

**Universidad de Sonora**

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Investigación en Física

**“Optimización de Heteroestructuras Fotónicas  
de bajo índice de refracción”**

**TESIS**

**Que para obtener el grado de**

**Maestro en Ciencias**

**Presenta**

**Damián Moctezuma Enríquez**

Hermosillo, Sonora, México

Enero de 2010

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

# Índice.

<b>Introducción.</b>	<b>4</b>
I.1 Los Cristales Fotónicos.	4
I.2 Historia de los Cristales Fotónicos.	5
I.3 Los espejos de Bragg	6
I.4 Heteroestructuras	6
1.5 Silicio Poroso	7
1.6 Una visión de las Heteroestructuras Fotónicas.	7
<b>Capítulo 1</b>	
<b>Ondas Electromagnéticas.</b>	<b>8</b>
1.1 Las Ecuaciones de Maxwell.	8
1.2 Condiciones de Frontera.	10
1.3 Las ecuaciones de Maxwell en un medio Homogéneo sin fuentes.	12
<b>Capítulo 2</b>	
<b>El Método de Expansión en Ondas Planas.</b>	<b>14</b>
2.1 Serie de Fourier para la Descripción de la Función Dieléctrica.	15
2.2 Ecuación de Valores Propios.	19
2.3 Aproximación Analítica con dos ondas planas.	20
2.3.1 Ejemplo Numérico	22
2.4 Convergencia del Método	23
<b>Capítulo 3</b>	
<b>El Método de la Matriz de Transferencia.</b>	<b>25</b>
3.1 La solución de la Ecuación de Onda de un Medio Heterogéneo.	26
3.2 El caso de dos medios.	27
3.2.1 Ejemplo numérico.	30
3.3 El caso de 3 medios: la película delgada.	31
3.3.1 Ejemplo numérico.	33
3.4 Sistema Multicapa.	37
3.4.1 Ejemplo aplicado a un sistema multicapa.	39

3.5 Obtención de la estructura de bandas compleja.	40
3.5.1 El teorema de Bloch.	41
3.5.2 El teorema de Bloch en forma matricial.	41
3.5.3 El problema de Eigenvalores de la Matriz de Transferencia.	43
<b>Capítulo 4</b>	
<b>Incremento de la BEPRO en espejos dieléctricos de silicio poroso.</b>	<b>45</b>
4.1 Teoría.	46
4.2 Incremento de la BEPRO.	47
4.3 El rol de la Absorción.	50
<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>Apéndice 1 Expresiones algebraicas.</b>	<b>55</b>
<b>Apéndice 2 Programas de computadora.</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>69</b>

# Introducción

Los cristales fotónicos son una nueva especie de semiconductores de luz propuestos hace casi 20 años [Yablonovitch, (1987), John, (1987)]. Hoy en día existe un buen nivel de entendimiento tanto en sus propiedades teóricas como en sus técnicas de fabricación. Sin embargo, todo este conocimiento no ha conducido aun a aplicaciones tecnológicas. En este trabajo proponemos el enfoque de considerar a los cristales fotónicos como bloques funcionales para la construcción de heteroestructuras de cristal fotónico. En particular, nos enfocamos a heteroestructuras unidimensionales de materiales de bajo índice de refracción construidas a partir de técnicas de silicio poroso. En esta sección presentamos el contexto científico en el cual se desarrolla nuestro estudio y la necesidad, que nosotros pensamos que existe, de desarrollar una forma clara para el modelado de las propiedades ópticas de heterouniones de múltiples cristales fotónicos de tamaño finito con el fin de desarrollar técnicas de simulación que moldeen el flujo de luz en forma innovadora para nuevos dispositivos fotónicos.

## I.1 Los cristales fotónicos

Los cristales fotónicos (CF) son estructuras periódicas dieléctricas o metálicas que son diseñadas para interactuar con el movimiento de fotones en una manera similar a la que la periodicidad de los potenciales atómicos interactúa con el movimiento de los electrones en los cristales semiconductores. En esencia, los cristales fotónicos tienen regiones alternadas de alto y bajo índice de refracción. Los fotones (actuando como ondas) se propagan a través de esta estructura (o no) dependiendo de su longitud de onda. Mediante fenómenos de interferencia constructiva y destructiva se definen Bandas de Energía Permitidas (BEPER) y Bandas de Energía Prohibidas (BEPRO). La existencia de BEPRO para fotones es el fenómeno esencial en los cristales fotónicos, el cual da lugar a la posibilidad de inhibir la emisión espontánea, guiar luz a través de circuitos ópticos, desarrollar espejos dieléctricos, entre otros [Srivastava, (2008)].

Dado que los fenómenos físicos están basados en la difracción, la periodicidad de los cristales fotónicos debe de estar en la misma escala de las ondas electromagnéticas. Por ejemplo, entre 200 nm (azul) y 350 nm (rojo) para cristales fotónicos operando en la región del visible.

Debido a que las estructuras dieléctricas deben de tener esta dimensión, las técnicas de fabricación de cristales fotónicos son difíciles y complejas.

## **I.2 Historia de los cristales fotónicos**

El termino cristal fotónico fue por primera vez usado en 1987. Sin embargo, el fenómeno ha sido estudiado de una forma u otra desde 100 años antes. Antes de 1987 los cristales fotónicos unidimensionales habían sido estudiados extensamente. Fue Lord Rayleigh [Rayleigh, (1888)] quien comenzó el estudio materiales de BEPRO diseñando estructuras multicapas que tenían un cierto rango de reflectividad. Hoy en día los espejos dieléctricos son usados en muchas aplicaciones tecnológicas, tales como elementos reflectivos en espejos láseres. Existe un interesante estudio teórico realizado por Bykov [Bykov, (1972)] en donde se analiza la emisión espontánea en estructuras en una dimensión. Un estudio detallado de los cristales fotónicos unidimensionales es presentado por Pochi Yeh en su libro. [Yeh, (2005)]

El concepto de cristales fotónicos fue discutido por Othaka en 1979 [Othaka, (1979)], quien desarrolló un interesante formalismo de calculo de estructura de bandas. Sin embargo, se dá por sentado que el nacimiento del los cristales fotónicos fue un par de artículos que aparecieron en 1987, realizados por Yablonovitch y John. [Yablonovitch, (1987), John, (1987)] Estos artículos tienen enfoques distintos. Para Yablonovitch, los cristales fotónicos eran un medio ambiente que permitía modificar la densidad de estados e inhibir la emisión espontánea. Para John, los cristales fotónicos permitirían la localización de luz. Después de 1987, ha existido una gran cantidad de artículos científicos relacionados con los cristales fotónicos. En particular, una gran cantidad de artículos están relacionados con resultados experimentales que reportan la dificultad que existe en obtener una banda fotónica completa para una estructura tridimensional, en particular, en el rango del visible. [Ordejon, (1998)]

En 1996, Thomas Krauss demostró que era posible obtener una estructura bidimensional en el rango cercano a frecuencias ópticas.[Krauss, (1996)] Este trabajo despertó el interés en estudiar estructuras bidimensionales. Hoy en día existe una gran cantidad de investigadores que apuestan a desarrollar cristales fotónicos bidimensionales con el objetivo de manipular luz en

circuitos ópticos. La idea es desarrollar una tecnología fotónica de procesamiento de información que sea alterna a la electrónica.

Los cristales fotónicos aun no han desarrollado novedosas aplicaciones tecnológicas, excepto las fibras ópticas de cristal fotónico que han mejorado las características de las usuales fibras ópticas. [Rusell, (2003)]

El estudio experimental de la estructuras 2D y 3D progresa lentamente. Las dimensiones de los cristales deben de ser muy pequeñas y se llega al límite de lo que se puede microfabricar con la tecnología actual. Por otra parte, las técnicas de químicas de autoorganización tienen una gran cantidad de desorden estructural [Bjarklev, (2003)]. Es por eso que es interesante explotar las estructuras en una dimensión para buscar características potencialmente interesantes para dispositivos fotónicos.

### **I.3 Los espejos de Bragg**

Los espejos de Bragg (o espejos multicapas) son estructuras ópticas unidimensionales las cuales consisten en una secuencia de películas delgadas con materiales de alto y bajo índice de refracción. El diseño mas común es el espejo de cuarto de onda, donde la distancia óptica de cada capa corresponde a un cuarto de la longitud de onda para la cual el espejo esta diseñado. Es decir,

$$n_a d_a = n_b d_b = \lambda/4. \quad \text{I.1)}$$

Esta condición da la combinación ideal de espesor de las películas delgada para cada contraste de índice. Un factor limitante de estos espejos es la unidireccional, es decir, que solo funcionan en incidencia normal y dejan de ser espejos a medida que la luz incide con un mayor ángulo de incidencia.

### **I.4 Heteroestructuras**

Se entiende por heteroestructura a la superposición de diferentes redes cristalinas en la cual la identidad de los "átomos" (en el sentido de indivisible) cambia bruscamente. Una heteroestructura fotónica esta compuesta por la heterounion de diferentes cristales fotónicos.

## **1.5 Silicio poroso**

El silicio poroso es un material compuesto, en donde coexisten silicio y aire. El índice de refracción del silicio poroso se obtiene al considerar la homogenización de la estructura del material compuesto. En general, entre más silicio exista el material, se tendrá un mayor índice de refracción, por el contrario, entre mas aire exista (mayor porosidad) el índice de refracción será menor. Las técnicas de fabricación basadas en silicio poroso son interesantes ya que es posible controlar con gran precisión el grado de porosidad del material, y de esta forma se pueden construir un gran tipo de geometrías en donde se varíe el índice de refracción. [Agarwal, (2008)]

## **1.6 Una visión de las heteroestructuras Fotónicas**

En 1945, antes del nacimiento del transistor, los semiconductores eran vistos como una familia de sólidos con propiedades interesantes pero con ninguna utilidad práctica. Adicionalmente, la existencia de desorden intrínseco hacía que cada bulto (bulk) de semiconductor tuviera propiedades irrepetibles. [Queisser, (1998)] Usualmente a los cristales fotónicos se les compara con los semiconductores, ya que un cristal fotónico semi-conduce luz. También podemos considerar que la situación en el campo de los cristales fotónicos es, en cierta forma, un poco desesperada. Hasta este momento no se ha visto ninguna aplicación tecnológica eficiente. Sin embargo, quizás sea adecuado hacer el símil con los semiconductores y considerar la lección del transistor. El transistor es una unión de diferentes semiconductores, es decir, una heteroestructura. Actualmente, gran parte de la investigación se centra en buscar la perfección en las técnicas de fabricación, especialmente en estructuras tridimensionales, en donde la idea es eliminar el desorden [Agarwal,(2003)]. El desorden en cristales fotónicos puede resultar tan difícil de controlar como el control del dopado de defectos en semiconductores. Entonces, un probable camino de investigación en cristales fotónicos sea el explorar el uso de heteroestructuras. Este trabajo está consagrado a este camino.



# Capítulo 1

## Ondas Electromagnéticas.

La Radiación Electromagnética (REM) es un fenómeno presente en forma de ondas autopropagantes en el vacío o en la materia. La REM posee componentes magnéticas y eléctricas en fase (o no) que son perpendiculares entre sí y viajan en dirección hacia la energía de propagación. Dependiendo de la frecuencia que las ondas posean, la REM se puede clasificar por tipos de ondas, por ejemplo microondas, ondas de radio, rayos X, radiación en Terahertz, y en un rango muy pequeño que puede ser detectado por los ojos de varios organismos, La luz visible.

Las ondas electromagnéticas fueron postuladas por Maxwell y subsecuentemente confirmadas por Heinrich Hertz. Maxwell derivó una onda directamente del tratamiento de las ecuaciones eléctricas y magnéticas, revelando el hecho de que la REM es una onda. Según las ecuaciones de Maxwell, un campo eléctrico variante en forma espacial, genera un campo magnético variante en el tiempo y viceversa; esta interacción genera la forma de la onda electromagnética. Debido a que la velocidad de las Ondas Electromagnéticas fue precedida por medio de la ecuación de onda se obtuvo al mismo tiempo la velocidad de la luz.

En el presente capítulo se discutirá en forma breve las ecuaciones de Maxwell, y su comportamiento en el espacio de frecuencias. A partir de este análisis se obtendrá la ecuación de onda para el espacio de frecuencias, a fin de plantear la ecuación de onda de Helmholtz. Finalmente se analizará el comportamiento de los campos Eléctrico y Magnético en términos de las condiciones de frontera entre medios, todo esto orientado al espacio unidimensional.

### 1.1 Las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia.

Las ecuaciones de Maxwell describen en su totalidad el comportamiento electromagnético de la materia, estas ecuaciones son [Jackson, (1964)]

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad 1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = +\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \quad 1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad 1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t) \quad 1.4)$$

Donde  $\mathbf{E}$  es el campo Eléctrico y  $\mathbf{B}$  la inducción magnética.  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$  definen el desplazamiento eléctrico y el campo magnético respectivamente. Por último  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  son las fuentes de carga y de corriente respectivamente. Las ecuaciones de Maxwell se complementan con las relaciones constitutivas.

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.6)$$

Los campos en el dominio del tiempo  $[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)]$  y los campos en el dominio de la frecuencia  $[\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)]$  se relacionan entre si mediante la transformada de Fourier.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad 1.7)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad 1.8)$$

Realizando la transformada de Fourier en las ecuaciones de Maxwell. Tenemos para la el lado izquierdo de la ecuación 1.1)

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)] e^{-i\omega t} d\omega$$

y del lado derecho

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [i\omega \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega)] e^{-i\omega t} d\omega$$

Igualando las identidades entre corchetes, se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.9)$$

Para la ecuación 1.2) se tiene la forma similar del lado izquierdo

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega)] e^{-i\omega t} d\omega$$

y para el lado derecho.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \omega) \right] e^{-i\omega t} d\omega$$

Igualando las cantidades entre corchetes se tiene.

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.10)$$

Las ecuaciones 1.3) y 1.4) en el dominio de la frecuencia son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad 1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.12)$$

Tomando en cuenta las relaciones constitutivas 1.5) y 1.6) podemos escribir las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia como:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i\omega}{c} \mu(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.14)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.15)$$

$$\nabla \cdot \mu(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad 1.16)$$

## 1.2 Condiciones de Frontera

Consideremos las ecuaciones rotacionales de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad 1.17a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = +\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \quad 1.17b)$$

La frontera entre dos medios se describe como indica la Fig.1.1.

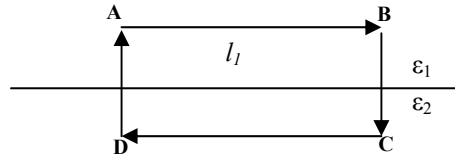


Fig. 1.1 Ilustración de la frontera entre dos medios, para las ecuaciones rotacionales de Maxwell.

Integramos en ambos lados sobre el área que está circunscrita en el contorno ABCD.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} \quad 1.17c)$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} = +\frac{1}{c} \int_S \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \right] \cdot d\mathbf{S} \quad 1.17d)$$

En el límite en que el área tiende a cero, las integrales del lado derecho pasan a ser cero, esto debido a que el integrando es finito y el área tiende a cero, tal que:

$$\lim_{Area \rightarrow 0} -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} = 0 \quad 1.17c)$$

$$\lim_{Area \rightarrow 0} \frac{1}{c} \int_S \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \right] \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad 1.17d)$$

De esta forma tenemos que:

$$\lim_{Area \rightarrow 0} \int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} = 0 \quad 1.17e)$$

$$\lim_{Area \rightarrow 0} \int_S \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} = 0 \quad 1.17f)$$

Del teorema de Stokes se puede relacionar una integral de área con una integral línea, tal que.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad 1.18)$$

A partir de 1.18) se tiene que:

$$\lim_{Area \rightarrow 0} \int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad 1.19a)$$

Esto lleva a que

$$\lim_{Area \rightarrow 0} \int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} = E_t^{(\varepsilon_1)} l_1 - E_t^{(\varepsilon_2)} l_1 = 0 \quad 1.19b)$$

Donde  $E_t^{(\varepsilon_1)}$  y  $E_t^{(\varepsilon_2)}$  son los campos tangenciales en el medio  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  respectivamente. Por otra parte  $l_1$  es la distancia entre AB siendo la misma para CD, de esta manera se tiene que.

$$E_t^{(\varepsilon_1)}(\mathbf{x}, t) = E_t^{(\varepsilon_2)}(\mathbf{x}, t) \quad 1.19c)$$

Similarmente se puede tener.

$$H_t^{(\varepsilon_1)}(\mathbf{x}, t) = H_t^{(\varepsilon_2)}(\mathbf{x}, t) \quad 1.19d)$$

Considerando las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia (1.13 y 1.14), se pueden obtener las condiciones de Frontera.

$$E_t^{(\varepsilon_1)}(\mathbf{x}, \omega) = E_t^{(\varepsilon_2)}(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.19e)$$

Similarmente se puede tener.

$$H_t^{(\varepsilon_1)}(\mathbf{x}, \omega) = H_t^{(\varepsilon_2)}(\mathbf{x}, \omega) \quad 1.19f)$$

### 1.3 Las ecuaciones de Maxwell en un medio Homogéneo sin fuentes.

En esta sección vamos a considerar un medio homogéneo sin fuentes. Hacemos entonces algunas simplificaciones primero consideremos que no existen fuentes de carga ni de corriente, así.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad 1.20a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad 1.20b)$$

Consideremos también que la permeabilidad magnética es uno,

$$\mu(\mathbf{x}, \omega) = 1 \quad 1.20c)$$

Además, en un medio con la función dieléctrica tenemos.

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon \quad 1.20d)$$

De esta forma las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo son:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad 1.21a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = +\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad 1.21b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad 1.21c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad 1.21d)$$

Podemos establecer entonces la ecuación de onda en el régimen temporal.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad 1.22a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad 1.22b)$$

La solución de esta ecuación usualmente se hace, realizando una separación de variables de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) \phi(t) \quad 1.23a)$$

Siendo la solución espacial.

$$\mathbf{e}(x) = \mathbf{e}_0^+ e^{ikx} + \mathbf{e}_0^- e^{-ikx} \quad 1.23b)$$

La forma en 1.23a) considera en la solución temporal, una onda monocromática.

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-i\omega t} \quad 1.23c)$$

Así tenemos que

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}(x) \phi_0 e^{ikx - i\omega t} \quad 1.24d)$$

Podemos plantear la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia de la forma.

$$\nabla^2 \mathbf{e}(x) = -\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \mathbf{e}(x) \quad 1.25)$$

Esta es la ecuación que vamos a resolver en esta tesis.

## Capítulo 2

# El Método de Expansión en Ondas Planas

El método de expansión en ondas planas (MEOP) se refiere a una técnica computacional usada en cristales fotónicos para resolver las Ecuaciones de Maxwell por medio de la formulación de un problema de eigenvalores. En este método se expanden en serie de Fourier las funciones periódicas que definen a la función dieléctrica y al campo eléctrico. Estas expansiones se introducen a la ecuación de onda para obtener una ecuación de eigenvalores. A partir de la solución de la ecuación de eigenvalores se pueden obtener tanto las frecuencias propias del sistema (o estructura de bandas) como las funciones propias del sistema.

