



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Modelación matemática para el control de la plaga del  
gusano barrenador de la nuez

## T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

**Maestro en Ciencias**  
(Matemáticas)

Presenta:

Luis Alfonso Caraveo Balderas

Director de tesis: Dr. José Arturo Montoya Laos

Codirector: Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra

Hermosillo, Sonora, México.      3 de febrero de 2022

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

## SINODALES

Dra. Leticia Ramírez Ramírez  
Centro de Investigación en Matemáticas

Dra. Gudelia Figueroa Preciado  
Universidad de Sonora

Dr. David Baca Carrasco  
Instituto Tecnológico de Sonora

Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra  
Universidad de Sonora

*Dedicado a  
mi familia.*



## Agradecimientos

Llegado el final, me es imposible agradecer a todas las personas que estuvieron en este proceso tan importante. En general, quisiera agradecer a todos porque gracias a su impacto, positivo o negativo, soy lo que soy. Gracias totales.

En particular, agradezco al que me guía y hace que las coincidencias en mi vida resulten tan buenas y positivas.

A mi familia por todo el apoyo que he recibido desde siempre. Sin la compañía de mi padre Luis, mi madre Leticia, mi hermano Jorge y de mi segunda madre Juana no me hubiera sido posible llegar hasta este punto.

A mis amigos que siempre me apoyaron a la distancia. A Javier, Deyanira y Kevin por siempre apoyarme a lo largo de este proceso. A Itzel por siempre preocuparse y a César por siempre tener consejos valiosos para mí. También, agradezco a mi familia sonorenses por su apoyo. A Luz, Malena, Andrés, Nelson, Claudio, Nohemy, Jorge, Mayra, Manuel, Jesus y Maria Fer. Muchas gracias por todo.

A mis directores de tesis, que gracias a sus enseñanzas he sido capaz de vencer a mis viejos demonios y convertirme en un mejor estudiante. Al Dr. Acuña por enseñarme a sobrellevar las caídas y tropiezos durante mi maestría. Al Dr. Montoya, por siempre creer en mi desarrollo académico, cada regaño lo guardo no como algo negativo sino como una oportunidad para crecer.

Un agradecimiento especial a mis sinodales de tesis por sus valiosas observaciones. A la Dra. Ramírez, a la Dra. Gudelia y al Dr. Baca por dedicar su tiempo en mejorar mi investigación. También, a mi tutor de la licenciatura el Dr. Loeza. Gracias por siempre preocuparse y creer que soy apto para los estudios de posgrado, sin usted no estaría aquí.

Por último, agradezco a la Universidad de Sonora por el trato recibido y al departamento de Matemáticas, en especial al Dr. Minjarez por siempre preocuparse. Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología por la beca de manutención en mis estudios de maestría. Al Comité de Sanidad Vegetal de Sonora por confiar en este proyecto. Sin ellos no habría sido posible el desarrollo de mi trabajo de investigación.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelación de la dinámica poblacional del GBN</b>	<b>7</b>
2.1. Modelo matemático . . . . .	7
2.2. Análisis cualitativo . . . . .	9
2.2.1. Invarianza de la región . . . . .	10
2.2.2. Puntos de equilibrio . . . . .	13
2.2.3. Estabilidad Local . . . . .	16
2.2.4. Estabilidad Global . . . . .	21
2.3. Simulaciones . . . . .	23
2.3.1. Escenarios $r < 1$ . . . . .	23
2.3.2. Escenarios $r > 1$ . . . . .	24
<b>3. Metodología para la estimación del tiempo óptimo en la aplicación del control del GBN</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. Especificación de parámetros con base en el ciclo vital del GBN	28
3.3. Especificación de la función de control . . . . .	31
3.4. Especificación de las condiciones iniciales . . . . .	34
3.4.1. Propuesta del modelo para estimar la población de pupas	35
3.4.2. Estimación del tamaño poblacional de pupas . . . . .	40
3.5. Cuantificación del daño . . . . .	42
3.6. Estimación del tiempo óptimo . . . . .	43
<b>4. Resultados</b>	<b>45</b>
4.1. Tiempo óptimo de control . . . . .	45
4.2. Interpretación de los resultados . . . . .	52
<b>5. Conclusiones</b>	<b>55</b>
<b>A. Definiciones y resultados generales de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>57</b>
A.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio . . . . .	57



A.2. Matrices Metzler . . . . .	58
<b>B. Modelado y estimación de la población de pupas del GBN</b>	<b>59</b>
B.1. Distribución beta . . . . .	59
B.2. Modelo para la frecuencia de capturas: Distribución marginal	62
B.3. Enfoque de verosimilitud perfil . . . . .	63
B.4. Valoración del modelo . . . . .	65

# Capítulo 1

## Introducción

Las plagas constituyen uno de los principales problemas en la producción agrícola ya que, al infectar los sembradíos, pueden causar una reducción significativa en el beneficio económico que se obtiene de la cosecha. Por ejemplo, se puede reducir la cantidad de cosecha que se vende, la calidad del producto decrece, o se incrementan los costos de producción. Por lo anterior, resulta crucial tomar decisiones que permitan mantener moderadas a las plagas. Más aún, se buscan soluciones eficientes a problemas muy concretos al momento de aplicar un control de plagas, como por ejemplo, ¿Cuándo hacerlo? Aquí la Biomatemática toma un papel protagónico para el desarrollo de herramientas que permitan el entendimiento de los mecanismos complejos relacionados con las plagas.

Existen diferentes tipos de cultivos y frutos que se ven atacados por diversas plagas. En específico, en esta tesis, la atención se centra en el cultivo del nogal pecanero. El nogal pecanero [*Carya Illinoensis* (Wangenh.) K. Koch] es un cultivo oriundo del sureste de los Estados Unidos de América y el norte de México (Torres-Delgado *et al.*, 2018). En el año 2016, México tuvo una superficie sembrada de nogal de 114,464 ha y una superficie cosechada de 83,513 ha. En ese año México alcanzó un volumen de producción de 141,818 ton y un valor de producción de 9,786.3 millones de pesos. En México, el principal estado productor de nuez es Chihuahua con el 65 % del volumen nacional, lo sigue Sonora (13 %), Coahuila (10 %), Durango (6 %) y Nuevo León (2 %). En particular, el cultivo de nogal en el Estado de Sonora ha tenido un incremento en la superficie cultivada, de la cual el 99 % se encuentra ubicada en la región de Hermosillo, Valle del Yaqui, Sierra de Sonora, Caborca y Magdalena. En el 2016, el Estado de Sonora alcanzó un volumen de producción anual de nogal de 18,000 ton, un valor de producción de 1,260 millones de pesos y una generación de 483,000 jornales al año. Para mayores detalles véase Fu Castillo *et al.* (2019).

Una de las principales plagas del nogal pecanero es el gusano barrenador de la nuez (*Acrobasis nuxvorella Neunzing*). El gusano barrenador de la nuez

(GBN), nativo del sureste de Estados Unidos y norte de México, es monófago y causa daño directo a la nuez. El GBN tiene cuatro fases o estadios de crecimiento (huevo, larva, pupa y palomilla) y completa de dos hasta cuatro generaciones al año. La generación invernante del GBN duerme en forma de larva dentro de un capullo, ubicado en la base de las yemas del árbol en dormancia. De mediados a fines de marzo, la larva invernante sale de su capullo (debido a la brotación del nogal) y se alimenta de las yemas del árbol para después barrenar los brotes. A mediados de abril, las larvas pupan en los túneles de los brotes o en hendiduras de la corteza. Posteriormente, de finales de abril a principios de mayo, emergen las palomillas de la primera generación. Estas palomillas (adultos) se aparean de noche y ovipositan sobre las nuececillas del nogal. Generalmente, estos huevos se ovipositan poco después de la polinización del nogal. Luego, los huevos eclosionan en larvas. Dichas larvas se arrastran hacia las yemas secundarias (ubicadas en la base de las hojas del nogal) para alimentarse y posteriormente barrenar la nuececilla. Después, las larvas pupan dentro de la nuececilla. Durante junio, los adultos de la segunda generación emergen y ovipositan para comenzar nuevamente el ciclo. A finales de julio, se presenta una tercera generación. En agosto, las larvas de esta tercera generación ya no penetran la nuez debido al endurecimiento de la cáscara y sólo se alimenta del ruzno. En septiembre, puede aparecer otra generación cuyas larvas (junto con las larvas de la generación anterior) no se alimentan sino que migran a las yemas para construir sus capullos (*hibernaculum*) y pasar el invierno. Esta es la generación llamada invernante que tendrá actividad el siguiente año. Para más información sobre el GBN véase Knutson y Ree (2005) e Higuera-Acuña (2013).

En México, el GBN llega a causar pérdidas superiores al 40 % de los racimos en huertas donde el control efectuado es deficiente o nulo (Torres-Delgado *et al.*, 2018). Por ejemplo, durante el periodo 2002 al 2005, se estimó que esta plaga afectó a más del 30 % de la producción del cultivo de nogal pecanero en la Costa de Hermosillo, Sonora, debido al desconocimiento de la biología del insecto y control químico deficiente, que representó pérdidas de 317 a 705 kg de nuez/ha. Para mayores detalles véase Fu Castillo *et al.* (2019). Cabe mencionar que el CESAVE es un organismo de productores agrícolas, auxiliar de la Secretaria de Agricultura y Desarrollo Rural, encargado de desarrollar acciones de orden fitosanitario y de inocuidad de alimentos.

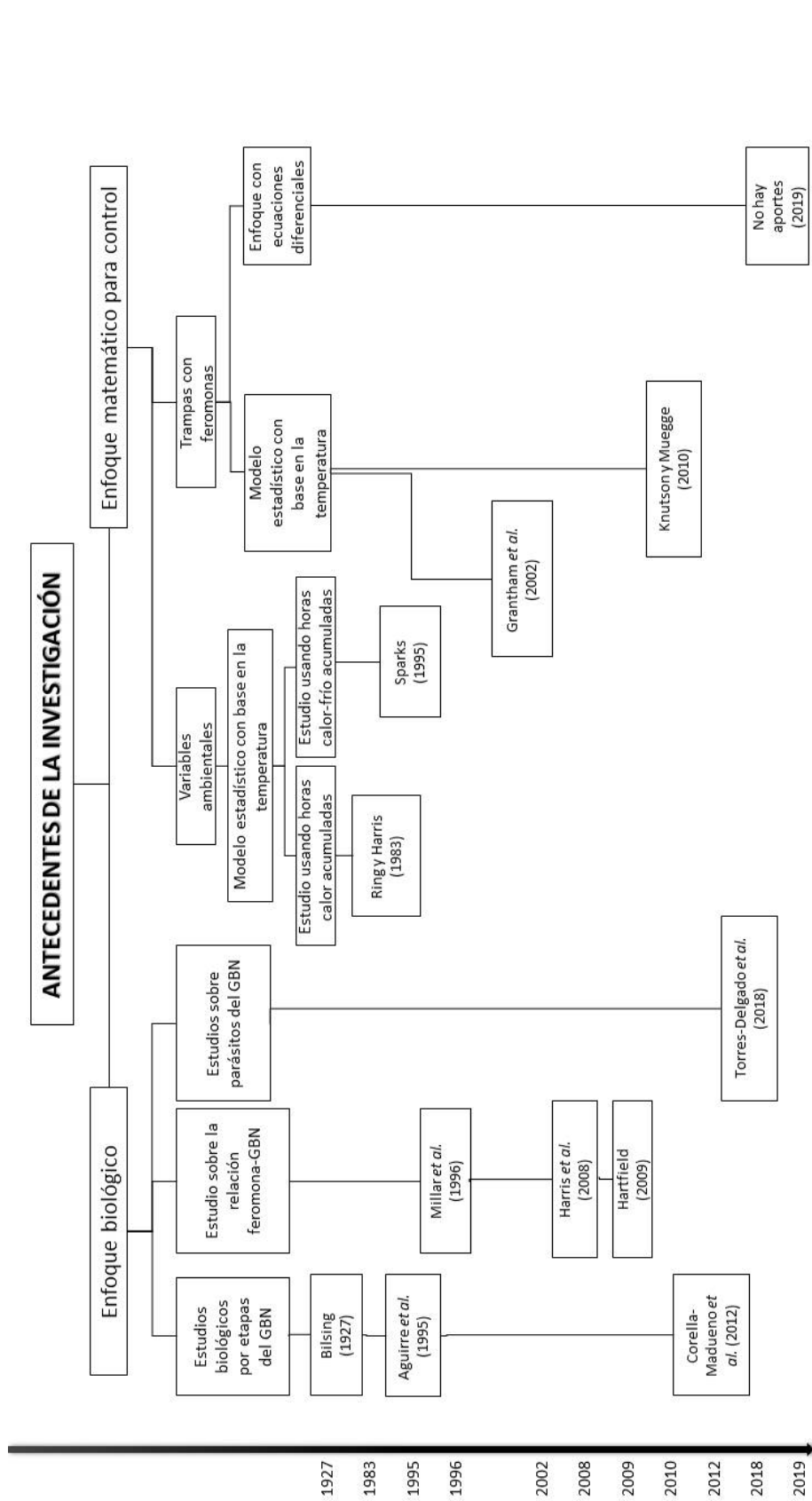


Figura 1.1: Esquema de trabajos de investigación que versan sobre el GBN.

En la literatura existen varios estudios que ayudan a comprender los hábitos, el ciclo de vida y las necesidades del GBN; así como las diferentes estrategias de control efectuadas sobre esta plaga. En la Figura 1.1 se muestran algunos artículos científicos encontrados en torno al GBN, organizados en un diagrama *ad hoc* para tratar el enfoque y la cronología de la investigación. Nótese que en este diagrama los trabajos fueron clasificados en dos grupos generales; en el primer grupo se tienen los estudios realizados solamente en el contexto biológico del GBN, mientras que en el otro se consideran las investigaciones con carácter matemático para el control del GBN.

El enfoque biológico, como se muestra en la Figura 1.1, está constituido por tres clases de estudio: biológicos por etapas del GBN, la relación feromona-GBN y parásitos del GBN. En la primera clase, se estudian las características anatómicas del GBN; así como sus diferentes etapas que comprenden huevo, gusano, pupa y palomilla. Por ejemplo, Bilsing (1927) hace un estudio exhaustivo de las etapas del GBN; Aguirre *et al.* (1995) estudian el comportamiento de oviposición del GBN; Corella-Madueno *et al.* (2012) replican el ciclo del GBN en condiciones de laboratorio. Por otro lado, en la segunda clase del enfoque biológico, las investigaciones se centraron en la relación del GBN con las feromonas para su captura. Por ejemplo, Millar *et al.* (1996) exponen que tener una feromona para la captura del adulto del GBN es esencial para poder tomar decisiones con un método sistemático y más sencillo; Harris *et al.* (2008) estudian la relación entre el GBN y nuevas feromonas; mientras que Hartfield (2009) investiga la efectividad de algunas feromonas para capturar al GBN en etapa adulta. Además, menciona que el GBN es más susceptible a pesticidas cuando se encuentra en su etapa de larva y está alimentándose fuera de la nuez; por lo tanto, el control se podría aplicar en ese momento. Por último, en la tercera clase del enfoque biológico, se encuentran las investigaciones del GBN enfocadas en estudiar sus parásitos. Recientemente, Torres-Delgado *et al.* (2018) investigan los tipos de parasitoides que pueden atacar al GBN en su etapa de huevo, larva y pupa.

Por otra parte, el enfoque matemático para control del GBN (mostrado en la Figura 1.1) está constituido por tres clases que enfatizan la cronología de las investigaciones: Variables ambientales, trampas con feromonas y control biológico. En la primera clase, se catalogan dos modelos estadísticos con base en la temperatura. Ring y Harris (1983) proponen el modelo Texas, el cual predice varios eventos en la vida del GBN usando unidades-calor acumuladas para aplicar el control; Sparks (1995) propone el modelo Sparks, el cual predice la primera entrada del GBN en la nuez, utilizando unidades-calor

y unidades-frío. Por otro lado en la segunda clase del enfoque matemático para el control del GBN, las investigaciones se centraron en el control del gusano con ayuda de trampas con feromonas; técnica de captura que se sigue utilizando en la actualidad para el muestreo del GBN. Por ejemplo, Grantham *et al.* (2002) proponen evaluar los modelos Texas y Sparks con base en datos de capturas de trampas con feromonas; Knutson y Muegge (2010) desarrollan un modelo con base en horas-calor y capturas de adultos para predecir su aparición y posteriormente tratar de conocer el momento cuando la larva entra a la nuez. Por último, no hay aportes sobre modelos matemáticos que tomen en cuenta el control con un enfoque de ecuaciones diferenciales.

Esta tesis se enfoca en el problema del control de la plaga del GBN por medio de plaguicidas. En particular, se encamina al problema de determinar el momento de aplicación del plaguicida para asegurar un contacto óptimo entre el insecticida y la plaga, para disminuir la pérdida en la cosecha de la nuez pecanera a causa del GBN. El objetivo de esta tesis es estimar el tiempo de la aplicación del control con el fin de que la cantidad de larvas que ingresan a la nuez sea la menor posible. Para lograr este objetivo, se modelará la dinámica poblacional del GBN y se usarán condiciones iniciales que permitan obtener comportamientos poblacionales específicos para datos bajo estudio. Para modelar la dinámica poblacional del GBN se propone un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias estructurado por edades que considera el ciclo vital del GBN y el efecto del plaguicida. Por otro lado, se propone obtener condiciones iniciales para este modelo a partir de estimaciones obtenidas con base en un modelo estadístico y datos reales de capturas de adultos (palomillas) del GBN, que proporcionan las trampas con feromonas. Luego, se estima el tiempo óptimo de aplicación del insecticida a través de la minimización de una función objetivo, la cual fue construida con base en la cantidad de larvas que barrenan e ingresan a la nuez durante el período de estudio.

Esta tesis se encuentra organizada como se presenta a continuación. En el Capítulo 2 se propone el modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias, estructurado por edades, y su análisis matemático. En el Capítulo 3 se describe la propuesta metodológica para estimar el momento de aplicación del plaguicida para el control del GBN. En esta propuesta de metodología se considera el ciclo vital del GBN, el efecto del plaguicida, las condiciones iniciales del modelo propuesto y el daño causado por la plaga; así como diferentes escenarios que serán empleados para valorar la sensibilidad de la estimación. Luego, en el Capítulo 4 se presentan los resultados de esta investigación, obtenidos a partir de explorar diferentes valores de parámetros asociados al ciclo vital

del GBN (que producen extinción y coexistencia), varios escenarios de control asociados al día de la aplicación del insecticida y distintas condiciones iniciales estimadas para el modelo. Por último, en el Capítulo 5 se discuten los resultados obtenidos y se plantean áreas de oportunidad para trabajos futuros.

