

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ISI 325
DIFUS

BIBLIOTECA
C. I. F. - U. S.
UNIVERSIDAD DE SONORA

Esparcimiento de luz por un sistema multicapas
con una interface rugosa: Solución perturbativa a
cuarto orden

T E S I S

QUE PARA CUBRIR LOS REQUISITOS MINIMOS
NECESARIOS PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

César Márquez Beltrán

TM064

Hermosillo Sonora México, 2 de julio de 1999

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

CONTENIDO

RESUMEN	2
INTRODUCCION	3
CAPITULO 1	6
1 TEORIA	6
1.1 CRITERIO DE RAYLEIGH (¿Rugoso o Liso?)	8
CAPITULO 2	11
2 METODO DE RAYLEIGH-FANO	11
2.1 APLICACION DEL METODO DE RAYLEIGH-FANO	15
2.2 SOLUCION DE LA INTEGRAL DE ESPARCIMIENTO POR TEORIA DE PERTURBACION	18
2.3 COEFICIENTE DIFERENCIAL DE REFLEXION	20
2.4 SUPERFICIE RUGOSA	20
2.5 DRC INCOHERENTE	21
2.6 DRC COHERENTE	24
2.7 ESPARCIMIENTO DE LUZ POR UNA CAPA.	26
CAPITULO 3	30
3 RESULTADOS NUMERICOS	30
3.1 CASO A	31
3.2 VARIACION DEL ANGULO DE INCIDENCIA.	36
3.3 VALIDEZ DEL METODO PERTURBATIVO.	38
3.4 CASO B	43
CONCLUSIONES	49
APENDICE I	51
APENDICE II	55

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio teórico del esparcimiento de la luz por un sistema de N capas con una interface rugosa unidimensional, para el caso de la luz incidente S y P polarizada. Se asume que cada capa es un medio lineal, isotrópico, homogéneo, no magnético, cuya respuesta está dada por una función dieléctrica que en general es compleja y dependiente de la frecuencia.

A partir de una ecuación integral llamada de esparcimiento, derivada de la aproximación de Rayleigh-Fano y válida para $N+1$ interfaces rugosas, se propone una solución perturbativa hasta cuarto orden en la altura del perfil de la rugosidad, y hasta este orden, se calcula el promedio del **Coefficiente Diferencial de Reflexión** (la cantidad de energía esparcida alrededor del ángulo de esparcimiento normalizada con respecto a la energía incidente).

Este formalismo permite estudiar el esparcimiento de luz por un sistema de N capas con una interface rugosa y como un caso particular del método, los resultados numéricos se realizan para el análisis del esparcimiento de luz por una película dieléctrica con una superficie rugosa aleatoria depositada sobre la superficie lisa de un conductor perfecto. En estos sistemas, la dependencia angular del esparcimiento de luz, bajo ciertas condiciones, muestra un pico de retroesparcimiento y picos satélites.

Se presentan resultados para dos dieléctricos. El primer caso permite la comparación de los cálculos con resultados de un trabajo teórico previo reportado en la literatura, con el objeto de validar el método. En el segundo caso la capa dieléctrica es de Fluoruro de Calcio, cuya rugosidad ha sido determinada anteriormente, y proponemos las condiciones óptimas para la detección experimental del pico de retroesparcimiento y picos satélites.

Con ayuda de la conservación de la energía se establecen los parámetros de confiabilidad del método en función de la altura de la rugosidad, que en este caso, queda determinada por la suma de la intensidad de la luz esparcida (TIS) más la intensidad de la parte coherente de la luz, para una altura dada en la rugosidad.

INTRODUCCION

Algunos medios naturales o artificiales como la atmósfera, los océanos, medios geofísicos y biológicos tienen un espacio inhomogéneo que varía en el tiempo. Estos espacios son llamados "medios aleatorios" [1]. Las microondas, ondas ópticas y acústicas en estos medios afectan un gran rango de problemas prácticos como: comunicación, imágenes, sensores de control remoto e identificación de objetos. En resumen, las ondas presentes en *medios aleatorios* representan un reto para modelarlos teóricamente y estudiar su respuesta bajo radiación electromagnética. Algunos ejemplos donde las ondas se propagan en estos medios son:

- La propagación de la luz en medios turbulentos y aleatorios donde el índice de refracción es una función aleatoria del espacio y tiempo, estos pueden ser: la propagación óptica en la atmósfera, atmósferas planetarias, viento solar y el esparcimiento acústico en la turbulencia del océano.
- La dispersión por distribuciones aleatorias de dispersores discretos, tales como: el esparcimiento óptico y de microondas por lluvia, niebla, humo, nieve, partículas de hielo, y esparcimiento óptico y acústico en materiales compuestos.
- Esparcimiento por superficies rugosas e interfaces, algunos ejemplos: esparcimiento óptico y de microondas por terrenos, y capas de nieve, esparcimiento ultrasónico por interfaces rugosas en medios biológicos y esparcimiento óptico en películas delgadas también con interfaces rugosas.

En el estudio del esparcimiento de luz por superficies rugosas se están realizando nuevas investigaciones que ayudan a obtener mejores modelos teóricos así como la aplicación de nuevos métodos para la caracterización de superficies. Se ha constatado que la **superficie rugosa** puede afectar el resultado en la medición del tamaño de objetos, además como una limitación en las aplicaciones industriales, tales como la manufacturación de instrumentos ópticos; en áreas de climatología, por ejemplo, se analiza la forma del **esparcimiento** de luz al ser reflejada por la superficie oceánica, cuya señal es detectada por un radar, con esto, se puede establecer modelos estadísticos en la **rugosidad de la superficie oceánica** que estén directamente relacionadas con las velocidades y direcciones del viento y flujos de humedad, y así predecir cambios climáticos y predicciones de lluvia.

En películas delgadas con superficies rugosas se han propuesto métodos, tanto teóricos como experimentales, para la caracterización de su superficie por medio del análisis del esparcimiento

de luz, por ejemplo Toigo *et al* [2] analiza la difracción de luz por rejillas de difracción en materiales de permitividad finita, estableciendo una teoría general por medio de dos métodos, el método de Rayleigh-Fano y el método del teorema de extinción de la ecuación integral. Se muestra que el método propuesto por Lord Rayleigh en problemas de acústica y después extendido por Fano para rejillas ópticas conducen a expresiones divergentes, si el perfil de la superficie no es lo suficientemente lisa, en otras palabras, el límite de pequeñas rugosidades. Se conoce que para una rugosidad periódica de forma senoidal con ecuación $z = h \cos[(2\pi/a)x]$, la razón entre la altura de la rugosidad (h) y el periodo de la misma (a), para la conservación de la energía, debe ser $h/a < 0.072$ [2] por el método propuesto por Rayleigh-Fano.

Se ha investigado, en artículos teóricos, el esparcimiento de luz por superficies rugosas aleatorias: superficies de pequeñas rugosidades y por superficies con grandes rugosidades; las superficies con pequeñas rugosidades son aquellas donde la altura promedio (h) de la superficie rugosa es pequeña comparada con la longitud de onda de la luz incidente (λ), en otras palabras que cumplan con el criterio de Rayleigh $h/\lambda < 1$, las superficies con rugosidades grandes son aquellas donde la altura promedio de la rugosidad es comparable con la longitud de onda de la luz incidente.

Cálculos numéricos para el esparcimiento de la luz por superficies rugosas y películas con interfaces rugosas, se han realizado por medio del método de Rayleigh-Fano, con un tratamiento de teoría de perturbaciones, realizados primeramente por McGurn *et al* [3]. En este trabajo la dependencia angular del esparcimiento bajo ciertas condiciones, muestra un pico en dirección del ángulo de incidencia, el pico de retroesparcimiento (backscattering).

Artículos como los de V. Celli *et al* [4] y por J. A. Sánchez-Gil *et al* [5], muestran, además del pico de retroesparcimiento, 2 picos satélites en un ángulo en el cual se pueden excitar polaritones superficiales, tales como plasmones de superficies en películas metálicas y modos guiados en películas dieléctricas. En el caso especial del retroesparcimiento por superficies de pequeñas rugosidades son tópicos de algunos artículos de Maradudin y Méndez [6], ellos muestran el tratamiento de perturbación de McGurn y dan las bases para un cálculo perturbativo de orden infinito para una superficie metálica rugosa, y muestra la contribución que da lugar al pico de retroesparcimiento, el cual se produce debido a que la luz incidente golpea la superficie, y a través de la rugosidad, se excita una onda electromagnética superficial, un plasmón polariton. El polariton superficial se propaga en ambas direcciones, tanto izquierda como derecha. Debido a la superficie rugosa es "regresado" en forma de luz alejándose de ésta. Existe un punto donde las ondas esparcidas son coherentes, con diferencia de fase igual cero, el cual está en la dirección opuesta al haz incidente, por lo que existe un máximo en esa dirección y se le conoce como pico de retroesparcimiento.

El objetivo del trabajo es analizar para qué parámetros, en términos de la altura de la rugosidad de una interface rugosa en sistemas de películas delgadas (dieléctricas y metálicas) el método perturbativo, hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad, es confiable. Se toma el caso particular, para dar validez al método, de una película dieléctrica, con una interface rugosa, depositada en un substrato conductor perfecto. Esto lo realizaremos por medio de la

conservación de la energía como función de la altura de la rugosidad; además se dejan las bases para un estudio del esparcimiento de luz para un sistema multicapa con una interface rugosa.

En el primer capítulo de este trabajo analizaremos bajo que condiciones, por el criterio de Rayleigh, una superficie es lisa o rugosa.

En el segundo capítulo se obtiene el cálculo teórico de la aproximación de Rayleigh-Fano y la teoría de perturbación para encontrar los coeficiente de reflexión de k -ésimo orden para un sistema multicapas con una interface rugosa. El cálculo del esparcimiento de luz tanto de la parte incoherente como coherente se realiza hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad, asumiendo que la superficie es un proceso aleatorio estacionario, cuyas propiedades aleatorias de la rugosidad tenga una distribución de alturas simétricas, y además que posea un espectro de rugosidad gaussiano. Como un caso particular del método, se obtiene las soluciones para el esparcimiento de luz, hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad, por una película dieléctrica con una superficie rugosa depositada sobre un substrato conductor perfecto. En estos sistemas, bajo ciertas condiciones, muestran un pico de retroesparcimiento y 2 picos satélites.

En el tercer y último capítulo calcularemos numéricamente el coeficiente diferencial de reflexión tanto incoherente como coherente hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad, para el caso particular presentado en la parte final del capítulo dos. Estos resultados numéricos se comparan con los resultados previamente obtenidos por Sánchez-Gil *et al* [5], esto se realiza para dar la validez correspondiente al método. Se verifica el criterio de Rayleigh así como también la validez del método conforme aumenta la altura de la rugosidad, además como cálculo adicional se obtienen las condiciones óptimas para la detección experimental del pico de retroesparcimiento y picos satélites, por una película de C_aF_2 , con una rugosidad en la superficie previamente calculadas por F. Varnier *et al* [14] y N. Mayani *et al* [13], depositada en un substrato conductor.

CAPITULO 1

1. TEORIA

En este capítulo presentamos el criterio de Rayleigh, el cual predice, por medio de dos límites o procesos ópticos, cuando una superficie se considera lisa o rugosa.

La respuesta óptica de una película delgada metálica o dieléctrica sin rugosidad en sus superficies ha sido uno de los problemas más comunes en óptica. Con esto se han podido calcular las diferentes propiedades en dichas películas; en particular, un arreglo conocido como RTA (Reflexión Total Atenuada) ayuda a caracterizarlas obteniendo algunas de sus propiedades, tales como: índice de absorción e índice de refracción. En la figura 1 se muestra la respuesta óptica de la intensidad del haz reflejado (reflectancia) de una película de plata con superficies lisas en un arreglo RTA variando el ángulo de incidencia. Esto muestra un máximo en el ángulo crítico y un mínimo que es la resonancia de la luz incidente en el material, debido a la excitación de plasmones de superficie (SP). El mínimo se encuentra en un ángulo característico, el cual se le conoce como ángulo del plasmón. La resonancia o el decaimiento en la reflectancia es debido a la excitación del plasmón de superficie en la interface, que en un arreglo RTA ocurre en la interface metal-aire.

Sin embargo, cuando la película de plata en el arreglo RTA tiene una superficie rugosa, la figura 1 se ve modificada por el esparcimiento de luz, lo cual se manifiesta en una disminución en la reflexión especular. De acuerdo con esto, uno de los problemas fundamentales en el crecimiento de películas delgadas es precisamente que se producen irregularidades en la superficie (rugosidad) ya sea por la técnica del crecimiento mismo o por la oxidación que es generada por el medio ambiente, la cual es detectable bajo ciertas condiciones de la longitud de onda de un haz incidente, dando como consecuencia que el haz reflejado sufra un cambio continuo con respecto al ángulo de esparcimiento, y por lo tanto, la intensidad de la reflexión especular y la forma de la luz esparcida depende en gran medida del grado de rugosidad.

Antes de comenzar formalmente con este trabajo, consideremos la siguiente pregunta la cual creemos que es importante para el análisis cuantitativo del campo esparcido por superficies rugosas. ¿Para qué valores de longitud de onda la reflexión especular, en una superficie, cambia en un esparcimiento difuso? o en otras palabras, ¿Cuándo una superficie lisa se vuelve rugosa? Esto implica que la "rugosidad" de una superficie no es una propiedad intrínseca de ella, sino que depende de la longitud de onda de la radiación incidente. En la siguiente sección analizaremos estas preguntas por medio del criterio de Rayleigh.

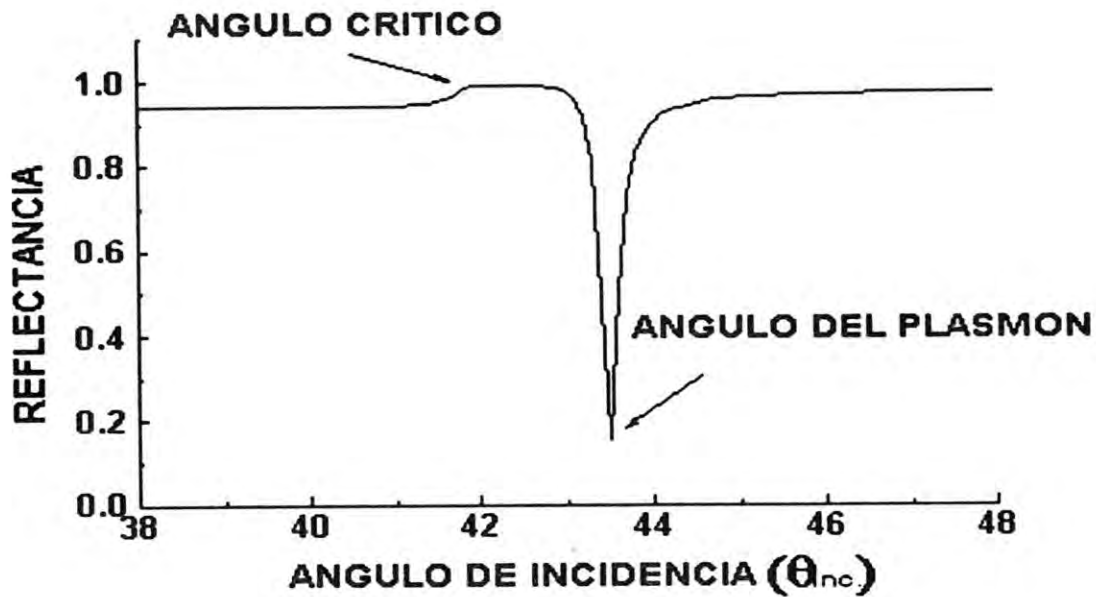


Figura 1: En la gráfica se muestra la reflectancia, en un sistema ATR, con respecto al ángulo de incidencia para una película de plata con superficies lisas, de un grosor de 500\AA y constante dieléctrica $\epsilon = (0.04, 4.10)^2$, con una longitud de onda de 6328\AA del haz incidente.

1.1. CRITERIO DE RAYLEIGH (¿Rugoso o Liso?)

Rayleigh [8] sugiere un camino para formular la relación de la altura de la superficie rugosa y el ángulo de incidencia de la siguiente manera: considere 2 rayos que inciden sobre una superficie con irregularidades de altura h y ángulo γ del rayo con respecto a la superficie, tal como se muestra en la figura 2. La diferencia de camino óptico entre estos dos rayos es

$$\Delta r = 2h \sin \gamma,$$

de aquí que la diferencia de fase sea,

$$\Delta\varphi = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \gamma = \frac{4\pi h}{\lambda} \cos \theta_{inc}. \quad (1)$$

donde k y λ son el número y longitud de onda respectivamente. En el caso que la diferencia de fase sea pequeña (tienda a cero) en la ecuación (1), los dos rayos estarán entre ellos con la misma fase, entonces estamos hablando de una superficie perfectamente lisa. Si la diferencia de fase se incrementa, los 2 rayos pueden llegar a interferir entre sí con $\Delta\varphi = \pi$, por lo que tendrán fases opuestas y se cancelarán, y si no existe un flujo de energía en esa dirección, significa que es distribuido en otras direcciones. Por lo tanto, para $\Delta\varphi = \pi$ se considera la superficie rugosa, y para $\Delta\varphi = 0$ hay una reflexión especular y por lo tanto la superficie es lisa.

Se establece un número o valor entre estos 2 extremos de diferencia de fase para establecer un criterio, en términos de la altura de la rugosidad, para considerar cuando una superficie es rugosa o lisa, referencia [8]. Por lo general, este valor de diferencia de fase es $\Delta\varphi = \pi/2$, entonces, sustituyendo este valor en la ecuación (1) y despejando h se obtiene una relación que considera una superficie lisa, esto es,

$$h < \frac{\lambda}{8 \sin \gamma} = \frac{\lambda}{8 \cos \theta_{inc}}. \quad (2)$$

la ecuación (2) se le conoce como criterio de Rayleigh, y esta es una forma de considerar que tan rugoso o liso está una superficie dada. Un camino para expresar la idea básica del criterio de Rayleigh es tomar la expresión del lado derecho de la ecuación (1)

$$4\pi \left(\frac{h}{\lambda} \right) \sin \gamma = 4\pi \left(\frac{h}{\lambda} \right) \cos \theta_{inc}. \quad (3)$$

Con la expresión (3) se establece, del criterio de Rayleigh, cuando una superficie es lisa por medio de 2 límites o procesos ópticos, los cuales son

$$1) \frac{h}{\lambda} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 2) \gamma \rightarrow 0.$$

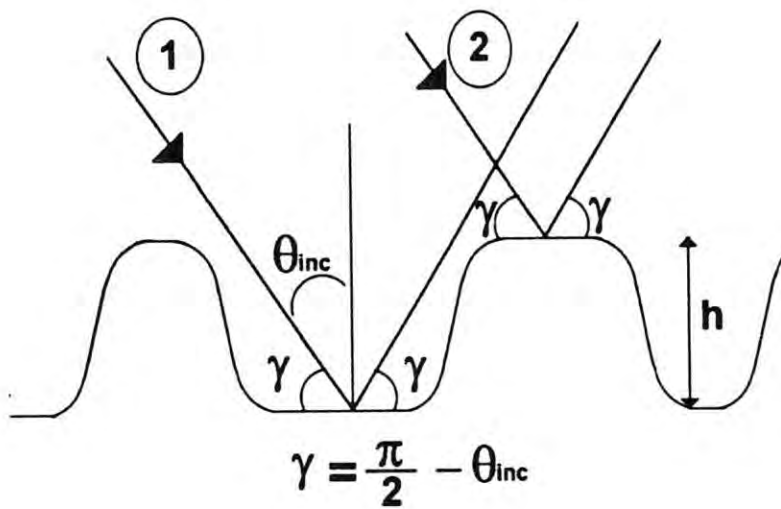


Figura 2: Derivación del criterio de Rayleigh donde se muestra la diferencia de fase entre el rayo 1 y 2 en términos de la altura h de la superficie.

