

UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA

ONDAS ELÁSTICAS EN SUPERREDES DE CONSTITUYENTES

SÓLIDO-FLUIDO

The seal of the University of Sonora is a circular emblem. It features a central shield with a lamp of knowledge, an open book, and a torch. Above the shield are two owls. The shield is flanked by olive branches. The text "UNIVERSIDAD DE SONORA" is written around the perimeter of the seal, and "1942" is at the bottom. The word "TESIS" is superimposed on the seal.

TESIS

Que para obtener el título de
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

Presenta

LUIS EDUARDO GÁLVEZ GONZÁLEZ

Bajo la dirección de

MARÍA BETSABÉ MANZANARES MARTÍNEZ

Hermosillo, Sonora

Febrero 2017

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos

Primeramente quiero extender mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico proporcionado durante mis estudio de maestría. También agradezco a la Universidad de Sonora y a la Dra. María Elena Zayas Saucedo por proporcionar un espacio donde fuera posible desarrollar los experimentos. A la vez, quiero agradecer a mis profesores del posgrado por permitirme enriquecer mis conocimientos y continuar mi desarrollo profesional.

Agradezco a los miembros del jurado de tesis, al Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez, al Dr. Raúl García Llamas y al Dr. Julio César Saucedo Morales, por sus valiosas observaciones y sugerencias que me permitieron afinar el trabajo para obtener un producto satisfactorio.

Quiero agradecer sinceramente a la Dra. María Betsabé Manzanares Martínez por su guía constante y los invaluable consejos brindados durante la realización de esta tesis.

Finalmente, le estaré siempre agradecido a mi familia por apoyarme a lo largo de mi vida para poder cumplir mis metas.

Índice general

Introducción	1
1. Antecedentes	3
2. Metodología teórica	6
2.1. Teoría de la elasticidad lineal	6
2.1.1. Tensor de deformaciones	7
2.1.2. Tensor de esfuerzos	9
2.1.3. Ley de Hooke	10
2.2. Ondas elásticas	12
2.2.1. Condiciones de frontera	16
2.2.2. Ley de Snell para ondas elásticas	17
2.3. Transmisión y reflexión en una interfase sólido-fluido.	19
2.3.1. Incidencia desde el fluido.	20
2.3.2. Incidencia con ondas longitudinales desde el sólido.	27
2.3.3. Incidencia con ondas de corte desde el sólido.	30
2.3.4. Condiciones de transmisión total.	32
2.4. Transmisión en una capa	35
2.4.1. Propagación de ondas en una placas sólida inmersa en fluidos ideales.	36
2.4.2. Propagación de ondas longitudinales en un capa de fluido ideal entre dos sólidos.	43
2.4.3. Propagación de ondas de corte en un capa de fluido ideal entre dos sólidos.	48
2.5. Superredes sólido-fluido.	51
2.5.1. Estructura de bandas.	51

ÍNDICE GENERAL

2.5.2. Propagación de ondas en multicapas finitas.	55
2.5.3. Caso límite: capas de fluido infinitesimales.	61
3. Arreglo experimental	69
3.1. Medición de la densidad	69
3.2. Medición de la velocidad del sonido	72
3.3. Elaboración de las multicapas	75
3.4. Mediciones de transmisión	76
4. Resultados y discusión	78
4.1. Efecto térmico en la estructura de bandas	78
4.2. Variación del ángulo de incidencia	81
5. Conclusiones	87
A. Modos guiados de ondas elásticas en capas	89
Bibliografía	97

Índice de figuras

2.1. Cambio de la separación de dos puntos vecinos en un medio continuo	7
2.2. Corte transversal de un sólido deformado	9
2.3. Tensor de esfuerzos para un elemento de volumen cúbico	10
2.4. Incidencia de fluido a sólido	20
2.5. Coeficientes de reflexión y transmisión en una interfase fluido-sólido, incidiendo desde el fluido	26
2.6. Onda longitudinal incidiendo desde un sólido hacia un fluido.	27
2.7. Coeficientes de reflexión y transmisión en una interfase fluido-sólido, incidiendo con ondas longitudinales desde el sólido	29
2.8. Onda de corte incidiendo sobre la interfase entre un sólido y un fluido.	31
2.9. Coeficientes de reflexión y transmisión en una interfase fluido-sólido, incidiendo con ondas de corte desde el sólido	32
2.10. Placa sólida infinita de grosor d_s rodeada de dos fluidos ideales	36
2.11. Coeficiente de transmisión para una placa sólida de grosor d_s rodeada de fluido	42
2.12. Comparación de la transmisión de ondas elásticas en placas rodeadas de fluido con los modos de las placas.	43
2.13. Capa de fluido de grosor d_f entre dos sólidos elásticos	44
2.14. Coeficiente de transmisión longitudinal para ondas propagándose en una capa de fluido de grosor d_f	47
2.15. Coeficiente de transmisión para ondas de corte propagándose a través de una capa de fluido de grosor d_f	50
2.16. Cristal fonónico de periodicidad unidimensional.	51
2.17. Curvas de dispersión para superredes sólido-fluido con factor de llenado $f_s=0.5$, para incidencia normal	54

ÍNDICE DE FIGURAS

2.18. Estructura de bandas proyectadas para superredes sólido-fluido con factor de llenado $f_s=0.5$	55
2.19. Coeficiente de transmisión para ondas propagándose en una multicapa rodeada de un fluido	57
2.20. Coeficientes de transmisión longitudinal para ondas longitudinales propagándose en una multicapa rodeada de un sólido	60
2.21. Coeficientes de transmisión transversal para ondas longitudinales propagándose en una multicapa rodeada de un sólido	61
2.22. Estructura de bandas proyectadas para placas de PMMA separadas por capas de fluido infinitesimales	62
2.23. Estructura de bandas proyectadas para una superred PMMA-Glicerina, para diferentes factores de llenado	63
2.24. Estructura de bandas proyectadas para superredes de berilio y HDPE separadas por capas de fluidos infinitesimales	64
2.25. Coeficientes de transmisión para ondas elásticas incidiendo sobre una capa de fluido infinitesimal	67
2.26. Estructura de bandas proyectadas para una superred de placas sólidas separadas por capas de fluido infinitesimales y curvas de dispersión para una de estas placas	68
3.1. Medición de la densidad de los materiales sólidos	70
3.2. Botella de Babcock	71
3.3. Densidad de la cera-gel en función de la temperatura	71
3.4. Medición del tiempo de vuelo de un pulso ultrasónico.	72
3.5. Arreglo usado en las mediciones con la técnica <i>through – transmission</i>	73
3.6. Recipiente empleado para medir la velocidad del sonido en líquidos.	74
3.7. Velocidad del sonido en la cera-gel en función de la temperatura	74
3.8. Multicapa de vidrio y cera-gel	75
3.9. Multicapa de PMMA y capas de líquido muy delgadas	76
3.10. Pulso incidente	77
3.11. Medición de transmisión en las multicapas de PMMA	77
4.1. Espectro de frecuencias experimental de la transmisión en un multicapa de vidrio y cera-gel	79
4.2. Comparación teoría-experimento para la multicapa de vidrio y cera-gel	80

ÍNDICE DE FIGURAS

4.3. Estructura de bandas proyectadas para el cristal fonónico de vidrio y cera-gel	82
4.4. Comparación de las curvas de dispersión con el espectro de transmisión para la multicapa de vidrio y cera-gel	83
4.5. Comparación teoría-experimento para multicapas de PMMA y capas de fluido ideal, para θ_f entre 0° y 30°	84
4.6. Comparación teoría-experimento para multicapas de PMMA y capas de fluido ideal, para θ_f entre 40° y 70°	86
A.1. Capa de fluido de grosor d_f rodeada de vacío.	90
A.2. Curvas de dispersión para una capa de fluido	92
A.3. Placa sólida de grosor d_s rodeada de vacío.	93
A.4. Curvas de dispersión para una placa de aluminio rodeada de un medio rígido	95
A.5. Curvas de dispersión para los modos Lamb de una placa de aluminio	96

Índice de cuadros

3.1. Parámetros elásticos de los materiales usados en los experimentos . . .	75
--	----

Introducción

Esta tesis versa sobre la propagación de ondas elásticas en superredes compuestas por placas sólidas alternadas periódicamente con capas de fluido ideal. Estos sistemas pueden considerarse cristales fonónicos, materiales formado por dos o más medios con propiedades mecánicas distintas, como su densidad o velocidad del sonido, estructurados periódicamente. La periodicidad de estos sistemas da origen a una estructura de bandas en la que existen *gaps* o brechas donde no se propaga las ondas elásticas, las vibraciones o los fonones dentro de los cristales fonónicos[1, 2]. Reciben su nombre por la analogía con los cristales naturales, que presentan una estructura de bandas para la energía de los electrones, o los cristales fotónicos, con estructuras de bandas para la luz[1, 2, 3, 4]. El objetivo principal de este trabajo es estudiar la sintonización de la estructura de bandas para cristales fonónicos, es decir, el control de la posición y el ancho de las bandas mediante la variación de algún parámetro del sistema. Esto permite controlar activamente la propagación de las ondas dentro de los cristales fonónicos. Se enfocó el estudio en dos métodos propuestos para lograr este fin: la variación de la temperatura del cristal fonónico y en el cambio del ángulo de propagación de las ondas elásticas. Se abordaron estos temas tanto de forma teórica como experimental, permitiendo comprobar la validez de los métodos teóricos desarrollados.

La estructura del trabajo se divide en seis capítulos. En el Capítulo 1 se hace un resumen de la literatura científica que, a consideración del autor, es la más relevante para el tema de tesis. Se presentan desde los primeros artículos sobre cristales fonónicos hasta los trabajos más recientes sobre la sintonización de las bandas. Esto permite conocer los avances que se han logrado, por un lado, en el estudio de cristales fonónicos de periodicidad unidimensional compuestos por sólidos y fluidos; y por otra lado, en los trabajos sobre la sintonización térmica de las bandas.

El en Capítulo 2 se desarrolla la metodología teórica empleada en el trabajo. Se parte del estudio de la teoría clásica de la elasticidad lineal con el fin de obtener la ecuación

de onda elástica. Posteriormente, aplicando el método de la matriz de transferencia, se estudia la propagación de ondas elásticas en la interfase entre un sólido y un fluido, luego en una capa y finalmente se extiende este método para multicapas finitas y superredes de constituyentes sólido-fluido.

El Capítulo 3 describe el arreglo experimental empleado para realizar mediciones de transmisión de ondas a través de multicapas sólido-fluido. Se explican los métodos usados para medir la densidad y la velocidad del sonido de los materiales utilizados en los experimentos. También se describe cómo se construyeron las multicapas estudiadas.

Los resultados encontrados en los experimentos y su comparación con los cálculos teóricos se abordan en el Capítulo 4. Éste se divide en una sección dedicada al estudio del efecto térmico en la estructura de bandas de superredes sólido-fluido y otra al cambio de la estructura de bandas con la variación del ángulo de incidencia de las ondas elásticas. En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones generales del estudio desarrollado sobre los cristales fonónicos, así como las conclusiones particulares derivadas de la comparación de los resultados experimentales y la teoría.

Capítulo 1

Antecedentes

El estudio de la propagación de ondas elásticas en medios estructurados periódicamente comenzó con los trabajos de Thomson[5] y Rytov[6]. Thomson investigó teóricamente la transmisión de ondas elásticas en medios compuestos por placas sólidas paralelas de diferentes materiales y grosores. Rytov estudió sistemas formados por capas de sólidos elásticos alternadas con capas de fluidos ideales. Basándose en los trabajos de Rytov, Schoenberg *et al* [7] extendieron el estudio a materiales compuestos por placas sólidas y capas de fluidos ideales alternadas periódicamente, para ondas propagándose en cualquier dirección y de cualquier frecuencia. Además, realizaron experimentos con placas de PMMA (Polimetilmetacrilato, conocido comúnmente como acrílico o por su nombre comercial Plexiglas) inmersas en agua, observando dos tipos de ondas elásticas que se propagan en estos medios, una lenta y una rápida, en el límite de frecuencias bajas y la existencia de ángulos donde no se transmiten ondas, ambos fenómenos predichos por la teoría desarrollada en el mismo trabajo y por los trabajos de Biot[8] para la propagación de ondas en medios porosos saturados de fluido.

En los trabajos mencionados anteriormente los estudios se enfocaron en el cálculo de los espectros de transmisión y de reflexión de ondas. En las décadas de los ochentas y noventas, motivados por la investigación de cristales fotónicos, se calcularon por primera vez las curvas de dispersión para ondas elásticas en medios estructurados periódicamente, a los cuales se les llamó cristales fonónicos, por su analogía con los cristales naturales o los cristales fotónicos[1]. Estos medios presentan una estructura de bandas con brechas de frecuencias (o *gaps*) donde no pueden existir vibraciones, sonido o fonones. En los primeros trabajos de este tipo se estudió la propagación de ondas de corte en cristales fonónicos de periodicidad unidimensional (o súperredes)[9, 10] y de perio-

dicidad bidimensional, formados por cilindros sólidos dispuestos en una red cuadrada e inmersos en una matriz sólida de otro material[1, 2].

Entre los trabajos más notables sobre superredes sólido-fluido están los de El Hassouani *et al*[3, 4], quienes usaron el formalismo de la función de Green para calcular las curvas de dispersión, la densidad de estados, los coeficientes de reflexión y transmisión, entre otras propiedades de sistemas periódicos formados por placas sólidas alternadas con capas de fluidos ideales. Mostraron que para este tipo de superredes, las brechas en la estructura de bandas surgen tanto de la periodicidad del sistema, como de los ceros de transmisión producidos por tener placas sólidas inmersas en un fluido. Además, demostraron que las frecuencias de los ceros de transmisión son independientes de las propiedades del fluido. La existencia de este tipo de brechas también fue observada por Shuvalov y Gorkunova[11] en medios anisotrópicos con cortes planos periódicos. Además de explicar estos fenómenos, El Hassouani *et al* investigaron los efectos causados al introducir defectos en superredes sólido-fluido[3]. Otro trabajo relevante en este sentido es el de Liu *et al*[12], en el cual se investigaron características de las superredes sólido-fluido aplicando el método de la matriz de transferencia.

Respecto al tema de la sintonización de las bandas en cristales fonónicos, de los primeros trabajos al respecto está el de Goffaux y Vigneron, quienes propusieron modificar directamente la estructura del cristal formado por columnas de sección cuadrada dispuestas en una red cuadrada e inmersas en aire[13]. En su artículo mostraron que la estructura de bandas de dicho cristal fonónico era sensible a la rotación de las columnas sobre sus ejes. Schneider *et al* investigaron otra forma de sintonizar las bandas mediante rotaciones, en este caso de una superred formada por capas de PMMA alternadas con capas de SiO₂; al rotar el sistema se cambia el ángulo de incidencia lo cual modifica la posición y el ancho de las brechas[14]. Otro método para controlar mecánicamente la estructura de bandas fue propuesto por Wang y Bertoldi, quienes estudiaron teóricamente un cristal fonónico de periodicidad tridimensional compuesto de un material elastomérico que al ser deformado permitía controlar las bandas fonónicas de forma reversible[15].

Se han propuesto otros métodos para modificar las bandas de cristales fonónicos sin la necesidad de manipular mecánicamente a los sistemas, basados en el control de factores ambientales como el campo eléctrico, el campo magnético o la temperatura. El control de las bandas mediante campos eléctricos se logra aprovechando las propiedades de materiales piezoeléctricos[16], mientras que para poder manipularlas mediante campos magnéticos se requiere que una de las componentes de los cristales fonónicos

tenga propiedades magnetoelásticas[17, 18] o magnetoreológicas[19].

Los cambios de temperatura afectan las propiedades elásticas de todos los materiales, sin embargo, para lograr un efecto notable en la estructura de bandas de un cristal fonónico, es necesario que al menos una de las componentes del mismo sea sensible a los cambios térmicos en el rango de temperatura de interés. El material que más ha sido estudiado para lograr dicho fin es la cerámica ferroeléctrica $\text{Ba}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{TiO}_3$ (BST), cuyas propiedades elásticas son muy sensibles a la temperatura [20, 21, 22, 23]. Cheng *et al* investigaron teóricamente los efectos de la temperatura en las bandas de una placa de cristal fonónico unidimensional, formada por tiras de BST alternadas con tiras de resina epoxi, mostrando que las brechas se ensanchaban al aumentar la temperatura de 26° a 50°C [20]. Yao *et al* estudiaron un sistema similar, una placa de cristal fonónico bidimensional compuesta de BST/epoxi y BST/aire, para diferentes tipos de redes[21]. También fue estudiada en el trabajo de Bian *et al*, en este caso para un cristal fonónico de simetría unidimensional formado por placas de BST alternadas con placas de PBT (tereftalato de polibutileno), encontrando también que las bandas son muy sensibles a los cambios de temperatura, en el rango de 30° a 50°C [22]. Jim *et al* estudiaron un cristal fonónico de periodicidad bidimensional compuesto de BST y resina epoxi, para el cual se mostró que los cambios térmicos producen efectos notables en la estructura de bandas del cristal, para frecuencias en el rango de megahertz[23]. Es importante notar que este último trabajo ha sido de los pocos en incluir componente experimental. Manzanares *et al* analizaron teóricamente el efecto de los cambios de temperatura en una multicapa periódica compuesta de vidrio y resina epoxi, para temperaturas entre 0° y 100°C . En este trabajo mostraron que la resina epoxi sufre cambios notables en su velocidad del sonido, lo cual modifica la estructura de bandas del sistema al variar la temperatura[24].

Capítulo 2

Metodología teórica

En este capítulo se presente la teoría empleada en el desarrollo de este trabajo de tesis. Este capítulo está dividido en cinco secciones. En la primera sección se presentan los conceptos básicos de la teoría de la elasticidad lineal. En la segunda sección se obtienen la ecuación de onda elástica, así como las condiciones de frontera. La tercera sección está dedicada al estudio de la propagación de ondas elásticas a través de fronteras que separan a un sólido elástico y un fluido ideal, mediante el método de matriz de transferencia. En la cuarta sección se estudia la propagación de ondas elásticas en capas, ya sean de un sólido rodeado de fluidos o de un fluido rodeado de sólidos. Finalmente, en la quinta sección se extiende la teoría desarrollada a la propagación de ondas elásticas en superredes sólido-fluido y a multicapas periódicas compuestas por un número finito de celdas unitarias.

2.1. Teoría de la elasticidad lineal

La teoría de la elasticidad lineal explica el comportamiento de los sólidos al ser deformados. Se trabaja dentro del formalismo de la mecánica de medios continuos, donde cualquier elemento de volumen del material siempre contiene un número muy grande de átomos o moléculas[25]. Además, se considera que las deformaciones a las que se someten los cuerpos son suficientemente pequeñas de modo que existe una relación lineal entre los esfuerzo a los que se someten los cuerpos y las deformaciones resultantes[26, 27, 28].

2.1.1. Tensor de deformaciones

Consideremos un cuerpo sólido elástico con una configuración inicial descrita por los vectores de posición \mathbf{x} de cada uno de sus puntos, respecto a un sistema de coordenadas fijo. Al aplicar una fuerza externa sobre este cuerpo, sufre un cambio en su configuración y los puntos en el material se desplazan. A este cambio en la configuración se le llama deformación. Denotamos a la nueva posición de los puntos con \mathbf{x}' . El cambio de las posiciones desde la configuración inicial hasta la nueva configuración se denota mediante el vector de desplazamiento, definido como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{x}. \quad (2.1)$$

La deformación del material y el consecuente desplazamiento de sus puntos provoca un cambio en la separación entre ellos. Determinando cómo es este cambio podemos conocer cómo es la deformación. Consideremos dos puntos A y B muy cercanos entre sí, de modo que están unidos por un vector $d\mathbf{x}$ antes de la deformación y por un vector $d\mathbf{x}'$ después de ella, como se muestra en la Figura 2.1, donde

$$d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} + d\mathbf{u}. \quad (2.2)$$

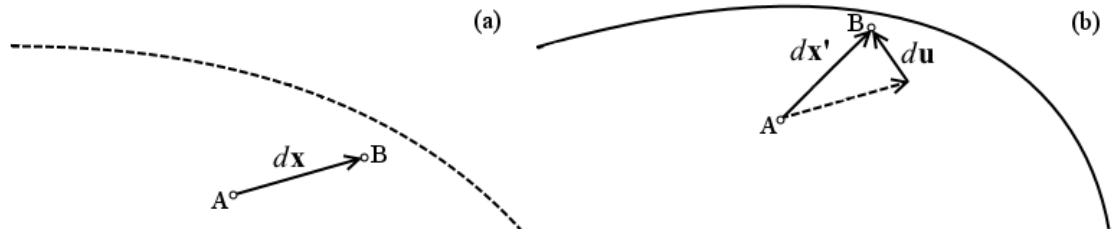


Figura 2.1: Cambio de la separación de dos puntos vecinos A y B en un medio continuo. En (a) se muestra la configuración inicial y en (b) la configuración deformada.

La separación entre los puntos en la configuración inicial viene dada por el elemento de longitud dl y en la nueva configuración por dl' , con

$$dl^2 = dx_i^2, \quad (2.3)$$

donde se ha tomado la convención de suma sobre índices repetidos.

De (2.2) sabemos que

$$dx'_i = dx_i + du_i, \quad (2.4)$$

2.1. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD LINEAL

de modo que podemos expresar dl'^2 como

$$dl'^2 = (dx_i + du_i)^2. \quad (2.5)$$

Para pequeñas deformaciones, podemos aproximar du_i de la forma

$$du_i \approx \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j, \quad (2.6)$$

así, la separación entre puntos vecinos en la nueva configuración viene dada por

$$dl'^2 \approx \left[dx_i + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \right]^2. \quad (2.7)$$

Desarrollando esta ecuación, obtenemos

$$dl'^2 - dl^2 \approx 2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k. \quad (2.8)$$

Como los índices i y j son mudos, podemos expresar el primer término del lado derecho como

$$2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_i dx_j. \quad (2.9)$$

Además, como estamos considerando deformaciones pequeñas, el segundo término del lado derecho de (2.8) puede ser despreciado, de tal modo llegamos a

$$dl'^2 - dl^2 \approx 2u_{ij} dx_i dx_j, \quad (2.10)$$

donde se ha definido

$$u_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.11)$$

Este se conoce como tensor de deformaciones y contiene información sobre cómo cambian los elementos de longitud con las deformaciones[26]. Una propiedad importante de este tensor es que es simétrico, esto es

$$u_{ij} = u_{ji}. \quad (2.12)$$

En general, las componentes fuera de la diagonal del tensor de deformación corresponden

a deformaciones de corte y las de la diagonal a compresiones en cada dirección del sistema coordenado[26].

2.1.2. Tensor de esfuerzos

Cuando un sólido elástico se somete a una deformación, dentro de él se generan fuerzas que tratan de regresarlo a su estado de equilibrio original. Estas fuerzas son llamadas esfuerzos internos. En la teoría clásica de la elasticidad se considera que las fuerzas que causan los esfuerzos internos sólo actúan de un punto del material a los puntos vecinos. Esto implica que las fuerzas ejercidas por una parte del material a su alrededor sólo actúan en la superficie de ésta[26].

Para el estudio de la distribución de fuerzas internas hacemos un corte a un cuerpo sujeto a una deformación, como se muestra en la Figura 2.2. Donde \hat{n} es el vector unitario normal al área ΔS sobre la sección del sólido y ΔF es la fuerza que actúa sobre dicha superficie.

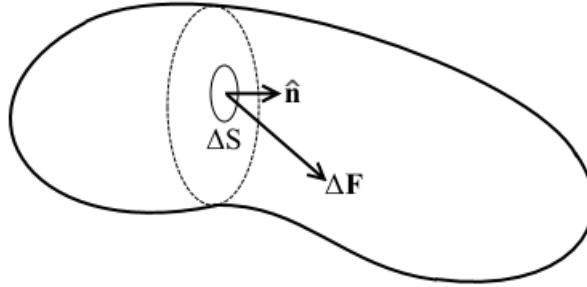


Figura 2.2: Corte transversal de un sólido deformado.

El vector de esfuerzos, o vector de tracción, se define como[2]

$$\mathbf{T}^{\hat{n}}(\mathbf{x}, \hat{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}. \quad (2.13)$$

Éste es un campo vectorial que es función tanto de la posición del punto en el cuerpo, como de la orientación de la superficie sobre la cual actúa la fuerza. El superíndice denota la superficie correspondiente, en términos del vector normal a ella.

Consideremos una sección de volumen cúbica en un cuerpo sometido a una deformación, con las caras del cubo paralelas a los planos coordenados de un sistema cartesiano, como se muestra en la Figura 2.3. Para cada cara, el vector unitario normal \hat{e}_i a ella está en la dirección del eje coordenado x_i . Para estas superficies, el vector de tracción

2.1. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD LINEAL

puede expresarse como

$$\mathbf{T}^{\hat{e}_i}(\mathbf{x}, \hat{e}_i) = \sigma_{ij} \hat{e}_j. \quad (2.14)$$

El término σ_{ij} es conocido como el tensor de esfuerzos. Los términos de la diagonal corresponden a esfuerzos normales, en la dirección correspondiente. Los que están fuera de la diagonal, a los esfuerzos de corte. La Figura 2.3 ilustra el significado físico de las componentes del tensor de esfuerzos.

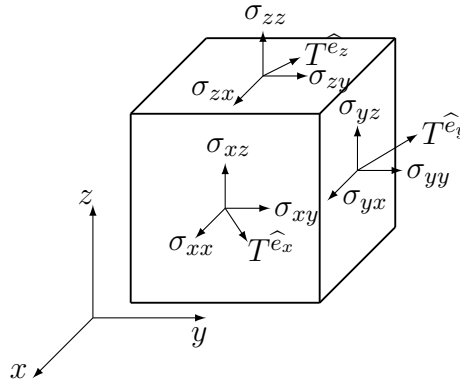


Figura 2.3: Tensor de esfuerzos para un elemento de volumen cúbico.

Una propiedad importante del tensor de esfuerzos es que cumple

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (2.15)$$

es decir, que es un tensor simétrico[26, 27].

2.1.3. Ley de Hooke

Para deformaciones pequeñas, los esfuerzos aplicados y las deformaciones resultantes están relacionadas en forma lineal. Esto implica que cada componente del tensor de esfuerzos es directamente proporcional a las componentes del tensor de deformación. Esta relación se expresa como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{kl}, \quad (2.16)$$

donde C_{ijkl} es llamado tensor de elasticidad y contiene los módulos elásticos del material. Este es un tensor de rango cuatro que, en general, tiene ochenta y una componentes independientes. Gracias a las propiedades de simetría de los tensores de esfuerzo y de deformación, dichas componentes se reducen a sólo treinta y seis independientes[27, 29].

2.1. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD LINEAL

En el caso de materiales homogéneos, que son aquéllos donde las propiedades mecánicas no varían de un punto a otro, todos los módulos elásticos son constantes. Si además las propiedades elásticas del medio no dependen de su orientación, es decir que es isotrópico, entonces el tensor de elasticidad del medio debe ser invariante bajo cualquier rotación. Esto se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación para el tensor de elasticidad[27]

$$C_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}C_{mnpq}, \quad (2.17)$$

donde R_{ij} es una matriz de rotación. La forma más general para un tensor isotrópico de rango cuatro es [27, 30](ver Apéndice A)

$$C_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (2.18)$$

donde los coeficientes α , β y γ son constantes.

Sustituyendo (2.18) en (2.16) obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk})u_{kl} \\ &= \alpha u_{ll}\delta_{ij} + \beta u_{ij} + \gamma u_{ji}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aplicando la propiedad de simetría del tensor de deformaciones, definiendo $\lambda \equiv \alpha$ y $2\mu \equiv \beta + \gamma$, queda

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{ll}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}. \quad (2.20)$$

Estas constantes, λ y μ , son llamadas coeficientes de Lamé[26, 27, 30]. Es conveniente expresar esta ecuación como la suma de una compresión hidrostática y una deformación de corte puro. Para esto, descomponemos el tensor de deformaciones usando la identidad

$$u_{ij} = \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ij} + \left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ij}\right), \quad (2.21)$$

aquí, el primer término corresponde a una compresión hidrostática y el segundo a una deformación de corte. Esto se deduce observando que el primero término no contiene elementos fuera de la diagonal y en el segundo, la suma de dichas componentes es cero.

Usando la identidad (2.21) es posible reescribir (2.20) como

$$\sigma_{ij} = K u_{ll}\delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ij}\right), \quad (2.22)$$

2.2. ONDAS ELÁSTICAS

donde

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (2.23)$$

es el módulo de compresión del material, que mide la resistencia del medio a compresiones hidrostáticas. La constante μ es llamada módulo de corte o de rigidez y mide la resistencia a las deformaciones de corte.

La ecuación (2.20) y su forma alternativa (2.22) son conocidas como la ley de Hooke generalizada para sólidos elásticos isotrópicos[5]. Como se observa, para este tipo de materiales sólo son necesarios dos módulos elásticos independientes para describir el comportamiento mecánico del medio.

En un fluido ideal, al ejercer un esfuerzo de corte sobre él, se deforma continuamente sin resistirse. Esto implica que su módulo de corte μ es igual a cero. Entonces, el tensor de esfuerzos para un fluido ideal viene dado por la ecuación (2.24)

$$\sigma_{ij} = K u_{ll} \delta_{ij}, \quad (2.24)$$

Aunque la teoría de la elasticidad lineal es desarrollada para sólidos, es posible aplicarla a fluidos siempre que se consideren deformaciones pequeñas[26, 30].

2.2. Ondas elásticas

Al aplicar un esfuerzo momentáneamente sobre un medio elástico, este trata de regresar a su configuración inicial y esto da origen a ondas mecánicas conocidas como ondas elásticas. En un medio elástico homogéneo e isotrópico se pueden propagar dos tipos de ondas elásticas, longitudinales y de corte. Se usará el subíndice p para denotar a las ondas longitudinales (ondas compresionales o de presión) y el subíndice s para las ondas de corte (*shear waves*).

Las ecuaciones de movimiento para ondas elásticas se obtienen aplicando la segunda ley de Newton a un medio continuo. Esta ley expresa que el cambio del momento (por unidad de volumen) en el tiempo es igual a la fuerza total por unidad de volumen aplicada sobre un cuerpo, esto es

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = F_i. \quad (2.25)$$

En el caso de un medio continuo, el momento por unidad de volumen es el producto de

2.2. ONDAS ELÁSTICAS

la densidad por la velocidad en cada punto[25, 26, 28]

$$p_i = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (2.26)$$

donde ρ la densidad del medio y u_i es el vector de desplazamiento.

Por otro lado, en ausencia de fuerzas externas, la fuerza por unidad de volumen a la que está sometido un medio continuo puede expresarse en términos del tensor de esfuerzos mediante la ecuación[26]

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.27)$$

con σ_{ij} el tensor de esfuerzos. Entonces, sustituyendo (2.27) y (2.26) en la ecuación (2.25), queda

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.28)$$

En la ecuación (2.28) se ha considerado que el valor local de la densidad es constante en el tiempo si las deformaciones son pequeñas.

Haciendo uso de la ecuación (2.22) para la ley de Hooke en medios isotrópicos, tenemos

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = K \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_j} \delta_{ij} \right). \quad (2.29)$$

Usando la ecuación (2.11) en (2.29) se llega a

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \left(K + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \quad (2.30)$$

Así, la ecuación de movimiento para un medio elástico homogéneo e isotrópico es

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \left(K + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \quad (2.31)$$

Esta ecuación es comúnmente expresada en notación vectorial de la forma

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \left(K + \frac{1}{3}\mu \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (2.32)$$

2.2. ONDAS ELÁSTICAS

Haciendo uso de la la identidad vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (2.33)$$

la ecuación (2.32) queda

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho v_p^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho v_s^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.34)$$

donde v_p es la velocidad de las ondas longitudinales en el medio y v_s es la velocidad de las ondas transversales. Éstas vienen dadas por

$$v_p^2 = \frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho} \quad (2.35a)$$

y

$$v_s^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.35b)$$

Es importante notar que siempre se cumple $v_p > v_s$, esto implica que las perturbaciones longitudinales en cualquier medio homogéneo e isotrópico siempre se propagan a mayor velocidad que las de corte.

