

UNIVERSIDAD DE SONORA
CENTRO DE INVESTIGACION EN FISICA

Difracción de dos haces ópticos coherentes
interferidos en la región de Fresnel

TESIS QUE PARA OBTENER
EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
PRESENTA.

Diego Soto, Puebla

Julio 1997

502 151

T.M. 058

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

En el presente trabajo se estudia la difracción producida por una rendija finita cuando se ilumina con una franja brillante del patrón de interferencia de dos haces monocromáticos coherentes. La difracción se calcula empleando la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld en la Aproximación de Fresnel. Asimismo se analiza la forma en que se define la región de Fresnel. Se obtienen expresiones analíticas en el caso de que las ondas posean amplitud constante; cuando se considera distribución gaussiana de la amplitud las integrales de difracción se resuelven numéricamente. En los dos casos se obtiene que el patrón de difracción es casi una réplica de la franja brillante original.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a mi Director de Tesis, Dr. Miguel A. Cervantes M. por haberme sugerido y coordinado el presente trabajo. Asimismo a mi asesor, M.C. Martín R. Pedroza M., por su paciente colaboración en el desarrollo de los modelos computacionales utilizados a lo largo de todo el trabajo de tesis.

De igual forma agradezco a los Drs. Raúl García Llamas y Vladímir S. Terpugov sus valiosos comentarios en la revisión preliminar del presente escrito, y de manera especial al Dr. Serguei Sekerj-Zenkovitch por las fructíferas discusiones acerca de aspectos fundamentales de la difracción.

Por último, agradezco al CONACyT por el otorgamiento de una beca de maestría para la realización de mis estudios.

INDICE

Lista de Figuras	4
Introducción	5
Capítulo 1. Difracción de una onda monocromática	6
1.1 El Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhof	6
1.2 Difracción por una apertura en una pantalla opaca	8
1.2.1 La Fórmula de Difracción de Rayleigh-Sommerfeld	8
1.2.2 Aproximación de Fresnel a la Fórmula de Difracción de Rayleigh-Sommerfeld	12
Capítulo 2. Difracción de ondas interferidas	16
2.1 Interferencia de dos ondas planas	
2.2 Plano semiinfinito opaco como pantalla de difracción	18
2.3 Rendija finita iluminada con una franja brillante	20
2.3.1 Caso de amplitud constante	21
2.3.2 Caso distribución gaussiana de la amplitud	22
Capítulo 3. Simulación numérica	25
Conclusiones	35
Apéndice A. Solución de las integrales de difracción en la aproximación de Fresnel	36
Apéndice B. Difracción por un plano semiinfinito	40
Referencias	48

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Construcción para remover la discontinuidad de U' en P_0	7
Figura 1.2	Superficies de integración para calcular $U(P_0)$ con el Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhof	9
Figura 1.3	Iluminación de una abertura Σ por una fuente puntual P_2	11
Figura 1.4	Construcción para la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld	11
Figura 2.1	Diagrama esquemático para la interferencia de dos ondas planas	17
Figura 2.2	Selección de una franja brillante del patrón de interferencia	21
Figura 3.1	Representación esquemática donde se muestran los parámetros involucrados en la simulación numérica	26
Figura 3.2	Difracción para el caso de amplitud constante	28
Figura 3.3	Decaimiento del máximo de la intensidad. Caso amplitud constante.	29
Figura 3.4	Difracción para el caso de amplitud gaussiana.	30
Figura 3.5	Decaimiento del máximo de la intensidad. Caso amplitud gaussiana.	31
Figura 3.6	Propagación de haces sin interferir. Caso amplitud constante.	32
Figura 3.7	Propagación de haces sin interferir. Caso amplitud constante.	33
Figura B1	Difracción por un plano semiinfinito para una onda que incide con un ángulo θ	41
Figura B2	Difracción por un plano semiinfinito para una onda que incide con un ángulo θ (continuación)	42
Figura B3	Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas. El ángulo θ se mide respecto a la normal al plano	43
Figura B4	Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas (continuación)	44
Figura B5	Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas (continuación)	45
Figura B6	Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas. El ángulo θ se mide respecto a la normal al plano ($\theta=10^{-3}$ rad)	46
Figura B7	Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas. El ángulo θ se mide respecto a la normal al plano ($\theta=2 \times 10^{-3}$ rad)	47

INTRODUCCION

La difracción ha sido objeto de estudio desde el S. XVII cuando Grimaldi publicó un estudio acerca de la desviación de la luz de su trayectoria rectilínea al encontrarse con un objeto, observando franjas luminosas en la sombra producida por una barra iluminada por una lámpara. Este fenómeno es una manifestación del carácter ondulatorio de la luz y se puede describir de manera sencilla con el Principio de Huygens [1], en donde cada punto de un frente de onda que se propaga es una fuente de ondas secundarias, cuya combinación da lugar a la onda que viaja. La interferencia entre estas ondas secundarias origina un patrón de franjas cuya intensidad disminuye para puntos que se alejan de la dirección de propagación. Una de las formulaciones más útiles se debe a Kirchhoff, obtenida a partir de la ecuación de onda y el teorema de Green. Desarrollos posteriores condujeron a la teoría de difracción de Rayleigh-Sommerfeld [2, 3].

Los efectos de difracción se clasifican en dos tipos: Difracción de Fresnel y Difracción de Fraunhofer. Tradicionalmente para el primer caso se consideran puntos de observación muy cercanos al objeto o apertura que causan la difracción, en tanto que el segundo caso se refiere a puntos de observación lo suficientemente alejados del objeto o apertura como para que las dimensiones de éstos últimos sean pequeñas en comparación con la distancia objeto-punto de observación. Por otro lado, es posible establecer la diferencia entre las regiones de Fresnel y Fraunhofer en términos de la porción de la pantalla de observación en donde se desea calcular la difracción [4]. La teoría de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld, así como las consideraciones acerca de las regiones de Fresnel y Fraunhofer se tratan en el primer capítulo.

En el segundo capítulo se aborda el problema de la difracción que resulta de iluminar un plano semiinfinito y una rendija con un campo compuesto por la interferencia de dos ondas planas monocromáticas. En primer lugar se estudia el caso de ondas cuya amplitud es constante, lo cual es un tanto idealizado. En condiciones de laboratorio donde se emplean láseres, las ondas poseen distribución gaussiana de la amplitud, por lo que también se considera esta situación. El cálculo de los patrones de difracción para los dos casos mencionados se llevó a cabo por métodos numéricos. Estos resultados se presentan gráficamente en el tercer capítulo.

1. DIFRACCIÓN DE UNA ONDA MONOCROMÁTICA

En la teoría escalar de la difracción la descripción matemática parte del supuesto de que toda la información necesaria para calcular la intensidad de la luz en una región del espacio se encuentra contenida en la función de onda escalar $V(x, y, z)$, misma que satisface la ecuación de Helmholtz. Una descripción rigurosa de la difracción debe tomar en cuenta el carácter vectorial de los campos electromagnéticos; ahora bien, al considerar campos ópticos las frecuencias involucradas son muy elevadas, debiéndose tomar promedios de los valores vectoriales en intervalos de tiempo grandes comparados con los períodos ópticos. De esta manera, la intensidad luminosa es proporcional a la cantidad $|V(x, y, z)|^2$ [3].

1.1. El Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff

Consideremos una onda escalar monocromática $V(x, y, z) = U(x, y, z) \exp[-i\omega t]$ cuya parte espacial satisface la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0 \quad (1)$$

donde $k = \frac{\omega}{c}$. La función $U(x, y, z)$ se supone continuamente diferenciable hasta segundo orden. Sean un volumen V limitado por una superficie S , un punto P_0 en el interior de V , y una función cualquiera U' con los mismos requisitos de continuidad que U . Aplicando el Teorema de Green para estas funciones se obtiene:

$$\int_V (U' \nabla^2 U - U \nabla^2 U') dV = \int_S \left(U' \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial U'}{\partial n} \right) dS \quad (2)$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de un vector unitario normal hacia adentro de la superficie S .

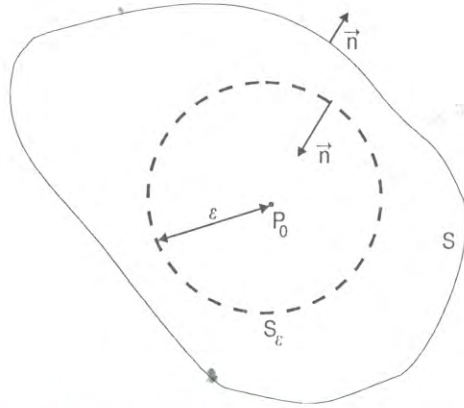


Fig. 1.1 Construcción para remover la discontinuidad de U' en P_0 .

Si la función U' satisface la ecuación de Helmholtz se tiene que el integrando en el lado izquierdo de (2) es cero en cualquier punto de V , con lo que:

$$\int_S \left(U' \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial U'}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (3)$$

Ahora supongamos que $U'(x, y, z) = \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}}$, donde r_{01} es la distancia del punto P_0 al punto (x, y, z) . Para $r_{01} = 0$ la función U' no es continua, lo que contradice la suposición de continuidad y diferenciabilidad en cualquier punto al interior de V ; por tanto, se debe remover el punto P_0 del dominio de integración. Para tal efecto se construye alrededor de P_0 una esfera S' de radio ϵ arbitrariamente pequeño y se integra en la región comprendida entre la parte exterior de S' y la parte interior de S . Con esto, la ecuación (3) se transforma en:

$$\int_{S+S'} \left[\left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \right] dS = 0 \quad (4)$$

es decir:

$$\begin{aligned} \int_S \left[\left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \right] dS &= \\ - \int_{S'} \left[\left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \right] dS' &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{S'} \left[\left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \right] dS' = \\
& \int_{\Omega} \left[U \frac{\exp[ik \epsilon]}{\epsilon} \left(ik - \frac{1}{\epsilon} \right) - \frac{\exp[ik \epsilon]}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial r_{01}} \right] \epsilon^2 d\Omega
\end{aligned}$$

donde $d\Omega$ representa un elemento de ángulo sólido. En el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ la integral sobre Ω da como resultado $4\pi U(P_0)$, con lo que se llega a:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \right] dS \quad (6)$$

resultado conocido como *Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff*.