## Capítulo 2

# Modelación de la dinámica poblacional del GBN

La plaga del GBN ha sido estudiada como se mencionó anteriormente por el impacto económico que tiene directamente con la cosecha. Una de las formas de poder atacar el problema es a través de modelos matemáticos que logren representar, mediante conceptos matemáticos, alguna problemática de lo que sucede en la práctica o realidad. Dicho lo anterior, en este capítulo se plantea un modelo matemático que describe la dinámica del GBN para el cual se detallan las etapas de su ciclo de vida. Una vez planteado el modelo, para su fundamentación matemática, se procede a hacer el análisis cualitativo del sistema. Los resultados que se demuestran en este apartado versan sobre la región positivamente invariante que se propone, puntos de equilibrio así como su estabilidad. Por último, para ejemplificar la dinámica de las poblaciones y verificar los resultados, se hacen simulaciones del modelo.

### 2.1. Modelo matemático

Anteriormente, se mencionó la importancia de la Biomatemática para el desarrollo de herramientas que nos permitan entender los mecanismos de las plagas. Una de ellas es utilizar modelos matemáticos para tratar de explicar un fenómeno natural, tales como la dinámica de las plagas. Es por lo anterior que se presenta un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias con compartimentos el cual está dividido por las etapas del ciclo de vida del GBN. El GBN sufre metamorfosis completa, es decir, que existen cuatro períodos en su desarrollo: Huevo, larva, pupa y adulto. Es importante aclarar que el control que se aplica para erradicar a la plaga solamente la elimina cuando el GBN está en el período de larva. Inclusive, una vez que la larva barrena la nuez y se encuentra en su interior dicho control ya no es efectivo. Por esta razón, la etapa de larva se divide en dos clases; una cuando la larva se encuentra afuera de la nuez y la otra cuando ya está adentro. Así,



las variables del modelo se denotan como  $E(t)$  para los huevos,  $L_O(t)$  las larvas afuera,  $L_I(t)$  larvas adentro,  $P(t)$  pupas y  $A(t)$  adultos o palomillas. De esta forma se procede a explicar como se desarrollan las diferentes clases del modelo.

De manera instintiva los adultos son capaces de detectar la mejor zona para ovipositar (Aguirre *et al.*, 1995), esto con el fin de asegurarse que las larvas podrán desarrollarse sin problemas; es decir, si existen demasiados huevos en los lugares de oviposición las hembras depositarán menos huevos por unidad de tiempo. Así, la población de huevos se regula dependiendo de la tasa de oviposición denotado por el parámetro  $b$  y la proporción dada por la cantidad de huevos entre su capacidad de carga que se denota por  $k_E$ . Después, la cantidad de huevos disminuye debido a que los huevos pasan a la clase de larvas y por otro lado existen huevos que no se desarrollan por completo. Se denotan estos parámetros como  $s_E$  y  $\mu_E$ . Por lo tanto, la dinámica de los huevos queda expresada de la siguiente manera:

$$\dot{E} = b \left( 1 - \frac{E}{k_E} \right) A - (s_E + \mu_E) E. \quad (2.1)$$

Anteriormente, se señaló la importancia de dividir en dos clases la etapa de larvas. Así, para la población de larvas afuera de la nuez, se tiene que esta crece debido al cambio de clase de los huevos, mientras que hay un decaimiento debido a que algunas larvas afuera de la nuez cambiarán de clase y otras morirán. Por lo anterior, denotamos las tasas de cambio y de muerte de esta población como  $s_{L_O}$  y  $\mu_{L_O}$ , respectivamente. De acuerdo a Hartfield (2009), en esta etapa el GBN está expuesto para que el control sea efectivo por lo que denotamos  $\nu(t)$  como la tasa de efectividad del control químico utilizado dependiente del tiempo. Teniendo en cuenta esto último, la dinámica de las larvas afuera de la nuez queda expresada de la siguiente manera:

$$\dot{L}_O = s_E E - (s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu(t)) L_O. \quad (2.2)$$

De manera similar, la población de larvas adentro de la nuez crece debido al cambio de clase de las larvas afuera, mientras que hay un decaimiento debido a que algunas larvas adentro de la nuez cambiarán a la etapa de pupas y otras morirán. Por lo anterior, denotamos las tasas de metamorfosis de larva a pupa y de muerte natural de esta población como  $s_{L_I}$  y  $\mu_{L_I}$ , respectivamente. Así, la dinámica de las larvas adentro de la nuez queda de la siguiente manera:

$$\dot{L}_I = s_{L_O} L_O - (s_{L_I} + \mu_{L_I}) L_I. \quad (2.3)$$

Una vez que las larvas se han alimentado lo suficiente, se da inicio a la etapa de pupa adentro de la nuez. La población de pupas incrementa por el cambio de etapa de las larvas que se alimentaron de las nueces, en tanto que disminuye debido a que algunas pupas se convertirán en adultos y otras que no lograrán desarrollarse. Por ende, denotamos las tasas de cambio y no desarrollo de esta población como  $s_P$  y  $\mu_P$ , respectivamente. De este modo, la dinámica de las pupas queda expresada de la siguiente manera:

$$\dot{P} = s_{L_I} L_I - (s_P + \mu_P) P. \quad (2.4)$$

Por último, la pupa se transforma en palomilla o adulto y esta población crece debido al cambio de clase de las pupas, mientras que disminuye debido a la muerte de los adultos. Esta tasa se denota como  $\mu_A$ . Resumiendo, la dinámica de los adultos queda expresada de la siguiente manera:

$$\dot{A} = s_P P - \mu_A A. \quad (2.5)$$

Empleando las ecuaciones (2.1)-(2.5) se construye el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= b \left( 1 - \frac{E}{k_E} \right) A - (s_E + \mu_E) E \\ \dot{L}_O &= s_E E - (s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu(t)) L_O \\ \dot{L}_I &= s_{L_O} L_O - (s_{L_I} + \mu_{L_I}) L_I \\ \dot{P} &= s_{L_I} L_I - (s_P + \mu_P) P \\ \dot{A} &= s_P P - \mu_A A \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2. Análisis cualitativo

Tras haber planteado el modelo se realiza el análisis cualitativo correspondiente. Anteriormente se señaló que la tasa de control  $\nu(t)$  es una función dependiente del tiempo. Para llevar a cabo el análisis cualitativo del sistema se supone que la tasa de control es constante; es decir, que la efectividad del control no decae conforme transcurre el tiempo. Esta suposición se plantea con el fin de dar un primer acercamiento sobre lo que sucede con el sistema. La anterior suposición puede representar lo que sucede en la práctica si lo que se investiga son intervalos cortos de tiempo o si el control nunca se deja

Tabla 2.1: Descripción de los parámetros del sistema (2.6).

Parámetros	Descripción
$b$	Tasa de oviposición de los adultos.
$k_E$	Capacidad de carga para los huevos.
$s_E$	Tasa de transferencia de huevos a larvas afuera de la nuez.
$\mu_E$	Tasa de mortalidad de los huevos.
$s_{LO}$	Tasa de transferencia de larvas de afuera a adentro de la nuez.
$\mu_{LO}$	Tasa de mortalidad de las larvas afuera de la nuez.
$\nu$	Tasa de efectividad del control.
$s_{LI}$	Tasa de transferencia de larvas adentro de la nuez a pupas.
$\mu_{LI}$	Tasa de mortalidad de las larvas adentro de la nuez.
$s_P$	Tasa de transferencia de pupas a adultos.
$\mu_P$	Tasa de mortalidad de las pupas.
$\mu_A$	Tasa de mortalidad de los adultos.

de aplicar. Primero, se garantiza que se tiene una región positivamente invariante. Después, se dan condiciones para asegurar la existencia de los puntos de equilibrio en la región propuesta. Por último, se investiga la estabilidad de los puntos de equilibrio encontrados.

### 2.2.1. Invarianza de la región

A causa de la naturaleza del problema solamente las soluciones positivas o iguales a cero tienen interpretación biológica. Con el fin de que el problema no presente inconsistencias, se debe garantizar que en la región de estudio las soluciones del sistema (2.6) no negativas, las cuales tienen interpretación biológica, permanezcan adentro de ésta.

Lo anterior se refiere a que dada la región, las soluciones que comiencen dentro de la región no salgan de ésta a través del tiempo. Por otro lado, se desea ver que la región también está bien delimitada, es decir, que nuestras soluciones no tienden a infinito. Por esto, se garantiza la existencia de valores máximos tales que las soluciones no los sobrepasan y así tener la región totalmente acotada. A manera de apoyo gráfico, se tiene la Figura 2.1. Con lo anterior mencionado, se propone el conjunto y se demuestra la invarianza del mismo bajo el flujo inducido por el sistema (2.6).

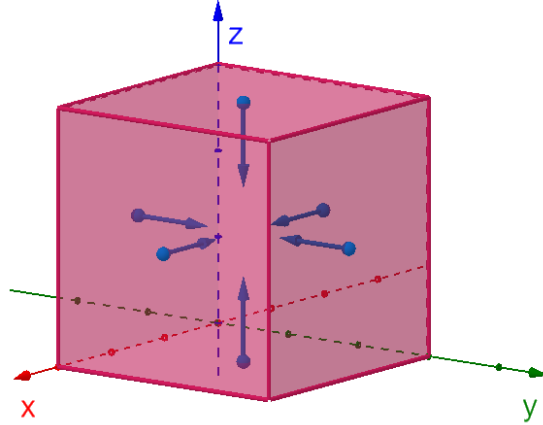


Figura 2.1: Esquema del comportamiento deseado del campo vectorial sobre los ejes y las caras de la región en  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposición 2.2.1.** *El conjunto*

$$\Omega = \{(E, L_O, L_I, P, A) \in \mathbb{R}^5 : 0 \leq E \leq E_{max}, 0 \leq L_O \leq L_{O_{max}}, \\ 0 \leq L_I \leq L_{I_{max}}, 0 \leq P \leq P_{max}, 0 \leq A \leq A_{max}\}.$$

Es una región positivamente invariante bajo el flujo inducido por el sistema (2.6).

Donde

$$\begin{aligned} E_{max} &= k_E, \\ L_{O_{max}} &= \frac{s_E k_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu}, \\ L_{I_{max}} &= \frac{s_{L_O} L_{O_{max}}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}}, \\ P_{max} &= \frac{s_{L_I} L_{I_{max}}}{s_P + \mu_P}, \\ A_{max} &= \frac{s_P P_{max}}{\mu_A}. \end{aligned}$$

**Demostación.** Primero se demuestra que en ausencia de huevos; es decir que  $E = 0$ , la componente sobre la cara del hipercubo con la coordenada

$E = 0$  del campo es positiva y entonces apunta al interior de la región. En efecto, recordando que los parámetros son positivos,

- Si  $E = 0$ , entonces

$$\dot{E} = bA \geq 0; \quad \forall A \in [0, A_{max}],$$

por lo tanto, cualquier solución tal que su condición inicial se encuentre sobre la cara del hipercubo con la coordenada  $E = 0$  no cruzará esa cara del hipercubo. Análogamente, se demuestra que en ausencia de las demás componentes, las componentes sobre sus ejes respectivos son positivas y entonces apuntan al interior de la región como se plantea a continuación:

- si  $L_O = 0$ , entonces

$$\dot{L}_O = s_E E \geq 0; \quad \forall E \in [0, E_{max}].$$

- Si  $L_I = 0$ , entonces

$$\dot{L}_I = s_{L_O} L_O \geq 0; \quad \forall L_O \in [0, L_{O_{max}}].$$

- Si  $P = 0$ , entonces

$$\dot{P} = S_{L_I} L_I \geq 0; \quad \forall L_I \in [0, L_{I_{max}}].$$

- Si  $A = 0$ , entonces

$$\dot{A} = s_P P \geq 0; \quad \forall P \in [0, P_{max}].$$

Con esto, se asegura que cualquier solución a través del tiempo se mantendrá en en la región positiva, para cualquier condición inicial dentro de la región  $\Omega$ . Ahora se demuestra que las soluciones no escapan hacia infinito. Primero, se demuestra que cuando los huevos están en su valor máximo en  $\Omega$ , las componentes del campo vectorial son negativas o iguales a cero y por lo tanto apuntan al interior de la región. En efecto, recordando que los parámetros son positivos.

- Si  $E = k_E$ , entonces

$$\dot{E} = -s_E k_E - \mu_E k_E < 0.$$

Por lo tanto, cualquier solución tal que su condición inicial se encuentre en el valor máximo  $E_{max}$  no cruzará esa cara del hipercubo ya que apunta al interior de la región. Análogamente, se demuestra que cuando las demás componentes se encuentran en su valor máximo, las componentes del campo sobre sus ejes respectivos son negativas y entonces apuntan al interior de la región como se plantea a continuación:

- si  $L_O = L_{O_{max}} = \frac{s_E k_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu}$ , entonces

$$\dot{L}_O = s_E E - s_E k_E = s_E (E - k_E) \leq 0; \quad \forall E \in [0, E_{max}].$$

- Si  $L_I = \frac{s_{L_O} L_{O_{max}}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}}$ , entonces

$$\dot{L}_I = s_{L_O} L_O - s_{L_O} L_{O_{max}} = s_{L_O} (L_O - L_{O_{max}}) \leq 0; \quad \forall L_O \in [0, L_{O_{max}}].$$

- Si  $P = \frac{s_{L_I} L_{I_{max}}}{s_P + \mu_P}$ , entonces

$$\dot{P} = s_{L_I} L_I - s_{L_I} L_{I_{max}} = s_{L_I} (L_I - L_{I_{max}}) \leq 0; \quad \forall L_I \in [0, L_{I_{max}}].$$

- Si  $A = \frac{s_P P_{max}}{\mu_A}$ , entonces

$$\dot{A} = s_P P - s_P P_{max} = s_P (P - P_{max}) \leq 0; \quad \forall P \in [0, P_{max}].$$

Se ha demostrado que el campo vectorial asociado al sistema (2.6) apunta al interior de la región  $\Omega$ . Por lo que se concluye que la región propuesta es positivamente invariante.

Q.E.D.

### 2.2.2. Puntos de equilibrio

Existen puntos específicos donde las poblaciones se mantienen constantes; es decir, que las poblaciones una vez que tengan esos valores se mantendrán así a través del tiempo. A estos puntos se les conoce como puntos de equilibrio. Se denomina punto de extinción a aquel punto de equilibrio en que no existe ninguna población. Mientras que, el punto de coexistencia es aquel punto de equilibrio en donde todas las variables son positivas; es decir, que todas las poblaciones conviven sin aumentar o disminuir. A continuación se dan condiciones suficientes para que los puntos de equilibrio existan dentro de la región  $\Omega$ .

**Proposición 2.2.2.** *El sistema (2.6) siempre posee un punto de extinción en  $\Omega$ , el cual es denotado por  $\chi_0^*$ . Por otro lado si  $r > 1$ , entonces existe también un punto de coexistencia en  $\Omega$ . Se denota el punto de coexistencia como:*

$$\chi^* = (E^*, L_O^*, L_I^*, P^*, A^*),$$

donde

$$\begin{aligned} E^* &= \beta(r - 1), \\ L_O^* &= \frac{s_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu} E^*, \\ L_I^* &= \frac{s_{L_O}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}} L_O^*, \\ P^* &= \frac{s_{L_I}}{s_P + \mu_P} L_I^*, \\ A^* &= \frac{s_P}{\mu_A} P^*, \\ r &= \frac{\alpha b}{s_E + \mu_E}, \\ \beta &= \frac{(s_E + \mu_E) k_E}{\alpha b}, \\ \alpha &= \left( \frac{s_P}{\mu_A} \right) \left( \frac{s_{L_I}}{s_P + \mu_P} \right) \left( \frac{s_{L_O}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}} \right) \left( \frac{s_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu} \right). \end{aligned}$$

**Demostración.** Primero, para tener un punto de equilibrio se necesita encontrar un punto tal que el campo vectorial asociado al sistema (2.6) se anule. Entonces, se igualan todas las componentes a cero. Después, se resuelve el sistema de ecuaciones. Por último, se ve cuales puntos de equilibrio encontrados están en la región  $\Omega$ . Se empieza igualando a cero,

- si  $\dot{A} = 0$ , entonces  $A = \frac{s_P}{\mu_A} P$ ,
- si  $\dot{P} = 0$ , entonces  $P = \frac{s_{L_I}}{s_P + \mu_P} L_I$ ,
- si  $\dot{L}_I = 0$ , entonces  $L_I = \frac{s_{L_O}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}} L_O$ ,
- si  $\dot{L}_O = 0$ , entonces  $L_O = \frac{s_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu} E$ ,
- si  $\dot{E} = 0$ , entonces

$$E \left( b \left( 1 - \frac{E}{k_E} \right) \alpha - s_E - \mu_E \right) = 0.$$

Donde

$$\alpha = \left( \frac{s_P}{\mu_A} \right) \left( \frac{s_{L_I}}{s_P + \mu_P} \right) \left( \frac{s_{L_O}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}} \right) \left( \frac{s_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu} \right).$$

Por un lado, si  $E = 0$ , entonces se tiene el punto de extinción

$$\chi_0^* = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Por otro lado, si  $E \neq 0$  entonces

$$\begin{aligned} E^* &= k_E - \frac{(s_E + \mu_E) k_E}{\alpha b} \\ &= \frac{(s_E + \mu_E) k_E}{\alpha b} \left( \frac{\alpha b}{s_E + \mu_E} - 1 \right) \\ &= \frac{(s_E + \mu_E) k_E}{\alpha b} (r - 1) \\ &= \beta (r - 1). \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} r &= \frac{\alpha b}{s_E + \mu_E}, \\ \beta &= \frac{(s_E + \mu_E) k_E}{\alpha b}. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $E^*$ , obtenemos

$$\begin{aligned} L_O^* &= \frac{s_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu} E^*, \\ L_I^* &= \frac{s_{L_O}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}} L_O^*, \\ P^* &= \frac{s_{L_I}}{s_P + \mu_P} L_I^*, \\ A^* &= \frac{s_P}{\mu_A} P^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de coexistencia es

$$\chi^* = (E^*, L_O^*, L_I^*, P^*, A^*).$$

Por último, se demuestra que este punto existe en la región  $\Omega$  y es diferente al punto de extinción cuando  $r > 1$ . En efecto,



- Si  $r > 1$ , entonces  $E^* = \beta(r - 1) > 0$  y recordando que los parámetros son positivos

$$E^* = k_E - \frac{(s_E + \mu_E) k_E}{\left(\frac{s_P}{\mu_A}\right) \left(\frac{s_{L_I}}{s_P + \mu_P}\right) \left(\frac{s_{L_O}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}}\right) \left(\frac{s_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu}\right) b} < k_E.$$

- Como  $0 < E^* < k_E$ , entonces

$$0 < L_O^* = \frac{s_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu} E^* < \frac{s_E k_E}{s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu} = L_{O_{max}}.$$

- Como  $0 < L_O^* < L_{O_{max}}$ , entonces

$$0 < L_I^* = \frac{s_{L_O}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}} L_O^* < \frac{s_{L_O}}{s_{L_I} + \mu_{L_I}} L_{O_{max}} = L_{I_{max}}.$$

- Como  $0 < L_I^* < L_{I_{max}}$ , entonces

$$0 < P^* = \frac{s_{L_I}}{s_P + \mu_P} L_I^* < \frac{s_{L_I}}{s_P + \mu_P} L_{I_{max}} = P_{max}.$$

- Como  $0 < P^* < P_{max}$ , entonces

$$0 < A^* = \frac{s_P}{\mu_A} P^* < \frac{s_P}{\mu_A} P_{max} = A_{max}.$$

Q.E.D.

