

Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

**Influencia de un potencial galáctico
en el balance gravitacional de las
nubes interestelares**

TESIS

que para obtener el título de
Licenciado en Física

presenta

Eduardo Ortiz Rascón

Director de Tesis:

Dr. Javier Ballesteros Paredes

Hermosillo, Sonora, 2008

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

A mi familia, maestros y amigos...

0.1. Agradecimientos

Agradezco al Dr. Javier Ballesteros su participación como Director de este trabajo, así como a todo el personal académico y administrativo del Centro de Radioastronomía y Astrofísica de la UNAM por haberme permitido una estancia grata y provechosa en Morelia. Agradezco igualmente los útiles comentarios y sugerencias recibidos por parte de mis sinodales.

A todos lo amigos del CRyA y de Morelia que de una u otra manera alentaron el avance de esta tesis, en especial a Fátima, Brenda, Joel, Sergio, Eduardo, Yetli, Manuel y Tadeo.

Deseo agradecer también a la Universidad de Sonora, a la Casa de la Ciencia, y muy en especial al Departamento de Física el haberme permitido participar en el Verano de Investigación que dio inicio a este proyecto. A todos mis maestros y amigos de la Unison.

Agradezco especialmente a mi familia por el cariño y apoyo que desde siempre me han brindado. A mis hermanos Elena, Alberto y Arturo, a Paloma y Luz, primos, tíos y abuelos.

Todo mi agradecimiento para mi madre y padre, por la educación y el cariño de ellos recibido.

Gracias.

Índice general

0.1. Agradecimientos	3
1. Resumen	1
I Estructura galáctica y propiedades físicas y observacionales de las nubes moleculares.	3
2. Estructura de la Galaxia y nubes moleculares	5
2.1. Estructura espiral galáctica	5
2.1.1. La distribución del gas	5
2.1.2. Distribución de las estrellas	12
2.2. Nubes moleculares	14
3. Ecuación de momento de un fluido	19
3.1. Teorema de transporte de Reynolds	19
3.2. Ecuación de conservación de masa	22
3.3. Ecuación de conservación de momento	23
3.4. Importancia relativamente pequeña de los efectos difusivos en flujos astronómicos.	25
4. Teorema del virial	27
4.1. Derivación del teorema del virial	27
4.1.1. El término $\int x_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV$	28
4.1.2. El término de presión	29
4.1.3. El término gravitacional	29

4.1.4. Teorema del virial 31

II Balance gravitacional en las nubes interestelares.
33

5. Influencia de un potencial externo en el término gravitacional W 35

5.1. Las fuerzas de marea en el teorema del virial. 35

5.2. Influencia de un potencial externo sobre un cascarón esférico. 38

6. Cálculo de W_{ext} 39

6.1. Tratamiento del problema 39

6.2. Cálculo analítico de W_{ext} 42

6.2.1. Potencial par 42

6.2.2. Potencial impar 44

6.3. Cálculo numérico de W_{ext} 45

6.4. Programa para el cálculo de W_{ext} 46

7. Resultados 47

8. Conclusiones 55

A. Programa gravity_parallel_arms.f 57

Capítulo 1

Resumen

Frecuentemente se encuentra en la literatura la suposición de que el término gravitacional (\mathcal{W}) en el teorema del virial para una nube interestelar, es igual a la energía gravitacional ($\mathcal{E}_{\text{grav}}$) propia de la nube, es decir:

$$\mathcal{W} = - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV \simeq - \frac{1}{2} \int_V \rho \phi_n dV = \mathcal{E}_{\text{grav}}. \quad (1.1)$$

Donde x_i es el vector de posición, ρ denota la distribución de masa en el volumen V , ϕ es el potencial gravitacional debido a la nube misma y a otras posibles distribuciones de masa cercanas al volumen V , y ϕ_n es el potencial gravitacional propio de la nube. Este resultado se basa en la suposición de que la nube se encuentra aislada, o bien, de que la distribución de masa externa ρ es esferoidal y simétrica respecto al centro de masa, de manera que esta distribución no ejerce fuerza neta sobre la nube. Sin embargo, si la nube no está aislada,

$$\mathcal{W} = \mathcal{E}_{\text{grav}} - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} dV. \quad (1.2)$$

Donde ϕ_{ext} es el potencial debido a una distribución de masa externa a la nube.

En el presente trabajo se estudia la aportación de dicho potencial externo ϕ_{ext} al término gravitacional \mathcal{W} . Para llevar a cabo este estudio se realiza el cálculo detallado de \mathcal{W} para una nube con parámetros típicos ($l \sim 25$ pc, $n \sim 50 \text{ cm}^{-3}$) embebida en un potencial galáctico con brazos espirales.

Nuestros resultados indican que, para una nube con ciertos parámetros físicos, embebida en este potencial, la contribución de éste a la energía gravitacional de la nube es de cerca del 5%. Por lo tanto, la suposición $\mathcal{W} \simeq \mathcal{E}_{\text{grav}}$ es, en nuestro caso, aproximadamente válida. Sin embargo, se espera que para

nubes de mayor tamaño y un potencial galáctico que incluya componentes galácticos descartados en esta tesis, tales como halo, bulbo y disco, dicha relación no se cumpla necesariamente.

Parte I

Estructura galáctica y
propiedades físicas y
observacionales de las nubes
moleculares.

Capítulo 2

Estructura de la Galaxia y nubes moleculares

El problema que nos atañe consiste en la evaluación del término gravitacional,

$$W = - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV$$

para una nube molecular embebida en un potencial galáctico externo. Por este motivo discutiremos la estructura de nuestra Galaxia y las propiedades de las nubes moleculares, tales como su distribución y composición.

2.1. Estructura espiral galáctica

Nuestra posición en el disco de la Vía Láctea nos dificulta poder entender cómo es en detalle nuestra Galaxia. Es por esto que se han desarrollado técnicas, se han lanzado telescopios al espacio, y se ha observado la Galaxia en diferentes longitudes de onda; con el fin de armar una visión completa, a gran escala, de nuestra Vía Láctea.

2.1.1. La distribución del gas

La gran mayoría del gas interestelar se encuentra en forma atómica o molecular, ya que la componente ionizada respresenta solamente un 1% de la masa total de materia interestelar. El gas interestelar se puede estudiar mediante líneas espectrales, aunque también en el continuo infrarrojo podemos trazar el polvo interestelar, el cual está relacionado con la componente gaseosa de manera razonablemente homogénea.

El hidrógeno atómico se puede detectar directamente usando la línea de 21 cm. Ésta se emite cuando los espines del electrón y el protón cambian su orientación relativa. La línea a 21 cm es en general ópticamente delgada, por lo que la intensidad de la línea es directamente proporcional a la columna de densidad de gas atómico a lo largo de la línea de visión.

La situación del gas molecular es un poco menos favorable, ya que la molécula de hidrógeno (H_2) no tiene líneas espectrales capaces de excitarse a las bajas temperaturas del medio interestelar. Eso se debe a que sus líneas electrónicas y vibracionales se encuentran a energías altas, mientras que sus líneas rotacionales quedan prohibidas por la ausencia de un momento dipolar permanente. Por lo tanto, para estudiar la componente molecular del medio interestelar, uno debe recurrir a un trazador indirecto. El que más se usa es la primera línea rotacional del monóxido de carbono, $CO(1-0)$, ya que es la molécula más abundante después del H_2 . Sin embargo, existen dos problemas importantes: Primero que se requiere conocer la abundancia relativa entre H_2 y el CO para convertir las observaciones de CO en una columna de densidad de gas molecular, y segundo, que la línea de $CO(1-0)$ es frecuentemente ópticamente gruesa, por lo que la intensidad de la línea deja de ser proporcional a la columna de densidad. Aun así, se ha podido calibrar una relación empírica entre la intensidad de la línea de $CO(1-0)$ y la columna de densidad de gas molecular.

Cabe señalar, sin embargo, que la relación entre la línea de 21 cm y la columna de densidad de gas atómico es mucho más confiable que la relación entre la línea de $CO(1-0)$ y la columna de densidad del gas molecular, ya que en el primer caso la relación se obtiene de primeros principios, mientras que en el segundo es una relación empírica con un rango de aplicabilidad limitado.

Combinando las observaciones espectrales del HI o CO con un modelo cinemático de la Vía Láctea, es posible estimar la posición donde se origina la emisión. De esta manera es posible reconstruir la distribución del gas interestelar en la Galaxia.

Distribución en el plano del disco

El disco es una parte relativamente densa, fría y masiva de la galaxia, que rota en un plano alrededor del centro. La temperatura del disco va desde los 20 K en las regiones más frías, donde la formación estelar es más frecuente, hasta los 10,000 K en regiones de gas ionizado. Con respecto de su densidad tenemos que ésta decae exponencialmente a partir del centro galáctico. Recientemente se encontró que el valor de esta densidad en la vecindad de

nuestro Sol es de $0.076 \pm 0.015 M_{\odot} \text{pc}^{-3}$ (Creze et al. 1998).

Tenemos evidencia de la existencia de algunos brazos espirales en el disco galáctico, ésta se mostrará posteriormente. En la Figura 2.1 podemos apreciar parte de dicha evidencia, el panel superior muestra un diagrama de longitud galáctica contra velocidad radial (l, v) del hidrógeno neutro, el decaimiento en la velocidad radial desde el centro galáctico hacia sus extremos nos sugiere una estructura con rotación diferencial que puede sugerir a su vez una estructura espiral a gran escala. Las posiciones de algunos puntos se muestran en el panel inferior. En este caso, se trata de la emisión atómica descrita anteriormente a radios aproximadamente mayores que la distancia desde el Sol hasta el centro de la Galaxia R_{\odot} . Mientras que la Figura 2.2 muestra las posiciones estimadas de algunas de las nubes moleculares gigantes (puntos), y las posiciones hipotéticas de brazos espirales logarítmicos¹ para distancias galactocéntricas aproximadamente menores que R_{\odot} .

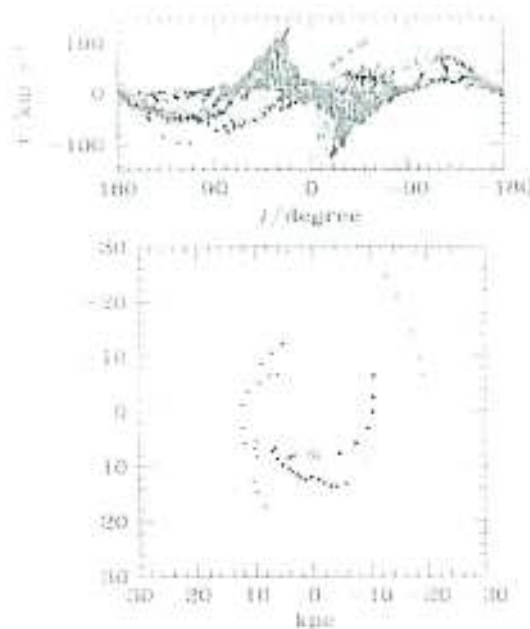


Figura 2.1: Arriba, diagrama (l, v) del III, marcando algunos puntos para los cuales se les determina su posición en la Galaxia (abajo). En este caso todos los puntos tienen distancias galactocéntricas mayores a R_{\odot} . La posición del Sol se indica por \odot . Tomada de Binney & Merrifield (1998), Fig. 9.21.

Las distribuciones radiales sobre el plano del disco se construyen suponiendo que la Galaxia es axisimétrica, de manera que toda la estructura que inferimos anteriormente, se promedia azimutalmente en anillos concéntricos

¹La escala logarítmica escalará el despliegue de los brazos alrededor de la Galaxia.

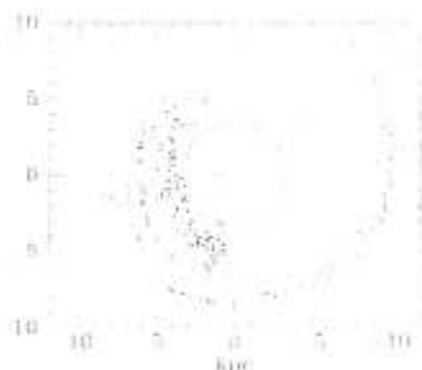


Figura 2.2: Los puntos muestran las posiciones estimadas de las nubes moleculares gigantes conocidas en la Galaxia; el centro de la Galaxia se sitúa en el origen del sistema de referencia y la localización del Sol está marcada por ☉. El círculo punteado manifiesta la elongada distribución de nubes en el anillo molecular. La línea punteada sugiere la posición del Brazo de Sagitario-Carina (Binney & Merrifield, *Galactic Astronomy*, 1998).

para obtener una dependencia solamente radial. Integrando la emisión sobre la altura z del disco, se obtiene la densidad superficial² como función del radio galactocéntrico.

La Figura 2.3 presenta la distribución radial del gas atómico y molecular en la Vía Láctea. En esta figura se puede ver que la densidad superficial de gas atómico en los 3 kpc centrales de la Galaxia es pequeña, y que aumenta hacia los 5 kpc, permaneciendo razonablemente constante entre 6 y 16 kpc. A distancias mayores, la densidad superficial de gas atómico baja rápidamente.

Para obtener la masa hasta un radio dado se debe integrar la densidad superficial:

$$M(r) = 2\pi \int_0^r \Sigma(r) dr. \quad (2.1)$$

De esta manera, se ha estimado que la masa en HI para la Galaxia es de $4,3 \times 10^9 M_{\odot}$.

La distribución del H_2 tiene similitudes y diferencias con la del HI. Una similitud es la baja densidad en los 3 kpc centrales de la Galaxia³, característica compartida con una pequeña fracción de las galaxias espirales. Otra

²La densidad superficial o columnar N se define como el número de partículas por centímetro cuadrado. Sus unidades son cm^{-2} . En este párrafo, por el contrario, estamos hablando de la densidad columnar de masa Σ , que es la masa por unidad de área. Sus unidades son gr cm^{-2} . Ambas se relacionan mediante la ecuación $\Sigma = Nm_p$, donde m_p es la masa promedio de las partículas.

³La combinación de baja densidad de HI y H_2 en los 3 kpc centrales de la Galaxia indica que la Vía Láctea tiene un "agujero" de materia interestelar en su centro.