El criterio de Rayleigh esta basado simplemente en la teoría de rayos y describe las irregularidades de la superficie rugosa por un parámetro simple (h). En prácticas de Ingeniería se sigue usando esta aproximación para el esparcimiento por superficies rugosas, debido a la fácil medición de los parámetros (h, γ, λ). Sin embargo, en este trabajo, se obtendrá una expresión cuantitativa más general del esparcimiento de luz por superficies rugosas por el método de Rayleigh-Fano con la ayuda de la teoría de perturbaciones, el cual incluye, además de los tres parámetros anteriores, el grosor de la película (d), longitud de correlación de la superficie rugosa (σ) y la constante dieléctrica del material. Esta expresión incluye el criterio de Rayleigh como un simple límite. Este tratamiento es unicamente aplicable para la siguiente condición:

$$h < \lambda \Rightarrow \frac{h}{\lambda} < 1 \quad (4)$$

la ecuación (4) es el límite de pequeñas rugosidades.

En el siguiente capítulo aplicaremos la aproximación de Rayleigh-Fano para obtener el esparcimiento de luz por un sistema multicapas con una interfaces rugosa y con ayuda del método perturbativo se encontrará el coeficiente diferencial de reflexión, tanto para la parte coherente e incoherente de la luz esparcida, hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad y las expresiones analíticas se presentaran para el caso de una película dieléctrica con una interface rugosa depositada sobre un conductor perfecto.

CAPITULO 2

2. METODO DE RAYLEIGH-FANO

En este capítulo presentamos un formalismo para encontrar el esparcimiento de luz por un sistema de N capas con una interface rugosa, por medio de la aproximación de Rayleigh-Fano y el método de perturbación. Las soluciones analíticas, del esparcimiento de luz, se presentan para el caso de una película dieléctrica con una superficie rugosa depositada en un sustrato conductor perfecto.

Las soluciones de la ecuación de Helmholtz, para medios homogéneos, no satisfacen las condiciones de continuidad en la superficie rugosa, por que las soluciones en la superficie rugosa son diferentes a las soluciones en estos medios. Esto se debe a que la constante dieléctrica depende de cada punto de la función perfil que caracteriza la rugosidad, y, como consecuencia, la región donde se encuentra la superficie rugosa es un medio inhomogéneo.

La aproximación de Rayleigh-Fano, acopla las soluciones de la ecuación de Helmholtz, para medios homogéneos, en la superficie rugosa. Da resultados satisfactorios cuando la razón entre la longitud de onda de la luz incidente (λ) y la altura de la rugosidad (h) es $h/\lambda < 14\%$, para una rugosidad periódica de forma senoidal con ecuación $z = h \cos [(2\pi/a)x]$, referencia [2]. El límite no ha sido bien establecido para el caso de superficies rugosas aleatorias.

Mediante esta aproximación es posible encontrar una integral de esparcimiento que involucre los campos reflejados como transmitidos.

Las propiedades ópticas de los materiales comunmente se calculan por medio de su respuesta en la reflectancia y transmitancia como función de la frecuencia; la propiedad que se relaciona más directamente con la estructura electrónica de los materiales es la función dieléctrica. Para interpretar las medidas experimentales en términos de la propiedad fundamental electrónica de los sólidos requerimos entender las ecuaciones de Maxwell y la naturaleza de interacción entre los campos electromagnéticos con la materia.

Las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica clásica, son las ecuaciones de Maxwell, que en su forma diferencial, en ausencia de cargas (externas) y medios lineales, homogéneos, isotrópicos, no magnéticos y no locales, están dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\end{aligned}$$

donde la relación entre \vec{D} y \vec{E} es $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

La forma de las ondas electromagnéticas que viajan en estos medios las consideraremos planas, cuyos campos eléctricos y magnéticos tienen la siguiente solución matemática

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) \exp(-i\omega t), \quad \vec{B} = \vec{B}(x, y, z) \exp(-i\omega t).$$

sustituyendo estas soluciones en las ecuaciones de Maxwell obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = +i\frac{\omega}{c} \vec{B}, \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\epsilon\frac{\omega}{c} \vec{E}. \quad (8)$$

las soluciones de este sistema de ecuaciones son independientes del tiempo. Además las **condiciones de frontera** son fundamentales para acoplar los campos entre distintos medios y están dadas por el siguiente sistema de ecuaciones,

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n} = 0, \quad (9)$$

$$(\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2) \cdot \hat{n} = 0, \quad (10)$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \times \hat{n} = 0, \quad (11)$$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \hat{n} = 0. \quad (12)$$

para una superficie $S(x, y, z) = 0$, el vector normal a la superficie, ecuación (14) de la referencia [9], es

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} S(x, y, z)}{|\vec{\nabla} S(x, y, z)|}. \quad (13)$$

El campo de la onda reflejada y transmitida, para superficies lisas, satisfacen la ecuación de Helmholtz para medios homogéneos en la frontera cuyas soluciones se encuentran en libros de textos, ver por ejemplo, referencia [10]. Sin embargo cuando la superficie es rugosa, las soluciones a la ecuación de Helmholtz cambian en la frontera.

Como se dijo anteriormente, la aproximación de Rayleigh-Fano acopla los campos, que satisface la ecuación de Helmholtz para medios homogéneos, en la superficie rugosa. Se aplica esta aproximación, para una superficie rugosa unidimensional, la cual se describe en la siguiente sección.

CONDICIONES DEL SISTEMA

Estudiaremos un sistema descrito por las siguientes condiciones:

- i).- La interface es rugosa, cuya función perfil $f(y)$ que caracteriza a dicha rugosidad. Será invariante bajo una translación en el eje x , tal como se muestra en la figura 3. Este tipo de rugosidades se les conoce como rugosidades unidimensional.
- ii).- Que la luz incidente sea linealmente polarizada.
- iii).- Se estudia el caso de la luz incidente transversal magnética (polarización P), el campo magnético perpendicular al plano de incidencia, y transversal eléctrica (polarización S) el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia, donde el plano de incidencia es $\hat{y}-\hat{z}$.
- iv).- Uno de los campos es paralelo a los surcos de la superficie rugosa. Bajo esta condición el campo esparcido tendrá la misma polarización de la luz incidente y estará confinado al plano de incidencia

La condiciones de frontera pueden quedar expresadas en términos de la componente perpendicular al plano de incidencia, del campo eléctrico ó magnético, para polarización S ó P respectivamente. Haciendo uso de la **aproximación de Rayleigh-Fano**, podemos acoplar los campos, que satisfacen las ecuaciones de Helmholtz para medios homogéneos, en la frontera.

Usando las ecuaciones (5 – 8) y las ecuaciones (9 – 12), donde en este caso $S(x, y, z) = z - f(y)$ en la ecuación (13), las condiciones de frontera quedan expresadas en términos de la componente perpendicular al plano de incidencia, de los campos, tanto para polarización P y S (Apéndice I),

$$U_{1x}|_{z=f(y)} = U_{2x}|_{z=f(y)}, \quad y \quad \frac{1}{w_1} \frac{\partial U_{1x}}{\partial n} \Big|_{z=f(y)} = \frac{1}{w_2} \frac{\partial U_{2x}}{\partial n} \Big|_{z=f(y)}, \quad (14)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df(y)}{dy}\right)^2 + 1}} \left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{df(y)}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \right].$$

$\partial/\partial n$ es la derivada normal en la superficie la cual esta dada en términos de la función perfil $f(y)$, $w = \epsilon$ ó 1 en polarización P ó S y U es la componente en el eje \hat{x} del vector del campo magnético ó eléctrico en polarización P ó S respectivamente.

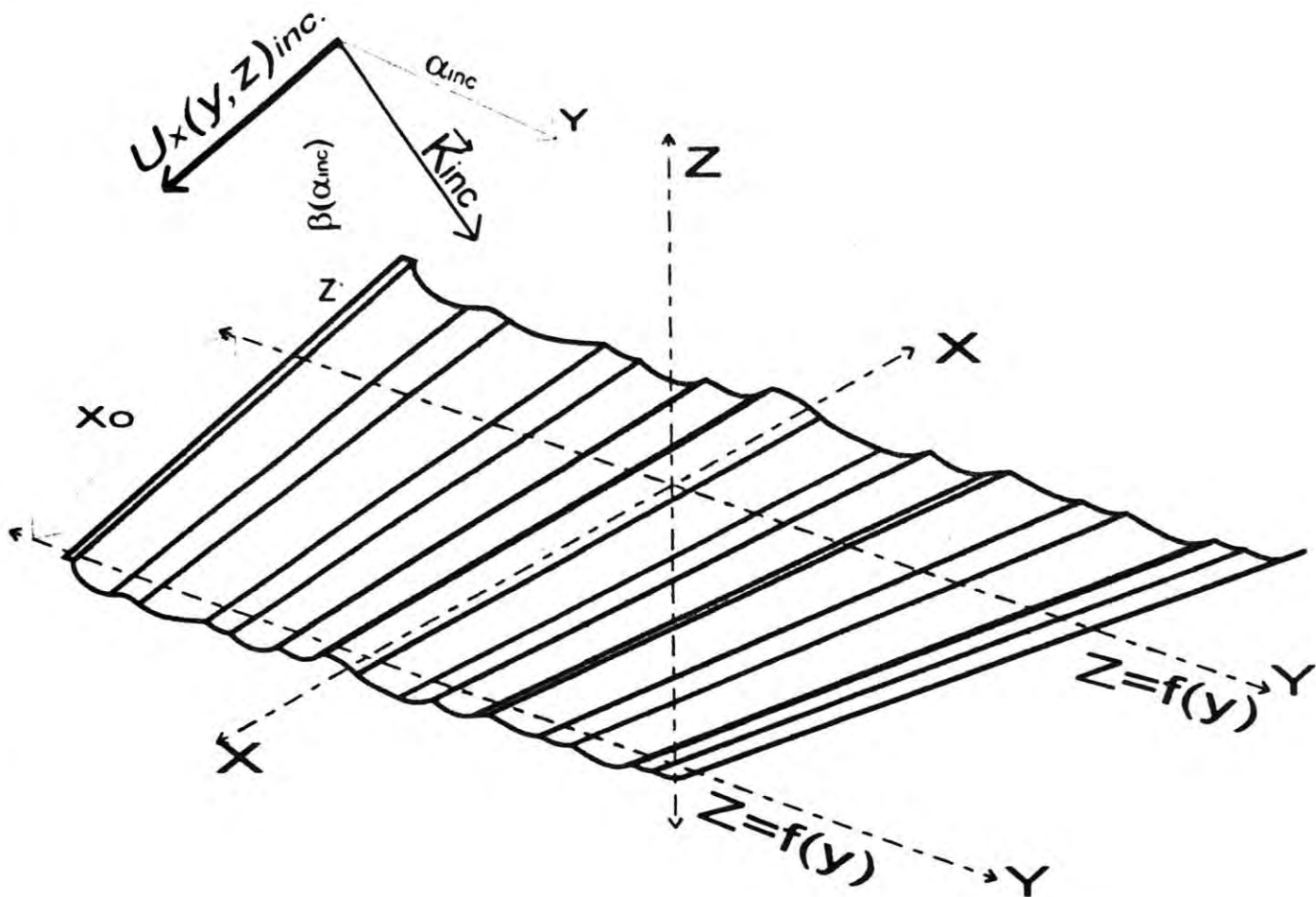


Figura 3: Geometría empleada en este estudio. El plano de incidencia esta en $\hat{y}-\hat{z}$. $U_x(y, z)$ es la componente perpendicular al plano de incidencia del campo eléctrico o magnético para polarización S o P respectivamente

La ecuación (14) es otra forma de expresar las condiciones de frontera, ya que estas quedan determinadas únicamente en términos de la componente, del vector del campo eléctrico ó magnético en polarización S ó P, perpendicular al plano de incidencia.

En la siguiente sección se aplicará la aproximación de Rayleigh-Fano en un sistema multicapas con interfaces rugosas para encontrar una ecuación integral que relaciona la amplitud del campo reflejado a la incidente, el cual se resolverá por teoría de perturbaciones hasta el k - ésimo orden en el coeficiente de reflexión.

2.1. APLICACION DEL METODO DE RAYLEIGH-FANO

Los campos esparcidos por un sistema multicapas, con interfaces tanto con rugosidades periódicas como rugosidades aleatorias, ha sido estudiado previamente por García-Llamas *et al* [11], [12].

Ellos aplican la aproximación de Rayleigh-Fano para encontrar ecuaciones matriciales e integrales de esparcimiento por superficies rugosas periódicas y aleatorias respectivamente, los cuales relacionan los campos reflejados, como transmitidos a la amplitud de la onda incidente.

En esta sección se describen brevemente los pasos para encontrar la integral de esparcimiento de los campos reflejados por un sistema multicapas con interfaces rugosas. Posteriormente esta integral de esparcimiento se resolverá por el método perturbativo para encontrar los diferentes órdenes del coeficiente de reflexión, que es uno de los objetivos teóricos del presente trabajo. En la figura 4 se muestra un sistema multicapas con interfaces con rugosidad aleatoria, el cual esta compuesto de $N + 2$ medios y N capas o películas delgadas.

La componente del campo magnético (eléctrico), perpendicular al plano de incidencia ($\hat{y} - \hat{z}$), de la onda incidente, en polarización P (S), en este sistema es de la siguiente manera

$$U_{inc}(y, z) = \exp\{+i[\alpha_{inc}y + \beta_1(\alpha_{inc})z]\}.$$

donde la amplitud de onda incidente esta normalizado a uno, α_{inc} y $\beta_1(\alpha_{inc})$ son las componentes paralela y perpendicular a la superficie del vector de onda incidente respectivamente, las cuales estan expresadas de la siguiente manera,

$$\alpha_{inc} = (2\pi/\lambda)\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_{inc}, \quad y \quad \beta_1(\alpha_{inc}) = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2\epsilon_1 - \alpha_{inc}^2}.$$

La onda reflejada es una superposición continua de ondas, que depende de dicha rugosidad, en este caso tendremos un cambio continuo en la reflexión en cada punto de la función perfil, por lo tanto dicha onda es

$$U_r(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\alpha) \exp\{+i[\alpha y - \beta_1(\alpha)z]\} d\alpha.$$

α es la componente paralela a la superficie del vector de onda. Para el caso donde $|\alpha| = (2\pi/\lambda)\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_s \leq (2\pi/\lambda)\sqrt{\epsilon_1}$, $\beta_1(\alpha)$ es real y representan ondas radiativas (viajeras), θ_s es el ángulo de esparcimiento y su rango es de $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y cuando $|\alpha| \geq (2\pi/\lambda)\sqrt{\epsilon_1}$, $\beta_1(\alpha)$ es imaginaria y representan ondas evanescentes.

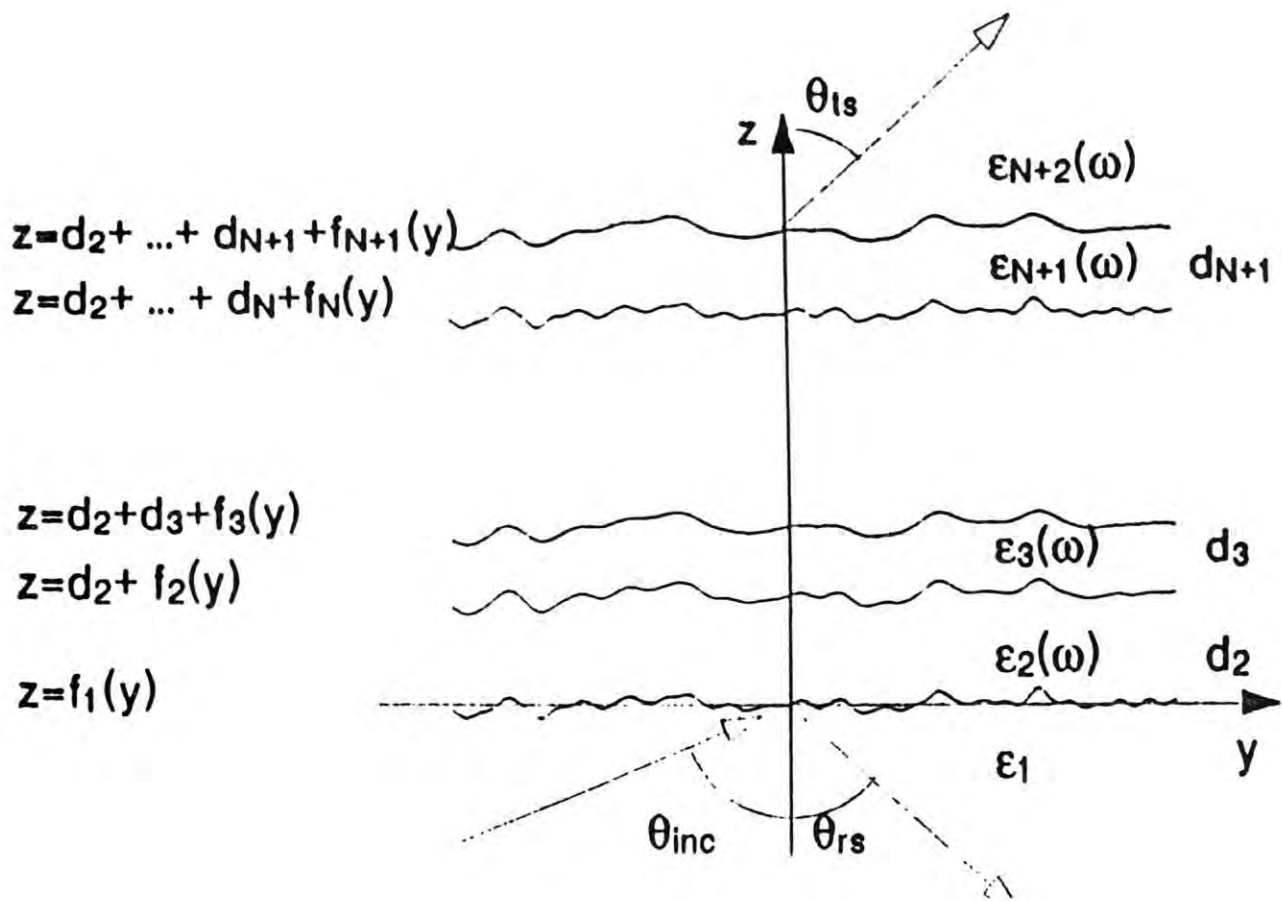


Figura 4: Sistema de N capas o películas delgadas, con interfaces rugosas aleatorias, donde el medio incidente tiene constante dieléctrica ϵ_1 y el medio transmitido ϵ_{N+2} , el plano de incidencia de la luz es $\hat{y} - \hat{z}$

La onda en el medio ϵ_1 esta dado como la suma de la onda incidente mas la onda esparcida.

$$U_1(y, z) = \exp\{+i[\alpha_{inc}y + \beta_1(\alpha_{inc})z]\} + \int_{-\infty}^{\infty} r(\alpha) \exp\{+i[\alpha y - \beta_1(\alpha)z]\} d\alpha. \quad (15)$$

La onda en la capa j -ésima, son ondas que viajan hacia la izquierda y derecha dentro de ésta, y se expresa de la siguiente forma

$$U_j(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \{a_j(\alpha) \exp\{+i[\alpha y + \beta_j(\alpha)z]\} + b_j(\alpha) \exp\{+i[\alpha y - \beta_j(\alpha)z]\}\} d\alpha, \quad (16)$$

donde $j = 2, 3, \dots, N + 1$. La onda transmitida o en el medio $N + 2$ es

$$U_{N+2}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} t(\alpha) \exp\{+i[\alpha y + \beta_{N+2}(\alpha)z]\} d\alpha, \quad (17)$$

y el vector de onda perpendicular a la interface del medio j -ésimo, en este sistema multicapa, esta dado por la siguiente expresión

$$\beta_j(\alpha) = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 \epsilon_j - \alpha^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N + 2.$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (15), (16) y (17) en las condiciones de frontera de cada interface, ecuaciones (14), llegamos a la siguiente integral de esparcimiento, ecuación (31) de la referencia [12]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^{(N+1)}(\gamma, \alpha) r(\alpha) d\alpha = H^{(N+1)}(\gamma, \alpha_{inc}). \quad (18)$$

donde $r(\alpha)$ representa el campo esparcido, α_{inc} , α y γ son valores diferentes de la componente paralela a la superficie del vector de onda, $G^{(N+1)}(\gamma, \alpha)$ y $H^{(N+1)}(\gamma, \alpha_{inc})$ son funciones que dependen tanto de las propiedades ópticas de las películas así como de sus espesores y del tipo de polarización que se esta utilizando, además estas llevan la información de la función perfil $f(y)$ que caracteriza a la superficie rugosa, a estas funciones las llamaremos funciones del sistema. Las expresiones generales de las funciones del sistema estan dadas por las ecuaciones (31) y (32) y de la referencia [12] y se calculan en forma recursiva.

