UNIVERSIDAD DE SONORA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

"Las nociones de Isometría y Simetría en el plano, estudiadas a través del Modelo de Van Hiele, enriquecido con principios Constructivistas"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

María Mercedes Chacara Montes

Director de Tesis: M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro

Hermosillo, sonora **Mayo de 2004**

COMITÉ REVISOR Y JURADO

M.C. Martha Cristina Villalba y Gutiérrez

Dr. Pedro Pérez Carreras

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Dr. José Luis Soto Munguía

M.C Jorge Ruperto Vargas Castro

CONTENIDO

I N T R O D U C C I Ó N

De la matemática se dice que es la "Reina de las ciencias"; y lo que hace que ella misma sea una ciencia es el hecho de poder dar una fundamentación rigurosa de lo que se afirma mediante su criterio propio de prueba basada, no en la experimentación, sino en las reglas de la lógica formal, por lo cual se le ubica entre las llamadas ciencias formales. Cuando el profesor trata de propiciar que un estudiante aprenda matemáticas, se enfrenta ante la disyuntiva de usar o no la demostración, o al menos en la difícil decisión de escoger el grado de rigor con que ha de presentarse la demostración de un teorema.

Un hecho conocido que la experiencia docente nos proporciona ante esta situación es que se dan los casos extremos que van desde los profesores que deciden omitir por completo todo tipo de demostración, corriendo el riesgo de limitar la posibilidad de desarrollo del pensamiento crítico que la matemática tiene la capacidad de propiciar; reduciendo la enseñanza a un mero recetario de reglas prácticas; hasta los profesores que hacen uso excesivo y extremadamente formal de los procesos de demostración, convirtiendo a la matemática en algo tedioso y por tanto rechazado por los estudiantes; limitando así la posibilidad de desarrollo de la creatividad y espontaneidad que la matemática tiene capacidad de desarrollar.

La geometría en particular siempre ha estado asociada al desarrollo del pensamiento y a la actividad creadora del hombre, expresada mediante las grandes obras artísticas y científicas. A través de ella se adquiere un sentido axiomático, el cual constituye la esencia de toda la matemática; se adquiere la habilidad de analizar un problema nuevo y diferenciar sus partes esenciales aplicando el razonamiento lógico, se aprende a apreciar la belleza de las formas geométricas que abundan tanto en las creaciones del hombre (Pintura, escultura, arquitectura, música, etc.) como de la naturaleza (por ejemplo en la cristalografía).

Es por ello que es importante retomar la geometría en los trabajos de investigación. En este trabajo en particular, se propicia un desarrollo gradual del pensamiento geométrico en el tópico de las transformaciones geométricas del plano, partiendo de actividades muy concretas y específicas relativas a la reflexión con respecto a un eje, avanzando paso a paso hasta abordar los demás tipos de isometrías y con la ayuda de teselaciones artísticas hechas por Escher, adquirir la noción general de simetría en el plano y pasar después al conocimiento de otro tipo de transformaciones no isométricas que, mediante la adquisición casi experimental de la noción de grupo, permite entender el programa de Erlangen de la clasificación de las geometrías mediante el estudio de invariantes bajo grupo de transformaciones en el plano.

En esta introducción, hasta ahora, se ha hecho énfasis en el estilo de contenido disciplinario a desarrollar, ya que en sí implica un replanteamiento didáctico, sin embargo, para introducirnos a este trabajo como una investigación en Matemática Educativa, describimos a continuación el esquema a desarrollar en el mismo:

Introducción: Este es el apartado en el cual nos encontramos, en el que se hace una descripción y ubicación general del trabajo.

Antecedentes: Aquí se explica cómo surgió la idea de hacer este trabajo.

Objetivo, hipótesis y planteamiento del problema: Como su nombre lo indica, aquí se define el problema a investigar, se menciona la hipótesis y se describe lo que se busca al intentar resolver dicho problema.

En el **Capitulo I** se describe el marco referencial, en este trabajo este marco se divide en dos niveles: **El marco referencial contextual y el marco**

referencial global, en el primero se da la ubicación y contexto al problema que se aborda en este trabajo. El trabajo se desarrolla en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. Se hace notar la importancia de la Geometría en la Licenciatura en Matemáticas. En el segundo se analizan algunos trabajos afines a ésta investigación, y así se tiene un referente con respecto a lo que en otras partes del mundo se hace con respecto a este tema y en particular en nivel universitario.

En el **Capitulo II** se describe el marco teórico; basado en el modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo, en el cual se propicia el desarrollo del pensamiento geométrico desde los niveles más elementales hasta los más abstractos, sin necesidad de hacer uso de tediosas demostraciones (esto no significa abandonar la demostración), sino abordarlas a través de una postura gradual y atractiva. Este consta de 5 niveles con sus respectivas fases. El modelo ha sido ya implementado con el enfoque tradicional, donde el maestro ocupa el lugar central como expositor. La diferencia en este trabajo consiste en propiciar el logro de los distintos niveles y sus fases mediante la realización de actividades diseñadas con un proceso constructivista donde el estudiante ocupa el lugar central.

En el **Capítulo III**, se presenta la metodología mediante la cual se pretende resolver el problema planteado, dentro de las restricciones de los marcos teóricos y referenciales dados; se presenta el diseño de situaciones en el aula que involucran al sujeto de estudio en la dinámica del desarrollo del pensamiento y razonamiento geométrico; se propone la observación y el análisis mediante el estudio de casos, llevando un récord individual de cómo desarrollan y como construyen dicho pensamiento a través de los instrumentos diseñados para tal fin (Hojas de trabajo).

El **Capítulo IV** es propiamente el desarrollo y análisis de la investigación, se presentan las actividades aplicadas a los estudiantes, mediante las cuales se pretende pasar de un nivel a otro de forma gradual, desde etapas algo entretenidas, avanzando el nivel de rigor hasta llegar a altos niveles de formalización y generalización para el nivel superior. Se presentan los resultados observados a partir de dichas actividades. Además muestra las observaciones y reflexiones propias que se obtuvieron al analizar las actividades aplicadas a los estudiantes.

ANTECEDENTES

La idea de este trabajo de investigación surgió a raíz de un trabajo de un curso de la maestría donde, como trabajo final, se tenía que entregar un video, el cual por sugerencia de nuestro director (de este video), el profesor Jorge Ruperto Vargas Castro, lo titulamos "SIMETRÍA", el tocar este tema nos hizo reflexionar muchos puntos como: en qué marco teórico nos íbamos a basar, qué material didáctico se iba a utilizar, hasta dónde se iba a tocar el tema, a quién queríamos llegar con este material, etc. El video es un material que toca el tema de manera sencilla hasta llegar a formalizar el concepto de simetría. Después de terminado el trabajo, nos quedamos con la inquietud de hacer un trabajo más elaborado y averiguar qué tanto "avance" podría haber en los estudiantes al ser tratados de cierta manera con el mismo material didáctico que fue utilizado en el video, haciéndolo por etapas, de ahí que a la postre esto nos llevó, previa documentación adicional, a elegir el uso de modelo de Van-Hiele con las complementaciones explicadas en el marco teórico de este trabajo.

Al investigar qué trabajos se habían hecho teniendo como marco teórico el modelo de Van Hiele, nos encontramos con los trabajos del Dr. Ángel Gutiérrez que hace uso del Modelo pero en los niveles básicos. En particular uno de sus trabajos nos inspiró y nos dio una idea de cómo organizar el nuestro.

En el video se utilizaron algunos prototipos didácticos (como el papel carbón, el uso del vidrio reflecta, etc.), así como software de Geometría Dinámica, los cuales se utilizaron en este experimento.

Haciendo uso del vidrio reflecta, se abordó el tema de simetría espacial, sobre el cual, el mismo profesor Vargas al participar en algunos diplomados en otras unidades de la Universidad de Sonora, escribió algo al respecto y presentamos a continuación una parte de ese material que será de referencia obligada cuando describamos la hoja de trabajo #5.

SIMETRÍA ESPACIAL:

Frecuentemente, cuando hablamos de simetría axial, comparamos al eje de simetría con un espejo, tan es así que a dicha transformación geométrica se le conoce con el nombre de reflexión; en el software que en Español se llama "Geómetra", cuando a una línea se le quiere elegir como eje de simetría, la operación se llama "Marcar como espejo", pero estrictamente hablando, un espejo no puede ser una línea en un plano, sino algo cercano a un plano en el espacio.

Raro es que si tanto se compara a la simetría axial con un espejo, no se traslade el estudio de dicha simetría al espacio, pero con respecto a un plano en vez de una recta, y que dicho plano se represente precisamente por un espejo delgado.

Una de las ventajas de poder estudiar la simetría espacial con respecto a un plano, sería que, dado que la simetría es una transformación isométrica, la imagen simétrica con respecto a un plano (Espejo) es congruente al objeto original (Figura plana o tridimensional); una aplicación del estudio de la congruencia de figuras espaciales la presentaremos un poco mas adelante.

Una de las limitantes de que el plano de reflexión sea un espejo convencional es que sucede el efecto del "gatito", con el cual me refiero a ese hecho que todos hemos observado consistente en cuando un gatito, en su curiosidad característica, se acerca a un espejo; intenta tocar con su manita al "otro gatito" que está detrás del espejo y al no lograrlo camina hasta el borde del espejo, intentando encontrarse con dicho "otro gato" que lo sigue, descubriendo que detrás del espejo hay solo oscuridad. Este carácter opaco del espejo convencional es lo que provoca grandes limitantes en nuestro estudio de la simetría espacial y sus propiedades.

Diseño alternativo:

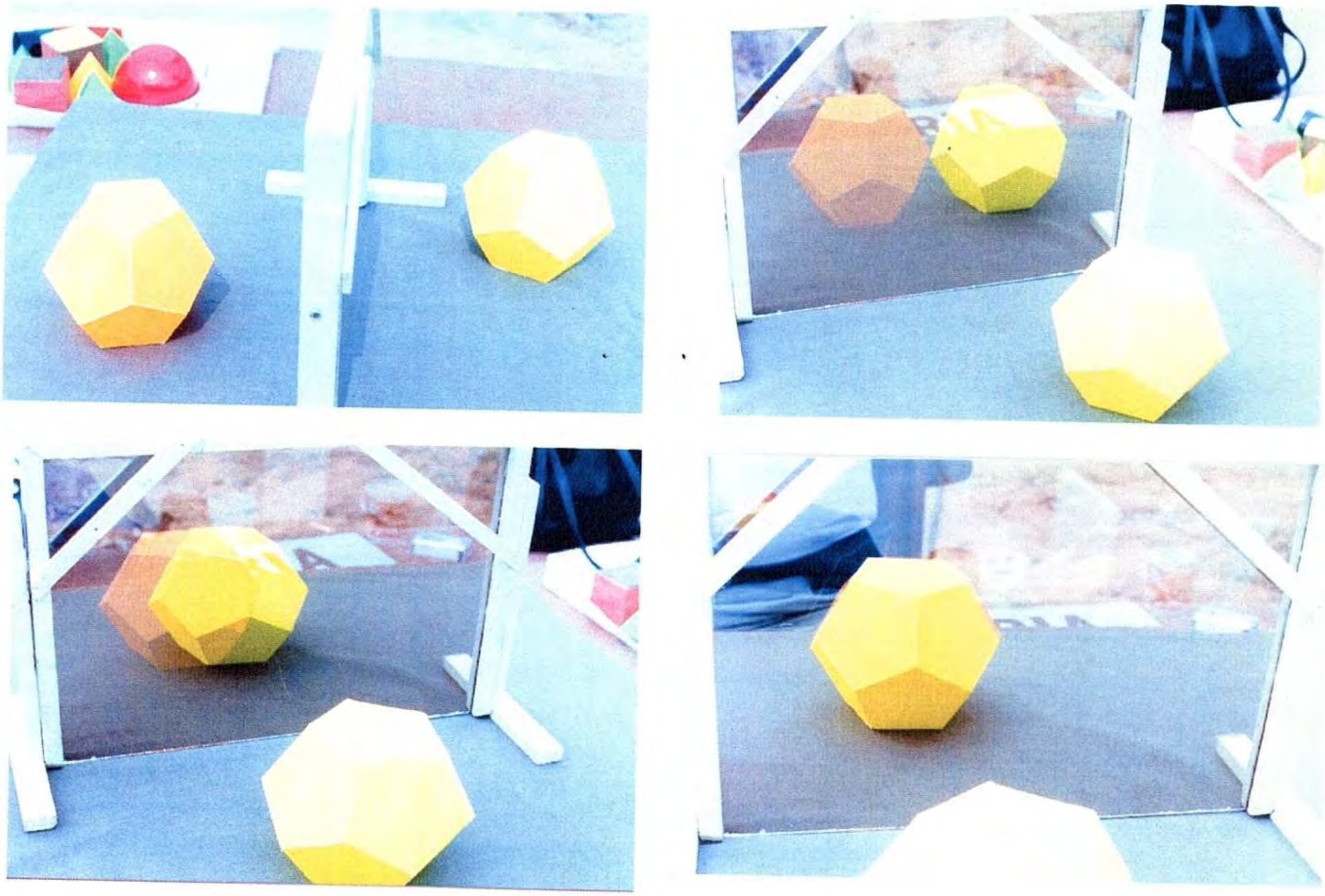
Para, de alguna manera subsanar las limitantes que para el estudio de la simetría espacial nos presenta un espejo opaco convencional ("Efecto del gatito"), se adquirió y se enmarcó una pieza de vidrio que comercialmente se le conoce como "vidrio reflecta", dotándolo de un aditamento (patas), que lo sostenga verticalmente. Este vidrio tiene la propiedad, como lo vemos en los ventanales de algunos grandes edificios, de reflejar, gran cantidad de la luz que incide sobre él (Casi como un espejo), pero que a la vez es posible ver los objetos que se encuentran detrás de él, es algo parecido a lo que en el mundo de la óptica se le conoce como semiespejo. Un juego de semiespejos fue utilizado en uno de los famosos experimentos científicos realizados con el fin de medir la velocidad de la luz. Una muestra del carácter de semiespejo que posee el vidrio reflecta, la observamos en la siguiente imagen consistente en una fotografía tomada directamente a dicho dispositivo.

Observe que el dodecaedro amarillo se refleja en el semiespejo, y por ser una imagen virtual, permite ver a través de ella, como puede observarse parte del letrero simetría que está detrás del espejo a través de ella, mientras que el cuerpo mas obscuro es otro dodecaedro real que se encuentra detrás del espejo, a través del cual no se transparentan los objetos que están detrás de él.

Congruencia espacial:

Cuando deseamos saber si dos figuras planas son congruentes, el comprobarlo resulta relativamente sencillo, ya que basta con superponer las dos figuras, si observamos que coinciden en todos sus puntos, entonces podemos afirmar que son congruentes (Cuarto axioma de Euclides); pero si nos queremos referir a un par de cuerpos (Sólidos) no planos, nos resulta prácticamente imposible compararlos directamente debido al principio físico llamado la *"incompenetrabilidad de los cuerpos"*, que consiste en afirmar que: *"Dos cuerpos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo y al mismo respecto"*, pero con el juego de imágenes reales y virtuales que con este dispositivo se pueden lograr, logramos, en cierto modo, vencer este principio físico y lograr así comparar la congruencia o no de dos cuerpos sólidos por superposición.

Para entender cómo sucede esto, observemos la siguiente secuencia de fotografías tomadas directamente al experimentar con el mencionado prototipo.



Para explicar esta secuencia, llamemos DAR al dodecaedro amarillo real, DAV al dodecaedro amarillo virtual y DCR al dodecaedro real color cobre.

En la anterior secuencia de fotografías, se demuestra que:

a) DCR es congruente a DAV
b) Pero DAV es congruente a DAR, ya que es imagen simétrica de este.
c) Por lo tanto, DCR es congruente a DAR, por la propiedad transitiva de la congruencia.

Otra llamativa secuencia de fotografías la tenemos al determinar la congruencia de dos tasas, y por tanto, comprobamos que tienen igual capacidad.

Con juegos de cubitos y figuras en forma de caja (Pueden utilizarse cajas para zapatos), se colocan por un lado del espejo arreglos de cubitos que tenga, en total las mismas dimensiones de la caja, de esta manera es posible superponer el arreglo de cubitos con la caja, y entender así el significado de volumen de un cuerpo y poder medirlo sin necesidad de fórmulas, sólo por conteo directo de cubitos; posteriormente se puede motivar la necesidad y conveniencia de una fórmula, la cual, por el principio multiplicativo puede obtenerse; al menos para dimensiones enteras.

Otro efecto interesante que puede estudiarse es el fenómeno físico de la fusión y combinación de colores. Observemos la siguiente fotografía.

Obsérvese que el recipiente rojo que se encuentra en la parte posterior del espejo, está parcialmente fusionado con el reflejo del recipiente azul, en cuya "intersección" puede observarse el color resultante de dicha fusión; así que este prototipo didáctico resulta también útil en ciertas manifestaciones artísticas, como puede ser la pintura, ahorrando tiempo y dinero al saber de antemano el tono obtenido al mezclar dos o más colores determinados; pero esta sería una aplicación adicional, entre otras varias, al objetivo inicial que condujo al diseño de este dispositivo, a saber, el estudio de la simetría y la congruencia, tanto de figuras planas como espaciales.

Mediante este dispositivo es posible estudiar todos los aspectos de la simetría y la congruencia de figuras planas ya considerados, que fueron estudiados mediante otros dispositivos tales como "basura" (Papel y papel carbón de desecho) y mediante la computadora, pero aquí hemos destacado lo que no puedo lograr ni con la "basura" y ni siquiera con la computadora, a saber, el estudio de algunas propiedades geométricas de las figuras tridimensionales.

Se han diseñado otras actividades, mediante el apoyo de este recurso, en apoyo al aprendizaje de algunas ramas de las matemáticas, tales como Álgebra, la Geometría misma, Geometría Analítica, Cálculo y Análisis Matemático.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, HIPÓTESIS Y OBJETIVO

Como ya mencionamos anteriormente en la introducción de este trabajo, en cuanto a la disyuntiva a la que se enfrentan los maestros de usar o no la demostración, nos encontramos entre dos casos extremos, entre los maestros que deciden omitirla y los maestros que hacen uso excesivo y extremadamente formal de ella, ante esto nos preguntamos si será posible establecer una postura intermedia, o más bien, si será posible conducir un proceso que lleve al estudiante desde un nivel intuitivo y heurístico; hasta los más altos niveles de razonamiento formal y abstracto, con el rigor que le caracteriza, mientras evoluciona el pensamiento Geométrico y su capacidad de razonar.

Buscando alternativas de este tipo, nos topamos con un modelo de desarrollo del pensamiento geométrico elaborado por los esposos Van Hiele que, de alguna manera, responden a las expectativas de nuestra inquietud planteada, pero al analizarlo en sus detalles, percibimos que dependía mucho de la acción del profesor, en vez de propiciar que el estudiante construya y desarrolle su propio conocimiento; lo cual nos despertó la inquietud de un posible enriquecimiento de dicho modelo con principios constructivistas. Este modelo en general ha sido utilizado en niveles básicos, nuestra inquietud es trabajar con el en el nivel superior, en particular con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas; nos propusimos investigar al respecto lo cual nos llevó a plantear como pregunta de investigación la siguiente:

¿De qué manera evoluciona el razonamiento de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, desde el nivel geométrico inicial en que se encuentran, hasta niveles de formalización y generalización, al darle un tratamiento basado en

principios constructivistas y en el modelo de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele al tema de las Simetrías, partiendo de la Reflexión geométrica?

La hipótesis de este trabajo es: El uso del modelo de Van Hiele enriquecido con principios constructivistas, a lo largo de las fases correspondientes a cada nivel; nos permite, en primer lugar, ubicar el verdadero nivel de razonamiento geométrico del estudiante de Licenciatura y propiciar el desarrollo gradual y sólido del mismo en las etapas subsiguientes.

El **objetivo** principal de este trabajo es percibir y evaluar la evolución del razonamiento del estudiante desde el nivel geométrico inicial en que se encuentra hasta niveles de formalización y generalización.

De forma adicional, al irse desarrollando el proceso, esperamos se obtengan valiosos productos colaterales para el tratamiento del tema; tales como:

a) Herramientas teóricas que permitan el diseño de un proceso de desarrollo de razonamiento geométrico desde los niveles más básicos hasta los más avanzados de formalización.

b) Estrategias y herramientas prácticas (prototipos didácticos, hojas de trabajo, simulaciones computacionales, etc.) que permitan el logro del desarrollo gradual de los razonamientos geométricos desde los niveles básicos hasta el más avanzado.

CAPÍTULO I

MARCO REFERENCIAL

El marco referencial, como una idea innovadora en este tipo de apartados en una tesis, lo hemos considerado en dos niveles: El marco **referencial contextual** y el **marco referencial global.** En el primero se describe el contexto inmediato, donde se describe la institución, el tipo de estudiantes, el nivel educativo y las circunstancias específicas en las cuales se desenvuelve el experimento requerido para impulsar el presente trabajo; en la segunda parte, partiendo de las circunstancias actuales de la globalización, en la cual influyen como mundo de sus principales factores las nuevas tecnologías de la información, se localizan y analizan algunos trabajos afines, hasta cierto punto, al nuestro, sobre todo en lo que respecta a trabajos en los cuales se utiliza, dentro de sus consideraciones teóricas, el modelo de razonamiento de Van Hiele y/o planteamientos consecuentes con los principios del Constructivismo en el nivel superior y de esta manera tener una ubicación y un referente con respecto a lo que en otras partes del mundo se ha o se está realizando.

Marco Referencial Contextual

El 4 de marzo de 1964 se funda la Escuela de Altos Estudios de la Universidad de Sonora en la cual se inician tres programas de Licenciatura: Licenciado en Física, Licenciado en Letras Hispánicas y Licenciado en Matemáticas, esta última se crea con el fin, entre otros, de formar personal académico especializado que impartiera los cursos de Matemáticas que la Universidad requería en sus distintos programas académicos. Es importante destacar que más del 95% de los egresados de dicha carrera se dedican a la docencia (como se esperaba), siendo que el plan de estudios de la carrera no contempla materia relativas a la didáctica de las matemáticas. Se observa una, al menos aparente, contradicción entre el fin de la creación de la carrera y el enfoque de sus cursos.

El plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de sonora estuvo influenciado por el de la Facultad de Ciencias de la UNAM, éste a la vez, tiene una marcada influencia de la Escuela de los Bourbaki. Cabe recordar que Nicolás Bourbaki, es el pseudónimo colectivo de un grupo de matemáticos, la mayoría franceses, que nació en la década de los 30 y se ha ido renovando con el tiempo, el cual es responsable de la publicación monumental y aún inconclusa tratado que tiene como objetivo la exposición de forma sistemática y rigurosa, de las herramientas básicas para el desarrollo de toda la Matemática. El título mismo de la obra (*Eléments de Mathématique)* muestra claramente el intento de emular el papel que tuviera "Los elementos de Euclides" en la Geometría griega.