Es posible expresar la ley de Hooke generalizada en términos de las velocidades del sonido en un medio homogéneo e isotrópico sustituyendo (2.35) en (2.22), con lo que se llega a

$$\sigma_{ij} = 2\rho v_s^2 u_{ij} + \rho(v_p^2 - 2v_s^2) u_{ll} \delta_{ij}. \quad (2.36)$$

El teorema de Helmholtz establece que es posible descomponer un campo vectorial en una parte irrotacional y en una parte solenoidal[28]. Aplicando esta descomposición al vector de desplazamiento, queda

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s, \quad (2.37)$$

donde \mathbf{u}_p corresponde a ondas longitudinales y \mathbf{u}_s a ondas de corte. Estos vectores cumplen

$$\nabla \times \mathbf{u}_p = 0 \quad (2.38)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0. \quad (2.39)$$

Sustituyendo (2.37) en (2.34) y haciendo uso de las propiedades (2.38), (2.39) y la

2.2. ONDAS ELÁSTICAS

identidad (2.33) se llega a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 \mathbf{u}_p + v_s^2 \nabla^2 \mathbf{u}_s. \quad (2.40)$$

A su vez, es posible descomponer esta ecuación en un par de ecuaciones de onda independientes para \mathbf{u}_p y \mathbf{u}_s . Aplicando la divergencia obtenemos

$$\nabla \cdot \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}_p}{\partial t^2} - v_p^2 \nabla^2 \mathbf{u}_p \right] = 0. \quad (2.41)$$

Como el rotacional de \mathbf{u}_s es cero, entonces

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_p}{\partial t^2} - v_p^2 \nabla^2 \mathbf{u}_p = 0. \quad (2.42)$$

De forma similar, aplicando el rotacional a (2.40) y usando la propiedad (2.39), se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \mathbf{u}_s = 0. \quad (2.43)$$

Para el desarrollo de este trabajo solo consideraremos soluciones de ondas planas monocromáticas, de la forma

$$\mathbf{u}_p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_p(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.44)$$

y

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_s(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.45)$$

Donde \mathbf{k}_p es el vector de onda longitudinal y \mathbf{k}_s es el vector de onda de corte. Estos vectores de onda cumplen las relaciones

$$\mathbf{k}_p \times \mathbf{u}_p = 0 \quad (2.46)$$

y

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{u}_s = 0. \quad (2.47)$$

Al sustituir (2.44) en (2.42) y (2.45) en (2.43), se obtienen las relaciones de dispersion para las ondas elásticas longitudinales y las ondas de corte en un medio isotrópico y homogéneo

$$k_p = \frac{\omega}{v_p} \quad (2.48)$$

y

$$k_s = \frac{\omega}{v_s} \quad (2.49)$$

Estas ecuaciones muestran una relación lineal entre ω y k , lo cual implica que la velocidad de las ondas no depende de la frecuencia.

Una propiedad importante para describir las características de los medios elásticos es la impedancia acústica específica (a la que en adelante nos referiremos simplemente como impedancia acústica), la cual mide la resistencia del medio a la propagación de ondas elásticas, se define como el producto de la velocidad del sonido por la densidad y denota con la letra z . Para ondas longitudinales, la impedancia longitudinal es

$$z_p = \rho v_p. \quad (2.50)$$

De forma análoga, se define la impedancia acústica de las ondas de corte como

$$z_s = \rho v_s. \quad (2.51)$$

2.2.1. Condiciones de frontera

Estudiaremos las condiciones que deben cumplirse cuando una deformación se transmite desde un medio elástico A hacia un medio elástico B , separados por una frontera S . Conderaremos el caso cuando la interfase S es un plano, tomando el sistema de referencia con el plano xy sobre S .

Si ambos medios son sólidos elástico y están unidos perfectamente, sin discontinuidades, entonces el vector de desplazamiento es continuo en cualquier punto de la interfase que separa a los medios, esto es

$$\mathbf{u}_A|_{z=0} = \mathbf{u}_B|_{z=0}. \quad (2.52)$$

Otra condición es la continuidad del tensor de esfuerzos sobre la interfase S ,

$$\sigma_{ij}^A|_{z=0} = \sigma_{ij}^B|_{z=0}. \quad (2.53)$$

Si ahora consideramos que el medio B es un fluido ideal, como estos no soportan esfuerzos de corte, entonces solo la componente del vector de desplazamiento normal a S es continua,

$$\mathbf{u}_A \cdot \hat{\mathbf{z}}|_{z=0} = \mathbf{u}_B \cdot \hat{\mathbf{z}}|_{z=0}. \quad (2.54)$$

2.2. ONDAS ELÁSTICAS

Además, las componentes de σ_{ij}^A paralelas a la superficie S se deben anular, es decir

$$\sigma_{zx}^A \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy}^A \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.55)$$

Estas condiciones de frontera dotan de características peculiares a los sistemas sólido-fluido, los cuales se presentan fenómenos que no aparecen en sistemas sólido-sólido o fluido-fluido. Un ejemplo es la existencia de frecuencias donde no se transmiten ondas elásticas en placas sólidas inmersas en fluidos[33].

2.2.2. Ley de Snell para ondas elásticas

En general, cuando una onda elástica incide sobre la superficie que separa a dos medios distintos, ocurre un cambio en la naturaleza tanto de la onda que es reflejada como de la que se transmite. Esto es, si la onda incidente es puramente longitudinal (o puramente de corte), la onda reflejada y la transmitida resultantes serán una mezcla de ondas longitudinales y de corte (ondas mixtas). En algunos casos no se presenta este tipo de conversión, cuando la onda incide en forma normal a la superficie o cuando incide una onda de corte cuyas oscilaciones son paralelas a dicha superficie (conocida como polarización de corte horizontal)[26]. Para conocer las relaciones entre las direcciones de las ondas incidente, las reflejadas y las transmitidas, consideramos una onda plana longitudinal incidente a un plano que separa a dos medios semi-infinitos con parámetros elásticos diferentes.

Denotaremos al medio de incidencia como medio A y al medio de transmisión como medio B. En el medio A, el movimiento es una combinación de la onda longitudinal incidente y las ondas reflejadas, una longitudinal y una de corte

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{u}_{rp} e^{i(\mathbf{k}_{rp} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{u}_{rs} e^{i(\mathbf{k}_{rs} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.56)$$

en el medio B, la onda transmitida es una mezcla de una parte longitudinal y una de corte.

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_{tp} e^{i(\mathbf{k}_{tp} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{u}_{ts} e^{i(\mathbf{k}_{ts} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.57)$$

A partir de un análisis de las condiciones de frontera es posible obtener las relaciones entre los ángulos de cada componente. Primeramente, como las condiciones son independientes del tiempo, esto implica que la frecuencia de oscilación es la misma para todas las ondas. Las componentes de los vectores de onda paralelas al plano de separa-

2.2. ONDAS ELÁSTICAS

ción permanecen constantes, esto es debido a la simetría translacional en las direcciones paralelas a la frontera. Tomando al plano $z = 0$ como frontera y al plano xz como el plano de incidencia, tenemos que la componente del vector de onda en la dirección y es cero, esto es $k_{0y} = 0$. Entonces, como las componentes del vector de onda en la dirección y deben ser constantes, todas las ondas se propagan en el mismo plano. Para las ondas longitudinales en el medio A

$$k_{0,x} = k_{rp,x}. \quad (2.58)$$

La relación entre el vector de onda y la frecuencia en un medio homogéneo es

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \hat{k}, \quad (2.59)$$

donde \hat{k} indica la dirección de propagación de la onda. En este caso $\hat{k} = \hat{x}\text{sen}\theta + \hat{z}\text{cos}\theta$, donde θ es el ángulo medido desde la normal al plano de separación. Entonces

$$k_x = \frac{\omega}{v} \text{sen}\theta. \quad (2.60)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.58) obtenemos la relación

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{v_{A,p}} \text{sen}\alpha_0 &= \frac{\omega}{v_{A,p}} \text{sen}\alpha_p, \\ \Rightarrow \text{sen}\alpha_0 &= \text{sen}\alpha_p. \end{aligned} \quad (2.61)$$

de aquí se deduce que el ángulo de reflexión para la onda longitudinal es igual al ángulo de incidencia.

Para las demás ondas, las relaciones entre sus direcciones se obtienen a partir de

$$k_{rp,x} = k_{rs,x} = k_{tp,x} = k_{ts,x}, \quad (2.62)$$

de aquí

$$\frac{\text{sen}\alpha_p}{v_{A,p}} = \frac{\text{sen}\alpha_s}{v_{A,s}} = \frac{\text{sen}\beta_p}{v_{B,p}} = \frac{\text{sen}\beta_s}{v_{B,s}}. \quad (2.63)$$

Ésta relación es la ley de Snell para ondas elásticas. A diferencia de otro tipo ondas, como las electromagnéticas, en el caso de las ondas elásticas existe más de un ángulo crítico. Como $v_p > v_s$, entonces, cuando la onda incidente es una onda de corte, existe un ángulo crítico a partir del cual la componente longitudinal no se propaga dentro del

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

medio A y viene dado por

$$\alpha_{s0} = \arcsen\left(\frac{v_{A,s}}{v_{A,p}}\right). \quad (2.64)$$

La relación entre las velocidades del sonido en el medio B y en el medio A determina la existencia de ángulos críticos para las ondas transmitidas. Consideraremos el caso cuando $v_{A,p} < v_{B,s}$, de modo que $v_{B,p} > v_{A,p} > v_{A,s}$, entonces existirán cuatro ángulos críticos para las ondas transmitidas, dos para cada tipo de onda incidente. A partir de cada uno de estos ángulos, las ondas correspondientes no se propagan dentro del medio B. Para ondas incidentes longitudinales, los ángulos son

$$\alpha_{ps} = \arcsen\left(\frac{v_{A,p}}{v_{B,s}}\right) \quad y \quad \alpha_{pp} = \arcsen\left(\frac{v_{A,p}}{v_{B,p}}\right). \quad (2.65)$$

Para ondas de corte,

$$\alpha_{ss} = \arcsen\left(\frac{v_{A,s}}{v_{B,s}}\right) \quad y \quad \alpha_{sp} = \arcsen\left(\frac{v_{A,s}}{v_{B,p}}\right). \quad (2.66)$$

Cuando el medio A es un fluido y el medio B un sólido, dentro de A no se propagan ondas de corte, de modo que no existen los ángulos α_{s0} , α_{ss} o α_{sp} . En cambio, cuando el medio A es un sólido y el medio B un fluido, no existen los ángulos α_{ps} o α_{ss} . Cuando ambos medio son fluidos, solo existe un ángulo crítico para las ondas transmitidas, α_{pp} , el cual solo existe si se cumple la condición $v_{A,p} < v_{B,p}$.

2.3. Transmisión y reflexión en una interfase sólido-fluido.

Consideremos dos medios semi-infinitos homogéneos e isotrópicos separados por un plano. Uno de los medios es un sólido elástico caracterizado por los parámetros ρ_s , v_p y v_s ; el otro medio es un fluido ideal caracterizado por ρ_f y v_f . Para el estudio de la propagación de ondas elásticas a través de la interfase que separa a estos medios, estudiaremos tres casos: cuando la onda incide desde el fluido; cuando incide una onda longitudinal desde el sólido y cuando incide una onda de corte desde el sólido. Para cada caso obtendremos los coeficientes de reflexión y de transmisión.

2.3.1. Incidencia desde el fluido.

Colocamos el sistema de referencia con el plano $z = 0$ sobre la frontera que separa al sólido del fluido. Con esto, el fluido se localiza en la zona $z < 0$ y el sólido en $z > 0$. Tomaremos como plano de propagación al plano xz . En este caso, en el fluido hay una onda incidente y una reflejada; en el sólido hay dos ondas transmitidas, una longitudinal y una de corte, como se ilustra en la Figura 2.4.

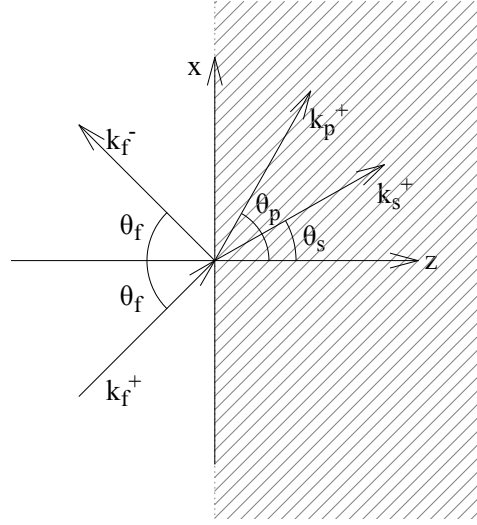


Figura 2.4: Onda longitudinal incidiendo sobre la interfase entre un fluido y un sólido. La región en blanco representa al fluido y la región sombreada al sólido.

El vector de desplazamiento en el fluido es

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_f^+ e^{i(k_0 x + q_f z - \omega t)} + \mathbf{u}_f^- e^{i(k_0 x - q_f z - \omega t)}, \quad z < 0. \quad (2.67)$$

En el sólido,

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_p^+ e^{i(k_0 x + q_p z - \omega t)} + \mathbf{u}_s^+ e^{i(k_0 x - q_s z - \omega t)}, \quad z > 0. \quad (2.68)$$

Estos vectores están sujetos a las condiciones de frontera (2.53) a (2.55).

Por un lado, de las ecuaciones (2.46) y (2.47) se deduce que, cuando \mathbf{k} está en el plano xz , entonces

$$\mathbf{u}_f^+ = u_f^+ \hat{\mathbf{x}} \text{sen} \theta_f + u_f^+ \hat{\mathbf{z}} \text{cos} \theta_f, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{u}_f^- = u_f^- \hat{\mathbf{x}} \text{sen} \theta_f - u_f^- \hat{\mathbf{z}} \text{cos} \theta_f, \quad (2.70)$$

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

$$\mathbf{u}_p^+ = u_p^+ \hat{\mathbf{x}} \text{sen} \theta_p + u_p^+ \hat{\mathbf{z}} \text{cos} \theta_p, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{u}_s^+ = u_s^+ \hat{\mathbf{x}} \text{cos} \theta_s - u_s^+ \hat{\mathbf{z}} \text{sen} \theta_s, \quad (2.72)$$

Por otro lado, de la relación de dispersión para ondas elásticas en medios homogéneos e isotrópicos, es posible escribir las componentes de los vectores de onda como

$$k_0 = \frac{\omega}{v_m} \text{sen} \theta_m, \quad (2.73)$$

$$q_m = \frac{\omega}{v_m} \text{cos} \theta_m, \quad (2.74)$$

donde el subíndice m puede ser f , p o s .

Así, haciendo uso las ecuaciones (2.69) a (2.74) en (2.67) y (2.68), obtenemos

$$u_{F,x} = \left[v_f k_0 u_f^+ e^{iq_f z} + v_f k_0 u_f^- e^{-iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.75)$$

$$u_{F,z} = \left[v_f q_f u_f^+ e^{iq_f z} - v_f q_f u_f^- e^{-iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.76)$$

$$u_{S,x} = \left[v_p k_0 u_p^+ e^{iq_p z} + v_s q_s u_s^+ e^{iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.77)$$

$$u_{S,z} = \left[v_p q_p u_p^+ e^{iq_p z} - v_s k_0 u_s^+ e^{iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.78)$$

Aplicando la condición de continuidad de la componente en dirección z del vector de desplazamiento en $z = 0$, llegamos a

$$\begin{aligned} (v_f q_f u_f^+ - v_f q_f u_f^-) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega} &= (v_p q_p u_p^+ - v_s k_0 u_s^+) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \\ \Rightarrow v_f q_f u_f^+ - v_f q_f u_f^- &= v_p q_p u_p^+ - v_s k_0 u_s^+. \end{aligned} \quad (2.79)$$

La componente σ_{zz} del tensor de esfuerzos viene dada por la ley de Hooke para medios homogéneos e isotrópicos (2.36). Tomando en cuenta que los vectores de desplazamiento son independientes de la coordenada y , entonces

$$u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (2.80)$$

Entonces,

$$\sigma_{zz} = \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \rho (v_p^2 - 2v_s^2) \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (2.81)$$

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

Para el fluido ideal, la expresión para σ_{zz} se reduce a

$$\sigma_{zz}^f = \rho_f v_f^2 \left(\frac{\partial u_{f,z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{f,x}}{\partial x} \right). \quad (2.82)$$

En $z = 0$,

$$\left. \frac{\partial u_{f,z}}{\partial z} \right|_{z=0} = i v_f q_f^2 (u_f^+ + u_f^-) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.83)$$

$$\left. \frac{\partial u_{f,x}}{\partial x} \right|_{z=0} = i v_f k_0^2 (u_f^+ + u_f^-) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.84)$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz}^f \Big|_{z=0} = i \rho_f v_f^3 (k_0^2 + q_f^2) (u_f^+ + u_f^-) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.85)$$

Para el sólido,

$$\left. \frac{\partial u_{S,z}}{\partial z} \right|_{z=0} = i (v_p q_p^2 u_p^+ - v_s q_s k_0 u_s^+) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.86)$$

$$\left. \frac{\partial u_{S,x}}{\partial x} \right|_{z=0} = i (v_p k_0^2 u_p^+ - v_s q_s k_0 u_s^+) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.87)$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz}^s \Big|_{z=0} = i \{ \rho_s v_p [v_p^2 (k_0^2 + q_p^2) - 2v_s^2 k_0^2] u_p^+ - 2\rho_s v_s^3 q_s k_0 u_s^+ \} \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.88)$$

Comparando (2.85) y (2.88) se tiene

$$\rho_f v_f \omega^2 (u_f^+ + u_f^-) = \rho_s v_p [\omega^2 - 2v_s^2 k_0^2] u_p^+ - 2\rho_s v_s^3 q_s k_0 u_s^+, \quad (2.89)$$

donde se ha hecho uso de

$$k_0^2 + q_m^2 = \left(\frac{\omega}{v_m} \right)^2. \quad (2.90)$$

La última condición a ser aplicada es la de la anulación de la componente tangencial a $z = 0$ del tensor de esfuerzos, esto es $\sigma_{xz}^s = 0$.

Como

$$\sigma_{xz}^s = \rho_s v_s^2 \left(\frac{\partial u_x^s}{\partial z} + \frac{\partial u_z^s}{\partial x} \right) \quad (2.91)$$

y

$$\left. \frac{\partial u_{S,x}}{\partial z} \right|_{z=0} = i (v_p k_0 q_p u_p^+ + v_s q_s^2 u_s^+) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.92)$$

$$\left. \frac{\partial u_{S,z}}{\partial x} \right|_{z=0} = i (v_p k_0 q_p u_p^+ - v_s q_s^2 u_s^+) \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.93)$$

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

entonces

$$\sigma_{xz}^s| = \rho_s v_s^2 \left[2v_p k_0 q_p u_p^+ + v_s (q_s^2 - k_0^2) u_s^+ \right] \quad (2.94)$$

$$\Rightarrow 2v_p k_0 q_p u_p^+ + v_s (q_s^2 - k_0^2) u_s^+ = 0. \quad (2.95)$$

De esta última ecuación podemos obtener una relación entre u_p^+ y u_s^+ , de la forma

$$u_s^+ = Q u_p^+, \quad (2.96)$$

con

$$Q = \frac{2v_p k_0 q_p}{v_s (k_0^2 - q_s^2)}. \quad (2.97)$$

Los coeficientes de las ecuaciones (2.79), (2.89) y (2.95) aparecerán con frecuencia en el desarrollo de este trabajo, por lo que es conveniente simplificar la notación definiendo las siguientes cantidades:

$$F_1 = v_f q_f, \quad F_2 = \rho_f v_f \omega^2, \quad (2.98)$$

$$P_1 = v_p q_p, \quad P_2 = \rho_s v_p (\omega^2 - 2v_s^2 k_0^2), \quad P_3 = 2v_p k_0 q_p \quad (2.99)$$

$$S_1 = -v_s k_0, \quad S_2 = -2\rho_s v_s^3 q_s k_0, \quad S_3 = v_s (k_0^2 - q_s^2). \quad (2.100)$$

Con esto, podemos resumir las ecuaciones (2.79), (2.89) y (2.95) en forma matricial

$$\mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^0 = \mathbb{M}_s \mathbf{u}_p^0, \quad (2.101)$$

donde

$$\mathbb{M}_f = \begin{pmatrix} F_1 & -F_1 \\ F_2 & F_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_s = \begin{pmatrix} P_1 + S_1 Q & 0 \\ P_2 + S_2 Q & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_f^0 = \begin{pmatrix} u_f^+ \\ u_f^- \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{u}_p^0 = \begin{pmatrix} u_p^+ \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

Multiplicando la ecuación (2.101) por la matriz inversa de \mathbb{M}_f obtenemos

$$\mathbf{u}_f^0 = \mathbb{T}_{fs} \mathbf{u}_p^0, \quad (2.103)$$

donde se ha definido

$$\mathbb{T}_{fs} = \mathbb{M}_f^{-1} \mathbb{M}_s. \quad (2.104)$$

Desarrollando la ecuación (2.103) se llega al par de ecuaciones escalares

$$u_f^+ = T_{11} u_p^+, \quad (2.105)$$

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

$$u_f^- = T_{21}u_p^+, \quad (2.106)$$

con $T_{ij} = (\mathbb{T}_{fs})_{ij}$.

La reflectividad se define como el cociente de la amplitud de la onda reflejada entre la amplitud de la onda incidente, es decir

$$r = \frac{u_f^-}{u_f^+}. \quad (2.107)$$

Entonces, usando las ecuaciones (2.105) y (2.106) se puede expresar la reflectividad en términos de las componentes de la matriz \mathbb{T}_{sf} , como

$$r = \frac{T_{21}}{T_{11}}. \quad (2.108)$$

De forma análoga, la transmitividad longitudinal y la de corte vienen dadas por

$$t_p = \frac{u_p^+}{u_f^+} = \frac{1}{T_{11}}, \quad (2.109)$$

$$t_s = \frac{u_s^+}{u_f^+} = \frac{Q}{T_{11}}, \quad (2.110)$$

donde se ha hecho uso de la relación (2.96).

Otras cantidades importantes que nos permiten estudiar la propagación de ondas elásticas a través de una interfase son los coeficientes de reflexión y transmisión, definidos en términos del flujo de energía, el cual viene dado por[28]

$$S_i = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t}. \quad (2.111)$$

Consideremos la onda incidente en el fluido, para ésta el flujo de energía en la dirección z es

$$S_{f,z}^+ = \sigma_{zz}^f \frac{\partial u_{f,z}^+}{\partial t}. \quad (2.112)$$

donde se ha tomado en cuenta que el fluido no soporta esfuerzos de corte, por lo que $\sigma_{zx}^f = 0$.

De la ecuación (2.76), se tiene que en $z = 0$,

$$u_{f,z}^+ \Big|_{z=0} = \frac{v_f q_f u_f^+}{\omega} e^{i(k_0 x - \omega t)}. \quad (2.113)$$

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

A su vez, de (2.85)

$$\sigma_{zz}^f \Big|_{z=0} = i\rho_f v_f \omega u_f^+ e^{i(k_0 x - \omega t)}, \quad (2.114)$$

donde se ha hecho uso de (2.90). Sustituyendo (2.114) y (2.113) en (2.112) queda

$$\left| S_{f,z}^+ \right|_{z=0} = \rho_f v_f \omega^2 \cos\theta_f \left| u_f^+ \right|^2. \quad (2.115)$$

De forma similar se encuentran los flujos de energía para la onda reflejada y las ondas transmitidas, con lo que se encuentra que en general

$$\left| S_{f,z}^\pm \right|_{z=0} = \rho_f v_f \omega^2 \cos\theta_f \left| u_f^\pm \right|^2, \quad (2.116)$$

$$\left| S_{p,z}^\pm \right|_{z=0} = \rho_s v_p \omega^2 \cos\theta_p \left| u_p^\pm \right|^2, \quad (2.117)$$

y

$$\left| S_{s,z}^\pm \right|_{z=0} = \rho_s v_s \omega^2 \cos\theta_s \left| u_s^\pm \right|^2. \quad (2.118)$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión se definen como las razones entre el flujo de energía de las ondas reflejadas y transmitidas, respectivamente, entre el flujo de energía de la onda incidente, es decir

$$R = \frac{\left| S_{f,z}^- \right|}{\left| S_{f,z}^+ \right|} = \frac{\rho_f v_f \omega^2 \cos\theta_f \left| u_f^- \right|^2}{\rho_f v_f \omega^2 \cos\theta_f \left| u_f^+ \right|^2} = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.119)$$

$$T_p = \frac{\left| S_{p,z}^- \right|}{\left| S_{f,z}^+ \right|} = \frac{\rho_s v_p \omega^2 \cos\theta_p \left| u_p^- \right|^2}{\rho_f v_f \omega^2 \cos\theta_f \left| u_f^+ \right|^2} = \frac{z_p \cos\theta_p}{z_f \cos\theta_f} \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.120)$$

$$T_s = \frac{\left| S_{s,z}^- \right|}{\left| S_{f,z}^+ \right|} = \frac{\rho_s v_s \omega^2 \cos\theta_s \left| u_s^- \right|^2}{\rho_f v_f \omega^2 \cos\theta_f \left| u_f^+ \right|^2} = \frac{z_s \cos\theta_s}{z_f \cos\theta_f} \left| \frac{Q}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.121)$$

Por conservación de energía, se cumple que la suma de todos los coeficientes de reflexión y de transmisión es uno, en este caso

$$R + T_p + T_s = 1. \quad (2.122)$$

En la Figura 2.5 se muestran los coeficientes de reflexión y transmisión para cuatro sistemas diferentes, en función del ángulo de incidencia.

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

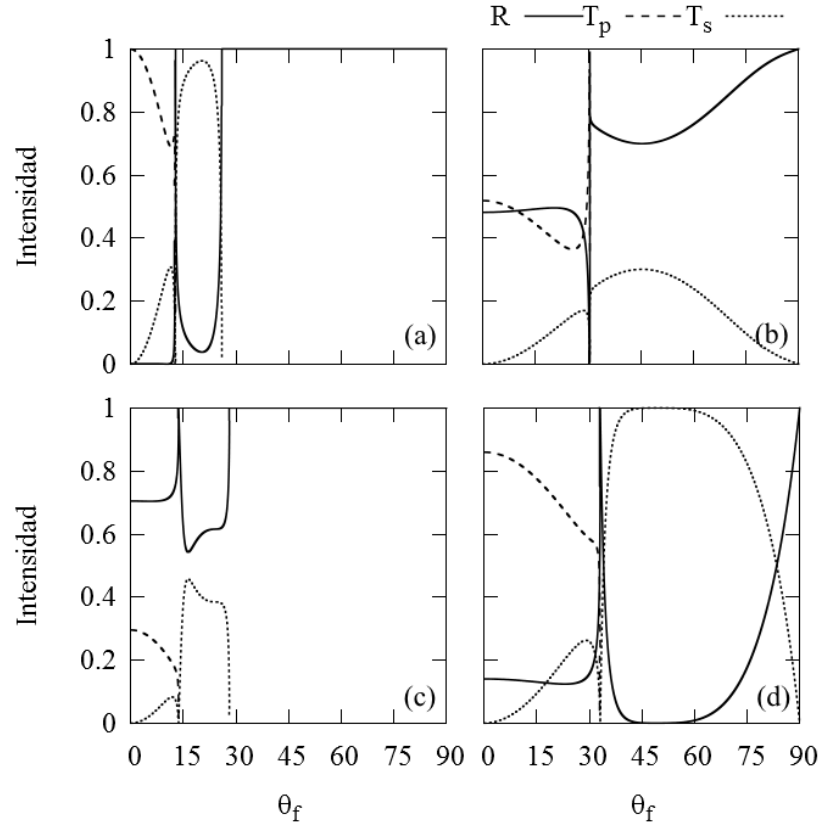


Figura 2.5: Coeficientes de reflexión y transmisión en una interfase fluido-sólido, incidiendo desde el fluido. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido es Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), agua y Al; en (d), Agua y PMMA. Los parámetros de los materiales son: para Hg, $\rho_f = 13.6g/cm^3$, $v_f = 1.380 \times 10^5 cm/s$; para el agua, $\rho_f = 0.997g/cm^3$, $v_f = 1.498 \times 10^5 cm/s$; para Al, $\rho_s = 2.70g/cm^3$, $v_p = 6.320 \times 10^5 cm/s$, $v_s = 3.160 \times 10^5 cm/s$; para PMMA, $\rho_s = 1.20g/cm^3$, $v_p = 2.728 \times 10^5 cm/s$, $v_s = 1.363 \times 10^5 cm/s$.

Los materiales elegidos permiten ilustrar casos importantes de los sistemas sólido-fluido. Cuando una onda incide desde el mercurio hacia el aluminio, se puede observar que la transmisión es casi total para incidencia normal. De forma similar, cuando una onda incide desde el agua hacia el PMMA, con un ángulo de 50° respecto a la normal, se tiene transmisión total. Los otros casos muestran el comportamiento de la propagación de ondas cuando hay gran contraste entre los parámetros elásticos de los materiales.

2.3.2. Incidencia con ondas longitudinales desde el sólido.

Ahora consideraremos una onda longitudinal viajando desde el sólido hacia la interfase que separa a los dos materiales, como se ilustra en la Figura 2.6.

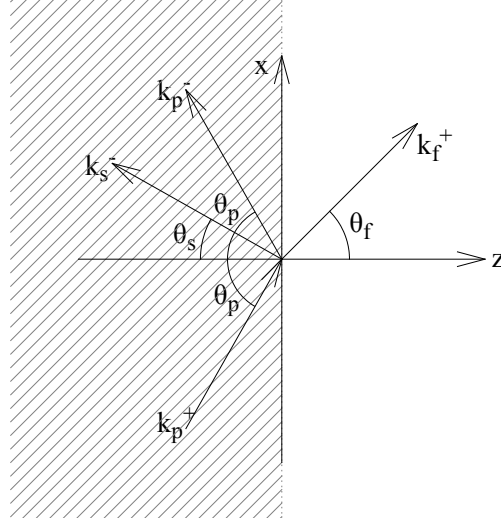


Figura 2.6: Onda longitudinal incidiendo desde un sólido hacia un fluido.