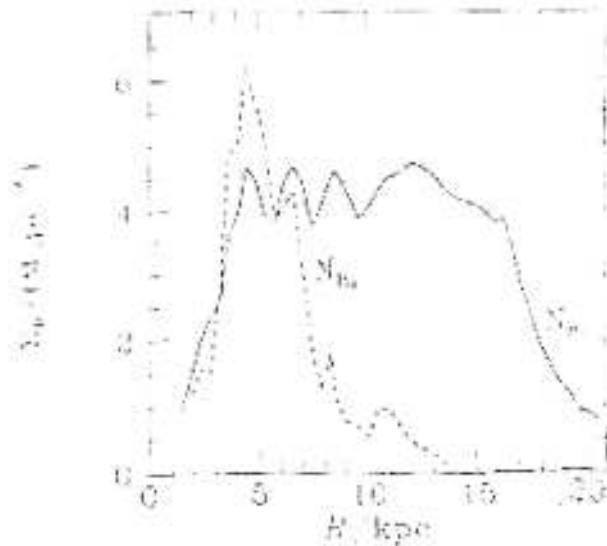


Figura 2.3: Curva continua: Densidad superficial de hidrógeno atómico como función del radio galactocéntrico. Curva punteada: Densidad superficial de hidrógeno molecular (Tomada de Merrifield & Binney, *Galactic Astronomy*, 1998).

similitud entre el HI y el H₂ es que este último también se encuentra concentrado en un anillo alrededor de la Galaxia, comúnmente llamado “anillo molecular”. Sin embargo, el anillo molecular es mucho más delgado radialmente que el anillo atómico, ya que solamente se extiende hasta ~ 6.5 kpc. Así el hidrógeno molecular se encuentra principalmente en un anillo a una distancia galactocéntrica de 4.5 kpc con grosor de 4 kpc. Afuera del anillo molecular, la densidad superficial del gas molecular baja para llegar a niveles despreciables después de 12 kpc. Por lo tanto, el Sol, con $R^\odot = 8.5$ kpc, se encuentra en una zona ya relativamente pobre en gas molecular, mientras que el 80% del gas molecular se encuentra a una distancia galactocéntrica menor a R^\odot ⁴. Integrando la distribución hasta radios suficientemente grandes se puede calcular que la masa del gas molecular total en la Vía Láctea es del orden de $10^8 M_\odot$.

⁴Comparativamente, la mayor cantidad del gas atómico se encuentra fuera de esta región, ya que los anillos exteriores tienen mayor área, y dado que la densidad superficial del HI, Σ_{HI} , es razonablemente constante, entonces los anillos mayores contendrán mayor masa.

Distribución en altura

Consideremos ahora la distribución vertical, i.e., perpendicularmente al plano Galáctico. El valor de z donde la densidad de materia interestelar es máxima cambia con el radio galactocéntrico. Sin embargo, se puede definir de manera convencional un "plano medio Galáctico típico", escogido como el plano que, en promedio, se ajusta mejor a los lugares de máxima densidad interestelar en la parte interna de la Galaxia⁵.

La distancia entre el plano promedio galáctico y la zona de mayor densidad de materia interestelar es relativamente pequeña. Sin embargo, el comportamiento de la posición en z donde se encuentra el máximo de densidad, como función del radio galactocéntrico parece tener un comportamiento periódico. Esto sugiere que el plano definido por la materia interestelar no es exactamente plano, sino que tiene alguna oscilación. Cabe señalar, sin embargo, que dicha oscilación es de muy baja amplitud, ya que representa menos del 1% del radio galactocéntrico para cualquier radio entre 3 y 8.5 kpc.

La Figura 2.4 muestra la escala de altura del gas interestelar en la parte interna de la Galaxia. Puede notarse que esta escala es relativamente pequeña, y es aproximadamente 3 veces mayor para el gas atómico que para el gas molecular, aumentando monótonicamente con el radio Galactocéntrico.

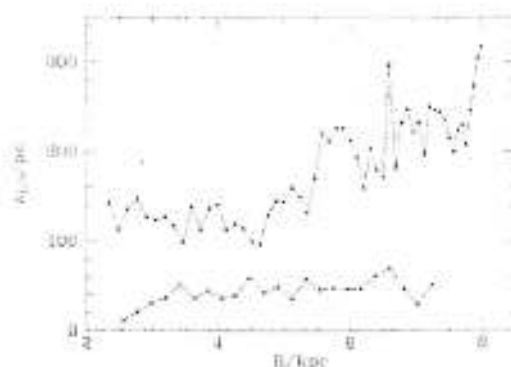


Figura 2.4: Espesor del disco atómico (cuadros) y molecular (triángulos) en la parte interna de la Vía Láctea. Tomada de Binney & Merrifield, Fig. 9.23.

La situación fuera del radio Solar es un poco más compleja. La Figura 2.5 muestra en escala de grises la densidad de HI en un cilindro de radio galactocéntrico R . Como puede verse, el efecto de oscilación del disco se amplifica afuera del círculo Solar. A $R > 20$ kpc, la región de mayor densidad de materia interestelar puede llegar hasta 4 kpc por arriba o por debajo del

⁵Nótese que este plano no necesariamente coincide con $b = 0$, ya que la latitud galáctica $b = 0$ se define a partir de la posición entre el centro galáctico y el Sol.

plano medio promedio. El efecto es más notorio en el lado izquierdo de las gráficas debido a que el Sol se encuentra cercano a línea de intersección entre el plano de la oscilación y el plano galáctico.

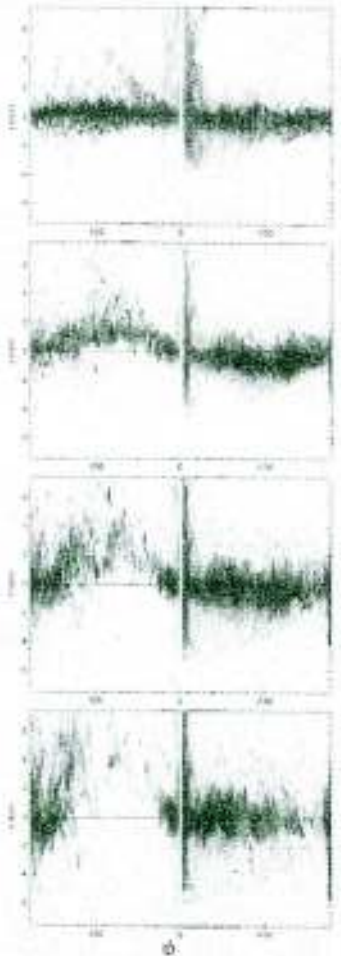


Figura 2.5: Densidad de HI como función de un cilindro con un radio galactocéntrico R que toma los valores de 12, 16, 20 y 24 kpc, comenzando con 12 kpc por la gráfica superior y terminando con $R = 24$ kpc en la inferior. El Sol se sitúa en $(R, \phi, z) = (R^\odot, 0, 0)$. Tomada de Binney & Merrifield, Fig. 9.24.

Esta oscilación es mucho más difícil de estudiar en CO, ya que, mientras la distorsión empieza a ser muy fuerte a distancias mayores a 12 kpc, la emisión del CO ya es muy débil a esas distancias Galactocéntricas. Sin embargo, las pocas observaciones en CO que existen en la parte externa del disco Galáctico sugieren que el disco molecular sufre la misma oscilación que el disco atómico.

La Figura 2.6 presenta la escala de altura del disco gaseoso como función del radio galactocéntrico. La escala de altura del CO llega a 400 pc a $2 R^\odot$,

mientras que la de HI llega a 800 pc a $2.5 R_{\odot}^{\text{Gal}}$. Este efecto de aumento de la escala de altura del disco gaseoso con el radio galactocéntrico traduce la disminución de la fuerza gravitacional perpendicularmente al disco a radios Galactocéntricos grandes.

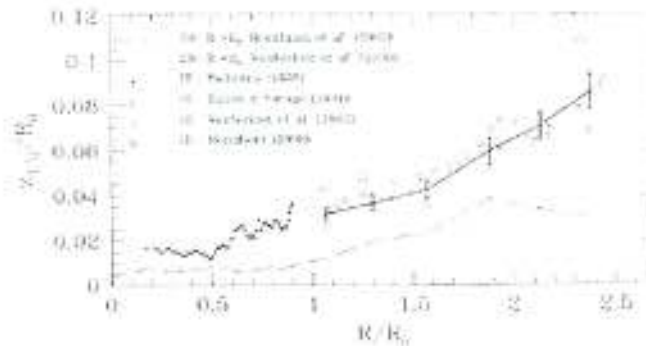


Figura 2.6: Espesor del disco atómico (arriba) y molecular (abajo) como función del radio galactocéntrico, en unidades de $R_{\odot} = 8.5$ kpc. Tomada de Binney & Morrifield, Fig. 9.25.

Emisión infrarroja difusa

El polvo interestelar absorbe la luz de las estrellas, y la reemite en el infrarrojo entre los 10 y 250 μm . El 92% de la emisión Galáctica a 12 μm proviene del polvo, y solamente el 8% de las estrellas. A longitudes de onda por encima de 20 μm , es casi el 100% de la emisión la que proviene del polvo. Varios satélites (IRAS, COBE, ISO y Spitzer) han permitido estudiar la Vía Láctea en longitudes de onda relevantes, y darnos información directa sobre el polvo interestelar. Sin embargo, dado que se trata de observaciones en el continuo, es difícil de asociar un lugar de origen a cada parte de la emisión como se hace con las líneas de CO y HI, y la información que se obtiene sobre la distribución espacial del polvo es relativamente limitada.

2.1.2. Distribución de las estrellas

Debido a la presencia de polvo, los recuentos estelares en el óptico no son muy útiles para determinar la distribución de las estrellas en la Galaxia, y por lo tanto, se deben buscar otra fuente de información. Para limitar el efecto del polvo es deseable ir a longitudes de onda mayores, en el infrarrojo. Sin embargo, no podemos subir demasiado, ya que como se mencionó en la

^aEn esta figura se indica como $R_0 \equiv R_{\odot}$.

sección anterior, la mayoría de la emisión en el mediano infrarrojo (alrededor de $10\mu\text{m}$) proviene del polvo y no de las estrellas. Lo mejor es observar en el infrarrojo cercano (alrededor de $2\mu\text{m}$). En esta zona, la mayoría de la emisión proviene de las estrellas y el efecto del polvo es mucho menor que en el espectro visible.

Para estudiar la distribución de las estrellas a gran escala en la Galaxia de manera efectiva, es deseable no considerar estrella por estrella, sino determinar la luz integrada en cada dirección del cielo, esto es, se debe realizar fotometría infrarroja de la Vía Láctea. El problema es que la atmósfera terrestre emite mucho en el infrarrojo cercano, por lo que la calibración de los datos, particularmente la substracción del cielo es muy difícil para datos tomados desde la Tierra. Por lo tanto la fotometría que necesitamos se tiene que obtener desde el espacio. Quizá los datos más usados son los del satélite COBE, particularmente los obtenidos en la banda K a $2.5\mu\text{m}$.

Determinación de los brazos espirales estelares

Aunque es sumamente difícil determinar la distribución azimutal de las estrellas en nuestra Galaxia, Drimmel (2000) presentó evidencia de dos brazos espirales estelares. Sus estudios se basaron en la detección infrarroja de COBE en la banda K, y de emisión térmica de polvo a $240\mu\text{m}$. Drimmel graficó esta emisión como función de la longitud galáctica a $b = 0$, encontrando dos picos de emisión simétricos respecto a $l = 0^\circ$. Estos máximos locales de emisión en K los asoció a los puntos tangentes de dos brazos espirales logarítmicos con respecto a la línea de visión, ya que si bien la concentración de estrellas es mayor en los brazos que en la región interbrazo, la concentración aparente de estrellas es mayor en los puntos en los cuales la línea de visión es tangente al brazo, i.e., tendremos los máximos de emisión ubicados en dichos puntos, así como en la región que comprende al bulbo Galáctico. La Figura 2.7 presenta la emisión en K de la Galaxia (cuadrados), y de $240\mu\text{m}$ (triángulos).

De esta gráfica se puede ver que la emisión central está dominada por el bulbo, pero más allá de esta emisión, existen máximos locales tanto en la banda K como a $240\mu\text{m}$. Como se mencionó anteriormente, estos máximos locales se explican como puntos tangentes a los brazos espirales. De esta figura Drimmel identifica varios puntos tangentes: S_1 y S_2 son tangentes del brazo de Scutum, mientras que el tercero, etiquetado con una T, coincide con la posición de un brazo a 3 kpc observado en CO. C_1 y C_2 pueden ser identificados con las tangentes a los brazos de Sagitario-Carina. En la banda K, por ejemplo, es muy clara la identificación de los puntos S_1 y S_2 . C_1 es prominente en $240\mu\text{m}$, pero imperceptible en K. Estudiando detalladamente

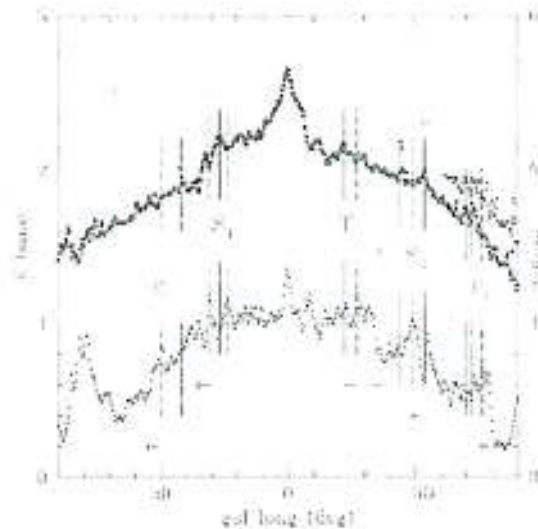


Figura 2.7: Emisión continua en la banda K (arriba) y 240 μm (abajo) para nuestra Galaxia. Tomada de Drimmel (2000).

estos máximos, Drimmel sugiere el esquema presentado en la Figura 2.8 para la Vía Láctea, con dos brazos estelares (líneas sólidas) y cuatro brazos de gas (líneas gruesas).

La Figura 2.9 nos muestra a la Galaxia M83 como referencia al modelo de la Vía Láctea que hemos planteado en esta sección. Su morfología es semejante, mostrando claramente el bulbo Galáctico, así como los brazos espirales, donde se concentra principalmente el hidrógeno molecular.

2.2. Nubes moleculares

Las nubes moleculares son extensas regiones masivas del espacio interestelar. En el presente, es en ellas donde se forman las estrellas. Se componen de polvo y una gran fracción de gas en forma de moléculas.

El estudio del gas molecular en nuestra Galaxia, realizado principalmente a través de la emisión del CO, nos ha permitido saber que la mayor parte de la masa molecular de la Galaxia se encuentra en las nubes moleculares gigantes. Sin embargo, las nubes moleculares pequeñas son más numerosas que las grandes, siguiendo aproximadamente la relación $dN/dM \propto M^{-1.5}$ (Larson 1981).

