UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ESTUDIO DE CAPACIDADES COMBINATORIAS EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE: MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA :
MARICELA ARMENTA CASTRO

DIRECTOR DE TESIS:
M. C. ENRIQUE HUGUES GALINDO

Hermosillo, Sonora, México. Julio de 2003.

ESTUDIO DE CAPACIDADES COMBINATORIAS EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Índice

INTRODUCCIÓN

Diversas actividades que cotidianamente se llevan a cabo en la actualidad, involucran una gran cantidad de información, y, en muchos casos, su manejo exige a los individuos una cultura que les permita el uso de herramienta estocástica, ya sea para extraer sus características más importantes y arrojar luz sobre el fenómeno que la genera o bien, para tomar alguna decisión.

Consideramos que esto ha empezado a impactar al sistema educativo. En particular, en la reforma de principios de los años noventa del nivel básico del Sistema Educativo Nacional (escuelas primarias y secundarias), se han replanteado los distintos contenidos que forman parte de la enseñanza obligatoria. La nueva propuesta curricular promueve la integración de los distintos contenidos y, en el caso de matemáticas, contiene importantes cambios en el estudio de los temas de Probabilidad y Estadística, tanto por equiparar la importancia de sus conceptos a la de otros temas, como por su orientación fundada en la generación gradual de experiencias. Además de que su tratamiento no está condicionado por cuestiones como la disponibilidad de tiempo; por tanto es de esperarse que los egresados de este nivel tengan cierta experiencia en el manejo de las situaciones que se tratan desde esta perspectiva.

Sin embargo, no todos los estudiantes que ingresan al nivel medio tienen la oportunidad de continuar su desarrollo en tales tópicos, debido, por una parte, a la falta de conciencia de los responsables del diseño curricular de Matemáticas, de la importancia de esto y por otra, a las limitaciones de tiempo disponible para cubrir la amplia gama de expectativas cifradas en este nivel. Esto se muestra en la diversidad de los planes y programas de estudio de los diferentes subsistemas existentes en este ciclo escolar.

Desde nuestro punto de vista, esta ruptura en la secuencia educativa influye negativamente en el desarrollo general de los estudiantes y se refleja en el desempeño que tienen en el nivel superior en cursos que involucran contenidos de Probabilidad y Estadística.

Por otra parte, consideramos que el hecho de que dichos tópicos sean incluidos de manera obligatoria en el nivel básico y, en algunos casos en el nivel medio mismo, no garantiza que los conceptos e ideas básicas presentes en estocásticos sean tratados adecuadamente en el aula, lo cual puede no sólo no propiciar una comprensión conveniente de tales elementos, sino, incluso dificultades[1].

En Matemática Educativa, la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística constituye actualmente, un área de investigación que requiere una mayor atención por los preocupantes resultados que ha arrojado. Específicamente, se ha reportado la existencia de profundas dificultades en la comprensión del concepto de probabilidad, y se señala a la insuficiencia en habilidades combinatorias como uno de los factores que interfieren significativamente y sobre esto se han venido realizando diversas investigaciones. Observaciones sobre esta problemática llevadas a cabo con estudiantes de nuestro medio muestran la validez de tal señalamiento.

Así pues, inserto en la problemática general de la enseñanza y del aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística, el presente trabajo se propone realizar un estudio acerca de las capacidades combinatorias en estudiantes de bachillerato, en relación a la comprensión del concepto de probabilidad.

De acuerdo a Jean Piaget y Bärbel Inheldher (1975), la posibilidad de que los individuos sean capaces de manejar la noción de probabilidad depende en buena medida, de su aptitud para efectuar operaciones combinatorias, misma que puede alcanzarse plenamente hasta el estadío de las operaciones formales, lo que se espera ocurra alrededor de los quince años de edad. Esta capacidad implica el efectuar operaciones sobre operaciones, que es una característica del pensamiento formal y que requiere de un razonamiento hipotético-deductivo al operar con las posibilidades que el sujeto descubre y evalúa.

A su vez, resultados de investigaciones Efraim Fischbein (1975) muestran que la capacidad para resolver problemas combinatorios o incluso el estadío de las operaciones formales no siempre se alcanza sin una instrucción específica y pertinente. De aquí parte nuestro interés en estudiar el desarrollo de habilidades combinatorias y nuestra propuesta de hacerlo en nuestro medio con estudiantes de bachillerato, entre otras cosas por su rango de edades y por la ruptura educativa antes señalada.

En concordancia con Deigter Heitele (1975), en este estudio consideramos a la combinatoria como una de las ideas fundamentales[2] en estocásticos, por su relación con otras ideas igualmente necesarias para la comprensión del concepto de probabilidad, como la noción de azar y la de muestra.

Nuestro estudio está centrado en investigar la influencia que algunas variables de tarea[3] específicas tienen en los procedimientos y errores en la resolución de problemas

[1] Aquí el término dificultad se refiere a aquello que no permite temporalmente al individuo avanzar en la comprensión de un concepto o tratar con situaciones que ameriten su uso.

[2] Identificamos como idea fundamental a aquella que proporciona al individuo un modelo explicativo en cada etapa de su desarrollo, que sean tan eficiente como sea posible y que se distinga en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración. (Heitele, 1975).

[3] En el contexto de la resolución de problemas con la palabra "tarea" se hace referencia al proceso utilizado por el estudiante para arribar a una respuesta. De este modo los problemas suelen tener características cuya

combinatorios. Como medio para realizarlo solicitamos a los estudiantes resolver problemas combinatorios simples en los que intervienen las variables de tarea de interés. También nos propusimos abordar el estudio de las estrategias, errores y dificultades que intervienen en ello.

Un estudio acerca del efecto que tienen las variables de tarea que hemos seleccionado en nuestro caso, ha sido realizado previamente por Virginia Navarro-Pelayo(1996) y otros colaboradores, en estudiantes de edades similares a los que nosotros hemos seleccionado para el estudio (15-18 años). De hecho sus resultados han motivado la realización de la presente investigación, pues muestran el fuerte efecto que tienen las variables de tarea en cuestión en la resolución de los problemas planteados.

En el presente estudio un elemento adicional que hemos incorporado, es una caracterización de las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes, constituyéndose este punto en una diferencia importante con la investigación recién citada.

Para llevar a cabo la investigación propuesta se seleccionó como escenario de estudio al Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, por contemplar curricularmente instrucción en Probabilidad y Estadística, tomando para ello cuatro grupos sin instrucción y cuatro grupos con instrucción en Probabilidad y Estadística. Para el estudio de las habilidades combinatorias en estudiantes de esta institución, se utilizó un cuestionario integrado por seis problemas que fueron seleccionados después de someter a prueba un total de veinte problemas en los que se pusieron en juego las distintas variables de tarea y en cuyas respuestas centramos nuestro análisis.

La presentación de este trabajo de tesis está estructurada en seis capítulos en los cuales hemos organizado los aspectos más sobresalientes del mismo.

En un primer capítulo hemos integrado aquellos aspectos que consideramos son importantes para ubicar nuestro problema de investigación. Un primer aspecto que abordamos es la relación existente entre la Probabilidad y la combinatoria, lo que nos da elementos que, de entrada, justifican la investigación misma.

Otro punto que también consideramos en este primer capítulo es lo referente a la investigación cognitiva en combinatoria, tratando de ubicar los resultados más relevantes bajo esta perspectiva. Finalmente el capítulo concluye con la presentación de una panorama general de la combinatoria en el ámbito escolar.

El segundo capítulo está dedicado al planteamiento del problema de investigación así como de los objetivos generales y específicos del trabajo. En este capítulo se destacan algunas consideraciones importantes que, aunadas a las vertidas en el capítulo anterior nos sirven para contextualizar dicho problema de investigación.

En el siguiente capítulo presentamos las premisas que constituyen el marco teórico de nuestro estudio. En primer término abordamos resultados de investigación cognitiva

modificación impacta a la tarea y que por tanto se habla de una "variable de tarea".

pertinentes a la problemática bajo estudio, a lo que previamente se hace referencia. Otra de las componentes de este capítulo lo constituyen aspectos relativos a los contenidos matemáticos implicados en este trabajo.

Componentes adicionales de este capítulo son los planteamientos curriculares bajo los cuales hemos llevado a cabo la revisión de planes y programas de estudio de los distintos niveles educativos y, finalmente, abordamos aspectos esenciales del enfoque problémico como una herramienta de investigación.

El cuarto capítulo es dedicado a la parte metodológica de la investigación y está constituido por tres secciones. La primera de ellas resume las fases bajo las cuales se ha llevado a cabo este estudio y algunos supuestos iniciales del mismo. La segunda de las secciones tiene como principal objetivo la presentación del cuestionario y sus características. El capítulo finaliza con una sección dedicada a la presentación del análisis a-priori que se emplea en el análisis de las respuestas.

El análisis de los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario definitivo se hace en el quinto capítulo de este trabajo, para cuya presentación hemos considerado tres secciones. En una primera sección hacemos un resumen general de las respuestas obtenidas por semestre, dando para ello las tablas de clasificación general. Una segunda sección de este capítulo está formada por un análisis particular de los problemas, concluyendo el capítulo con un análisis general de los mismos.

Finalmente, el capítulo seis está dedicado a destacar las conclusiones que hemos obtenido a lo largo del desarrollo del trabajo.

CAPÍTULO I

La Combinatoria en la Educación

Introducción

En este capítulo, como preámbulo a la especificación del problema de investigación que abordamos y a manera de ubicación del mismo, pretendemos situar el papel que le atribuimos a la combinatoria en el contexto de la Probabilidad, así como en el de su enseñanza y su aprendizaje.

De entrada, señalamos que nuestra concepción de combinatoria corresponde a la de una herramienta cuya utilidad está más allá que la de permitir el cálculo del número de posibles resultados de un experimento aleatorio o de elementos de un evento.

En esto, distinguimos dos énfasis que se hacen cuando usamos la palabra combinatoria: el primero, como acervo de estrategias y habilidades del pensamiento; mientras que el segundo, como el cúmulo de resultados y relaciones conceptuales propios de una rama de la matemática que trasciende al llamado Análisis Combinatorio; a los cuales nos referiremos indistintamente dejando la precisión al contexto en que se inserta, que ciertamente puede resultar doble.

Extendiéndonos en el primero de estos dos énfasis, planteamos algunos de los resultados de la investigación que hacen de la combinatoria un campo de estudios para la cognición y que, además de ser un punto de partida, resultan ser una de las motivaciones de nuestro interés por incursionar en este campo de investigación en el contexto de la Matemática Educativa.

Finalmente, enfocamos algunos aspectos del ámbito escolar, como es el papel que se le asigna a la combinatoria en la escuela, que aumentan nuestro interés por investigar y despiertan en nosotros, serias preocupaciones educativas.

I.1 La Probabilidad y la Combinatoria

Hoy en día se reconoce el papel que juega la Estadística en muchas de las actividades del mundo moderno y la Probabilidad, sus modelos y demás ideas básicas constituyentes son, en gran medida, el fundamento de la Teoría Estadística (punto de vista en el que coincidimos con J. D. Godino, 1987). De aquí que a ambas disciplinas les corresponda tener alguna presencia en una educación comprometida con el desarrollo de individuos acorde a la sociedad que les toca vivir.

La Probabilidad a través de sus modelos proporciona una manera de medir la incertidumbre implicada en dichas actividades y tiene por supuesta impacto en las decisiones que ahí se toman. Además, su importancia no sólo se limita en su relación con la Estadística, sino que por si misma juega un papel fundamental en el análisis de muchos fenómenos de interés en la actualidad y es de hecho es un área de la Matemática con un fuerte y creciente desarrollo en las últimas décadas.

El origen de la probabilidad se considera fuertemente vinculado con la búsqueda de soluciones a los distintos problemas derivados de juegos de azar, y entre los casos sobresalientes se encuentran los referentes a dados y el llamado problema de la división de apuestas o problema de los puntos. Aunque hay antecedentes de que el origen de algunos de estos problemas sobre juegos de azar se remonta a épocas anteriores, estos problemas alcanzaron precisión hacia fines del siglo XVI y, de hecho, las soluciones que intercambiaron los científicos franceses Pierre Fermat y Blaise Pascal en su correspondencia en 1654 sobre el problema de los puntos, se reconoce como la primera solución probabilística a este problema.

En las soluciones que se dieron a los problemas de dados evolucionó la herramienta combinatoria, en cierta medida en ellas se construyeron ideas necesarias en el análisis de los problemas aquí expuestos, como son el orden, la repetición o la independencia.

Pero una característica distintiva en las soluciones de Fermat y Pascal sería el hecho de que en ellas se conjugó dicha herramienta combinatoria con un razonamiento probabilístico propiamente dicho, poner al descubierto las posibles formas de las secuencias de resultados en la continuación del juego de azar, medir la ocurrencia potencial de secuencias de resultados distinguiendo aquellas que resultan de interés y, sobre la base de esto, ponderar conjuntamente las consecuencias de ellas.

A raíz de este tipo de razonamiento fue que empezaron a obtener reconocimiento propio algunos de los elementos involucrados (que en una perspectiva actual nos referimos a ellos como: espacio muestra, evento, asignación de probabilidades, principio aditivo, principio multiplicativo) que posteriormente, en otro nivel de consolidación, dan lugar a conceptos o resultados básicos de una nueva disciplina matemática, como la noción de azar y el concepto de probabilidad mismo, independencia, esperanza matemática, ley de los grandes números, etc.

En lo antes expuesto es de observarse que la combinatoria tuvo importante influencia, no sólo como la herramienta de cálculo básica en los primeros tiempos de esta nueva disciplina sino en el proceso de conceptualización hacia una Teoría de la Probabilidad, la cual luego echó mano de conceptos y resultados de otras ramas de las matemáticas, por ejemplo algunos del cálculo diferencial e integral.

Estos hechos muestran que algunos conceptos importantes que aparecen cuando se abordan situaciones desde la perspectiva de la probabilidad se encuentran íntimamente relacionados con la idea de combinatoria por lo que, en una perspectiva educativa, la llegamos a considerar fundamental, en el sentido de Heitele[1], dentro de nuestro trabajo.

Este señalamiento corresponde al hecho de poseer un modelo no necesariamente formulado en términos matemáticos, que permita al individuo tener una explicación del fenómeno que está observando y que, por tanto, está sujeto a ser modificable en la medida que el individuo entra en contacto con nuevas situaciones.

Así, denominamos fundamental a una idea que le permita al sujeto adquirir gradualmente los conceptos de un tópico, de tal manera que, en cada etapa de su desarrollo, tenga una perspectiva de los conceptos acorde a la herramienta que dispone y, a medida que su visión vaya madurando (adquiriendo nuevos conceptos o propiedades de los conceptos) hacia una versión más completa.

La determinación del espacio muestra asociado a un experimento aleatorio es un aspecto importante en la definición misma de la probabilidad, no sólo en el sentido clásico usado en el caso de un espacio muestral finito y equiprobable, aunque aún restringiéndonos a éste en situaciones muy elementales, es indispensable disponer de algún proceso de enumeración o herramienta que apoye la búsqueda del conjunto de los "casos posibles" así como de su cuantificación.

Tomando como ejemplo la situación anterior, podemos mencionar que en ese caso la idea fundamental de combinatoria, podría funcionar como un modelo explicativo que permite al individuo construir a través del diagrama de árbol, el espacio muestra asociado a un experimento. En la medida en que las situaciones rebasen las posibilidades de representación icónica, el modelo va adquiriendo una faceta de sofisticación matemática, que sienta las bases para una preparación analítica sin perder su característica estructural.

Ejemplos en los que se requiere poner en juego esta idea fundamental los podemos encontrar no sólo en el terreno de la Probabilidad. La combinatoria, considerada tanto en su carácter cualitativo como en el de herramienta de cálculo, es un apoyo no sólo para el cálculo de probabilidades, su uso invade distintas áreas de la matemática como lo son el Cálculo Diferencial o la Teoría de Números, por mencionar algunas, así como también tiene presencia en otras disciplinas. Sin embargo, para los fines de la presente investigación, nos hemos restringido a los aspectos estrechamente relacionados a esta área de la Matemática.

[1] Identificamos como idea fundamental a aquella que proporciona al individuo un modelo explicativo en cada etapa de su desarrollo, que sean tan eficiente como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración. (Heitele, 1975).

I.2 Investigación Cognitiva en Combinatoria

Uno de los aspectos que hemos considerado en nuestro estudio, son las investigaciones desarrolladas en el ámbito cognitivo respecto a la adquisición y evolución en el individuo de las ideas combinatorias y a su papel como parte fundamental del pensamiento formal y en su relación con la probabilidad.

Al respecto, una referencia importante son los resultados obtenidos por J. Piaget-B. Inhelder (1975) sobre la noción de azar en el niño, en los que explican que la evolución de las operaciones combinatorias en el individuo se da, al igual que las operaciones lógicas y aritméticas, a través de un desarrollo constituido por el tránsito a lo largo de tres períodos, a los que también denomina estadíos.

De acuerdo con sus investigaciones, en un primer período o estadío, conocido como período preoperatorio, que ocurre antes de los siete u ocho años, el niño no sospecha la posibilidad de un sistema que le pueda permitir encontrar todas las combinaciones de pares, sin omitir uno sólo, y todas las permutaciones o arreglos que pueden hacerse con varios elementos en el contexto de "pequeños números". Esto puede explicarse en términos de que el niño de este nivel no posee las operaciones aditivas o multiplicativas necesarias para tal fin.

Durante un segundo estadío o período de las operaciones concretas que se da entre los siete y los once años, el niño comprende la posibilidad de tales sistemas, pero los descubre solamente de una manera empírica e incompleta, ligado al mundo físico que le rodea. Esto hace suponer que la construcción de estos sistemas por el niño requieren de estructuración interna, de un pensamiento formal.

Esta etapa resulta importante, pues aunque de hecho, supone un momento en el que no hay una adquisición completa de los sistemas combinatorios, se puede decir que sí existe un descubrimiento de la posibilidad de su existencia, y que el hecho de que empiezan a darse descubrimientos empíricos sólo marca el inicio de un proceso que debe evolucionar en la medida que vayan adquiriendo otras herramientas conceptuales. Consideramos esto como sumamente importante para la enseñanza en el sentido de que resulta ser una etapa en la que creemos se debe enfatizar la formación de intuiciones correctas que apunten hacia la construcción adecuada de las ideas. En particular, por sus implicaciones en aquellas de las que forman un antecedente necesario.

Es hasta después de los once o doce años, que el desarrollo del pensamiento en el niño, a principios del período conocido como de las operaciones formales, le permite descubrir sistemas combinatorios completos para un número pequeño de elementos puestos en juego.

En este estadío de desarrollo, el niño ha evolucionado en manera tal que es capaz de coordinar las diversas seriaciones que se pueden formar al considerar las distintas correspondencias entre los elementos de un determinado conjunto, esto es, ésta coordinación implica la realización de operaciones sobre operaciones, característica del pensamiento formal.

Las investigaciones a las que acabamos de hacer referencia también reportan que la evolución de las ideas combinatorias está en estrecha relación con la de las operaciones lógicas y aritméticas, constituyéndose las primeras según los autores en contraposición a las segundas, distinguiendo lo que es deducible de aquello que no lo es y por tanto sólo se puede acceder al desarrollo pleno de ellas en la medida en que las segundas se vayan desarrollando. También reportan que las ideas combinatorias se caracterizan por ser operaciones de segundo nivel, operaciones propias del período de las operaciones formales, aspecto en el que deberíamos poner atención, pues en ello podríamos encontrar una explicación a las dificultades que en el manejo de estas ideas se presentan.

Además, el desarrollo de las operaciones combinatorias constituye, según lo afirman los autores, una condición necesaria para que los individuos sean capaces de construir la idea de probabilidad. Este es un punto clave que ha llamado nuestra atención y despertado nuestro interés por intentar un estudio que nos dé un acercamiento de cuál es el estado que guarda el desarrollo de dichas operaciones combinatorias en estudiantes que, de acuerdo a lo señalado por Piaget e Inhelder, ya debieran haber transitado por cada una de las etapas señaladas.

Otro referente, en el que se reporta el desarrollo de investigaciones en esa dirección, es el trabajo de E. Fischbein (1975). Ellas muestran que la capacidad de resolver problemas combinatorios no siempre se alcanza al nivel de las operaciones formales si no hay una enseñanza específica. Al respecto, Fischbein y A. Gazit (1988) han reportado en sus investigaciones referentes al efecto de la instrucción sobre la capacidad combinatoria, que incluso niños de diez años de edad pueden aprender algunas ideas combinatorias con ayuda del diagrama de árbol.

Otro aspecto que analizaron fue la dificultad relativa de los problemas combinatorios, en función de la naturaleza y el número de elementos que debían ser combinados, identificando algunos errores típicos en la resolución de problemas combinatorios simples.

En estos autores encontramos un interés particular en estudiar el papel que juega la instrucción en la adquisición de las ideas y conceptos por parte del individuo. Su énfasis está puesto en la importancia que tienen la formación de intuiciones para el aprendizaje o construcción de los conceptos matemáticos por parte del individuo, lo que resulta una distinción importante respecto a los antes mencionados.

También en el ámbito escolar, V. Navarro-Pelayo y otros investigadores (1996) han llevado a cabo un proyecto de investigación en el que se propusieron evaluar la capacidad combinatoria en alumnos con y sin instrucción en este tópico, encontrando que ambos grupos tuvieron dificultades para resolver los problemas planteados, a pesar de que algunos podían resolverse haciendo uso de sólo una operación combinatoria.

Encontraron, entre otros aspectos relevantes, que en general los alumnos mostraron la falta de un razonamiento recursivo. En el caso del grupo sin instrucción observaron que en los casos sencillos pudieron dar respuesta, aunque en ningún momento se utilizó un procedimiento de enumeración sistemático para hacerlo.

Otras reflexiones de interés en el estudio de esta problemática son las llevadas a cabo por N. Hadar y R. Hadass (1981), en las que se aborda el tipo de dificultades comunes que aparecen al resolver un problema combinatorio.

Postulan la aparición de una serie de dificultades que no permiten que los estudiantes puedan responder con éxito el problema planteado, entre ellas se hace mención a la percepción incorrecta del conjunto a enumerar, que los lleva a una respuesta incorrecta ya que responden a una cuestión distinta a la planteada. Otra dificultad que le parece común está relacionada con la elección de una notación inadecuada, lo que, en su momento, no les permite generalizar resultados parcialmente encontrados.

Esta corta semblanza de los resultados de algunos trabajos de investigación, no sólo la encontramos vinculada con la problemática que nos proponemos abordar, sino que además subraya su vigencia, particularmente en la parte alta de la adolescencia.

I.3 La Probabilidad y la Combinatoria en la Escuela

Los recientes cambios curriculares en el nivel básico, promueven elementos de Probabilidad y Estadística como contenidos importantes dentro de la formación básica, que se enmarcan, en el caso de la primaria, en los ejes de La Predicción y el Azar y el de Tratamiento de la Información. En ello se reconoce en alguna forma la necesidad de dotar a los estudiantes de elementos que coadyuven a la formación de un pensamiento no determinista, necesario para la comprensión de muchos fenómenos de interés en la actualidad.

En relación con el planteamiento del diseño de actividades de aprendizaje que integren los distintos ejes en los que están desarrollados los programas de la educación primaria, la Predicción y el Azar resulta ser un eje importante en la comprensión de otros temas del Currículum. En ese aspecto, en la educación primaria, los contenidos que se pueden clasificar como parte de la Combinatoria también juegan un papel fuera de ella, por ejemplo se presenta a ésta como un medio que promueve la adquisición de significado de la multiplicación de números naturales.

Diversas actividades propuestas están estrechamente ligadas a la Probabilidad, podemos citar por ejemplo, el planteamiento de distintos juegos de azar. Se enfatiza la necesidad de búsqueda de recursos que permitan visualizar todos los casos posibles de un experimento dado, se promueve el uso de tablas de doble entrada, la lectura de gráficas o el uso de diagramas de árbol como una herramienta que ayuda a encontrar el inventario de los casos de interés en un experimento dado.

Las actividades propuestas se han diseñado de modo que sobresale la importancia que se concede al nivel de desarrollo conceptual del niño. En el caso particular de la probabilidad la referencia a cuestiones ligadas a ella son presentadas hasta el tercer año, momento en el cual el niño oscila entre los ocho y los diez años de edad.

Esto en relación con los resultados de Piaget, resulta corresponder a un momento en que el niño debería estar en posibilidades de acceder a un nivel de desarrollo en el que empieza a tomar conciencia de la presencia del azar como un hecho que no puede reducirse a operaciones deductivas, aunque sus esquemas conceptuales sean aún limitados, consideramos que abre la posibilidad de un tratamiento posterior en el cual se espera que las ideas hayan madurado y puedan ser estudiadas desde una perspectiva más completa, e incluso formal.

Adicionalmente podemos decir que se procura que en un primer momento, que el niño pueda identificar una situación de azar de una que no lo es y que la asignación de probabilidades sea inicialmente de forma incipiente, de hecho de una manera cualitativa.

Parte importante de los contenidos del quinto y sexto grado corresponden al estudio de lo relativo a la combinatoria, en los que se presentan diversas situaciones sencillas de las que desprendemos se pretende haya una preparación para la noción de probabilidad, especialmente en lo que se refiere a la construcción de los resultados posibles y favorables de un experimento. Esto, en alguna forma nos permite ver que, aunque ideas de probabilidad se han trabajado desde grados anteriores, en estos grados escolares su evolución requiere echar mano de herramienta combinatoria que permita acceder a un nivel de tratamiento más elaborado, aunque todavía no se esté hablando de medir la probabilidad en términos cuantitativos.

La metodología de trabajo propuesta está basada principalmente en la resolución de problemas como un medio que promueve la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes. Este enfoque propone un aprendizaje menos concentrado en la repetición y la memorización y más abocado al desarrollo de habilidades del pensamiento que permiten al estudiante no sólo abordar problemas propios de la disciplina, sino también aquellos que no son exclusivos de la misma.

Para lo anteriormente expuesto se ha tomado como referencia el currículum formal, como se da a conocer a las escuelas y profesores en planes y programas de estudio (SEP, 1993), y hemos de reconocer que no se ha observado lo que realmente ocurre en el aula, aspecto que consideramos de bastante interés dentro del análisis de la problemática que nos ocupa.

En lo que respecta a la escuela secundaria, se señala como un propósito esencial fortalecer aquellos contenidos que responden a las necesidades básicas de la población joven del país y que sólo la escuela puede ofrecer (SEP, 1993).

Dentro de estos contenidos, se destaca a las Matemáticas como la segunda prioridad en la organización del Plan de Estudios y la Distribución de tiempos de trabajo[2]. Se señala como un propósito central de los programas de matemáticas que el alumno aprenda a utilizarlas para resolver problemas, no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa. Es decir se pretende dar a las matemáticas un lugar en la adquisición de habilidades y actitudes que son necesarias en la formación de cada individuo y que se corresponde con lo propuesto para el nivel previo.

[2] Correspondiendo la primera al Español.

Como parte de la organización de los contenidos, los temas de Probabilidad y Estadística, quedan ubicados en lo que corresponde a la Presentación y Tratamiento de la Información y Probabilidad. En relación con este último, un aspecto de interés es el hecho de que se enfatiza el uso del diagrama de árbol en la enumeración y descripción los posibles resultados de una experiencia aleatoria.

Se aborda el uso de la fórmula clásica de la probabilidad en situaciones con un número pequeño de resultados equiprobables, y también se le da un lugar al estudio del enfoque frecuencial de la probabilidad, al proponer situaciones en las que la asignación de probabilidades se da de acuerdo a este modelo. Otros aspectos a los que se hace mención son el estudio de las experiencias repetidas e independientes y la regla de la adición y del producto para probabilidades, así como al de la resolución de problemas por medio de la simulación.