En este caso, en el sólido tendremos dos ondas reflejadas, una longitudinal y una de corte. Entonces, las componentes del vector de desplazamiento en el sólido son

$$u_{S,x} = \left[v_p k_0 u_p^+ e^{iq_p z} + v_p k_0 u_p^- e^{-iq_p z} + v_s q_s u_s^- e^{-iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.123)$$

$$u_{S,z} = \left[v_p q_p u_p^+ e^{iq_p z} - v_p q_p u_p^- e^{-iq_p z} + v_s k_0 u_s^- e^{-iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.124)$$

En el fluido solo hay una onda transmitida, con lo que

$$u_{f,x} = \left[v_f k_0 u_f^+ e^{iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.125)$$

$$u_{f,z} = \left[v_f q_f u_f^+ e^{iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.126)$$

Aplicando las condiciones de frontera en $z = 0$ llegamos al sistema de ecuaciones

$$P_1 u_p^+ - P_1 u_p^- - S_1 u_s^- = F_1 u_f^+, \quad (2.127)$$

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

$$P_2 u_p^+ + P_2 u_p^- + S_2 u_s^- = F_2 u_f^+, \quad (2.128)$$

$$P_3 u_p^+ - P_3 u_p^- + S_3 u_s^- = 0. \quad (2.129)$$

De la última ecuación se obtiene la relación

$$u_s^- = Q(u_p^- - u_p^+), \quad (2.130)$$

con

$$Q = \frac{P_3}{S_3}. \quad (2.131)$$

Expresando estas ecuaciones en forma matricial, queda

$$\mathbb{M}_s \mathbf{u}_p^0 = \mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^0, \quad (2.132)$$

en este caso

$$\mathbb{M}_s = \begin{pmatrix} P_1 + S_1 Q & -P_1 - S_1 Q \\ P_2 - S_2 Q & P_2 + S_2 Q \end{pmatrix}, \quad (2.133)$$

$$\mathbb{M}_f = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ F_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.134)$$

$$\mathbf{u}_p^0 = \begin{pmatrix} u_p^+ \\ u_p^- \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{u}_f^0 = \begin{pmatrix} u_f^+ \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.135)$$

De forma similar a como se hizo en el caso anterior, al multiplicar la ecuación (2.132) por \mathbb{M}_s^{-1} , se obtiene

$$\mathbf{u}_p^0 = \mathbb{T}_{pf} \mathbf{u}_f^0, \quad (2.136)$$

donde se ha definido

$$\mathbb{T}_{pf} = \mathbb{M}_s^{-1} \mathbb{M}_f. \quad (2.137)$$

En este caso, la transmitividad y las reflectividades se definen como

$$t_f = \frac{u_f^+}{u_p^+}, \quad r_p = \frac{u_p^-}{u_p^+} \quad y \quad r_s = \frac{u_s^-}{u_p^+}. \quad (2.138)$$

De las ecuaciones (2.130), (2.135) y (2.136) se encuentra que

$$t_f = \frac{1}{T_{11}}, \quad r_p = \frac{T_{21}}{T_{11}} \quad y \quad r_s = Q \left(\frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right), \quad (2.139)$$

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

donde $T_{ij} = (\mathbb{M}_{pf})_{ij}$.

Entonces, los coeficientes de transmisión y reflexión son

$$R_p = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.140)$$

$$R_s = |Q|^2 \frac{z_s \cos \theta_s}{z_p \cos \theta_p} \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right|^2, \quad (2.141)$$

$$T_f = \frac{z_f \cos \theta_f}{z_p \cos \theta_p} \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.142)$$

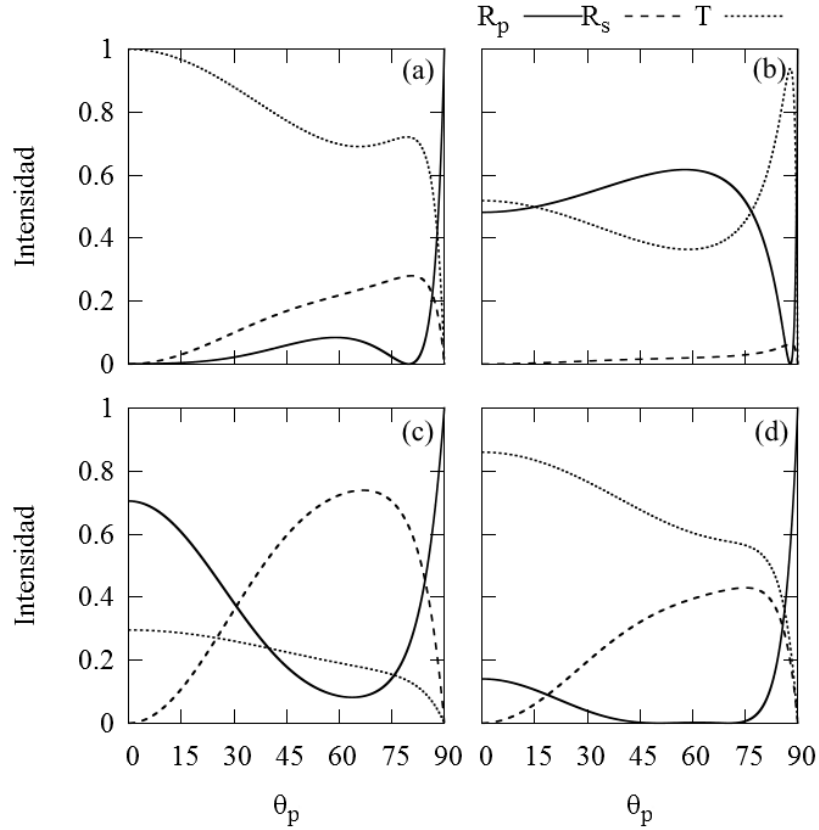


Figura 2.7: Coeficientes de reflexión y transmisión en una interfase fluido-sólido, incidiendo con ondas longitudinales desde el sólido. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido es Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

En la Figura 2.7 se muestra los coeficientes de reflexión y transmisión para diferentes sistemas, cuando la onda incidente desde el sólido es longitudinal. Se puede observar

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

que, igual al caso cuando la onda incide desde el fluido, se presenta transmisión total para el sistema Hg-Al. Para este sistema y para Agua-PMMA, existen ángulos donde la reflexión longitudinal es nula, sin embargo sí existe energía reflejada en forma de ondas de corte y por tanto, la transmisión no es total para estos ángulos. Para el sistema Agua-Al, se observa que es poca la energía que se transmite hacia el fluido y al aumentar el ángulo de incidencia, la mayoría de la energía se refleja como ondas de corte. En el caso Hg-PMMA, es muy poca la energía que se refleja como ondas de corte y la transmisión es comparable en magnitud a la reflexión longitudinal.

2.3.3. Incidencia con ondas de corte desde el sólido.

Ahora estudiaremos la propagación de una onda de corte incidiendo desde el sólido hacia el fluido, como se muestra en la Figura 2.8. En este caso, el vector de desplazamiento en el sólido es

$$u_{S,x} = \left[v_p k_0 u_p^- e^{-iq_p z} + v_s q_s u_s^+ e^{iq_s z} + v_s q_s u_s^- e^{-iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.143)$$

$$u_{S,z} = \left[-v_p q_p u_p^- e^{-iq_p z} - v_s k_0 u_s^+ e^{iq_s z} + v_s k_0 u_s^- e^{-iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.144)$$

En el fluido,

$$u_{f,x} = \left[v_f k_0 u_f^+ e^{iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.145)$$

$$u_{f,z} = \left[v_f q_f u_f^+ e^{iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.146)$$

De forma similar a los casos anteriores, al aplicar las condiciones de frontera se obtiene el sistema de ecuaciones

$$S_1 u_s^+ - S_1 u_s^- - P_1 u_p^- = F_1 u_f^+, \quad (2.147)$$

$$S_2 u_s^+ + S_2 u_s^- + P_2 u_p^- = F_2 u_f^+, \quad (2.148)$$

$$-S_3 u_s^+ + S_3 u_s^- - P_3 u_p^- = 0. \quad (2.149)$$

De ésta última ecuación se tiene

$$u_p^- = \frac{1}{Q} (u_s^- - u_s^+). \quad (2.150)$$

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

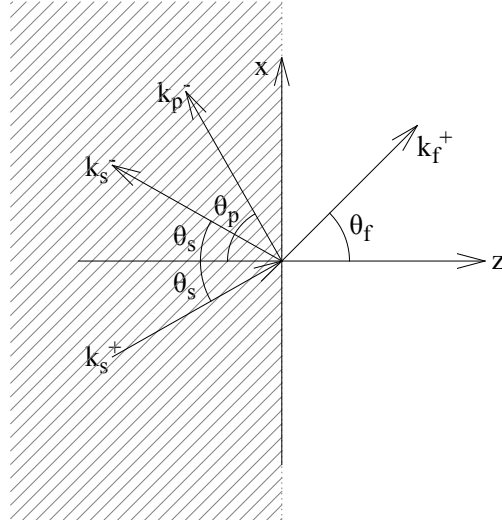


Figura 2.8: Onda de corte incidiendo sobre la interfase entre un sólido y un fluido.

Expresado en forma matricial queda

$$\mathbb{M}_s \mathbf{u}_s^0 = \mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^0, \quad (2.151)$$

donde

$$\mathbb{M}_s = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} P_1 + T_1 Q & -P_1 - T_1 Q \\ -P_2 + T_2 Q & P_2 + T_2 Q \end{pmatrix}, \quad (2.152)$$

$$\mathbb{M}_f = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ F_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.153)$$

$$\mathbf{u}_s^0 = \begin{pmatrix} u_s^+ \\ u_s^- \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{u}_f^0 = \begin{pmatrix} u_f^+ \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.154)$$

En este caso se encuentra que los coeficientes de transmisión y reflexión vienen dados por

$$R_s = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.155)$$

$$R_p = \frac{1}{|Q|^2} \frac{z_p \cos \theta_p}{z_s \cos \theta_s} \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right|^2, \quad (2.156)$$

$$T_f = \frac{z_f \cos \theta_f}{z_p \cos \theta_p} \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.157)$$

Estos coeficientes se grafican en la Figura 2.9, para los cuatro sistemas que hemos

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

analizado en los casos anteriores. Se puede observar en todos los casos que la reflexión de las ondas de corte es total a incidencia normal. También se puede ver que hay un cambio abrupto a 30° , a partir del cual no se reflejan ondas longitudinales. Este ángulo es el ángulo crítico longitudinal para los sólidos estudiados.

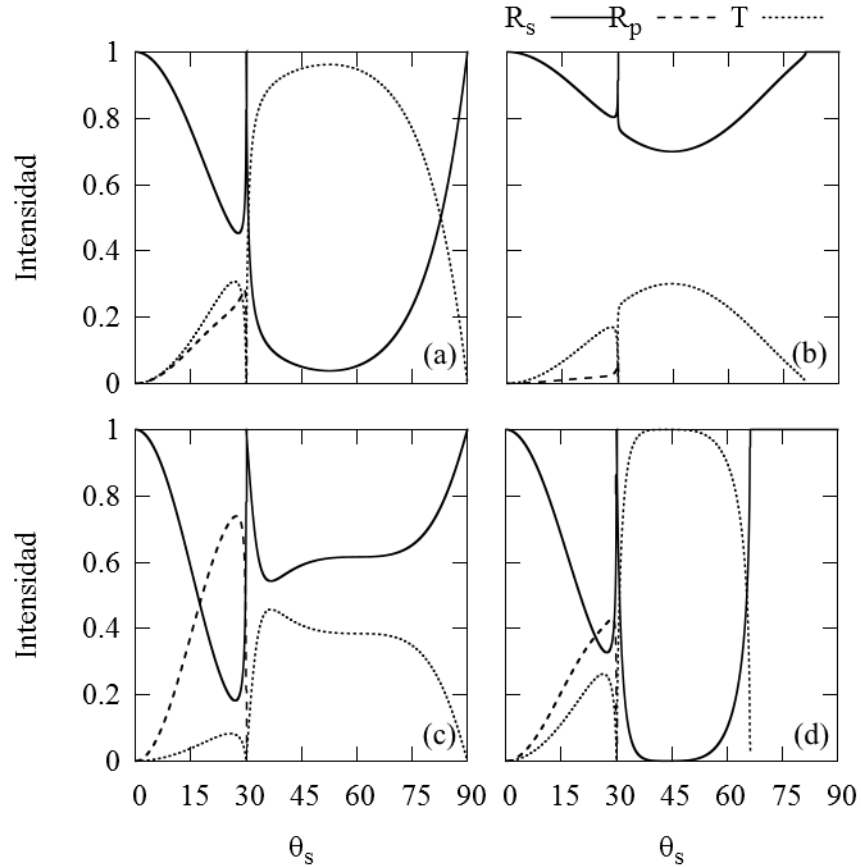


Figura 2.9: Coeficientes de reflexión y transmisión en una interfase fluido-sólido, incidiendo con ondas de corte desde el sólido. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido es Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

2.3.4. Condiciones de transmisión total.

Como se muestra en las Figuras 2.5, 2.7 y 2.9, para determinados ángulos y materiales se presenta transmisión total (o casi total) cuando una onda incide en la interfase de un sólido y un fluido. A continuación analizaremos las condiciones bajo las cuales se presenta este fenómeno.

Primero consideraremos el caso de una onda longitudinal viajando desde el fluido

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

hacia el sólido. Como solo hay una onda reflejada, cuando se presenta transmisión total el coeficiente de reflexión de dicha onda se anula. Este coeficiente viene dado por (2.119). Entonces, igualando R a cero se llega a

$$\left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{21} = 0, \quad (2.158)$$

donde T_{21} es la componente 21 de $\mathbb{M}_f^{-1}\mathbb{M}_s$, que al desarrollar este producto resulta

$$T_{21} = \frac{1}{F_2}(P_2 + S_2Q) - \frac{1}{F_1}(P_1 + S_1Q). \quad (2.159)$$

Igualando a cero y reordenando los términos se obtiene la ecuación

$$S_3 \left(\frac{P_1}{F_1} - \frac{P_2}{F_2} \right) - P_3 \left(\frac{S_1}{F_1} - \frac{S_2}{F_2} \right) = 0. \quad (2.160)$$

Esta ecuación se anula cuando

$$P_3 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{P_1}{F_1} - \frac{P_2}{F_2} = 0, \quad (2.161)$$

o

$$S_3 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{S_1}{F_1} - \frac{S_2}{F_2} = 0. \quad (2.162)$$

Recordando la forma explícita de los coeficientes P_3 y S_3 se pueden determinar los ángulos donde se cumplen las condiciones de transmisión total, esto es

$$P_3 = 2v_p k_0 q_p = 0 \quad \Rightarrow \quad k_0 = 0. \quad (2.163)$$

Esto corresponde al caso de incidencia normal a la interfase que separa a los medios.

En el otro caso, cuando

$$S_3 = v_s(k_0^2 - q_s^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_0 = q_s. \quad (2.164)$$

Esta ecuación representa ondas de corte viajando a 45° dentro del sólido. Este es el ángulo de Brewster para ondas elásticas viajando entre un sólido y un fluido[4]. Para los materiales comunes, este ángulo está por arriba del ángulo crítico longitudinal y sólo hay ondas propagantes de corte dentro del sólido. Es importante notar que éste ángulo es independiente de los parámetros de ambos materiales. Para conocer el ángulo

2.3. TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN EN UNA INTERFASE SÓLIDO-FLUIDO.

de incidencia correspondiente se recurre a la ley de Snell (2.63), de la cual se encuentra

$$\theta_f = \arcsen\left(\frac{v_f}{\sqrt{2}v_s}\right). \quad (2.165)$$

Analizaremos la ecuación (2.95) para conocer las implicaciones que tiene cuando se anulan P_3 o S_3 . Expresada en términos de estos coeficientes, dicha ecuación queda

$$P_3u_p^+ - S_3u_s^+ = 0, \quad (2.166)$$

de modo que si $P_3 = 0$, entonces $u_s^+ = 0$, lo cual implica que a incidencia normal desde el fluido no hay ondas de corte transmitidas. Si $S_3 = 0$, entonces $u_p^+ = 0$, es decir, cuando $\theta_s = 45^\circ$ no hay ondas longitudinales transmitidas en el sólido.

Ahora determinaremos qué condiciones deben cumplir los parámetros de los materiales para que se presente transmisión total. De (2.161), se tiene que cuando $P_3 = 0$ también se debe cumplir

$$\frac{P_1}{F_1} - \frac{P_2}{F_2} = 0, \quad (2.167)$$

escribiendo en forma explícita los coeficientes involucrados en esta ecuación queda

$$\frac{v_p q_p}{v_f q_f} = \frac{\rho_s v_p (\omega^2 - 2v_s^2 k_0^2)}{\rho_f v_f \omega^2}. \quad (2.168)$$

Como $k_0 = 0$, entonces

$$\frac{v_p q_p}{v_f q_f} = \frac{\rho_s v_p \omega^2}{\rho_f v_f \omega^2} \Rightarrow \frac{q_p}{q_f} = \frac{\rho_s}{\rho_f}. \quad (2.169)$$

Además,

$$q_f = \frac{\omega}{v_f} \quad \text{y} \quad q_p = \frac{\omega}{v_p}. \quad (2.170)$$

Así, la condición para tener transmisión total a incidencia normal es

$$\frac{v_f}{v_p} = \frac{\rho_s}{\rho_f}, \quad (2.171)$$

o bien, en término de la impedancia acústica longitudinal (2.50),

$$z_f = z_p. \quad (2.172)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

Por lo tanto, cuando la impedancia longitudinal del sólido es igual a la del fluido habrá transmisión total a incidencia normal. Esta condición

Cuando $k_0 = q_s$, la condición que deben de cumplir los parámetros de los materiales viene dada por la ecuación

$$\frac{S_1}{F_1} - \frac{S_2}{F_2} = 0, \quad (2.173)$$

o bien,

$$\frac{v_s k_0}{v_f q_f} = \frac{2\rho_s v_s^3 q_s k_0}{\rho_f v_f \omega^2}. \quad (2.174)$$

Por un lado, como $\theta_s = 45^\circ$,

$$k_0 = q_s = \frac{\omega}{\sqrt{2}v_s} \quad (2.175)$$

Por otro lado,

$$q_f^2 + k_0^2 = \left(\frac{\omega}{v_f}\right)^2 \Rightarrow q_f = \frac{\omega}{v_f} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_f}{v_s}\right)^2} \quad (2.176)$$

Sustituyendo (2.175) y (2.176) en (2.174) llegamos a la ecuación

$$\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_f}{v_s}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\rho_s v_s}{\rho_f v_f}. \quad (2.177)$$

Reescribiendo esta última ecuación se obtiene

$$\left(\frac{z_f}{z_s}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_f}{v_s}\right)^2, \quad (2.178)$$

que es la condición para tener transmisión en el ángulo de Brewster.

En general pueden existir otros ángulos donde haya reflexión nula, pero únicamente en estos dos casos se tiene un solo tipo de onda transmitida en el sólido. Esto hace posible incidir desde el sólido con un tipo de onda determinada, ya sea longitudinal a 0° o de corte a 45° , y tener transmisión total, siempre que se cumpla la condición correspondiente a cada caso.

2.4. Transmisión en una capa

En esta sección analizaremos la propagación de ondas elásticas en una capa de material, ya sea sólido o fluido ideal. El estudio de estos sistemas es la base para comprender la forma como se propagan las ondas en multicapas. Se abordarán tres

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

casos: cuando la capa es sólida y está rodeada de fluidos ideales; cuando la capa es un fluido que separa a dos sólidos, sobre la cual incide una onda longitudinal y, por último, cuando sobre la misma capa de fluido incide una onda de corte.

2.4.1. Propagación de ondas en una placas sólida inmersa en fluidos ideales.

Estudiaremos la propagación de ondas elásticas a través de una placa sólida de extensión infinita y grosor d_s , rodeada por un fluido A por un lado y por un fluido B del otro, en general distintos. Colocaremos el sistema de referencia con el plano $z = 0$ sobre la cara de la placa que está en contacto con el fluido A , como se ilustra en la Figura 2.10.

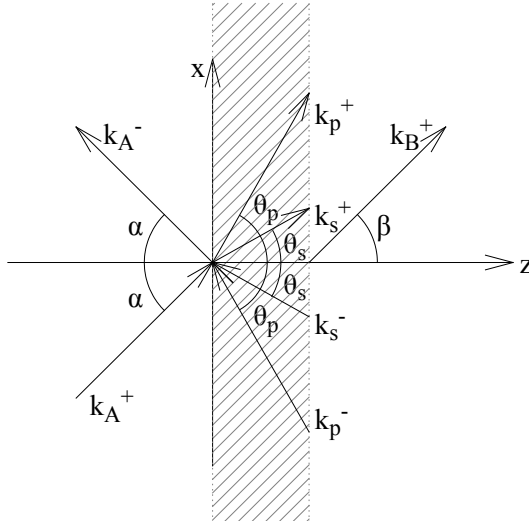


Figura 2.10: Placa sólida infinita de grosor d_s rodeada de dos fluidos ideales, $z < 0$ corresponde al fluido A , $0 < z < d_s$ al sólido y $z > d_s$ al fluido B .

Consideraremos que en cada fluido hay dos ondas viajando. Así, en el medio A , las componentes del vector de desplazamiento son

$$u_{A,x} = \left[v_A k_0 u_A^{+,0} e^{iq_A z} + v_A k_0 u_A^{-,0} e^{-iq_A z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.179)$$

$$u_{A,z} = \left[v_f q_A u_A^{+,0} e^{iq_A z} - v_A q_A u_A^{-,0} e^{-iq_A z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.180)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

En el medio B ,

$$u_{B,x} = \left[v_B k_0 u_B^{+,0} e^{iq_B z} + v_B k_0 u_B^{-,0} e^{-iq_B z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.181)$$

$$u_{B,z} = \left[v_f q_B u_B^{+,0} e^{iq_B z} - v_B q_A u_B^{-,0} e^{-iq_B z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.182)$$

En el sólido,

$$u_{S,x} = \left[v_p k_0 u_p^{+,0} e^{iq_p z} + v_p k_0 u_p^{-,0} e^{-iq_p z} + v_s q_s u_s^{+,0} e^{iq_s z} + v_s q_s u_s^{-,0} e^{-iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.183)$$

$$u_{S,z} = \left[v_p q_p u_p^{+,0} e^{iq_p z} - v_p q_p u_p^{-,0} e^{-iq_p z} - v_s k_0 u_s^{+,0} e^{iq_s z} + v_s k_0 u_s^{-,0} e^{-iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.184)$$

Donde el superíndice 0 indica el sistema de referencia.

En este caso, es necesario aplicar las condiciones de frontera en $z = 0$ y en $z = d_s$, esto es

$$\begin{aligned} u_{A,z}|_{z=0} &= u_{S,z}|_{z=0}, & u_{S,z}|_{z=d_s} &= u_{B,z}|_{z=d_s}, \\ \sigma_{zz}^A|_{z=0} &= \sigma_{zz}^S|_{z=0}, & \sigma_{zz}^S|_{z=d_s} &= \sigma_{zz}^B|_{z=d_s}, \\ \sigma_{xz}^S|_{z=0} &= 0, & \sigma_{xz}^S|_{z=d_s} &= 0. \end{aligned}$$

De forma análoga a como se hizo al estudiar la propagación de ondas en una interfase sólido-fluido, en este caso también es posible expresar las componentes de corte del vector de desplazamiento en el sólido, en términos de las componentes longitudinales, a partir de la condición para σ_{xz}^s . Aplicando esta condición en $z = 0$ se obtiene la ecuación

$$P_3 u_p^{+,0} - P_3 u_p^{-,0} - S_3 u_s^{+,0} + S_3 u_s^{-,0} = 0, \quad (2.185)$$

en $z = d$,

$$P_3 e^{iq_p d_s} u_p^{+,0} - P_3 e^{-iq_p d_s} u_p^{-,0} - S_3 e^{iq_s d_s} u_s^{+,0} + S_3 e^{iq_s d_s} u_s^{-,0} = 0, \quad (2.186)$$

Agrupando las ecuaciones (2.185) y (2.186) en forma matricial, queda

$$P_3 \mathbb{D}_p \mathbf{u}_p^0 + S_3 \mathbb{D}_s \mathbf{u}_s^0 = 0, \quad (2.187)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

donde \mathbb{D}_p y \mathbb{D}_s son matrices de la forma

$$\mathbb{D}_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{iq_m d_s} & -e^{-iq_m d_s} \end{pmatrix} \quad (2.188)$$

y

$$\mathbf{u}_p^0 = \begin{pmatrix} u_p^{+,0} \\ u_p^{-,0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_s^0 = \begin{pmatrix} u_s^{+,0} \\ u_s^{-,0} \end{pmatrix}. \quad (2.189)$$

Entonces, de la ecuación (2.187) se obtiene la relación

$$\mathbf{u}_s^0 = \mathbb{Q} \mathbf{u}_p^0, \quad (2.190)$$

con

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \mathbb{D}_s^{-1} \mathbb{D}_p. \quad (2.191)$$

Desarrollando el producto $\mathbb{D}_s^{-1} \mathbb{D}_p$,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_s^{-1} \mathbb{D}_p &= \frac{1}{e^{iq_s d_s} - q^{-iq_s d_s}} \begin{pmatrix} -e^{-iq_s d_s} & 1 \\ -e^{iq_s d_s} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{iq_p d_s} & -e^{-iq_p d_s} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-i}{2\text{sen}(q_s d_s)} \begin{pmatrix} e^{iq_p d_s} - e^{-iq_s d_s} & e^{-iq_s d_s} - e^{-iq_p d_s} \\ e^{iq_p d_s} - e^{iq_s d_s} & e^{iq_s d_s} - e^{-iq_p d_s} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.192)$$

Entonces,

$$\mathbb{Q} = \frac{iv_p k_0 q_s}{v_s (q_s^2 - k_0^2) \text{sen}(q_s d_s)} \begin{pmatrix} e^{iq_p d_s} - e^{-iq_s d_s} & e^{-iq_s d_s} - e^{-iq_p d_s} \\ e^{iq_p d_s} - e^{iq_s d_s} & e^{iq_s d_s} - e^{-iq_p d_s} \end{pmatrix}. \quad (2.193)$$

Esta es la matriz que relaciona a las componentes de corte del vector de desplazamiento con las longitudinales en una placa sólida infinita rodeada de fluidos ideales.

Aplicando las condiciones de frontera restantes, en $z = 0$ obtenemos las ecuaciones

$$F_1^A u_A^{+,0} - F_1^A u_A^{-,0} = P_1 u_p^{+,0} - P_1 u_p^{-,0} + S_1 u_s^{+,0} - S_1 u_s^{-,0}, \quad (2.194)$$

$$F_2^A u_A^{+,0} + F_2^A u_A^{-,0} = P_2 u_p^{+,0} + P_2 u_p^{-,0} + S_2 u_s^{+,0} + S_2 u_s^{-,0}, \quad (2.195)$$

donde

$$F_1^A = v_A q_A \quad \text{y} \quad F_2^A = \rho_A v_A \omega^2. \quad (2.196)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

Agrupando las ecuaciones (2.194) y (2.195) en forma matricial, queda

$$\mathbb{M}_A \mathbf{u}_A^0 = \mathbb{M}_p \mathbf{u}_p^0 + \mathbb{M}_s \mathbf{u}_s^0, \quad (2.197)$$

donde

$$\mathbb{M}_A = \begin{pmatrix} F_1^A & -F_1^A \\ F_2^A & F_2^A \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_p = \begin{pmatrix} P_1 & -P_1 \\ P_2 & P_2 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbb{M}_s = \begin{pmatrix} S_1 & -S_1 \\ S_2 & S_2 \end{pmatrix}. \quad (2.198)$$

Recurriendo a la relación (2.190), es posible expresar la última ecuación como

$$\mathbb{M}_A \mathbf{u}_A^0 = (\mathbb{M}_p + \mathbb{M}_s \mathbb{Q}) \mathbf{u}_p^0. \quad (2.199)$$

Ahora, si colocamos el origen del sistema de referencia en $z = d_s$ y aplicamos las condiciones de frontera en el mismo punto, se tiene

$$F_1^B u_B^{+,d_s} - F_1^B u_B^{-,d_s} = P_1 u_p^{+,d_s} - P_1 u_p^{-,d_s} + S_1 u_s^{+,d_s} - S_1 u_s^{-,d_s}, \quad (2.200)$$

$$F_2^B u_B^{+,d_s} + F_2^B u_B^{-,d_s} = P_2 u_p^{+,d_s} + P_2 u_p^{-,d_s} + S_2 u_s^{+,d_s} + S_2 u_s^{-,d_s}, \quad (2.201)$$

donde

$$F_1^B = v_B q_B \quad y \quad F_2^B = \rho_B v_B \omega^2. \quad (2.202)$$

Entonces, expresando estas ecuaciones en forma matricial queda

$$\mathbb{M}_B \mathbf{u}_B^{d_s} = \mathbb{M}_p \mathbf{u}_p^{d_s} + \mathbb{M}_s \mathbf{u}_s^{d_s}, \quad (2.203)$$

Con el origen en $z = 0$ se encuentra que

$$\mathbf{u}_p^{d_s} = \mathbb{P}_p \mathbf{u}_p^0, \quad \mathbf{u}_s^{d_s} = \mathbb{P}_s \mathbf{u}_s^0, \quad (2.204)$$

donde \mathbb{P}_p y \mathbb{P}_s son las matrices de propagación en el sólido y son de la forma

$$\mathbb{P}_p = \begin{pmatrix} e^{iq_p d_s} & 0 \\ 0 & e^{-iq_p d_s} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_s = \begin{pmatrix} e^{iq_s d_s} & 0 \\ 0 & e^{-iq_s d_s} \end{pmatrix}. \quad (2.205)$$

Sustituyendo (2.204) en (2.203), se llega a la ecuación

$$\mathbb{M}_B \mathbf{u}_B^{d_s} = \mathbb{M}_p \mathbb{P}_p \mathbf{u}_p^0 + \mathbb{M}_s \mathbb{P}_s \mathbf{u}_s^0. \quad (2.206)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

Haciendo uso de la relación (2.190), queda

$$\mathbb{M}_B \mathbf{u}_B^{d_s} = (\mathbb{M}_p \mathbb{P}_p + \mathbb{M}_s \mathbb{P}_s \mathbb{Q}) \mathbf{u}_p^0. \quad (2.207)$$

De aquí,

$$\mathbf{u}_p^0 = (\mathbb{M}_p \mathbb{P}_p + \mathbb{M}_s \mathbb{P}_s \mathbb{Q})^{-1} \mathbb{M}_B \mathbf{u}_B^{d_s} \quad (2.208)$$

Finalmente, al sustituir (2.208) en (2.199) se obtiene

$$\mathbf{u}_A^0 = \mathbb{T}_s \mathbf{u}_B^{d_s}, \quad (2.209)$$

donde

$$\mathbb{T}_s = \mathbb{M}_A^{-1} (\mathbb{M}_p + \mathbb{M}_s \mathbb{Q}) (\mathbb{M}_p \mathbb{P}_p + \mathbb{M}_s \mathbb{P}_s \mathbb{Q})^{-1} \mathbb{M}_B. \quad (2.210)$$

Si consideramos únicamente ondas propagándose hacia la derecha en el medio B, esto es $u_B^{-,0} = 0$, entonces, de la ecuación (2.209) se obtiene

$$u_A^{+,0} = T_{11} u_B^{+,d_s}, \quad (2.211)$$

$$u_A^{-,0} = T_{21} u_B^{+,d_s}, \quad (2.212)$$

con $T_{ij} = (\mathbb{T}_s)_{ij}$.

Con esto, la reflectividad y la transmitividad para este caso son

$$r_A = \frac{u_A^{-,0}}{u_A^{+,0}} = \frac{T_{21}}{T_{11}}, \quad (2.213)$$

$$t_B = \frac{u_B^{+,0}}{u_A^{+,0}} = \frac{1}{T_{11}}. \quad (2.214)$$

Entonces, los coeficientes de reflexión y transmisión resultan

$$R_A = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.215)$$

$$T_B = \frac{z_B \cos \beta}{z_A \cos \alpha} \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.216)$$

Si tomamos como medio de incidencia al fluido B, haciendo $u_A^{+,0} = 0$ y $u_B^{-,d_s} \neq 0$,

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

entonces

$$T_{11}u_B^{+,d_s} + T_{12}u_B^{-,d_s} = 0, \quad (2.217)$$

$$T_{21}u_B^{+,d_s} + T_{22}u_B^{-,d_s} = u_A^{-,0}. \quad (2.218)$$

En este caso, la reflectividad y la transmitividad se definen como

$$r_B = \frac{u_B^{+,0}}{u_B^{-,0}} = -\frac{T_{12}}{T_{11}}, \quad (2.219)$$

$$t_A = \frac{u_A^{-,0}}{u_B^{-,0}} = \frac{T_{11}T_{22} - T_{21}T_{12}}{T_{11}}. \quad (2.220)$$

Recordando que $\det \mathbb{T}_s = T_{11}T_{22} - T_{21}T_{12}$, podemos expresar la transmitividad como

$$t_A = \frac{\det \mathbb{T}_s}{T_{11}}. \quad (2.221)$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes son

$$R_B = \left| \frac{T_{12}}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.222)$$

$$T_A = \frac{z_A \cos \alpha}{z_B \cos \beta} \left| \frac{\det \mathbb{T}_s}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.223)$$

Cuando ambos fluidos son iguales, la expresión de la transmitividad se simplifica y queda

$$t = \frac{1}{T_{11}}, \quad (2.224)$$

al incidir desde el medio A, o bien

$$t = \frac{\det \mathbb{T}_s}{T_{11}}, \quad (2.225)$$

al incidir desde el medio B. De aquí se deduce que, cuando los medios que rodean a la placa son iguales, entonces se cumple

$$\det \mathbb{T}_s = 1. \quad (2.226)$$

Esta propiedad del determinante será de gran utilidad para el estudio de multicapas compuestas por placas sólidas y capas de fluido ideal.