El MEOP es una forma de resolver la ecuación de Helmholtz en un medio heterogéneo. Históricamente, el MEOP fue el primer método de cálculo que predijo en forma adecuada la existencia de BEPRO para los campos electromagnéticos vectoriales en un cristal fotónico tridimensional. [Ho, (1990)] El MEOP es comúnmente aplicado a estructuras infinitas, aunque ha sido demostrado que también puede utilizarse para estudiar modos confinados (de superficie) en cristales finitos. [Ramos, (1997)]

Para desarrollar herramientas teóricas encaminadas al diseño de estructuras ópticas basadas en cristales fotónicos, es necesario hacer una revisión del método de onda plana para entender la forma en que la luz se propaga en una estructura cristalina. El MEOP analiza a los cristales fotónicos desde una perspectiva propia de la física del estado sólido, en donde se describe al cristal fotónico en términos de estructuras de bandas, redes recíprocas y problemas de eigenvalores. Actualmente existen muchos métodos de cálculo en cristales fotónicos, pero si se trata de encontrar las frecuencias permitidas en cada dirección cristalina para una geometría determinada, entonces el método mas utilizado sigue siendo el método de expansión en ondas planas. [Johnson, (2002)]

En este capítulo describimos una forma sencilla para obtener la estructura de bandas mediante el MEOP. La idea de desarrollar este capítulo fue entender que significa una estructura

de bandas, que es lo que describe y como puede ser calculada. Asimismo, como se hacen los programas de computadora para realizar el calculo numérico.

El material de este capitulo esta distribuido en la siguiente forma. Primero se analiza la serie de Fourier para la función dialéctica. A continuación se plantea la ecuación de eigenvalores partiendo de la ecuación de onda electromagnética. Proponemos a continuación una sencilla aplicación del MEOP planteando el problema de eigenvalores con solo dos ondas planas. Terminamos el capitulo analizando la convergencia del problema de eigenvalores.

### 2.1 Serie de Fourier para la descripción de la función dieléctrica.

Considérese un medio periódico infinito tal y como se describe en la Fig. 2.1. La estructura multicapa está compuesta por capas alternadas de materiales  $\epsilon_a$  y  $\epsilon_b$  cuyos espesores son  $d_a$  y  $d_b$  respectivamente. La estructura se extiende por todo el espacio, como lo ilustra el panel a). En el panel b) mostramos la celda unitaria que tiene longitud  $d=d_a+d_b$ . El cristal infinito puede considerarse como una repetición de la celda unitaria.

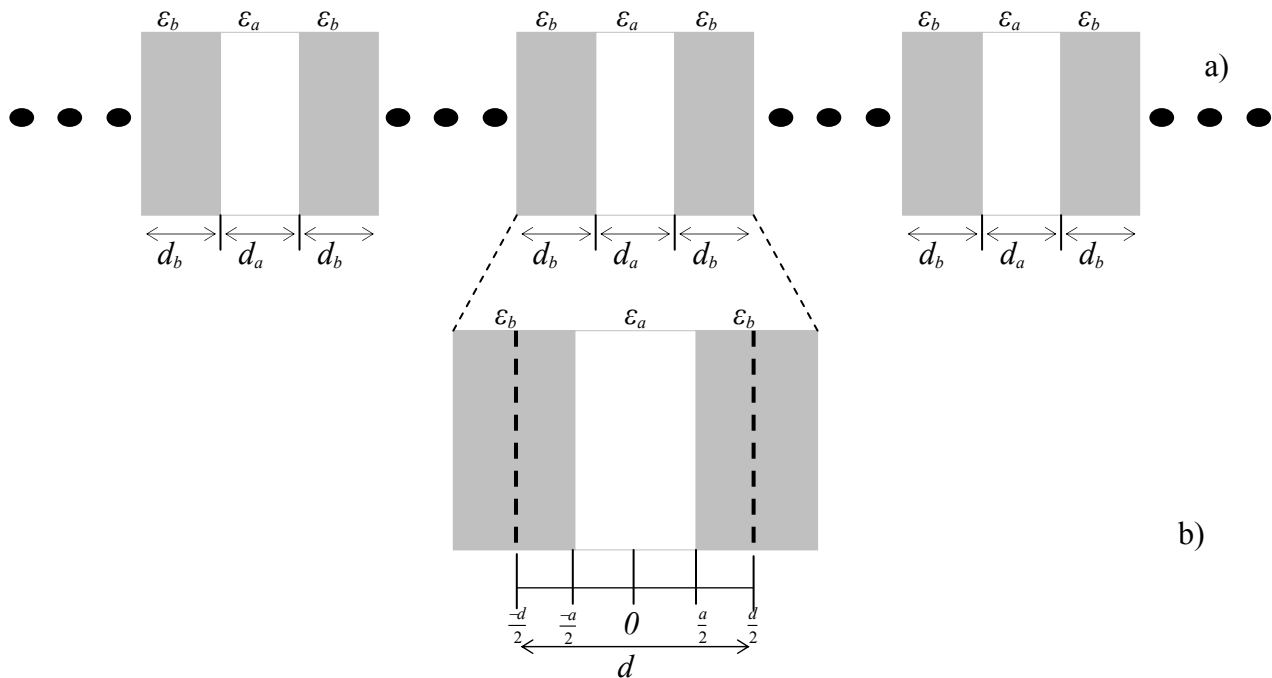


Fig. 2.1 Cristal Fotónico unidimensional infinito a) ilustración del sistema compuesto de capas  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$  de longitudes  $d_a$  y  $d_b$ , b) Celda unitaria Simétrica



La función dieléctrica en la celda unitaria puede expresarse mediante la igualdad.

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_b & -\frac{d}{2} \leq x < -\frac{a}{2} \\ \varepsilon_a & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \varepsilon_b & \frac{a}{2} < x \leq \frac{d}{2} \end{cases} \quad 2.1)$$

Las funciones periódicas pueden ser descritas por medio de una serie de Fourier, para la función dieléctrica proponemos

$$\varepsilon(x) = \sum_G \varepsilon(G) e^{iGx} \quad 2.2a)$$

siendo G un vector de la Red recíproca cuya forma es

$$G = \frac{2\pi n}{d} \quad 2.2b)$$

en la ecuación 2.2b)  $n$  puede tomar cualquier valor entero, positivo y negativo. Para conocer los coeficientes de la serie de Fourier  $\varepsilon(G)$  multiplicaremos ambos lados por  $e^{-iG'x}$  donde  $G'$ , es un distintivo para términos del cálculo, una vez realizada la multiplicación integremos.

$$\frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \varepsilon(x) e^{-iG'x} dx = \sum_G \varepsilon(G) \delta_{G,G'} \quad 2.3a)$$

donde

$$\delta_{G,G'} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i(G-G')x} dx \quad 2.3b)$$

Consideremos primero el caso en que  $G=0$ , el coeficiente  $\varepsilon(0)$  es.

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{d} \left( \int_{-\frac{d}{2}}^{-\frac{a}{2}} \varepsilon_b dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varepsilon_a dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}} \varepsilon_b dx \right) \quad 2.4a)$$

$$= \frac{1}{d} \left[ \varepsilon_b \left( \frac{d}{2} - \frac{a}{2} \right) + \varepsilon_a \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) + \varepsilon_b \left( \frac{d}{2} - \frac{a}{2} \right) \right]$$

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_b d + (\varepsilon_a - \varepsilon_b) a$$

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_b + (\varepsilon_a - \varepsilon_b) f \quad 2.4b)$$

En la ecuación 2.4b) se ha introducido el factor de llenado  $f = \frac{a}{d}$ .

Para el caso de cualquier otro vector de G diferente de cero tenemos

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{d} \left( \int_{-d/2}^{-a/2} \varepsilon_b e^{-iGx} dx + \int_{-a/2}^{a/2} \varepsilon_a e^{-iGx} dx + \int_{a/2}^{d/2} \varepsilon_b e^{-iGx} dx \right) \quad 2.5a)$$

$$\varepsilon(G) = f(\varepsilon_a - \varepsilon_b) \left( \frac{\text{Sin}\left(\frac{Ga}{2}\right)}{\left(\frac{Ga}{2}\right)} \right) \quad 2.5b)$$

Se puede escribir una expresión general para la función dieléctrica.

$$\varepsilon(G) = [\varepsilon_b + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)f] \delta_{G,0} + \left[ f(\varepsilon_a - \varepsilon_b) \left( \frac{\sin\left(\frac{Ga}{2}\right)}{\left(\frac{Ga}{2}\right)} \right) \right] (1 - \delta_{G,0}) \quad 2.6a)$$

Es conveniente introducir una forma normalizada para esta expresión, tomando en cuenta la expresión 2.2b)

$$\varepsilon(n) = [\varepsilon_b + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)f] \delta_{n,0} + \left[ (\varepsilon_a - \varepsilon_b) \left( \frac{\sin(n\pi f)}{(n\pi)} \right) \right] (1 - \delta_{n,0}) \quad 2.6b)$$

Como una forma de visualizar la función dieléctrica, consideremos el caso de un medio periódico de funciones dieléctricas  $\varepsilon_a = 2.25$  y  $\varepsilon_b = 1.0$ , con un factor de llenado  $f = 0.5$ . En la Fig. 2.2 mostramos los coeficientes de Fourier  $\varepsilon(G)$  para los casos en que el vector  $G$  varía entre los valores de -10 y 10, para el panel a) entre -20 y 20 para el panel b) y entre -50 y 50 para el panel c). En el apéndice 2.A se encuentran los programas para mostrar la Fig.2.2.

Es posible, definir la serie de Fourier en unidades normalizadas de la forma.

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \sum_G \varepsilon(G) e^{iGx} \\ &= \sum_n \varepsilon(n) e^{i \frac{2\pi n}{d} x} \\ &= \sum_n \varepsilon(n) e^{i 2\pi n \left( \frac{x}{d} \right)} \end{aligned}$$

En la Fig. 2.3 mostramos la función dielectrica. En los paneles a) b) y c) mostramos la serie de Fourier para los casos  $n = 10$ ,  $n = 20$  y  $n = 50$  respectivamente. En el apéndice 2.B mostramos el programa utilizado para la generación de la Fig. 2.3.

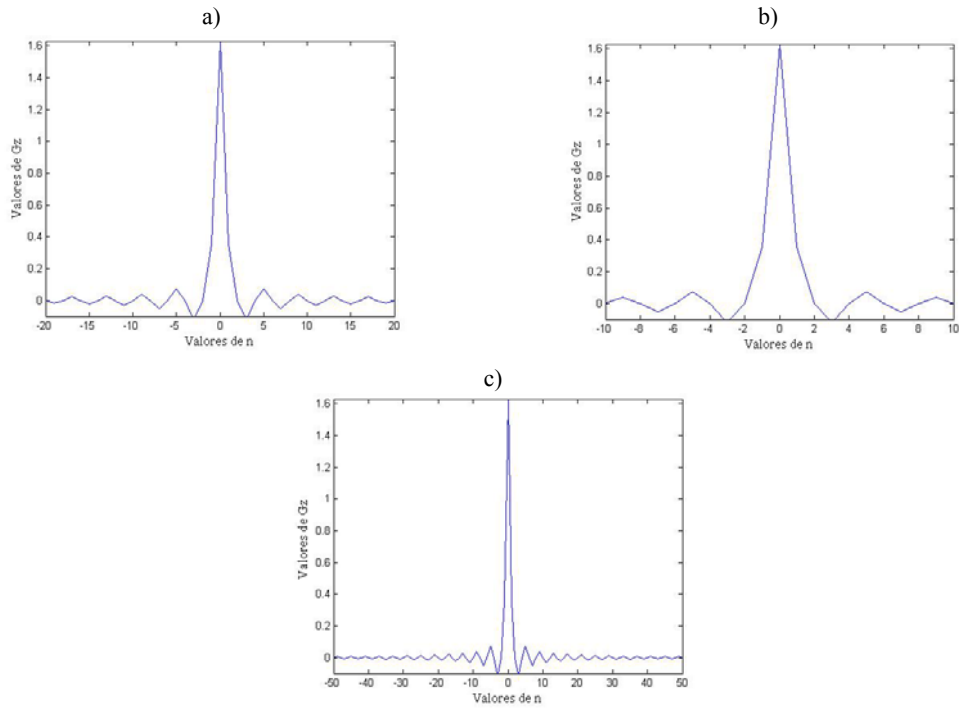


Fig. 2.2 Coeficientes de Fourier para distintos valores de  $n$ . a) para  $n = 10$ , b) para  $n = 20$ , c) para  $n = 50$

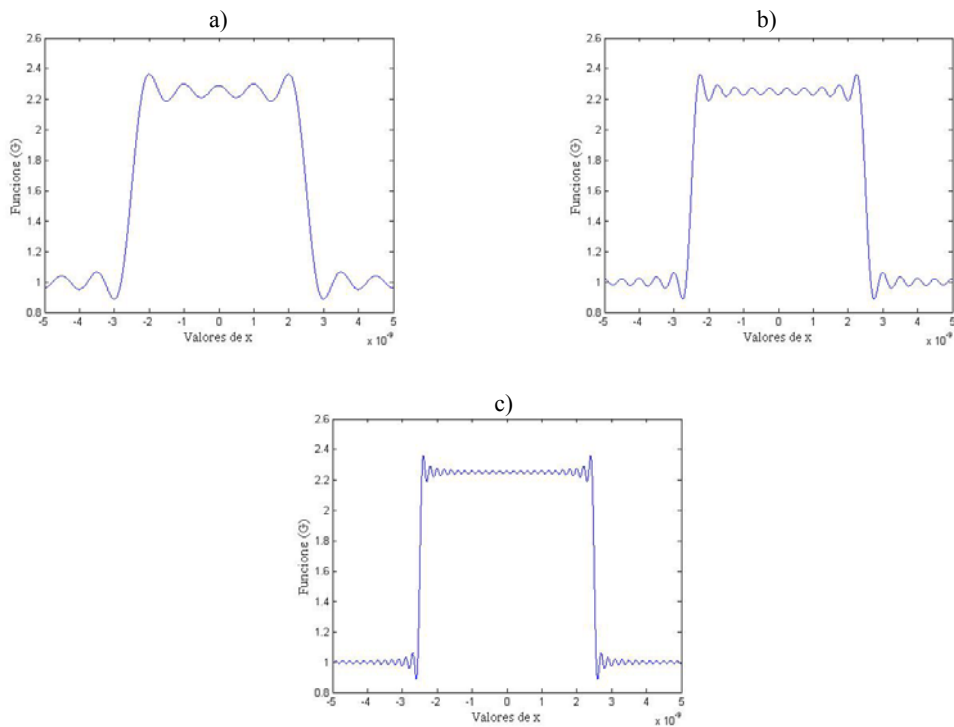


Fig. 2.3 Ilustracion del comportamiento de la funcion  $\epsilon(x)$  para distintos valores de  $n$ . a) para  $n = 10$ , b) para  $n = 20$ , c) para  $n = 50$

## 2.2 La ecuación de valores propios.

Comenzamos con la ecuación de onda para el campo eléctrico.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e_y(x) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) e_y(x) \quad 2.7)$$

Como vimos en la sección anterior, la función dieléctrica puede expresarse como

$$\varepsilon(x) = \sum_G \varepsilon(G) e^{iGx} \quad 2.8a)$$

de forma similar el campo eléctrico  $e_y(x)$  puede expresarse como una serie en la forma.

$$e_y(x) = e_0(x) e^{ikx} \quad 2.8b)$$

donde  $e_0(x)$  es una amplitud periódica dependiente de la posición. Esta amplitud periódica puede expandirse en serie de Fourier

$$e_0(x) = \sum_G e_0(G') e^{iG'x} \quad 2.8c)$$

Así el campo  $e_y(x)$  puede reescribirse como

$$e_y(x) = \sum_{G'} e_0(G') e^{i(k+G')x} \quad 2.8d)$$

Introducimos las series 2.8 y 2.10 en la ecuación de onda 2.7 y tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{G'} e_0(G') e^{i(k+G')x} \right) = -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_G \sum_{G'} \varepsilon(G) e_0(G') e^{i(k+G+G')x} \quad 2.9a)$$

Realizando las derivadas especiales del lado izquierdo tenemos

$$\sum_{G'} (k+G')^2 e_0(G') e^{i(G')x} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_G \sum_{G'} \varepsilon(G') e_0(G) e^{i(G'+G)x} \quad 2.9b)$$

Ahora multiplicamos en ambos lados de la ecuación por  $e^{-iG''x}$  e integramos sobre la celda unitaria para obtener

$$\sum_G (k+G')^2 e_0(G') \delta_{G',G''} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_G \sum_{G'} \varepsilon(G) e_0(G') \delta_{G'+G,G''} \quad 2.9c)$$

Aplicando la función delta y haciendo la consideración para el lado izquierdo  $G = G'' - G'$

$$(k+G'')^2 e_0(G'') = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G'} \varepsilon(G'' - G') e_0(G') \quad 2.9d)$$

Cambiando el índice mudo  $G' = G$

$$(k+G)^2 e_0(G) = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G'} \varepsilon(G-G') e_0(G') \quad 2.9e)$$

Es conveniente multiplicar ambos lados por  $\frac{d}{2\pi}$  para obtener una ecuación de onda normalizada

$$(k_{red}+n)^2 e_0(n) = \omega_{red}^2 \sum_{n'} \varepsilon(n-n') e_0(n') \quad 2.9f)$$

donde las variables reducidas son.

$$k_{red} = \frac{kd}{2\pi}$$

$$\omega_{red} = \frac{\omega d}{2\pi c} = \frac{d}{\lambda}$$

### 2.3 Aproximación analítica con dos ondas planas.

En esta sección vamos a considerar la obtención de la estructura de bandas con solo dos ondas planas tomando en cuenta la ecuación 2.9f). Consideramos que la sumatoria corre solo en dos términos  $n' = -1$  y  $n' = 0$ .