### 2.2.3. Estabilidad Local

Tras garantizar la existencia de los puntos de equilibrio se procede a investigar que tipo de estabilidad poseen. Cuando se habla acerca de estabilidad de un punto de equilibrio, se puede diferenciar entre estabilidad o inestabilidad. Si un punto de equilibrio es estable entonces las soluciones se mantienen cerca del punto cuando el tiempo tienda a infinito. Más aún, si las soluciones se aproximan al punto a medida que el tiempo tiende a infinito, decimos que es asintóticamente estable. Por el contrario, si las soluciones se alejan del punto, entonces se dice que es inestable. En el Anexo A.1 se describen estas definiciones de manera formal. La importancia biológica de conocer el tipo de estabilidad radica en saber si las poblaciones llegan a coexistir o si inevitablemente llegan a extinguirse cuando transcurre el tiempo. Se tienen dos casos a investigar, cuando  $r > 1$  y cuando  $r < 1$ . Como se comprobó anteriormente, en la primera condición se tienen los puntos de extinción y coexistencia, por lo que el primer resultado está relacionado con la estabilidad del punto de extinción como se menciona a continuación.

**Proposición 2.2.3.** *El punto de extinción  $\chi_0^*$  es inestable siempre que  $r > 1$ .*

**Demostración.** Primero se calcula la matriz Jacobiana del sistema (2.6) en el punto de extinción  $\chi_0^*$ , por lo que se obtiene lo siguiente:

$$D_F(\chi_0^*) = \begin{pmatrix} -(s_E + \mu_E) & 0 & 0 & 0 & b \\ s_E & -(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{L_O} & -(s_{L_I} + \mu_{L_I}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{L_I} & -(s_P + \mu_P) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_P & -\mu_A \end{pmatrix},$$

calculando el polinomio característico de la matriz Jacobiana tenemos:

$$p(\lambda) = (s_E + \mu_E + \lambda)(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu + \lambda)(s_{L_I} + \mu_{L_I} + \lambda)(s_P + \mu_P + \lambda)(\mu_A + \lambda) - s_E s_{L_O} s_{L_I} s_P b.$$

Para que el punto  $\chi_0^*$  sea inestable, se necesita demostrar que el polinomio característico tenga por lo menos una raíz con parte real positiva. Para ver que lo anterior es cierto, se toman en cuenta los términos independientes para posteriormente utilizar la regla de los signos de Descartes. Así, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} T_{ind}(p(\lambda)) &= (s_E + \mu_E)(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_P + \mu_P)(\mu_A) \\ &\quad - s_E s_{L_O} s_{L_I} s_P b \\ &= (s_E + \mu_E)(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_P + \mu_P)(\mu_A) \\ &\quad \cdot \left( 1 - \frac{s_E s_{L_O} s_{L_I} s_P}{(s_E + \mu_E)(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_P + \mu_P)\mu_A} \right) \\ &= (s_E + \mu_E)(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_P + \mu_P)(\mu_A)(1 - r). \end{aligned}$$

Por hipótesis  $r > 1$  así se concluye que  $T_{ind}(p(\lambda)) < 1$ . Ya que los signos de los coeficientes del polinomio característico  $p(\lambda)$  son positivos excepto el término independiente, por la regla de los signos de Descartes se tiene una raíz positiva. Por lo tanto, el punto de extinción  $\chi_0^*$  cuando  $r > 1$  es inestable. Q.E.D.

Se hace énfasis en que la proposición anterior demuestra inestabilidad en lugar de estabilidad. Se quiere evidenciar el cambio de estabilidad según el valor del parámetro  $r$ . Cuando  $r > 1$ , el punto de extinción es inestable, como se acaba de demostrar. Por otro lado, cuando  $r < 1$  se demuestra más adelante que el punto de extinción ahora es globalmente asintóticamente estable.

A continuación se demuestra la estabilidad del punto de coexistencia cuando  $r > 1$ , el cual es localmente estable. Cuando se refiere a estabilidad local, se asegura que el punto es estable siempre que la condición inicial se encuentre en una vecindad suficientemente pequeña alrededor del punto de equilibrio. En la siguiente demostración se consideran las ideas presentadas en Koutou *et al.* (2018) con el fin de probar la estabilidad local del punto de coexistencia.

**Proposición 2.2.4.** *El punto de coexistencia  $\chi^*$  es localmente asintóticamente estable si  $r > 1$ .*

**Demostración.** Primero se calcula la matriz Jacobiana evaluada en  $\chi^*$ , por lo que se tiene la siguiente matriz

$$D_F(\chi^*) = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 & -e_1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{bA^*}{k_E} + (s_E + \mu_E), \\ b_1 &= (s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu), \\ c_1 &= (s_{L_I} + \mu_{L_I}), \\ d_1 &= (s_P + \mu_P), \\ e_1 &= \mu_A, \\ \alpha_1 &= s_E, \\ \beta_1 &= b \left( 1 - \frac{E^*}{k_E} \right), \\ \gamma_1 &= s_{L_O}, \\ \delta_1 &= s_{L_I}, \\ \epsilon_1 &= s_P. \end{aligned}$$

Nótese que  $D_F(\chi^*)$  es una matriz Metzler ya que todas sus entradas son mayores o iguales a cero excepto la diagonal. Véase el Anexo A.2 para mayores detalles sobre matrices Metzler. La matriz Jacobiana puede ser escrita de la

siguiente manera en forma de suma de dos matrices para verificar que es una descomposición regular de  $D_F(\chi^*)$

$$D_F(\chi^*) = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= M + N.$$

Donde M y N son las matrices correspondientes. Para verificar que se trata de una descomposición regular, se necesita comprobar que N es una matriz no negativa y M es una matriz Metzler estable.

- Primero se debe ver que N es una matriz no negativa, es decir que todas sus entradas son positivas o iguales a cero. En efecto, ya que  $\alpha_1, \gamma_1, \delta_1, \epsilon_1 > 0$  y  $\beta_1 \geq 0$  siempre que  $E^* \leq k_E$ .
- Después M tiene que ser una matriz Metzler estable, es decir que M es una matriz Metzler con la parte real de las raíces del polinomio característico negativas. En efecto, ya que M se trata de una matriz diagonal entonces las raíces de su polinomio característico son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -a_1, \\ \lambda_2 &= -b_1, \\ \lambda_3 &= -c_1, \\ \lambda_4 &= -d_1, \\ \lambda_5 &= -e_1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
-NM^{-1} &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1}{\epsilon_1} \\ \frac{\alpha_1}{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_1}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta_1}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\epsilon_1}{d_1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \epsilon_1}{a_1 e_1 b_1 c_1 d_1}.$$

De aquí

$$\rho(-NM^{-1}) = \sqrt[5]{\frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \epsilon_1}{a_1 e_1 b_1 c_1 d_1}}.$$

Ahora veamos que sucede con el anterior término dentro de la raíz

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \epsilon_1}{a_1 e_1 b_1 c_1 d_1} &= \frac{s_E s_{L_O} s_{L_I} s_P b \left(1 - \frac{E^*}{k_E}\right)}{\left(\frac{bA^*}{k_E} + (s_E + \mu_E)\right) (s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_P + \mu_P)\mu_A} \\
&= \frac{\alpha b \left(1 - \frac{E^*}{k_E}\right)}{\left(\frac{bA^*}{k_E} + (s_E + \mu_E)\right)} = \frac{\alpha b \frac{s_E + \mu_E}{\alpha b}}{(s_E + \mu_E)r} = \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ya que  $r > 1$ , se observa que  $\rho(-NM^{-1}) < 1$ . Para concluir la demostración, como  $\rho(-NM^{-1}) < 1$  y  $D_F(\chi^*) = M + N$  es una descomposición regular de  $D_F(\chi^*)$  entonces  $D_F(\chi^*)$  es una matriz Metzler estable. Como  $D_F(\chi^*)$  es una matriz Metzler estable, entonces la parte real de las raíces de su polinomio característico son negativas. Por lo tanto, se concluye

que el punto es localmente asintóticamente estable. Véase el Anexo A.2 para mayores detalles sobre los resultados utilizados aquí de las matrices Metzler. Q.E.D.

#### 2.2.4. Estabilidad Global

Tras haber probado la estabilidad local se procede a demostrar un tipo de estabilidad más fuerte. En este tipo de estabilidad no se necesita que la condición inicial se encuentre en una vecindad suficientemente pequeña, ahora la condición inicial puede estar en cualquier parte de la región  $\Omega$  y aún así la solución converge al punto de equilibrio. Cuando  $r < 1$  el único punto de equilibrio que existe en la región  $\Omega$  es el punto de extinción. Se demuestra que este punto es globalmente asintóticamente estable empleando el teorema de Lyapunov-LaSalle. Véase el Anexo A.1 para mayores detalles sobre este resultado.

**Teorema 2.2.5.** *El punto de extinción  $\chi_0^*$  es globalmente asintóticamente estable si  $r < 1$  en  $\Omega$ .*

**Demostración.** Para demostrar la estabilidad global haremos uso de una función de Lyapunov. La función de Lyapunov propuesta es una función  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$V(E, L_O, L_I, P, A) = a_1 E + a_2 L_O + a_3 L_I + a_4 P + a_5 A, \quad (2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)\mu_A}{b s_P s_{L_O} s_{L_I}}, \\ a_3 &= \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)}{s_{L_O}}, \\ a_4 &= \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})}{s_{L_O} s_{L_I}}, \\ a_5 &= \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)}{s_P s_{L_O} s_{L_I}}. \end{aligned}$$

Ahora, derivando la función de Lyapunov dada en (2.7) se obtiene:

$$\dot{V}(E, L_O, L_I, P, A) = a_1 \dot{E} + a_2 \dot{L}_O + a_3 \dot{L}_I + a_4 \dot{P} + a_5 \dot{A}.$$

Sustituyendo los valores de  $a_1, a_3, a_4, a_5$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(E, L_O, L_I, P, A) &= \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)\mu_A}{b s_P s_{L_O} s_{L_I}} \right) \dot{E} \\
&+ a_2 \dot{L}_O + \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)}{s_{L_O}} \right) \dot{L}_I + \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})}{s_{L_O} s_{L_I}} \right) \dot{P} \\
&+ \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)}{s_P s_{L_O} s_{L_I}} \right) \dot{A} \\
&= \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)\mu_A}{b s_P s_{L_O} s_{L_I}} \right) \\
&\cdot \left( b \left( 1 - \frac{E}{k_E} \right) A - (s_E + \mu_E) E \right) \\
&+ a_2 (s_E E - (s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu) L_O) \\
&+ \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)}{s_{L_O}} \right) (s_{L_O} L_O - (s_{L_I} + \mu_{L_I}) L_I) \\
&+ \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})}{s_{L_O} s_{L_I}} \right) (s_{L_I} L_I - (s_P + \mu_P) P) \\
&+ \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)}{s_P s_{L_O} s_{L_I}} \right) (s_P P - \mu_A A) \\
&= \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)\mu_A}{s_P s_{L_O} s_{L_I}} \left( 1 - \frac{E}{k_E} \right) A \\
&- \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)\mu_A (s_E + \mu_E)}{b s_P s_{L_O} s_{L_I}} E + a_2 s_E E \\
&- a_2 (s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu) L_O + a_2 (s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu) L_O \\
&- \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})}{s_{L_O}} L_I + \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})}{s_{L_O}} L_I \\
&- \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_P + \mu_P)}{s_{L_O} s_{L_I}} P \\
&+ \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)}{s_{L_O} s_{L_I}} P \\
&- \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)\mu_A}{s_P s_{L_O} s_{L_I}} A \\
&= a_2 s_E E - \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_p + \mu_P)\mu_A}{k_E s_P s_{L_O} s_{L_I}} E A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_P + \mu_P)\mu_A(s_E + \mu_E)}{b_{SP} s_{L_O} s_{L_I}} E \\
& \leq a_2 s_E E - \left( \frac{a_2(s_{L_O} + \mu_{L_O} + \nu)(s_{L_I} + \mu_{L_I})(s_P + \mu_P)\mu_A(s_E + \mu_E)}{b_{SP} s_{L_O} s_{L_I}} \right) E \\
& = a_2 s_E E - \frac{a_2 s_E E}{r} \\
& = a_2 s_E E \left( 1 - \frac{1}{r} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\dot{V} < 0$  ya que se supone que  $r < 1$ . Como el punto de extinción  $\chi_0^*$  es el único punto que está en  $\Omega$  y que hace que  $\dot{V}(\chi_0^*) = 0$ , entonces se cumplen las hipótesis del principio de invarianza de Lyapunov-LaSalle por lo que podemos concluir que el punto de extinción es globalmente asintóticamente estable.

Q.E.D.

## 2.3. Simulaciones

Después de que se ha estudiado el modelo de manera cualitativa se busca ejemplificar los resultados de estabilidad obtenidos. Para esto, se realizan varias simulaciones del sistema (2.6). Se toman diferentes parámetros para comprobar la existencia de los puntos de equilibrio y su estabilidad. Anteriormente, se demostró que dependiendo del valor de  $r$ , se tienen diferentes puntos de equilibrio y estabilidad. En los primeros dos escenarios se busca que los parámetros seleccionados sean tales que exista solamente el punto de extinción; es decir que  $r < 1$ . Mientras que para los últimos dos escenarios se busca que  $r > 1$  para que existan el punto de extinción y el punto de coexistencia. A continuación se presentan las tablas con los parámetros seleccionados, se indica después el valor de  $r$  así como las correspondientes gráficas para cada una de las poblaciones.

### 2.3.1. Escenarios $r < 1$

A continuación se presentan dos escenarios en los cuales debido a la selección de los parámetros, el valor de  $r$  no sobrepasa el número uno. Cuando  $r < 1$  se tiene que las poblaciones se extinguen independientemente de la condición inicial elegida dentro de la región invariante. Las condiciones iniciales para el primer y segundo escenario son:  $E(0) = 0, L_O(0) = 0, L_I(0) = 0, P(0) = 35, A(0) = 0$ . Los parámetros para el primer y segundo escenario se representan en la Tabla 2.2.



Tabla 2.2: Valores de los parámetros para el modelo de la dinámica poblacional del GBN con  $r < 1$ .

Parámetros	Primer escenario	Segundo escenario
$b$	1	1
$k_E$	5	5
$s_E$	1	0.5
$\mu_E$	0.1	0.4
$s_{L_O}$	0.3	0.5
$\mu_{L_O}$	0.1	0.4
$\nu$	0.4	0.4
$s_{L_I}$	0.5	0.5
$\mu_{L_I}$	0.1	0.4
$s_P$	0.7	0.5
$\mu_P$	0.1	0.4
$\mu_A$	0.4	0.4
$r$	0.62	0.16

Con los parámetros anteriores el valor de  $r$  es  $r = 0.62$  para el primer escenario y  $r = 0.16$  para el segundo escenario. Por el hecho de que  $r < 1$ , solamente se tiene el punto de extinción  $\chi_0^*$ . En la Figura 2.2 se puede apreciar que en los dos escenarios cualquier etapa del GBN tiende a extinguirse conforme transcurre el tiempo. Cabe destacar que al ser el valor  $r$  más pequeño en el segundo escenario las poblaciones se extinguen con mayor rapidez. En la Figura 2.2 se grafican las dinámicas poblacionales del GBN. Además, en la leyenda se puede apreciar el color asignado para cada clase.

### 2.3.2. Escenarios $r > 1$

De manera similar, en los siguientes escenarios se busca que el valor de  $r$  sobrepase el número uno para se tengan el punto de extinción y el de coexistencia. La condición inicial que se propone es la misma que en los primeros escenarios. Como se mencionó anteriormente, una de la principal diferencia con los primeros escenarios es la aparición del punto de coexistencia. Cada población ahora se estabiliza en un valor dependiendo de la selección de los parámetros. Los parámetros seleccionados para estos escenarios se muestran en la Tabla 2.3. A continuación se especifican los valores de  $r$  y el punto de coexistencia para cada escenario.

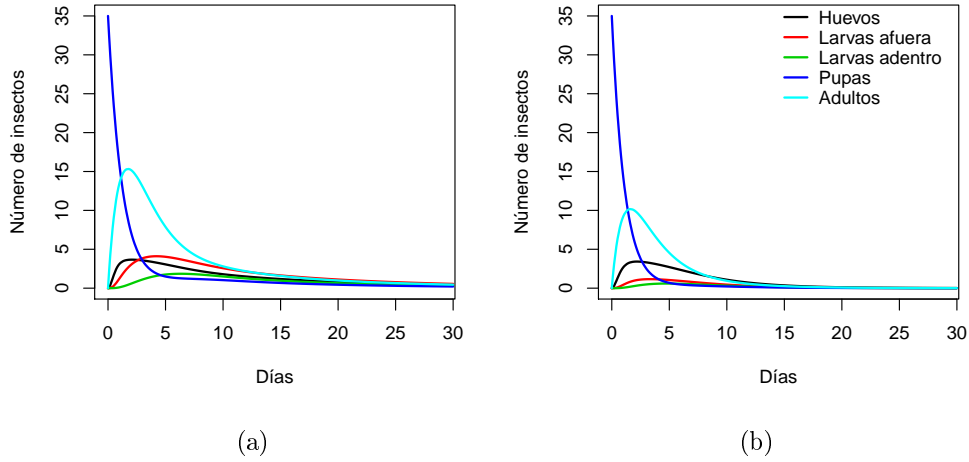


Figura 2.2: Extinción de huevos, larvas afuera, larvas adentro, pupas y adultos con  $r < 1$ . Para (a) se tiene  $r = 0.62$ . Para (b) se tiene  $r = 0.16$ .