1.2. Difracción por una apertura en una pantalla opaca

1.2.1. La fórmula de Difracción de Rayleigh-Sommerfeld

Consideremos ahora que la onda escalar $V(x, y, z) = U(x, y, z) \exp[-i\omega t]$ procede de una fuente puntual P_2 y que se propaga a través de una abertura finita Σ practicada en una pantalla opaca (i.e. con transmitancia igual a cero) plana, y un punto P_0 detrás de la pantalla en donde se desea determinar la amplitud de la onda luminosa. Las dimensiones de la abertura Σ son grandes en comparación con la longitud de onda pero pequeñas en relación con las distancias desde la pantalla a los puntos P_2 y P_0 . Para el cálculo de la amplitud en P_0 se construye una superficie cerrada formada por una región plana S_1 que coincide con la pantalla y una porción S_2 de una esfera de radio R cuyo centro se encuentra en P_0 , como se muestra en la Fig. 1.2.

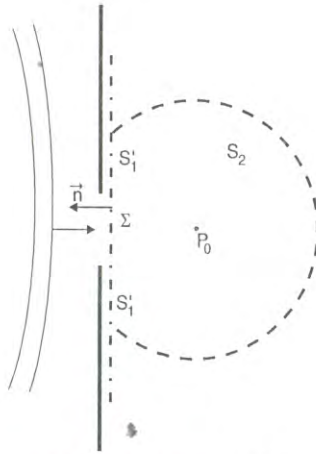


Fig. 1.2 Superficies de integración para calcular $U(P_0)$ con el Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff.

De acuerdo con el Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff el campo luminoso U en el punto P_0 es descrito por la ecuación (6), donde $S_1 + S_2$ es la superficie de integración. Un problema es que no se conocen exactamente los valores para $\frac{\partial U}{\partial n}$ y U sobre tal superficie, lo que dificulta la resolución de la integral. Sin embargo, se puede suponer que los valores de U y $\frac{\partial U}{\partial n}$ en cualquier parte de la abertura Σ , excepto en los bordes, no difieren substancialmente de los que se obtienen en ausencia de la pantalla, y que en los puntos sobre la porción S_1 que se encuentran en la sombra geométrica de la pantalla se anulan tanto U como $\frac{\partial U}{\partial n}$. Estos requisitos se conocen como las *Condiciones de Frontera de Kirchhoff*.

Resta ahora el problema de determinar la contribución debida a la superficie S_2 . Para un valor grande de R las funciones U y U' decrecen como $\frac{1}{R}$, razón por la cual su contribución a la integral es despreciable. Sin embargo, conforme R crece la superficie S_2 aumenta como R^2 , por lo que tal argumento es insuficiente para anular la integral sobre S_2 . Esto se puede lograr suponiendo que el campo de radiación existe a partir de un tiempo inicial t_0 , aunque esto es incompatible con la suposición de ondas monocromáticas que, por definición, existen en todo tiempo. Así, para cualquier tiempo $t > t_0$ la radiación se encuentra limitada a una región de radio $c(t - t_0)$, con c la velocidad de la luz, por lo que si R es lo suficientemente grande en el instante en que se calcula el campo en el punto P_0 la contribución sobre S_2 es cero. En S_2 se tiene $U' = \frac{\exp[ikR]}{R}$ y $\frac{\partial U'}{\partial n} =$

$\left(ik - \frac{1}{R}\right) \frac{\exp[ikR]}{R} \cos[n, R] \cong ik \frac{\exp[ikR]}{R}$, con lo que:

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \left[\frac{\exp[ikR]}{R} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp[ikR]}{R} \right) \right] dS \\ &= \int_{\Omega} \frac{\exp[ikR]}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) R^2 d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido subtendido por S_2 en P_0 . La cantidad $\left| R \frac{\exp[ikR]}{R} \right|$ está uniformemente acotada sobre S_2 , por lo que en el límite $R \rightarrow \infty$ la integral se anula si U satisface la ecuación:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) = 0 \quad (8)$$

conocida como *Condición de Radiación de Sommerfeld*.

Con el valor de la integral sobre S_2 igual a cero, el campo en el punto P_0 , dado por la ecuación (6), queda expresado como:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left[\left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \right] dS \quad (9)$$

Considerando que la distancia r_{01} desde la apertura al punto de observación por lo general es de varias longitudes de onda, y con $k \gg \frac{1}{r_{01}}$ (es decir, $r_{01} \gg \lambda$), se tiene que $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \right) \cong ik \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \cos[n, r_{01}]$. Substituyendo esto en la ec. (9) se obtiene:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \cos[n, r_{01}] \right] dS \quad (10)$$

Ahora la apertura se ilumina con una onda esférica $U(P_1) = A \frac{\exp[ik r_{21}]}{r_{21}}$ procedente del punto P_2 ; r_{21} es la distancia de P_2 al punto P_1 en la apertura, como se muestra en la Fig. 1.3.

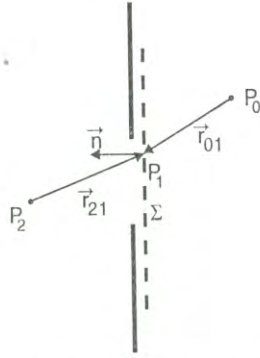


Fig. 1.3 Iluminación de la abertura Σ por una fuente puntual P_2 .

Como se ha supuesto, r_{21} es del orden de muchas longitudes de onda, con lo que la ecuación (10) queda como:

$$U(P_0) = \frac{A}{i 2 \lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r_{21} + r_{01})]}{r_{21} r_{01}} (\cos[n, r_{01}] - \cos[n, r_{21}]) dS \quad (11)$$

que es la *Fórmula de Difracción de Fresnel-Kirchhoff*. Aún cuando existen algunas inconsistencias internas en esta formulación, se ha encontrado una buena correspondencia entre teoría y experimento. Dichas inconsistencias se relacionan con el resultado de que si una solución a la ecuación de onda en tres dimensiones y su derivada normal se anulan en un segmento finito de superficie, entonces su valor es cero en todo el espacio[5, 6], lo que contradice las Condiciones de Frontera de Kirchhoff. Este problema se puede evitar substituyendo la onda esférica en la ecuación (9) con una función de Green G para la cual su valor ó su derivada normal se anulen en la superficie de integración S_1 (i.e. se construye una función de Green de manera que se cumplan las condiciones de Dirichlet), que corresponde a una porción de una pantalla plana. Considerando un punto \tilde{P}_0 que sea imagen especular del punto P_0 , como se muestra en la siguiente figura:

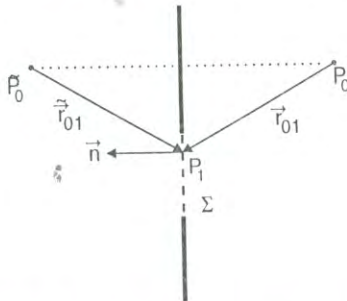


Fig. 1.4 Construcción para la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld.

la función G se puede escribir como

$$G(P_1) = \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} - \frac{\exp[ik \widetilde{r}_{01}]}{\widetilde{r}_{01}} \quad (12)$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \cos[n, r_{01}] - \left(ik - \frac{1}{\widetilde{r}_{01}} \right) \frac{\exp[ik \widetilde{r}_{01}]}{\widetilde{r}_{01}} \cos[n, \widetilde{r}_{01}] \quad (13)$$

donde \widetilde{r}_{01} es la distancia de \widetilde{P}_0 a P_1 . En el punto P_1 $r_{01} = \widetilde{r}_{01}$ y $\cos[n, r_{01}] = -\cos[n, \widetilde{r}_{01}]$, con lo que en la superficie S_1 la función $G_-(P_1)$ es cero, no así su derivada.

Substituyendo (12) en la ec. (9):

$$\begin{aligned} U(P_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left[G(P_1) \frac{\partial U(P_1)}{\partial n} - U(P_1) \frac{\partial}{\partial n} G(P_1) \right] dS \\ U(P_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} 2 \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \cos[n, r_{01}] U(P_1) dS \\ &\cong \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} -i 2k \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \cos[n, r_{01}] dS \\ &= \frac{1}{i \lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \cos[n, r_{01}] U(P_1) dS' \end{aligned} \quad (15)$$

Si se toma una onda esférica que procede de P_2 de manera que $U(P_1) = A \frac{\exp[ik r_{21}]}{r_{21}}$, la ecuación anterior se convierte en:

$$U(P_0) = \frac{A}{i \lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp[ik (r_{21} + r_{01})]}{r_{21} r_{01}} \cos[n, r_{01}] dS \quad (16)$$

que se conoce, lo mismo que la ec. (15), como la *Fórmula de Difracción de Rayleigh-Sommerfeld*.

1.2.2. Aproximación de Fresnel a la Fórmula de Difracción de Rayleigh-Sommerfeld

Ahora, se hace coincidir un sistema coordenado rectangular (x_1, y_1) con la pantalla y un sistema (x_0, y_0) con la región de observación (donde se encuentra el punto

P_0) que se supone es plana y paralela a la pantalla, separadas por una distancia z . Cuando las dimensiones de la abertura Σ son pequeñas comparadas con la distancia z y en la pantalla de observación se consideran regiones cercanas al eje z , es posible hacer las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} r_{01} &= \sqrt{z^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \\ &= z \sqrt{1 + \left(\frac{x_0 - x_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - y_1}{z}\right)^2} \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} &\cong z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 - y_1}{z}\right)^2 \right] \\ \cos[n, r_{01}] &\cong 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{i\lambda} \frac{\exp[ik r_{01}]}{r_{01}} \cong \frac{1}{i\lambda z} \exp[ik r_{01}] \quad (17b)$$

donde se ha hecho uso del Teorema del Binomio para expandir el radical. Estas aproximaciones permiten reescribir la fórmula de Rayleigh-Sommerfeld como:

$$U(P_0) = \frac{\exp[ik z]}{i\lambda z} \int_{\Sigma} \exp\left[\frac{ik}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]\right] U(P_1) dS \quad (18)$$

conocida como la *Aproximación de Fresnel*.