Las funciones del sistema se caculan en forma recursiva a partir de la misma cantidad asociada a las condiciones de frontera para la capa j -ésima, es decir, se calcula primero el de una sola película ($N = 1$) y así sucesivamente hasta el número total de N capas.

En la siguiente sección se simplifican estas funciones del sistema para el caso de un sistema multicapas con una interface rugosa, lo cuál permite desarrollar un formalismo matemático, en teoría de perturbaciones, para resolver analíticamente la integral de esparcimiento, ecuación 18, para encontrar los diferentes ordenes en el coeficiente de reflexión.

Las soluciones generales de las funciones del sistema, dependen de cuál es la interface rugosa así como del número N de capas.

2.2. SOLUCION DE LA INTEGRAL DE ESPARCIMIENTO POR TEORIA DE PERTURBACION

El desarrollo matemático, en teoría de perturbación, que se presenta en esta sección es la parte medular del trabajo, ya que sera válido para cualquier sistema que contenga un número N de capas con una interface rugosa.

Las funciones del sistema $G^{(N+1)}(\gamma, \alpha)$ y $H^{(N+1)}(\gamma, \alpha_{inc})$ son funciones para el sistema multicapas con todas sus interfaces rugosas aleatorias. Ahora bien, supongamos que el sistema multicapa tenga una de sus interfaces rugosas, digamos la l - ésima y las demás lisas, esta condición permite que las funciones del sistema se simplifiquen de tal forma que se puede establecer una serie de potencias en términos de la función perfil $f_l(y)$ de la interface rugosa, esto es,

$$G^{(N+1)}(\gamma, \alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} Q^{(p)}(\gamma, \alpha) F_{\alpha-\gamma} \{ [f_l(y)]^p \} \chi^p, \quad (19)$$

y

$$H^{(N+1)}(\gamma, \alpha_{inc}) = \sum_{q=0}^{\infty} O^{(q)}(\gamma, \alpha_{inc}) F_{\alpha_{inc}-\gamma} \{ [f_l(y)]^q \} \chi^q. \quad (20)$$

donde χ es un valor constante entre $[0, 1]$, y el cual da el número de orden en la expresión, y $Q^{(p)}(\gamma, \alpha)$ y $O^{(q)}(\gamma, \alpha_{inc})$ son cantidades que se obtienen de las funciones del sistema multicapas con una interface rugosa. Estas dependen de cual es la interface rugosa y del número N de capas. Más adelante presentaremos analíticamente estas funciones para el caso de una película dieléctrica depositada en metal y en un conductor perfecto. $F_{\alpha-\gamma} \{ [f_l(y)]^p \}$ es la transformada de Fourier de la p - ésima potencia de la función perfil $f_l(y)$ en la l - ésima interface y tiene la siguiente propiedad,

$$F_{\gamma} \{ [f_l(y)]^p \} = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} f_l(y)^p \exp\{-i\gamma y\} dy = \int \dots \int F_{\gamma-\gamma'-\gamma''\dots-\gamma^{p-1}} F_{\gamma'} \dots F_{\gamma^{p-1}} d\gamma' d\gamma'' \dots d\gamma^{p-1}.$$

También realizamos serie de potencias en términos de la función perfil $f_l(y)$ para los coeficientes de reflexión.

$$r(\alpha) = \sum_{s=0}^{\infty} r^{(s)}(\alpha) \chi^s. \quad (21)$$

Sustituyendo (19), (20) y (21) en la ecuación (18) se obtiene la siguiente expresión para $r^{(s)}(\alpha)$,

$$\sum_{p,s=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{(p)}(\gamma, \alpha) F_{\alpha-\gamma} \{ [f_l(y)]^p \} r^{(s)}(\alpha) \chi^{p+s} d\alpha = \sum_{q=0}^{\infty} O^{(q)}(\gamma, \alpha_{inc}) F_{\alpha_{inc}-\gamma} \{ [f_l(y)]^q \} \chi^q.$$

esta expresión se puede organizar, en términos de manejar con mayor facilidad los diferentes órdenes en la reflexión.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^k \int_{-\infty}^{\infty} Q^{(s)}(\gamma, \alpha) F_{\alpha-\gamma} \{ [f_l(y)]^s \} r^{(k-s)}(\alpha) d\alpha - O^{(k)}(\gamma, \alpha_{inc}) F_{\alpha_{inc}-\gamma} \{ [f_l(y)]^k \} \right] \chi^k = 0 \quad (22)$$

La expresión (22) es la descomposición a cualquier orden, para el coeficiente de reflexión, por el método perturbativo de la integral de esparcimiento, de aquí que, el coeficiente a orden cero es

$$r^{(0)}(\alpha) = \frac{O^{(0)}(\alpha, \alpha_{inc})}{Q^{(0)}(\alpha, \alpha)} \delta(\alpha - \alpha_{inc}). \quad (23)$$

La ecuación (23) es el coeficiente de reflexión cuando la interface es lisa (reflexión especular), o sea, la reflexión no perturbada. La expresión, en la ecuación (22), queda expresada para el coeficiente de reflexión a primer orden de la siguiente manera

$$\left[Q^{(0)}(\gamma, \gamma) r^{(1)}(\gamma) + Q^{(1)}(\gamma, \alpha_{inc}) r_0 F_{\alpha_{inc}-\gamma} [f_l(y)] \right] \chi = O^{(1)}(\gamma, \alpha_{inc}) F_{\alpha_{inc}-\gamma} [f_l(y)] \chi, \quad (24)$$

donde $r_0 = O^{(0)}(\alpha_{inc}, \alpha_{inc}) / Q^{(0)}(\alpha_{inc}, \alpha_{inc})$, el coeficiente de reflexión a primer orden,

$$r^{(1)}(\gamma) = \left[\frac{O^{(1)}(\gamma, \alpha_{inc}) - Q^{(1)}(\gamma, \alpha_{inc}) r_0}{Q^{(0)}(\gamma, \gamma)} \right] F_{\alpha_{inc}-\gamma} [f_l(y)]. \quad (25)$$

En la ecuación (25) muestra que el coeficiente de reflexión a primer orden cambia continuamente para cada punto de la función perfil, esto es, depende de la función perfil que caracteriza la rugosidad y la función perfil $f_l(y)$ lleva el orden en la expresión.

Se encuentra una relación de recurrencia de orden k ($k = 2, 3, \dots, n$) para la ecuación (22), esto es,

$$Q^{(0)}(\gamma, \gamma) r^{(k)}(\gamma) = E^{(k)}(\gamma, \alpha_{inc}) F_{\alpha_{inc}-\gamma} \{ [f_l(y)]^k \} - \sum_{j=1}^{k-1} \int_{-\infty}^{+\infty} Q^{(j)}(\gamma, \alpha) F_{\alpha-\gamma} \{ [f_l(y)]^j \} r^{(k-j)}(\gamma) d\alpha, \quad (26)$$

donde $E^{(k)}(\gamma, \alpha_{inc})$, es una función dependiente de las funciones del sistema multicapas

$$E^{(k)}(\gamma, \alpha_{inc}) = O^{(k)}(\gamma, \alpha_{inc}) - Q^{(k)}(\gamma, \alpha_{inc}) r_0.$$

Hasta aquí, se han obtenido los coeficientes de reflexión de k -ésimo orden por el método perturbativo. Con esto podemos calcular el esparcimiento de luz por medio del coeficiente diferencial de reflexión a 4to orden en la altura de la rugosidad. En la siguiente sección se definirá dicho coeficiente.

2.3. COEFICIENTE DIFERENCIAL DE REFLEXION

El Coeficiente Diferencial de Reflexión (DRC) es el flujo de energía reflejada alrededor del ángulo de esparcimiento, normalizado a la energía incidente, esto es, referencia [7],

$$DRC = \frac{\partial R}{\partial \theta_s} = \frac{1}{\vec{S}_i \cdot \hat{k}} \frac{d(\vec{S}_r \cdot \hat{k})}{d\theta_s}, \quad (27)$$

donde $d(\vec{S}_r \cdot \hat{k})/d\theta_s$ es la densidad de flujo temporalmente promediado que cruza el plano $z = \text{const} > [f(y)]_{\text{max}}$, donde \hat{k} es el vector normal a la superficie. La expresión $\partial R/\partial \theta_s$ permite encontrar la distribución de la energía esparcida con respecto al ángulo de esparcimiento θ_s , en un rango desde $[-\pi/2, +\pi/2]$.

Ahora bien, dado que $r(\alpha)$ tiene un número aleatorio de valores, debido a que las ondas son reflejados en un número aleatorio de direcciones en cada punto de la función perfil $f_R(y)$, necesitamos de un tratamiento estadístico que involucre un promedio en la intensidad del campo esparcido para cada dirección del ángulo de esparcimiento θ_s . Para esto, se establecen las propiedades aleatorias de la función perfil definiendo la distribuciones de altura de la rugosidad y espectro rugoso.

2.4. SUPERFICIE RUGOSA

La superficie rugosa se asume como un proceso aleatorio estacionario, y se expresa en término de los parámetros específicos de la rugosidad que son la altura de la rugosidad y la distancia entre dispersores o longitud de correlación. Cuando la luz incide en la superficie rugosa, produce un momento adicional al vector de onda paralelo a la superficie y entonces puede excitar un polariton superficial o un modo guiado, siempre y cuando las condiciones del sistema sean las apropiadas para excitarlos. Las propiedades que se emplean en este tratamiento teórico son las siguientes [4]:

Un proceso aleatorio en la superficie rugosa definido por los siguientes promedios:

$$\langle f(y) \rangle = 0, \quad (28)$$

donde $\langle \rangle$ representa un promedio de ensemble de realizaciones de la superficie, en este caso indica que la superficie es lisa en promedio. Además asumimos que las propiedades aleatorias de la función perfil $f(y)$ tiene una distribución simétrica de alturas, esto significa que tiene la misma probabilidad de encontrar picos y valles, por lo tanto, dicha distribución son todas aquellas que sean simétricas.

El promedio de la función de autocorrelación es,

$$\langle f(y)f(y') \rangle = h^2 \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{\sigma^2}\right], \quad (29)$$

donde $h^2 = \langle f(y)^2 \rangle$ es la raíz cuadrática media de la altura de la superficie, σ es la longitud de correlación, que es una medida de la distancia promedio entre los picos y valles consecutivos sobre la superficie. La función de autocorrelación de la superficie tiene una función Gaussiana, ecuación (29). Esta expresión proporciona la distribución de los dispersores, donde la distancia promedio entre dispersor y dispersor es σ .

$$\langle f(y)f(y')f(y'') \rangle = 0, \quad (30)$$

La ecuación (30) se satisface debido a que se considera una distribución simétrica de alturas, y

$$\begin{aligned} \langle f(y)f(y')f(y'')f(y''') \rangle &= \langle f(y)f(y') \rangle \langle f(y'')f(y''') \rangle + \\ &\langle f(y)f(y'') \rangle \langle f(y')f(y''') \rangle + \langle f(y)f(y''') \rangle \langle f(y')f(y'') \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

La ecuación (31) es una propiedad de este tipo de distribuciones simétricas, cumple con el teorema del límite central.

2 La transformada de Fourier de la función de autocorrelación es el **espectro de rugosidad** y esta dado por la siguiente expresión.

$$g(|\alpha|) = F_{\alpha} \{ \langle f(y)f(y') \rangle \} = \frac{h^2 \sigma}{2\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{\sigma^2 \alpha^2}{4} \right). \quad (32)$$

Estas propiedades son las necesarias para el cálculo perturbativo del esparcimiento hasta 4to. orden en la altura de la rugosidad. De la expresión (32) se obtiene la siguiente propiedad, la cual será de utilidad en el cálculo analítico:

$$\langle F_{\alpha} \{ f(y) \} F_{\gamma}^* \{ f(y') \} \rangle = g(|\alpha|) \delta(\alpha - \gamma). \quad (33)$$

Con estas propiedades estadísticas podemos calcular el esparcimiento de la luz. Ahora bien, la rugosidad de la superficie produce que algunas ondas reflejadas estén en fase y otras ondas no lo estén, por lo tanto, existen dos casos uno para la parte coherente y otro para la parte incoherente de la luz reflejada..

En la siguiente sección definiremos estos casos y se calcularán, empleando las propiedades estadísticas de la rugosidad, hasta cuarto orden en la altura de la superficie.

2.5. DRC INCOHERENTE

El DRC incoherente se produce cuando la diferencia de fase de las ondas reflejadas de la luz en una superficie rugosa es una función aleatoria en cada punto de la función perfil $f(y)$, esto quiere decir que la fase no es una constante y como consecuencia no se tendrán máximos y mínimos, por lo que la intensidad de la luz reflejada es distribuido en una región de 2π . La

diferencia de fase entre dos ondas 1 y 2 esparcidas en los puntos $f(y_1)$ y $f(y_2)$ de la superficie mostrada en la figura 5, esta dada por la relación $\Delta\varphi_{12} = \vec{\Delta k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$,

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} [(y_1 - y_2) (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) + (f_1 - f_2) (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)], \quad (34)$$

donde $f_1 = f(y_1)$ y $f_2 = f(y_2)$. La ecuación (34) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} (y_1 - y_2) (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) + p[f(y)],$$

aquí $p[f(y)]$ es una función aleatoria de la función perfil, esto muestra que en una superficie rugosa la luz esparcida tiene una parte incoherente. Por lo que el DRC incoherente se define como:

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_1} \cos^2 \theta_s}{\lambda \cos \theta_{inc}} [\langle |r(\alpha)|^2 \rangle - |\langle r(\alpha) \rangle|^2]. \quad (35)$$

Esta ecuación permite encontrar la energía de las ondas reflejadas que son esparcidas en el ángulo θ_s , y no la energía de la reflexión especular.

Ahora sustituyendo la ecuación (21), con $\chi = 1$, en la ecuación (35) y reteniendo términos hasta cuarto orden en la altura en la rugosidad, ecuaciones (23), (25) y (26), y empleando las propiedades estadísticas de la superficie rugosa, ecuaciones (28) – (31), llegamos a la siguiente expresión

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \mathbf{I}^{(1,1)}(\alpha) + \mathbf{I}^{(2,2)C}(\alpha) + \mathbf{I}^{(2,2)L}(\alpha) + \mathbf{I}^{(3,1)}(\alpha), \quad (36)$$

donde

$$\mathbf{I}^{(1,1)}(\alpha) = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_1} \cos^2 \theta_s}{\lambda \cos \theta_{inc}} \langle |r^{(1)}(\alpha)|^2 \rangle, \quad (37)$$

$$\mathbf{I}^{(2,2)C}(\alpha) + \mathbf{I}^{(2,2)L}(\alpha) = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_1} \cos^2 \theta_s}{\lambda \cos \theta_{inc}} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^4 \left[\langle |r^{(2)}(\alpha)|^2 \rangle - |\langle r^{(2)}(\alpha) \rangle|^2 \right], \quad (38)$$

y

$$\mathbf{I}^{(1,3)}(\alpha) = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_1} \cos^2 \theta_s}{\lambda \cos \theta_{inc}} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^4 2 \text{real} \left\{ \langle r^{(3)}(\alpha) r^{(1)*}(\alpha) \rangle \right\}. \quad (39)$$

el término a segundo orden es $\mathbf{I}^{(1,1)}(\alpha)$ y analíticamente es

$$\mathbf{I}^{(1,1)}(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi\epsilon_1} \cos^2 \theta_s}{\cos \theta_{inc}} \left| \frac{E^{(1)}(\alpha, \alpha_{inc})}{Q^{(0)}(\alpha, \alpha)} \right|^2 \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{2\pi\sigma}{\lambda} \right) \exp \left[\frac{-\sigma^2 \alpha^2}{4} \right].$$

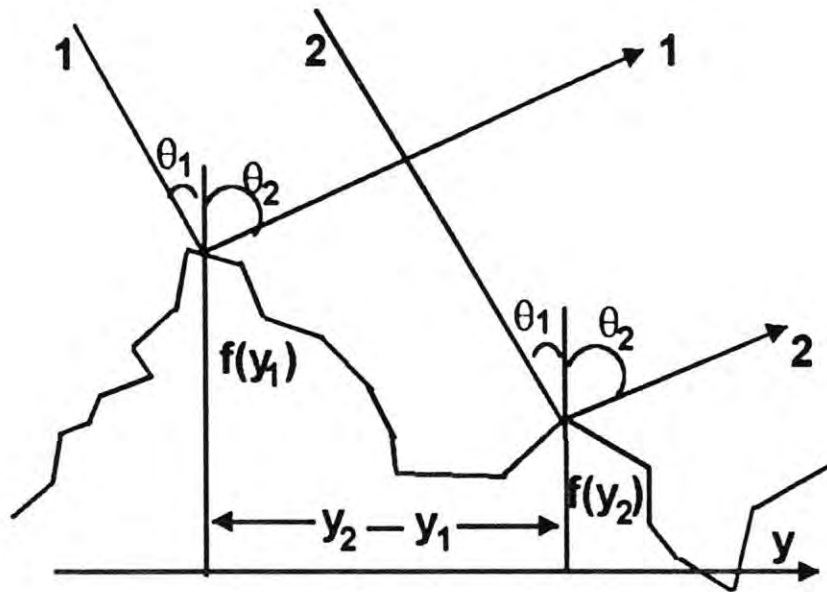


Figura 5: Esparcimiento de la parte incoherente de la Luz. En la figura se observa que el rayo 1 incide a la superficie rugosa con un ángulo de θ_1 y el rayo 2 es rebotado con un ángulo θ_2 .

y a cuarto orden $\mathbf{I}^{(2,2)C}(\alpha) + \mathbf{I}^{(2,2)L}(\alpha) + \mathbf{I}^{(1,3)}(\alpha)$. La mayoría de los trabajos sobre el esparcimiento de luz por sistemas multicapas con interfaces rugosas se realiza hasta una contribución a segundo orden.