La metodología de trabajo que se propone para el tratamiento de los contenidos que componen los programas de matemáticas es, al igual que en la primaria, bajo un enfoque de resolución de problemas. Sin embargo una diferencia importante respecto a ese nivel educativo, es que en este caso, la presentación de tales contenidos tiene una organización temática, no obstante se sugiere al profesor integrar en la medida de lo posible los diferentes tópicos del área que deben cubrirse, de modo que el estudiante pueda percibir las relaciones entre las distintas componentes de la matemática, así como de sus relaciones con otras disciplinas de estudio.

Podemos señalar que en términos curriculares, la combinatoria se contempla como uno de los aspectos importantes que deben cubrirse en el nivel básico. Sin embargo, la inserción curricular no es garantía para que el desarrollo de conceptos e ideas implicadas en estocásticos, en especial lo que respecta a combinatoria, sean tratadas convenientemente en el aula, lo cual podría estar obstaculizando un desarrollo conceptual adecuado.

En lo que corresponde al nivel medio, la situación debe analizarse considerando la diversidad de planes y programas de estudio existentes en tal nivel, en el que podemos encontrar subsistemas escolares que no contemplan curricularmente tópicos de Probabilidad ni de Estadística en forma obligatoria y, en algunos casos, ni en forma optativa. De hecho, en algunos de esos subsistemas su presencia o tratamiento está sujeto a condiciones como la disponibilidad de tiempo[3]. Esto provoca que, en general, no se pueda garantizar la continuidad en el tratamiento de las ideas relacionadas con estocásticos en el nivel medio, que propicie una madurez de tales ideas y que les permita su uso y su evolución a niveles más avanzados.

De entre los distintos subsistemas que existen en dicho nivel, enfocamos nuestra atención en una de las instituciones que curricularmente contempla dichos tópicos de una manera amplia y que además, aporta a la educación superior un número considerable de estudiantes[4], el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH). La estructura del

[3] Cuando tal tipo de contenido constituye el último o los últimos puntos de un curso, Temas Selectos de Matemáticas por mencionar un ejemplo.
[4] Para el caso de la Universidad de Sonora, en el semestre 99-2, el 27% del primer ingreso correspondió a

Plan de Estudios[5] del COBACH contempla tres núcleos: el Núcleo de Formación Básica, integrado por 34 asignaturas que van del primero al sexto semestre; el Núcleo de Formación Profesional constituido por 6 asignaturas a cursarse en el quinto y sexto semestre; y el Núcleo de Capacitación para el Trabajo con un total de 8 asignaturas.

Es dentro del núcleo de formación básica que se ubica el campo o materia[6] de matemáticas, compuesto de cuatro asignaturas y en él se encuentran incluidos los contenidos de Probabilidad y Estadística, constituyendo el curso de Matemáticas IV. Sus contenidos están divididos en tres unidades: Estadística Descriptiva, Elementos de Probabilidad y Estimación de Parámetros Poblacionales. Adicionalmente se ofrece un curso de Inferencia Estadística, reservado para los estudiantes de dos de las tres series[7] propedéuticas que ofrece el Colegio.

A pesar de contar con un curso obligatorio de estos tópicos, en la revisión del programa de estudios del curso de Matemáticas IV, encontramos que los aspectos combinatorios no son considerados explícitamente para su estudio, aunque aparece el uso de diagramas de árbol o la elaboración de listados en situaciones sencillas donde estos recursos son utilizados al parecer con fines ilustrativos y no como una herramienta de razonamiento.

Las expresiones o fórmulas para el caso de las permutaciones o combinaciones son reservadas a una sección en la que el objetivo es el estudio de la distribución binomial, en cuyo caso el énfasis está puesto en el manejo del algoritmo para obtener el número de combinaciones y de su uso en el cálculo de probabilidades binomiales.

En indagaciones con profesores pudimos constatar que dichas previsiones curriculares son modificadas en la práctica en lo tocante a aspectos combinatorios. Bajo la justificación de que tales contenidos son requeridos por los estudiantes en su acercamiento al enfoque clásico de probabilidad, para la cuantificación de probabilidades y otras "cuestiones involucradas", dedican alrededor de seis a ocho clases al tema de Análisis Combinatorio.

En el caso del nivel superior, la mayoría de los programas de distintas licenciaturas que ofrece la Universidad de Sonora, tomándola como un ejemplo, incluyen dentro sus planes de estudio por lo menos un curso obligatorio de Probabilidad y/o Estadística. En el caso de Ciencias e Ingeniería hay un curso de un semestre de duración, tanto de Probabilidad como de Estadística, mientras que en el área Económico-Administrativa y en algunos programas del área de Ciencias Sociales se contemplan al menos dos cursos obligatorios de un semestre de duración de Estadística Aplicada en el que se incluye una parte de Introducción a la Probabilidad.

Este resumen del lugar que guardan los contenidos de Probabilidad en los distintos niveles educativos nos subraya la importancia que en términos curriculares se le concede a esta

estudiantes egresados del COBACH.

[5] Vigente a Enero 2002.

[6] Como se ve enseguida la "materia" se compone de varios cursos o asignaturas con un contenido común a desarrollar.

[7] Las tres series propedéuticas que ofrece el COBACH son: Ciencias Naturales y Exactas, Ciencias Sociales y Humanidades y Ciencias Económico-Administrativas.

área de conocimiento en cada uno de ellos. Mientras que en el nivel básico estos contenidos juegan un papel fundamental al igual que los de otras áreas de la Matemática, vemos que su presencia en el nivel medio no es homogénea, incluso puede darse el caso de que sea nula, lo que contrasta con el hecho de que la mayoría de programas de licenciatura incluyen al menos un curso de estos tópicos (constatado para el caso de la Universidad de Sonora, pero que es de esperarse también se presente en carreras de otras instituciones de nivel superior.)

CAPÍTULO II

El Problema de Investigación

Introducción

El principal objetivo de este capítulo es el planteamiento del problema de investigación, para lo cual creemos conveniente destacar en primer término algunas consideraciones adicionales con relación a dicho problema, y que de algún modo recapitulan o especifican algunos puntos iniciados en el capítulo anterior.

El planteamiento de objetivos generales y específicos de la investigación, es otro aspecto que también forma parte de este capítulo, como parte de las orientaciones que guían el desarrollo de nuestro trabajo, concretando aspectos del problema a ser abordados y en cuyo cumplimiento se espera arribar a una nueva visión de la problemática sujeta a estudio.

Asimismo, indicamos el escenario de estudio en el que se trabajó la parte experimental, el tipo de estudio que se realizó, así como las razones fundamentales para tales elecciones.

II.1 Algunas Consideraciones Adicionales

Aunado a los planteamientos hechos en el capítulo anterior, destacamos que, en Matemática Educativa, lo referente a los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística se plantea actualmente como un área de investigación que requiere una mayor atención por los preocupantes resultados que ha arrojado.

Específicamente se ha reportado la existencia de profundas dificultades en la comprensión del concepto de probabilidad, y en ello se señala a un insuficiente desarrollo de la capacidad combinatoria como uno de los factores que interfieren significativamente en ello, lo que ha conducido a la realización de diversas investigaciones entre las que se destacan las que hemos citado en el primer capítulo de este trabajo. Observaciones enmarcadas en esta problemática se ha tenido oportunidad de constatar en aulas de nuestro medio y constituyen una motivación más para el presente trabajo.

Así pues, el campo de investigación más general que ha despertado nuestro interés, como lo hemos dejado, corresponde a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística, campo que resulta sumamente amplio y complejo, por lo que el presente trabajo se limita a una cuestión particular relacionada con la comprensión del concepto de probabilidad y, por qué no decirlo, al desarrollo de las personas en la esfera de conocimientos ahí implicados, sobre lo que hemos señalado ya algunos elementos que se han tomado como antecedentes.

Concretamente, el trabajo se centra en la realización de un estudio sobre las capacidades combinatorias de estudiantes de bachillerato, tomando en consideración que se señala a dicha capacidad como una condición necesaria en la comprensión del concepto de probabilidad.

Para los fines del presente trabajo, en principio, consideraremos la capacidad combinatoria como aquella habilidad del sujeto para formar arreglos o disposiciones de elementos bajo algunas restricciones, para reconocer la estructura de los mismos y para cuantificarlos. Esta capacidad involucra estrategias que pueden exteriorizarse en el uso de diagramas, de tablas o bien de argumentaciones lingüísticas pero también el recurso a un listado, a algoritmos combinatorios o simplemente al principio fundamental del conteo.

Así, esperamos que dicha capacidad se refleje en las respuestas que den los estudiantes cuando se les enfrente ante una situación problemática de naturaleza combinatoria y, en consecuencia, agregamos como componentes, toda acción del sujeto que le permita avanzar en su solución.

Para observar cómo se desempeñan los estudiantes ante distintas situaciones típicas, se diseñó un cuestionario en el que involucramos el manejo de cuatro variables de tarea y de cuyas respuestas esperamos obtener información acerca de la capacidad bajo estudio y, en consecuencia, tener elementos que nos permitan establecer conclusiones en torno de su razonamiento combinatorio, entendido esto último como la forma en que incorporan e integran en la resolución de las situaciones planteadas, las ideas básicas inherentes a la capacidad combinatoria.

Teniendo presentes los señalamientos vertidos en el capítulo anterior, esperaríamos que los individuos a los que está dirigida esta investigación cuenten con un nivel de maduración suficiente en torno a las capacidades que les demandan las situaciones que les planteamos.

Otra de las consideraciones que tenemos presente es que, a pesar de que la interacción del individuo con el medio (dentro de lo que podría estar la escuela) le provee de situaciones que por lo menos le permitirían alcanzar un acercamiento intuitivo al concepto implicado, también existen factores contrarios que le dificultan tal desarrollo o que pueden llevarlo a formarse ideas que resulten incompletas e, incluso, incorrectas. De hecho, consideramos que la presencia de factores contrarios hace lento el desarrollo de estas ideas en el individuo y, sin una instrucción apropiada, lo impide.

La presencia de ideas incompletas o incorrectas en los individuos pueden extenderse a situaciones escolares aún cuando se tomen previsiones desde la perspectiva didáctica, puesto que las experiencias que tiene el individuo influyen significativamente en la formación de las mismas.

Si bien la presencia curricular de tópicos de Probabilidad y Estadística en la educación preuniversitaria en países desarrollados resulta ser un hecho consumado, en nuestro país no se da la misma situación, con lo cual se pudiera estar agravando la posibilidad antes señalada. La inserción curricular de tópicos de Probabilidad y Estadística recibió un impulso reciente en lo que corresponde a la escuela primaria y secundaria (aunque no tenemos seguridad de que realmente se lleve al aula) pero en el siguiente nivel educativo, en gran medida, como sería para la mayoría de los estudiantes, ocurre que ni el currículo formal les contempla.

Particularmente, esta ruptura en la secuencia educativa pudiera estar desfavoreciendo un desarrollo conveniente en lo que se refiere a la evolución de las ideas ya iniciadas en el nivel previo y que se reflejarán en su uso en aquellas situaciones donde el manejo de las mismas resulte ser una herramienta fundamental.

Adicionalmente, reformas recientes en el currículo sobre Probabilidad y Estadística, incluso la que se señaló que ocurrió recientemente en México, no sólo deben contemplar un cambio a la limitada presencia de tales tópicos sino que también deben incluir cambios en las creencias acerca de sus enseñanzas (o que al menos se promuevan).

Por lo antes expuesto, la investigación en este marco resulta tener vigencia en la actualidad y una opción sería continuar con lo que ya ha iniciado por la comunidad internacional, con las adecuaciones pertinentes a nuestro contexto social y a nuestros fines y puntos de vista.

II.2 Problema de Investigación

Antes de establecer el problema de investigación, nos abocaremos al planteamiento de objetivos generales de la investigación en curso, lo que retoma el aspecto central atribuido al trabajo.

Este objetivo es el de realizar un estudio de las capacidades combinatorias de estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas. En ello se utiliza como un medio de acercamiento el manejo de situaciones problémicas en cuya resolución se involucran específicamente los conceptos matemáticos de combinaciones y permutaciones. Este estudio se realizó con estudiantes que tuvieron instrucción en Probabilidad y Estadística en ese nivel educativo, así como también con estudiantes que no habían tenido instrucción en ello, debido a que se encontraban en semestres iniciales.

Partiendo de que manifestamos nuestra preocupación en torno a las capacidades combinatorias, resulta pertinente mencionar que nuestro interés se ha enfocado no sólo en atender la parte cuantitativa que implican la resolución de problemas de esta naturaleza, sino que principalmente trataremos de observar las cuestiones ligadas a aspectos cualitativos. Así mismo, estamos interesados en analizar tanto las respuestas correctas como las incorrectas, pues de ellas esperamos obtener información acerca de los errores, estrategias y dificultades que presentan los estudiantes en su razonamiento combinatorio.

Dada la pretensión de estudiar las estrategias y argumentaciones proporcionadas en la resolución de las situaciones planteadas, se pone atención en aspectos que inician en la observación acerca de la claridad por parte del estudiante en el planteamiento de la situación misma, el uso de diagramas de árbol, tablas, procedimientos de enumeración, uso de fórmulas. De ello se contempla tener un análisis que pueda arrojar luz acerca de las fuentes de dificultades en su resolución, así como de los errores que se cometen en las mismas y que pretendemos, en su momento, caracterizar.

En la observación de aspectos como los señalados, como se ha dejado ver, encontramos pertinente el uso de problemas. Se ha diseñado un cuestionario del que forman parte, un grupo de problemas seleccionados para que sean resueltos por los estudiantes, pretendiendo realizar, a partir del análisis de sus respuestas, un proceso de inferencia, hacia las estrategias, errores y dificultades que presentan los estudiantes y con ello ubicar el estado de desarrollo en que se encuentran en su razonamiento combinatorio. Los problemas diseñados pretenden, particularmente, investigar cómo influyen algunas variables de tarea específicas en los procedimientos utilizados por los estudiantes para resolver los problemas así como en los errores que cometen.

Todos estos planteamientos y argumentos expuestos nos sirven de contexto para ubicar el problema de investigación de este trabajo, y que enunciamos a continuación:

> ***¿Cómo influyen las diferentes variables de tarea en los procedimientos y errores que presentan los estudiantes en la resolución de problemas combinatorios?***

Dentro de este cuestionamiento, una variable de tarea primaria viene a ser el *modelo combinatorio implícito* en una situación combinatoria, respecto a la cual, en concordancia con J. G. Dubois (1984), consideramos una clasificación de problemas en tres categorías básicas: selección, colocación y partición. Tres variables de tarea complementan la lista que pretendemos pongan en juego en la resolución de los problemas: tipo de operación combinatoria, tipo de elementos que se combinan y valor de los parámetros.

Como ejemplo de esto, mostramos a continuación un problema[1] y su clasificación respecto a las variables de tarea señaladas, en el entendido que detalles metodológicos respecto a su uso en este trabajo son expuestos posteriormente.

Problema: *Cuatro jóvenes son enviados al director del colegio por alborotar en la clase. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego!*

Supongamos que se llaman Andrés, Benito, Carlos y Daniel, pero los designaremos brevemente como A, B, C y D. Se desea escribir todos los órdenes posibles en que podrían alinearse.

Por ejemplo: para el orden

A	*B*	*C*	*D*
1°	*2°*	*3°*	*4°*

escribiremos ABCD. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

En este caso, el valor de las variables de tarea involucradas serían: para el *modelo combinatorio implícito*, el de colocación; para la variable *tipo de operación combinatoria*, el de permutación sin repetición; para el *tipo de elementos que se combinan*, el de personas; y finalmente el de *parámetros* es de n=4.

II.3 Escenario, Tipo y Objetivos Específicos del Estudio.

Como hemos mencionado con anterioridad, la investigación propuesta se llevó a cabo seleccionando como escenario de estudio al Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), por contemplar curricularmente instrucción en Probabilidad y Estadística en forma obligatoria y además considerando que es una institución que aporta a la Universidad de Sonora un número importante de estudiantes.

En la parte experimental del trabajo se seleccionaron de dicha institución algunos grupos de estudiantes que ya habían tomado cursos que involucran contenidos de Probabilidad y Estadística y también estudiantes que, por ser de semestres iniciales, no habían tenido la oportunidad de cursarlos, con el fin de establecer posibles diferencias en sus razonamientos y buscar explicaciones a tales resultados.

El tipo de estudio realizado es de corte cualitativo y sólo tiene la finalidad de ser de carácter exploratorio. Además de lo que concierne directamente al problema de investigación antes planteado, pretendemos también obtener información acerca de las argumentaciones,

[1] Tal problema formó parte de un grupo de veinte problemas que, distribuidos en siete cuestionarios fueron sometidos a pilotaje con varios grupos de estudiantes, en los que se incluyeron estudiantes con instrucción y sin instrucción en Probabilidad y Estadística.

procedimientos y errores que cometen los estudiantes en la resolución de los problemas, a fin de tener elementos que permitan caracterizarlos.

Antes de hacer explícitos los objetivos específicos del estudio, enfatizamos que el fin de este trabajo no es establecer una propuesta didáctica para el tratamiento de algún tema relacionado con la Probabilidad, aunque esto podría ser una consecuencia, por lo que los objetivos específicos que así lo sugieran deben tomarse sólo como posibles recomendaciones.

- Comparar el razonamiento combinatorio entre dos niveles de estudiantes de bachillerato;
- Valorar el papel que en el razonamiento combinatorio de los estudiantes tiene la instrucción o su ausencia;
- Detectar errores y dificultades en el razonamiento combinatorio y posibles explicaciones a los mismos;
- Tener elementos que en su momento sean tomados en cuenta en el diseño de estrategias que apoyen la construcción de ideas por parte de los estudiantes así como a la superación de dificultades que presenten;
- Tener elementos que nos permitan hacer recomendaciones para el diseño curricular y reformas a planes y programas de estudio.

CAPÍTULO III

Marco De Referencia

Introducción

El planteamiento de aquellos aspectos teóricos que se han estado presentes en el desarrollo de la investigación en curso es el objetivo principal de este capítulo. Estos elementos teóricos, que hemos organizado en cuatro secciones, constituyen las consideraciones más generales desde la que se orienta nuestra investigación.

En la primera de las secciones planteamos elementos del ámbito cognitivo que permiten ubicar el desarrollo intelectual de los individuos a los que hemos dirigido nuestro estudio, y que se han puesto de manifiesto con anterioridad.

En la siguiente sección tomamos en consideración aspectos que se refieren al contenido matemático que está involucrado en la investigación, tratando de acotar los contenidos que son de interés central para nuestro trabajo.

Posteriormente nos concentramos en torno de consideraciones curriculares que nos den una orientación para la ubicación de los contenidos de interés en el contexto escolar. Estos resultados nos sirven de base para realizar un análisis general de planes y programas de estudio, así como de algunos textos recomendados para el estudio de tales contenidos.

Finalizamos el capítulo con una sección en la que exponemos algunas consideraciones teórico-metodológicas que se ponen en juego en la parte experimental de nuestro estudio.

III.1 Consideraciones Psicológico-Cognitivas

De antemano hemos señalado que una de las referencias importantes en nuestro trabajo lo constituyen los resultados obtenidos por Piaget-Inhelder(1975) alrededor del desarrollo de la noción de azar en el niño, y en particular sus resultados en torno de la evolución de las operaciones combinatorias.

Las investigaciones de Piaget, nos ofrecen una visión del desarrollo cognitivo del individuo desde su nacimiento hasta llegar a su madurez, contemplando tres períodos o estadíos evolutivos caracterizados por las formas de saber en el individuo. En lo general, estos momentos del desarrollo cognitivo pueden ser caracterizados en los siguientes términos:

Período	**Edad**[1]	**Descripción**
Sensorio-motor	0-2	El niño en este período adquiere habilidades motrices en respuestas a estímulos ambientales, pero no es capaz de representarse el mundo internamente de ninguna forma. La primera forma de saber del niño es la acción física que ejerce sobre el mundo que lo rodea, y es en esta etapa que se sientan las bases para su desarrollo perceptivo e intelectual posterior.
Operaciones Concretas	2-11	Este período se divide en dos subperíodos o etapas: Preoperacional (2-7 años): El niño inicia en esta etapa el uso de representaciones mentales. Es capaz de ir más allá de las acciones motoras para pensar sobre los objetos y acontecimientos a su alcance, pero no puede hacerlo en forma organizada. Operaciones concretas (7-11 años): en esta etapa el uso de representaciones mentales da paso a acciones mentales sistemáticas u operaciones, que aplica al mundo de objetos que lo rodean. Dichas operaciones (clasificación, seriación, numeración, etc.) alcanzan su completo desarrollo en este subperíodo y capacitan al niño para el pensamiento lógico y aritmético aunque en el ámbito de los casos concretos.
Operaciones formales	11-15	En este período el adolescente desarrolla capacidades que le permiten expresar relaciones en términos lingüísticos y considerar sistemáticamente las relaciones de las proposiciones entre sí, de hacer deducciones e implicaciones y de obtener conclusiones de un conjunto de afirmaciones sobre un fenómeno. Esto es, arriba a un momento en que su acción mental es ejercida sobre ideas y, por ende, a la capacidad de ejercer tal clase de acción sobre operaciones, superando el tipo de pensamiento ligado a lo concreto .

[1] Las edades expresadas en años se consideran sólo como aproximadas y pueden variar por factores como el medio ambiente o antecedentes individuales.

Esta descripción de los principales períodos del desarrollo intelectual señalados por Piaget, son referidos en sus estudios concernientes al desarrollo de la noción de azar y al concepto de probabilidad en el individuo en el que concluye la existencia de tres etapas de desarrollo que se presentan dentro de los períodos de las operaciones concretas y el de las operaciones formales.

Los resultados de Piaget-Inhelder en torno al desarrollo de las capacidades combinatorias son resumidos a continuación.

Durante la etapa conocida como preoperatoria, el niño no sospecha la posibilidad de un sistema que le pueda permitir encontrar todas las combinaciones de pares, y todas las permutaciones o arreglos que pueden hacerse con varios elementos en el contexto de "pequeños números". En ello requieren operaciones multiplicativas especiales y aún no poseen operaciones aditivas que le anteceden. Esto es característico en esta etapa de desarrollo del infante, pues se encuentra en un momento en el que se empiezan a desarrollar capacidades necesarias para dar pie a operaciones mentales.

Durante la siguiente etapa de desarrollo, conocida como etapa de las operaciones concretas, el niño comprende la posibilidad de tales sistemas, y llega a descubrirlos de una manera empírica para casos de conjuntos con un "número pequeño" de elementos.

Esto corresponde al comportamiento típico de los niños de esta etapa, en el que sus reacciones son la búsqueda de soluciones a situaciones que se le presentan a través del manejo de objetos, sin cuestionarse acerca de la existencia de un sistema que le permita encontrar todas las opciones posibles.

Es hasta el último período o estadío, conocido como período de las operaciones formales, que el niño ha desarrollado la capacidad de plantearse, en principio la posibilidad de existencia de sistemas combinatorios completos para un pequeño número de elementos y posteriormente descubrir y poner en juego esos sistemas. Se señala, además, que para el caso de las permutaciones, es necesario esperar hasta alrededor de los quince años.

Así pues, la aptitud para el análisis metódico de disposiciones de elementos o para descubrir relaciones específicas en ese contexto, características del razonamiento combinatorio, emergen en íntima relación y complementariamente al pensamiento lógico, hipotético y deductivo. Esto involucra de principio operaciones o sistemas de acciones mentales internas que subyacen a dicho tipo de pensamiento y que trascienden al mundo de lo concreto, lo que explica su aparición hasta este período de la capacidad combinatoria.

Un resultado particularmente clave para nuestra investigación es la conclusión acerca de la relación existente entre ideas combinatorias, la percepción de fenómenos irreversibles y la noción de azar, y la de que el desarrollo de las capacidades combinatorias constituyen una condición necesaria para que los individuos sean capaces de construir la idea de probabilidad.

Dentro del ámbito escolar cobran relevancia las investigaciones realizadas por Fischbein (1975), especialmente las que se refieren a la evolución de las ideas de azar y probabilidad. El desarrollo de las intuiciones es un aspecto que sobresale en sus investigaciones, a las cuales les concede gran importancia como componentes del pensamiento y con gran incidencia en su desarrollo. Dichas intuiciones son concebidas como aquellas adquisiciones cognitivas base que el individuo pone en juego ante las distintas situaciones, escolares o no, a las que se enfrenta.

Una de las clasificaciones que Fischbein da a las intuiciones, es la de: primarias y secundarias. La intuiciones primarias son aquellas que el individuo ha desarrollado en su necesidad de interactuar con el medio, mientras que las intuiciones secundarias corresponden al producto de una instrucción intencionada, por tanto estas últimas se constituyen en un apoyo hacia las primeras.

Un detalle adicional es que ambos tipos de intuiciones pueden desarrollarse correctamente o no. En este sentido, las intuiciones secundarias juegan un papel relevante pues resultan ser un medio a través del cual se tiene una posibilidad de corrección de intuiciones primarias incorrectas, pero también de fortalecimiento de las que se hayan desarrollado en forma correcta.

Tomando en consideración estas investigaciones, vemos que las intuiciones juegan un papel importante en el desarrollo intelectual de los individuos y que por tanto éstas debieran ser tomadas en cuenta en la planeación, diseño e implementación de actividades escolares. El fortalecimiento de intuiciones correctas y la corrección de aquellas que no lo son proporcionan al individuo condiciones intelectuales favorables que se manifiestan en una evolución óptima a lo largo de las distintas etapas señaladas por Piaget.

Por otra parte, Fischbein también hace la observación de que las intuiciones incorrectas se arraigan con la edad, lo que hace más evidente la necesidad de una instrucción intencionada en la formación de intuiciones desde los niveles elementales.

En particular, una recomendación que hace Fischbein para el desarrollo de las intuiciones, es que en la resolución de problemas se pida al sujeto realizar estimaciones de la solución, poner en juego el uso de recursos icónicos como lo es el diagrama de árbol en el caso de problemas combinatorios; asimismo hacer comparaciones de los resultados obtenidos con los estimados.

En cuanto a su interés por la evolución de los fundamentos intuitivos y precursores del conocimiento probabilístico considera que bajo condiciones de instrucción, el niño es capaz de emitir juicios probabilísticos aún antes de entrar al estadío de las operaciones formales.

Finalmente podemos decir que, tomando en consideración los resultados de Piaget-Inhelder aquí señaladas, observamos que de acuerdo a las edades de los sujetos a los que está dirigida nuestra investigación, ya deberían haber transitado por las etapas a las que se hace referencia. Un elemento adicional a tomar en cuenta es la influencia que en este desarrollo pudiera estar teniendo la instrucción que`dichos sujetos han recibido y en lo que cobran importancia las investigaciones realizadas por Fischbein, en el sentido de analizar cómo es que interviene la escuela en la corrección y adquisición de intuiciones.

III.2 Análisis Combinatorio

En la presente sección estamos interesados en establecer los contenidos matemáticos a los que nos referimos en nuestra investigación, tratando de acotar aquellos aspectos del objeto matemático de interés particular que nos orienten en la búsqueda de dificultades que aparecen en su tratamiento, así como explicaciones a éstas. A la vez tratamos de analizar el papel que dichos contenidos han jugado en la construcción y evolución de las ideas de azar y probabilidad.

En forma general, se puede enunciar que uno de los objetivos de la Combinatoria es el estudio de las familias de subconjuntos de un conjunto dado (usualmente finito) que satisfacen ciertas propiedades. De acuerdo a características particulares de dicho conjunto, el problema se ubica dentro de una de las sub-áreas, en las que se divide la Combinatoria y que se enuncian a continuación.

- Combinatoria Enumerativa (Problemas y Técnicas de Conteo)
- Teoría de Gráficas
- Teoría de Diseños/Geometría Finita.

Los contenidos que abordamos en nuestro estudio se ubican dentro de la primera de esas sub-áreas, que de hecho, comúnmente es identificada en sí como Combinatoria. Un ejemplo de esto son los libros de texto básicos en los que se dedican secciones completas a problemas y técnicas de conteo, denominándolo como Análisis Combinatorio o simplemente como Combinatoria.