Las nubes moleculares gigantes de nuestra galaxia tienen densidades características entre $10^2 - 10^3 \text{ cm}^{-3}$ y están constituidas principalmente por

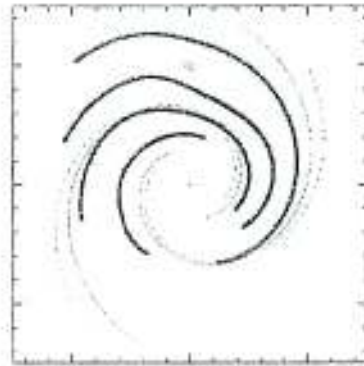


Figura 2.8: Diagrama esquemático de las posiciones de los brazos estelares sugeridos por la emisión en la banda K de COBE (líneas delgadas), y de los brazos de gas sugeridos por la emisión a $240 \mu\text{m}$. Las líneas continua y punteada determinan la incertidumbre en la posición de dichos brazos. La posición del Sol está mostrada con el símbolo \odot . Tomada de Drimmel (2000).



Figura 2.9: Galaxia M83, se pueden apreciar los brazos espirales logarítmicos y el bulbo Galáctico (Créditos: Gendler y Guisard).

hidrógeno molecular. Su masa varía entre 10^5 y 10^6 masas solares (M_{\odot}). Su diámetro va desde 10 hasta 100 pc, y su temperatura es del orden de 10 a 20 K, aunque cerca de las regiones de formación estelar puede ser de unos 100 a 200 K.

La distribución radial de las nubes moleculares en la Galaxia no es uniforme. Como se mencionó anteriormente, la mayor parte del gas molecular se encuentra en la región comprendida entre los 4 y 8 kpc del centro galáctico, coincidiendo con una gran concentración de regiones H II (regiones de hidrógeno atómico ionizado, tales como M42). La distribución de las nubes moleculares se concentra mayoritariamente en los brazos espirales, aunque una fracción menor de éstas se encuentran repartidas por todo el disco, dentro y fuera de los brazos espirales, tal como se observó en la sección anterior

en las Figuras 2.3 y 2.2.

Para observar detalladamente las nubes moleculares se tiene que recurrir a la radioastronomía. Como previamente se mencionó, las observaciones en radiofrecuencias permiten visualizar aquellos cuerpos cuya baja temperatura los hace emitir principalmente en una longitud de onda radiométrica, esto es, desde $700 \mu\text{m}$ en adelante. Observamos también, que debido a que la molécula de H_2 no es detectable a bajas temperaturas, los astrónomos utilizan la molécula más abundante después del H_2 : el CO. Esta molécula emite también en radiofrecuencias, a una longitud de onda de 3 mm. Un ejemplo de estas observaciones se puede apreciar en las Figuras 2.10 y 2.11. La primera muestra la distribución espacial del CO(1-0) en la Galaxia, donde los ejes vertical y horizontal indican la latitud y la longitud galáctica respectivamente; mientras que la segunda nos indica la velocidad a lo largo de la línea de visión de esta molécula en función de la longitud galáctica.



Figura 2.10: Mapa de la distribución espacial del CO en la Galaxia. El eje horizontal muestra la longitud galáctica, comenzando en 0° para el centro de la gráfica y terminando en 180° y -180° en los extremos izquierdo y derecho respectivamente. El eje vertical nos indica la latitud galáctica, comenzando en -30° en la parte inferior y terminando en 30° en la parte superior. La latitud 0° nos muestra el plano galáctico. (Dame et al. 2001). Observaciones realizadas a 115 GHz.

Las nubes moleculares contienen una mezcla de pequeñas partículas sólidas, conocidas como polvo interestelar. Este polvo absorbe de manera eficiente las longitudes de onda similares a su tamaño, bloqueando muy eficientemente el paso de la luz. Cuando se les ve en un fondo estrellado es claro este efecto y es entonces cuando se les llama nubes oscuras. La extinción de la luz que se da en las nubes oscuras está directamente relacionada con su densidad columnar. La Tabla 2.1 muestra las características de estas nubes en comparación con las nubes moleculares gigantes.⁷

Un ejemplo de nube oscura es B68. En la Figura 2.12 podemos apreciar la diferencia entre una observación en el óptico y una en el infrarrojo. En la imagen de la izquierda tenemos la observación en luz visible. En ésta resulta

⁷Conviene aclarar que esto es una clasificación histórica. Las nubes moleculares gigantes también son oscuras, pero fueron descubiertas mucho tiempo después que las imágenes ópticas donde aparecían manchas oscuras sobre un fondo estrellado.

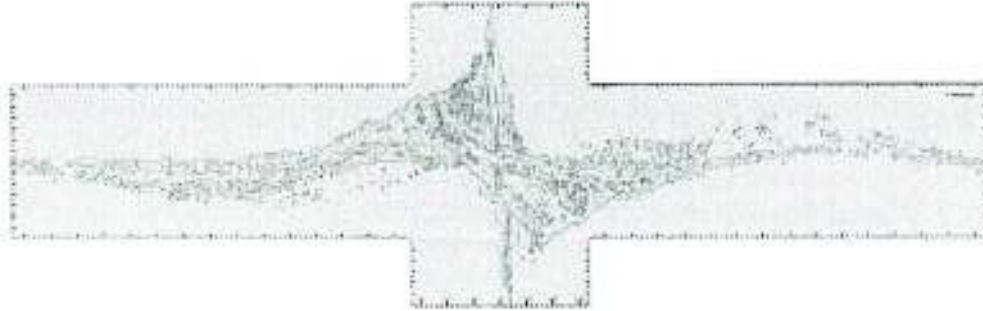


Figura 2.11: Mapa de la velocidad radial del CO en la Galaxia. El eje horizontal muestra la longitud galáctica, comenzando en 0° para el centro de la gráfica y terminando en 180° y -180° en los extremos izquierdo y derecho respectivamente. El eje vertical indica la velocidad a lo largo de la línea de visión, en la parte inferior del eje tenemos una velocidad $v = -260 \text{ km s}^{-1}$, mientras que para la parte superior tenemos $v = 280 \text{ km s}^{-1}$, (Dame et al. 2001).

Cuadro 2.1: Comparación entre nubes moleculares gigantes y nubes oscuras

	Nubes moleculares gigantes	Nubes oscuras
Masa [M_\odot]	10^5 - 10^6	10^3 - 10^4
Diámetro [pc]	10-100	2-5
Densidad promedio [cm^{-3}]	10^2 - 10^3	10^2 - 10^4
Temperatura [K]	10-20	~ 10

imposible observar las estrellas que están detrás de la nube. En la imagen de la derecha tenemos la observación de la misma nube tomada en infrarrojo, en la cual podemos apreciar muchas de las estrellas que se encuentran detrás de la nube.

Observaciones hechas en radiofrecuencias muestran que las nubes moleculares no son regiones homogéneas, sino que están compuestas por condensaciones más densas y de menor tamaño; presentando formas irregulares, con apariencia fractal (Falgarone et al. 1991) y altamente agrupada, mostrando frecuentemente estructura a la más pequeña escala observable.

Las nubes moleculares presentan anchos de línea de varios km s^{-1} que varían según la escala. Esta variación escalar se debe a que la dispersión de velocidades en las nubes moleculares se incrementa sistemáticamente con el tamaño de la región, siguiendo de manera aproximada la relación $\sigma \propto R^{1/2}$, característica de un sistema turbulento (Larson 1981). Dado que la velocidad del sonido es de $\sim 0.2 \text{ km s}^{-1}$ ($T \approx 10 \text{ K}$), esto sugiere que existen movimientos de bulto supersónicos. Dichos movimientos se atribuyen a flujos

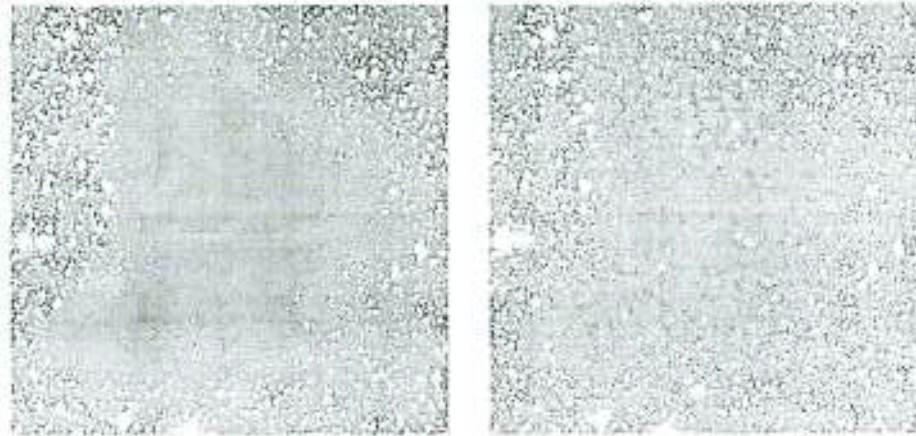


Figura 2.12: Nube oscura B68. Panel izquierdo (visible) tomado en las bandas B, V e I. Panel derecho (infrarrojo) imagen compuesta de las bandas B, I y K. European Southern Observatory (2001).

turbulentos y supersónicos en la nube.

Por otra parte las nubes moleculares tienen masas mucho mayores que la masa que puede soportar su presión térmica interna; si estuviesen colapsando como un todo, la eficiencia de formación estelar sería mucho más alta de la que se observa, por lo tanto Zuckerman & Evans (1974) proponen que debe existir algún factor que provea un soporte contra este colapso gravitacional; dicho soporte se le atribuye también a la turbulencia supersónica (Larson 1981).

Capítulo 3

Ecuación de momento de un fluido

El objetivo principal de este trabajo es el estudio del término gravitacional en el teorema del virial para las nubes interestelares embebidas en un potencial galáctico. Para realizar dicho estudio debemos derivar el teorema del virial. Este teorema se origina a partir de la ecuación de conservación de momento. Para deducir ésta utilizaremos el teorema de transporte de Reynolds, el cual se expone a continuación.

3.1. Teorema de transporte de Reynolds

La combinación de un volumen arbitrario y un marco de referencia lagrangiano en la derivación de las ecuaciones de conservación, originará derivadas lagrangianas de integrales de volumen. Estos términos deberán ser transformados en expresiones que involucren integrales de volumen de derivadas eulerianas. El teorema que permite dicha transformación recibe el nombre de teorema de transporte de Reynolds.

Considérese una distribución de masa de un fluido y sígase por un período corto de tiempo δt mientras ésta fluye. Sea α cualquier propiedad del fluido, tal como su masa, momento, o energía. Dado que queremos seguir al elemento de masa, debemos considerar un sistema de referencia lagrangiano. En un sistema como éste, la cantidad α será una función sólo del tiempo, esto es, $\alpha = \alpha(t)$. Por lo tanto, la razón de cambio D/Dt de la integral de volumen de α queda como:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\}. \quad (3.1)$$

Donde $V(t)$ es el volumen que contiene la distribución de masa del fluido y que puede cambiar su tamaño y forma mientras éste fluye. A continuación sumamos y restamos la cantidad $\alpha(t + \delta t)$ integrada sobre $V(t)$, dentro del límite de la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\} \\ &+ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las dos primeras integrales dentro del límite de la ecuación (3.2) corresponden a mantener el volumen fijo y permitir que el integrando α varíe. Esta diferencia es, por definición, la integral de la derivada euleriana respecto del tiempo:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\} = \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV. \quad (3.3)$$

Las dos últimas integrales de la ecuación (3.2) corresponden a mantener fijo el integrando y permitir que el volumen V cambie. De esta manera, tenemos que la expresión para la derivada lagrangiana de la integral de α , ecuación (3.2), considerando $V(t + \delta t) - V(t) \equiv \delta V$, puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\delta V} \alpha(t + \delta t) dV \right] \right\}. \quad (3.4)$$

Para evaluar el límite en la ecuación (3.4) consideremos cómo cambia el volumen desde un punto de vista geométrico. Sea $S(t)$ la superficie que encierra al volumen $V(t)$. Consideremos este volumen a un tiempo t y a un tiempo $t + \delta t$. Durante este intervalo de tiempo el volumen se ha movido y ha cambiado su tamaño y forma (Figura 3.1). En cualquier punto de la superficie $S(t)$ del volumen $V(t)$ la velocidad estará denotada por \mathbf{u} y la normal unitaria hacia afuera de la superficie por $\hat{\mathbf{n}}$.

Si consideramos al volumen $V(t)$ inmerso en el volumen $V(t + \delta t)$, tendremos que la distancia perpendicular de cualquier punto en la superficie de $V(t)$ a la superficie de $V(t + \delta t)$ estará dada por $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta t$; de tal manera que a un elemento de área superficial δS le corresponderá un cambio en el

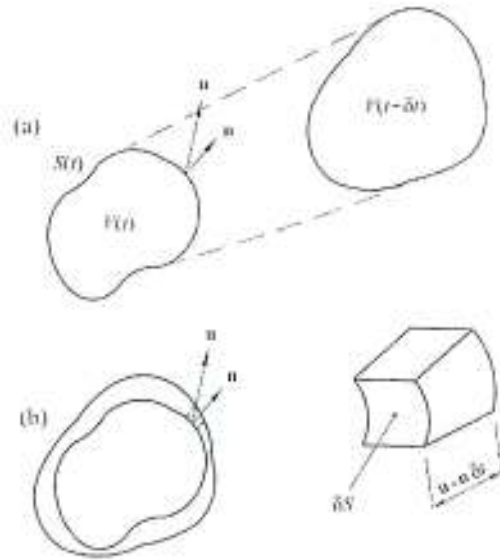


Figura 3.1: a) Elemento de volumen a un tiempo t y $t + \delta t$. b) El elemento de fluido en un tiempo t inmerso en el mismo elemento de fluido a un tiempo $t + \delta t$ y el diferencial de volumen correspondiente.

elemento de volumen δV en el que $\delta V = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta t \delta S$. Por lo tanto la integral de volumen dentro del límite de la ecuación (3.4) puede ser transformada en una integral de superficie en la que dV es reemplazado por $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta t \delta S$, de tal manera que la ecuación (3.4) queda:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\int_{S(t)} \alpha(t + \delta t) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right] + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \quad (3.5)$$

$$= \int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \quad (3.6)$$

Haciendo uso del teorema de la divergencia de Gauss, que en notación vectorial se escribe como:

$$\int_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV, \quad (3.7)$$

podemos convertir la integral de superficie en la ecuación (3.6) en una integral de volumen:

$$\int_S \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) dV \quad (3.8)$$

Sustituyendo la ecuación (3.8) en la ecuación (3.6) y ésta en (3.4) obtenemos el teorema de transporte de Reynolds.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_V \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) \right] dV \quad (3.9)$$

O bien, en notación tensorial:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \int_V \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha u_k) \right] dV \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) relaciona la derivada lagrangiana de una integral de volumen de una masa específica, con una integral de volumen en la cual el integrando contiene solamente derivadas eulerianas. En las siguientes secciones emplearemos este teorema para la derivación de la ecuación de conservación de masa y la de momento.

