



UNIVERSIDAD DE SONORA

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Análisis de los sectores de
Higgs y quarks en la extensión
del Modelo Estándar con la
simetría del sabor S_3

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A :

Javier Montaña Peraza

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EZEQUIEL RODRÍGUEZ JÁUREGUI (DF-UNISON)

Hermosillo, Sonora, Enero de 2015

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor el Dr. Ezequiel Rodríguez Jáuregui por haberme propuesto este interesante tema de tesis, y por el apoyo en todo momento, el cual ayudó a enriquecer así como fortalecer mis conocimientos.

Para la Dra. Olga Félix Beltrán mi más profundo agradecimiento por su paciencia en todo momento, así como su disposición y por mostrarme que el trabajar no necesariamente es una imposición, sino un modo de vida.

Al Dr. Guillermo Arreaga y Dr. Ricardo Rodríguez Mijangos por aceptar ser parte del comité evaluador. Así como a todos mis maestros de la Universidad de Sonora que en todo este tiempo contribuyeron a mi formación, por su paciencia y dedicación les estoy agradecido.

Agradezco a CONACyT el haberme otorgado una beca de posgrado la cual me ayudó mucho tanto en lo personal como en lo académico.

Resumen

Este trabajo de tesis se enmarca en el contexto del Modelo Estándar (ME) [2, 3] de las interacciones fundamentales extendido con una simetría de familias. Entendemos por simetría de familias la simetría asociada con el problema de replicación de las familias de partículas ya que en el laboratorio se encuentran tres copias de partículas que en ausencia de masa son idénticas, ya que tienen la misma carga eléctrica y el mismo espín. Dado que el número de replicación de familias es discreto, extenderemos el ME para incluir una simetría de familias discreta y no abeliana. De todas las simetrías posibles elegimos el grupo de permutaciones de tres objetos S_3 porque es la más económica en su contenido de representaciones irreducibles para acomodar las tres familias de quarks y leptones que se observan, y en ausencia de masa trata a los fermiones como partículas indistinguibles. Entonces se puede argumentar que es aquella que se tiene de forma natural al permutar las tres familias de los quarks. De esta manera incluimos una simetría de familias asociada con las partículas fundamentales del ME. Es bien conocido que en el ME las partículas adquieren masa por interacción con el campo de Higgs. En este modelo, y en analogía con el sector de fermiones (que son partículas fundamentales), consideraremos al bosón de Higgs como una partícula fundamental con representaciones irreducibles de singlete y doblete de S_3 .

Extender el análisis de la simetría permutacional de familias al sector de Higgs permite enriquecer enormemente el ME, más aún, al romper la simetría de norma permite obtener las matrices de masas de los quarks, los leptones y del sector de Higgs en buen acuerdo con los datos experimentales. En la base donde la teoría es invariante de norma las corrientes cargadas de los quarks son diagonales pero las matrices de masa no lo son. Con la intención de una eventual comparación con los datos experimentales, hay que pasar a la base donde las matrices de masa son diagonales y las partículas tienen una masa bien definida. En esta base las corrientes cargadas ya no son diagonales y los campos de norma se mezclan, la mezcla está dada por la matriz de mezclas de Cabibbo, Kobayashi y Maskawa [10] en el caso de los quarks. Cabe recordar que el ME con simetría de familias aún es una teoría en discusión y hacer el cálculo

de la matriz de mezclas de los quarks y leptones, y su ajuste con los datos experimentales nos ayuda a verificar la validez de esta extensión.

En este trabajo estudiaremos, las condiciones para que el potencial de Higgs tenga un mínimo absoluto. En el modelo, tenemos tres campos de Higgs que se transforman como dobletes del grupo $SU(2)_L$ que se transforman como singlete H_S y un doblete

$$H^T = (H_1, H_2)$$

del grupo de simetría del sabor S_3 . Encontramos que el modelo permite clasificar al mínimo del potencial como: mínimo normal, el mínimo que corresponde al rompimiento de carga (CB) y al mínimo correspondiente a la violación de carga paridad (CPV), de acuerdo con los valores de expectación en el vacío de los campos de Higgs. Encontraremos las condiciones entre los diferentes mínimos para las cuales el mínimo normal es el más profundo. También presentaremos expresiones analíticas para las matrices de masa de Higgs en los tres casos de mínimo.

Al tener ampliamente analizado el sector de Higgs se podrá hacer uso de la condición de mínimo normal al momento de calcular la matriz de mezclas de los quarks y obtener una matriz de mezclas con menos parámetros, ya que nuestro objetivo es encontrar una matriz de mezclas con una cantidad de parámetros libres igual o menor al ME sin extensiones.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	v
Introducción	IX
1. MODELO ESTÁNDAR EXTENDIDO CON SIMETRÍA DEL SABOR	1
1.1. El Modelo Estándar	1
1.1.1. La lagrangiana del Modelo Estándar	2
1.1.2. Corrientes cargadas	7
1.2. El Modelo Estándar extendido con simetría permutacional S_3	9
1.2.1. El grupo S_3	9
1.2.2. Representaciones del grupo S_3	11
1.2.3. Sector fermiónico extendido ME- S_3	17
1.2.4. Sector de Higgs extendido ME- S_3	19
2. ANÁLISIS DEL POTENCIAL DE HIGGS	21
2.1. El sector de Higgs	21
2.1.1. Potencial de Higgs invariante S_3	22
2.2. Puntos estacionarios	25
2.3. Naturaleza de los puntos estacionarios	26
2.4. Matriz de Masas de los Higgs	26
2.4.1. El mínimo normal	28
2.4.2. Matriz de masas de Higgs en el punto estacionario normal con $v_1 = \sqrt{3}v_2$	34
2.4.3. El mínimo normal para el caso $e=0$	38
2.5. Minimo que rompe carga electrica	40
2.5.1. Matrices de masas de Higgs en el punto estacionario CB	45

2.6. Punto estacionario CP que rompa carga paridad	46
2.6.1. Matrices de masas de Higgs en el punto estacionario CP	51
3. MATRICES DE MASAS Y MEZCLAS DE LOS QUARKS	53
3.1. Lagrangiana de Yukawa	53
3.1.1. Reducción de parámetros	59
3.2. Matriz de Mezclas	61
3.3. Matrices de mezclas de los quarks	63
3.3.1. Matriz de mezclas caso $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$	63
3.3.2. Matriz de mezclas caso $\langle H_1 \rangle = \sqrt{3} \langle H_2 \rangle$	73
4. Conclusiones	77
A. Convenciones y notación	79
A.1. Métrica	79
A.2. Matrices de Dirac	80
A.2.1. Representaciones de Dirac	80
B. Teoría de Perturbaciones	81
C. Publicaciones en Congresos y Presentaciones	83
Bibliografía	73

Introducción

El Modelo Estándar (ME) de las interacciones electrodébiles y fuertes es una teoría de norma y proporciona un marco teórico consistente y bien definido en el cual se unifican la electrodinámica cuántica y las interacciones nucleares, débiles y nucleares fuertes [2, 3].

Las partículas fundamentales son los constituyentes de la materia, hasta el momento los límites experimentales en los que rondan dichas partículas son 10^{-18} - 10^{-19} m. En el ME se considera que existen de dos tipos: los bloques fundamentales de la materia y las partículas portadoras de las interacciones fundamentales. Las primeras son fermiones, de espín semientero, y se clasifican como leptones y quarks [1]. Los leptones conocidos son el electrón e^- , el muón μ^- y el tau τ^- con carga eléctrica $Q = -1$, y sus correspondientes neutrinos ν_e , ν_μ y ν_τ con carga $Q = 0$. Los quarks conocidos son de seis sabores distintos: u (up), d (down), c (charm), s (strange), t (top) y b (bottom) tienen carga eléctrica $Q = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$, respectivamente.

QUARKS

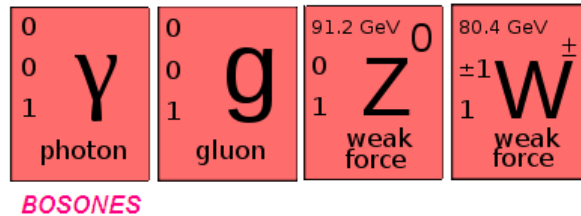
2.4 MeV $\frac{2}{3}$ u up	1.27 GeV $\frac{2}{3}$ c charm	171.2 GeV $\frac{2}{3}$ t top	< 2.2 eV 0 $\frac{1}{2}$ ν_e electron neutrino	< 0.17 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_μ muon neutrino	< 15.5 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_τ tau neutrino
4.8 MeV $-\frac{1}{3}$ d down	104 MeV $-\frac{1}{3}$ s strange	4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ b bottom	0.511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ e electron	105.7 MeV -1 $\frac{1}{2}$ μ muon	1.777 GeV -1 $\frac{1}{2}$ τ tau

LEPTONES

Los quarks tienen la característica de poseer un número cuántico adicional: el color, el cual para ellos puede ser de tres tipos, denotados genéricamente como $q_i (i = 1, 2, 3)$, también se refieren a ellos como rojo, azul y verde. Dado que el color no es observado en la naturaleza, los quarks deben estar confinados en las partículas materiales incoloras llamadas hadrones. Estas partículas compuestas se clasifican en bariones y mesones. Los bariones son fermiones, partículas de espín semientero, compuestos por tres quarks, como por ejemplo el protón, $p \rightarrow uud$ y el neutrón, $n \rightarrow udd$. Los mesones son partículas de espín entero (bosones), formados por un

quark y un antiquark, como por ejemplo los piones, $\pi^+ \rightarrow u\bar{d}$ y $\pi^- \rightarrow \bar{u}d$, donde la barra sobre la partícula denota a la antipartícula.

La segunda clase de partículas fundamentales son las partículas intermediarias de las interacciones. Las interacciones en la física de partículas son mediadas por el intercambio de una partícula fundamental que es un bosón de espín entero. El fotón, γ , es la partícula intercambiada en las interacciones electromagnéticas, los ocho gluones g_μ ($\mu = 1, \dots, 8$) median las interacciones fuertes entre los quarks; por último, los tres bosones masivos, W^\pm y Z^0 son los correspondientes bosones intermediarios de las interacciones débiles.



Como se observa de la primer figura los quarks y los leptones se pueden agrupar por su carga eléctrica y su espín, en estas agrupaciones solo son distinguibles entre si por sus masas, debido a ello estas partículas indistinguibles en ausencia de masa están asociados en grupos que llamamos familias o también se le conocen como sabor, la existencia de estos tres sabores de partículas es un problema abierto en el ME conocido como el problema del sabor o la replicación de las familias, por ello existen distintas extensiones del ME en las cuales se trata de llenar esos vacíos que aún conserva la teoría, una forma de extender el ME es aplicando una simetría discreta de familias.

La tesis está estructurada de la siguiente forma: en el capítulo 1 se da una introducción al ME, y se describen los grupos de la simetría en la física de partículas, se muestra la lagrangiana del modelo y vemos el mecanismo de Higgs, así como la extensión del ME con simetría S_3 . En el capítulo 2 estudiamos la extensión del ME en su sector de Higgs considerando tres campos dobles de Higgs $SU(2)$. En el capítulo 3 calculamos la matriz de masas y mezclas para los quarks.

Capítulo 1

MODELO ESTÁNDAR EXTENDIDO CON SIMETRÍA DEL SABOR

En este capítulo describiremos el Modelo Estándar (ME). El ME es una teoría que describe el comportamiento de las partículas fundamentales, que se vio recientemente reforzada a partir del descubrimiento del Higgs ya que la partícula de Higgs fue introducida en el ME para poder explicar las masas de las partículas fundamentales en la naturaleza. A pesar de que el ME haya tomado fuerza recientemente aún no puede describir por completo ciertos fenómenos, tales como: replicación de las familias, masas de los neutrinos, jerarquía de masas, entre otras. Debido a ello se suele recurrir a distintas extensiones del ME para tratar de terminar de explicar algunos fenómenos en la naturaleza, bajo esta noción se maneja en este capítulo una extensión al ME utilizando la simetría permutacional S_3 del sabor con el objetivo de dar claridad al problema de replicación de familias, masas de los neutrinos y la jerarquía de masas.

1.1. El Modelo Estándar

El ME [2, 3] es una teoría cuántica de campo, cuyo grupo de norma es $G_{ME} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ y se utiliza para estudiar a las partículas fundamentales y sus interacciones. Este grupo de norma incluye al grupo de simetría de las interacciones fuertes, $SU(3)_C$, y al grupo de simetría de las interacciones electrodébiles, $SU(2)_L \times U(1)_Y$. El rompimiento espontaneo de la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ al grupo $U(1)_{em}$, permite además dar masas a los bosones de norma W^\pm, Z^0 , dejando al fotón sin masa. Antes de empezar a desarrollar el ME hay que comentar que aún es una teoría que no explica porqué los neutrinos tienen masa, la replicación de familias, pero que ha tomado gran importancia dado a que predijo la existencia

de varias partículas, y recientemente con el descubrimiento del Higgs se encontró la partícula faltante en el ME, por esta razón el ME tal como está formulado no es la teoría final.

1.1.1. La lagrangiana del Modelo Estándar

La lagrangiana del ME se obtiene de la lagrangiana de una partícula libre relativista y de carga q a partir de la invariancia de norma bajo el grupo G_{ME} , esta lagrangiana es la suma de dos términos; la energía cinética de los fermiones \mathcal{L}_{kf} , la energía cinética de los campos de norma \mathcal{L}_{kn} , además se agregan en la lagrangiana términos que son invariantes de norma bajo el grupo G_{ME} estos son: el lagrangiano de Higgs \mathcal{L}_H y los términos de los acoplamientos de Yukawa \mathcal{L}_Y ,

$$\mathcal{L}_{ME} = \mathcal{L}_{kf} + \mathcal{L}_{kn} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y. \quad (1.1)$$

En lo sucesivo estudiaremos cada uno de estos términos.

El sector fermiónico

En el ME los quarks y leptones están organizados en tres generaciones en cada familia, el contenido de partículas fermiónicas bajo el grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ es dado en dobletes izquierdos (fermiones levógiros) y singletes derechos (fermiones dextrógiros). La primera de estas está formada por las partículas más ligeras (1^{er} generación $(\nu_e), (u)$) y las siguientes dos se caracterizan por ser más pesadas, (2^{da} generación $(\nu_\mu), (c)$) y (3^{era} generación $(\nu_\tau), (t)$). Cada generación contiene dos sabores de quarks y dos de leptones. Con excepción de la masa, estas generaciones tienen la misma carga eléctrica y el mismo espín. Actualmente se ha verificado experimentalmente [11] que los neutrinos tienen masa, esta es una evidencia experimental de que el ME debe extenderse para incluir a los neutrinos derechos.

Como sabemos, la ecuación de Dirac describe las partículas fermiónicas. La lagrangiana de Dirac de una partícula libre es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \quad (1.2)$$

La invariancia de norma se obtiene reemplazando la derivada ordinaria ∂_μ por la derivada covariante D_μ en la lagrangiana de partícula libre,

$$\mathcal{L}_{kf} = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi. \quad (1.3)$$

La lagrangiana invariante de norma no describe a una partícula libre, ya que ahora está sujeta a las fuerzas nucleares fuertes, nucleares débiles y electromagnéticas. La derivada covariante

está dada por:

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_s G_a^\mu L_a + ig A_b^\mu T_b + ig' B^\mu Y, \quad (1.4)$$

donde g_s , g y g' son las constantes de acoplamiento (una por cada grupo de norma respectivamente, en el caso electromagnético g' es una generalización de la unidad de carga fundamental e), $G_a^\mu(X)$ son los ocho campos de norma de $SU(3)_C$, A_b^μ son los tres campos de norma de $SU(2)$ y $B^\mu(X)$ es el bosón de norma del grupo $U(1)_Y$ de la hipercarga. Las matrices L_a son los generadores del grupo $SU(3)_C$ de las interacciones fuertes y se pueden representar con las matrices $\frac{\lambda_a}{2}$ de Gell-Mann en el caso de tripletes, T_b son los generadores del grupo $SU(2)_L$ y se representan con matrices de Pauli para dobletes, finalmente tenemos las cargas Y del grupo $U(1)_Y$.

El sector de norma

Este sector se encuentra compuesto por ocho gluones, los cuales son los bosones de norma de $SU(3)_C$ y por las partículas W^\pm , Z^0 y γ que son los cuatro bosones de norma de $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Las principales propiedades físicas de estos bosones de norma intermediarios son: los gluones tienen masa nula, son eléctricamente neutros y tienen carga de color, los cuales pueden ser de ocho diferentes números cuánticos. Como consecuencia de esto, los gluones no sólo interactúan con los quarks, sino también con ellos mismos. Los bosones W^\pm y Z^0 son partículas masivas ($80.39 \frac{GeV}{c^2}$ y $91.188 \frac{GeV}{c^2}$, respectivamente)[10] y también interactúan entre ellas. Los W^\pm tienen carga $Q = \pm 1$, respectivamente, mientras que el Z^0 es neutro. El γ es eléctricamente neutro, sin masa y no interactúa consigo mismo.

Para asegurar acoplamientos de fermiones izquierdos con los bosones de norma de $SU(2)_L$, los fermiones de este tipo están representados por dobletes de $SU(2)_L$, $Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$, $L_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$, donde Q_L y L_L son los dobletes de quarks y leptones en $SU(2)_L$, respectivamente. Los estados fermiónicos de helicidad derecha se transforman como singletes bajo $SU(2)_L$, pero ambos dobletes y singletes de quarks y leptones, se transforman de manera no trivial bajo el grupo de hipercarga $U(1)_Y$. Para los fermiones se definen los números cuánticos Q , T_3 , y Y , que son la carga eléctrica, la carga débil[8] y la hipercarga[8], respectivamente. La hipercarga depende de los dos primeros números cuánticos de la siguiente forma $Y = 2(Q - T_3)$, entonces tenemos los siguientes datos de los números cuánticos Q y T_3 :

	u_R	u_L	d_R	d_L	e_R	e_L	ν_L
Q	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1	0
T_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La lagrangiana de los campos de norma tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{kn} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

con los respectivos tensores antisimétricos construidos a partir de los campos de norma:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{ijk}A_\mu^iA_\nu^k, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{ijk}G_\mu^iG_\nu^k. \end{aligned} \quad (1.6)$$

En estas expresiones, $F_{\mu\nu}^a$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma $A_\mu^a(X)$, corresponden a los generadores de $SU(2)$; ϵ^{ijk} son las constantes de estructura del grupo $SU(2)$ y coinciden con el tensor ϵ^{ijk} completamente antisimétrico de Levi-Civita, $B_{\mu\nu}$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma $B_\mu(X)$ asociados con $U(1)_Y$; $G_{\mu\nu}^a$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los ocho campos $G_\mu^a(X)$ de los gluones correspondientes a los ocho generadores de $SU(3)$; finalmente, f^{ijk} son las constantes de estructura del grupo $SU(3)$.

El sector escalar o de Higgs

En este sector se encuentra la partícula conocida como bosón de Higgs [6], el bosón de Higgs es una partícula elemental masiva cuya existencia se planteo a partir del mecanismo de Higgs al dar masa a las partículas elementales del ME de la física de partículas e interacciones fundamentales. Esta partícula fue teorizada en 1964 por Peter Higgs, Francois Englert y Robert Brout (quienes trabajaban en las ideas de Philip Anderson), e independientemente por G.S. Guralnik, C.R Hagen y T.W.B. Kibble. Stevem Weinberg y Abdus Salam fueron los primeros en aplicar el mecanismo de Higgs a la ruptura espontanea de simetría electrodébil. La teoría electrodébil nos decía que la partícula tenía que ser neutra y cuya masa no era muy lejana de los bosones de norma W^\pm y Z^0 . La partícula llamada bosón de Higgs es un cuanto de uno de los componentes del campo de Higgs. En un espacio vacío, el campo adquiere un valor esperado de vacío (VEV) distinto de cero que permanece constante en el tiempo y en todo lugar del Universo. El VEV de un campo de Higgs es constante e igual a 246 GeV. La existencia de un VEV no nulo tiene una importancia fundamental: da una masa a cada partícula elemental, incluyendo al mismo bosón de Higgs. En particular, la adquisición espontanea de un VEV diferente de cero rompe la simetría de norma electrodébil, un fenómeno conocido como el mecanismo de Higgs [2]. Este es el simple mecanismo capaz de dar masa a un bosón de norma que es también

compatible con la teoría de campo de norma. En el ME se incluye un doblete de Higgs para generar la masa de los fermiones, sin incluir a los neutrinos, ya que en el ME los neutrinos se consideran partículas de masa nula. Se encontró en los experimentos de oscilación de neutrinos que la masa de los neutrinos es diferente de cero y se requiere extender el ME para incluir neutrinos masivos.

Debido a que los términos de masa son de la forma siguiente

$$m\bar{\psi}\psi = m(\psi_L\psi_R + \psi_R\psi_L), \quad (1.7)$$

si estos términos de masa tratan de ser introducidos de manera directa, destruyen la invariancia de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$, donde los campos izquierdos y derechos están definidos como $\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\psi$ (véase apéndice para γ^5). Para evitar este problema, la solución más conocida consiste en incluir en el ME el sector de Higgs, el cual induce un rompimiento espontáneo de la simetría, y esto sucede a través del Mecanismo de Higgs.

En el ME sólo hay un campo de Higgs que es un doblete escalar complejo bajo $SU(2)_L$ dado por $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$, que es un singlete bajo el grupo $SU(3)_C$, con una hipercarga asociada $Y_\Phi = 1$, y con isospín débil $T = \frac{1}{2}$, esta es una de las representaciones en el ME.

Para describir las partículas libres de espín entero se emplea la ecuación de Klein-Gordon, cuya lagrangiana es la siguiente:

$$\mathcal{L}_{KG} = (\partial^\mu \Phi)^\dagger \partial_\mu \Phi.$$

Introduciendo la derivada covariante D_μ obtenemos la lagrangiana de Higgs con interacciones. En el ME hay doce bosones de norma relacionados a la simetría de norma $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, y un solo escalar de Higgs relacionado al rompimiento espontáneo de la simetría

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{EM}. \quad (1.8)$$

La lagrangiana de Higgs que contiene los acoplamientos de Higgs con los bosones de norma está dada por

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (1.9)$$

donde el potencial $V(\Phi^\dagger \Phi)$ tiene los auto-acoplamientos de Higgs y es invariante bajo $SU(2) \times U(1)$ y $SU(3)$; el potencial contiene a lo más términos cuárticos en Φ :

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = -\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2,$$

donde el parámetro μ^2 tiene unidades de masa y λ es adimensional.

De manera análoga a la electrodinámica se introduce la derivada covariante D_μ para obtener la invariancia de norma bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$,

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}g\tau A_\mu - \frac{i}{2}g'Y B_\mu \quad (1.10)$$

esta contiene términos de acoplamiento de los bosones de norma A_μ y B_μ con el campo de Higgs.

El rompimiento espontáneo de simetría de norma $G_{ME} \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{EM}$ se induce si el mínimo del potencial V se obtiene para valores de Φ entre estados del vacío no nulos; esto es

$$\left. \frac{\partial V(\Phi^\dagger \Phi)}{\partial \Phi} \right|_{\langle \Phi \rangle} = [(-\mu^2 + 2\lambda(\Phi^\dagger \Phi))\Phi^\dagger]_{\langle \Phi \rangle} = 0 \quad (1.11)$$

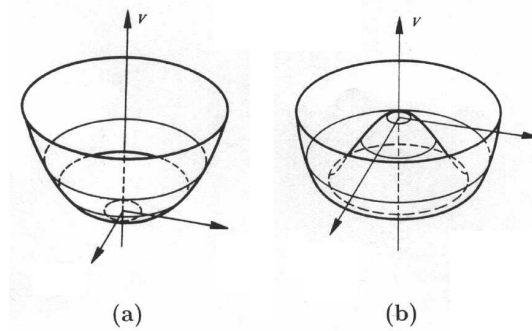
como

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Se debe de cumplir

$$-\mu^2 + \lambda v^2 = 0 \quad (1.13)$$

donde $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ es real y con valor $v = 246$ GeV. Con el rompimiento espontaneo de simetría tenemos gráficamente el famoso sombrero mexicano.



Acoplamientos de Yukawa

La lagrangiana de Yukawa es la suma de los términos que acoplan el campo de Higgs con los campos de los quarks y los leptones.