De esta forma tenemos para  $n = -1$

$$\begin{aligned} (k_{red}-1)^2 e_0(-1) &= \omega_{red}^2 \sum_{n'=-1}^{n'=0} \varepsilon(-1-n') e_0(n') \\ &= \omega_{red}^2 [\varepsilon(0) e_0(-1) + \varepsilon(-1) e_0(0)] \end{aligned} \quad 2.10a)$$

Para  $n = 0$

$$\begin{aligned} (k_{red})^2 e_0(0) &= \omega_{red}^2 \sum_{n'=-1}^{n'=0} \varepsilon(0-n') e_0(n') \\ &= \omega_{red}^2 [\varepsilon(1) e_0(-1) + \varepsilon(0) e_0(0)] \end{aligned} \quad 2.10b)$$

La cual podemos reescribirla en forma matricial como:

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_0 = \omega_{red}^2 \mathbf{B} \mathbf{e}_0 \quad 2.11)$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (k_{red}-1)^2 & 0 \\ 0 & k_{red}^2 \end{bmatrix} \quad 2.11a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon(0) & \varepsilon(-1) \\ \varepsilon(1) & \varepsilon(0) \end{bmatrix} \quad 2.11b)$$

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} e_0(-1) \\ e_0(0) \end{bmatrix} \quad 2.11c)$$

Esta ecuación tiene una solución analítica. Para obtenerla tomamos en cuenta el apéndice 1.A, para escribir la inversa de  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \varepsilon(0) & -\varepsilon(-1) \\ -\varepsilon(1) & \varepsilon(0) \end{bmatrix} \quad 2.12a)$$

con

$$\Delta = [\varepsilon(0)]^2 - [\varepsilon(-1)\varepsilon(1)]$$

Multiplicamos la matriz 2.13 por  $\mathbf{B}^{-1}$  y determinamos la nueva matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \varepsilon(0)(k_{red}-1)^2 & -\varepsilon(-1)k_{red}^2 \\ -\varepsilon(1)(k_{red}-1)^2 & \varepsilon(0)k_{red}^2 \end{bmatrix} \quad 2.12b)$$

con la cual se plantea el problema de Eigenvalores

$$\mathbf{C}\mathbf{e}_0 = \omega_{red}^2 \mathbf{e}_0 \quad 2.13a)$$

donde los eigenvalores se obtienen resolviendo

$$|\mathbf{C} - \omega_{red}^2 \mathbf{I}| = 0 \quad 2.13b)$$

Se plantea entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon(0)(k_{red}-1)^2}{\Delta} - \omega_{red}^2 & \frac{-\varepsilon(-1)k_{red}^2}{\Delta} \\ \frac{-\varepsilon(1)(k_{red}-1)^2}{\Delta} & \frac{\varepsilon(0)k_{red}^2 - \omega_{red}^2}{\Delta} \end{vmatrix} = 0 \quad 2.13c)$$

De allí se tiene el polinomio.

$$\left[ \frac{\varepsilon(0)(k_{red}-1)^2}{\Delta} - \omega_{red}^2 \right] \left[ \frac{\varepsilon(0)k_{red}^2}{\Delta} - \omega_{red}^2 \right] \left[ \frac{-\varepsilon(-1)k_{red}^2}{\Delta} \right] \left[ \frac{-\varepsilon(1)(k_{red}-1)^2}{\Delta} \right] = 0 \quad 2.13d)$$

Reescribiendo.

$$\left[ \omega_{red}^2 \right]^2 - \omega_{red}^2 \frac{\varepsilon(0)}{\Delta} \left[ (k_{red}-1)^2 + (k_{red}-1)^2 \right] - \left[ \frac{\varepsilon(-1)\varepsilon(1)k_{red}^2(k_{red}-1)^2}{\Delta^2} \right] + \left[ \frac{\varepsilon(0)^2(k_{red}-1)^2 k_{red}^2}{\Delta^2} \right] = 0 \quad 2.14a)$$

Resolviendo 2.14a) para obtener las frecuencias.

$$\omega_{red}^2 = \frac{\varepsilon(0) \left[ (k_{red}-1)^2 + k_{red}^2 \right] \pm \sqrt{\left\{ \varepsilon(0) \left[ (k_{red}-1)^2 + k_{red}^2 \right] \right\}^2 + 4k_{red}^2 (k_{red}-1) \left[ \varepsilon(1)\varepsilon(-1) + \varepsilon(0)^2 \right]}}{2\Delta} \quad 2.14b)$$

Siendo.

$$\omega_{red(-)}^2 = \frac{\varepsilon(0) \left[ (k_{red}-1)^2 + k_{red}^2 \right] - \sqrt{\left\{ \varepsilon(0) \left[ (k_{red}-1)^2 + k_{red}^2 \right] \right\}^2 + 4k_{red}^2 (k_{red}-1) \left[ \varepsilon(1)\varepsilon(-1) + \varepsilon(0)^2 \right]}}{2\Delta}$$

$$\omega_{red(+)}^2 = \frac{\varepsilon(0) \left[ (k_{red}-1)^2 + k_{red}^2 \right] + \sqrt{\left\{ \varepsilon(0) \left[ (k_{red}-1)^2 + k_{red}^2 \right] \right\}^2 + 4k_{red}^2 (k_{red}-1) \left[ \varepsilon(1)\varepsilon(-1) + \varepsilon(0)^2 \right]}}{2\Delta}$$

### 2.3.1 Ejemplo Numérico.

Para visualizar los eigenvalores obtenidos en 2.14b) utilizamos una estructura en la cual el periodo este compuesto por  $\varepsilon_a = 2.25$  y  $\varepsilon_b = 1$ , con un factor de llenado  $f=0.5$ . En la Fig. 2.4 se puede visualizar la estructura de bandas. Para la obtención de esta grafica se presenta un programa en el apéndice 2.C.

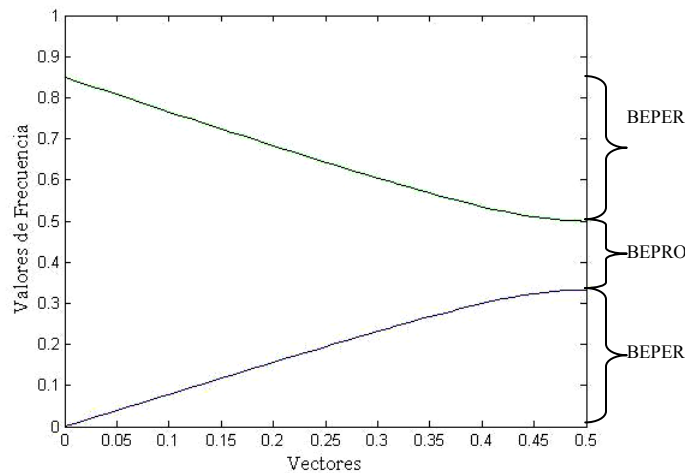


Fig. 2.4 Ilustración de la Estructura de bandas para 2 ondas planas en un medio periodico, con  $\epsilon_a = 2.25$  y  $\epsilon_b = 1$  y  $f = 0.5$

La estructura de bandas muestra las frecuencias en las que la el espectro de luz puede propagarse a través de la estructura; estas son las líneas sólidas que están dibujadas mientras que la BEPRO será todo el espacio entre las BEPER.

## 2.4 Convergencia del método.

A pesar de que en la sección anterior hicimos una aproximación analítica del MEOP, la fuerza de este método radica en el calculo numerico. En el MEOP las soluciones convergen mejor cuando se consideran más y más ondas planas. En la Fig.2.4 mostramos las soluciones. Para 3,11 y 41 ondas planas. En los paneles a) b) y c) respectivamente. Se puede observar que la estructura de bandas es muy similar, sin embargo. Existen diferencias en las frecuencias. El programa para calcular estas bandas viene en el apéndice 2.D.

Para visualizar la convergencia de las soluciones mostramos en la Fig.2.5 la grafica de ondas planas contra el eigenvalor en el borde de la zona de Brillouin ( $k_{red}=0.5$ ). En los paneles a) b) y c) mostramos la convergencia para el primer, segundo y tercer eigenvalor respectivamente, se observa que las soluciones rápidamente convergen a un valor constante. Es usual en el trabajo computacional considerar que la solución convergió cuando los eigenvalores no cambian con el número de ondas planas.



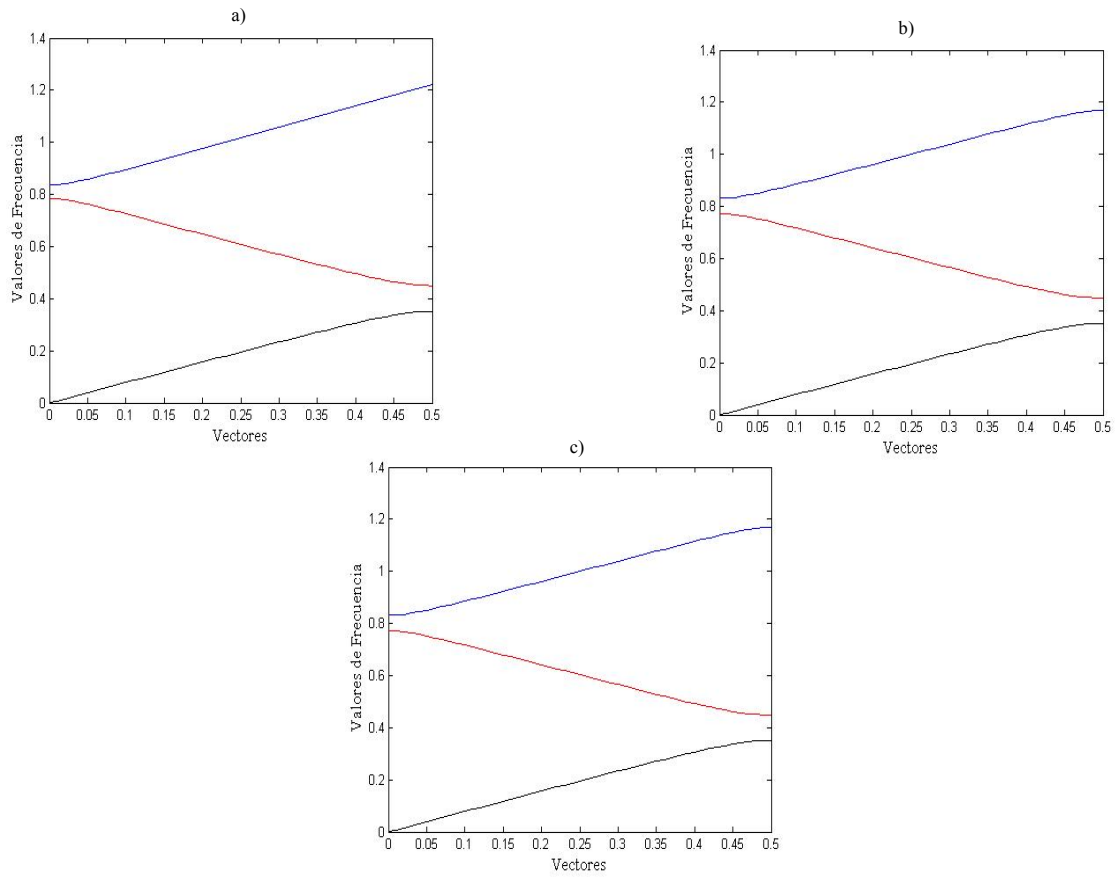


Fig. 2.4 Ilustracion de la estructura de banda para  $\epsilon_a = 2.25$ ,  $\epsilon_b = 1$ , y  $f = 0.5$ . con a) 3 ondas planas b) 11 ondas planas c) 41 ondas planas

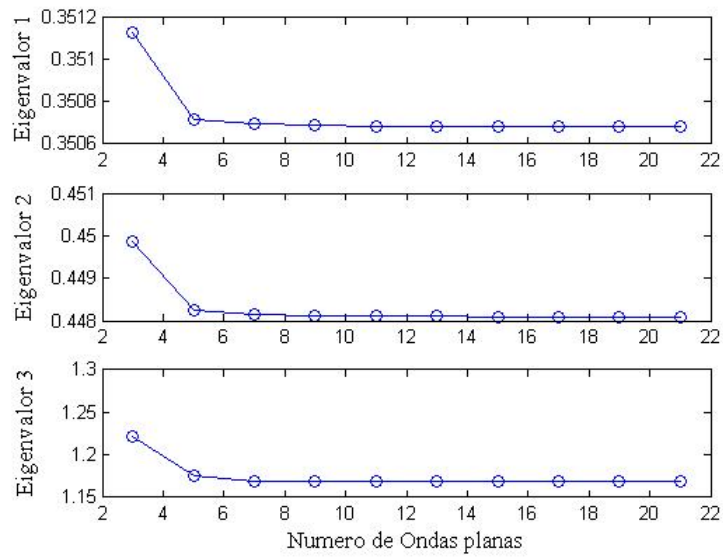


Fig.2.5 Convergencia del método, nótese que el valor tiende a ser el mismo en los tres casos a partir de las 15 ondas planas

## Capítulo 3

### El Método de la Matriz de Transferencia

El Método de la Matriz de Transferencia (MMT) es un método usado en óptica [Born, (1967)] y acústica para analizar la propagación de campos electromagnéticos o bien, ondas elásticas en medios estratificados. Este método ha sido ampliamente usado en el diseño de espejos dieléctricos de cuarto de onda.

Cuando existen campos en un medio periódico, ocurren fenómenos de interferencia constructiva y destructiva debido a las múltiples interfaces entre materiales distintos. Todos estos fenómenos tienen que tomarse en cuenta cuando se resuelve la ecuación de onda en un medio estratificado. El MMT está basado en las condiciones de continuidad que se exigen a los campos Eléctrico y Magnético al pasar de un medio a otro.

En este capítulo mostramos como hemos aplicado el MMT para resolver la ecuación de onda electromagnética en un medio heterogéneo unidimensional. El material de este capítulo está organizado de la siguiente manera. Primero, discutimos la solución de la ecuación de onda cuando en el espacio existen distintos materiales. A continuación, analizamos el caso de una interfase, para mostrar que mediante la manipulación de matrices es fácil derivar las relaciones de Fresnel. Después consideramos una película delgada y mediante la simplificación de matrices, llegamos a una forma analítica conocida. A continuación, se plantea la solución de la reflexión y transmisión en un medio multicapa. Finalmente, presentamos el cálculo de la estructura de bandas compleja mediante la aplicación del teorema de Bloch.

### 3.1 La solución de la ecuación de onda en un medio heterogéneo

Consideremos un medio heterogéneo de forma en que se ilustra en la Fig. 3.1

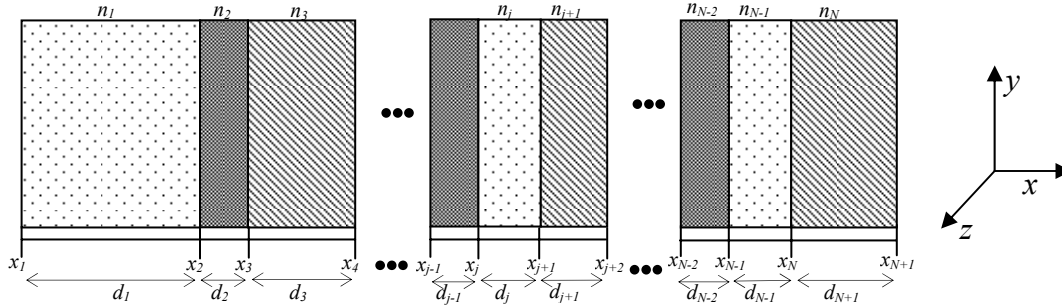


Fig. 3.1 Medio Heterogéneo compuesto por N medios diferentes.

La función dieléctrica esta definida mediante la relación

$$n(x) = \begin{cases} n_1 & x_1 < x < x_2 \\ n_2 & x_2 < x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ n_i & x_i < x < x_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ n_{N-1} & x_{N-1} < x < x_N \\ n_N & x_N < x < x_{N+1} \end{cases} \quad (3.1)$$

La ecuación de onda es válida en cada punto del espacio y se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e_y(x) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x) e_y(x) = 0 \quad (3.2)$$

Es difícil encontrar la solución del campo  $e_y(x)$  para todos los valores de  $x$  cuando la función dieléctrica cambia de una forma arbitraria. Para mostrar como hemos resuelto este problema presentamos un procedimiento que puede dividirse en tres pasos:

Paso 1. Plantear la ecuación de de onda como si todo el espacio estuviese lleno de un solo material. Es decir, un medio homogéneo de índice  $n_i$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e_{y,i}(x) + \frac{\omega^2}{c^2} n_i^2 e_{y,i}(x) = 0 \quad (3.3)$$

La solución de esta ecuación es un campo eléctrico de la forma

$$e_{y,i}(x) = e_{y,i}^+ e^{+ik_i x} + e_{y,i}^- e^{-ik_i x} \quad 3.4)$$

Donde  $k_i = n_i \omega / c$ . Por su parte, el campo magnético asociado es

$$h_{z,i}(x) = n_i \left[ e_{y,i}^+ e^{+ik_i x} - e_{y,i}^- e^{-ik_i x} \right] \quad 3.5)$$

Paso 2. Planteamos las condiciones de frontera para los campos eléctricos y magnéticos en cada interfase  $x_i$  en la forma

$$e_{y,i}(x_i) = e_{y,i+1}(x_i) \quad 3.6 a)$$

$$h_{z,i}(x_i) = h_{z,i+1}(x_i) \quad 3.6 b)$$

Estas ecuaciones de frontera dan lugar a un sistema de ecuaciones matriciales

Paso 3. Se resuelve el sistema de ecuaciones matriciales para encontrar la reflexión y/o transmisión del medio heterogéneo.

A continuación vamos a ejemplificar nuestro procedimiento para el caso de una interfase, película delgada y finalmente un sistema multicapa.

### 3.2 El caso de dos medios

Consideramos un sistema de dos medios seminfinitos de la forma en que se ilustra en la Fig. 3.2

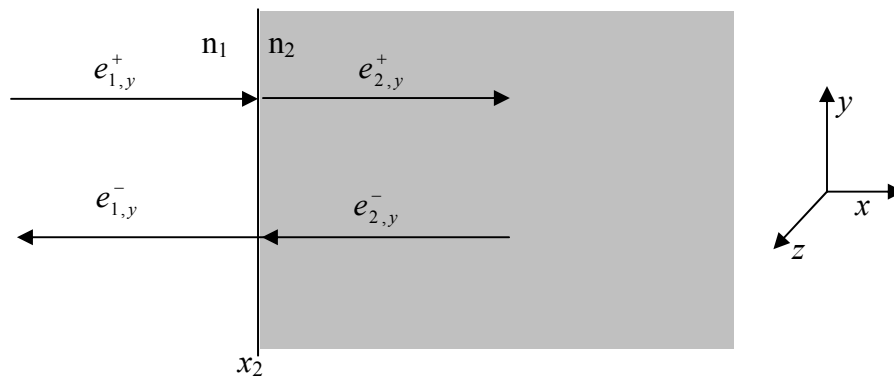


Fig. 3.2 Ilustración de los campos electromagnéticos en un sistema de dos medios

La función dieléctrica es

$$n(x) = \begin{cases} n_1 & -\infty < x < x_2 \\ n_2 & x_2 < x < +\infty \end{cases} \quad (3.7)$$

El campo eléctrico en cada punto del espacio es

$$e_y(x) = \begin{cases} e_{1,y}^+ e^{+ik_1(x-x_2)} + e_{1,y}^- e^{-ik_1(x-x_2)} & -\infty < x < x_2 \\ e_{2,y}^+ e^{+ik_2(x-x_2)} + e_{2,y}^- e^{-ik_2(x-x_2)} & x_2 < x < +\infty \end{cases} \quad (3.8)$$

El campo magnético asociado es

$$h_z(x) = \begin{cases} n_1 (e_{1,y}^+ e^{+ik_1(x-x_2)} - e_{1,y}^- e^{-ik_1(x-x_2)}) & -\infty < x < x_1 \\ n_2 (e_{2,y}^+ e^{+ik_2(x-x_2)} - e_{2,y}^- e^{-ik_2(x-x_2)}) & x_1 < x < +\infty \end{cases} \quad (3.9)$$

Las condiciones de frontera dan lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} e_{1,y}^+ + e_{1,y}^- &= e_{2,y}^+ + e_{2,y}^- \\ n_1 (e_{1,y}^+ - e_{1,y}^-) &= n_2 (e_{2,y}^+ - e_{2,y}^-) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Es conveniente escribir las condiciones de frontera en forma matricial

$$\mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} e_{2,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Donde

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ n_1 & -n_1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ n_2 & -n_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

El sistema de ecuaciones 3.11 tiene cuatro variables desconocidas ( $e_{1,y}^+, e_{1,y}^-, e_{2,y}^+, e_{2,y}^-$ ) y solo dos ecuaciones. Se dice que es un sistema indeterminado, porque existen más incógnitas que ecuaciones. Para resolver este problema consideramos un caso particular. Es decir, un caso en el que se puede reducir el número de incógnitas al número de ecuaciones. Considérese entonces la situación que se ilustra en la Fig. 3.3. Un campo incide de izquierda a derecha, debido al cambio de medio en la interfase  $x_2$  se generan un campo reflejado y un campo transmitido.

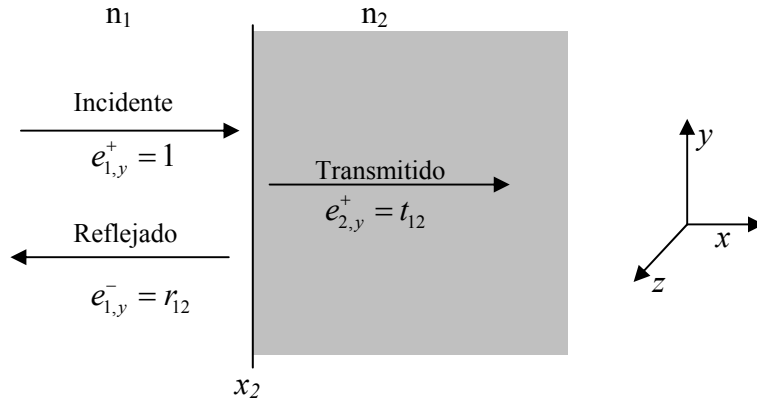


Fig. 3.3 Ilustración de la transmisión y reflexión para un campo que incide de izquierda a derecha.