Dado que la distribución de alturas se supone simétrica, no hay contribución a primer y a tercer orden.

La ecuación (38) esta compuesta del término líder y cruzado, $\mathbf{I}^{(2,2)L}(\alpha)$ y $\mathbf{I}^{(2,2)C}(\alpha)$ respectivamente, los cuales dan efecto de las ondas incoherentes, sin embargo, el término $\mathbf{I}^{(2,2)C}(\alpha)$, si se dan las condiciones necesarias, puede contener ondas coherentes en posiciones angulares bien específicas.

Hasta aquí se ha mostrado el cálculo analítico del $\langle \text{DRC} \rangle$ incoherente, sin embargo, también existe la parte coherente de la luz, el cual llamamos $\langle \text{DRC} \rangle$ coherente. En la siguiente sección se definirá este caso.

2.6. DRC COHERENTE

El DRC coherente es cuando la diferencia de fase entre las ondas es una constante, en este caso la energía es concentrada en un punto en el espacio, esto es, hay interferencia constructiva, por lo tanto la ecuación (34) es igual a cero, esto ocurre solamente cuando el ángulo de esparcimiento θ_s es igual al ángulo $-\theta_{inc}$, por lo tanto la ecuación (27) es

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coher} = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_{inc}}{\lambda} \langle |r(\alpha)|^2 \rangle \quad \text{para } \alpha = \alpha_{inc}.$$

Esta ecuación permite calcular la energía del haz especular.

La solución de la parte coherente de la luz esparcida, se obtiene de una manera similar con en el caso anterior y esta expresada,

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coher} = \mathbf{I}_C^{(2)}(\alpha_{inc}) + \mathbf{I}_C^{(4)}(\alpha_{inc}), \quad (40)$$

donde

$$\mathbf{I}_C^{(2)}(\alpha) = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_{inc}}{\lambda} [|r_0|^2 + 2 \text{real} \{ r_0^* \langle r^{(2)}(\alpha_{inc}) \rangle \} + \langle |r^{(1)}(\alpha_{inc})|^2 \rangle], \quad (41)$$

y

$$\mathbf{I}_C^{(4)}(\alpha) = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_{inc}}{\lambda} \left\{ 2 \text{real} [r_0^* \langle r^{(4)}(\alpha_{inc}) \rangle + \langle r^{(3)}(\alpha) r^{(1)*}(\alpha_{inc}) \rangle] + \langle |r^{(2)}(\alpha_{inc})|^2 \rangle \right\}. \quad (42)$$

La contribución a segundo orden es $\mathbf{I}_C^{(2)}(\alpha)$ y la contribución a cuarto orden es $\mathbf{I}_C^{(4)}(\alpha)$, de igual forma como en el caso anterior las contribuciones a primer y tercer orden son cero.

Hasta aquí se ha presentado un formalismo general para el estudio del esparcimiento de luz por un sistema de N capas con una interface rugosa utilizando el método perturbativo, hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad. El método perturbativo nos permite calcular analíticamente la integral de esparcimiento, obtenida usando la aproximación de Raleigh-Fano, para obtener los coeficientes de reflexión a cualquier orden.

Estos coeficientes de reflexión se utilizan para el cálculo del DRC coherente e incoherente hasta los términos a cuarto orden en la altura de la rugosidad. Las contribuciones a segundo orden, (37) y (41), proporcionan el esparcimiento de luz que consiste de un solo rebote en la superficie, mientras que a cuarto orden, (38), (39) y (42), da el esparcimiento provocado por un doble rebote.

Efectos como el pico de retroesparcimiento, un pico angosto en la dependencia angular del esparcimiento en la dirección del haz incidente, solo puede ser encontrado cuando se incluyen al menos la contribución a cuarto orden. En el esparcimiento de luz por pequeñas rugosidades dicho fenómeno está asociado con la excitación de modos electromagnéticos soportados por el sistema estudiado.

En la siguiente sección se encuentran analíticamente las soluciones de las ecuaciones (36) y (40) para un sistema de una película dieléctrica depositada en un sustrato de conductor perfecto, y, posteriormente, en el siguiente capítulo se realizan los cálculos numéricos para este tipo de sistema. Por simplicidad del cálculo numérico, dicho sistema está compuesto por una sola película delgada, sistema con $N = 1$ capa.

2.7. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR UNA CAPA.

En esta sección se calcula el DRC Coherente e Incoherente de la luz esparcida por una película delgada con una superficie rugosa aleatoria, esto se realiza en polarización S con plano de incidencia $\hat{y} - \hat{z}$, el sistema consiste de 3 regiones, una región que es el vacío el cual se encuentra en $z < f(y)$, una película dieléctrica caracterizada por una constante dieléctrica ϵ_2 en la región $f(y) < z < d$, y un sustrato metálico en la región $z > d$. La luz incide del vacío hacia la película cuya superficie es rugosa como se muestra en la figura 6.

La integral de esparcimiento de reflexión para una película con interfaces rugosas esta dada por la ecuación (18), con $N = 1$ capa, cuyas expresiones analíticas de las funciones del sistema se encuentran en las ecuaciones (46) y (47) de la referencia [12]. Estas expresiones se simplifican cuando una interface es rugosa y la otra lisa, en este caso la superficie lisa esta en la interface dieléctrico-metal, esto es $f_2(y) = 0$, por lo tanto tenemos que las funciones del sistema son,

$$G^{(2)}(\gamma, \alpha) = \frac{1}{\beta_2(\gamma)} [D^{(2)}(\gamma, \gamma) D^{(1)}(\gamma, \alpha) \exp[+\iota\beta_2(\gamma)d] I_{\alpha-\gamma}^{(1)}\{-\iota[\beta_1(\alpha) + \beta_2(\gamma)]\} + C^{(2)}(\gamma, \gamma) C^{(1)}(\gamma, \alpha) \exp[-\iota\beta_2(\gamma)d] I_{\alpha-\gamma}^{(1)}\{-\iota[\beta_1(\alpha) - \beta_2(\gamma)]\}], \quad (43)$$

y

$$H^{(2)}(\gamma, \alpha) = \frac{1}{\beta_2(\gamma)} [D^{(2)}(\gamma, \gamma) C^{(1)}(\gamma, \alpha) \exp[+\iota\beta_2(\gamma)d] I_{\alpha-\gamma}^{(1)}\{+\iota[\beta_1(\alpha) - \beta_2(\gamma)]\} + C^{(2)}(\gamma, \gamma) D^{(1)}(\gamma, \alpha) \exp[-\iota\beta_2(\gamma)d] I_{\alpha-\gamma}^{(1)}\{+\iota[\beta_1(\gamma) + \beta_2(\alpha)]\}]. \quad (44)$$

Hasta aquí, se ha encontrado las soluciones de las funciones del sistema para una película con la rugosidad en la interface (vacío-dieléctrico), tanto para polarización P como S.

Se hace una simplificación adicional para las condiciones de frontera en la interface dieléctrico-conductor perfecto en la figura 6, las cuales difieren de las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (14), ya que las ondas no penetran en esta interface, por lo que las condiciones de frontera se expresan.

para polarización S,

$$U_2[y, z] |_{z=d} = 0,$$

y para polarización P,

$$\frac{1}{w_2} \left. \frac{dU_2[y, z]}{dz} \right|_{z=d} = 0.$$

De estas condiciones de frontera se tiene que las expresiones $D^{(2)}(\gamma, \gamma)$ y $C^{(2)}(\gamma, \gamma)$ en la ecuaciones (43) y (44) se transforman en las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} D^{(2)}(\gamma, \gamma) &= +1 \quad \text{y} \quad C^{(2)}(\gamma, \gamma) = -1 && \text{en polarización S} \\ D^{(2)}(\gamma, \gamma) &= +1 \quad \text{y} \quad C^{(2)}(\gamma, \gamma) = +1 && \text{en polarización P} \end{aligned}$$

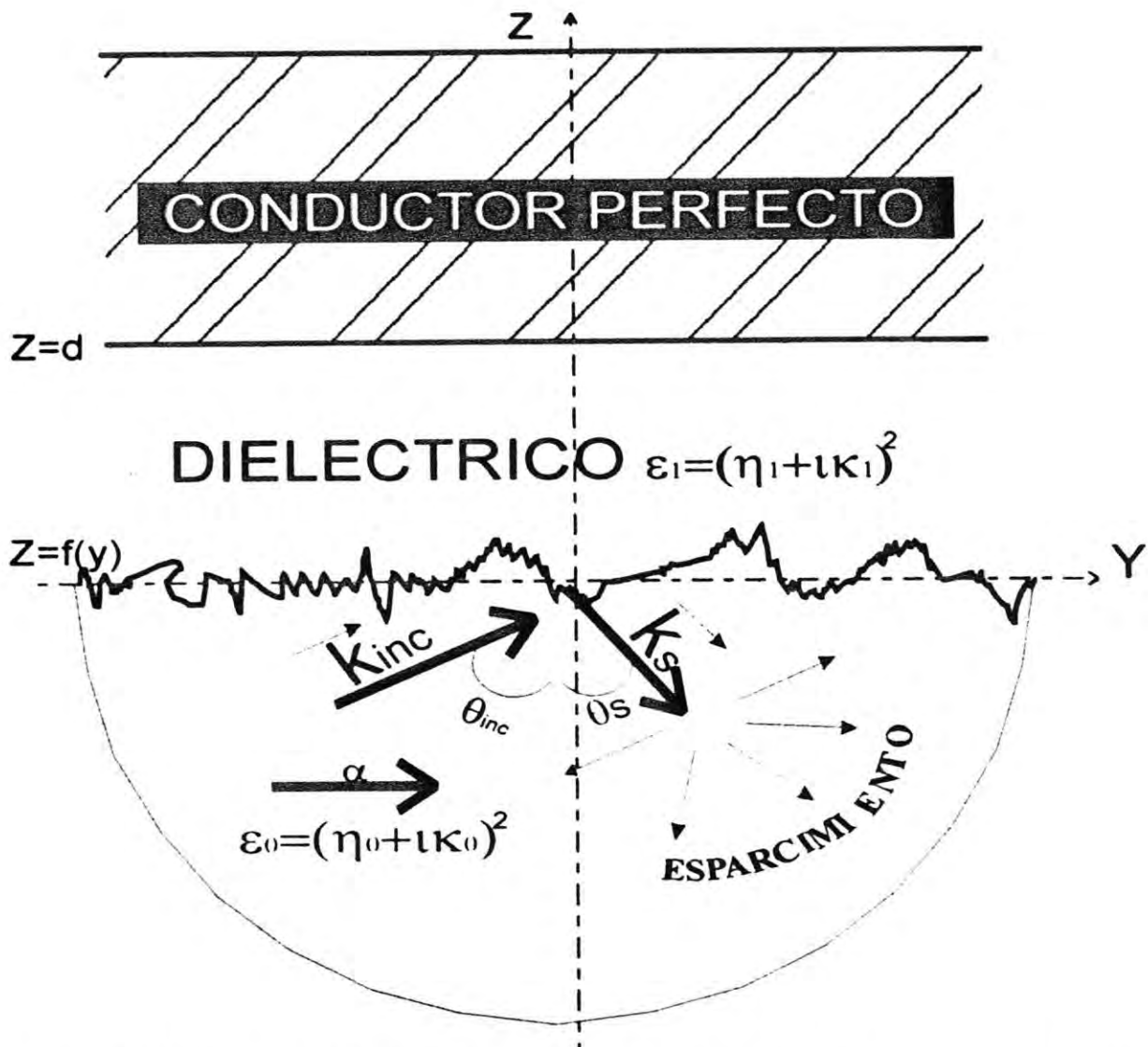


Figura 6: Película dieléctrica con una superficie rugosa y grosor d , depositada sobre un sustrato conductor perfecto.

por lo tanto las funciones del sistema que caracterizan al sistema de la figura 6 estan dadas por las siguientes expresiones,

$$G_{\pm}^{(2)}(\gamma, \alpha) = \frac{1}{\beta_2(\gamma)} [D^{(1)}(\gamma, \alpha) I_{\alpha-\gamma}^{(1)} \{-i[\beta_1(\alpha) + \beta_2(\gamma)]\} \exp\{+i[\beta_2(\gamma)d]\} \pm C^{(1)}(\gamma, \alpha) I_{\alpha-\gamma}^{(1)} \{-i[\beta_1(\alpha) - \beta_2(\gamma)]\} \exp\{-i[\beta_2(\gamma)d]\}], \quad (45)$$

y

$$H_{\pm}^{(2)}(\gamma, \alpha_{inc}) = \frac{1}{\beta_2(\gamma)} [C^{(1)}(\gamma, \alpha_{inc}) I_{\alpha_{inc}-\gamma}^{(1)} \{+i[\beta_1(\alpha_{inc}) - \beta_2(\gamma)]\} \exp\{+i[\beta_2(\gamma)d]\} \pm D^{(1)}(\gamma, \alpha_{inc}) I_{\alpha_{inc}-\gamma}^{(1)} \{+i[\beta_1(\alpha_{inc}) + \beta_2(\gamma)]\} \exp\{-i[\beta_2(\gamma)d]\}], \quad (46)$$

donde el subíndice con signo + (ó -) corresponde a polarización P (ó S), donde

$$C^{(1)}(\gamma, \alpha) = \frac{\beta_1(\alpha)}{w_1} + \frac{\beta_2(\gamma)}{w_2} + \frac{(\frac{\alpha}{w_1} + \frac{\gamma}{w_2})(\alpha - \gamma)}{\beta_1(\alpha) - \beta_2(\gamma)},$$

$$D^{(1)}(\gamma, \alpha) = \frac{\beta_1(\alpha)}{w_1} - \frac{\beta_2(\gamma)}{w_2} + \frac{(\frac{\alpha}{w_1} + \frac{\gamma}{w_2})(\alpha - \gamma)}{\beta_1(\alpha) + \beta_2(\gamma)}.$$

La información de la función perfil $f(y)$ de la superficie rugosa, en la interface vacío-dieléctrico, se encuentra en la integral $I_{\alpha-\gamma}^{(1)}\{\pm i[\beta_1(\alpha) \pm \beta_2(\gamma)]\}$, en las ecuaciones (45) y (46), y esta dada de la siguiente forma

$$I_{\alpha-\gamma}^{(1)}\{\pm i[\beta_1(\alpha) \pm \beta_2(\gamma)]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\pm i[\beta_1(\alpha) \pm \beta_2(\gamma)]f(y)\} \exp\{+i[\alpha - \gamma]y\} dy. \quad (47)$$

Este sistema fue estudiado por Sanchez-Gil *et al* referencia [5], donde utilizan la aproximación de Rayleigh-Fano y el método perturbativo también hasta cuarto orden; estudiamos este sistema para dar la validez correspondiente a los resultados numéricos obtenidos por este trabajo.

Ahora bien, expresando la ecuación (47) en serie de potencia,

$$I_{\alpha-\gamma}\{\pm i[\beta_1(\alpha) \pm \beta_2(\gamma)]\} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\{\pm i[\beta_1(\alpha) \pm \beta_2(\gamma)]\}^p}{p!} F_{\alpha-\gamma}\{[f(y)]^p\}. \quad (48)$$

donde $F_{\alpha-\gamma}\{[f(y)]^p\}$ es la transformada de fourier de la p -ésima potencia de la función perfil, así, sustituyendo la ecuación (48) en las ecuaciones (45) y (46) se obtiene las expresiones de la serie de potencias de las funciones del sistema, ecuaciones (19) y (20), para un sistema de

$N + 2$ capas con una superficie rugosa y las demás lisas, solo que en este caso son las funciones del sistema asociadas a la figura 6 ,

$$G_{\pm}^{(2)}(\gamma, \alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} Q_{\pm}^{(p)}(\gamma, \alpha) F_{\alpha-\gamma} \{[f(y)]^p\} \chi^p \quad y \quad H^{(2)}(\gamma, \alpha) = \sum_{q=0}^{\infty} O_{\pm}^{(q)}(\gamma, \alpha) F_{\alpha-\gamma} \{[f(y)]^q\} \chi^q,$$

donde $Q^{(p)}(\gamma, \alpha)$ y $O^{(q)}(\gamma, \alpha)$, para este sistema, quedan expresadas de la siguiente manera

$$Q_{\pm}^{(p)}(\gamma, \alpha) = \frac{\iota^p}{p!} \{D^{(1)}(\gamma, \alpha) \{-[\beta_1(\alpha) + \beta_2(\gamma)]\}^p \exp\{+i[\beta_2(\gamma)d]\} \\ \pm C^{(1)}(\gamma, \alpha) \{-[\beta_1(\alpha) - \beta_2(\gamma)]\}^p \exp\{-i[\beta_2(\gamma)d]\}\}.$$

y

$$O_{\pm}^{(q)}(\gamma, \alpha_{inc}) = \frac{\iota^q}{q!} \{C^{(1)}(\gamma, \alpha_{inc}) \{+[\beta_1(\alpha_{inc}) - \beta_2(\gamma)]\}^q \exp\{+i[\beta_2(\gamma)d]\} \\ \pm D^{(1)}(\gamma, \alpha_{inc}) \{+[\beta_1(\alpha_{inc}) + \beta_2(\gamma)]\}^q \exp\{-i[\beta_2(\gamma)d]\}\}.$$

como se dijo en la sección 2.2, estas expresiones se sustituyen en la integral de esparcimiento de reflexión, ecuación (18), de aquí se obtiene la relación de recurrencia para los coeficientes de reflexión hasta el orden deseado, ecuación (26), con esto se encuentra la parte incoherente y coherente del DRC, ecuaciones (36) y (40) respectivamente, hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad.

La ecuación (36) nos da información de la intensidad del campo esparcidas que se distribuye en $(-\pi/2, \pi/2)$, y la ecuación (40) nos da información de la intensidad del campo esparcido en la dirección de la reflexión especular, el cual se encuentra en el ángulo $-\theta_{inc}$.

En el siguiente capítulo se obtendran los resultados numéricos para este sistema y con ayuda de la conservación de la energía se establece los parámetros de confiabilidad del método en función de la altura de la rugosidad.

CAPITULO 3

3. RESULTADOS NUMERICOS

En este capítulo se obtendrán los resultados numéricos para el análisis del esparcimiento de luz, esto se realizará para el sistema de la figura 6, el cual consiste de una película dieléctrica delgada depositada sobre un sustrato conductor perfecto. Trataremos 2 casos.

- Caso A . En este caso usaremos los mismos parámetros usados en el trabajo de Sánchez-Gil *et al* [5] lo cual permitirá comparar nuestros resultados numéricos con los reportados en ese artículo, con el objeto de validar el método. En estos sistemas, la dependencia angular del esparcimiento de luz, bajo ciertas condiciones, muestra un pico de retroesparcimiento y dos picos satélites.