Cuando en la expansión del binomio se conservan términos lineales solamente, se habla de la región de Fraunhofer. Formalmente, los términos de orden dos y mayores solamente desaparecen cuando tanto la fuente como la pantalla de observación se encuentran infinitamente alejadas de la pantalla de difracción [3, 7]. En términos prácticos se establecen condiciones sobre la distancia de la fuente a la pantalla de difracción (que podemos llamar z') y la distancia del plano de observación a dicha pantalla (es decir, z) de manera que los términos de orden igual o mayor a dos no contribuyan de manera apreciable a la integral de difracción. Una forma que adoptan estas condiciones es [3]:

$$|z'| \gg \frac{(x_1^2 + y_1^2)_{\max}}{\lambda}, \quad |z| \gg \frac{(x_1^2 + y_1^2)_{\max}}{\lambda}$$

donde (x_1, y_1) es un punto en la apertura de la pantalla difractora. Lo anterior significa que las dimensiones de la apertura son pequeñas comparadas con las distancias z' y z .

Las ecuaciones anteriores establecen el límite entre las regiones de Fresnel y Fraunhofer en términos de las distancias z , z' y las dimensiones de la apertura, sin hacer referencia a la extensión de la región de observación (el lugar geométrico de los puntos (x_0, y_0)). En la aproximación de Fresnel se consideran regiones cercanas al eje de propagación z , en las que $\cos [n, r_{01}] \cong 1$, tomando una expansión binomial del radical. Reexaminando esta expansión:

$$\begin{aligned}
 r_{01} &= \sqrt{z^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \\
 &= z \sqrt{1 - 2 \frac{x_0 x_1 + y_0 y_1}{z^2} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{z^2}} \\
 r_{01} &\simeq z \left[1 + \frac{1}{2} \left(-2 \frac{x_0 x_1 + y_0 y_1}{z^2} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{z^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{z^4} (x_0 x_1 + y_0 y_1)^2 - \frac{4}{z^4} (x_0 x_1 + y_0 y_1) (x_1^2 + y_1^2) + \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{z^4} \right) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

es decir:

$$r_{01} = z \left[1 - \frac{x_0 x_1 + y_0 y_1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{x_1^2 + y_1^2}{z^2} - \frac{1}{2z^4} (x_0^2 x_1^2 + 2x_0 x_1 y_0 y_1 + y_0^2 y_1^2) + \frac{1}{2z^4} (x_0 x_1^3 + y_0 y_1 x_1^2 + x_0 x_1 y_1^2 + y_0 y_1^3) - \frac{(x_1^4 + 2x_1^2 y_1^2 + y_1^4)}{8z^4} + \dots \right]$$

Considerando los cuatro primeros términos de la expansión anterior, obtenemos:

$$r_{01} = z \left[1 - \frac{x_0 x_1 + y_0 y_1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{x_1^2 + y_1^2}{z^2} - \frac{1}{2z^4} (x_0^2 x_1^2 + 2x_0 x_1 y_0 y_1 + y_0^2 y_1^2) + \dots \right]$$

Si ahora sólo tomamos en cuenta variaciones en las coordenadas x_0 y x_1 (es decir, $y_1 = 0$), la expresión anterior se reduce a:

$$r_{01x} = z \left[1 - \frac{x_0 x_1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{z^2} + -\frac{1}{2z^4} (x_0^2 x_1^2) + \dots \right] \quad (19)$$

En la región de Fraunhofer la principal contribución proviene de los términos lineales en x_1 en la expresión anterior. Así, al menos se debe satisfacer la condición:

$$\left| \frac{x_0 x_1}{z^2} \right| > \left| \frac{x_1^2}{2z^2} \right|$$

lo que implica:

$$\begin{aligned} x_0 x_1 &> \frac{1}{2} x_1^2 \\ &\text{ó} \\ x_0 &> \frac{1}{2} x_1 \end{aligned} \quad (20)$$

Recordemos que $0 \leq |x_1| \leq a$, donde a es la máxima dimensión lineal de la apertura en la coordenada x . Lo mismo podemos acerca de la coordenada y . Esto significa que en el plano de observación la Región de Fraunhofer comprende todos los puntos ubicados *fuera* de la proyección de la apertura sobre este plano.

Para la región de Fresnel se toman en cuenta los términos de segundo orden, por lo que ya no es válida la ec. 20. Sin embargo, puesto que la región de Fraunhofer excluye la proyección de la apertura en la pantalla de observación, para la región de Fresnel dicha proyección debe incluirse. Es decir, en el plano de observación la totalidad de los puntos sobre el mismo corresponde a la región de Fresnel, en tanto que para la región de Fraunhofer se deben excluir aquellos situados en la proyección de la apertura [4].

2. DIFRACCIÓN DE DOS ONDAS INTERFERIDAS

Usualmente en los problemas de difracción tratados en la literatura se consideran campos incidentes sobre la pantalla correspondientes a una sola onda luminosa; más aún, el tratamiento se limita a los casos de incidencia normal. Al abordar el problema de la difracción por un plano semiinfinito de un campo resultante de la interferencia de dos ondas planas se encuentra una dependencia entre la difracción y la interferencia [8]. El siguiente paso en esta dirección es considerar la difracción por una rendija infinita, problema tratado en este capítulo. El análisis se restringe al caso en el que la rendija se ilumina con una franja brillante del patrón de interferencia de dos frentes planos monocromáticos coherentes, empleando distribuciones de amplitud constantes y gaussianas. El valor del campo difractado se calcula mediante la formulación de Rayleigh-Sommerfeld en la Aproximación de Fresnel.

El requerimiento de que las fuentes sean coherentes espacial y temporalmente es debido a que la interferencia producida por fuentes parcialmente coherentes presenta las siguientes características:

a) *Coherencia Espacial*. Se relaciona con la extensión finita de las fuentes en el espacio (fuentes extendidas). Una medida de la coherencia es el coeficiente γ , mismo que depende de la correlación entre los campos en dos puntos cualesquiera de un frente de onda y las intensidades de los mismos [9]. Cuando $|\gamma| = 1$ se dice que la superposición es coherente, y la visibilidad de las franjas es máxima; para el caso $0 < |\gamma| < 1$ se tiene superposición parcialmente coherente, con una disminución de la visibilidad, misma que se anula (desaparecen las franjas de interferencia) si $|\gamma| = 0$ [3].

b) *Coherencia Temporal*. La coherencia temporal está relacionada con un ancho de banda espectral finito de la fuente, es decir, con la monocromaticidad de la misma, y depende de la correlación entre los campos en un mismo punto de un frente de onda para diferentes tiempos [9].

Los conceptos anteriores permiten definir la coherencia como el grado de correlación existente entre dos haces. Si entre dos ondas existe una diferencia de fase

constante, podemos afirmar que las mismas son coherentes [1]. En el problema que nos ocupa los haces que se hacen interferir son coherentes pues resultan de un haz que se hace pasar a través de un divisor de amplitud, por lo que se observa un patrón de interferencia cuando se recombinan[10].

En términos generales, al considerar simultáneamente los efectos de interferencia y difracción, aún en un sistema óptico sencillo, se obtiene un patrón de intensidad de difracción-interferencia que posee grados adicionales de libertad, entre ellos el balance ajustable de los haces, para modificar el patrón de difracción.

Como se estableció[8], el patrón de difracción de dos ondas interferidas se determina principalmente por el ángulo de interferencia θ y la posición del patrón de interferencia con respecto al borde de la pantalla de difracción. Se encuentra que el patrón de difracción es diferente dependiendo de si un máximo o un mínimo del campo interferido incide sobre la pantalla difractora.

2.1. Interferencia de dos ondas planas

En la Fig. 2.1 se ilustran dos frentes de onda coherentes de luz monocromática que inciden en la pantalla de difracción de manera que sus vectores k forman ángulos $+\theta$ and $-\theta$ respecto a la normal a la pantalla.

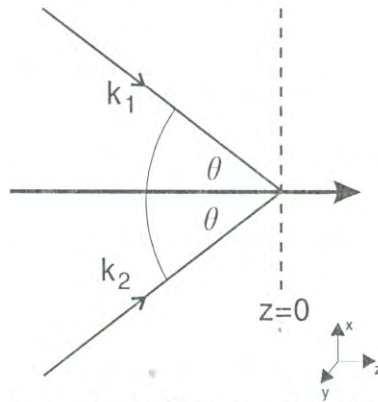


Fig. 2.1 Diagrama esquemático para la interferencia de dos ondas planas.

Para la onda que incide con un ángulo $+\theta$, tenemos:

$$u_1(r, t) = A_1 \exp \{i \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}\} \exp \{-i\omega t\} \text{ con } \mathbf{k}_1 = (k_x, 0, k_z), k_x = k \sin \theta, k_z = k \cos \theta$$

mientras que para la onda incidente con un ángulo $-\theta$:

$u_2(r, t) = A_2 \exp \{i \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}\} \exp \{-i\omega t\}$ donde $\mathbf{k}_2 = (-k_x, 0, k_z)$, $k_x = k \sin \theta$, $k_z = k \cos \theta$

El campo total U_T es: $U_T = u_1 + u_2$. Como $A_1 = A_2 = A$, escribimos:

$$\begin{aligned} U_T &= A [\exp \{i \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}\} \exp \{-i\omega t\} + \exp \{i \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}\} \exp \{-i\omega t\}] \\ &= 2A \cos \beta \exp \{ikz \cos \theta\} \exp \{-i\omega t\} \end{aligned}$$

donde $\beta = kx \sin \theta$. La intensidad está dada como $I = U_T^2 = 4A^2 \cos^2 \beta$. Cuando $x = 0$, es decir, en el origen, el valor de la intensidad es $I = 4A^2$. Como procedimiento común, consideramos ondas con $A = 1$, con lo que en magnitud $I = 4$.

Ahora consideramos frentes con distribución gaussiana de la amplitud. La relevancia de tratar este tipo de haces se examinará con más detalle en la sección 2.3. Por el momento es suficiente con establecer que en el punto donde se hacen coincidir los haces (para valores pequeños del ángulo de interferencia, i.e. $\sin \theta \approx \theta$) el valor del campo total es

$$U_T = 2 \exp \left\{ -\frac{x_c^2}{2w^2} \right\}$$

en donde x_c es la posición del centro del haz y w la cintura del mismo. Tomando $x_c = 0.5 \times 10^{-2}$ y $w = 0.5 \times 10^{-2}$ [8], se obtiene $U_T = 2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \right\} = 2/\sqrt{e}$. Por tanto, la intensidad normalizada en el origen es $I = 4/e$.

Los valores obtenidos anteriormente se utilizarán como factores de normalización en la presentación de los patrones de difracción con el objeto de observar con mayor claridad el comportamiento de tales patrones conforme se toman distintos valores de la distancia z .