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

A diferencia de la propagación de ondas en una sola interfase entre dos medios, la reflexión y la transmisión de ondas en capas depende de la frecuencia de la onda incidente. En la Figura 2.11 se muestra el coeficiente de transmisión para cuatro sistemas diferentes en función del ángulo de incidencia y la frecuencia, en dichos ejemplos el medio de incidencia es igual al medio de transmisión.

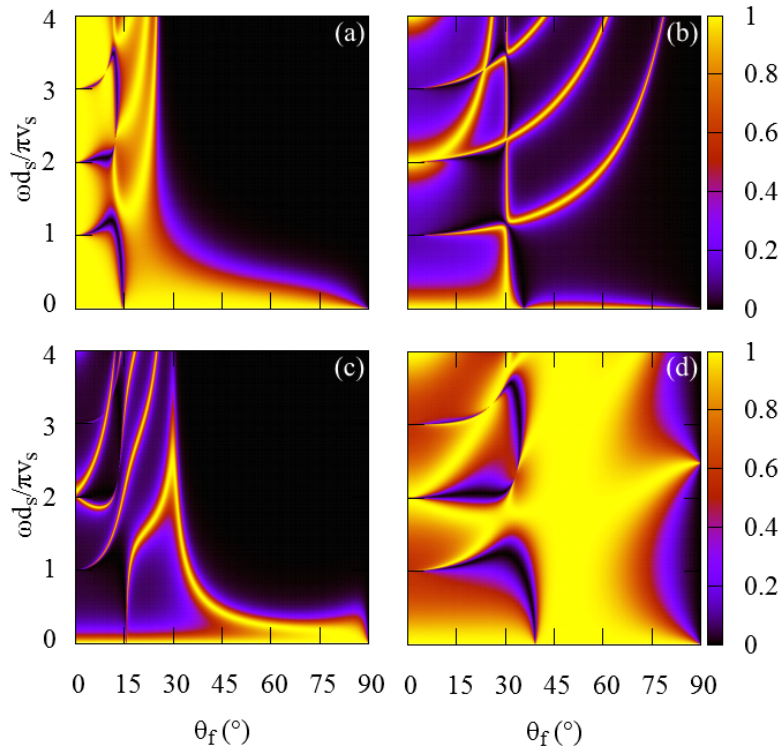


Figura 2.11: Coeficiente de transmisión para ondas propagándose a través de una placa sólida infinita de grosor d_s rodeada de fluido. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), Agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

En general, las condiciones de transmisión total para este sistema no son simples; pero, cuando hay una gran contraste de impedancias entre el fluido y el sólido, los máximos de transmisión tienden a los modos guiados de la placa[33](ver Apéndice A). Cuando la impedancia del fluido es mucho mayor a la impedancia del sólido, los máximos de transmisión se aproximan a los modos guiados de una placa infinita rodeada de un medio rígido. En el caso opuesto, cuando la impedancia del sólido es mucho mayor que la del fluido, los máximos de transmisión tienden a los modos de una placa libre o modos Lamb, como puede observarse en la Figura 2.12. Esto se debe a que cuando la frecuencia de la onda incidente coincide con la de uno de los modos guiados en la placa, se excita dicho modo y la energía puede ser radiada hacia el otro fluido. En cambio,

cuando la frecuencia no corresponde a ninguno de los modos de la placa, la mayoría de la energía es reflejada hacia el medio de incidencia.

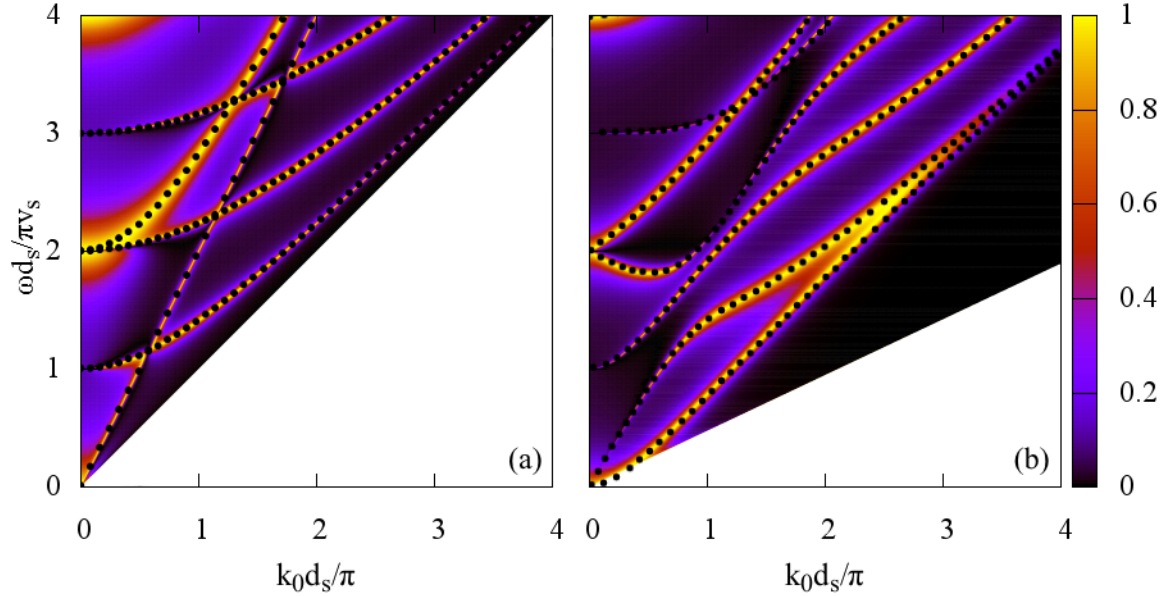


Figura 2.12: (a) Comparación de la transmisión de ondas elásticas en una placa de PMMA rodeada de Hg, con los modos de la placa rodeada de un medio rígido; (b) comparación de la transmisión en una placa de Al rodeada de agua, con los modos Lamb de la misma placa. Los puntos negros denotan la dispersión de los modos de las placas.

También puede observarse en la Figura 2.11, que para el caso de una placa de Al inmersa en Hg, que se cumple la condición para tener transmisión total a incidencia normal; de forma similar, para el caso de agua y PMMA, se cumple la condición (2.174) y se tiene transmisión total alrededor de $\theta_f = 50^\circ$.

Otro fenómeno muy importante que se presenta en este sistema, es la existencia de ángulos y frecuencias donde la transmisión es cero y cuya posición es independiente de los parámetros de los fluidos que rodean al sólido[4].

2.4.2. Propagación de ondas longitudinales en un capa de fluido ideal entre dos sólidos.

Ahora analizaremos la propagación de ondas a través de una capa de fluido ideal de grosor d_f rodeada por sólidos elásticos semi-infinitos A y B , como se muestra en la Figura 2.13.

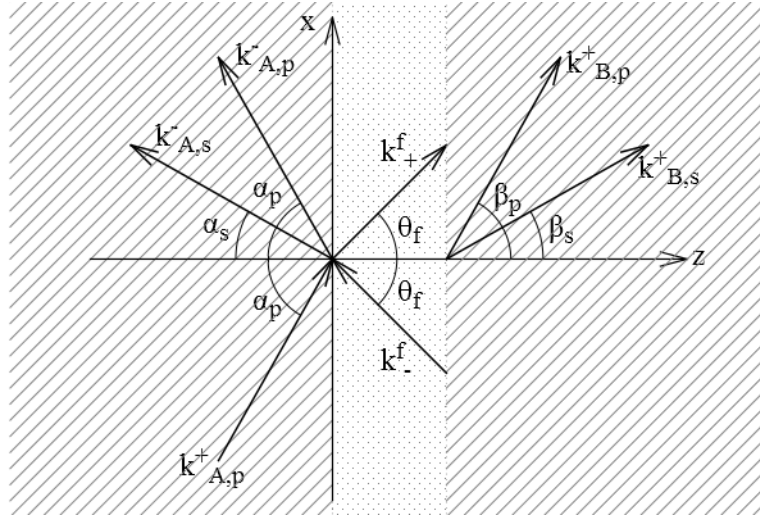


Figura 2.13: Capa de fluido de grosor d_f entre dos sólidos elásticos A y B; $z < 0$ corresponde al sólido A, $0 < z < d_f$ al fluido y $z > d_f$ al sólido B.

Primero consideraremos el caso donde la onda incidente es una onda longitudinal, de modo que las componentes del vector de desplazamiento en el sólido A son

$$u_{A,x} = \left[v_{A,p} k_0 u_{A,p}^{+,0} e^{iq_{A,p}z} + v_{A,p} k_0 u_{A,p}^{-,0} e^{-iq_{A,p}z} + v_{A,s} q_{A,s} u_{A,s}^{-,0} e^{-iq_{A,s}z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.227)$$

$$u_{A,z} = \left[v_{A,p} q_{A,p} u_{A,p}^{+,0} e^{iq_{A,p}z} - v_{A,p} q_{A,p} u_{A,p}^{-,0} e^{-iq_{A,p}z} + v_{A,s} k_0 u_{A,s}^{-,0} e^{-iq_{A,s}z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.228)$$

En el fluido,

$$u_{f,x} = \left[v_f k_0 u_f^{+,0} e^{iq_f z} + v_f k_0 u_f^{-,0} e^{-iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.229)$$

$$u_{f,z} = \left[v_f q_f u_f^{+,0} e^{iq_f z} - v_f q_f u_f^{-,0} e^{-iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.230)$$

Y en el sólido B,

$$u_{B,x} = \left[v_{B,p} k_0 u_{B,p}^{+,0} e^{iq_{B,p}z} + v_{B,s} q_{B,s} u_{B,s}^{+,0} e^{iq_{B,s}z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.231)$$

$$u_{B,z} = \left[v_{B,p} q_{B,p} u_{B,p}^{+,0} e^{iq_{B,p}z} - v_{B,s} k_0 u_{B,s}^{+,0} e^{iq_{B,s}z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.232)$$

Aplicando las condición de anulación del tensor de esfuerzos tangencial a las interfases

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

sólido-fluido σ_{xz} , en $z = 0$ y en $z = d_f$, se obtienen las ecuaciones

$$u_{A,s}^{-,0} = Q_A(u_{A,p}^{-,0} - u_{A,p}^{+,0}), \quad (2.233)$$

y

$$u_{B,s}^{+,d_f} = Q_B u_{B,p}^{+,d_f}. \quad (2.234)$$

Aplicando las condiciones de continuidad de la componente del vector de desplazamiento y del tensor de esfuerzos normales a la interfase $z = 0$ y haciendo uso de (2.233), se obtiene la ecuación matricial

$$\mathbb{M}_A \mathbf{u}_A^0 = \mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^0, \quad (2.235)$$

con

$$\mathbb{M}_A = \begin{pmatrix} P_{A,1} + S_{A,1}Q_A & -P_{A,1} - S_{A,1}Q_A \\ P_{A,2} - S_{A,2}Q_A & P_{A,2} + S_{A,2}Q_A \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_A^0 = \begin{pmatrix} u_{A,p}^{+,0} \\ u_{A,p}^{-,0} \end{pmatrix}, \quad (2.236)$$

donde el subíndice de los elementos de la matriz \mathbb{M}_A indica el medio al que corresponden los coeficientes.

Ahora, con origen en $z = d_f$, aplicamos las condiciones de frontera usando (2.234) y obtenemos la ecuación

$$\mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^{d_f} = \mathbb{M}_B \mathbf{u}_B^{d_f}, \quad (2.237)$$

donde

$$\mathbb{M}_B = \begin{pmatrix} P_{B,1} + S_{B,1}Q_B & 0 \\ P_{B,2} + S_{B,2}Q_B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_{B,p}^0 = \begin{pmatrix} u_{B,p}^{+,d_f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.238)$$

De forma similar al caso de una placa sólida infinita, para la capa de fluido se encuentra la relación

$$\mathbf{u}_f^0 = \mathbb{P}_f \mathbf{u}_f^{d_f} \quad (2.239)$$

donde \mathbb{P}_f es la matriz de propagación en el fluido,

$$\mathbb{P}_f = \begin{pmatrix} e^{-iq_f d_f} & 0 \\ 0 & e^{iq_f d_f} \end{pmatrix} \quad (2.240)$$

Sustituyendo (2.240) en la ecuación (2.235) queda

$$\mathbb{M}_A \mathbf{u}_A^0 = \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f \mathbf{u}_f^{d_f}. \quad (2.241)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

Por otro lado, de (2.237) se tiene

$$\mathbf{u}_f^{d_f} = \mathbb{M}_f^{-1} \mathbb{M}_B \mathbf{u}_B^{d_f}, \quad (2.242)$$

entonces,

$$\mathbf{u}_A^0 = \mathbb{T}_f \mathbf{u}_B^{d_f}, \quad (2.243)$$

donde hemos definido

$$\mathbb{T}_f = \mathbb{M}_A^{-1} \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f \mathbb{M}_f^{-1} \mathbb{M}_B. \quad (2.244)$$

Para este sistema tenemos dos reflectividades y dos transmitividades.

$$r_p = \frac{u_{A,p}^{-,0}}{u_{A,p}^{+,0}} = \frac{T_{21}}{T_{11}}, \quad (2.245)$$

$$r_s = \frac{u_{A,s}^{-,0}}{u_{A,p}^{+,0}} = Q_A \left(\frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right), \quad (2.246)$$

$$t_p = \frac{u_{B,p}^{+,0}}{u_{A,p}^{+,0}} = \frac{1}{T_{11}}, \quad (2.247)$$

$$t_s = \frac{u_{B,s}^{+,0}}{u_{A,p}^{+,0}} = \frac{Q_B}{T_{11}}. \quad (2.248)$$

Donde se ha hecho uso de las ecuaciones (2.243), (2.233) y (2.234), con $T_{ij} = (\mathbb{T}_f)_{ij}$.

Entonces, los coeficientes de reflexión y transmisión para este sistema son

$$R_p = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.249)$$

$$R_s = |Q_A|^2 \frac{z_{A,s} \cos \alpha_s}{z_{A,p} \cos \alpha_p} \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right|^2, \quad (2.250)$$

$$T_p = \frac{z_{B,p} \cos \beta_p}{z_{A,p} \cos \alpha_p} \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.251)$$

$$T_s = \frac{z_{B,s} \cos \beta_s}{z_{A,p} \cos \alpha_p} \left| \frac{Q_B}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.252)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

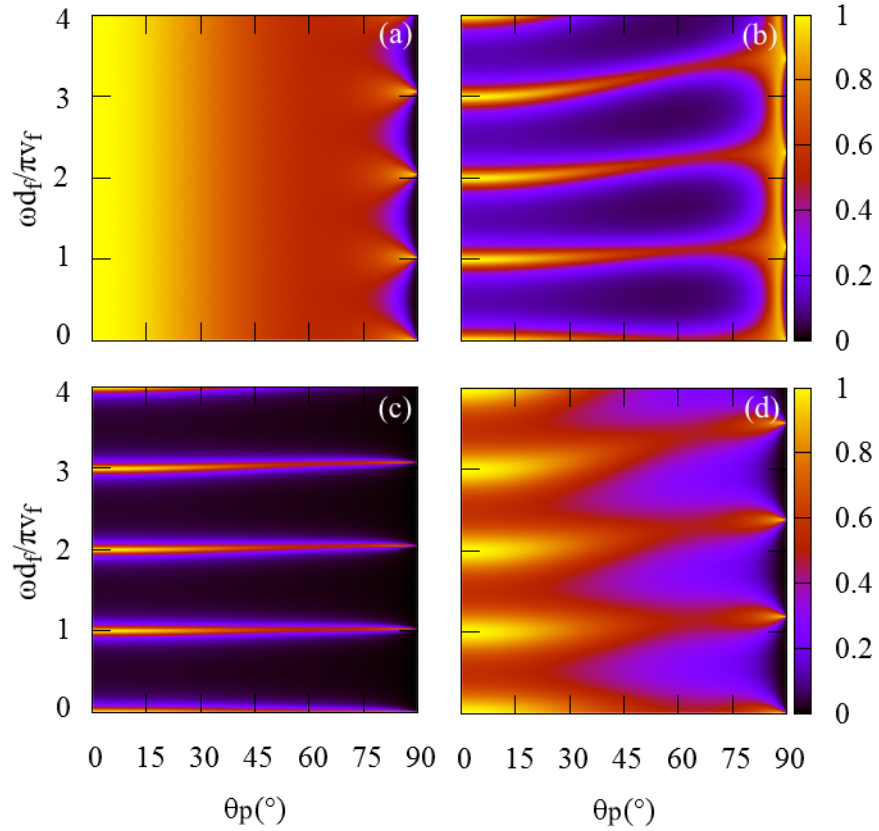


Figura 2.14: Coeficiente de transmisión longitudinal para ondas longitudinales propagándose a través de una capa de fluido de grosor d_f . En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), Agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

En la Figura 2.14 se grafican los coeficientes de transmisión T_p para ondas longitudinales incidiendo en una capa de fluido rodeada de dos sólido iguales, en función del ángulo de incidencia y de la frecuencia. Para una capa de Hg rodeada de Al se observa que salvo para ángulos muy grandes, la transmisión es prácticamente independiente de la frecuencia y es total para incidencia normal.

2.4.3. Propagación de ondas de corte en un capa de fluido ideal entre dos sólidos.

Cuando la onda incidente desde el sólido es una de corte, entonces las componentes del vector de desplazamiento en el sólido A son

$$u_{A,x} = \left[v_{A,p} k_0 u_{A,p}^{-,0} e^{-iq_{A,p}z} + v_{A,s} q_{A,s} u_{A,s}^{+,0} e^{iq_{A,s}z} + v_{A,s} q_{A,s} u_{A,s}^{-,0} e^{-iq_{A,s}z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.253)$$

$$u_{A,z} = \left[-v_{A,p} q_{A,p} u_{A,p}^{-,0} e^{-iq_{A,p}z} - v_{A,s} k_0 u_{A,s}^{+,0} e^{iq_{A,s}z} + v_{A,s} k_0 u_{A,s}^{-,0} e^{-iq_{A,s}z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.254)$$

En el fluido,

$$u_{f,x} = \left[v_f k_0 u_f^{+,0} e^{iq_f z} + v_f k_0 u_f^{-,0} e^{-iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.255)$$

$$u_{f,z} = \left[v_f q_f u_f^{+,0} e^{iq_f z} - v_f q_f u_f^{-,0} e^{-iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.256)$$

En el sólido B ,

$$u_{B,x} = \left[v_{B,p} k_0 u_{B,p}^{+,0} e^{iq_{B,p}z} + v_{B,s} q_{B,s} u_{B,s}^{+,0} e^{iq_{B,s}z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}, \quad (2.257)$$

$$u_{B,z} = \left[v_{B,p} q_{B,p} u_{B,p}^{+,0} e^{iq_{B,p}z} - v_{B,s} k_0 u_{B,s}^{+,0} e^{iq_{B,s}z} \right] \frac{e^{i(k_0x - \omega t)}}{\omega}. \quad (2.258)$$

Para este sistema, al aplicar las condición de anulación de σ_{xz} en $z = 0$ y en $z = d_f$, se obtienen las ecuaciones

$$u_{A,p}^{-,0} = \frac{1}{Q_A} (u_{A,s}^{-,0} - u_{A,s}^{+,0}), \quad (2.259)$$

y

$$u_{B,p}^{+,d_f} = \frac{1}{Q_B} u_{B,s}^{+,d_f}. \quad (2.260)$$

De las otras condiciones de frontera, en $z = 0$, se obtiene la ecuación matricial

$$\mathbb{M}_A \mathbf{u}_A^0 = \mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^0, \quad (2.261)$$

en este caso

$$\mathbb{M}_A = \frac{1}{Q_A} \begin{pmatrix} P_{A,1} + S_{A,1} Q_A & -P_{A,1} - S_{A,1} Q_A \\ -P_{A,2} + S_{A,2} Q_A & P_{A,2} + S_{A,2} Q_A \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_A^0 = \begin{pmatrix} u_{A,s}^{+,0} \\ u_{A,s}^{-,0} \end{pmatrix}. \quad (2.262)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

Por otro lado, con origen en $z = d_f$, al aplicar las condiciones de frontera se llega a la ecuación

$$\mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^{d_f} = \mathbb{M}_B \mathbf{u}_B^{d_f}, \quad (2.263)$$

donde

$$\mathbb{M}_B = \frac{1}{Q_B} \begin{pmatrix} P_{B,1} + S_{B,1}Q_B & 0 \\ P_{B,2} + S_{B,2}Q_B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_{B,s}^0 = \begin{pmatrix} u_{B,s}^{+,d_f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.264)$$

Usando la relación (2.239) en (2.263), queda

$$\mathbb{M}_f \mathbb{P}_f^{-1} \mathbf{u}_f^0 = \mathbb{M}_B \mathbf{u}_B^{d_f}. \quad (2.265)$$

Sustituyendo esta ecuación en (2.261) se llega a

$$\mathbf{u}_A^0 = \mathbb{T}_f \mathbf{u}_B^{d_f}, \quad \text{donde} \quad \mathbb{T}_f = \mathbb{M}_A^{-1} \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f \mathbb{M}_f^{-1} \mathbb{M}_B. \quad (2.266)$$

En este caso, las reflectividades y las transmitividades son

$$r_s = \frac{u_{A,s}^{-,0}}{u_{A,s}^{+,0}} = \frac{T_{21}}{T_{11}}, \quad (2.267)$$

$$r_p = \frac{u_{A,p}^{-,0}}{u_{A,s}^{+,0}} = \frac{1}{Q_A} \left(\frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right), \quad (2.268)$$

$$t_s = \frac{u_{B,s}^{+,0}}{u_{A,s}^{+,0}} = \frac{1}{T_{11}}, \quad (2.269)$$

$$t_p = \frac{u_{B,p}^{+,0}}{u_{A,s}^{+,0}} = \frac{1}{Q_B T_{11}}. \quad (2.270)$$

Entonces, los coeficientes de transmisión y reflexión vienen dados por

$$R_s = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.271)$$

$$R_p = \left| \frac{1}{Q_A} \frac{z_{A,p} \cos \alpha_p}{z_{A,s} \cos \alpha_s} \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right| \right|^2, \quad (2.272)$$

$$T_s = \frac{z_{B,s} \cos \beta_s}{z_{A,s} \cos \alpha_s} \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.273)$$

2.4. TRANSMISIÓN EN UNA CAPA

$$T_p = \left| \frac{1}{Q_B} \right|^2 \frac{z_{B,p} \cos \beta_p}{z_{A,s} \cos \alpha_s} \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.274)$$

En la Figura F-TMS se muestran el coeficiente de transmisión T_s para ondas de corte viajando a través de una capa de fluido ideal rodeada de sólidos iguales, en función del ángulo de incidencia y la frecuencia. En todos los casos se observa que la transmisión es mínima por debajo del ángulo crítico longitudinal del sólido.

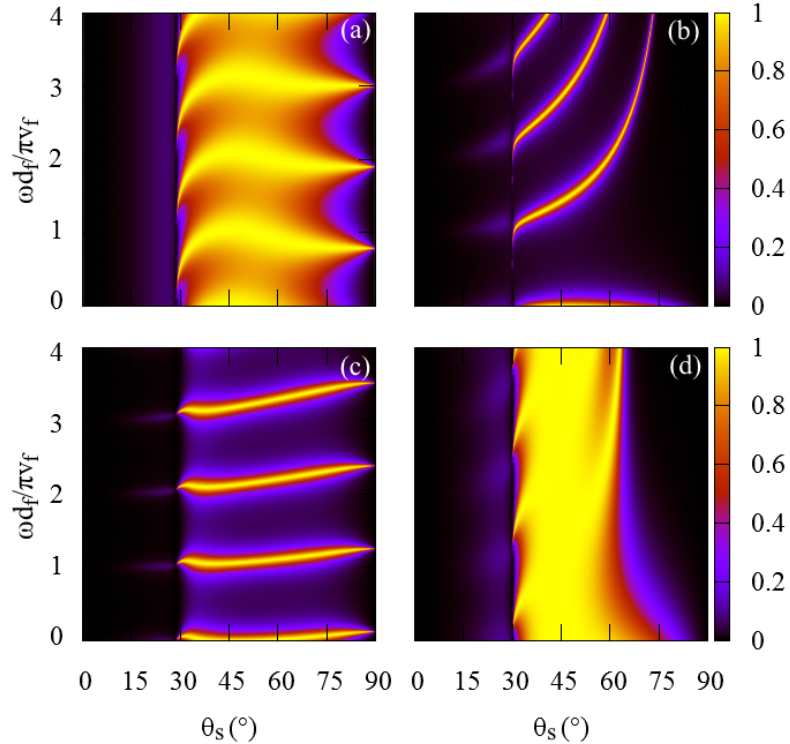


Figura 2.15: Coeficiente de transmisión para ondas de corte propagándose a través de una capa de fluido de grosor d_f . En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), Agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

En los casos donde la diferencia de impedancias entre los materiales es grande (Hg-PMMA y Agua-PMMA) se ve que los máximos de transmisión son picos agudos y lejos de ellos hay poca transmisión. En cambio, cuando la diferencia de impedancias no es muy grande, como es el caso Hg-Al, hay menor contraste entre la transmisión en los máximos y alrededor de ellos. Un caso particular es el de Agua-PMMA, en el cual se observa transmisión total alrededor de 45° , lo cual se debe a que estos materiales cumplen la condición (2.174).

2.5. Superredes sólido-fluido.

En esta sección estudiaremos la propagación de ondas elásticas en medios compuestos de placas sólidas y capas de fluidos ideales, alternadas periódicamente. Primero calcularemos la estructura de bandas para el sistema con un número infinito de capas, es decir un cristal fonónico de periodicidad unidimensional o superred, de periodo $D = d_s + d_f$. Después, analizaremos la propagación de ondas en una multicapa formada por un número finito de capas. Un fenómeno que se presenta en este tipo de estructuras es la existencia de brechas (*gaps*) o bandas de frecuencias prohibidas donde no se propagan ondas elásticas a través de ellos.

2.5.1. Estructura de bandas.

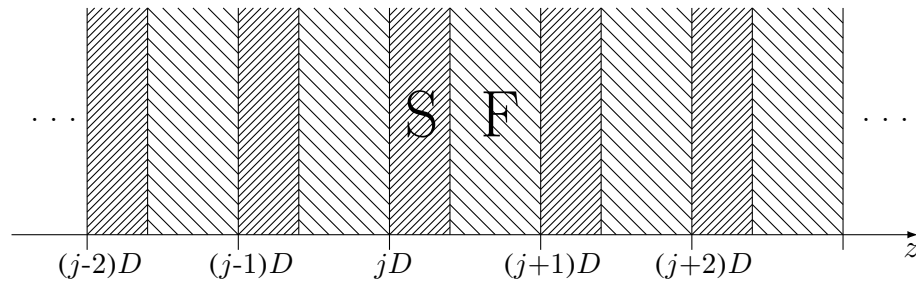


Figura 2.16: Cristal fonónico de periodicidad unidimensional.

Colocaremos el eje z sobre el eje de simetría de la superred, como se muestra en la Figura 2.16. Recordando la ecuación (2.209) se tiene que, para la j -ésima placa,

$$\mathbf{u}_f^{jD} = \mathbb{T}_s \mathbf{u}_f^{jD+d_s}. \quad (2.275)$$

Además, de la ecuación (2.239) se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_f^{jD+d_s} &= \mathbb{P}_f \mathbf{u}_f^{jD+d_s+d_f} \\ &= \mathbb{P}_f \mathbf{u}_f^{(j+1)D}. \end{aligned} \quad (2.276)$$

entonces, sustituyendo (2.276) en (2.275) se obtiene

$$\mathbf{u}_f^{jD} = \mathbb{M}_{sf} \mathbf{u}_f^{(j+1)D}, \quad (2.277)$$

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

donde $\mathbb{M}_{sf} = \mathbb{T}_s \mathbb{P}_f$.

Por un lado, el teorema de Bloch establece que la función de onda en un medio periódico puede expresarse como

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} v(\mathbf{r}), \quad (2.278)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición, \mathbf{K} es el vector de onda de Bloch y $v(\mathbf{r})$ es una función periódica con el mismo periodo que el cristal[32]. Para el sistema en estudio, de periodicidad unidimensional con constante de red D , se deduce que

$$\mathbf{u}(z + D) = e^{iKD} \mathbf{u}(z). \quad (2.279)$$

Entonces, podemos expresar el vector $\mathbf{u}_f^{(j+1)D}$ como

$$\mathbf{u}_f^{(j+1)D} = e^{iKD} \mathbf{u}_f^{jD}, \quad (2.280)$$

donde K es el número de onda de Bloch.

Invirtiendo esta relación, queda

$$\mathbf{u}_f^{jD} = e^{-iKD} \mathbf{u}_f^{(j+1)D}. \quad (2.281)$$

Entonces, comparando esta ecuación con (2.277) se obtiene la ecuación de eigenvalores

$$\mathbb{M}_{sf} \mathbf{u}_f^{(j+1)D} = e^{-iKD} \mathbf{u}_f^{(j+1)D}, \quad (2.282)$$

donde se puede observar que e^{-iKD} es el eigenvalor de la matriz \mathbb{M}_{sf} .

Por otro lado, la suma de los eigenvalores de una matriz es igual a la traza de la misma. En este caso,

$$\text{tr} \mathbb{M}_{sf} = 2e^{-iKD}. \quad (2.283)$$

Como $\mathbb{M}_{sf} = \mathbb{T}_s \mathbb{P}_f$ entonces $\det \mathbb{M}_{sf} = 1$, ya que $\det \mathbb{T}_s = 1$, $\det \mathbb{P}_f = 1$ y el determinante de un producto de matrices es igual al producto de sus determinantes. Esto implica que la traza de \mathbb{M}_{sf}^{-1} es igual a la traza de la matriz \mathbb{M}_{sf} . Entonces, multiplicando la ecuación (2.282) por \mathbb{M}_{sf}^{-1} se llega a

$$\mathbb{M}_{sf}^{-1} \mathbf{u}_f^{(j+1)D} = e^{iKD} \mathbf{u}_f^{(j+1)D}. \quad (2.284)$$

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

De aquí se deduce que

$$\text{tr}\mathbb{M}_{sf} = 2e^{iKD}. \quad (2.285)$$

Al sumar esta ecuación a (2.283) queda

$$2\text{tr}\mathbb{M}_{sf} = 2(e^{iKD} + e^{-iKD}). \quad (2.286)$$

Recordando la identidad

$$\cos(KD) = \frac{e^{iKD} + e^{-iKD}}{2}, \quad (2.287)$$

entonces obtenemos la ecuación

$$\cos(KD) = \frac{1}{2}\text{tr}\mathbb{M}_{sf}. \quad (2.288)$$

A partir de esta ecuación se encuentra la relación de dispersión del número de onda de Bloch K y la frecuencia ω , para una superred sólido-fluido con constante de red D . Esta relación permite conocer las curvas de dispersión de la superred, lo cual determina su estructura de bandas. Como el rango del coseno está entre -1 y 1, entonces en las frecuencias donde el lado derecho de la ecuación (2.288) toma valores mayores a uno, es donde se presentan las brechas en las bandas del sistema. En la Figura 2.17 se muestran las curvas de dispersión para cuatro superredes con factor de llenado $f_s = 0.5$, para K en la zona irreducible de Brillouin. El factor de llenado expresa la relación entre el grosor de las placas d_s y el de las capas de fluido d_f , y se define como

$$f_s = \frac{d_s}{D} \quad \text{o} \quad f_f = \frac{d_f}{D}. \quad (2.289)$$

En la Figura 2.17 puede observarse como las brechas son más anchas cuando la diferencia de impedancias es mayor y por consiguiente, las bandas son más delgadas. En el sistema Hg-Al, como la transmisión es casi total para $k_0 = 0$, entonces las brechas que se presentan en esta región son muy angostas y el sistema se comporta como un medio homogéneo.