Los acoples de Yukawa más generales en $SU(2)_L \times U(1)_Y$ entre scalares y fermiones están dados por

$$\mathcal{L}_Y = Y^e \bar{l}_L \Phi e_R + Y^u \bar{q}_L \tilde{\Phi} u_R + Y^d \bar{q}_L \Phi d_R + h.c. \quad (1.14)$$

con el isodoublete $\tilde{\Phi} = i\tau_2\Phi^*$ teniendo como hipercarga $Y(\tilde{\Phi}) = -1$, donde h.c. es el hermitiano conjugado.

De la expresión (1.12) sabemos que la contribución de los campos cargados de Higgs es nula, mientras tanto los campos neutros son lo que contribuyen, entonces expresando la lagrangiana de Yukawa en estos campos tenemos los términos de masa para el sector fermionico

$$\mathcal{L}_Y = \frac{1}{\sqrt{2}}v [Y^e\bar{e}_L e_R + Y^u\bar{u}_L u_R + Y^d\bar{d}_L d_R] + h.c.. \quad (1.15)$$

1.1.2. Corrientes cargadas

Nos enfocamos en la energía cinética de los fermiones, ya que ahí se presentan las interacciones de los campos de norma del grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ con las corrientes de los fermiones.

El acoplamiento de los fermiones de la primer generación a los bosones se deriva directamente del término siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kf} = & (\bar{u}, \bar{d})_L \gamma^\mu \left(i\partial_\mu + gT \cdot A_\mu + \frac{g'}{6} B_\mu \right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ & + (\bar{\nu}_e, \bar{e})_L \gamma^\mu \left(i\partial_\mu + gT \cdot A_\mu - \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ & + \bar{u}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu + 4\frac{g'}{6} B_\mu \right) u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - \frac{g'}{3} B_\mu \right) d_R \\ & + \bar{e}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' B_\mu \right) e_R \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde los valores de las hipercargas $Y(l_L) = -1$, $Y(e_R) = -2$, $Y(q_L) = \frac{1}{3}$, $Y(u_R) = \frac{4}{3}$, $Y(d_R) = -\frac{2}{3}$ ya fueron aplicadas respectivamente. Si hacemos las operaciones indicadas, podemos reescribir la lagrangiana, recordando:

$$T \cdot A_\mu = \sum_1^3 T_i A_i \quad (1.17)$$

entonces la langragiana es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kf} = & (\bar{u}, \bar{d})_L i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e, \bar{e})_L i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ & + \bar{u}_R i\gamma^\mu \partial_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu \partial_\mu d_R + \bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R \\ & + (gJ_\mu^1 A_1^\mu + gJ_\mu^2 A_2^\mu) + \left(gJ_\mu^3 A_3^\mu + \frac{g'}{2} J_\mu^Y B^\mu \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde las J^μ representan a las corrientes, las primeras dos son las corrientes cargadas de quarks y leptones, las últimas son las neutras.

$$J_1^\mu = \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L \quad (1.19)$$

$$J_2^\mu = i\bar{d}_L \gamma^\mu u_L - i\bar{u}_L \gamma^\mu d_L + i\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e - i\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L \quad (1.20)$$

$$J_3^\mu = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \quad (1.21)$$

$$J_Y^\mu = \frac{1}{3} (\bar{u}, \bar{d})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L - (\bar{\nu}_e, \bar{e})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ + \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{2}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R - 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R \quad (1.22)$$

Las componentes derechas e izquierdas de los campos no se mezclan ya que ante la ausencia de los términos de masa la lagrangiana del ME no mezcla campos izquierdos con derechos. Sin embargo, cuando se rompe espontáneamente la simetría de norma G_{ME} las interacciones de Yukawa dan origen a las masas de los fermiones, y los términos de masa rompen la simetría de la lagrangiana mezclando las diferentes componentes izquierdas y derechas de los campos.

Corrientes cargadas para 3 generaciones de quarks

Las corrientes cargadas tienen la misma forma para las distintas generaciones, por lo mismo podemos denotar como $J_{\alpha i}^\mu$ a las corrientes de distintas generaciones, donde $\alpha = \{1, 2, 3, Y\}$ es el índice de norma y las generaciones están denotadas por $i = \{1, 2, 3\}$, ahora si nos enfocamos sólo en los quarks en la corriente J_{1i}^μ tenemos lo siguiente:

$$J_{11}^\mu = \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L, \quad (1.23)$$

$$J_{12}^\mu = \bar{s}_L \gamma^\mu c_L + \bar{c}_L \gamma^\mu s_L, \quad (1.24)$$

$$J_{13}^\mu = \bar{b}_L \gamma^\mu t_L + \bar{t}_L \gamma^\mu b_L. \quad (1.25)$$

Reescribimos la J_1^μ ahora considerando las tres generaciones

$$J_1^\mu = (\bar{d}, \bar{s}, \bar{b})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L \\ + (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad (1.26)$$

Con este resultado se puede apreciar que donde la teoría es invariante de norma tenemos que las corrientes cargadas son diagonales.

1.2. El Modelo Estándar extendido con simetría permutacional S_3

El ME no explica la razón de que haya tres familias de fermiones. Las masas y ángulos de mezclas de los quarks y leptones son parámetros libres que deben ser introducidos a mano. Si se añade una simetría horizontal que actúa en el espacio del sabor, aumentando así la simetría de la teoría y reduciendo el número de parámetros libres podremos predecir algunas relaciones entre las masas. Esta simetría se le conoce mejor como "simetría de sabor".

Antes del rompimiento de la simetría de norma no hay diferencia alguna entre las tres generaciones y una simetría de sabor hace posible una explicación natural de esto. Nosotros podemos permutar una generación con otra y la lagrangiana queda invariante. Una vez rota la simetría de norma, la única distinción entre generaciones es que tienen diferentes masas.

Podemos escoger entre varios grupos de simetrías, pero emplearemos el grupo S_3 debido a que es el grupo discreto no-abeliano más pequeño y tiene dos representaciones irreducibles de una dimensión y una representación irreducible de dos dimensiones.

Antes del rompimiento de la simetría de norma, la lagrangiana del ME es invariante ante permutaciones de los fermiones de una misma familia, por lo cual las permutaciones son una simetría del ME antes del rompimiento de la simetría de norma. Como tenemos representaciones de singlete y doblete podemos poner a la partícula de la tercera generación en la representación de singlete y a las otras dos generaciones, las ligeras, en el doblete, de esta forma se acomoda naturalmente la jerarquía de masa.

1.2.1. El grupo S_3

El grupo S_3 [4] es el conjunto formado por las permutaciones de tres objetos, los cuales podemos etiquetar como (f_1, f_2, f_3) . Los elementos del grupo son $S_3 = \{I, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, las A_i con $i = 1, 2, 3, 4, 5$ etiquetan las permutaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Para no tener que recurrir constantemente a las operaciones de multiplicación de los elementos de este grupo es adecuado tener una tabla que contenga esta operación entre los elementos

del grupo.

	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
I	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	A_1	I	A_5	A_4	A_3	A_2
A_2	A_2	A_4	I	A_5	A_1	A_3
A_3	A_3	A_5	A_4	I	A_2	A_1
A_4	A_4	A_2	A_3	A_1	A_5	I
A_5	A_5	A_3	A_1	A_2	I	A_4

(tabla 1.1)

De la tabla se sigue que el grupo es no-abeliano y el orden en el cual se aplica la operación de multiplicación es importante. En esta tabla se asienta el producto de los elementos de la columna por los elementos del renglón.

Clases conjugadas

Para un grupo G de orden g , se define una clase conjugada del grupo cuyo representante es k como

$$(k) = \{k, b \mid u^{-1}bu = k, b \in G\}, \quad (1.28)$$

El elemento identidad I forma una clase, pero las otras clases tienen que ser determinadas. Así,

$$\begin{aligned} A_4^{-1}A_1A_4 &= A_2^{-1}A_3A_2 = A_3^{-1}A_2A_3 = A_1, \\ A_1^{-1}A_5A_1 &= A_5^{-1}A_4A_5 = A_4. \end{aligned} \quad (1.29)$$

De las expresiones (1.29) podemos percatarnos que existen tres clases en el grupo S_3 , que son:

$$I = \{I\}, \quad k_1 = \{A_1, A_2, A_3\}, \quad k_2 = \{A_4, A_5\} \quad (1.30)$$

Operadores de clase

La suma de los elementos de un grupo G correspondiente a una misma clase es llamada operador de clase. Suponiendo que la i -ésima clase tiene g_i elementos R_1, R_2, \dots, R_{g_i} , el operador de clase C_i se define por:

$$C_i = \sum_{l=1}^{g_i} R_l^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.31)$$

donde N es el número de clases del grupo.

Para el caso del grupo S_3 resultan los siguientes operadores de clase

$$C_1 = I, \quad C_2 = A_1 + A_2 + A_3, \quad C_3 = A_4 + A_5. \quad (1.32)$$

1.2.2. Representaciones del grupo S_3

Para obtener la representación matricial de cada elemento del grupo S_3 , partimos de los vectores base de un espacio de tres dimensiones:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1). \quad (1.33)$$

La representación real del grupo se obtiene al aplicar la sucesión de cada elemento del grupo a los vectores base:

$$\begin{aligned} D(I) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D(A_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta es una representación claramente tridimensional, pero no es única, se tiene otra representación mediante la asociación de tres elementos del grupo a los ejes de un triángulo equilátero, esto se puede hacer aprovechando que el grupo S_3 es isomórfico al grupo de simetrías del triángulo equilátero.

Mediante rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ tenemos las representaciones de todos los elementos del grupo:

$$\begin{aligned} D(I) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(A_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ D(A_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D(A_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ D(A_4) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

obtenemos una representación unitaria ya que todas las matrices son unitarias.

El número de representaciones irreducibles de S_3 es 3 debido a que en un grupo G , de orden g el número de representaciones irreducibles es igual al número de clases conjugadas, que en este caso es 3. Aunque podemos saber el número de representaciones irreducibles aún no sabemos las dimensiones de las mismas, pero de teoría de grupos sabemos que la sumatoria de las dimensiones al cuadrado de las representaciones irreducibles es igual al orden del grupo, entonces tenemos lo siguiente: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$, donde cada n_i representa la dimensión de una representación irreducible del grupo. Si exploramos rápidamente nos percatamos que los valores que cumplen con la expresión anterior son $n_i = \{1, 1, 2\}$, entonces conociendo las dimensiones podemos decir que el grupo S_3 se descompone en dos singletes y un doblete.

Partiendo de las últimas representaciones que obtuvimos del grupo S_3 , sólo nos queda expresarla de forma irreducible, y ya tenemos los elementos para hacerlo, entonces las representaciones irreducibles de cada elemento del grupo son las siguientes:

	$D^{(1)}$	$D^{(2)}$	$D^{(3)}$
I	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
A_1	1	-1	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
A_2	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
A_3	1	-1	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
A_4	1	1	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
A_5	1	1	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Proyectores

Para obtener las funciones adaptadas a la simetría S_3 necesitamos tener los proyectores del grupo, para el singlete simétrico tenemos la siguiente forma del operador de proyección:

$$\begin{aligned}
 P_{1_S} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} I - A_2 + \frac{1}{2}(A_1 + A_3 - A_4 - A_5) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 - A_4 + A_5) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 + A_4 - A_5) & I + A_2 - \frac{1}{2}(A_1 + A_3 + A_4 + A_5) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

para el antisimétrico

$$\begin{aligned}
 P_{1_A} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} I + A_2 - \frac{1}{2}(A_1 + A_4 + A_5) & \frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 + A_4 - A_5) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 - A_4 + A_5) & I - A_2 + \frac{1}{2}(A_1 + A_3 - A_4 - A_5) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

y para el doblete

$$\begin{aligned}
 P_2 &= 1_{(4 \times 4)} - P_{1_S} - P_{1_A} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

El proyector P_2 lo podemos reescribir de la siguiente forma:

$$P_2 = P_2^{(1)} + P_2^{(2)} \tag{1.37}$$

donde

$$\begin{aligned}
 P_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 0 \ -1)
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned}
 P_2^{(2)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 1 \ 1 \ 0)
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Los valores propios de los proyectores permiten construir matrices que diagonalizan por bloques al producto $D(R) \times D(R)$. Si aplicamos cada uno de los proyectores a un producto directo tendremos su descomposición en dobletes y singletes, veamos el caso del producto directo

$X \otimes Y$, tenemos:

$$P_{1_s}(X \otimes Y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_1y_1 + x_2y_2 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{1_A}(X \otimes Y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_2y_1 - x_1y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para el caso lo descomponeremos en dos terminos

$$P_2(X \otimes Y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_2y_2 - x_1y_1 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 - x_2y_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 + x_2y_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las funciones adaptadas a la simetría son los coeficientes en los vectores propios, entonces si las componentes de las funciones empleadas son dos dobletes de S_3 , ya conocemos las componentes del producto, un singlete simétrico $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2)$, el cual es invariante ante S_3 , un singlete antisimétrico $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1)$ y un doblete de componentes $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 - x_2y_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 + x_2y_1)\right)$

Si denotamos por u la matriz que lleva a una forma diagonal por bloques a $X \otimes Y$, se pueden obtener los eigenvectores de los proyectores con eigenvalor 1. Así, si queremos que 1_s aparezca

en la esquina superior derecha, ponemos $|1_s\rangle$ como la primera columna, si ponemos a $|1_A\rangle$ como segunda columna 1_A queda en el segundo bloque diagonal, para este caso

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

y esta se aplica a un elemento del grupo, por ejemplo a $A_2 \otimes A_2$, en representación bidimensional $D^{(3)}$, tenemos

$$\tilde{A}_2^{(2 \otimes 2)} = u^{-1} A_2^{(2 \otimes 2)} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

donde $A_2^{(2 \otimes 2)} = A_2 \otimes A_2$.

El bloque en la esquina inferior derecha es la matriz A_1 de la representación $D^{(3)}$ original, lo que nos dice que la identificación (x_1, x_2) del doblete original, es decir que si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

son dobletes de S_3 , esto es la componente del producto directo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

En la representación de 3×3 , el proyector del grupo S_3 sobre el singlete simétrico está dado y es invariante bajo los elementos de S_3

$$P_{1s} = \frac{1}{6} (I + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \quad (1.47)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} P_{1s} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1) \end{aligned} \quad (1.48)$$

el operador P_2 se obtiene de

$$P_{1s} + P_2 = \mathbf{1}_{(3 \times 3)} \quad (1.49)$$

entonces nuestro operador P_2 es el siguiente:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ -1 \ 0) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} (1 \ 1 \ -2) \end{aligned} \quad (1.50)$$

En este caso, si construimos la siguiente matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

donde S cumple con $S^{-1}A_iS = \tilde{A}_i$, donde esto es diagonal por bloques a los elementos de la representación, \tilde{A}_i es conocida también como $\tilde{A}_i^{(H)}$, matriz jerárquica.

1.2.3. Sector fermiónico extendido ME- S_3

Ahora podemos expresar los campos fermiónicos asociados a las partículas contenidas en el ME como:

$$\psi_i^u(x) : \begin{pmatrix} u(x) \\ c(x) \\ t(x) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \psi_i^d(x) : \begin{pmatrix} d(x) \\ s(x) \\ b(x) \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

Aplicando los proyectores sobre los campos ψ tenemos:

$$P_{1s}\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x)) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

El término $\psi_1^{(H)}(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x)$ se encuentra relacionado con el quark de singlete de sabor S_3

$$P_2 = P_2^{(1)} + P_2^{(2)}, \quad (1.54)$$

donde

$$\begin{aligned} P_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2^{(1)}\psi &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 - \psi_2 \\ -\psi_1 + \psi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.55)$$

y

$$\begin{aligned} P_2^{(2)} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ P_2^{(2)}\psi &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3 \\ \psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3 \\ -2\psi_1 - 2\psi_2 + 4\psi_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Por lo tanto, tenemos que $\psi^{(H)}$ está dada de la siguiente forma

$$\psi^{(H)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - \psi_2) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Hemos adaptado los campos fermiónicos a la simetría S_3 pero aún no construimos la lagrangiana de Yukawa y para ello necesitamos estudiar el sector de Higgs.

1.2.4. Sector de Higgs extendido ME- S_3

Como vimos anteriormente, la lagrangiana de Yukawa contiene las interacciones del Higgs con el sector fermiónico y de esta forma adquieren masa los fermiones. En analogía con el sector fermiónico consideraremos que el bosón de Higgs es una partícula fundamental y al igual que los fermiones se transforma de manera no trivial bajo el grupo de simetría de familias S_3 . Para construir dicha lagrangiana necesitamos definir el sector de Higgs extendido con simetría S_3 . Para ello, consideramos un sector de Higgs extendido con 3 campos de Higgs ϕ_a, ϕ_b y ϕ_c , dobletes de $SU(2)$, los cuales se expresarán en la representación invariante de norma (débil W por sus siglas en inglés) como:

$$\Phi_W = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{pmatrix}_W. \quad (1.58)$$

En la base adaptada a la simetría S_3 , tendremos un singlete de Higgs y un doblete, donde a su vez cada uno de ellos es un doblete de $SU(2)$. El ME no explica porqué tenemos tres generaciones, solo las introduce al replicar dos veces la primer generación, en analogía con el problema de la replicación de las generaciones de las partículas fundamentales, nosotros introducimos tres campos de Higgs. Estas son algunas de las características del sector de Higgs, indispensables para construir las matrices de masa de los fermiones cargados en el ME extendido S_3 .

Capítulo 2

ANÁLISIS DEL POTENCIAL DE HIGGS

El sector del bosón de Higgs en el ME donde el mecanismo responsable para el rompimiento de la simetría de norma es uno de los aciertos fundamentales para la física de las partículas ha sido confirmado recientemente por el descubrimiento de un bosón con una masa del orden esperado para el boson de Higgs del ME. En el ME, un campo de Higgs doblete $SU(2)_L$ es incluido para el rompimiento de simetría del grupo de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$, la única restricción es que el valor de expectación en el vacío (VEV) del doblete de Higgs tiene que ser de $v^2 = (246 \text{ GeV})^2$. Aunque su descubrimiento es una pieza fundamental de la teoría y el potencial de Higgs es muy simple y nos da para construir un modelo de la generación de masas, tal vez esta no es la forma final de la teoría. En el ME cada familia de fermiones entra independientemente, para entender el problema de las replicas de la generación de las familias de fermiones, proponemos introducir una simetría del sabor conocida como el grupo de familias, en esta dirección se encamina este trabajo usando un grupo discreto S_3 como el grupo de familias o grupo del sabor. [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Antes de la introducción del boson de Higgs, el ME es quiral e invariante respecto a cualquier permutación de los quarks derechos e izquierdos y los campos de los leptones como vimos en el capítulo anterior.

2.1. El sector de Higgs

La lagrangiana del sector de Higgs que se encuentra en la literatura está dada por la siguiente forma

$$\mathcal{L}_\Phi = [D_\mu H_s]^2 + [D_\mu H_1]^2 + [D_\mu H_2]^2 - V[H_1, H_2, H_s],$$

donde D_μ es la derivada covariante. El potencial escalar $V(H_1, H_2, H_S)$ es el potencial de Higgs más general e invariante bajo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times S_3$. El análisis y estudio de las propiedades de estabilidad del potencial V serán realizados más adelante en este capítulo. Como se vio anteriormente en nuestro modelo nosotros tenemos tres campos de Higgs donde la simetría S_3 extiende al ME enriqueciéndolo y nos da más herramientas para el análisis y estudio del potencial de Higgs V .

2.1.1. Potencial de Higgs invariante S_3

El potencial de Higgs mas general [7] en este modelo esta descrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
V = & \mu_1^2 \left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2 \right) + \mu_0^2 \left(H_S^\dagger H_S \right) + a \left(H_S^\dagger H_S \right)^2 \\
& + b \left(H_S^\dagger H_S \right) \left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2 \right) + c \left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2 \right)^2 \\
& + d \left(H_1^\dagger H_2 - H_2^\dagger H_1 \right)^2 + e f_{ijk} \left(\left(H_S^\dagger H_i \right) \left(H_j^\dagger H_k \right) \right) \\
& + f \left\{ \left(H_S^\dagger H_1 \right) \left(H_1^\dagger H_S \right) + \left(H_S^\dagger H_2 \right) \left(H_2^\dagger H_S \right) \right\} \\
& + g \left\{ \left(H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2 \right)^2 + \left(H_1^\dagger H_2 + H_2^\dagger H_1 \right) \right\} \\
& + h \left\{ \left(H_S^\dagger H_1 \right) \left(H_S^\dagger H_1 \right) + \left(H_S^\dagger H_2 \right) \left(H_S^\dagger H_2 \right) \right. \\
& \left. + \left(H_1^\dagger H_S \right) \left(H_1^\dagger H_S \right) + \left(H_2^\dagger H_S \right) \left(H_2^\dagger H_S \right) \right\},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $f_{112} = f_{121} = f_{211} = -f_{222} = 1$ y los subíndices 1, 2 corresponden para dobletes de Higgs $SU(2)_L$ con un índice de sabor 1, 2. Podemos escribir H_1, H_2 y H_S como tres dobletes de la siguiente forma

$$H_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_7 + i\phi_{10} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_8 + i\phi_{11} \end{pmatrix}, \quad H_S = \begin{pmatrix} \phi_5 + i\phi_6 \\ \phi_9 + i\phi_{12} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

donde S es el índice de sabor para el campo de Higgs que se transforma como el singlete de S_3 . Siguiendo el espíritu de Barroso [24], introducimos la notación siguiente

$$\begin{aligned}
x_1 &= H_1^\dagger H_1, & x_4 &= \mathcal{R} \left(H_1^\dagger H_2 \right), & x_7 &= \mathcal{I} \left(H_1^\dagger H_S \right), \\
x_2 &= H_2^\dagger H_2, & x_5 &= \mathcal{I} \left(H_1^\dagger H_2 \right), & x_8 &= \mathcal{R} \left(H_2^\dagger H_S \right), \\
x_3 &= H_S^\dagger H_S, & x_6 &= \mathcal{R} \left(H_1^\dagger H_S \right), & x_9 &= \mathcal{I} \left(H_2^\dagger H_S \right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Estos términos se pueden escribir fácilmente como a continuación se muestra:

$$x_1 = H_1^\dagger H_1 = (\phi_1 - i\phi_2, \phi_7 - i\phi_{10}) \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_7 + i\phi_{10} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} &= (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) + (\phi_7 - i\phi_{10})(\phi_7 + i\phi_{10}) \\ &= \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_7^2 + \phi_{10}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$x_2 = H_2^\dagger H_2 = (\phi_3 - i\phi_4, \phi_8 - i\phi_{11}) \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_8 + i\phi_{11} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$= \phi_3^2 + \phi_4^2 + \phi_8^2 + \phi_{11}^2 \quad (2.7)$$

$$x_3 = H_S^\dagger H_S = (\phi_5 - i\phi_6, \phi_9 - i\phi_{12}) \begin{pmatrix} \phi_5 + i\phi_6 \\ \phi_9 + i\phi_{12} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$= \phi_5^2 + \phi_6^2 + \phi_9^2 + \phi_{12}^2 \quad (2.9)$$

Para obtener el resto hacemos las siguientes operaciones

$$H_1^\dagger H_2 = (\phi_1 - i\phi_2, \phi_7 - i\phi_{10}) \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_8 + i\phi_{11} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$= (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_3 + i\phi_4) + (\phi_7 - i\phi_{10})(\phi_8 + i\phi_{11})$$

$$= \phi_1\phi_3 + \phi_2\phi_4 + i\phi_1\phi_4 - i\phi_2\phi_3 + \phi_7\phi_8 + \phi_{10}\phi_{11} + i\phi_7\phi_{11} - i\phi_8\phi_{10}$$

De aquí es fácil ver que

$$x_4 = \phi_1\phi_3 + \phi_2\phi_4 + \phi_7\phi_8 + \phi_{10}\phi_{11}, \quad (2.11)$$

$$x_5 = \phi_1\phi_4 - \phi_2\phi_3 + \phi_7\phi_{11} - \phi_8\phi_{10}. \quad (2.12)$$

De igual manera para

$$H_1^\dagger H_S = (\phi_1 - i\phi_2, \phi_7 - i\phi_{10}) \begin{pmatrix} \phi_5 + i\phi_6 \\ \phi_9 + i\phi_{12} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$= (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_5 + i\phi_6) + (\phi_7 - i\phi_{10})(\phi_9 + i\phi_{12})$$

$$= \phi_1\phi_5 + \phi_2\phi_6 + i\phi_1\phi_6 - i\phi_2\phi_5 + \phi_7\phi_9 + \phi_{10}\phi_{12} + i\phi_7\phi_{12} - i\phi_9\phi_{10}$$

entonces

$$x_6 = \phi_1\phi_5 + \phi_2\phi_6 + \phi_7\phi_9 + \phi_{10}\phi_{12}, \quad (2.14)$$

$$x_7 = \phi_1\phi_6 - \phi_2\phi_5 + \phi_7\phi_{12} - \phi_9\phi_{10}. \quad (2.15)$$

Por ultimo realizamos la operación

$$\begin{aligned}
H_2^\dagger H_S &= (\phi_3 - i\phi_4, \phi_8 - i\phi_{11}) \begin{pmatrix} \phi_5 + i\phi_6 \\ \phi_9 + i\phi_{12} \end{pmatrix} \\
&= (\phi_3 - i\phi_4)(\phi_5 + i\phi_6) + (\phi_8 - i\phi_{11})(\phi_9 + i\phi_{12}) \\
&= \phi_3\phi_5 + \phi_4\phi_6 + i\phi_3\phi_6 - i\phi_4\phi_5 + \phi_8\phi_9 + \phi_{11}\phi_{12} + i\phi_8\phi_{12} - i\phi_9\phi_{11}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

de aquí obtenemos

$$x_8 = \phi_3\phi_5 + \phi_4\phi_6 + \phi_8\phi_9 + \phi_{11}\phi_{12}, \tag{2.17}$$

$$x_9 = \phi_3\phi_6 - \phi_4\phi_5 + \phi_8\phi_{12} - \phi_9\phi_{11}. \tag{2.18}$$

Por lo tanto, sustituyendo estos términos en el potencial de Higgs dado por la ecuación (2.1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
V &= \mu_1^2(x_1 + x_2) + \mu_0^2 x_3 + ax_3^2 + bx_3(x_1 + x_2) + c(x_1 + x_2)^2 - 4dx_5^2 \\
&\quad + g[(x_1 - x_2)^2 + 4x_4^2] + f(x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2) + 2h(x_6^2 - x_7^2 + x_8^2 - x_9^2) \\
&\quad + 2e[2x_4x_6 + x_8(x_1 - x_2)].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

El potencial V depende de los campos ϕ_i a través de x_i como se ve en el desarrollo. Este potencial se puede reescribir de una forma más sencilla, esto lo lograremos definiendo un vector de campos X de la siguiente manera

$$X^T = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_9), \tag{2.20}$$

además incluiremos un vector de parámetros de masas A determinado por

$$A^T = (\mu_1^2, \mu_1^2, \mu_0^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \tag{2.21}$$

Ahora reescribimos el potencial V para expresarlo de una forma más simple escrito en forma matricial:

$$V(X) = A^T X + \frac{1}{2} X^T B X, \tag{2.22}$$

donde B es una matriz de 9×9 con parámetros reales

$$B = \begin{pmatrix} 2(c+g) & 2(c-g) & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 2e & 0 \\ 2(c-g) & 2(c+g) & b & 0 & 0 & 0 & 0 & -2e & 0 \\ b & b & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8g & 0 & 4e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4e & 0 & 2(f+2h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(f-2h) & 0 & 0 \\ 2e & -2e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(f+2h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(f-2h) \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Tenemos una expresión elegante y sencilla. En la próxima sección procederemos a clasificar los diferentes puntos críticos del potencial de Higgs.