3.2. Ecuación de conservación de masa

En esta sección obtendremos, a partir de la aplicación del principio de conservación de masa a un elemento de fluido en un sistema lagrangiano, la ecuación de conservación de masa.

Considérese una masa específica de fluido, cuyo volumen V es arbitrariamente escogido. Si observamos esta masa dada de fluido mientras fluye, veremos que su tamaño y su forma cambian, pero la masa permanece constante. Éste es el principio de conservación de masa y tiene aplicación en fluidos. El equivalente matemático del enunciado de conservación de masa consiste en igualar a cero la derivada lagrangiana D/Dt de la masa contenida en V . La ley de conservación de masa indica que la masa no se crea ni se destruye, de manera que el elemento de masa $dm = \rho dV$ es constante. Así,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (3.11)$$

Haciendo uso del teorema de transporte de Reynolds ecuación (3.10), tenemos:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right] dV = 0. \quad (3.12)$$

Dado que el volumen V fue arbitrariamente escogido, la única forma en que la ecuación (3.12) se puede satisfacer para todas las posibles elecciones de V es que el integrando sea cero. Entonces la ecuación de conservación de masa se convierte en:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0. \quad (3.13)$$

3.3. Ecuación de conservación de momento

En esta sección derivaremos la ecuación de conservación de momento. Partiremos del principio de conservación de momento aplicado a un fluido en un marco de referencia lagrangiano. Posteriormente haremos uso del teorema de transporte de Reynolds y de la ecuación de continuidad para deducir la ecuación diferencial que expresa el principio de conservación de momento en términos de las fuerzas superficiales y “de cuerpo”.

El principio de conservación de momento surge de aplicar la segunda ley de Newton a un elemento de fluido. Considerando una masa dada de fluido en un sistema de referencia lagrangiano, i.e., siguiendo a la masa mientras fluye, sabemos que la razón a la que cambia el momento del elemento de fluido es igual a la fuerza externa neta que actúa sobre su masa.

Las fuerzas externas que actúan sobre el elemento de fluido pueden ser clasificadas en “fuerzas de cuerpo”, tales como la fuerza gravitacional y las fuerzas electromagnéticas, o en “fuerzas de superficie”, tales como fuerzas de presión o tensiones por viscosidad. Si \mathbf{f} es un vector que representa la resultante de las fuerzas de cuerpo por unidad de masa, entonces, la fuerza de cuerpo externa neta sobre una masa de volumen V será $\int_V \rho \mathbf{f} dV$. Por otra parte, si \mathbf{P} es un vector de superficie que representa la fuerza de superficie resultante por unidad de área, entonces la fuerza de superficie externa neta actuando sobre la superficie S que contiene a V será $\int_S \mathbf{P} dS$. La suma de las fuerzas resultantes descritas es igual a la razón de cambio del momento. La masa por unidad de volumen es ρ y su momento es $\rho \mathbf{u}$, donde \mathbf{u} es la velocidad del fluido; de tal manera que el momento contenido en el volumen V es $\int_V \rho \mathbf{u} dV$. Dado que observamos al elemento de fluido en un marco de referencia lagrangiano, tenemos que la razón de cambio del momento del elemento de fluido contenido en V será $(\frac{D}{Dt}) \int_V \rho \mathbf{u} dV$. Por lo tanto, la ecuación que resulta de imponer la ley de la conservación del momento es:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{P} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV.$$

La fuerza de superficie en notación tensorial estará dada por $P_j = \sigma_{ij} \hat{n}_i$, donde P_j es el tensor de primer rango, i.e. \mathbf{P} ; σ_{ij} es el tensor de segundo rango que representa una componente particular de la tensión, donde el primer subíndice indica que esta componente de la tensión actúa en el plano $x_i =$

constante y el segundo subíndice indica que ésta actúa en la dirección x_j . El tensor \hat{n}_i representa la normal unitaria en dirección i . Los subíndices i y j pueden tomar los valores 1, 2 o 3. De esta manera, la ecuación que expresa la conservación de momento nos queda en notación tensorial como:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_S \sigma_{ij} \hat{n}_i dS + \int_V \rho f_j dV. \quad (3.14)$$

Utilizando la ecuación (3.10), siendo la propiedad α el momento por unidad de volumen ρu_j en la dirección x_j , el lado izquierdo de la ecuación (3.14) nos queda como:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) \right] dV.$$

Por otra parte, utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, ec. (3.7), que en notación tensorial se expresa como:

$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \int_S a_i \hat{n}_i dS, \quad (3.15)$$

podemos convertir la integral de superficie del primer término del lado derecho de la ecuación (3.14) en una integral de volumen, esto es:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV = \int_S \sigma_{ij} \hat{n}_i dS.$$

De esta manera la ecuación (3.14) nos queda como:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) \right] dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int_V \rho f_j dV.$$

Dado que el volumen de integración es el mismo en cada uno de los términos de la ecuación anterior, podemos juntar todas estas integrales en una sola integral, esto es:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho f_j \right] dV = 0.$$

El integrando de la ecuación anterior debe ser cero, para de esta manera permitir la elección arbitraria del volumen V . Quedando la ecuación diferencial de conservación de momento, en coordenadas eulerianas, como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j. \quad (3.16)$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad anterior, tenemos que,

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j.$$

Si observamos el segundo y tercer término de la ecuación (3.16), podemos notar que la suma de ambos términos igualan a la ecuación (3.13) multiplicada por u_j , por lo tanto ambos términos suman cero, por lo que la ecuación diferencial que expresa la conservación de momento nos queda de la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j. \quad (3.17)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.17) representa el cambio de momento de una unidad de volumen del fluido. El primer término es la aceleración temporal, mientras que al segundo se le llama término convectivo, y es el encargado de transferir momento de la dirección j en la dirección k . En el lado derecho de la ecuación (3.17) tenemos las fuerzas causantes del cambio de momento. El primero de los términos es debido al gradiente de la tensión superficial, mientras que el segundo se debe a fuerzas de cuerpo, tales como la gravedad, que actúan sobre el fluido.

3.4. Importancia relativamente pequeña de los efectos difusivos en flujos astronómicos.

Se espera que los términos asociados con el tensor σ_{ij} sean despreciables en la mayoría de los problemas astronómicos. Para ver esto explícitamente, consideremos, por ejemplo, el cociente entre el término inercial $\partial(\rho u_j u_k)/\partial x_k$ y el término viscoso $\partial \sigma_{ij}/\partial x_k$ en la ecuación de momento, ec. (3.17):

$$\frac{\partial(\rho u_j u_k)/\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}/\partial x_k} \sim \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} \equiv Re, \quad (3.18)$$

donde U es la velocidad típica del fluido, μ es un factor de proporcionalidad y L es la escala de longitud del sistema; a $\nu \equiv \mu/\rho$ se le llama viscosidad cinemática y Re es el número de Reynolds. La viscosidad cinemática tiene las unidades de longitud por velocidad; esto es:

$$\nu = \mu v_f / \sigma \rho = v_f / n \sigma = v_f l,$$

donde v_f es otro factor de proporcionalidad relacionado con la velocidad de las partículas en el fluido. Esta última ecuación tiene la forma de un

coeficiente de difusión, i.e., la velocidad de difusión aleatoria de las partículas multiplicada por su trayectoria libre media l .

Sustituyendo la última ecuación en la ec. (3.18) tenemos que:

$$Re \sim \frac{UL}{v_T l} \gg 1. \quad (3.19)$$

Con otras palabras, para fluidos sónicos o supersónicos (condición que suele estar presente en los fluidos astrofísicos), el número de Reynolds debe ser grande si la descripción del fluido se asemeja a la de un gas diluido. De esta manera tenemos que cuando $Re \gg 1$, los efectos inerciales $\partial(\rho u_j u_k)/\partial x_k$ son mucho más importantes que las fuerzas viscosas $\partial\sigma_{ij}/\partial x_k$ ¹. De tal manera que la ecuación de momento nos queda como:

$$\rho \frac{Du_j}{Dt} = \rho f_j. \quad (3.20)$$

En la ecuación (3.20), el término del lado derecho involucra a todas las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido.

En el tratamiento del problema al que hace mención este trabajo, solamente tomaremos en cuenta como fuerzas de cuerpo a la gravedad y a la presión, despreciando los efectos que pudiera tener un campo magnético sobre el fluido (en nuestro caso, una nube interestelar). Dichos efectos no son necesariamente despreciables, sin embargo, es innecesario su desarrollo para nuestros objetivos.

¹Excepto para σ_{ii} , que nos indica las componentes sobre la diagonal del tensor y que podemos relacionar con la presión.

Capítulo 4

Teorema del virial

El teorema del virial es una expresión matemática obtenida a partir de la ecuación de momento (3.17). Aunque éste no puede suplir las soluciones detalladas de las ecuaciones de la hidrodinámica, permite entender de manera global el balance energético de las nubes interestelares.

En este capítulo trataremos la derivación del teorema del virial, para esto recurriremos a la ecuación de momento deducida en el capítulo anterior, tomaremos el producto punto de la dicha ecuación vectorial con el vector de posición x_i e integraremos sobre todo el espacio que contiene al sistema.

4.1. Derivación del teorema del virial

Partiendo de la ecuación de momento, ec. (3.17), derivada en el capítulo anterior; considerando como fuerza de cuerpo solamente a la gravedad, i.e., despreciando el campo magnético que actúa sobre el fluido y reduciendo el tensor σ_{ij} a σ_{ii} (este último tensor nos indica las componentes sobre la diagonal del tensor, que podemos relacionar con la presión interna P de un fluido), tenemos que la ecuación para el cambio en el momento nos queda como:

$$\rho \frac{Dx_i}{Dt} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (4.1)$$

Donde la aceleración gravitacional está dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -G \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}') (x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'. \quad (4.2)$$

Podemos visualizar la ecuación (4.2) como la fuerza gravitacional neta debida a la suma de las fuerzas ejercidas por cada uno de los elementos de masa

infinitesimales dm . Nótese que la distribución de masa $\rho(\mathbf{x}')$ se encuentra en el volumen V' , mientras que la fuerza gravitacional es calculada en cualquier punto del espacio.

Para obtener el teorema del virial se realiza el producto escalar del vector de posición x_i con la ecuación de momento, ec. (4.1); e integrando sobre un volumen arbitrario V ,

$$\int_V \rho x_i \frac{Du_i}{Dt} dV = \int_V \left(-x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV. \quad (4.3)$$

4.1.1. El término $\int x_i \rho \frac{Du_i}{Dt} dV$

Desarrollemos primeramente el término del lado izquierdo de la ecuación (4.3):

$$\begin{aligned} \int x_i \rho \frac{Du_i}{Dt} dV &= \int x_i \frac{Du_i}{Dt} dm = \int x_i \frac{D^2 x_i}{Dt^2} dm \\ &= \int \frac{D}{Dt} \left(x_i \frac{Dx_i}{Dt} \right) dm - \int \left(\frac{Dx_i}{Dt} \right)^2 dm. \end{aligned} \quad (4.4)$$

De esta última expresión, el segundo término es el doble de la energía cinética. El primer término por su parte puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \int 2x_i \frac{Dx_i}{Dt} dm &= \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \int \frac{Dx_i^2}{Dt} dm \\ &= \frac{1}{2} \frac{D^2}{Dt^2} \int x_i^2 dm \equiv \frac{1}{2} \ddot{\mathcal{I}}_L, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $\mathcal{I}_L \equiv \int x^2 dm$ es el momento de inercia, y donde nos hemos permitido extraer de la integral las derivadas temporales. Esto es válido ya que hemos considerado al elemento de masa dm constante.

Tenemos entonces que el lado izquierdo de la ecuación (4.3) nos queda finalmente como:

$$\int_V \rho x_i \frac{Du_i}{Dt} dV = \frac{1}{2} \frac{D^2 \mathcal{I}_L}{Dt^2} - 2K. \quad (4.6)$$

4.1.2. El término de presión

Analicemos ahora el primer término del lado derecho de la ecuación (4.3). Primeramente tenemos que:

$$\int_V \left(-x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) dV = \int_V \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (x_i P) \right] dV + \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_i} P dV. \quad (4.7)$$

Utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, ecuación (3.15), el primer término del lado derecho de la ecuación (4.7) nos queda como:

$$\int_V \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (x_i P) \right] dV = - \int_S P x_i \hat{n}_i dS = - \oint_A P \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA.$$

Mientras que desarrollando el segundo término del lado derecho de la ecuación (4.7) obtenemos:

$$\int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_i} P dV = 3 \int_V P dV = 2U,$$

donde U es la energía térmica del gas contenido en V ,

$$U \equiv \frac{3}{2} \int_V P dV.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.7) tenemos:

$$- \int_V x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} dV = 2U - \oint_A P \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (4.8)$$

4.1.3. El término gravitacional

Volvamos a la ecuación (4.3), donde el término gravitacional se escribe como:

$$\mathcal{W} = - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV. \quad (4.9)$$

Es fácil ver que podemos descomponer el potencial en dos partes

$$\phi = \phi_{\text{nube}} + \phi_{\text{ext}}. \quad (4.10)$$

La primera es el potencial gravitacional que genera la masa contenida en el volumen V sobre el cual estamos integrando (la masa de la nube). La segunda es el potencial debido a toda la masa externa a la nube, como podrá ser el caso del potencial de la Galaxia. Así, el término gravitacional se puede escribir como:

$$\mathcal{W} = - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{nube}}}{\partial x_i} dV - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} dV. \quad (4.11)$$

Supongamos como primer aproximación que las fuerzas producidas por toda la masa que se encuentra afuera de la nube son nulas, de manera que $\phi \approx \phi_{\text{nube}}$, entonces:

$$\mathcal{W} = - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{nube}}}{\partial x_i} dV. \quad (4.12)$$

Dado que el negativo del gradiente del potencial es la fuerza gravitacional:

$$\frac{\partial \phi_{\text{nube}}}{\partial x_i} = \int_{V'} \frac{G \rho'(x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV', \quad (4.13)$$

el término gravitacional del teorema del virial puede reescribirse como

$$\mathcal{W} = - \int_V x_i \rho \int_{V'} \frac{G \rho'(x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' dV. \quad (4.14)$$

Dado que hemos decidido que la fuerza se debe exclusivamente a la masa de la nube, el volumen primado y el volumen sin prima son el mismo,

$$V = V'.$$

En este caso, es fácil notar que la integral es indiferente al cambio de coordenadas, de manera que:

$$2 \mathcal{W} = - \int_V \int_{V'} G x_i \rho \frac{\rho'(x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' dV - \int_{V'} \int_V G x'_i \rho' \frac{\rho(x'_i - x_i)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} dV' dV. \quad (4.15)$$

Por su parte, notemos que

$$\frac{x_i(x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{x'_i(x'_i - x_i)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} = \frac{x_i^2 - 2x_i x'_i + x_i'^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.16)$$

Introduciendo este resultado en la ec. (4.15), y usando la definición de potencial gravitacional,

$$\mathcal{W} = - \frac{1}{2} \int_V \rho \phi_{\text{nube}} dV \equiv \mathcal{E}_{\text{grav}}. \quad (4.17)$$

Encontramos que, para el caso de una nube aislada, el término gravitacional del teorema virial, \mathcal{W} puede reescribirse como la energía gravitacional, $\mathcal{E}_{\text{grav}}$.