Se señala que uno de los primeros problemas que puede clasificarse como un problema en la teoría de probabilidad es el cálculo del número de los resultados posibles en el lanzamiento de varios dados, los primeros cálculos conocidos datan de los siglos X y XI. En particular, varias soluciones fueron dadas a problemas derivados del lanzamiento de tres dados, entre ellas algunas incorrectas pues en sus cálculos no tomaban en cuenta la repetición o el orden.

Problemas que se refieren al lanzamiento de dados también fueron tratados por Gerolamo Cardano, Niccolo Tartaglia y Galileo Galilei, siendo este último quien da una solución completa sobre el problema del número de todos los posibles resultados con tres dados en su tratado "*Considerazione sopra il Giuco dei Dadi*" publicado en 1718. El método propuesto por Galileo Galilei puede generalizarse fácilmente y está basado principalmente en la enumeración de los casos posibles.

Otro problema al que se hace referencia comúnmente cuando se trata de aspectos relacionados con el surgimiento de la teoría de la probabilidad, es el denominado problema de la división de apuestas, para el cual una solución es publicada por Luca dal Borgo o Paccioli en 1494, pero del que existen referencias anteriores. El problema de la división de apuestas fue tratado también por Gerolamo Cardano y Niccolo Tartaglia quienes al igual que Paccioli lo resuelven incorrectamente.

Un planteamiento general de dicho problema se establece en la siguiente forma:

"Dos personas acuerdan jugar un cierto número de rondas de un juego, apostando de antemano una cantidad igual de dinero. El ganador del juego será el primero que logre ganar S rondas. Por alguna circunstancia, el juego se interrumpe cuando uno de los jugadores ha ganado a rondas ($a<S$) y el otro ha ganado b rondas ($b<S$). ¿Cómo se deberá repartir de manera justa la apuesta del juego?"

Es durante el siglo XVII, que Blaise Pascal y Pierre de Fermat dan un impulso sustancial al desarrollo de la Teoría de la Probabilidad al llegar a una solución correcta del problema de la división de apuestas. Dicha solución se plantea en términos de analizar los posibles resultados de esos juegos y en base a eso proponen dividir la apuesta en forma proporcional a la probabilidad de ganar si el juego se continuara. Posteriormente Pascal aplica su triángulo aritmético para dar solución a juegos de azar.

Los acercamientos de Pascal y Fermat ilustran la aplicación de la regla de lo favorable a lo posible, dándole a la probabilidad un sentido pragmático aunque no se clarifica la naturaleza de la misma. En este aspecto, la equiprobabilidad de resultados en los juegos de azar les pareció intuitivamente obvia, por tanto los juegos de azar sirvieron como un puente entre la intuición y el desarrollo de conceptos, así como también de contexto de emergencia de una herramienta para estructurar fenómenos reales.

En esta corta semblanza del desarrollo de la probabilidad, es de señalarse los esfuerzos contemplados a lo largo del tiempo, en un principio las situaciones eran atacadas mediante razonamientos de proporcionalidad, esto es sin consideraciones aleatorias o probabilísticas. Luego inicia la consideración en mayor detalle sobre la diversidad de casos posibles, primero vía la enumeración de los mismos y posteriormente a través de descubrir su estructura y una forma de contar los casos a través del cálculo. En esto la no consideración de si los elementos son repetibles (o no), si intervenía el orden (o no) o si los elementos son distinguibles entre si (o no), causó errores y dificultades que fueron superados en la medida en que la herramienta combinatoria y su relación con el tipo de situaciones fue evolucionando.

La herramienta básica de la Teoría de Probabilidad fue la combinatoria hasta que apareció el Cálculo Diferencial e Integral. Casi todos los problemas eran resueltos usando métodos combinatorios, por tanto el desarrollo de la combinatoria influyó notablemente en el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad, especialmente en sus etapas iniciales como lo acabamos de señalar.

Enseguida hacemos un resumen de los aspectos del contenido matemático que son de interés en nuestro trabajo de investigación. La presentación está basada en una revisión de los textos clásicos utilizados actualmente en los niveles medio y superior. De este modo adoptamos en tal resumen notaciones, ejemplos, resoluciones, etc.

Cotidianamente se requiere reflexionar acerca de cuántos arreglos diferentes (de acuerdo a diversas condiciones), se pueden formar con ciertos objetos dados. Ejemplos de estos son el elaborar los posibles horarios o cursos que impartirán los profesores de una institución educativa, las distintas palabras que se pueden formar con las letras del alfabeto, la selección de personal a ser contratado por una empresa, las distintas maneras en que puede caer una moneda que se lanza dos veces consecutivas, etc.

Otras situaciones, tratadas comúnmente en los distintos niveles escolares son el elegir un menú de entre varias opciones disponibles, formar un comité de varias personas tomadas de un cierto grupo o integrar una mesa directiva, hacer el rol de juegos de una determinada competencia, formar las distintas opciones de vestuario e inclusive, determinar las formas posibles en que pueden caer dos o más dados al ser lanzados.

Estos problemas pueden enunciarse en general cómo el de encontrar el número de arreglos que pueden hacerse, a partir de n objetos (animales, personas o cosas) tomados en grupos de r. Este número depende de las condiciones que le impongan el tipo de elección que se haga de cada uno de los objetos a fin de formar los arreglos, ya sea con sustitución (repetición) o sin sustitución (repetición) y de si el orden que tengan los objetos en el arreglo es importante o no. Además los objetos mismos en ocasiones tienen características que es importante tener en cuenta como el que sean distinguibles o no.

Tomando en consideración el tipo de elección, se obtienen dos tipos de arreglos, con repetición y sin repetición de elementos y a su vez tomando en cuenta el orden en que aparecen los objetos tenemos otras dos situaciones con y sin orden de los elementos, de aquí se desprenden por tanto cuatro casos[2]:

1. Arreglos con repetición ordenados, conocido como ordenaciones o permutaciones con repetición.
2. Arreglos sin repetición ordenados, o simplemente ordenación o permutación.
3. Arreglos sin repetición no ordenados, o combinaciones sin repetición o simplemente combinaciones.
4. Arreglos con repetición no ordenados, o combinaciones con repetición.

El problema que ocupa es determinar la cantidad de arreglos que pueden formarse en cada caso. Para determinar este número se hace uso del principio fundamental del conteo o regla del producto, que establece que si un conjunto A_1 tiene n_1 elementos y un conjunto A_2 tiene n_2 elementos, el total de arreglos que pueden hacerse tomando un elemento de A_1 y otro del conjunto A_2 es el producto $n_1 x n_2$.

El resultado anterior puede extenderse al caso de n conjuntos: Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, los n conjuntos con $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n$ elementos respectivamente, el total de arreglos que pueden hacerse tomando el primer elemento de A_1, el segundo elemento de A_2 y así sucesivamente hasta el último elemento de A_n es el producto $n_1 x n_2 x \ldots x n_n$.

[2] En los cuales no es explícita la consideración de que si los elementos son distinguibles o no, pero es así como aparece en la mayoría de los textos revisados.

Utilizando este resultado se tiene cada una de las siguiente situaciones:

Ordenaciones o Permutaciones con repetición[3]

En este tipo de arreglos el orden es importante, de modo que los arreglos con los mismos elementos son diferentes si difieren en el orden en que aparecen sus elementos. En este caso, en cada elección el número de objetos se mantiene fija, digamos "n", de modo que si queremos hallar arreglos de "r" objetos, tendríamos r conjuntos de n elementos de donde escogeríamos uno a la vez, por lo tanto $PR_{n,r} = n^r$. En el caso $n=r$, que significa el total de arreglos considerando "n" elecciones, tendríamos $PR_{n,n}=n^n$.

Por ejemplo, si nos preguntamos acerca de cuántos arreglos distintos de tres dígitos podemos formar utilizando los dígitos de nuestro sistema de numeración, tendríamos $10x10x10 = 1000$ arreglos distintos.

Ordenaciones o Permutaciones sin repetición

La variante respecto al caso anterior, es el tipo de elección. En este caso, dado que no hay reemplazo, el número de elementos después de cada elección va disminuyendo en uno. De este modo tenemos un conjunto inicial de n elementos, luego uno de $(n-1)$ y así sucesivamente. Después de r elecciones tendríamos un conjunto con $(n-r)$ elementos, de modo que antes de elegir al r-ésimo elemento del arreglo tenemos un conjunto con $(n-r+1)$ elementos. Así el total de arreglos en este caso es $P_{n,r} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$.

Para el caso $n=r$, se tendría , $P_{n,n} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)...(2)(1)$ que es denotada también como $n!$ (n factorial). Usando esta notación y agregando la convención $0!=1$, se obtiene una nueva expresión para $P_{n,r}$. Esto es:

$$P_{n,r} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Así: $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Refiriéndonos al ejemplo anterior, se tienen $10x9x8= 720$ arreglos sin repetición de dígitos.

Si consideramos un conjunto con $n_1, n_2,.., n_k$ clases de objetos, el número de arreglos diferentes que pueden hacerse está dado por:

$$P_{(n_1,n_2,n_3...n_k)} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}, \text{ donde } n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

[3] Un aspecto que es importante destacar es la diversidad de notaciones encontradas en los textos, por lo cual hemos adoptado una en particular.

Combinaciones sin repetición (Combinaciones)
Esta situación puede deducirse apoyándose en las ordenaciones sin repetición o más comúnmente referidas como permutaciones, ya que lo que distingue a estos dos casos es que en la combinación el orden en que aparecen los elementos en los arreglos carece de importancia.

De este modo, dado un conjunto de n objetos el total de arreglos que se pueden hacer tomando r de ellos, cuando el orden es importante, es $P_{n,r}$. Para hallar el número de combinaciones de ellos, bastaría con considerar que dados r objetos, el total de maneras en que estos pueden colocarse es $P_{r,r}=r!$. Así $\frac{P_{n,r}}{r!}=C_{n,r}$ y de aquí que $C_{n,r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$. Si $n=r$, se tiene $C_{n,r}=1$.

Un ejemplo clásico para este caso es el siguiente:

¿Cuántos comités de tres miembros se pueden formar con ocho personas?
Puesto que dos comités son iguales si están formados por los mismos miembros (es decir, el orden de la elección no importa), se tienen $C_{8,3}=56$ comités distintos.

Combinaciones con repetición[4]
Existen muchas situaciones en las que además de que el orden en que aparecen los arreglos no tiene importancia, es permitido la repetición de los elementos en el arreglo, por ejemplo si se tratara de la colocación de r bolas indistinguibles en n celdas, cada arreglo podría distinguirse sólo por el número de bolas que tendría cada celda.

Un caso concreto de esta situación es el lanzamiento de r dados, el cual puede ser visto como equivalente a la colocación de r bolas en n=6 celdas. Aunque es posible registrar los resultados individuales, en general interesa sólo registrar el número de veces que aparece cada una de las caras. Para este caso, se podría suponer que los dados están numerados, pero es conveniente concentrarse en los eventos independientemente de los dados.

De esta forma, un evento queda descrito completamente por los números de ocupación $r_1, r_2, ..., r_n$, donde r_k es el número de bolas en la k-ésima celda. Toda n-ada de enteros que satisfaga $r_1+r_2+...+r_n=r$, $r_k \geq 0$, describirá una configuración de números de ocupación.

Así, con bolas indistinguibles, dos distribuciones serán distinguibles solamente si las n-adas correspondientes $(r_1, r_2, ..., r_n)$ no son idénticas. Por lo tanto, en este caso interesa encontrar el número de distribuciones distinguibles (problema equivalente al de encontrar todas las soluciones diferentes de la ecuación recién planteada).

[4] Este caso en general no es tratado en los libros de texto básicos en el nivel medio.

Este problema es tratado en el texto de W. Feller (1988) recurriendo a un dibujo en que representa las bolas por estrellas (*) y las celdas por los n espacios comprendidos entre $n+1$ barras (ξ) . De este modo, la distribución 3,1,0,0,0,4 de $r=8$ bolas en $n=6$ celdas, sería representada por | *** | * | | | | **** |.

En esta representación, toda distribución aparecería con una barra al principio y otra al final, de modo que el problema se traduciría en encontrar el número de maneras de seleccionar r lugares de entre $n+r-1$ disponibles , esto es de $C_{n+r-1,r}$ que correspondería al número total de arreglos no ordenados bajo el muestreo con reemplazo.

Como podemos observar, en los dos primeros casos, las operaciones combinatorias se obtienen simplemente al considerar la elección de la muestra y posteriormente aplicar el principio multiplicativo, este resultado después es utilizado en el tercero de los casos. Luego en el último caso es conveniente recurrir a una situación distinta en la que se requiere hacer una transformación del problema planteado para luego poner en juego las combinaciones ordinarias.

Es decir, sólo los dos primeros casos son obtenidos de una forma directa, y esto comúnmente no se toma en consideración en la enseñanza, cuya práctica común está caracterizado, en general, por un énfasis en definiciones y fórmulas, sin establecer las relaciones existentes entre las ideas aquí expuestas. También es de destacarse en el último caso la utilización de un dibujo para simplificar la situación, recurso al que tradicionalmente no se le da importancia en clase, en las que se le da prioridad al manejo de fórmulas.

Por otra parte, consideramos que, aunque las expresiones puedan obtenerse de manera simple desde la perspectiva de la matemática formal, una presentación anticipada y descontextualizada puede dificultar la aprehensión conceptual de ideas básicas y, como consecuencia, todas las cuestiones ligadas a las mismas.

Finalmente deseamos comentar que los aspectos más fuertemente relacionados con el concepto de probabilidad descansan, no en las expresiones combinatorias mismas o en los cálculos que implican, sino en la estructura de los arreglos cuyo descubrimiento puede permitir a los estudiantes percibir las características del espacio muestra y de sus subconjuntos, y tener elementos con los que puedan establecer relaciones entre ellos. Consideramos que una consecuencia de esto podría ser el surgimiento de una manera natural de justificaciones a consideraciones dentro de la Teoría de la Probabilidad, como el rango de valores posibles para la probabilidad de un evento.

III.3 Consideraciones Curriculares

Dentro de nuestro trabajo incluimos el análisis de Planes y Programas de Estudio, Libros de Texto, Cuadernos de Aprendizaje y el trabajo cotidiano en el aula; como expresiones formales o reales de los contenidos matemáticos a que son expuestos los estudiantes en la escuela. Dicho análisis se lleva a cabo en el marco de elementos planteados por Heitele (1975) acerca de las ideas fundamentales en estocásticos.

En sus planteamientos Heitele, a su vez toma en consideración las siguientes tesis de J. S. Bruner:

- El principio de la instrucción en un tópico es la transmisión de ideas fundamentales
- La hipótesis de que "cualquier tema se puede enseñar adecuadamente, de manera intelectualmente honesta, a cualquier niño, durante cualquier etapa de desarrollo" implica que las ideas fundamentales son necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad.
- Las ideas fundamentales y los conceptos se abordarán en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un curriculum en espiral.
- La transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilitará si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación adecuada del tópico principal. Se fomentará en particular, la comprensión intuitiva de las relaciones concretas durante la escuela primaria, en tanto el niño no pueda aprehenderlas de manera analítica más elaborada.

Tomar en cuenta estas consideraciones en el diseño curricular significa que la instrucción de los distintos conceptos matemáticos deberá girar en torno a ideas fundamentales a modo de una espiral continua, de manera que en distintos momentos deberán corresponder acercamientos adecuados al nivel cognoscitivo del estudiante. Implica también tener en mente que los estudiantes tienen concepciones e intuiciones desarrolladas dentro y fuera del ámbito escolar y que deberán ser tomadas en cuenta en la planeación de las actividades de clase.

La última de sus tesis, pone de manifiesto el hecho de que los objetos matemáticos difícilmente pueden ser comprendidos, si no hay de antemano un acercamiento adecuado del tópico. Esto significa que la presentación formal de los tópicos no es la mejor opción para iniciar a los estudiantes en el estudio de ellos, sino que debería promoverse el tratamiento de los conceptos desde un plano intuitivo, y de acercamientos que den al sujeto en cada momento, una visión de objeto de acuerdo al nivel en que se encuentre, facilitando, por tanto el salto hacia niveles cada vez más elaborados y como consecuencia una comprensión o una apropiación cada vez mejor de los mismos.

Esto es, el papel que se le otorga al estudiante es el de un sujeto activo, cuyo aprendizaje se dará sólo a través de la interacción con el objeto y, por tanto, el profesor deberá promover acciones que tiendan a propiciar esa interacción de la mejor manera posible. Esta promoción implica que la planeación didáctica no debería realizarse obedeciendo simplemente la estructuración del contenido matemático en cuestión, sino en función de favorecer en el sujeto, el desarrollo de las ideas que son indispensables para que los contenidos puedan ser abordados, a la larga, en un plano formal.

Un aspecto que no debemos pasar por alto, es que, además de los señalamientos dados por Bruner, Heitele también basa su propuesta de ideas fundamentales en un estudio de los resultados de la psicología del desarrollo de las ideas estocásticas, del estudio de la historia de la Probabilidad y, además, en el estudio de las diversas fallas de los adultos ante situaciones estocásticas.

A partir de lo anterior, Heitele propone como ideas fundamentales en estocásticos a las siguientes:

- Asignación Numérica de las probabilidades
- Espacio Muestra
- La regla de la Adición
- Independencia
- Equidistribución y Simetría
- Combinatoria
- Modelo de Urna y Simulación
- Variables Aleatorias
- Ley de los grandes números
- Muestra

Si consideramos este conjunto de ideas fundamentales como una red conceptual alrededor de las cuales se construyen las nociones de azar y probabilidad, entonces la combinatoria debería jugar, al igual que el resto de las ideas fundamentales, un papel primordial dentro del currículum escolar. Esto implicaría la necesidad de un tratamiento sistemático en los distintos niveles, que garantice una continuidad de aquellos aspectos que giran alrededor de dicha idea y en los que se contemple cubrir, de acuerdo al nivel escolar, no únicamente técnicas de cálculo, sino también una gama de situaciones que le den sentido y que por si mismas justifiquen su estudio.

III.4 Consideraciones Teórico-Metodológicas

Este apartado contempla algunos elementos, desde una perspectiva educativa, sobre los problemas de matemáticas en general y de los combinatorios en lo particular, así como del proceso de su resolución. En el caso de los problemas combinatorios, especialmente se destaca una característica estructural que tiene que ver con los posibles valores de lo que hemos denominado modelo combinatorio implícito, una de las variables de tarea contempladas en nuestro estudio.

De entrada partimos de que una situación se dice problémica si para el sujeto que la enfrenta, plantea una interrogante cuya respuesta o solución representa un reto. Esta posición implica la aceptación de que una situación puede constituir un problema para algunos sujetos y no para otros, lo cual resultaría congruente con diferentes grados o niveles de desarrollo.

Con todo y esto último, se espera que lo que resulte ser un problema para algunos, para otros, tenga riqueza en cuanto a posibles actividades de matematización involucradas en su resolución, ya sea por el contexto en que está planteado o porque existan procesos de resolución alternos. Así, es nuestra creencia que la resolución de situaciones problémicas hace emerger manifestaciones del razonamiento de parte de los sujetos que las enfrentan

En reflexiones como las anteriores se basa nuestra adopción de problemas como principal medio de indagación sobre las capacidades combinatorias de los estudiantes de bachillerato.

Así mismo, estas reflexiones hacen que enfoquemos nuestro interés en la actividad o tarea que desarrollan los estudiantes para resolver problemas que les planteamos, lo cual puede variar de un problema a otro dando, lugar a lo que se denomina variables de tarea.

En el contexto de la resolución de problemas se han presentado diferentes esfuerzos por clasificar las variables de tarea. Estas clasificaciones consideran el enunciado del problema en si y el proceso de su resolución. Una clasificación de variables de tarea que particularmente adoptamos en este trabajo contempla la siguientes categorías: sintaxis, contexto, contenido, estructura y procesos heurísticos evocados.

En el caso de nuestro estudio, en las situaciones por plantear a los estudiantes coexisten variables de prácticamente todas las categorías anteriores, pero sólo se tiene planeado considerar, de entrada, variaciones de cuatro de ellas. Otras variables se dejan fijas y otras más libres a la acción del estudiante.

Variable de tarea	Clasificación
Tipo de elementos que se combinan:	describe <u>contexto</u> del problema, un aspecto no matemático del problema
Valor de los parámetros:	caracteriza <u>contenido</u> del problema, un aspecto matemático
Tipo de operación combinatoria: *Modelo combinatorio implícito:*	describen <u>estructura</u> del problema, su identificación por el resolutor va más allá de la lectura del problema implicando el proceso de solución mismo

En el caso de los tipos de problemas que implican las capacidades combinatorias, objeto del presente estudio, así como en otros campos de problemas, interviene una enorme cantidad de variables. En este caso y entre las que se pueden denominar de tarea, como hemos mencionado antes, ponemos atención para la elección de problemas, en las siguientes: tipo de elementos que se combinan, valor de los parámetros, tipo de operación combinatoria y modelo combinatorio implícito; cuya clasificación aparece ya en la tabla anterior.

La resolución de los problemas que planteamos creemos que inicia con la identificación del modelo combinatorio implícito, aunque el estudiante no conozca sus valores o no dé muestra de ello. Después de todo, el resolutor inicia la exploración del problema internamente y eventualmente, puede exteriorizar evidencias de ello. Lo que hace el estudiante en dicha exploración, completa o no, sistemática o no, es analizar la estructura del problema para decidir las acciones a tomar en vías de su solución.

Aún cuando de entrada no se identifique el modelo ni el tipo de operación combinatoria, puede ser que se genere una respuesta en la que se incorporen los aspectos esenciales de la situación y esto implica la aportación de las otras variables[5]. Por ejemplo: un valor de

[5] Lo que es importante considerar porque se trabaja con algunos estudiantes sin instrucción en combinatoria específica en nivel educativo en que se encuentran.

parámetros mayor o menor puede dificultar o facilitar una exploración y el tipo de objetos puede llevar a que sean distinguibles o no para el sujeto.

Lo anterior destaca, como variable de tarea, al modelo combinatorio implícito y hace que le brindemos una atención especial, a lo que pasamos enseguida, no sin antes mencionar que en definitiva las restantes variables consideradas guardan una íntima relación con ésta, como se muestra en el párrafo anterior.

En lo que toca al modelo combinatorio implícito, de acuerdo con Dubois (1984) y en lo que corresponde a problemas combinatorios simples[6], hemos considerado tres tipos de esquemas básicos:

- ***Selección*** de una muestra a partir de un conjunto de objetos. Cuando se pide enumerar o contar las diferentes muestras de tamaño dado que pueden formarse a partir de un conjunto inicial;
- ***Colocación*** de objetos en casillas (cajas, celdas o urnas). Cuando se pide enumerar o contar las diferentes aplicaciones entre dos conjuntos de objetos;
- ***Partición*** en subconjuntos de un conjunto de objetos. Cuando se pide clasificar los elementos de un conjunto inicial en un número dado de subconjuntos incompatibles de modo que la clasificación sea exhaustiva.

El primero de estos tres esquemas surge al seleccionar muestras de tamaño r de un conjunto de n objetos. Así, una configuración combinatoria será una muestra de elementos tomados del conjunto de partida. Se requiere, por tanto, tener en cuenta si en las configuraciones influye el orden y si los objetos son reemplazables.

Tales aspectos llevan a cuatro subesquemas que se presentan en la tabla de abajo. Los tres primeros son considerados en el presente trabajo ya que cada uno de ellos implica una operación combinatoria usualmente contemplada en la instrucción sobre el tópico[7].

Subesquema	**Operación Combinatoria**
Selección *ordenada* sin reemplazamiento	Permutaciones ordinarias $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
Selección *ordenada* Con reemplazamiento	Permutaciones con repetición $PR_{n,r} = n^r$
Selección *no ordenada* sin reemplazamiento	Combinaciones ordinarias $C_{n,r} = \dfrac{P_{n,r}}{r!}$
Selección *no ordenada* Con reemplazamiento	Combinaciones con repetición $CR_{n,r} = C_{n+r-1,r}$

En el esquema de colocación, se tienen que colocar objetos dentro de n cajas (celdas o urnas), o bien establecer una aplicación de un conjunto de r objetos en otro conjunto de n objetos. La configuración combinatoria cuyo recuento interesa son las diversas

[6] Se denomina problema combinatorio simple cuando su resolución implica el uso de sólo una operación combinatoria, mientras que en otro caso se le denomina problema combinatorio compuesto.

[7] En nuestro contexto educativo el cuarto caso no se contempla instruccionalmente.

disposiciones de tales objetos en las cajas o las diversas aplicaciones que se establecen entre los dos conjuntos.

Según se considere si el orden de los objetos dentro de las cajas es importante o no y que las cajas y los objetos sean distinguibles o no, se obtienen seis tipos básicos de sub-esquemas de colocación, ya que no tiene sentido ordenar los objetos cuando son iguales. A partir de cada uno de los seis tipos básicos se obtienen nuevos subtipos al tener en cuenta las cuatro condiciones:

1. Colocaciones inyectivas: con a lo sumo un objeto por caja $(r \leq n)$.
2. Colocaciones sobreyectivas: con al menos un objeto por caja $(r \geq n)$.
3. Colocaciones biyectivas: con un solo objeto por caja $(r = n)$.
4. Colocaciones cualesquiera: Se puede colocar el número que se desee de objetos en cada caja o dejar alguna vacía.

De estas consideraciones resultan veinticuatro subesquemas de colocación simple (Roa, 2000), de los que, descartando los casos triviales sólo ocho implican el uso de sólo una operación combinatoria básica, y de entre ellos, siete son sujetos de instrucción en nuestro medio. Mostramos enseguida esas ocho situaciones, correspondiendo al último renglón la que no es contemplada en nuestro medio escolar.

Colocaciones	**Objetos**	**Celdas**	**Tipo de aplicación**	**Operación combinatoria**
Ordenadas	Distintos	Distintas	Inyectiva	$P_{n,r}$
			Biyectiva	P_n
No ordenada	Distintos	Distintas	Inyectiva	$P_{n,r}$
			Biyectiva	P_n
			Cualquiera	$PR_{n,r}$
	Iguales	Distintas	Inyectiva	$C_{n,r}$
			Sobreyectiva	$C_{r-1,n-1}$
			Cualquiera	$CR_{n,r}$

Como puede verse, el esquema de colocación es mucho más amplio que el de selección y que no sólo da origen a las operaciones combinatorias básicas, sino a otras que no se contemplan en la instrucción en nuestro contexto. También se puede observar que la misma operación combinatoria puede obtenerse desde dos subesquemas de colocación distintos. Otra observación, es que no todos los problemas planteables en el esquema de colocación pueden traducirse a un problema de selección, porque el número de subesquemas en la colocación es mucho mayor que en el de selección.

Finalmente, el problema que origina el esquema de partición consiste en efectuar una partición de un conjunto de r elementos en n subconjuntos. Este tercer esquema puede verse como una nueva interpretación de colocación de r objetos en cajas. Si olvidamos las cajas y nos fijamos en los objetos que contienen, obtenemos los subconjuntos en los que se puede descomponer el conjunto, en los que pueden existir desde luego subconjuntos vacíos (lo que equivale al caso en que la caja no contiene elemento alguno).

Cada colocación define, por lo tanto una y sólo una partición de objetos en subconjuntos y recíprocamente. Por tanto, las 24 clases de colocaciones, a las que da origen el esquema de colocación, corresponden a 24 clases de particiones en subconjuntos, como se muestra en la siguiente tabla:

Colocaciones de los objetos	**Particiones en subconjuntos**
Ordenadas	Subconjuntos ordenados
No ordenadas	Subconjuntos no ordenados
De objetos distintos	De objetos distintos
De objetos indistinguibles	De objetos indistinguibles
En cajas distintas	Particiones ordenadas
En cajas indistinguibles	Particiones no ordenadas
Inyectivas	En subconjuntos vacíos o con una solo elemento
Sobreyectivas	En subconjuntos no vacíos
Biyectivas	En subconjuntos con un solo elemento
Cualquiera	Subconjuntos con más de un elemento y con subconjuntos vacíos.