Para determinar los coeficientes de reflexión y transmisión, normalizamos los campos reflejado  $[e_{1,y}^-]$  y transmitido  $[e_{2,y}^+]$  respecto al campo incidente  $[e_{1,y}^+]$  de la forma

$$r_{12} = \frac{e_{1,y}^-}{e_{1,y}^+} \quad 3.14 \text{ a)}$$

$$t_{12} = \frac{e_{2,y}^+}{e_{1,y}^+} \quad 3.14 \text{ b)}$$

la ecuación matricial ahora es

$$\mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ r_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} t_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.15)$$

Esta relación también puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} t_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} 1 \\ r_{12} \end{bmatrix} \quad 3.16)$$

donde

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \quad 3.17)$$

Considerando la inversa de la matriz 2x2 descrita en el apéndice 1.A tenemos.

$$\mathbf{M} = -\frac{c}{2\omega k_2} \begin{bmatrix} -n_2 & -1 \\ -n_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ n_1 & -n_1 \end{bmatrix} \quad 3.20\text{a)}$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} n_1 + n_2 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n_1 & n_1 + n_2 \end{bmatrix} \quad 3.20\text{b)}$$

Ahora, retomamos la ecuación 3.16)

$$\begin{bmatrix} t_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r_{12} \end{bmatrix} \quad 3.21)$$

Esta ecuación matricial implica las ecuaciones

$$\begin{aligned} t_{12} &= m_{11} + m_{12}r_{12} \\ 0 &= m_{21} + m_{22}r_{12} \end{aligned} \quad 3.22)$$

Las cuales tienen la solución

$$r_{12} = -\frac{m_{21}}{m_{22}} \quad 3.23)$$

$$t_{12} = m_{11} - \frac{m_{12}m_{21}}{m_{22}} \quad 3.24)$$

Con ayuda de las ecuaciones 3.26 y 3.25 se tiene que:

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad 3.25)$$

$$t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad 3.26)$$

Las expresiones 3.25 y 3.26 son las relaciones de Fresnel [Born, (1967)].

### 3.2.1 Ejemplo numérico

Considere un campo electromagnético que incide de izquierda a derecha desde un medio de  $n_1 = 1$  a un medio  $n_2 = 1.5$ . Para este caso los coeficientes de reflexión y transmisión son simplemente

$$r_{12} = -0.2$$

$$t_{12} = 0.8$$

Los campos electromagnéticos para este caso son

$$e_y(x) = \begin{cases} e^{+ik_1x} + r_{12}e^{-ik_1x} & -\infty < x < x_2 \\ t_{12}e^{+ik_2x} & x_2 < x < +\infty \end{cases}$$

En la Fig. 3.3 ilustramos la parte real del campo electromagnético. En el Apéndice 2.E se mostrará el programa que con el cual hemos generado esta grafica.

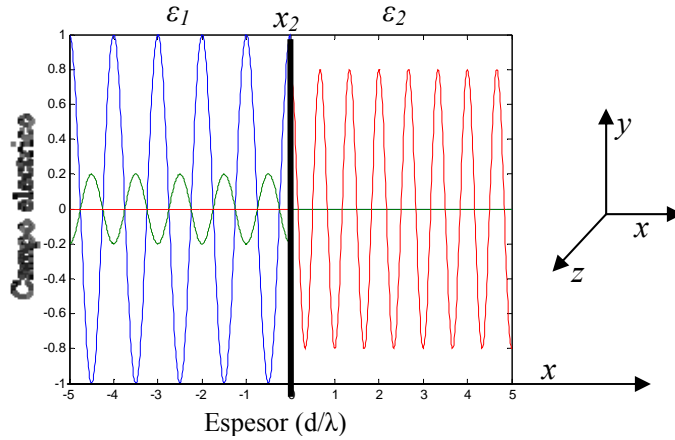


Fig. 3.4 Ilustración de los campos electricos acorde a la expresión para el ejemplo en la sección 3.2.1, siendo la grafica en azul el campo incidente, verde el campo reflejado y roja para campo transmitido.

### 3.3 El caso de tres medios: la película delgada

Considérese un sistema de tres medios tal y como lo ilustra la Fig. 3.5 y cuya función dieléctrica esta descrita por la relación

$$n(x) = \begin{cases} n_1 & -\infty < x < x_2 \\ n_2 & x_2 < x < x_3 \\ n_3 & x_3 < x < \infty \end{cases} \quad (3.27)$$

Los campos eléctricos en cada punto del espacio son

$$e_y(x) = \begin{cases} e_{1,y}^+ e^{+ik_1(x-x_2)} + e_{1,y}^- e^{-ik_1(x-x_2)} \\ e_{2,y}^+ e^{+ik_2(x-x_2)} + e_{2,y}^- e^{-ik_2(x-x_2)} \\ e_{3,y}^+ e^{+ik_3(x-x_3)} + e_{3,y}^- e^{-ik_3(x-x_3)} \end{cases} \quad (3.28)$$

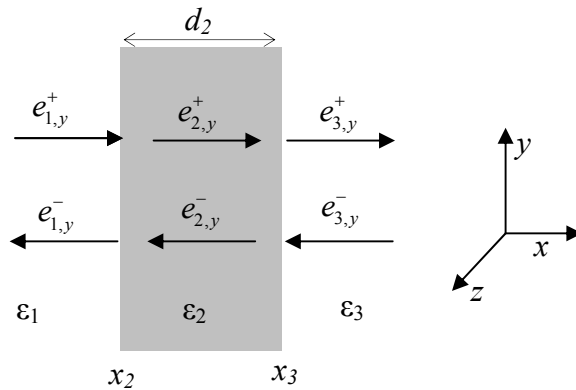


Fig. 3.5 Ilustración de los campos electromagnéticos en una película delgada.



Por su parte, el campo magnético asociado es

$$h_y(x) = \begin{cases} n_1 \left( e_{1,y}^+ e^{+ik_1(x-x_2)} - e_{1,y}^- e^{-ik_1(x-x_2)} \right) \\ n_2 \left( e_{2,y}^+ e^{+ik_2(x-x_2)} - e_{2,y}^- e^{-ik_2(x-x_2)} \right) \\ n_3 \left( e_{3,y}^+ e^{+ik_3(x-x_3)} - e_{3,y}^- e^{-ik_3(x-x_3)} \right) \end{cases} \quad 3.29$$

Utilizando matrices las condiciones de frontera en  $x = x_2$

$$\mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} e_{2,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} \quad 3.30$$

Y en  $x=x_3$  las condiciones de frontera son.

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{F}_2 \begin{bmatrix} e_{2,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3 \begin{bmatrix} e_{3,y}^+ \\ e_{3,y}^- \end{bmatrix} \quad 3.31$$

Las matrices  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  han sido definidas en la sección anterior, las nuevas matrices  $\mathbf{M}_3$  y  $\mathbf{F}_2$  son

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ n_3 & -n_3 \end{bmatrix} \quad 3.32$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{bmatrix} \quad 3.33$$

Es posible relacionar los campos entre los medios 3 y 1 mediante la relación matricial

$$\begin{bmatrix} e_{3,y}^+ \\ e_{3,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} \quad 3.34$$

Donde

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_3^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \quad 3.35$$

Para obtener los coeficientes de reflexión y transmisión a través de una película delgada, hacemos una consideración similar a la sección anterior. En la Fig. 3.6 ilustramos un campo que incide de izquierda a derecha desde el medio uno. Normalizando con el campo incidente, la relación matricial entre campos reflejado y transmitido es

$$\begin{bmatrix} t_{13} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} 1 \\ r_{13} \end{bmatrix} \quad 3.36$$

donde

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_3^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \quad (3.37)$$

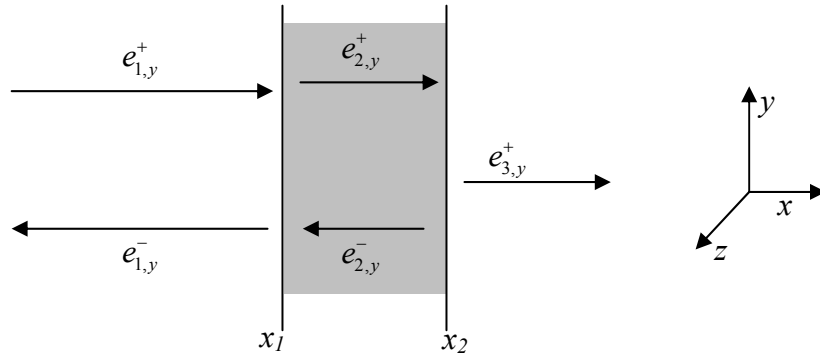


Fig. 3.6 Ilustración de un campo que incide de izquierda a derecha en una película delgada

El coeficiente de reflexión para este caso está dado por los elementos de matriz

$$r_{13} = -\frac{m_{21}}{m_{22}} \quad (3.38)$$

$$t_{13} = m_{11} - \frac{m_{12}m_{21}}{m_{22}}$$

Existe una forma analítica para este problema [Born, (1967)]

$$r_{13} = \frac{r_{12} + r_{23} e^{2ik_2d_2}}{1 + r_{12}r_{23} e^{2ik_2d_2}} \quad (3.39)$$

$$t_{13} = \frac{t_{12}t_{23} e^{2ik_2d_2}}{1 + r_{12}r_{23} e^{2ik_2d_2}}$$

La fórmula de reflexión es derivada en el apéndice 1.B, como ejemplo ilustrativo de la manipulación de matrices de transferencia.

### 3.3.1 Ejemplo numérico

Consideramos una película delgada de funciones dieléctricas  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$  y  $n_3 = 1$ . Para este ejemplo se han calculado los coeficientes de Transmisión y Reflexión, en términos del espesor de la película, y la frecuencia. Se ha realizado el cálculo de la reflexión y la transmisión con las formas analíticas en 3.41) y con la Matriz obtenida a partir de 3.35).

En las Fig. 3.7 se observa la variación del coeficiente de reflexión y transmisión en los paneles a) y b) respectivamente. Los programas para el calculo de estas graficas se encuentran en el Apéndice 2.F.

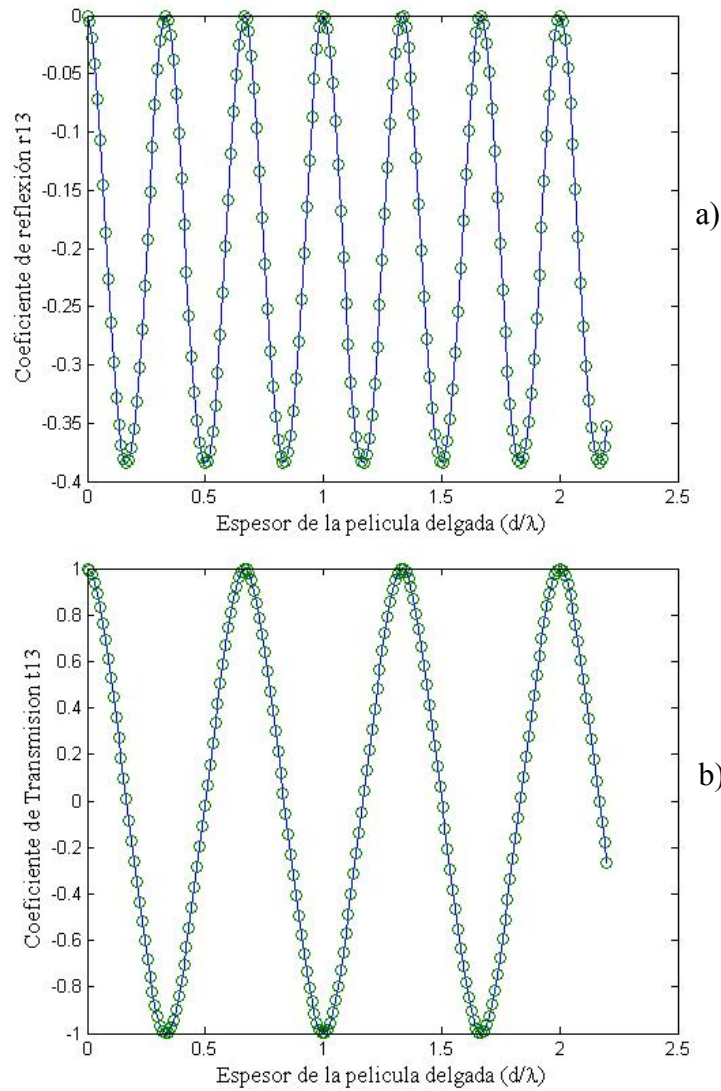


Fig. 3.7 Ilustración de los Coefientes de Transmisión y Reflexión de una película delgada  
 — Obtenido a partir de las matrices  
 ○ Obtenido a partir de la formula analítica.

En la Fig. 3.8 mostramos la variación de la reflexión y la transmisión como función de la frecuencia.

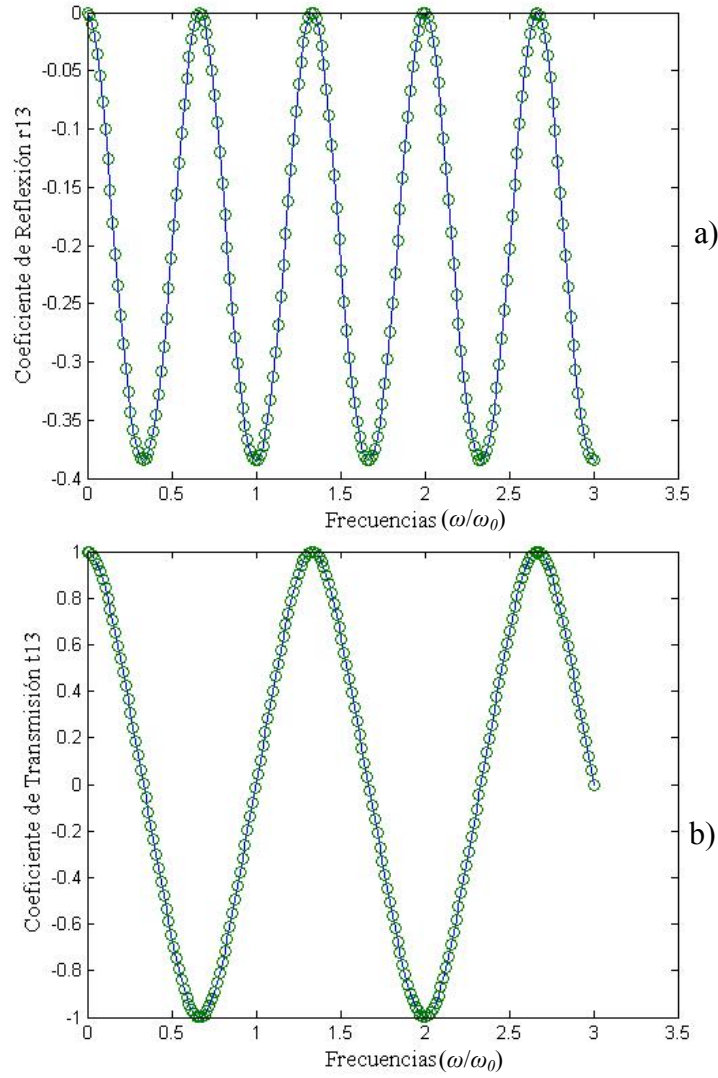


Fig. 3.8 Coefientes de Transmisión y Reflexión de una película delgada dependiente de la frecuencia.  
 — Obtenido a partir de las matrices  
 ○ Obtenido a partir de la formula analítica.

A continuación se calcularan las amplitudes para el caso de la película delgada. Los campos Electromagnéticos para este caso son:

$$e_y(x) = \begin{cases} e^{+ik_1(x-x_2)} + r_{13}e^{-ik_1(x-x_2)} & -\infty < x < x_2 \\ e_2^+e^{+ik_2(x-x_2)} + e_2^-e^{-ik_2(x-x_2)} & x_2 < x < x_3 \\ t_{13}e^{+ik_3(x-x_3)} & x_3 < x < +\infty \end{cases}$$

Se sabe que los coeficientes  $r_{13}$  y  $t_{13}$  están dados por las relaciones en 3.39). Para un determinado rango de frecuencias, los coeficientes  $e_2^+$  y  $e_2^-$  se obtienen mediante las condiciones de frontera en  $x = x_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ r_{13} \end{bmatrix} &= \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} e_{2,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e_{2,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} &= \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ r_{13} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{M} \begin{bmatrix} 1 \\ r_{13} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r_{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene que:

$$\begin{aligned} e_{2,y}^+ &= \frac{(n_2 + n_1)}{2n_2} + \frac{(n_2 - n_1)}{2n_2} (r_{13}) \\ e_{2,y}^- &= \frac{(n_2 - n_1)}{2n_2} + \frac{(n_2 + n_1)}{2n_2} (r_{13}) \end{aligned}$$

De esta forma tenemos una expresión analítica para las amplitudes para el campo eléctrico en el interior de la película delgada.

En la fig. 3.9 se ilustra la reflexión y transmisión del campo electromagnético de una película delgada de  $d/\lambda = .5$ . En el apéndice 2.F se encuentra el programa para calcular las gráficas.

En la Gráfica 3.9a) se puede observar como varía el índice de refracción de una capa a otra en 3.9a) y b) se puede observar el comportamiento del Incidente Reflejado y Transmitido, cómo se puede observar en ambas gráficas, tanto en la real como en la compleja el comportamiento en magnitud del incidente, y el transmitido sigue siendo el mismo, solo es el desfase lo que las hace distintas entre sí. Es la existencia de este desfase, que los sistemas multicapa tienen una

absorción, de energía que provoca el fenómeno de interferencia a partir del cual aparecen las BEPRO de las que se ha discutido en el capítulo anterior. En 3.9c) se puede observar el comportamiento del valor absoluto del Campo eléctrico, que confirma lo anterior.