La forma bourbakista de exposición, el formalismo que sólo se permite en sus procedimientos partir de axiomas explícitamente establecidos, sin apelar en ningún momento a los contenidos intuitivos y prácticos que dan su motivación a las construcciones matemáticas, era considerado el único modo admisible para la exposición matemática, lo que ha sido muy dañino para la enseñanza a todos los niveles, incluida la enseñanza secundaria, y aún en muchos casos, la primaria.

En los centros universitarios de numerosos países, donde la actividad matemática era entonces fundamentalmente pasiva, en aquellos años tenía como base los tratados de Bourbaki y toda ella estaba embebida en la moda formalista que Bourbaki había impuesto. La enseñanza secundaría y primaria fue invadida por la corriente llamada "matemática moderna", con su proliferación de la teoría de conjuntos y con el destierro de la geometría de corte más clásico, sustituida por enfoques marcadamente formalistas, caracterizadas por un rigor axiomático y con una tendencia hacia el álgebra abstracta; en la cual muchos pierden la idea geométrica original que llevó a esos conceptos abstractos, resultando pedante y aburrida para muchos.

Bourbaki rechazaba, en particular, el empleo de figuras o gráficas para ilustrar conceptos o demostraciones en Matemáticas, decía: "La vista podía engañar a la razón". Con esto se oponía a toda intuición; proclamando el más puro rigor lógico.

Así que, volviendo a nuestro entorno, los primeros maestros egresados de la licenciatura, tienden a impartir sus clases con el enfoque de la matemática que aprendieron, no siendo a veces muy adecuado para algunas carreras más pragmáticas, en cuanto al uso de las matemáticas; como ingenierías, químicas, etc. Este enfoque en la enseñanza ha bajado hasta niveles como el medio básico y el medio superior, ya que algunos de los egresados han sido contratados en dichos niveles.

El plan de estudios de la Licenciatura consta de 8 semestres en los que se cubren 352 créditos entre materias obligatorias y materias optativas. Se deben cursar 27 materias obligatorias (262 créditos) y cubrir el resto de los créditos con materias optativas.

Una de las pocas materias de geometría en el plan de estudio que inicialmente era obligatoria es "Geometría Moderna"; desafortunadamente, con motivo de las reformas curriculares que se realizaron en 1978 al pasar del esquema de escuelas al de Departamentos; donde, por supuesto, surgió el Departamento de Matemáticas, dicha materia pasó a ser (sin aparente justificación) materia optativa, debilitando aún más la poca presencia de la geometría en el plan de estudios. Dicha materia puede cursarse, sólo por quienes decidan cursarla, a partir del 2do. Semestre de la carrera. De donde se desprende que el grupo con el que se experimentó estaba integrado por alumnos de diferentes niveles de avance en la currícula.

Como es de imaginarse, los alumnos con los que se experimentó casi siempre fueron tratados con el enfoque formal en la mayoría de sus materias.

Nuestro experimento se desarrolló precisamente en un curso de Geometría Moderna, donde por supuesto el enfoque, más no lo contenidos, fue diferente; en especial en el tema "Transformaciones Geométricas", en el cual se les da un tratamiento de corte constructivista tratando de que fueran avanzando gradualmente en los razonamientos geométricos desde el nivel inicial hasta el formal, para esto se hace uso de los niveles de razonamiento de Van Hiele; para lo cual se desarrollaron y diseñaron las actividades apropiadas que se describen más adelante en el capitulo de Metodología.

Marco Referencial Global

La mayoría de los trabajos realizados alrededor del Modelo de Van Hiele han sido enfocados a los niveles básicos. Uno de los investigadores que se ha dedicado a hacer trabajos sobre el Modelo y se ha encargado de algunas traducciones oficiales de los trabajos originales de Van Hiele es el Dr. Ángel Gutiérrez de la Universidad de Valencia, España; gracias a él se ha dado a conocer el Modelo en México por sus trabajos y comentarios que se han incluido en los libros para maestros de primaria del Programa Nacional de Actualización Permanente.

Esencialmente el modelo de Van Hiele fue diseñado para la Geometría, los primeros intentos de aplicar el modelo hacia otra área de las matemáticas, en particular el álgebra, fueron fallidos; lo cual tal vez se deba a una traducción literal y externa, en vez de reconstruir el esquema a partir de la nueva disciplina.

Sin embargo, en el año de 1997 se forma un grupo en Educación Matemática en Medellín Colombia, el cual se inicia cuando hacen sus tesis

Doctorales basadas en la extensión del Modelo a Nivel Universitario. A continuación se presentamos una breve información de este grupo:

Este grupo lo encabeza el Dr. Pedro Pérez Carreras, quien a su vez fuera el director de dichas tesis. El Dr. Pérez actualmente es catedrático en el área de Matemáticas Aplicadas en la Universidad Politécnica de Valencia, España, en la que funge como director del Centro de Colaboración Académica (con sede en La Habana, Cuba); con respecto a los trabajos realizados por el grupo que el encabeza, ellos mismos comentan lo siguiente:

"Los trabajos ya realizados por el grupo se inscriben en el problema general de la extensión del modelo de van Hiele - que inicialmente surgió de experiencias con niños de educación elemental en torno a los conceptos de la geometría - a los conceptos fundamentales del Análisis Matemático y en el contexto de la educación universitaria del primer año de carreras científicas e ingenierías. El entendimiento de estos conceptos, derivados de la noción central de infinito, presenta dificultades específicas puesto que su formulación precisa dista mucho de la imagen previa que la mera intuición y el empleo del lenguaje cotidiano han formado en el estudiante".

Para mayor detalle ver Anexo I.

El marco referencial tanto en el aspecto contextual como en el global me permite ubicar la importancia y trascendencia del presente trabajo.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

INTRODUCCIÓN

Entendemos por "Educación matemática" (En México "Matemática Educativa" y así la mencionaremos en adelante), en un sentido amplio, como una disciplina en construcción, en la que se estudia no sólo la labor que realiza el profesor dentro del salón de clase, sino que interesa, además, aquellos otros factores que intervienen y hacen posible que la matemática se **enseñe y se aprenda;** estos factores son, por ejemplo, el diseño y el desarrollo de planes y programas de estudio, los libros de texto, las metodologías de la enseñanza (en la que hoy ocupa un lugar especial el uso de tecnología), las teorías del aprendizaje, la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa, etc.

Dentro de estas líneas trabajo, el nuestro se ubicará en una dinámica de asumir un marco teórico ya existente para el cual se propondrán ciertas modificaciones, con su respectiva fundamentación, y se diseñará y desarrollará una metodología adecuada a dicha propuesta.

El marco teórico fundamental del cual partiremos, aunque le propondremos leves modificaciones, como ya se indicó, es el modelo de desarrollo del razonamiento geométrico llamado Modelo de Van Hiele, en Honor a sus autores [1].

Describimos a continuación dicho modelo:

EL MODELO DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE.

Como dice su nombre, esta teoría de aprendizaje describe las formas de razonamiento de los estudiantes de Geometría. Aunque pueda pensarse que el tipo de razonamiento es el mismo en cualquier parte de las Matemáticas, esto no es del todo cierto, pues las características propias de las distintas áreas (Aritmética, álgebra, Geometría, etc.) marcan notables diferencias; de hecho, ha habido intentos de aplicar el Modelo de Van Hiele fuera de la geometría; por ejemplo en álgebra, pero no se había tenido éxito; tal vez debido a que solo se había hecho una traslación o trasposición literal del modelo hacia otra disciplina , en vez de hacer una adaptación apegado a la filosofía de dicho modelo; como recientemente lo ha hecho el grupo de trabajo encabezado por el Dr. Pedro Pérez Carreras, quienes han aplicado el modelo a disciplinas matemáticas de nivel superior tales como el Análisis Matemático (ver Anexo I).

Sus autores son los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, que en los años 50 eran profesores de Geometría de enseñanza secundaria en Holanda. A partir de su experiencia docente y de las dificultades de comprensión que observaban en sus alumnos, elaboraron un modelo que explica, por una parte, cómo se produce el razonamiento geométrico de los estudiantes y, por otra, cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren la calidad de su razonamiento.

El Modelo de Van Hiele atrajo enseguida la atención de los educadores soviéticos, que se hallaban inmersos en un proyecto de forma curricular. Tras unos años de intensas investigaciones y experimentaciones, se incorpora el modelo de Van Hiele como base teórica para la elaboración del nuevo currículo de enseñanza de la geometría en la U.R.S.S., cuya implementación definitiva se produce en 1964.

Los profesores estadounidenses ante el hecho de que el currículo soviético estaba siendo más eficaz que el suyo, hace que en los años siguientes realicen una serie de investigaciones en E.U. en torno al modelo y que éste sea objeto de un interés creciente en todo el mundo, tanto desde el punto de vista de la investigación educativa cómo de la práctica docente.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO.

El modelo está formado por dos partes: La primera es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática; **que van desde el razonamiento visual de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de Ciencias**; estos tipos de razonamientos se denominan *niveles de razonamiento*. La segunda parte es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tiene actualmente; se trata de las *fases de aprendizaje*.

Gran parte de los trabajos de investigación alrededor de este modelo, por razón de la inquietud inicial, han sido realizados en niveles escolares básicos, por lo que se había trabajado a lo más hasta el 4to. Nivel del modelo, de ahí la tendencia a desaparecer o no mencionar el 5to. Nivel de dicho modelo.

Como este trabajo se desarrolla a nivel Licenciatura en Matemáticas era obligado pensar en el uso del 5to. Nivel, cuya descripción detallada no nos fue posible localizarla en la literatura especializada dentro del tópico de geometría, por lo cual nos propondremos en este marco teórico reconstruir, de alguna manera, el mencionado 5to. Nivel.

Presentamos a continuación la descripción de los niveles del modelo dados por Ángel Gutiérrez, quien hizo una traducción al español del original de la tesis doctoral de Pierre Van Hiele, concientes de què, de alguna manera, es su versión sintética del trabajo.

"Nivel 1 (reconocimiento): El estudiante de este nivel

- Percibe los objetos en su totalidad y como unidades.
- Describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica con base a semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
- No reconoce explícitamente las componentes o propiedades de los objetos.

Nivel 2 (análisis): El estudiante de este nivel

- Percibe los objetos como formados por parte y dotados de propiedades aunque no identifica las relaciones entre ellas.
- Puede describir los objetos de manera informal mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.
- Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

Nivel 3 (clasificación): El estudiante de este nivel

- Realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio del razonamiento informal.
- Describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.

- Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración.
- No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo, tampoco puede comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (deducción): El estudiante de este nivel

- Es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
- Comprende la estructura axiomática de las matemáticas.
- Acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc)

En la descripción inicial del Modelo se señala la existencia de un quinto nivel, cuya característica básica es la capacidad para manejar, analizar y comparar diferentes Geometrías. Desde el primer momento, las investigaciones han mostrado una inconsistencia de este nivel con los cuatro anteriores. Por otra parte, la presencia de este nivel apenas aporta nada, desde un punto de vista práctico al Modelo, ya que sólo se encontraría al alcance de los matemáticos profesionales y de algunos estudiantes adelantados de las facultades de Matemáticas". ([2], p. 127)

Nuestra propuesta para el 5to. Nivel:

Según la descripción general ya dada, este nivel se caracteriza por el rigor, la abstracción y por consecuencia, la capacidad de comparar las diferentes Geometrías; en nuestro caso, por la naturaleza del contenido matemático elegido, hemos decidido materializarlo en el nivel de comprensión del programa de Erlangen [8].