2.2. Puntos estacionarios

Nosotros asumimos que H_S es el campo de Higgs del ME, nosotros no rompemos ni la carga eléctrica ni CP cuando H_S adquiere un VEV distinto de cero, todo el rompimiento de carga o CP en el modelo es debido a los dobletes obtenidos al extender la teoría a la simetría S_3 , es decir los rompimientos si hay alguno es por los campos H_1 y H_2 . Con esto en mente y usando las condiciones de minimización nos encontramos con que el potencial (2.1) tiene tres tipos de puntos estacionarios:

1. El mínimo normal con la configuración del campo siguiente:

$$\phi_7 = v_1, \phi_8 = v_2, \phi_9 = v_3, \phi_i = 0, \quad i \neq 7, 8, 9$$

2. El punto estacionario que rompe la carga eléctrica, aquí dos de los campos cargados ϕ adquieren VEV distintos de ceros:

$$\phi_7 = v'_1, \phi_8 = v'_2, \phi_9 = v'_3, \phi_1 = \alpha, \phi_3 = \beta,$$

3. El rompimiento mínimo de CP, donde dos componentes imaginarias de los campos neutros ϕ adquieren VEV distintos de ceros.

$$\phi_7 = v''_1, \phi_8 = v''_2, \phi_9 = v''_3, \phi_{10} = \delta, \phi_{11} = \gamma,$$

En las siguientes secciones vamos a examinar cada uno de estos mínimos más de cerca.

2.3. Naturaleza de los puntos estacionarios

Tenemos que conocer la naturaleza de los puntos estacionarios, para ello recurriremos a la primera derivada para identificar los puntos y a la segunda para analizar su posible estado de mínimo, máximo y punto silla o de inflexión. La primer derivada está dada por

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Big|_{\langle \phi_i \rangle} = 0. \quad (2.24)$$

Utilizando la regla de la cadena

$$\frac{\partial V}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \phi_i} \Big|_{\langle \phi_i \rangle} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \frac{\partial V}{\partial x_l} \frac{\partial^2 x_l}{\partial \phi_i \partial \phi_j} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_m} \frac{\partial x_l}{\partial \phi_i} \frac{\partial x_m}{\partial \phi_j}, \quad (2.26)$$

donde $i, j = 1, 2, \dots, 12$; $l, m = 1, 2, \dots, 9$. Utilizando la ecuación (2.26) renombramos algunos términos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (V')_l &= \frac{\partial V}{\partial x_l}, & [B_{lm}] &= \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_m}, & l, m &= 1, 2, \dots, 9 \\ [C]_{li} &= \frac{\partial x_l}{\partial \phi_i}, & [M_I^2]_{ij} &= V'_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial \phi_i \partial \phi_j}, & i, j &= 1, 2, \dots, 12. \end{aligned} \quad (2.27)$$

La naturaleza del punto crítico se aclara a partir de esta ecuación y el análisis de la matriz de parámetros B . Las segundas derivadas del potencial escalar V son dadas por la matriz de parámetros B , y podemos buscar el máximo, puntos mínimos o de inflexión que permiten a la región parámetros imponer restricciones a los parámetros de la matriz B .

2.4. Matriz de Masas de los Higgs

Después del rompimiento de simetría electrodébil, los campos de Higgs adquiere masa y la matriz de masa de los Higgs pueden obtenerse a partir del cálculo de las segundas derivadas del potencial de Higgs. En el potencial de Higgs extendido con simetría S_3 hay doce campos reales

de Higgs ϕ_i , y la matriz de masa de los Higgs correspondiente es una matriz real de 12×12 . Las segundas derivadas del potencial de Higgs se han calculado y se dan en la ec. (2.26).

De la ec. (2.26), el primer término en el lado derecho es una matriz de 12×12 de la forma

$$[M_I^2] = \begin{pmatrix} M_{11}^2 & 0 \\ 0 & M_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

donde M_{11}^2 y M_{12}^2 son matrices de 6×6 dadas por

$$[M_{11}^2] = \begin{pmatrix} 2V'_1 & 0 & V'_4 & V'_5 & V'_6 & V'_7 \\ 0 & 2V'_1 & -V'_5 & V'_4 & -V'_7 & V'_6 \\ V'_4 & -V'_5 & 2V'_2 & 0 & V'_8 & V'_9 \\ V'_5 & V'_4 & 0 & 2V'_2 & -V'_9 & V'_8 \\ V'_6 & -V'_7 & V'_8 & -V'_9 & 2V'_3 & 0 \\ V'_7 & V'_6 & V'_9 & V'_8 & 0 & 2V'_3 \end{pmatrix}, \quad [M_{12}^2] = \begin{pmatrix} 2V'_1 & V'_4 & V'_6 & 0 & V'_5 & V'_7 \\ V'_4 & 2V'_2 & V'_8 & -V'_5 & 0 & V'_9 \\ V'_6 & V'_8 & 2V'_3 & -V'_7 & -V'_9 & 0 \\ 0 & -V'_5 & -V'_7 & 2V'_1 & V'_4 & V'_6 \\ V'_5 & 0 & -V'_9 & V'_4 & 2V'_2 & V'_8 \\ V'_7 & V'_9 & 0 & V'_6 & V'_8 & 2V'_3 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

en el segundo término de la ec. (2.26) las derivadas $\partial^2 V / \partial x_l \partial x_m$ son claramente los elementos de matriz B_{lm} de la matriz B definida en la ec. (2.23). En cuanto a las derivadas $\partial x_i / \partial \phi_j$ forman una matriz 9×12 que llamaremos C , dadas por

$$[C] = \begin{pmatrix} 2\phi_1 & 2\phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\phi_7 & 0 & 0 & 2\phi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\phi_3 & 2\phi_4 & 0 & 0 & 0 & 2\phi_8 & 0 & 0 & 2\phi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\phi_5 & 2\phi_6 & 0 & 0 & 2\phi_9 & 0 & 0 & 2\phi_{12} \\ \phi_3 & \phi_4 & \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_8 & \phi_7 & 0 & \phi_{11} & \phi_{10} & 0 \\ \phi_4 & -\phi_3 & -\phi_2 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_{11} & -\phi_{10} & 0 & -\phi_8 & \phi_7 & 0 \\ \phi_5 & \phi_6 & 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_9 & 0 & \phi_7 & \phi_{12} & 0 & \phi_{10} \\ \phi_6 & -\phi_5 & 0 & 0 & -\phi_2 & \phi_1 & \phi_{12} & 0 & -\phi_{10} & -\phi_9 & 0 & \phi_7 \\ 0 & 0 & \phi_5 & \phi_6 & \phi_3 & \phi_4 & 0 & \phi_9 & \phi_8 & 0 & \phi_{12} & \phi_{11} \\ 0 & 0 & \phi_6 & -\phi_5 & -\phi_4 & \phi_3 & 0 & \phi_{12} & -\phi_{11} & 0 & -\phi_9 & \phi_8 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

la matriz C se evalúa en cada uno de los diferentes puntos estacionarios y sólo los campos $\phi_7, \phi_8, \phi_9, \phi_2, \phi_3, \phi_{10}$ y ϕ_{11} aparecen, el resto son siempre cero en los puntos estacionarios. Entonces, podemos escribir la matriz de masas de la siguiente forma:

$$[M^2] = \frac{1}{2} ([M_I^2] + C^T B C), \quad (2.31)$$

En las secciones siguientes, vamos a analizar la matriz de masas de los Higgs $[M^2]$ evaluado en cada uno de los tres diferentes puntos estacionarios.

2.4.1. El mínimo normal

De las relaciones entre los ϕ_i y los x_i , nosotros obtenemos $\langle x_l \rangle = v_l^2$ para $l = 1, 2, 3$, $\langle x_4 \rangle = v_1 v_2$, $\langle x_6 \rangle = v_1 v_3$, $\langle x_8 \rangle = v_2 v_3$, y $\langle x_5 \rangle = \langle x_7 \rangle = \langle x_9 \rangle = 0$. Entonces, podemos escribir las condiciones de punto crítico como

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial v_i} = 0, \quad (2.32)$$

donde $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, 9$. Esto nos da las siguientes tres ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= [\mu_1^2 + (b + f + 2h)v_3^2 + 2(c + g)(v_1^2 + v_2^2)]v_1 + 6ev_1v_2v_3, \\ 0 &= [\mu_1^2 + (b + f + 2h)v_3^2 + 2(c + g)(v_1^2 + v_2^2)]v_2 + 3e(v_1^2 - v_2^2)v_3, \\ 0 &= [\mu_0^2 + (b + f + 2h)(v_1^2 + v_2^2) + 2av_3^2]2v_3 + 2e(3v_1^2 - v_2^2)v_2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Hasta ahora tenemos diez parámetros reales libres en el potencial V ?? más los tres valores de expectación del vacío v_1 , v_2 y v_3 . Eliminamos un parámetro del asumiendo que los valores de expectación satisfacen la siguiente relación $\sum_{i=1}^3 v_i^2 = (246 \text{ GeV})^2$, usando esta relación, la solución al sistema de ecuaciones 2.33 nos permite obtener dos escenarios posibles para el mínimo normal

$$e = 0 \quad \text{o} \quad v_1^2 = 3v_2^2. \quad (2.34)$$

Analizaremos primero, el caso en el cual se satisface la relación entre los valores de expectación del vacío de los campos de Higgs $v_1^2 = 3v_2^2$

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= -8v_2^2(c + g) - 6ev_3v_2 - v_3^2(b + f + 2h) \\ \mu_0^2 &= \frac{2}{v_3}(-4ev_2^3 - 2v_3v_2^2(b + f + 2h) - av_3^3) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para simplificar el estudio del espacio de parámetros cambiamos a la notación siguiente $v_i = v \cos \theta_i$, al sustituir en esta expresión $v^2 = \sum_i v_i^2$, obtenemos que $v_1^2 = \frac{3}{4}v^2 \sin^2 \theta_3$, de igual manera obtenemos que $v_2^2 = \frac{1}{4}v^2 \sin^2 \theta_3$, escrito en esta notación, este mínimo muestra una simetría rotacional: $\sin^2 \theta_3 + \cos^2 \theta_3 = 1$. Por lo tanto, en este caso se muestra también una simetría continua. La posibilidad de esta situación fue señalada en ref. [?], donde se demostró que la adición de una simetría discreta en los modelos de varios Higgs pueden dar lugar a una continua. Nueva física emerge de $\theta_3 \neq 0$, si θ_3 se anula el singlete de Higgs se comporta como el Higgs del Modelo Estándar, entonces, desviaciones del Modelo Estándar emergen a partir de pequeños valores de θ_3 . Por otro lado, cuando $\theta_3 = \pi/2$ obtenemos el modelo de dos dobletes Higgs donde $v_1/v_2 = \sqrt{3}$. Es claro que la simetría de norma se rompe espontáneamente

cuando los campos de Higgs adquieren VEVs y en este modelo se obtiene adicionalmente que la tangente de θ_3 mide la cantidad de mezcla de las representaciones irreducibles de singlete y doblete.

$$\tan^2 \theta_3 = \frac{4v_2^2}{v_3^2}. \quad (2.36)$$

Entonces, obtenemos que las condiciones que minimizan en este caso pueden ser expresadas en términos de solo un parámetro, θ_3 , donde

$$\cos^2 \theta_2 = \frac{\sin^2 \theta_3}{4}. \quad (2.37)$$

Para la segunda solución, en la cual $e = 0$, la ecuación de mínimo(2.33) esta dada como:

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= -2(v_1^2 + v_2^2)(c + g) - v_3^2(b + f + 2h), \\ \mu_0^2 &= -(v_1^2 + v_2^2)(b + f + 2h) - 2av_3^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Esta solución presenta una situación especial, el potencial tiene una simetría accidental para H_1 y H_2 , como se señalo en la referencia [16].

El mínimo normal mas profundo en los puntos estacionario normales

Para realizar el análisis del potencial mínimo definimos el vector $(V'_N)_i = (V' |_{X_N})_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$. En esta notación, la ecuación (2.25) luce de la siguiente forma:

$$V'_N = \begin{pmatrix} \frac{-(V'_N)_4}{2v_1v_2}v_2^2 + \frac{-(V'_N)_6}{2v_1v_3}v_3^2 \\ \frac{-(V'_N)_4}{2v_1v_2}v_1^2 + \frac{-(V'_N)_5}{2v_2v_3}v_3^2 \\ \frac{-(V'_N)_6}{2v_1v_3}v_1^2 + \frac{-(V'_N)_5}{2v_2v_3}v_2^2 \\ (V'_N)_4 \\ (V'_N)_5 \\ (V'_N)_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Es claro que de esta expresión las primeras tres entradas en V'_N tienen el mismo signo y los cocientes $\frac{-(V'_N)_4}{2v_1v_2}$, $\frac{-(V'_N)_5}{2v_2v_3}$, $\frac{-(V'_N)_6}{2v_1v_3}$, tienen el mismo signo también.

De este punto en adelante usaremos X_{Nj} para designar los vectores X evaluados en los dos posibles mínimos, esto es,

$$X_{N1}^T = (3v_2^2, v_2^2, v_3^2, \sqrt{3}v_2^2, v_2v_3, \sqrt{3}v_2v_3, 0, 0, 0), \quad v_1^2 = 3v_2^2, \quad (2.40)$$

$$X_{N2}^T = (v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_1 v_2, v_2 v_3, v_1 v_3, 0, 0, 0), \quad e = 0. \quad (2.41)$$

En esta notación, la ecuación (2.39) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$V'_{Nj} = A + BX_{Nj}, \quad (2.42)$$

donde A y B están dados por las ecuaciones (2.21) y (2.23) respectivamente. Podemos fácilmente realizar

$$X_{Nj}^T V'_{Nj} = 0. \quad (2.43)$$

El análisis directo del potencial, y usando las condiciones para mínimos (2.25), V'_{Nj} ($j = 1, 2$) puede ser expresado como:

$$V'_{N1} = -4g \begin{pmatrix} \left(\frac{f+2h}{4g}\right) v_3^2 + v_2^2 \\ \left(\frac{f+2h}{4g}\right) v_3^2 + 3v_2^2 \\ \left(\frac{f+2h}{4g}\right) (4v_2^2) \\ -2\sqrt{3}v_2^2 \\ -\left(\frac{f+2h}{2g}\right) v_2 v_3 \\ -\left(\frac{f+2h}{2g}\right) \sqrt{3}v_2 v_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} 4v_2 v_3 \\ (8v_2^2) \frac{v_3}{v_2} \\ (8v_2^2) \frac{v_2}{v_3} \\ -4\sqrt{3}v_2 v_3 \\ -4v_2^2 \\ -4\sqrt{3}v_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$V'_{N2} = -\frac{(V'_4)_{N2}}{2v_1 v_2} \begin{pmatrix} \left(\frac{f+2h}{4g}\right) v_3^2 + v_2^2 \\ \left(\frac{f+2h}{4g}\right) v_3^2 + v_1^2 \\ \left(\frac{f+2h}{4g}\right) (v_1^2 + v_2^2) \\ -2v_1 v_2 \\ -\left(\frac{f+2h}{2g}\right) v_2 v_3 \\ -\left(\frac{f+2h}{2g}\right) v_1 v_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Notamos que el potencial en la ecuación (2.19) es una suma de polinomios cuadráticos y

cuarticos, *i.e.*, $V = p_2 + p_4$, expresados en términos de x_l tenemos

$$\begin{aligned} p_2 &= \mu_1^2 (x_1 + x_2) + \mu_0^2 x_3, \\ p_4 &= ax_3^2 + bx_3 (x_1 + x_2) + c (x_1 + x_2)^2 - 4dx_7^2 \\ &\quad + g [(x_1 - x_2)^2 + 4x_4^2] + f (x_5^2 + x_6^2 + x_8^2 + x_9^2) \\ &\quad + 2h (x_5^2 + x_6^2 - x_8^2 - x_9^2) + 2e(x_4x_6 + x_5(x_1 - x_2)). \end{aligned}$$

Realizando la suma $\sum_i v_i \left(\frac{\partial V}{\partial v_i} \right)$, obtenemos que las condiciones de mínimo implica $p_2 = -2p_4$ en el mínimo. El valor del potencial en este punto estacionario, que designamos por V_{Nj} , pueden ser escritor como $V_{Nj} = (p_2/2) |_{X_{Nj}}$. Por otro lado, de la ecuación (2.22) en el mínimo normal y usando las ecuaciones (2.42) y (2.43), obtenemos

$$X_{Nj}^T A = -X_{Nj}^T B X_{Nj}. \quad (2.46)$$

En esta notación, el potencial evaluado en el mínimo normal puede ser escrito de la siguiente forma:

$$V_{Nj} = -\frac{1}{2} X_{Nj}^T B X_{Nj} = \frac{1}{2} A^T X_{Nj}. \quad (2.47)$$

El punto estacionario es dado por las condiciones impuestas en la ecuación (2.25). Analizando las segundas derivadas del potencial de Higgs V obtenemos las condiciones extremales. Encontramos para el mínimo normal, B es definido positivo. De esta forma, el punto estacionario normal, si existe, es un mínimo. En la siguiente sección, nos enfocaremos en encontrar el mínimo normal mas profundo.

Revisando de nuevo las ecuaciones (2.42) y (2.43), nosotros obtenemos las relaciones

$$V'_{N1} = V'_{N2} - B X_{N2} + B X_{N1}, \quad (2.48)$$

$$X_{N1}^T V'_{N2} - X_{N1}^T B X_{N2} + X_{N1}^T B X_{N1} = 0. \quad (2.49)$$

respectivamente. Entonces, de la ecuación (2.47) ($j = 1$),

$$-X_{N1}^T V'_{N2} + X_{N1}^T B X_{N2} = X_{N1}^T B X_{N1} = -2V_{N1}. \quad (2.50)$$

ahora, $X_{N2}^T V'_{N1}$ es dado por

$$X_{N2}^T V'_{N1} = X_{N2}^T A + X_{N2}^T B X_{N1}. \quad (2.51)$$

Considerando que la matriz B es simétrica y usando la ecuación (2.47) ($j = 2$), tenemos

$$X_{N2}^T B X_{N1} = X_{N1}^T B X_{N2} = -2V_{N2} + X_{N2}^T V'_{N1}. \quad (2.52)$$

Finalmente, usando las ecuaciones (2.50) y (2.52), nosotros compararemos el potencial evaluado en los dos diferentes mínimos:

$$V_{N2} - V_{N1} = \frac{1}{2} (X_{N2}^T V'_{N1} - X_{N1}^T V'_{N2}). \quad (2.53)$$

Por lo tanto, el potencial V_{N1} en el mínimo normal X_{N1} es el mas profundo si el lado derecho de la ecuación anterior es mayor que cero.