2.2. Plano semiinfinito opaco como pantalla de difracción

En el apartado precedente se ha tratado la interferencia de dos ondas que coinciden en el plano de difracción. Ahora se tratará el problema de la difracción de tales haces que interfieren. Se considera la difracción para cada haz, por separado, utilizando después el principio de superposición para sumar las expresiones obtenidas.

Colocamos un sistema coordenado $S_1(x_1, y_1)$ en el plano de difracción. El plano de observación se ubica a una distancia z de la pantalla de difracción, con

un sistema coordenado $S_0(x_0, y_0)$ cuyos ejes son paralelos a los ejes del sistema S_1 .

El campo difractado en el punto de observación (x_0, y_0, z) se calcula por la fórmula (18) del capítulo 1:

$$U(P_0) = \frac{\exp[ikz]}{i\lambda z} \int_{\Sigma} \exp\left[\frac{ik}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]\right] U(P_1) dS \quad (2.1)$$

que se puede escribir como:

$$\begin{aligned} U(x_0, y_0) &= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} U(x_1, y_1) \exp\left[i\frac{k}{2z} ((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2)\right] dx_1 dy_1 \\ &= e^{i\omega t} \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{k}{2z} (y_0 - y_1)^2\right] dy_1 \\ \times \int_0^{\infty} \exp(-ik \sin \theta \cdot x_1) \exp\left[i\frac{k}{2z} (x_0 - x_1)^2\right] dx_1 \end{array} \right\} \quad (2.2) \end{aligned}$$

Resolviendo primero la integral para y_1 , se encuentra que su valor es igual a $\sqrt{\frac{\pi z}{k}} (1 + i)$, como se demuestra en la primera parte del Apéndice A. Ahora, considerando la integral para x_1 escribimos:

$$I_x = \int_0^{\infty} \exp(-ik \sin \theta \cdot x_1) \exp\left[i\frac{k}{2z} (x_0 - x_1)^2\right] dx_1$$

Si definimos: $\Theta(x) = \frac{1}{2z} (x_0 - x_1)^2 - x_1 \sin \theta$, y $\bar{x} = x_0 - x_1$, entonces podemos escribir:

$$\Theta(\bar{x}) = \frac{1}{2z} \bar{x}^2 - (x_0 - \bar{x}) \sin \theta$$

y

$$I_x = (-1) \int_{x_0}^{\infty} \exp(ik \cdot \Theta(\bar{x})) d\bar{x}$$

Ahora consideremos el frente de onda que incide con un ángulo $-\theta$. Tomando la misma longitud de onda y un ángulo de época α , podemos escribir:

$$U'(x_0, y_0) = -\sqrt{\frac{\pi z}{k}} (1 + i) e^{i(\omega t + \alpha)} \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{x_0}^{\infty} \exp(ik \cdot \Theta'(\bar{x})) d\bar{x}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Theta'(\bar{x}) &= \frac{1}{2z} (x_0 - x_1)^2 + x \sin \theta \\
&= \frac{1}{2z} \bar{x}^2 + (\bar{x} - x_0) \sin \theta
\end{aligned}$$

De nuevo considerando solamente variaciones en el eje x_1 tenemos, de manera similar:

$$I'_x = (-1) e^{i\alpha} \int_{x_0}^{\infty} \exp(ik \cdot \Theta'(\bar{x})) d\bar{x}$$

Por el principio de superposición, podemos escribir el campo total en el punto de observación como:

$$\begin{aligned}
U_{TOT}(x_0, y_0) &= \sqrt{\frac{\pi z}{k}} (1 + i) e^{i\omega t} \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \times \left[\int_{x_0}^{\infty} \exp(ik \cdot \Theta(\bar{x})) d\bar{x} + \right. \\
&\quad \left. e^{i\alpha} \int_{x_0}^{\infty} \exp(ik \cdot \Theta'(\bar{x})) d\bar{x} \right]
\end{aligned}$$

Al resolver las integrales anteriores obtenemos:

$$U_{TOT}(x_0, y_0) = \Xi(\theta) \{1 - \text{erf}[\zeta(\theta)]\} + \Xi(-\theta) \{1 - \text{erf}[\zeta(-\theta)]\} e^{i\alpha} \quad (2.3)$$

donde:

$$\Xi(\theta) = e^{i(\omega t + kz)} \exp \left[ik \left(x_0 \sin \theta - \frac{z}{2} \sin^2 \theta \right) \right] \quad (2.4)$$

$$\zeta(\theta) = \frac{1 - i}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} (x_0 + z \sin \theta) \quad (2.5)$$

2.3. Rendija finita iluminada con una franja brillante

En la sección precedente se consideró que las ondas que interfieren representan frentes planos con distribución constante de la amplitud, lo que constituye la situación más sencilla de analizar el problema, aunque no es realista; en condiciones de laboratorio es común el empleo de haces producidos por láseres, con lo que la distribución de intensidad en los frentes de onda es de tipo gaussiano.

Ahora se tratarán dos situaciones: una idealizada considerando frentes de onda de amplitud constante, y otra más real suponiendo distribución gaussiana de la amplitud. En ambos casos se considera que los frentes de onda son planos.

En la figura 2.2 se muestra el esquema de dos haces que interfieren en la pantalla de difracción. La apertura consiste de una rendija de anchura a en el eje x e infinita sobre el eje y . En los bordes de la rendija se encuentran dos ceros consecutivos del patrón de interferencia; es decir, una franja brillante coincide con la apertura. Esto se cumple siempre que se satisfaga la relación:

$$\theta \approx \frac{\lambda}{2a}$$

donde θ es el ángulo mostrado en la figura 2.1. Aquí se ha supuesto que θ es tan pequeño que es posible tomar las aproximaciones $\sin \theta = \theta$ y $\cos \theta = 1$.

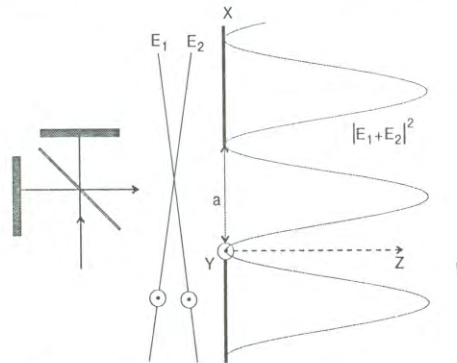


Fig. 2.2. Selección de una franja brillante del patrón de interferencia.

2.3.1. Caso de amplitud constante

Ahora colocamos un sistema de coordenadas $S_1(x_1, y_1)$ en el centro de la rendija, cuyos bordes son paralelos al eje y . En esta situación la integral para x en (2) se debe modificar cambiando los límites de $(0, \infty)$ a $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ solamente, ya que en la coordenada y la región es no acotada.

Con estas suposiciones se realiza un análisis similar al efectuado en el caso de la pantalla semiinfinita, obteniéndose la expresión para el campo total:

$$U_{TOT}(x_0, y_0) = -i \frac{1}{4} (1+i)^2 \left[\begin{array}{l} \Xi(\theta) \{ \text{erf}[V_2(\theta)] - \text{erf}[V_1(\theta)] \} + \\ \Xi(-\theta) \{ \text{erf}[V_2(-\theta)] - \text{erf}[V_1(-\theta)] \} e^{i\alpha} \end{array} \right] \quad (2.6)$$

donde:

$$V_1(\theta) = \frac{i-1}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} \left[\frac{a}{2} + x_0 - z \sin \theta \right] \quad (2.7)$$

$$V_2(\theta) = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} \left[\frac{a}{2} - x_0 + z \sin \theta \right] \quad (2.8)$$

Los detalles en la obtención de este resultado se pueden encontrar en el apéndice A

2.3.2. Caso distribución gaussiana de la amplitud

Para frentes con distribución gaussiana de la amplitud el campo se supone representado por[8]:

$$U_1(\mathbf{r}) \exp\{-i\omega t\} = A \frac{w_0}{w(z)} \exp\left\{-\left((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\right) \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)}\right)\right\} \\ \times \exp\{i(kz + \eta(z))\} \exp\{-i\omega t\}.$$

donde A es la amplitud, que se considera constante, y $w(z)$ es la semianchura, que depende de z , del haz, definida como [11]:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2 n} \right)^2 \right] = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right],$$

y w_0 es la mínima cintura del haz, medida en el plano $z = 0$. El centro del haz se ubica en el punto (x_1, y_1) en el plano (x, y) , en donde la semianchura se supone la misma tanto en las dirección x como en la dirección y .

Los haces gaussianos se caracterizan por frentes de onda con radio de curvatura finito, excepto en la cintura donde el radio se vuelve infinito. El radio de curvatura $R(z)$ de un frente casi esférico en el punto z es:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right], \quad z_0 \equiv \frac{\pi w_0^2 n}{\lambda}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} n.$$

La fase es: $\eta(z) = \arctan(z/z_0)$.

Para una estimación del radio de curvatura $R(z)$ en una situación típica de laboratorio se pueden utilizar los siguientes valores: $\lambda = 594nm$, $w_0 = 10^{-2}m$, $z = 4m$, con lo que $k = 2\pi/\lambda \simeq 1.057 \cdot 10^7$, $z_0 = 528$ metros.

De esta forma:

$$w^2(4) = w_0^2 \left[1 + (4/z_0)^2 \right] \simeq w_0^2 (1.0000574) \simeq w_0^2$$

y:

$$R(4) = 4 \left[1 + (z_0/z)^2 \right] \simeq 6.97 \cdot 10^4 m.$$

Considerando que la expresión anterior se debe emplear en la integral de difracción de Rayleigh-Sommerfeld, encontramos el valor:

$$ikr^2/2R(1) \simeq i18.9r^2 \simeq i7.56 \cdot 10^{-3} < i10^{-2}$$

en donde se ha tomado el radio del área de la mancha luminosa del orden $r \leq 2w_0 = 2 \cdot 10^{-2}m$. Además, nótese que el valor mínimo del radio de curvatura de un haz gaussiano es $R_{\min} = R(z_0) = 2z_0$, el cual se localiza a una distancia z_0 de la cintura del haz. Esta distancia es muy grande para las situaciones típicas de laboratorio. Así, las estimaciones muestran que para los experimentos de interferencia y difracción bajo condiciones de laboratorio se puede despreciar el término que contiene el radio de curvatura. En los cálculos subsiguientes se supondrá que la curvatura de los haces es despreciable, y que los frentes de onda son planos.¹ Ahora bien, en nuestro problema las condiciones anteriores se cumplen siempre que coincidan las cinturas de los haces en la pantalla de difracción o que dichos haces estén *colimados*; bajo estas condiciones el patrón de interferencia de los campos incidentes depende principalmente del ángulo de interferencia de los frentes de onda y no de su curvatura.