4.1.4. Teorema del virial

Por lo tanto, de las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.17), tenemos que la ecuación (4.3) nos queda como:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{I}_L}{dt^2} = \mathcal{E}_{\text{grav}} + 2U + 2K - \oint_A P \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA. \quad (4.18)$$

Esta última ecuación es el teorema del virial. Este teorema puede ser usado para examinar a grandes rasgos el balance energético de sistemas complejos, y ha sido ampliamente utilizado en la astronomía.

Parte II

Balance gravitacional en las
nubes interestelares.

Capítulo 5

Influencia de un potencial externo en el término gravitacional \mathcal{W} .

5.1. Las fuerzas de marea en el teorema del virial.

Como vimos en el capítulo 4, el término gravitacional en el teorema del virial está dado por:

$$\mathcal{W} = - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV. \quad (5.1)$$

Haciendo la suposición de que las fuerzas producidas por toda la masa que se encuentra afuera de la nube son despreciables comparadas con la gravedad propia de la nube (Chandrasekhar & Fermi 1953), encontramos que este término se aproxima a la energía gravitacional propia de la nube, ec. (4.17), esto es:

$$\mathcal{W} = - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV \simeq - \frac{1}{2} \int_V \rho \phi_n dV \equiv \mathcal{E}_{grav}. \quad (5.2)$$

Este resultado se basa en la suposición de que la nube se encuentra aislada, o bien, de que la distribución de masa externa es esferoidal y simétrica respecto al centro de masa.

Sin embargo, en el disco de las galaxias las nubes moleculares no necesariamente están aisladas. Por ejemplo, como se vió en el capítulo 2, la mayoría de la masa del gas molecular se encuentra organizada en brazos espirales,

barras y anillos (Young & Scoville (1991); Downes et al. (2001); Loinard et al. (1996), (1999); Dame et al. (2001); Helfer et al. (2003)), por lo que el campo gravitacional galáctico puede estar jugando un papel importante en el balance gravitacional global de las nubes moleculares.

Una cuestión clave para entender el balance energético de las nubes moleculares y saber si colapsarán o no, para formar estrellas, es entender cuál es la acción principal de las fuerzas de marea galácticas sobre las nubes, y su efecto en impedir o inducir el colapso.

Consideremos el caso de una nube interestelar sujeta a un potencial externo. Como se vio en el capítulo anterior, el potencial ϕ en la ecuación (4.10) estará dado por la suma del potencial propio de la nube debido a su propia masa, y el potencial externo debido a todos los agentes externos,

$$\phi = \phi_{\text{nube}} + \phi_{\text{ext}}.$$

De esta manera, el término gravitacional en el teorema del virial puede ser reescrito como:

$$\mathcal{W} = \mathcal{E}_{\text{grav}} + W_{\text{ext}}. \quad (5.3)$$

Donde $\mathcal{E}_{\text{grav}}$ está dado por la ecuación (4.17) y W_{ext} por:

$$W_{\text{ext}} = - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} dV. \quad (5.4)$$

El significado físico de este término es la contribución al balance gravitacional por parte de las fuerzas de marea, y puede ser positivo o negativo, i.e., puede ayudar a desgarrar la nube, o bien, comprimirla. Nótese que hemos definido a W_{ext} con un signo menos, de tal manera que, si es negativo, contribuirá al colapso, tal como lo hace la energía gravitacional $\mathcal{E}_{\text{grav}}$, pero si es positivo, actuará en contra de la energía gravitacional de la nube, contribuyendo al desgarramiento de ésta.

Para visualizar lo descrito anteriormente, en la Figura 5.1 hemos dibujado cuatro situaciones diferentes en las que una nube esférica está embebida en un potencial gravitacional externo ϕ_{ext} . En el primer caso, las fuerzas que actúan sobre el lado derecho de la nube son más fuertes que las fuerzas actuando sobre el lado izquierdo. Esto se representa esquemáticamente mediante una flecha más gruesa y larga al lado derecho de la nube, y con un mayor valor absoluto de la pendiente del potencial gravitacional externo. Dado que la pendiente de ϕ_{ext} es negativa, las fuerzas son positivas ($F = -\nabla\phi$), pero más fuertes en el lado derecho de la nube que en el izquierdo. El efecto neto de este campo externo es el de desgarrar la nube. De hecho, para el lado

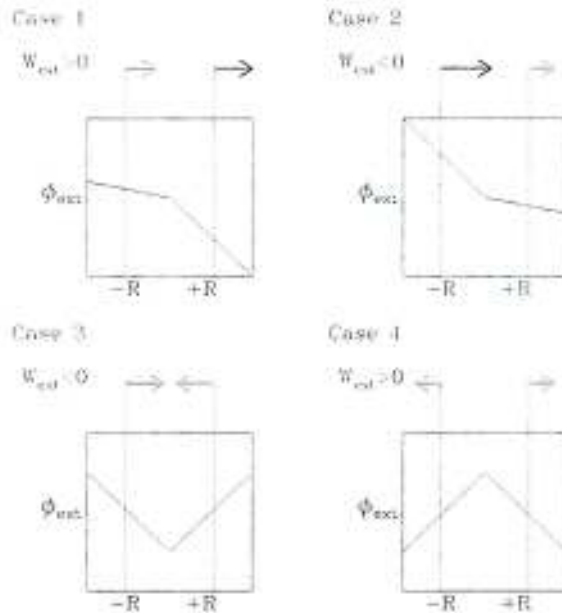


Figura 5.1: Diagrama de una nube interestelar esférica embebida en un potencial gravitacional externo. El recuadro indica el gradiente del potencial externo ϕ_{ext} en la región en la que está situada la nube. El tamaño de las flechas sobre la nube muestra el valor de la fuerza producida por el potencial externo. Se indica además el valor neto de W_{ext} para cada caso.

izquierdo de la nube, $x_i < 0$, $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i < 0$. El producto de estas cantidades es positivo, pero con el signo menos de W_{ext} , cc. (5.4), el valor de W_{ext} resulta negativo. Sin embargo, para el lado derecho de la nube, $x_i > 0$, $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i < 0$. El producto es negativo, pero con el signo menos de la definición de W_{ext} tendremos un valor positivo para W_{ext} . Dada la simetría de la nube, y dado que las fuerzas son mayores del lado derecho de la nube, el valor neto de W_{ext} es positivo, i.e., el campo externo actúa contra la energía gravitacional propia de la nube. Esto es, la nube está siendo desgarrada por el campo gravitacional externo. Para el segundo caso la fuerza que domina es la del lado izquierdo, y el efecto sobre la nube es el de una compresión. Mediante un análisis similar al anterior se encuentra que $W_{\text{ext}} < 0$. Los casos 3 y 4 pueden ser analizados de la misma manera, encontrando que el resultado para el valor neto de W_{ext} en cada uno de éstos es respectivamente negativo y positivo. Así, vemos que el valor de W_{ext} muestra el efecto neto de las fuerzas de marea sobre el volumen de la nube.

5.2. Influencia de un potencial externo sobre un cascarón esférico.

En esta sección discutiremos brevemente el problema de un potencial gravitacional externo actuando sobre un trozo de un cascarón esférico, el propósito es verificar, mediante un ejemplo sencillo, que el término W_{ext} no es necesariamente cero, independientemente del valor del laplaciano del potencial.

Tomemos un trozo de este cascarón esférico delimitado por (r_1, r_2) , (θ_1, θ_2) , (ϕ_1, ϕ_2) . Supongamos que la densidad del cascarón es constante, $\rho = \rho_0$, y que el potencial externo es el de una masa puntual: $\phi_{\text{ext}} = -GM/r$, donde M es la masa puntual y r es la distancia entre esta masa y algún punto en el espacio. Si consideramos simetría esférica respecto a la masa puntual M , tenemos que el gradiente del potencial $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i = \partial\phi_{\text{ext}}/\partial r = GM/r^2$, así, tendremos que el término W_{ext} se escribirá como:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ext}} &= - \int_V \rho x_i \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} dV \\
 &= -\rho_0 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
 &= -GM\rho_0 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r \sin \theta dr d\theta d\phi \\
 &= GM\rho_0 \cos \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \phi \Big|_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} \\
 &= \frac{GM\rho_0}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) (\phi_2 - \phi_1) (r_2^2 - r_1^2). \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

De la última expresión de la ecuación (5.5) podemos observar que W_{ext} no es necesariamente cero, independientemente del valor que tome el laplaciano del potencial en cualquier punto del espacio.

Capítulo 6

Cálculo de W_{ext}

6.1. Tratamiento del problema

El asunto que nos concierne ahora es el cálculo del término W_{ext} , ec. (5.4), en una nube molecular interestelar. Para esto haremos algunas suposiciones sobre la nube en cuestión. Por simplicidad se considerará una nube aproximadamente esférica (Ver Figura 6.2), con un tamaño y densidad típicos de las nubes moleculares gigantes en la Galaxia: se considerará una nube de hidrógeno molecular con diámetro de 25 pc, así como una densidad constante $n \sim 50 \text{ cm}^{-3}$.

La nube estará embebida en un potencial galáctico con brazos espirales implementado por Pichardo et al. (2003). Dado que no hay una expresión analítica del potencial que represente completamente la estructura espiral en su forma tridimensional, el potencial fue construido mediante un conjunto de pequeños esferoides oblatos inhomogéneos. Los esferoides se ubican sobre una espiral logarítmica. El potencial es suave intentando reproducir la espiral trazada por la población de estrellas viejas, y tiene derivadas continuas en todo el espacio. La masa total en los brazos espirales de la galaxia (M_S) es de $1,498 \times 10^9 M_\odot$. Los brazos comienzan a una distancia galactocéntrica $R_i = 3,3 \text{ kpc}$ y terminan en $R_f = 12 \text{ kpc}$, el ancho de los brazos espirales es de 2 kpc. La caída de la densidad a lo largo de los brazos es exponencial con la misma longitud de escala que en el disco (2.5 kpc). La razón de la masa de los brazos espirales entre la masa del disco M_D es $M_S/M_D = 0,0175$.

El potencial tiene simetría con respecto al eje de rotación de la Galaxia, tal como se muestra en la Figura 6.1, y simetría de espejo con respecto al plano de la Galaxia. La dependencia del potencial en la dirección z va como $\text{sech}^2(z/z_s)$, donde $z_s = 2,5 \text{ kpc}$ es la escala de altura. Las dimensiones totales

del modelo de potencial galáctico que se utilizaron son, en dirección x e y de 20 kpc (éste es el diámetro de la Galaxia), mientras que en dirección z tiene una extensión de 2 kpc, esto sin considerar el halo, mismo que se extiende sobre un radio de 100 kpc desde el centro de la Galaxia.

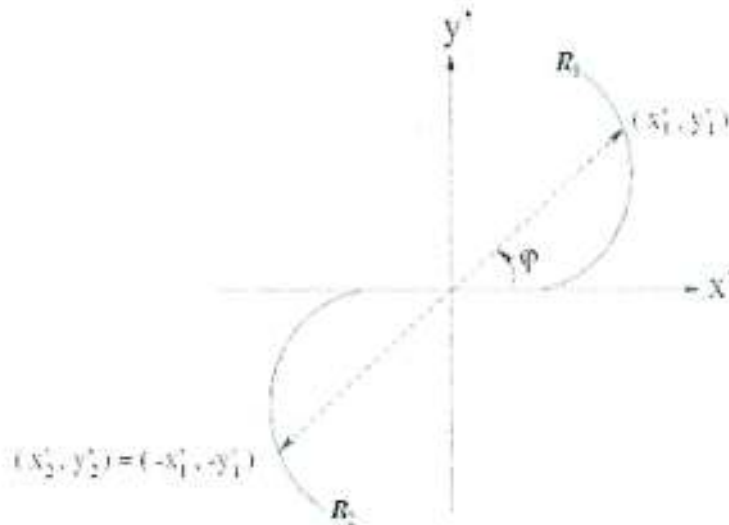


Figura 6.1: Diagrama esquemático mostrando la simetría axial del potencial galáctico. Se muestran las dos ramas del patrón espiral y las coordenadas de un punto dado (x_1', y_1') sobre el brazo espiral R_1 y el punto opuesto $(x_2', y_2') = (-x_1', -y_1')$ en el brazo espiral R_2 . Debido a esta simetría del sistema, el cálculo se hará solamente para $x \geq 0$.

El cálculo del término W_{ext} se realizará descomponiendo este término en sus contribuciones en x , y y z , y calculando cada una por separado. Esto es:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ext}} &= - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} dV \\
 &= - \int_V x \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x} dV - \int_V y \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial y} dV - \int_V z \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial z} dV \\
 &\equiv W_{\text{ext}}^x + W_{\text{ext}}^y + W_{\text{ext}}^z.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Para calcular cada término de W_{ext} se requiere primero dividir el espacio donde será calculado. Segmentaremos el espacio total en el que se ubica la galaxia en secciones cúbicas de 50 pc de lado¹, i.e., un conjunto de celdas o bien, una malla.

¹La nube, de 12.5 pc de radio, quedará centrada dentro de esta sección cúbica de 50 pc.

Para el cálculo de W_{ext} dividiremos la longitud total de la galaxia, a lo largo de cada eje, en secciones de 50 pc, barriendo una distancia de 10 kpc en dirección x y 20 kpc en dirección y . Mientras que en dirección z sólo consideraremos la posición en el plano galáctico ($z = 0$). Vemos que para W_{ext}^z se realiza el cálculo sólo sobre la mitad de la longitud total de la galaxia, esto con el fin de aprovechar así las simetrías del sistema mostradas anteriormente.

Posteriormente debemos subdividir cada una de estas celdas en los elementos donde será evaluado el potencial ϕ_{ext} , así como $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i$. Para esto seccionaremos cada una de las celdas en una malla de 7 elementos en cada dirección. El modelo de nube esférica se diseña a partir de los elementos de la celda tal como se muestra en la figura 6.2, condicionando que en el cálculo de W_{ext} se realice la integración sólo para un radio menor que el tamaño de la nube.



Figura 6.2: Esquema de la construcción de una nube esférica a partir de los elementos en los que se subdivide cada una de las celdas. Aquí podemos apreciar los 7 elementos en los que se subdivide la celda en cada dirección.

