decir un medio inhomogéneo ternario. También se plantea el problema de agregar una capa metálica para poder excitar plasmones de superficie y analizar su interacción con la fibra óptica.

BIBLIOGRAFIA

1. C. B. Burckhardt "Diffraction of a Plane Wave at a Sinusoidally Stratified Dielectric Grating" J. Opt. Soc. Am. **56** (1966) pp. 1502.
2. D. Courjon, *Near-field Microscopy and Near-Field Optics* (Imperial College press, 2003).
3. N. E. Glass and A. A. Maradudin "Diffraction of Light by a periodically Modulated Dielectric Half-Space" Phys. Rev. B **29** (1984) pp. 321.
4. X. I Saldaña, G. H. Cococletzi, G. G. de la cruz y L. Dobrzynaki, "Dispersión de Luz por una Película en Contacto con un Medio Dieléctrico Modulado". Soc. Mex. Cs. de Superficies y Vacío, **4** (1992) pp. 97-101
5. M. G. Moharam, Eric B. Grann, Drew A. Pommet and T. K. Gaylord, "Formulation for Stable and Efficient Implementation of the Rigorous Coupled-Wave Analysis of Binary Gratings". J. Opt. Soc. Am. A, **12** (1995) pp. 1068
6. J. M. Brok and H. P. Urbach, "Rigorous Model of the Scattering of a Focused Spot by a Grating and its Application in Optical Recording". J. Opt. Soc. Am. A, **20** (2003) pp. 256
7. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* 3rd ed. Wiley 1999
8. J. R. Reitz, F. J. Milford and R. W. Christy *Fundations of Electromagnetic Theory* 4th ed. Addison Wesley
9. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* 7th ed. (Cambridge University Press)
10. D. Malacara *Óptica Básica* 1^{ra} ed. 1989, Fondo de Cultura Económica.
11. E. Hecht *Optics* 4th ed. (Adelphi University 2002).
12. F. Ramos-Mendieta and P. Halevi, "Electromagnetic Surface Modes of a Dielectric Superlattice: The supercell method". J. Opt. Soc. Am. B, **14** pp. 370 (1997).
13. A. Ramírez-Duverger, J. Gaspar-Armenta, R. García-Llamas. "Surface Wave Effect on Light Scattering from one-dimensional Photonic Crystals". Opt. Communication, **277** (2007) pp. 302

APÉNDICE I

CONDICIONES EN LA FRONTERA

Las condiciones en la frontera⁽⁸⁾ son el resultado directo de las ecuaciones de Maxwell aplicando el Teorema de Gauss (o Teorema de la Divergencia) y el Teorema de Stokes mismos que son

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} \, dv = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, ds \quad (\text{I.1})$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, ds \quad (\text{I.1})$$

respectivamente.

Por ejemplo aplicando el teorema de Stokes a las ecuaciones (1.3) y (1.4) se obtiene la continuidad de la componente tangencial de \vec{E} y la continuidad de la componente tangencial de \vec{H} , para la componente normal de \vec{D} y \vec{B} se aplica el teorema de Gauss a las ecuaciones (1.1) y (1.2). De esta manera se obtienen las cuatro condiciones en la frontera (en ausencia de densidad superficial de carga y densidad de corriente)

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \quad (\text{I.2})$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{I.4})$$

Las cuatro condiciones de frontera anteriores, se pueden simplificar en dos ecuaciones de frontera como se muestra a continuación.

Consideremos primero polarización TE es decir el campo eléctrico oscila solo en la dirección x como muestra la figura 1.

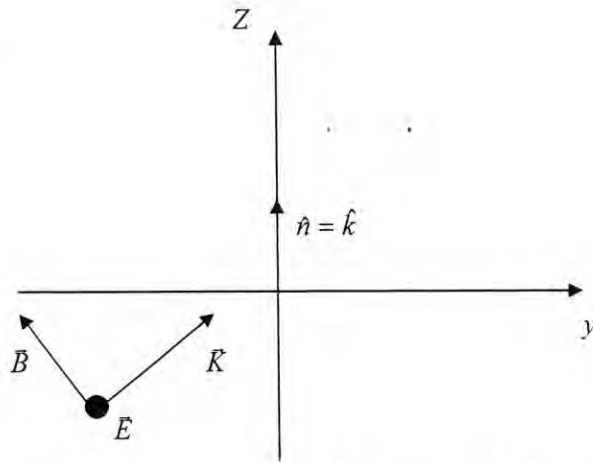


Figura 1. El campo eléctrico oscila en la dirección x , \vec{K} es el vector de onda de la onda plana electromagnética y \hat{n} es el vector normal a la superficie.