Consideremos, entonces, dos frentes de onda planos con distribución gaussiana de la amplitud que coinciden en la pantalla difractora, misma que tiene un sistema coordenado $S_1(x_1, y_1)$. Un haz que se propaga a lo largo del eje z_a del sistema coordenado $S_a(x_a, y_a, z_a)$ se describe aproximadamente por:

$$u_1(x_a, y_a) = A_a \exp \left[-\frac{(x_a - x_{ac})^2 + (y_a - y_{ac})^2}{2w_a^2(z_a)} \right] \exp[ikz_a] \exp[-i\omega t]$$

donde A_a es la amplitud y $w_a(z_a)$ es la semianchura del haz, misma que depende de z . El centro del haz se coloca en el punto (x_{ac}, y_{ac}) . Otro haz gaussiano con

¹Esta suposición se basa en la hipótesis de que la distribución de amplitud afecta los patrones de difracción tanto como el considerar frentes de onda no planos.

la misma magnitud de k y frecuencia ω que se propaga en el eje z_b del sistema coordinado $S_b(x_b, y_b, z_b)$ con un ángulo de época α se describe por:

$$u_b(x_b, y_b) = A_b \exp \left[-\frac{(x_b - x_{bc})^2 + (y_b - y_{bc})^2}{2w_b^2(z_b)} \right] \exp[ikz_b] \exp[-i\omega t] \exp[i\alpha]$$

Ahora se hacen coincidir los orígenes de los sistemas coordinados, y los ejes y_a y y_b coinciden con el eje y_1 de la pantalla de difracción. Con esto:

$$\begin{aligned} x_a &= x_1 \cos \theta_a - z_1 \sin \theta_a \\ x_b &= x_1 \cos \theta_b - z_1 \sin \theta_b \end{aligned}$$

donde θ_a es el ángulo entre los ejes z_1 y z_a . θ_b es el ángulo entre los ejes z_1 y z_b . Para el caso que nos ocupa tomamos $\theta_a = \theta_b = \theta$. Considerando variación lenta de la amplitud tenemos:

$$x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta \cong z_1 \cos \theta$$

$$w_a(z_1 = 0) \cong w_b(z_1 = 0) = w = \text{constante}$$

Puesto que los centros de los haces coinciden en la pantalla:

$$y_{ac} = y_{bc} = 0$$

$$x_{ac} = x_{2c} = x_{1c} \cos \theta$$

Con estas suposiciones obtenemos las siguientes expresiones:

$$u_a(z_1 = 0) = A_a \exp \left[-\frac{(x_1 - x_{1c})^2 \cos^2 \theta + y_1^2}{2w^2} \right] \exp [ikx_1 \sin \theta] \quad (2.9)$$

$$u_b(z_1 = 0) = A_b \exp \left[-\frac{(x_1 - x_{1c})^2 \cos^2 \theta + y_1^2}{2w^2} \right] \exp [-ikx_1 \sin \theta + i\alpha]$$

El campo total $U(x_1, y_1)$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ en la pantalla de difracción es $u_a + u_b$. El campo difractado $U(x_0, y_0)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z)$ en la pantalla de observación se obtiene con la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld, cuya solución para este caso tiene la forma compleja $U(x_0, y_0) = c + id$, donde c y d se calculan numéricamente. La intensidad está dada por $I(P_0) = U^*(P_0) U(P_0) = U(P_0)^2 = c^2 + d^2$. Los patrones de difracción que se obtienen con este resultado se presentan en el siguiente capítulo.

3. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Hasta ahora se han presentado resultados del análisis de la difracción de dos ondas que interfieren en la pantalla de difracción, considerándose distribuciones de amplitud constante y gaussiana. Para el primer caso la solución al problema de difracción tiene una representación exacta [ecs. (2.6), (2.7) y (2.8)], aunque los valores de $U(x_0, y_0)$ se deben calcular numéricamente en virtud de que dependen de funciones error. Para distribución gaussiana de la amplitud $U(x_0, y_0)$ se obtiene al resolver numéricamente las integrales de la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld en la aproximación de Fresnel.

Cuando la distribución de amplitud es constante, el valor del campo difractado se expresa como:

$$U_{TOT}(x_0, y_0) = -i \frac{1}{4} (1 + i)^2 \left[\begin{array}{l} \Xi(\theta) \{ \text{erf}[V_2(\theta)] - \text{erf}[V_1(\theta)] \} + \\ \Xi(-\theta) \{ \text{erf}[V_2(-\theta)] - \text{erf}[V_1(-\theta)] \} e^{i\alpha} \end{array} \right]$$

con

$$V_1(\theta) = \frac{i-1}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} \left[\frac{a}{2} + x_0 - z \sin \theta \right]$$

$$V_2(\theta) = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} \left[\frac{a}{2} - x_0 + z \sin \theta \right]$$

Así $U_{TOT}(x_0, y_0)$ se expresa en términos de funciones error. Estas funciones, que son integrales con límite superior variable, se calculan numéricamente utilizando las Subrutinas y Librerías del Instituto de Matemáticas (IMSL) en un sistema IBM RISC 6000 Mod. 340. Los resultados obtenidos se presentan en las gráficas 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7.

En el caso de ondas con distribución gaussiana de la amplitud la integral a resolver es:

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} U(x_1, y_1) \exp\left[i\frac{k}{2z}((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2)\right] dx_1 dy_1$$

en donde $U(x_1, y_1) = u_a + u_b$ y:

$$u_a(z_1 = 0) = A_a \exp\left[-\frac{(x_1 - x_{1c})^2 \cos^2 \theta + y_1^2}{2w_0^2}\right] \exp[ikx_1 \sin \theta]$$

$$u_b(z_1 = 0) = A_b \exp\left[-\frac{(x_1 - x_{1c})^2 \cos^2 \theta + y_1^2}{2w_0^2}\right] \exp[-ikx_1 \sin \theta + i\alpha]$$

La solución numérica de la integral precedente se realizó en primera aproximación mediante el método trapezoidal, utilizándose después el método de Romberg [12]. El álgebra se llevó a cabo en lenguaje simbólico de programación (Mathematica), empleándose los siguientes parámetros:

$$a = 10^{-3}m$$

$$\lambda = 594 \times 10^{-9}m$$

$$w_0 = 0.5 \times 10^{-2}m$$

$$x_{1c} = 0.5 \times 10^{-2}m$$

donde a corresponde a la anchura de la rendija, λ es la longitud de onda de la luz empleada, w_0 es la semianchura de los haces gaussianos y x_{1c} es la posición del origen de los haces gaussianos en el eje x . Esquemáticamente:

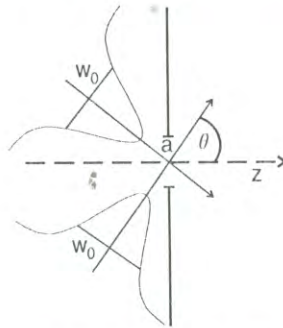


Fig. 3.1 Representación esquemática donde se muestran los parámetros involucrados en la simulación numérica.

La razón de utilizar los valores anteriores radica en la disponibilidad de las condiciones de laboratorio, en donde se cuenta con un láser de Helio-Neón en la longitud $\lambda = 594 \times 10^{-9}m$. De esta manera, los resultados que se obtienen numéricamente se pueden comparar con algunos resultados experimentales obtenidos previamente, representados en las fotografías a), b) c) y d) incluídas al final de este capítulo.

Difracción para el caso de amplitud constante

Se presentan los patrones de difracción considerando distribución constante de la amplitud. Se ha escogido una región de propagación desde 1m hasta 10m, en intervalos de 1m.

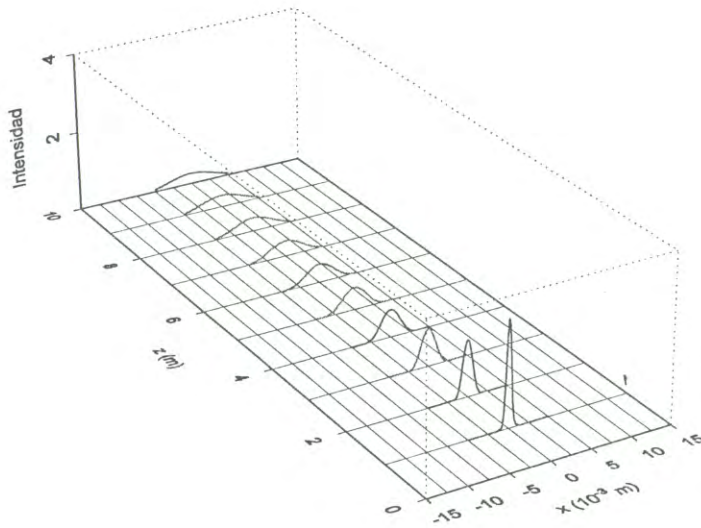


Fig. 3.2. Difracción para el caso de amplitud constante.

Comparando los patrones de difracción calculados para distintos valores del eje z se observa que los mismos representan la propagación de la franja brillante del patrón de interferencia que se hizo coincidir en la pantalla de difracción, es decir, una versión truncada del patrón de interferencia inicial. Conforme se propaga la franja decrece en intensidad, a la vez que se ensancha. Esto es así puesto que la energía contenida en la franja permanece constante (no se han tomado en cuenta efectos de disipación de energía en el medio). Es interesante notar

que la evolución de esta franja brillante a lo largo del eje z no se ajusta a un decrecimiento tipo inverso del cuadrado de la distancia para la propagación de la energía, esto último en razón del principio de Huygens que establece que la apertura se comporta como fuente de ondas esféricas. Sin embargo, es necesario recordar que el comportamiento inverso del cuadrado se basa en la suposición de que la energía se distribuye en un frente de onda esférico. En la propagación de la franja brillante la energía está limitada a la extensión de la misma, por lo que para una posición z determinada el valor de la intensidad debe ser mayor que el correspondiente a $1/z^2$. Este resultado, consecuencia del principio de la conservación de la energía, se presenta gráficamente en la Figura 3.3.