De la ecuación (2.45), nosotros sabemos que las primeras tres entradas en V'_{N2} tienen el mismo signo independientemente de los signos de v_1, v_2, v_3 . Por otra parte, si los signos de los cocientes $\frac{-(V')_4}{2v_1v_2}, \frac{-(V')_5}{2v_2v_3}, \frac{-(V')_6}{2v_1v_3}$ son positivos (revisar ecuaciones (2.39) y (2.44)), el mínimo normal existe y el siguiente producto es también positivo:

$$\begin{aligned} X_{N2}^T V'_{N1} &= -\frac{(V'_{N1})_4}{2\sqrt{3}v_2^2} (v'_1 - \sqrt{3}v'_2)^2 v_2^2 \\ &\quad - \frac{(V'_{N1})_5}{2v_2v_3} (v_3v'_2 - v_2v'_3)^2 \\ &\quad - \frac{(V'_{N1})_6}{2\sqrt{3}v_2v_3} (v_3v'_1 - \sqrt{3}v_2v'_3)^2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

El análisis del punto estacionario normal se sigue de la ecuación (2.26). Hasta ahora, nosotros solo sabemos que tenemos dos puntos críticos normales. Para poder clasificarlos, los escribiremos de la manera apropiada con la ecuación (2.53). Entonces, calcularemos las siguientes expresiones:

$$V'_{N1} = -B(X_{N2} + X_{N1}) + V'_{N2}, \quad (2.55)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $V'^T_{N1} B^{-1}$ obtenemos la expresión

$$X_{N2}^T V'_{N1} = (V'^T_{N2} - V'^T_{N1})(B^{-1}V'_{N1}). \quad (2.56)$$

que es positivo (revisar ecuación (2.54)). Mas aun, para $j = 2$ podemos escribir también a V'_{N2} como sigue:

$$V'_{N2} = B(X_{N2} - X_{N1}) + V'_{N1} \quad (2.57)$$

y obtenemos las siguientes expresiones:

$$X_{N1}^T V'_{N2} = V'^T_{N2} B^{-1} (V'_{N1} - V'_{N2}). \quad (2.58)$$

una solución particular para la ecuación (2.54), se obtiene anulando el termino $X_{N1}^T V'_{N2}$, lo que implica

$$V'^T_{N2} B^{-1} [V'_{N1} - V'_{N2}] = 0. \quad (2.59)$$

Esta ecuación se mantiene si $V'_{N2}{}^T B^{-1} = 0$. En este caso, V'_{N2} debe anularse, por lo tanto la matriz B es invertible. Por otro lado obtuvimos que la solución X_{N2} es de la forma siguiente

$$X_{N2} = -B^{-1}A \quad (2.60)$$

esta solución si existe es única. Encontramos una solución para

$$f = -2h \quad y \quad g = 0, \quad (2.61)$$

en este caso $\det B$ simplificando es

$$\det B = 2^{17}(b^2 - 4ac)dh^2e^4 \quad (2.62)$$

para esta solución los signos de los cocientes $\frac{-(V')_4}{2v_1v_2}$, $\frac{-(V')_5}{2v_2v_3}$, $\frac{-(V')_6}{2v_1v_3}$ en la ecuación (2.44) son positivos para $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $v_3 > 0$, $e < 0$ y el mínimo normal existe en el otro escenario si

$$e < 0, \quad d \neq 0, \quad h \neq 0 \quad y \quad b^2 - 4ac \neq 0. \quad (2.63)$$

Usando las ecuaciones (2.53), (2.56) y (2.58)-(2.59), obtenemos

$$V_{N2} - V_{N1} = \frac{1}{2} \left[-V'_{N1}{}^T B^{-1} V'_{N1} \right]. \quad (2.64)$$

Hemos demostrado que $V'_{N1}{}^T B^{-1} V'_{N1}$ es negativo cuando X_{N1} es el mas profundo. De la ecuación (2.64) sabemos que $V'_{N1}{}^T B^{-1} V'_{N1}$ tiene que ser menor que cero, en consecuencia, la matriz inversa B^{-1} no es definida positiva, y el punto estacionario X_{N2} es un punto silla. El producto

$$x_{N1}^T V'_{N2} = -\frac{(V'_{N2})_4}{2v'_1 v'_2} \left\{ \left(\frac{f+2h}{4g} \right) [(\sqrt{3}v'_3 v_2 - v'_1 v_3)^2 + (v'_3 v_2 - v'_2 v_3)^2] + (\sqrt{3}v'_2 - v'_1)^2 v_2^2 \right\} \quad (2.65)$$

en la ecuación (2.53) se anula cuando el mínimo normal X_{N1} es el mas profundo, también obtenemos una solución donde el mínimo normal X_{N1} es mas profundo que X_{N2} , entonces,

$$g \neq 0 \quad f = -2h \quad y \quad v'_1 = \sqrt{3}v'_2 \quad (2.66)$$

para esta solución los signos de los cocientes $\frac{-(V')_5}{2v_2v_3}$, $\frac{-(V')_6}{2v_1v_3}$ en la ecuación (2.44) son positivos si $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $v_3 > 0$, $e < 0$ y $\frac{-(V')_4}{2v_1v_2}$ es también positivo si adicionalmente

$$g < -\frac{e v_3}{2 v_2} \quad (2.67)$$

2.4.2. Matriz de masas de Higgs en el punto estacionario normal con $v_1 = \sqrt{3}v_2$

En nuestro análisis no estamos tomando en cuenta el espacio de parámetros con soluciones de eigenvalores negativos para las masas cuadradas de los campos físicos de Higgs. Por esta razón nosotros no consideramos el espacio de parámetros en las ecuaciones (2.21) y (2.23), que nos dan masas cuadradas negativas de los campos físicos de Higgs.

En el mínimo normal los campos de Higgs que adquieren VEVs distintas de cero son $\phi_7 = v_1, \phi_8 = v_2, \phi_9 = v_3$, y $\langle x_7 \rangle = \langle x_8 \rangle = \langle x_9 \rangle = 0$, entonces $V_7' = V_8' = V_9' = 0$. Usaremos estas condiciones para calcular la matriz de masas de Higgs (2.31). Para realizar el calculo de la matriz de masas de Higgs cargados, debemos seguir los resultados previos imponiendo estas condiciones.

Obtenemos que la matriz de masas $[M_{12}^2]$ es diagonal por bloques. También el segundo termino $C^T BC = \text{diag}(0, B')$ en la ecuación (2.31) es diagonal por bloques. Usando estas expresiones, la matriz de masas cuadradas $[M^2]$ puede ser escrita de la siguiente forma:

$$[M^2] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{12} + B' \end{pmatrix} \right]. \quad (2.68)$$

Aquí, M_{11} es la matriz de masas de Higgs cargados y puede ser escrita de forma sencilla como $M_{11} = \text{diag}(M'_{12}, M'_{12})$, la matriz M_{12} es diagonal por bloques de dimensiones 6×6 ; $M_{12} = \text{diag}(M'_{12}, M'_{12})$ con

$$M'_{12} = \begin{pmatrix} 2V'_1 & V'_4 & V'_6 \\ V'_4 & 2V'_2 & V'_5 \\ V'_6 & V'_5 & 2V'_3 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

B' es también una matriz diagonal por bloques de 6×6 ; $B' = \text{diag}(B'_1, B'_2)$, donde

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 8(c+g)v_1^2 + 8gv_2^2 + 2(f+2h)v_3^2 & 8cv_1v_2 & (4b+2f+4h)v_1v_3 \\ 8cv_1v_2 & 8gv_1^2 + 8(c+g)v_2^2 + 2(f+2h)v_3^2 & (4b+2f+4h)v_2v_3 \\ (4b+2f+4h)v_1v_3 & (4b+2f+4h)v_2v_3 & 2(f+2h)(2v_1^2 + v_2^2) + 8av_3^2 \end{pmatrix} \\ + e \begin{pmatrix} 8v_2v_3 & 8v_1v_3 & 8v_1v_2 \\ 8v_1v_3 & -8v_2v_3 & 4(v_1^2 - v_2^2) \\ 8v_1v_2 & 4(v_1^2 - v_2^2) & 0 \end{pmatrix}, \\ B'_2 = \begin{pmatrix} -8dv_2^2 + 2(f-2h)v_3^2 & 8dv_1v_2 & -2(f-2h)v_1v_3 \\ 8dv_1v_2 & -8dv_1^2 + 2(f-2h)v_3^2 & -2(f-2h)v_2v_3 \\ -2(f-2h)v_1v_3 & -2(f-2h)v_2v_3 & 2(f-2h)(v_1^2 + v_2^2) \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Finalmente, la matriz $M_{12} + B'$, puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} M_S^2 & 0 \\ 0 & M_P^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M'_{12} + B'_1 & 0 \\ 0 & M'_{12} + B'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

donde nosotros hemos denotado por M_S^2 y M_P^2 a las matrices de masa de los Higgs escalares y pseudoescalares respectivamente. Ahora, calcularemos las matrices de masas de los Higgs cargados y escalares usando las expresiones previas. Donde encontramos que los dos bloques de tres por tres en la matriz de masas de Higgs cargados son el mismo, por esta razón, el espectro de las masas de Higgs cargados es degenerado, y obtenemos cuatro estados físicos H_1^\pm, H_2^\pm con eigenvalores de masas cuadradas dados por

$$m_{H_{1,2}^\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(M'_{12}) \pm \sqrt{[\text{Tr}(M'_{12})]^2 - 4\chi^2(M'_{12})} \right], \quad (2.72)$$

donde $\text{Tr}(M'_{12})$, $\chi(M'_{12})$ y $\det(M'_{12})$ son los invariantes de M'_{12} . Los estados correspondientes a los Goldstone cargados tienen masas nulas $m_{G^\pm}^2 = 0$, como esperábamos. Calculando los invariantes, obtenemos los eigenvalores de la matriz de masas de los Higgs cargados $m_{H_{1,2}^\pm}^2$ dados por las siguientes expresiones:

$$m_{H_{1,2}^\pm}^2 = V'_1 + V'_2 + V'_3 \pm \sqrt{(V'_1 + V'_2 + V'_3)^2 - (4V'_1V'_2 + 4V'_1V'_3 + 4V'_2V'_3 + V_4'^2 + V_5'^2 + V_6'^2)}. \quad (2.73)$$

Los eigenvalores de masa cuadrados de los Higgs cargados dependen de las tres primeras entradas $(V'_N)_i$ del vector V'_N dado en la ecuación (2.44), y estas son positivas si V'_1, V'_2, V'_3 tienen el mismo signo también, en particular, en el mínimo normal X_{N1} con $e < 0$, $g = 0$ y $f = -2h$, las condiciones son satisfechas. Nosotros calculamos los eigenvalores de bosones de Higgs con $g \neq 0$ y $f = -2h$, además, V'_1, V'_2 y V'_3 tienen el mismo signo positivo si $e < 0$ y g es dado como en la ecuación (2.67) entonces ambas soluciones satisfacen todas las constricciones impuestas y la primer entrada en la matriz de parámetros B es definida positiva si

$$c > \frac{e v_3}{2 v_2}. \quad (2.74)$$

Ahora, nosotros estamos interesados en el caso cuando $v_1^2 = 3v_2^2$, finalmente, usando las condiciones de mínimo de la sección previa :

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= -8v_2^2(c + g) - 6ev_3v_2 - v_3^2b \\ \mu_0^2 &= \frac{2}{v_3}(-4ev_2^3 - 2v_3v_2^2b - av_3^3) \end{aligned} \quad (2.75)$$

la matriz de masas de Higgs escalares M_C^2 se simplifica

$$M_C^2 = 2ev_2v_3 \begin{pmatrix} -2 \left(\frac{g v_2}{e v_3} + 1 \right) & \sqrt{3} \left(2 \frac{g v_2}{e v_3} + 1 \right) & \sqrt{3} \frac{v_2}{v_3} \\ \sqrt{3} \left(2 \frac{g v_2}{e v_3} + 1 \right) & -2 \left(\frac{g v_2}{e v_3} + 1 \right) & \frac{v_2}{v_3} \\ \sqrt{3} \frac{v_2}{v_3} & \frac{v_2}{v_3} & -\frac{4v_2^2}{v_3^3} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

con los siguientes eigenvalores de masa cuadrados positivos

$$\begin{aligned} m_{G^\pm}^2 &= 0 \\ m_{H_1^\pm}^2 &= -8gv^2 \sin^2 \theta_3 + \frac{5}{9}m_{H_1^0}^2 \\ m_{H_2^\pm}^2 &= -2ev^2 |\tan \theta_3| \end{aligned} \quad (2.77)$$

$m_{G^\pm}^2$ es responsable de la generación de masa de los bosones norma con carga W^\pm , y $m_{H_1^0}^2$ esta dado por la ecuación (2.80). Notemos que las masas de los Higgs cargados dependen de los valores tomados por los VEVs y dos parámetros libres e y g . La matriz de rotación R_C correspondiente es

$$R_C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}v_2}{v_3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}v_3}{4v_2} \\ \frac{v_2}{v_3} & 1 & -\frac{v_3}{4v_2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Por otro lado, la matriz de masas de Higgs neutros es también diagonal por bloques, $M_N^2 = \text{diag}(M_S^2, M_P^2)$. Las formas explicitas de las matrices de masas de Higgs escalar y pseudoescalar, en términos de los parámetros de potencial de Higgs son los siguientes:

$$M_S^2 = 2v_2v_3 \begin{pmatrix} 6(c+g)\frac{v_2}{v_3} & \sqrt{3}(2(c+g)\frac{v_2}{v_3} + 3e) & \sqrt{3}(3e\frac{v_2}{v_3} + b) \\ \sqrt{3}(2(c+g)\frac{v_2}{v_3} + 3e) & 2((c+g)\frac{v_2}{v_3} - 3e) & (3e\frac{v_2}{v_3} + b) \\ \sqrt{3}(3e\frac{v_2}{v_3} + b) & (3e\frac{v_2}{v_3} + b) & \frac{-4ev_2^2}{v_3^3} + 2a\frac{v_3}{v_2} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Como en el sector cargado, los eigenvalores correspondientes a las masas de Higgs con $e < 0$, $g < -\frac{e v_3}{2 v_2}$, $f = -2h$ y $v_1 = \sqrt{3}v_2$ estan dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned} m_{H_1^0}^2 &= -8ev^2 |\sin(2\theta_3)| \\ m_{H_{2,3}^0}^2 &= S \mp T \end{aligned} \quad (2.80)$$

aquí nosotros definimos

$$\begin{aligned} S &= -2v^2 \cos^2 \theta_3 (2a - 2e \tan^3 \theta_3 + 2(c+g) \tan^2 \theta_3 + 3e \tan \theta_3) \\ T &= 2v^2 \cos^2 \theta_3 \sqrt{4a^2 + \frac{e^2}{4} \tan^6 \theta_3 + 2e(c+g) \tan^5 \theta_3 + \frac{21e^2 + 8(c+g)}{2} \tan^4 \theta_3 + 4e(6b + 3c + 3g - a) \tan^3 \theta_3 + (9e + 16b^2 - 3a(c+g)) \tan^2 \theta_3 - 12a \tan \theta_3} \end{aligned} \quad (2.81)$$

En el limite cuando $\theta_3 = 0$ la unica masa de Higgs escalar que no se anula es $m_{H_3^0}^2 = -8av^2$, y todas las masas de Higgs cargados se anulan.

Los eigenvectores para el sector escalar se obtienen al diagonalizar la matriz de masas correspondiente con la matriz de rotación R_S

$$R_S = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}\left(-4av_3^3 + \frac{\lambda_2 v_3}{2} - \frac{2\lambda_1 v_2^2}{9v_3}\right)}{8v_2 v_3 \left(bv_3 - \frac{\lambda_1}{12v_3}\right)} & \frac{\sqrt{3}\left(-4av_3^3 + \frac{\lambda_3 v_3}{2} - \frac{2\lambda_1 v_2^2}{9v_3}\right)}{8v_2 v_3 \left(bv_3 - \frac{\lambda_1}{12v_3}\right)} \\ -v_3 \left(2v_2 \left(bv_3 - \frac{\lambda_1}{12v_3}\right)^2 + \frac{\left(2(c+g)v_2 - \frac{\lambda_1}{12v_2}\right)\left(-4av_3^3 + \frac{\lambda_2 v_3}{2} - \frac{2\lambda_1 v_2^2}{9v_3}\right)}{v_3}\right) & v_3 \left(2v_2 \left(v_3 - \frac{\lambda_1}{12v_3}\right)^2 + \frac{\left(2(c+g)v_2 - \frac{\lambda_1}{12v_2}\right)\left(-4av_3^3 + \frac{\lambda_3 v_3}{2} - \frac{2\lambda_1 v_2^2}{9v_3}\right)}{v_3}\right) \\ 1 & \frac{\left(bv_3 - \frac{\lambda_1}{12v_3}\right)\left(\frac{\lambda_1 v_3}{2} - \frac{\lambda_2 v_3}{2}\right)}{1} & \frac{\left(bv_3 - \frac{\lambda_1}{12v_3}\right)\left(\frac{\lambda_3 v_3}{2} - \frac{\lambda_1 v_3}{2}\right)}{1} \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Finalmente, la matriz de masas de Higgs pseudoescalar M_P^2 esta dada como

$$M_P^2 = 2v_2 v_3 \begin{pmatrix} -2\left((d+g)\frac{v_2}{v_3} + e + h\frac{v_3}{v_2}\right) & \sqrt{3}(2(d+g)\frac{v_2}{v_3} + e) & \sqrt{3}\left(e\frac{v_2}{v_3} + 2h\right) \\ \sqrt{3}(2(d+g)\frac{v_2}{v_3} + e) & -6(d+g)\frac{v_2}{v_3} - 4e - 2h\frac{v_3}{v_2} & \left(e\frac{v_2}{v_3} + 2h\right) \\ \sqrt{3}\left(e\frac{v_2}{v_3} + 2h\right) & \left(e\frac{v_2}{v_3} + 2h\right) & -\frac{4e v_2^2}{v_3^2} - 8h\frac{v_2}{v_3} \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

con los eigenvalores de masas de Higgs dados por

$$\begin{aligned} m_{G^0}^2 &= 0 \\ m_{A_1^0}^2 &= m_{H_1^\pm}^2 - 8v^2 (d \sin^2 \theta_3 + h \cos^2 \theta_3) \\ m_{A_2^0}^2 &= m_{H_2^\pm}^2 - 8hv^2 \end{aligned} \quad (2.84)$$

aquí d y h contribuyen para ajustar las masas de los Higgs pseudoescalares. Como se esperaba, $m_{G^0}^2 = 0$ corresponde para el estado neutro de Goldstone que da masa al boson de norma Z^0 . En el limite $\theta_3 = 0$ dos campos de Higgs pseudoescalares adquieren valores de masa $m_{A_1^0}^2 = m_{A_2^0}^2 = -8hv^2$. La matriz de rotación R_P para los Higgs pseudoescalares esta dada de la siguiente manera.

$$R_P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}v_2}{v_3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}v_3}{4v_2} \\ \frac{v_2}{v_3} & 1 & -\frac{v_3}{4v_2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

En el mínimo normal, nosotros tenemos nueve estados físicos, $H_{1,2}^\pm$, $H_{1,2,3}^0$ y $A_{1,2}^0$, que son cuatro Higgs cargados, tres Higgs escalares y dos Higgs pseudoescalares estos son los campos físicos de Higgs, respectivamente. Es evidente que el determinante de la matriz de parámetros B y los eigenvalores de masas cuadradas de Higgs son positivos, estas condiciones limitan la región de parámetros permitidos.

2.4.3. El mínimo normal para el caso $e=0$

El punto estacionario viene dado por las condiciones impuestas en la ecuación (2.32). Analizando las segundas derivadas del potencial de Higgs V nosotros obtenemos las condiciones de máximo, mínimo o punto de inflexión.

En el modelo, se encontró que para el mínimo normal, la matriz de parámetros B es definida positiva si

$$c > 0, g > 0, a > \frac{b^2}{4c}, d < 0, f + 2h > \frac{e^2}{g} \text{ y } f > 2h.$$

En esta región de parámetros el punto normal estacionario existe y es un mínimo.

En nuestro análisis no tomamos en consideración el espacio de parámetros que nos da soluciones con eigenvalores negativos para las masas al cuadrado de los campos físicos de Higgs. Por esta razón nosotros no tomamos en cuenta la region de los parámetros en las ecuaciones (2.21) y (2.23), que son $\{\mu_1^2, \mu_0^2, [B]_{ij}\}$, los cuales dan masas cuadradas negativos de los campos físicos de Higgs.

En el mínimo normal los campos de Higgs que adquieren vev distinto de cero son $\phi_7 = v_1, \phi_8 = v_2, \phi_9 = v_3$. En este mínimo $\langle x_5 \rangle = \langle x_7 \rangle = \langle x_9 \rangle = 0$, y $V'_5 = V'_7 = V'_9 = 0$. Utilizamos estas condiciones para calcular la matriz de masas de Higgs (2.31). Para hacer el calculo de la matriz de masas de Higgs cargados, nosotros utilizaremos los resultados previos usando las condiciones impuestas anteriormente.

Tengamos en cuenta que la matriz de masas $[M_{12}^2]$ es diagonal por bloques y es diagonal también el segundo termino $C^T B C = \text{diag}(0, B')$ en la ecuación (2.31). Usando estas expresiones, la matriz de masas cuadrada $[M^2]$ puede ser escrita como:

$$[M^2] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{12} + B' \end{pmatrix} \right]. \quad (2.86)$$

Aquí, M_{11} es la matriz de masas de los Higgs cargados y pueden ser escritos de forma sencilla $M_{11} = \text{diag}(M'_{12}, M'_{12})$, la matriz M_{12} es una matriz diagonal por bloques de 6×6 ; $M_{12} = \text{diag}(M'_{12}, M'_{12})$ así que los bloques de la diagonal son

$$M'_{12} = \begin{pmatrix} 2V'_1 & V'_4 & V'_6 \\ V'_4 & 2V'_2 & V'_8 \\ V'_6 & V'_8 & 2V'_3 \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

B' es también una matriz diagonal por bloques de 6×6 ; $B' = \text{diag}(B'_1, B'_2)$, donde

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 8(c+g)v_1^2 + 8gv_2^2 + 2(f+2h)v_3^2 & 8cv_1v_2 & (4b+2f+4h)v_1v_3 \\ 8cv_1v_2 & 8gv_1^2 + 8(c+g)v_2^2 + 2(f+2h)v_3^2 & (4b+2f+4h)v_2v_3 \\ (4b+2f+4h)v_1v_3 & (4b+2f+4h)v_2v_3 & 2(f+2h)(2v_1^2 + v_2^2) + 8av_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& +e \begin{pmatrix} 8v_2v_3 & 8v_1v_3 & 8v_1v_2 \\ 8v_1v_3 & -8v_2v_3 & 4(v_1^2 - v_2^2) \\ 8v_1v_2 & 4(v_1^2 - v_2^2) & 0 \end{pmatrix}, \\
B'_2 & = \begin{pmatrix} -8dv_2^2 + 2(f-2h)v_3^2 & 8dv_1v_2 & -2(f-2h)v_1v_3 \\ 8dv_1v_2 & -8dv_1^2 + 2(f-2h)v_3^2 & -2(f-2h)v_2v_3 \\ -2(f-2h)v_1v_3 & -2(f-2h)v_2v_3 & 2(f-2h)(v_1^2 + v_2^2) \end{pmatrix}. \tag{2.88}
\end{aligned}$$

Finalmente, la matriz $M_{12} + B'$, puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} M_S^2 & 0 \\ 0 & M_P^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M'_{12} + B'_1 & 0 \\ 0 & M'_{12} + B'_2 \end{pmatrix}, \tag{2.89}$$

nosotros estamos denotando como M_S^2 y M_P^2 , las matrices de masa de Higgs escalar y pseudoescalar respectivamente. Ahora nosotros calcularemos las matrices de masa de Higgs escalar y cargados usando las expresiones previas ???. Encontramos que la matriz de masas de Higgs cargados tiene dos bloques de tres por tres idénticos y es diagonal por bloques, entonces, el espectro de la masa de Higgs cargados es degenerado, y nosotros obtenemos cuatro estados físicos H_1^\pm, H_2^\pm con eigenvalores de masa cuadradas dadas como

$$m_{H_{1,2}^\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(M'_{12}) \pm \sqrt{[\text{Tr}(M'_{12})]^2 - 4\chi^2(M'_{12})} \right] \tag{2.90}$$

aquí nosotros usamos invariantes $\text{Tr}(M'_{12})$, $\chi(M'_{12})$ y $\det(M'_{12})$; de la matriz de masa de Higgs M'_{12} , los estados correspondientes a los goldstone cargados tienen $m_{G^\pm}^2 = 0$, como se esperaba. Calculando los invariantes, los eigenvalores de masa $m_{H_{1,2}^\pm}^2$ están dados por la siguiente expresión:

$$m_{H_{1,2}^\pm}^2 = V'_1 + V'_2 + V'_3 \pm \sqrt{(V'_1 + V'_2 + V'_3)^2 - (4V'_1V'_2 + 4V'_1V'_4 + 4V'_2V'_3 + V_4'^2 + V_6'^2 + V_8'^2)}. \tag{2.91}$$

Los eigenvalores de masas cuadradas cargadas dependen de las primeras tres entradas de $(V'_N)_i$ del vector V'_N dado en la ecuación (2.44), y estos son positivos si V'_1, V'_2, V'_3 tienen el mismo signo positivo también. Para el caso especial en el cual $e = 0$, de la ecuación (2.91), obtenemos que:

$$\begin{aligned}
m_{H_1^\pm}^2 & = -4g(v_1^2 + v_2^2) - (f + 2h)v_3^2, \\
m_{H_2^\pm}^2 & = -(f + 2h)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Por otro lado, la matriz de masas de Higgs neutros es también diagonal por bloques, $M_N^2 = \text{diag}(M_S^2, M_P^2)$. Las formas explicitas de las matrices de masas de Higgs escalar y pseudoescalar,

en términos de parámetros del potencial de Higgs son las siguientes:

$$M_S^2 = \begin{pmatrix} 4S_1 v_1^2 & 4S_1 v_1 v_2 + 6e v_1 v_3 & 2S_2 v_1 v_3 + 6e v_1 v_2 \\ 4S_1 v_1 v_2 + 6e v_1 v_3 & -12e v_2 v_3 + 4S_1 v_2^2 & 2S_2 v_2 v_3 + 3e(v_1^2 - v_2^2) \\ 2S_2 v_1 v_3 + 6e v_1 v_2 & 2S_2 v_2 v_3 + 3e(v_1^2 - v_2^2) & -e P_2 \frac{v_2}{v_3} + 4a v_3^2 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

y

$$M_P^2 = \begin{pmatrix} -4 \{h v_3^2 + P_1 v_2^2 + e v_2 v_3\} & 4P_1 v_1 v_2 + 2e v_1 v_3 & 2 \{h v_1 v_3 + e v_1 v_2\} \\ 4P_1 v_1 v_2 + 2e v_1 v_3 & -4 \{h v_3^2 + P_1 v_1^2\} - e P_2 \frac{v_3}{v_2} & 4h v_2 v_3 + 2e(v_1^2 - v_2^2) \\ 2 \{h v_1 v_3 + e v_1 v_2\} & 4h v_2 v_3 + 2e(v_1^2 - v_2^2) & -4h(v_1^2 + v_2^2) - e \frac{v_2}{v_3} \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

donde $S_1 = c + g$, $S_2 = b + f + 2h$, $P_1 = g + d$ y $P_2 = 3v_1^2 - v_2^2$. Los eigenvalores de masa de Higgs correspondientes H_i^0 ($i = 1, 2, 3$) con $e = 0$ están dados por las expresiones:

$$m_{H_1^0}^2 = 0, \quad (2.95)$$

$$m_{H_{2,3}^0}^2 = 2 \left[(c + g) (v_1^2 + v_2^2) + a v_3^2 \pm \sqrt{[(c + g) (v_1^2 + v_2^2) - a v_3^2]^2 + (f + b + 2h)^2 (v_1^2 + v_2^2) v_3^2} \right].$$

estas son para la matriz escalar de masa de Higgs neutros, y los eigenvalores de masa de Higgs pseudoescalares A_j^0 ($j = 1, 2, 3$) están dados por

$$m_{A_1^0}^2 = 0, \quad (2.96)$$

$$m_{A_2^0}^2 = 4(g + d) (v_1^2 + v_2^2) + 4h v_3^2,$$

$$m_{A_3^0}^2 = 4h (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).$$

En el mínimo normal con $e = 0$, nosotros tenemos ocho estados físicos, $H_{1,2}^\pm$, $H_{2,3}^0$ y $A_{2,3}^0$, que son cuatro campos físicos de Higgs cargados, dos escalares y dos pseudoescalar, respectivamente. Esta solución no representa lo observado en los datos experimentales, ya que implica la existencia de otro boson de goldstone que daría masa a otra partícula neutra que podría ser Z'_0 y este no se ha observado. Reconocemos que el caso con $v_1 = \sqrt{3}v_2$ tiene el contenido correcto de grados de libertad que dan masa a los bosones de norma W_\pm y Z_0 como en el Modelo Estándar, por ello tomaremos este caso inicial como el correcto, sin embargo es importante comparar los dos mínimos normales y encontrar las condiciones para que el mínimo $v_1 = \sqrt{3}v_2$ sea el mas profundo.