Los valores que arrojan los parámetros seleccionados para el primer escenario son los siguientes. El valor de  $r$  es  $r = 11.82$  con el siguiente punto de coexistencia:

$$(E^*, L_O^*, L_I^*, P^*, A^*) = (12.81, 21.28, 31.85, 23.33, 30.33).$$

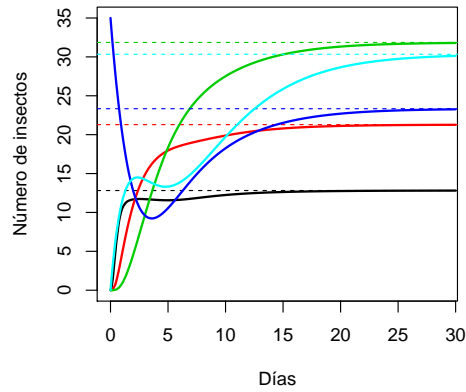
Mientras que, para el segundo escenario, el valor de  $r$  es  $r = 5.93$  y el punto de coexistencia ahora es:

$$(E^*, L_O^*, L_I^*, P^*, A^*) = (11.64, 9.13, 6.84, 9.77, 7.82).$$

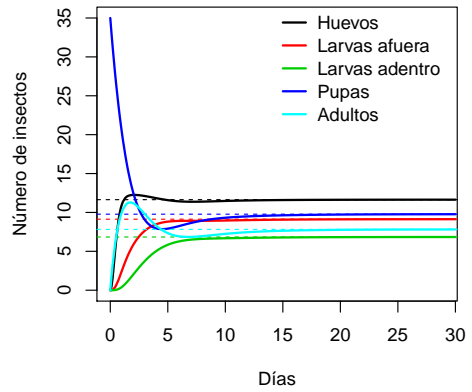
En la Figura 2.3 se grafican las dinámicas poblacionales del GBN para su respectivo escenario. En la leyenda se puede apreciar el color asignado para cada clase. El punto de coexistencia se representa en la Figura 2.3 con las líneas punteadas y con el color correspondiente a su población. Cabe destacar que al ser el valor  $r$  más grande en el primer escenario que en el segundo, el valor del equilibrio para cada población también disminuye.

Tabla 2.3: Valores de los parámetros para el modelo de la dinámica poblacional del GBN con  $r > 1$ .

Parámetros	Primer escenario	Segundo escenario
$b$	5	5
$k_E$	14	14
$s_E$	1	0.52
$\mu_E$	0.001	0.0455
$s_{L_O}$	0.6	0.585
$\mu_{L_O}$	0.001	0.013
$\nu$	0.001	0.065
$s_{L_I}$	0.4	0.78
$\mu_{L_I}$	0.001	0.00065
$s_P$	0.52	0.52
$\mu_P$	0.026	0.026
$\mu_A$	0.4	0.65
$r$	11.82	5.93



(a)



(b)

Figura 2.3: Coexistencia de huevos, larvas afuera, larvas adentro, pupas y adultos con  $r > 1$ . Para (a) se tiene  $r = 11.82$ . Para (b) se tiene  $r = 5.93$ .

## Capítulo 3

# Metodología para la estimación del tiempo óptimo en la aplicación del control del GBN

### 3.1. Introducción

En este capítulo se describe la propuesta metodológica para estimar el momento de aplicación del plaguicida para el control del GBN, que permite asegurar un contacto óptimo entre el insecticida y la plaga y con esto disminuir la pérdida en la cosecha de la nuez pecanera a causa del GBN. Esta propuesta tiene como objetivo cuantificar el daño que produce la plaga del GBN durante un período de tiempo, en términos de la cantidad de larvas que logran penetrar las nueces durante este período, considerando la dinámica poblacional del GBN representada por el modelo descrito en el capítulo anterior; así como diferentes momentos o tiempos de aplicación del plaguicida. Cabe mencionar que el tiempo de aplicación del plaguicida y la duración de su efecto están caracterizados por la función de control involucrada en el modelo propuesto en el capítulo anterior.

Para implementar esta propuesta de metodología de estimación del tiempo óptimo de aplicación del control se requiere de la especificación de los parámetros del modelo de la dinámica poblacional, la función de control y sus condiciones iniciales. Así, en este capítulo se hace una propuesta de cómo atender estos aspectos desde una perspectiva práctica y científica.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la Sección 3.2 se especifican los parámetros del modelo con base en el ciclo vital del GBN. En la Sección 3.3 se describe, propone e ilustra la función de control, considerando cuatro posibles escenarios de esta función con el objetivo de valorar la sensibilidad de los resultados del estudio con respecto a estos escenarios. En la Sección 3.4 se especifican las condiciones iniciales del modelo de la dinámica poblacional, excepto para la etapa de las pupas del GBN el cual es tratado de forma especial ya que se propone una forma de estimar el número de pupas al inicio del período bajo el estudio. Dicha propuesta considera un

modelo *ad hoc*, datos de captura de los adultos del GBN a través de trampas con feromonas y el enfoque de inferencia llamado verosimilitud perfil. En la Sección 3.5 se propone la manera de cuantificar el daño del GBN en términos de las larvas que logran penetrar las nueces. Por último ya especificados los parámetros del modelo, la función de control y las condiciones iniciales, en la Sección 3.6 se expone la metodología para estimar el tiempo óptimo de la aplicación del control en función del daño provocado por la plaga del GBN.

### 3.2. Especificación de parámetros con base en el ciclo vital del GBN

Como se explicó anteriormente, el primer aspecto a especificar son los parámetros del modelo de la dinámica poblacional del GBN. Estos parámetros están relacionados con el ciclo vital del GBN. Así, para determinar los parámetros del modelo, en esta sección se describe una forma de relacionar dichos parámetros con características y tiempos del ciclo vital del GBN. Para implementar esta estrategia, tales características y tiempos de proceso vital fueron determinadas con base en datos extraídos de referencias bibliográficas, para cada etapa biológica del GBN. Posteriormente, se especifican diferentes conjuntos de parámetros con el fin de generar escenarios que permitan valorar los resultados con respecto a cambios en estos parámetros.

En la Tabla 3.1 se muestran las características y tiempos del ciclo vital del GBN con sus respectivas referencias bibliográficas.

Tabla 3.1: Características y tiempos del ciclo vital del GBN.

Descripción	Intervalo	Fuentes
Número de huevos	50-100 Huevos	K. y R. (2005) *
Intervalo de tiempo en la etapa de huevo	2-5 días	C-M. <i>et al.</i> (2012) **
Intervalo de tiempo de la larva (afuera)	2-3 días	K. y R. (2019) ***
Intervalo de tiempo de la larva (adentro)	20-25 días	C-M. <i>et al.</i> (2012)
Vida media de las pupas	9-14 días	K. y R. (2005)
Vida media de los adultos	5-8 días	K. y R. (2005)
Porcentaje de palomillas hembra	50 %	R. (1981) ****

\* Knutson y Ree (2005)

\*\* Corella-Madueno *et al.* (2012)

\*\*\* Knutson y Ree (2019)

\*\*\*\* Ring (1981)

Una vez que se tienen determinados las características y tiempos del ciclo vital del GBN se procede a describir la forma en la que se utilizarán para especificar los parámetros del modelo. Nótese que en dicho modelo se diferencian dos clases de parámetros, las tasas de transferencia de una clase a otra denotados por  $s$  y las tasas de mortalidad natural de cada clase denotados por  $\mu$ . Por otro lado, también se tiene un parámetro que indica la tasa de oviposición del adulto del GBN y la capacidad de carga de los huevos.

Para los parámetros que versan sobre la tasa de transferencia de una etapa a otra, se escogen los inversos de los días en el intervalo que necesita cada etapa para desarrollarse. Mientras que, para las tasas de mortalidad se considera lo siguiente. Los huevos y las pupas tienen un máximo de días para su desarrollo, una vez que se sobrepasan estos días y siguen en su respectiva etapa se considera que ya no lograron desarrollarse. Por otro lado, cuando las larvas se alimentan son susceptibles a morir por enemigos parasitoides (Bilising, 1927). Lo anterior se traduce a que la larva tarda más en cambiar de clase que en morir, mientras que los huevos y las pupas tienen un mayor margen para sobrevivir. Para la mortalidad del adulto se conoce su intervalo de vida y se toma en cuenta el inverso del valor mínimo en su intervalo.

Para la tasa de oviposición, se necesita calcular el número de huevos que puede ovipositar una hembra multiplicado por el porcentaje de hembras entre el número de días en que se desarrolla el adulto. Por último, hasta donde conocemos, para el parámetro de la capacidad de carga de los huevos no se tiene documentado en la literatura un valor o un intervalo específico. Por esto, se escoge un valor que parezca apropiado con lo que sucede en la práctica.

En el Capítulo 2, se detalló el efecto que produce en la dinámica poblacional del GBN especificar diferentes valores para los parámetros del modelo. Con el fin de reconocer lo anterior, se definió el parámetro  $r$  el cual garantiza la extinción del GBN si el parámetro es menor que 1 y coexistencia si es mayor que 1. A continuación, se proponen los siguientes casos según el valor del parámetro  $r$ .

#### **Caso $r < 1$**

Para este trabajo, se propone un caso con los parámetros especificados de tal manera que se garantiza la extinción de la plaga del GBN. Aunque la plaga tiende a extinguirse conforme transcurre el tiempo, el intervalo de tiempo en el que la plaga sobrevive puede llegar a durar un tiempo considerable. Por esto, es importante aplicar algún control con el fin de minimizar el daño

que la plaga ocasiona en ese intervalo de tiempo. Así, en la Tabla 3.2 se especifican los parámetros del modelo de la dinámica poblacional del GBN, sus valores y el valor del parámetro  $r$  obtenido.

Tabla 3.2: Valores de los parámetros para el modelo de la dinámica poblacional del GBN con  $r < 1$ .

Parámetros	Caso 1
$b$	5
$s_E$	1/3.5
$s_{LO}$	1/2.5
$s_{LI}$	1/22.5
$s_P$	1/11.5
$\mu_A$	1/5
$k_E$	10000
$\mu_E$	1/5
$\mu_{LO}$	1/3
$\mu_{LI}$	1/4.85
$\mu_P$	1/14
$r$	0.76

### Caso $r > 1$

Por otro lado, con el fin de valorar la sensibilidad de los resultados cuando se presenta coexistencia, se proponen tres casos diferentes. Es decir, tres conjuntos de parámetros que garantizan la coexistencia de la plaga del GBN. Aunque teóricamente la plaga del GBN no se extingue es importante mantener controlada a la plaga para minimizar el daño que ocasiona. Así, en la Tabla 3.3 se especifican los parámetros del modelo de la dinámica poblacional del GBN, sus valores y el valor del parámetro  $r$  correspondiente a cada escenario.

Tabla 3.3: Valores de los parámetros para el modelo de la dinámica poblacional del GBN con  $r > 1$ .

Parámetros	Caso 1	Caso 2	Caso 3
$b$	5	10	8.5
$s_E$	1/2	1/3.5	1/2
$s_{L_O}$	1/2	1/2.5	1/2
$s_{L_I}$	1/25	1/22.5	1/25
$s_P$	1/9	1/11.5	1/9
$\mu_A$	1/5	1/5	1/5
$k_E$	10000	10000	10000
$\mu_E$	1/5	1/5	1/3.5
$\mu_{L_O}$	1/3	1/3	1/2.5
$\mu_{L_I}$	1/6.25	1/4.85	1/6.25
$\mu_P$	1/14	1/14	1/11.5
$r$	1.30	1.56	1.68

### 3.3. Especificación de la función de control

En el modelo de la dinámica poblacional del GBN existe una condición que no depende del ciclo vital del GBN: el control que se aplica a la plaga. Como se mencionó en la introducción de este capítulo, el tiempo de aplicación del plaguicida y la duración de su efecto están caracterizados por la función de control. Así, para determinar la función de control del modelo, en esta sección se describe una forma de relacionar la función propuesta con el momento en el que se lleva a cabo la fumigación, el decaimiento de la efectividad del insecticida, la efectividad inicial y su duración. Para lograr esto, se propone una función general de control con diferentes parámetros que estén relacionados con el tiempo de aplicación, duración, efectividad inicial y decaimiento. Luego, especificando algunos parámetros para esta familia de funciones de control, se proponen cuatro funciones de control específicas, las cuales serán descritas y explicadas a detalle.

En general, los controles químicos o plaguicidas son una buena opción para exterminar plagas. Una característica de los plaguicidas es que, conforme transcurre el tiempo, la efectividad con que erradican a la plaga disminuye. Hornsby *et al.* (1995) exponen que, como una primera aproximación, los plaguicidas exhiben un decaimiento exponencial. Adicionalmente, cada plaguicida tiene un tiempo de vida útil. Una vez que los días en que se considera útil se cumplen, el plaguicida ya no elimina a la plaga.



Tomando en cuenta las características generales de los plaguicidas, descritas en el párrafo anterior, aquí se propone la siguiente función de control  $\nu : [0, \infty) \rightarrow [0, k]$  tal que

$$\nu(t; a) = \begin{cases} k \exp(-\frac{t-a}{d/c}) & ; a \leq t \leq a + d, \\ 0 & ; \text{otro caso,} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde

- $a$  : día de inicio del control,
- $k$  : constante de efectividad inicial,
- $d$  : duración del control en días,
- $c$  : constante entera de decaimiento.

Estos parámetros hacen que la función de control cambie dependiendo del valor que tomen ellos. Por ejemplo, cuando el día de inicio del control (parámetro  $a$ ) cambia, entonces la función se traslada hacia la derecha o izquierda conservando la forma que tiene; es decir, que decae de la misma manera. Mientras que, la constante de efectividad inicial (parámetro  $k$ ) traslada el inicio de la función exponencial hacia arriba o hacia abajo. Por otro lado, el parámetro de la duración del control (parámetro  $d$ ) restringe los días en que la función de control mantiene su forma exponencial. Por último, la constante de decaimiento (parámetro  $c$ ) controla la rapidez con que se disipa la efectividad del control.

Las unidades de la función general del control, presentadas en el párrafo anterior, están dadas por el inverso de las unidades de tiempo. Nótese que, cuando la función de control se evalúa en el parámetro  $a$  resulta únicamente la constante de efectividad inicial. Para poder seleccionar el valor de esta constante, se toma en cuenta que la tasa con que se elimina la plaga el primer instante de la aplicación del plaguicida tiene que ser mayor o igual que la tasa natural de muerte cuando la larva se encuentra expuesta al plaguicida.

En el mercado, existen una gran variedad de plaguicidas con diferentes características para erradicar a la plaga del GBN. Para esta tesis, se propone fijar la duración del efecto del plaguicida en 16 días. Para la constante de efectividad inicial, en este trabajo se especifican dos valores,  $k = 1/2$  y  $k = 10$ , con el fin de valorar la sensibilidad de los resultados. Por otro lado, para elegir la constante de decaimiento se toma en consideración lo

siguiente. Si se escoge un valor muy cercano a la duración del control, este decae muy rápido y se disipa casi toda su efectividad en los primeros días de la aplicación. Mientras que, si el valor de la constante se encuentra entre 1 y 4 la efectividad del control disminuye moderadamente hasta el último día de duración. Expuesto lo anterior, se especifican dos valores para el parámetro de decaimiento de la función de control,  $c = 1$  y  $c = 4$ , con el fin de valorar la sensibilidad de los resultados de este trabajo.

Finalmente, en la Tabla 3.4 se muestran las cuatro funciones de control consideradas para este estudio. Nótese que el parámetro  $a$ , el cual determina el inicio del control (día de inicio de la fumigación), será usado para generar escenarios correspondientes a diferentes fechas de aplicación del control. En la Figura 3.1 se grafican estas funciones de control, considerando  $a = 0$ .

Tabla 3.4: Valores de los parámetros  $d$ ,  $c$  y  $k$  para la función de control, dada en (3.1), con  $a \geq 0$ .

<b>Parámetros</b>	$\nu_1(t; a)$	$\nu_2(t; a)$	$\nu_3(t; a)$	$\nu_4(t; a)$
$d$	16	16	16	16
$k$	1/2	10	1/2	10
$c$	1	1	4	4

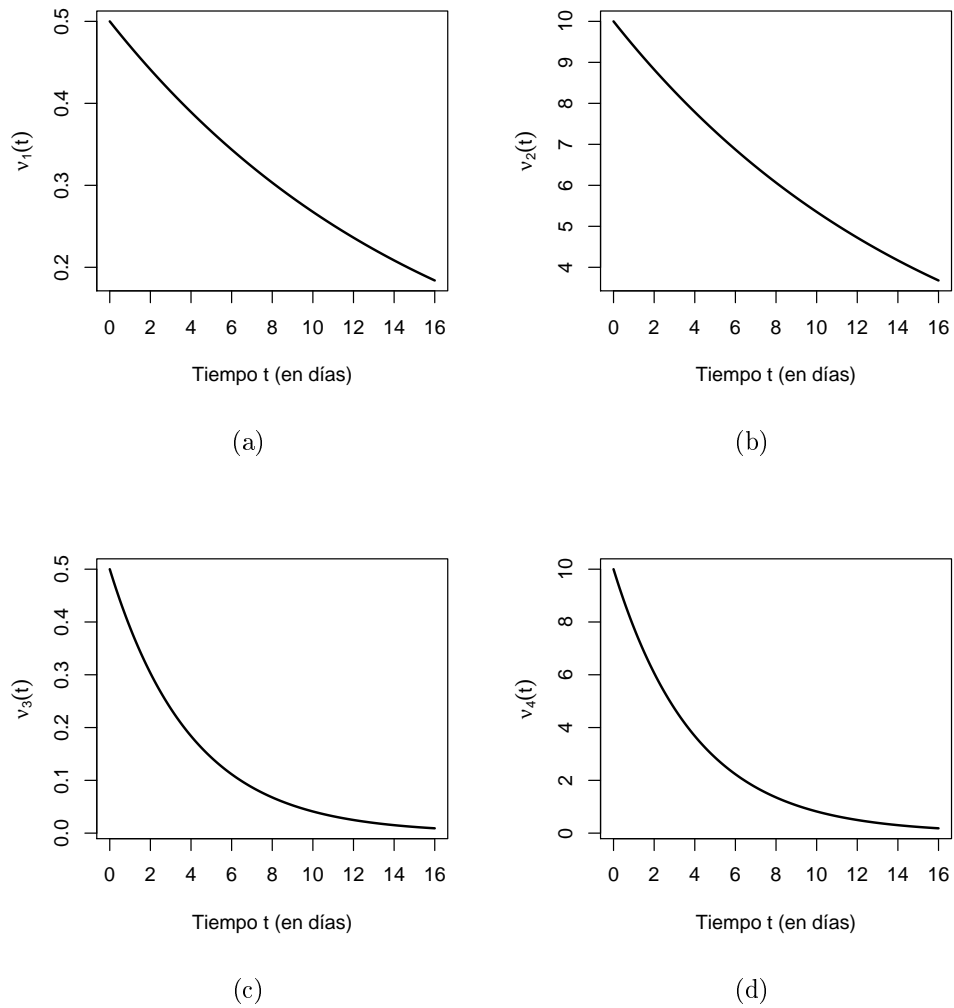


Figura 3.1: Representación gráfica de las funciones de control dadas en la Tabla 3.4, con  $a = 0$ : (a)  $d = 16$ ,  $k = 1/2$ ,  $c = 1$ ; (b)  $d = 16$ ,  $k = 10$ ,  $c = 1$ ; (c)  $d = 16$ ,  $k = 1/2$ ,  $c = 4$ ; (d)  $d = 16$ ,  $k = 10$ ,  $c = 4$ .