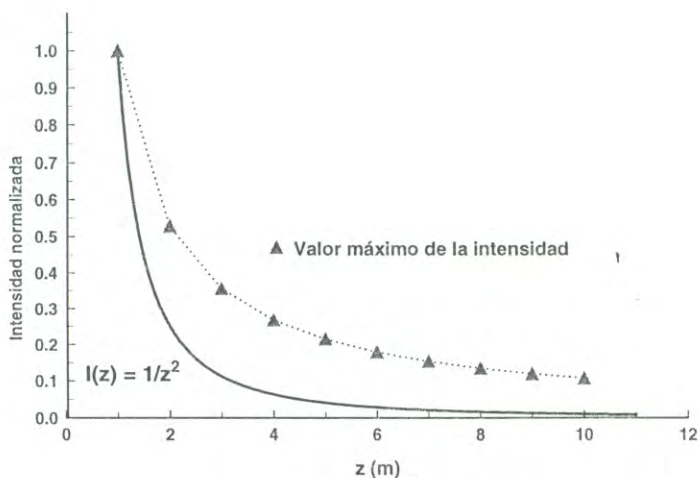


Fig. 3.3 Decaimiento del máximo de la intensidad. Caso amplitud constante.

Difracción para el caso de amplitud gaussiana

Ahora se muestran los patrones de difracción considerando distribución gaussiana de la amplitud. La región de propagación es la misma que en el caso anterior, desde 1m hasta 10m en intervalos de 1m.

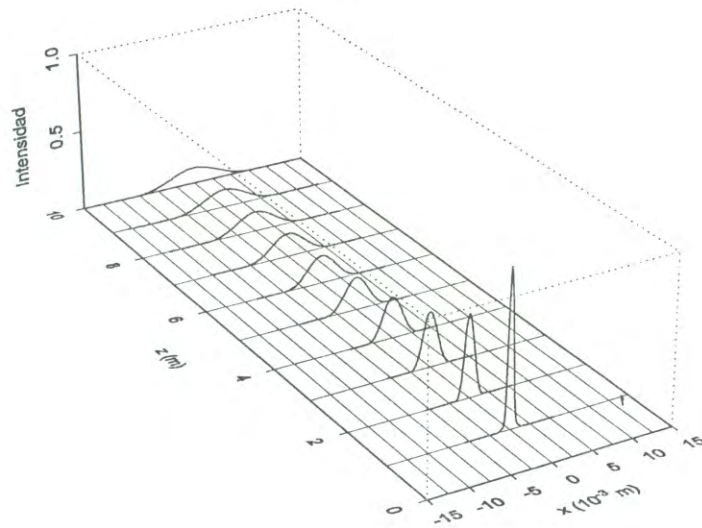


Fig. 3.4. Difracción para el caso de amplitud gaussiana.

Los patrones de difracción para el caso de distribución gaussiana de la amplitud muestran la propagación de la franja brillante del patrón de interferencia que se utilizó para iluminar la apertura, resultado que es idéntico al que se obtuvo para el caso de ondas con distribución de amplitud constante. En este caso también se observa que al propagarse la franja decrece en intensidad y aumenta en anchura, como resultado de la conservación de la energía. Como era de esperarse

el decaimiento del valor de la intensidad no es del tipo $1/z^2$. Esto se aprecia más claramente en la Figura 3.5

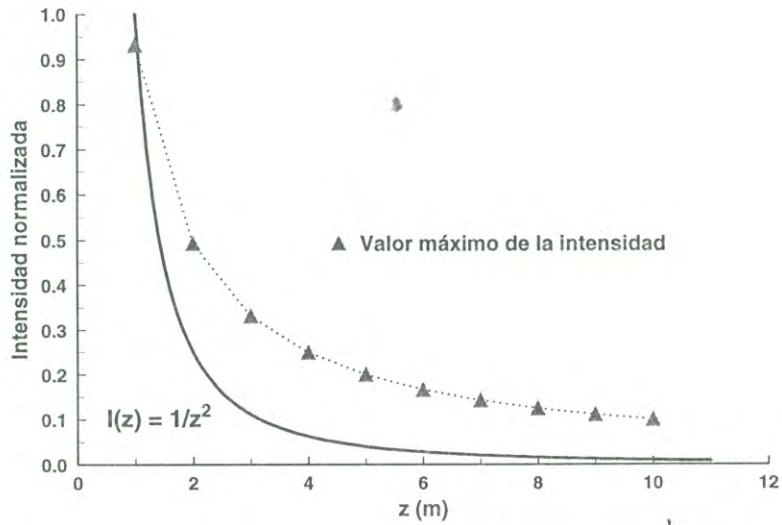


Fig. 3.5. Decaimiento del máximo de la intensidad. Caso amplitud gaussiana.

Ahora se muestra la propagación de dos haces difractados en los que no se ha considerado interferencia en la pantalla, con ángulos de incidencia θ y $-\theta$, para amplitud constante y gaussiana, respectivamente.

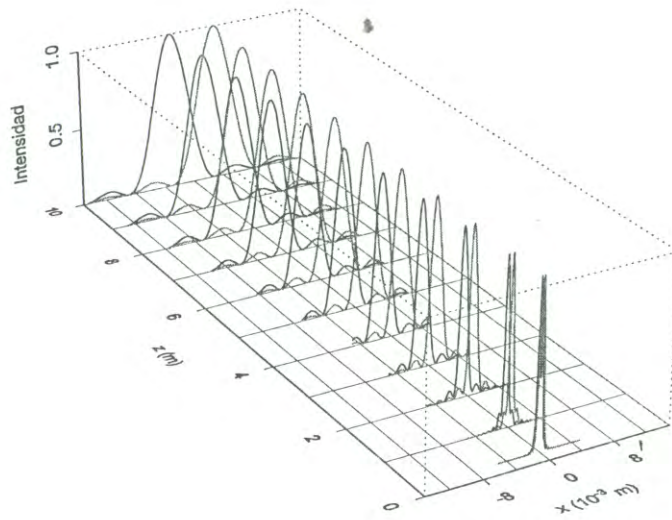


Fig. 3.6. Propagación de haces sin interferir. Caso amplitud constante.

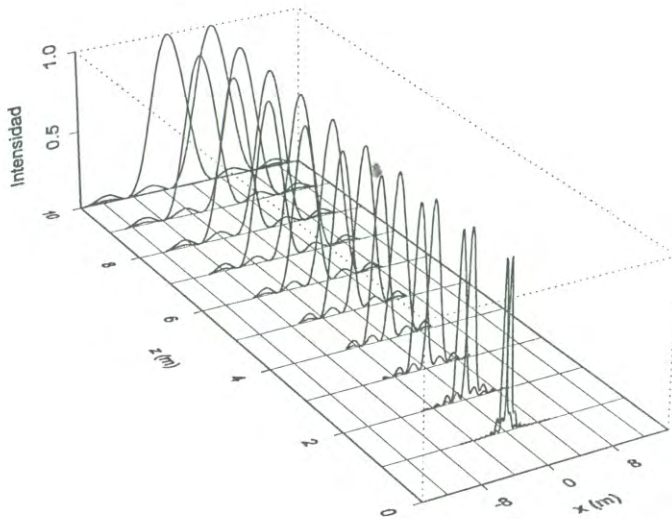
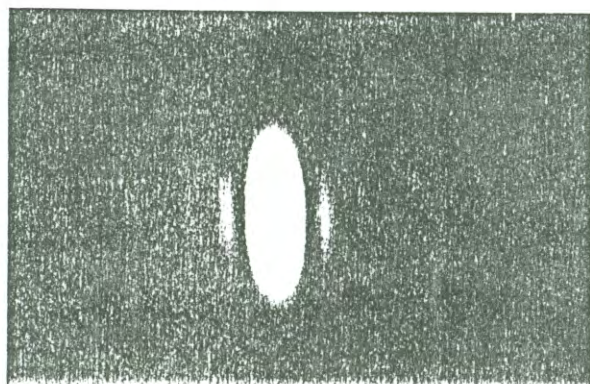


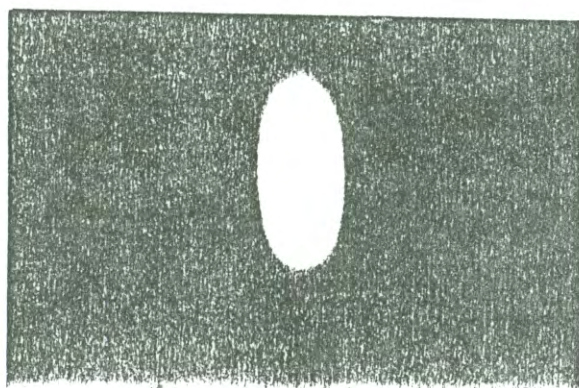
Fig. 3.7 Propagación de haces sin interferir. Caso amplitud gaussiana.

Un análisis de los datos muestra que el valor máximo (pico) de los patrones de difracción para las ondas que no interfieren (figs. 4,5,6 y 7) sigue una trayectoria divergente respecto del eje de propagación z , formando un ángulo $\phi = (5.86 \pm 0.52) \times 10^{-4} \text{rad}$, que numéricamente es casi igual al ángulo de incidencia $\theta = 5.94 \times 10^{-4} \text{rad}$. Para mayor claridad la intensidad se ha normalizado respecto a la intensidad unitaria de cada onda incidente, que en el caso de amplitud constante corresponde al valor de cuatro y para ondas con distribución gaussiana de la amplitud este valor es $4/e$, como se estableció en la sección 2.1.