2.5. Mínimo que rompe carga electrica

En este caso, consideraremos que si hay violación de carga eléctrica inducida por el mecanismo de Higgs del ME extendido toda la violación de CB viene del doblete de S_3 , denotaremos el

mínimo como CB (Charge Breaking), el doblete de S_3 de los campos de Higgs toma los valores siguientes $\phi_7 = v'_1$, $\phi_8 = v'_2$, $\phi_9 = v'_3$ y $\phi_1 = \alpha$, $\phi_3 = \beta$. Entonces, el vector X_{CB} puede ser escrito como:

$$X_{CB} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + v_1'^2 \\ \beta^2 + v_2'^2 \\ v_3'^2 \\ \alpha\beta + v_1'v_2' \\ v_2'v_3' \\ v_1'v_3' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.97)$$

A diferencia del caso normal nosotros tenemos cinco variables independientes. Podemos escribir las condiciones de mínimo como

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial v_i'} &= 0 \leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial v_i'} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha} &= 0 \leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta} &= 0 \leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Definimos el vector $(V'_{CB})_l = \frac{\partial V}{\partial x_l}$, evaluado en el mínimo que rompe la simetría de carga eléctrica. De lo anterior es evidente que:

$$V'_{CB} = \begin{pmatrix} - \left(\frac{\partial V}{\partial x_4} v_2' + \frac{\partial V}{\partial x_6} v_3' \right) \frac{1}{2v_1'} \\ - \left(\frac{\partial V}{\partial x_4} v_1' + \frac{\partial V}{\partial x_5} v_3' \right) \frac{1}{2v_2'} \\ - \left(\frac{\partial V}{\partial x_6} v_1' + \frac{\partial V}{\partial x_5} v_2' \right) \frac{1}{2v_3'} \\ \frac{\partial V}{\partial x_4} \\ \frac{\partial V}{\partial x_5} \\ \frac{\partial V}{\partial x_6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{(V'_{CB})_4}{2\alpha\beta} \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \alpha^2 \\ \frac{(v'_1\beta - v'_2\alpha)^2}{v'^2_3} \\ -2\alpha\beta \\ (\beta v'_1 - \alpha v'_2) \frac{2\alpha}{v'_3} \\ (-\beta v'_1 + \alpha v'_2) \frac{2\beta}{v'_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

Notamos que las primeras tres entradas en V'_{CB} tienen el mismo signo independientemente del signo de α , β y

$$(V'_{CB})_4 = 8g(\alpha\beta + v'_1v'_2) + 4ev'_1v'_3. \quad (2.100)$$

El análisis directo del potencial para este punto estacionario nos da:

$$V_{CB} = A^T X_{CB} + \frac{1}{2} X_{CB}^T B X_{CB} \quad (2.101)$$

y

$$V'_{CB} = A + B X_{CB}. \quad (2.102)$$

Finalmente, el mismo razonamiento que nos ha llevado a la ecuación (2.47) Puede ser aplicado para este punto estacionario. Realizando la suma $\left(\sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial V}{\partial v_i}\right) + \alpha \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) + \beta \left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)$, obtenemos $2p_2 + 4p_4 = 0$ en el mínimo CB. Como tal, el valor del potencial en este punto estacionario, el cual designamos por V_{CB} , puede ser escrito como:

$$V_{CB} = \frac{1}{2} A^T X_{CB} = -\frac{1}{2} X_{CB}^T B X_{CB}. \quad (2.103)$$

Revisando de nuevo la ecuación (2.42) y usando la ecuación (2.102) para escribir

$$V'_{N1} = V'_{CB} - B X_{CB} + B X_{N1}. \quad (2.104)$$

De la ecuación (2.43) obtenemos:

$$X_{N1}^T V'_{CB} - X_{N1}^T B X_{CB} + X_{N1}^T B X_{N1} = 0. \quad (2.105)$$

Así

$$-X_{N1}^T V'_{CB} + X_{N1}^T B X_{CB} = X_{N1}^T B X_{N1} = -2V_{N1}, \quad (2.106)$$

el ultimo paso surge de la ecuación (2.47). Ahora, $X_{CB}^T V'_{N1}$ es dado por

$$X_{CB}^T V'_{N1} = X_{CB}^T A + X_{CB}^T B X_{N1}, \quad (2.107)$$

Considerando que la matriz B es simétrica, tenemos

$$X_{CB}^T B X_{N1} = X_{N1}^T B X_{CB} = -2V_{N1} + X_{N1}^T V'_{CB}. \quad (2.108)$$

Finalmente, usando la ecuación (2.103) y (2.107)-(2.108), podemos comparar el potencial evaluado en los dos diferentes mínimos, que es:

$$V_{CB} - V_{N1} = \frac{1}{2} (X_{CB}^T V'_{N1} - X_{N1}^T V'_{CB}). \quad (2.109)$$

Por lo tanto, el mínimo normal es el mas profundo si el lado derecho de la ecuación es mayor que cero. De la ecuación (2.99), notamos que las primeras tres entradas en V'_{CB} tienen el mismo signo independientemente del signo de α , β y $(V'_{CB})_4$. Por otra parte, si los signos de los cocientes $\frac{-(V'_{N1})_4}{2\sqrt{3}v_2}$, $\frac{-(V'_{N1})_5}{2v_2v_3}$, $\frac{-(V'_{N1})_6}{2\sqrt{3}v_2v_3}$ son positivos (revisar ecuación (2.99)), el mínimo normal existe y el siguiente producto es positivo:

$$\begin{aligned} X_{CB}^T V'_{N1} = & -\frac{(V'_{N1})_4}{2\sqrt{3}v_2^2} [(\alpha - \beta\sqrt{3})^2 + (v'_1 - \sqrt{3}v'_2)^2] v_2^2 \\ & -\frac{(V'_{N1})_5}{2v_2v_3} [\beta^2 v_3^2 + (v'_2 v_3 - v'_3 v_2)^2] \\ & -\frac{(V'_{N1})_6}{2\sqrt{3}v_2v_3} [\alpha^2 v_3^2 + (v'_1 v_3 - \sqrt{3}v'_3 v_2)^2]. \end{aligned} \quad (2.110)$$

El análisis del punto estacionario CB sigue la ecuación (2.26). Hasta ahora, nosotros solo sabemos que tenemos un punto critico que rompe la conservación de la carga eléctrica. Para poder clasificar los puntos críticos que rompen la carga, escribiremos de forma apropiada la ecuación para la comparación del potencial. Entonces, nosotros calcularemos la siguiente expresión:

$$V'_{N1} = -B X_{CB} + B X_{N1} + V'_{CB}, \quad (2.111)$$

la cual puede ser expresada como

$$X_{CB}^T V'_{N1} = (V'_{CB}{}^T - V'_{N1}{}^T)(B^{-1} V'_{N1}). \quad (2.112)$$

En la ecuación (2.110) probamos que esta es una cantidad positiva. Mas aun, en el punto CB podemos expresar también el termino V'_{CB} como:

$$V'_{CB} = B X_{CB} - B X_{N1} + V'_{N1}. \quad (2.113)$$

Ahora, nosotros obtenemos la siguiente expresión:

$$X_{N_1}^T V'_{CB} = V_{CB}^{\prime T} B^{-1} V'_{N_1} - V_{CB}^{\prime T} B^{-1} V'_{CB}. \quad (2.114)$$

El que se haga nulo $X_{N_1}^T V'_{CB}$ implica

$$V_{CB}^{\prime T} B^{-1} [V'_{N_1} - V'_{CB}] = 0. \quad (2.115)$$

Esta ecuación es válida si $V_{CB}^{\prime T} B^{-1} = 0$. En este caso V'_{CB} debe anularse e implica que $(V'_{CB})_4 = 0$ en la ecuación (2.100) y que si existe X_{CB} este tiene una solución única, que es,

$$g = -\frac{e}{2} \frac{v'_1 v'_3}{\alpha \beta + v'_1 v'_2} \quad (2.116)$$

en el mínimo normal encontramos un punto silla X_{N_2} para $g = 0$ pero en el mínimo CB no es una única solución para $g = 0$ y $v'_i \neq 0$. Encontraremos una única solución para $g \neq 0$, comparando la ecuación (2.116) con la ecuación (2.67) obtenemos que

$$\frac{v_2}{v_3} < \frac{v'_2}{v'_3} + \frac{\alpha \beta}{v'_1 v'_3} \quad (2.117)$$

Nosotros mostramos que $V_{N_1}^{\prime T} B^{-1} V'_{N_1}$ es negativo cuando X_{N_1} es mas profundo que X_{CB} y X_{N_2} . Como en la ecuación (2.64) notamos que $V_{N_1}^{\prime T} B^{-1} V'_{N_1}$ debe ser menor que cero, en consecuencia, la matriz inversa B^{-1} no es definida positiva, y el punto estacionario X_{CB} es un punto silla cuando cumple la ecuación (2.117). Para $g \neq 0$ obtenemos también la condición cuando el producto

$$X_{N_1}^T V'_{CB} = \frac{(V'_{CB})_4}{2} \left\{ \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \sqrt{3} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) v_2 + \frac{v_3}{v'_3} \left(v'_1 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - v'_2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \right\}^2 \quad (2.118)$$

es nulo, aquí el mínimo normal es mas profundo que X_{CB} , en este caso tenemos una solución continua donde los campos de Higgs adquieren los siguientes VEVs:

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{\beta v'_1 - \alpha v'_2}{(\sqrt{3}\beta - \alpha)v'_3} \quad (2.119)$$

esta solución es valida en particular si $\alpha \rightarrow 0$, en este caso obtenemos $v_2/v_3 = v'_1/\sqrt{3}v'_3$ si $\beta \rightarrow 0$ en la ecuación (2.119), en este caso $v_2/v_3 = v'_2/v'_3$. Independientemente de los valores tomados por β y α la ecuación (2.119) toma este valor si $v'_1 = \sqrt{3}v'_2$.

Comparando las dos soluciones en las ecuaciones (2.117) y (2.119) obtenemos los valores tomados por α y β cuando X_{CB} es un punto silla único y el mínimo normal es el mas profundo,

$$\frac{v'_1}{\sqrt{3}}(v'_1 - \sqrt{3}v'_2) < \alpha\beta \quad (2.120)$$

si el lado derecho de la ecuación se anula entonces $v'_1 < \sqrt{3}v'_2$, si el lado izquierdo se anula $v'_1 = \sqrt{3}v'_2$ entonces el producto $\alpha\beta$ es positivo. En esta sección probamos que $V_{CB} - V_{N1} > 0$ cuando el mínimo normal existe. En este caso, el mínimo normal X_{N1} es el más profundo, y X_{CB} es un punto silla único.

2.5.1. Matrices de masas de Higgs en el punto estacionario CB

Para este punto estacionario, la matriz $[C]$ es evaluada en el punto estacionario CB, en este caso los VEVs distintos de cero son $\phi_7 = v'_1, \phi_8 = v'_2, \phi_9 = v'_3, \phi_1 = \alpha, \phi_3 = \beta$ y los demás son cero. Evaluados en estos puntos estacionarios $V'_8 = V'_7 = V'_9 = 0$. En este mínimo, la matriz $[M_{11}^2]$ y $[M_{12}^2]$ tienen la misma forma funcional como en la ecuación (2.29) para el mínimo normal, con V'_i evaluado en el mínimo que viola carga eléctrica dado por la ecuación (2.99). En este caso, la matriz de masas cuadradas de Higgs M^2 es expresada como

$$[M^2] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_{mix} \\ B_{mix}^T & B_2 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.121)$$

De nuevo, M_{11} y M_{12} son dadas por la ecuación(2.29) evaluada en el punto CB. La matriz de mezclas B_{mix} en el punto CB puede ser escrita como

$$B_{mix} = \alpha \begin{pmatrix} 8v'_1(c+g) & 2(4v'_2(c-g) + 2ev'_3) & 2(2bv'_3 + 2ev'_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (8gv'_2 + 4ev'_3) & 8gv'_1 & 4ev'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8dv'_2 & -8dv'_1 & 0 \\ 4ev'_2 & 4ev'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8hv'_3 & 0 & -8hv'_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} (8gv'_2 + 4ev'_3) & 8gv'_1 & 4ev'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8dv'_2 & 8dv'_1 & 0 \\ 8(c-g)v'_1 & 2(4v'_2(c+g) - 2ev'_3) & 2(2bv'_3 - 2ev'_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4ev'_1 & -4ev'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8hv'_3 & -8hv'_2 \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

Esta matriz se anula si $\alpha = \beta = 0$, así como la matriz B_1 ,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 8(c+g)\alpha^2 + 8g\beta^2 & 0 & 8c\alpha\beta & 0 & 8e\alpha\beta & 0 \\ 0 & -8d\beta^2 & 0 & 8d\alpha\beta & 0 & 0 \\ 8c\alpha\beta & 0 & 8(c+g)\beta^2 + 8g\alpha^2 & 0 & -4e\beta^2 + 4e\alpha^2 & 0 \\ 0 & 8d\alpha\beta & 0 & -8d\alpha^2 & 0 & 0 \\ 8e\alpha\beta & 0 & 4e(\alpha^2 - \beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8h(\alpha^2 + \beta^2) \end{pmatrix}. \quad (2.123)$$

La matriz B_2 es diagonal por bloques $B_2 = \text{diag}(B'_1, B'_2)$ con

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 8(c+g)v_1'^2 + 8gv_2'^2 + 8ev_3'v_2' & 8v_1'(cv_2' + ev_3') & 4v_1'(bv_3' + 2ev_2') \\ 8v_1'(cv_2' + ev_3') & 8(c+g)v_2'^2 + 8gv_1'^2 + 8ev_3'v_2' & 4v_2'(bv_3' - ev_2') + 4ev_1'^2 \\ 4v_1'(bv_3' + 2ev_2') & 4v_2'(bv_3' - ev_2') + 4ev_1'^2 & 8av_3'^2 \end{pmatrix}, \quad (2.124)$$

y

$$B'_2 = \begin{pmatrix} -8dv_2'^2 - 8hv_3'^2 & 8dv_1'v_2' & 8hv_3'v_1' \\ 8dv_1'v_2' & -8dv_1'^2 - 8hv_3'^2 & 8hv_2'v_3' \\ 8hv_3'v_1' & 8hv_2'v_3' & -8h(v_1'^2 + v_2'^2) \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

La matriz B'_1 y B'_2 son diferentes de cero cuando α y β son nulas como esperábamos, aquí B_{lm} son las entradas de la matriz B . Entonces, obtuvimos la matriz de masas de Higgs en el punto estacionario CB en términos de los parámetros del potencial de Higgs.

2.6. Punto estacionario CP que rompe carga paridad

El punto estacionario que rompe CP esta dado por los siguientes VEVs: $\phi_7 = v_1''$, $\phi_8 = v_2''$, $\phi_9 = v_3''$, $\phi_{10} = \delta$ y $\phi_{11} = \gamma$.

Definiendo

$$Z_{CP} = \begin{pmatrix} \delta^2 + v_1''^2 \\ \gamma^2 + v_2''^2 \\ v_3''^2 \\ \delta\gamma + v_1''v_2'' \\ v_2''v_3'' \\ v_1''v_3'' \\ v_1''\gamma - v_2''\delta \\ -\delta v_3'' \\ -\gamma v_3'' \end{pmatrix}, \quad (2.126)$$

llamaremos Z_{CP} al vector X evaluado en el punto CPB (que viola carga y paridad) .
Mostramos que V_{CP} es expresado como

$$V_{CP} = A^T Z_{CP} + \frac{1}{2} Z_{CP}^T B Z_{CP}. \quad (2.127)$$

En este caso, notamos que no todas las entradas de x_l en X son independientes, encontramos las siguientes relaciones:

$$x_7^2 = x_1x_2 - x_4^2, \quad x_8^2 = x_3x_1 - x_6^2, \quad x_9^2 = x_3x_2 - x_5^2. \quad (2.128)$$

usando estas expresiones, el potencial de Higgs puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} V = & \mu_1^2(x_1 + x_2) + \mu_0^2x_3 + ax_3^2 + bx_3(x_1 + x_2) \\ & + c(x_1 + x_2)^2 - 4d(x_1x_2 - x_4^2) + g[(x_1 - x_2)^2 \\ & + 4x_4^2 + fx_3(x_1 + x_2) + 2h(2(x_6^2 + x_5^2) - x_3(x_1 + x_2)) \\ & + 2e(2x_4x_6 + x_5(x_1 - x_2))]. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Este potencial depende en $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, y de la ecuación (2.129), nosotros definimos la

matriz B_{CP} como

$$B_{CP} = \begin{pmatrix} 2(c+g) & 2(c-g-2d) & b+f-2h & 0 & 2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(c-g-2d) & 2(c+g) & b+f-2h & 0 & -2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b+f-2h & b+f-2h & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8(d+g) & 0 & 4e & 0 & 0 & 0 \\ 2e & -2e & 0 & 0 & 8h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4e & 0 & 8h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

y el vector X_{CP} es dado por la expresión

$$X_{CP} = \begin{pmatrix} \delta^2 + v_1''^2 \\ \gamma^2 + v_2''^2 \\ v_3''^2 \\ \delta\gamma + v_1''v_2'' \\ v_2''v_3'' \\ v_1''v_3'' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.131)$$

De este punto en adelante usaremos X_{CP} para designar los vectores X evaluados en el mínimo que rompe CP. Entonces, V_{CP} tiene la forma

$$V_{CP} = A^T X_{CP} + \frac{1}{2} X_{CP}^T B_{CP} X_{CP}. \quad (2.132)$$

Ahora, nosotros tenemos cinco variables independientes y las condiciones para el mínimo pueden ser descritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial v_i''} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial v_i''} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial V}{\partial \gamma} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \gamma} + \frac{\partial V}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial \gamma} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \delta} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \delta} + \frac{\partial V}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial \delta} = 0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Pasamos a definir el vector $(V'_{CP})_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} |_{X_{CP}}$. De lo anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 V'_{CP} &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial V}{\partial x_4} v_2'' + \frac{\partial V}{\partial x_6} v_3''\right) \frac{1}{2v_1''} \\ -\left(\frac{\partial V}{\partial x_4} v_1'' + \frac{\partial V}{\partial x_8} v_3''\right) \frac{1}{2v_2''} \\ -\left(\frac{\partial V}{\partial x_6} v_1'' + \frac{\partial V}{\partial x_8} v_2''\right) \frac{1}{2v_3''} \\ \frac{\partial V}{\partial x_4} \\ \frac{\partial V}{\partial x_5} \\ \frac{\partial V}{\partial x_6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{(V'_{CP})_4}{2\gamma\delta} \begin{pmatrix} \gamma^2 \\ \delta^2 \\ \frac{(v_1''\gamma - v_2''\delta)^2}{v_3''^2} \\ -2\gamma\delta \\ (\delta v_2'' - \gamma v_1'') \frac{2\delta}{v_3''} \\ (-\delta v_2'' + \gamma v_1'') \frac{2\gamma}{v_3''} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.134}
 \end{aligned}$$

donde

$$(V'_{CP})_4 = 8(d+g) \left(\gamma\delta + v_1'' v_2'' \right) + 4e v_1'' v_3'' \tag{2.135}$$

El análisis directo del potencial también nos muestra que nosotros podemos escribir V'_{CP} en forma de matriz como

$$V'_{CP} = A + B_{CP} X_{CP}, \tag{2.136}$$

de aquí, obtenemos que

$$X_{CP}^T V'_{CP} = 0. \tag{2.137}$$

En forma análoga como se hizo para el punto estacionario CB, de la suma $\left(\sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial V}{\partial v_i}\right) + \gamma \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma}\right) + \delta \left(\frac{\partial V}{\partial \delta}\right)$, obtenemos $2p_2 + 4p_4 = 0$ en el punto critico que rompe CP, y el potencial V_{CP} evaluado en este punto estacionario, podemos escribirlo como:

$$V_{CP} = \frac{1}{2} A^T X_{CP} = -\frac{1}{2} X_{CP}^T B_{CP} X_{CP}. \tag{2.138}$$

También,

$$V_{CP} - V_{N1} = \frac{1}{2} (X_{CP}^T V'_{N1} - X_{N1}^T V'_{CP}). \quad (2.139)$$

Esto es, el mínimo normal es el mas profundo si el lado derecho de la ecuación es mayor que cero , lo cual implica que el mínimo normal es mas profundo si $X_{CP}^T V'_{N1}$ es positivo:

$$\begin{aligned} X_{CP}^T V'_{N1} &= -\frac{(V'_{N1})_4}{2\sqrt{3}v_2^2} \left[(\delta - \sqrt{3}\gamma)^2 v_2^2 + (v_1'' - \sqrt{3}v_2'')^2 v_2^2 \right] \\ &\quad - \frac{(V'_{N1})_5}{2v_2 v_3} \left[\gamma^2 v_3^2 + (v_2'' v_3 - v_3'' v_2)^2 \right] \\ &\quad - \frac{(V'_{N1})_6}{2\sqrt{3}v_2 v_3} \left[\delta^2 v_3^2 + (v_1'' v_3 - \sqrt{3}v_3'' v_2)^2 \right]. \end{aligned}$$

Como nosotros sabemos, los signos de los cocientes $\frac{-(V')_4}{2\sqrt{3}v_2^2}$, $\frac{-(V')_5}{2v_2 v_3}$, $\frac{-(V')_6}{2\sqrt{3}v_2 v_3}$ son positivos.

El análisis del punto estacionario CP puede determinarse en analogía con el punto estacionario CB. Esto es, el mínimo X_{CP} es único cuando V'_{CP} es nulo y esto puede ser si $(V'_{CP})_4 = 0$, esto es,

$$d = -g - \frac{e}{2} \frac{v_1'' v_3''}{\gamma \delta + v_1'' v_2''} \quad (2.140)$$

en el mínimo normal para $g = 0$ encontramos que X_{N1} fue mas profundo que el punto silla X_{N2} , pero en el mínimo X_{CP} tenemos una solución única con cualquiera de las dos $g = 0$ o $g \neq 0$. De nuevo, siguiendo las relaciones que cumplen:

$$V_{CP} - V_{N1} = \frac{1}{2} \left[-V_{N1}^T B^{-1} V'_{N1} \right]. \quad (2.141)$$

Como en los dos casos previos $V_{N1}^T B^{-1} V'_{N1}$ es negativo cuando X_{N1} es mas profundo que X_{CP} y X_{N2} . Notemos que $V_{N1}^T B^{-1} V'_{N1}$ debe ser menor que cero, en consecuencia, la matriz inversa B^{-1} no es definida positiva, y el punto estacionario X_{CP} es un punto silla cuando se cumple la ecuación (2.140) .