### 3.4. Especificación de las condiciones iniciales

En esta sección se describe una propuesta para especificar las condiciones iniciales para el modelo de la dinámica poblacional del GBN. El desarrollo

de esta propuesta comienza con la especificación del inicio del período de estudio. Luego, con base en suposiciones biológicas del ciclo vital del GBN, se establecen la cantidad inicial de huevos, larvas y adultos. Posteriormente, se propone un modelo estadístico para hacer inferencia sobre el número de pupas al inicio del período de estudio. Esta inferencia se hace con base en datos reales de capturas de palomillas del GBN, y será empleada para especificar la cantidad inicial de pupas. Más aún, estas inferencias servirán para generar escenarios que permitan valorar los resultados de este trabajo con respecto a cambios en la condición inicial de pupas de la generación invernante.

Para este trabajo, el inicio del período de estudio se encuentra en la generación invernante del GBN; la cual se detalló en el Capítulo 1. En esta generación, las larvas despiertan y después de alimentarse, proceden a barrenar el brote para convertirse en pupas. En el momento cuando todas las larvas se han convertido en pupa, se considera el inicio del período de estudio. Dicho lo anterior, en este instante no se encuentran presentes huevos, larvas o adultos del GBN; es decir, la condición inicial para estas etapas es cero. Así, hace falta solamente conocer el número de pupas que proviene de la generación invernante. A continuación, se propone un modelo estadístico que permitirá estimar, con base en datos reales de capturas de adultos (palomillas del GBN) a través de trampas con feromonas, la cantidad de pupas que provienen de la generación invernante. Dichas estimaciones serán usadas para especificar varias condiciones iniciales (de pupas) para el modelo de la dinámica poblacional del GBN, de tal manera que se pueda valorar el efecto que producen estos cambios en la estimación del tiempo óptimo para la aplicación del control.

#### 3.4.1. Propuesta del modelo para estimar la población de pupas

Las pupas que se encuentran dentro del brote del nogal esperan el momento para transformarse en el adulto del GBN, que emerge para, entre otras cosas, aparearse y ovipositar huevos. En el control de plagas es fundamental identificar este momento para llevar a cabo, días después, acciones de fumigación. Los profesionales de control de plagas suelen usar trampas atrayentes con feromonas sexuales para identificar el momento en el que emergen las palomillas. Cabe mencionar que dichas trampas capturan a la palomilla macho del GBN. Además, la frecuencia de capturas de palomillas son usadas como indicador de la presencia del insecto y el cambio poblacional de pupa a adulto. A continuación, se presenta un modelo estadístico para describir la frecuencia semanal de salidas de adulto del GBN, en el cual se considera como uno de sus parámetros desconocidos el tamaño poblacional

de pupas. Nótese que este parámetro es de interés para este trabajo ya que es la condición inicial del modelo de la dinámica poblacional del GBN.

Sea  $M$  el tamaño poblacional de pupas en el período de inicio y  $N$  el tamaño poblacional de pupas macho en el mismo período. Según Ring (1981) la mitad de la población invernante son machos; así suponemos que  $M = qN$ , donde  $q = 2$ . Con el fin de simplificar el proceso de inferencia sobre  $M$ , primero se hará estimación sobre  $N$  usando el enfoque de verosimilitud. Posteriormente, por la propiedad de invarianza de la función de verosimilitud bajo reparametrizaciones uno a uno, se estimará  $M$ .

Supóngase que se tiene una población  $N$  de pupas macho, de las cuales emergen adultos del GBN. Del total de estos adultos, una parte será atrapada por las trampas con feromonas mientras que los adultos de la parte restante quedarán libres; es decir, la cantidad de adultos atrapados más la cantidad de adultos libres es igual la población inicial  $N$  de pupas macho. Así, supóngase que  $X_i$  representa el número de adultos capturados en la  $i$ -ésima semana y  $p_i$  es la probabilidad de que un adulto sea capturado en dicha semana, con  $i = 1, 2, \dots, k$ , donde  $k$  es el número de semanas que estuvieron colocadas las trampas. Además, supóngase que  $X_0$  representa el total de adultos que emergieron pero no fueron capturados durante el período de trampeo. La probabilidad de que un adulto no sea capturado por las trampas, en el período de captura, es denotada por  $p_0$ .

Con el fin de modelar la frecuencia de captura semanal del adulto del GBN junto con la parte no capturada, se propone un modelo multinomial para el vector aleatorio  $\vec{X} = (X_0, X_1, X_2, \dots, X_k)$  con  $\vec{p} = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_k)$ . Así,  $\vec{X}$  es un vector aleatorio con función de probabilidad

$$P[\vec{X} = \vec{x}; N, \vec{p}] = \prod_{i=0}^k \frac{N!}{x_i!} p_i^{x_i},$$

donde

$$\sum_{i=0}^k x_i = N \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^k p_i = 1.$$

Se utiliza la notación  $\vec{X} \sim \text{Mul}(N, \vec{p})$  para referirnos a que  $\vec{X}$  es un vector aleatorio multinomial con parámetros desconocidos  $N$  y  $p_i$ , con  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ .

La Figura 3.2 ilustra el modelo multinomial en el contexto del problema de interés planteado aquí. En esta figura, cada semana del período de trampeo es representada por una caja marcada con línea sólida, que contiene en

su interior el número de capturas  $x_i$  correspondiente a dicha semana. Además, la probabilidad que tiene cada uno de los  $N$  adultos de ser capturados en alguna semana (del período de trampeo) es colocada debajo de cada caja marcada con línea sólida. Por otro lado, los adultos no capturados durante el período de trampeo ( $x_0$ ) son colocadas en el interior de la caja marcada con línea punteada. La probabilidad que tiene cada uno de los  $N$  adultos de no ser capturado durante el período de trampeo, y ser clasificados en esta caja de línea punteada, es  $p_0$ . Con base en esta ilustración es simple notar que

$$x_0 = N - s, \quad s = \sum_{i=1}^k x_i \quad \text{y} \quad p_0 = 1 - \sum_{i=1}^k p_i.$$

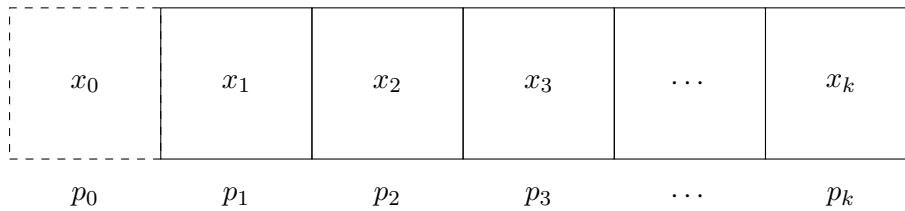


Figura 3.2: Esquema del modelo estadístico multinomial.

Ahora, en este trabajo se propone modelar matemáticamente la probabilidad de captura  $p_i$  de la siguiente manera:

$$p_i = \theta P_i,$$

donde  $\theta$  es una variable aleatoria que representa la probabilidad de captura del trampeo con feromonas y  $P_i$  es la probabilidad de que un adulto se encuentre presente en la  $i$ -ésima semana. Más aún, se supondrá que  $\theta$  se distribuye Beta con parámetros  $a_0$  y  $b_0$ . Cabe mencionar aquí que las trampas atrayentes con feromonas sexuales, empleadas para capturas de palomillas, suelen tener una probabilidad alta de captura, siempre y cuando la palomilla se encuentre cerca de su radio de atracción. Aquí, se considerará que el diseño del trampeo es apropiado en el sentido de que el área geográfica bajo estudio se encuentra dentro del radio de atracción de las trampas colocadas. Así, se fijaron los parámetros de la distribución Beta para  $\theta$  de la siguiente forma:  $a_0 = 5$  y  $b_0 = 2$ . La Figura 3.3 muestra la gráfica de la función de densidad

Beta correspondiente a estos parámetros. En el Anexo B.1 se muestra una comparación entre la densidad Beta seleccionada aquí ( $a_0 = 5$  y  $b_0 = 2$ ) con otras densidades Beta que representan otro tipo de escenario para la probabilidad de captura del trampeo.

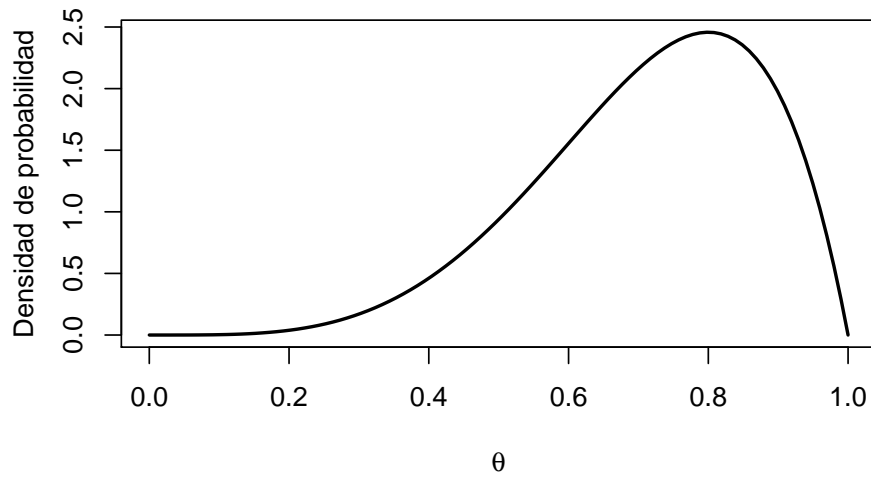


Figura 3.3: Gráfica de la densidad de probabilidad Beta, con parámetros  $a_0 = 5$  y  $b_0 = 2$ , seleccionada para describir la incertidumbre sobre el parámetro  $\theta$  que representa la probabilidad de captura del trampeo.

Por otro lado, para modelar la probabilidad de que un adulto se encuentre presente en la  $i$ -ésima semana,  $P_i$ , se considerará lo siguiente. En el control de plagas, las trampas con feromonas son revisadas al final de cada semana para llevar un conteo de los adultos del GBN. Durante el período de trampeo existe una diferencia en la frecuencia de captura entre las primeras y últimas semanas. La mayoría de las capturas (del período de trampeo) se concentran en las primeras semanas. Mientras que, las capturas durante las últimas semanas se reducen drásticamente. Así, la probabilidad de presencia del adulto es mayor durante las primeras semanas que durante las últimas. Con el fin de describir la presencia del adulto durante el período de trampeo se propone emplear la función de densidad de la distribución Weibull. Así, se propone modelar matemáticamente  $P_i$  de la siguiente manera:

$$P_i(\alpha, \beta) = \int_{i-1}^i f(x; \alpha, \beta) dx, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$P_k(\alpha, \beta) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i(\alpha, \beta),$$

donde  $f(x; \alpha, \beta)$  es la función de densidad de una variable aleatoria Weibull,

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right] & ; x \geq 0, \\ 0 & ; x < 0. \end{cases}$$

Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros de forma y de escala, respectivamente. Cabe mencionar que aquí los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son considerados desconocidos.

Ahora, considerando el modelado estadístico descrito hasta aquí, se tiene el siguiente modelo jerárquico

$$P[\vec{X} = \vec{x}; N, \vec{p} | \theta = \theta_0] = \left. \begin{aligned} & \prod_{i=0}^k \frac{N!}{x_i!} [p_i(\theta_0, \alpha, \beta)]^{x_i} \\ & f(\theta; a_0, b_0) = \frac{\Gamma(a_0 + b_0)}{\Gamma(a_0) + \Gamma(b_0)} \theta^{a_0-1} (1 - \theta)^{b_0-1} \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

donde

$$p_i(\theta, \alpha, \beta) = \theta \int_{i-1}^i f(x; \alpha, \beta) dx \quad ; i = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$p_k(\theta, \alpha, \beta) = \theta \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{i-1}^i f(x; \alpha, \beta) dx \right),$$

$$p_0(\theta, \alpha, \beta) = 1 - \sum_{i=1}^k p_i(\theta, \alpha, \beta),$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt.$$

La ventaja de los modelos jerárquicos es que procesos complicados pueden ser modelados con una secuencia de modelos relativamente simples usados



en jerarquías. Lidiar con los modelos jerárquicos no es más que lidiar con sus distribuciones marginales (Casella y Berger, 2002). Así, con base en el modelo (3.2), la distribución marginal para  $\vec{X}$  se puede escribir como

$$P[\vec{X} = \vec{x}; N, \alpha, \beta] \propto \frac{\Gamma(N+1)\Gamma(N-s+b_0)}{\Gamma(x_0+1)\Gamma(N+a_0+b_0)} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i}. \quad (3.3)$$

Véase el Anexo B.2 para mayores detalles sobre cómo se obtuvo la expresión anterior.

Nótese que la expresión dada en (3.3) será empleada para hacer inferencia sobre el tamaño poblacional de pupas macho (parámetro de interés  $N$ ), con base en los datos observados de capturas de palomillas del GBN. En el proceso de inferencia sobre  $N$  se usará el enfoque de verosimilitud perfil, donde se considerarán a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  como parámetros de estorbo. A continuación se dan más detalles del proceso de inferencia y se presentan estimaciones sobre  $N$ , las cuales serán usadas para especificar varias condiciones iniciales (sobre la población total  $M = qN$  de pupas) para el modelo de la dinámica poblacional del GBN, que permita valorar el efecto que producen en la determinación del tiempo óptimo para la aplicación del control.

### 3.4.2. Estimación del tamaño poblacional de pupas

Para llevar a cabo la estimación, puntual y por intervalos, de la población de pupas macho ( $N$ ) se usará el modelo dado en (3.3) junto con datos reales de capturas semanales de adultos macho del GBN. En la Tabla 3.5 se muestra el número de adultos capturados por las trampas con feromonas en el campo de La Esperanza, Sonora. El período de trampeo comprende de la semana 15 a la semana 19 en el año 2014. Cabe mencionar que los datos de captura fueron proporcionados por el CESAVE, organismo de productores agrícolas que se detalló en el Capítulo 1 de este trabajo.

Tabla 3.5: Número de capturas semanales de palomillas del GBN, obtenidas en el año 2014 a través de trampas con feromonas atrayentes localizadas en el campo de cultivo de nogal llamado La Esperanza, Sonora.

Semana	Número de capturas
15	4
16	45
17	118
18	20
19	3

Con el fin de estimar la población de pupas macho ( $N$ ) de forma puntual y por intervalos de confianza, se utilizará el enfoque de verosimilitud perfil; el cual es un método estadístico general para estimar por separado un parámetro de interés en presencia de parámetros de estorbo. En este caso, el parámetro de interés es  $N$  y los de estorbo son  $\alpha$  y  $\beta$ . En el Anexo B.3 se describe esta metodología. Por otra parte, en el Anexo B.4 se presenta una valoración del ajuste del modelo a los datos de la Tabla 3.5. Con base en este análisis se concluye que no hay evidencia estadística para rechazar el modelo propuesto para la frecuencia de capturas semanales de palomillas macho del GBN.

La Figura 3.4 muestra la gráfica de la función de verosimilitud perfil de  $N$ . En esta gráfica, se marca (con un asterisco) la ubicación del estimador de máxima verosimilitud (EMV) de  $N$ . Además, se señala (con corchetes) la localización de los extremos del intervalo de verosimilitud-confianza del 95 % para  $N$ . Nótese que dicho intervalo fue obtenido con un nivel de verosimilitud de  $c = 0.15$ , el cual se señala en la gráfica mediante un segmento de línea punteada. El valor del EMV de  $N$  es 228 y el límite inferior y superior del intervalo de confianza para  $N$  es 193 y 423, respectivamente.

Ahora, para valorar el efecto que tiene el tamaño poblacional de pupas sobre el tiempo óptimo para la aplicación del control, aquí se propone seleccionar el valor del EMV de  $N$  y el valor de los extremos del intervalo de verosimilitud-confianza del 95 % para  $N$ . Así, los tres valores estimados que se considerarán en este trabajo como la población de pupas macho son:  $N_1 = 228$ ,  $N_2 = 193$  y  $N_3 = 423$ . Entonces, por la propiedad de invarianza de la función de verosimilitud, los valores considerados aquí para la cantidad inicial de pupas ( $M = 2N$ ) para el modelo de la dinámica poblacional son:  $M_1 = 456$ ,  $M_2 = 386$  y  $M_3 = 846$ .

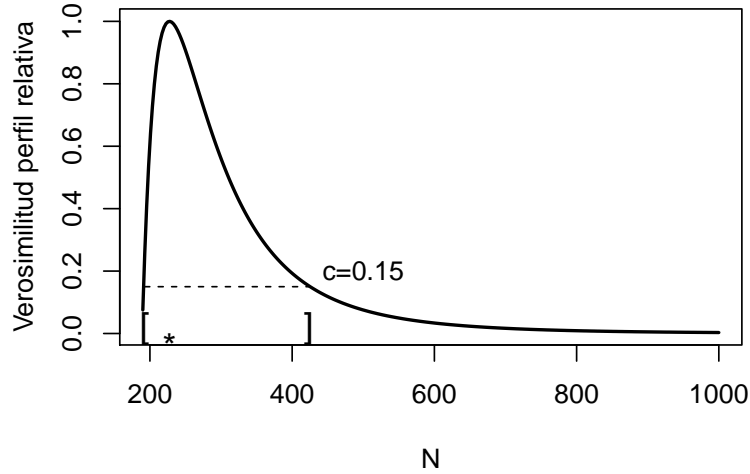


Figura 3.4: Función de verosimilitud perfil de  $N$  obtenida a partir de (3.3) y los datos de frecuencias de capturas de palomillas del GBN de la Tabla 3.5. La ubicación del EMV y los extremos del intervalo de verosimilitud-confianza del 95 %, correspondiente a un nivel de verosimilitud de  $c = 0.15$ , se marcan con un asterisco y corchetes, respectivamente.