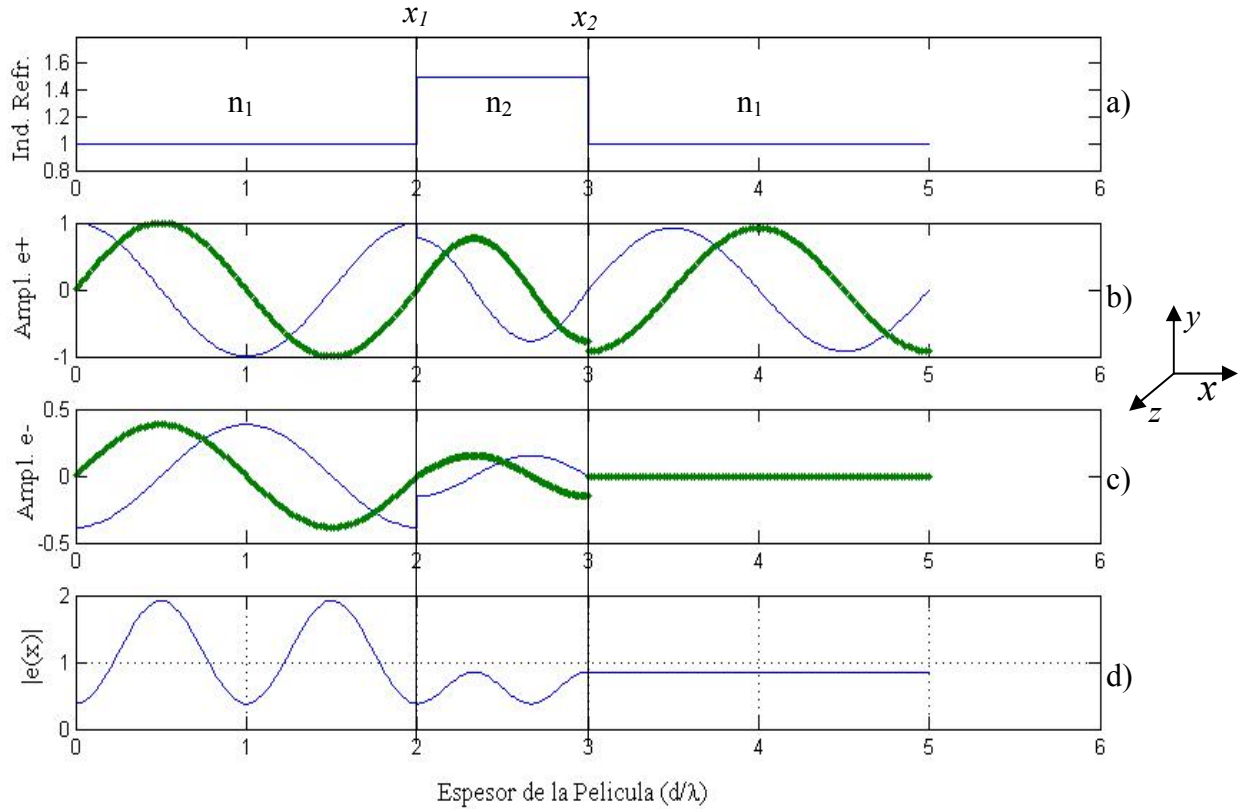


Fig. 3.9 Ilustración del comportamiento de los Campos Electromagnéticos para una película delgada. La línea en verde es el comportamiento de los coeficientes complejos, mientras que la línea en azul son los coeficientes reales. a) Composición del sistema de Película delgada., b) Campo e+, o campo en dirección a la derecha, c) Campo e-, o campo viajante a la izquierda d) Valor absoluto del Campo Eléctrico.

### 3.4. Sistema multicapa

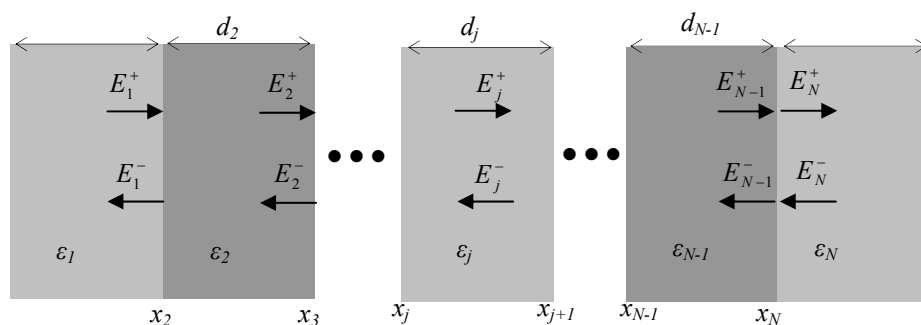


Fig.3.8 Descripción general de un sistema multicapa.

Considerando la situación de una estructura como la de la Fig. 3.8 en el cual se tiene N capas cada una de un grosor  $d_j$ . La función dieléctrica se describe en forma similar a la sección 3.1.

Los campos electricos son:

$$e_y(x) = \begin{cases} E_{1,y}^+ e^{ik_1(x-x_2)} + E_{1,y}^- e^{-ik_1(x-x_2)} & -\infty < x < x_2 \\ E_{2,y}^+ e^{ik_1(x-x_2)} + E_{2,y}^- e^{-ik_1(x-x_2)} & x_2 < x < x_3 \\ \vdots & \\ e_{j,y}^+ e^{ik_j(x-x_j)} + e_{j,y}^- e^{-ik_j(x-x_j)} & x_j < x < x_{j+1} \\ \vdots & \\ e_{N-1,y}^+ e^{ik_1(x-x_{N-1})} + e_{N-1,y}^- e^{-ik_1(x-x_{N-1})} & x_{N-1} < x < x_N \\ e_{N,y}^+ e^{ik_1(x-x_N)} + e_{N,y}^- e^{-ik_N(x-x_N)} & x_N < x < \infty \end{cases} \quad (3.40)$$

Los campos magneticos son por su parte.

$$h(x) = \begin{cases} n_1 \left( e_{1,y}^+ e^{ik_1(x-x_2)} - e_{1,y}^- e^{-ik_1(x-x_2)} \right) & -\infty < x < x_2 \\ n_2 \left( e_{2,y}^+ e^{ik_1(x-x_2)} - e_{2,y}^- e^{-ik_1(x-x_2)} \right) & x_2 < x < x_3 \\ \vdots & \\ n_j \left( e_{j,y}^+ e^{ik_j(x-x_j)} - e_{j,y}^- e^{-ik_j(x-x_j)} \right) & x_j < x < x_{j+1} \\ \vdots & \\ n_{N-1} \left( e_{N-1,y}^+ e^{ik_1(x-x_{N-1})} - e_{N-1,y}^- e^{-ik_1(x-x_{N-1})} \right) & x_{N-1} < x < x_N \\ n_N \left( e_{N,y}^+ e^{ik_1(x-x_N)} - e_{N,y}^- e^{-ik_N(x-x_N)} \right) & x_N < x < \infty \end{cases} \quad (3.41)$$

Para la primera interfase en  $x=x_2$  tenemos la condición de frontera.

$$\mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} e_{2,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Para cada interfase en  $x=x_j$  tenemos:

$$\mathbf{M}_{j-1} \mathbf{F}_{j-1} \begin{bmatrix} e_{j-1,y}^+ \\ e_{j-1,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} e_{j,y}^+ \\ e_{j,y}^- \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Donde

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ n_j & -n_j \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} e^{ik_j d_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j d_j} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

En la última interfase  $x=x_N$  tenemos

$$\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{F}_{N-1}\begin{bmatrix} e_{N-1,y}^+ \\ e_{N-1,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_N\begin{bmatrix} e_{N,y}^+ \\ e_{N,y}^- \end{bmatrix} \quad 3.46)$$

De esta forma podemos relacionar los campos en la última interfase con los campos en la primera

$$\begin{bmatrix} e_{N,y}^+ \\ e_{N,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_N^{-1}\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{F}_{N-1}\cdots\mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{M}_{j-1}\mathbf{F}_{j-1}\cdots\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1\begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} \quad 3.47)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} e_{N,y}^+ \\ e_{N,y}^- \end{bmatrix} = \left[ \prod_{j=2}^{j=N} \mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{M}_{j-1}\mathbf{F}_{j-1} \right] \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1\begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} \quad 3.48)$$

Con lo cual podemos relacionar con una sola matriz de transferencia.

$$\begin{bmatrix} e_{N,y}^+ \\ e_{N,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}\begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} \quad 3.49)$$

Donde

$$\mathbf{M} = \left[ \prod_{j=N-1}^{j=2} \mathbf{M}_{j+1}^{-1}\mathbf{F}_{j+1}\mathbf{M}_{j-1} \right] \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1 \quad 3.50)$$

Obteniendo del sistema los coeficientes de reflexión y transmisión.

$$r = \frac{-m_{21}}{m_{22}} \quad 3.51)$$

$$t = m_{11} - \frac{m_{21}}{m_{22}} \quad 3.52)$$

Siendo la transmitancia y reflectancia.

$$R = |r|^2 \quad 3.53)$$

$$T = \frac{k_N}{k_1}|t|^2 \quad 3.54)$$

### 3.4.1 Ejemplo numérico para un sistema multicapa.

Para ejemplificar el comportamiento del Método de Matriz de Transferencia se utilizará un sistema de 30 capas en total, y constantes dieléctricas  $\varepsilon_1 = 3.28$  y  $\varepsilon_2=1.96$  en la Fig. 3.9 puede observarse la grafica obtenida a través del método.



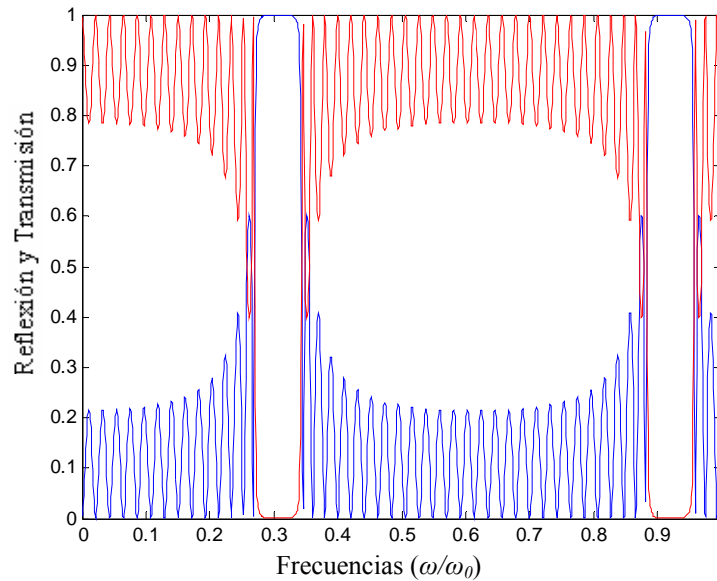


Fig. 3.10 visualización de la transmisión y reflexión en un medio multicapa.

Como se observa en la Fig. 3.10 los espacios completamente en blanco indican frecuencias reflejadas totalmente, esto indica la ausencia de campo en la BEPRO. En el apéndice 2.G se encuentra el código para generar la Fig. 3.10.

### 3.5 Obtención de la estructura de bandas compleja.

#### Reflexión y Transmisión

Con el método de Matriz de Transferencia, se han visualizado los coeficientes de Transmisión y Reflexión en una estructura para un determinado rango de frecuencias. Esta información junto con la de la estructura de bandas obtenida a través del Método de Onda Plana analizado en el capítulo anterior, se complementan mutuamente para el diseño de estructuras fotónicas.

Sin embargo, en el momento en que se desee entender el comportamiento evanescente del campo electromagnético, se requiere de la visualización de los vectores de Bloch complejos, es decir, visualizar la parte real e imaginaria al mismo tiempo. A pesar de que con el MEOP, se puede tener la estructura de banda real, no se pueden visualizar los Vectores de Bloch imaginarios. Como una alternativa de solución a este inconveniente se puede realizar un planteamiento para resolver las ecuaciones de Maxwell como un problema de Eigenvalores, a partir del método de matriz de transferencia, usando el teorema de Bloch como referencia

principal. El problema de los vectores imaginarios también se ha revisado por otros autores, pero el tratamiento es poco breve.[Yeh, (2005)]. En esta sección revisaremos el problema de la obtención de los vectores de Bloch complejos en forma mas detallada en donde la celda unitaria será delimitada por la distancia  $d$ , como se muestra en la Fig. 3.11.

### 3.5.1 El Teorema de Bloch

Sea  $\Psi(x)$  una función en el espacio tal que

$$\Psi(x) = e^{ikx} u(x) \quad 3.55a)$$

Considerando que  $u(x)$  es una función periódica.

$$u(x) = u(x+d) \quad 3.55b)$$

A partir de 3.55b) se puede afirmar entonces que para toda función periódica

$$\Psi(x+d) = e^{ik(x+d)} u(x+d) \quad 3.55c)$$

Por lo tanto 3.55c) se reescribe

$$\begin{aligned} \Psi(x+d) &= e^{ikd} [e^{ikx} u(x+d)] \\ &= e^{ikd} \Psi(x) \end{aligned} \quad 3.55d)$$

Siendo 3.55d) el teorema de Bloch, describiendo el periodo siguiente a partir del anterior.

### 3.5.2 El teorema de Bloch en forma matricial.

Consideremos un sistema periódico infinito como el siguiente.

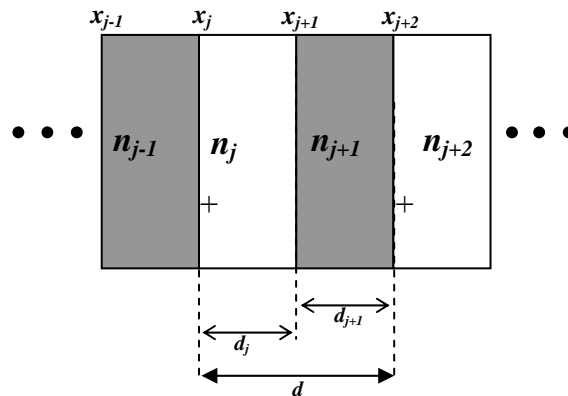


Fig. 3.11 sistema Periodico infinito, la celda unitaria esta definida de  $x_j$  a  $x_{j+2}$ .

Los signos + indican el periodo en donde estan siendo evaluados los campos. Los Campos electricos y Magnéticos en la celda unitaria de la estructura estan definidos como.

$$e_y(x) = \begin{cases} e_j^+ e^{ik_j(x-x_j)} + e_j^- e^{-ik_j(x-x_j)} & x_{j-1} < x < x_j \\ e_{j+1}^+ e^{ik_{j+1}(x-x_{j+1})} + e_{j+1}^- e^{-ik_{j+1}(x-x_{j+1})} & x_j < x < x_{j+1} \\ e_{j+2}^+ e^{ik_{j+2}(x-x_{j+2})} + e_{j+2}^- e^{-ik_{j+2}(x-x_{j+2})} & x_{j+1} < x < x_{j+2} \end{cases} \quad 3.56a)$$

$$h_y(x) = \begin{cases} n_j \left( e_j^+ e^{ik_j(x-x_j)} - e_j^- e^{-ik_j(x-x_j)} \right) & x_{j-1} < x < x_j \\ n_{j+1} \left( e_{j+1}^+ e^{ik_{j+1}(x-x_{j+1})} - e_{j+1}^- e^{-ik_{j+1}(x-x_{j+1})} \right) & x_j < x < x_{j+1} \\ n_{j+2} \left( e_{j+2}^+ e^{ik_{j+2}(x-x_{j+2})} - e_{j+2}^- e^{-ik_{j+2}(x-x_{j+2})} \right) & x_{j+1} < x < x_{j+2} \end{cases} \quad 3.56b)$$

El teorema de Bloch dice.

$$e_y(x_j^+) = e^{ikd} e_y(x_{j+2}^+) \quad 3.57a)$$

$$h_y(x_j^+) = e^{ikd} h_y(x_{j+2}^+) \quad 3.57b)$$

Obteniendo los coeficientes en  $x=x_j$ , agregando el superíndice + de acuerdo a la Fig.3.11

$$e_{j,y}(x_j^+) = e_1^+ + e_1^- \quad 3.58 a)$$

$$h_{j,z}(x_j^+) = (e_j^+ - e_j^-) \quad 3.58 b)$$

Y para el caso de  $x=x_{j+2}$

$$e_{j+2,y}(x_{j+2}^+) = e_{j+2}^+ + e_{j+2}^- \quad 3.58 c)$$

$$h_{j+2,z}(x_{j+2}^+) = n_{j+2} (e_{j+2}^+ - e_{j+2}^-) \quad 3.58 d)$$

Las matrices obtenidas de las evaluaciones en  $x_j$  y  $x_{j+2}$  respectivamente son.

$$\begin{bmatrix} e_{j,y}(x_j^+) \\ h_{j,z}(x_j^+) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} \quad 3.58e)$$

$$\begin{bmatrix} e_{j+2,y}(x_{j+2}^+) \\ h_{j+2,z}(x_{j+2}^+) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{j+2} \begin{bmatrix} e_{j+2}^+ \\ e_{j+2}^- \end{bmatrix} \quad 3.58f)$$

Si se aplica el teorema de Bloch descrito en 3.57) directamente sobre 3.58f)

$$\begin{bmatrix} e_{j+2,y}(x_{j+2}^+) \\ h_{j+2,z}(x_{j+2}^+) \end{bmatrix} = e^{ikd} \begin{bmatrix} e_{j,y}(x_j^+) \\ h_{j,z}(x_j^+) \end{bmatrix} \quad 3.58g)$$

O bien

$$\mathbf{M}_{j+2} \begin{bmatrix} e_{j+2}^+ \\ e_{j+2}^- \end{bmatrix} = e^{ikd} \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} \quad 3.58h)$$

Considerando que  $\mathbf{M}_{j+2}$  y  $\mathbf{M}_j$  son iguales, 3.58h) puede reescribirse como.

$$\begin{bmatrix} e_{j+2}^+ \\ e_{j+2}^- \end{bmatrix} = e^{ikd} \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} \quad 3.58i)$$

Siendo este el teorema de Bloch en forma Matricial. Construyendo el problema de matriz de transferencia para obtener los coeficientes del sistema de la Fig.3.11.

### 3.5.3 El problema de Eigenvalores de la Matriz de transferencia.

Las condiciones de Frontera para  $x = x_{j+1}$

$$\mathbf{F}_j \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{j+1} \begin{bmatrix} e_{j+1}^+ \\ e_{j+1}^- \end{bmatrix} \quad 3.59a)$$

$$\mathbf{M}_{j+1}^{-1} \mathbf{F}_j \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{j+1}^+ \\ e_{j+1}^- \end{bmatrix} \quad 3.59b)$$

y para  $x = x_{j+2}$

$$\mathbf{M}_{j+1} \mathbf{F}_{j+1} \begin{bmatrix} e_{j+1}^+ \\ e_{j+1}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{j+2} \begin{bmatrix} e_{j+2}^+ \\ e_{j+2}^- \end{bmatrix} \quad 3.59c)$$

Sustituyendo 3.59b) en 3.59c)

$$\mathbf{M}_{j+1} \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{M}_{j+1}^{-1} \mathbf{F}_j \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{j+2} \begin{bmatrix} e_{j+2}^+ \\ e_{j+2}^- \end{bmatrix} \quad 3.59d)$$

$$\mathbf{M}_{j+2}^{-1} \mathbf{M}_{j+1} \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{M}_{j+1}^{-1} \mathbf{F}_j \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{j+2}^+ \\ e_{j+2}^- \end{bmatrix} \quad 3.60d)$$

Aplicando el teorema de Bloch en 3.60d)

$$\mathbf{M}_{j+2}^{-1} \mathbf{M}_{j+1} \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{M}_{j+1}^{-1} \mathbf{F}_j \mathbf{M}_j \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} = e^{ikd} \begin{bmatrix} e_j^+ \\ e_j^- \end{bmatrix} \quad 3.61)$$

Igualando a 3.61) con 3.58i) se tiene entonces

$$|\mathbf{M}' - e^{ikd}| = 0 \quad 3.62a$$

Donde

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}_{j+2}^{-1} \mathbf{M}_{j+1} \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{M}_{j+1}^{-1} \mathbf{F}_j \mathbf{M}_j \quad 3.62b)$$

Siendo este un problema de Eigenvalores de la forma  $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ , apoyándose en el apéndice 1.A se puede tener una forma para estos eigenvalores.

$$e^{ikd} = \frac{-(m'_{11} + m'_{22}) \pm \sqrt{(m'_{11} - m'_{22})^2 + 4(m'_{12}m'_{21})}}{2} \quad 3.63)$$

De la cual solo se utilizarán los valores positivos para obtener la estructura de bandas real y compleja.