Y de esta manera se ve que el esquema de partición tampoco puede ser traducible al de selección. Esto es, dos de los tres esquemas combinatorios básicos (colocación y partición) son traducibles ente sí, y dan como resultado, no sólo a las operaciones combinatorias básicas sino también una gama amplia de modelos combinatorios que no se contemplan en la enseñanza elemental de la combinatoria.

Estas consideraciones teórico-metodológicas son puestas en juego en el diseño y análisis del cuestionario utilizado en nuestro trabajo de investigación y su utilidad es más ampliamente descrita en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IV

Metodología

Introducción

En este capítulo se presenta la estructura metodológica que guía nuestro trabajo de investigación. Dicha presentación, inicia con una sección de ideas generales, en la que se incluye una descripción de las fases contempladas en nuestro estudio. Lo referente a los supuestos iniciales de la investigación, a la población a la que se dirige y a la muestra empleada forman también parte de esta primera sección, misma que incluye nuestra postura en torno al papel del marco referencial dentro de nuestra investigación.

En la fase de metodología, que en mayor medida es atendida en el presente capítulo, resulta fundamental la concepción de un cuestionario como instrumento de indagación, que brinde información pertinente para nuestro problema de investigación. De tal modo que, en las siguientes secciones del capítulo, se describen las principales características del cuestionario y lo correspondiente a la interpretación a-priori que nos hemos planteamos de las respuestas de los estudiantes, lo que incluye una categorización de errores, estrategias y formas de razonamiento puestas en juego al enfrentar nuestros cuestionamientos.

IV.1 Ideas generales de carácter metodológico en el estudio

IV.1.1 Fases del estudio

Considerando que el razonamiento combinatorio de los estudiantes, punto central del presente estudio, se manifiesta a través de la resolución de problemas convenientes es posible que los estudiantes, en sus respuestas y argumentaciones, exterioricen indicios de dicho razonamiento. De tal modo que en nuestro trabajo, la elaboración de un cuestionario y su concepción resultaron fundamentales en la consecución de información de apoyo al cumplimiento del objetivo propuesto.

Así, sustentando el estudio en general y la concepción del cuestionario en particular, en una fase inicial del trabajo, se llevó a cabo la fundamentación de corte teórico a través de diversos acercamientos a la problemática que incluyen tanto los puntos de vista disciplinar y cognitivo, como el educativo, lo que se ha asentado en el capítulo precedente.

El aspecto disciplinar se aborda con la intención de tener elementos que nos permitan ubicar, dentro de la Matemática, los contenidos combinatorios de interés, así como su relación e importancia en la construcción del concepto de probabilidad. En el aspecto cognitivo, hemos tomado en consideración la reflexión de aquellos elementos que constituyen el núcleo teórico de nuestra investigación. Y en el tercero, nuestro interés principal fue obtener elementos para ubicar el lugar que tienen los contenidos combinatorios curricularmente. Este último análisis se realizó tanto en nivel básico como en el nivel medio, y de manera muy general en algunas licenciaturas que se ofrecen en la Universidad de Sonora.

La segunda fase del estudio se centró en el diseño del cuestionario que se utilizó y su concepción, la cual se alimenta, entre otras fuentes, de la experiencia tenida en un pilotaje previo realizado en el marco de un proyecto de investigación más amplio en el que colaboramos (Hugues, E. *et. al.*, 2002). Así, como parte de dicha concepción, se abordan los criterios de elaboración que le caracterizan y, particularmente, el papel que en ella se le asigna a las variables de tarea que se ponen en juego. También, a la luz de esta concepción y de los elementos emergentes de la fase anterior, se abordan las implicaciones que pudieran tener en las respuestas que los estudiantes proporcionen al cuestionario concretando esto en categorías de análisis que serán utilizadas en las fase posterior.

La última fase del estudio, que en principio resulta dependiente de las anteriores, consiste en la aplicación del cuestionario y el análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes. Perfilándose de naturaleza básicamente cualitativa, concreta la exploración del razonamiento combinatorio de los estudiantes y con ella se espera el cumplimiento de algunos de los objetivos del estudio y la constatación de la pertinencia de las categorizaciones establecidas a-priori alrededor de errores, dificultades y estrategias utilizadas por los estudiantes.

IV.1.2 Supuestos iniciales

Como se ha manifestado, en nuestra investigación hemos tomado como sustento teórico los resultados en torno al desarrollo cognitivo de los individuos en lo que respecta a la evolución de las operaciones combinatòrias, así como al papel que en ello juega el ambiente instruccional. En este sentido, una consideración de partida en nuestro trabajo consiste en la suposición de que en términos de la edad y de los antecedentes académicos que presentan nuestros sujetos de investigación, lo referente a un desarrollo aceptable en torno a las operaciones combinatorias debiera manifestarse.

Ya se ha señalado que el instrumento de indagación que utilizamos es un cuestionario, decisión basada por una parte en su conveniencia para el manejo de la información dada la cantidad de estudiantes que se involucraron en el estudio, y, por otra en que a través del cuestionario podemos incluir una variedad de situaciones que cubren los diversos aspectos contemplados en la investigación y, en esta perspectiva se considera suficiente para el trabajo. Estamos conscientes de que los estudiantes pudieran tener dificultades para manifestar claramente sus razonamientos en forma escrita, no obstante creemos que la información obtenida por este medio es sumamente valiosa y factible de analizar.

Los resultados aquí obtenidos tienen por supuesto implicaciones didácticas, pues un conocimiento de errores y dificultades podría ser de ayuda para que el profesor promueva el desarrollo de actividades en las que pueda detectar el uso de concepciones inadecuadas y, a partir de ello, promover actividades que apunten hacia una reestructuración conveniente de las mismas.

La población a la que está dirigido el presente estudio lo constituyen jóvenes bachilleres, cuyas edades oscilan entre los 15 a los 18 años. Como escenario de estudio tomamos al Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora de donde se seleccionaron para la aplicación del cuestionario cuatro grupos de segundo semestre y cuatro grupos de sexto semestre. Para esta selección se tomó en consideración que los estudiantes de segundo semestre no habían recibido instrucción en el tópico de interés, mientras que los de sexto semestre si habían tenido la oportunidad de hacerlo, y que de este modo tendríamos manera de ventilar el papel de la instrucción recibida.

Dado que el Colegio de Bachilleres, cuenta con varios planteles en el estado, se hizo una selección de cuatro de ellos, uno ubicado en la ciudad de Magdalena, otro en Ciudad Obregón y los dos restantes localizados en la ciudad de Hermosillo. En cada uno de estos planteles se tomó un grupo de segundo semestre y un grupo de sexto semestre, haciendo los totales que antes se señala.

Nuestro interés no sólo está enfocado a conocer los distintos errores y dificultades que se presentan en los estudiantes, sino que aunado a esto existe un interés, de antemano manifestado, en tratar de establecer explicaciones a estos errores y dificultades, además de tener elementos que nos permitan hacer recomendaciones para la enseñanza e incluso para la incorporación curricular de estos tópicos, que se fundamenten en un estudio profundo de esta problemática.

En este sentido es que cobran relevancia los planteamientos teóricos que anteriormente hemos expuesto. Por un lado, que nos permitan dar explicaciones a los resultados aquí encontrados, así como también nos den elementos que nos ayuden a ubicar en lo general, el estado de desarrollo del razonamiento combinatorio de estudiantes de este nivel escolar y como consecuencia tener elementos que nos permitan pensar en acciones que orienten hacia un desarrollo conveniente de estas ideas por parte del individuo.

IV.2 El cuestionario y sus características

En el diseño del cuestionario nos fijamos como objetivo principal, tratar de observar el papel que juegan las distintas variables de tarea a las que hace alusión en nuestro problema de investigación. Este cuestionario se obtuvo de la experiencia obtenida al someter a prueba un grupo de veinte problemas, que fueron tomados de algunas investigaciones ya realizadas y de libros que exponen ideas básicas del análisis combinatorio (Hugues, E., *et. al.*, 2002).

Esos veinte problemas incluían 18 problemas combinatorios simples y dos compuestos. Se distribuyeron en siete cuestionarios[1] de seis problemas cada uno y se aplicaron en grupos de tercero y quinto semestre de dos de los planteles del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Una pretensión de este pilotaje fue observar la factibilidad de aplicación en estudiantes de nuestro medio, así como la observación de estrategias puestas en juego en la resolución y la detección de errores que nos permitiera afinar criterios de clasificación de los mismos. Tomamos nota de aspectos como el tiempo que los estudiantes empleaban en dar respuesta a esos planteamientos e intentamos, a partir de dichas respuestas, observar si podían interpretar adecuadamente lo que se solicitaba en cada problema. También a partir de sus comentarios, tratamos de observar si los estudiantes los identificaban como problemas relacionados a los contenidos combinatorios, principalmente en aquellos que ya habían llevado los cursos de Probabilidad y Estadística.

A partir de ello, obtuvimos elementos que nos permitieron la elaboración de un marco de análisis previo, en el que contemplamos observar tanto el papel que juegan las distintas variables de tarea, como de los errores, dificultades y estrategias. A partir de estas consideraciones, diseñamos el cuestionario que se aplicó en forma definitiva.

Tomando en cuenta las variables de tarea cuyo impacto se desea estudiar y sus distintos valores posibles, los problemas del cuestionario constituyen una muestra de un conjunto amplio de tipos de problemas, esto es, de al menos 27 tipos. Enseguida mostramos cada uno de los problemas que se utilizan en el cuestionario definitivo, especificando los valores que cada una de las variables toma en ellos, dejando el análisis a-priori de las respuestas para la siguiente sección del presente capítulo.

Como podrá observarse, en cada uno de los problemas incorporamos un ejemplo en el que se trata de sugerir elementos que intervienen en la resolución de los mismos como son notación, orden, y/o repetición de modo que permita a los estudiantes tener claridad en la situación propuesta y con ello, minimizar el número de problemas sin respuesta. No obstante, consideramos que a pesar de estos ejemplos, cabe la posibilidad de que algunos problemas queden sin respuesta por otras causas.

[1] El anexo A2 incluye los cuestionarios como se utilizaron en el pilotaje.

Problema No. 1

El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

Los valores que toman las variables de tarea en este caso son: Colocación para el modelo combinatorio implícito, permutación sin repetición para el tipo de operación combinatoria, el tipo de elementos que se combinan son objetos y el valor de los parámetros es de cinco para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra, y la respuesta correcta en este problema es sesenta.

Problema No. 2

¿De cuántas maneras se puede asignar una tarea de tres problemas si se dispone de una lista de cinco problemas? Ejemplo: Se pueden seleccionar los problemas impares.

En este caso, el modelo combinatorio implícito es Selección, el tipo de operación combinatoria es una combinación, se combinan objetos y los valores de los parámetros son cinco para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra y diez es la respuesta correcta.

Problema No. 3

Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Para este problema el modelo combinatorio implícito es Partición, el tipo de operación combinatoria es permutaciones con repetición, aunque también puede ser resuelto usando las combinaciones ordinarias, el tipo de elementos que se combinan son personas y el valor de los parámetros son cuatro y dos para la cantidad de personas y el tamaño de la muestra respectivamente, finalmente el valor de la respuesta correcta es seis.

Problema No. 4

En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

En esta situación el modelo combinatorio implícito es Selección, la operación combinatoria involucrada es un permutación con repetición, el tipo de elementos que se combinan son números y el valor de los parámetros es cuatro para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra y, sesenta y cuatro la respuesta correcta.

Problema No. 5

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema

Aquí se trata de un problema en el que la variable modelo combinatorio implícito toma el valor de Colocación, y la operación combinatoria es una combinación ordinaria, se combinan objetos y el valor de los parámetros es cuatro para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra y cuatro la respuesta correcta.

Problema No. 6

En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número *724*.

En este caso, al igual que el problema cuatro se considera un problema en el que el modelo combinatorio implícito es Selección, pero la operación combinatoria involucrada es una permutación sin repetición, el tipo de objetos que se combinan son números y el valor de los parámetros es tres para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra y seis la respuesta correcta.

Como podemos observar, aunque una de las variables de tarea se presente en más de un problema, el resto de variables de tarea es distinto, de modo que podamos ver el papel que cada una de ellas juega en la resolución de los problemas. Como ejemplo de ello, tenemos los problemas cuatro y seis en los que se mantienen el modelo combinatorio y el tipo de objetos que se combinan, mientras que las otras dos variables de tarea se modifican.

Resumiendo, enseguida mostramos la distribución de los problemas del cuestionario definitivo en relación con las diferentes variables de tarea involucradas en ellos:

Tipo de Operación combinatoria

		Permutación sin repetición	*Permutación con repetición*	*Combinación*
Modelo Combinatorio Implícito	*Selección*	Problema 6, Números, $P_{3,3}$.	Problema 4, Números, $PR_{4,3}$.	Problema 2, Objetos, $C_{5,3}$.
	Colocación	Problema 1, Objetos, $P_{5,3}$.		Problema 5, Objetos, $C_{4,3}$
	Partición		Problema 3, Personas, $P_{(4,2,2)}$	

Como puede observarse, en el diseño del cuestionario definitivo la variable de tarea modelo combinatorio implícito toma el valor de selección en tres problemas, el de colocación en dos de ellos, y en uno, el valor de partición. Esta decisión se tomó considerando que, tradicionalmente, en los cursos de este nivel se hace énfasis, principalmente, en los problemas del primer tipo.

En el caso de la variable tipo de operación combinatoria, hemos tomado dos para cada caso, aunque la operación involucrada en los problemas tres y cuatro difieren por el hecho de que, en el problema tres, la repetición está dada por la tarea que realizará cada persona, mientras que, en el problema cuatro por la no modificación de la cantidad de objetos en cada extracción, esto es, este último problema trata de una permutación con repetición.

Respecto al tipo de elementos que se combinan, dos problemas involucran números, tres problemas involucran objetos y uno involucra personas.

Finalmente, respecto a los parámetros tomados en consideración, hemos utilizado números pequeños para la cantidad total de objetos y de la muestra a considerar. En el caso de la respuestas los valores mayores son: sesenta, en el problema uno, y sesenta y cuatro, en el problema cuatro. En general, en las respuestas, los valores que intervienen son "pequeños". Esto con la intención de abrir la posibilidad de resolución vía procedimientos elementales como la enumeración, el uso de tablas o diagramas.

IV.3 Interpretación de respuestas a-priori

Tomando en consideración lo antes expuesto, en esta sección abordaremos lo referente a la interpretación de las respuestas de los estudiantes. Estas se constituyen en el marco general con que fueron analizadas las respuestas proporcionadas al cuestionario definitivo.

De entrada partimos de una categorización de los distintos errores reportada en las investigaciones de las que tomamos algunos de los problemas utilizados en el pilotaje[2].

[2] Esta clasificación ha sido utilizada por Navarro-Pelayo, V., et. al. (1996), considerándola en la presente investigación de acuerdo a nuestra propia interpretación.

Nuestro interés fue observar en qué medida estos errores se presentaban en los estudiantes de nuestro medio, a la vez que tratamos de detectar la presencia de errores no reportados y tomar nota de la frecuencia de aparición de los mismos.

En este sentido, hemos establecido doce categorías, que enunciamos a continuación de una manera general, detallándose posteriormente en el análisis particular de los problemas.

E1: Cambiar el modelo matemático del problema. En este caso, intentan resolver un problema de partición como si fuera de selección, cambiando con ello la naturaleza de la situación que da origen al modelo combinatorio.

E2: Error de Orden. Consiste en confundir el criterio distintivo entre combinaciones y permutaciones, esto es tomar en cuenta el orden cuando este es irrelevante o no considerarlo cuando es esencial.

E3: Error de Repetición. Esto aparece cuando el estudiante no considera la posibilidad de repetir elementos o los repite cuando no es posible hacerlo.

E4: Confundir el tipo de Objetos. Esto ocurre cuando el estudiante considera objetos distinguibles sin serlo o cuando siendo distinguibles no los considera como tales.

E5: Enumeración no sistemática: consiste en resolver el problema por enumeración mediante ensayo y error mostrando un listado incompleto, sin hacer evidente un procedimiento recursivo que le lleve a la formación de todas las posibilidades.

E6: Respuesta Intuitiva Errónea. En este caso sólo se da una solución numérica errónea, sin justificar esa respuesta.

E7: No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente.

E8: No recordar el significado de los parámetros en la fórmula combinatoria

E9: Interpretación errónea del diagrama de árbol. También incluimos la construcción errónea del diagrama

Para los problemas específicos de colocación y partición se han reportado los siguientes errores :

E10: Confusión en el tipo de celdas. Este error aparece cuando distinguen celdas idénticas o cuando las consideran idénticas, siendo distintas.

E11: Error en las particiones formadas. Aparece cuando la unión de todos los subconjuntos de la partición propuesta no contiene a todos los elementos del conjunto, o bien cuando olvidan algunos tipos posibles de partición.

A partir del pilotaje llevado a cabo pudimos observar la presencia de un tipo de respuesta que, por sus características específicas decidimos no incluirlo dentro de los ya señalados aunque pudiera destacarse como el error denotado como E6 o bien pudiera tener alguna relación con el error denotado como E9, sin embargo decidimos establecer una nueva categoría para el mismo por la particularidad de la respuestas en el sentido de que la argumentación dada al problema se da en términos de alguna operación establecida entre los datos numéricos dados en el problema, lo que ubicamos en la siguiente categoría.

E12: Manipulación de la información numérica dada en el problema. Como recién se acaba de señalar, su argumentación está ligada a la realización de operaciones matemáticas con información numérica del problema.

Otras observaciones interesantes realizadas en las respuestas de los estudiantes que participaron en el pilotaje, fueron en algunos casos los que consideraban imposible dar respuesta al problema dando como argumento la existencia de una infinidad de respuestas y en otras situaciones sus respuestas no tenía relación alguna con el problema mismo, lo cual lo interpretamos en el sentido de que proporcionaban respuesta a un problema distinto al planteado y en cuyo caso lo interpretamos simplemente como el no percibir el problema planteado.

Otro aspecto contemplado en el pilotaje, fue el tratar de establecer categorías para las distintas estrategias de resolución empleadas y su frecuencia de uso. En este sentido, nos concentramos sólo en las respuestas correctas y a partir de ellas establecimos las categorías que enlistamos a continuación:

T1: Obtienen la lista de posibilidades utilizando un procedimiento de enumeración sistemático. Por ejemplo, fijando uno de los elementos y haciendo variar el resto.

T2: Uso del diagrama de árbol. En este caso, se elabora el diagrama de árbol en forma parcial o completa en forma correcta y posteriormente, se da respuesta interpretando ese diagrama.

T3: Uso de la operación combinatoria correspondiente.

T4: Uso explícito del principio multiplicativo

T5: Elaboración de tablas o diagramas auxiliares

T6: Respuesta Intuitiva

Detallamos a continuación los aspectos sobresalientes de cada uno de los problemas que se han integrado al cuestionario definitivo, cuya interpretación de respuestas constituyen el análisis a-priori de los problemas que conforman la parte experimental de este trabajo.

Problema No. 1

El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

Una de las características importantes de este problema corresponde al valor que toma la variable de tarea modelo combinatorio implícito, interesa observar si los estudiantes pueden identificar la naturaleza de la situación planteada, y que da origen al modelo de colocación. En este sentido, se pretende observar si dan elementos que nos indiquen esa percepción del modelo, lo que esperamos se manifieste al hacer explícita cada posible colocación de las personas en las cocheras respectivas, o en un sentido inverso hacer la correspondencia de las cocheras hacia las personas, es decir en concordancia con el modelo de colocación, se requiere colocar r objetos dentro de n cajas (celdas o urnas) o bien establecer una aplicación de un conjunto de r objetos en otro conjunto de n objetos.

Respecto al tipo de elementos que se combinan, considerando que el problema involucra tanto a las personas como a las cocheras (representadas por números), esperamos que muestren claridad respecto a cuáles son los elementos que entran en juego en la resolución, es decir las cocheras y no las personas.

En cuanto a la variable de tarea tipo de operación combinatoria se pretende observar si en ella están considerando la repetición y el orden y si a partir de estas observaciones dan respuesta utilizando una alguna notación que indique que se trata de una permutación sin repetición. En esto mismo trataremos de observar cómo incorporan los parámetros implicados en la resolución.

Puesto que las respuestas que se proporcionan son abiertas, esperamos una variedad de respuestas en las que podamos observar las distintas estrategias empleadas, por ejemplo la resolución vía la enumeración de las opciones posibles, y en ello esperamos detectar errores como la presentación del conjunto de opciones incompleto, manifestándose con esto la ausencia de procedimientos sistemáticos para conseguir dicho conjunto.

Esperamos observar si en sus respuestas se apoyan en recursos icónicos como el diagrama de árbol, en ello esperamos tener información que nos de indicios de su capacidad para la elaboración y la interpretación del diagrama.

Otro de los errores que esperamos se manifieste en este problema se refiere a la forma en que utilizan la información numérica dada en el mismo, por ejemplo una respuesta que se obtuvo en el pilotaje y que se refiere a lo que aquí señalamos fue "*5x3=15, ya que hay cinco plazas y tres coches*". Este tipo de respuestas pudiera ser una manifestación de la tendencia a resolver los problemas que ellos identifican como "de matemáticas" simplemente localizando los números que aparecen como datos y aplicando alguna operación que les parece adecuada.

Otra situación que esperamos observar es el uso de expresiones o fórmulas combinatorias en las que estamos interesados en observar si consideran el orden, la repetición y cómo involucran en ella el valor de los parámetros, así como el manejo mismo de dicha operación combinatoria.

Las siguientes respuestas se consideran como aceptables, y servirán como criterios que nos darán indicios de su nivel de razonamiento combinatorio:

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.
- La elaboración de un diagrama de árbol que muestre las distintas opciones posibles, en cuyo caso puede complementarse con una interpretación del mismo.
- El uso explícito del principio multiplicativo
- La aplicación de la expresión para las permutaciones sin repetición o simplemente permutaciones $P_{5,3} = \frac{5!}{3!} = 60$.

Aunado a lo anterior cabe la posibilidad que se dé una respuesta correcta sin una argumentación de por medio, en cuyo caso deberá tomarse como correcta, aunque no resulte de mucha utilidad para nuestro análisis, lo cual también es válido para el resto de los problemas.

Problema No. 2

¿De cuántas maneras se puede asignar una tarea de tres problemas si se dispone de una lista de cinco problemas? Ejemplo: Se pueden seleccionar los problemas impares.

Al igual que el problema anterior la variable de tarea tipo de elementos que se combinan corresponde a objetos. Otra similitud con el problema anterior son el valor de los parámetros que corresponden al tamaño de la población y al tamaño de la muestra, modificándose el valor de la respuesta debido a que en este caso el tipo de operación combinatoria es el de una combinación ordinaria.

Dado que el modelo combinatorio implícito es selección, esperaríamos que muestren elementos que sirvan como indicios de la identificación de tal modelo, es decir dado que este modelo surge cuando se requiere seleccionar muestras de tamaño r a partir de un conjunto de n objetos, una forma que puede utilizarse para observar esto es la exhibición de la muestra seleccionada, en la que deberán poner en juego si la repetición y el orden son o no importantes.

Considerando que el contexto en el que se plantea este problema es común y que además corresponde a problemas que usualmente forman parte del espectro de problemas estudiados en clase, esperamos pueda resolverse exitosamente. Dadas las características de los parámetros, esperamos que puedan dar respuesta utilizando recursos elementales como tablas, diagramas, etc.

Uno de las estrategias que esperamos entren en juego es la búsqueda de solución vía la elaboración de la lista, de lo cual intentamos observar los elementos constitutivos del modelo que entra en juego en la resolución: la no repetición de los elementos y la no importancia del orden en la selección, a la vez trataremos de observar si son o no sistemáticos en la enumeración.

Es de nuestro interés en la investigación observar en que medida incorporan recursos icónicos en la resolución de los problemas, en particular del uso e interpretación del diagrama de árbol. En este caso estaríamos interesados en observar el uso de este diagrama. Un ejemplo de respuesta relacionada con este problema y que se obtuvo en el pilotaje es cuando consideran sólo dos ramificaciones en el diagrama y a partir de ello responden que la respuesta es 15, o bien elaboran un diagrama parcial y concluyen a partir del mismo, por ejemplo "*el problema 1 con cada uno de los problemas 2,3,4,5 nos dan 4 opciones y lo mismo con los problemas restantes, por lo tanto son 5x4=20 opciones posibles*".

Otro error que apareció con cierta frecuencia en el pilotaje y que estamos interesados en observar si se presenta de nueva cuenta es la resolución utilizando en forma inadecuada la información dada en el problema, un ejemplo es cuando dan como respuesta "*15, ya que hay 1 tarea, 3 problemas y 5 problemas*".

Adicionalmente, un error que esperamos observar es el de no recordar la fórmula en forma correcta. Esto podría ocurrir en dos formas, por ejemplo que identifique la operación combinatoria involucrada en la resolución y dar una respuesta errónea, por ejemplo: *20 formas distintas, porque al sacar las combinaciones de 3 en 5 son las distintas formas de asignar los problemas, o* bien desarrollar adecuadamente una operación combinatoria que no corresponde al problema en cuestión.

En cuanto a las distintas estrategias de resolución que presentan en este problema, una de las estrategias que esperamos utilice para resolver este problema es la elaboración en forma sistemática de la lista de opciones para seleccionar los problemas y para ello una posibilidad es recurrir al uso de alguna notación auxiliar, asignando a cada problema un número o una letra y a partir de ello elaborar la lista.

Otra estrategia que esperamos se presente es la elaboración de tablas o diagramas para la construcción de las distintas opciones. Asimismo, esperamos que entre en juego el uso de fórmula, especificando adecuadamente el valor que en ella toman los parámetros involucrados.

En este caso, consideramos que las estrategias de resolución que los estudiantes utilizarán para llegar a una respuesta correcta son:

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.

- La elaboración de un diagrama de árbol que muestre las distintas opciones posibles así como su interpretación o bien de algún otro recurso icónico.
- El uso explícito del principio multiplicativo.
- La aplicación de la expresión para las combinaciones ordinarias $C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Problema No. 3

Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

En este caso, el valor que corresponde a la variable de tarea modelo combinatorio implícito es partición. De esta forma, interesa observar si los estudiantes identifican en la situación ese valor de la variable, lo cual esperamos se manifieste en términos de la característica implícita en dicho modelo, el cual surge cuando se pide clasificar los elementos de un conjunto inicial en un número dado de subconjuntos incompatibles, de modo que la clasificación sea exhaustiva. Por consiguiente, esperamos se haga explícita la partición solicitada en el problema.

Una muestra del cambio del modelo combinatorio implícito en este problema es que en ocasiones elaboran las particiones posibles sin considerar que a cada opción le corresponde la realización de una tarea, que los lleva a concluir como respuesta 3.

En cuanto al resto de variables de tarea, el tipo de elementos que se combinan en este caso es el de personas, lo que esperamos pongan en juego en la respuesta utilizando una notación conveniente. Respecto al tipo de operación combinatoria, interesa observar si efectivamente utilizan la operación combinatoria correspondiente al modelo, en lo que deberán tomar en cuenta que la partición da origen a dos clases de elementos en el conjunto.

Finalmente, en lo que se refiere al valor de los parámetros, consideramos que tomando en cuenta el total de elementos que tiene el conjunto en cuestión es pequeño, y además que se le impone un tamaño a los subconjuntos solicitados, suponemos que puede ser resuelto vía la elaboración de la distintas opciones en que pueden realizarse las tareas. Además, este problema tiene la particularidad de que puede ser una situación en la que cotidianamente se vean expuestos, lo que puede ser un factor que puede apoyar una resolución correcta por vías elementales.

No obstante, esperamos observar la presencia del error de enumeración no sistemática, el cual se identifica cuando en las particiones mostradas no contienen el total de elementos del conjunto o bien al no escribir todas las particiones posibles.

Otros errores que esperamos observar son los errores de repetición y de orden. En el primer caso puede darse al considerar a una persona como parte de los dos equipos y en el segundo al considerar importante el orden dentro de las parejas formadas.