A continuación se muestran fotografías en las que se observa la difracción para un sólo haz y para dos haces interferidos, con objeto de comparar con los resultados numéricos. En la fotografía a) se tiene el patrón de difracción para un haz, en donde se observa una franja central y una serie de franjas secundarias. En la simulación numérica esto se presenta en la figura 3.7. La fotografía b) muestra el patrón de difracción para dos haces interferidos. Nótese que las franjas secundarias de la fotografía anterior han desaparecido. Esto concuerda con los resultados mostrados en la figura 3.4, en donde se tiene la propagación de una franja brillante. En ambas fotografías el plano de observación está a $6m$ de la apertura, teniendo ésta una anchura de $1mm$.



a



b

4. CONCLUSIONES

Se llevó a cabo un análisis de la difracción en la región de Fresnel por una apertura utilizando la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld en la aproximación de Fresnel. Tradicionalmente el límite de la región de Fresnel se relaciona con la separación existente, a lo largo del eje de propagación de la onda difractada, entre los planos de difracción y de observación, sin tomar en cuenta en qué región de este último plano se desea calcular la difracción. Estudiando las condiciones requeridas para la aproximación de Fresnel se obtiene que la región de Fresnel se define *también* en una región del plano de observación, correspondiendo esta región a la proyección de la apertura sobre este plano. Este resultado es válido cuando las dimensiones de la apertura son mucho mayores que la longitud de onda de la radiación que ilumina la pantalla de difracción y que la apertura es muy pequeña comparada con la distancia al plano de observación. Bajo estas consideraciones se calculó la difracción por una rendija finita para un campo incidente compuesto por dos frentes de onda planos coherentes que interfieren en el plano de la pantalla de difracción, considerándose los casos de amplitud constante y distribución gaussiana de la amplitud. El ángulo de interferencia de las ondas incidentes es tal que la rendija es iluminada por una franja brillante solamente (es decir, se hacen coincidir dos mínimos consecutivos del patrón de interferencia con los bordes de la rendija). Bajo estas condiciones dicha franja brillante se propaga sin variar su forma, tanto para el caso de amplitud constante como para el caso de distribución gaussiana de amplitud, experimentando cambios solamente en la amplitud y en la anchura de la franja como resultado del principio de conservación de la energía. Este resultado sugiere la posibilidad de controlar los efectos de difracción mediante el proceso de interferencia, hasta lograr una cancelación práctica de la difracción. Lo anterior constituye un potencial en la solución de problemas técnicos, como la generación de imágenes no localizadas, por mencionar alguno.

APENDICE A

Solución de las integrales de difracción en la aproximación de Fresnel

Tenemos la integral de difracción para una onda que incide con un ángulo θ sobre una abertura rectangular de dimensiones $a \times b$:

$$U(x_0; z, \theta) = \frac{\exp\{ikz\}}{i\lambda z} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left\{i\frac{k}{2z}(y_0 - y)^2\right\} dy \times \int_{-a/2}^{a/2} \exp\{ik_x x\} \exp\left\{i\frac{k}{2z}(x_0 - x)^2\right\} dx$$

La integral para y :

$$Int_1 = \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left\{i\frac{k}{2z}(y_0 - y)^2\right\} dy$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(y_0 - y)$$
$$du = -\sqrt{\frac{k}{\pi z}} dy$$

con los nuevos límites:

$$u_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(y_0 + \frac{b}{2}\right)$$
$$u_2 = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(y_0 - \frac{b}{2}\right)$$

obtenemos:

$$Int_1 = -\sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int_{u_1}^{u_2} \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} u^2 \right\} du = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \left[\int_0^{u_1} \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} u^2 \right\} du - \int_0^{u_2} \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} u^2 \right\} du \right]$$

Por otro lado:

$$C(z) = \int_0^z \cos \left\{ \frac{\pi}{2} t^2 \right\} dt$$

$$S(z) = \int_0^z \sin \left\{ \frac{\pi}{2} t^2 \right\} dt$$

con lo que es posible reescribir Int_1 como:

$$Int_1 = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} [C(u_1) + iS(u_1) - C(u_2) - iS(u_2)]$$

Recordando que[13]:

$$C(z) + iS(z) = \frac{1+i}{2} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-i)z \right\}; \quad z \in \mathfrak{R}$$

donde:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp \{-t^2\} dt$$

entonces:

$$Int_1 = \frac{1}{2} (1+i) \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \left[\operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-i)u_1 \right\} - \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-i)u_2 \right\} \right]$$

Cuando $-\frac{b}{2} \rightarrow -\infty$ y $\frac{b}{2} \rightarrow \infty$, se tiene que $u_1 \rightarrow -\infty$ y $u_2 \rightarrow \infty$, respectivamente. Esto corresponde al caso de una rendija con bordes paralelos al eje y . Así:

$$Int_1|_{\pm\infty} = \frac{1}{2} (1+i) \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \left[\lim_{u_1 \rightarrow -\infty} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-i)u_1 \right\} - \lim_{u_2 \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-i)u_2 \right\} \right]$$

es decir:

$$Int_1|_{\pm\infty} = (1+i)\sqrt{\frac{\pi z}{k}}$$

Ahora la integral para x:

$$\begin{aligned} Int_2 &= \int_{-a/2}^{a/2} \exp\{ik_x x\} \exp\left\{i\frac{k}{2z}(x_0 - x)^2\right\} dx \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \exp\{ikx \sin \theta\} \exp\left\{i\frac{k}{2z}(x_0 - x)^2\right\} dx \end{aligned}$$

Reescribiendo el exponente en el integrando:

$$kx \sin \theta + \frac{k}{2z}(x_0 - x)^2 = kx_0 \sin \theta - \frac{kz}{2} \sin^2 \theta + \frac{k}{2z}[x - (x_0 - z \sin \theta)]^2$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} Int_2 &= \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left\{i\left[kx_0 \sin \theta - \frac{kz}{2} \sin^2 \theta + \frac{k}{2z}[x - (x_0 - z \sin \theta)]^2\right]\right\} dx \\ &= \exp\left\{i\left[kx_0 \sin \theta - \frac{kz}{2} \sin^2 \theta\right]\right\} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left\{i\left[\frac{k}{2z}[x - (x_0 - z \sin \theta)]^2\right]\right\} dx \end{aligned}$$

Tomando un cambio de variable:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(x - [x_0 - z \sin \theta]) \\ dv &= \sqrt{\frac{k}{\pi z}} dx \end{aligned}$$

con los límites:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(-\frac{a}{2} - [x_0 - z \sin \theta]\right) \\ v_2 &= \sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{a}{2} - [x_0 - z \sin \theta]\right) \end{aligned}$$

se tiene:

$$Int_2 = \exp \left\{ i \left[kx_0 \sin \theta - \frac{kz}{2} \sin^2 \theta \right] \right\} \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int_{v_1}^{v_2} \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} v^2 \right\} dx$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para Int_1 :

$$Int_2 = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \frac{1}{2} (1+i) \exp \left\{ i \left[kx_0 \sin \theta - \frac{kz}{2} \sin^2 \theta \right] \right\} \times \\ \left[\operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-i) v_2 \right\} - \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-i) v_1 \right\} \right]$$

Identificando:

$$V_1(\theta) = \frac{i-1}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} \left[\frac{a}{2} + x_0 - z \sin \theta \right]$$

$$V_2(\theta) = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} \left[\frac{a}{2} - x_0 + z \sin \theta \right]$$

podemos escribir:

$$Int_2 = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \frac{1}{2} (1+i) \exp \left\{ i \left[kx_0 \sin \theta - \frac{kz}{2} \sin^2 \theta \right] \right\} [\operatorname{erf} \{V_2(\theta)\} - \operatorname{erf} \{V_1(\theta)\}]$$

Por lo tanto, la integral de difracción es:

$$U(x_0; z, \theta) = \frac{\exp\{ikz\} \exp\{i\omega t\}}{i\lambda z} (1+i) \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \times \\ \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \frac{1}{2} (1+i) \exp \left\{ ik \left[x_0 \sin \theta - \frac{kz}{2} \sin^2 \theta \right] \right\} \times \\ [\operatorname{erf} \{V_2(\theta)\} - \operatorname{erf} \{V_1(\theta)\}]$$

Simplificando:

$$U(x_0; z, \theta) = -i \frac{1}{4} (1+i)^2 \Xi(\theta) [\operatorname{erf} \{V_2(\theta)\} - \operatorname{erf} \{V_1(\theta)\}]$$

donde:

$$\Xi(\theta) = e^{i(\omega t + kz)} \exp \left[ik \left(x_0 \sin \theta - \frac{z}{2} \sin^2 \theta \right) \right]$$

APENDICE B

Difracción por un plano semiinfinito

Se presentan resultados para la difracción por una pantalla semiinfinita para ondas planas con amplitud constante. En este caso la variable tenemos $-\infty \leq x \leq \infty$, lo que implica que $V_2(\theta) \rightarrow 1$ y $V_1(\theta) \rightarrow \frac{1}{2}(i-1)\sqrt{k/z}(x_0 - z \sin \theta)$, con lo que la expresión para el campo es:

$$U(x_0; z, \theta) = -i\frac{1}{4}(1+i)^2 \Xi(\theta) \left[1 - \operatorname{erf} \left\{ \frac{i-1}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} (x_0 - z \sin \theta) \right\} \right]$$

Primero se considera el caso de una sola onda incidiendo con un ángulo θ sobre la pantalla; la intensidad se calcula como $I = U^2$, con lo que obtiene:

$$I = \frac{1}{4} \left[1 - \operatorname{erf} \left\{ \frac{i-1}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} (x_0 - z \sin \theta) \right\} \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left\{ \frac{-i-1}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} (x_0 - z \sin \theta) \right\} \right]$$

Las gráficas de los patrones de difracción para varias distancias de la pantalla de observación al plano de difracción se presentan en las figuras B1 y B2.

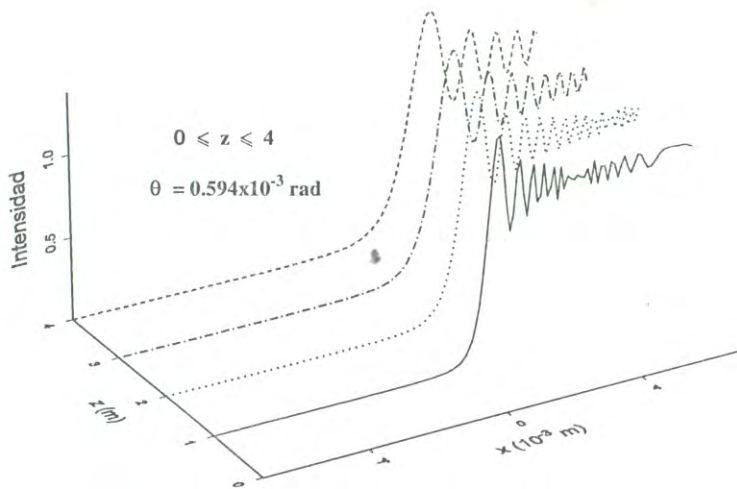


Fig. B1. Difracción por un plano semiinfinito para una onda que incide con un ángulo θ .