Existe una forma analítica la cual tiene una forma [Yeh, (2005)]

$$\cos Kd = \cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2} \right) \sin(k_1 d_1) \sin(k_2 d_2) \quad 3.64)$$

En la Fig. 3.13 se visualiza la estructura de bandas compleja y real para un medio periódico en los cuales sus índices están basados en la condición del cuarto de onda. Nótese que la línea sólida es la del método analítico mientras que los puntos marcados con una “x” son los provenientes del método hecho a base del análisis de la matriz de transferencia. En el Apéndice 2.G se encuentra el código en Matlab para obtener la grafica.

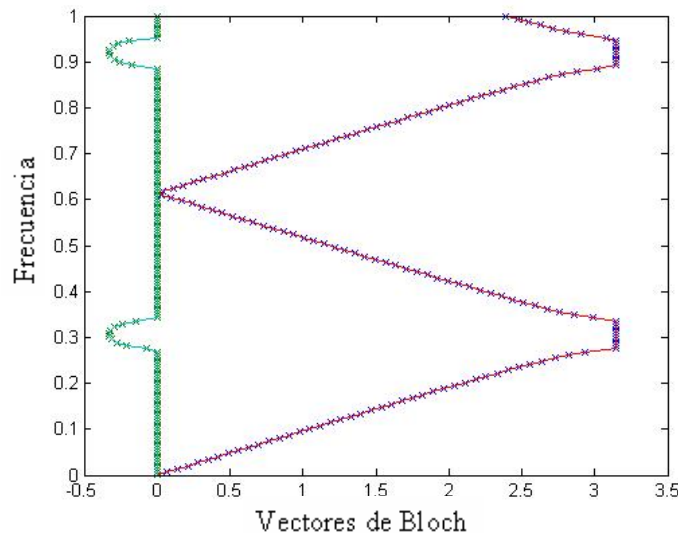


Fig. 3.12, Ilustración de la estructura de bandas real y compleja, en terminos de la Frecuencia.

## Capítulo 4

# Incremento de la BEPRO en espejos dieléctricos de silicio poroso<sup>1</sup>.

En los últimos años, se ha desarrollado un gran trabajo experimental [Chigrin, (1999), Fink, (1998), Winn, (1998), Istrate, (2002), Agarwal, (2003,2006), Bruyant, (2003), Xifré, (2005), Wang, (2007), Estevez, (2008)] y teórico [Chen, (1999), Southwell, (1999), Lee, (2002), Kim, (2002), Deopura, (2001), Archuleta, (2007), Strivastava, (2007,2008), Awasthi, (2008), Jiang, (2008), Tomalchev, (2008)] encaminado a realizar espejos dieléctricos de Silicio Poroso, estos espejos son interesantes debido a bajas pérdidas en frecuencias ópticas y en infrarrojas, en comparación con los espejos tradicionales metálicos.

La tecnología de Silicio permite obtener reflectores construidos a partir de una variación periódica de índices de refracción. Esta estructura periódica, es por definición un cristal fotónico debido a que la dirección de luz de lugar a una estructura de BEPRO.

La Tecnología de fabricación a base de silicio poroso es flexible y de bajo costo. Se han realizado diferentes avances en el trabajo experimental en una, dos o tres dimensiones. [Birner, (2001)] En particular, el grado de control para la construcción de cristales fotónicos de una dimensión (1D) es impresionante. [Agarwal, (2005)] Se han ensayado diferentes tipos de heteroestructuras en 1D. Una heteroestructura esta hecha de la combinación de dos o más cristales fotónicos diferentes. Por ejemplo Se han reportado la fabricación de espejos a base de heteroestructuras con distribución tipo *chirped* [Agarwal, (2003,2006)] y *Gaussian* [Estévez, (2008,2009)] en sus índices de refracción. También se han explorado el diseño de reflectores usando serie de Fibonacci [Grushina, (2009)] y algoritmos genéticos [Jiang, (2008)]. Todos estos trabajos han sido dirigidos a la optimización de las características ópticas de Heteroestructuras. El objetivo es obtener el reflector más eficiente, compacto, simple y con el mayor rango posible de operación.

---

<sup>1</sup> Este trabajo ha sido publicado en “*Journal of Electromagnetic Waves and Applications*” volume 24, no. 2/3, page 351-361, 2010

En este capítulo se mostrará una manera sencilla de diseñar una heteroestructura capaz de bloquear la luz, en el rango de frecuencias tan grande como se desee, utilizando espejos de silicio poroso de bajo índice de refracción. Muchos de los trabajos recientes han reportado resultados en el rango de las telecomunicaciones ( $1.5 \mu m$ ). [Fink, (1998), Winn, (1998), Chen, (1999), Chigrin, (1999), Southwell, (1999), Xifré, (2005), Wang, (2007), Estevez, (2008), Lee, (2002), Archuleta, (2007), Manzanares, (2009), Jiang, (2008)], pero para el rango del visible solo existen unos pocos reportes. [Agarwal, (2003,2006), Wang, (2007)] En uno de estos trabajos es diseñado y fabricado un espejo con rango de operación en el visible. Esta estructura está basada en una configuración “chirped” que requiere de un gran número de capas para lograr el espejo. En este capítulo se presentará una vía alterna para el diseño, obteniendo una heteroestructura mas compacta y con un rango de operación en el visible.

#### 4.1 Teoría.

Se considera un arreglo de capas con índices de refracción  $n_H$  y  $n_L$  ( $n_H > n_L$ ) con grosores respectivos  $d_H$  y  $d_L$ , respectivamente. En la Fig. 4.1a) se representa el problema de un cristal fotónico infinito que es obtenido por la repetición de una celda unitaria ilustrada en la Fig. 4.1b).

Para calcular los modos electromagnéticos en la multicapa infinita se considerará la ecuación de onda para un campo eléctrico que está polarizado en paralelo al eje  $y$  que se propaga a través del eje  $x$ .

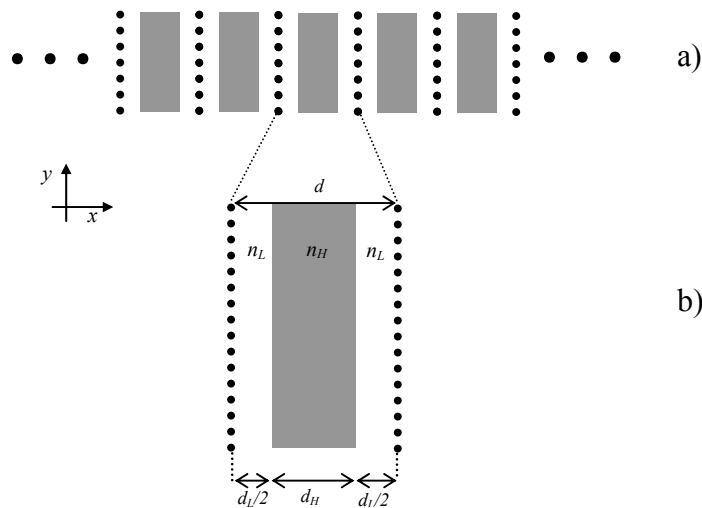


Fig. 4.1 Una estructura multicapa periódica. a) Estructura infinita. b) Celda unitaria.

Una forma alterna de la ecuación de onda [Archuleta, (2007)] es

$$\frac{1}{\varepsilon(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e_y(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} e_y(x) \quad 4.1)$$

Donde  $\omega$  y  $c$  son la frecuencia y la velocidad de la luz respectivamente. El campo eléctrico periódico  $[E_y(x)]$  y la inversa de la función dieléctrica  $[1/\varepsilon(x)]$  se escriben en términos de una serie de Fourier,

$$e_y(x) = \sum_G e_y(G) e^{i(k+G)x} \quad 4.2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon(x)} = \sum_G \mu(G) e^{iGx} \quad 4.3)$$

Donde  $k$  es el vector de onda. Las sumatorias se extienden sobre los vectores  $G$  de la red recíproca, donde  $G = 2\pi n/d$ , con  $n = -\infty, \dots, -1, 0, +1, \dots, +\infty$ . Aplicando el método de onda plana utilizado. Se introduce 4.2) y 4.3) en la ecuación 4.1) para obtener

$$\sum_{n'} \mu(n-n') e(n') (k_{red} + n')^2 = \omega_{red}^2 e(n) \quad 4.4)$$

Esta ecuación define un problema de Eigenvalores  $\mathbf{M}\mathbf{x}=\lambda^2\mathbf{x}$ . Los eigenvalores ( $\omega^2$ ) y Eigenvectores  $[E(G)]$ , pueden ser obtenidos a través de rutinas numéricas. La formulación de la ecuación de Eigenvalores introduce las unidades reducidas,  $k_{red} = kd/2\pi$  y  $\omega_{red} = d/\lambda$ . La ventaja de tener unidades reducidas es que la estructura de bandas es valida para cualquier periodo  $d$ .

## 4.2 Ensanchamiento de la BEPRO.

En la Fig. 4.2 a) se puede observar la estructura de banda típica de un sistema multicapa infinito a base de silicio poroso. Los índices de refracción son  $n_H = 1.95$  y  $n_L = 1.4$ . Con el propósito de maximizar la BEPRO para este contraste de índice, se determina el ancho de las capas utilizando la condición del cuarto de onda  $n_1 d_1 = n_2 d_2 = \lambda/4$ . [Agarwal, (2003)] los grosores para los índices de alto y bajo índice de refracción serán  $d_H = 0.4179d$  y  $d_L = 0.5821d$



respectivamente. En la parte b) de la Fig. 4.2 se muestra la reflexión de la luz para una multicapa compuesta de 14 periodos calculada con el Método de matriz de transferencia [Yeh, (2005)]. En ambas graficas se puede observar que la primera BEPRO está bordeada por los límites superior e inferior  $\omega_{red}^+$  y  $\omega_{red}^-$  respectivamente. Usando la expresión 4.5) se puede relacionar las bandas  $\omega_{red}^-$  y  $\omega_{red}^+$  con su longitud de onda correspondiente.

$$\omega_{red} = \frac{d}{\lambda} \quad 4.5)$$

$$\lambda^+ = \frac{d}{\omega_{red}^-} \quad 4.6a)$$

$$\lambda^- = \frac{d}{\omega_{red}^+} \quad 4.6b)$$

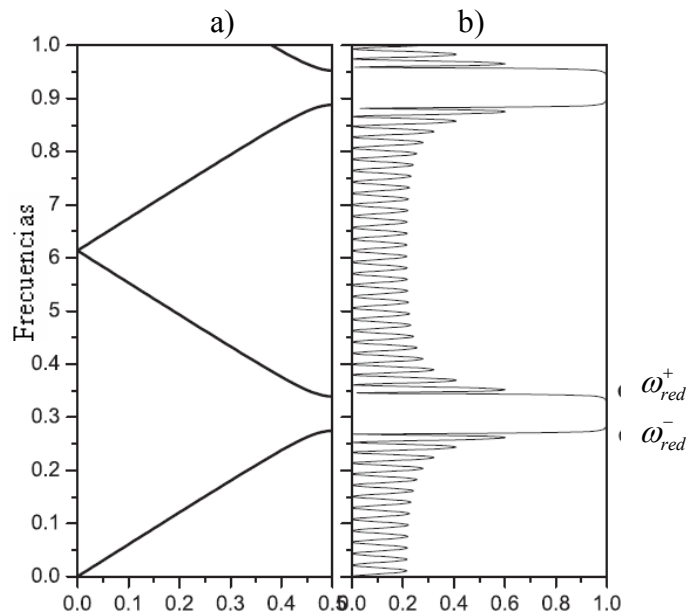


Fig. 4.2 Estructura de bandas y Reflexión para un cristal unidimensional. a) Estructura de bandas. b) Reflexión de luz.

En la Fig. 4.3a) se grafican  $\lambda^+$  y  $\lambda^-$  como función de  $d$ . Como se desea bloquear el rango de frecuencias de 0.4 a 0.5. Se escogen tres diferentes subespejos de espesor  $d_I$ ,  $d_{II}$ ,  $d_{III}$ . Cada subespejo bloquea un cierto rango de longitudes de onda. En 4.3b) se muestran con cuadrados, círculos y triángulos, la reflexión de la luz para los periodos  $d_I$ ,  $d_{II}$ , y  $d_{III}$  respectivamente. Para cada caso, los límites de la BEPRO se muestran en la Tabla 1.

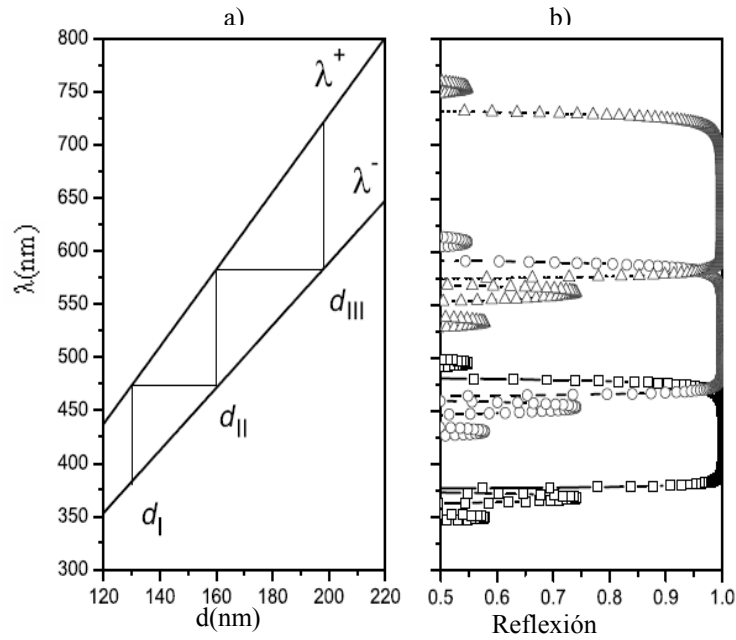


Fig. 4.3 Espejo comparado con la reflexión total de todas las estructuras unidas. a) Espejo. b) Regiones de reflexión.

Periodo	$\lambda^+$	$\lambda^-$
$d_1 = 130 \text{ nm}$	$381 \text{ nm}$	$473 \text{ nm}$
$d_2 = 160 \text{ nm}$	$473 \text{ nm}$	$581 \text{ nm}$
$d_3 = 198 \text{ nm}$	$581 \text{ nm}$	$719 \text{ nm}$

Tabla 1. límites para los espejos de periodos  $d_1, d_2, d_3$

Nuestra propuesta para incrementar el ancho de banda es poner juntos los tres subespejos. En la Fig. 4.4a) se presenta el espejo de heteroestructuras compuesto de 3 diferentes subespejos de periodos  $d_I$ ,  $d_{II}$ , y  $d_{III}$ . Se considera a cada subespejo de 14 celdas unitarias, estas son 72 películas delgadas en total. La luz reflejada en esta estructura es presentada en la Fig. 4.4b). Se observa entonces que la Heteroestructura presenta un espejo completo en el rango de los  $381 \text{ nm}$  a los  $719 \text{ nm}$ . En la referencia [Agarwal, (2006)] también se ha reportado un espejo en base a estructuras “*chirped*” con un rango similar de operación. Sin embargo, para construir tal espejo, fue necesario utilizar 308 películas delgadas. En diferencia, nuestra estructura optimizada requiere solo el 23% de el número total de capas utilizadas en el espejo de la referencia [Agarwal, (2006)].

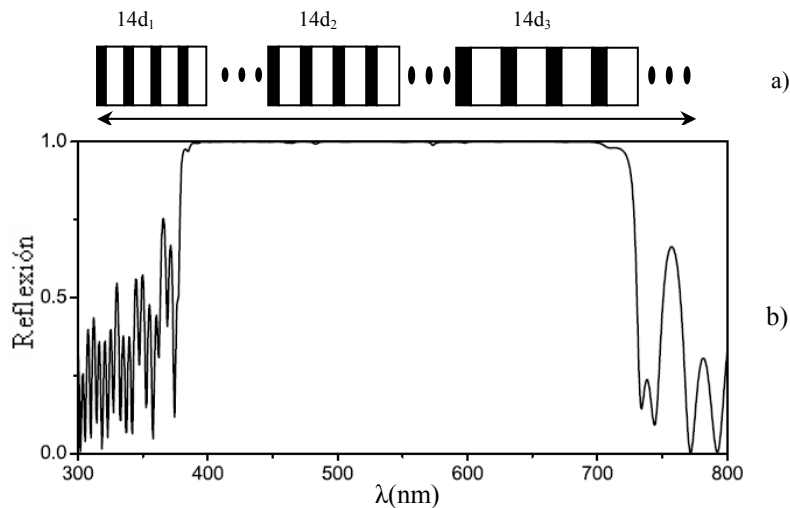


Fig. 4.4 Estructura del espejo, junto con su grafica de reflexión total.

### 4.3 El rol de la Absorción

En esta sección se investiga el rol de la absorción en las propiedades ópticas de los espejos a base de heteroestructuras. Recientemente el rol de la absorción fue investigado para cristales Fotónicos con elementos semiconductores constituyentes [Huang, (2003), Manzanares, (2005,2008)]. Se ha demostrado por diversos autores que la presencia de perdidas introduce efectos de interferencia adicional en los cristales fotónicos. En particular, si uno de los materiales constituyentes tiene absorción, pierde su designada estructura de banda fotónica.[Manzanares, (2005)]

Con el propósito de investigar el rol de la absorción, se considera que ambos índices de refracción, tienen una parte imaginaria finita. Se considera entonces la estructura de banda tiene vectores complejos. Usando entonces índices complejos como  $n_a = 1.95 + 0.001i$  y  $n_b = 1.95 + 0.001i$  en la Fig. 4.5 se muestra la reflexión de la luz ( línea sólida), la transmisión (línea de guiones), y la absorción (línea punteada) para cada uno de los tres subespejos. Los paneles a), b) y c) se presentan las propiedades ópticas para los subespejos de 14 celdas unitarias de periodos  $d_I$ ,  $d_{II}$ , y  $d_{III}$  respectivamente. Se observa que para cada subespejo, el rango de reflexión es preservado. Sin embargo, en cada subespejo aparece un cierto grado de absorción, que inhibe una transmisión total.

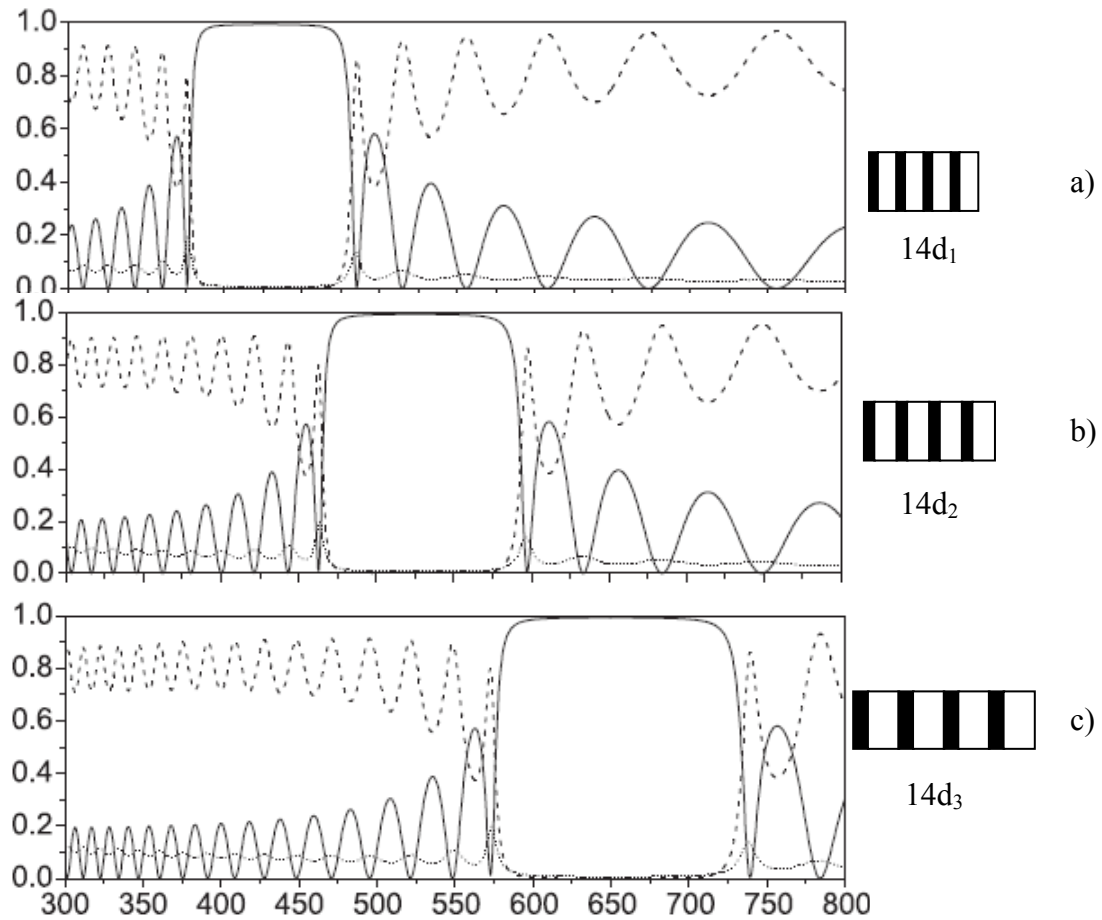


Fig. 4.5 Absorción por cada espejo construido en forma individual. La línea sólida es la reflexión, la línea punteada es la absorción y la línea de guiones es la transmisión.