En este caso $B_y(y, z) \neq 0$, $B_z(y, z) \neq 0$, $B_x(y, z) = 0$ y $E_x(y, z) \neq 0$,
 $E_y(y, z) = E_z(y, z) = 0$ de esta manera de la ecuación (I.1) tenemos

$$\hat{k} \times E_{1x} \hat{i} = \hat{k} \times E_{2x} \hat{i}$$

Haciendo el producto cruz se tiene

$$E_{1x} = E_{2x} \quad (I.5)$$

Ahora como $\vec{B} = \mu \vec{H}$ de la ecuación (I.2) tenemos

$$\frac{1}{\mu_1} \hat{k} \times (B_{1y} \hat{j} + B_{1z} \hat{k}) = \frac{1}{\mu_2} \hat{k} \times (B_{2y} \hat{j} + B_{2z} \hat{k})$$

Resolviendo el producto cruz se tiene

$$\frac{1}{\mu_1} B_{1y} = \frac{1}{\mu_2} B_{2y} \quad (I.6)$$

Considerando que el comportamiento del campo en el tiempo es armónico de la ecuación (1.3) tenemos

$$i\omega B_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

lo cual implica que la expresión (1.6) se puede escribir como

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1x}}{\partial z} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E_{2x}}{\partial z} \quad (1.7)$$

Así tenemos para polarización TE las condiciones de frontera siguientes

$$E_{1x} = E_{2x} \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1x}}{\partial z} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E_{2x}}{\partial z} \quad (1.9)$$

Consideremos ahora polarización TM es decir el campo magnético oscila solo en la dirección x como se muestra en la figura 2.

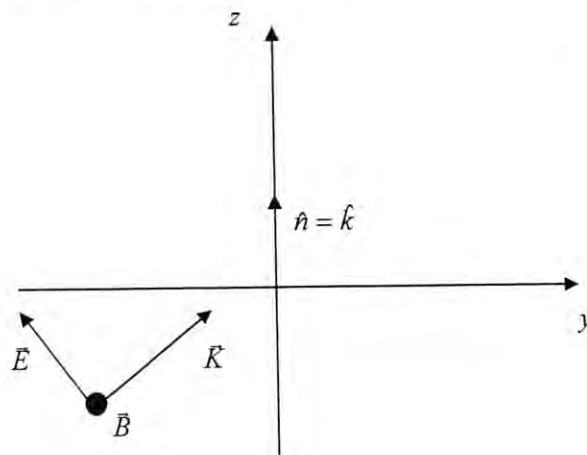


Figura 2. El campo magnético oscila en la dirección x , \vec{K} es el vector de onda de la onda plana electromagnética y \hat{n} es el vector normal a la superficie.

En este caso $B_y(y, z) = B_z(y, z) = 0$, $B_x(y, z) \neq 0$ y $E_x(y, z) = 0$,
 $E_y(y, z) \neq 0$ y $E_z(y, z) \neq 0$ de esta manera de la ecuación (1.2) tenemos

$$\hat{k} \times H_{1x} \hat{i} = \hat{k} \times H_{2x} \hat{i}$$

Desarrollando el producto cruz se tiene

$$H_{1x} = H_{2x} \quad (I.10)$$

Ahora como $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ de la ecuación (1.1) tenemos

$$\hat{k} \times (E_{1y} \hat{j} + E_{1z} \hat{k}) = \hat{k} \times (E_{2y} \hat{j} + E_{2z} \hat{k})$$

Resolviendo el producto cruz se tiene

$$E_{1y} = E_{2y} \quad (I.11)$$

Considerando que el comportamiento del campo en el tiempo es armónico de la ecuación (1.4) tenemos

$$i\omega E_y = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

Lo cual implica que la ecuación (I.11) se puede escribir como

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial H_{1x}}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial H_{2x}}{\partial z}$$

Así tenemos para polarización TM las condiciones de frontera siguientes

$$H_{1x} = H_{2x} \quad (I.12)$$

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial H_{1x}}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial H_{2x}}{\partial z} \quad (I.13)$$

Cabe aclarar que las otras dos condiciones en la frontera restante para ambas polarizaciones, correspondiente a la continuidad de la componente normal de los campos

no son necesarias ya que nos dan la misma información que las ecuaciones (I.8), (I.9) o (I.12), (I.13) para polarización TE o polarización TM según sea el caso, por tal razón se trabaja siempre con estas últimas ecuaciones.

APÉNDICE II

SERIES DE FOURIER

Una serie de Fourier puede usarse algunas veces para representar una función dentro de un intervalo. Si una función está definida sobre toda la recta real, puede ser representada por una serie de Fourier si es periódica. Si no es periódica, entonces no puede representarse por una "serie" continua de Fourier para todo x .

Una función es periódica si para algún valor positivo a , diferente de cero, se verifica que:

$$f(x) = f(x + a) \text{ para toda } x.$$

Para que una función periódica pueda representarse por una serie de Fourier, debe respetar las condiciones de Dirichlet:

- Que tenga un número finito de discontinuidades en el periodo a , en caso de ser discontinua.
- El valor medio en el periodo a , sea finito.
- Que tenga un número finito de máximos positivos y negativos.

Si se satisfacen estas condiciones, existe la serie de Fourier y puede escribirse en la forma trigonométrica como:

$$f(x) = b_0 + 2 \sum_n b_n \cos[(2\pi/a)nx] + c_n \operatorname{sen}[(2\pi/a)nx] .$$

Donde b_n y c_n son los coeficientes de la serie de Fourier de la función f .