Como un resultado adicional, haciendo uso de la conservación de la energía, se establece los parámetros de confiabilidad del método en función de la altura de la rugosidad, que en este caso, queda determinada por la suma del esparcimiento total integrado (TIS), que es el valor de la energía esparcida, más la intensidad de la parte coherente de la luz, que en este sistema debe ser igual o menor que uno para una altura dada en la rugosidad.

- Caso B. En este caso se realizan los cálculos del esparcimiento por una capa dieléctrica de Fluoruro de Calcio, cuya rugosidad ha sido determinada experimentalmente [14]. Proponemos las condiciones óptimas para la detección experimental del pico de retroesparcimiento. Analizaremos el esparcimiento y observaremos que conforme crece el grosor de la película la integral total de esparcimiento TIS esta desfasado con respecto a la intensidad de la parte coherente de la luz difusa. Mostrando que cuando existe un mínimo en la reflexión especular, existe un máximo en el DRC incoherente. Por último se da el criterio de validez del método por medio de la conservación de la energía en función de la altura de la rugosidad.

En ambos casos se obtendrán las condiciones necesarias, por medio de la relación de dispersión, para que la película dieléctrica soporte 2 modos guiados, los cuales pueden ser excitados con luz cuando una de las interfaces es rugosa y, entonces, en el esparcimiento, observar el pico de retroesparcimiento y 2 picos satélites.

3.1. CASO A

En esta sección se calcula el $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh}$ del sistema de la figura 6, los resultados numéricos, para este sistema, fueron realizados previamente por Sánchez-Gil *et. al* [5], ellos utilizaron la aproximación de Rayleigh-Fano y teoría de perturbación hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad. Esto se realiza con el objeto de validar los resultados obtenidos por este método.

Los parámetros empleados por Sánchez-Gil *et. al* [5] son: la constante dieléctrica de la película $\epsilon_d = 2.6896 + i0.0075 = (1.64 + i0.00229)^2$, la longitud de correlación $\sigma = 1000 \text{ \AA}$, la altura de la rugosidad $h = 150 \text{ \AA}$, la longitud de onda de la luz incidente $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ y el grosor de la película dieléctrica $d = 5000 \text{ \AA}$.

Estos parámetros de la rugosidad satisfacen la aproximación de Rayleigh-Fano, dado que $h/\lambda < 1$. Para el grosor seleccionado, la película dieléctrica soporta 2 modos guiados cuando las superficies son lisas.

La relación de dispersión para el sistema sin rugosidad, permite encontrar las constantes de propagación de los modos guiados (Apéndice II), entonces, para un grosor de $d = 5000 \text{ \AA}$ se encuentran 2 modos guiados, cuyas constantes de propagación son $\alpha_1(\lambda) = (2\pi/\lambda)1.5466$ y $\alpha_2(\lambda) = (2\pi/\lambda)1.2423$, para $\lambda = 6328 \text{ \AA}$.

Para excitar los modos es necesario dos condiciones. La primera es que el espectro de rugosidad contenga al menos dos vectores de onda tales que $\alpha_{r1} = \alpha_1(\lambda)$, $\alpha_{r2} = \alpha_2(\lambda)$. El espectro de rugosidad gaussiano empleado en este trabajo proporciona dichos vectores en el intervalo $(0, \infty)$. La otra condición es que la altura media de la rugosidad debe ser tal que la fuerza de acoplamiento sea suficientemente fuerte para su detección, pero al mismo tiempo permita la existencia de los modos. La rugosidad aquí empleada permite la existencia de tales modos.

En la figura 7 se muestra el DRC incoherente para segundo y cuarto orden en la altura de la rugosidad, así como el esparcimiento total, con respecto al ángulo de esparcimiento θ_s , a incidencia normal ($\theta_{inc} = 0.0^\circ$). Aquí se observan el pico de retroesparcimiento y dos picos satélites los cuales aparecen en la contribución a cuarto orden. El esparcimiento total está dada por la ecuación (36), la contribución a 2^{do} orden es la ecuación (37), da efectos donde la luz rebota una sola vez y la contribución a 4^{to} orden en la altura de la rugosidad, están dadas por las expresiones (38) y (39), da efectos donde la luz rebota 2 veces y aquí se dan los efectos de coherencia de las ondas esparcidas.

En esta figura se observa que la suma de la contribución a segundo orden más la contribución a cuarto orden da una disminución en la intensidad del esparcimiento total. Esta disminución es producida debido a que la intensidad a cuarto orden, ecuaciones (38) y (39), es negativa, mientras la contribución a segundo orden, ecuación (37) es positiva. Para la altura usada en el presente cálculo, el término predominante se debe a la contribución a segundo orden, mientras que a cuarto orden es un orden de magnitud menor y ésta pasa a tener un peso secundario en el esparcimiento total. Esta competencia entre estas dos contribuciones es la que limita este método, puesto que al aumentar la altura de la rugosidad con respecto a la longitud de onda, el término a cuarto orden comienza a ser predominante, hasta que el método no satisface el

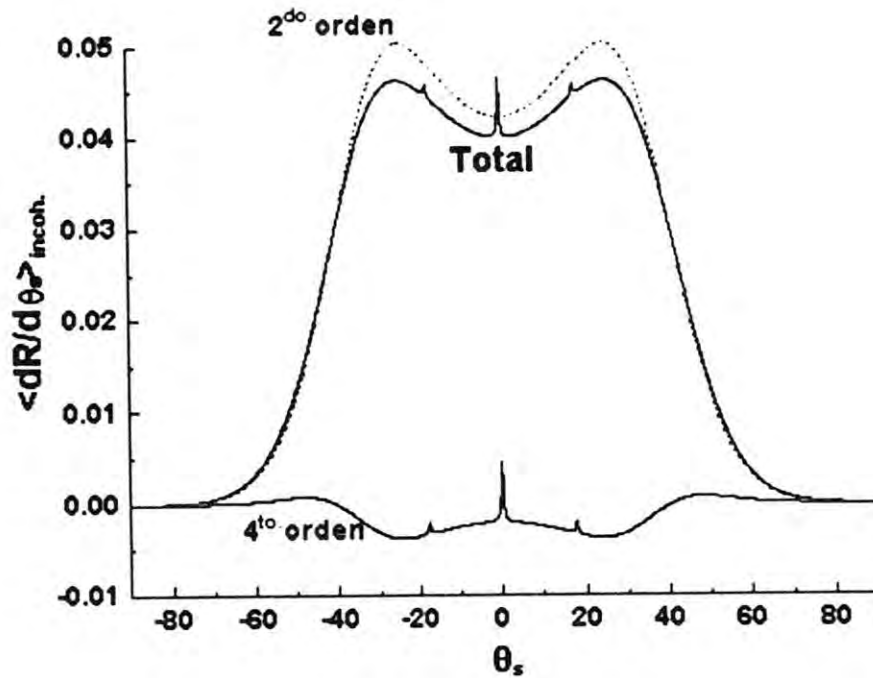


Figura 7: Contribución hasta cuarto orden del $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh}$ del esparcimiento de luz, para polarización S, con ángulo de incidencia $\theta_{inc} = 0.0^0$. Los parámetros en el sistema son los proporcionados en el texto. Se muestra también las contribuciones a segundo y cuarto orden.

comportamiento físico esperado de la conservación de la energía. Más adelante se analizará en detalle el comportamiento con respecto a la altura de la rugosidad.

La posición angular del pico de retroesparcimiento se localiza en la dirección del ángulo de esparcimiento esto es $\theta_s = 0^\circ$ y la de los picos satélites en posiciones angulares $\pm 17.7^\circ$, que es la manifestación asociada a la excitación de los modos guiados, los cuales están en una posición angular de esparcimiento dada por la ecuación (4.38) de la referencia [5]:

$$\sin(\theta_{smg})_{\pm} = -\sin(\theta_{inc}) \pm \frac{\lambda}{2\pi} [\alpha_1(\lambda) - \alpha_2(\lambda)] \quad (49)$$

En especial, la ecuación que da el efecto de retroesparcimiento y los picos satélites producidos por los modos guiados es la ecuación (38), esta expresión contiene la información sobre los efectos de interferencia constructiva entre cada trayectoria de los 2 modos guiados que viajan en sentidos opuestos, los cuales cuando están en fase existe un máximo en la dirección $\theta_s = -\theta_{inc}$.

En la figura 8 se muestra la contribución a cuarto orden de los términos $\mathbf{I}^{(2,2)L} + \mathbf{I}^{(2,2)C}$, $\mathbf{I}^{(2,2)L}$, y $\mathbf{I}^{(2,2)C}$ con respecto al ángulo de esparcimiento, a incidencia normal. Se observa que el fenómeno del pico de retroesparcimiento y los picos satélites se encuentran en el término cruzado, esto muestra que existe coherencia de las ondas esparcidas en estas direcciones.

La coherencia de las ondas esparcidas es el resultado de la interferencia constructiva producida por los modos guiados, que son excitados por la rugosidad, y viajan en sentido opuesto, da surgimiento al fenómeno del pico de retroesparcimiento, que en la figura se muestra como un cono de intensidad de luz (pico principal) en dirección opuesta al ángulo incidente.

El sentido físico de la ecuación (38) viene determinada por la magnitud de los campos, esto significa que cuando existe coherencia entre las ondas, tenemos que es igual a 4 veces la intensidad del campo y cuando las ondas son incoherentes es 2 veces esta intensidad, por lo tanto, la altura total del pico de retroesparcimiento, en la ecuación (38), es dos veces la intensidad del fondo de la contribución del término líder. Esto es claramente apreciable en la figura 8, lo cual avala esta afirmación.

También se observa el surgimiento de dos picos satélites, asociados con los modos guiados y que se encuentran en un ángulo que satisface la ecuación (49), estos picos son producidos debido a que la rugosidad "interacciona" con los modos guiados, transformándolos en ondas electromagnéticas que se alejan de la superficie.

Pasaremos al análisis de la contribución a cuarto orden. En la figura 9 se muestran $\mathbf{I}^{(1,3)} + [\mathbf{I}^{(2,2)L} + \mathbf{I}^{(2,2)C}]$, $[\mathbf{I}^{(2,2)L} + \mathbf{I}^{(2,2)C}]$, y $\mathbf{I}^{(1,3)}$ como función del ángulo de esparcimiento, a incidencia normal. Se observa que la magnitud $\mathbf{I}^{(1,3)}$ es negativa y "apantalla" la magnitud de la contribución de la ecuación (38) por lo que disminuye su magnitud, y hace que el total a cuarto orden sea negativo, lo cual se ve reflejada como una disminución en el esparcimiento total.

Los términos $\mathbf{I}^{(2,2)L}$, $\mathbf{I}^{(2,2)C}$ y $\mathbf{I}^{(1,3)}$, en la contribución a cuarto orden son fundamentales en el cálculo, dado que son las cantidades que contienen la información, tanto del fenómeno de los

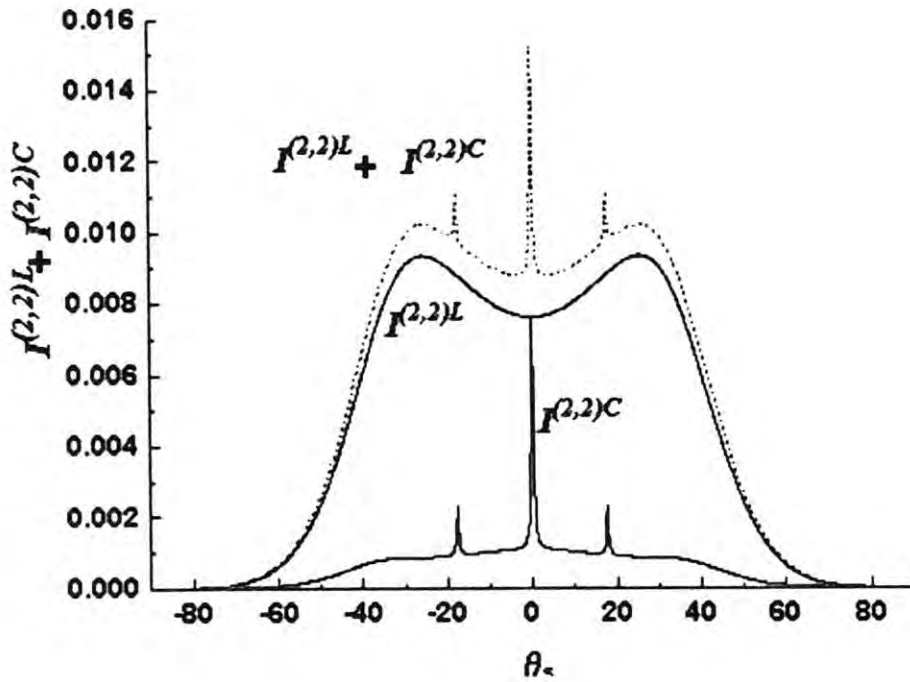


Figura 8: Contribución de las cantidades de $I^{(2,2)C}$, $I^{(2,2)L}$ y $I^{(2,2)C} + I^{(2,2)L}$ para $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh}$ con respecto al ángulo de esparcimiento θ_s , para $\theta_{inc} = 0.0^\circ$, aquí se muestran las contribuciones del termino lider $I^{(2,2)L}$ y $I^{(2,2)C}$, donde el pico de retroesparcimiento y los picos satélites se encuentran en la contribución $I^{(2,2)C}$. La posición angular del pico de retroesparcimiento se encuentra en dirección del ángulo incidente esto es $\theta_s = 0^\circ$, y los ángulos de los picos satélites se encuentran en $\theta_{smg} = \pm 17.7^\circ$

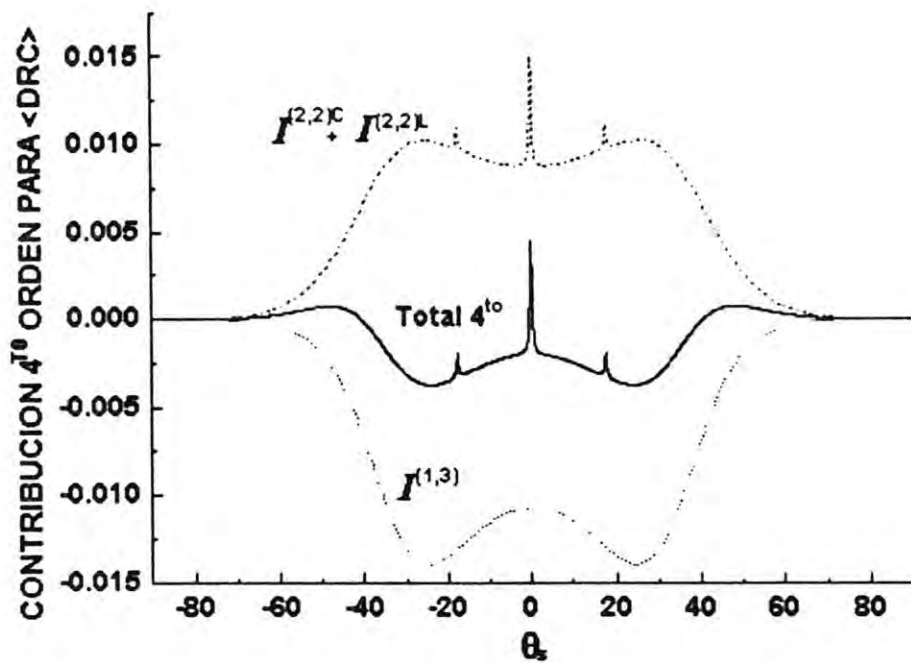


Figura 9: Contribución de las cantidades $I^{(1,3)}$, $[I^{(2,2)C} + I^{(2,2)L}]$ y $I^{(1,3)} + [I^{(2,2)C} + I^{(2,2)L}]$ de cuarto orden para $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh.}$ con respecto al ángulo de esparcimiento θ_s , para un ángulo de incidencia $\theta_{inc} = 0.0^\circ$. Se muestra como la contribución total a cuarto orden esta dada por el apantallamiento de la contribución del promedio $I^{(1,3)}$ con el promedio $I^{(2,2)C} + I^{(2,2)L}$ dando como consecuencia una disminución en la intensidad del campo en la contribución a cuarto orden.

picos en el esparcimiento y picos satélites, así como de la limitación del método. El término a cuarto orden empezará a ser cada vez más predominante, conforme aumenta la altura de la rugosidad, y llegará un momento en donde afectará de manera importante la contribución a segundo orden y esto se va a ver reflejado en el esparcimiento total. En particular el término $I^{(1,3)}$ es el que predominará en la contribución a cuarto orden y por ende en el método.

Hasta aquí se ha calculado el $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh}$ con un ángulo de incidencia $\theta_{inc} = 0.0^\circ$. Sin embargo, al cambiar el ángulo de incidencia, el pico de retroesparcimiento estará colocado siempre en dirección de dicho ángulo, y esa es una característica de este fenómeno. Sin embargo los picos satélites cambian sus posiciones angulares, las cuales satisface la ecuación (49). Además al ir aumentando el ángulo de incidencia según el criterio de Rayleigh, establecido en la ecuación (3), la superficie se considera lisa y como consecuencia la magnitud del esparcimiento total debe ser igual a cero. El comportamiento con respecto al ángulo de incidencia se mostrará en la siguiente sección.

3.2. VARIACION DEL ANGULO DE INCIDENCIA.

En esta sección se muestra como cambia el pico de retroesparcimiento y los picos satélites, conforme variamos el ángulo de incidencia, y además mostraremos como disminuye el esparcimiento total cuando el ángulo de incidencia es grande, lo cual esta en concordancia con el criterio de Rayleigh establecido en la sección 1.1, que establece que una superficie es lisa cuando la razón entre la altura de la rugosidad y la longitud de onda de la luz incidente tiende a cero o cuando en ángulo de incidencia tiende a 90° .

En la figura 10 se muestra la parte incoherente del DRC con respecto al ángulo de esparcimiento, con un ángulo de incidencia igual a $\theta_{inc} = 5.0^\circ$, utilizando los mismos parámetros de la figura anterior. En esta figura se observa que la dependencia angular del pico de retroesparcimiento esta en la dirección del ángulo de incidencia, que en este caso esta en -5.0° , tal como se había establecido anteriormente.

Las posiciones angulares de los picos satélites, satisfacen la ecuación (49), los cuales están desplazados respecto a las posiciones encontradas en los resultados anteriores, en este caso se localizan en: $\theta_{smg}^{(+)} = 12.6^\circ$ y $\theta_{smg}^{(-)} = -23.1^\circ$. Fuera de esto, el único cambio notable de este resultado con respecto al anterior, es que la curva es no simétrica, ya que el hombro hacia ángulos negativos disminuye, mientras que el otro lado aumenta. El fenómeno físico es tal como se describió en la sección anterior.

Los resultados presentados en las figuras 7, 8, 9, y 10, fueron reportadas previamente [5] en un trabajo pionero donde por primera vez se reportaron los picos satélites. Dichos resultados numéricos fueron comparados con estos resultados y el acuerdo es exacto. Esta comparación no se muestra ya que no hay diferencia visual entre ambos resultados y solo se observa una sola curva. Cabe mencionar que uno de los propósitos de los resultados hasta aquí presentados son validar el procedimiento numérico empleado en este trabajo, propósito que se satisfizo de manera amplia.