### 3.5. Cuantificación del daño

Una vez que los adultos emergen y ovipositan huevos, estos eclosionan y surgen las larvas de la primera generación. Esta generación es la que suele hacer más daño ya que las nueces todavía no están desarrolladas y la larva necesita comer varias de un mismo racimo para su desarrollo (Knutson y Ree, 2019). En esta sección se propone una manera de cuantificar el daño que la plaga del GBN, en la primera generación, ocasiona a la producción de nogal. Esta propuesta está en función de la cantidad de larvas que logran sobrevivir al control y alojarse dentro de las nuececillas (que se pueden obtener a partir del modelo matemático desarrollado en este trabajo); así como del número de nuececillas dañadas por este tipo de larvas y la duración del período de la primera generación (que se puede determinar a partir de datos de la literatura sobre el GBN).

En este trabajo, la cuantificación del daño que ocasiona la plaga del GBN

sujeto al día de inicio de la aplicación del control [parámetro  $a$  en la función de control dada en (3.1), involucrada en el sistema (2.6)] se define como

$$DN_a = C \int_0^{T_{\max}} s_{L_O} L_O(t) dt, \quad (3.4)$$

donde  $C$  es el número de nuececillas en un racimo de nogal,  $T_{\max}$  es el número de días que dura la primera generación y  $s_{L_O} L_O$  la velocidad con la que, en el modelo de la dinámica poblacional del GBN, las larvas de la clase  $L_O$  (larvas afuera) pasan a la clase  $L_I$  (larvas adentro). La integral en (3.4) representa la cantidad de larvas que logran desplazarse hacia adentro de las nuececillas y alojarse ahí para continuar con su ciclo de vida. Por otro lado, aquí se considera que las larvas barrenan no sólo la nuececilla donde logran alojarse sino a todas las nuececillas del racimo. Así,  $DN_a$  dado en (3.4) es un indicador matemático de la cantidad de nuececillas que las larvas logran dañar durante la primera generación.

Para determinar el valor de  $C$  y de  $T_{\max}$  se considera lo siguiente. Knutson y Ree (2019) exponen que el número de nuececillas en el racimo ( $C$ ) que la larva puede dañar comprende de entre 2 a 3. Con base en esto, aquí se asignará a  $C$  el valor de 3. Por otro lado, como expone Bilsing (1927), la primera generación suele durar alrededor de 70 días. Así, en este trabajo se fijará el valor de  $T_{\max}$  en 70.

### 3.6. Estimación del tiempo óptimo en la aplicación del control del GBN

En este trabajo, estimar el tiempo óptimo para la aplicación del control significa encontrar el día de la aplicación del control que minimiza el daño que causa la plaga del GBN. Es decir, una vez especificados los parámetros del modelo de la dinámica poblacional del GBN, la función de control y las condiciones iniciales, entonces es posible fijar el día de la aplicación del control y calcular el daño que provoca el GBN a través de la fórmula dada en (3.4). Así, al variar el día de la aplicación del control se tienen diferentes valores para  $DN_a$ . Por lo tanto, el estimador del tiempo óptimo para la aplicación del control será el día al que le corresponde el menor valor de  $DN_a$ . Matemáticamente, el problema se plantea como:

$$\begin{aligned} & \underset{a}{\text{minimizar}} && DN_a \\ & \text{sujeto a} && a \in [0, 1, \dots, T^*]; \text{ donde } T^* \leq T_{\max}. \end{aligned}$$

Como se ha venido diciendo a lo largo de este capítulo, la sensibilidad de los resultados de este trabajo será valorada estimando el tiempo óptimo de la aplicación del control bajo diferentes escenarios. Así, se proponen 48 escenarios que son construidos especificando cuatro diferentes valores para  $r$  [parámetro que está en función de otros parámetros del sistema (2.6) y que determina existencia y coexistencia], cuatro diferentes funciones de control y tres distintas condiciones iniciales de pupas.

## Capítulo 4

### Resultados

El objetivo principal en este trabajo, como se mencionó en el Capítulo 1, es determinar el tiempo óptimo para la aplicación del insecticida; esto con el fin de disminuir la pérdida en la cosecha. Para llevar a cabo este objetivo, en el Capítulo 2 se propuso el modelo matemático que describe la dinámica poblacional del GBN (en el cual se considera una función de control) y en el Capítulo 3 se describió la metodología de estimación del tiempo óptimo en la aplicación del control del GBN; así como los diferentes escenarios que serán empleados para valorar la sensibilidad de la estimación y el daño causado por las larvas del GBN. A continuación, en este capítulo se muestran los resultados obtenidos en esta investigación.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la Sección 4.1, se muestran los resultados de la estimación del tiempo óptimo y el daño causado por el GBN para los diferentes escenarios considerados en este trabajo. En la Sección 4.2, se muestra el marco de referencia temporal el cual ayudará a interpretar los resultados obtenidos en la línea de tiempo correspondiente al ciclo vital del GBN y a los datos de capturas obtenidas con las trampas de feromonas.

#### 4.1. Tiempo óptimo de control y daño causado por la plaga del GBN

La Tabla 4.1 muestra la estimación del día óptimo de la aplicación del control para los diferentes escenarios considerados en esta tesis. En esta tabla se observa que, para los 48 escenarios, la estimación del día óptimo se encuentra entre el día 4 y el día 7. Además, para cada escenario donde el parámetro  $r$  y la función de control se encuentran fijos, se observa que cambios en la condición inicial no provocaron cambios en el valor estimado para el día óptimo. Nótese que, al fijar el parámetro  $r$ , la función  $\nu_2$  siempre produce el menor día óptimo, mientras que la función de control  $\nu_3$  produce el mayor día óptimo. Para ilustrar este comportamiento, la Figura 4.1 muestra el daño

$DN_a$  correspondiente al día  $a$  que se realiza la aplicación del control, para el caso de  $r = 1.30$  (coexistencia) y  $M_2 = 386$  (condición inicial de pupas). En esta figura se puede observar como cambia el día óptimo, el valor del día  $a$  que minimiza  $DN_a$ , con respecto a la función de control. Para identificar de forma clara la ubicación de los días óptimos en esta figura, se utilizó una escala distinta en el eje vertical de las cuatro gráficas (una para cada función de control) que conforman la figura. Además, que el menor día óptimo se alcanza con  $\nu_2$  y el mayor con  $\nu_3$ . Es importante recordar que de las 4 funciones de control consideradas en este trabajo, la función de control  $\nu_2$  tiene la constante de efectividad inicial más alta y la constante de decaimiento más baja. Por otro lado, la función de control  $\nu_3$  tiene la constante de efectividad más baja y la constante de decaimiento más alta. Así, máximos y mínimos se encontraron asociados a las funciones de control que tienen el mayor y el menor valor en cada instante de tiempo con respecto a las otras funciones de control.

Tabla 4.1: Estimaciones del día óptimo para la aplicación del control del GBN, usando diferentes escenarios que dependen del valor del parámetro  $r$  (extinción y coexistencia), la función de control asociada al plaguicida y la condición inicial de pupas.

	Parámetro $r$	Función de control	Condiciones iniciales		
			$M_1 = 456$	$M_2 = 386$	$M_3 = 846$
Extinción	0.78	$\nu_1$	6	6	6
		$\nu_2$	5	5	5
		$\nu_3$	7	7	7
		$\nu_4$	6	6	6
Coexistencia	1.30	$\nu_1$	5	5	5
		$\nu_2$	4	4	4
		$\nu_3$	6	6	6
		$\nu_4$	5	5	5
	1.56	$\nu_1$	6	6	6
		$\nu_2$	5	5	5
		$\nu_3$	7	7	7
		$\nu_4$	6	6	6
	1.68	$\nu_1$	5	5	5
		$\nu_2$	4	4	4
		$\nu_3$	6	6	6
		$\nu_4$	5	5	5

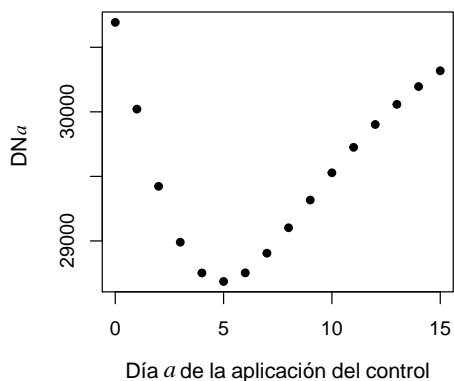
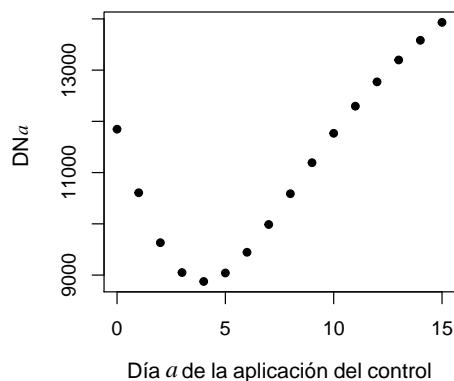
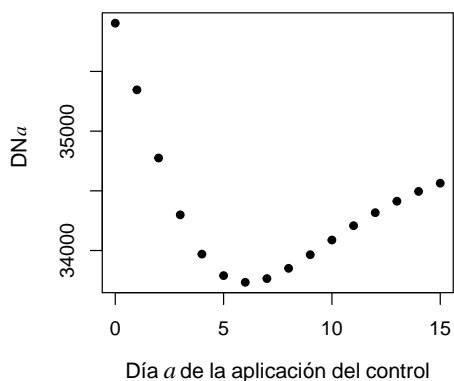
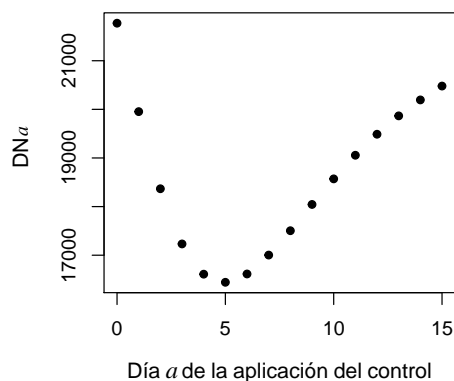
(a) Función de control  $\nu_1$ .(b) Función de control  $\nu_2$ .(c) Función de control  $\nu_3$ .(d) Función de control  $\nu_4$ .

Figura 4.1: Daño  $DN_a$  en diferentes escalas correspondiente al día  $a$  que se realiza la aplicación del control, para el caso  $r = 1.30$  (coexistencia) y  $M_2 = 386$  (condición inicial de pupas). En (a) se fija la función de control  $\nu_1$ ; en (b) se fija la función de control  $\nu_2$ ; en (c) se fija la función de control  $\nu_3$ ; en (d) se fija la función de control  $\nu_4$ . La escala en el eje vertical de las gráficas es diferente.



También, en la Tabla 4.1 se destaca que los escenarios con  $r = 0.78$  y  $r = 1.56$  producen las mismas estimaciones para el día óptimo. Nótese que aquí el escenario cambia de extinción a coexistencia al incrementar la tasa de oviposición [parámetro  $b$  en el sistema (2.6)]. Así, en este caso, el cambio en la tasa de oviposición no produjo cambios en las estimaciones del día óptimo de la aplicación del control. Para los escenarios con  $r = 1.30$  y  $r = 1.68$  se producen las mismas estimaciones para el día óptimo. Ahora, si se fija cualquier función de control y se cambia el parámetro  $r$  y las condiciones iniciales, los días óptimos estimados no varían en más de un día.

Por otro lado, la Tabla 4.2 muestra el daño mínimo estimado (redondeado al entero más cercano) asociado al día óptimo en la aplicación del control. En esta tabla se observa que, para los 48 escenarios, la estimación del daño mínimo se encuentra entre 3324 y 110866. Aquí, el daño mínimo corresponde al escenario de extinción ( $r = 0.78$ ) y el daño máximo al escenario de coexistencia ( $r = 1.68$ ). En el escenario de extinción el porcentaje de la diferencia entre el daño mínimo y el daño máximo es 545 % (aproximadamente), y se encuentra asociado a las funciones de control  $\nu_2$  y  $\nu_3$ . Más aún, este porcentaje considerable de la diferencia entre daños se obtuvo para la condición inicial más pequeña ( $M_2 = 386$ ) y la condición inicial más grande ( $M_3 = 846$ ). Ahora, en el escenario de coexistencia el porcentaje de la diferencia entre el daño mínimo y el daño máximo es 1149 % (aproximadamente). Al igual que en el escenario de extinción, este porcentaje considerable de la diferencia entre daños se encuentra asociado a las funciones de control  $\nu_2$  y  $\nu_3$ , y se obtuvo para la condición inicial más pequeña ( $M_2 = 386$ ) y la condición inicial más grande ( $M_3 = 846$ ).

También, en la Tabla 4.2 se observa que para cada función de control el daño aumenta si el valor del parámetro  $r$  y la condición inicial aumentan. Ahora, nótese que la función de control  $\nu_2$  es la que produce el menor daño cuando el valor del parámetro  $r$  y las condiciones iniciales se encuentran fijas, mientras que la función de control  $\nu_3$  es la que produce el mayor daño; véase la Figura 4.2 en la cual, a diferencia de la Figura 4.1, todas las gráficas tienen la misma escala para el eje vertical. Así, de la misma manera que en la estimación del día óptimo, máximos y mínimos del daño se encontraron asociados a las funciones de control  $\nu_2$  y  $\nu_3$ . Cabe recordar que  $\nu_2$  y  $\nu_3$  tienen el mayor y el menor valor en cada instante de tiempo con respecto a las otras funciones de control.

Tabla 4.2: Daño mínimo, redondeado al entero más cercano, asociado al día óptimo estimado para la aplicación del control del GBN; véase la Tabla 4.1.

	Parámetro $r$	Función de control	Condiciones iniciales		
			$M_1 = 456$	$M_2 = 386$	$M_3 = 846$
Extinción	0.78	$\nu_1$	10620	9114	18325
		$\nu_2$	3898	3324	6950
		$\nu_3$	12488	10729	21432
		$\nu_4$	6493	5553	11404
Coexistencia	1.30	$\nu_1$	33128	28686	54802
		$\nu_2$	10382	8875	18274
		$\nu_3$	38863	33734	63594
		$\nu_4$	19129	16443	32771
	1.56	$\nu_1$	43820	39082	64039
		$\nu_2$	16472	14323	26741
		$\nu_3$	50574	45293	72792
		$\nu_4$	27820	24484	42865
	1.68	$\nu_1$	66023	58637	98212
		$\nu_2$	21178	18311	35287
		$\nu_3$	75691	67503	110866
		$\nu_4$	39540	34610	62371

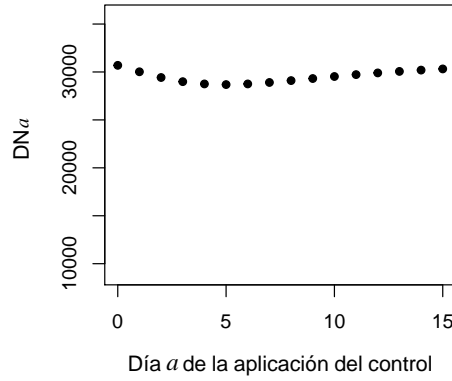
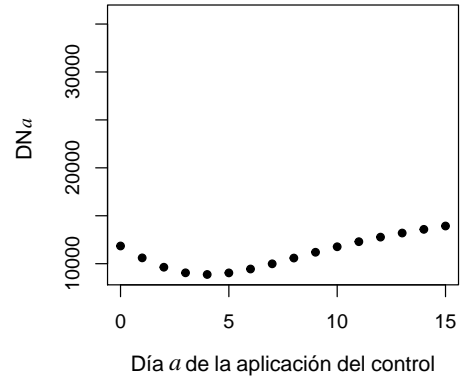
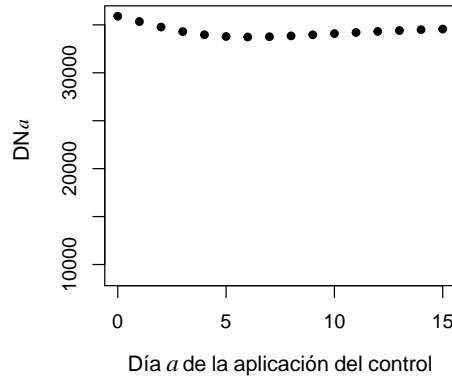
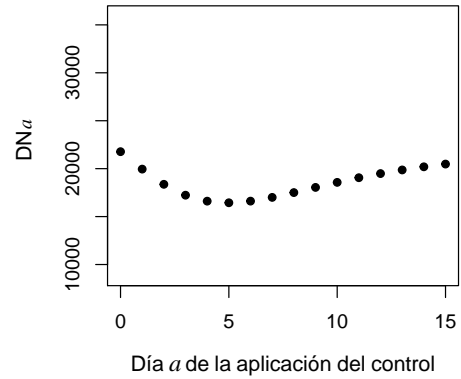
(a) Función de control  $\nu_1$ .(b) Función de control  $\nu_2$ .(c) Función de control  $\nu_3$ .(d) Función de control  $\nu_4$ .

Figura 4.2: Daño  $DN_a$  correspondiente al día  $a$  que se realiza la aplicación del control, para el caso  $r = 1.30$  (coexistencia) y  $M_2 = 386$  (condición inicial de pupas). En (a) se fija la función de control  $\nu_1$ ; en (b) se fija la función de control  $\nu_2$ ; en (c) se fija la función de control  $\nu_3$ ; en (d) se fija la función de control  $\nu_4$ . La escala en el eje vertical de las gráficas es la misma.

Finalmente, la Tabla 4.3 muestra el impacto de la aplicación del control en el día óptimo, en comparación con el escenario sin control. En esta tabla se muestra el incremento (en porcentaje) del daño ocasionado por el escenario

sin control, respecto al escenario en el que se aplica el control en el día óptimo. Cabe destacar que ambos daños se calculan con el mismo parámetro  $r$ , la misma condición inicial y hasta el día 70 ( $T_{max}$ ). Por ejemplo en el escenario de extinción ( $r = 0.78$ ), al considerar la condición inicial más pequeña ( $M_2 = 386$ ) y la función de control  $\nu_2$  se obtiene un daño mínimo de 3324 (véase Tabla 4.2). Mientras que, para el mismo escenario sin control se obtiene un daño de 12172. Lo anterior se puede interpretar en que hay un incremento de 266 % respecto al daño ocasionado en el escenario con el control en el día óptimo, es decir, el daño asociado al día óptimo sufre un incremento de aproximadamente 2.6 veces su valor si no se lleva a cabo ninguna medida de control. De la misma manera en el escenario de coexistencia ( $r = 1.30$ ), al considerar la condición inicial más grande ( $M_3 = 846$ ) y la función de control  $\nu_3$  se obtiene un daño de 63590 (véase Tabla 4.2). Mientras que, para el mismo escenario sin control se obtiene un daño de 71060. Lo anterior se puede interpretar en que hay un incremento de 12 % respecto al daño ocasionado en el escenario con el control en el día óptimo, es decir, el daño asociado al día óptimo sufre un incremento de aproximadamente 0.12 veces su valor si no se lleva a cabo ninguna medida de control.