Las series de Fourier se pueden expresar en notación compleja utilizando la identidad de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta .$$

donde i es la unidad imaginaria. De esta manera la serie de Fourier en notación compleja es

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp[+i(2\pi/a)nx] \quad .$$

donde

$$c_n = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \exp[-i(2\pi/a)nx] dx \quad .$$

son los coeficientes de la serie de Fourier de la función $f(x)$.

APÉNDICE III

ÁNGULO DE BREWSTER Y ÁNGULO CRÍTICO

Consideremos el caso de dos medios homogéneos como se muestra en la figura 2 del Apéndice I, la reflexión R en este caso está dada por la ecuación

$$R = \frac{\left| \varepsilon_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_y^2} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_y^2} \right|^2}{\left| \varepsilon_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_y^2} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_y^2} \right|^2}. \quad (1)$$

Donde $k_y = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_i$.

La condición de Brewster para polarización P se cumple cuando $R = 0$ así, podemos ver en ecuación (1) que esto ocurre solamente cuando el numerador es cero es decir:

$$\varepsilon_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_y^2} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_y^2} = 0. \quad (2)$$

Despejamos k_y , obtenemos

$$k_y = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}},$$

el cual es el k_y correspondiente al ángulo de Brewster en otras palabras

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_B = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}.$$

Haciendo un poco de álgebra obtenemos

$$\theta_B = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right).$$

El cual se le conoce como el **ángulo de Brewster**.

El ángulo crítico es aquel ángulo a partir del cual la reflexión es igual a uno, esto se da cuando una onda electromagnética incide de un medio de índice de refracción mayor a un medio de índice de refracción menor.

Considerando de nuevo el caso de dos medios homogéneos, de la ecuación (1) tenemos

$$R = \frac{\left| \varepsilon_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \text{sen}^2 \theta_i} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \text{sen}^2 \theta_i} \right|^2}{\left| \varepsilon_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \text{sen}^2 \theta_i} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \text{sen}^2 \theta_i} \right|^2} \quad (3)$$

Para que se cumpla la condición de que $R = 1$ es decir que no existe onda electromagnética transmitida al medio 2, de la ecuación (3) tenemos que esto solo puede ocurrir cuando

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \text{sen}^2 \theta_i} = 0 \quad (4)$$

De esta manera de la ecuación (4) tenemos

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \text{sen}^2 \theta_i \quad .$$

Haciendo un poco de álgebra llegamos a

$$\theta_i = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) = \text{sen}^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (5)$$

A este ángulo se le conoce como el **ángulo crítico**.

Para dar una ilustración tanto de la condición del ángulo de Brewster como la condición del ángulo crítico, en la figura 3 se gráfica la reflexión y la transmisión como función del ángulo de incidencia para un sistema compuesto por dos medios homogéneos con índices de refracción $n_1 = 1.5$ y $n_2 = 1$ respectivamente, la onda electromagnética incide por el medio cuyo índice de refracción es mayor, esto para lograr el fenómeno de reflexión total interna (RTI).

Por lo tanto, para esta situación se tiene que el ángulo crítico se da en $\theta_c = 41.8^\circ$ mientras que el ángulo de Brewster en $\theta_B = 33.7^\circ$.

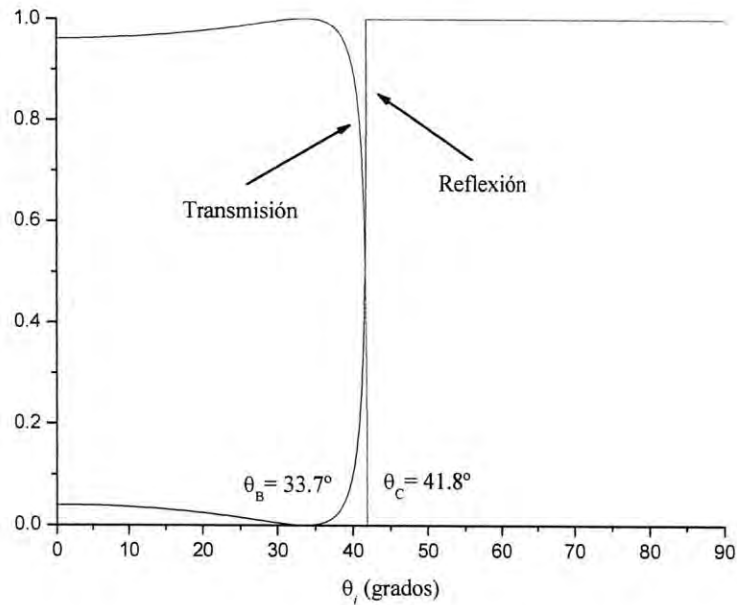


Figura 3. Gráfica de la transmisión y reflexión por dos medios homogéneos con índices de refracción $n_1 = 1.5$ y $n_2 = 1.0$ respectivamente en función del ángulo de incidencia. Muestra el fenómeno conocido como reflexión total interna.