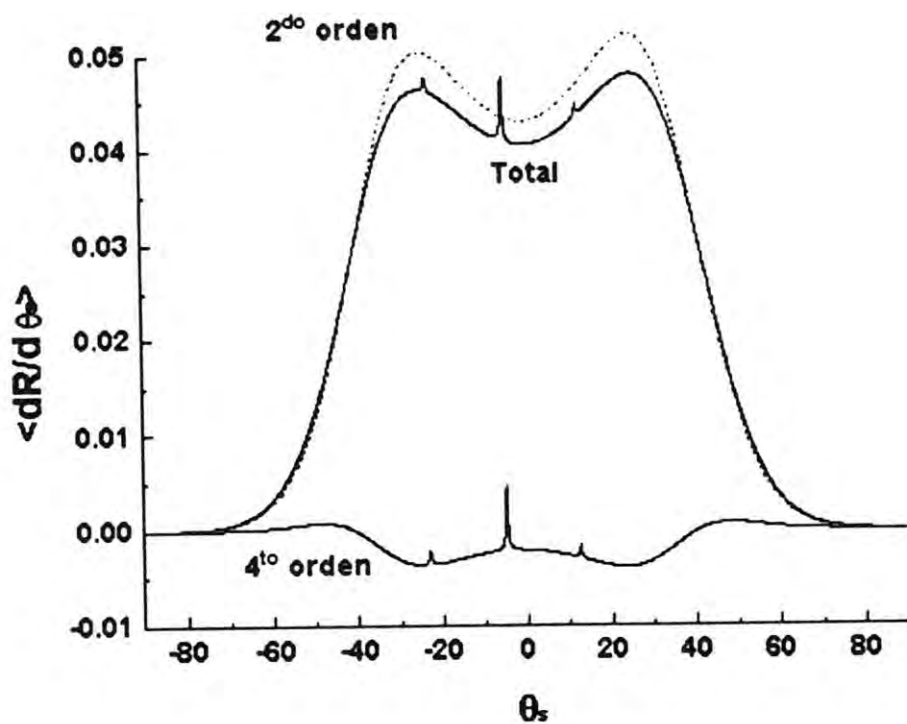


Figura 10: Contribución a cuarto orden en teoría de perturbación para el DRC Incoherente con respecto al ángulo de esparcimiento con un ángulo de incidencia de $\theta_{inc} = 5.0^\circ$ se muestra el promedio de la contribución a segundo orden y cuarto orden

Hasta aquí uno de los objetivos fue concretado, esto es que los resultados numéricos obtenidos por este formalismo fueran iguales a los reportados previamente por Sánchez-Gil *et al* [5]. Es importante señalar que los resultados numéricos, obtenidos para este sistema, es un caso particular de la metodología presentada en el trabajo, ya que este formalismo permite encontrar el esparcimiento de luz por un sistema multicapas con una interface rugosa, además los resultados numéricos que se presentarán más adelante constituyen una aportación más de este trabajo.

Como verificación del criterio de Rayleigh, se varía el ángulo de incidencia en un intervalo de $[0, 90^\circ]$ para observar el comportamiento del esparcimiento total.

En la figura 11 se muestra la variación de la parte incoherente DRC con respecto al ángulo de esparcimiento para varios valores del ángulo de incidencia, el pico de retroesparcimiento y los picos satélites cambian de posición conforme cambia θ_{inc} .

Observamos en esta figura que cuando el ángulo de incidencia aumenta la intensidad del esparcimiento total disminuye, esto concuerda con el criterio de Rayleigh, ecuación (3). Entonces, la superficie se considera lisa si se satisface la condición del ángulo incidente $\theta_{inc} \rightarrow 90^\circ$, y este límite esta asociado con la solución del esparcimiento total hasta cuarto orden ecuación (36) ya que en la figura se muestra que la intensidad del esparcimiento tiende a cero conforme el ángulo de incidencia aumenta.

El objetivo final de este trabajo es establecer un criterio de validez del método en términos de los parámetros de la rugosidad con ayuda de la conservación de la energía. En la siguiente sección analizaremos el esparcimiento de luz como función de la altura de la rugosidad.

3.3. VALIDEZ DEL METODO PERTURBATIVO.

En esta sección se proporciona un criterio, cuando la altura de la rugosidad aumenta con respecto de la longitud de onda de la luz incidente, basado en la conservación de la energía, con el fin de establecer los alcances del método perturbativo.

Cuando la luz incide sobre un sistema multicapas con una interface con rugosidad pequeña, tal como se definió en la introducción, la luz se reparte de la siguiente manera, parte se refleja, se transmite, se absorbe y se esparce. En el caso estudiado no hay transmisión, ya que el substrato es un conductor perfecto y la luz no lo penetra. El índice de absorción de la película se supone muy pequeño, del orden de 10^{-3} , por lo que la absorción es nula o muy pequeña. Bajo estas circunstancias si integramos el esparcimiento angular, que es conocido como esparcimiento total integrado o TIS (por sus siglas en Ingles), más el haz reflejado especularmente, que es equivalente a la parte coherente del coeficiente diferencial de reflexión medio, obtendremos la energía total

$$TIS + \langle dR/d\theta_\theta \rangle_{coh} = \int \langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh} d\theta_s + \langle dR/d\theta_\theta \rangle_{coh} \leq 1 \quad (50)$$

En la figura 12 se muestra $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh}$ como función del ángulo de esparcimiento

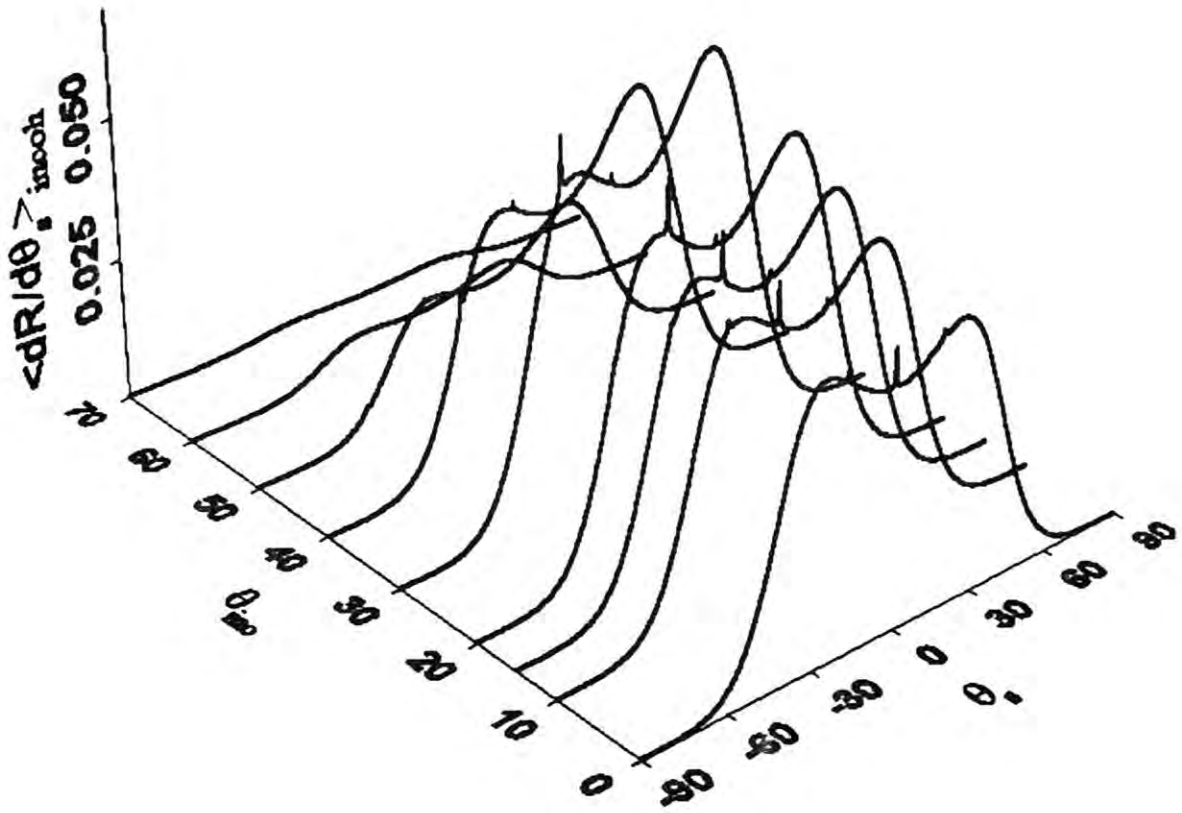


Figura 11: DRC Incoherente, por el método perturbativo hasta cuarto orden, con respecto al ángulo de esparcimiento θ , para varios valores del ángulo de incidencia ($\theta_{inc} = 0.0^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$). El ángulo de incidencia es 0.0°

para diferentes alturas de la rugosidad, calculadas a un ángulo de incidencia de $\theta_{inc} = 0.0^\circ$ y manteniendo los mismos parámetros de las secciones anteriores. La posiciones angulares de los picos satélites no se ve modificada a medida que aumentamos la altura de la rugosidad, los picos están presentes para todas las alturas, aunque poco notables cuando la rugosidad es muy pequeña, además la altura de los picos aumenta. Se observa que el fondo del esparcimiento aumenta conforme crece la altura de la rugosidad, sin embargo, llegará un momento en que la magnitud de $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh}$ disminuya, debido a que la contribución a cuarto orden empezará a ser predominantemente negativa, sin embargo, en la figura no se mostró este comportamiento, por que con estas alturas es suficiente para que satisfaga la conservación de la energía, ecuación (50). Para hacer uso de la conservación de la energía debemos determinar el TIS de cada una de las curvas mostradas en esta figura y también la parte coherente del coeficiente diferencial de reflexión medio (haz reflejado especularmente).

En la figura 13 se muestra el TIS (línea continua con triángulos), $\langle dR/d\theta_s \rangle_{coh}$ (línea continua con cuadrados) y la energía total (línea continua con círculos), ecuación (50), variando la altura de la rugosidad a un ángulo de incidencia $\theta_{inc} = 0.0^\circ$. Claramente en la figura se refleja el comportamiento físico esperado, cuando aumenta la altura de la rugosidad el TIS aumenta provocando por consiguiente que la energía del haz reflejado disminuya, este comportamiento se observa hasta valores donde $h/\lambda < 0.034$. A partir de que $h/\lambda > 0.034$ la parte coherente del DRC empieza a aumentar, dado que la contribución a cuarto orden empieza a ser predominante y términos a orden mayor que el cuarto deben ser considerados. También se observa que la energía total comienza a ser mayor que uno, el valor de h para lo cual esto sucede se indica en la figura con una línea vertical. Cuando se incrementa el esparcimiento total, rayos esparcidos incoherentes, la luz especular (rayos esparcidos coherentes) tiene que disminuir, esto es un fenómeno físico que satisface la conservación de energía. Sin embargo, conforme aumenta la altura de la rugosidad llega un momento donde la conservación de la energía no se satisface.

Por lo tanto, la altura de la rugosidad con respecto a la longitud de onda de la luz apropiada que da la validez al método perturbativo es:

$$0 \leq \frac{h}{\lambda} < 0.032.$$

Este resultado satisface también la aproximación de Rayleigh-Fano, $h/\lambda < 1$. El método es válido para la energía de la parte incoherente de la luz menores al 11% con respecto a la intensidad total, y las alturas con respecto a la longitud de onda de la luz deben de ser menores del 3%. Como veremos más adelante este límite de confiabilidad depende también de las propiedades ópticas de la película así como de su espesor, por lo que no se puede establecer un límite absoluto, sí no se toman en cuenta todos esos parámetros.

En la siguiente sección se calculará el esparcimiento de luz por una película de C_aF_2 con una superficie rugosa.

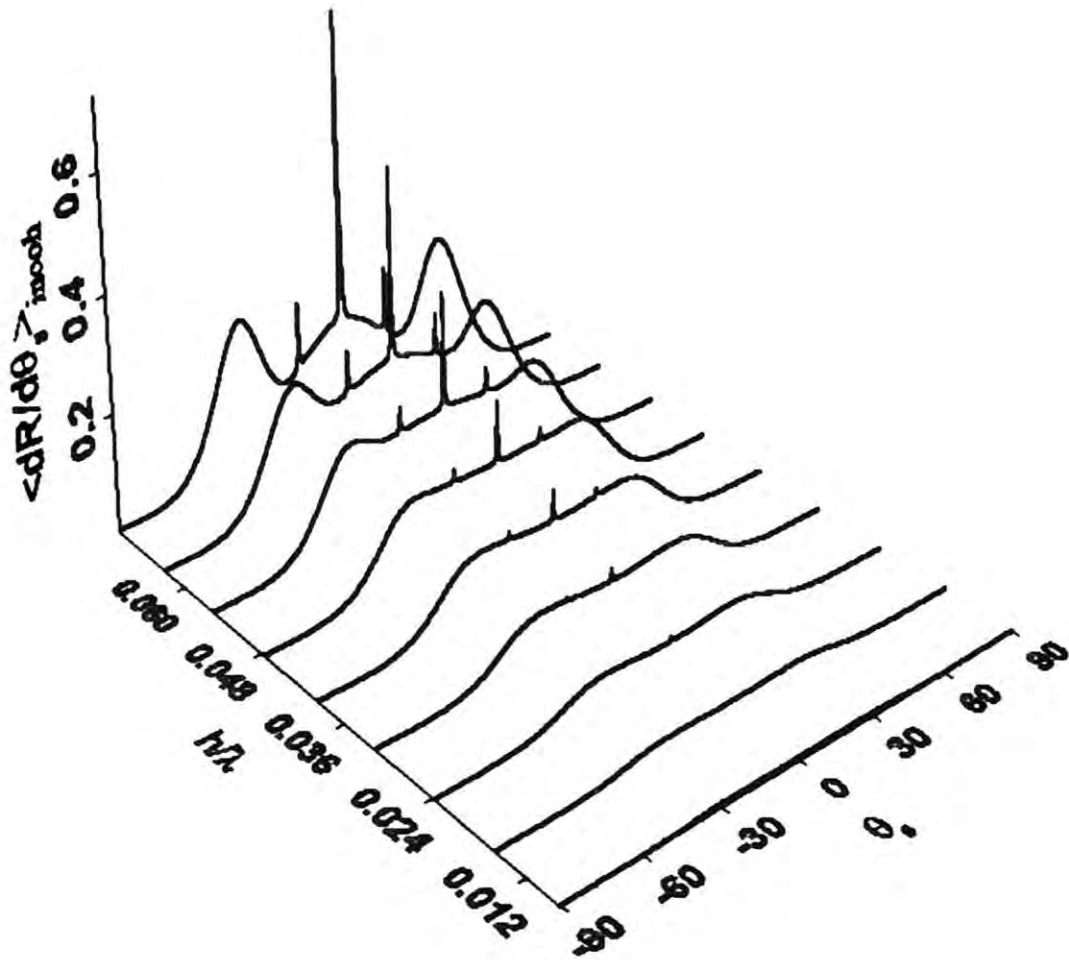


Figura 12: DRC Incoherente por el método perturbativo hasta cuarto orden, con respecto al ángulo de esparcimiento θ , para varios valores en la altura de la rugosidad ($h/\lambda = .08\%$, 1.6% , 2.4% , 3.2% , 3.9% , 4.7% , 5.5% , 6.3% , 7.1%)

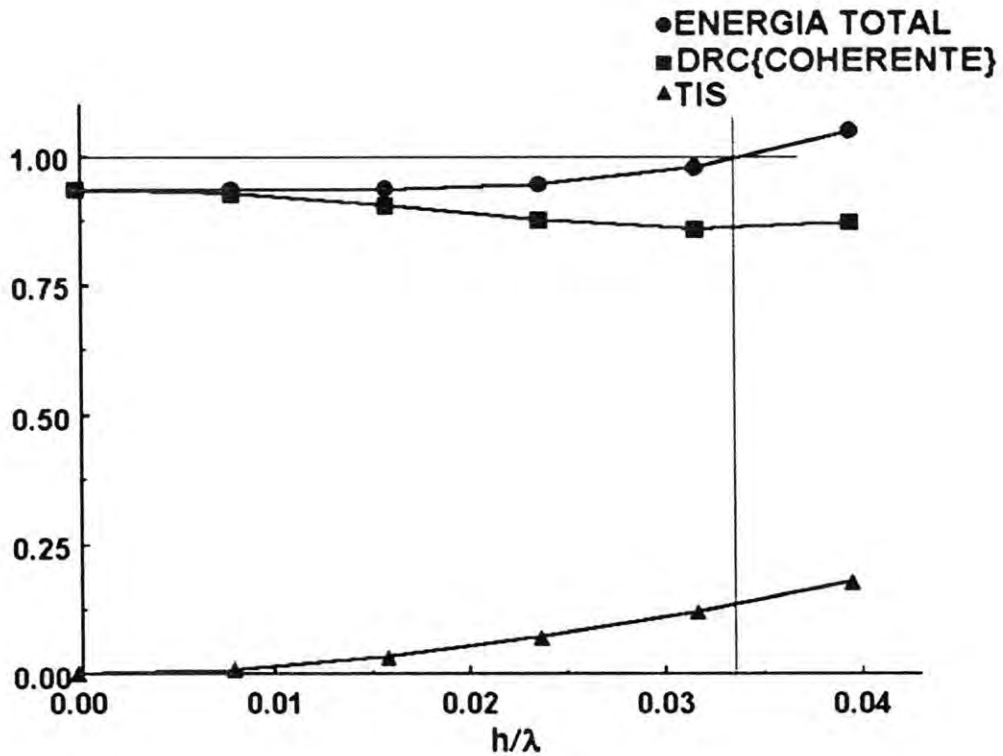


Figura 13: TIS, la parte coherente de $\langle \text{DRC} \rangle$ y la Energía total (validez del método) con respecto a la altura de la rugosidad para una película dieléctrica depositada en un conductor perfecto, con un ángulo de incidencia de $\theta_{inc} = 0.0^\circ$, longitud de onda incidente de $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ y longitud de correlación de $\sigma = 1000 \text{ \AA}$

3.4. CASO B

En esta sección, se darán las condiciones óptimas para la detección experimental del pico de retroesparcimiento y picos satélites por una película de C_aF_2 depositado sobre un conductor perfecto. Estas condiciones en la película son aquellas en las que se puedan producir dichos picos y que la magnitud del esparcimiento de luz sea máxima.

Se selecciona este material ya que presenta una rugosidad "natural", que es mayor que la de otros materiales, al ser crecido como película, tiene un índice de absorción pequeño y su índice de refracción es ligeramente menor que el índice usado en el caso anterior.

Los parámetros de la rugosidad, la raíz media cuadrática de la altura de la rugosidad (h) y longitud de correlación (σ), fueron ampliamente estudiados, [13] y [14], para películas de C_aF_2 , en una amplia gama de espesores. Esto permite conocer con cierto grado de exactitud h y σ para el espesor de la película que emplearemos en este caso.

La constante dieléctrica de este material, para una longitud de onda de $\lambda = 6328\text{Å}$, tiene un índice de refracción de $n = 1.435$ e índice de extinción igual a $k = 3.5 \times 10^{-3}$, cuyos valores fueron tomados de la referencia [15], por lo tanto la constante dieléctrica del C_aF_2 , que se empleará en esta sección es $\epsilon_d = (1.435 + i3.5 \times 10^{-3})^2$. Como ya se dijo, el grosor de la película será de tal manera que pueda soportar 2 modos guiados, y esta condición proporcionará, siempre y cuando exista la rugosidad y que tenga la suficiente fuerza como para excitar los modos guiados, la aparición del pico de retroesparcimiento y los picos satélites.