Ahora Veamos el papel de la absorción en el espejo en base a heteroestructuras. En la Fig.4.6 se presentan tres posibles configuraciones de la heteroestructura considerando que la luz proviene de izquierda a derecha. Primero en 4.6a) se tiene un espejo de periodo  $d_I$ , luego se tienen los subespejos de periodos  $d_{II}$  y  $d_{III}$ , respectivamente. En 4.6b) se tiene primero el subespejo  $d_{II}$  y después los espejos  $d_{III}$  y  $d_I$ . Finalmente se tiene en 4.6c) primero al subespejo  $d_{III}$  y después a los subespejos de periodos  $d_I$  y  $d_{II}$ .

A partir de la Fig. 4.6 se puede observar que en la presencia de la absorción, el espejo a base de Heteroestructuras llega a ser imperfecto para todos los casos. Sin embargo para los tres casos, se obtiene de las propiedades ópticas que siempre existirá un rango de espejo perfecto que está relacionado con la posición del primer subespejo. Se observa que en el panel a), el primer subespejo en este caso  $d_I$  permite un rango de espejo perfecto de 381 nm a 473 nm. En 4.6b) el

primer subespejo tiene un periodo  $d_{II}$ , entonces el espejo perfecto existe en el rango de  $473 \text{ nm}$  a  $581 \text{ nm}$ . Fuera de este rango, el espejo de heteroestructura es menos efectivo. Para 4.6c) se tiene una situación similar. A partir de esto, se puede concluir que la calidad de los espejos a base de heteroestructura, es sensible dependiendo del orden de los subespejos, y al mismo tiempo que la absorción es un factor limitante.

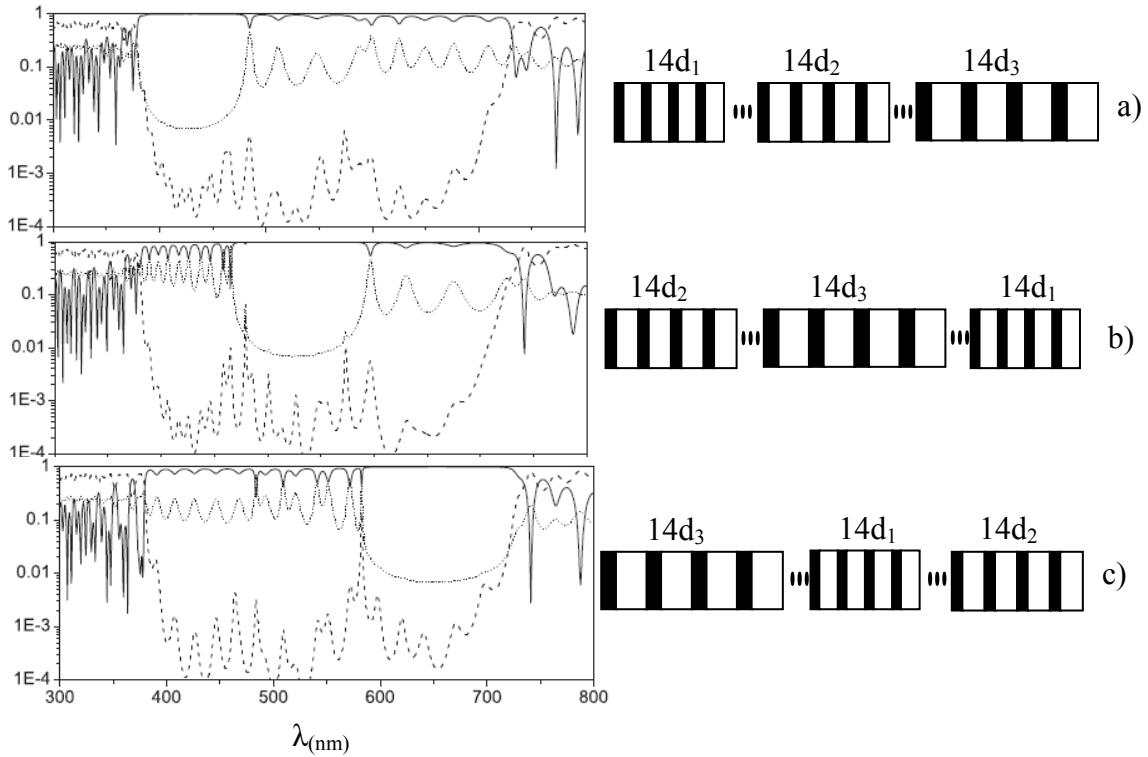


Fig.4.6 Cambios en la absorción considerando que subespejo se coloca primero en la estructura final. La línea punteada es la absorción, mientras que las líneas sólida y enguñada con la reflexión y transmisión respectivamente.

## Conclusiones.

A lo largo del documento se presentó el análisis de Cristales Fotónicos en una dimensión. El objetivo principal fue mostrar una combinación de herramientas matemáticas y numéricas basadas en el método de Matriz de Transferencia, y el Método de Expansión en Ondas Planas. Este conocimiento fue aplicado a un problema de interés tecnológico que logró una publicación.

Como pudo observar, el plantear las ecuaciones de Maxwell en el espacio de frecuencia permitió describir la ecuación de onda a partir de la cual se obtuvieron los coeficientes de campos Eléctricos y Magnéticos que constituyen a la solución en ondas planas siendo esta la base para los análisis posteriores.

La ecuación de Onda visualizada en el espacio de frecuencias permitió tener un esqueleto en términos de los vectores de la red recíproca, con el propósito de visualizar las BEPER y BEPRO de un cristal fotónico. Lo anterior pudo lograrse a partir de la Expansión en Ondas planas, que plantea la ecuación de onda en el espacio de frecuencias como un problema de Eigenvalores.

El planteamiento del problema de Eigenvalores, también fue aplicado al método de Matriz de Transferencia constituyéndose en una sola herramienta que no solo permite realizar el cálculo de los Coeficientes de reflexión y Transmisión sino también el cálculo de la estructura de bandas complejas, haciendo uso del teorema de Bloch.

El problema de la optimización revisado en el capítulo IV constituye un ejemplo clave de cómo la unificación de los métodos revisados en este documento, son la herramienta óptima dentro del campo tecnológico para el diseño de dispositivos fotónicos ya sea, mejorando los dispositivos ya existentes, o realizando diseños de arreglos materiales que realicen una operación específica.

El rol de la absorción analizado también en el capítulo implica que el utilizar materiales con un índice de refracción complejo para el diseño de heteroestructuras, ayuda a la construcción de dispositivos con diferentes propiedades ópticas haciendo modificaciones mínimas en las estructuras. Como se observó en el caso del espejo multicapa, solo tuvo que cambiarse de posición a los subespejos constituyentes, para cambiar las propiedades ópticas del mismo.

Con lo anterior se pueden enumerar las siguientes conclusiones.

1. El análisis para un dispositivo de tipo Fotónico debe ser realizado en el espacio de frecuencias para visualizar las propiedades de interés.
2. El análisis del problema de Eigenvalores es un problema en el cual el campo eléctrico y magnético no deben ser aislados, a diferencia como ha sido revisado por algunos autores. Considerando lo observado en el planteamiento por medio de la aplicación del Teorema de Bloch al problema de la matriz de transferencia para la obtención de la banda compleja.
3. El aspecto de la absorción en una heteroestructura es la ventana para la construcción de amplia variedad de dispositivos. Dado que las propiedades ópticas de un cristal fotónico pueden complementarse con los de otro, el agregar la absorción como una variable más dentro del análisis abre la posibilidad de comportamientos no visualizados aun dentro de los cristales fotónicos, y serán las herramientas computacionales las que permitirán visualización antes de pasar a la fase experimental.

# Apéndice 1

## 1.A Eigenvalores para un arreglo 2x2

Sea una matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} \quad 1.A.1)$$

Su inversa será.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad 1.A.2)$$

Donde

$$\Delta = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21}) \quad 1.A.3)$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad 1.A.4)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad 1.A.5)$$

Aplicando el determinante.

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad 1.A.6)$$

Aplicando la formula general tenemos dos soluciones.

$$\lambda^+ = \frac{(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\Delta}}{2} \quad 1.A.7)$$

$$\lambda^- = \frac{(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\Delta}}{2} \quad 1.A.8)$$



## 1.B Manipulación de Matrices de Transferencia para una película delgada.

Teniéndose un sistema como el de la Fig. B.1

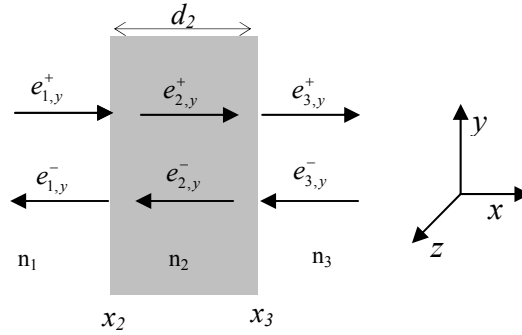


Fig. B.1 Ilustración de los campos electromagnéticos en una película delgada.

Sean las condiciones de frontera en  $x = x_2$

$$\mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} e_{2,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} \quad 1.B.4)$$

Y las condiciones de frontera en  $x = x_3$

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{F}_2 \begin{bmatrix} e_{2,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3 \begin{bmatrix} e_3^+ \\ e_3^- \end{bmatrix} \quad 1.B.5)$$

igualando a 1.B.4) y 1.B.5)

$$\begin{bmatrix} e_{3,y}^+ \\ e_{3,y}^- \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{1,y}^- \end{bmatrix} \quad 1.B.6)$$

Desarrollando.

$$\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 = \frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} -n_2 & -1 \\ -n_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ n_1 & -n_1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} (n_2 + n_1) & (n_2 - n_1) \\ (n_2 - n_1) & (n_2 + n_1) \end{bmatrix} \quad 1.B.7a)$$

$$\mathbf{F}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_2} \end{bmatrix} -\frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} (n_2 + n_1) & (n_2 - n_1) \\ (n_2 - n_1) & (n_2 + n_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 = -\frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} (n_2 + n_1)e^{i\phi_2} & (n_2 - n_1)e^{i\phi_2} \\ (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2} & (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2} \end{bmatrix} \quad 1.B.8a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 &= -\frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ n_2 & -n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (n_2 + n_1)e^{i\phi_2} & (n_2 - n_1)e^{i\phi_2} \\ (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2} & (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2} \end{bmatrix} \\ &= \left( -\frac{1}{2n_2} \right) \begin{bmatrix} [(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} + (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}] & [(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} + (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}] \\ [(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} - (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}]n_2 & [(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} - (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}]n_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 1.B.8b$$

$$\mathbf{M}_3^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 = \left( \frac{1}{4n_3 n_2} \right) \begin{bmatrix} -n_3 & -1 \\ -n_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} + (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}] & [(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} + (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}] \\ [(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} - (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}]n_2 & [(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} - (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}]n_2 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_3^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1$  serán.

$$m_{11} = \left( \frac{-1}{4n_3 n_2} \right) \left\{ n_3 [(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} + (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}] + n_2 [(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} - (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}] \right\} \quad 1.B.9a$$

$$m_{12} = \left( \frac{-1}{4n_3 n_2} \right) \left\{ n_3 [(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} + (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}] + n_2 [(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} - (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}] \right\} \quad 1.B.9b$$

$$m_{21} = \left( \frac{-1}{4n_3 n_2} \right) \left\{ n_3 [(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} + (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}] - n_2 [(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} - (n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}] \right\} \quad 1.B.9c$$

$$m_{22} = \left( \frac{-1}{4n_3 n_2} \right) \left\{ n_3 [(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} + (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}] - n_2 [(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} - (n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}] \right\} \quad 1.B.9d$$

### 1.B.1 Coeficiente de Reflexión.

Considerando la ecuación 3.38.

$$r_{13} = -\frac{m_{21}}{m_{22}} \quad 1.B.10$$

Los coeficientes solo dependen de los elementos de la matriz  $\mathbf{M}$ , por lo tanto.

$$r_{13} = -\frac{n_3(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} + n_3(n_2 - n_1)e^{-i\phi_2} - n_2(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} + n_2(n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}}{n_3(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} + n_3(n_2 + n_1)e^{-i\phi_2} - n_2(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} + n_2(n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}} \quad 1.B.11a$$

$$r_{13} = -\frac{[n_3(n_2 + n_1) - n_2(n_2 + n_1)]e^{i\phi_2} + [n_3(n_2 - n_1) + n_2(n_2 - n_1)]e^{-i\phi_2}}{[n_3(n_2 - n_1) - n_2(n_2 - n_1)]e^{i\phi_2} + [n_3(n_2 + n_1) + n_2(n_2 + n_1)]e^{-i\phi_2}} \quad 1.B.11b$$

$$r_{13} = -\frac{(n_3 - n_2)(n_2 + n_1)e^{i\phi_2} + (n_3 + n_2)(n_2 - n_1)e^{-i\phi_2}}{(n_3 - n_2)(n_2 - n_1)e^{i\phi_2} + (n_3 + n_2)(n_2 + n_1)e^{-i\phi_2}} \quad 1.B.11c$$

Dividiendo a numerador y denominador entre  $(n_2+n_1)$

$$r_{13} = -\frac{(n_3 - n_2)e^{i\phi_2} - (n_3 + n_2)r_{12}e^{-i\phi_2}}{(n_3 - n_2)r_{12}e^{i\phi_2} + (n_3 + n_2)e^{-i\phi_2}} \quad 1.B.12d)$$

Dividiendo a numerador y denominador entre  $(n_3+n_2)$

$$r_{13} = -\frac{-r_{23}e^{i\phi_2} - r_{12}e^{-i\phi_2}}{r_{23}r_{12}e^{i\phi_2} + e^{-i\phi_2}} \quad 1.B.12e)$$

Dividiendo a numerador y denominador entre  $e^{-i\phi_2}$

$$r_{13} = \frac{r_{23}e^{2i\phi_2} + r_{12}}{r_{23}r_{12}e^{2i\phi_2} + 1} \quad 1.B.12f)$$

Dado que  $\phi_2 = k_2d_2$

$$r_{13} = \frac{r_{12} + r_{23}e^{2ik_2d_2}}{1 + r_{23}r_{12}e^{2ik_2d_2}} \quad 1.B.12g)$$

La ecuación B.12g) corresponde a la ecuación 3.39 de este documento, mientras que la ecuación B.12f) es la formula analítica típica para el coeficiente de reflexión [Born, (1967)]

## Apéndice 2 Programas utilizados en el documento.

### Apéndice 2.A

Este apéndice muestra el código Matlab para obtener la Fig.2.2. El programa se enlista a continuación.

```
%programa coef_fourier.m
%Este programa calcula los coeficientes de fourier
clear;
ip=100;
f=0.5;
ea=2.25;
eb=1.00;
ic=1;
for n = -ip:ip
    nV(ic)=n;
    if n==0
        epsi(ic)=eb+(ea-eb)*f;
    else
        epsi(ic)=(ea-eb)*(sin(n*f*pi)/(n*pi));
    end
    ic=ic+1;
end
plot(nV,epsii, '-o')
```

### Apéndice 2.B

Este apéndice muestra el código en Matlab para hacer la Fig. 2.3. Este programa debe aplicarse después de usarse el programa descrito en el apéndice anterior.

```
%Programa Funcion dielectrica.m
%Este programa debe ser usado despues del programa coef_fouirer.m
iz=1;
for z=-0.5:0.01:+0.5;
    zV(iz)=z;
    epsi_z(iz)=0;
    in=1;
    for n=-ip:ip
        epsi_z(iz)=epsi_z(iz)+epsi(in)*exp(i*2*pi*n*z);
        in=in+1;
    end
    iz=iz+1;
end
plot(zV,epsii_z)
```

## Apéndice 2.C

Este apéndice muestra el código en Matlab para hacer la Fig. 2.4.

```
clear;
d=100e-10;
e1=1;
e2=2.25;
f=.5;
a=f*d;
kred=0:.01:.5;
EG0=e1+(e2-e1)*f;
EG1=(e2-e1)*f*(sin((1*pi*a)/2))/((1*pi*a)/2);
EGm1=(e2-e1)*f*(sin((-1*pi*a)/2))/((-1*pi*a)/2);
C=1/(EG0^2-(EG1*EGm1));
for k=1:numel(kred);
    M=C*[EG0*(kred(k)-1)^2 -EGm1*(kred(k))^2;-EG1*(kred(k)-1)^2
EG0*(kred(k))^2];
    E=eig(M);
    w=sort(E);
    for kx=1:numel(w);
        Vw(kx,k)=sqrt(abs(w(kx)));
    end
end
plot(kred,Vw)
axis([0 .5 0 1])
grid off
hold on
xlabel('Vectores')
ylabel('Valores de Frecuencia')
```

## Apéndice 2.D

Este apéndice muestra el código en Matlab para hacer la Fig. 2.5.

```
clear;
ip=20;
f=0.5;
ea=2.25;
eb=1.00;

ik=1;
for k = 0.0:0.01:0.5
    kV(ik)=k;
    in=1;
    im=1;
    for n=-ip:ip
        A(in,in)=(k+n)*(k+n);
        for m=-ip:ip
            if n==m
                epsi=eb+(ea-eb)*f;
            else
                epsi=(ea-eb)*(sin((n-m)*f*pi)/((n-m)*pi));
            end
            B(in,im)=epsi;
            im=im+1;
        end
    end
    ik=ik+1;
end
```

```

        end
        im=1;
        in=in+1;
    end
    e=eig(A,B);
    Vw1(ik)=sqrt(e(1));
    Vw2(ik)=sqrt(e(2));
    Vw3(ik)=sqrt(e(3));
    ik=ik+1;
end
plot(kV,Vw1,'k',kV,Vw2,'r',kV,Vw3,'b')
xlabel('Vectores')
ylabel('Valores de Frecuencia')
hold off