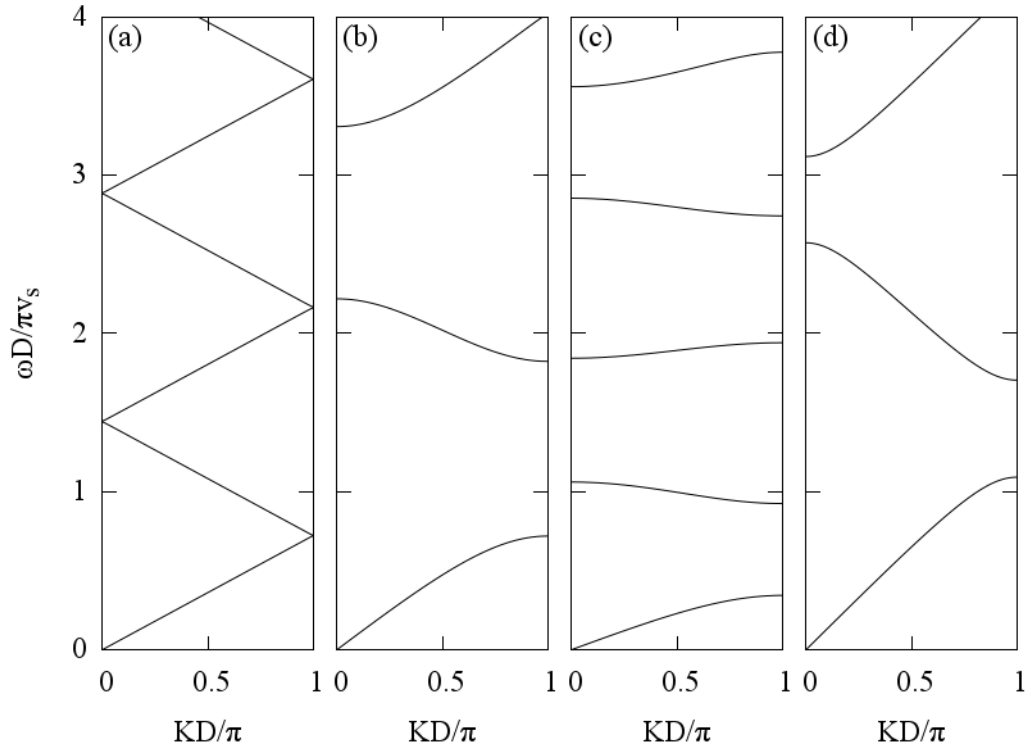


Figura 2.17: Curvas de dispersión para superredes sólido-fluido con factor de llenado $f_s=0.5$. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), Agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

En la Figura 2.18 se muestra la estructura de bandas proyectadas para cuatro superredes formadas por los materiales que hemos estudiado anteriormente, en función del número de onda k_0 y la frecuencia normalizada. Para el sistema Hg-Al, las brechas se van abriendo al aumentar k_0 . De forma similar, en el sistema Agua-PMMA las bandas se cierran sobre la línea de sonido L_B correspondiente al ángulo de Brewster, fenómeno que no se presenta en ninguno de los demás sistemas. Una característica muy importante de estos sistemas es la existencia de brechas alrededor de los puntos donde la transmisión en un placa inmersa en fluido es cero. Cabe recordar que la posición de estos puntos no depende de los parámetros de los fluidos y solo son función de los del sólido. En estos casos particulares, la razón v_s/v_p es igual tanto en el Al como en el PMMA, por lo que la posición de los ceros de transmisión es la misma, pero en general es diferente para cada medio.

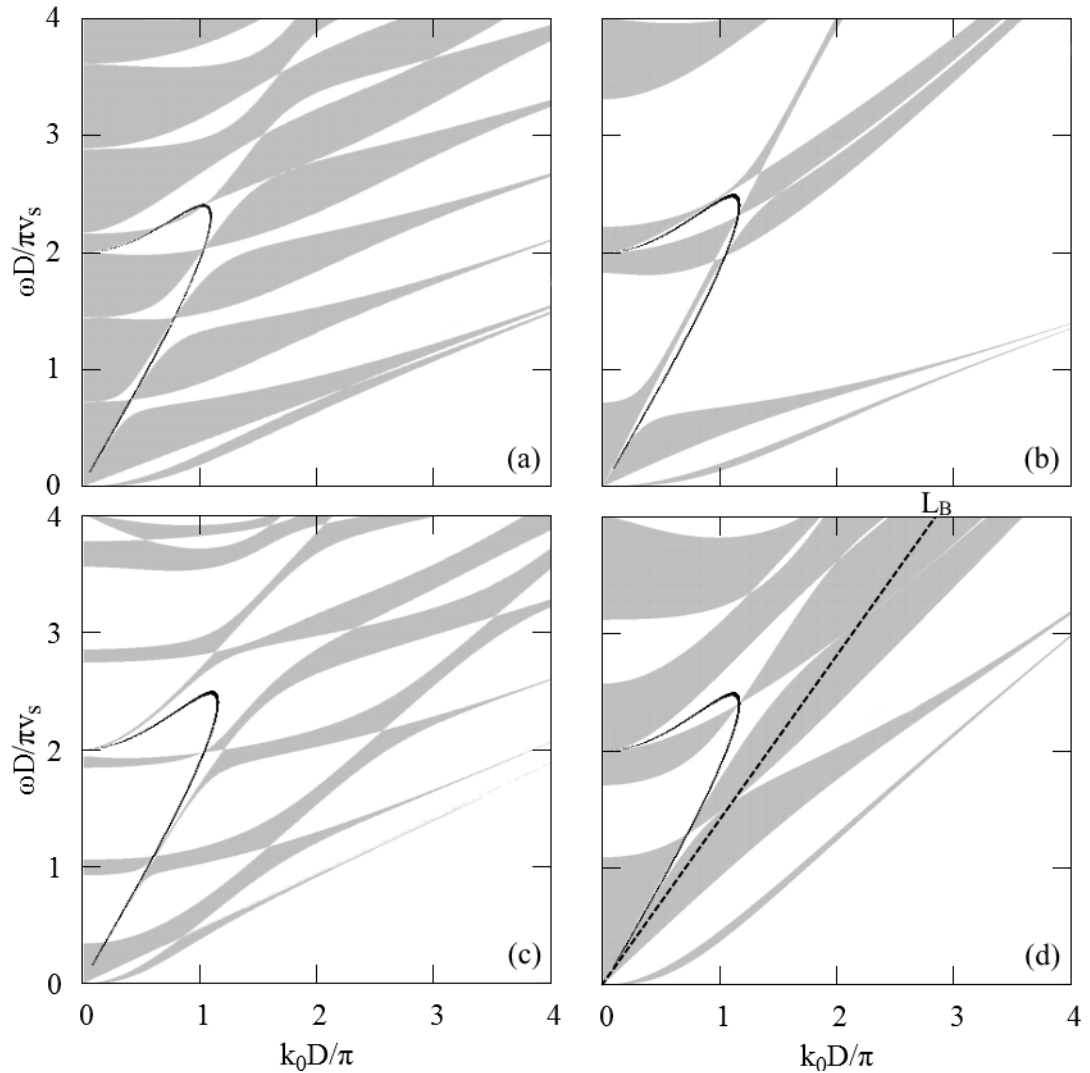


Figura 2.18: Estructura de bandas proyectadas para superredes sólido-fluido con factor de llenado $f_s=0.5$. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), Agua y Al; en (d), Agua y PMMA. Las zonas grises representan las bandas y las zonas blancas las brechas. Las líneas negras son los puntos donde la transmisión es cero, para una placa inmersa en fluido.

2.5.2. Propagación de ondas en multicapas finitas.

Ahora estudiaremos la propagación de ondas elásticas en medios periódicos formados por un número finito de placas sólidas de grosor d_s , alternadas con capas de fluido de grosor d_f . De la misma forma como se hizo para el estudio de una capa, analizaremos tres casos: cuando los medios que rodean a la multicapa son fluidos ideales; cuando

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

los medios son sólidos y las ondas que inciden sobre la multicapa son longitudinales; y cuando los medios son sólidos y las ondas incidentes son de corte. Consideraremos que los medios de incidencia y transmisión son iguales a una de las componentes de la multicapa, ya sea el sólido o el fluido según sea el caso.

Para el caso donde el medio que rodea a la multicapa es un fluido ideal, colocaremos el origen del sistema de referencia en la interfase entre el medio de incidencia y la primera capa. Como el medio de transmisión también es un fluido, es necesario colocar una placa sólida al final, de modo que se tienen N capas de fluido y $N + 1$ de sólido. De la ecuación (2.277) se deduce que, para $j = 0$,

$$\mathbf{u}_f^0 = \mathbb{M}_{sf} \mathbf{u}_f^D, \quad (2.290)$$

pero, a su vez

$$\mathbf{u}_f^D = \mathbb{M}_{sf} \mathbf{u}_f^{2D} \implies \mathbf{u}_f^0 = (\mathbb{M}_{sf})^2 \mathbf{u}_f^{2D}. \quad (2.291)$$

Generalizando hasta $j = N$ se llega a la ecuación

$$\mathbf{u}_f^0 = (\mathbb{M}_{sf})^N \mathbf{u}_f^{ND}. \quad (2.292)$$

Para la última placa, de la ecuación (2.275) se tiene

$$\mathbf{u}_f^{ND} = \mathbb{T}_s \mathbf{u}_f^{ND+d_s}, \quad (2.293)$$

por lo tanto

$$\mathbf{u}_f^0 = (\mathbb{M}_{sf})^N \mathbb{T}_s \mathbf{u}_f^{ND+d_s}. \quad (2.294)$$

Nótese que cuando $N = 0$, el problema se reduce al de una placa sólida rodeada de fluido ideal.

Para este sistema, los coeficientes de reflexión y de transmisión son

$$R = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2 \quad \text{y} \quad T = \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2, \quad (2.295)$$

donde $T_{ij} = [(\mathbb{M}_{sf})^N \mathbb{T}_s]_{ij}$.

En la Figura 2.19 se muestran los coeficientes de transmisión para ondas viajando haciendo un multicapa, inmersa en un fluido igual al que compone las capas del sistema. Se puede observar como en las regiones donde existen las brechas, la transmisión es cero. En el sistema Hg-Al, donde se cierran las bandas para incidencia normal, la

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

transmisión es casi total para este ángulo, para todas las frecuencias. De forma similar, en la multicapa Agua-PMMA, se presenta transmisión total en el ángulo de Brewster para todas las frecuencias.

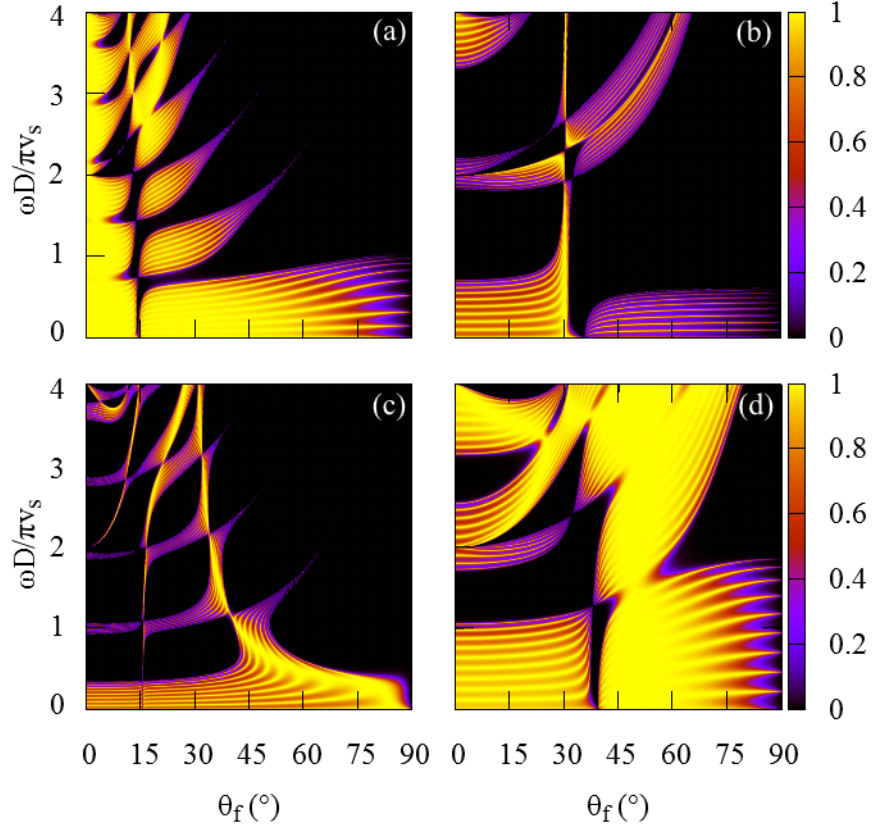


Figura 2.19: Coeficiente de transmisión para ondas propagándose a través de una multicapa rodeada de un fluido, con $N=9$ y $f_s=0.5$. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), Agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

Ahora consideraremos el caso donde el medio que rodea a la multicapa es el sólido. De forma similar al caso anterior, ahora es necesario tener una capa adicional de fluido, de modo que se tienen un total de N capas de sólido y $N+1$ capas de fluido. Colocaremos el origen del sistema de coordenadas en la interfase del medio de incidencia y la primera capa de fluido. Independiente del tipo de onda con que incidamos, la ecuación que relaciona los vectores de desplazamiento del sólido y del fluido en esta interfase puede expresarse como

$$\mathbb{M}_s \mathbf{u}_s^0 = \mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^0, \quad (2.296)$$

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

donde la matriz \mathbb{M}_s y el vector \mathbf{u}_s^0 son de la forma

$$\mathbb{M}_s = \begin{pmatrix} P_1 + S_1Q & -P_1 - S_1Q \\ P_2 - S_2Q & P_2 + S_2Q \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_s^0 = \begin{pmatrix} u_p^{+,0} \\ u_p^{-,0} \end{pmatrix}, \quad (2.297)$$

cuando la onda incidente es longitudinal y

$$\mathbb{M}_s = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} P_1 + S_1Q & -P_1 - S_1Q \\ -P_2 + S_2Q & P_2 + S_2Q \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_s^0 = \begin{pmatrix} u_s^{+,0} \\ u_s^{-,0} \end{pmatrix}, \quad (2.298)$$

cuando la onda incidente es de corte.

El vector \mathbf{u}_f^0 está relacionado con el vector \mathbf{u}_f^{df} mediante

$$\mathbf{u}_f^0 = \mathbb{P}_f \mathbf{u}_f^{df}, \quad (2.299)$$

entonces

$$\mathbb{M}_s \mathbf{u}_s^0 = \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f \mathbf{u}_f^{df}. \quad (2.300)$$

A su vez, el vector \mathbf{u}_f^{df} se relaciona con \mathbf{u}_f^{D+df} de la forma

$$\mathbf{u}_f^{df} = \mathbb{M}_{sf} \mathbf{u}_f^{D+df}, \quad (2.301)$$

así,

$$\mathbb{M}_s \mathbf{u}_s^0 = \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f \mathbb{M}_{sf} \mathbf{u}_f^{D+df}. \quad (2.302)$$

Para la siguiente celda unitaria,

$$\mathbb{M}_s \mathbf{u}_s^0 = \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f (\mathbb{M}_{sf})^2 \mathbf{u}_f^{2D+df}. \quad (2.303)$$

Generalizando hasta $ND + d_f$ se llega a la ecuación

$$\mathbb{M}_s \mathbf{u}_s^0 = \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f (\mathbb{M}_{sf})^N \mathbf{u}_f^{ND+df}. \quad (2.304)$$

Finalmente, en la interfase en $z = ND + d_f$ se tiene

$$\mathbb{M}_f \mathbf{u}_f^{ND+df} = \mathbb{M}'_s \mathbf{u}_s^{ND+df}, \quad (2.305)$$

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

con

$$\mathbb{M}'_s = \begin{pmatrix} P_1 + S_1 Q & 0 \\ P_2 + S_2 Q & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_s^0 = \begin{pmatrix} u_p^{+,ND+df} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.306)$$

cuando la onda incidente es longitudinal y

$$\mathbb{M}'_s = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} P_1 + S_1 Q & 0 \\ P_2 + S_2 Q & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_s^0 = \begin{pmatrix} u_s^{+,ND+df} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.307)$$

cuando la onda es de corte. Entonces, sustituyendo (2.305) en (2.304) obtenemos la ecuación

$$\mathbf{u}_s^0 = \mathbb{M}_s^{-1} \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f (\mathbb{M}_{sf})^N \mathbb{M}_f^{-1} \mathbb{M}'_s \mathbf{u}_s^{ND+df} \quad (2.308)$$

Cuando $N = 0$, el problema se reduce al de una capa de fluido ideal entre dos sólidos elásticos.

Entonces, cuando la onda incidente es longitudinal, los coeficientes de reflexión y de transmisión vienen dados por,

$$R_p = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2, \quad R_s = |Q|^2 \frac{z_s \cos \theta_s}{z_p \cos \theta_p} \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right|^2, \quad (2.309)$$

$$T_p = \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2, \quad T_s = \frac{z_s \cos \theta_s}{z_p \cos \theta_p} \left| \frac{Q}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.310)$$

Cuando la onda incidente es de corte,

$$R_s = \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} \right|^2, \quad R_p = \left| \frac{1}{Q} \right|^2 \frac{z_p \cos \theta_p}{z_s \cos \theta_s} \left| \frac{T_{21}}{T_{11}} - 1 \right|^2, \quad (2.311)$$

$$T_s = \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2, \quad T_p = \left| \frac{1}{Q} \right|^2 \frac{z_p \cos \theta_p}{z_s \cos \theta_s} \left| \frac{1}{T_{11}} \right|^2. \quad (2.312)$$

En todos los casos $T_{ij} = [\mathbb{M}_s^{-1} \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f (\mathbb{M}_{sf})^N \mathbb{M}_f^{-1} \mathbb{M}'_s]_{ij}$.

En la Figura 2.20 se grafica el coeficiente T_p para el caso de ondas longitudinales incidiendo sobre una multicapa sólido-fluido. En ella se pueden observar regiones donde la transmisión es nula, las cuales corresponden a las brechas del sistema. Además, para el caso Hg-Al, se presenta transmisión casi total para todas las frecuencias, a incidencia normal. En la multicapa Agua-Al es donde se presentan bandas de transmisión más estrechas, mientras que en el Hg-Al son las más anchas. En las multicapas Agua-PMMA y Agua-Al, hay bandas de frecuencias donde la transmisión es cero para todos los

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

ángulos de incidencia. Esto permite construir espejos acústicos onnidireccionales para ondas longitudinales con frecuencias dentro de estas brechas.

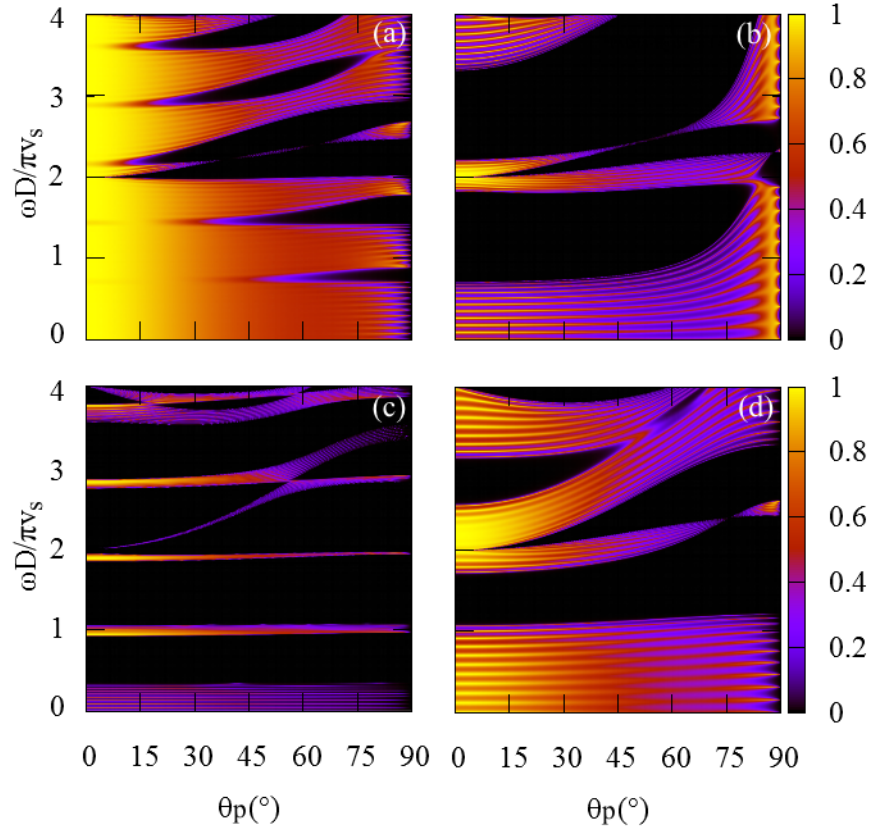


Figura 2.20: Coeficientes de transmisión longitudinal para ondas longitudinales propagándose a través de una multicapa rodeada de un sólido, con $N=9$ y $f_s=0.5$. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), Agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

La Figura 2.21 muestra T_s para el caso de ondas incidentes de corte. Aquí también se observa que en la multicapa Agua-Al las bandas de transmisión son muy delgadas, aunque las brechas más anchas los presenta el sistema Hg-PMMA. Se observa que a 45° hay transmisión total para todas la frecuencias en el sistema Agua-PMMA. En todos los casos se ve poca transmisión por debajo del ángulo crítico longitudinal ($\theta_p=30^{\circ}$).

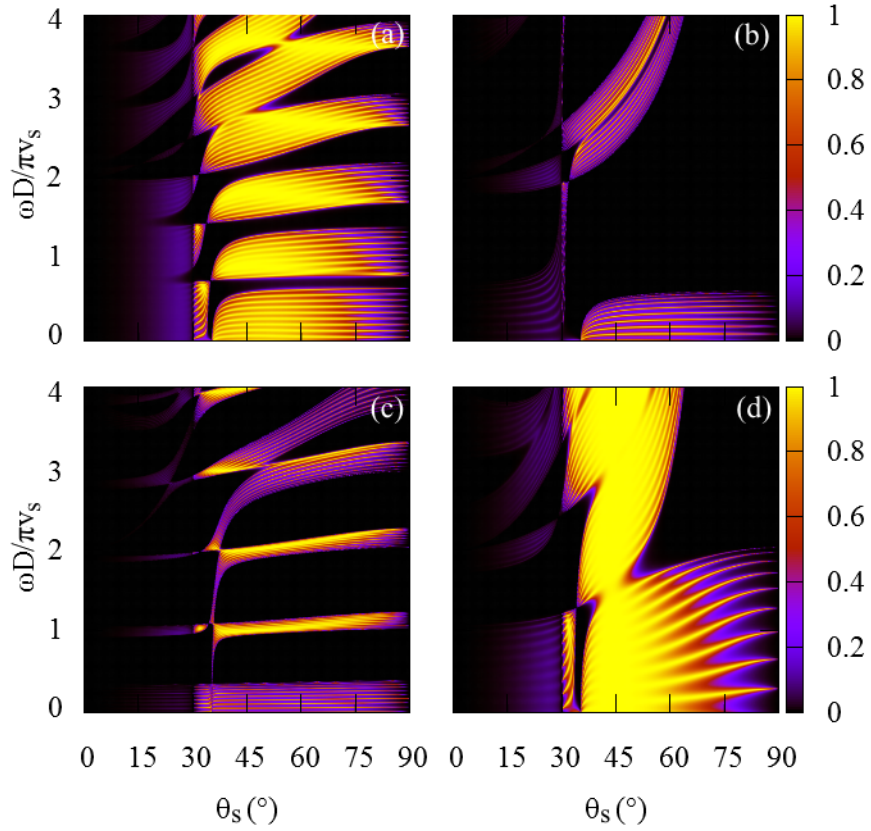


Figura 2.21: Coeficientes de transmisión transversal para ondas de corte propagándose a través de una multicapa rodeada de un sólido, con $N=9$ y $f_s=0.5$. En el panel (a) el fluido es Hg y el sólido Al; en (b), Hg y PMMA; en (c), Agua y Al; en (d), Agua y PMMA.

2.5.3. Caso límite: capas de fluido infinitesimales.

Un caso límite que presenta propiedades interesantes es cuando las capas del fluido son muy delgadas, es decir cuando $d_f \rightarrow 0$. Cuando esto sucede $\mathbb{P}_f \rightarrow \mathbb{I}_2$, donde \mathbb{I}_2 es la matriz identidad de 2×2 . En este límite

$$\mathbb{M}_{sf} \rightarrow \mathbb{M}_f^{-1}(\mathbb{M}_p + \mathbb{M}_s\mathbb{Q})(\mathbb{M}_p\mathbb{P}_p + \mathbb{M}_s\mathbb{P}_s\mathbb{Q})^{-1}\mathbb{M}_f. \quad (2.313)$$

Como la traza es invariante bajo permutaciones cíclicas, es decir

$$\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}) = \text{tr}(\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}) = \text{tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}), \quad (2.314)$$

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

entonces,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{M}_{sf}) &= \text{tr} \left[(\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_s \mathbf{Q})(\mathbf{M}_p \mathbf{P}_p + \mathbf{M}_s \mathbf{P}_s \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{M}_f \mathbf{M}_f^{-1} \right], \\ &= \text{tr} \left[(\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_s \mathbf{Q})(\mathbf{M}_p \mathbf{P}_p + \mathbf{M}_s \mathbf{P}_s \mathbf{Q})^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.315)$$

Se puede observar que en la traza no aparecen los parámetros del fluido y, por tanto, la estructura de bandas es independiente de las propiedades del fluido que separa a las placas. En parte este comportamiento puede ser explicado por la existencia de brechas alrededor de las frecuencias donde hay transmisión nula[11]. En la Figura 2.22 se muestran las bandas proyectadas para el sistema formado por placas de PMMA.

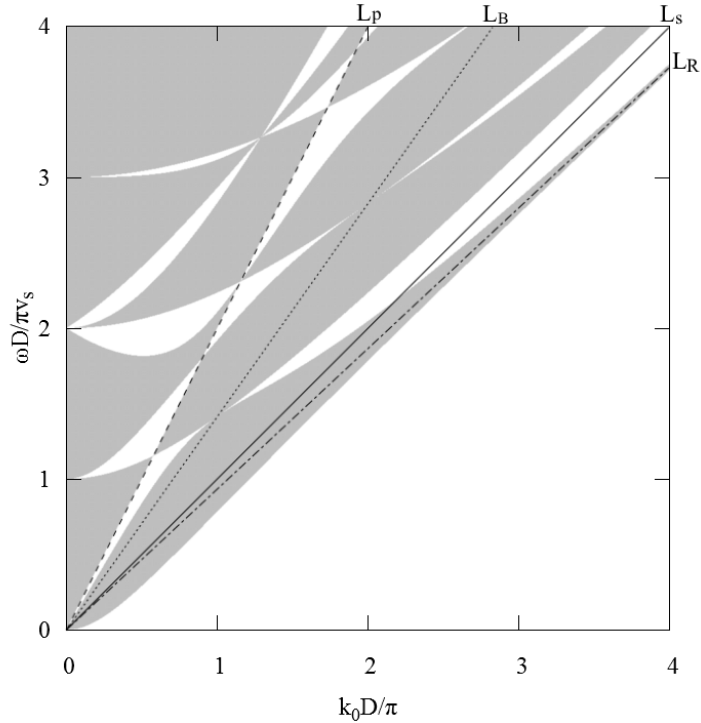


Figura 2.22: Estructura de bandas proyectadas para placas de PMMA separadas por capas de fluido infinitesimales. Se muestran diferentes líneas de sonido: L_p es la línea de sonido longitudinal; L_s es la línea de sonido de las ondas de corte; L_B es la línea de sonido del ángulo de Brewster y L_R es la línea de sonido Rayleigh (ondas que se propagan sobre la superficie libre de un sólido semi-infinito).

En la naturaleza, las capas de fluido que separan a las placas tienen un grosor finito, pero este caso límite puede aproximarse muy bien cuando la longitud de onda es mucho mayor que dicho grosor. Tomando la longitud de onda del orden del grosor de las placas

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

sólidas, de modo que $\omega = 2\pi v_p/d_s$, entonces

$$d_f q_f = d_f \frac{\omega}{v_f} \cos\theta_f = \left(\frac{v_p}{v_f}\right) \left(\frac{d_f}{d_s}\right) \cos\theta_f. \quad (2.316)$$

Para la mayoría de los sólidos y líquidos, la razón v_p/v_f es menor de 10. Además $\cos\theta_f \in [0, 1]$, para $\theta_f \in [0^\circ, 90^\circ]$. Entonces, cuando

$$\frac{d_f}{d_s} \ll 1 \implies \mathbb{P}_f \rightarrow \mathbb{I}_2, \quad (2.317)$$

con lo que se obtienen la misma estructura de bandas que la de placas separadas por capas de fluido infinitesimales, para longitudes de onda del orden del grosor de las placas o mayores.

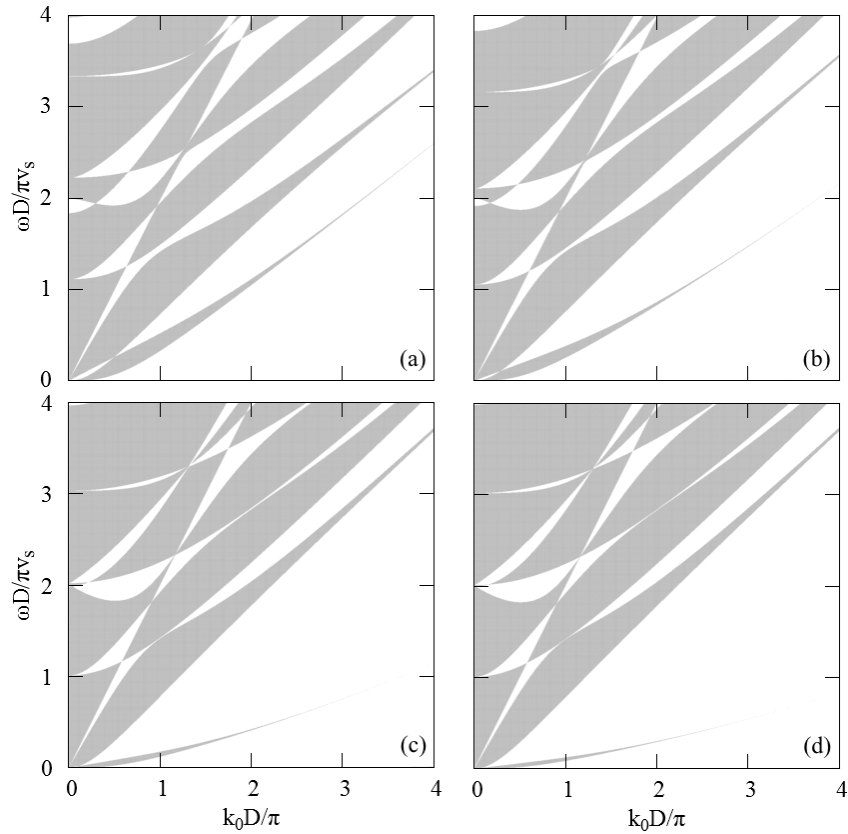


Figura 2.23: Estructura de bandas proyectadas para una superred PMMA-Glicerina, para diferentes factores de llenado: en (a) $f_s=0.9$; en (a) $f_s=0.95$; en (a) $f_s=0.99$; en (a) $f_s=0.995$;

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

Cuando la longitud de onda se hace cada vez más pequeña, esta aproximación deja de ser válida y se hace necesario considerar los parámetros del fluido. En la Figura 2.23 se muestra la estructura de bandas proyectadas para el sistema Glicerina-PMMA, para diferentes factores de llenado.