Las siguientes son opciones que esperaríamos utilicen los estudiantes para dar correctamente la respuesta al problema:

- La elaboración completa de la lista de opciones, en las que se señale la tarea correspondiente a cada opción.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.
- Apoyándose en algún recurso icónico como puede ser el dibujo de casillas en las que coloque cada una de las opciones posibles o la elaboración de un diagrama de árbol.
- El uso explícito del principio multiplicativo
- La aplicación de la expresión para las permutaciones con repetición $P_{(4,2,2)} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$
- Otra opción en este caso, puede ser la resolución vía las combinaciones ordinarias, esto es, $C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$, que como es de observarse implica el producto de dos combinaciones ordinarias.

Problema No. 4

En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

El valor del modelo combinatorio implícito en este caso es nuevamente selección y, considerando que este tipo de situaciones son comúnmente planteadas a los estudiantes. Por ello se prevé que muestren cierta desenvoltura en su resolución, no obstante que el valor de la respuesta correcta sea "grande".

El principal error que esperamos muestren los estudiantes al resolver este problema es la ausencia de un procedimiento de enumeración sistemático, manifestándose principalmente los errores de repetición y de orden.

Otros tipos de respuestas que aparecieron durante el pilotaje y que estaríamos interesados en observar son aquellas en las que el argumento utilizado está relacionado con los dígitos dados en el problema: *" 4x7x9=243 formas de obtener 3 cifras diferentes"*.

También podrían aparecen respuestas en las que el argumento no es congruente con la operación utilizada, que además se efectúa de manera incorrecta: *"este problema requería de ${}_{1}C_{4}$, ya que la bolita se volvía a meter en la urna y tenía que formar un # de tres cifras sin importar que fueran las mismas".* Esta respuesta como la anterior, son ejemplos de en los que se privilegia el uso de los datos dados en el problema a través de una operación que los relacione.

En cuanto al uso de recursos icónicos, esperaríamos que recurrieran al diagrama de árbol, de lo cual observaríamos tanto su construcción como la interpretación dada al mismo.

Por otra parte, en cuanto a las estrategias utilizadas en el pilotaje, observamos que en las respuestas correctas la resolución está basada principalmente en la elaboración de la lista ya sea vía un procedimiento de enumeración sistemático o bien apoyándose en la construcción de un diagrama de árbol. Aunque en algunos casos la lista no se da completa, se deja entrever que se tiene claridad en cómo se pueden formar el resto: *"si con la combinación que empieza en 2 siguierámos empezando con cada uno de los 4 números, serían combinaciones de c/u siendo un total de 64"* .

Hay respuestas correctas en que se manifiesta el uso explícito del principio multiplicativo: *"4x4x4=64. Son tres turnos de sacar con 4 oportunidades de número cada uno"*.

Por lo cual esperamos que las distintas soluciones a este problema puedan darse como en los siguientes casos:

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.
- La elaboración de un diagrama de árbol.
- El uso explícito del principio multiplicativo.
- Uso de la operación combinatoria $P_{4,3} = 4^3 = 64$.

Problema No. 5

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema

Para este caso, al igual que el problema número uno, el modelo combinatorio implícito es colocación con la diferencia de que en este caso se trata de objetos indistinguibles y por lo tanto da origen a una operación combinatoria distinta, con lo cual estaríamos interesados en observar si son capaces de observar ésta condición impuesta a la situación, lo cual puede manifestarse en forma errónea cuando ponen una etiqueta a las cartas y después la relacionan con cada uno de los sobres.

El análisis de las respuestas proporcionadas a este problema en el pilotaje, nos permitió detectar una diferencia importante respecto al resto de los problemas en el sentido de que la búsqueda de solución vía la elaboración de las opciones posibles, prácticamente en todos los que lo intentaron se llevó a cabo con éxito, lo cual esperaríamos se presentara de nueva cuenta en la aplicación definitiva.

Sin embargo, un error adicional es respecto al uso e interpretación del diagrama de árbol, lo que puede observarse al construir un diagrama que asocie a cada una de las cartas (que denotan 1,2 y 3), cuatro sobres (que denotan como A,B,C,D), situación típica que se presentó en el pilotaje.

También esperamos detectar el uso inadecuado de la información dada en el problema, como en casos obtenidos en el pilotaje: *"3 cartas x 4 sobres=12 maneras diferentes"*. Esta última situación difiere de la anterior en el sentido de que aquí lo que se privilegia es el uso de una operación a ciertos datos numéricos dados en el problema.

Este problema además tiene la particularidad de que los objetos son indistinguibles, por lo cual estamos interesados en observar si esto es tomado en cuenta en las respuestas de los estudiantes.

Por su parte, en lo que corresponde a las distintas estrategias, durante el pilotaje encontramos básicamente la elaboración de la lista y en casos aislados el uso de la fórmula para las combinaciones $C_{4,3}$, sin su desarrollo. Una estrategia adicional que se puso en juego y que está relacionada directamente al modelo combinatorio implícito es la elaboración de una tabla o dibujo en la que se van colocando cada uno de las cartas, según los sobres que se vayan seleccionando (en este caso las celdas), lo que esperamos se presente de nuevo.

Este problema puede ser abordado siguiendo cualquiera de las siguientes estrategias:

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.
- Apoyándose en algún recurso icónico como puede ser el dibujo mismo de los sobres, o el de tablas en las que se muestre la forma en que se van ocupando los sobres o la elaboración de un diagrama de árbol.
- El uso explícito del principio multiplicativo
- La aplicación de la expresión para las combinaciones $C_{4,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4.$

Problema No. 6

En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número *724*.

Este es el tercer problema en el que el modelo combinatorio implícito es selección y al igual que el problema cuatro el tipo de elementos que se combinan son números. En este sentido, también lo consideramos como un problema típico de este tipo de situaciones y que normalmente son tratados en clase, con lo cual esperamos se manifieste facilidad en las respuestas proporcionadas por los estudiantes.

Respecto al tipo de operación combinatoria, esperaríamos que asociaran a la situación las permutaciones sin repetición, en donde obviamente se pretendería observar si se toma en consideración o no la repetición de los elementos y la verificación de la importancia del orden en los arreglos.

Una comparación de las respuestas dadas a este problema con las proporcionadas para el número cuatro, nos da indicios del papel que podría estar jugando el valor de los parámetros, pues trataríamos de observar si obtienen con mayor facilidad la respuesta y tratar de ver que ocurre en el otro problema, sobre todo si utilizan la misma estrategia.

En el pilotaje, observamos que este problema fue resuelto con éxito en la mayoría de los casos, lo que nos llamó la atención fue la estrategia puesta en juego en dicha resolución, pues de nueva cuenta resuelven vía la elaboración de la lista de opciones y realizan el conteo uno a uno de los posibles resultados.

Consideramos que un factor que pudiera estar influyendo es el tipo de operación combinatoria involucrada, pues en este caso el no permitir la repetición reduce bastante el número de opciones posibles y por lo tanto la consecución de las distintas posibilidades se convierte en una tarea "sencilla".

Asimismo, observamos que tanto en las respuestas correctas como en las erróneas los estudiantes son consistentes en las estrategias que utilizan, en el primer caso, al igual que en problema número cuatro, de nueva cuenta se recurre al uso de procedimientos sistemáticos de enumeración, al uso del diagrama de árbol, y a la obtención del total de posibilidades vía el empleo explícito del principio multiplicativo. En el caso de los que presentaron errores, (muy pocos, en comparación con el resto de los problemas), los errores detectados fueron el empleo del producto de los dígitos dados en el problema y el uso incorrecto de la fórmula de las combinaciones, lo cual estaríamos interesados en observar en la aplicación del cuestionario definitivo.

De la misma forma damos una lista de opciones mediante las cuales este problema puede ser resuelto correctamente y que se han manifestado en los cuestionarios previamente aplicados, constituyéndose en los criterios con que se analizarán las respuestas del cuestionario definitivo.

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, que le permita concluir el resultado total.
- La elaboración de un diagrama de árbol.
- El uso del principio multiplicativo
- La aplicación de la expresión para las permutaciones $P_{3,3} = 3! = 6$.

CAPÍTULO V

Resultados y Análisis

Introducción

La obtención de información en los estudiantes que apoye nuestro trabajo de investigación ha sido uno de los objetivos que nos hemos propuesto a lo largo del desarrollo de la misma. En ese sentido y como anteriormente lo hemos señalado, adoptamos el uso de un cuestionario como estrategia de indagación en los estudiantes. El diseño y los aspectos más relevantes de dicho cuestionario se han dejado asentados en el capítulo precedente.

Lo que constituye el presente capítulo es precisamente la presentación y el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de dicho cuestionario. La primera de las tres secciones que integran este capítulo, tiene como principal propósito hacer la presentación de los resultados obtenidos y con ello dar inicio al análisis, por lo cual en esta primera sección se destacará principalmente lo referente a la presentación.

La continuación del análisis de la información tomando en consideración los resultados obtenidos en cada uno de los problemas que integran el cuestionario, es el objetivo principal de la segunda sección del presente capítulo, el cual finaliza con una sección dedicada al análisis general de los resultados obtenidos.

V.1 Respuestas de los estudiantes

La aplicación del cuestionario se realizó en cuatro de los planteles del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, a un total de 166 estudiantes de segundo semestre y 135 del sexto, distribuidos los primeros en cuatro grupos de 43, 49, 41 y 33 estudiantes, mientras que los últimos en grupos de 28, 43, 29, 35 estudiantes, que corresponden a los planteles Magdalena, Obregón 1, Reforma y Ernesto López Riesgo respectivamente.

En la siguiente tabla aparece una primera clasificación de las respuestas obtenidas por semestre y por cada uno de los seis problemas contemplados en el cuestionario, de acuerdo a si las consideramos correctas (✓), erróneas (✗) o SR ("sin respuesta"). En la primera de estas tres categorías ubicamos a aquellos estudiantes que responden de acuerdo a cualquiera de las siguientes situaciones: dando la solución numérica correspondiente, escribiendo una operación indicada, exhibiendo el conjunto solución del que se desprende la respuesta numéricamente correcta o bien los que como respuesta muestran un diagrama de árbol, una tabla o algún esquema de solución completo. En otros casos, las clasificamos como erróneas (✗) y SR cuando el estudiante deja el espacio disponible para la respuesta en blanco o cuando proporciona una respuesta tal como "*no se*".

Un resumen de esta primera clasificación se muestra enseguida, en el entendido de que un desglose de resultados porcentuales por plantel se incluye en la parte final del trabajo como anexo 1.

Problema No.	✓	✗	SR
1	5 (3.01%)	161 (96.99%)	0 (0%)
2	9 (5.42%)	138 (83.13%)	19 (11.45%)
3	69 (41.57%)	96 (57.83%)	1 (0.60%)
4	16 (9.64%)	145 (87.35%)	5 (3.01%)
5	37 (22.29%)	123 (74.10%)	6 (3.61%)
6	86 (51.81%)	69 (41.57%)	11 (6.63%)
Totales	222 (22.29%)	732 (73.49%)	42 (4.22%)

Tabla V.1 Clasificación de respuestas de estudiantes del segundo semestre

Problema No.	✓	✗	SR
1	16 (11.85%)	117 (86.67%)	2 (1.48%)
2	17 (12.59%)	102 (75.56%)	16 (11.85%)
3	47 (34.81%)	87 (64.44%)	1 (0.74%)
4	43 (31.85%)	84 (62.22%)	8 (5.93%)
5	32 (23.7%)	98(72.6%)	5 (3.70%)
6	86(63.70%)	42 (31.11%)	7 (5.19%)
Totales	241 (29.75%)	530 (65.43%)	39 (4.81%)

Tabla V.2 Clasificación de respuestas de estudiantes del sexto semestre

Como podemos observar, en las tablas V.1 y V.2, los problemas uno y dos son los que presentan el índice más bajo de respuestas correctas en ambos semestres, mientras que los índices más altos en respuestas de este tipo correspondieron en ambos semestres a los problemas tres y seis. Aquí es importante observar que el índice de respuestas correctas en el problema tres fue mayor en el segundo semestre que en el sexto. En el caso de los problemas cuatro y cinco, los porcentajes de respuestas correctas correspondieron a los órdenes de magnitud tercero y cuarto en el segundo semestre, mientras que ese orden se invirtió para el sexto.

Otro aspecto que es importante observar son los índices de estudiantes que no dieron respuesta (SR). En ambos semestres el problema dos fue el que más estudiantes dejaron sin respuesta, mientras que los problemas que menos estudiantes dejaron sin respuesta fueron el uno y tres en ambos semestre.

Tal y como lo hemos venido manifestando a lo largo del presente trabajo, nuestro interés no sólo es tener información acerca del número de respuestas correctas, sino que también estamos interesados en observar cuáles son las distintas estrategias que los estudiantes ponen en juego en sus respuestas, además de observar los errores que se cometen en dichas resoluciones, para los cuales hemos establecido criterios de clasificación en el capítulo precedente.

Así, con respecto a la clasificación de estrategias y errores[1], los resultados obtenidos tocante a lo primero se han resumido en las tablas V.3 y V.4 y en relación a lo segundo en las tablas V.5 y V.6.

Es importante comentar que algunos de los estudiantes utilizaron más de una estrategia en la resolución de los problemas, sin embargo en la clasificación tomamos en consideración sólo una de ellas, ya que sus respuestas nos permitieron distinguir la estrategia primordial para su resolución. Por ejemplo, en aquellos en los que daban su respuesta utilizando la fórmula y enseguida mostraban el conjunto solución por enumeración, los clasificamos como "uso de fórmula", o bien quienes construyeron un diagrama de árbol y concluyeron su respuesta por medio del principio multiplicativo, los clasificamos dentro del "uso del diagrama de 'árbol".

Problema No.	**Estrategias usadas en las respuestas correctas[2]**						**Total**
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
1	2	0	1	1	1	0	5
2	7	1	0	0	1	0	9
3	51	4	0	1	3	10	69
4	12	2	0	0	0	2	16
5	17	0	0	0	11	9	37
6	74	2	0	1	0	9	86

V.3 Estrategias utilizadas en la resolución de los problemas (Segundo Semestre).

[1] Como hemos señalado en el capítulo IV, se distinguen seis tipos de estrategias (Pág. 42-43) y doce tipos de errores (Pág. 41-42).

[2] Las categorías de clasificación corresponden a: T1:Enumeración de las distintas posibilidades, T2:Uso de Diagrama de árbol, T3:Uso de fórmula, T4: Uso del Principio Multiplicativo, T5:Uso de Recursos icónicos distintos al diagrama de árbol, T6: Respuesta intuitiva.

Problema No.	Estrategias usadas en las respuestas correctas						Total
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
1	9	1	1	4	0	1	16
2	10	0	5	0	0	2	17
3	37	2	4	1	0	3	47
4	30	5	0	5	0	3	43
5	17	0	9	0	3	3	32
6	63	8	2	7	0	6	86

V.4 Estrategias utilizadas en la resolución de los problemas (Sexto Semestre).

En una revisión global de estas dos últimas tablas, observamos que la estrategia a la que mayormente se recurrió en las respuestas correctas, en ambos semestres y en todos los problemas, fue la "enumeración de las distintas posibilidades" (T1) (en el 71% del total de casos). En el segundo semestre solo los problemas uno y cinco tuvieron un índice de uso de esta estrategia por debajo del 50% entre las respuestas correctas, mientras que en el sexto semestres en todos los problemas se superó este porcentaje (correspondiendo los índices menores también a los problemas uno y cinco).

Revisando esta información por estrategias, encontramos que la "enumeración de las distintas posibilidades" (T1), fue la estrategia que más se puso en juego en el problema seis en ambos semestres (86% y 73% del total de respuestas correctas).

El "uso del diagrama de árbol" (T2), fue la estrategia que mayormente pusieron en juego en el problema cuatro en ambos semestres (un 12.5% en segundo semestre y un 11.4% en el sexto de quienes respondieron correctamente), mientras que la "resolución vía el empleo de alguna fórmula" (T3) fue utilizada sólo en una ocasión por estudiantes del segundo semestre (un 20% de quienes respondieron correctamente ese problema). En el sexto semestre los mayores índices de uso de esta estrategia correspondieron a los problemas dos y cinco (de quienes respondieron correctamente representaron un 29.4% en el problema dos y un 28.1% en el cinco).

En cuanto al "uso del principio multiplicativo"(T4), como una estrategia para determinar la solución al problema, pudimos observar que el porcentaje de uso mayor en ambos semestres se obtuvo en el problema uno (del total de respuestas correctas un 20% y un 25% para segundo y sexto semestre, respectivamente), los problemas cuatro y seis obtuvieron los siguientes órdenes de uso en el sexto semestre, mientras que en el segundo semestre lo obtuvieron los problemas tres y seis.

Respecto al "uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol" (T5), pudimos apreciar que quienes mayormente pusieron en juego este recurso fueron los estudiantes del segundo semestre, de hecho en el problema cinco dichos estudiantes recurrieron a esta estrategia principalmente (un 29.7% del total de quienes respondieron correctamente), mientras que en el sexto semestre este fue el único problema en el que emplearon este recurso como estrategia de resolución (un 9.4% del total de respuestas correctas).

Regresando a los estudiantes del segundo semestre esta estrategia no fue puesta en juego en los problemas cuatro y cinco.

Finalmente, nos referiremos a otro tipo de respuesta que hemos denominado "respuesta intuitiva" (T6) y que también clasificamos como una de las estrategias posibles. En este aspecto, los porcentajes de respuestas obtenidos son muy similares en ambos semestres, con diferencias mayores en el segundo semestre. El problema que obtuvo el índice mayor de empleo de esta estrategia fue el problema dos en el sexto semestre (un 11.8%) y el problema cinco en el segundo (24.3%).

Enseguida hacemos la presentación de la información obtenida en el caso de la clasificación de los errores que se presentaron en ambos semestres. Para esta clasificación, consideramos posible la aparición de más de un error en cada respuesta, por ejemplo el "error de orden" (E2) y el "error de repetición" (E3) se presentaron en una misma respuesta lo que consideramos en cada una de las categorías correspondientes.

Problema No.	**Errores**[3]											
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
1	13	2	0	1	50	64	0	0	7	0	0	19
2	0	11	0	0	54	49	0	0	3	0	0	8
3	19	3	0	0	18	17	0	0	1	21	9	2
4	0	0	8	0	95	20	0	0	3	0	0	4
5	5	0	0	8	8	35	0	0	8	0	0	21
6	0	0	16	0	24	11	0	0	0	0	0	3
Totales	37	16	24	9	249	196	0	0	22	21	7	57

V.5 Frecuencia de aparición de cada tipo de error (Segundo Semestre)

Problema No.	**Errores**											
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
1	6	13	3	0	21	15	0	0	20	0	0	40
2	0	21	2	0	27	14	7	0	10	0	0	21
3	32	22	1	0	9	4	2	0	13	14	6	11
4	0	5	11	0	39	7	1	0	7	0	0	16
5	7	6	7	22	2	18	4	0	22	0	0	21
6	0	0	9	0	6	9	0	0	2	0	0	7
Totales	45	67	33	22	104	67	14	0	74	14	6	116

V.6 Frecuencia de aparición de cada tipo de error (Sexto Semestre).

[3] Las categorías de clasificación corresponden a: E1: cambiar el modelo matemático del problema, E2: error de orden, E3: error de repetición, E4: confundir el tipo de objeto, E5: enumeración no sistemática, E6: respuesta intuitiva errónea, E7: no recordar la fórmula correcta; E8: no recordar el significado de lo parámetros, E9: interpretación errónea del diagrama de árbol, E10: confusión en el tipo de celda, E11: error en las particiones formadas, E12: manipulación de la información numérica dada en el problema.

En una revisión global por errores podemos observar que en ambos semestres los errores que más se presentaron fueron el de "enumeración no sistemática" (E5) y la "respuesta intuitiva errónea" (E6). En menor proporción también tuvo presencia en ambos semestres la "manipulación de la información numérica dada en el problema" (E12). Estos tres últimos tipos de error se presentaron en todos los problemas.

En sexto semestre se presentaron en todos los problemas los errores denominados "interpretación errónea del diagrama de árbol"(E9), "error de orden" (E2) y de "error de repetición" (E3), mientras que en el segundo semestre estas tres categorías se presentaron parcialmente. El "no recordar el valor de los parámetros" (E8), no se presentó en ambos semestres, mientras que "no recordar la fórmula correcta" (E7) apareció en el sexto, situación que de antemano esperábamos.

El resto de errores corresponde a observaciones específicas que pretendíamos observar, por ejemplo el "cambiar el modelo matemático del problema" (E1) se presentó en ambos semestres en los problemas uno, tres y cinco. Lo mismo ocurre con el error de "confusión en el tipo de celda" (E10) y el "error en las particiones formadas" (E11), que son específicos al problema tres y en el caso de "confundir el tipo de objetos" (E4), que se presentó en el problema cinco.

V.2 Análisis local

Esta sección está dedicada a realizar el análisis de las respuestas proporcionadas a cada uno de los problemas que hemos utilizado en el cuestionario. En cada caso iniciamos el análisis considerando las estrategias puestas en juego, para posteriormente concentrarnos en el análisis de los errores que presentaron los estudiantes en su resolución.

Problema No. 1

De acuerdo a las tablas V1 y V.2, este problema fue el que obtuvo el menor porcentaje de respuestas correctas en ambos semestres (3.01% en el segundo semestre y 11.85% en el sexto), también fue el único al que dieron alguna respuesta la totalidad de estudiantes en el segundo semestre y en el sexto fue el segundo problema que un menor número de estudiantes dejaron sin respuesta.

La estrategia que mayormente utilizaron quienes respondieron correctamente fue la enumeración. En particular, en segundo semestre dos de las cinco respuestas correctas utilizaron esta vía, mientras que el resto emplearon fórmula, principio multiplicativo y construcción de tabla (un estudiante en cada caso). En el sexto semestre además de las opciones antes señaladas también se presentaron respuestas que utilizaron diagrama de árbol y, en una ocasión, respuesta intuitiva. En ningún caso dieron respuesta recurriendo a más de una estrategia.

En las respuestas dadas por enumeración, algunos responden estableciendo explícitamente una correspondencia uno-a-uno entre las personas y los elementos de una terna posible (cocheras), proporcionándonos con ello mayor información respecto a su interpretación del problema. Otras situaciones simplemente exhiben las distintas opciones tomando en consideración los números de cada una de las cocheras. Un ejemplo de cada una de estas situaciones se da a continuación.

Angel	*Beatriz*	*Carmen*
1	*2*	*3*
1	*2*	*4*
1	*2*	*5*
1	*3*	*2*
1	*3*	*4*
1	*3*	*5*
1	*4*	*2*
1	*4*	*3*
1	*4*	*5*
1	*5*	*2*
1	*5*	*3*
1	*5*	*4*

"12x5=60. 60 formas diferentes".

"123, 124, 125, 213, 214, 215, 231, 241, 251, 312, 314, 315; 132, 142, 152, 321, 324, 325, 341, 342, 345, 351, 352; 354, 412, 413, 415, 421, 423, 425, 431, 532, 435, 451, 452, 453; 512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 531, 534, 541, 541, 543; 60 formas, son formas diferentes ∴ 12x5=60"

Aunque ambos casos responden vía la enumeración de las opciones posibles, existen diferencias en cuanto a su razonamiento. Una de esas diferencias es que el primer estudiante no requiere escribir todas las opciones posibles para dar respuesta, mostrando que a partir del "caso" analizado puede obtener la solución por generalización hacia el resto. Por otra parte es sistemático al elaborar la lista, lo que no ocurre en el segundo ejemplo, aunque en este caso tampoco escribe el total de opciones.

Entre los estudiantes que clasificamos dentro del uso de fórmula, se obtuvieron respuestas que exhiben la expresión que incluye el valor de los parámetros: "${}_5P_3 = 60$ *formas posibles. Se puede mezclar de varias formas"* y en otros, junto a esto, el desarrollo del algoritmo combinatorio.

En cuanto al "uso del principio multiplicativo", esta estrategia se obtuvo mayormente en el sexto semestre presentándose respuestas en las que únicamente escriben "*$\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}$ = 60*", otras justifican ese producto como en la siguiente situación.

"Ángel tiene 5 formas al escoger le quedan 4 a Beatriz y cuando esta escoja una quedaran 3 a Carmen por lo que 5.4.3=60 (son 60 formas posibles)".

Tomando ahora el análisis de este problema en cuanto a la presencia de errores, los que principalmente se presentaron en segundo semestre fueron el de "enumeración no sistemática" (E5) y el de "respuesta intuitiva errónea" (E6). En el primer tipo de situación, aunque los estudiantes podían identificar plenamente la respuesta requerida no lograron exhibir el conjunto solución completo, presentándose en algunos casos la construcción incompleta de tablas.

Respecto a la "respuesta intuitiva errónea" (E6), clasificamos en ella a quienes dieron como respuesta un número erróneo sin mayor explicación y también a quienes agregaban algún comentario a su respuesta que no nos permitía ubicarlo dentro de las categorías previstas, como la siguiente respuesta.

"De 5 formas diferentes cada uno, pero no pueden aparcar sus coches dos personas en la misma plaza".

Estos últimos dos errores se presentaron también en el sexto semestre, sin embargo el que principalmente se presentó en este semestre fue el que denominamos "manipulación de la información numérica dada en el problema" (E12). Aquí es importante enfatizar que hemos distinguido a este grupo del de "respuesta intuitiva errónea" (E6) por dar una justificación en términos de alguna operación entre los datos dados en el problema, como se muestra enseguida.

"De 15 Formas.
Datos
3 coches
5 estacionamientos
3x5=15"

Una respuesta similar dieron quienes utilizaron el "diagrama de árbol", aunque en esta categoría sólo ubicamos a quienes exhibieron la construcción de tal diagrama de árbol, presentando error en el 14.8% de los casos en el sexto semestre y del 4.2% en el segundo.

Otro de los errores que aparecieron en este problema es el denominado "error de orden" (E2). Este error se presentó en el segundo semestre en un 1.20% del total de estudiantes y en el sexto en un 9.63%. Una de las formas en que se manifestó fue en que utilizaban para dar la respuesta la expresión notacional del algoritmo para combinaciones, como ocurre en el siguiente ejemplo.

"C_3^5 = de 10 formas",

o quienes mostraron la lista de opciones sin considerar el orden:

"De 10 formas diferentes, por turnarse en todos los números y con combinaciones diferentes: 123, 451, 234, 512, 345, 135, 241, 352, 524, 413".

En cuanto al "error de repetición" (E3), lo presentaron únicamente estudiantes del sexto semestre, uno de los casos es la respuesta proporcionada por este estudiante *"$(5)^3=125$ formas posibles"* aunque no da mayor explicación su justificación puede interpretarse en términos de que considera para cada caso cinco opciones posibles y posteriormente aplica el principio multiplicativo para dar el número de opciones.

Un caso más explícito en cuanto a la presencia de este error es la respuesta proporcionada por el siguiente estudiante:

"R=75 combinaciones porque creo que es lo correcto.

111	*121*	*131*
112	*122*	*132*
113	*123*	*133*
114	*124*	*134*
115	*125*	*135*

25x3=75"

Finalmente, hacemos referencia al error que hemos denominado "confundir el tipo de objeto" (E4) y que se presentó en el caso que mostramos enseguida.

"De 5 formas c/u. Cada quien que vaya cambiando su coche cada día x_x_x, _xxx_, xxx_ _; _xxx_, x_ _xx".

Esta respuesta es ilustrativa de esta situación, ya que la colocación los objetos (coches) en las urnas (cocheras), lo realiza considerando los objetos como indistinguibles, cuando en realidad ocurre lo contrario. Además del citado error, no considera todas las opciones posibles presentándose, con ello, también el error de enumeración no sistemática.