```

## Apéndice 2.E

Este apéndice muestra el código en Matlab para generar la Fig. 3.4.

```

clear;
c      = 3.0e08;
lambda_0 = 630e-9;
tao_0  = lambda_0/c;
w      = (2*pi)/tao_0;
n1     = 1.0;
n2     = 1.5;
k1     = n1*(w/c);
k2     = n2*(w/c);

x_i    = -5*lambda_0;
x_f    = +5*lambda_0;
N_x    = 1000;

M_1(1,1) = +1.0;
M_1(1,2) = +1.0;
M_1(2,1) = +(c/w)*k1;
M_1(2,2) = -(c/w)*k1;

M_2(1,1) = +1.0;
M_2(1,2) = +1.0;
M_2(2,1) = +(c/w)*k2;
M_2(2,2) = -(c/w)*k2;

M      = inv(M_2)*M_1;
r_12  = -M(2,1)/M(2,2);
t_12  = M(1,1) - M(1,2)*M(2,1)/M(2,2);

for ix = 1 : N_x
    x = x_i + ((ix-1)/(N_x-1))*(x_f-x_i);
    xV(ix) = x/lambda_0;
    if x <= 0
        E_p1(ix) = 1.0*exp(+i*k1*x);
        E_m1(ix) = r_12*exp(-i*k1*x);
        E_p2(ix) = 0.0;
        E_t(ix) = E_p1(ix)+E_m1(ix);
    end
end

```

```

end

if x > 0
    E_p1(ix) = 0.0;
    E_m1(ix) = 0.0;
    E_p2(ix) = t_l2*exp(+i*k2*x);
    Et(ix) = E_p2(ix);
end

end

plot(xV,real(E_p1),xV,real(E_m1),xV,real(E_p2))

```

## Apendice 2.F

Codigo en Matlab para obtener las Figs. 3.7, 3.8, 3.9.

```

clear;

% escoger
% 1 -> Grafica de reflexion versus espesor (r vs d)
% 2 -> Grafica de reflexion versus frecuencia (r vs w)
% 3 -> Grafica de Amplitud

escoger = 1;

%Parametros iniciales
c = 3.0e08;
lambda_0 = 630e-9;
tao_0 = lambda_0/c;
w_0 = (2*pi)/tao_0;

d2 = lambda_0;
w = 0.5*w_0;

% Funciones dielectricas
n1 = 1.0;
n2 = 1.5;
n3 = 1.0;

M_1(1,1) = +1.0;
M_1(1,2) = +1.0;
M_1(2,1) = +n1;
M_1(2,2) = -n1;

M_2(1,1) = +1.0;
M_2(1,2) = +1.0;
M_2(2,1) = +n2;
M_2(2,2) = -n2;

M_3(1,1) = +1.0;
M_3(1,2) = +1.0;
M_3(2,1) = +n3;

```

```

M_3(2,2) = -n3;

if escoger == 1 % Variacion en espesor

k1      = n1*(w/c);
k2      = n2*(w/c);
k3      = n3*(w/c);

d_i     = 0.0*lambda_0;
d_f     = 2.2*lambda_0;
N_d     = 200;

M1      = [1 0 ; 0 1];

for id = 1:N_d
    d2 = d_i + ((id-1)/(N_d-1))*(d_f-d_i);
    dV(id) = d2/lambda_0;
    F_2(1,1) = exp(+i*k2*d2);
    F_2(1,2) = 0.0;
    F_2(2,1) = 0.0;
    F_2(2,2) = exp(-i*k2*d2);
    M = inv(M_3)*M_2*F_2*M1;
    %inv(M_2)*M_1;
    M = M*inv(M_2)*M_1;

    r13_N(id)=-M(2,1)/M(2,2);
    r12 = (n1-n2)/(n1+n2);
    r23 = (n2-n3)/(n2+n3);
    r13_A(id)=(r12+r23*exp(-2*i*k2*d2))/(1+r12*r23*exp(-2*i*k2*d2));

end

RR_13N = r13_N.*conj(r13_N)
RR_13A = r13_A.*conj(r13_A);
plot(dV,RR_13N,dV,RR_13A,'o')

end % Variacion en distancia

if escoger == 2 % Variacion en frecuencia

w_i = 0.01*w_0;
w_f = 3.00*w_0;
N_w = 200;
delta_w = (w_f-w_i)/(N_w-1);

M1      = [1 0 ; 0 1];

```



```

for iw = 1 : N_w

    w = w_i + (iw-1)*delta_w;
    wV(iw) = w/w_0;

    k1      = n1*(w/c);
    k2      = n2*(w/c);
    k3      = n3*(w/c);

    F_2(1,1) = exp(+i*k2*d2);
    F_2(1,2) = 0.0;
    F_2(2,1) = 0.0;
    F_2(2,2) = exp(-i*k2*d2);
    M = inv(M_3)*M_2*F_2*M1;
    M = M*inv(M_2)*M_1;

    r13_N(iw)=-M(2,1)/M(2,2);
    r12 = (n1-n2)/(n1+n2);
    r23 = (n2-n3)/(n2+n3);
    r13_A(iw)=(r12+r23*exp(2*i*k2*d2))/(1+r12*r23*exp(-2*i*k2*d2));

end

RR_13N = r13_N.*conj(r13_N)
RR_13A = r13_A.*conj(r13_A);
plot(wV,RR_13N,wV,RR_13A,'o')
end

if escoger == 3

    k1      = n1*(w/c);
    k2      = n2*(w/c);
    k3      = n3*(w/c);

    M1      = [1 0 ; 0 1];

    F_2(1,1) = exp(+i*k2*d2);
    F_2(1,2) = 0.0;
    F_2(2,1) = 0.0;
    F_2(2,2) = exp(-i*k2*d2);
    M = inv(M_3)*M_2*F_2*M1;
    %inv(M_2)*M_1;
    M = M*inv(M_2)*M_1;

    r13 = -M(2,1)/M(2,2);
    t13 = M(1,1) - M(1,2)*M(2,1)/M(2,2);

    phi_1 = [1 ; r13];
    phi_2 = inv(M_2)*M_1*phi_1;
    phi_3 = inv(M_3)*M_2*F_2*phi_2;

```

```

N_x      = 100;
xx(1)    = 0.0;
xx(2)    = xx(1) + 2*lambda_0;
xx(3)    = xx(2) + d2;
xx(4)    = xx(3) + 2*lambda_0;

ic = 1;
for ix = 1:N_x
    x = xx(1) + ((ix-1)/(N_x-1))*(xx(2)-xx(1));
    xV(ic) = x/lambda_0;
    Ep(ic) = phi_1(1)*exp(+i*k1*(x-xx(2)));
    Em(ic) = phi_1(2)*exp(-i*k1*(x-xx(2)));
    E(ic) = Ep(ic)+Em(ic);
    nx(ic) = n1;
    ic = ic+1;
end

for ix = 1:N_x
    x = xx(2) + ((ix-1)/(N_x-1))*(xx(3)-xx(2));
    xV(ic) = x/lambda_0;
    Ep(ic) = phi_2(1)*exp(+i*k2*(x-xx(2)));
    Em(ic) = phi_2(2)*exp(-i*k2*(x-xx(2)));
    E(ic) = (Ep(ic)+Em(ic));
    nx(ic) = n2;
    ic = ic+1;
end

for ix = 1:N_x
    x = xx(3) + ((ix-1)/(N_x-1))*(xx(4)-xx(3));
    xV(ic) = x/lambda_0;
    Ep(ic) = phi_3(1)*exp(+i*k3*(x-xx(3)));
    Em(ic) = phi_3(2)*exp(-i*k3*(x-xx(3)));
    E(ic) = (Ep(ic)+Em(ic));
    nx(ic) = n3;
    ic = ic+1;
end

subplot(4,1,1);plot(xV,nx,'-')
subplot(4,1,2);plot(xV,real(Ep),xV,imag(Ep),'.')
subplot(4,1,3);plot(xV,real(Em),xV,imag(Em),'.')
subplot(4,1,4);plot(xV,E.*conj(E))
grid on

end

```

## Apendice 2G

Codigo para obtener la Fig. 3.10

```
% reflex. y transm. en heteroestructura
clear;

c      = 3.0E8;
NP     = 1000;
theta  = 0.0;
NM     = 30;
na     = 1.95;
nb     = 1.40;
d      = 1000.0E-10;
a      = 0.4179*d;
b      = 0.5821*d;
w_ini  = 0.001*(2*pi*c/d);
w_fin  = 1.000*(2*pi*c/d);
d_V(1) = 0.0;
n_V(1) = 1.0;
for ic = 2 : 2 : NM-1
    ic
    d_V(ic)   = d_V(ic-1)   + a;
    d_V(ic+1) = d_V(ic)     + b;
    n_V(ic)   = na;
    n_V(ic+1) = nb;
end
n_V(NM) = 1.0

for ic = 1 : NP;

    w(ic) = w_ini + (w_fin - w_ini) * ( (ic - 1) / (NP - 1) );

    ki    = n_V * (w(ic)/c);
    ky    = sin(theta*(pi/180))*ki(1);
    kx    = sqrt( ki.*ki - ky*ky);

    M1= [1 1;c*kx(1)/w(ic) -c*kx(1)/w(ic)];
    M2= [1 1;c*kx(2)/w(ic) -c*kx(2)/w(ic)];
    m = [1 0; 0 1];
    for iNM = NM : -1: 3
        Mb = [1 1;c*kx(iNM)/w(ic) -c*kx(iNM)/w(ic)];
        Ma = [1 1;c*kx(iNM-1)/w(ic) -c*kx(iNM-1)/w(ic)];
        Fa=[exp(i*kx(iNM-1)*(d_V(iNM-1)-d_V(iNM-2))) 0;0 exp(-i*kx(iNM-1)*(d_V(iNM-1)-d_V(iNM-2)))];
        m = m * inv(Mb)*Ma*inv(Fa);
    end
    m = m * inv(M2)*M1;
    r = -m(2,1)/m(2,2);
    t = (m(1,1)-m(1,2)*m(2,1)/m(2,2));
    R(ic)=real(r*conj(r));
    T(ic)=real((kx(NM)/kx(1))*t*conj(t));
    ic=ic+1;
end
```

```

wred = w*(d/(2*pi*c));
plot(wred,R, 'b',wred,T, 'r')

data = [wred' R' wred' T'];
save 'R_T.dat' data -ascii

```

## Apendice 2.H

Codigo en Matlab para generar la Grafica de la Fig. 3.12

```

clear;
C=3E08;
w_ini=.0001;
w_fin=1;
li=700e-9;
Ind=[1.4;1.95];
for n=1:numel(Ind);
    dis(n)=li/(4.0*Ind(n));
end
for n=1:numel(dis);
    if n==1;
        D(n)=dis(1);
    else
        D(n)=D(n-1)+dis(n);
    end
end
Dt=D(numel(D));
Nw=150;
incW=(w_fin-w_ini)/(Nw-1);
w=w_ini*((2*pi*C)/Dt):incW*((2*pi*C)/Dt):w_fin*((2*pi*C)/Dt);
for n=1:numel(w);
    for i=1:2;
        Mi=[1 1;Ind(i) -Ind(i)];
        Minvi=inv(Mi);
        Fi=[exp(j*(Ind(i)*(w(n)/C))*dis(i)) 0; 0 exp(-
j*(Ind(i)*(w(n)/C))*dis(i))];
        if i==1;
            M1=Mi;
            F1=Fi;
            Minvil=Minvi;
        else
            end
        end
        M =F1*Minvil*Mi*Fi*Minvi*M1;
        L_p(n)=.5*((M(1,1)+M(2,2))+sqrt((M(1,1)-M(2,2))^2+4*(M(2,1)*M(1,2))));
        L_m(n)=.5*((M(1,1)+M(2,2))-sqrt((M(1,1)-M(2,2))^2+4*(M(2,1)*M(1,2))));
    end
    for n=1:numel(L_p);
        eig_P(n)=log(L_p(n));
    end
    for n=1:numel(L_m);
        eig_M(n)=log(L_m(n));
    end
end
%subplot(2,2,[1,3]);

```

```
plot(imag(eig_P),w*(Dt/(2*pi*C)),'.',real(eig_P),w*(Dt/(2*pi*C)),'.');
%grid on;
hold on;
%subplot(2,2,[2,4]);
%plot(imag(eig_M),w*(Dt/(2*pi*C)),'.',real(eig_M),w*(Dt/(2*pi*C)),'.');
%grid on;
%hold on;
```

# Bibliografía

## A

Agarwal, V. and J. A. Del Rio, "Tailoring the photonic band gap of a porous silicon dielectric mirror," *App. Phys. Lett.*, Vol. 82, 1512-1514, 2003.

Agarwal, V. and J. A. Del Rio, "Filters, mirrors and microcavities from porous silicon," *Int. J. Mod. Phys. B*, Vol. 20, 99-110, 2006.

Archuleta-Garcia, R., B. Manzanares-Martinez, and J. Manzanares-Martinez, "Giant photonic band gap in photonic heterostructures," *Rev. Mex. Fis.*, Vol. 53, 371-375, 2007.

Awasthi, S. K. and S. P. Ojha, "Wide-angle, broadband plate polarizer with 1D photonic crystal," *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 88, 321-335, 2008.

## B

Bjarklev, "Photonic Crystal Fibers", Springer, 2003

Born and Wolf, "*Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*", Oxford, Pergamon Press, 1964.

Bruyant, A., G. Lerondel, P. J. Reece, and M. Gal, "All silicon omnidirectional mirrors based on one-dimensional photonic crystals," *App. Phys. Lett.*, Vol. 82, 3227-3229, 2003.

## C

Chen, K. M., A. W. Sparks, H. C. Luan, D. R. Lim, and L. C. Kimerling, "SiO<sub>2</sub>/TiO<sub>2</sub> omnidirectional reflector and microcavity resonator via the sol-gel method," *Opt. Lett.*, Vol. 75, 3805-3807, 1999.

Chigrin, D. N., A. V. Lavrinenko, D. A. Yarotsky, and S. V. Gaponenko, "All-dielectric one-dimensional periodic structures for total omnidirectional reflection and partial spontaneous emission control," *J. Lightwave Technol.*, Vol. 17, 2018-2024, 1999.

## D

Deopura, M., C. K. Ullal, B. Temelkuran, and Y. Fink, "Dielectric omnidirectional visible reflector," *Opt. Lett.*, Vol. 26, 1197-1199, 2001.

## E

Estevez, J. O., J. Arriaga, A. Mendez-Blas, and V. Agarwal, "Omnidirectional photonic bandgaps in porous silicon based mirrors with a gaussian profile refractive index," *Appl. Phys. Lettters*, Vol. 93, 191915-191917, 2008.

## F

Fink, Y., J. N. Winn, S. Fan, C. Chen, J. Michel, J. D. Joannopoulos, and E. L. Thomas, "A dielectric omnidirectional reflector," *Science*, Vol. 282, 1679-1682, 1998.

## G

Grushina, N. V., P. V. Korolenko, A. Y. Mishin, and A. Zotov, "Broad omnidirectional band of reflection from Fibonacci one-dimensional photonic crystals," *PIERS Online*, Vol. 5, No. 6, 511-515, 2009.

## I

E. Istrate, E. H. Sargent, "Photonic Crystal Heterostructures-resonant tunnelling waveguides and filters." *Journal of applied optics A: Pure and applied Optics*. 4 (2002) Institute of physics publishing. S242-S246.

## J

Jackson, P. J. "*Classical Electrodynamics*" Wiley, 1964

Jiang, L., G. Zheng, L. Shi, J. Yuan, and X. Li, "Broad omnidirectional reflectors design using genetic algorithm," *Optics Communications*, Vol. 281, 4882-4888, 2008.

## K

Kim, S. H. and C. K. Hwangbo, "Design of omnidirectional high reflectors with quarter-wave dielectric stacks for optical telecommunication bands," *Appl. Opt.*, Vol. 41, 3187{3192, 2002.

T. F. Krauss, R. M. DeLaRue, S. Brand (1996), "Two-dimensional photonic-bandgap structures operating at near-infrared wavelengths", *Nature* 383 (6602): 699–702

## L

Lee, H. Y., H. Makino, T. Yao, and A. Tanaka, "Si-based omnidirectional reflector and transmission filter optimized at a wavelength of 1.55  $\mu$ m," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 81, 4502-4504,2002.

## M

Manzanares-Martinez, J., P. Castro-Garay, and E. Urrutia-Bañuelos, "Influence of disorder on a chirped mirror based on porous silicon," *Progress In Electromagnetics Research Letters*, Vol. 11, 159{165, 2009.

Manzanares-Martinez, J., F. Ramos-Mendieta, and P. Halevi, "Temperature tuning of two-dimensional photonic crystals in the presence of phonons and a plasma of electron and holes," *Phys.Rev. B*, Vol. 72, 035336-035345, 2005.

Manzanares-Martinez, J., F. Ramos-Mendieta, and P. Halevi, "Tuning of transmission peaks in two-dimensional semiconductor-based photonic crystals with line defects of cylinders," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 87, 101110-101112, 2005.

Manzanares-Martinez, J. and F. Ramos-Mendieta, "One dimensional photonic crystals with semiconducting constituents: The effects of the absorption mechanisms," *Rev. Mex. Fis.* Vol. 54, 95-100, 2008.



## O

P. Ordejon (1998), "Order-N tight-binding methods for electronic-structure and molecular dynamics", *Computational materials science*, 1998, vol. 12, no 3 (135 p.) (128 ref.), pp. 157-191.

## Q

H. J. Quisser and E. H. Haller, *Science* 281, 945 (1998).

## R

J. W. S. Rayleigh (1888), "On the remarkable phenomenon of crystalline reflexion described by Prof. Stokes" (PDF), *Phil. Mag* 26: 256–265

Rusell, P. St., "Photonic Crystal Fibers", *Science* 299, 358-362 (2003)

## S

Sajeev John, "strong localization of photons in certain disordered dielectric supperlattices" *Physical Review Letters* Vol 58 no. 23 1987, 2486-9.

Southwell, W. H., "Omnidirectional mirror design with quarter-wave dielectric stacks," *Appl. Opt.*, Vol. 38, No. 25, 5464-5467, 1999.

Srivastava, S. K. and S. P. Ojha, "Omnidirectional reflection bands in one-dimensional photonic crystal structure using fullerene films," *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 74, 181-194, 2007.

Srivastava, R., K. B. Thapa, S. Pati, and S. P. Ojha, "Design of photonic band gap Filters," *Progress in Electromagnetics Research*, PIER 81, 225-235, 2008.

## T

Tolmachev, V. A., T. S. Perova, J. Ruttler, and E. V. Khokhlova, "Design of one-dimensional photonic crystal using combination of band diagram and photonic gap map approaches," *J. of Appl Phys.*, Vol. 104, No. 3, 033536-1-033536-6, 2008.

## W

Wang, Z., J. Zhang, J. Xu, L. Wang, C. Cao, and P. Zhan, "1D partially oxidized porous silicon photonic crystal reflector for mid- infrared application," *J. Phys. D.: Appl. Phys.*, Vol. 40, 4482–4484, 2007.

Winn, J., Y. Fink, S. Fan, and J. D. Joannopoulos, "Omnidirectional reflection from a one-dimensional photonic crystal," *Opt. Lett.*, Vol. 82, 1512-1514, 1998.

## X

Xifré-Perez, E., L. F. Marsal, J. Pallares, and J. Ferre-Borrull, "Porous silicon mirrors with enlarged omnidirectional band gap," *J. Appl. Phys.*, Vol. 97, 064503-064508, 2005.

Xifre-Perez, E., L. F. Marsal, J. Ferre-Borrull, and J. Pallares,"Low refractive index contrast porous silicon omnidirectional reflectors," *Appl. Phys. B*, Vol. 95, 169-172, 2009.

## Y

Yablonovitch, Eli "inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics" *Physical Review Letters* Vol 58 May 1987 2059-62