En este caso se tomará el grosor de la película de tal manera que soporte únicamente dos modos guiados y que además tenga un máximo en el esparcimiento. El intervalo de grosores para que la película soporte dos modos guiados es, (apéndice II), igual a

$$\frac{3}{4\sqrt{\epsilon_d - 1}} \leq \frac{d}{\lambda} \leq \frac{5}{4\sqrt{\epsilon_d - 1}} \quad (51)$$

que en este caso estará en $0.73 < d/\lambda < 1.21$. También hay que tomar en cuenta los efectos de interferencia que se presentan en películas para poder seleccionar el espesor.

Como se mencionó anteriormente los efectos de interferencia son importantes en películas con interfaces lisas y esto queda determinado por la diferencia de fase que sufren un rayo que golpea en la superficie y otro que cruza la película y finalmente sale de ella. Cuando las interfaces presentan rugosidad este aspecto se sigue observando y se analiza en seguida.

Los parámetros en la rugosidad proporcionados por dichas referencias solamente los calcularon hasta un grosor de 5000Å , sin embargo, ellos muestran que la longitud de correlación σ se mantiene en un valor constante alrededor de $\sigma \simeq 500\text{Å}$, hasta este rango en el grosor de la película de C_aF_2 , después de este rango empieza a crecer bruscamente, por lo que en este trabajo se estimó una $\sigma = 700\text{Å}$ y $h = 100\text{Å}$, estos valores son típicos para los valores del espesor que usaremos más adelante.

En la figura 14a se muestra la reflexión especular no perturbada, el módulo cuadrado de la ecuación (23) (línea continua con puntos), y $\langle dR/d\theta \rangle_{coh}$ (línea continua con cuadrados), ecuación (40), como función del espesor de la película normalizado con respecto a la longitud

de onda de la luz incidente, a un ángulo de incidencia de $\theta_{inc} = 0.0^\circ$. Se puede observar que ambas curvas presentan un mínimo para un espesor tal que $d/\lambda = 0.88$, este cae dentro del intervalo deseado. También se observa que la reflexión perturbada es menor a la reflexión con superficies lisas, esto debido a la luz esparcida.

En la figura 14b se muestra el TIS como función del espesor de la película normalizado a la longitud de onda de la luz, utilizando los mismos parámetros de la rugosidad para el cálculo $\langle dR/d\theta_\theta \rangle_{coh}$ y con el mismo ángulo de incidencia. Esta figura muestra que el TIS presenta un máximo cuando $d/\lambda = 0.88$, lo cual demuestra que esta cantidad están desfasados por π con respecto a la parte coherente. Por lo tanto cuando se da un mínimo en la reflexión especular, existe un máximo en el TIS, lo que muestra el fenómeno físico de la conservación de energía.

Bajo este punto de vista, el grosor óptimo es $d = 5587\text{Å}$, el cual satisface la condición de que la película soporte dos modos guiados y que la magnitud de $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh}$ sea máxima. Las constantes de propagación de los modos guiados, para estos parámetros, son $\alpha_2(\lambda) = (2\pi/\lambda)1.0933$ y $\alpha_1(\lambda) = (2\pi/\lambda)1.3526$.

En la figura 15 se muestra el $\langle dR/d\theta_s \rangle_{incoh}$ con respecto al ángulo de esparcimiento y ángulo de incidencia a 0.0° . Este cálculo se realizó bajo los parámetros de la rugosidad utilizados anteriormente y el grosor óptimo de la película $d = 5587\text{Å}$. Con este grosor en la película, el esparcimiento de luz de esta figura alcanza un máximo de intensidad, aunado a que la película soporta dos modos guiados, los cuales al ser excitados por la rugosidad producen el fenómeno del pico de retroesparcimiento y de los 2 picos satélites, tal como debería de esperarse.

Las posiciones angulares del pico de retroesparcimiento y picos satélites en la figura 15 se encuentran en $\theta_s = 0.0^\circ$ y $\theta_s = \pm 15^\circ$, lo cual se confirma en la ecuación (49). Este esparcimiento de luz, es una curva simétrica, similar a la figura 7 del caso A, solamente que es un orden menor, esto significa que el esparcimiento de luz además de quedar determinada por la superficie rugosa queda determinada también por la constante dieléctrica del material y el grosor de la película.

De igual forma que en el caso anterior al ir variando el ángulo de incidencia el esparcimiento total en esta figura, se vuelve cada vez más pequeña lo que confirma el criterio de Rayleigh. No se muestra esta figura por que en la sección anterior quedó demostrado.

En la figura 16 se muestra el TIS (línea continua con triángulos), $\langle dR/d\theta_s \rangle_{coh}$ (línea continua con cuadrados) y la energía total (línea continua con círculos), ecuación (50), variando la altura de la rugosidad a un ángulo de incidencia $\theta_{inc} = 0.0^\circ$. Claramente en la figura se refleja el comportamiento físico esperado, cuando aumenta la altura de la rugosidad el TIS aumenta provocando por consiguiente que la intensidad de la parte coherente de la luz esparcida disminuya, este comportamiento se observa hasta valores donde $h/\lambda < 0.07$. A partir de que $h/\lambda > 0.07$, se observa que el TIS empieza a disminuir.

Esta disminución del TIS es una consecuencia misma del método, como una limitación, y lo que ocurre es que la contribución a 4to orden, ecuaciones (38) y (39), empieza a predominar sobre la contribución a 2do orden, ecuación (37), esto es, la suma de las cantidades $[\mathbf{I}^{(2,2)C} + \mathbf{I}^{(2,2)L} + \mathbf{I}^{(1,3)}]$ sobre la cantidad $\mathbf{I}^{(1,1)}$.

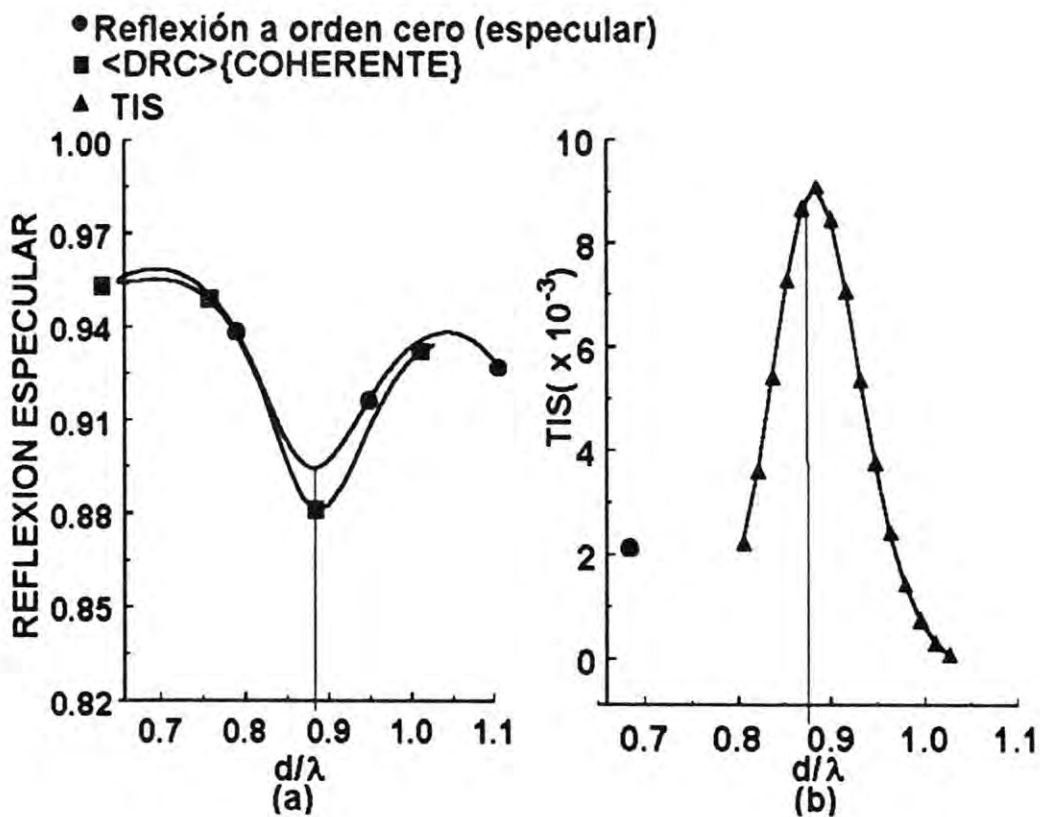


Figura 14: En la figura (a) se muestra la variación de la reflexión especular, coeficiente de reflexión orden cero, y <DRC>{Coherente}, con respecto al grosor de la película de C_aF_2 , en relación con la longitud de onda de la luz incidente. Se observa un mínimo en $d/\lambda = 0.8829$. En la figura (b) se muestra el TIS con respecto al grosor de la película de C_aF_2 , en relación con la longitud de onda de la luz incidente, se observa una máximo en $d/\lambda = 0.8829$. Por lo tanto cuando existe un mínimo en la reflexión especular existe un máximo en el TIS y entonces podemos establecer las condición óptima en el grosor de la película para la detección experimental de los picos, en el esparcimiento de luz, con la longitud de onda incidente usada en el presente trabajo $\lambda = 6328\text{\AA}$, obtenemos $d = 5587\text{\AA}$.

Se observa en las ecuaciones (38) y (39) que las cantidades $\mathbf{I}^{(2,2)C}$, $\mathbf{I}^{(2,2)L}$ dan las contribuciones de los efectos de coherencia de las ondas esparcidas mientras que la cantidad $\mathbf{I}^{(1,3)}$ da un apantallamiento a dichas contribuciones, lo cual se puede constatar en la figura 9, y entonces se convierte en una cantidad negativa y son directamente proporcionales a la cuarta potencia de h , la cantidad de la ecuación (37), $\mathbf{I}^{(1,1)}$, es una cantidad positiva y es directamente proporcional al cuadrado de h , entonces, habrá una competencia entre estas 2 contribuciones, de tal manera que, para alturas muy pequeñas la contribución a segundo orden predominará y al ir aumentando la altura de la rugosidad, la contribución a cuarto orden alcanzará y rebasará la cantidad $\mathbf{I}^{(1,1)}$, lo cual se refleja en la figura como una línea curva que sube y luego baja.

La figura 16 muestra también dos líneas verticales, la primer línea esta colocada en $h/\lambda = 0.05$ la cual creemos que es la validez del método, dado que esperamos que el TIS siga subiendo conforme la altura de la rugosidad aumente, pero la misma limitación del método no proporciona el fenómeno físico esperado. Por lo tanto lo tanto, la conservación de la energía se satisface para el siguiente límite:

$$\frac{h}{\lambda} \leq 0.05$$

la segunda línea vertical se encuentra en la posición $h/\lambda = 0.095$, y también cumple con la conservación de la energía, ecuación (50), sin embargo creemos que la interpretación para dar la validez al método es la que se explicó anteriormente.

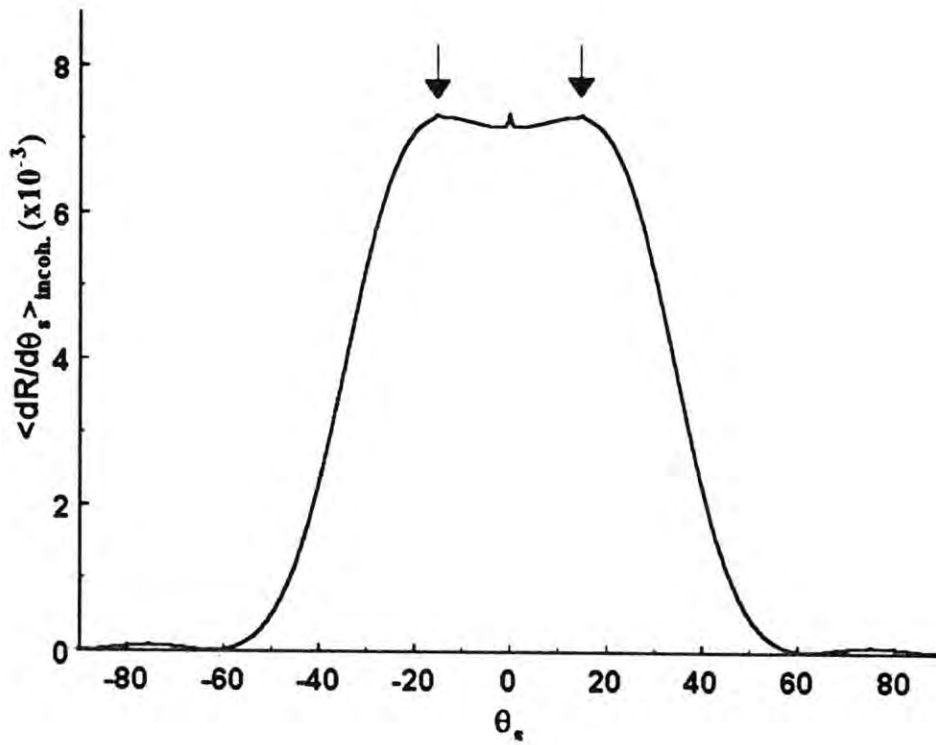


Figura 15: DRC Incoherente con respecto al ángulo de esparcimiento θ_s , para un grosor en la película de $d = 5587\text{\AA}$, con los parámetros en la rugosidad de $\sigma = 700\text{\AA}$ y $h = 100\text{\AA}$, los cuales fueron obtenidos por la referencia [14]

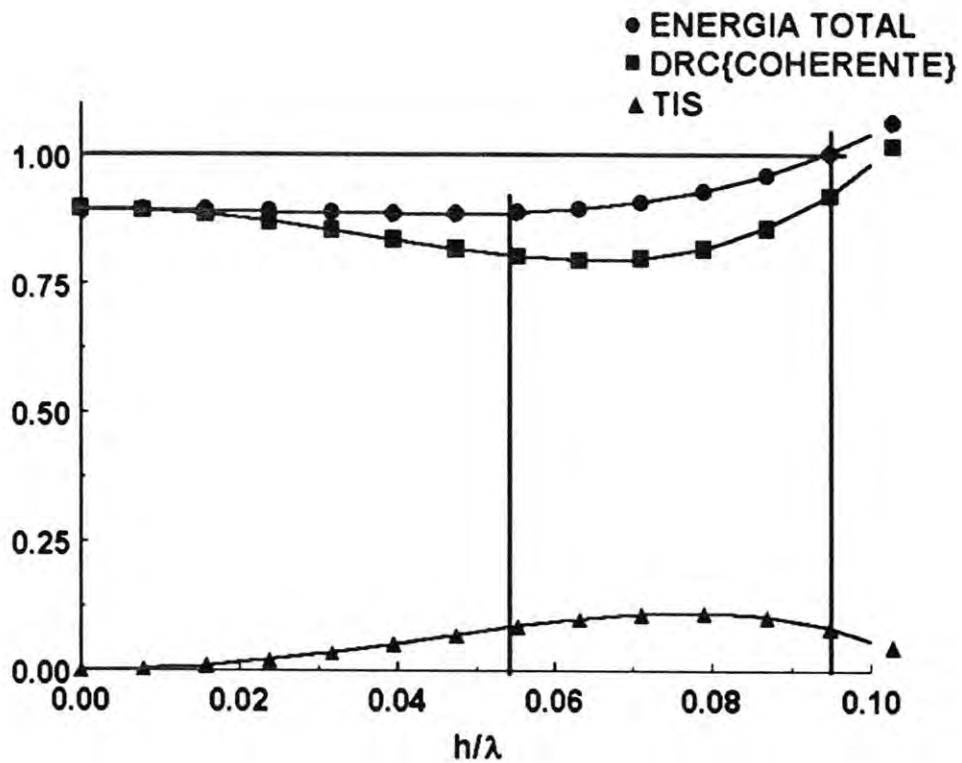


Figura 16: DRC Coherente e Incoherente y la energía total con respecto a la altura de la rugosidad para el CaF_2 . con un grosor en la película $d = 5587\text{\AA}$, $\sigma = 700\text{\AA}$ y $\lambda = 6328\text{\AA}$

CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló una metodología para calcular la parte coherente e incoherente de la luz esparcida por un sistema multicapas con una interface rugosa usando la aproximación de Rayleigh-Fano y la teoría de perturbaciones hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad.

Los resultados numéricos para el esparcimiento se realizaron por una película, con una interface rugosa, depositado en un substrato conductor perfecto, se tomaron dos casos:

- En el caso A se utilizaron los mismos parámetros usados en el trabajo de Sánchez-Gil *et al* [5] lo cual permitió comparar nuestros resultados numéricos, del esparcimiento de luz, con los reportados en ese artículo, figuras 7, 8, 9, y 10. Se realizaron las comparaciones respectivas y las curvas no tuvieron ningun cambio apreciable, con esto, uno de los propósitos del trabajo se concretó. Se mostró que en este sistema, la dependencia angular del esparcimiento de luz, bajo ciertas condiciones, muestra un pico de retroesparcimiento y dos picos satélites

La validez del criterio de Rayleigh quedó demostrado plenamente por este método, ya que los dos límites que predicen que una superficie es lisa quedan descrito por la ecuación (36), para $h/\lambda \rightarrow 0$ y por la figura 11, para $\theta_{inc} \rightarrow 90^\circ$

Como un resultado adicional, haciendo uso de la conservación de la energía, se establecieron los parámetros de confiabilidad del método en función de la altura de la rugosidad, que en este caso, quedó determinada por la suma de la intensidad de la luz esparcida (TIS) mas la intensidad de la parte coherente de la luz normalizada a la energía incidente. En los resultados numéricos obtenidos en la figura 13 la validez del método estuvo dada para parámetros en la rugosidad, normalizada con la longitud de onda de la luz por $h/\lambda < 3.2\%$.

- En el caso B se realizaron los cálculos de esparcimiento por una capa dieléctrica de Fluoruro de Calcio, cuya rugosidad ha sido previamente determinada y reportada en [14]. Los parámetros de la rugosidad proporcionados por dichas referencias solamente los calcularon hasta un grosor de 5000Å , sin embargo, ellos muestran que la longitud de correlación σ se mantiene en un valor constante alrededor de $\sigma \simeq 500\text{Å}$, hasta este rango en el grosor de la película de C_aF_2 , después de este rango empieza a crecer bruscamente, por lo que en este trabajo se estimó una $\sigma = 700\text{Å}$ y $h = 100\text{Å}$.

Se obtuvieron las condiciones óptimas para la detección experimental del pico de retroesparcimiento y picos satélites y el grosor, normalizado con la longitud de onda de la luz,

adecuado que permite tener un máximo en el esparcimiento y que pueda soportar 2 modos guiados en la película de C_6F_2 , $d/\lambda = 0.88$, mostrando a su vez que el TIS y el $\langle dR/d\theta \rangle_{\omega h}$, al variar el grosor de la película, están desfasados π .

El método es válido, para este caso, con una altura, normalizada con respecto a la longitud de onda de la luz de $h/\lambda < 5\%$.

La aproximación hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad es suficiente para revelar el pico de retroesparcimiento y los picos satélites en la dependencia angular de la intensidad del campo que es esparcido incoherentemente, esto se debe a la coherencia de las ondas esparcidas en esas direcciones.