Si $X_{N1}^T V'_{CP}$ de la ecuación (2.139) se anula, el mínimo normal X_{N1} es el mas profundo. Este termino tiene la forma

$$X_{N1}^T V'_{CP} = \frac{(V'_{CP})_4}{2} \left\{ \left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} - \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \right) v_2 + \frac{v_3}{v_3''} \left(v_1'' \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} - v_2'' \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \right) \right\}^2 \quad (2.142)$$

En este caso nosotros tenemos una solución continua cuando el campo de Higgs adquiere los siguientes VEVs:

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1'' \gamma - v_2'' \delta}{(\delta - \sqrt{3}\gamma) v_3''} \quad (2.143)$$

esto es valido cuando $\delta \rightarrow 0$ y $\gamma \rightarrow 0$ entonces $v_2/v_3 = -v_1''/\sqrt{3}v_3''$ y $v_2/v_3 = -v_2''/v_3''$ respectivamente.

En conclusión, en esta sección probamos que $V_{CP} - V_{N1} > 0$, también encontramos una solución única para X_{CP} donde el mínimo normal X_{N1} existe y X_{CP} en el punto critico CP nos da un punto silla.

2.6.1. Matrices de masas de Higgs en el punto estacionario CP

Finalmente, para el punto estacionario CP, la matriz $[C]$ es evaluada con $\phi_7 = v_1''$, $\phi_8 = v_2''$, $\phi_9 = v_3''$, $\phi_{10} = \delta$ y $\phi_{11} = \gamma$ diferente de cero, y $V_i' = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 9$). Para este punto estacionario se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \langle x_7 \rangle &= v_1\gamma - v_2\delta, \\ \langle x_8 \rangle &= -\delta v_3, \\ \langle x_9 \rangle &= -\gamma v_3. \end{aligned} \tag{2.144}$$

Las matrices $[M_{11}^2]$ y $[M_{12}^2]$ tienen la misma forma como en la ecuación (2.29) correspondiendo al mínimo normal, pero con V_i' evaluado en el punto que rompe CP como esta dado en la ecuación (2.134). Ahora expresamos la matriz de masas de Higgs como

$$[M^2] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B'_{CP} \end{pmatrix} \right]. \tag{2.145}$$

la matriz M_{12} es diagonal por bloques pero B'_{CP} no es una matriz diagonal por bloques, obtenemos una mezcla del sector escalar y pseudoescalar, ambos en presencia de la violación de CP. Con esto,

$$[M_{SP}^2] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_{12} + B'_1 & B'_{mix} \\ B'_{mix} & M'_{12} + B'_2 \end{pmatrix}, \tag{2.146}$$

donde la matriz de mezclas CP B'_{mix} es

$$\begin{aligned} [B'_{mix}] &= \gamma \begin{pmatrix} 8(d+g)v_2 + 4ev_3 & 4\sqrt{3}(c-g-2d)v_2 & 4\sqrt{3}ev_2 \\ 8\sqrt{3}(d+g)v_2 & 8(c+g)v_2 - 4ev_3 & -4ev_2 + 8hv_3 \\ 4\sqrt{3}ev_2 & (b-4h)v_3 - 4ev_2 & 8hv_2 \end{pmatrix} \\ &+ \delta \begin{pmatrix} 8\sqrt{3}(c+g)v_2 & 8(d+g)v_2 + 4ev_3 & 4ev_2 + 8hv_3 \\ 8(c-g-2d)v_2 + 4ev_3 & 8\sqrt{3}(g+d)v_2 & 4\sqrt{3}ev_2 \\ 4(b-4h)v_3 + 4ev_2 & 8ev_3 & 8\sqrt{3}hv_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.147}$$

y se anula cuando γ y δ son nulos, así como la matriz B'_2 :

$$\begin{aligned}
[B'_2] &= \begin{pmatrix} 8\delta^2(c+g) + 8\gamma^2(d+g) & 8\gamma\delta(c-d) & 8e\gamma\delta \\ \gamma\delta(c-d) & 8\gamma^2(c+g) + 8\delta^2(d+g) & 4e(\delta^2 - \gamma^2) \\ 8e\gamma\delta & 4e(\delta^2 - \gamma^2) & 8h(\delta^2 + \gamma^2) \end{pmatrix}, \\
[B'_1] &= \begin{pmatrix} 8[v_2^2(d+3c+4g) + hv_3^2] & 24v_2^2(c+2g-d) & 4\sqrt{3}v_2(b-2h)v_3 \\ 8\sqrt{3}v_2^2(c+2g-d) & 8[v_2^2(3d+c+4g) + hv_3^2] & 4(b-2h)v_2v_3 \\ 4\sqrt{3}v_2(b-2h)v_3 & 4(b-2h)v_2v_3 & 8[4hv_2^2 + av_3^2] \end{pmatrix} \\
&+ 8e \begin{pmatrix} v_2v_3 & \sqrt{3}v_2v_3 & \sqrt{3}v_2^2 \\ \sqrt{3}v_2v_3 & -v_2v_3 & 4v_2^2 \\ \sqrt{3}v_2^2 & 4v_2^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.148}
\end{aligned}$$

Entonces, hemos obtenido la matriz de masas de Higgs correspondiente al punto estacionario CP.

Capítulo 3

MATRICES DE MASAS Y MEZCLAS DE LOS QUARKS

Para poder construir la matriz de mezcla necesitamos la matriz de masas, entonces partiendo de la lagrangiana de Yukawa llegaremos a la forma de la matriz de masa para los quarks.

3.1. Lagrangiana de Yukawa

Los campos de quarks, leptones cargados, neutrinos y bosones de Higgs son

$$Q^T = (u_L, d_L), \quad u_R, d_R, \quad L^T = (\nu_L, e_L), \quad e_R, \nu_R, \quad H.$$

Los dobletes llevan índices de mayúsculas I, J que corren de 1 a 2, y los singletes se denotan por $Q_3, u_{3R}, d_{3R}, L_3, e_{3R}, \nu_{3R}, H_S$. Note que hemos introducido en la teoría tres neutrinos derechos y tres campos de Higgs dobletes de $SU(2)$, el subíndice 3 no significa tercera generación, se refiere a singlete de S_3 .

El lagrangiano de Yukawa [7] puede expresarse como

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{Y_D} + \mathcal{L}_{Y_U} + \mathcal{L}_{Y_E} + \mathcal{L}_{Y_\nu}, \tag{3.1}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} = & -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\ & -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ & -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + h.c., \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_U} = & -Y_1^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_S^* u_{IR} - Y_3^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_S^* u_{3R} \\ & -Y_2^u [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* u_{JR} + \eta \bar{Q}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* u_{JR}] \\ & -Y_4^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_I^* u_{IR} - Y_5^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_I^* u_{3R} + h.c., \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_E} = & -Y_1^e \bar{L}_I H_S e_{IR} - Y_3^e \bar{L}_3 H_S e_{3R} \\ & -Y_2^e [\bar{L}_I \kappa_{IJ} H_1 e_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} H_2 e_{JR}] \\ & -Y_4^e \bar{L}_3 H_I e_{IR} - Y_5^e \bar{L}_I H_I e_{3R} + h.c., \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_\nu} = & -Y_1^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_S^* \nu_{IR} - Y_3^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} \\ & -Y_2^\nu [\bar{L}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \eta \bar{L}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\ & -Y_4^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_I^* \nu_{IR} - Y_5^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_I^* \nu_{3R} + h.c., \end{aligned} \quad (3.5)$$

κ y η definidas como

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Desarrollando los términos en la lagrangiana de los quarks \mathcal{L}_{Y_D} (3.2), obtenemos para el primer término

$$\mathcal{L}_1 = -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR}, \quad (3.7)$$

donde \bar{Q}_I es un doblete de sabor y doblete de $SU(2)$, H_S es un singlete de sabor y doblete de $SU(2)$ y d_{IR} es un doblete de sabor y singlete de $SU(2)$, Q tiene la siguiente forma $Q^T = (q_L^u, q_L^d)$. Recordando que una vez rota la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ el singlete de Higgs toma el siguiente valor

$$\langle H_S \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= -Y_1^d (\bar{Q}_{1L}, \bar{Q}_{2L}) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle d_{1R} \\ \langle H_S \rangle d_{2R} \end{pmatrix} = -Y_1^d [\bar{Q}_{1L} H_s d_{1R} + \bar{Q}_{2L} H_s d_{2R}] \quad (3.9) \\
&= -Y_1^d \left[(\bar{u}_{1L}, \bar{d}_{1L}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) d_{1R} \end{pmatrix} + (\bar{u}_{2L}, \bar{d}_{2L}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) d_{2R} \end{pmatrix} \right] \\
&= -Y_1^d \left[\bar{d}_{1L} \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) d_{1R} + \bar{d}_{2L} \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) d_{2R} \right] \\
&= -Y_1^d \left[(\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}) \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \end{pmatrix} \right] \\
&= (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) m_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

donde

$$m_1 = -Y_1^d \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3). \quad (3.11)$$

Para el segundo término tenemos

$$\mathcal{L}_2 = -Y_3^d \bar{Q}_3 \langle H_S \rangle d_{3R} \quad (3.12)$$

donde \bar{Q}_3 es un singlete de sabor y doblete de $SU(2)$ y d_{3R} es un singlete de sabor y un singlete de $SU(2)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= -Y_3^d (\bar{u}_{3L}, \bar{d}_{3L}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) \end{pmatrix} d_{3R} \\
&= -Y_3^d \bar{d}_{3L} \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) d_{3R} \\
&= -Y_3^d (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix} \\
&= (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) m_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

donde

$$m_3 = -Y_3^d \frac{1}{\sqrt{3}} (v_1 + v_2 + v_3)$$

Ahora veamos como es el tercer término

$$\mathcal{L}_3 = -Y_2^d \bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR}, \quad (3.14)$$

este se escribe explícitamente como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -Y_2^d (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) H_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \end{pmatrix} \\ &= -Y_2^d (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \begin{pmatrix} H_1 d_{1R} \\ H_1 d_{2R} \end{pmatrix} \\ &= -Y_2^d [(\bar{u}_{1L}, \bar{d}_{1L}) H_1 d_{1R} + (\bar{u}_{2L}, \bar{d}_{2L}) H_1 d_{2R}], \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Con esto \mathcal{L}_3 nos queda como

$$\mathcal{L}_3 = -Y_2^d \left[\bar{d}_{1L} \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) d_{1R} + \bar{d}_{2L} \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) d_{2R} \right], \quad (3.17)$$

la cual podemos reescribir en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -Y_2^d (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}) \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \end{pmatrix} \\ &= (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) m_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde

$$m_2 = -Y_2^d \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2). \quad (3.19)$$

El cuarto término es el siguiente

$$\mathcal{L}_4 = -Y_2^d \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}, \quad (3.20)$$

este explícitamente se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= -Y_2^d (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} H_2 \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \end{pmatrix} \\ &= -Y_2^d (\bar{Q}_1, -\bar{Q}_2) \begin{pmatrix} H_2 d_{1R} \\ H_2 d_{2R} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$\langle H_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(v_1 + v_2 - 2v_3) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Con esto \mathcal{L}_4 nos queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= -Y_2^d [\bar{Q}_{1L} H_2 d_{1R} - \bar{Q}_{2L} H_2 d_{2R}] \\ &= -Y_2^d \left[\bar{d}_{1L} \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3) d_{2R} - \bar{d}_{2L} \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3) d_{1R} \right] \\ &= -Y_2^d (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}) \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \end{pmatrix} \\ &= (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) m_6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde

$$m_6 = -Y_2^d \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3). \quad (3.24)$$

Seguimos con el quinto término

$$\mathcal{L}_5 = -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR}, \quad (3.25)$$

el cual está dado por

$$\mathcal{L}_5 = -Y_4^d \bar{Q}_3 [H_1 d_{1R} + H_2 d_{2R}]. \quad (3.26)$$

Esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 &= -Y_4^d \left[\bar{Q}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) \end{pmatrix} d_{1R} + \bar{Q}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(v_1 + v_2 - 2v_3) \end{pmatrix} d_{2R} \right] \\ &= -Y_4^d \left[\bar{d}_{3L} \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) d_{1R} + \bar{d}_{3L} \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3) d_{2R} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

en términos de la matriz de masas la podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 &= -Y_4^d (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) & \frac{1}{\sqrt{6}}(v_1 + v_2 - 2v_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix} \\ &= (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_4 & m_7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde

$$m_4 = -Y_4^d \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2), \quad (3.29)$$

$$m_7 = -Y_4^d \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3). \quad (3.30)$$

El último término de la lagrangiana de Yukawa para los quarks d es el siguiente

$$\mathcal{L}_6 = -Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{L}_6 = -Y_5^d [\bar{Q}_{1L} H_1 + \bar{Q}_{2L} H_2] d_{3R}$$

desarrollando

$$\mathcal{L}_6 = -Y_5^d \left[\bar{d}_{1L} \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) d_{3R} + \bar{d}_{2L} \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3) d_{3R} \right] \quad (3.32)$$

en términos de la matriz de masas tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 &= -Y_5^d (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix} \\ &= (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_5 \\ 0 & 0 & m_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde

$$m_5 = -Y_5^d \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2), \quad (3.34)$$

$$m_8 = -Y_5^d \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3). \quad (3.35)$$

Ahora sumando todos los términos de \mathcal{L}_{Y_D} , finalmente obtenemos la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_{Y_D} = (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) \begin{pmatrix} m_1 + m_6 & m_2 & m_5 \\ m_2 & m_1 - m_6 & m_8 \\ m_4 & m_7 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix} + h.c., \quad (3.36)$$

por lo tanto, la matriz de masas es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 + m_6 & m_2 & m_5 \\ m_2 & m_1 - m_6 & m_8 \\ m_4 & m_7 & m_3 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Tenemos la matriz de masa para los quarks d , pero si analizamos cada una de las entradas del lagrangiano de Yukawa, veremos que al desarrollar cada termino tenemos también la correspondiente matriz de masas tanto para los quarks u , y los leptones e y ν , las cuales tendrán la misma forma que la matriz que acabamos de obtener.

3.1.1. Reducción de parámetros

En el capítulo anterior obtuvimos que los campos de Higgs cumplen con cierta simetría. Encontramos dos casos que podemos utilizar para reducir los parámetros de la matriz de masas de los quarks y construir la matriz de masas correspondientes en cada uno.

Matriz de masas de los quarks caso $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$

Uno de los dos posibles casos es que los valores de expectación de los campos de Higgs sean reales y que los campos de Higgs que se transforman como el doblete de S_3 cumplan con la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \langle H_1 \rangle &= \langle H_2 \rangle, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(v_1 + v_2 - 2v_3). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Con esta condición algunos valores de la matriz serán dependientes o mejor dicho iguales a otros. Revisemos el caso de m_6

$$\begin{aligned} m_6 &= -Y_2^d \frac{1}{\sqrt{6}}(v_1 + v_2 - 2v_3) \\ &= -Y_2^d \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) \\ &= m_2. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ahora para el caso de m_4

$$\begin{aligned} m_4 &= -Y_4^d \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) \\ &= -Y_4^d \frac{1}{\sqrt{6}}(v_1 + v_2 - 2v_3) \\ &= m_7. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Finalmente en el caso de m_5 se tiene

$$\begin{aligned}
m_5 &= -Y_5^d \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) \\
&= -Y_5^d \frac{1}{\sqrt{6}} (v_1 + v_2 - 2v_3) \\
&= m_8.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Por todo lo anterior la matriz M es la siguiente

$$M = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & m_5 \\ m_2 & m_1 - m_2 & m_5 \\ m_4 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

Reescribiendo la lagrangiana tenemos

$$\mathcal{L}_{Y_D} = (\bar{d}_{1L}, \bar{d}_{2L}, \bar{d}_{3L}) \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & m_5 \\ m_2 & m_1 - m_2 & m_5 \\ m_4 & m_4 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix} + h.c.,$$

las matrices de los quarks u y d tienen la misma forma, entonces diagonalizamos de forma general la matriz

$$M^q = \begin{pmatrix} m_1^q + m_2^q & m_2^q & m_5^q \\ m_2^q & m_1^q - m_2^q & m_5^q \\ m_4^q & m_4^q & m_3^q \end{pmatrix} \quad q = u, d. \tag{3.43}$$

Todas las entradas de la matriz de masas pueden ser complejas, no hay restricciones que vengan del grupo S_3 .

Si analizamos a la matriz de masas como una matriz diagonal por bloques en el sentido de que m_5 y m_4 son muy pequeños, prácticamente cero, entonces tenemos un doblete y un singlete en la matriz, recordando que sólo una fase es la necesaria para parametrizar a la matriz de mezclas, proponemos a Y_3^d como compleja, ya que daría lugar a una fase en el singlete pudiendo dar así la violación de CP, y así tenemos una matriz teórica con la cual trabajar, la cual sería la siguiente:

$$M^q = \begin{pmatrix} m_1^q + m_2^q & m_2^q & m_5^q \\ m_2^q & m_1^q - m_2^q & m_5^q \\ m_4^q & m_4^q & m_3^q e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

por lo tanto esta es la matriz de masas a emplear. Bajo la hipótesis de que sólo m_3 es compleja, quedan 10 parámetros reales y una fase para explicar 6 masas de los quarks y 3 ángulos de mezcla y la fase que aparece en la matriz de mezcla de los quarks.

Matriz de masas de los quarks caso $\langle H_1 \rangle = \sqrt{3} \langle H_2 \rangle$

Este caso es el que debe concordar con lo que se observa experimentalmente¹

$$\langle H_1 \rangle = \sqrt{3} \langle H_2 \rangle \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(v_1 + v_2 - 2v_3), \\ (v_1 - v_2) &= (v_1 + v_2 - 2v_3). \end{aligned}$$

De forma análoga al caso anterior se obtiene la siguiente matriz de masas de los quarks, la cual es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}m_2 & m_2 & m_5 \\ m_2 & m_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}m_2 & \frac{1}{\sqrt{3}}m_5 \\ m_4 & \frac{1}{\sqrt{3}}m_4 & m_3 e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

de la misma forma se le agrega la fase para que exista violación de CP que viene de un acoplo de Yukawa igual que el caso anterior.

3.2. Matriz de Mezclas

Una vez rota la simetría de norma, $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$, los fermiones de Dirac adquieren masa vía el mecanismo de Higgs. Como los acoplamientos de Yukawa no son diagonales en la base donde la teoría es invariante de norma, las matrices de masa en esta base tampoco son diagonales, los términos de masas de Dirac se escriben como

$$\mathcal{L}_{Mass} = \bar{u}_{Li}^I M_{ij}^u u_{Rj}^I + \bar{d}_{Li}^I M_{ij}^d d_{Rj}^I + \bar{l}_{Li}^I M_{ij}^l l_{Rj}^I + h.c. \quad (3.47)$$

en donde las matrices M^f son complejas de tres por tres y no diagonales. En la base de las interacciones los fermiones no son estados propios de la masa por lo que los términos de masa acoplan en una misma familia a fermiones de distinta generación. Sin embargo, nosotros podemos ir a la base en que las masas son diagonales mediante transformaciones biunitarias, ésto es

$$\bar{\psi}_{Li}^I U_L^{f\dagger} U_L^f M^f U_R^f U_R^{f\dagger} \psi_{Rj}^I = \bar{\psi}_{Li}^{I'f} M_{diag}^f \psi_{Rj}^{I'f} \quad (3.48)$$

¹se observo que este caso contiene a las partículas que se han observado hasta el momento en la naturaleza.

en donde M_{diag}^f es una matriz diagonal y real cuyos elementos en la diagonal son asociados a las masas de los fermiones, U_L^f y U_R^f son las matrices que diagonalizan a la matriz de masas. Estas transformaciones biunitarias, llevan a los fermiones a la base de las masas

$$\psi_{(L,R)i}^f = U_{(L,R)i,j}^f \psi_{(L,R)j}^f \quad (3.49)$$

En esta base las componentes cargadas de los quarks no son diagonales y los quarks up y down se mezclan, la matriz de mezclas se define como:

$$V_{CKM} = U_L^u U_L^{d\dagger} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

ésta es la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Es importante saber cuantos parámetros independientes contiene la matriz CKM, para tres familias de quarks ésta es una matriz compleja de 3×3 , tiene $2 \times 3^2 = 18$ parámetros reales y de la condición de unitariedad

$$V^\dagger V = \begin{pmatrix} V_{ud}^* & V_{us}^* & V_{ub}^* \\ V_{cd}^* & V_{cs}^* & V_{cb}^* \\ V_{td}^* & V_{ts}^* & V_{tb}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = 1 \quad (3.51)$$

tenemos 9 condiciones, con las que eliminamos 9 de los 18 parámetros reales. De los 9 restantes, podemos a través de rotaciones parametrizar con 3 números reales a los ángulos de rotación, los 6 parámetros restantes se pueden asociar a las fases de los campos de quarks, de las cuales 5 fases son removibles, y V puede ser parametrizada en términos de 3 ángulos reales de rotación θ_{ij} y una fase δ_{13} , una parametrización de V es la siguiente:

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{13} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{13} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

donde $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ y $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$.

Los valores permitidos de las magnitudes de los nueve elementos de la matriz CKM son [10]

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0.97419 \pm 0.00022 & 0.2257 \pm 0.0010 & 0.00359 \pm 0.00016 \\ 0.2256 \pm 0.0010 & 0.97334 \pm 0.00023 & 0.0415_{-0.0011}^{+0.0010} \\ 0.00874_{-0.00037}^{+0.00026} & 0.0407 \pm 0.0010 & 0.999133_{-0.000043}^{+0.000044} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Dada la naturaleza de la matriz de mezclas se puede usar como una herramienta para establecer el número de familias de quarks, ya que en la matriz de mezclas de los quarks

de dimensiones $n \times n$, se ve claramente que n es el número de familias de quarks, entonces si experimentalmente se encuentra que no se cumple la condición de unitariedad podríamos decir que no estamos contemplando a todas las familias de los quarks existentes, esto sería la evidencia para una cuarta familia de quarks en la naturaleza. Por esta razón las pruebas de unitariedad son tan importantes. Además de los datos experimentales se puede ver que la matriz de mezclas es casi diagonal, en el límite donde la matriz de mezclas es diagonal, las matrices de masa de los quarks up y down se diagonalizarían con la misma matriz unitaria $U_L^u = U_L^d$.

3.3. Matrices de mezclas de los quarks

Para obtener la matriz de mezclas necesitamos encontrar la transformación bi-unitaria que dé lugar a una matriz de masas diagonal, la diagonalización puede ser poco sencilla y hacerse de distintas formas, pero recurriremos a un método perturbativo aprovechando ciertas condiciones que se tienen que dar en la matriz de masas.