“La descripción anterior de los niveles de razonamiento pone en relieve diversas propiedades del Modelo de Van Hiele, cuya importancia práctica radica en que muestra las líneas básicas que debe seguir un profesor que desee fundamentar sus clases en este modelo de enseñanza. Estas propiedades son:

Recursividad: Los elementos implícitos en el razonamiento del nivel N se hacen explícitos en el nivel N+1.

En este contexto, el trabajo central del profesor es conseguir que sus alumnos lleguen a ser concientes del uso que están haciendo de esos elementos implícitos de su razonamiento y aprendan a utilizarlos de manera voluntaria. Este uso voluntario y correcto es lo que les permitirá alcanzar el nivel de razonamiento superior.

Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir que no se pueda alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles inferiores.

Un peligro del aprendizaje memorístico es el que los estudiantes aparentan un nivel de razonamiento superior al que realmente tienen porque han aprendido vocabulario y formas de trabajo propios del nivel superior, aunque realmente no los comprenden ni los saben utilizar correctamente. Un ejemplo muy frecuente lo tenemos en los estudiantes de enseñanza secundaria cuando los profesores les enseñan matemáticas formales y les piden repitan las demostraciones o que resuelvan formalmente problemas; esta práctica se traduce en que , con el paso del tiempo , los estudiantes han aprendido mecánicamente ciertas formas de actuar y de contestar los ejercicios propios del lenguaje matemático formalizado, con las que dan la impresión de encontrarse en el nivel 4, cuando en realidad están muy lejos de este tipo de razonamiento.

Especificidad del lenguaje: Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático, de forma que dos personas que utilicen lenguajes diferentes no podrán entenderse. Por ejemplo la palabra "demostrar" tiene significados diferentes en los niveles 2, 3 y 4, pues para demostrar una propiedad: Un estudiante del nivel 2 verificará que se cumple en uno o varios ejemplos y ello bastará para convencerle; un estudiante del nivel 3 sabe que debe de dar justificaciones generales, pero éstas se basarán en algún ejemplo o en manipulaciones físicas de los cuerpos. Un estudiante del nivel 4 hará una demostración formal.

Son evidentes las implicaciones de esta propiedad en la forma de comportarse los profesores en las aulas. Con esto, Van Hiele nos dice que si queremos que nuestros alumnos nos entiendan realmente, debemos situarnos en su nivel, en vez de pretender que ellos se sitúen en el nuestro.

Continuidad: Nuestra experiencia personal nos dice que el tránsito entre los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, pudiendo durar varios años en el caso de los niveles 3 y 4, dado que las características de cada nivel de razonamiento son múltiples, es necesario preguntarse cómo hay que tratar a los estudiantes que presentan indicios de haber adquirido algunas características de un nivel y también de no haber adquirido otras.

Localidad: Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la Geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tengan son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

Los que hemos estudiado Matemáticas superiores sabemos que, al enfrentarnos con una nueva área de estudio, lo usual es empezar tomando contacto con los elementos más importantes, después con sus propiedades básicas, a continuación relacionar unos elementos o propiedades con otros, etc.

En otras palabras, lo usual es recorrer (posiblemente de forma muy rápida) los niveles de Van Hiele desde el 1 en adelante. Por lo tanto, creemos que los niveles de razonamiento son de carácter local y que la "localidad" es más acusada cuanto más bajo es el nivel, pues a menor nivel de razonamiento menor es la capacidad de los alumnos para globalizar sus conocimientos y abarcar un área amplia de la Geometría.

El modelo de Van Hiele propone a los profesores una secuencia cíclica de cinco **fases de aprendizaje** para ayudar a los estudiantes a progresar desde un nivel de pensamiento al siguiente. Básicamente, estas 5 fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Su carácter cíclico viene dado por el hecho de cuando los estudiantes, tras recorrer las cinco fases, consiguen alcanzar un nivel de razonamiento superior al que tenían, deben iniciar un nuevo recorrido por las cinco fases para conseguir llegar al nivel superior actual. Naturalmente aunque las fases son las mismas para todos los niveles, los contenidos matemáticos, el lenguaje empleado y la forma de resolver los problemas son diferentes para cada nivel; lo que permanece es la metodología de trabajo; pero cambia su contenido concreto. Las fases del Modelo de Van Hiele son las siguientes:

Información: Al empezar a estudiar un tema nuevo, el profesor debe informar a los estudiantes sobre cuál es el campo de investigación en el que van a trabajar y cuáles van a ser los problemas que van a tratar de resolver. Esta fase sirve también para que el profesor averigüe los conocimientos previos de sus alumnos sobre ese tema y, en caso de que tengan algunos conocimientos organizados, cuál es su calidad y en qué nivel de razonamiento son capaces de desenvolverse los estudiantes.

En todo caso no hay que despreciar los conocimientos que puedan haber adquirido de forma extra-académica, pues si son adecuados deben de servir como punto de partida y si son erróneos, el profesor debe empezar por modificar esos errores.

Orientación dirigida: En la segunda fase los estudiantes exploran el campo de investigación por medio del Material que les ha suministrado el profesor. Este material suele estar formado por bloques de actividades dirigidos al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio en cuestión. Estas actividades deben estar claramente orientadas hacia sus objetivos, por ejemplo mediante ciertas cuestiones o directrices dadas por el profesor (como doblar, medir, buscar una simetría, etc.), de tal forma que las estructuras características se les presenten a los estudiantes de forma progresiva.

Explicitación: La tercera fase, que es fundamentalmente de diálogo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario, tiene varios objetivos. Uno es conseguir que las experiencias adquiridas se unan a los símbolos lingüísticos precisos y que los estudiantes aprendan a expresarse con precisión (dentro de las características de su nivel de razonamiento) en el transcurso de discusiones que tienen lugar en el aula.
Otro objetivo es que los estudiantes reflexionen "en voz alta" sobre el trabajo que han estado haciendo, sus soluciones, dificultades, métodos, etc. Este debate entre los compañeros enriquecerá notablemente su conocimiento de cada estudiante, pues les obliga a organizar sus ideas y expresarlas con rigor, pone de relieve los métodos y resultados incorrectos y afianza los correctos. Así en el transcurso de la tercera fase se forma parcialmente la red de relaciones entre los conceptos propios del área de estudio.

Orientación Libre: Los estudiantes tendrán que aplicar sus nuevos conocimientos a investigaciones posteriores sobre el tema de estudio. Este es en gran parte conocido, pero el alumno todavía debe de afianzar y completar sus conocimientos del mismo. Esto se consigue mediante la asignación por el profesor de tareas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. Se trata de actividades y problemas menos dirigidos que los que se plantean en la segunda fase, pues en aquel momento los problemas estaban dirigidos a enseñar unos conocimientos concretos, mientras que en la fase de orientación libre la finalidad de las actividades de los estudiantes es conseguir que profundicen en dichos conocimientos, que se afiancen en su uso, que relacionen unos con otros y que descubran y aprenda algunas propiedades que por su complejidad no pueden ser estudiadas antes.

Integración: A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades de razonamiento, pero todavía les falta adquirir una visión general de los conceptos y métodos que tienen a su disposición. En esta fase el profesor debe tratar de resumir en todo un campo que han explorado los estudiantes y lograr que integren lo que acaban de aprender en la red de conocimientos relacionados con este campo que pudieran tener con antelación. El profesor puede fomentar este trabajo proporcionando compresiones globales, pero es importante que estas compresiones no le aporten ninguna novedad al estudiante: Solamente deben de ser una acumulación de las cosas que ya conoce.

Es fácil darse cuenta de que las fases de aprendizaje tienen, por los objetivos de cada una, una secuenciación lógica que no se puede alterar. La única excepción es la tercera fase de Explicitación; esta fase no debe consistir en un período de tiempo entre las fases segunda y cuarta dedicado a que los estudiantes dialoguen, sino que hay que entenderla como una dinámica continua, a lo largo de todas las clases, de diálogo y de reflexión común después de cualquier tipo de actividad, sea de la fase que sea. De esta manera, la fase de Explicitación estaría sobrevolando las otras cuatro fase y entremezcladas con cada una de ellas.

Asimismo, si el profesor y los alumnos han estado trabajando juntos un tema con anterioridad, puede que la fase 1 de un determinado nivel no requiera de actividades específicas, pues el profesor ya sabe que conocimientos y nivel de razonamiento tienen sus alumnos y es suficiente hacer algunos comentarios o preguntas para retomar el tema y comenzar con las actividades de la fase 2."([2], pp. 131-133).

ELEMENTOS DE MODIFICACIÓN PROPUESTOS

Aspectos Constructivistas

En lo que fue el siglo XX, y hasta hace poco tiempo, la concepción filosófica dominante sobre la matemática ha sido formalista; como ya lo comentamos ampliamente, en el marco referencial contextual.

Entre las fuertes corrientes que han influido en la modificación de esta concepción, es el llamado constructivismo; pero cuando se habla de constructivismo, convendría indicar desde qué perspectiva o punto de vista estamos haciéndolo. Así por ejemplo, podríamos hablar del **Constructivismo Genético,** el cual se sustenta en las ideas de Jean Piaget, para quien el aprendizaje es explicado a partir de sus nociones acerca del desarrollo cognitivo individual. Otra opción la tendríamos en Lev Vigostky, quien destaca el elemento social en el aprendizaje de cada persona; cuando éste es el caso, estamos en la presencia de un **Constructivismo Social**. Por último, podemos tomar en cuenta los planteamientos de David Ausubel, quien sostiene que sólo aprendemos aquello que nos resulta particularmente significativo; por lo tanto, el material a ser aprendido debe poseer en sí una significatividad potencial para el aprendiz; en este caso estaríamos en presencia del **Constructivismo disciplinario**.

Dentro de este panorama, aunque un tanto indirectamente, en el sentido en que lo explicaremos posteriormente, nuestro interés se centra en el constructivismo genético de Piaget; aunque no nos dedicaremos a explicar cooperar con los mecanismos de aprendizaje y el de ayudar al estudiante a desarrollarlos, darse cuenta de ellos e involucrarlos de manera consciente.

Desde el punto de vista de Piaget, el maestro debe comenzar con las estructuras que el estudiante ya ha construido espontáneamente y ayudar al niño a relacionarlas con las estructuras matemáticas tal como el maestro las entiende. Existen, al menos, 2 maneras mediante las cuales el profesor puede lograr estos objetivos. Una es hacer participar a los matemáticos. Piaget veía "... un gran futuro para la cooperación entre los psicólogos y matemáticos trabajando sobre un método verdaderamente moderno para enseñar... matemáticas". Otra es escuchar realmente a los niños y poner atención tanto a lo que dicen como al razonamiento que pueda estar detrás de sus palabras.

Piaget ofreció un programa general para la educación desde preescolar hasta preparatoria.

"El entrenamiento en matemáticas se debe preparar, comenzando en el jardín de niños, mediante una serie de ejercicios relacionados con la lógica y los números, las longitudes y las superficies, etc., y este tipo de actividades concretas se deben de desarrollar y enriquecer constantemente de una manera muy sistemática durante toda la escuela elemental. En estos términos, la educación matemática se fundamenta estrictamente en su ambiente natural de equivalencia de objetos y dará una visión completa a la inteligencia que pudo haber quedado puramente verbal o escrita" (Piaget J., To understand is to invent, Penguin Books: New York, 1976).