Estos picos están relacionados directamente con la condición de que la película dieléctrica tenga un grosor tal que pueda soportar dos modos guiados, estos pueden ser excitados por la rugosidad cuando se le inyecta energía por medio de un haz incidente, entonces estos picos se manifiestan. Sin embargo, puede haber dos casos en los cuales estos picos no puedan ser observados, la primera es que el espectro de rugosidad no proporcione el momento adicional, a la componente paralela a la superficie del vector de onda incidente, para excitar un modo guiado y la otra es que el grosor de la película no pueda soportar un modo guiado.

La explicación física del fenómeno del pico de retroesparcimiento, está dada por que la luz que incide en la película llega con un momento específico, la rugosidad provee un momento adicional a la luz, entonces este momento total excita simultáneamente modos guiados que viajan en sentidos opuestos, cuando estos modos interfieren constructivamente, se manifiestan un pico en dirección del ángulo de incidencia, el pico de retroesparcimiento, y las posiciones angulares de los picos satélites se encuentran en la ecuación (49).

La comparación es exclusivamente teórica, dado que aun no hay reportes experimentales que avalen el resultado, debido a que la intensidad es muy pequeña y los dispositivos ópticos siguen siendo incapaces de poder detectar el fenómeno de retroesparcimiento en estos tipos de sistemas.

Como punto final del trabajo, creemos que con una aportación a sexto orden las figuras 13 y 16 puedan darnos una información más exacta sobre la limitación de la altura de la rugosidad.

APENDICE I

Las condiciones de frontera para un sistema con superficies rugosas no se encuentran en los libros de texto debido al comportamiento de la función dieléctrica en la interface, ya que esta no es una constante sino que varía con respecto a la posición en cada punto de la función perfil de la superficie rugosa, esto es, los campos electromagnéticos no cumplen con la ecuación de Helmholtz en la interface. Sin embargo, mediante la aproximación de Rayleigh podemos acoplar campos que satisfagan la ecuación de Helmholtz y además expresar las condiciones de frontera, ya no en su forma vectorial, sino con las componentes de los campos, tanto para polarización P como polarización S.

Las ecuaciones de Maxwell, independientes del tiempo, para medios homogéneos e isotrópicos estan dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= +i\frac{\omega}{c}\vec{B} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\left(i\frac{\epsilon}{\mu}\right)\frac{\omega}{c}\vec{E} \end{aligned} \quad (52)$$

La ecuación (52) para polarización S (P), con plano de incidencia $\hat{y} - \hat{z}$, queda expresada de la siguiente manera:

Polarización P (Transversal Magnética)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\frac{\omega}{c}B_x \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} &= -i\epsilon\frac{\omega}{c}E_y \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} &= i\epsilon\frac{\omega}{c}E_z \end{aligned} \quad (53)$$

Polarización S (Transversal Eléctrica)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -i\epsilon\frac{\omega}{c}E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= i\frac{\omega}{c}B_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\frac{\omega}{c}B_z \end{aligned} \quad (54)$$

donde B_n y E_m son las componentes del campo magnético y eléctrico respectivamente y ϵ es la constante dieléctrica del material. Las condiciones de frontera generales (sin densidad de carga y corriente en la superficie) son:

$$(\vec{B}_{in} - \vec{B}_{out}) \cdot \hat{n} = 0 \quad (55)$$

$$(\epsilon_{in} \vec{E}_{in} - \epsilon_{out} \vec{E}_{out}) \cdot \hat{n} = 0 \quad (56)$$

$$(\vec{B}_{in} - \vec{B}_{out}) \times \hat{n} = 0 \quad (57)$$

$$(\vec{E}_{in} - \vec{E}_{out}) \times \hat{n} = 0 \quad (58)$$

para una superficie: $S(x, y, z) = 0$, el vector normal a la superficie es:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} S(x, y, z)}{|\vec{\nabla} S(x, y, z)|} \quad (59)$$

Las ecuaciones (55) y (56) representan las condiciones de frontera normales a la superficie, y las ecuaciones (57) y (58) son paralelas a la superficie. Para el caso de una superficie unidimensional donde z sea función de y , esto es $S(x, y, z) = z - f(y)$, el vector normal a la superficie queda expresado como:

$$\hat{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (60)$$

Por lo tanto para el caso de polarización S (T.E.) la componente continua en la interface es:

$$(E_{in})_z = (E_{out})_z$$

donde $(E_{in})_z$ es la componente del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia. La otra condición de la frontera se obtiene por medio de la ecuación (57), la cual con esta polarización queda de la siguiente forma:

$$(\vec{B}_{in} - \vec{B}_{out}) \times \hat{n} = \{[(B_{in})_y - (B_{out})_y] \hat{j} + [(B_{in})_z - (B_{out})_z] \hat{k}\} \times \hat{n} = 0 \quad (61)$$

sustituyendo la ecuación (60) en la ecuación (61), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + 1}} \{[(B_{in})_y - (B_{out})_y] \hat{j} + [(B_{in})_z - (B_{out})_z] \hat{k}\} \times \left(-\frac{df}{dy} \hat{j} + \hat{k}\right) = 0$$

la ecuación (54) relaciona las componentes del campo magnético con las componentes del campo eléctrico, sustituyendo entonces estas relaciones en la ecuación (3.4) para expresarla en términos de la componente del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + 1}} \left[\frac{\partial}{\partial z} ((E_{in})_x - (E_{out})_x) \hat{j} - \frac{\partial}{\partial y} ((E_{in})_x - (E_{out})_x) \hat{k} \right] \times \left(-\frac{df}{dy} \hat{j} + \hat{k} \right) = 0$$

resolviendo esta ecuación obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + 1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{df}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \right) (E_{in})_x - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{df}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \right) (E_{out})_x \right] = 0$$

de aquí se encuentra la derivada normal de la superficie, esto es:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{df}{dy} \hat{j} + \hat{k} \right) \cdot \vec{\nabla} (E_{in})_x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{df}{dy} \hat{j} + \hat{k} \right) \cdot \vec{\nabla} (E_{out})_x$$

o también

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} (E_{in})_x = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} (E_{out})_x$$

donde $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}$ es la derivada normal de la superficie por lo tanto la condición de frontera queda expresada como:

$$\frac{\partial}{\partial n} (E_{in})_x = \frac{\partial}{\partial n} (E_{out})_x \quad (62)$$

Para el caso transversal magnético o polarización P, la componente continua en la interface es:

$$(B_{in})_x = (B_{out})_x$$

donde $(B_{in})_x$, de la condición en la frontera, ecuación (58), para polarización P queda expresada de la siguiente manera:

$$\left(\vec{E}_{in} - \vec{E}_{out} \right) \times \hat{n} = \left[((E_{in})_y - (E_{out})_y) \hat{j} + ((E_{in})_z - (E_{out})_z) \hat{k} \right] \times \hat{n} = 0 \quad (63)$$

Sustituyendo la expresión que relaciona los campos eléctricos con los campos magnéticos en la ecuación (53) para expresar la ecuación (63) en términos de la componente del campo magnético y sustituyendo el vector normal a la superficie, esta ecuación se transforma en:

$$\frac{1}{\epsilon_{in}} \frac{\partial}{\partial n} (B_{in})_x = \frac{1}{\epsilon_{out}} \frac{\partial}{\partial n} (B_{out})_x \quad (64)$$

Observamos que las ecuaciones (62) y (64) son otra forma de poner las condiciones de frontera, las cuales quedan expresadas en términos de los campos perpendiculares al plano de incidencia. Por lo tanto, en general para una interface, las condiciones de frontera son:

$$U_1 = U_2 \quad , \quad \frac{1}{w_1} \frac{\partial}{\partial n} U_1 = \frac{1}{w_2} \frac{\partial}{\partial n} U_2$$

donde U es la componente del campo eléctrico (magnético), perpendicular a la superficie, en polarización S(P) y $w_j = \epsilon_j$ para polarización P o $w_j = 1$ para polarización S.

APENDICE II

En esta sección se obtiene la relación de dispersión para los modos guiados de una película dieléctrica sobre un substrato de conductor perfecto, en polarización S del campo electromagnético con plano de incidencia $\hat{y} - \hat{z}$, por lo tanto el vector del campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\mathbf{x}; t) = [E_x(y, z|\omega), 0, 0] \exp(-i\omega t)$$

la amplitud E_x , en la región $z < 0$ satisface la ecuación de Helmholtz

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_x^>(y, z|\omega) = 0 \quad (65)$$

y E_x , en la región $0 < z < d$ es la solución de:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \epsilon_d \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_x^<(y, z|\omega) = 0 \quad (66)$$

Las condiciones de frontera que satisfacen estas soluciones en la interface $z = 0$ son las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos los cuales deben ser continuos a través de este. Estas condiciones pueden ser escritos en la forma

$$\begin{aligned} E_x^>(y, z|\omega)|_{z=0} &= E_x^<(y, z|\omega)|_{z=0} \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x^>(y, z|\omega)|_{z=0} &= \frac{\partial}{\partial z} E_x^<(y, z|\omega)|_{z=0} \end{aligned} \quad (67)$$

Del mismo modo $E_x^>(y, z|\omega)|_{z=0}$ debe ser cero en $z = -\infty$ en una guía de onda, también $E_x^<(y, z|\omega)$ es cero en la superficie de un conductor perfecto en $z = d$.

La solución de la ecuación (65) que describe una onda propagandose en la dirección y cuya amplitud es cero en $z = -\infty$ puede ser escrito en la forma:

$$E_x^>(y, z|\omega) = r \exp[iqy] \exp[\beta_1(\alpha, \omega)z]$$

donde $\beta_1(\alpha, \omega) = \sqrt{\alpha^2 - (\omega/c)^2}$. La solución de la ecuación (66) que describe una onda propagandose en la dirección y es de naturaleza de onda estacionaria a través de la película que desaparece en $z = -d$ es:

$$E_x^<(y, z|\omega) = t \exp[iqy] \sin[\beta_2(\alpha, \omega)(z - d)]$$

donde $\beta_2(\alpha, \omega) = \sqrt{\epsilon_d(\omega/c)^2 - \alpha^2}$.

Las condiciones de frontera, ecuaciones (67) permiten obtener el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} r &= -t \sin [\beta_2(\alpha, \omega)d] \\ \beta_1(\alpha, \omega)r &= t\beta_2(\alpha, \omega) \cos [\beta_2(\alpha, \omega)d] \end{aligned}$$

de estas ecuaciones se obtiene la relación de dispersión de las ondas guiadas, para polarización S, de una película dieléctrica sobre un substrato de conductor perfecto, con interfaces lisas, la cual esta dada por

$$\beta_1(\alpha, \omega) = -\beta_2(\alpha, \omega) \cot [\beta_2(\alpha, \omega)d] \quad (68)$$

la ecuación (68) muestra que solamente los modos guiados existen en la región:

$$\frac{\omega}{c} < \alpha < \sqrt{\epsilon_d} \frac{\omega}{c}$$

Para resolver la ecuación (68), definimos las variables x y y por

$$X = \beta_2(\alpha, \omega)d \quad , \quad Y = \beta_1(\alpha, \omega)d \quad (69)$$

por lo tanto la ecuación (68) queda expresada de la siguiente manera:

$$Y = -X \cot X \quad (70)$$

Una segunda relación entre X y Y se obtiene si reescribimos la ecuación (69) en la forma:

$$\alpha^2 = \epsilon_d^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{X^2}{d^2} \quad , \quad \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{Y^2}{d^2} \quad (71)$$

eliminando q de este par de ecuaciones, se obtiene:

$$Y = (R^2 - X^2)^{\frac{1}{2}} \quad (72)$$

donde

$$R = (\epsilon_d - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega d}{c}$$

Combinando las ecuaciones (70) y (72), se obtiene la ecuación que satisface a X :

$$(R^2 - X^2)^{\frac{1}{2}} = -X \cot X, \quad 0 < X < R \quad (73)$$

Las soluciones $\{X_n\}$ de la ecuación (73) para un valor dado de ϵ_d , ω , y d , son entonces sustituido en la primera ecuación (71) que permite los valores $\{\alpha_n\}$ de la guías de onda de frecuencia ω .

Una examinación gráfica de la ecuación (73) se muestra que este no posee soluciones para el rango

$$0 < R < \frac{\pi}{2}$$

una solución para

$$\frac{\pi}{2} < R < \frac{3\pi}{2}$$

dos soluciones

$$\frac{3\pi}{2} < R < \frac{5\pi}{2}$$

y en general, las solución p - ésima

$$(2p - 1)\frac{\pi}{2} < R < (2p + 1)\frac{\pi}{2}$$

o también se puede expresar en términos del grosor de la película y la longitud de onda de la luz incidente el cual está dado como:

$$\frac{(2p - 1)}{4\sqrt{\epsilon_d - 1}} < \frac{d}{\lambda} < \frac{(2p + 1)}{4\sqrt{\epsilon_d - 1}}$$

En los casos planteados en el trabajo, para el caso A se obtienen $\alpha_1(\lambda) = (2\pi/\lambda)1.5466$ y $\alpha_2(\lambda) = (2\pi/\lambda)1.2423$, y para el caso B se obtuvieron $\alpha_2(\lambda) = (2\pi/\lambda)1.0933$ y $\alpha_1(\lambda) = (2\pi/\lambda)1.3526$. En la gráfica 17 el espectro de rugosidad para los casos A, parámetros en la rugosidad $h = 150 \text{ \AA}$ y $\sigma = 1000 \text{ \AA}$, y B, parámetros en la rugosidad $h = 100 \text{ \AA}$ y $\sigma = 700 \text{ \AA}$, las líneas continuas se muestran las constantes de propagación que para el caso A son q_1 y q_2 y para el caso B son q_3 y q_4

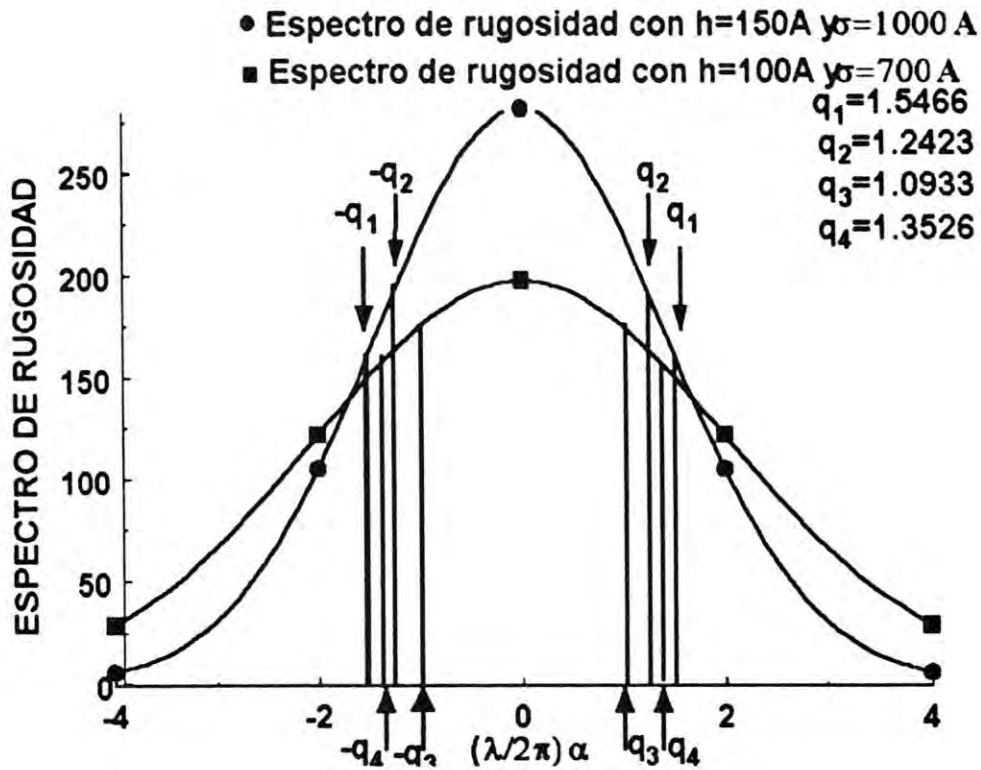


Figura 17: Espectro de rugosidad para el caso A ($h = 150\text{Å}, \sigma = 1000\text{Å}$) y el caso B ($h = 100\text{Å}, \sigma = 700\text{Å}$), q_1 y q_2 son las constantes de propagación asociados a la excitación de los modos guiados para la película dieléctrica del caso A con un grosor $d = 5000\text{Å}$, q_3 y q_4 son las constantes de propagación asociados a la excitación de los modos guiados en la película del caso B con un un grosor de $d = 5587\text{Å}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Akira Ishimaru "Wave Propagation and Scattering in random Media and Rough Surfaces", PROCEEDINGS OF THE IEEE, Vol. 79, No 10, (1991)
- [2] F. Toigo, A. Marvin, V. Celli and N. R. Hill "Optical properties of rough surfaces: General theory and the small roughness limit", Phys. Rev. B 15, 5618 (1977)
- [3] Arthur R. McGurn, Alexei A. Maradudin and Vittorio Celli, "Localization effects in the scattering of light from randomly rough grating", Phys. Rev. B 31, 4866 (1985)
- [4] V. Celli, A.A.Maradudin, A.M.Marvin and A.R.McGurn "Some aspects of lighth scattering from a randomly rough metal surface", J. Opt. Soc. Am. A 2, 2225 (1985)
- [5] J. A. Sánchez-Gil, A. A. Maradudin, Jun Q. Lu, V. D. Freilikher, M. Pustilnik and I. Yurkevich, "Scattering of electromagnetic waves from a bounded medium with a random surface" Phys. Rev. B 50, (1994)
- [6] A. A. Maradudin and E. R. Méndez "Enhanced backscattering of light from weakly rough, random metal surface", APPLIED OPTICS 32, 3335 (1993). *First Topical Conference on surface Roughness and Scattering was held in June 1992 in Tucson, Ariz..
- [7] A. A. Maradudin, T. Michel, A. R. McGurn and E. R. Méndez "Enhanced backscattering of light from a random grating" Surf. Sci., 203 (2), 255-307.
- [8] Petr Beckmann, André Spizzichino "The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces" capítulo 2, pag. 10, segunda edición, Ed Artech House.
- [9] Dennis G. Hall "A few remarks on the matching conditions at interfaces in electromagnetic theory" , Am. J. Phys. 63, June 1995
- [10] John David Jackson "Classical Electrodynamics", capítulo 7, pag. 278, segunda edición, Ed. Willey
- [11] Raúl García Llamas "Scattering of electromagnetic plane waves from rough periodic multilayered films" J. Opt. Soc. Am. B 11, 618 (1994)

- [12] Raúl García Llamas, Luis E. Regalado "Effects of rough interfaces in multilayer stack", *SPIE*, Vol. 2253.
- [13] N. Mayani, F. Varnier, and G. Rasigni "Experimental study of the relationships between the near-normal reflectance, the optical constants, and the roughness of thin silver films" *J. Optic. Soc. Am. A*, **7**, 191(1990)
- [14] Françoise Varnier, Nicole Mayani, and Georges Rasigni "Statical parameters for rough surfaces of thin films CaF_2 and Ag/CaF_2 " *APPLIED OPTICS*, Vol 28, (1989)
- [15] Palik, Edward D. "Handbook optical Constants of solids" Orlando, San diego, Academic Press, 1985