Problema No. 2

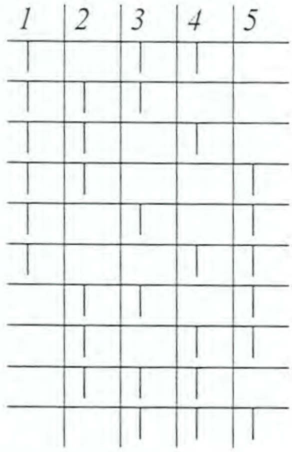
Este problema al igual que el anterior, llama la atención por su bajo índice de respuestas correctas (un 5.42% en el segundo semestre y un 12.59% en el sexto del total de estudiantes, de hecho ocupa el segundo orden de magnitud de respuestas correctas en ambos semestres), aunque otro aspecto por el que también llama la atención es que es el problema que menos estudiantes dieron respuestas (un 11.45% de segundo semestre y un 11.85% del sexto, dejaron sin respuesta este problema).

En este caso la mayoría de quienes respondieron correctamente lo hicieron enumerando las distintas opciones que se pueden obtener, mostrando una lista completa y escrita en una forma sistemática. En segundo semestre, el 4.2% del total de estudiantes respondieron con éxito vía esta estrategia, mientras que en el sexto semestre lo hicieron un 7.4%.

Otra de las estrategias que pusieron en juego en este problema es la resolución vía el empleo de la fórmula para combinaciones (T3). Cabe mencionar que esta estrategia sólo la utilizaron estudiantes de sexto semestre, de ellos un 3.7% resolvieron correctamente mediante esta vía. Tal recurso junto al de enumeración constituyen las principales estrategias en que se apoyaron los estudiantes de este semestre, aunque como podemos observar los porcentajes de éxito resultan muy bajos.

Aunque en menor proporción, otras estrategias usadas por quienes respondieron acertadamente son, el empleo del diagrama de árbol (T2) y la construcción de tablas u otros recursos en los que obtenían las distintas opciones a través de algún símbolo como por ejemplo |, tipo de estrategia para la que hemos dispuesto una categoría denominada "uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol" (T5). Un ejemplo de empleo de este tipo se muestra a continuación.

"10 formas"



Este ejemplo se destaca por la particularidad con que logra la construcción de las distintas posibilidades en el problema. Además en un momento posterior la observación de las limitaciones de este recurso para resolver situaciones similares podría servir como un antecedente hacia la construcción de formas más elaboradas, que posiblemente no incluyan esquemas de este estilo pero en cuyo descubrimiento esta estrategia jugó un papel determinante.

Una observación adicional es que estas dos últimas estrategias fueron puestas en juego únicamente por estudiantes del segundo semestre.

Un tipo de respuesta que se presento únicamente en los grupos de sexto semestre fue la "respuesta intuitiva" (T6). Agrupamos en esta categoría, como antes lo señalamos, a quienes dan como respuesta la solución numérica del problema, sin algún argumento, por lo que aquí se agrupan a aquellos estudiantes que no sintieron la necesidad de poner por escrito sus ideas aún habiendo claridad en ellas, pero también quienes no teniendo un panorama tan claro pudieron responder acertadamente. Por ejemplo en el siguiente caso: *"En 10 maneras se puede asignar la tarea"*. Este tipo de respuesta se obtuvo en un 1.48% del total de estudiantes de este semestre.

En cuanto a la presencia de errores, obtuvimos como principal fuente a la asistematicidad de los procedimientos de enumeración (E5). Un 32.53% del total de estudiantes del segundo semestre y un 20.0% del total de estudiantes de sexto semestre presentaron este tipo de error. Aunado a que la principal estrategia usada para arribar a respuestas correctas fue la enumeración, resulta sobresaliente que los estudiantes recurran a un procedimiento tan simple, más aún que frecuentemente llevan a cabo una enumeración insatisfactoria y no acceden a un procedimiento de sofisticación acorde a su nivel de estudio. Un ejemplo de respuesta en la que se presenta este error es el siguiente.

"Los problemas pares
El primero y el quinto, tercero
El segundo y el cuarto, primero
El primero y el cuarto, tercero
El segundo y el quinto, primero."

El análisis de la respuesta de este estudiante, en principio, nos permite mostrar la ausencia de un procedimiento sistemático de enumeración, pues no agota todas las opciones posibles que se pueden obtener, ni emprende alguna táctica como sería el fijar uno de los elementos intervinientes (como podría ser "primero"). Adicionalmente, la respuesta de este estudiante nos da un ejemplo de aquellos que no son capaces de elegir una notación "apropiada" (en términos operativos) para los elementos que están manejándose en el problema (como podría ser números 1, 2, 3, 4, 5 para los problemas), lo que en alguna forma refleja la existencia de dificultades para elegir una notación que sintetice una característica de los elementos a combinar (ser el primero, segundo etc.) que simplifique el manejo de las distintas opciones. Además de lo anterior, da como respuesta "los problemas pares" en lo que muestra la ausencia de un mecanismo de "validación" de su respuesta, al no tomar en cuenta que ésta no forma parte del espectro de opciones posibles.

Continuando con el análisis de los errores que se presentaron en este problema, nos referimos ahora al "error de orden" (E2), que se manifestó en un número considerable de estudiantes, ocurriendo en un mayor porcentaje en los estudiantes del sexto semestre (6.63% en segundo semestre y 15.56% en el sexto). Un ejemplo de la presencia del mismo sería la siguiente respuesta, misma que exhibe dos esquemas en los que aparentemente se apoya el estudiante para resolver la situación planteada (aunque únicamente mostramos la parte correspondiente al conjunto de opciones posibles y en los que nos basamos para clasificar el error cometido en la categoría a la que se hace referencia).

"33 formas en las que se pueden hacer los 3 problemas teniendo una lista de 5 problemas. Se puede hacer eligiendo el problemas 123, 345, 234, 154, 425, 543, 432, 145, 154, 132, 142, 135, 134, 243, 235, 215, 214, 213, 354, 321, 324, 342, 312, 313, 314, 315, 432,423, 452, 415, 413, 412, 453, (treinta tres casos)."

Aunque hemos utilizado la respuesta de este estudiante para ejemplificar el "error de orden", puesto que esto es lo que sobresale por las características del problema, se hace también evidente la ausencia de un procedimiento de enumeración sistemático, en cuyo caso le llevaría a obtener la lista completa bajo la consideración de que el orden es importante.

El "error de repetición" (E3), se presentó en un estudiante del sexto semestre, respuesta que reproducimos inmediatamente después de este párrafo, y que pone en evidencia la ausencia de la consideración de que no es posible repetir los elementos (problemas en este caso).

"5^3 = 125 formas (5)(5)(5)

111, 112, 113, 114, 115, 211, 212, 213, 214, 215; 121, 122, 123, 124, 125, 221, 222, 223, 224, 225; 131, 132, 133, 134, 135, 231, 232, 233, 234, 235; 141, 142, 143, 145, 241, 242, 243, 244, 245; 151, 152, 153, 154, 155, 251, 252, 253, 254, 255, ... etc.".

Aparentemente hay una manipulación sin sentido de datos del problema. Lo curioso es que al enumerar casos es consistente con dicha manipulación, lo que manifiesta que la dificultad esencial está en identificar la invalidez de repetir elementos.

En cuanto a la "respuesta intuitiva errónea" (E6), este tipo de respuesta se presentó en un 29.52% en el segundo semestre constituyendo junto con el de enumeración no sistemática lo que mas frecuentemente se presentó para el problema dos. En el sexto semestre un 10.37% se ubicaron en esta categoría. Clasificamos aquí aquellas respuestas numéricas erróneas sin argumento alguno de por medio, que nos permita su clasificación en alguna de las otras categorías aquí consideradas, como por ejemplo: *"40"*, que es insuficiente para un análisis más detallado.

Otros errores que tuvieron presencia en el sexto semestre son: "el uso del diagrama de árbol" (E9) y el de "manipulación de los datos numéricos dados en el problema (E12)". En el primer caso los índices de aparición son del 1.81% y 7.41% para segundo y sexto semestre respectivamente, mientras que en el segundo caso son de 4.82% y 15.56% en cada caso. En el sexto semestre el error denotado como E12, tuvo el segundo orden de aparición, mientras que en el segundo le correspondió al penúltimo.

Nos parece pertinente aclarar que las respuestas ubicadas en estas dos últimas categorías se distinguen en cuanto a que, algunos estudiantes dieron como respuesta "*3x5=15 formas o maneras*" después de mostrar la construcción de un diagrama de árbol en el que señalaban por ejemplo, que cada uno de los problemas puede aparecer como el problema 1, 2 o 3, produciendo la operación *5X3=15* o *3x5=15*. Cuando ocurre esta situación los ubicamos dentro de la categoría E9, mientras que a quienes exhibieron simplemente la respuesta "*3x5=15 formas o maneras*", se les ubicó en la categoría E12.

Un ejemplo más característico del tipo de error que hemos denominado E12 y que además se distingue del que antes hemos señalado es el siguiente "*3-problemas 5- de 8 formas*" y en el cual nuestra interpretación es que su respuesta la obtiene a través de la suma de los dos datos numéricos del problema.

Problema No. 3

Este problema fue resuelto correctamente por un 41.57% de los estudiantes del segundo semestre mientras que en el sexto semestre lo respondieron correctamente un 34.81%, siendo el único problema del cuestionario en que el índice de respuestas correctas en sexto semestre fue menor que en el segundo. En cuanto al orden de magnitud de respuestas correctas, le correspondió el quinto lugar en ambos semestres, y fue también en ambos semestres el que obtuvo el segundo orden en cuanto a los problema que dejaron sin respuesta.

La estrategia mayormente utilizada en este problema fue la "enumeración" (T1), en un 73.9% de quienes respondieron correctamente en segundo semestre y en un 78.7% de las respuestas correctas del sexto. Sin embargo, aunque los estudiantes recurrían a esta estrategia, que es válida a fin de lograr la distribución de las tareas, en muchos de los casos sus respuestas no hicieron explícita la asignación de cada una de las tareas a los equipos, por lo que no tenemos una evidencia completa sobre la interpretación de la distribución de tareas en si, como se ejemplifica a continuación.

"Andrés-Benito
Andrés-Clara
Andrés-Daniel
Benito-Clara
Benito-Daniel
Clara-Daniel

6 grupos diferentes".

En esta respuesta, se proporciona como estarían conformados los seis equipos, pero no se hace explícita la asignación o colocación de la tarea que le correspondería realizar a cada uno de ellos, con lo que en nuestra interpretación podría corresponder a un cambio en el modelo matemático del problema, ya que en su respuesta pareciera estar respondiendo a las formas en que se pueden seleccionar dos personas de un total de cuatro y no de las distintas formas en que puede lograrse la partición del grupo y asignar las dos tareas distintas, que correspondería al modelo matemático de partición. Una respuesta que contrasta con la anterior en cuanto a que hace evidente el modelo matemático en juego, aunque la argumentación no resulte completa, es la siguiente:

"De 6 diferentes formas.

Mat	*Lengua*
Andrés- Benito	*Clara-Daniel*
Andrés-Clara	*Benito-Daniel*
Andrés-Daniel	*Clara-Benito"*

Las estrategias de "uso del diagrama de árbol" (T2), "uso del principio multiplicativo" (T4), y "respuesta intuitiva" (T6) se presentaron en ambos semestres. Representando respectivamente el 5.8%, 1.4%, 14.5% de las respuestas correctas en segundo semestre, mientras que en el sexto fueron del 4.3%, 2.1% y 6.4% de las respuestas correctas respectivamente. El "uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol"(T5) sólo se utilizó por estudiantes del segundo semestre en un 4.3% de las respuestas correctas, mientras que el "uso de fórmula" (T3) sólo se utilizó por un 8.5% de quienes respondieron correctamente en el sexto semestre, lo que es una característica similar en este semestre en el resto de los problemas.

Quienes dieron respuesta usando el "diagrama de árbol", lo hicieron para encontrar las distintas parejas que se pueden formar, mostrando la elaboración por separado para cada una de las personas y el resto con quien podría formar el equipo. Posteriormente tachan las parejas que se repiten y a partir de aquí dan la respuestas, aunque frecuentemente no hacen referencia a las tareas asignadas a cada equipo.

En cuanto al "uso del principio multiplicativo", también fue puesta en juego con la finalidad de determinar las parejas, como se muestra en el siguiente ejemplo, en el que lo que aparece subrayado fue lo que el estudiante tachó.

"Cada persona lo puede hacer con 3 distintas, serían 12 maneras de dividirse el trabajo, pero como se repiten y se quitarían quedan 6 formas para dividirse el trabajo sin repetir A-B, A-C, A-D, <u>B-A</u>, B-C, B-D, <u>C-A</u>, <u>C-B</u>, C-D, <u>D-A</u> <u>D-B</u>, D-C".

En cuanto a la "respuesta intuitiva", la mayoría no dio más explicaciones, simplemente responden "*6 formas pueden dividirse*".

Quienes hicieron "uso de la fórmula" dieron sólo eso como respuesta, en ningún caso se acompañó por la lista de opciones u otra argumentación. En cuanto al "uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol", lo que utilizaron fue un diagrama como especie de "gráfica" en la que relacionaban a las personas a través de flechas, utilizando esto para formar los seis equipos.

Además de ocupar el segundo en el orden de mayor número de respuestas correctas en ambos semestres, este problema también fue el que tuvo mayor diversidad en cuanto a la presencia de errores en las respuestas dadas por los estudiantes. En el segundo semestre, sólo cuatro de los doce errores no se presentaron, dos de ellos tampoco se presentaron en el resto de los problemas, mientras que en el sexto solo dos tipos de error no ocurrieron, siendo uno de ellos una característica común con el resto de los problemas.

En segundo semestre, el error que mayormente se presentó fue el de "confusión en el tipo de celda" (E10), presentándose en un 12.65% del total de estudiantes de este semestre, mientras que en el sexto semestre este error se presentó en un 10.37% de los casos analizados. En este caso, los estudiantes muestran las particiones posibles del conjunto, pero no distinguen la tarea que le corresponde realizar a cada uno de ellos, como ocurre en el siguiente ejemplo.

"Se puede realizar de 3 formas
1.- Clara – Daniel   Andrés- Benito,
2.- Clara – Benito   Andrés – Daniel,
3.- Clara – Andrés   Benito – Daniel".

Después del error ya citado, en segundo semestre otros errores que tuvieron una frecuencia de aparición muy similar, son el de "enumeración no sistemática" (E5) que se presentó en un 10.84%, el de "cambiar el modelo matemático del problema" (E1) en un 11.45% y la "respuesta intuitiva errónea" (E6) un 10.24%. Estos resultados contrastan con lo obtenido en sexto semestre pues los índices de aparición fueron del 6.67%, 23.7% y 2.96% respectivamente.

Clasificamos dentro de "enumeración no sistemática" a quienes daban la solución por medio de la elaboración de la lista de opciones posibles, pero no lo hacían en forma completa, por ejemplo:

"4 formas A-C M, B-D L, A-D M, B-C L" .

En este caso se hace explícita la asignación de la tarea a cada partición del conjunto, mostrando con ello la interpretación como un problema de partición, lo que no se presentó en casos como el siguiente:

"Andrés-Benito, Clara-Daniel, Daniel-Andrés, Andrés-Clara, creo que son todas las posibilidades posibles"

---

en el que no se hace explícita la asignación de la tarea a los equipos. Esta última situación la clasificamos dentro del error de "enumeración no sistemática" y también en el de "cambiar el modelo matemático del problema".

Además del ejemplo citado, otras respuestas que también clasificamos dentro de "cambiar el modelo matemático del problema" son aquellas que presentan todas los opciones posibles en cuanto a los equipos que se pueden formar, pero que no toman en consideración las distintas particiones del conjunto que se tienen al formar esas parejas, dando respuestas como las siguientes:

"Matemáticas	*Lengua*	
Andrés-Benito	*Clara-Daniel*	
Clara-Daniel	*Daniel-Benito*	*12 porque son 6 formas en cada materia y se multi-*
Daniel-Andrés	*Daniel-Andrés*	*plican por 2 o se hacen las otras combinaciones*
Benito-Clara	*Clara-Benito*	*el resultado es el mismo.*
Clara-Andrés	*Clara-Andrés*	
Benito-Daniel	*Benito-Andrés*	

En cuanto a la "respuesta intuitiva errónea" (E6), otro de los errores que más predominaron en el segundo semestre, se obtuvieron respuestas como "*R= de 8 formas*" o "*Serían 12 formas diferentes*".

Otro error que se presentó en ambos semestres pero en menor proporción respecto a los anteriores es el "error en las particiones formadas" (E11), que tuvo un índice del 5.42% en segundo semestre y del 4.44% del sexto. En este tipo de error clasificamos algunos casos que al formar las particiones ocurrían repeticiones en las parejas, dejando sin considerar a un elemento como el caso siguiente:

"Benito y Clara = Mat, Andrés y Clara= lengua Andrés y Daniel = Mat, Benito y Daniel = lengua Son dos maneras"

---

a quienes no tomaban en cuenta la condición dada en el problema respecto a la forma en que se formaban los equipos como en el siguiente ejemplo:

"1.- Andrés, Beñito= Lengua, 2.-Clara, Daniela = MATEMÁTICAS, 3.- Andrés, Benito y Clara =MATEMÁTICAS, 4.-Daniela =LENGUA, 5.-O los 4 amigos hacen los 2 TRABAJOS ".

La "manipulación de los datos numéricos dados en el problemas" (E12) , en el segundo semestre se presentó en dos estudiantes y en el sexto en un total de once estudiantes, correspondiendo al 1.2% en segundo semestre y al 8.15% en sexto. En el segundo semestre dos repuestas que clasificamos dentro de esta categoría son las siguientes:

"De 16 formas.
Datos
4 amigos *4x2x2=16*
2 trabajos
se dividen en 2"

---

y

"4 formas. Porque son 4 individuos y son 2 trabajos por realizar los multipliqué 2×4=8 entre 2 que son los trabajos y me dio a 4 formas de dividirse".

Mientras que en el sexto, se tuvo una respuesta parecida a esta última *"4x2=8 de 8 formas"*. En todos los casos ponen en juego los números que representan datos dados en el problema, a través del producto, sin mayor análisis de la situación planteada.

En lo que se refiere al error de orden, el cual se presentó mayormente en sexto semestre (un 1.81% del segundo y un 16.3% en sexto), las respuestas que aquí se clasificaron en la mayoría de los casos proporcionan un conjunto de parejas en las que no tomaban en cuenta el orden al formarlas, como en el siguiente ejemplo, que además presenta "error en las particiones formadas" (E11).

"16 formas diferentes
AB CD DA CB
AC DC DB AC
AD BC DC BA
BA DC
BC DA BC DA,
BD AC AB CD

CA BD   CD BA,
CB AD
CD BA   CA BD.

Similarmente a lo que ocurrió con el "error de orden" (E2) , el "error de interpretación del diagrama de árbol" (E9), se presentó en segundo semestre sólo en un 0.6%, mientras que en el sexto ocurrió en un 9.6% del total de respuestas. Los errores que se presentaron en cuanto al diagrama de árbol, fueron tanto en la elaboración como en la interpretación del mismo. Un ejemplo es quienes consideraron cuatro árboles por separado construidos a partir de cada una de las personas, y posteriormente no reflexionaron en cuanto a la duplicidad de las parejas formadas. Otra situación de este estilo en cuya elaboración del diagrama consideraron repetición, dando como respuesta "*4x4=16*", siendo este caso la única respuesta que presentó el "error de repetición".

Finalmente, el error denominado "no recordar la fórmula correcta" (E7) sólo se presentó en dos estudiantes del sexto semestre. Las respuestas proporcionadas por estos estudiantes fueron:

$$\text{“}C_2^4 = \frac{4.3.2}{2} = 12\,formas\text{”}$$

y

"*2C4= de 4 formas diferentes*".

Problema No. 4

Este problema fue resuelto correctamente por un 9.64% de los estudiantes del segundo semestre, ocupando el tercer orden de magnitud de respuestas correctas en ese semestre. En el sexto semestre un 31.85% lo resolvieron correctamente, ocupando en este caso el cuarto orden de magnitud de respuestas correctas. En el segundo semestre fue uno de los problemas al que dieron respuesta casi la totalidad de estudiantes (3.6% fue dejado sin respuesta) y en sexto este porcentaje resultó mayor (5.93%), convirtiéndose en el segundo problema que más estudiantes dejaron sin respuesta.

El recurso al que principalmente recurrieron los estudiantes al tratar de responder al problema que ahora estamos analizando fue la "enumeración" (T1). En el caso de respuestas correctas un 75% de los estudiantes optaron por el uso de esta vía, mientras que en el sexto lo hicieron un 69.8%

Las diferencias en las respuestas correctas en este caso se presentan en que algunos estudiantes exhiben el conjunto solución completamente, mientras que otros sólo elaboran la lista parcialmente pero de modo que sirva de apoyo para concluir su respuesta, por ejemplo:

"222,224,227, 229, 242, 244,247,249,272,274,277,279,292,294,297,299. 16x4 =64. 64 formas posibles".

Estos dos tipos de respuestas exhiben niveles distintos en su elaboración, pues aunque ambos siguen la misma estrategia, en el segundo de los casos el que el estudiante no complete la lista y concluya a partir de un subconjunto de las opciones posibles muestra su capacidad para llevar un "control" de las opciones restantes, lo que quizá no fue posible en el estudiante que optó por mostrar la lista completa.

Otra de las estrategias que utilizaron en ambos semestres es la "elaboración del diagrama de árbol" (T2), con diferencias en cuanto a que algunos presentan sólo un árbol en el que consideran las 64 ramificaciones, mientras que otros construyen cuatro árboles por separado, considerando como inicio cada uno de los cuatro números dados en el problema.

En otras respuestas que se dieron correctamente en ambos semestres el tipo de estrategia fue la "respuesta intuitiva" (T6), presentándose en un 12.5% en segundo semestre y un 6.8% en el sexto.

Para finalizar lo correspondiente al análisis por estrategias en las respuestas correctas, nos referiremos al "uso del principio multiplicativo" (T4) que únicamente se presentó en estudiantes de sexto semestre, (11.6% de quienes respondieron correctamente). En este aspecto, las respuestas simplemente exhiben una operación, sin mayor argumentación, como: "$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4} = 64$", lo que de acuerdo a nuestra interpretación corresponde a la puesta en juego de este tipo de estrategia.

Respecto a la presencia de errores, el principal error que presentaron en ambos semestres fue el de enumeración no sistemática. En el segundo semestre un 57.23% del total de estudiantes no dieron la respuesta correcta debido a que, según interpretamos, no pudieron completar la lista de opciones posibles, manifestando la falta de un procedimiento sistemático de enumeración para ello. El porcentaje de aparición de este error fue del 28.89% en el sexto semestre.

En el segundo semestre la enumeración no sistemática junto con la "respuesta intuitiva errónea" (E6), fueron lo errores que más se presentaron, mientras que en el sexto semestre el "error de manipulación numérica de los datos dados en el problema" (11.85%), seguido del el "error de repetición (E3)" fueron los de mayor aparición después de la enumeración no sistemática. Un caso en que se presentó el "error de repetición" consistió en no considerar la repetición de los elementos cuando la situación si lo requiere. Un ejemplo es el siguiente.

"6x4=24 porque cada número se puede conjugar 6 veces y lo multiplique por los 4 números 247, 274, 279, 297, 294, 249".

En cuanto al error denominado "manipulación numérica de los datos" (E12)" mostramos dos respuestas que, aunque con distinta presentación, las podemos considerar como equivalentes en términos de su interpretación. En ambos casos se da como repuesta el mismo valor numérico aunque explican de manera distinta como obtuvieron ese valor, en la primera de ellas:

"12 cifras diferentes.
Datos
4 bolas *4x3=12*
3 veces"

mientras que en la segunda:

"R= 12 combinaciones distintas.
Multiplicamos el número de veces que podemos sacar la bola por las 4 bolas numeradas".

Como podemos observar el argumento es similar aunque la presentación es distinta. Lo que consideramos se privilegia por parte de los estudiantes son los datos dados en el problema, que luego ponen en juego a través de una operación, mostrando con ello una tendencia a la resolución de los problemas sin realizar un análisis previo de la situación a la que se pretende dar respuesta.

Finalmente, hacemos referencia al "error de orden" (E2) que se presentó únicamente en sexto semestre y a la "interpretación del diagrama de árbol" (E9) que se presentó en mayor proporción en sexto semestre.

En el primero de los casos, las respuestas fueron equivalentes excepto por su escritura, ya que en un caso respondieron " $\frac{4!}{3!}$ ", mientras que otros estudiantes daban como respuesta: C_3^4. Respecto al diagrama de árbol, los errores se presentaron tanto en su elaboración como en su interpretación.

Problema No. 5

De acuerdo a las tablas V.1 y V.2, este problema fue resuelto correctamente por un 22.29% de los estudiantes del segundo semestre, colocándose en el cuarto orden de magnitud de respuestas correctas en ese semestre, mientras que en el sexto semestre lo resolvieron correctamente un 23.7% en este caso el tercer orden de magnitud de respuestas correctas.

Este problema presenta en ambos semestres índices muy similares en cuanto a la clasificación inicial que incluye respuestas correctas, erróneas y "sin respuesta". En cuanto al análisis de las estrategias puestas en juego en la resolución encontramos que la "enumeración" (T1) fue utilizada por un 46% de los estudiantes que respondieron correctamente en segundo semestre, mientras que en el sexto lo hicieron un 53.1%.

En este caso, la diferencia en quienes dan este tipo de respuesta se presenta en que algunos identifican cada sobre con la letra inicial del color, mientras que otros escriben completamente la palabra que indica el color, como en los siguientes ejemplos:

"De 4 formas. ABC, ACD, ABD, BCD".

En este caso, el estudiante elige una notación mediante la cual indica cada color del sobre, y procede a escribir la lista de opciones que se tendrían. Observando mas detenidamente podemos ver que aunque tiene la lista completa, no fue sistemático en su elaboración, lo que ocurre también con el siguiente estudiante:

"Contando el ejemplo de 4 formas porque los colores no se van a repetir porque solo hay un sobre de cada color.
3 cartas 4 sobres
Amarillo Blanco Crema
Amarillo Blanco Dorado
Blanco Crema Dorado
Crema amarillo Dorado "

Analizando el resto de las estrategias puestas en juego observamos que en el segundo semestre la resolución mediante el uso de tablas o representaciones de otro estilo, en donde inclusive dibujaron los sobres y cartas, fue la estrategia a la que más estudiantes recurrieron después de la enumeración, 29.7% de las respuestas correctas, mientras que en el sexto semestre sólo la utilizaron 9.4% de los estudiantes. Un ejemplo de este tipo es el siguiente.

---

4 Formas.

A	*B*	*C*	*D*
✓	✓	✓	
✓	✓		✓
✓		✓	✓
	✓	✓	✓

Adicionalmente, en este caso, aunque su recurso fue la construcción de esta tabla, podemos observar que en ello se procedió en forma sistemática.

Contrario a lo que ocurrió con la estrategia que acabamos de analizar, cuando revisamos el "uso de la fórmula" (T3), observamos que un 28.1% de estudiantes de sexto semestre hicieron uso de este recurso, mientras que en el segundo semestre no se presentó el uso de esta estrategia, lo cual es explicable pues quienes han tenido instrucción en el manejo de tales procedimientos son precisamente los estudiantes del sexto semestre. Por otra parte En segundo semestre obtuvimos un alto porcentaje de "respuestas intuitivas" (T6) (24.3%), mientras que hubo un 9.4% respuestas de este tipo en el sexto semestre.

Tomando en consideración lo que respecta al análisis de errores, observamos que la "respuesta intuitiva errónea" (E6) fue lo que más se presentó en el segundo semestre (21.08% del total de estudiantes), seguida del de "manipulación numérica de los datos" (E12)", que se presentó en un 12.65% . En este último caso las respuestas que obtuvimos involucraron el producto de la cantidad de sobres por el de el de cartas, como en el caso siguiente.

---

*"12 formas diferentes Porque con sólo aplicar matemáticas, 3 cartas 4 sobres 3*4=12".*

En sexto semestre estos dos errores se presentaron en un 13.3% y 15.6% respectivamente.