La principal estrategia según Piaget, para lograr esto, consiste en que los maestros creen situaciones que faciliten el descubrimiento o invención por parte del niño de las ideas matemáticas y que presenten ejemplos desequilibrantes de tal manera que el niño desarrolle ideas nuevas con objeto de reequilibrar". ([6], pp. 28-29)

Debido a los propios comentarios de Piaget de que sus lecturas son difíciles de digerir, nos basamos en sus propias recomendaciones pedagógicas, las cuales quedaron insertadas en las recomendaciones de la oficina Internacional de Educación y en la UNESCO, y son mencionadas por Dubinsky ([6], pp. 27-28.) Dichas recomendaciones son las siguientes:

- Guíe al estudiante a que forme sus propias ideas y descubra relaciones y propiedades matemáticas por sí mismo, en lugar de imponerle el pensamiento de adulto ya elaborado.
- Asegúrese que ha adquirido los procesos y las ideas operacionales antes de introducirlo al formalismo.
- No confíe al automatismo ninguna operación que no se haya asimilado.
- Asegúrese que el estudiante adquiera primero experiencia con las entidades y relaciones matemáticas para después iniciarlo en el razonamiento deductivo.
- Extienda la construcción deductiva de las matemáticas de manera progresiva.
- Enseñe al estudiante a plantear los problemas, establecer datos, explotarlos y sopesar los resultados.
- Dé preferencia a la investigación heurística de problemas en lugar de la exposición doctrinaria de teoremas.
- Estudie los errores que cometen los estudiantes y véalos como un medio para entender su pensamiento matemático.
- Entrene a los estudiantes en la práctica de la verificación personal y la auto-corrección.
- Infunda gradualmente en los estudiantes el sentido de aproximación.
- De prioridad a la reflexión y al razonamiento.

De Piaget a las situaciones del nivel universitario según Dubinsky.

Dubinsky ([6], pp.28-29) reformula las ideas de Piaget sobre la educación para aplicarlas en el nivel universitario.

Una dificultad seria que para hacer esa·transición estriba que en la teoría de Piaget el entendimiento conceptual tiene su fuente en la manipulación de los objetos físicos. Conforme el nivel matemático de los conceptos aumenta, es necesario, según Piaget, construir objetos nuevos, no más físicos sino mentales, y manipularlos con objeto de construir las ideas matemáticas. Un problema importante en la educación matemática es hallar sustitutos apropiados para los objetos físicos. En mi trabajo, la computadora se ha utilizado con este propósito."

Aquí insertamos un comentario nuestro en el sentido del uso de la computadora:

- Sabemos que Dubinsky utiliza un lenguaje de programación creado por un equipo de colaboradores, llamado ISETL, mediante el cual se pretende que el hecho de programar una computadora, haga aprender tópicos de álgebra abstracta.
- En nuestro caso, aunque el uso de la computadora es diferente, ya que no se hace propiamente programación, sino que se usa un software ya elaborado de geometría dinámica (El Geómetra), sin embargo, cumple con el mismo fin planteado por Dubinsky.

"Otro obstáculo al acercamiento piagetiano en niveles superiores de las matemáticas es que buena parte de sus ideas está relacionada con el desarrollo espontáneo. Nuevamente, conforme al nivel de sofisticación aumenta, hay menos y menos de esto. En consecuencia, el papel del maestro de crear situaciones que fomentarán los desarrollos que deben darse se vuelve aún más importante de lo que es en los niveles elementales sobre el cual Piaget concentró su atención.

La siguiente es una lista de aquellas ideas de Piaget sobre educación, tomadas de la lista precedente, que he tratado de implementar en la investigación y desarrollo del trabajo que yo realizo:

- Concentrarse en los mecanismos mediante los cuales se lleva a cabo el desarrollo intelectual. Estos incluyen la abstracción reflexiva y la dicotomía desequilibración/ reequilibración.
- Ayudar a los estudiantes a construir acciones, a interiorizarlas en procesos y a encapsularlos, en objetos.
- Ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de las estructuras que han construido, a conectarlas con los conceptos matemáticos y a hacer construcciones adicionales para tratar con situaciones nuevas.
- Cambiar el papel del maestro de diseminador de información a guía y asistente.
- Prestar atención a las voces de los estudiantes, a sus errores y a sus éxitos y tratar de entender su pensamiento.
- Crear situaciones que alienten a los estudiantes a hacer construcciones mentales para tratar con las situaciones de los problemas matemáticos.
- Permitir que los estudiantes construyan bases sobre la experiencia para los conceptos antes de enfrentar el formalismo que estructura los conceptos.
- Dar a los estudiantes una oportunidad de descubrir los conceptos matemáticos antes de que les sean explicados, ya sea por otros estudiantes o por el maestro.

- Establecer un ambiente en el cual los estudiantes tengan oportunidad de interacciones sociales ricas, tanto con otros estudiantes como con el maestro."

De todo este panorama lo que tomamos para modificar el modelo de Van Hiele ciertamente son los principios constructivistas, aunque tomados de manera indirecta, en el sentido en que lo mencionamos anteriormente, ya que por los mismos comentarios del propio Piaget de que era difícil concretizar una propuesta pedagógica o didáctica derivada de sus principios; consideramos valiosa la lista de recomendaciones pedagógicas dadas por él mismo, que hemos mencionado anteriormente; a la vez que consideramos, como una guía digna de seguir la adaptación que dicha lista hace Dubinsky para ser utilizadas a nivel superior; también mencionada anteriormente; y esto último, cobra aún más interés para nuestros fines por el hecho de que nuestro trabajo se ubica precisamente en el nivel universitario. Es por esto que lo en que en realidad tomamos para completar nuestro marco, son ambas listas de recomendaciones pedagógicas que tiene como trasfondo los principios del constructivismo genético.

Para el desarrollo de nuestras actividades, de cierta manera, nos basamos en las actividades que desarrolla Ángel Gutiérrez para el nivel escolar básico en el tema de rotación o "giros"[2], el cual nosotros lo esquematizamos en un cuadro para hacer un análisis más global de su propuesta, donde pudimos percibir que a pesar de que se está en el modelo de Van Hiele, en los detalles de logros de las fases el profesor ocupa un lugar central, proporcionando conocimientos, ciertamente adecuados en el momento, pero consideramos mejor, como lo hemos señalado, que el estudiante reciba un tratamiento pedagógico mas o menos acorde con principios constructivistas en los términos que lo hemos comentado anteriormente.

Enseguida mostramos un par de tablas comparativas, en la primera, se presenta esquemáticamente el desarrollo del primer nivel para el tema de "giros" en los términos de Ángel Gutiérrez; mientras que en la segunda se presenta el cuadro esquemático para el mismo primer nivel, pero para el tema de reflexión, en términos de nuestra propuesta.

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y los principios del constructivismo.

TEMA: "Rotación"

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 1	Fase 1	Cada estudiante "gira sobre sí mismo. Hace un dibujo en una hoja de papel, perfora la hoja con un alfiler y le da vueltas. Coloca una figura de papel (cuadrado, triángulo,...) sobre una hoja en blanco, perforarla con un alfiler y con el mismo darle vueltas. Pegar una figura sobre un disco de plástico, se perfora por el centro y se le da vueltas.
	Fase 2	El profesor da algunos ejemplos y pide a los alumnos, otros de movimientos en el mundo real que son giros y de otros que no los son. Se repiten los dos últimos ejercicios de la fase 1, pero pegando varias figuras a lo largo del recorrido del giro. Ahora, sin utilizar herramientas de dibujo, el recorrido seguido por un punto de una figura a lo largo del giro. Emplear el compás para comprobar la respuesta. Identificar posibles recorridos de giros entre un conjunto de líneas dadas (incluir circunferencias, casi circunferencias, cuadrados, etc.)
	Fase 3	
	Fase 4	Se da a los estudiantes una hoja con varias figuras. Los alumnos deben de reconocer las que se corresponden mediante un giro. Pueden usar una figura y moverla antes de contestar. El alumno deberá justificar sus respuestas haciendo explícita la equidistancia al centro del giro (de manera global), la variación de la inclinación de la figura y el recorrido circular de los puntos. Identificación de los giros sobre un mosaico.
	Fase 5	Resumen por parte del profesor: En qué consiste un giro. Cómo se colocan las figuras. Qué trayectoria sigue un punto. A qué distancia del centro se coloca la imagen.

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y los principios del constructivismo.

TEMA: "REFLEXIÓN"

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 1	Fase 1	El estudiante se observa a través de un espejo. Sigue observándose en el espejo pero ahora haciendo algunos movimientos frente a él. Lo mismo hace utilizando otros objetos y figuras.
	Fase 2	El profesor pide a los alumnos otros ejemplos de objetos que parecieran reflejarse en un espejo (por ejemplo el uso del papel carbón). Sin utilizar el espejo (sustituirlo por un marco con vidrio transparente) observarse entre parejas y hacer movimientos haciendo de cuenta que uno es la imagen del otro (frente al supuesto espejo).
	Fase 3	Los estudiantes discuten entre sí lo observado y cada uno escribe sus conclusiones.
	Fase 4	Se les da a los estudiantes una hoja con varias figuras. Los alumnos deben aparear las que pueden tomarse una como imagen reflejada de la otra con respecto a un espejo imaginario. El alumno deberá justificar sus respuestas.
	Fase 5	El profesor induce que el estudiante resuma lo que se ha observado: - En qué forma están colocadas las figuras. - Qué características mensurables tienen los objetos y sus reflejos.

Haciendo una comparación entre los cuadros anteriores, podemos observar la diferencia sustancial de enfoque en algunas de sus fases. Por ejemplo en la fase 2 de la propuesta de Ángel Gutiérrez, las instrucciones están centradas en la actividad transmisora del profesor (no constructivista), mientras que en nuestra propuesta lo que se busca es inducir a que el estudiante descubra y/o construya las mismas nociones. Algo similar puede observarse en las respectivas fases 5.

Los cuadros esquemáticos correspondientes a las actividades desarrolladas con el enfoque pedagógico propuesto, recorrida en el andamiaje del Modelo de Van Hiele, referentes a los niveles 2, 3 y 4, las remitimos al Anexo II.

Otra de las aportaciones importantes en este trabajo, en cuanto al marco teórico, es la descripción del 5to. Nivel. El modelo está originalmente diseñado hasta el nivel 5 pero la mayoría de las investigaciones dentro de este marco teórico, han sido realizadas en los niveles básicos de educación (generalmente primaria), por lo que a lo más llegan al nivel 4; por consecuente han convenido descartar el nivel 5 en la descripción del modelo dadas las limitantes contextuales en que se desenvuelven los investigadores. En cambio en nuestro trabajo nos dimos la tarea de reformular el 5to. Nivel dado que nuestro contexto de trabajo es el nivel superior.

El 5to. Nivel lo presentamos de forma esquemática a continuación:

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y los principios del constructivismo.

TEMA: "Reflexión"

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 5	Fase 1	En esta fase el profesor debe obtener información por parte de los alumnos sobre el manejo del concepto de Grupo y su definición formal.
	Fase 2	Dadas ciertas parejas de teselaciones (en acetatos) el alumno hará ciertos movimientos con cada par, de tal forma que podrá: _Describir detalladamente las transformaciones que dejan invariantes las configuraciones definidas por las respectivas teselaciones en el plano. _ Decir cual de las isometrías que analizó forman un grupo con la operación composición, sin combinarla con otras isometrías. -Describir combinaciones de isometrías (que también dejen invariante la configuración) que mediante la operación composición forman un grupo, sin combinarla con otras isometrías. _Escribir la definición general de simetría en el plano.
	Fase 3	Discusión colectiva y Expresión verbal de los conceptos analizados en la fase 1 y 2.
	Fase 4	Caracterización de la geometría Euclidiana mediante el estudio de invariantes bajo un grupo de transformaciones en el plano. (Programa de Erlangen 1ra. Parte).
	Fase 5	Hacer una clasificación de las demás geometrías mediante el estudio de invariantes bajo grupos de transformaciones geométricas en el plano (resto del programa de Erlangen).