3.3.1. Matriz de mezclas caso $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$

Para poder aplicar el método primero tenemos que reescribir la matriz de masas de la siguiente forma

$$\hat{M}^q = \frac{M^q}{m_3^q} = \frac{1}{m_3^q} \begin{pmatrix} m_1^q + m_2^q & m_2^q & m_5^q \\ m_2^q & m_1^q - m_2^q & m_5^q \\ m_4^q & m_4^q & m_3^q e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{m_1^q + m_2^q}{m_3^q} & \frac{m_2^q}{m_3^q} & \frac{m_5^q}{m_3^q} \\ \frac{m_2^q}{m_3^q} & \frac{m_1^q - m_2^q}{m_3^q} & \frac{m_5^q}{m_3^q} \\ \frac{m_4^q}{m_3^q} & \frac{m_4^q}{m_3^q} & e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Convenientemente, redefiniremos las masas de la siguiente forma $\hat{m}_i^q = \frac{m_i^q}{m_3^q}$, tenemos nuestra nueva matriz de masas como

$$\hat{M}^q = \begin{pmatrix} \hat{m}_1^q + \hat{m}_2^q & \hat{m}_2^q & \hat{m}_5^q \\ \hat{m}_2^q & \hat{m}_1^q - \hat{m}_2^q & \hat{m}_5^q \\ \hat{m}_4^q & \hat{m}_4^q & e^{-i\phi} \end{pmatrix}.$$

La matriz de masas no es hermitiana por lo que construiremos la matriz cuadrada $\hat{M}^\dagger \hat{M}$ o MM^\dagger para eliminar algunos parámetros en favor de las masas de los quarks y para posteriormente construir las matrices que diagonalizan la matriz de masas por la izquierda y por la derecha. Como queremos construir la matriz de mezclas y en esta sólo intervienen los quarks izquierdos necesitamos la matriz que diagonaliza por la izquierda a la matriz de masas. Para esto requerimos la siguiente matriz cuadrada $H = MM^\dagger$,

$$H = \begin{pmatrix} (\hat{m}_1 + \hat{m}_2)^2 + \hat{m}_2^2 + \hat{m}_5^2 & 2\hat{m}_1\hat{m}_2 + \hat{m}_5^2 & \hat{m}_4(\hat{m}_1 + 2\hat{m}_2) + \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ 2\hat{m}_1\hat{m}_2 + \hat{m}_5^2 & (\hat{m}_1 - \hat{m}_2)^2 + \hat{m}_2^2 + \hat{m}_5^2 & \hat{m}_4\hat{m}_1 + \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \hat{m}_4(\hat{m}_1 + 2\hat{m}_2) + \hat{m}_5 e^{-i\phi} & \hat{m}_4\hat{m}_1 + \hat{m}_5 e^{-i\phi} & 2\hat{m}_4^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Si suponemos que m_1 y m_2 son pequeños, entonces podemos recurrir a la teoría de perturbaciones (véase el apéndice D) para calcular los valores propios y los vectores propios de la matriz H . Además, suponiendo que el parámetro $\lambda = \hat{m}_1$ y que $\hat{m}_2 = b\hat{m}_1$, podemos reescribir la matriz como un desarrollo en potencias de λ y considerar esta como una perturbación a segundo orden, esto es,

$$H = H^0 + \lambda H^1 + \lambda^2 H^2, \quad (3.56)$$

en donde

$$H^0 = \begin{pmatrix} \hat{m}_5^2 & \hat{m}_5^2 & \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \hat{m}_5^2 & \hat{m}_5^2 & \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \hat{m}_5 e^{-i\phi} & \hat{m}_5 e^{-i\phi} & 2\hat{m}_4^2 + 1 \end{pmatrix} = \hat{m}_5^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{e^{i\phi}}{\hat{m}_5} \\ 1 & 1 & \frac{e^{i\phi}}{\hat{m}_5} \\ \frac{e^{-i\phi}}{\hat{m}_5} & \frac{e^{-i\phi}}{\hat{m}_5} & \frac{2\hat{m}_4^2 + 1}{\hat{m}_5^2} \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

$$H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{m}_4(1 + 2b) \\ 0 & 0 & \hat{m}_4 \\ \hat{m}_4(1 + 2b) & \hat{m}_4 & 0 \end{pmatrix} = \hat{m}_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 + 2b \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 + 2b & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} (1 + b)^2 + b^2 & 2b & 0 \\ 2b & (1 - b)^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

De aquí podemos empezar a encontrar los valores propios α y los vectores propios $|i\rangle_\alpha$. Para ello vemos que se cumplan las siguientes condiciones:

$$(H^0 - \alpha_i^0) |i\rangle^0 = 0, \quad (3.60)$$

$$(H^0 - \alpha_i^0) |i\rangle^1 + (H^1 - \alpha_i^1) |i\rangle^0 = 0, \quad (3.61)$$

$$(H^0 - \alpha_i^0) |i\rangle^2 + (H^1 - \alpha_i^1) |i\rangle^1 + (H^2 - \alpha_i^2) |i\rangle^0 = 0. \quad (3.62)$$

Partimos de las soluciones de 3.60 y en la ecuación (3.61) multiplicamos por la izquierda por ${}^0\langle j|$, tenemos lo siguiente

$$(\alpha_j^0 - \alpha_i^0) {}^0\langle j|i\rangle^1 + {}^0\langle j|(H^1 - \alpha_i^1)|i\rangle^0 = 0 \quad (3.63)$$

en donde para $i = j$ se tiene

$$\alpha_i^1 = A_{ii}, \quad (3.64)$$

con

$$A_{ji} = {}^0\langle j|H^1|i\rangle^0. \quad (3.65)$$

Y para $i \neq j$

$$a_{ji} = \frac{A_{ji}}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0}, \quad (3.66)$$

con $a_{ji} = {}^0\langle j|i\rangle^1$, que serían los coeficiente en el desarrollo

$$|i\rangle^1 = \sum_{i \neq j} a_{ji} |j\rangle^0. \quad (3.67)$$

Observando el caso en el que $i = j$ en el coeficiente. Mantenemos la normalización $\langle i|i\rangle$ a primer orden en λ , se obtiene que $a_{ii} + a_{ii}^* = 0$ y la función de onda está determinada hasta un factor fase, podemos tomar los coeficientes como reales, por lo que $a_{ii} = 0$; entonces, a primer orden se tiene que los valores propios y los vectores propios están dados por

$$\alpha_i = \alpha_i^0 + \lambda \alpha_i^1 = \alpha_i^0 + \lambda A_{ii}, \quad (3.68)$$

$$|i\rangle = |i\rangle^0 + \lambda |i\rangle^1 = |i\rangle^0 + \lambda \sum_{j \neq i} \frac{A_{ji}}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0} |j\rangle^0. \quad (3.69)$$

Ahora queremos las expresiones para calcular tanto la masa como los valores propios a orden dos. Para esto necesitamos multiplicar la ecuación (3.62) por ${}^0\langle j|$ y tenemos

$${}^0\langle j|H^0|i\rangle^2 - \alpha_i^0 {}^0\langle j|i\rangle^2 + {}^0\langle j|H^1|i\rangle^1 - \alpha_i^1 {}^0\langle j|i\rangle^1 + {}^0\langle j|H^2|i\rangle^0 - \alpha_i^2 \delta_{ij} = 0. \quad (3.70)$$

usando la expresión (3.60) en la ecuación anterior tenemos

$$(\alpha_j^0 - \alpha_i^0) {}^0\langle j|i\rangle^2 + {}^0\langle j|H^1|i\rangle^1 - \alpha_i^1 {}^0\langle j|i\rangle^1 + {}^0\langle j|H^2|i\rangle^0 - \alpha_i^2 \delta_{ij} = 0. \quad (3.71)$$

Analizando el caso $i = j$ se tiene lo siguiente

$${}^0\langle i|H^1|i\rangle^1 - \alpha_i^1 a_{ii} + {}^0\langle i|H^2|i\rangle^0 - \alpha_i^2 = 0, \quad (3.72)$$

como $a_{ii} = 0$, podemos calcular ahora la masa a orden dos, y la expresión para esta es

$$\alpha_i^2 = B_{ii} + \sum_{j \neq i} \frac{|A_{ji}|^2}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0}, \quad (3.73)$$

con $A_{ji} = {}^0 \langle j | H^1 | i \rangle^0$ y $B_{ji} = {}^0 \langle j | H^2 | i \rangle^0$.

Para el caso $i \neq j$

$$(\alpha_j^0 - \alpha_i^0) b_{ji} + {}^0 \langle j | H^1 | i \rangle^1 - \alpha_i^{10} \langle j | i \rangle^1 + {}^0 \langle j | H^2 | i \rangle^0 = 0, \quad (3.74)$$

con las $b_{ji} = {}^0 \langle j | i \rangle^2$. De esta ecuación podemos obtener

$$b_{ji} = -\frac{A_{ii}A_{ji}}{(\alpha_i^0 - \alpha_j^0)^2} + \sum_{k \neq i} \frac{A_{jk}A_{ki}}{(\alpha_i^0 - \alpha_j^0)(\alpha_i^0 - \alpha_k^0)} + \frac{B_{ji}}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0}, \quad (3.75)$$

en donde las b_{ji} son ahora los coeficientes del desarrollo de $|i\rangle^2$ en la base $|i\rangle^0$

$$|i\rangle^2 = \sum_{j \neq i} b_{ji} |j\rangle^0. \quad (3.76)$$

Parametrización a primer orden en λ

Con las expresiones de la sección anterior podemos calcular los eigenvalores y los eigenvectores a orden dos para la matriz de masas cuadrada H . Primero calculamos los valores propios a orden cero usando H^0 , y obtenemos la ecuación característica, la cual es

$$(\alpha^2 - (2m_5^2 + 2m_4^2 + 1)\alpha + 4m_5^2m_4^2)\alpha = 0, \quad (3.77)$$

donde las soluciones para los eigenvalores son,

$$\alpha_1^0 = 0. \quad (3.78)$$

$$\alpha_{2,3}^0 = \frac{1}{2} \left(1 + 2(m_4^2 + m_5^2) \pm \sqrt{(1 + 2(m_4^2 + m_5^2))^2 - 16m_5^2m_4^2} \right). \quad (3.79)$$

Los eigenvectores los calculamos de tal manera que se cumpla:

$$H^0 |i\rangle^0 = \alpha_i^0 |i\rangle^0. \quad (3.80)$$

Escribimos el eigenvector de la forma

$$|i\rangle^0 \sim \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

de aquí se obtienen las siguientes tres ecuaciones

$$\hat{m}_5^2 (x_i + y_i) + \hat{m}_5 e^{i\phi} = \alpha_i^0 x_i, \quad (3.82)$$

$$\hat{m}_5^2 (x_i + y_i) + \hat{m}_5 e^{i\phi} = \alpha_i^0 y_i, \quad (3.83)$$

$$1 + 2\hat{m}_4^2 + \hat{m}_5 e^{-i\phi} (x_i + y_i) = \alpha_i^0. \quad (3.84)$$

Claramente $x_i = y_i$, entonces de la ecuación (3.84) se obtiene lo siguiente

$$x_i = \frac{\alpha_i^0 - (1 + 2\hat{m}_4^2)}{2\hat{m}_5} e^{i\phi}, \quad (3.85)$$

aunque con las dos primeras también podemos obtener

$$x_i = \frac{\hat{m}_5}{\alpha_i^0 - 2\hat{m}_5^2} e^{i\phi}. \quad (3.86)$$

Con las últimas dos expresiones tenemos una nueva restricción en el sistema y de esta forma podemos dejar \hat{m}_4 en términos de \hat{m}_5 o viceversa, aún no aplicaremos esta restricción, los eigenvectores se pueden expresar de la siguiente forma

$$|i\rangle^0 = \frac{1}{2\hat{m}_5} \begin{pmatrix} (\alpha_i^0 - (1 + 2\hat{m}_4^2)) e^{i\phi} \\ (\alpha_i^0 - (1 + 2\hat{m}_4^2)) e^{i\phi} \\ 2\hat{m}_5 \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Ahora, sustituyendo los valores a orden cero podemos calcular los eigenvectores a orden cero. Usando la expresión (3.79) obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_2^0 + \alpha_3^0 &= 1 + 2(\hat{m}_4^2 + \hat{m}_5^2), \\ \alpha_3^0 &= 1 + 2(\hat{m}_4^2 + \hat{m}_5^2) - \alpha_2^0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Usando de nuevo la misma expresión (3.79) pero ahora como el producto de las dos soluciones obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \alpha_2^0 \alpha_3^0 &= \frac{1}{4} (1 + 2(\hat{m}_4^2 + \hat{m}_5^2))^2 - \frac{1}{4} [(1 + 2(\hat{m}_4^2 + \hat{m}_5^2))^2 - 16\hat{m}_5^2 \hat{m}_4^2], \\ \alpha_2^0 \alpha_3^0 &= 4\hat{m}_5^2 \hat{m}_4^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Entonces α_3^0 podemos expresarlo de la siguiente forma

$$\alpha_3^0 = 1 + 2(\hat{m}_4^2 + \hat{m}_5^2) - \frac{4\hat{m}_5^2 \hat{m}_4^2}{\alpha_3^0} \quad (3.90)$$

Ahora podemos obtener el eigenvector $|3\rangle^0$, el eigenvector es

$$|3\rangle^0 = \begin{pmatrix} \hat{m}_5 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ \hat{m}_5 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

normalizando el eigenvalor obtenemos

$$|3\rangle^0 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\hat{m}_5^2 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)^2}} \begin{pmatrix} \hat{m}_5 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ \hat{m}_5 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\hat{m}_5^2} + 2 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)^2}} \begin{pmatrix} \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ \frac{1}{\hat{m}_5} \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

De igual manera para el eigenvector $|2\rangle^0$, obtenemos

$$|2\rangle^0 = \frac{1}{2\hat{m}_5} \begin{pmatrix} (\alpha_2^0 - (1 + 2\hat{m}_4^2)) e^{i\phi} \\ (\alpha_2^0 - (1 + 2\hat{m}_4^2)) e^{i\phi} \\ 2\hat{m}_5 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2\hat{m}_5} \begin{pmatrix} \left(\frac{4\hat{m}_5^2\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0} - (1 + 2\hat{m}_4^2)\right) e^{i\phi} \\ \left(\frac{4\hat{m}_5^2\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0} - (1 + 2\hat{m}_4^2)\right) e^{i\phi} \\ 2\hat{m}_5 \end{pmatrix}.$$

Usando la ecuación (3.90)

$$|2\rangle^0 = \frac{1}{2\hat{m}_5} \begin{pmatrix} (-\alpha_3^0 + 2\hat{m}_5^2) e^{i\phi} \\ (-\alpha_3^0 + 2\hat{m}_5^2) e^{i\phi} \\ 2\hat{m}_5 \end{pmatrix} = -\frac{\alpha_3^0}{2\hat{m}_5} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ \left(1 - \frac{2\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ -2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0} \end{pmatrix},$$

normalizando el eigenvector

$$|2\rangle^0 = -\frac{\alpha_3^0}{2\hat{m}_5 \sqrt{2 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2 + 4\frac{\hat{m}_5^2}{(\alpha_3^0)^2}}} \begin{pmatrix} \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ -2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0} \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

usando la ecuación (3.90) se puede ver que $|2\rangle^0$ y $|3\rangle^0$ son ortogonales. El eigenvector $|1\rangle^0$ lo podemos obtener por ortogonalidad, en cuyo caso resulta

$$|1\rangle^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi} \\ -e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

Ahora procedemos a tomar los términos de orden λ para calcular los eigenvalores a primer orden. Partimos de la matriz

$$H^0 + \lambda H^1 = \begin{pmatrix} \hat{m}_5^2 & \hat{m}_5^2 & \lambda \hat{m}_4 (1 + 2b) + \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \hat{m}_5^2 & \hat{m}_5^2 & \lambda \hat{m}_4 + \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \lambda \hat{m}_4 (1 + 2b) + \hat{m}_5 e^{-i\phi} & \lambda \hat{m}_4 + \hat{m}_5 e^{-i\phi} & 2\hat{m}_4^2 + 1 \end{pmatrix},$$

siguiendo el mismo procedimiento obtenemos la ecuación característica

$$\alpha (\alpha^2 - (1 + 2\hat{m}_4^2 + 2\hat{m}_5^2) \alpha + 4\hat{m}_5 \hat{m}_4 (\hat{m}_5 \hat{m}_4 - \lambda (1 + b) \cos \phi)) = 0 \quad (3.96)$$

con soluciones

$$\alpha_1^1 = 0.$$

Las otras dos las representamos como masas reducidas

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{2,3}^2 &= \frac{1}{2} (1 + 2\hat{m}_4^2 + 2\hat{m}_5^2) \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\hat{m}_4^2 + 2\hat{m}_5^2)^2 - 16\hat{m}_5 \hat{m}_4 (\hat{m}_5 \hat{m}_4 - \lambda (1 + b) \cos \phi)}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

donde la tilde la usamos para representar las masas reducidas y además hemos identificado con las masas físicas los valores propios a orden uno. En las masas reducidas \tilde{m}_3^2 es igual a uno, por lo tanto podemos encontrar una reparametrización de \hat{m}_4 y \hat{m}_5 en función de las masas reducidas y de los demás parámetros. Si sumamos \tilde{m}_2^2 y \tilde{m}_3^2 obtenemos

$$1 + \tilde{m}_2^2 = 1 + 2\hat{m}_4^2 + 2\hat{m}_5^2, \quad (3.98)$$

y si tomamos la diferencia de \tilde{m}_2^2 y \tilde{m}_3^2

$$1 - \tilde{m}_2^2 = \sqrt{(1 + 2\hat{m}_4^2 + 2\hat{m}_5^2)^2 - 16\hat{m}_5 \hat{m}_4 (\hat{m}_5 \hat{m}_4 - \lambda (1 + b) \cos \phi)}, \quad (3.99)$$

elevando al cuadrado y usando (3.98)

$$(\hat{m}_5 \hat{m}_4)^2 - \lambda (1 + b) \cos \phi (\hat{m}_5 \hat{m}_4) - \frac{1}{4} \tilde{m}_2^2 = 0. \quad (3.100)$$

Esta ecuación está expresada para que sea fácilmente evidente que tenemos una ecuación de grado dos en el producto $\hat{m}_5\hat{m}_4$, entonces resolviendo

$$\hat{m}_5\hat{m}_4 = \frac{1}{2}\lambda(1+b)\cos\phi \pm \frac{1}{2}\tilde{m}_2, \quad (3.101)$$

donde

$$\tilde{m}_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\lambda(1+b)\cos\phi)^2 + \tilde{m}_2^2}.$$

Usando la solución con signo positivo y completando el binomio al cuadrado en la ecuación (3.98), obtenemos

$$(\hat{m}_4 + \hat{m}_5)^2 = \frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_2^2 - 1) + \lambda(1+b)\cos\phi + \tilde{m}_2, \quad (3.102)$$

$$(\hat{m}_4 - \hat{m}_5)^2 = \frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_2^2 - 1) - \lambda(1+b)\cos\phi - \tilde{m}_2, \quad (3.103)$$

en donde se tiene que elegir si $\hat{m}_4 < \hat{m}_5$ ó $\hat{m}_4 > \hat{m}_5$. Si elegimos la segunda opción, despejando m_4 y m_5 tenemos

$$\hat{m}_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_2^2 - 1) + \lambda(1+b)\cos\phi + \tilde{m}_2} \quad (3.104)$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_2^2 - 1) - \lambda(1+b)\cos\phi - \tilde{m}_2}$$

$$\hat{m}_5 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_2^2 - 1) + \lambda(1+b)\cos\phi + \tilde{m}_2} \quad (3.105)$$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_2^2 - 1) - \lambda(1+b)\cos\phi - \tilde{m}_2}$$

Regresando a los eigenvalores de orden cero y reparametrizándolos en función de las masas físicas si identificamos las masas a primer orden con las masas físicas. Para ello usamos de nuevo las ecuaciones (3.98) y (3.101) y obtenemos los eigenvalores a orden cero en términos de las masas físicas, con lo siguiente ya podemos escribir los eigenvalores a orden cero y uno en función de las masas físicas y los parámetros libres. Para saber el valor de λ podemos calcular a orden λ^2 el eigenvalor uno.

$$\alpha_2^0 = \frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_2^2 + \sqrt{(1 + \tilde{m}_2^2)^2 - (8\lambda(1+b)\cos\phi + \tilde{m}_2)^2}) \quad (3.106)$$

$$\alpha_3^0 = \frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_2^2 - \sqrt{(1 + \tilde{m}_2^2)^2 - (8\lambda(1+b)\cos\phi + \tilde{m}_2)^2}) \quad (3.107)$$

Eigenvectores a orden uno en λ

Para calcular los eigenvectores a orden uno necesitamos calcular primero las A_{ij} dadas en la ecuación (3.65). Calculamos A_{11}, A_{12} y A_{13} :

$$A_{11} = {}^0 \langle 1 | H^1 | 1 \rangle^0 = 0, \quad (3.108)$$

$$A_{12} = {}^0 \langle 1 | H^1 | 2 \rangle^0 = - \frac{b \hat{m}_4 e^{-i\phi}}{\sqrt{4 \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2 + 8 \frac{\hat{m}_5^2}{(\alpha_3^0)^2}}} e^{-i\phi}, \quad (3.109)$$

$$A_{13} = {}^0 \langle 1 | H^1 | 3 \rangle^0 = \frac{2b \hat{m}_4 e^{-i\phi}}{\hat{m}_5 \sqrt{\frac{2}{\hat{m}_5^2} + 4 \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)^2}}. \quad (3.110)$$

Además, como $A_{ij} = A_{ij}^*$ se tienen ya los elementos A_{21} y A_{31} . Ahora para A_{23}, A_{22} y A_{33}

$$A_{22} = {}^0 \langle 2 | H^1 | 2 \rangle^0 = \frac{\hat{m}_4 \alpha_3^0 (1+b) \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right) \cos \phi}{\hat{m}_5 \left(\left(1 - 2 \frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2 + 2 \frac{\hat{m}_5^2}{(\alpha_3^0)^2} \right)}, \quad (3.111)$$

$$A_{23} = {}^0 \langle 2 | H^1 | 3 \rangle^0 = \frac{\hat{m}_4 (\alpha_3^0) (1+b) \left(\frac{2}{\hat{m}_5} \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right) e^{-i\phi} - 4 \frac{\hat{m}_5}{\alpha_3^0} \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \right)}{2 \hat{m}_5 \sqrt{\frac{1}{\hat{m}_5^2} + 2 \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)^2} \sqrt{2 \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2 + 4 \frac{\hat{m}_5^2}{(\alpha_3^0)^2}}}, \quad (3.112)$$

$$A_{33} = {}^0 \langle 3 | H^1 | 3 \rangle^0 = \frac{4(1+b) \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) \hat{m}_4 \cos \phi}{\frac{1}{\hat{m}_5} + 2 \hat{m}_5 \left(1 - 2 \frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)^2}. \quad (3.113)$$

Ahora ya podemos escribir los eigenvectores a primer orden en función de las masas físicas y de los parámetros libres que nos quedan. Sabemos que

$$|i\rangle = |i\rangle^0 + \lambda |i\rangle^1 = |i\rangle^0 + \lambda \sum_{i \neq j} \frac{A_{ji}}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0} |j\rangle^0, \quad (3.114)$$

podemos calcular con esto los elementos de la matriz de mezclas como

$$V_{ij}^{ckm} = {}_u \langle i | j \rangle_d. \quad (3.115)$$

Hemos construido una forma de obtener la matriz de mezclas para los quarks aproximada en el ME extendido con simetría permutacional S_3 .

Eigenvectores a segundo orden en λ

Para calcular los eigenvectores a orden dos necesitamos calcular primero las $B_{ji} = {}^0 \langle j | H^2 | i \rangle^0$. Calculamos B_{11} , B_{12} y B_{13} :

$$B_{11} = {}^0 \langle 1 | H^2 | 1 \rangle^0 = 1 - 2b + 2b^2, \quad (3.116)$$

$$B_{12} = {}^0 \langle 1 | H^2 | 2 \rangle^0 = -\frac{4b \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right) \alpha_3^0}{2\hat{m}_5 \sqrt{4 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2 + 8\frac{\hat{m}_5^2}{(\alpha_3^0)^2}}}, \quad (3.117)$$

$$B_{13} = {}^0 \langle 1 | H^2 | 3 \rangle^0 = \frac{4b \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)}{\sqrt{\frac{2}{\hat{m}_5^2} + 4 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)^2}}. \quad (3.118)$$

además como $B_{ij} = B_{ij}^*$ se tienen ya los elementos B_{21} y B_{31} .

Ahora para B_{23} , B_{22} y B_{33}

$$B_{22} = {}^0 \langle 2 | H^2 | 2 \rangle^0 = \frac{(2 + 4b + 4b^2) (\alpha_3^0)^2 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2}{4\hat{m}_5^2 \left(2 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2 + 4\frac{\hat{m}_5^2}{(\alpha_3^0)^2}\right)}, \quad (3.119)$$

$$B_{23} = {}^0 \langle 2 | H^2 | 3 \rangle^0 = -\frac{(\alpha_3^0) \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right) \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right) (1 + 2b + 2b^2)}{\hat{m}_5 \sqrt{\frac{1}{\hat{m}_5^2} + 2 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)^2} \sqrt{2 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2 + 4\frac{\hat{m}_5^2}{(\alpha_3^0)^2}}}, \quad (3.120)$$

$$B_{33} = {}^0 \langle 3 | H^2 | 3 \rangle^0 = \frac{(2 + 4b + 4b^2) \left(1 - 2\frac{\hat{m}_5^2}{\alpha_3^0}\right)^2}{\frac{1}{\hat{m}_5} + 2\hat{m}_5 \left(1 - 2\frac{\hat{m}_4^2}{\alpha_3^0}\right)^2}. \quad (3.121)$$

Ahora ya podemos escribir los eigenvectores a segundo orden en función de las masas físicas y de los parámetros libres que nos quedan. Sabemos que

$$b_{ji} = -\frac{A_{ii}A_{ji}}{(\alpha_i^0 - \alpha_j^0)^2} + \sum_{k \neq i} \frac{A_{jk}A_{ki}}{(\alpha_i^0 - \alpha_j^0)(\alpha_i^0 - \alpha_k^0)} + \frac{B_{ji}}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0}. \quad (3.122)$$

Entonces, a segundo orden se tiene que los valores propios y los vectores propios están dados por

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |i\rangle^0 + \lambda |i\rangle^1 + \lambda^2 |i\rangle^2 \\ &= |i\rangle^0 + \lambda \sum_{j \neq i} \left[\frac{A_{ji}}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0} \left(1 - \lambda \frac{A_{ii}}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0}\right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left(\sum_{k \neq i} \frac{A_{jk}A_{ki}}{(\alpha_i^0 - \alpha_j^0)(\alpha_i^0 - \alpha_k^0)} + \frac{B_{ji}}{\alpha_i^0 - \alpha_j^0} \right) |j\rangle^0 \right] \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$(3.125)$$

Podemos calcular con esto los elementos de la matriz de mezclas como

$$V_{ij}^{ckm} = {}_u \langle i|j \rangle_d, \quad (3.126)$$

hemos construido una forma de obtener la matriz de mezclas exacta para los quarks en el ME extendido con simetría permutacional S_3 .