El potencial en cada elemento se calcula mediante el uso del programa `Spiral.f`, proporcionado por Bárbara Pichardo. Éste requiere que se le indique la posición en coordenadas cilíndricas del elemento en cuestión. Para esto simplemente se convierte la posición cartesiana del elemento en el contexto galáctico a una posición en coordenadas cilíndricas y posteriormente se almacena el resultado obtenido mediante `Spiral.f` en una matriz. Esta matriz puede ser utilizada a continuación para el cálculo de las diferencias de potenciales entre los elementos que conforman la nube, i.e., $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i$. Sin embargo el programa `Spiral.f` también puede calcular este gradiente directamente.

Así, la razón para el cálculo de ϕ_{ext} se debe a que el término W_{ext} se puede descomponer en tres términos en los que aparece ϕ_{ext} y entonces calcular W_{ext} mediante su suma con el fin de verificar consistencia en los resultados. Esto es:

$$\int_V x_i \rho \partial \phi_{\text{ext}} / \partial x_i dV = \int_V \partial(\phi_{\text{ext}} x_i \rho) / \partial x_i dV - \quad (6.2)$$

$$3 \int \phi_{\text{ext}} \rho dV - \int \phi_{\text{ext}} x_i \partial \rho / \partial x_i dV .$$

Usando el teorema de Gauss, Ec. (3.15), el primer término del lado derecho de la ecuación (6.3) puede ser interpretado como la presión gravitacional evaluada en las fronteras de la nube, i.e.:

$$\int_V \frac{\partial(\phi_{\text{ext}} \rho x_i)}{\partial x_i} dV = \oint_S (\phi_{\text{ext}} \rho x_i) \hat{\mathbf{n}}_i dS. \quad (6.3)$$

El segundo término, por similitud con la energía gravitacional, puede ser interpretado como tres veces el trabajo realizado para construir la distribución de densidad de la nube en contra de la masa externa, esto es:

$$E_{g,\text{ext}} = 3 \int \phi_{\text{ext}} \rho dV. \quad (6.4)$$

Finalmente, el último término en la ecuación (6.3),

$$\int \phi_{\text{ext}} x_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dV \quad (6.5)$$

involucra el gradiente del campo de densidad. Aunque no hay una interpretación clara de este término, podemos observar que en nuestro caso, con una distribución de masa homogénea dentro del volumen de integración, dicho término se anulará. Así, podemos calcular finalmente el término W_{ext} de dos maneras diferentes: calculándolo directamente mediante la suma de W_{ext}^x , W_{ext}^y y W_{ext}^z , o bien, mediante la suma de los términos descritos en las ecuaciones (6.3), (6.4) y (6.5). Los resultados obtenidos de estos cálculos se almacenan en un archivo que contiene la posición de la nube, así como el valor de los términos $E_{g,\text{ext}}$, $\oint_S (\phi_{\text{ext}} \rho x_i) \hat{\mathbf{n}}_i dS$, W_{ext} y el término de la ecuación (6.5). Estos resultados se discutirán en el capítulo 7.

6.2. Cálculo analítico de W_{ext}

6.2.1. Potencial par

Revisemos el uso de la ecuación (5.4) analíticamente para el caso de un potencial parabólico tridimensional par dado por

$$\phi_{\text{ext}} = \pm A(x^2 + y^2 + z^2) \equiv \pm A r^2, \quad (6.6)$$

donde A es una constante cuyo signo define la concavidad del potencial ϕ_{ext} , de manera que

$$\frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} = \pm 2Ax_i.$$

Intervalo simétrico

Si consideramos la densidad ρ constante e integramos en un intervalo simétrico, vemos que para el potencial dado por la ecuación (6.6) tendremos:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} dV \\ &= -\rho \int_{-x_0}^{x_0} \int_{-y_0}^{y_0} \int_{-z_0}^{z_0} \left[x \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x} + y \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial z} \right] dz dy dx \\ &= -\frac{16}{3} A \rho (x_0^3 y_0 z_0 + x_0 y_0^3 z_0 + x_0 y_0 z_0^3). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Considerando el caso en el que $A > 0$, con $\rho > 0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ y $z_0 > 0$, de la ecuación (6.7) tenemos entonces que $W_{\text{ext}} < 0$. Mientras que si $A < 0$ tendremos $W_{\text{ext}} > 0$.

Intervalo asimétrico

Si consideramos la densidad ρ constante e integramos en un intervalo asimétrico, definido por $x \in (0, 2x_0)$, $y \in (0, 2y_0)$, $z \in (0, 2z_0)$, vemos que para el potencial dado por la ecuación (6.6) tendremos:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} dV \\ &= -\rho \int_0^{2x_0} \int_0^{2y_0} \int_0^{2z_0} \left[x \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x} + y \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial z} \right] dz dy dx \\ &= -\frac{64}{3} A \rho (x_0^3 y_0 z_0 + x_0 y_0^3 z_0 + x_0 y_0 z_0^3). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Vemos nuevamente que para $A > 0$ obtenemos $W_{\text{ext}} < 0$. Mientras que si $A < 0$ tendremos $W_{\text{ext}} > 0$.

6.2.2. Potencial impar

Consideremos ahora el cálculo de W_{ext} para el caso de un potencial tridimensional impar dado por:

$$\phi_{\text{ext}} = \begin{cases} A(x^2 + y^2 + z^2) & \text{si } z \geq 0, \\ -A(x^2 + y^2 + z^2) & \text{si } z < 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Intervalo simétrico

Si consideramos la densidad ρ constante e integramos en un intervalo simétrico, vemos que con el uso del potencial dado por la ecuación (6.9), tendremos ahora que:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= - \int_V x_i \rho \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x_i} dV \\ &= -\rho \int_{-x_0}^{x_0} \int_{-y_0}^{y_0} \int_0^{z_0} \left[x \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x} + y \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial z} \right] dz dy dx \\ &\quad + \rho \int_{-x_0}^{x_0} \int_{-y_0}^{y_0} \int_{-z_0}^0 \left[x \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial x} + y \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial z} \right] dz dy dx \\ &= -\frac{8}{3} A \rho (x_0^3 y_0 z_0 + x_0 y_0^3 z_0 + x_0 y_0 z_0^3) \\ &\quad + \frac{8}{3} A \rho (x_0^3 y_0 z_0 + x_0 y_0^3 z_0 + x_0 y_0 z_0^3) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Así, de la ecuación (6.10) vemos que, para el potencial dado por la ec. (6.9), tendremos $W_{\text{ext}} = 0$ independientemente del valor que tomen A , ρ , x_0 , y_0 y z_0 .

Intervalos asimétricos

Calculemos ahora W_{ext} para el caso del potencial tridimensional impar dado por la ecuación (6.9), con A y ρ constantes, pero considerando ahora los intervalos asimétricos definidos por $x \in (0, 2x_0)$, $y \in (0, 2y_0)$, $z \in (0, 2z_0)$ y por $x \in (-2x_0, 0)$, $y \in (-2y_0, 0)$, $z \in (-2z_0, 0)$. Para estos casos tendremos:

$$W_{\text{ext}} = \mp \frac{64}{3} A \rho (x_0^3 y_0 z_0 + x_0 y_0^3 z_0 + x_0 y_0 z_0^3) \quad (6.11)$$

Donde para el primer caso obtenemos $W_{\text{ext}} < 0$, y para el segundo caso (con $r < 0$) tendremos $W_{\text{ext}} > 0$. Vemos así que para un intervalo descentrado en un potencial asimétrico obtendremos valores positivos o negativos dependiendo de la concavidad del potencial en dicho intervalo.

6.3. Cálculo numérico de W_{ext}

En la sección anterior discutimos el cálculo analítico del término W_{ext} . A continuación se calcularán numéricamente los resultados obtenidos introduciendo los valores típicos, considerados anteriormente, para la densidad y la longitud de la nube, éstos son: $\rho = 50 \text{ cm}^{-3}$ y $x_0 = y_0 = z_0 = 12,5 \text{ pc.}^2$ Mientras que la constante A contendrá las dimensiones necesarias (s^{-2}) y se considerará igual a la unidad.

De esta manera tenemos que las ecuaciones (6.7), (6.8), (6.10) y (6.11) pueden ser reducidas respectivamente a las expresiones para W_{ext} que se encuentran en el Cuadro 6.1. En éste se pueden comparar los valores obtenidos para W_{ext} , sustituyendo los valores de A , ρ y r_0 en las expresiones analíticas, con los valores obtenidos utilizando el programa diseñado para ello.

Cuadro 6.1: Comparación entre el valor esperado y el calculado de W_{ext} , las dimensiones de éstos son $M_{\odot} \text{ Kpc}^2 \text{ s}^{-2}$.

	Intervalo	Ec. para W_{ext}	Valor esperado	Valor calculado
Potencial par	Simétrico	$-16A\rho r_0^5$	-451,34	-459,36
	Asimétrico	$-64A\rho r_0^5$	-1805,4	-1850,6
Potencial impar	Simétrico	0	0	$3,6563 \times 10^{-14}$
	Asimétrico	$\mp 64A\rho r_0^5$	$\mp 1805,4$	$\mp 1850,6$

A partir del Cuadro 6.1 podemos observar que la diferencia entre el valor esperado analíticamente y el valor calculado haciendo uso de nuestro programa no difieren en más de un 3%. Esto nos dá confianza en los resultados obtenidos por el programa para estos potenciales y nos permite introducir, con seguridad, un potencial más complejo tal como el implementado por Pichardo et al. (2003) para un potencial galáctico con brazos espirales.

²Nótese que la nube que consideraremos para el cálculo de W_{ext} utilizando el potencial galáctico será esférica, con un diámetro de 25 pc, mientras que aquí estamos empleando, por simplicidad, una región cúbica con 25 pc de arista.

6.4. Programa para el cálculo de W_{ext} .

En esta sección explicaremos de manera resumida las operaciones realizadas por nuestro programa, `gravity_parallel_arms.f`, para el cálculo de W_{ext} . El programa completo se encuentra en el Apéndice A, escrito en el lenguaje de programación fortran.

El programa básicamente divide la región donde se ubica la galaxia en secciones cúbicas donde posteriormente se ubicará la nube. Y cada una de estas secciones es a su vez subdividida en una malla de 343 elementos. A continuación se realiza el cálculo del potencial en cada uno de éstos, con el propósito de calcular el gradiente $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i$.

El cálculo de ϕ_{ext} y de $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i$ se realizará para todos los elementos de la nube y la integración que requerimos para el término W_{ext} se hará para un radio menor que el del tamaño de ésta, formando de esta manera una nube aproximadamente esférica, tal como se mostró en la Figura 6.2.

Como se mencionó anteriormente, nuestro código para el cálculo de W_{ext} emplea el programa `Spiral.f` para el cálculo del potencial ϕ_{ext} , así como para el cálculo del gradiente $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i$. Éste requiere que se le indique la posición en coordenadas cilíndricas de cada elemento, por lo que se debe convertir la posición cartesiana del elemento a una posición en coordenadas cilíndricas.

Posteriormente se almacena el resultado obtenido mediante `Spiral.f` en una matriz. Esta matriz puede ser utilizada a continuación para el cálculo de las diferencias de potenciales entre los elementos que conforman la nube, i.e., $\partial\phi_{\text{ext}}/\partial x_i$. Sin embargo el programa `Spiral.f` también puede calcular este gradiente directamente. El programa en el apéndice A hace uso de esta última opción.

Por último se calcula el cociente $W_{\text{ext}}/\mathcal{E}_{\text{grav}}$ y se almacena el resultado para su análisis posterior.

Capítulo 7

Resultados

Como vimos en el capítulo 5, el término gravitacional \mathcal{W} en el teorema del virial puede ser reescrito como la suma de dos términos, la energía gravitacional propia $\mathcal{E}_{\text{grav}}$ y la contribución dada por el potencial externo W_{ext} . Ec. (5.3):

$$\mathcal{W} = \mathcal{E}_{\text{grav}} + W_{\text{ext}}.$$

Para analizar los efectos que tendrá el potencial externo ϕ_{ext} sobre la energía gravitacional de nuestra nube, podemos comparar la energía gravitacional de una distribución de masa esférica ($\mathcal{E}_{\text{grav}}$), dada por:

$$\mathcal{E}_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (7.1)$$

donde G es la constante gravitacional, R es el radio de la esfera y M es la masa de la esfera, con el término gravitacional W_{ext} en el teorema del virial (Ec. 5.4), de manera que tendremos el cociente:

$$\gamma = \frac{W_{\text{ext}}}{\mathcal{E}_{\text{grav}}} \quad (7.2)$$

Así, si $\gamma \gg 1$ tendremos que el valor absoluto de la energía gravitacional propia de la nube $|\mathcal{E}_{\text{grav}}|$ resulta ser mucho menor que el de la energía gravitacional ejercida sobre la nube por un potencial externo $|W_{\text{ext}}|$, de manera que este último será el principal agente confinante de la nube¹. Para el caso $\gamma \sim 1$ tendremos que $|\mathcal{E}_{\text{grav}}| \sim |W_{\text{ext}}|$, actuando la acción de ambos en la misma dirección. En ambos casos vemos que la suposición $\mathcal{W} \approx \mathcal{E}_{\text{grav}}$ no será necesariamente válida.

¹Ya que $\mathcal{E}_{\text{grav}}$ es siempre negativo, sabremos que si $\gamma > 0$ la nube estará siendo compactada por ambos potenciales (ϕ_{nube} y ϕ_{ext}).

Mientras que si $\gamma \sim 0$ tendremos dos casos: $0 < \gamma \ll 1$ y $-1 \ll \gamma < 0$, en el primer caso W_{ext} estará actuando en la misma dirección que $\mathcal{E}_{\text{grav}}$, mientras que en el segundo caso tenemos que W_{ext} actúa en contra de $\mathcal{E}_{\text{grav}}$, sin embargo, para ambos casos el contenido energético de la nube estará dominado por $\mathcal{E}_{\text{grav}}$, por lo tanto se puede suponer que $|\mathcal{E}_{\text{grav}}| \sim |W_{\text{ext}}|$ y entonces $\mathcal{W} \approx \mathcal{E}_{\text{grav}}$.

Por otra parte, si tenemos que $\gamma \sim -1$ vemos que el valor absoluto de la energía gravitacional propia $|\mathcal{E}_{\text{grav}}|$ será del orden de $|W_{\text{ext}}|$, y si $\gamma \ll -1$ tendremos que $|\mathcal{E}_{\text{grav}}| \ll |W_{\text{ext}}|$, en ambos casos el valor negativo de γ nos indica que $W_{\text{ext}} > 0$, ésto es, el potencial externo estaría intentando desgarrar a la nube. Para $|\mathcal{E}_{\text{grav}}| \sim |W_{\text{ext}}|$ vemos que la nube estará en un estado de equilibrio, intentando ser confinada por $\mathcal{E}_{\text{grav}}$ y desgarrada por W_{ext} . Para $|\mathcal{E}_{\text{grav}}| \ll |W_{\text{ext}}|$ vemos que el efecto de confinamiento de $\mathcal{E}_{\text{grav}}$ es despreciable comparado con W_{ext} . De nuevo tenemos que la suposición $\mathcal{W} \approx \mathcal{E}_{\text{grav}}$ no sería necesariamente válida.