CAPITULO III

METODOLOGÍA

En este apartado pretendemos describir, a grandes rasgos, todo lo utilizado para poder percibir y evaluar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes; tales como, el diseño de los recursos didácticos, los instrumentos de toma y análisis de datos, así como la definición de criterios para la determinación del nivel alcanzado en el logro de los objetivos planteados que permitan dar algún nivel de respuesta a la pregunta de investigación. Estos aspectos metodológicos se han definido procurando tener congruencia con el marco teórico elegido, así como la hipótesis y objetivo de investigación.

ESTRATEGIAS DE DESARROLLO DEL TRABAJO

Para cada sesión se preparó material didáctico a trabajar correspondiente a la actividad contemplada. Con el fin de lograr una dinámica que no fuera monótona, para cada reunión de trabajo se planeó alternar actividades tipo taller con manipulación de objetos y algunos prototipos didácticos expresamente diseñados (como uso del papel carbón, acetatos con teselaciones previamente diseñadas, uso del semiespejo en el sentido que se detalló en el apartado de antecedentes de este trabajo, etc.); así como actividades de trabajo formal con papel y lápiz o uso de pizarrón; así como otras en las que se hará uso de recursos electrónicos (computadora, proyectores, videos, etc.) destacando en ello el uso de Software de geometría dinámica ("El Geómetra"). Como instrumento testigo de la actividad mental realizada por el estudiante, se diseñaron hojas de trabajo (que presentaremos más adelante en éste mismo capítulo), en las que se reportarán por escrito las actividades realizadas por ellos, en sus diversos aspectos, estas hojas servirán para hacer los estudios requeridos que me permitan validar o rechazar las hipótesis establecidas.

En el trabajo se diseñaron actividades que se espera propicien una evolución del pensamiento geométrico que va desde la manipulación de objetos y uso de prototipos didácticos, hasta altos niveles de razonamiento equivalentes a los requeridos para la demostración de los teoremas más formales.

USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

En muchos países, la enseñanza de la geometría estuvo a punto de desaparecer, debido a su enfoque axiomático desde los niveles básicos; pero el surgimiento y desarrollo de software de Geometría Dinámica, reavivó el interés, tanto del estudio de la geometría como investigaciones educativas relacionadas a la misma.

El uso de este software ayuda al estudiante a desarrollar habilidades de visualización, lo cual es un requisito importante para el estudio de la geometría, de esta manera el profesor les permitiría explorar experimentalmente las propiedades de las figuras y luego introducirlos de forma gradual a la terminología formal apropiada.

Algunos de los maestros si se preocupan por llevar a cabo la experimentación, pero restringidos al uso de "lápiz y papel" lo cual tiene como desventaja el que las mediciones sean inexactas, las figuras sean estáticas, se consuma demasiado tiempo en la experimentación, etc, pero todo esto ha cambiado gracias a los paquetes de Geometría Dinámica como el Cabrí Geometry y el Geometer's Sketch Pad (En Español, "El Geómetra"), entre otros. La geometría Dinámica es precisa, es muy fácil y rápido de realizar construcciones complejas para luego modificarlas. Estos programas además permiten establecer conjeturas y a la vez agilizar la actividad mental para investigar si una determinada conjetura es cierta o no, de aquí que esto hace que haya una traslación del interés en el uso de demostraciones en la enseñanza hacia otras funciones distintas de una simple verificación. Esto desarrolla un contexto matemáticamente más creativo, a la vez que permite despertar el interés por razonamientos más avanzados.

Hasta aquí nuestra presentación de los recursos didácticos utilizados en este trabajo, tomados en cuenta en nuestra propuesta metodológica; ahora pasemos a describir los instrumentos diseñados para la toma de datos y evaluación de la investigación.

INSTRUMENTOS PARA LA TOMA DE DATOS Y EVALUACIÓN

Hojas de trabajo

En el modelo de Van Hiele lo que el estudiante escriba es de suma importancia para interpretar y evaluar su nivel de razonamiento; por lo cual consideramos fundamental el diseñar instrumentos en los cuales exprese por escrito lo que su razonamiento personal le indica en ese momento; convirtiéndose, como ya lo dijimos arriba, en un instrumento testigo de la actividad mental realizada por el estudiante.

Las hojas de trabajo se encuentran en el Anexo III.

Uso de videos

Otro instrumento complementario que se planeó utilizar para observar y evaluar el desempeño del estudiante es el recurso del video, su utilidad estriba en que se puede percibir acciones y actitudes no expresables en un documento escrito que complementan nuestras observaciones y permiten dar elementos más objetivos de la evaluación. Se planeó utilizar especialmente en las hojas de trabajo 7 y 8 donde coincide con el uso del software de geometría dinámica.

ESTUDIO DE CASOS

¿Porqué elegir el estudio de casos? Para ello, antes de describir las estrategias de la selección de los casos, sentimos conveniente comentar un poco acerca del concepto de "caso".

¿Qué es un estudio de casos?

El estudio de casos es una metodología cualitativa descriptiva, la cual se emplea como una herramienta para estudiar algo específico dentro de un fenómeno complejo. El "caso", en general, es comprendido como un sistema integrado y en funcionamiento, por lo que requiere un análisis que logre interpretar y reconstruir ese sistema. En particular, en la enseñanza, el caso es el sujeto cognoscente; que permite, mediante una metodología adecuada de investigación, proporcionar cierta información acerca de un sistema mas complejo que sería el proceso de aprendizaje, lo cual inevitablemente propicia reflexiones acerca del sistema de enseñanza.

Los estudios de casos, aún cuando permiten elaborar generalizaciones, poseen su fortaleza en su capacidad de generar interpretaciones, las cuales pueden difundirse para usarse en estudios comparativos posteriores.

Hemos decidido utilizar como metodología de investigación el estudio de casos debido a que, por un lado, el número total de estudiantes era pequeño, 7 en total, lo cual de por sí es una limitante para otro tipo de estudios, digamos estudios estadísticos; pero, sobre todo, la naturaleza propia del marco teórico y objetivos planteados, nos lleva más a centrar nuestra atención en el cómo se desarrolla el pensamiento geométrico en el individuo que en el comportamiento masivo de un grupo.

CRITERIO DE SELECCIÓN DE LOS CASOS

El estudio se realizó con 7 de los alumnos de la clase de Geometría Moderna de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora, ciclo escolar 99-1, y aunque todos vivieron el proceso, se eligieron 3 casos para analizar detalladamente su desempeño basándonos en los siguientes criterios:

a) Nivel de desempeño de los estudiantes en las actividades correspondientes a los dos primeros niveles del modelo de Van Hiele (que abarca básica mente hasta la hoja de trabajo No. 3, aunque la hoja de trabajo No. 5 se encuentra ubicada en el nivel 2, por su naturaleza sirve para reforzar e iniciar el nivel 3), por lo cual podríamos considerarlo como una etapa propedéutica para este nivel escolar, en lugar de un examen diagnóstico.

b) Se eligió uno de bajo desempeño, uno de desempeño medio y uno de desempeño alto, lo cual implicó hacer una estratificación inicial para elegir los casos; esperando con esto poder realizar un análisis individual y otro comparativo con respecto al desempeño de los diferentes estratos iniciales en su desempeño final.

Decidimos omitir sus nombres, etiquetándolos con las letras A, B Y C progresivamente.

UBICACIÓN DE LAS HOJAS DE TRABAJO POR NIVELES

Las hojas de trabajo 1 y 2 son actividades que se encuentran ubicadas en el primer nivel de razonamiento y tienen como objetivo que el alumno pueda observar:

- En qué forma están colocadas las figuras.
- Qué características mensurables tienen los objetos y sus reflejos.

La hoja de trabajo 3 y 5 contiene actividades para lograr el segundo nivel de razonamiento.

Estas actividades tienen como objetivo inducir que el alumno se de cuenta de la importancia del eje de reflexión, lo que él tomó como espejo imaginario; y así:

-Descubra la equidistancia entre el punto P de la figura al eje y de este al punto reflejado P'

-La perpendicularidad del segmento PP' con respecto al eje de reflexión

Las hojas de trabajo 4, 4b, 6, 7 y 8 hacen que se logre el nivel 3 de razonamiento geométrico.

Estás actividades tienen como objetivo:

-Que el estudiante justifique porque dado un punto P y su reflejo P' existe solo un eje de reflexión (el cual es perpendicular al segmento de recta PP').

-El estudiante pueda enunciar una definición formal de reflexión.

- Propiciar que los estudiantes descubran que:

"La composición de reflexiones cuyos ejes no son paralelos, no es otra reflexión sino otra transformación; es una rotación cuyo centro es el punto de corte y cuyo ángulo es el doble del formado por los ejes".

- Que puedan concluir que la reflexión es otro tipo de isometría.
- Visualice la relación de la reflexión con las demás transformaciones.

Además que el alumno sienta la necesidad de hacer algunas justificaciones de sus mismos planteamientos y observaciones, así como la necesidad de enunciar de manera más formal sus resultados y le encuentre sentido al tener que demostrar alguno de ellos. Aunque esto último sea actividad de otro nivel.

Las hojas de trabajo 9 y10 nos ayudan a ubicar al estudiante en el nivel 4. Esta serie de actividades tienen como objetivo:

_Que la visión de los alumnos acerca de las isometrías del plano ya debe de ser global, en cuanto que se consideran todos los movimientos relacionados estrechamente entre sí.

Las hojas de trabajo 11, 12, 13 y 14 colocan al estudiante en el nivel 5 Estas actividades tienen como objetivo que el alumno distinga los diferentes grupos de transformaciones geométricas y adquiera la capacidad de transitar de un sistema axiomático a otro al hacer la clasificación de las geometrías en términos del Programa de Erlangen.

UBICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES POR FASES

Nivel 1

Las actividades de la hoja de trabajo No. 1 corresponden a las fases 1, 2 y 3.

Las actividades de la hoja de trabajo No. 2 corresponden a las fases 4 y 5.

Nivel 2

Las actividades de la hoja de trabajo No. 3 corresponden a las fases 1, 2 y 3

Las actividades de la hoja de trabajo No. 5 corresponden a las fases 4 y 5

Nivel 3

Las actividades de las hojas 4 y 4b se ubican en la fase 2, lo mismo que la hoja de trabajo No.6, esta hoja de trabajo contiene actividades parecidas a las del nivel 2, solo que después de que ellos tienen ya algunas conclusiones, ahora pueden experimentar con más movimientos haciendo uso de la geometría dinámica por medio del Geometra's , pertenece ala primera parte de la fase 2.

Las actividades de la hoja 7 en la fase 2

Las actividades de la hoja 8 corresponden a la fase 4

Las actividades de la hoja 9 corresponden a la fase 4 y 5

Nivel 4

Aquí pensamos que, al igual que en las fases anteriores, los alumnos ya han superado la fase 1, si han seguido la secuencia de las actividades propuestas para los niveles anteriores, en particular la hoja 9 ayuda a que se cumpla la fase 1 de este nivel. La hoja 10 nos sirve, ya en cierto modo para que se cumpla la fase 5 de este nivel.

Nivel 5

Para llegar a este nivel de rigor se utilizaron las anteriores10 hojas de trabajo, pero en particular para abordar las fase2 nos ayudan las hojas 11 y 12.

La hoja 13 nos ayuda a culminar la fase 4 y preparar el inicio de la fase 5. Y finalmente la hoja de trabajo No. 14 la utilizamos para culminar el 5to. nivel.