En igual proporción se presentaron en el segundo semestre los errores de "enumeración no sistemática" (E5), "confundir el tipo de objeto" (E4) y el de "interpretación errónea del diagrama de árbol" (E9) (4.8% del total de estudiantes). En el primer caso se presentaron como respuesta una lista incompleta de los sobres seleccionados, por ejemplo:

"Una en el dorado, blanco, crema; - amarillo, blanco, dorado; - blanco, crema, amarillo; se pueden colocar las cartas de tres formas diferentes"

Como se puede observar, este estudiante además de mostrar una lista incompleta, no es sistemático en la elaboración de la misma. En el sexto semestre este error sólo se presentó en un 1.48%.

Respecto al resto de estos últimos errores, E4 y E9, a los que hacemos referencia, también se presentaron en la misma proporción en sexto semestre (16.3%). En el error de "confundir el tipo de objeto", clasificamos a quienes establecían una correspondencia entre el sobre seleccionado y cada una de las cartas, a las cuales les asociaban un número. Esto en nuestra interpretación corresponde a considerar las cartas como distintas, cuando el problema señala lo contrario. Otro ejemplo de esta situación es el siguiente.

"una en el sobre amarillo,
-otra en el blanco
-y la última en el crema
-o al revés la primera en el crema
-la segunda en el blanco

-y la tercera en el amarillo
o una en el blanco, la otra en el crema y la última en el dorado"

Este ejemplo muestra uno de los casos en que consideramos se da la confusión en el tipo de objeto, debido a que en sus primeras dos opciones considera la colocación de las cartas como objetos distinguibles, dando como resultado para la misma elección de sobres dos opciones distintas.

En lo que se refiere a al "interpretación errónea del diagrama de árbol" la mayoría de las situaciones dieron como respuesta la elaboración de cuatro diagramas de árbol por separado, tomando como raíz cada uno de los colores y como ramificación los números uno, dos y tres o a la inversa, de lo que concluían como respuestas doce formas.

Adicionalmente a los errores ya citados, en el sexto semestre se presentaron el "error de orden"(E2), el "error de repetición"(E3) y el de "no recordar la fórmula correcta"(E7). En cuanto al primero de ellos, clasificamos a quienes dieron como respuesta una lista de opciones en las que consideran importante tanto el orden, como en el siguiente ejemplo, que aunque responde 36 formas, solo enlista 24 que son el resultado de considerar el orden:

"36 formas

ABC	*BAD*	*CBA*	*DAB*
ABD	*BAC*	*CBD*	*DAC*
ACB	*BCD*	*CAB*	*DCB*
ACD	*BCA*	*CAD*	*DCA*
ADB	*BDC*	*CDA*	*DBA*
ADC	*BDA*	*CDB*	*DBC"*

Otra situación de este estilo, son quienes simplemente responden: "$\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2} = 24$".

El "error de repetición" (E3) lo consideramos en respuestas como la que mostramos a continuación.

"4= sobres, 3= cartas. Se pueden dar combinaciones de 4 sobres y tres cartas $\rightarrow 4^3 =$ *(4)(4)(4)=64, se podrían dar 64 combinaciones posibles entre las cartas y los sobres".*

En este último ejemplo, interpretamos que en cada elección, está considerando como posible la elección de cualquiera de los cuatro sobres. Todos los casos que clasificamos dentro de este error dan como respuestas sesenta y cuatro, y lo argumentan ya sea como el ejemplo o considerando el problema anterior.

Finalmente, en cuanto al "error de fórmula" se presentaron respuestas en las que indican la operación combinatoria con un resultado erróneo, como: "*3C4=36 formas*" o "$C_3^4 = 24$ *formas*".

Problema No. 6

El mayor porcentaje de respuestas correctas en ambos semestres ocurrió en este problema (un 51.81% en segundo semestre y un 63.70% en sexto semestre), siendo el único problema que rebasó el 50% de respuestas correctas en ambos semestres. Otro detalle que se presentó en este problema es que en ambos semestres un índice alto de estudiantes dejaron este problema sin respuesta, lo que puede explicarse en términos de que es el último que tuvieron que resolver los estudiantes y que probablemente no tuvieron el tiempo suficiente para hacerlo.

Este problema fue en el que mayormente se presentó la "enumeración" como estrategia de resolución (de las respuestas correctas un 86.1% en segundo semestre y un 73.3% del sexto usaron este recurso). En ambos semestres no se puso en juego la estrategia del "uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol" (T5). En segundo semestre, además de esta última estrategia el otro recurso que no se utilizó fue la "formula"(T3), característica similar en el resto de los problemas para este semestre.

Una de las explicaciones que damos al resultado obtenido en este problema es que el valor de los parámetros involucrados, así como también el tipo de operación combinatoria, permiten que la respuesta pueda obtenerse fácilmente por medio de la elaboración de la lista de opciones posibles. Esto contrasta con lo ocurrido en el problema cuatro en el que los valor de los parámetros son similares, pero la operación combinatoria involucrada produce un valor en la respuesta cuya resolución vía esta estrategia requiere contar con procedimiento sistemático de enumeración que permita obtener la lista completa. Estos dos ejemplos constituyen una evidencia de las dificultades que tienen los estudiantes de este nivel para tratar con situaciones que involucren números que no sean "pequeños".

En cuanto al análisis de los errores, a diferencia del resto de los problemas, en este problema uno de los principales errores que aparecieron fue el de repetición, presentándose en un 14.46% de las respuestas del segundo semestre y en un 6.67% en el sexto semestre. Este error en la mayoría de los casos consistió en exhibir una la lista en la que tomaban en cuenta la repetición de los dígitos como en el siguiente ejemplo.

"*222,444,777,224,227,242,272,422,424,427,442,472,477,722,744,724,727,742,772*".

Además de este último error, en el segundo semestre también se presentaron en un porcentaje considerable el error de "enumeración no sistemática" (E5), un 14.46% y el de "respuesta intuitiva errónea" (E6) en un 6.63%, mientras que en el sexto el primero de ellos se presentó en un 4.44%, y el segundo presentó en un 6.67. En el primero de estas situaciones se mostró la lista incompleta como "*247, 427, 742*", mientras que en el segundo se obtuvieron respuestas como "*un número*".

Otro error común fue el de "manipulación numérica de los datos" (E12). En este caso, se proporcionaron respuestas como:

"(2)(4)(7)=56 Se pueden obtener dieciocho números de tres cifras".

Únicamente en sexto semestre se presentó el error de "interpretación errónea del diagrama de árbol" en las dos respuestas que clasificamos dentro de este caso, el error consiste en que en la construcción del diagrama de árbol correspondiente consideran por separado tres diagramas tomando en la primera ramificación como posible la repetición de los dígitos, mientras que en la segunda no la consideran.

V.3 Análisis general

En términos generales, podemos señalar que la información obtenida en la parte experimental del trabajo pone en evidencia algunos señalamientos que hacemos mención con anterioridad y que particularmente hemos estado interesados en observar.

En lo que se refiere a las distintas estrategias que ponen en juego, podemos apreciar que en lo general, los estudiantes no logran sobrepasar la enumeración como una vía de resolución. Inclusive quienes optan por esta vía, la que podría ser una estrategia admisible dadas las características de los problemas planteados, presentan dificultades para conseguir el espectro de opciones posibles.

Este resultado en alguna forma se relaciona con los señalamientos vertidos por Hadar y Hadas (1981), en relación a las dificultades que presentan los estudiantes al resolver situaciones de este tipo. En esa dirección, advierte una serie de dificultades iniciando con la no percepción del problema a resolver. En cuyo caso podría ser esta una explicación a casos en los que hemos obtenido respuestas como "*247*", no obstante lo hemos clasificado dentro del "error de enumeración no sistemática".

Esta misma dificultad también la hemos asociado a respuestas como "*1 porque como se va sacando las bolas ya no se vuelven a echar a la urna y sacando una sola quedan dos ya no es posible hacer un cifra de 3*", en la que al parecer no percibe la situación planteada. Esta respuesta no ha sido clasificada debido a que no dispusimos de una categoría para ello, basados en que en el pilotaje situaciones de este estilo únicamente se presentaron pocos casos, sin embargo en aplicación definitiva, observamos esto se dio con mayor frecuencia en los estudiantes del segundo semestre, mientras que en el sexto sólo en casos aislados, detectados principalmente en el problema seis.

En este mismo problema, otras situaciones que no fueron sido clasificadas son aquellas hacen referencia al problema cuatro, por ejemplo "*64-12=52 . Como en el problema 4 se hizo un problema similar pude obtener la información de ahí. 52 números de 3 cifras*", en el que parece no tomar en cuenta la modificación del tamaño de la población.

Ejemplos adicionales de respuestas que se dejaron sin clasificar en el segundo semestre, son estas respuestas proporcionada al problema dos: "*Son 5 problemas tres tienen que ser impares y solo dos de ellos serán un número par*" o bien "*Se pueden seleccionar los más fáciles, para no dificultar la situación*, ambos problemas no se consideraron en la clasificación por considerarlos en las circunstancias arriba mencionadas.

Así mismo en el problema tres hubo respuestas como "*Andrés puede hacer la mitad (½) trabajo y Benito la otra. Clara investiga sobre el trabajo que le dejaron y Daniel lo escribe O cada uno de ellos hace el trabajo que ha ellos les tocó. Hay 3 maneras o más diferentes*", en donde en la respuesta dada al final no parece estar asociada con la situación que él mismo plantea, por lo cual lo consideramos más bien como de una percepción distinta del problema.

Situaciones como las antes descritas también se presentaron en el resto de los problemas, aunque lo más crítico se dio en el segundo semestre en el problema cinco, problema que también se destacó en ese semestre en cuanto a las estrategias puestas en juego.

Explicaciones a estos resultados pueden por un lado a una falta de experiencias de los estudiantes en el manejo de este tipo de problemas, situación que quizás sea distinta en los estudiantes del sexto semestre, de los que se puede decir que en los hechos han tenido cierto contacto con este tipo de situaciones. En esta perspectiva, podríamos señalar que estos resultados podrían ser un indicativo de un nivel distinto de comprensión, aunque tal vez no el óptimo, en los estudiantes de sexto semestre.

Retomando el aspecto de las dificultades, una que consideramos se relacionan con los resultados que hemos obtenido en nuestra investigación, y que también es señalada por Hadar y Hadas, es el que los estudiantes no recurren a fijar variables, lo cual resultaría útil para obtener casos particulares que involucre el problema y que puede ser utilizado para obtener el listado completo, esto creemos está muy relacionado específicamente con el alto índice de errores de enumeración no sistemática.

En cuanto al análisis de las variables de tarea que hemos puesto en juego en esta parte experimental, es de señalarse como en los problemas que involucran un espectro "pequeño" de opciones como respuesta, tuvieron el mayor número de respuestas correctas (problemas tres, cinco y seis), mientras que los problema uno y cuatro, cuya solución involucra un espectro de opciones mayor, presentaron un número considerable de errores, lo que muestra que el valor de los parámetros juega un papel importante en la resolución de dichos problemas, en el sentido de que se manifiesta cierta facilidad para trabajar con valores pequeños.

Resulta pertinente destacar como un caso especial el problema dos, pues a pesar de tener como parámetros valores "pequeños", sólo superó en el total de respuestas correctas al problema uno. Tomando en consideración de que en este caso la variable de tarea correspondiente al modelo combinatorio implícito toma el valor de selección, los resultados obtenidos nos muestran que los estudiantes tienen dificultades inclusive para resolver situaciones que incorporan el modelo combinatorio tradicionalmente enfatizado curricularmente.

En este mismo sentido, si consideramos el análisis de esta misma variable de tarea, se observa que en general los estudiantes no hacen explícito el modelo combinatorio, tratando todos los problemas como si correspondieran a un modelo de selección. En particular, esto se observó mayormente en el problema tres cuyo valor de esta variable de tarea es el de partición y en cuyas respuestas consideraban la selección de los equipos, no hacían explícita la partición correspondiente, y como consecuencia, ni la asignación de la tarea a cada una de estas particiones.

En lo que se refiere al tipo de elementos que se combinan, podemos observar como en los problemas en que esta variable tomó el valor de "números" el manejo de los mismos resultó más familiar, principalmente en el problema seis, no ocurriendo lo mismo en el problema cuatro que también involucró números, aunque en este caso consideramos que el valor de la respuesta tuvo una influencia importante.

En cuanto al manejo con objetos, pudimos observar que mayormente tuvieron dificultades en los problemas uno y dos, y en menor grado en el problema cinco. En este caso los problemas uno y dos incluyen el mismo valor de los parámetros, excepto el correspondiente a la solución, y difieren en el tipo de operación combinatoria, mientras que en los problemas dos y cinco esta última variable de tarea toma el mismo valor. Por tanto, una explicación para estos resultados podría estar más ligado al tipo de operación combinatoria que involucran los problemas y no tanto al tipo de objetos que se combinan.

En cuanto al tipo de operación combinatorio, resulta sobresaliente que en la mayoría de las respuestas no incorporaron el manejo de expresiones convencionales que se utilizan en la resolución. Sin embargo observamos que la mayoría de los estudiantes pudieron responder con éxito el problema seis que involucra como valor de esta variable a las permutaciones sin repetición, mientras que el problema cuatro que incluye la misma operación bajo la condición de repetición no fue resuelto con la misma facilidad.

En esta misma variable, si consideramos los problemas en que el valor correspondiente fue el de combinaciones, pudimos observar no sólo las dificultades en cuanto al manejo de una expresión convencional para las mismas, sino además la presencia de un porcentaje alto de estudiantes clasificados en la categoría correspondiente al "error de orden", lo cual pone de manifiesto la no distinción entre una permutación de una combinación y como consecuencia la tendencia a manejar estas dos variables como equivalentes.

Continuando con el análisis de las distintas estrategias de resolución puestas en juego, llama la atención los bajos índices que ocurren por ejemplo en el uso de fórmula, principalmente en el sexto semestre, ya que son quienes han recibido instrucción en estos tópicos. Igualmente puede decirse en el caso del diagrama de árbol, pues de quienes recurrieron a esta estrategia, muy pocos pudieron dar una respuesta acertada.

En relación a esto último, en su lista de ideas fundamentales Heitele señala a la combinatoria como una de ellas, y en particular hace referencia al diagrama de árbol como una representación icónica de importancia fundamental por hacer visibles características como la multiplicidad de pasos del experimento y a todos los resultados posibles. Tomando en consideración estos señalamientos, podemos observar cómo el manejo de este recurso es muy limitado aún en estudiantes del sexto semestre. Lo cual pudiera explicarse quizás en términos del poco uso que se le da a este recurso en la resolución de problemas en clase.

Por otra parte, mientras que en el segundo semestre se presentan otras alternativas para encontrar la solución como el manejo de tablas, estas opciones ya no se presentan en el sexto semestre, esto en alguna forma tiene relación con lo señalado por Fischbein, en cuanto al desarrollo de intuiciones, tanto primarias como secundarias. En lo que se refiere a los estudiantes de segundo semestre, aunque no han tenido oportunidad (curricularmente) de resolver situaciones de estas características, han desarrollado intuiciones primarias que les permiten enfrentar el problema planteado y resolverlo, aunque no dispongan de una técnica específica para tales situaciones.

En cuanto al desarrollo de intuiciones secundarias, podríamos tomar como ejemplo la construcción e interpretación del diagrama de árbol como una intuición secundaria que debería ser apoyada fuertemente en la escuela. Sin embargo, en los resultados observamos como se manifiesta una evolución totalmente insatisfactoria, lo que es preocupante dada su importancia no sólo en la construcción de ideas combinatorias sino en forma más general en un modo de pensamiento que ponga en juego el uso de formas icónicas que sirvan de apoyo en la búsqueda de resolución de situaciones diversas.

La presencia de los errores de orden y de repetición ponen de manifiesto las dificultades para distinguir el tipo de operación combinatoria involucrada en la resolución del problema. En el primer caso, los estudiantes utilizaron indistintamente la expresión para las permutaciones y la de combinaciones, por ejemplo daban la misma respuesta para los problemas uno y dos. Esto último también ocurría en el caso de los problemas cuatro y seis.

Otro aspecto de interés es la variedad de notaciones que los estudiantes eligen en el momento de resolver el problema. En este caso, observamos las dificultades que tienen para sintetizar la información proporcionada en una notación conveniente, esto se refleja en los problemas que involucran objetos no numéricos, lo cual hace evidente la falta de familiaridad en el manejo de situaciones que involucren el manejo con objetos de este estilo.

Como de antemano se destacó, investigaciones relacionadas con la presente son los trabajos realizados por Navarro-Pelayo y colaboradores. En este sentido, en la presente investigación pudimos constatar en los estudiantes de nuestro medio la presencia de la mayoría de los errores reportados por ellos. Nosotros además incluimos una nueva categoría que agrupa una situación errónea que en principio podría ser interpretado como una respuesta intuitiva errónea, pero que al poner en consideración argumento que se utilizó para dar respuesta, decidimos clasificarlos dentro de un grupo distinto. La clasificación por estrategias para el caso de las respuestas correctas, es otro distintivo de la presente investigación.

Una observación adicional es que en estudiantes de nuestro medio no obtuvimos la categoría denotada como E8, que se refiere a "no recordar el valor de los parámetros". En estudiantes de nuestro medio, quienes usaron fórmula, lo hicieron con éxito o bien cometieron el error denotado como E7 que se refiere a "no recordar la fórmula correcta". En el caso de "no recordar el valor de los parámetros" la interpretación consiste en identificar la operación combinatoria implicada en la resolución pero no recuerdan como intervienen en ella los parámetros, situación que no se presentó en la muestra que nosotros estudiamos.

En cuanto a los períodos de desarrollo señalados por Piaget e Inhelder, en lo que respecta a las operaciones combinatorias, podemos observar que los estudiantes, a pesar de su edad no están en condiciones adecuadas para tratar estos contenidos desde una perspectiva formal, la tendencia de los estudiantes a dar una respuesta en cada caso, a través de la enumeración de las distintas posibilidades, pone de manifiesto un tipo de pensameinto en el tránsito por la etapa de las operaciones concretas, en el sentido de que requieren de la manipulación de los objetos para dar respuesta.

En relación con las investigaciones referentes a lo noción de azar y al concepto de probabilidad llevadas a cabo por Piaget e Inhelder, en las que se señala la existencia de una correlación directa entre la formación de las nociones de azar y probabilidad y la de la formación de las operaciones tanto lógicas y aritméticas elementales como combinatorias, vemos en esto una posible explicación a las dificultades observadas en los estudiantes al abordar cuestiones probabilísticas básicas.

En el caso de la noción del azar, al no poseer mecanismos que le permitan poner al descubierto el espectro de todos los arreglos posibles que se pueden formar a partir de un conjunto de varios elementos, tiene como consecuencia el que los estudiantes no son llegan a percibir el azar como una posible explicación a los resultados obtenidos.

Mientras que, en el caso del concepto de probabilidad, el no poseer sistemas combinatorios completos es una limitante que no le permite abordar situaciones que van más allá de los casos elementales, debido a que no pueden establecer comparaciones entre lo favorable y lo posible salvo en casos de espacios muestra elementales.

CAPÍTULO VI

Conclusiones

El desarrollo del estudio de capacidades combinatorias en estudiantes de bachillerato, que se reporta en el presente trabajo, contempló actividades de investigación que fueron organizadas en tres fases.

En la primera de ellas, se emprendió un análisis de las facetas instruccional, epistemológica y psicológico cognitiva de la problemática que representa el razonamiento combinatorio en el ámbito del bachillerato. En la siguiente, tomando los productos de los análisis mencionados como marco de referencia, se abordó la construcción de un cuestionario para el estudio de las capacidades combinatorias de los estudiantes y el análisis a priori de dicho instrumento. Finalmente, la última fase consistió en la parte experimental del estudio y el análisis de resultados.

En términos generales, en base a los elementos que arrojan las diferentes fases del trabajo, afirmamos haber encontrado un desarrollo pobre de capacidades o habilidades combinatorias en los estudiantes sujetos a estudio.

A pesar de que los datos numéricos nos proporcionan sólo una visión parcial, los porcentajes globales de respuestas a los problemas incluidos en el cuestionario apuntan en esa dirección, toda vez que el 25.6% de las respuestas fueron clasificadas como correctas, el 69.9% como respuestas incorrectas y el 4.5% de los casos no responden al problema.

Particularmente, la capacidad de los sujetos para la formación de arreglos de elementos se encuentra estrechamente ligada a la estrategia de su enumeración la cual, sin dejar de percibirse como una valiosa herramienta intuitiva y muy prometedora didácticamente, paradójicamente presenta el riesgo de ocultar tanto las trascendentes cuestiones estructurales así como la necesidad de recurrir a estrategias de mayor generabilidad.

En principio, esto se constata por el hecho de que la enumeración es el principal recurso de los estudiantes, tanto cuando se responde incorrectamente (19.5% de todas las respuestas) como cuando se hace de manera correcta (18.2% de todas las respuestas). Pero creemos que en un gran número de respuestas clasificadas en otras categorías subyace la estrategia de la enumeración, interiorizada o no, como es el caso del recurso a diagramas de árbol u otros diagramas auxiliares.

Así mismo, la no consideración de la procedencia del orden, la repetición o la distinción de elementos se refleja en las enumeraciones incorrectas o incompletas llevadas a cabo por los estudiantes. También vemos que el uso no sistemático de la enumeración o de diagramas de árbol incompletos muestran un estado de desarrollo incongruente con la posibilidad de una síntesis cualitativa del proceso, lo que por lo contrario, estaría abriendo el camino hacia abstracciones o generalizaciones del mismo.

Ciertamente, se debe señalar una diferencia en el recurso a la enumeración según el nivel de instrucción: a mayor grado de estudios, se presenta un uso más eficiente de este recurso. Esto es, mientras que la enumeración no sistemática fue erróneamente utilizada por el 25% de los casos por estudiantes del segundo semestre y el 12.8% de los del sexto, un procedimiento de enumeración sistemática es utilizado correctamente por un 19.4% de los casos por estudiantes del segundo semestre y por el 20.5% de los casos del sexto.

Considerando un razonamiento combinatorio de los sujetos de estudio, tanto por su edad como por el nivel educativo en que se encuentran, acorde a un estadío formal de desarrollo, estuvimos interesados en indagar en qué medida, dichos estudiantes habían logrado incorporar e integrar en la resolución de situaciones problemáticas ideas inherentes a las capacidades combinatorias, como es la formación de disposiciones de elementos bajo diversas restricciones, el reconocimiento de la estructura de las posibles disposiciones y su cuantificación. También, el que incorporaran como recursos o estrategias en la resolución de dichas situaciones: diagramas, argumentaciones lingüísticas, listado de casos, algoritmos combinatorios y el principio fundamental del conteo; y al respecto, encontramos:

Que aunque los problemas incluidos en el cuestionario son del tipo simple, el despliegue del razonamiento combinatorio que muestran los estudiantes es incipiente; lo cual es nuestra base cuando afirmamos que dichos estudiantes tienen un desarrollo pobre de sus capacidades o habilidades combinatorias. Más adelante, otras consideraciones reforzarán esta afirmación.

Otra afirmación general que desprendemos de nuestro estudio, es que el desarrollo de habilidades combinatorias, al inicio del bachillerato, se encuentra en un plano intuitivo-concreto y que, posteriormente, éste tiende a la realización de operaciones que no se acompaña por un sentido personal de significados.

Un primer respaldo para esta afirmación es el que los estudiantes del segundo semestre, muy frecuentemente, recurren a una respuesta intuitiva errónea (19.7% de las respuestas en segundo contra un 8.3% en sexto) y los de sexto semestre recurren a la manipulación numérica de la información dada en el problema (14.3% de las respuestas en sexto contra un 5.7% en segundo).

Por otra parte, si tomamos en cuenta lo que se refiere a la influencia de las distintas variables de tarea, aspecto en el se centró nuestro problema de investigación, el estudio nos permite concluir que, en estudiantes de segundo semestre se observó una mayor atención en lo que respecta al modelo combinatorio implícito en el problema, ya que quienes respondían correctamente, establecieron en sus respuestas la condición impuesta por el modelo. Sin embargo, en estudiantes del sexto semestre esto no se presentó tan frecuentemente, pues las respuestas proporcionadas a las situaciones planteadas privilegian, por lo general, a la selección, como modelo combinatorio implícito, lo cual se justifica, quizá, en el tipo de situaciones a que comúnmente han sido expuestos.

En cuanto al tipo de elementos que se combinan, podemos señalar que se mostró mayor familiaridad en el manejo de situaciones que involucran números. Esto se presentó en ambos semestres, lo que consideramos se puede deber al hecho de que la formación de números lleva implícita la consideración del orden y una notación convencional.

En cambio, en los problemas que involucran objetos o personas, en los que la importancia del orden, de la repetición e incluso de objetos no distinguibles, no es tan evidente. Los resultados obtenidos nos muestran que los estudiantes tienen dificultades para extraer las características relevantes de las situaciones planteadas.

Respecto al tipo de operación combinatoria, cabe destacar que estuvimos especialmente interesados en observar la puesta en juego de esta variable por estudiantes de sexto semestre, por ser el grupo que ha tenido instrucción al respecto. En general, no fueron puestas en juego por los estudiantes de segundo semestre, lo cual era una situación que esperábamos se presentara, mientras que los estudiantes de sexto semestre que emplearon este tipo de recurso, por lo general, tuvieron éxito en su uso.

En este aspecto, cabe destacar que la proporción de estudiantes que recurrieron a alguna operación combinatoria para resolver el problema planteado resultó realmente baja, esto parece indicar, en el caso de los estudiantes del sexto semestre, que la instrucción sobre combinatoria es poco efectiva, al menos en el sentido de que la manera en que los contenidos han sido abordados no consigue la adquisición de un sentido que lleve al sujeto a la puesta en juego de dicha herramienta.

En cuanto a la variable valor de los parámetros, fue notorio cierto control en la manera de abordar las situaciones que involucran valores pequeños en la respuesta, en los estudiantes de ambos semestres. Aunque por otra parte, la ausencia de procedimientos sistemáticos de enumeración, así como la no puesta en juego de recursos icónicos que apoyen su respuesta, resultó ser una limitante que no les permitió descubrir elementos para poder generalizar un procedimiento, lo cual es importante en el manejo de situaciones en las que los valores de los parámetros sean mayores.

Una posible explicación de estos resultados, es el énfasis, que tradicionalmente ponen los profesores en el desarrollo de habilidades de cálculo en los estudiantes, y la poca atención a los aspectos relacionados dejando de lado los aspectos relacionados con la comprensión de las situaciones que pueden originar un determinado contenido. Creemos que esta es una causa del poco desarrollo de habilidades cognitivas en el sujeto, pertinentes para abordar situaciones bajo una estructura matemática equivalente.

Por otra parte, si tomamos en cuenta lo que se refiere al estado de desarrollo cognitivo en que se encuentran los individuos en cuestión, sus reacciones ante las situaciones planteadas no corresponden a lo que señalan Piaget e Inhelder como rasgos característicos de las edades de los individuos sujetos de estudio, lo cual, desde nuestro punto de vista, podría estar relacionado con sus experiencias dentro y fuera de la escuela, en el sentido de que no han favorecido un desarrollo que, de acuerdo a estos investigadores, debiera manifestarse en esas edades.

En esta misma dirección, resultados de Fischbein, muestran que la capacidad para resolver problemas combinatorios no siempre se alcanza sin una instrucción específica y pertinente. A partir de nuestro estudio, puede confirmarse este señalamiento, pues los resultados obtenidos muestran que, en general, no hay una mejora en las respuestas de los estudiantes que han recibido instrucción, lo que pudiera ser una manifestación de que la instrucción recibida no ha sido eficaz en el desarrollo de intuiciones que apoyen la resolución de las situaciones planteadas.

Además, hemos obtenido evidencias de que las intuiciones primarias correctas que han desarrollado los estudiantes, lejos de fortalecerse, se desechan dando lugar a la aparición de nuevas intuiciones que, en muchas ocasiones, resultan incorrectas.

En cuanto a la lista de ideas fundamentales propuesta por Heitele, la combinatoria aparece como una de las ideas que son necesarias en el desarrollo de estocásticos. En este sentido, vemos que, a pesar de que las situaciones planteadas a los estudiantes son en alguna forma elementales, el desenvolvimiento que muestran en el manejo de estas ideas es, en general, limitado y por tanto es de esperarse que aquellos aspectos en los esta herramienta resulta fundamental, no puedan ser conceptualizados convenientemente.