Tabla 4.3: Impacto (porcentaje aproximado) de la aplicación del control en el día óptimo en comparación con el escenario sin control; véase la Tabla 4.2.

	Parámetro $r$	Función de control	Condiciones iniciales		
			$M_1 = 456$	$M_2 = 386$	$M_3 = 846$
Extinción	0.78	$\nu_1$	33 %	34 %	32 %
		$\nu_2$	263 %	266 %	248 %
		$\nu_3$	13 %	13 %	13 %
		$\nu_4$	118 %	119 %	112 %
Coexistencia	1.30	$\nu_1$	32 %	33 %	30 %
		$\nu_2$	322 %	329 %	289 %
		$\nu_3$	13 %	13 %	12 %
		$\nu_4$	129 %	132 %	117 %
	1.56	$\nu_1$	28 %	29 %	25 %
		$\nu_2$	241 %	252 %	199 %
		$\nu_3$	11 %	11 %	10 %
		$\nu_4$	102 %	106 %	86 %
	1.68	$\nu_1$	27 %	27 %	23 %
		$\nu_2$	295 %	308 %	243 %
		$\nu_3$	10 %	11 %	9 %
		$\nu_4$	111 %	116 %	94 %

## 4.2. Interpretación de los resultados en el contexto real del problema

En la sección anterior, se presentaron los resultados correspondientes al día óptimo en la aplicación del control del GBN. En particular, la estimación del día óptimo se encuentra entre el día 4 y el día 7. Nótese que estas estimaciones fueron realizadas con un modelo matemático, que a partir de un tiempo inicial cero, comienza a describir la dinámica poblacional del GBN y el efecto de la aplicación del control. Ahora, lo que se pretende en esta sección es ubicar este tiempo inicial matemático en la línea de tiempo del ciclo vital de la primera generación del GBN. Más aún, ubicar este tiempo inicial matemático en la línea de tiempo de las capturas de adultos del GBN. Todo esto con el objetivo de comparar los días de fumigación determinados por el CESAVE de Sonora, organismo de productores agrícolas encargado de desarrollar acciones de orden fitosanitario y de inocuidad de alimentos, con los resultados obtenidos en este trabajo de tesis.

Para alcanzar el objetivo descrito en el párrafo anterior, en esta sección se describe un marco de referencia temporal que toma en cuenta la línea de tiempo correspondiente al ciclo vital del GBN y a las capturas de adultos (palomillas); así como el tiempo inicial para el modelo de la dinámica poblacional del GBN. A continuación, primero se describe el marco de referencia temporal y posteriormente se interpretan los resultados de la estimación en el contexto real del problema.

La línea de tiempo que se construye en esta sección, toma en cuenta dos aspectos del ciclo vital del GBN: el tiempo de duración del estado de pupa y el tiempo de vida de las palomillas. En primer lugar, se supone que a la palomilla del GBN le toma, en promedio, entre 9 y 14 días emerger del estado de pupa; véase Knutson y Ree (2005). En la Figura 4.3 se indica este período de tiempo (Período pupa) utilizando llaves debajo de los días correspondientes. En segundo lugar, se asume que la palomilla del GBN vive, en promedio, entre 5 y 8 días; también véase Knutson y Ree (2005). Así, el tiempo medio de supervivencia máxima de la palomilla del GBN es el día 22 (emerge el día 14 y vive 8 días). Este día se marca, con una flecha hacia abajo, al final de la línea de tiempo de la Figura 4.3.

Por otro lado, si se considera que el número de capturas de palomillas alcanza su máximo en la tercera semana y luego decrece rápidamente (véase Tabla 3.5), entonces es razonable suponer que el día 22 es el día en el que finaliza la tercera semana de trampeo. Así, tres semanas antes se tendría la primera captura. Este inicio del período de capturas se marca, con una flecha

hacia arriba, al principio de la línea de tiempo de la Figura 4.3.

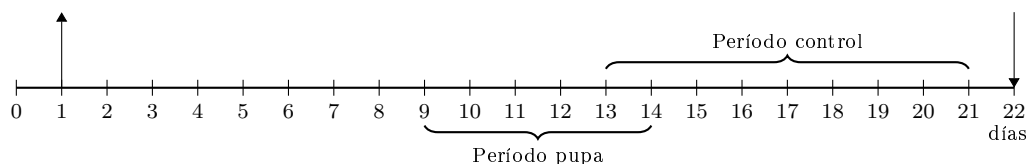


Figura 4.3: Línea de tiempo correspondiente al ciclo vital del GBN y a las capturas obtenidas por las trampas con feromonas. Se indica con una llave abajo de los días el período de tiempo que le toma a la pupa emerger. Mientras que, con una llave arriba se indican entre que valores se encuentra el día óptimo para la aplicación del control. Se marca con una flecha hacia abajo el tiempo medio de supervivencia máxima de la palomilla y con una flecha hacia arriba el inicio del período de capturas.

Una vez establecido el marco de referencia temporal, es momento de ubicar el tiempo inicial del modelo matemático, propuesto en este trabajo, para modelar la dinámica poblacional del GBN y el efecto del control. Aquí es importante notar que el modelo de la dinámica poblacional debe iniciar cuando la mayor cantidad de pupas están listas para transformarse en las palomillas del GBN; es decir, en el intervalo del período de pupas se tiene que encontrar el inicio del modelo de la dinámica poblacional. De esta forma, el tiempo inicial del modelo de la dinámica poblacional se encuentra entre el día 9 y el día 14. Cabe recordar que la estimación del día óptimo se encuentra entre el día 4 y el día 7. Así, en la línea de tiempo construida aquí, la estimación del día óptimo para la aplicación del control se encuentra entre el día 13 y el día 21. En la Figura 4.3 se indica este período de tiempo (Período control) utilizando llaves arriba de los días correspondientes. Por lo tanto, después de que se tiene la primera captura de la palomilla, es necesario aplicar el control entre 12 y 20 días después para minimizar el daño de la plaga del GBN.

Finalmente, es importante mencionar que en la literatura sobre el tiempo óptimo de fumigación para el control del GBN, determinado a partir de capturas realizadas con trampas que usan feromonas sexuales como atrayente, se recomienda que el insecticida se aplique días después de la primera captura. De acuerdo con la literatura revisada, existe un consenso sobre el momento oportuno para la aplicación del control. Knutson y Ree (2005), Fu Castillo *et al.* (2011) y dos trabajos citados en este último artículo, coinciden en que el momento oportuno del control es 14 días después de la primera captura de

la palomilla del GBN. Esta información fue proporcionada por el CESAVE de Sonora. Nótese que el día 15 en la Figura 4.3 es el día que corresponde a 14 días después de la primera captura. Más aún, este día se encuentra ubicado dentro del período de control estimado en este trabajo de tesis.

## Capítulo 5

### Conclusiones

A través de la historia, un problema que se ha considerado relevante para la producción de la nuez pecanera es el control de la plaga del GBN. Una de las interrogantes, con respecto a la aplicación de estrategias de control, es conocer la fecha exacta en que se debe realizar la aplicación del plaguicida; esto, con la finalidad de disminuir el impacto del daño que ocasiona la larva que ingresa a la nuez. El presente estudio tiene como objetivo estimar el tiempo de la aplicación del plaguicida con el fin de que la cantidad de larvas que ingresan a la nuez sea la menor posible.

Con el objetivo de determinar el momento oportuno de la aplicación del plaguicida, se formula un modelo matemático que describe la dinámica poblacional de la plaga del GBN. El modelo matemático propuesto, considera las diferentes etapas del GBN y además se hace la diferencia entre las larvas que se encuentran afuera y adentro de la nuez. Esto último se hace con la motivación de modelar la etapa del GBN en la cual es susceptible al plaguicida.

Para poder estimar el momento óptimo de la aplicación del plaguicida, con base en el modelo propuesto y parámetros especificados de acuerdo a la literatura encontrada sobre el GBN, se requiere una condición inicial desconocida para la población de pupas del GBN. Para especificar esta cantidad se propuso un modelo estadístico y se hizo inferencias de verosimilitud con base en datos reales de capturas de palomillas del GBN, proporcionados por el Comité Estatal de Sanidad Vegetal (CESAVE).

Para desarrollar el objetivo de este trabajo de tesis, se emplearon cuatro conjuntos de parámetros para el modelo de la dinámica poblacional del GBN que garantizan la extinción o la coexistencia de la plaga. Además, se utilizaron tres valores distintos para la condición inicial de pupas en el modelo de la dinámica poblacional del GBN. Adicionalmente, se emplearon cuatro funciones de control diferentes con las cuales se pretende replicar la manera en que el plaguicida elimina a la larva del GBN. Los resultados muestran que, para estos escenarios, existe un intervalo de tiempo relativamente corto para



aplicar el plaguicida y disminuir el impacto del daño que la plaga del GBN ocasiona. La Tabla 4.1 muestra que si se fijan los valores de los parámetros y una función de control, el mejor día para aplicar el plaguicida se mantiene constante; es decir, no se ve afectado por la cantidad de pupas al inicio del período de estudio. Los resultados también muestran, como se observa en la Figura 4.1, que la aplicación anticipada del plaguicida, con respecto al momento oportuno de aplicación, ocasiona mayor daño que la aplicación diferida.

Es importante destacar que a lo largo de este estudio, se ha mostrado que la modelación matemática es una herramienta de gran ayuda al tratar de describir diferentes fenómenos biológicos. Dependiendo de la complejidad con que se haga el planteamiento del modelo, estos pueden resultar prácticos y al mismo tiempo replicar la realidad con cierta precisión. Sin embargo, los modelos son aproximaciones que siempre tendrán sus limitaciones. En esta investigación, se observa que aunque se tiene una idea clara sobre la fecha en que se debe llevar a cabo la aplicación del plaguicida, la estimación del daño que ocasiona la plaga del GBN cambia drásticamente como se observa en la Tabla 4.2. Un posible motivo puede recaer en que se cuenta con poca información para la estructura del control. Por otro lado, los datos utilizados en este estudio no contienen información que pueda reflejar, de alguna manera, el nivel del daño que la plaga del GBN ocasiona. No obstante, si se contara con información adicional acerca de estos aspectos, se podría utilizar este trabajo de tesis como marco teórico para desarrollar una investigación que de mayor luz a la estimación del daño.

Finalmente, hasta donde conocemos, no existe en la literatura trabajos previos relacionados al control del GBN con un enfoque híbrido que usa ecuaciones diferenciales ordinarias e inferencia estadística. Por esta razón, este trabajo de investigación se podría considerar como un punto de partida para futuras investigaciones. Con el fin de exponer áreas de oportunidad para futuras investigaciones, una propuesta de interés es considerar la dinámica espacial de la plaga del GBN con el objetivo de reconocer la forma en que esta plaga se propaga. Otro posible aspecto de interés, debido a las recientes investigaciones sobre los parasitoides del GBN (Torres-Delgado *et al.*, 2018), es considerar un control biológico en lugar de un control químico (plaguicida). Para concluir, se espera que el presente trabajo se sume a los esfuerzos en tratar de resolver un importante problema relacionado con la producción de la nuez pecanera, el control de la plaga del GBN.

## Anexo A

# Definiciones y resultados generales de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias

En este anexo se presentan las definiciones y resultados importantes usados en la Capítulo 2. Estas definiciones y resultados están relacionados a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### A.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Se considera el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{A.1}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $D$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición A.1.1** (Perko (2013), pág. 102). *Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se dice punto de equilibrio del sistema (A.1) si  $f(x_0) = 0$ .*

**Definición A.1.2** (Perko (2013), pág. 129). *Sea  $\phi_t$  el flujo del sistema (A.1) definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Un punto de equilibrio  $x_0$  del sistema (A.1) es localmente estable si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in N_\delta(x_0)$  y  $t \geq 0$  se tiene*

$$\phi_t(x) \in N_\epsilon(x_0).$$

*El punto de equilibrio se dice inestable si no es estable. Más aún,  $x_0$  es localmente asintóticamente estable si existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in N_\delta(x_0)$  se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0.$$

**Teorema A.1.3** (Perko (2013), pág. 130). *Si  $x_0$  es un punto de equilibrio localmente estable de (A.1), ningún eigenvalor de  $Df(x_0)$  tiene parte real*

positiva. Más aún, si ningún eigenvalor tiene parte real igual a cero entonces  $x_0$  es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable.

**Teorema A.1.4** (Lyapunov-LaSalle, Khalil (2002), pág 128). Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto que es positivamente invariante con respecto al sistema (A.1). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos en  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el conjunto invariante más grande en  $E$ . Entonces cada solución que inicia en  $\Omega$  se aproxima a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## A.2. Matrices Metzler

**Definición A.2.1** (Fall et al. (2007),pág. 65). Una matriz Metzler  $A$  es una matriz tal que  $A(i, j) \geq 0$  para cualquier índice  $i \neq j$ .

**Definición A.2.2** (Arrow (1989), pág. 3). Una matriz Metzler estable es una matriz Metzler tal que la parte real de las raíces del polinomio característico son negativas.

**Definición A.2.3** (Fall et al. (2007),pág. 67). Una matriz real Metzler,  $M = A + B$  es una descomposición regular si  $A$  es una matriz Metzler estable y  $B(i, j) \geq 0$  para todo  $i, j$ .

**Proposición A.2.4** (Fall et al. (2007),pág. 67). Sea  $M = A+B$  una descomposición regular de  $M$ , una matriz real Metzler. Entonces  $M$  es una matriz Metzler estable si y solo si  $\rho(-BA^{-1}) < 1$ .

## Anexo B

# Modelado y estimación de la población de pupas del GBN

### B.1. Distribución beta

En el Capítulo 3, con el fin de modelar la probabilidad de captura  $p_i$ , se propuso una variable aleatoria  $\theta$ , la cual representa la probabilidad de captura del trapeo con feromonas. Además, se hizo la suposición de que  $\theta$  tiene una distribución Beta con parámetros  $a_0 = 5$  y  $b_0 = 2$ . Aquí, se muestra una comparación entre densidades Beta que representan diferentes tipo de escenarios.

La función de densidad de probabilidad Beta de parámetros  $a > 0$  y  $b > 0$  se puede escribir como:

$$f(\theta; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} & ; 0 \leq \theta \leq 1, \\ 0 & ; \text{otro caso,} \end{cases}$$

donde  $B(a, b)$  es la función beta,

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

En la Figura B.1 se muestra la forma de la función de densidad de probabilidad Beta para diferentes valores de sus parámetros. En la Figura B.1a se muestra el escenario  $a = b = 1$ , que corresponde a una distribución uniforme, un miembro particular de la familia de las distribuciones Beta. En este caso, todo valor de  $\theta$  en  $(0, 1)$  tiene la misma densidad de probabilidad; es decir, todos los intervalos de igual longitud en  $(0, 1)$  son igualmente probables. Por otro lado, en la Figura B.1b se muestra una función de densidad de probabilidad Beta que tiene cola pesada a la derecha (escenario  $a = 2$  y  $b = 5$ ). Esta función de densidad Beta asigna densidades de probabilidad más altas a valores de  $\theta$  que se encuentran dentro del intervalo  $(0.05, 0.65)$  que aquellos que se encuentran fuera de este rango. En contraste, en la Figura B.1d se

muestra una función de densidad de probabilidad Beta que tiene cola pesada a la izquierda (escenario  $a = 5$  y  $b = 2$ ). En este caso, la función de densidad asigna densidades de probabilidad más altas a valores de  $\theta$  que se encuentran dentro del intervalo  $(0.25, 0.95)$  que aquellos que se encuentran fuera de este rango. Por último, en la Figura B.1c se muestra una función de densidad de probabilidad Beta que es simétrica con respecto al valor 0.5 (escenario  $a = b = 2$ ). En este caso, para todo  $\delta > 0$ , la función de densidad asigna la misma densidad de probabilidad para el valor de  $\theta$  de la forma  $0.5 - \delta$  que para el valor de  $\theta$  de la forma  $0.5 + \delta$ .

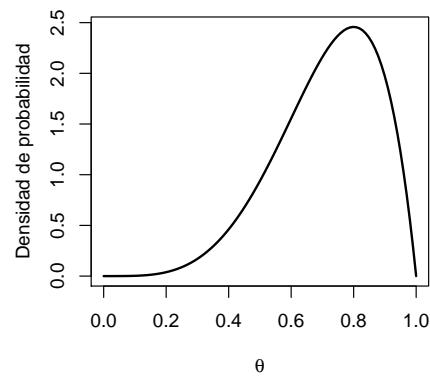
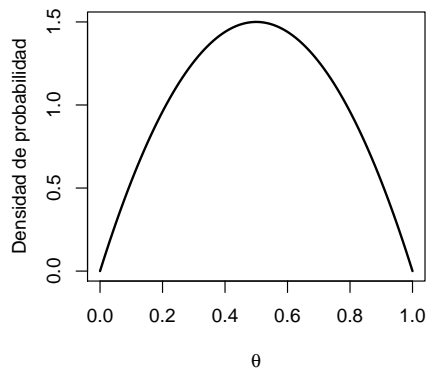
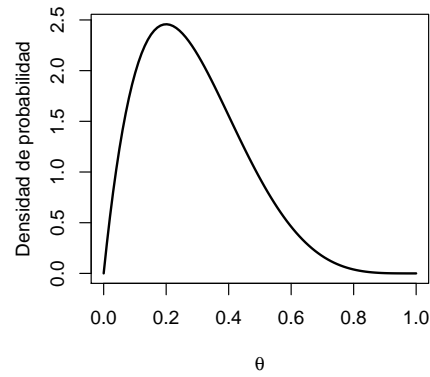
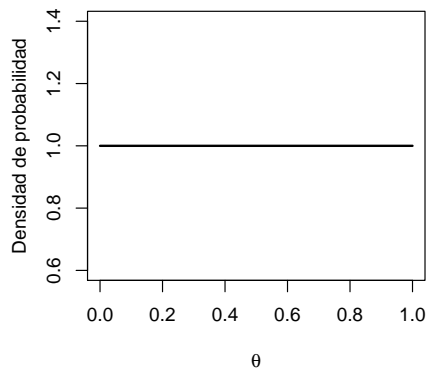


Figura B.1: Comparación entre funciones de densidad Beta con parámetros (a)  $a = b = 1$ , (b)  $a = 2$  y  $b = 5$ , (c)  $a = b = 2$  y (d)  $a = 5$  y  $b = 2$ . Cada gráfica representa un tipo de escenario para la probabilidad  $\theta$  de captura del trampeo con feromonas.