Para hacer el análisis de las hojas de trabajo contestadas ya por los estudiantes, nos basamos en la ubicación (que acabamos de describir en este capítulo) de las mismas; así que si las respuestas respondían satisfactoriamente a lo esperado, según el diseño de la hoja y su respectivo nivel en que la ubicamos, podíamos decir que el estudiante logró o estuvo en vía de lograr el nivel según la calidad de su respuesta.

CAPITULO IV

DESARROLLO Y ANALISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, primeramente analizaremos cómo actuó cada uno de los estudiantes en las tres primeras hojas de trabajo y luego haremos un estudio comparativo entre los casos elegidos con respecto a su desempeño en la hoja 4.

Recordemos aquí el procedimiento seguido para elegir los casos, explicado en el capítulo de metodología.

La importancia de la hoja de trabajo número 4, estriba precisamente en que es la primera en la cual se centra el interés sobre los casos elegidos, aunque el trabajo lo continuaron realizando los demás estudiantes y se siguió guardando registro de su desempeño.

Recordemos que las hojas de trabajo 1 y 2 están ubicadas en el nivel 1 (de reconocimiento), diremos que un estudiante logra dicho nivel si:

- *Puede describir en qué forma están colocadas las figuras.*
- *Qué características mensurables tienen los objetos y sus reflejos.*

La Hoja de Trabajo No. 1 que se le presentó al estudiante es la siguiente:

HOJA DE TRABAJO No. 1

Nombre:____________________________________ **Fecha:** __________________

ACTIVIDADES:

- Observa tu imagen a través de un espejo. Realiza algunos movimientos frente a él.
- Ahora haz movimientos de figuras geométricas·frente al espejo.

Anota tus observaciones acerca de tu imagen cada vez que te miras al espejo con diferentes movimientos, así como las imágenes de las figuras.

- Da otros ejemplos de pares de cosas que parecieran ser una reflejo de la otra.
- Haz un dibujo en una hoja de papel, trata de dibujar su imagen reflejada.

- Sustituye el espejo por un vidrio transparente, con la ayuda de uno de tus compañeros, obsérvense y hagan movimientos de tal forma que uno sea la imagen del otro.

Escribe tus observaciones.

Análisis de la hoja de trabajo No. 1.

En la hoja de trabajo No. 1, como observamos, solo se le pide que él haga movimientos frente a un espejo, y luego que haga movimientos de figuras geométricas frente a él (espejo), las cuales se les proporcionaron consistiendo en triángulos, cuadriláteros y pentágonos, formados por piezas de madera unidas en sus extremos por tornillos (permitiendo movilidad) ; con el fin de que obtenga una primera percepción sensitiva del concepto de reflexión, y que inicie un proceso de desarrollo de habilidades de expresión oral y escrita; este tipo de actividades, como ya se explicó en el capítulo de Metodología, corresponde a las primeras fases del primer nivel. Este tipo de actividades no requieren que el estudiante desarrolle un esfuerzo considerable, ni física ni intelectualmente, sólo requiere motivación y voluntad de realización.

Caso A:

Este estudiante no asistió el día que se hizo esta actividad, tampoco tuvo la disposición para realizarla posteriormente; por lo cual no tenemos elementos de juicio acerca del logro de las primeras fases del primer nivel.

Caso B:

HOJA DE TRABAJO No. 1

Nombre: ______________________ **Fecha:** 20 / abril / 1999

ACTIVIDADES:

(1)
- Observa tu imagen a través de un espejo. Realiza algunos movimientos frente a él.
- Ahora haz movimientos de figuras geométricas frente al espejo.

Anota tus observaciones acerca de tu imagen cada vez que te miras al espejo con diferentes movimientos, así como las imágenes de las figuras.

se observa que las figuras son semejantes
por lo que si mueve una la otra tambien
se mueve. Por lo tanto los 4 son iguales y las
medidas de sus lados son iguales entonces
las figuras son congruentes

- Da otros ejemplos de pares de cosas que parecieran ser una reflejo de la otra.
- Haz un dibujo en una hoja de papel, trata de dibujar su imagen reflejada.

(7)
Las manos del cuerpo humano
por que creo que son similares y congruentes por
lo que si se pudieran fusionar ocuparian el
mismo volumen

- Sustituye el espejo por un vidrio transparente, con la ayuda de uno de tus compañeros, obsérvense y hagan movimientos de tal forma que uno sea la imagen del otro. Escribe tus observaciones.

(5)
por ejemplo si un mueve el brazo derecho la
otra persona mueve el brazo izquierdo para
ser similares lo mismo pasaria con las demas
partes del cuerpo ojos; piernas etc. menos
las partes que se [illegible] en el centro
del cuerpo.

En las observaciones de la primera actividad de esta hoja, podemos percibir una cierta inercia a describir libremente lo que percibió y experimentó, creemos que está como sujeto al uso del lenguaje propio de su formación, en particular con el concepto de congruencia de triángulos.

Con respecto a las observaciones del segundo apartado, ya podemos percibir una expresión más vivencial, inicia un proceso de integración a la dinámica del trabajo y además se adelanta a una percepción espacial, aunque insistiendo aún en la congruencia.

En sus observaciones de la tercera actividad de la misma hoja, el estudiante se integra mas abiertamente a una dinámica de expresión natural de lo observado, incluso llegando a percibir propiedades de la reflexión, como la orientación inversa y hasta las propiedades de los puntos del eje como invariante bajo la reflexión.

Observación: Podemos afirmar que su nivel de razonamiento está por encima de estas primeras fases, que tiende a desbordar lo propuesto, pero para poder hablar del logro o no del primer nivel completo, requerimos del análisis de la segunda hoja de trabajo, como lo haremos más adelante.

Caso C

HOJA DE TRABAJO No. 1

Nombre: ________________ Fecha: 4-Junio-99

ACTIVIDADES:

- Observa tu imagen a través de un espejo. Realiza algunos movimientos frente a él.
- Ahora haz movimientos de figuras geométricas frente al espejo.

Anota tus observaciones acerca de tu imagen cada vez que te miras al espejo con diferentes movimientos, así como las imágenes de las figuras.

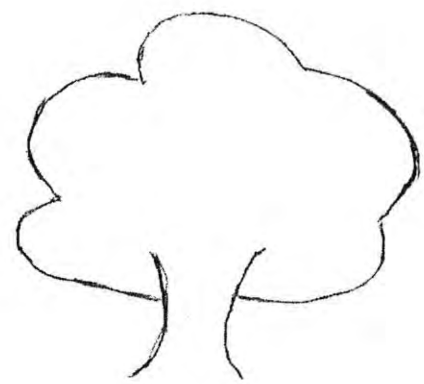
OBSERVO QUE LAS IMÁGENES MANTIENEN, EN LA MISMA PROPORCIÓN QUE LOS OBJETOS, SU TAMAÑO; SE CONSERVAN, TAMBIÉN, LOS ÁNGULOS DE LAS FIGURAS CON RESPECTO A LOS OBJETOS.
LOS OBJETOS PARECEN INVERSOS, ES DECIR, SON SIMÉTRICOS (LA MANO DERECHA PARECE IZQUIERDA EN EL REFLEJO)

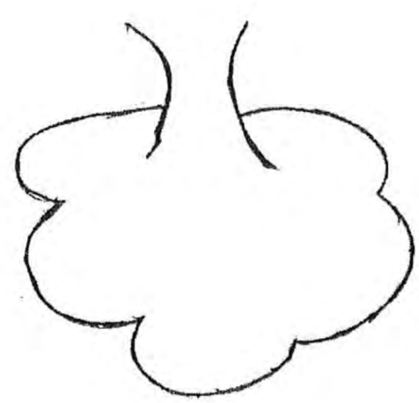
- Da otros ejemplos de pares de cosas que parecieran ser una reflejo de la otra.
- Haz un dibujo en una hoja de papel, trata de dibujar su imagen reflejada.

UNA MANO PARECE SER EL REFLEJO DE LA OTRA.
UNA SILLA FRENTE A OTRA.
DE HECHO, CREO QUE CADA OBJETO QUE TENGA UN EJE DE SIMETRÍA, LO PODEMOS COLOCAR CON UNO IGUAL, DE TAL MANERA QUE PAREZCA SU REFLEJO

- Sustituye el espejo por un vidrio transparente, con la ayuda de uno de tus compañeros, obsérvense y hagan movimientos de tal forma que uno sea la imagen del otro. Escribe tus observaciones.

SI COLOCAMOS ADECUADAMENTE DOS OBJETOS (IGUALES), PODEMOS LOGRAR QUE COINCIDAN, DE HECHO, PODRÍA DECIR QUE SON "CONGRUENTES". POR EJEMPLO, AL COLOCAR DOS PLUMAS, UNA A CADA LADO DEL VIDRIO, PODEMOS HACER QUE CADA UNA COINCIDA CON EL REFLEJO DE LA OTRA, Y SI ÉSTAS SON DE DIFERENTE COLOR, ÉSTOS SE COMBINAN.





En las observaciones de la primera actividad de esta hoja, aunque también podemos percibir cierta tendencia a sujetarse a la expresión propia del lenguaje formal, limitando la expresión libre y personal de lo que percibió y experimentó, puede uno percatarse que lo hace con más libertad que el caso "B", notándose su inclinación a describir más lo que pasa con las figuras geométricas que describir las observaciones de su propio cuerpo, esto tal vez influenciado por el hecho de haber pedido en una misma descripción dos experiencias distintas, siendo dominante en su mente la última (Véase primera parte de hoja de trabajo #1). Lo que sí podemos observar es que adelanta cualidades como preservación de medida y el hecho de que no se preserva la orientación; ya tenía un cierto manejo de la terminología relativa a la reflexión.

En las observaciones de la actividad 2, aunque con un poco de imprecisión de lenguaje, puede percibirse que tiene una concepción ya de la reflexión espacial; vuelve a usar el ejemplo de las manos como el caso "B", pero logra expresar que cualquier par de cuerpos congruentes, como dos sillas, pueden ser colocadas de tal manera que, con respecto a un plano de reflexión (aunque no menciona el termino "plano de reflexión"), una sea imagen bajo la reflexión de la otra. Obsérvese que identifica simetría con reflexión y que no distingue entre eje de simetría para figuras planas y plano de simetría para figuras tridimensionales.

En cuanto a las observaciones de la actividad 3, se ve claramente la influencia de experiencias anteriores (talleres) en los que se hizo uso del semiespejo, adelantándose a situaciones, que dentro de esta secuencia, se pide que desarrolle a partir de la hoja de trabajo no. 5, donde precisamente la atención se centra en la percepción de la reflexión en el espacio; por lo cual podemos percibir que más que su experiencia presente vivida en esta actividad, evocó alguna de esas experiencias académicas previas.

Observación: Puedo aplicar las mismas observaciones hechas para el caso "B".

Análisis de la hoja de trabajo No. 2

Con la hoja de trabajo No. 2, en general, lo que pretendemos es que se inicie un proceso de abstracción sobre las primeras experiencias, no en el sentido de abandonar la experiencia física, sino en cuanto a la naturaleza de las actividades que se encaminan ya hacia una conceptualización empírica.

Al iniciar la sesión de taller para la hoja no. 2, se les entrega dicha hoja de trabajo y se les proporciona un papel carbón a cada uno de ellos; dando las siguientes indicaciones:

- En una hoja de papel, trace una línea recta de borde a borde, sin importar la inclinación; remárcala fuertemente sin romper.
- Haga un doblez de la hoja a lo largo de la línea, de tal manera que la línea trazada quede hacia el exterior del doblez.
- Coloque la hoja de papel carbón sobre el escritorio, con la parte entintada hacia arriba.
- Coloque la hoja doblada sobre el papel carbón.
- Realiza el dibujo que tú quieras sobre la parte superior de la hoja doblada.
- Levanta y extiende la hoja.
- Observa las figuras obtenidas.