Otro factor importante es la diferencia de impedancias entre el sólido y el fluido, pues entre mayor sea dicha diferencia es necesario que las capas de fluido sean más delgadas en comparación con las placas para tener mejores resultados usando esta aproximación.

Para este tipo de sistemas, la estructura de bandas depende únicamente de la razón entre la velocidad longitudinal del sólido v_p y su velocidad de corte v_s . En la Figura 2.24 se compara la estructura de bandas para tres sólidos distintos, berilio, PMMA y Polietileno de Alta Densidad (HDPE). Entre estos materiales, el berilio tiene el mayor valor de v_s/v_p y el HDPE el menor valor. Se puede observar para el berilio que el ancho de las brechas que se abren por arriba de la línea de sonido longitudinal es mayor que el ancho de los brechas del HDPE en la misma zona.

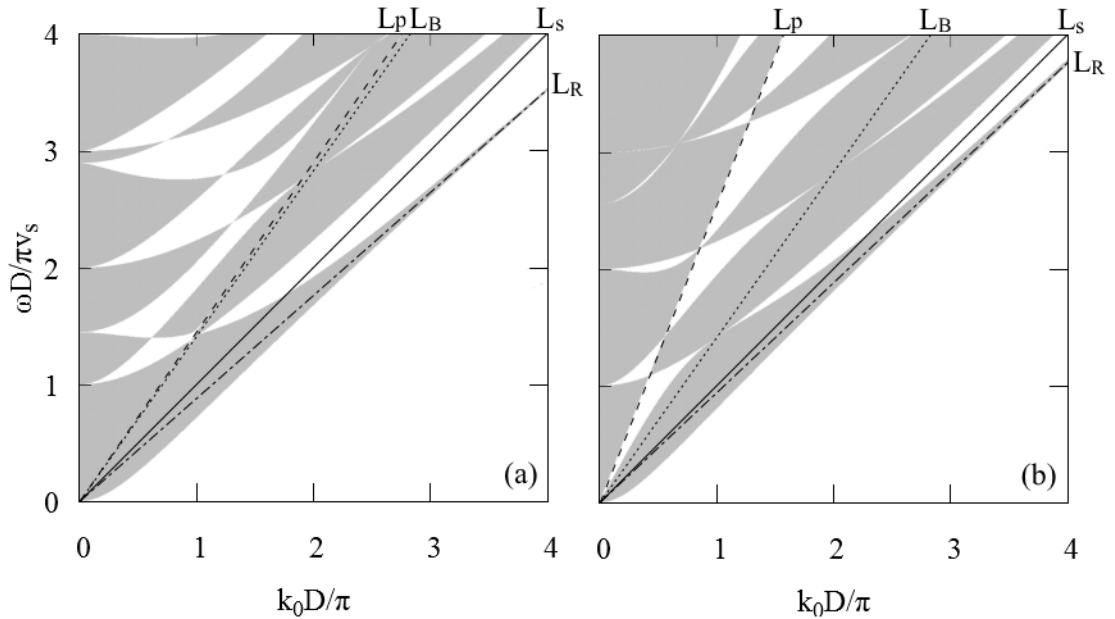


Figura 2.24: Estructura de bandas proyectadas para superredes de placas sólidas separadas por capas de fluidos infinitesimales. En el panel (a) el sólido es berilio y en el panel (b) es HDPE. Se muestran las líneas de sonido características de cada material. En el Be la razón v_s/v_p es 0.69, en el HDPE es 0.39.

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

Una característica importante de este tipo de sistemas es la existencia de líneas donde se cierran las bandas, cuya posición es independiente de los parámetros del sólido, como puede observarse en las Figuras 2.22 y 2.24. Estas líneas corresponden a $k_0 = 0$, a $\omega = v_p k_0$ y a $\omega = \sqrt{2}v_s k_0$. Esto implica que estos materiales se comportan como medios homogéneos cuando las ondas elásticas viajan en estas direcciones. Para explicar este comportamiento es necesario analizar las condiciones de transmisión total en una capa de fluido infinitesimal. Estas condiciones se obtienen tomando el límite $d_f \rightarrow 0$ en las ecuaciones para la propagación de ondas en una capa de fluido entre dos sólidos. Estas ecuaciones son de la forma

$$\mathbf{u}_f^0 = \mathbb{T}_f \mathbf{u}_f^{d_f}, \quad \text{con} \quad \mathbb{T}_f = \mathbb{M}_s^{-1} \mathbb{M}_f \mathbb{P}_f \mathbb{M}_f^{-1} \mathbb{M}'_s. \quad (2.318)$$

Entonces, cuando $d_f \rightarrow 0$,

$$\mathbb{T}_f \rightarrow \mathbb{M}_s^{-1} \mathbb{M}'_s. \quad (2.319)$$

Para ondas incidentes longitudinales,

$$\mathbb{M}_s = \begin{pmatrix} P_1 + S_1 Q & -P_1 - S_1 Q \\ P_2 - S_2 Q & P_2 + S_2 Q \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{M}'_s = \begin{pmatrix} P_1 + S_1 Q & 0 \\ P_2 + S_2 Q & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.320)$$

Invirtiendo \mathbb{M}_s se obtiene

$$\mathbb{M}_s^{-1} = \frac{1}{P_2(P_1 + S_1 Q)} \begin{pmatrix} P_2 + S_2 Q & P_1 + S_1 Q \\ -P_2 + S_2 Q & P_1 + S_1 Q \end{pmatrix}. \quad (2.321)$$

Con esto,

$$\mathbb{T}_f = \frac{1}{P_2} \begin{pmatrix} P_2 + S_2 Q + P_2 + S_2 Q & 0 \\ -P_2 + S_2 Q + P_2 + S_2 Q & 0 \end{pmatrix} \quad (2.322)$$

$$= \frac{2}{P_2} \begin{pmatrix} P_2 + S_2 Q & 0 \\ S_2 Q & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.323)$$

Definiendo

$$L = \frac{S_2}{P_2}, \quad (2.324)$$

queda

$$\mathbb{T}_f = 2 \begin{pmatrix} 1 + LQ & 0 \\ LQ & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.325)$$

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

Para este caso, la reflectividad longitudinal viene dada por

$$r_p = \frac{T_{21}}{T_{11}} = \frac{LQ}{1 + LQ}. \quad (2.326)$$

Para que $r_p = 0$, entonces $PS = 0$, esto implica que

$$S_2 P_3 = 0 \quad \implies \quad (-2\rho_s v_s^3 q_s k_0)(2v_p q_p k_0) = 0. \quad (2.327)$$

De aquí se encuentra que cuando $k_0 = 0$ o $q_p = 0$, no hay reflexión longitudinal. La primera condición corresponde a ondas longitudinales incidiendo en forma normal a la interfase; la segunda condición se cumple cuando las ondas inciden a 90° respecto a la normal. Esta última condición es un caso límite, pues no es posible incidir desde uno de los sólidos hacia el otro en forma paralela a la interfase; sin embargo, la condición implica que entre más nos acerquemos a este ángulo, la reflexión longitudinal tenderá a cero. Además, cuando se cumple cualquiera de estas condiciones $Q = 0$, entonces $r_s = 0$ y $t_s = 0$, lo cual implica que la transmisión es total y en forma de ondas longitudinales. Este comportamiento explica por qué se cierran las bandas en las líneas $k_0 = 0$ y $\omega = v_s k_0$. El caso $q_s = 0$ no se considera pues solo se cumple por debajo de la línea de sonido longitudinal, de modo que no es posible cumplir es condición al incidir con este tipo de ondas.

Para explicar el cierre de las bandas en $\omega = \sqrt{2}v_s k_0$ es necesario analizar el caso de ondas incidentes de corte, en el cual

$$\mathbb{M}_s = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} P_1 + S_1 Q & -P_1 - S_1 Q \\ -P_2 + S_2 Q & P_2 + S_2 Q \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{M}'_s = \frac{1}{Q} \begin{pmatrix} P_1 + S_1 Q & 0 \\ P_2 + S_2 Q & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.328)$$

Invirtiendo \mathbb{M}_s queda

$$\mathbb{M}_s^{-1} = \frac{1}{S_2(P_1 + S_2 Q)} \begin{pmatrix} P_2 + S_2 Q & P_1 + S_1 Q \\ P_2 - S_2 Q & P_1 + S_1 Q \end{pmatrix}. \quad (2.329)$$

Entonces,

$$\mathbb{T}_f = \frac{2}{LQ} \begin{pmatrix} 1 + LQ & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.330)$$

En este caso,

$$r_s = \frac{T_{21}}{T_{11}} = \frac{1}{1 + LQ} = (LQ)^{-1} \frac{1}{1 + (LQ)^{-1}}, \quad (2.331)$$

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

lo cual implica que $r_s = 0$ cuando $(LQ)^{-1} = 0$, entonces, para que se cumpla esto

$$P_2 S_3 = 0 \quad \implies \quad v_p v_s (k_0^2 - q_s^2) (\omega^2 - 2v_s^2 k_0^2) = 0. \quad (2.332)$$

Esta condición se cumple cuando $k_0 = q_s$ o bien $\omega = \sqrt{2}v_s k_0$. Ambas ecuaciones son equivalentes y corresponden a ondas de corte viajando a 45° respecto a la normal a la capa de fluido. De forma similar al caso anterior, cuando se cumple esta condición se encuentra que $r_p = t_p = 0$, de modo que la energía se transmite totalmente y en forma de onda longitudinal. Con esto se explica el cierre de las bandas en la línea $\omega = \sqrt{2}v_s k_0$. Es importante notar que este es el mismo ángulo que el de Brewster, sin embargo, en este caso no es necesario que los parámetros de los materiales cumplan la condición (2.178) para tener transmisión total.

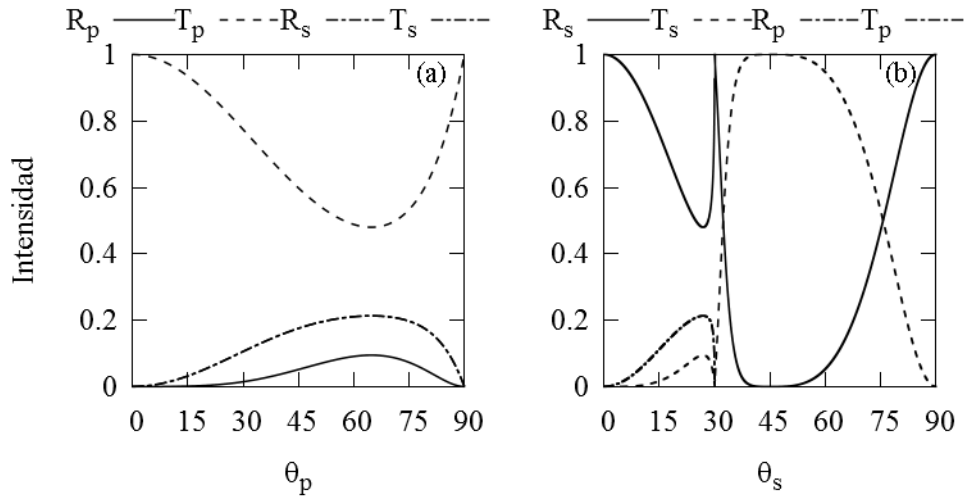


Figura 2.25: (a) Coeficientes de reflexión y transmisión para ondas longitudinales incidiendo sobre una capa de fluido infinitesimal, la cual separa dos sólidos semi-infinitos (PMMA). (b) Coeficientes de reflexión y transmisión del mismo sistema, para ondas incidentes de corte.

En la Figura 2.25 se muestran los coeficientes de transmisión para ondas elásticas incidiendo sobre una capa de fluido infinitesimal, donde el medio sólido es PMMA. En ella se pueden observar como la transmisión, para ondas longitudinales, es total para incidencia normal y a 90° . También se observa que la transmisión de las ondas de corte es igual a la reflexión de las ondas de corte, para todos los ángulos de incidencia. Para las ondas de corte, se presenta transmisión total a 45° y reflexión total a incidencia

2.5. SUPERREDES SÓLIDO-FLUIDO.

normal.

Existe una estrecha relación entre la estructura de bandas para este tipo de sistemas y los modos guiados de las placas individuales que los componen. Este característica se muestra en la Figura 2.26, donde se puede observar que los bordes de las bandas coinciden con las curvas de dispersión de una placa del mismo material y grosor de las que forman a la superred.

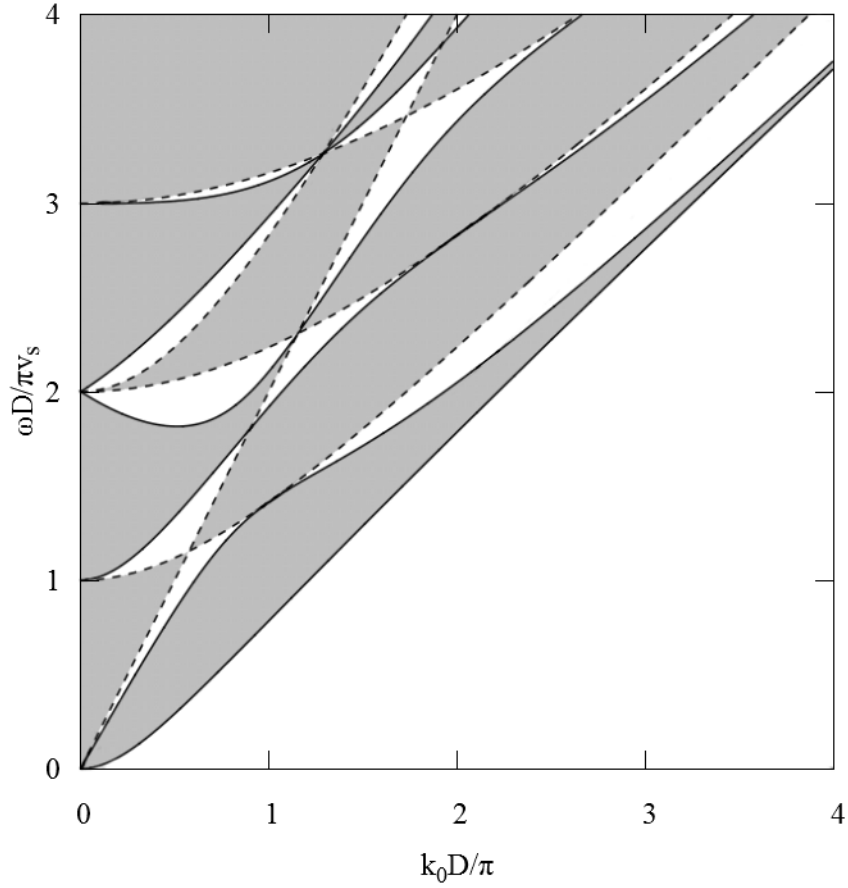


Figura 2.26: Estructura de bandas proyectadas para una superred de placas de PMMA de grosor d_s , separadas por capas de fluido ideal infinitesimales, y curvas de dispersión para una de estas placas. Las líneas punteadas corresponden a los modos de una placa rodeada de un medio rígido y las líneas continuas a los modos Lamb.

Capítulo 3

Arreglo experimental

En este capítulo se describen los métodos empleados para caracterizar las propiedades elásticas de los materiales y medir la transmisión de ondas elásticas.

Los materiales usados para los experimentos realizados en este trabajo fueron placas de vidrio comercial de 5mm, placas de PMMA de 1.5mm, agua, glicerina, etanol y cera-gel¹. Los parámetros necesarios para realizar los cálculos fueron la densidad, la velocidad del sonido longitudinal y, en el caso de los sólidos, la velocidad de las ondas de corte. Además, en el caso de la cera-gel se midieron dichos parámetros en función de la temperatura, en el rango desde 26° hasta 50°C. Para el vidrio se consideró que los parámetros elásticos permanecen constantes dentro de dicho rango de temperaturas[24].

3.1. Medición de la densidad

Para medir la densidad de los materiales se emplearon diferentes métodos para cada tipo de material. En el caso de los sólidos, se midió basándose en el principio de Arquímedes. Usando una balanza Ohaus PA313 se pesó una muestra de cada sólido (vidrio y PMMA) en aire, después se midió la masa de la misma muestra sumergida en agua destilada a 25°C y colgada de la balanza por un hilo de nylon como se muestra en la Figura 3.1. Esta medición se repitió diez veces para cada material y la densidad se calculó mediante la fórmula

$$\rho = \rho_L \left(\frac{m_R}{m_R - m_A} \right),$$

¹Material comúnmente usado para la elaboración de velas decorativas, compuesto de aceite mineral y copolímeros de Etileno/Propileno/Estireno y Butileno/Propileno/Estireno como agentes gelificantes.

3.1. MEDICIÓN DE LA DENSIDAD

donde ρ es la densidad del material, ρ_L es la densidad del agua, m_R es la masa de la muestra del sólido y m_A es su masa aparente sumergida en agua. Todas las cantidades son las promediadas sobre las diez mediciones. La densidad del agua fue tomada del *CRC Handbook of Chemistry and Physics*[34].



Figura 3.1: Medición de la densidad de los materiales sólidos.

En el caso de los otros líquidos (glicerina y etanol), la densidad se determinó midiendo la masa y el volumen de una muestra de cada líquido. Para esto, se pesó una probeta de 10 ml vacía; después, se procedió a vertir el fluido dentro de ella hasta la marca superior y se midió la masa total, de modo que la masa del fluido es la diferencia entre la masa total y la masa de la probeta. Para cada material la medición se repitió diez veces y la densidad se calculó dividiendo la masa promedio entre el volumen contenido en la probeta.

Para la medición de la densidad de la cera-gel se usó una botella de prueba de Babcock con capacidad de 4.61 ml hasta la primera marca y con un cuello con divisiones de 0.01 ml, mostrada en la Figura 3.2. Se derritió la cera-gel y se vertió dentro de la botella de Babcock. Se enfrió la muestra hasta 25°C y se midió la masa total para conocer la masa de la cera-gel contenida en la botella, la cual se calculó como la diferencia entre la masa total y la de la botella vacía.

Se colocó la botella con cera-gel dentro de un baño térmico y se calentó lentamente hasta los 50°C, midiendo el volumen del gel directamente de las marcas del cuello. La temperatura se midió usando un termopar tipo K. Se repitieron tres corridas de esta medición. La densidad se calculó dividiendo la masa de la muestra entre el volumen medido para cada temperatura. Con los datos de la densidad en función de la temperatura

3.1. MEDICIÓN DE LA DENSIDAD

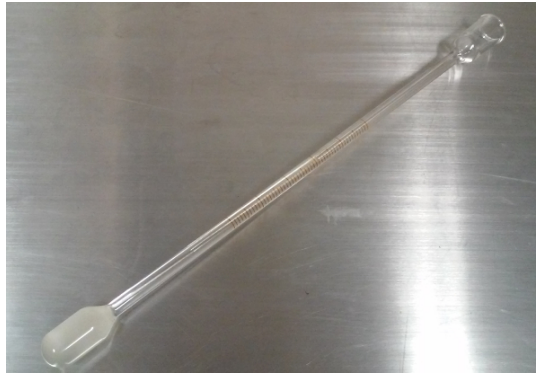


Figura 3.2: Botella de Babcock empleada en las mediciones de densidad de la cera-gel.

de cada corrida, se hizo un ajuste lineal con lo que se obtuvo la ecuación (3.1)

$$\rho(T) = 0.8608 \frac{g}{cm^3} - \left(7.299 \times 10^{-4} \frac{g}{cm^3 \text{ } ^\circ C} \right) T. \quad (3.1)$$

En la Figura 3.3 se muestra la gráfica de los resultados experimentales y el ajuste lineal efectuado.

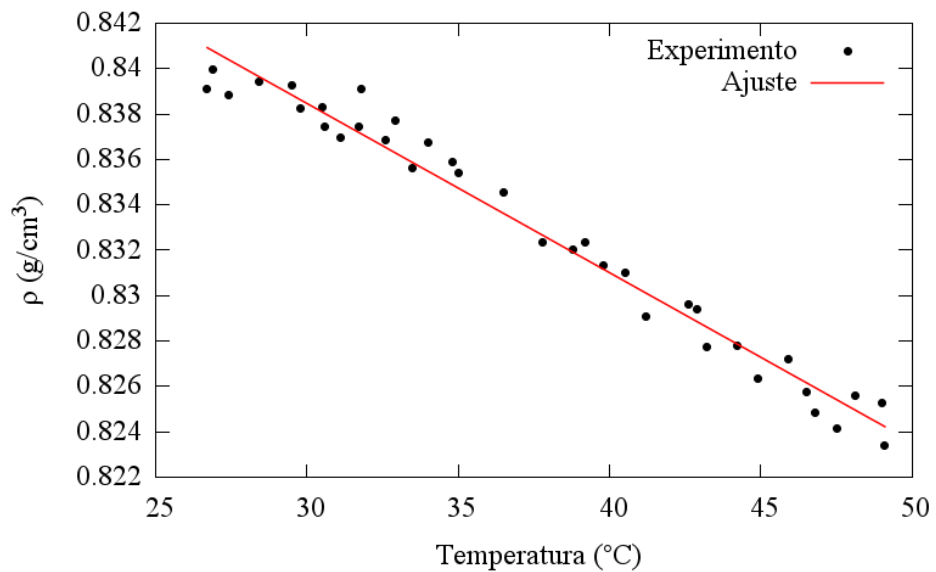


Figura 3.3: Densidad de la cera-gel en función de la temperatura.

3.2. Medición de la velocidad del sonido

La velocidad del sonido de los materiales fue medida utilizando transductores piezoeléctricos, con los cuales se midió el tiempo que tarda una onda en atravesar una muestra de cada material, llamado tiempo de vuelo, como se ilustra en la Figura 3.4. Para esto se empleó la técnica de *through – transmission*, la cual consiste en enviar un pulso en un lado de la muestra y medir la transmisión del otro lado usando un transductor para la emisión y otro para la recepción.

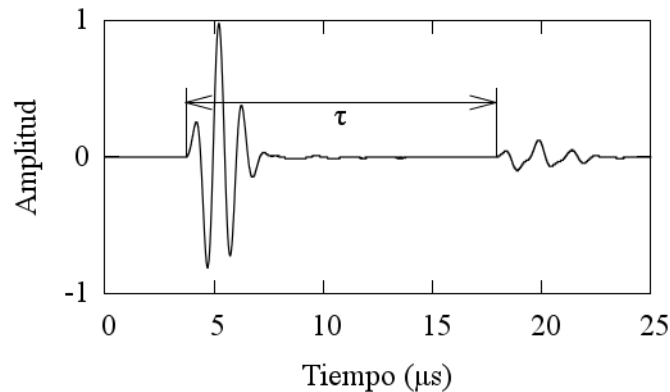


Figura 3.4: Medición del tiempo de vuelo τ (el tiempo que tarda la onda en atravesar la muestra) de un pulso ultrasónico de 1MHz.

El arreglo empleado para realizar las mediciones de velocidad de sonido con la técnica de *through – transmission* es el mostrado en la Figura 3.5. Se conectó el transductor emisor a un generador de funciones Tektronix AFG 3012B, a través del cual se enviaron pulsos eléctricos sinusoidales de un ciclo, de la misma frecuencia del transductor, con amplitud pico a pico de 10V, con frecuencia de repetición de 100Hz. El transductor receptor se conectó al canal 1 de un osciloscopio Tektronix TDS 2012, el cual a su vez se conectó a una computadora personal mediante un adaptador de GBIP a USB. En el canal 2 se conectó a la salida del generador de funciones para medir el pulso emitido. Excepto para el PMMA, en las mediciones de velocidad de sonido longitudinal se usaron transductores de inmersión Olympus V303 de 1MHz. Debido al grosor de las placas, en el caso del PMMA se usaron transductores longitudinales marca NDT Systems de 10 MHz, CHF104 para la emisión y TAB104 para la recepción. En las mediciones de velocidad de las ondas de corte se emplearon transductores Olympus Modelo V154 de 2.25MHz.

La velocidad del sonido del vidrio se obtuvo midiendo el tiempo de vuelo de una

3.2. MEDICIÓN DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO

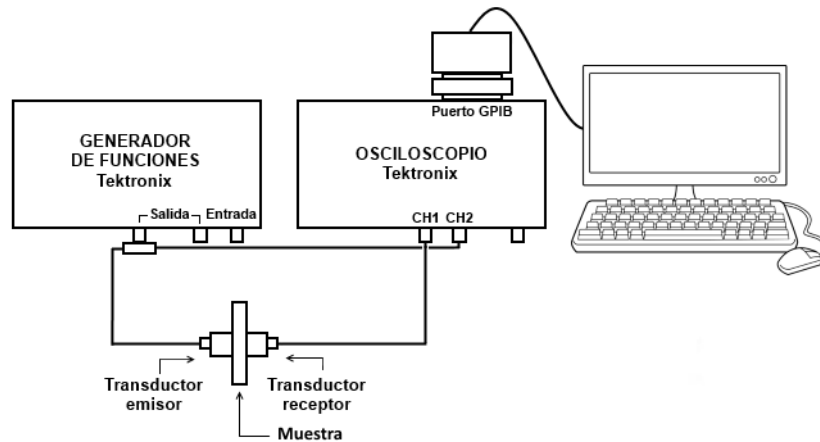


Figura 3.5: Esquema del arreglo usado para las mediciones con la técnica *through – transmission*.

placa y dividiendo el resultado entre el grosor de la misma, el cual fue medido con un calibrador digital Mitutoyo CD-6” CSX.

En el caso de los materiales fluidos fue necesario contenerlos en un recipiente para realizar las mediciones ultrasónicas, el cual se muestra en la Figura 3.6. Este recipiente fue construido con dos placas de vidrio comercial de 8cm por 10cm, de 5mm de grosor. Antes de ensamblarlo, se midió el tiempo de vuelo de cada placa, para ondas longitudinales. Entre estas placas se colocaron tres tiras de vidrio en las orillas, dejando un lado descubierto. El recipiente fue sellado con resina epoxi para evitar fugas. Una vez construido el recipiente, se vertió un muestra de cada fluido dentro de él y se midió el tiempo de vuelo de las tres capas (vidrio-fluido-vidrio), de modo que el tiempo de vuelo dentro del fluido es la diferencia entre el tiempo total y el tiempo de vuelo de las dos placas. Con esto, se calculó la velocidad de sonido longitudinal dividiendo el tiempo de vuelo de cada fluido entre el ancho del interior del recipiente.

Para medir la velocidad del sonido de la cera-gel en función de la temperatura, se derritió una muestra del gel y ésta se vertió dentro del recipiente para las pruebas. Una vez enfriado a temperatura ambiente, se colocó la muestra en un baño térmico donde se calentó hasta 50°C. Se capturaron los datos cada 0.2°C y para cada temperatura se calculó la velocidad empleando el método anteriormente. Con los datos obtenidos se hizo un ajuste lineal, obteniendo la ecuación (3.2) para la velocidad del sonido del gel en función de la temperatura,

$$v_f(T) = 1.436 \times 10^5 \frac{cm}{s} - \left(355.59 \frac{cm}{s \text{ } ^\circ C} \right) T. \quad (3.2)$$

3.2. MEDICIÓN DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO

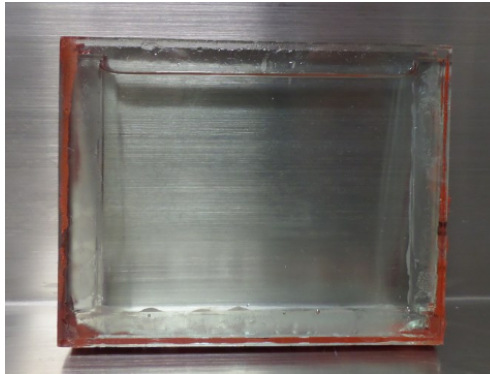


Figura 3.6: Recipiente empleado para medir la velocidad del sonido en líquidos.

En la Figura 3.7 se grafican los datos obtenidos en el experimento y el ajuste efectuado.

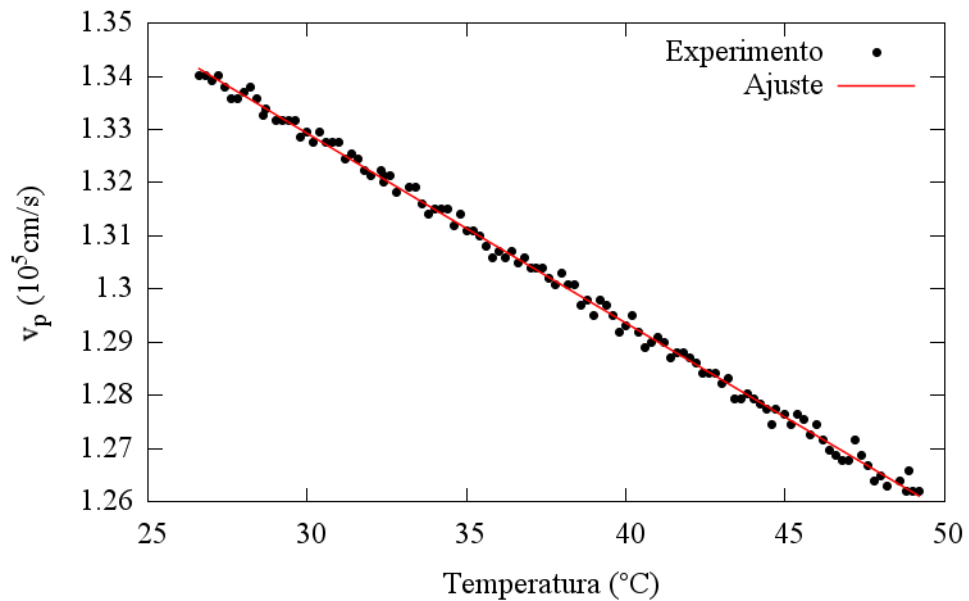


Figura 3.7: Velocidad del sonido en la cera-gel en función de la temperatura.

Los valores de los parámetros medidos para cada material se resumen en la Tabla 3.1, en donde se muestran la densidad, la velocidad de sonido longitudinal y la velocidad de las ondas de corte². En los casos donde no se indica explícitamente la temperatura, los datos corresponden a 25°C.

²La incertidumbre en las mediciones es menor al 1%.