## B.2. Modelo para la frecuencia de capturas: Distribución marginal

En el Capítulo 3 se supuso que la frecuencia semanal de capturas del adulto del GBN es un vector aleatorio  $\vec{X}$ , con función de probabilidad multinomial dado  $\theta$ , donde  $\theta$  es una variable aleatoria Beta de parámetros  $a_0$  y  $b_0$ , que representa la probabilidad de captura del trampeo con feromonas. Además, se supuso que la probabilidad que tiene cada uno de los  $N$  adultos de ser capturados en la  $i$ -ésima semana (categoría) es una función  $p_i(\theta, \alpha, \beta)$  que depende de  $\theta$  y de una probabilidad  $P_i(\alpha, \beta)$  que se calcula con base en una densidad de probabilidad Weibull. A continuación, se muestran los cálculos realizados para obtener esta distribución marginal de  $\vec{X}$ , que es la distribución relevante para hacer inferencia sobre  $N$ .

$$\begin{aligned}
P[\vec{X} = \vec{x}; N, \alpha, \beta] &= \int_0^1 \left\{ \prod_{i=0}^k \frac{N!}{x_i!} [p_i(\theta, \alpha, \beta)]^{x_i} \frac{1}{B(a_0, b_0)} \theta^{a_0-1} (1-\theta)^{b_0-1} \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{B(a_0, b_0)} \int_0^1 \left\{ \frac{N!}{x_0!} [p_0(\theta, \alpha, \beta)]^{x_0} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [p_i(\theta, \alpha, \beta)]^{x_i} \theta^{a_0-1} (1-\theta)^{b_0-1} \right\} d\theta \\
&\propto \int_0^1 \left\{ \frac{N!}{x_0!} (1-\theta)^{N-s} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [\theta P_i(\alpha, \beta)]^{x_i} \theta^{a_0-1} (1-\theta)^{b_0-1} \right\} d\theta \\
&= \frac{N!}{x_0!} \int_0^1 \left\{ \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i} \theta^s \theta^{a_0-1} (1-\theta)^{N-s+b_0-1} \right\} d\theta \\
&= \frac{N!}{x_0!} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i} \int_0^1 \left\{ \theta^{s+a_0-1} (1-\theta)^{N-s+b_0-1} \frac{B(s+a_0, N-s+b_0)}{B(s+a_0, N-s+b_0)} \right\} d\theta \\
&= \frac{N!}{x_0!} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i} B(s+a_0, N-s+b_0) \int_0^1 \left\{ \frac{\theta^{s+a_0-1} (1-\theta)^{N-s+b_0-1}}{B(s+a_0, N-s+b_0)} \right\} d\theta \\
&= \frac{N!}{x_0!} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i} B(s+a_0, N-s+b_0) \\
&= \frac{N!}{x_0!} \frac{\Gamma(s+a_0)\Gamma(N-s+b_0)}{\Gamma(N+a_0+b_0)} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i} \\
&= \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(x_0+1)} \frac{\Gamma(N-s+b_0)}{\Gamma(N+a_0+b_0)} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distribución marginal de  $\vec{X}$  se puede escribir como

$$P[\vec{X} = \vec{x}; N, \alpha, \beta] \propto \frac{\Gamma(N+1)\Gamma(N-s+b_0)}{\Gamma(x_0+1)\Gamma(N+a_0+b_0)} \prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i!} [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i}. \quad (\text{B.1})$$

### B.3. Enfoque de verosimilitud perfil

En el Capítulo 3, con el fin de estimar la población de pupas macho ( $N$ ) de forma puntual y por intervalos de confianza, se utilizó el enfoque de verosimilitud perfil. Este es un método estadístico general para estimar por separado un parámetro de interés ( $N$ ) en presencia de parámetros de estorbo ( $\alpha$  y  $\beta$ ). A continuación, se describe esta metodología de forma general y en particular se presenta la función de verosimilitud perfil del parámetro de interés  $N$ .

Sea  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vector aleatorio con función de probabilidad conjunta  $P[\vec{X} = \vec{x}]$  que depende de un número finito de parámetros reales desconocidos denotados por  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ , en donde  $\Lambda$  es el espacio parametral. Fisher (1921) define la función de verosimilitud,  $\mathcal{L}(\lambda; \vec{x})$ , como una cantidad proporcional a la probabilidad conjunta de la muestra observada pero vista como función de los parámetros; es decir,

$$\mathcal{L}(\lambda; \vec{x}) \propto P[\vec{X} = \vec{x}; \lambda].$$

Con base en esto, la función de verosimilitud para el modelo de la frecuencia semanal de capturas del adulto del GBN se define como proporcional a la función de probabilidad marginal conjunta de  $\vec{X}$  dada en (B.1),

$$\mathcal{L}(N, \alpha, \beta; \vec{x}) \propto \frac{\Gamma(N+1)\Gamma(N-s+b_0)}{\Gamma(x_0+1)\Gamma(N+a_0+b_0)} \prod_{i=1}^k [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i}. \quad (\text{B.2})$$

Nótese que en nuestro caso el vector de parámetros es  $\lambda = (N, \alpha, \beta)$ .

En general, el estimador de máxima verosimilitud (EMV) es aquel valor de  $\lambda$ , denotado por  $\hat{\lambda}$ , que maximiza la función de verosimilitud; es decir, es el valor de  $\lambda$  que hace más probable a la muestra observada (Kalbfleisch, 2012). En particular, para nuestra función de verosimilitud dada en (B.2), el estimador de máxima verosimilitud se calcula numéricamente y es el siguiente:

$$(\hat{N}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (228, 4.07, 2.59).$$



Ahora, en muchos casos se tienen modelos estadísticos con varios parámetros y lo que resulta de interés es estimar un subconjunto de ellos. Así, el vector de parámetros del modelo está conformado por un vector de parámetros de interés y otro vector de parámetros que puede ser considerado de estorbo. En términos matemáticos, esto significa que el vector  $\lambda$  se puede escribir como  $\lambda = (\psi, \delta)$ , donde  $\psi$  es el parámetro de interés con dimensión  $m_1$  y  $\delta$  es el parámetro de estorbo con dimensión  $m_2$ , con  $m = m_1 + m_2$ .

El método de verosimilitud perfil es una técnica general para estimar un parámetro de interés en presencia de parámetros de estorbo. La función de verosimilitud perfil del parámetro de interés  $\psi$ ,  $L_P(\psi; \vec{x})$ , se define como

$$L_P(\psi; \vec{x}) = \max_{\delta|\psi} \mathcal{L}(\psi, \delta; \vec{x}).$$

Es decir, la verosimilitud perfil de  $\psi$ ,  $L_P(\psi; \vec{x})$ , se obtiene maximizando la función de verosimilitud  $\mathcal{L}(\psi, \delta; \vec{x})$  sobre  $\delta$  pero fijando  $\psi$  (Montoya, 2008). Cabe destacar que el EMV perfil de  $\psi$  se obtiene maximizando la verosimilitud perfil de  $\psi$ . Además, este estimador coincide con el EMV no restringido que se obtiene maximizando la función de verosimilitud completa.

Con base en la definición anterior, la función de verosimilitud perfil del parámetro de interés  $N$  se se puede escribir como

$$L_P(N; \vec{x}) \propto \max_{(\alpha, \beta)|N} \left\{ \frac{\Gamma(N+1)\Gamma(N-s+b_0)}{\Gamma(x_0+1)\Gamma(N+a_0+b_0)} \prod_{i=1}^k [P_i(\alpha, \beta)]^{x_i} \right\}.$$

Nótese que en nuestro caso el parámetro de interés es  $\psi = N$  y el parámetro de estorbo es  $\delta = (\alpha, \beta)$ .

Con el fin de que la función de verosimilitud perfil del parámetro de interés  $\psi$  tenga una única representación, y así no lidiar con una constante arbitraria, se estandariza la función de verosimilitud perfil del parámetro de interés  $\psi$  con respecto a su máximo (Sprott, 2000). A esta función de verosimilitud se le denomina función de verosimilitud perfil relativa,  $R_p(\psi, \vec{x})$ , y se define como

$$R_p(\psi; \vec{x}) = \frac{L_P(\psi; \vec{x})}{\sup_{\psi} L_P(\psi; \vec{x})} = \frac{L_P(\psi; \vec{x})}{L_P(\hat{\psi}; \vec{x})}.$$

Con base en la definición anterior, la función de verosimilitud perfil relativa para el parámetro de interés  $N$  queda expresada como

$$R_p(N; \vec{x}) = \frac{L_P(N; \vec{x})}{\sup_N L_P(N; \vec{x})} = \frac{L_P(N; \vec{x})}{L_P(\hat{N}; \vec{x})}. \quad (\text{B.3})$$

La función de verosimilitud perfil relativa permite cuantificar la plausibilidad de los valores del parámetro de interés y calcular regiones de verosimilitud donde valores del parámetro de interés tienen, al menos, una plausibilidad especificada. Las regiones de verosimilitud de nivel  $c$  para  $\psi$  se definen como

$$IV(c) = \{\psi | R_p(\psi; \vec{x}) \geq c\}; \quad \text{donde} \quad 0 \leq c \leq 1.$$

En general, si el parámetro de interés es un escalar entonces  $c = 0.15$  implica que el intervalo de verosimilitud perfil tiene una probabilidad de cobertura de aproximadamente 95%; véase Montoya (2008). Así, usando la función de verosimilitud perfil relativa de  $N$  dada en (B.3), el intervalo de verosimilitud perfil para  $N$  se calcula numéricamente y es el siguiente:

$$193 \leq N \leq 423.$$

## B.4. Valoración del modelo

En general, una vez que se tiene un modelo estadístico una cuestión importante es conocer si este modelo es adecuado para los datos que se tienen. Para esto, Kalbfleisch (2012) propone utilizar la estadística de Pearson, la cual se define de la siguiente manera:

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i},$$

donde  $k$  representa el número de categorías,  $f_i$  las frecuencias de la  $i$ -ésima categoría y  $e_i$  el valor esperado (estimado) para la  $i$ -ésima categoría.

Para realizar la valoración del ajuste del modelo propuesto en este trabajo de tesis, para la frecuencia semanal de capturas del adulto del GBN, se procede a calcular la estadística de Pearson con base en los datos presentados en la Tabla 3.5. Nótese que se tienen 5 semanas de trampeo; es decir, el número de categorías es  $k = 5$ . El valor de esta estadística se denota como  $D_{obs}$ . Por otro lado, para cuantificar qué tan probable es observar  $D_{obs}$  bajo el modelo propuesto, se estimó la distribución de la estadística

de Pearson a través de un enfoque bootstrap paramétrico. Así, se simularon 10000 muestras de frecuencias de captura semanal con base en el modelo estimado, muestras bootstrap  $\vec{x}^*$ , y se calculó la estadística de Pearson. Esta estadística se denota como  $D_{obs}^*$ . La Figura B.2 muestra la distribución de frecuencias de  $D_{obs}^*$ . En esta figura se señala la ubicación de  $D_{obs}$  con una línea sólida. Nótese que el valor  $D_{obs}$  no parece ser un valor inusual, con respecto a la distribución de  $D_{obs}^*$ . Así, se puede considerar que el modelo propuesto es adecuado para explicar el fenómeno de interés.

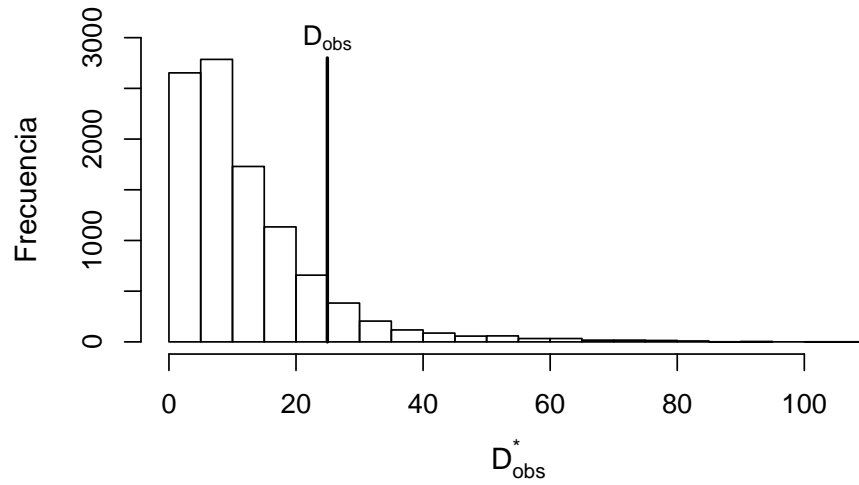


Figura B.2: Histograma de los valores de la estadística  $D_{obs}^*$ . En línea sólida se señala la estadística de Pearson,  $D_{obs}$ , calculada con base en los datos observados.

## Bibliografía

- Aguirre, L., Tucuch, M., y Harris, M. (1995). Oviposition and nut entry behavior of the pecan nut casebearer *acrobasis nuxvorella* nuenzig. *The Southwestern entomologist (USA)*.
- Arrow, K. J. (1989). A “dynamic” proof of the Frobenius–Perron theorem for metzler matrices. In *Probability, Statistics, and Mathematics*, pp. 17–26. Elsevier.
- Bilising, S. W. (1927). Studies on the biology of the pecan nut case bearer: (*acrobasis caryae*, grote). Bulletin 347, Texas Agricultural Experiment Station.
- Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical inference*. Duxbury Thomson Learning.
- Corella-Madueno, A., Fu-Castillo, A., Harris, M., Martinez-Tellez, M., y Vargas-Arispuro, I. (2012). Life cycle of laboratory-reared *acrobasis nuxvorella* neunzig (lepidoptera: Pyralidae): a pecan nut pest. *American Journal of Agricultural and Biological Sciences*, 7(4):384–389.
- Fall, A., Iggidr, A., Sallet, G., y Tewa, J.-J. (2007). Epidemiological models and Lyapunov functions. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2(1):62–83.
- Fisher, R. A. (1921). On the “probable error” of a coefficient of correlation deduced from a small sample. *Metron*, 1:1–32.
- Fu Castillo, A. A., Aurora, F. P. A., Alberto, F. C. A., Alejandro, J. L., Hector, T. R. S., José, G. G., y Marvin, H. (2011). El gusano barrenador de la nuez en la costa de Hermosillo, Sonora. *Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias*, pp. 15–16.
- Fu Castillo, A. A., Grageda, J. G., Ramonet Razcon, M. R., Valenzuela Lagarda, J., Baranzini Coronado, A., Silva Sánchez, F. C., Esquer Parra, L., Urías García, E., y Sánchez Romo, J. (2019). Plan regional para la supresión-erradicación del gusano barrenador de la nuez(*acrobasis nuxvorella*) en Sonora. *Sanidad e Inocuidad Agrícola abril 2019*, pp. 16–20.

- Grantham, R. A., Mulder, P. G., Cuperus, G. W., y Carlson, J. D. (2002). Evaluation of pecan nut casebearer acrobasis nuxvorella (lepidoptera: Pyralidae) prediction models using pheromone trapping. *Environmental entomology*, 31(6):1062–1070.
- Harris, M. K., Agustin Fu, A., Nunez, H., Aranda-Herrera, E., Moreira, J. A., Steven McElfresh, J., y Millar, J. G. (2008). A new pheromone race of acrobasis nuxvorella (lepidoptera: Pyralidae). *Journal of economic entomology*, 101(3):769–776.
- Hartfield, E. A. (2009). Molecular and pheromone studies of pecan nut casebearer. Tesis de Maestría, Texas A&M University.
- Higuera-Acuña, S. V. (2013). Compuestos fenólicos en la relación nogal pecanero (*carya illinoensis*)-gusano barrenador de la nuez (*acrobasis nuxvorella*). Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Alimentación y Desarrollo.
- Hornsby, A. G., Wauchope, R. D., y Herner, A. (1995). *Pesticide properties in the environment*. Springer Science & Business Media.
- Kalbfleisch, J. G. (2012). *Probability and statistical inference*. Springer Science & Business Media.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall.
- Knutson, A. E. y Muegge, M. A. (2010). A degree-day model initiated by pheromone trap captures for managing pecan nut casebearer (lepidoptera: Pyralidae) in pecans. *Journal of economic entomology*, 103(3):735–743.
- Knutson, A. E. y Ree, B. (2005). Controlling the pecan nut casebearer. *Texas FARMER Collection*.
- Knutson, A. E. y Ree, B. (2019). Biology and management of the pecan nut casebearer (lepidoptera: Pyralidae). *Journal of Integrated Pest Management*, 10(1):29.
- Koutou, O., Traoré, B., y Sangaré, B. (2018). Mathematical modeling of malaria transmission global dynamics: taking into account the immature stages of the vectors. *Advances in Difference Equations*, 2018(1):10–11.
- Millar, J. G., Knudson, A. E., McElfresh, J. S., Gries, R., Gries, G., y Davis, J. H. (1996). Sex attractant pheromone of the pecan nut casebearer (lepidoptera: Pyralidae). *Bioorganic & medicinal chemistry*, 4(3):331–339.

- Montoya, J. A. (2008). *La verosimilitud perfil en la Inferencia Estadística*. Tesis de Doctorado, Centro de Investigación en Matemáticas AC, México.
- Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media.
- Ring, D. (1981). *Predicting biological events in the life history of the pecan nut casebearer using a day degree model*. Tesis de Doctorado, Department of Entomology, Texas A&M University.
- Ring, D. R. y Harris, M. K. (1983). Predicting pecan nut casebearer (lepidoptera: Pyralidae) activity at college station, Texas. *Environmental Entomology*, 12(2):482–486.
- Sparks, D. (1995). A budbreak-based chilling and heating model for predicting first entry of pecan nut casebearer. *HortScience*, 30(2):366–368.
- Sprott, D. A. (2000). *Statistical inference in science*. Springer Science & Business Media.
- Torres-Delgado, M. G., Ruiz-Cancino, E., Ávila-Rodríguez, V., Nava-Camberos, U., Coronado-Blanco, J. M., Alvarado-Gómez, O. G., y Olais, E. M. (2018). Parasitoides del gusano barrenador de la nuez, *acrobasis nuxvorella* neunzig en la comarca lagunera, México. *Southwestern Entomologist*, 43(1):175–182.