3.3.2. Matriz de mezclas caso $\langle H_1 \rangle = \sqrt{3} \langle H_2 \rangle$

Siguiendo el mismo procedimiento realizado anteriormente obtenemos lo siguiente

$$\hat{M}^q = \begin{pmatrix} \hat{m}_1^q + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_2^q & \hat{m}_2^q & \hat{m}_5^q \\ \hat{m}_2^q & \hat{m}_1^q - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_2^q & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5^q \\ \hat{m}_4^q & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_4^q & e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.127)$$

Construiremos la matriz cuadrada MM^\dagger

$$H = \begin{pmatrix} \left(\hat{m}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_2\right)^2 + \hat{m}_2^2 + \hat{m}_5^2 & 2\hat{m}_1\hat{m}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5^2 & \hat{m}_4\left(\hat{m}_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{m}_2\right) + \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ 2\hat{m}_1\hat{m}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5^2 & \left(\hat{m}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_2\right)^2 + \hat{m}_2^2 + \frac{1}{3}\hat{m}_5^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_4\left(\hat{m}_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{m}_2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \hat{m}_4\left(\hat{m}_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{m}_2\right) + \hat{m}_5 e^{-i\phi} & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_4\left(\hat{m}_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{m}_2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5 e^{-i\phi} & \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + 1 \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

Suponiendo que el parámetro $\lambda = \hat{m}_1$ y que $\hat{m}_2 = b\hat{m}_1$, podemos reescribir la matriz como un desarrollo en potencias de λ y considerar ésta como una perturbación a segundo orden:

$$H = \begin{pmatrix} \left(\left(\frac{\sqrt{3}+b}{\sqrt{3}}\right)^2 + b^2\right)\lambda^2 + \hat{m}_5^2 & 2b\lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5^2 & \hat{m}_4\left(\left(\frac{\sqrt{3}+2b}{\sqrt{3}}\right)\lambda\right) + \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ 2b\lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5^2 & \left(\left(\frac{\sqrt{3}-b}{\sqrt{3}}\right)^2 + b^2\right)\lambda^2 + \frac{1}{3}\hat{m}_5^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_4\left(\left(\frac{\sqrt{3}+2b}{\sqrt{3}}\right)\lambda\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \hat{m}_4\left(\left(\frac{\sqrt{3}+2b}{\sqrt{3}}\right)\lambda\right) + \hat{m}_5 e^{-i\phi} & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_4\left(\left(\frac{\sqrt{3}+2b}{\sqrt{3}}\right)\lambda\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5 e^{-i\phi} & \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + 1 \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

De acuerdo al método perturbativo

$$H = H^0 + \lambda H^1 + \lambda^2 H^2, \quad (3.130)$$

en donde

$$H^0 = \begin{pmatrix} \hat{m}_5^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5^2 & \hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5^2 & \frac{1}{3}\hat{m}_5^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5 e^{i\phi} \\ \hat{m}_5 e^{-i\phi} & \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5 e^{-i\phi} & \frac{4}{3}m_4^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad (3.131)$$

$$H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{m}_4 \left(\frac{\sqrt{3}+2b}{\sqrt{3}} \right) \\ 0 & 0 & \hat{m}_4 \left(\frac{\sqrt{3}+2b}{3} \right) \\ \hat{m}_4 \left(\frac{\sqrt{3}+2b}{\sqrt{3}} \right) & \hat{m}_4 \left(\frac{\sqrt{3}+2b}{3} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.132)$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} \left(\left(\frac{\sqrt{3}+b}{\sqrt{3}} \right)^2 + b^2 \right) & 2b & 0 \\ 2b & \left(\left(\frac{\sqrt{3}-b}{\sqrt{3}} \right)^2 + b^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.133)$$

Parametrización a primer orden en λ

En este caso nuestra ecuación característica es la siguiente

$$\left(\alpha^2 - \left(\frac{4}{3}m_5^2 + \frac{4}{3}m_4^2 + 1 \right) \alpha + \left(\frac{16}{9}m_4^2 + \frac{2}{3} \right) m_5^2 \right) \alpha = 0, \quad (3.134)$$

donde las soluciones para los eigenvalores son,

$$\alpha_1^0 = 0 \quad (3.135)$$

$$\alpha_{2,3}^0 = \left(\frac{2}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{2}{3}\hat{m}_4^2 + \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + 1 \right)^2 - \left(\frac{16}{9}\hat{m}_4^2 + \frac{2}{3} \right) m_5^2} \quad (3.136)$$

Los eigenvectores los calculamos de tal manera que se cumpla:

$$H^0 |i\rangle^0 = \alpha_i^0 |i\rangle^0. \quad (3.137)$$

Escribimos el eigenvector de la forma

$$|i\rangle^0 \sim \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.138)$$

de aquí se obtienen las siguientes tres ecuaciones

$$\hat{m}_5^2 \left(x_i + \frac{1}{\sqrt{3}}y_i \right) + \hat{m}_5 e^{i\phi} = \alpha_i^0 x_i, \quad (3.139)$$

$$\hat{m}_5^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_i + \frac{1}{3}y_i \right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{m}_5 e^{i\phi} = \alpha_i^0 y_i, \quad (3.140)$$

$$1 + \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + \hat{m}_5 e^{-i\phi} \left(x_i + \frac{1}{\sqrt{3}}y_i \right) = \alpha_i^0. \quad (3.141)$$

Claramente $\frac{1}{\sqrt{3}}x_i = y_i$, entonces de la última ecuación se obtiene lo siguiente

$$x_i = \frac{3\alpha_i^0 - (3 + 4\hat{m}_4^2)}{4\hat{m}_5} e^{i\phi}, \quad (3.142)$$

con lo que se obtiene

$$|i\rangle^0 = \frac{1}{4\sqrt{3}\hat{m}_5} \begin{pmatrix} \sqrt{3}(3\alpha_i^0 - (3 + 4\hat{m}_4^2)) e^{i\phi} \\ (3\alpha_i^0 - (3 + 4\hat{m}_4^2)) e^{i\phi} \\ 4\sqrt{3}\hat{m}_5 \end{pmatrix}. \quad (3.143)$$

Ahora, sustituyendo los valores a orden cero podemos calcular los eigenvectores a orden cero. Usando la expresión (3.136)

$$\alpha_{2,3}^0 = \left(\frac{2}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{2}{3}\hat{m}_4^2 + \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + 1 \right)^2 - \left(\frac{16}{9}\hat{m}_4^2 + \frac{2}{3} \right) m_5^2} \quad (3.144)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_2^0 + \alpha_3^0 &= \left(\frac{4}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + 1 \right) \\ \alpha_3^0 &= \frac{4}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + 1 - \alpha_2^0, \end{aligned} \quad (3.145)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que el caso anterior ahora obtenemos

$$\alpha_2^0 \alpha_3^0 = \left(\frac{2}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{2}{3}\hat{m}_4^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + 1 \right)^2 + \left(\frac{16}{9}\hat{m}_4^2 + \frac{2}{3} \right) m_5^2, \quad (3.146)$$

$$\alpha_2^0 \alpha_3^0 = \left(\frac{16}{9}\hat{m}_4^2 + \frac{2}{3} \right) m_5^2. \quad (3.147)$$

Entonces α_3^0 podemos expresarlo de la siguiente forma

$$\alpha_3^0 = \frac{4}{3}\hat{m}_5^2 + \frac{4}{3}\hat{m}_4^2 + 1 - \frac{\left(\frac{16}{9}\hat{m}_4^2 + \frac{2}{3} \right) m_5^2}{\alpha_3^0}. \quad (3.148)$$

Con las ecuaciones anteriores podemos obtener el eigenvector $|3\rangle^0$, el eigenvector es

$$|3\rangle^0 = \begin{pmatrix} \frac{\hat{m}_5}{4} \left(4 - \frac{\left(\frac{16}{9}\hat{m}_4^2 + 2 \right)}{\alpha_3^0} \right) e^{i\phi} \\ \frac{\hat{m}_5}{4\sqrt{3}} \left(4 - \frac{\left(\frac{16}{9}\hat{m}_4^2 + 2 \right)}{\alpha_3^0} \right) e^{i\phi} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.149)$$

normalizando el eigenvalor obtenemos

$$|3\rangle^0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{m_5}{4}\right)^2 \left(4 - \frac{\left(\frac{16}{3}\hat{m}_4^2 + 2\right)}{\alpha_3^0}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\hat{m}_5}{4} \left(4 - \frac{\left(\frac{16}{3}\hat{m}_4^2 + 2\right)}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ \frac{\hat{m}_5}{4\sqrt{3}} \left(4 - \frac{\left(\frac{16}{3}\hat{m}_4^2 + 2\right)}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.150)$$

De igual manera para el eigenvector $|2\rangle^0$ obtenemos

$$|2\rangle^0 = -\frac{\alpha_3^0}{4\hat{m}_5 \sqrt{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha_3^0}{4\hat{m}_5}\right)^2 \left(3 - \frac{\hat{m}_5}{\alpha_3^0}\right)^2}} \begin{pmatrix} \left(3 - \frac{\hat{m}_5}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(3 - \frac{\hat{m}_5}{\alpha_3^0}\right) e^{i\phi} \\ -\frac{4\hat{m}_5}{\alpha_3^0} \end{pmatrix}.$$

El eigenvector $|1\rangle^0$ lo podemos obtener por ortogonalidad, en cuyo caso resulta

$$|1\rangle^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi} \\ -\sqrt{3}e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.151)$$

Con los eigenvectores a orden cero podemos calcular los eigenvectores correspondientes de la misma forma que el caso anterior, y volver a expresar los elementos de la matriz de mezclas como

$$V_{ij}^{ckm} = u \langle i|j\rangle_d. \quad (3.152)$$

Ahora ya tenemos los elementos de la matriz de mezclas para comparar entre si los dos posibles casos de mínimo normal que obtuvimos en este trabajo.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió la extensión del Modelo Estándar extendido con simetría de familias, el grupo discreto y no abeliano S_3 . Este es un grupo que sus representaciones irreducibles tiene un singlete simétrico 1_s , un singlete antisimétrico 1_a y un doblete 2_d . Para darle el mismo tratamiento a todas las partículas fundamentales y asignarlas a las representaciones de singlete y doblete del grupo de familias se requirió introducir las partes derechas de los neutrinos ν_R .

El grupo S_3 es el grupo de permutaciones de tres objetos idénticos y los quarks y los leptones en ausencia de masa son indistinguibles, además la naturaleza se observan tres copias idénticas de cada una de las partículas fundamentales por lo que el grupo S_3 es el grupo de simetría mas apropiado o natural. Por otro lado, el problema de la jerarquía de masas no se ha entendido cabalmente, en cada familia de partículas fundamentales se observa una partícula pesada (singlete) y dos ligeras (doblete) el grupo de simetría S_3 distingue a las partículas por su masa ya que se transforman de manera diferente al asignarlas a las representaciones irreducibles del grupo.

La partícula de Higgs es la responsable de asignar masa en el Modelo Estándar y si consideramos que es una partícula fundamental es natural extender la simetría de permutaciones al sector de Higgs y por esa razón hemos introducido tres campos de Higgs fundamentales (que no tienen estructura interna) que son dobletes de $SU(2)$ pero que se transforman como singlete simétrico y doblete del grupo de familias S_3 . Utilizamos un lagrangiano que es una extensión completa del Modelo Estándar, y en este trabajo mostramos que el potencial de Higgs tiene tres tipos diferentes de mínimo: mínimo normal, mínimo que viola CP y mínimo que viola carga eléctrica.

Nosotros analizamos el potencial de Higgs más general invariante bajo una simetría finita y

no abeliana de sabor S_3 del ME extendido. En particular, nosotros estudiamos la naturaleza de los puntos críticos del potencial de Higgs: el mínimo normal, el que viola carga y el que rompe la simetría de CP. Nosotros encontramos que el mínimo normal X_{N1} es estable y es el más profundo. Finalmente encontramos la matriz de masas de Higgs para cada punto estacionario, en particular la simetría S_3 nos permitió diagonalizar analíticamente las matrices de masas para los Higgs en los puntos críticos X_{N1} y X_{N2} . Además encontramos que de los doce grados de libertad iniciales en los tres dobletes de Higgs en el mínimo X_{N1} nueve de estos nos dan campos físicos y tres les dan masa a los bosones de norma Z_0 y W_{\pm} en excelente acuerdo con el Modelo Estándar, y los nueve restantes son partículas de Higgs que se deben observar en las futuras corridas del acelerador lineal LHC en Cern Suiza[].

En este trabajo de tesis se obtuvo también la matriz de mezclas para los quarks en el Modelo Estándar extendido con simetría permutacional S_3 . Construimos la matriz de masas de los quarks *up* y *down*, en el modelo extendido, bajo la hipótesis de que la violación de CP viene de los acoplos de Yukawa complejos, como en la actualidad no hay una teoría de los acoplos de Yukawa tomamos solo un acoplo de Yukawa complejo Y_3 para cada sector de quarks. Es claro que la violación de CP adicional que venga del sector de Higgs queda como un trabajo pendiente en el futuro. Después del rompimiento electrodébil las partículas adquieren masa y en el caso de los quarks la matriz de masas se diagonaliza por un proceso perturbativo para esto, los parámetros m_1 y m_2 son considerados pequeños en ambos sectores, pudimos expresar la matriz del cuadrado de las masas de los quarks en un desarrollo perturbativo que nos permitió calcular los eigenvectores y los eigenvalores de las masas cuadradas a primer y segundo orden, obteniendo así la matriz de mezclas de los quarks.

Apéndice A

Convenciones y notación

A.1. Métrica

Tensor de métrica	$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Coordenada contravariante	$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x})$
Coordenada covariante	$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\mathbf{x})$
Producto escalar	$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \mathbf{B}$
Derivadas	$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$
Gradiente	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
Cuadri-Divergencia	$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{A}$

(A.2)

A.2. Matrices de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma_\mu = (\gamma^0, -\boldsymbol{\gamma}), \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{A.6})$$

Matriz de espín $s^i = \frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\sigma^{ijk}$

Conjugación de carga $\psi^c = C\psi^\dagger \quad C\gamma_\mu C^\dagger = -\gamma_\mu^*$

Identidad $\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda = g_{\alpha\beta}\gamma_\lambda + g_{\beta\lambda}\gamma_\alpha - g_{\alpha\lambda}\gamma_\beta + i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma^\mu\gamma_5$

(A.7)

A.2.1. Representaciones de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

begin tabular —|—|—

Hermitiano conjugado $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^k)^\dagger = \gamma^k \quad \sigma_{\mu\nu}^\dagger = \sigma^{\mu\nu} \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5$

Matriz de espín $\mathbf{s} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$

Carga conjugada $C = i\gamma_2$

Apéndice B

Teoría de Perturbaciones

La teoría de perturbaciones [9] es aplicada a aquellos casos donde el sistema real puede ser descrito por un pequeño cambio en un sistema ideal fácilmente soluble. El hamiltoniano del sistema es entonces de la forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (\text{B.1})$$

donde \hat{H} y \hat{H}_0 no difieren mucho uno de otro. \hat{H}_0 es llamado hamiltoniano del sistema no perturbado, la perturbación $\hat{V} = \lambda\hat{W}$, donde \hat{W} es un operador cuyos elementos matriciales son comparables con los de \hat{H}_0 , es la responsable de llevar el sistema no perturbado al sistema real llamado también sistema perturbado y tiene que ser pequeña, lo que se garantiza a través del parámetro $\lambda \ll 1$.

La teoría de perturbaciones consiste en desarrollar las autofunciones y los autovalores de \hat{H} en potencias de λ suponiendo conocidos los autovalores y las autofunciones de \hat{H}_0 .

La función de onda ψ del problema perturbado cumple con

$$\hat{H}\psi = (\hat{H}_0 + \lambda\hat{W})\psi \quad (\text{B.2})$$

y se propone en términos de las soluciones conocidas ψ_n^0 del problema no perturbado

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n^0 \quad (\text{B.3})$$

Luego, tendremos que determinar los coeficientes a_n , para ello recurrimos a las ultimas dos expresiones, y sustituyendo la función de onda propuesta obtenemos lo siguiente

$$\lambda \sum_n a_n W_{mn} = a_m (E - E_m^0) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.4})$$

Con $\lambda \neq 0$, desarrollamos en potencias de λ los coeficientes a_m y las energías E_k :

$$\begin{aligned} a_m &= \delta_{mk} + \lambda a_m^{(1)} + \lambda^2 a_m^{(2)} + \dots \\ E &= E_k = E_k^{(0)} + \lambda E_k^{(1)} + \lambda^2 E_k^{(2)} + \dots \end{aligned} \tag{B.5}$$

y como λ es muy pequeño es garantía que la serie converja, y con estas expresiones tenemos las relaciones acomodando los respectivos ordenes de perturbación.

Apéndice C

Publicaciones en Congresos y Presentaciones

Póster "Quark mixing matrix of the $S(3)$ extended Standard Model" Presentado en "XIV Mexican School of particles and fields" 4-12 de noviembre de 2010 en Morelia, Michoacan.

Póster "Fenomenología de los Bosones de Higgs en el Modelo Estándar extendido $S(3)$ " Presentado en "XLV Congreso Nacional de Física" 8-12 de octubre de 2012 en Morelia, Michoacan.

Platica "Física de Altas Energías" Presentado en el Departamento de Ingeniería Ambiental Industrial en la Universidad Estatal de Sonora 30 de abril del 2013 en Hermosillo, Sonora.

Póster ".^{El} Modelo Estándar de la Física de partículas y mas allá" Presentado en el I Congreso Estatal de Ciencias Exactas y Naturales y Encuentro de Enseñanza de las Ciencias" 31 de mayo del 2013 en Hermosillo, Sonora.

Bibliografía

- [1] F. Halzen y Alan D. Martin, QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics, JOHN WILEY & SONS, New York, 1984.
- [2] M. Herrero, "The Standar Model", Lectures presented at the NATO ASI 98 School, Techniques and Concepts of High Energy Physics; St. Croix, Virgin Islands, USA, June 18-29 1998, hep-ph/9812242v1
- [3] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, Gauge theory of elementary particle physics, Clarendon Press, Oxford, 1984, 2000.
- [4] J.J. Rotman, An Introduction to Theory of Groups.
- [5] I.J.R. Aitchinson y A.J.G. Hey, Gauge Theories In Particle Physics, IOP Publishing Ltd, Bristol abd Philadelphia, 1989.
- [6] M. Gomez-Bock, M. Mondragón, M. Mühlleitner, R. Noriega-Papaqui, I. Pedraza, M. Spira, P. M. [1] Zerwas, J.Phys.Conf.Ser. 18 (2005) 74-135, hep-ph/0509077v1
- [7] J. Kubo, A. Mondragón, M. Mondragón y E. Rodriguez-Jáuregui, Prog. Theor. Phys. **109**, 795 (2003) [Erratum-ibid. **114**, 287 (2005)] hep-ph/0302196v4
- [8] W. Greiner, B. Müller, Quantum Mechanics (Symetries), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1989, 1994.
- [9] W. Greiner, Quantum Mechanics An Introduction, Springer, Berlin Heidelberg, 1989.
- [10] Particle Data Group, C. Amsler, et al., Physics Letters B 667, 1(2008)
- [11] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).
- [12] Super Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1158; Erratum 81 (1998) 4279.

- [13] E. Derman, *Phys. Rev. D* **19**, 317 (1979).
- [14] E. Derman and H. S. Tsao, *Phys. Rev. D* **20**, 1207 (1979).
- [15] S. Pakvasa and H. Sugawara, *Phys. Lett.* **B73**, 61 (1978); *Phys. Lett.* **B82**, 105 (1979).
- [16] J. Kubo, H. Okada and F. Sakamaki, *Phys. Rev.* **D70**, 036007 (2004).
- [17] J. Kubo, A. Mondragón, M. Mondragón, E. Rodríguez-Jáuregui, O. Félix-Beltrán and E. Peinado, *J. Phys.: Conf. Ser.* **18**, 380-384 (2005).
- [18] Y. Koide, *Phys. Rev. D* **73**, 057901 (2006).
- [19] T. Kobayashi, J. Kubo and H. Terao, *Phys. Lett. B* **568**, 83 (2003) [arXiv:hep-ph/0303084].
- [20] J. Kubo, *Phys. Lett. B* **578**, 156 (2004) [Erratum-ibid. **B 619**, 387 (2005)] [arXiv:hep-ph/0309167].
- [21] J. Kubo, A. Mondragon, M. Mondragon and E. Rodriguez-Jauregui, *Prog. Theor. Phys.* **109**, 795 (2003) [Erratum-ibid. **114**, 287 (2005)] [arXiv:hep-ph/0302196].
- [22] A. Tofighi and M. Moazzen, <http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?irn=8429588>.
- [23] A. Barroso, P. M. Ferreira, R. Santos and J. P. Silva, *Phys. Rev. D* **74**, 085016 (2006) [arXiv:hep-ph/0608282]; P. M. Ferreira, R. Santos and A. Barroso, *Phys. Lett.* **B603**, 219 (2004) [Erratum-ibid. **B 629**, 114 (2005)]; [arXiv:hep-ph/0406231].
- [24] A. Barroso, P. M. Ferreira and R. Santos, *Afr. J. Math. Phys.* **3**, 103 (2006) [arXiv:hep-ph/0507329]. A. Barroso, P. M. Ferreira and R. Santos, To appear in the proceedings of International Conference on High Energy and Mathematical Physics, Marrakech, Morocco, 4-7 Apr 2005, arXiv:hep-ph/0507329.
- [25] A. Barroso, P. M. Ferreira and R. Santos, *PoS HEP2005*, 337 (2006) [arXiv:hep-ph/0512037]. Talk given at EPS International Europhysics Conference on High Energy Physics (HEP-EPS 2005), Lisbon, Portugal, 21-27 Jul 2005, *PoS HEP2005*, 337 (2006).
- [26] M. Tanimoto, *Phys. Lett. B* **483**, 417 (2000) [arXiv:hep-ph/0001306].
- [27] P. F. Harrison and W. G. Scott, *Phys. Lett. B* **557**, 76 (2003) [arXiv:hep-ph/0302025].
- [28] O. Felix, A. Mondragon, M. Mondragon and E. Peinado, *AIP Conf. Proc.* **917**, 383 (2007) [Rev. Mex. Fis. **S52N4**, 67 (2006)] [arXiv:hep-ph/0610061].

-
- [29] R. N. Mohapatra, S. Nasri and H. B. Yu, Phys. Lett. B **639**, 318 (2006) [arXiv:hep-ph/0605020].
- [30] Y. Koide, Eur. Phys. J. C **50**, 809 (2007) [arXiv:hep-ph/0612058].
- [31] A. Mondragon, M. Mondragon and E. Peinado, arXiv:0712.2488 [hep-ph].
- [32] A. Mondragon, M. Mondragon and E. Peinado, Phys. Rev. D **76**, 076003 (2007) [arXiv:0706.0354 [hep-ph]].
- [33] A. Mondragon, M. Mondragon and E. Peinado, arXiv:0712.1799 [hep-ph].
- [34] S. Morisi, arXiv:hep-ph/0604106.
- [35] S. Morisi, arXiv:hep-ph/0605167.
- [36] M. Yoshimura, AIP Conf. Proc. **1037**, 16 (2008).