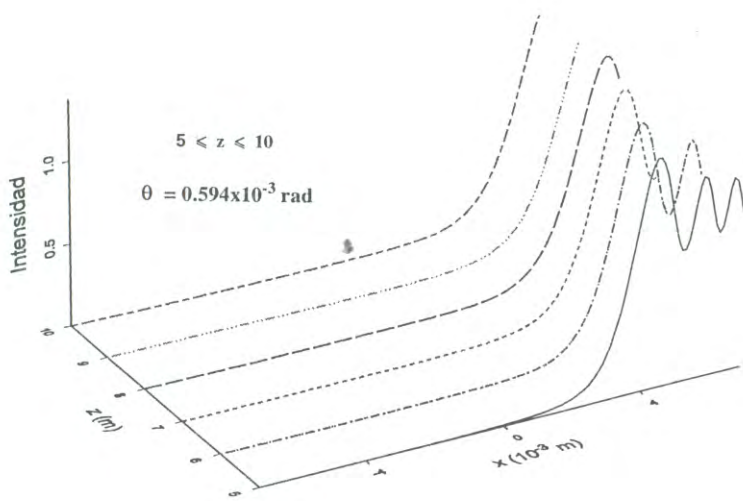


Fig. B2. Difracción por un plano semiinfinito para una onda que incide con un ángulo θ .

Ahora se considera el caso de dos ondas que inciden con ángulos θ y $-\theta$, respectivamente, en el borde de la pantalla semiinfinita. Aquí el campo total está dado por $U_T = U(x_0; z, \theta) + U(x_0; z, -\theta)$, donde:

$$U(x_0; z, \theta) = -i \frac{1}{4} (1+i)^2 \Xi(\theta) \left[1 - \operatorname{erf} \left\{ \frac{i-1}{2} \sqrt{\frac{k}{z}} (x_0 - z \sin \theta) \right\} \right]$$

La expresión anterior es de la forma $a + ib$; la intensidad se obtiene como $I = U^*U = (a - ib)(a + ib)$.

Los patrones de difracción para varias distancias de la pantalla de observación al plano de difracción se presentan en las gráficas B3, B4 y B5. El ángulo de incidencia θ se mantiene fijo e igual a $0.594 \times 10^{-3} \text{ rad}$.

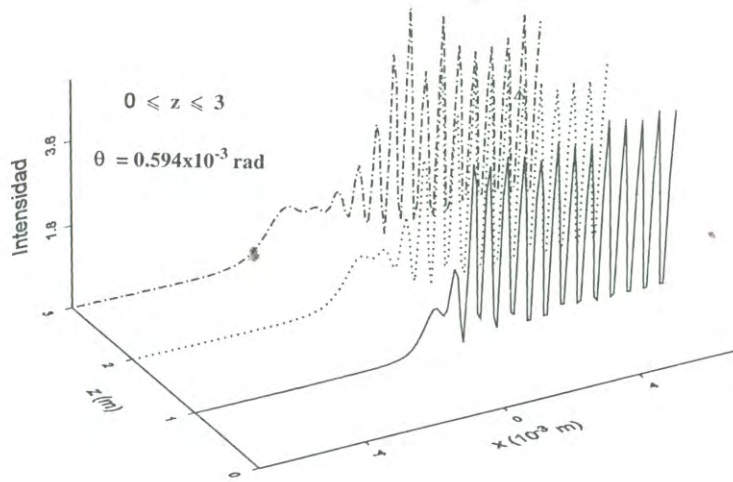


Fig. B3. Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas. El ángulo θ se mide respecto a la normal a la plano.

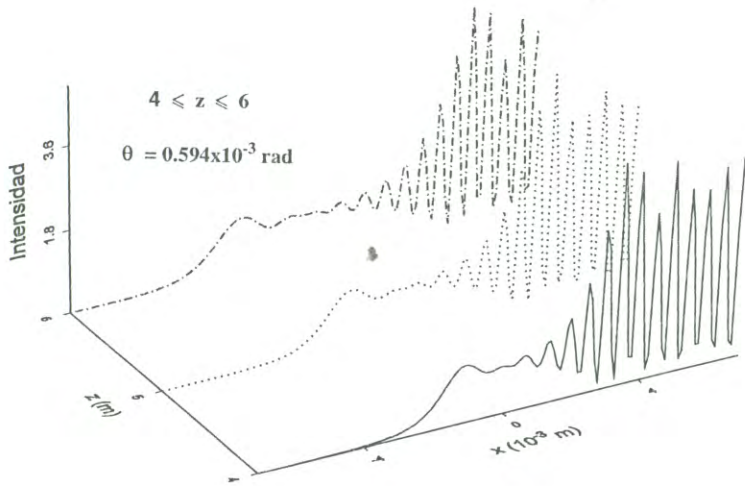


Fig. B4. Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas (continuación).

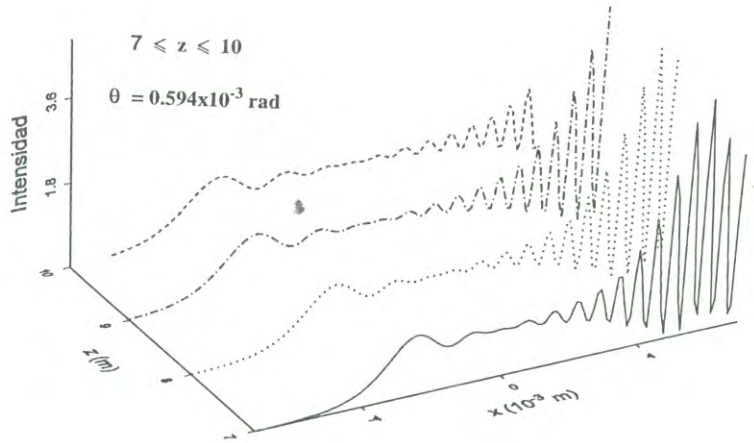


Fig. B5. Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas (continuación).

Las gráficas B6 y B7 corresponden a los patrones de difracción en donde los ángulos de incidencia son $\theta = 10^{-3}rad$ y $\theta = 2 \times 10^{-3}rad$, respectivamente.

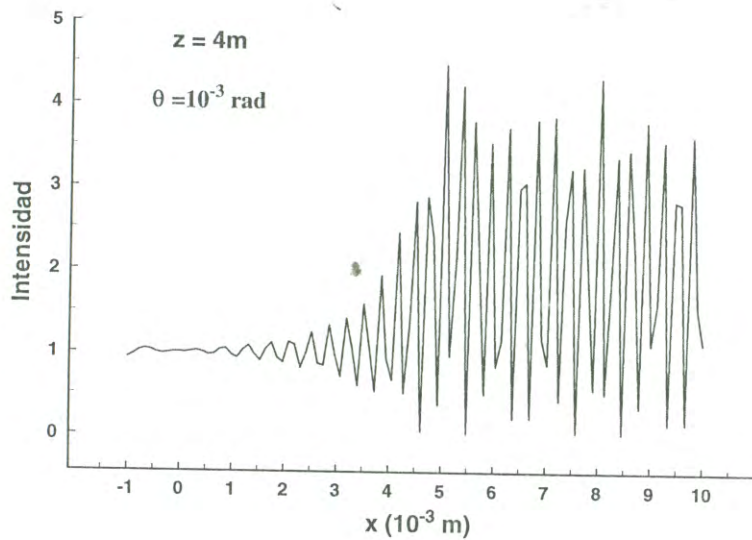


Fig. B6. Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas. el ángulo θ se mide respecto a la normal a la plano.

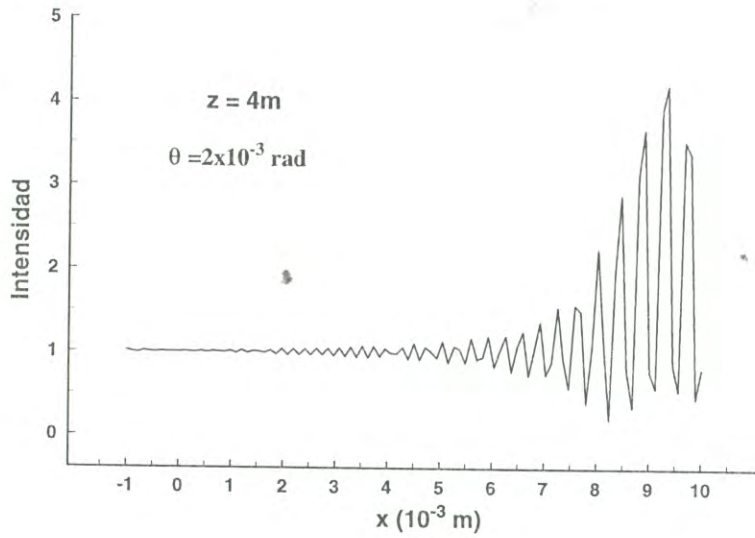


Fig. B7. Difracción por un plano semiinfinito para dos ondas interferidas. el ángulo θ se mide respecto a la normal a la plano.

REFERENCIAS

- [1] Hecht, E., Zajac, A. *Optics*. Addison-Wesley, 1979. U.S.A.
- [2] Goodman, J.. *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill, 1968. U.S.A.
- [3] Born, M. and Wolf, E. *Principles of Optics*. Pergamon Press, 1980, U. K.
- [4] Sekerj-Zenkovitch, Serguei, et al. *Proceedings of the Seminar of Physics and Mathematics*. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. Fall 1996-Spring 1997.
- [5] Sommerfeld, A. *Optics*. Academic Press, 1967, U.S.A.
- [6] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1975, U.S.A.:
- [7] Cowley, John. *Diffraction Physics*. North Holland, 1981, The Netherlands.
- [8] Cervantes, M.A. and E.V. Kurmyshev, *Diffraction of Interfering Waves: Two Optical Beams in the Fresnel Region*. Preprint (to be published). A Condensed version was presented in the *Second International Conference on Optical Information Processing*. 17-21 June 1996, St. Petersburg, Russia.
- [9] Hariharan, P. *Basics of interferometry*. Academic Press, 1992. U.S.A.
- [10] Walther, A. in *Applied optics and optical engineering*. Rudolf Kingslake (Editor). Academic Press, 1965. U.S.A
- [11] Yariv, A. *Quantum Electronics*. Wiley, 1984, U.S.A.
- [12] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. H. *Numerical recipes (FORTRAN version)*. Cambridge University Press, 1990. U.S.A.
- [13] Beyer, W. H. (Editor). *CRC Handbook of Mathematical Sciences*. CRC Press, 1987. U.S.A.