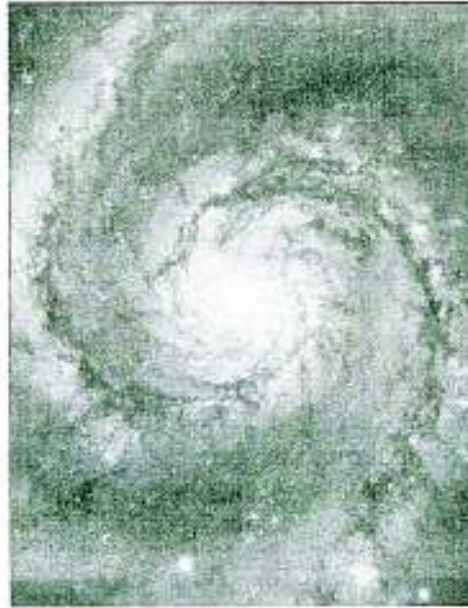


Figura 7.1: Galaxia Remolino, nótese la estructura de los brazos espirales y su semejanza con la mostrada en la Figura 7.2. Créditos: NASA.

En la Figura 7.1 vemos una imagen de la Galaxia Remolino (M51) donde se distingue claramente la estructura de sus brazos espirales. Mientras que en la Figura 7.2 tenemos el valor de nuestro potencial ϕ_{ext} como función del radio galactocéntrico en el plano $z = 0$. Las líneas sólidas horizontal y vertical indican, respectivamente, los cortes mostrados en las Figuras 7.3 y 7.4.

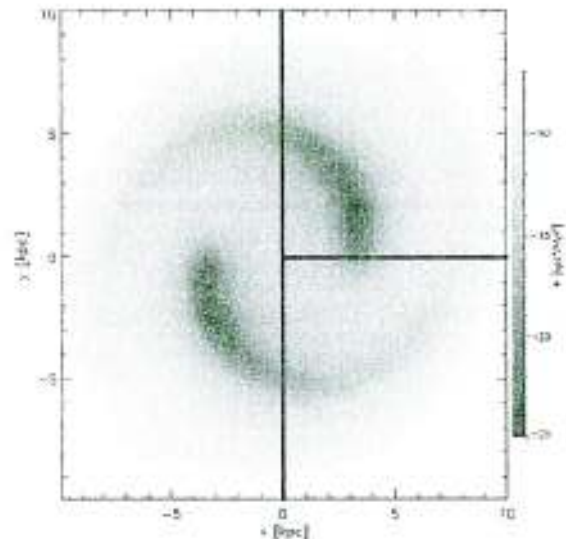


Figura 7.2: Se muestra en escala de grises el valor del potencial gravitacional galáctico ϕ_{ext} como función del radio galactocéntrico en $z = 0$. La línea sólida horizontal muestra el corte de la Figura 7.3, mientras que la vertical nos indica el corte de la Figura 7.4.

El panel superior de la Figura 7.3 muestra el valor del potencial galáctico (ϕ_{ext}) como función del radio galactocéntrico con $y = 0$ y $z = 0$. En éste se puede apreciar el decremento en el valor del potencial en las regiones donde se localizan los brazos espirales, i.e., con x entre $\sim 2,5$ y ~ 4 kpc y entre $\sim 7,5$ y $\sim 8,5$ kpc; correspondiendo a la parte más interna de uno de los brazos y a la región más externa del otro brazo respectivamente.

Por su parte, del panel inferior de la Figura 7.3 podemos apreciar los valores que toman W_{ext}^x , W_{ext}^y , W_{ext}^z y W_{ext} para una nube con diámetro de 25 pc y densidad $\rho = 50 \text{ cm}^{-3}$ con $y = 0$ y $z = 0$ (línea horizontal en la Figura 7.2). De aquí podemos observar que W_{ext} será siempre negativo, mientras que la única contribución positiva se daría en W_{ext}^z , justo en los bordes de los brazos espirales.

Similarmente, para el panel superior de la Figura 7.4 vemos el comportamiento del potencial galáctico (ϕ_{ext}) como función del radio galactocéntrico con $x = 0$ y $z = 0$. En éste se puede apreciar el decremento en el valor del potencial en las regiones donde se localizan los brazos espirales, i.e., con y entre ~ -6 y $\sim -4,5$ kpc y entre $\sim 4,5$ y ~ 6 kpc. Mientras que en el panel inferior vemos los valores que toman W_{ext}^x , W_{ext}^y , W_{ext}^z y W_{ext} para la nube anteriormente descrita con $x = 0$ y $z = 0$ (línea vertical en la Figura 7.2).

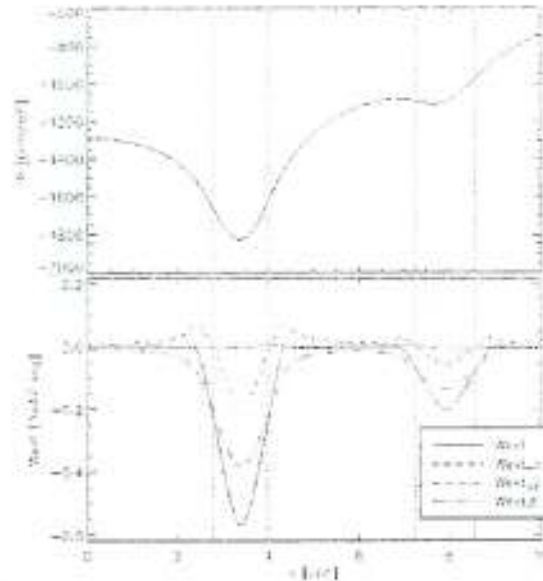


Figura 7.3: Panel superior: potencial galáctico (ϕ_{ext}) como función del radio galactocéntrico con $y = 0$ y $z = 0$. Las líneas verticales punteadas muestran la posición aproximada de los brazos espirales. Panel inferior: W_{ext}^x , W_{ext}^y , W_{ext}^z y W_{ext}^{xy} para una nube de 25 pc y densidad $\rho = 50 \text{ cm}^{-3}$ con $y = 0$ y $z = 0$.

Observemos que W_{ext} será siempre negativo, mientras que las contribuciones positivas se dan en W_{ext}^x y W_{ext}^y , de manera similar éstas ocurren sólo en los bordes de los brazos espirales.

De los paneles inferiores de las Figuras 7.3 y 7.4 podemos notar que el término W_{ext}^z es casi siempre el que más contribuye a W_{ext} . Esto se puede ver más fácilmente en la Figura 7.5, donde mostramos el cociente de la suma de $W_{\text{ext}}^x + W_{\text{ext}}^y \equiv W_{\text{ext}}^{xy}$ entre W_{ext}^z . De aquí observamos que, para la región central de los brazos, W_{ext}^z duplicará la contribución que pueda hacer W_{ext}^{xy} , siendo ambas contribuciones negativas. Mientras que para el borde de los brazos tenemos que la contribución W_{ext}^{xy} será positiva, mientras que W_{ext}^z sigue siendo negativa y dominante.

De manera similar podemos observar los resultados para el cociente entre W_{ext}^{xy} y $\mathcal{E}_{\text{grav}}$ en la Figura 7.6, de donde vemos que W_{ext}^{xy} resulta ser despreciable comparado con $\mathcal{E}_{\text{grav}}$, a su vez que tendrá contribuciones tanto positivas como negativas. Mientras que $\mathcal{E}_{\text{grav}}$ será, por definición (Ec. 7.1), siempre negativa.

Finalmente, los resultados de $W_{\text{ext}}/\mathcal{E}_{\text{grav}}$ para nuestra nube de 25 pc de diámetro, con una densidad de 50 cm^{-3} se muestran en la Figura 7.7 en función de su ubicación en el plano galáctico ($z = 0$). De esta figura se puede apreciar que γ siempre es positivo, Esto es, W_{ext} siempre será negativo. Esto

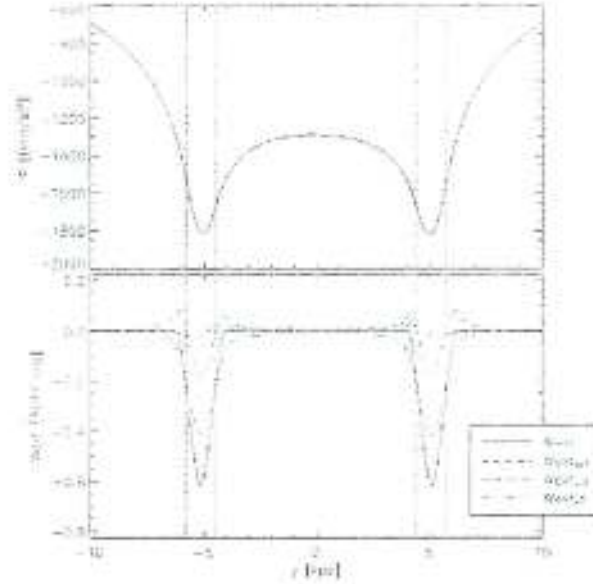


Figura 7.4: Panel superior: potencial galáctico (ϕ_{ext}) como función del radio galactocéntrico con $x = 0$ y $z = 0$. Las líneas verticales punteadas muestran la posición aproximada de los brazos espirales. Panel inferior: W_{ext}^x , W_{ext}^y , W_{ext}^z y W_{ext} para una nube de 25 pc y densidad $\rho = 50 \text{ cm}^{-3}$ con $y = 0$ y $z = 0$.

se debe principalmente a que el término W_{ext}^z (Ec. 6.1) es siempre negativo. La concavidad del potencial es la que determina el comportamiento de cada uno de los términos W_{ext}^x , W_{ext}^y y W_{ext}^z . Y tal como se observó en la Figura 7.5, la contribución de W_{ext}^{xy} no será suficiente para cambiar apreciablemente el resultado global de W_{ext} .

Así, tenemos que la influencia que puede ejercer un potencial galáctico externo con brazos espirales, sobre el balance gravitacional de las nubes interestelares resulta ser despreciable para nubes con los parámetros físicos utilizados anteriormente. De manera que a lo más tendremos una contribución del 5% a la energía gravitacional de la nube proporcionada por el potencial externo. Esto es, en nuestro caso, se cumple la suposición $\mathcal{W} \approx \mathcal{E}_{\text{grav}}$.

Sin embargo, se realizaron también cálculos para una nube con radio de 1 pc, no reportados en el presente trabajo, en los que se encontró que el cociente γ (Ec. 7.2) resultaba ser mucho menor aún, por lo que esperamos que al aumentar el tamaño de la nube el valor de γ aumente progresivamente.

Por otra parte, por razones de tiempo para la presentación de este trabajo, el potencial galáctico que se utilizó consistió solamente de la contribución de los brazos al mismo, y se relegó la contribución de el halo, bulbo y disco a este potencial. Sin embargo dichas componentes juegan un papel importante: el

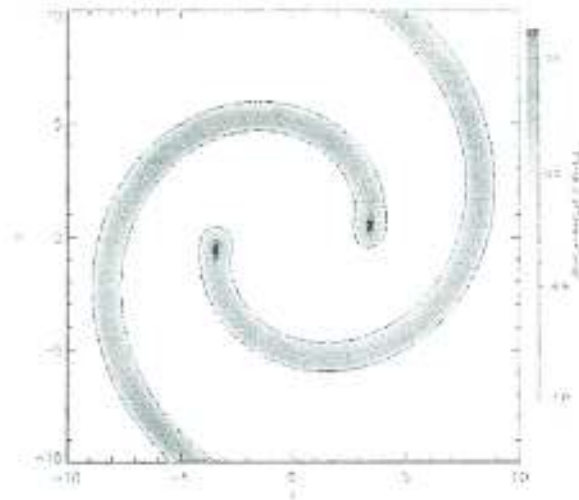


Figura 7.5: Cociente, en escala de grises, de $(W_{\text{ext}}^x + W_{\text{ext}}^y)/W_{\text{ext}}^z$ para $z = 0$. El contorno muestra el nivel $W_{\text{ext}}^x/W_{\text{ext}}^z = 0$.

potencial de los brazos espirales es apenas de $\sim 1/10$ del potencial del halo, por lo que esperamos que al incluir todas las contribuciones al potencial γ sea aún mayor.

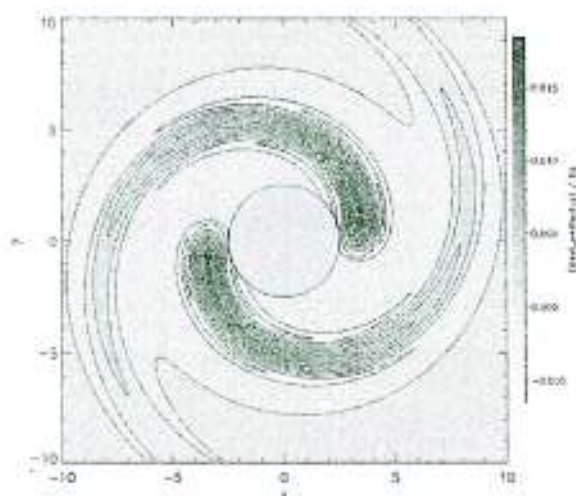


Figura 7.6: Diagrama del cociente, en escala de grises, de $(W_{\text{ext}}^z + W_{\text{ext}}^p) / \mathcal{E}_{\text{grav}}$ para $z = 0$.