Más particularmente, Heitele señala al manejo del diagrama de árbol, como un recurso de importancia fundamental dentro de la combinatoria, por suministrar de una manera sencilla, una entrada a la estructura interior de los experimentos aleatorios y al encadenamiento de experimentos sucesivos dentro de un complejo más grande.

Sin embargo, en nuestro estudio, de un semestre a otro se observa un aumento en el uso del diagrama de árbol como un recurso que permite abordar la situación planteada, pero aparece un uso erróneo más frecuente en estudiantes de sexto semestre. Estos resultados fortalecen aún más nuestra afirmación inicial en torno de que, a partir de nuestro estudio, encontramos un desarrollo pobre de capacidades combinatorias en estudiantes de bachillerato.

Una comparación global de los resultados obtenidos en nuestro estudio con los que, en esta dirección, son reportados por Navarro-Pelayo (1996), nos indican una diferencia importante en los resultados obtenidos en un subconjunto de problemas, en cuanto a los alumnos con instrucción, y sin instrucción lo que fundamentalmente atribuimos a esfuerzos educativos distintos.

En este aspecto, en nuestro estudio obtuvimos una diferencia de 8.84% en los índices de respuestas correctas en alumnos con instrucción y sin instrucción para el problema uno, mientras que en el caso de la investigación citada, se reporta un índice del 38%, presentándose, al igual que en nuestro estudio, un índice muy bajo de respuestas correctas en alumnos sin instrucción.

Una situación similar ocurre en los problemas tres y cuatro, aunque en nuestro caso, en el problema tres obtuvimos un índice de respuestas correctas mayor en el caso de alumnos sin instrucción, dando una diferencia de –6.76% , comparado con un 6.9% obtenido en el caso de las investigaciones de referencia. En el problema cuatro, la diferencia en nuestro caso fue de 22.21% y en ellos de 46.6%.

En cambio, en el problema cinco, los índices de respuestas correctas fueron menos contrastantes. El problema seis, se destaca, tanto en sus investigaciones como en las nuestras, por ser en el que se obtuvo un índice mayor en las respuestas correctas, en ambos tipos de estudiantes. Para este último caso, cabe señalar que los porcentajes de respuestas correctas en sus investigaciones son de alrededor del 80%, mientras que en nuestro caso, apenas rebasan el 50%.

Por otra parte, al tomar en cuenta lo obtenido en cuanto a la presencia de errores, tomamos de entrada la clasificación de errores propuesta en dichos trabajos, dándole una interpretación propia, a través de lo observado en el pilotaje previo a la parte experimental del trabajo. Esto nos permitió incluir una categoría adicional, que concentra un error que, desde nuestro punto de vista merece ser registrado, sobre todo por sus implicaciones en las comprensiones de los sujetos.

Con relación a los resultados obtenidos en nuestro estudio, cabe señalar que una coincidencia en cuanto a la presencia de errores, se presentó en el caso del error de enumeración no sistemática, cuyo índice de aparición disminuye después de la instrucción, pero a cambio se concentran los errores como en el orden y en la repetición. Un detalle adicional, se refiere a que, en nuestro caso, no tuvimos la presencia del error de fórmula, lo cual si se destaca en las investigaciones antes citadas.

Para concluir este apartado, relativo a las investigaciones de Navarro-Pelayo, debemos destacar que un aspecto importante que hemos contemplado en nuestro trabajo, fue llevar a cabo una clasificación de las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes que respondieron correctamente, lo cual es un distintivo más con la investigación antes citada.

Implicaciones Educativas

Consideramos que los resultados aquí obtenidos deben tomarse en cuenta en el diseño y planeación de los planes y programas de estudio del nivel medio. Por una parte, mientras que en el nivel básico, se promueve el tratamiento de las ideas relacionadas con Probabilidad y la Estadística como parte de la formación de un estudiante de este nivel, en el siguiente nivel educativo, no hay garantía de una continuidad en el tratamiento de estas ideas, lo que representa una desventaja para los individuos, en la incorporación de este tipo de elementos en el análisis de fenómenos, donde estas ideas constituyen una herramienta básica.

En esta dirección, debe tenerse presente que los contenidos combinatorios constituyen una herramienta importante, cuyo uso no se restringe a la Probabilidad, pero que, en este campo en particular, tales contenidos tienen un impacto relevante por su implicación en la adquisición, por parte de los individuos, de los elementos primarios del mismo: la noción de azar y el concepto de probabilidad.

En este sentido, consideramos que una propuesta curricular, que incluya contenidos combinatorios, debe dar mayor atención a los aspectos cualitativos que incorporan estas ideas y no limitarse al aspecto operativo que estos contenidos implican. También consideramos pertinente la incorporación curricular del estudio de situaciones que cubran los tres modelos combinatorios básicos.

Otro aspecto importante en este punto, es la ausencia que en este nivel tiene (e inclusive en el nivel superior) el concepto de combinaciones con repetición, una situación que se origina de manera directa al considerar uno de los casos en el modelo de selección y que actualmente no es contemplado, a pesar de ser este el modelo que impera en la enseñanza.

Desde luego que en esta serie de recomendaciones se toma en cuenta que, al ser llevadas al aula, se requiere que el profesor asuma un rol distinto al tradicional, pues, consideramos fundamental, como parte del aprendizaje, que el estudiante tenga un papel activo en ese proceso. Esto implica, para el profesor, un reto en el diseño de situaciones didácticas tendientes a lograr una fuerte relación entre el sujeto que aprende y el contenido matemático que interesa sea adquirido como producto de esa interacción.

Lo anterior reclama de un profesor con una formación conveniente tanto en los aspectos propios de la disciplina como en los aspectos didácticos que respondan a los retos antes mencionados. Esto se manifiesta como una necesidad en todos los niveles educativos y particularmente en el nivel al que enfocamos nuestro estudio.

Además, tomando en consideración resultados del ámbito cognitivo, encontramos que la combinatoria resulta ser una componente importante del pensamiento formal que se va desarrollando en el individuo paralelamente a otras ideas como la proporcionalidad, pero que, como muestra nuestro estudio, este desarrollo no se da de manera espontánea. De aquí la importancia del papel que juega la instrucción en la evolución de estas ideas por parte del individuo.

En nuestros resultados, podemos ver que la enumeración sobresale tanto en quienes respondieron correctamente, como en quienes dieron respuestas erróneas, lo que consideramos pone a la enumeración en un lugar privilegiado como estrategia base a través de la cual los individuos intentan solventar situaciones problemáticas que enfrentan. Esta observación puede ser de interés didáctico, pues nos señala la necesidad de promover en los estudiantes, la realización de actividades encaminadas al descubrimiento de formas sistemáticas de enumeración, tanto si consideramos a esta como estrategia de resolución de problemas, como si la asumimos como un paso previo a la obtención de expresiones generales, que puedan ser utilizadas para abordar situaciones en las que esta herramienta resulta insuficiente.

Asimismo, consideramos que el empleo de esta estrategia en la enseñanza, debe ser acompañada del uso de otros recursos como el diagrama de árbol e inclusive, de formas alternativas que los propios sujetos pongan en juego y que puedan dar pie a discusiones que les permitan establecer comparaciones entre las diferentes estrategias, y dar lugar a la aparición de otros recursos, como puede ser el tratamiento de estas situaciones desde un plano formal.

Alcances, limitaciones y Perspectivas de Investigación

Es importante tener presente que los fines del trabajo fueron sobretodo de tipo exploratorio. Nuestro principal propósito fue la indagación del estado del razonamiento combinatorio en estudiantes de bachillerato y en este sentido, consideramos haber obtenido información suficiente y valiosa, la cual creemos refleja de manera muy próxima, el estado real del razonamiento combinatorio, no sólo en los estudiantes del escenario de estudio tomado en consideración, sino en general, en todo el bachillerato.

A pesar del carácter exploratorio de nuestra investigación consideramos que pudimos haber obtenido mayor información sobre el desarrollo de las capacidades combinatorias de los estudiantes, si hubiéramos incluido, en nuestra metodología, la entrevista con los estudiantes, lo cual pudo haber respaldado la interpretación dada a las respuestas de los estudiantes. No obstante puede plantearse como una posibilidad para la realización de un estudio a futuro que incorpore a la entrevista como un medio para obtener información que complemente el análisis de las respuestas proporcionadas por escrito.

Como puede observarse, en nuestra investigación sólo contemplamos un número restringido de problemas que consideramos constituía una muestra representativa de las posibles combinaciones de las variables de tarea en cuestión. Aún cuando de cualquier modo el muestreo de situaciones es necesario, el ser personas ajenas a la institución, escenario del estudio, limita los tiempos de aplicación de cuestionarios y por ende el número de reactivos. Por tal motivo, consideramos factible la realización de una investigación, en la que se pongan en juego un número mayor de problemas que permita ampliar la puesta en juego de las variables de tarea de interés.

Es importante recordar que la información que hemos considerado, en lo que a aspectos curriculares se refiere, corresponde a los documentos oficiales de las instituciones de interés. En este sentido, resulta interesante plantearse una investigación en la que se tome en cuenta a los profesores de los distintos niveles, con la pretensión de observar lo que realmente sucede en el tratamiento de ideas en el aula, lo cual se puede llevar a cabo en varias formas. Una de ellas podría ser la observación directa en el aula o bien realizando entrevistas con profesores que agreguen información en tal dirección.

Esto último, creemos debe llevarse a cabo, no sólo en el nivel en el que abordamos la investigación, sino también en el nivel básico, sobre todo con la intención de observar cómo se lleva a cabo la propuesta curricular vigente y especialmente, tener información de como se integran los contenidos de interés con el resto.

Aquí, una cuestión particular de interés es el estudio de las formas de enumeración que, como estrategia de resolución utilizan los individuos, lo cual creemos puede atenderse tomando en consideración las edades de los sujetos.

Otra posibilidad que se vislumbra, a partir de la investigación realizada, es la de concentrarse en el nivel superior e indagar acerca del desempeño de los estudiantes en los cursos que incluyen estos tópicos. Una opción, para obtener información, puede ser el someter a prueba el cuestionario usado en la presente investigación y, a partir de la información obtenida, incorporar nuevos problemas en los que podrían incluirse, de acuerdo a la licenciatura seleccionada, problemas combinatorios compuestos.

Un estudio adicional de los libros de texto que incorporan estas ideas es una opción interesante de llevar a cabo. En este sentido resulta importante conocer aspectos que van desde la forma en que inician el estudio de estos contenidos incluyendo el tipo de situaciones que se presentan, notaciones, etc., hasta, observar el papel que juegan las distintas variables de tarea que hemos considerado en nuestro problema de investigación, por ejemplo el modelo combinatorio implícito.

Otro aspecto que también se podría observar es el cómo están integradas las ideas fundamentales propuestas por Heitele, tanto en programas y textos como en las prácticas educativas realmente implementadas.

Consideramos que estas opciones nos proporcionarían información importante, que deben tenerse presentes en el diseño de estrategias didácticas que luego, al llevarse al aula, darían pie a nuevas investigaciones para observar los efectos de la puesta en escena de dichas estrategias y con ello continuar ampliando la visión de esta problemática.

Finalmente, consideramos que los objetivos que inicialmente nos hemos propuesto, han sido cubiertos, aunque estamos convencidos de que la problemática en cuestión continúa abierta a nuevos esfuerzos de investigación que permitan incorporar nuevas visiones y resultados en relación con la problemática de interés.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahlgren, A.; Garfield, J.:1988, "Difficults in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research". *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 19, No. 1, págs. 44-63, Minesota University, U.S.A.

Alarcón, J.;Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T.; Quintero, R.: 1994, *Libro para el Maestro*. SEP, México.

Amavizca, R.; Durazo, A.; León, E.; Miranda, J.: 1994, *Matemáticas IV: Carta Descriptiva y Cuaderno Básico de Aprendizaje*. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, Hermosillo, México

Dubois, J.G.:1984, "Une systématique des configurations combinatoires simples". *Educational Studies in Mathematics*, v.15, n. 1, pp. 37-57

Feller, W.:1988, *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. Editorial Limusa, México.

Fischbein, E.:1975, *Tue intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Reidel Publisching Company, Dorcrecht, Holland.

Fischbein, E.; Gazit, A. ; 1988, "The combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescents", *Zentralblatt für Didaktitk der Mathematik* 5, 193-198.

Flavell, John H.:1995, *La psicología evolutiva de Jean Piaget*. Editorial Paidós Mexicana. México.

Godino, J.D; Batanero, M.C.; Cañizares, M.J.: 1987, *Azar y probabilidad: Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis, Madrid, España.

Goldin, G.A.; McClintock, C.E.:1984: *Task variables in Mathematical Problem Solving*. The Frankling Institute Press, USA.

Hadar, N; Hadass, R.:1981, "The Road solving a combinatorial problem is strew with pitfalls".
Educational Studies in Mathematics, No.12, págs. 435-443. D. Reidel Publishing Co. Dordrecht, Holland, and Boston, U.S.A.

Heitele,D.: 1975, "An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas". *Educational Studies in Mathematics*, No. 6, págs. 187-205. Reidel Pub. Co. , Dordrecht, Holland.

Hugues, E., Gutiérrez, G., Armenta, M., Urrea, M.A.: 2002, *Caracterización de dificultades, obstáculos y comprensiones que se presentan a la educación en ideas básicas de probabilidad y estadística en los niveles medio superior y superior*. Reporte de Investigación, Sistema de Investigación del Mar de Cortés, México.

Maistrov, L.E.:1967, *Probability Theory a Historical Sketch*. Academic Press, New York, U.S.A

Mateos, C.: 1997, *Curriculum del Bachillerato General: Fundamentos*. Dirección General del Bachillerato, Serie: Información Básica, SEP, México.

Navarro-Pelayo, Virginia; Batanero, Carmen; Godino, J.D. 1996: "Razonamiento Combinatorio en estudiantes de Secundaria". *Educación Matemática*, 8(1), 26-39.

Piaget, J.; Inhelder, B.: 1975, *The origin of the idea of chance in children*. Norton, New York, U.S.A.

Roa, G.R.; 2000: *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, España.

SEP: 1994: Libros de Texto del Nivel Básico.

ANEXOS

ANEXO 1

Resultados porcentuales por Semestre:

Plantel	Magdalena			Obregón 1			Reforma			Ernesto López R.		
Problema No.	✓	✘	SR	✓	✘	SR	✓	✘	SR	✓	✘	SR
1	4.7	95.3	0	2.0	98.0	0	0	100	0	6.0	94.0	0
2	2.3	79.1	18.6	8.2	83.7	8.2	4.9	82.9	12.2	6.0	87.9	6.1
3	34.9	65.1	0	44.9	53.1	2.0	41.5	58.5	0	45.4	54.6	0
4	11.6	81.4	6.9	6.1	91.8	2.0	7.3	92.7	0	15.2	81.8	3.0
5	27.91	69.77	2.3	24.5	71.4	4.1	14.6	82.9	2.4	21.2	72.7	6.0
6	60.5	32.6	6.9	49.0	44.9	6.1	48.9	46.3	4.9	48.5	42.4	9.1

Tabla A.1 Clasificación por plantel de respuestas de estudiantes de Segundo Semestre

Plantel Problema No.	Magdalena			Obregón 1			Reforma			Ernesto López R.		
	✓	✘	SR	✓	✘	SR	✓	✘	SR	✓	✘	SR
1	10.7	89.3	0	16.3	79.1	4.6	6.9	93.1	0	14.3	85.7	0
2	3.6	89.3	7.1	25.6	62.8	11.6	0	93.1	6.9	14.3	65.7	20.0
3	21.4	78.6	0	44.2	55.8	0	27.6	72.4	0	40.0	57.1	2.9
4	21.4	78.6	0	44.2	46.5	9.3	37.9	62.1	0	20.0	68.6	11.4
5	14.3	82.1	3.6	46.5	53.5	0	6.9	86.2	6.9	17.1	77.1	5.7
6	42.9	57.1	0	79.1	18.6	2.3	68.97	27.59	3.4	57.1	31.4	11.4

Tabla A.2 Clasificación por plantel de respuestas de estudiantes de Sexto Semestre

ANEXO 2

CUESTIONARIOS SOBRE RAZONAMIENTO COMBINATORIO

CUESTIONARIO 1

1. Cuatro jóvenes son enviados al director del colegio por alborotar en la case. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego!
Supongamos que se llaman Andrés, Benito, Carlos y Daniel, pero los designaremos brevemente como A, B, C y D. Se desea escribir todos los órdenes posibles en que podrían alinearse.
Por ejemplo: para el orden

A	B	C	D
1°	2°	3°	4°

escribiremos ABCD. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

RESPUESTA: ____

2. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una trás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas modos diferentes se puede hacer la selección de las mismas? Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

3. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

4. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

5. En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número *724*.

6. Cuatro niños Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder alojar los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

CUESTIONARIO 2

1. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

2. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

3. El garaje de Angel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Angel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Angel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Angel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

4. María y Carmen tienen cuatro cromos numerados de 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los cromos 3 y 4.

5. En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

6. Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C y C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera? Ejemplo: Pueden estar colocadas de la siguiente forma ACBCC.

7. Se quiere elegir un comité formado por tres miembros, presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?
Ejemplo: que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

CUESTIONARIO 3

1. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

2. En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número *724*.

3. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

4. El garaje de Angel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Angel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Angel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Angel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

5. María y Carmen tienen cuatro cromos numerados de 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los cromos 3 y 4.

6. En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

CUESTIONARIO 4

1. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una trás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas modos diferentes se puede hacer la selección de las mismas? Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

2. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

3. Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuantas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas, con la condición de que siempre estén alineadas las tres figuras? Ejemplo: sota, caballo, rey, 1.

4. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

5. Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos). Ejemplo 88124.

6. Cuatro niños Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder alojar los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

CUESTIONARIO 5

1. Una muchacha tiene tres blusas y dos faldas. Suponiendo que ella acepta cualquier combinación de estas prendas, cuantas combinaciones de falda y blusa puede formar?

2. ¿De cuántas maneras se puede asignar una tarea de tres problemas si se dispone de una lista de cinco problemas?

3. Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuantas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas, con la condición de que siempre estén alineadas las tres figuras? Ejemplo: sota, caballo, rey, 1.

4. Si en una estación televisora se deben seleccionar cuatro de entre seis programas de media hora, para emitirlos cada mañana de 8:30 a 10:30. ¿De cuántas formas posibles puede arreglarse la programación?

5. Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos). Ejemplo 88124.

6. Dos libros de Matemáticas y tres de Física, diferentes entre sí, van a ser colocados en un librero. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer esto si los libros de cada asignatura deben estar juntos?

7. Considérense todos lo enteros positivos de tres dígitos diferentes (el cero no puede ser el primer dígito). ¿Cuántos son mayores de 700?

CUESTIONARIO 6

1. Cuatro jóvenes son enviados al director del colegio por alborotar en la case. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego!
Supongamos que se llaman Andrés, Benito, Carlos y Daniel, pero los designaremos brevemente como A, B, C y D. Se desea escribir todos los órdenes posibles en que podrían alinearse.

Por ejemplo: para el orden

A	B	C	D
1°	2°	3°	4°

escribiremos ABCD. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

RESPUESTA: ____

2. María y Carmen tienen cuatro cromos numerados de 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una)., De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los cromos 3 y 4.

3. En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número *724*.

4. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

5. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

6. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

CUESTIONARIO 7

1. Cuatro jóvenes son enviados al director del colegio por alborotar en la case. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego!
Supongamos que se llaman Andrés, Benito, Carlos y Daniel, pero los designaremos brevemente como A, B, C y D. Se desea escribir todos los órdenes posibles en que podrían alinearse.
Por ejemplo: para el orden

A	B	C	D
1°	2°	3°	4°

escribiremos ABCD. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

RESPUESTA: ____

2. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

3. En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número *724*.

4. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

5. En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

6. Cuatro niños Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder alojar los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

ANEXO 3

CUESTIONARIO DEFINITIVO

1. El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

2. ¿De cuántas maneras se puede asignar una tarea de tres problemas si se dispone de una lista de cinco problemas? Ejemplo: Se pueden seleccionar los problemas impares.

3. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

4. En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

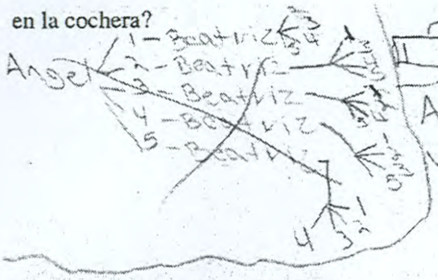
5. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

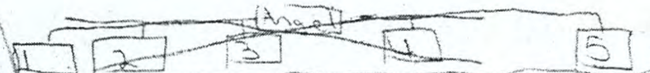
6. En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número *724*.

ANEXO 4
RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES SEGUNDO SEMESTRE

Problema No. 1

en la cochera?





Angel tiene 5 formas al escoger una le queden 4 a Beatriz y cuando esta escoja uno quedaron 3 a Carmen por lo que!

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Son 60 formas Posibles

---

en la cochera?

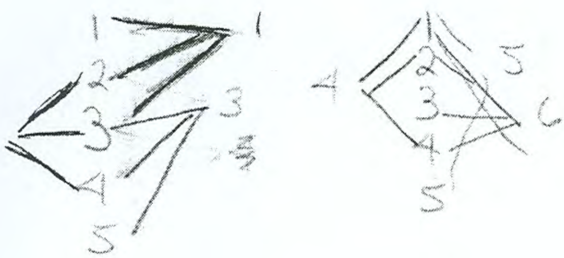
7 formas pero todavia faltan más formas de como se pueden acomodar en los aparcamientos.

Ejemplos

1.- Ángel 1 Beatriz 2 Carmen 3
2.- Ángel 2 Beatriz 1 Carmen 3
3.- Ángel 2 Beatriz 3 Carmen 1
4.- Ángel 3 Beatriz 2 Carmen 4
5.- Ángel 3 Beatriz 4 Carmen 2
6.- Ángel 4 Beatriz 5 Carmen 2
7.- Ángel 5 Beatriz 2 Carmen 5

Problema No. 2

problemas? Ejemplo: Se pueden seleccionar los problemas impares. 10 maneras porque 1 los impares, 2 los 3 primeros, 3 los 3 ultimos, 4 los 3 de enmedio, 5 los Problemas 2 - 1-5, 6 los Problemas 2-4-5 7 los problemas 1-4-3, 8 los Problemas 1-5-4, 9 los Problemas 2-44, 10 Los problemas 2-3-5



123 134 345
124 135
125 145 De 9 manera
234 245

Problema No. 3

... el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

T. Matematicas	T. Lengua
Andres y Benito	Clara y Daniel
Andres y clara	Benito y Daniel
Andres y Daniel	Clara y Benito
Benito y Daniel	Clara y Andres
Benito y Clara	Benito y Andres
Clara y Daniel	Daniel y Andres

R= se pueden dividir en 6 formas.

1 [illegible] = L[illegible]
2 [illegible] = Matematicas
3 Andres [illegible] = Matematicas
4 Dan[illegible] = Lengua
5 [illegible]

Problema No. 4

222 272
224 274
227 277
229 279
248 292
294 294
297 297
249 299

P6X
4
64

12X
3
36

64 posibles formas

5. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes ...

su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede formar el número

24 Porque al estar juntando uno por uno obtendremos esta cifra q' son las maneras diferentes de juntarlas, ademas

4 shif $\boxed{\overset{n!}{cc}}$ = 24 por la funcion

Problema No. 5

Amarillo	Blanco	Crema	Rojo
1	1	1	M
1	1	M	1
1	M	1	1
M	1	1	1

sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

32 Formas

amarillo, crema y dorado
amarillo, dorado y blanco
amarillo, blanco y crema
amarillo, dorado y crema ... etc.

Problema No. 6

Se pueden obtener 6 distintos.

Al sacar un número, solo quedan 2 números en la urna y solo 2 combinaciones distintas pero al ser 3 números distintos, son 3 pares de combinaciones, por lo que resultan las 6 distintas.

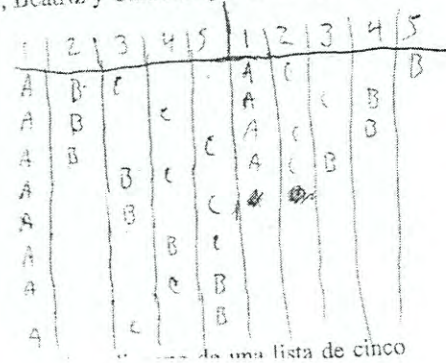
222
247
274
444
427
472
777
742
724

R= 9 números de 3 cifras

RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES SEXTO SEMESTRE

Problema No. 1

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcam... Beatriz y Carmen aparcar sus coches
Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches
en la cochera? De 60 formas distintas



... de una lista de cinco

Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches
en la cochera?

1 Angel, beatriz, carmen
2 Angel, Carmen, beatriz
3 Beatriz, Angel, Carmen
4 beatriz, carmen y angel
5 Carmen, beatriz, Angel
6 Carmen, Angel, beatriz

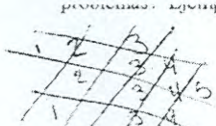
10 veces

por que se hacen combinaciones de 5C3

... de tres problemas si se dispone de una lista de cinco

Problema No. 2

problemas? Ejemplo: se pueden seleccionar los problemas impares.



Serian 10 formas diferentes de aplicar esas 3 problemas elegidos en grupos de 5 problemas

1 2 3 | 2 3 4 | 3 4 5
1 2 4 | 2 3 5
1 2 5 | 2 4 5
1 3 4
1 3 5
1 4 5

Seguí todas las combinaciones posibles de estos 5 problemas pero solo escogiendo 3 problemas sin repetir la combinación problemas? Ejemplo: Se pueden seleccionar los problemas impares.

152, 153, 154
123, 124, 125, 132, 134, 135, 142, 143, 145,
251, 253, 254
213, 214, 215, 231, 234, 235, 241, 243, 245.
351, 352, 354,
312, 314, 315, 321, 324, 325, 341, 342, 345,
4
5

1
12
5
60

60 formas diferentes

Problema No. 3

Lengua: AB, AC, AD, BC, BD, CD

Mat. : CD, BD, BC, AD, AC, AB

De 6 formas distintas

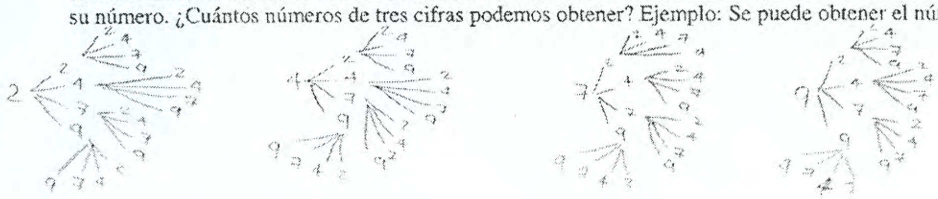
Andrés - Benito → Mat
Clara - Daniel → Lengua
Andrés - Benito → ~~Mat~~ Lengua
Clara - Daniel → Mat
Andrés - Daniel → Mat
Clara - Benito → Lengua
Andrés - Daniel → Lengua
Clara - Benito → Mat

Andrés - Clara → Mat
Benito - Daniel → Lengua
Andrés - Clara → Lengua
Benito - Daniel → Mat

R= 12 formas diferentes.

Problema No. 4

número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.



Se pueden obtener 64 números de 3 cifras

$(2)^3 = 8$

$(4)^3 = 84$

$(7)^3 = 147$

$(9)^3 = 179$

490

21
7
147

81
9
179

18
14
32
17
64

... Deseamos colocarlos en cuatro sobres de diferentes colores:

Problema No. 5

$C_3^4 = 9$ FORMAS

sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

$C^3_4 = 36$ formas.

Problema No. 6

podemos obtener? Ejemplo: el número 724.

$3! = 6$

$3! + 2! + 1! = 9$ Se pueden obtener 9 números