3.3. ELABORACIÓN DE LAS MULTICAPAS

Tabla 3.1: Parámetros elásticos de los materiales usados en los experimentos

Material	$\rho(g/cm^3)$	$v_p(10^5 cm/s)$	$v_s(10^5 cm/s)$
PMMA	1.200	2.728	1.363
Vidrio	2.490	5.820	3.472
Agua	0.997	1.498	-
Etanol	0.789	1.145	-
Glicerina	1.241	1.930	-
Cera-gel (28.8°C)	0.841	1.334	-
Cera-gel (48.5°C)	0.825	1.263	-

3.3. Elaboración de las multicapas

Una vez medidos los parámetros elásticos de todos los materiales, se procedió a la construcción de las multicapas. La multicapa empleada para el estudio del efecto térmico en las bandas de un cristal fonónico fue construida con las placas de vidrio comercial separadas por capas de cera-gel. La elaboración de esta multicapa fue similar a la del recipiente para las mediciones ultrasónicas. Se usaron siete placas de vidrio de 4.94 ± 0.05 mm de grosor, entre las cuales se colocaron separadores de vidrio de 2.82 ± 0.02 mm dejando un lado de las placas descubierto. Después de sellar los lados de la multicapa con resina epoxi, se vertió cera-gel derretida entre las capas de vidrio y dejó enfriar el sistema a temperatura ambiente. La multicapa resultante se muestra en la Figura 3.8.



Figura 3.8: Multicapa de vidrio y cera-gel. Se muestra el calibrador digital como referencia de las dimensiones.

3.4. MEDICIONES DE TRANSMISIÓN

La construcción de la multicapa usada para las mediciones de transmisión a diferentes ángulos de incidencia fue más simple. Las multicapas se elaboraron apilando diez placas de PMMA de 5cm de ancho por 25cm largo, aproximadamente, y 1.50 ± 0.01 mm de grosor, entre las cuales se vertió una pequeña cantidad de líquido. Se aseguró que el fluido se distribuyera uniformemente entre las placas y se presionó la multicapa usando broches aprietapapel, colocados en los extremos de las placas como se puede observar en la Figura 3.9. Se midió el grosor total de la multicapa y con esto se calculó el grosor de las capas de fluido, restando al grosor total el grosor de cada placa por el número de placas y dividiendo el resultado entre el número de capas de fluido, obteniendo $d_f = 0.008$ mm. Con estos valores se obtuvo el factor de llenado de la multicapa, el cual resultó $f_s = 0.995$.

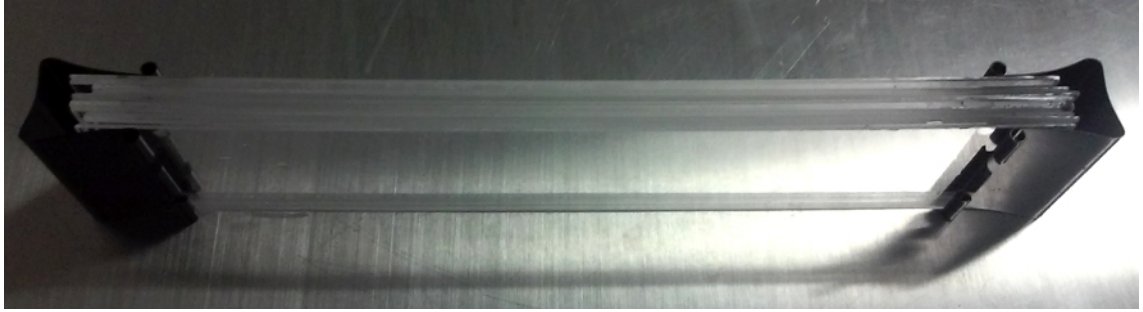


Figura 3.9: Multicapa de PMMA y capas de líquido muy delgadas.

3.4. Mediciones de transmisión

Para las mediciones de transmisión se empleó el mismo arreglo usado para medir la velocidad del sonido con la técnica de *through – transmission*, sin embargo el tratamiento de los datos fue distinto. Se capturó con el osciloscopio la señal medida en el transductor receptor, la cual fue enviada a la computadora. Los datos obtenidos se analizaron con la transformada discreta de Fourier, usando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier(FFT) en el software LabView. Esta transformada convierte la señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, permitiendo conocer las frecuencias que componen a dicha señal. Con esto se pudo determinar la estructura de bandas de transmisión de cada multicapa, para frecuencias desde 0 hasta 1.6MHz. En la Figura 3.10 se muestra el pulso Gaussiano emitido por el transductor emisor usado en los experimentos, así como su espectro de frecuencias normalizado.

3.4. MEDICIONES DE TRANSMISIÓN

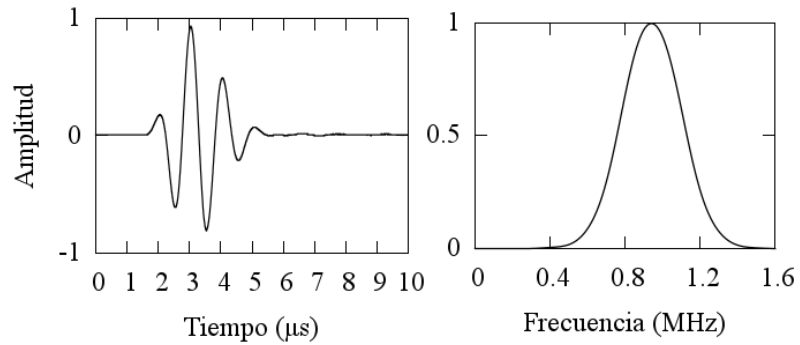


Figura 3.10: (a) Pulso incidente y (b) su transformada de Fourier.

En los experimentos para medir la transmisión se usaron los transductores longitudinales V303, acoplados dentro de unos recipientes cilíndricos de plástico con una base plana para facilitar su manipulación. Estos se sumergieron en una bandeja rectangular de aluminio dentro de la cual se vertió suficiente agua para cubrir las multicapas. El fin de hacer las mediciones con los sistemas inmersos en agua fue para facilitar el control de la temperatura o del ángulo de incidencia. En el caso de las mediciones con cambio de temperatura, la bandeja metálica se introdujo en un baño maría para calentar la multicapa lentamente. En la Figura 3.11 se muestra parte del arreglo usado para las mediciones de transmisión en las multicapas de PMMA. Para el experimento con

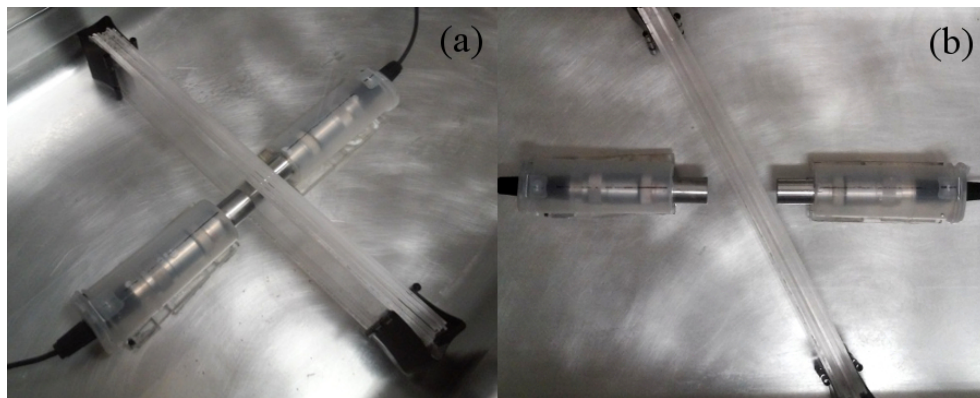


Figura 3.11: Medición de transmisión en las multicapas de PMMA para (a) incidencia normal e (b) incidencia oblicua.

cambio de temperatura, se midió la transmisión a incidencia normal en la multicapa de vidrio y cera-gel, para temperaturas entre 28.8° y 48.5° . Las mediciones se realizaron en descenso, capturando los datos cada 0.2°C y guardando cada resultado en un archivo distinto. A cada uno de estos archivos se le aplicó la transformada rápida de Fourier y los resultados se normalizaron con el valor máximo para cada temperatura.

Capítulo 4

Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados de los experimentos realizados, así como la comparación con los cálculos teóricos, los cuales se hicieron usando las herramientas desarrolladas en este trabajo, lo cual permite explicar fenómenos observados en los experimentos. La presentación de los resultados se divide en dos secciones: una para el efecto del cambio de temperatura en la estructura de bandas de un cristal fonónico de periodicidad unidimensional formado por placas de vidrio alternadas con capas de cera-gel; y otra sección dedicada al efecto del cambio del ángulo de incidencia en un cristal fonónico compuesto por placas de PMMA alternadas con capas muy delgadas de fluido ideal.

4.1. Efecto térmico en la estructura de bandas

Para estudiar el efecto térmico en la estructura de bandas de cristales fonónicos, se usó una multicapa con siete capas de vidrio comercial de 4.94 mm de grosor alternadas con seis capas de cera-gel de 2.83 mm de grosor. Este sistema se sumergió en un baño térmico donde fue sometido a cambio de temperatura desde 48.5°C hasta 28.8°C. Se midió la transmisión de un pulso ultrasónico de 1 MHz a incidencia normal, registrando los resultados cada 0.2°C. Para cada listado de datos se calculó la transformada de Fourier para conocer el espectro de frecuencias de los pulsos transmitidos. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4.1, para frecuencias entre 0 y 1.6 MHz. El color blanco corresponde al mínimo de transmisión y el negro al máximo. En esta figura se puede observar que hay regiones donde prácticamente no hay transmisión. También se observa que al cambiar la temperatura del sistema, algunas de las bandas de frecuen-

4.1. EFECTO TÉRMICO EN LA ESTRUCTURA DE BANDAS

cias donde hay transmisión se desplazan o cambian su anchura. Este fenómeno es más notable para las bandas localizadas entre 0.8 y 1.5 MHz, razón por la que se decidió enfocar el estudio a esta región.

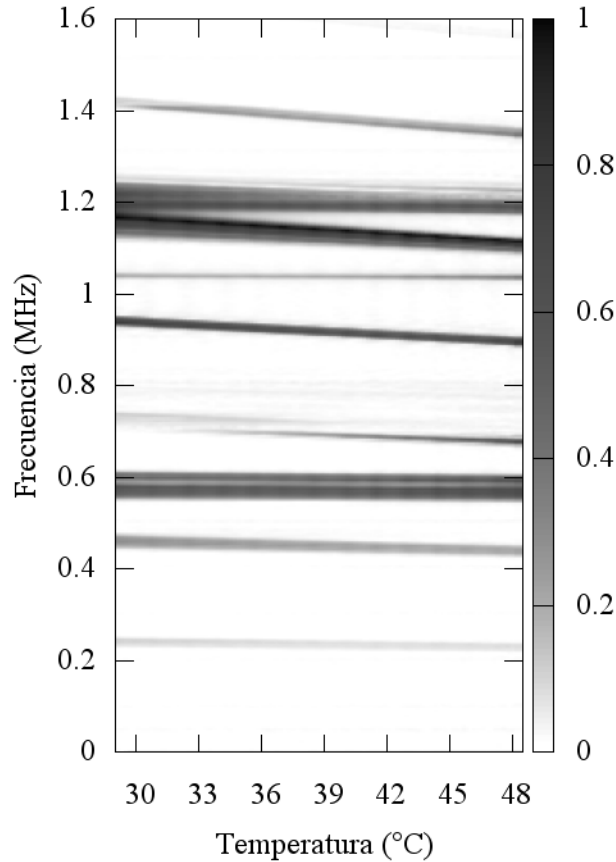


Figura 4.1: Espectro de frecuencias experimental de la transmisión en un multicapa de vidrio y cera-gel, para temperaturas entre 28.8°C y 48.5°C

Para explicar los fenómenos observados en los resultados experimentales, se calcularon los coeficientes de transmisión a incidencia normal para la multicapa estudiada, para temperaturas entre de 28.8°C a 48.5°C y frecuencias de 0.8 MHz a 1.5 MHz. Los parámetros usados en los cálculos fueron $d_s = 0.494$ cm, $d_f = 0.283$ cm, $\rho_s = 2.49$ g/cm³, $v_p = 5.825 \times 10^5$ cm/s y $v_s = 5.825 \times 10^5$ cm/s. Se consideró que los parámetros del vidrio no varían dentro del rango de temperaturas del experimento. La densidad y la velocidad del sonido en la cera-gel se calcularon usando las ecuaciones (3.1) y (3.2). Se tomó como medio de incidencia al vidrio. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4.2, donde se comparan con los espectros de frecuencias experimentales.

4.1. EFECTO TÉRMICO EN LA ESTRUCTURA DE BANDAS

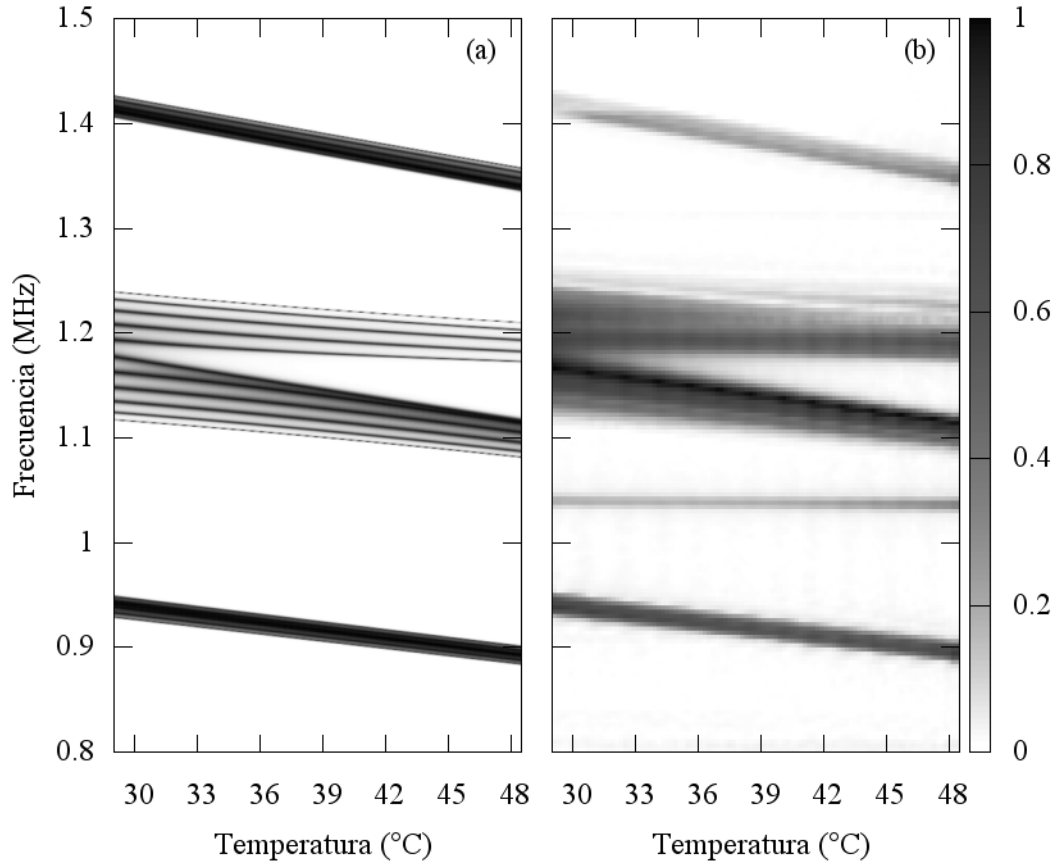


Figura 4.2: Comparación teoría-experimento del efecto térmico en la multicapa de vidrio y cera-gel: (a) coeficiente de transmisión longitudinal y (b) espectro de frecuencias experimental, en función de la temperatura

En la Figura 4.2 puede observarse que la mayoría de las bandas se desplaza hacia frecuencias más bajas al aumentar la temperatura, lo cual puede ser explicado por la disminución de los valores de la densidad y de la velocidad del sonido del gel. Además, hay dos bandas entre 1.1 MHz y 1.25 MHz que se unen cerca de 28.8 °C, pero se separan a temperaturas más altas. En general hay buena correspondencia entre los cálculos teóricos y los resultados experimentales, excepto para la banda que aparece en el experimento alrededor de 1.04 MHz, la cual no se ve afectada notablemente por los cambios de temperatura. También se observa que hay transmisión por encima de la tercera banda (entre 1.19 MHz y 1.24 MHz), lo cual no es predicho por la teoría. Para explicar estas discrepancias es necesario considerar la estructura de bandas del sistema para ondas propagándose en forma oblicua a las capas, ya que los transductores piezoeléctricos usados en los experimentos no emiten pulsos perfectamente planos y esto

4.2. VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA

podría producir la excitación de bandas que no aparecen para incidencia normal. Se calcularon las curvas de dispersión correspondientes a 28.8°C y 48.5°C para $k_0 D/\pi$ entre 0 y 2, correspondientes a ángulos pequeños fuera de la normal. Las estructura de bandas proyectadas correspondientes se muestran en la Figura 4.3, en esta se puede ver que al aumentar el ángulo de propagación de las ondas en el cristal aparece una banda entre 1.0 MHz y 1.1 MHz lo que explica la transmisión observada en el experimento alrededor de 1.04 MHz. La existencia de esta banda está relacionada con los modos Lamb de las placas de vidrio(ver Apéndice A), como puede observarse en la gráfica, cuyas propiedades sólo dependen de los parámetros del sólido y no de los del fluido. Esto explica por qué la posición de dicha banda no se ve afectada por los cambios de temperatura. Este tipo de bandas se presentan en superredes sólido-fluido donde la impedancia del sólido es mucho mayor a la del fluido, como es el caso del sistema estudiado.

Se graficaron las curvas de dispersión para 28.8°C y 48.5°C, para incidencia normal ($k_0 = 0$) y para $k_0 D/\pi = 0.7$. Estas se compararon con los resultados experimentales en la Figura 4.4, donde se observa muy buena correspondencia entre la teoría y el experimento. Donde existen bandas hay transmisión y esta es prácticamente nula donde hay brechas. Las curvas de dispersión para $k_0 D/\pi = 0.7$ predicen la existencia de una banda alrededor de 1.04 MHz. También se observa que las dos bandas localizadas entre 1.1 MHz y 1.3 MHz se desplazan hacia frecuencias más altas al aumentar k_0 , explicando la existencia de transmisión por encima de las frecuencias predichas por la teoría para incidencia normal. Es importante notar que a pesar de la existencia de una banda por encima de 1.4 MHz a 48.5°C, en el experimento no se observa transmisión en esta región. Esto se debe a que, por arriba de 1.4 MHz, las componentes del espectro de frecuencias del pulso incidente son prácticamente nulas.

4.2. Variación del ángulo de incidencia

Para el estudio de la variación de la estructura de bandas con el cambio del ángulo de incidencia, en superredes sólido-fluido, se hizo uso de una multicapa compuesta por diez placas de PMMA separadas por capas de fluidos ideales muy delgadas. Se usaron tres fluidos distintos para separar las placas sólidas, agua, etanol y glicerina, esto con el fin de mostrar que la estructura de bandas, para estos sistemas en particular, no depende de los parámetros elásticos de las capas de fluido. Las mediciones se realizaron

4.2. VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA

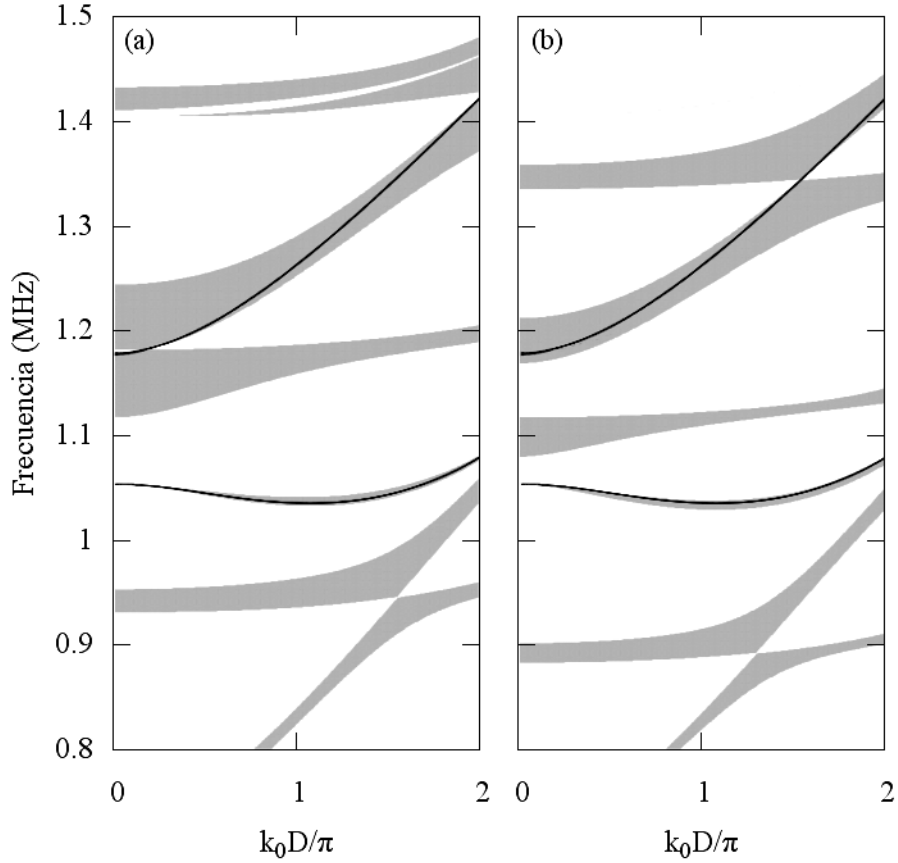


Figura 4.3: Estructura de bandas proyectadas para el cristal fonónico de vidrio y cera-gel, para (a) 28.8°C y (b) 48.5°C. Las zonas grises representan las bandas del sistema y las zonas blancas las brechas. Las líneas negras son las curvas de dispersión de los modos Lamb de una placa de vidrio.

para ocho ángulos distintos desde 0° hasta 70°, separados en intervalos de 10°, con agua como medio de incidencia y transmisión. Para cada ángulo se midió la transmisión de un pulso ultrasónico de 1.0 MHz y se obtuvo el espectro de frecuencias de la transmisión mediante la transformada de Fourier. Esto se repitió para cada uno de los fluidos usados. Los resultados obtenidos se compararon con las curvas de dispersión y los coeficientes de transmisión correspondientes a cada ángulo, calculados con el método de la matriz de transferencia, para una superred sólido-fluido de PMMA y agua con factor de llenado $f_s = 0.995$, para frecuencias entre 0 y 1.6 MHz. El cálculo de los coeficientes de transmisión se hizo para la multicapa finita de diez placas sólidas y nueve capas de fluido.

Los resultados teóricos y experimentales se muestran en la Figura 4.5 para ángulos de incidencia entre 0 y 30° y en la Figura 4.6 para ángulos de 40° a 70°. En la primera

4.2. VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA

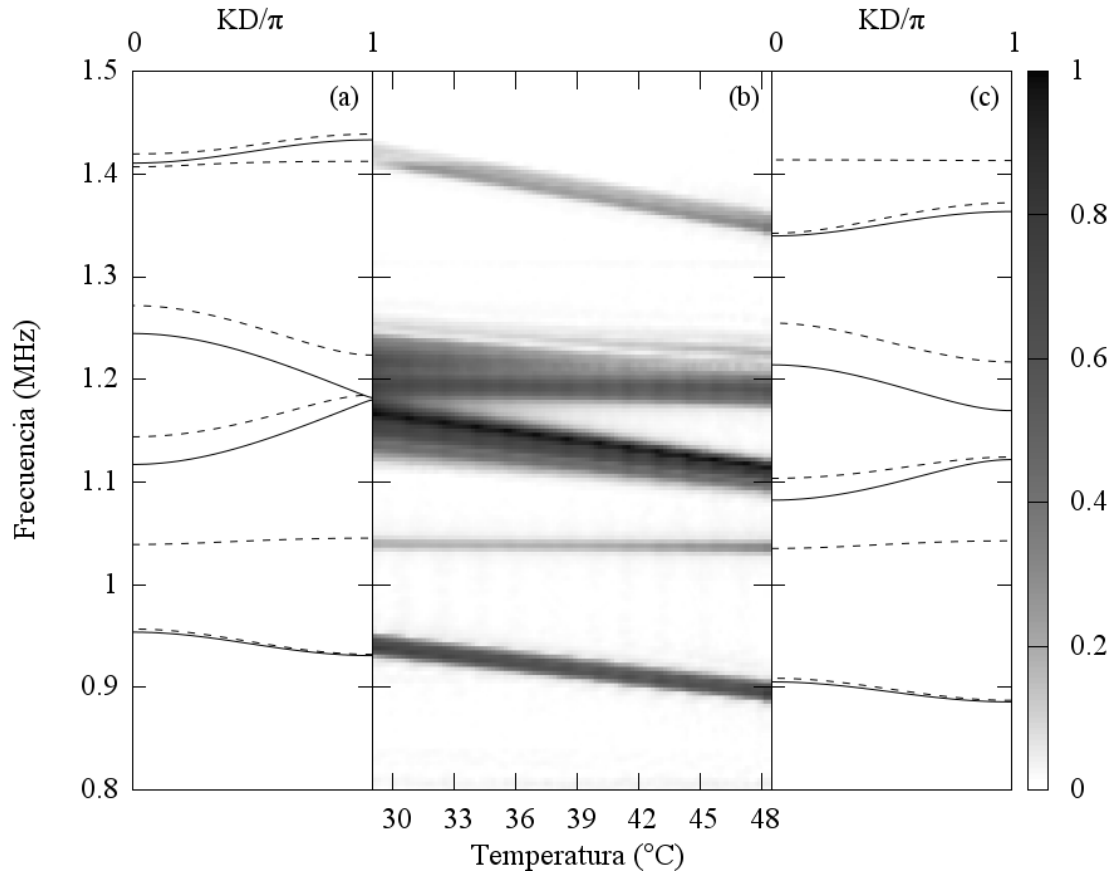


Figura 4.4: Comparación de las curvas de dispersión del cristal fonónico de vidrio y cera-gel, a (a) 28.8°C y (c) 48.5°C , con el espectro de transmisión experimental. Las líneas continuas de los paneles (a) y (c) corresponden a las curvas de dispersión para $k_0 = 0$ (incidencia normal) y las líneas punteadas a $k_0 D/\pi = 0.7$.

columna de cada figura se muestran las curvas de dispersión para cada ángulo; la segunda columna corresponde a los coeficientes de transmisión; las siguientes columnas son los espectros de frecuencia experimentales, normalizados con el valor máximo de cada uno, para la transmisión en la multicapa de PMMA con agua, etanol y glicerina, respectivamente. Puede verse que la transmisión disminuye en las frecuencias donde hay brechas, siendo este efecto más notable entre más anchas sean éstas. Se observa que, para cada ángulo, los espectros de frecuencias experimentales correspondientes a cada fluido son muy parecidos entre sí, lo cual es evidencia de la independencia de la estructura de bandas de los valores de los parámetros de los fluidos. Para incidencia normal, el sistema se comporta prácticamente como un medio homogéneo, como puede observarse en la Figura 4.5. Existe una brecha muy angosta en las bandas entre 0.891 MHz y 0.905 MHz , cuyo efecto se nota en la disminución de la transmisión.

4.2. VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA

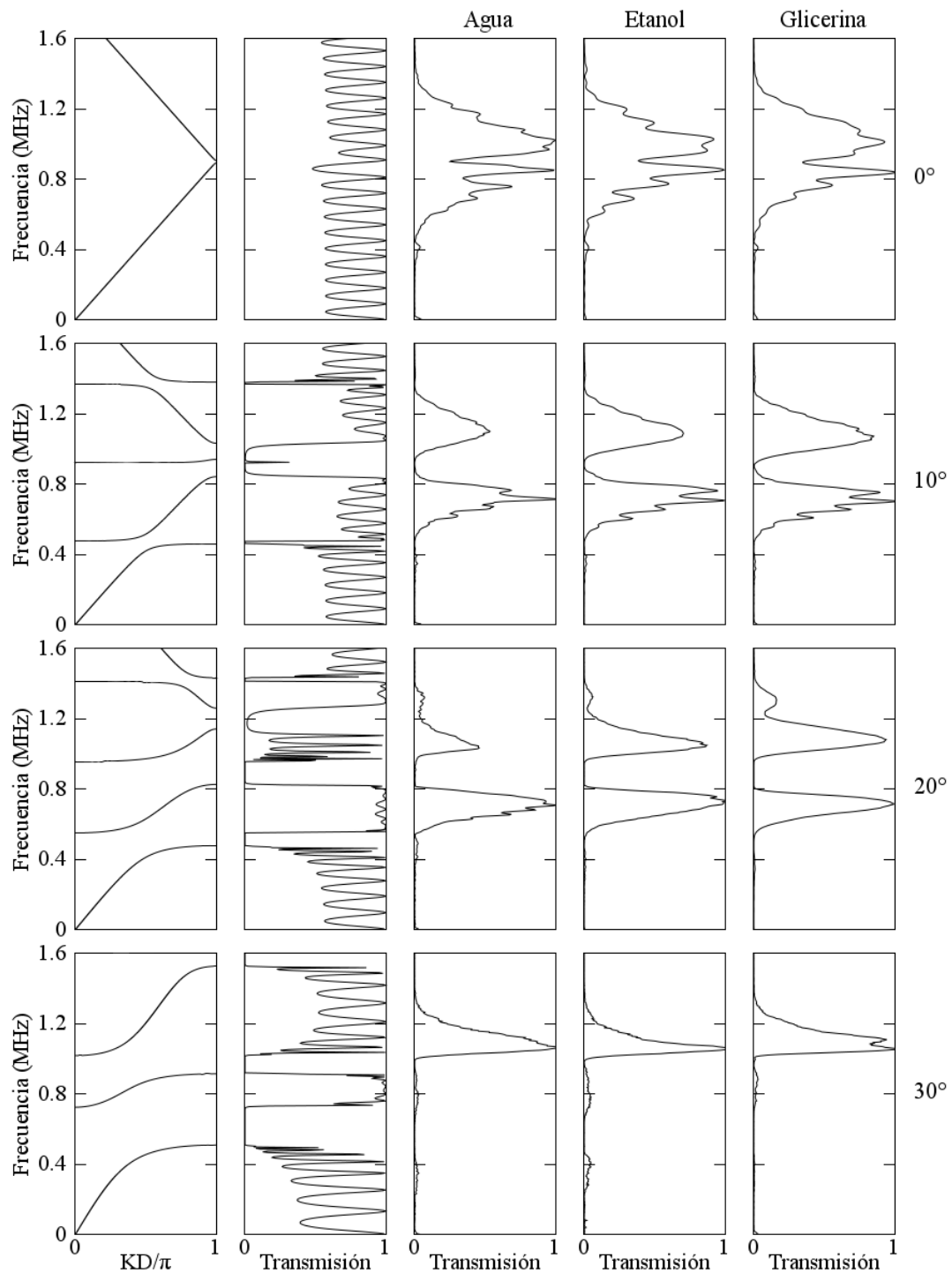


Figura 4.5: Comparación teoría-experimento para multicapas de PMMA y fluido ideal, con factor de llenado $f_s = 0.995$. En la primera columna se muestran las curvas de dispersión para θ_f igual a 0° , 10° , 20° y 30° ; en la segunda columna, los coeficientes de transmisión; en la tercera, cuarta y quinta columna, la transmisión experimental cuando las capas de fluido son agua, etanol y glicerina, respectivamente.