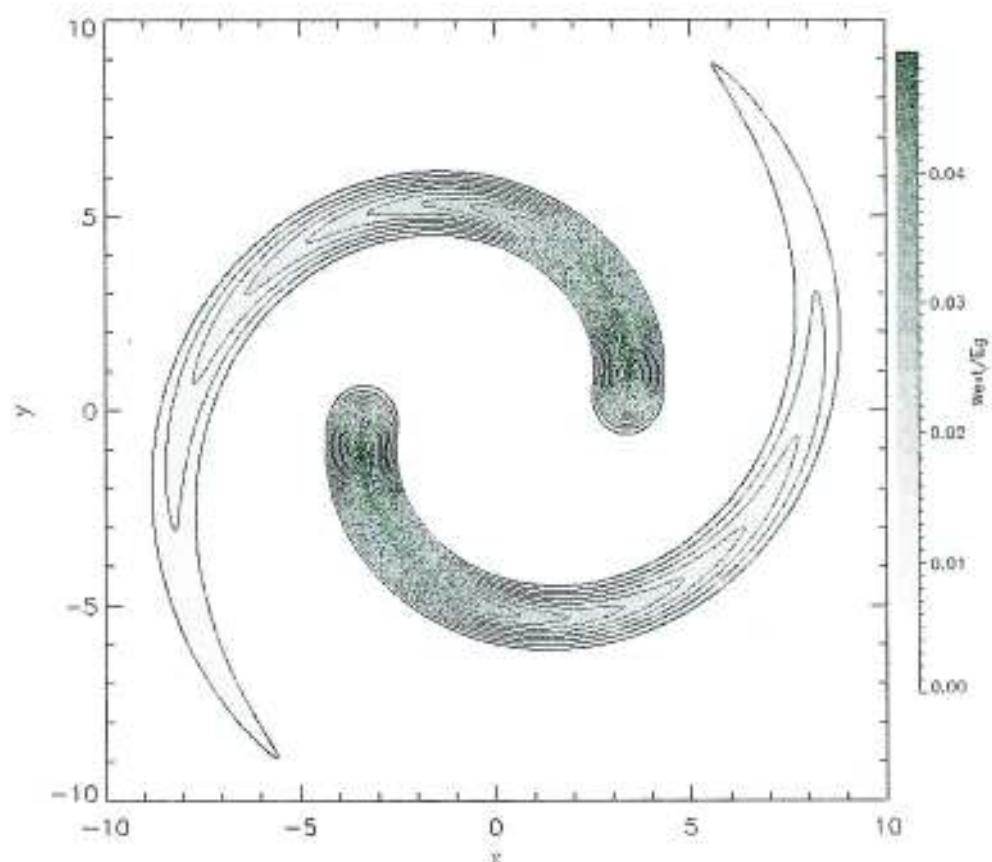


Figura 7.7: Diagrama en escala de grises del cociente $W_{\text{ext}}/E_{\text{grav}}$ para una nube interestelar esférica de 25 pc de diámetro y densidad $\rho = 50 \text{ cm}^{-3}$ embebida en un potencial gravitacional galáctico con dos brazos espirales. Los isocontornos muestran regiones equipotenciales en la galaxia.

Capítulo 8

Conclusiones

En el presente capítulo recapitularemos brevemente la motivación de esta tesis y las conclusiones de la misma.

La motivación del presente trabajo radica en trabajos anteriores, e.g. Ballesteros-Paredes (2006), en los que se indica la posibilidad de que la relación $\mathcal{W} = \mathcal{E}_{\text{grav}}$ no resulte ser necesariamente válida para una nube embebida en un potencial gravitacional externo. Dado que no se encuentran resultados numéricos en la literatura que nos permitan aseverar que tan válida es esta suposición, nos propusimos realizar el cálculo detallado para una nube molecular de 25 pc de diámetro y densidad ρ de 50 cm^{-3} , embebida en un potencial galáctico de brazos espirales.

Para ésto primeramente se justificó la elección de estos parámetros físicos mediante análisis bibliográfico y se realizó un estudio de la estructura galáctica (Capítulo 2). A continuación se derivó la ecuación de momento (Capítulo 3), necesaria para la posterior derivación del teorema del virial (Capítulo 4). Particularmente nos enfocamos en el desarrollo del término gravitacional \mathcal{W} de este teorema, y a partir de la consideración $\phi = \phi_{\text{nube}} + \phi_{\text{ext}}$, definimos al término W_{ext} (Ec. 5.4), mismo que, al ser comparado con la energía gravitacional propia de la nube $\mathcal{E}_{\text{grav}}$, nos indica la contribución del potencial galáctico al balance gravitacional de la misma.

Posteriormente se realizó el cálculo de W_{ext} y se encontró que, para los parámetros utilizados en el presente trabajo, la suposición $\mathcal{W} \approx \mathcal{E}_{\text{grav}}$ resulta ser aproximadamente válida. Obteniendo un máximo para el cociente $W_{\text{ext}}/\mathcal{E}_{\text{grav}}$ de $\sim 0,05$.

Sin embargo, se plantea la posibilidad de realizar, en trabajos posteriores, los mismos cálculos para nubes de tamaño superior y un potencial galáctico que considere la contribución del halo, bulbo y disco. Se espera que los resul-

tados derivados de dichos cálculos muestran que la contribución del potencial externo al balance gravitacional de las nubes interestelares no es despreciable y que, por lo tanto, la suposición $\mathcal{W} = \mathcal{E}_{\text{grav}}$ no resulta ser necesariamente válida.

Apéndice A

Programa

gravity_parallel_arms.f

A continuación se presenta el programa utilizado para el cálculo de $W_{\text{cat}}/\mathcal{E}_{\text{grav}}$, cuya lógica se explicó en el Capítulo 6.

```
program gravity_parallel_arms
implicit none
include 'mpif.h'

integer i,j,k,l,m,n, nxcaja, nycaja, nzcaja
integer nxdo, nydo, nzdo
integer ikk, nbrazo, Nbarb, iopenstatus
integer ierr, irank, status(MPI_STATUS_SIZE)
character*23 fname
real*8 lxbox, lybox, lzbox, xmp
real*8 xcaja, ycaja, zcaja, rcaja, pcaja, rnube

parameter(nxcaja = 7, nycaja=7, nzcaja=7)
parameter(lxbox = 25., lybox = 25., lzbox = 25.)

real*8 xm, xp, ym, yp, zm, zp, xi, yi, zi, kpc2cm
real*8 deltax, deltay, deltaz, ddeltax, ddeltay, ddeltaz, deltaxvol
real*8 poten(0:nxcaja+1,0:nycaja+1,0:nzcaja+1), rgal
real*8 dPdx(0:nxcaja+1,0:nycaja+1,0:nzcaja+1)
real*8 dPdy(0:nxcaja+1,0:nycaja+1,0:nzcaja+1)
real*8 dPdz(0:nxcaja+1,0:nycaja+1,0:nzcaja+1)
real*8 dens(0:nxcaja+1,0:nycaja+1,0:nzcaja+1), dens0, wext
real*8 xrphi, xrphi_x, xrphi_y, xrphi_z
```

```
real*8 graddens, graddens_x,graddens_y, graddens_z
real*8 Eg_ext, unidades, MsunKpc3, Msun
real*8 adummy,bdummy,cdummy,ddummy,Wext_x,Wext_y,Wext_z

real*8 cm, sec, mass, gr, dyn, erg, deg, degK, gauss, muG, pc
real*8 n0, Myr, kms, kpc, kB, mH, meff, grav, Rsun, kpccm3, pi

real*8 spiral

call MPI_INIT(ierr)
call MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD, irank, ierr)

nxdo = 200
nydo = 400
nzdo = 20

c Definimos las unidades en cgs.

kpc = 1000.d0
mH = 1.672649d-24 ! gramos
kpc2cm = 3.1d21 ! cm
Msun = 2e33 ! gr
MsunKpc3 = kpc2cm*kpc2cm*kpc2cm/Msun
pi = 3.141592

xmp = 2.36* mH ! Nube molecular tipica

c Se definen parámetros de la nube
n0 = 50 ! en particulas por cm^3
dens0 = (n0*xmp) ! en gr por cm**3

c*****

c do sobre la galaxia.

deltax = lxbox/float(nxcaja)/kpc
deltay = lybox/float(nycaja)/kpc
deltaz = lzbox/float(nzcaja)/kpc
ddeltax = 2*deltax
ddeltay = 2*deltay
ddeltaz = 2*deltaz
deltavol = deltax*deltay*deltaz
```



```

unidades = deltavol*MsunKpc3

do n=0,nzdo
  do m=0,nydo
    print*, '*** n,m=', n,m

    write(fname,900) 'grav.y',m,'.z',n,'.dat'
    open(20,file=fname,status='new',iostat=iopenstatus)
    if(iopenstatus.gt.0) then
      goto 999
    endif
    do l=0,nxdo

      wext      = 0.
      wext_x    = 0.
      wext_y    = 0.
      wext_z    = 0.
      Eg_ext    = 0.
      xrphi     = 0.
      graddens = 0.

      xi = 1 * 0.050 ! en kpc
      yi = -10.0 + m * 0.050 ! en kpc
      zi = n * 0.050 ! en kpc

150      continue

c    do sobre la nube para calcular el potencial y poder calcular, en
c    el siguiente do, los gradientes

      do k=0,nzcaja+1
        do j=0,nycaja+1
          do i=0,nxcaja+1

1          xcaja = i*lxbox/float(nxcaja) -
              (nxcaja+1)*lxbox/float(nxcaja)/2.
1          ycaja = j*lybox/float(nycaja) -
              (nycaja+1)*lybox/float(nycaja)/2.
1          zcaja = k*lzbox/float(nzcaja) -
              (nzcaja+1)*lzbox/float(nzcaja)/2.

```

```

c   Dividimos entre mil porque spiral requiere cantidades en Kpc

      xcaja = xcaja/kpc
      ycaja = ycaja/kpc
      zcaja = zcaja/kpc

      dens(i,j,k) = dens0

      rcaja = sqrt((xcaja+xi)**2 + (ycaja+yi)**2)
      pcaja = atan( (ycaja+yi)/(xcaja+xi+1.e-20) )
      call spiral2(rcaja,pcaja,zcaja+zi,poten(i,j,k)
$         ,dPdx(i,j,k),dPdy(i,j,k),dPdz(i,j,k))
c         poten(i,j,k) = spiral(rcaja,pcaja,zcaja+zi)
           enddo
           enddo
           enddo

c do sobre la nube
      do k=1,nzcaja
        do j=1,nycaja
          do i=1,nxcaja
            xcaja = i*lxbox/float(nxcaja) -
1              (nxcaja+1)*lxbox/float(nxcaja)/2.
            ycaja = j*lybox/float(nycaja) -
1              (nycaja+1)*lybox/float(nycaja)/2.
            zcaja = k*lzbox/float(nzcaja) -
1              (nzcaja+1)*lzbox/float(nzcaja)/2.

            xcaja = xcaja/kpc
            ycaja = ycaja/kpc
            zcaja = zcaja/kpc

            rnube = sqrt(xcaja**2+ycaja**2+zcaja**2)

**** Si r > 12.5 pc, no integramos:
            if(rnube.gt.lxbox/2./1000.) goto 950

*** Componente x:
            xm = xcaja - deltax
            xp = xcaja + deltax

```

```

1          xrphi_x = (xp*dens(i+1,j,k)*poten(i+1,j,k)-
                    xm*dens(i-1,j,k)*poten(i-1,j,k))/ddeltax
1          graddens_x = (dens(i+1,j,k)-dens(i-1,j,k))/
                    ddeltax

*** Componente y:

1          ym = ycaja - deltay
1          yp = ycaja + deltay
1          xrphi_y = (yp*dens(i,j+1,k)*poten(i,j+1,k) -
                    ym*dens(i,j-1,k)*poten(i,j-1,k))/ddeltay
1          graddens_y = (dens(i,j+1,k)-dens(i,j-1,k)) /
                    ddeltay

*** Componente z:

1          zm = zcaja - deltaz
1          zp = zcaja + deltaz
1          xrphi_z = (zp*dens(i,j,k+1)*poten(i,j,k+1) -
                    zm*dens(i,j,k-1)*poten(i,j,k-1))/ddeltaz
1          graddens_z = (dens(i,j,k+1)-dens(i,j,k-1))/
                    ddeltaz

*** Integrales:

1          wext_x = dens(i,j,k)*xcaja*dPdx(i,j,k)+Wext_x
1          wext_y = dens(i,j,k)*ycaja*dPdy(i,j,k)+Wext_y
1          wext_z = dens(i,j,k)*zcaja*dPdz(i,j,k)+Wext_z

1          Eg_ext = dens(i,j,k) * poten(i,j,k) + Eg_ext
1          xrphi = xrphi_x + xrphi_y + xrphi_z + xrphi
2          graddens = poten(i,j,k)* (xcaja*graddens_x +
                    ycaja*graddens_y + zcaja*graddens_z)
2          + graddens

950          continue

                    enddo
                    enddo
                    enddo
Wext = Wext_x+Wext_y+Wext_z

rcaja = sqrt((xi)**2 + (yi)**2)
pcaja = atan( (yi)/(xi+1.e-20) )

```

```

      call spiral2(rcaja,pcaja,zi,adummy
$           ,bdummy,cdummy,ddummy)

      Eg_ext = 3*Eg_ext*unidades
      xrphi  = xrphi*unidades
      Wext_x = Wext_x*unidades
      Wext_y = Wext_y*unidades
      Wext_z = Wext_z*unidades
      Wext   = Wext*unidades
      graddens = graddens*unidades

998      continue

      write(20,1001)xi,yi,zi,Eg_ext,xrphi,wext,graddens,
1          xrphi-Eg_ext,adummy,bdummy,cdummy,ddummy
2          ,Wext_x,Wext_y, Wext_z
      enddo
*****
999      continue
      close(20)
*****
      enddo
      enddo

900  format (a6,i5.5,a2,i3.3,a4)

1001 format(15(1pg13.5))

      call MPI_FINALIZE(ierr)

      stop

      end
```

Bibliografía

- Ballesteros-Paredes, J. 2006, MNRAS, 372, 443
- Binney, J., & Merrifield, M. 1998, Galactic astronomy (Galactic astronomy / James Binney and Michael Merrifield. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1998. (Princeton series in astrophysics) QB857 .B522 1998 (\$35.00))
- Chandrasekhar, S., & Fermi, E. 1953, ApJ, 118, 116
- Creze, M., Chereul, E., Bienayme, O., & Pichon, C. 1998, A& A, 329, 920
- Dame, T. M., Hartmann, D., & Thaddeus, P. 2001, ApJ, 547, 792
- Downes, R. A., Webbink, R. F., Shara, M. M., Ritter, H., Kolb, U., & Duerbeck, H. W. 2001, PASP, 113, 764
- Drimmel, R. 2000, A& A, 358, L13
- Falgarone, E., Phillips, T. G., & Walker, C. K. 1991, ApJ, 378, 186
- Helfer, T. T., Thornley, M. D., Regan, M. W., Wong, T., Sheth, K., Vogel, S.N., Blitz, L., & Bock, D. C.-J. 2003, ApJS, 145, 259
- Larson, R. B. 1981, MNRAS, 194, 809
- Loinard, L., Dame, T. M., Koper, E., Lequeux, J., Thaddeus, P., & Young, J. S. 1996, ApJL, 469, L101+
- Pichardo, B., Martos, M., Moreno, E., & Espresate, J. 2003, ApJ, 582, 230
- Young, J. S., & Scoville, N. Z. 1991, Ann. Rev. of Astron. and Astrophys., 29, 581
- Zuckerman, B., & Evans, N. J. 1974, ApJL, 192, L149