4.2. VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA

Al aumentar el ángulo de incidencia a 10° , se abren cuatro brechas en las bandas: de 0.460 MHz a 0.475 MHz, de 0.841 MHz a 0.919 MHz, de 0.940 MHz a 1.032 MHz y de 1.368 MHz a 1.380 MHz. Debido a la anchura y a la localización de la primera y la cuarta brecha, su efecto es poco evidente en los resultados experimentales, aun así se puede apreciar una disminución en la transmisión. El efecto es más notable entre 0.841 MHz y 1.032 MHz, en donde se observa una disminución considerable de la transmisión. La teoría predice la existencia de una banda plana entre 0.919 MHz y 0.940 MHz; sin embargo, en el experimento no se detectó transmisión en estas frecuencias, lo cual puede deberse a la imperfección de las placas. Para 20° , las brechas se han extendido, ahora la primera se localiza entre 0.477 MHz y 0.550 MHz, la segunda de 0.825 MHz a 0.954 MHz, la tercera de 1.140 MHz a 1.260 MHz y la cuarta de 1.410 MHz a 1.432 MHz. Nuevamente, el efecto de la primera y la cuarta brecha es poco apreciable. A 30° , la primera brecha se ha ensanchado casi el triple, de 0.509 MHz a 0.723 MHz, y su efecto es más notable en los resultados experimentales. La segunda brecha se hace más angosta y se desplaza hacia frecuencias más altas, quedando entre 0.914 MHz y 1.017 MHz. La tercera brecha también se desplazó a frecuencias más altas y la cuarta se ha desplazado fuera del rango de frecuencias analizado. Para este ángulo se detectó mayor transmisión en la banda entre 1.017 MHz y 1.525 MHz, comparada a las bandas de frecuencias más bajas.

Los demás ángulos de incidencia se localizan por debajo de la línea de sonido longitudinal del PMMA (correspondiente a $\theta_f = 33.3^\circ$ para el agua), por lo que la estructura de bandas es muy distinta a la encontrada por arriba de dicha línea. Para 40° hay tres brechas entre 0 y 1.6 MHz, una entre 0.263 MHz y 0.558 MHz, otra entre 1.034 MHz y 1.471 MHz y otra entre 1.564 MHz y 1.673 MHz. Debido a la posición de la primera brecha, es poco apreciable el efecto en los espectros experimentales. Para la segunda brecha, se observa que la transmisión disminuye poco en esas frecuencias. Tal como predice la teoría, en 50° se cierran las bandas, pues este ángulo corresponde a $\theta_s = 45^\circ$ dentro del sólido. Además, el PMMA y el agua cumplen con la condición de transmisión total (2.178), por lo que los espectros de frecuencias experimentales tienen la misma forma que el espectro del pulso incidente (Figura 3.10). Al aumentar el ángulo de incidencia a 60° , se abren las bandas de 0.702 MHz a 0.736 MHz y de 1.440 MHz a 1.471 MHz, donde se puede observar una ligera disminución en la transmisión. Para 70° , sólo hay una brecha entre 0.755 MHz y 0.874 MHz. En este caso es más notable la disminución de la transmisión dentro de esas frecuencias.

4.2. VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA

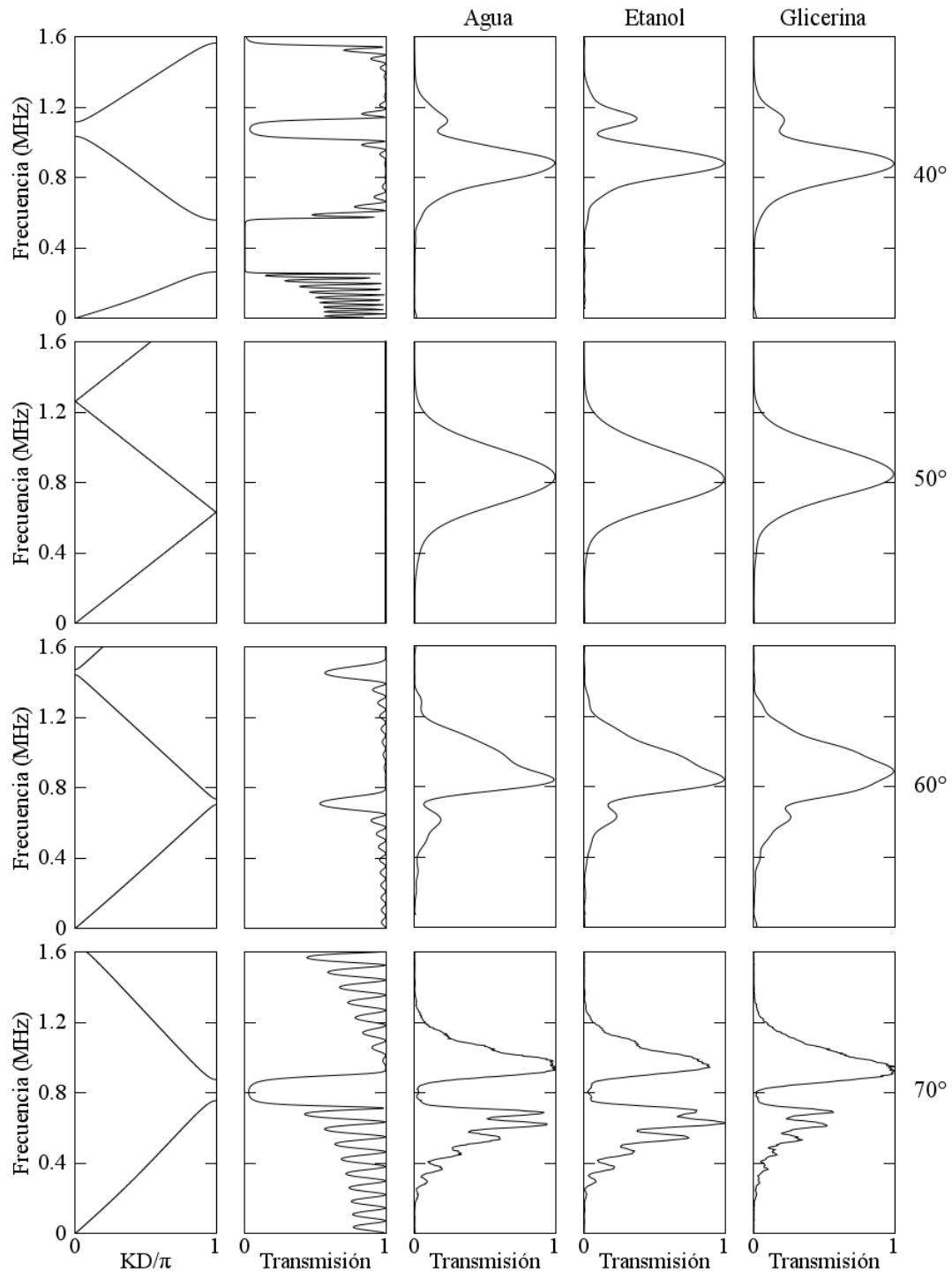


Figura 4.6: Comparación teoría-experimento para multicapas de PMMA y fluido ideal, con factor de llenado $f_s = 0.995$. En la primera columna se muestran las curvas de dispersión para θ_f igual a 40°, 50°, 60° y 70°; en la segunda columna, los coeficientes de transmisión; en la tercera, cuarta y quinta columna, la transmisión experimental cuando las capas de fluido son agua, etanol y glicerina, respectivamente.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se presentó un estudio teórico y experimental de las superredes formadas por placas sólidas alternadas con capas de fluidos ideales. El fin de este trabajo fue investigar mecanismos para controlar la posición y el ancho de las bandas en dichos sistemas. Para este fin se propusieron dos métodos, uno mediante la variación de la temperatura en una superred formada por placas de vidrio y capas de cera-gel cuyas parámetros elásticos son sensibles a los cambios térmicos; y otro método basado en el cambio del ángulo de incidencia de las ondas elásticas sobre las placas, en una superred compuesta por placas de PMMA alternadas con capas líquidas muy delgadas. Ambos sistemas estudiados podrían tener aplicaciones para el control activo de la transmisión de ondas elásticas, modificando las frecuencias de las bandas ya sea cambiando la temperatura o rotando el sistema para variar el ángulo de incidencia.

Se empleó el método de matriz de transferencia para calcular la transmisión y reflexión de ondas elásticas en una interfase sólido-fluido, en una capa sólida rodeada de fluidos ideales, en una capa de fluido ideal rodeada de sólidos y en una multicapa. También se usó el mismo método para el cálculo de la estructura de bandas de una superred sólido-fluido.

Los resultados teóricos fueron comparados con mediciones de transmisión usando transductores piezoeléctricos, encontrando buena consistencia entre la teoría y el experimento. El experimento para la sintonización térmica de las bandas se sometió al sistema a cambios de temperatura desde 28.8°C hasta 48.5°C, midiendo la transmisión a incidencia normal. Al aumentar la temperatura se modificó el ancho de las bandas y se desplazaron hacia frecuencias más bajas, a excepción de una banda entre 1.0 MHz y 1.1 MHz, cuya posición no se vio alterada por los cambios térmicos. Se encontró que

esta banda está relacionada con uno de los modos Lamb de las placas de vidrio, lo cual explica la independencia de su posición con la temperatura, en el rango estudiado. La existencia de dos bandas entre 1.1 MHz y 1.3 MHz, que se separan a temperaturas altas, podría ser aplicada para controlar la propagación de ondas elásticas en ese rango de frecuencias, bloqueando la transmisión al aumentar la temperatura.

Para el otro sistema estudiado, compuesto de placas de PMMA alternadas con capas de fluido muy delgadas, se encontró una gran variación en la estructura de bandas al cambiar el ángulo de incidencia de las ondas sobre las placas. De forma consistente con la teoría, se encontraron dos ángulos donde el sistema se comporta prácticamente como un medio homogéneo, a incidencia normal y a 50° . Además, para este último ángulo se observó transmisión total para todas las frecuencias, proporcionando evidencia experimental de la existencia del ángulo de Brewster para ondas elásticas propagándose entre un sólido y un fluido. También se observó que la transmisión no variaba notablemente al cambiar el fluido entre las placas. Además, para este sistema se encontró una estrecha relación entre la estructura de bandas y los modos guiados de las placas.

En el modelo teórico empleado en este trabajo se hicieron algunas idealizaciones, como suponer que las capas de los materiales eran de extensión infinita, ignorar la viscosidad de los fluidos y considerar que las ondas eran planas. En los experimentos las condiciones son diferentes, los sistemas tienen dimensiones finitas, los fluidos presentan viscosidad y las ondas emitidas por los transductores son haces que no son perfectamente planos. Tomando esto en cuenta, se podría extender la investigación para tener resultados más exactos mediante otros métodos analíticos o numéricos. Otra posible extensión es el estudio de cristales fonónicos de periodicidad bidimensional o tridimensional compuestos de sólidos separados por capas de fluido muy delgadas, análogos al estudiado en este experimento, pues este tipo de sistemas han sido poco estudiados.

Apéndice A

Modos guiados de ondas elásticas en capas

Cuando se propagan en un medio limitado por planos paralelos, las ondas elásticas son guiadas por las fronteras. Estas fronteras pueden ser libres, cuando el medio está rodeado de vacío, o rígidas, cuando el medio que rodea a la capa es indeformable. A diferencia de la propagación en un medio infinito donde se tienen dos modos, uno longitudinal y otro de corte (sólo longitudinal en el caso de un fluido ideal), la presencia de las fronteras da origen a un conjunto infinito de modos cuyas velocidades de propagación dependen de la relación entre la longitud de onda y el grosor de la capa de material. Existe una relación entre estos modos y la transmisión de ondas elásticas en capas rodeadas de otro medio, en particular cuando hay un alto contraste entre los parámetros elásticos del material de la capa y los del medio que la rodea[33].

Primero consideraremos el caso de una capa de fluido ideal de grosor d_f rodeada de vacío, como se ilustra en la Figura A.1. Este tipo de sistema puede aproximarse cuando la capa de fluido está rodeada de un material cuya impedancia acústica sea mucho menor que la del fluido. Dentro del fluido tenemos dos ondas longitudinales, una viajando en dirección positiva respecto al eje z y la otra en dirección negativa. Las componentes del vector de desplazamiento para este sistema son

$$u_{f,x} = \left[v_f k_0 u_f^{+,0} e^{iq_f z} + v_f k_0 u_f^{-,0} e^{-iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (\text{A.1})$$

$$u_{f,z} = \left[v_f q_f u_f^{+,0} e^{iq_f z} - v_f q_f u_f^{-,0} e^{-iq_f z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (\text{A.2})$$

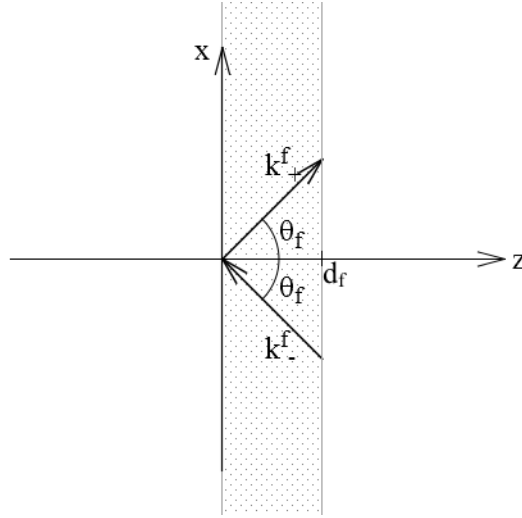


Figura A.1: Capa de fluido de grosor d_f rodeada de vacío.

Como en el vacío no se propagan ondas mecánicas, no se puede transmitir energía a través de las interfases que separan al fluido del vacío. Entonces, las condiciones que se deben cumplir son

$$\sigma_{zz}^f \Big|_{z=0} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_{zz}^f \Big|_{z=d_f} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Aplicando estas condiciones al vector de desplazamiento se obtiene el sistema de ecuaciones

$$F_2(u_f^+ + u_f^-) = 0, \quad F_2(e^{iq_f d_f} u_f^+ + e^{-iq_f d_f} u_f^-) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Agrupando estas ecuaciones en forma matricial, queda

$$F_2 \mathbb{D}_f^+ \mathbf{u}_f^0 = 0, \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\mathbb{D}_f^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{iq_f d_f} & e^{-iq_f d_f} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Para tener soluciones no triviales, se debe cumplir

$$\det \mathbb{D}_f^+ = 0. \quad (\text{A.8})$$

Desarrollando este determinante se tiene

$$e^{-iq_f d_f} - e^{iq_f d_f} = 0 \implies \text{sen}(q_f d_f) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Las soluciones a esta ecuación son

$$q_f d_f = \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.10})$$

Entonces, de la relación de dispersión para ondas elásticas en un fluido homogéneo,

$$k_0^2 + q_f^2 = \left(\frac{\omega}{v_f} \right)^2, \quad (\text{A.11})$$

se llega a la ecuación

$$\left(\frac{\omega d_f}{\pi v_f} \right) = \sqrt{n^2 + \left(\frac{k_0 d_f}{\pi} \right)^2}. \quad (\text{A.12})$$

Al resolver esta ecuación se obtienen las curvas de dispersión para una capa de fluido inmersa en vacío. Estas curvas relacionan la frecuencia ω con el número de onda k_0 .

Un caso similar es el de una capa de fluido rodeada de un medio rígido, indeformable. En este caso, las condiciones que se deben cumplir son

$$u_{f,z}|_{z=0} = 0, \quad u_{f,z}|_{z=d_f} = 0, \quad (\text{A.13})$$

pues las interfases entre el fluido y el medio rígido no pueden deformarse.

En la naturaleza, un medio rígido puede aproximarse con un material cuya impedancia acústica sea mucho mayor a la impedancia del fluido, de forma opuesta al caso anterior de un fluido en vacío. Aplicando estas condiciones de frontera, se obtiene la ecuación matricial

$$F_1 \mathbb{D}_f^- \mathbf{u}_f^0 = 0, \quad (\text{A.14})$$

donde

$$\mathbb{D}_f^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{iq_f d_f} & -e^{-iq_f d_f} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Es fácil observar que

$$\det \mathbb{D}_f^- = -\det \mathbb{D}_f^+, \quad (\text{A.16})$$

de lo que se deduce que las frecuencias características para una capa de fluido rodeada

de un medio rígido son iguales a las frecuencias de un fluido inmerso en vacío. En la Figura A.2 se muestran las curvas de dispersión de una capa de fluido.

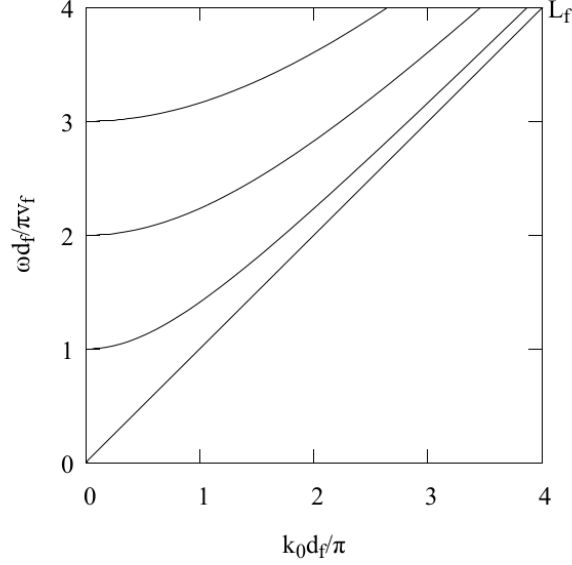


Figura A.2: Curvas de dispersión para una capa de fluido rodeada de vacío o de un medio rígido.

Cuando el material de la capa es un sólido, la obtención de las curvas de dispersión es más complicada que en el caso de un fluido, pues dentro de un sólido también pueden existir ondas de corte. De los casos estudiados anteriormente, la situación más sencilla es cuando el medio que rodea a la placa sólida es rígido. Como en el desarrollo del presente trabajo estudiaremos sistemas compuestos por sólidos en contacto con fluidos, entonces consideraremos que la placa no est  pegada al medio rígido, sino acoplada como si fuera un fluido, de modo que los esfuerzos normales a las interfaces son continuos, pero no los tangenciales. Este sistema puede aproximarse cuando tenemos una placa inmersa en un fluido cuya impedancia es mucho mayor a la del sólido. En este caso, las condiciones de frontera que se deben cumplir son

$$\sigma_{xz}^s|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{xz}^s|_{z=d_s} = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$u_{S,z}|_{z=0} = 0, \quad u_{S,z}|_{z=d_s} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Como se puede ver en la Figura A.3, el vector de desplazamiento dentro de la placa es

$$u_{S,x} = \left[v_p k_0 u_p^{+,0} e^{iq_p z} + v_p k_0 u_p^{-,0} e^{-iq_p z} + v_s q_s u_s^{+,0} e^{iq_s z} + v_s q_s u_s^{-,0} e^{-iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}, \quad (\text{A.19})$$

$$u_{S,z} = \left[v_p q_p u_p^{+,0} e^{iq_p z} - v_p q_p u_p^{-,0} e^{-iq_p z} - v_s k_0 u_s^{+,0} e^{iq_s z} + v_s k_0 u_s^{-,0} e^{-iq_s z} \right] \frac{e^{i(k_0 x - \omega t)}}{\omega}. \quad (\text{A.20})$$

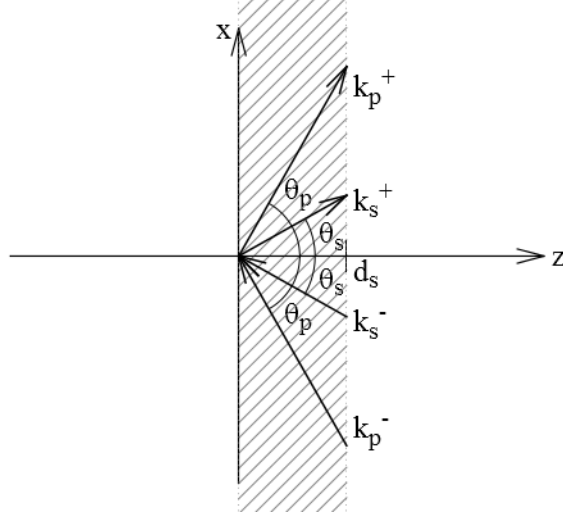


Figura A.3: Placa sólida de grosor d_s rodeada de vacío.

Aplicando las condiciones de frontera correspondientes se obtiene el sistema de ecuaciones

$$P_1 u_p^{+,0} - P_1 u_p^{-,0} + S_1 u_s^{+,0} - S_1 u_s^{-,0} = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$P_1 e^{iq_p d_s} u_p^{+,0} - P_1 e^{-iq_p d_s} u_p^{-,0} + S_1 e^{iq_s d_s} u_s^{+,0} - S_1 e^{iq_s d_s} u_s^{-,0} = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$P_3 u_p^{+,0} - P_3 u_p^{-,0} - S_3 u_s^{+,0} + S_3 u_s^{-,0} = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$P_3 e^{iq_p d_s} u_p^{+,0} - P_3 e^{-iq_p d_s} u_p^{-,0} - S_3 e^{iq_s d_s} u_s^{+,0} + S_3 e^{iq_s d_s} u_s^{-,0} = 0, \quad (\text{A.24})$$

o, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} P_1 \mathbb{D}_p^- & S_1 \mathbb{D}_s^- \\ P_3 \mathbb{D}_p^- & -S_3 \mathbb{D}_s^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p^{+,0} \\ u_p^{-,0} \\ u_s^{+,0} \\ u_s^{-,0} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{A.25})$$

donde \mathbb{D}_p^- y \mathbb{D}_s^- son de la forma (A.15), esto es

$$\mathbb{D}_p^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{iq_p d_s} & -e^{-iq_p d_s} \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbb{D}_s^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{iq_s d_s} & -e^{-iq_s d_s} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Las soluciones no triviales de la ecuación (A.25) se obtienen cuando el determinante de la matriz es cero. Para calcular este determinante, se hará uso de la propiedad de las matrices en bloques

$$\det \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} = \det (\mathbb{A}\mathbb{D} - \mathbb{C}\mathbb{B}), \quad (\text{A.27})$$

donde \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{C} y \mathbb{D} son matrices cuadradas invertibles y $\mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{C}\mathbb{A}$. En este caso $\mathbb{A} = \mathbb{I}$, \mathbb{D}_p^- y $\mathbb{C} = P_3 \mathbb{D}_p^-$, con lo que se cumple la condición para poder usar la identidad (A.27). Con esto,

$$\det(P_1 S_3 \mathbb{D}_p^- \mathbb{D}_s^- + P_3 S_1 \mathbb{D}_p^- \mathbb{D}_s^-) = 0. \quad (\text{A.28})$$

Haciendo uso de las propiedades de los determinantes, la ecuación anterior queda

$$(P_1 S_3 + P_3 S_1)^2 \det \mathbb{D}_p^- \det \mathbb{D}_s^- = 0. \quad (\text{A.29})$$

De aquí se encuentra que las soluciones a la ecuación (A.25) vienen dadas por

$$P_1 S_3 + P_3 S_1 = 0, \quad \det \mathbb{D}_p^- = 0 \quad y \quad \det \mathbb{D}_s^- = 0. \quad (\text{A.30})$$

De la primera ecuación, se obtiene

$$v_p v_s q_p (q_s^2 - k_0^2) + 2v_p v_s q_p k_0^2 = 0, \quad \implies \quad q_p = 0. \quad (\text{A.31})$$

El par de ecuaciones restantes tienen soluciones de la misma forma que las correspondientes a una capa de fluido, es decir

$$\left(\frac{\omega d_s}{\pi v_p} \right) = \sqrt{m^2 + \left(\frac{k_0 d_s}{\pi} \right)^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.32})$$

$$\left(\frac{\omega d_s}{\pi v_s} \right) = \sqrt{n^2 + \left(\frac{k_0 d_s}{\pi} \right)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.33})$$

Las curvas de dispersión para este tipo de sistemas se muestran en la Figura A.4.

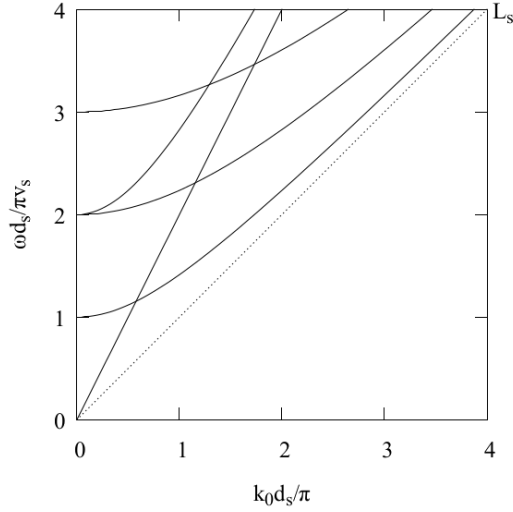


Figura A.4: Curvas de dispersión para una placa de aluminio rodeada de un medio rígido. La línea L_s es la línea de sonido de las ondas de corte.

Ahora abordaremos el caso de una placa sólida de grosor d_s , inmersa en vacío. El tipo de ondas que se propagan a través de este sistema son conocidas como ondas Lamb. En este caso es conveniente colocar el sistema de referencia con el plano $z = 0$ dividiendo a la placa en dos partes iguales. Las condiciones de frontera en este caso son

$$\sigma_{zz}^s|_{z=-\frac{d_s}{2}} = 0, \quad \sigma_{zz}^s|_{z=\frac{d_s}{2}} = 0, \quad (\text{A.34})$$

$$\sigma_{xz}^s|_{z=-\frac{d_s}{2}} = 0, \quad \sigma_{xz}^s|_{z=\frac{d_s}{2}} = 0. \quad (\text{A.35})$$

Aplicando estas condiciones y resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido, se llega a un par de ecuaciones conocidas las relaciones de frecuencias de Lamb[33]. De estas se obtienen dos conjuntos de ondas que se propagan en la placa, uno cuyas oscilaciones son simétricas respecto $z = 0$ y el otro de oscilaciones asimétricas respecto al mismo plano. Estas ecuaciones son

$$\frac{\tan(q_s d_s/2)}{\tan(q_p d_s/2)} = -\frac{4q_p q_s k_0^2}{(k_0^2 - q_s^2)^2} \quad y \quad \frac{\tan(q_s d_s/2)}{\tan(q_p d_s/2)} = -\frac{(k_0^2 - q_s^2)^2}{4q_p q_s k_0^2}, \quad (\text{A.36})$$

para los modos simétricos y los asimétricos, respectivamente. Las curvas de dispersión que se obtienen a partir de estas ecuaciones se muestran en la Figura A.5, para una placa de aluminio.

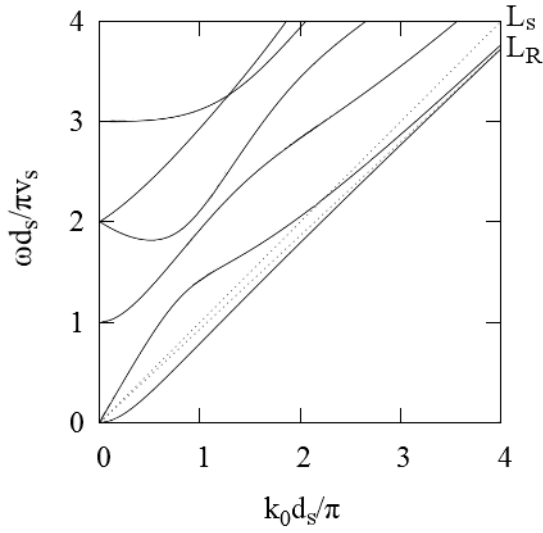


Figura A.5: Curvas de dispersión para los modos Lamb en una placa de aluminio.

La línea L_s de la Figura A.5 corresponde a la línea de sonido de las ondas de corte en el sólido y L_R a la línea de sonido de las ondas Rayleigh, las cuales son ondas elásticas que se propagan sobre la superficie libre plana de un sólido semi-infinito[28, 33].

Bibliografía

- [1] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski y B. Djafari-Rouhani, Phys. Rev. Lett. **73**(13), 2022 (1993).
- [2] M. S. Kushwaha, P. Halevi, G. Martínez, L. Dobrzynski y B. Djafari-Rouhani, Phys. Rev. B **49**(4), 2313 (1994).
- [3] Y. El Hassouani, E. H. El Boudouti, D. Djafari-Rouhani, H. Aynaou y L. Dobrzynski, Phys. Rev. B **74**, 144306 (2006).
- [4] Y. El Hassouani, E. H. El Boudouti, D. Djafari-Rouhani y H. Aynaou, Phys. Rev. B **78**, 174306 (2008).
- [5] W. T. Thomson, J. Appl. Phys. **21**, 89 (1950).
- [6] S. M. Rytov, Soviet Physical Acoustics, **2**, 68-80 (1956).
- [7] M. Schoenberg, T. J. Plona y K. W. Winkler, *Waves in alternating fluid solid layers*. 1982 Ultrasonic Symposium (1982).
- [8] M. A. Biot, J. Acoust. Soc. Am. **28**(2), 168-178 (1956).
- [9] R. E. Camley, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski y A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **27**, 7318 (1983).
- [10] J. Mendiáldua, T. Szwacka, A. Rodríguez y L. Dobrzynski, Phys. Rev. B **39**, 10674 (1989).
- [11] A. L. Shuvalov y A. S. Gorkunova, Phys. Rev. E **243**(4), 679 (2001).
- [12] C. Liu, X-D. Xu y X-J. Liu, Acta Phys. Sin. **62**(20), 204302 (2013).
- [13] C. Goffaux y J. P. Vigneron, Phys. Rev. B **64**, 075118 (2001).

- [14] D. Schneider, F. Liaqat, E. H. El Boudouti, Y. El Hassouani, B. Djafari-Rouhani, W. Tremel, H-J. Butt y G. Fytas, *Nano Lett.* **12**(6), 3101 (2012).
- [15] L. Wang y K. Bertoldi, *Int. J. Solids Struct.* **49**(19-20), 2881 (2012).
- [16] Y. Wang, F. Li, Y. Wang, K. Kishimoto y W. Huang, *Acta Mech. Sin.* **25**, 65-71 (2009).
- [17] O. Bou Matar, J. F. Robillard, J. O. Vasseur, A. C. Hladky-Hennion, P. A. Deymier, P. Pernod y V. Preobrazhensky, *J. Appl. Phys.* **111**, 054901 (2012).
- [18] J. F. Robillard, O. Bou Matar¹, J. O. Vasseur, P. A. Deymier, M. Stippinger, A. C. Hladky-Hennion, Y. Pennec and B. Djafari-Rouhani, *Appl. Phys. Lett.* **95**, 054901 (2009).
- [19] Z. Xu y F. Wu, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **26**, 858-864 (2015).
- [20] Y. Cheng, X. Liu y D.J. Wu, *J. Acoust. Soc. Am.* **129**, 1157-1160 (2010).
- [21] Y. Yao, F. Wu, X. Zhang y Z. Hou, *J. Appl. Phys.* **110**, 123503 (2011).
- [22] Z. Bian, W. Peng y J. Song, *J. Appl. Mech.* **81**, 041008 (2014).
- [23] K.L. Jim, C. W. Leung, S. T. Lau, S. H. Choy y H. L. W. Chan, *Appl. Phys. Lett.* **94**, 193501 (2009).
- [24] B. Manzanares-Martínez, J. Sánchez-Dehesa y F. Ramos-Mendieta, *Temperature tunable acoustic filter*, Twelfth International Congress on Sound and Vibration, Lisboa, Portugal: s.n. (2005)
- [25] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press; 3^a edición (1959).
- [26] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press; 2^a edición (1970).
- [27] M. H. Sadd. *Elasticity Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier; 1^a edición (2005).
- [28] A. L. Fetter y J. D. Walecka. *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. Dover; 1^a edición (2003).
- [29] G. Arfken. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press; 3^a edición (1985).

BIBLIOGRAFÍA

- [30] Y. C. Fung. *A First Course In Continuum Mechanics*. Prentice-Hall.; 1^a edición (1969).
- [31] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens y J. V. Sanders. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons; 4^a edición (2000).
- [32] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons; 8^a edición (2005).
- [33] J. L. Rose. *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge University Press; 1^a edición (1999).
- [34] W. M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics. A Ready-Reference Book of Chemical and Physical Data*. CRC Press; 95^a edición (2015).