En la segunda parte del taller de esa misma hoja de trabajo, se les entrega una hoja con varias figuras donde se le pide que defina parejas, de tal manera que una sea reflejo de la otra, con respecto a algún espejo imaginario.

Finalmente se les pide un resumen de lo observado en las dos partes del taller correspondiente a esta hoja de trabajo.

Caso A:

HOJA DE TRABAJO No. 2

Nombre:______________________________ Fecha: 27-09-99

ACTIVIDADES:

- Dada una figura y una línea recta sobre una hoja de papel, obtén la imagen reflejada de dicha figura, como si la línea fuera el espejo, utilizando papel carbón y doblez de papel.

- Discute con tus compañeros tus experiencias, escribe lo que concluyeron.

La figura es reflejo igual pero de distinta manera acomodada.

- En la hoja que contienen varias figuras debes aparear las que pueden tomarse una como imagen reflejada de la otra con respecto a un espejo imaginario.

Justifica tus resultados.

1-11 Porque si doblamos la hoja que una sobre otra
6-13 "
3-9 "
10-4 "

- Trata de hacer un resumen tomando en cuenta las siguientes preguntas:
¿En que forma están colocados los pares de figuras en los que una es "reflejo" de la otra?.
¿Qué características mensurables tienen los objetos y sus "reflejos"?.

Las figuras que son el reflejo estan de forma hacia abajo conforme esta la original, y al doblar la hoja en dos partes una queda encima de la otra, ya que son las misma forma y el mismo tamaño.

Al analizar su dibujo nos dimos cuenta que el acomodo del papel carbón no lo hizo de forma correcta, debido a que si observamos la figura que el estudiante hizo, no es una reflexión sino una traslación, de cuyo error nosotros, como investigadores, obtuvimos un recurso no previsto, el uso del mismo material para explorar la descripción de otra isometría que sería la traslación. Sin embargo, como se les pide que luego discutan entre ellos su experiencia, suponemos que por lo mismo responde de manera correcta sus conclusiones.

En la segunda parte del taller, lo primero que observamos en este caso es que encuentra 4 parejas, pero en una de ellas, la pareja 10-4, suponemos que quiso escribir 10-14; ya que, de otra forma, son figuras que están muy lejos de tener una relación de reflexión. Sin embargo, al escribir sus observaciones lo hace de forma correcta; lo cual destaca la importancia de la discusión grupal, referida como tercera fase del modelo.

Observación: Este caso, por su propio esfuerzo, no ha logrado avanzar satisfactoriamente en su nivel de razonamiento, sino que se ha valido de las discusiones grupales para suplir lo que por él mismo debió haber construido.

Desde este momento casi inicial, ya se puede notar la importancia de la secuencialidad en las fases y niveles, ya que estas deficiencias, ausentes en los demás, para construir por sí mismo las nociones involucradas en la hoja 2, pueden tener una íntima relación con la falta de las experiencias vividas en la hoja no. 1; aunque, por otro lado, la naturaleza de esta segunda hoja proporciona elementos para, de alguna manera, recuperar al menos parcialmente las percepciones conceptuales insinuadas en el primer taller. Estas mismas deficiencias nos proporcionan motivos de duda, en cuanto al logro del primer nivel del Modelo.

CASO B:

HOJA DE TRABAJO No. 2

Nombre:______________________________ Fecha: 27-Abril-1999

ACTIVIDADES:

- Dada una figura y una línea recta sobre una hoja de papel, obtén la imagen reflejada de dicha figura, como si la línea fuera el espejo, utilizando papel carbón y doblez de papel.

- Discute con tus compañeros tus experiencias, escribe lo que concluyeron.

Que las figuras son congruentes

- En la hoja que contienen varias figuras debes aparear las que pueden tomarse una como imagen reflejada de la otra con respecto a un espejo imaginario.

Justifica tus resultados.

Nada mas tres pares de figuras concuerdan con su reflexion.

- Trata de hacer un resumen tomando en cuenta las siguientes preguntas:
¿En que forma están colocados los pares de figuras en los que una es "reflejo" de la otra?.
¿Qué características mensurables tienen los objetos y sus "reflejos"?.

Estan colocados inversamente
son congruentes.

En esta hoja de trabajo, a diferencia del caso "A", el caso "B" siguió de forma correcta las instrucciones para el uso del papel carbón, lo cual es notorio en su dibujo. En cuanto a sus observaciones, sigue cautivado con el concepto de congruencia.

Al hacer el apareamiento entre las figuras que se le proporcionaron, encuentra tres parejas, las cuales están correctas; dando además justificaciones válidas, pero no logró detectar todas las posibles.

En la pregunta no. 3, el estudiante no centra su atención en las propiedades puntuales obtenibles al comparar un objeto con su imagen reflejada; sólo percibe la congruencia entre dichas figuras, en lo cual sigue siendo muy insistente; además de detectar el problema de "orientación" generado por la reflexión.

Observaciones: Podemos percibir que este estudiante tiene limitantes propiciadas por su educación formalista previa, que le impiden desenvolverse con libertad y soltura en la naturaleza de las actividades propuestas; resaltando su uso insistente de la noción de congruencia, lo que dificulta un poco la percepción del grado en que logró, sobre todo en sus últimas fases, el nivel 1 del modelo de Van Hiele.

Caso C:

HOJA DE TRABAJO No. 2

Nombre: ____________________ **Fecha:** 27 04 99

ACTIVIDADES:

- Dada una figura y una línea recta sobre una hoja de papel, obtén la imagen reflejada de dicha figura, como si la línea fuera el espejo, utilizando papel carbón y doblez de papel.

- Discute con tus compañeros tus experiencias, escribe lo que concluyeron.

EL REFLEJO LO HICE CALCANDO EL DIBUJO CON EL PASANTE

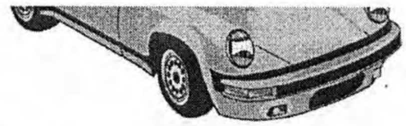
- En la hoja que contienen varias figuras debes aparear las que pueden tomarse una como imagen reflejada de la otra con respecto a un espejo imaginario.

Justifica tus resultados.

PARA APAREAR FIGURAS DOBLÉ LA HOJA HASTA PODER ENCIMAR UNA FIGURA CON OTRA.

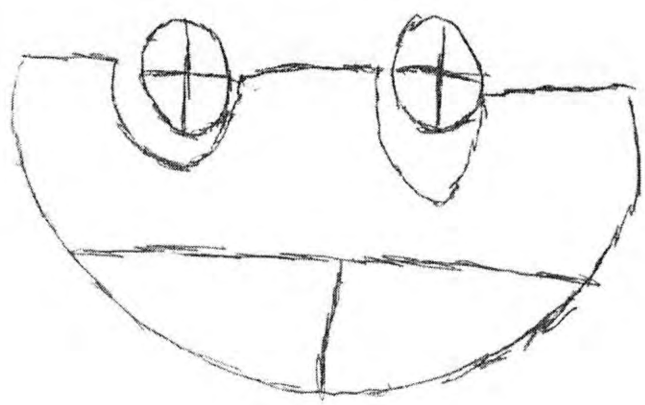
- Trata de hacer un resumen tomando en cuenta las siguientes preguntas:
¿En que forma están colocados los pares de figuras en los que una es "reflejo" de la otra?.
¿Qué características mensurables tienen los objetos y sus "reflejos"?.

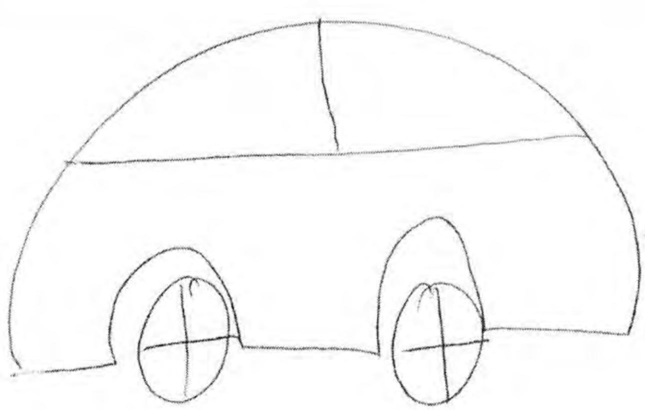
TIENEN LAS MISMAS DIMENSIONES LAS FIGURAS APAREADAS Y CADA LÍNEA QUE UNE SUS RESPECTIVOS PUNTOS ES PERPENDICULAR AL EJE DEL REFLEJO (DOBLEZ). CADA FIGURA SE ENCUENTRA A LA MISMA DISTANCIA DEL DOBLEZ QUE SU PAR.



1-11, 10-14, 7-14, 3-9, 8-9, [illegible], 4-6 + 6-13

ACTIVIDAD
#2





En la primera pregunta, el estudiante describe solo lo que hace, pero al mismo tiempo declara que lo que obtuvo fue el reflejo de la figura que dibujó, además, no tuvo dificultad para seguir las indicaciones del uso del papel y papel carbón, lo cual le permitió obviar la relación entre las figuras.

En la segunda parte del taller obtiene 7 pares, de las cuales 2 de ellos son incorrectos, ya que tendría que haber recortado las figuras para poderlas "encimar", porque según la justificación que él dió, es el de doblar la hojas hasta poder encimar una figura con la otra.

En la parte 3 de la hoja, hace un buen resumen de lo vivido en las dos partes del taller, en ella ya menciona dos de las propiedades más importantes de la reflexión que es la perpendicularidad y las distancia de la figura al eje (doblez en este caso) y de éste a su reflejo.

Observaciones: Después de hacer el análisis de estas dos hojas de trabajo, podemos asegurar que este estudiante logra, sin dificultad, el nivel 1.

Análisis de la hoja de trabajo No. 3

La hoja de trabajo No. 3 nos ayuda a ubicar a los estudiantes en el inicio del nivel 2.

Las actividades de dicha hoja de trabajo, tienen como objetivo inducir que el alumno descubra los elementos esenciales que intervienen para definir una reflexión, destacando la necesidad de la existencia de un eje de reflexión, con respecto al cual se observa:

-La equidistancia entre el punto P de la figura al eje y de este al punto reflejado, P'.

-La perpendicularidad del segmento PP' con respecto al eje de reflexión.

Esta hoja de trabajo propicia, además, el inicio del proceso de matematización del concepto de reflexión, al dirigirse hacia el análisis local o puntual de los pares de puntos relacionados por la reflexión; de donde se desprenderán las propiedades más fundamentales de dicha transformación.

Caso A:

HOJA DE TRABAJO No. 3

Nombre: ______________________ Fecha: 03-05-99.

ACTIVIDADES:

- En la actividad anterior dibujaste el reflejo de una figura utilizando un espejo imaginario. Utiliza tu dibujo anterior, toma un punto (llámale P) de la figura original y siguiendo el mismo procedimiento (de trabajar con el papel carbón) encuentra su reflejo (P').
- Experimenta para más puntos de la figura.
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- ¿Puedes observar algo con respecto a la relación de éste segmento con el eje de reflexión (espejo imaginario)? que la figura original es igual a la del reflejo. y con el segmento trazado se forma un ángulo de 90 grados

Al segmento que trazaste le llamaremos PP'.

- Ayúdate de una escuadra ¿Me puedes decir que ángulo se forma entre el segmento PP' y el eje de reflexión? 90° Recto

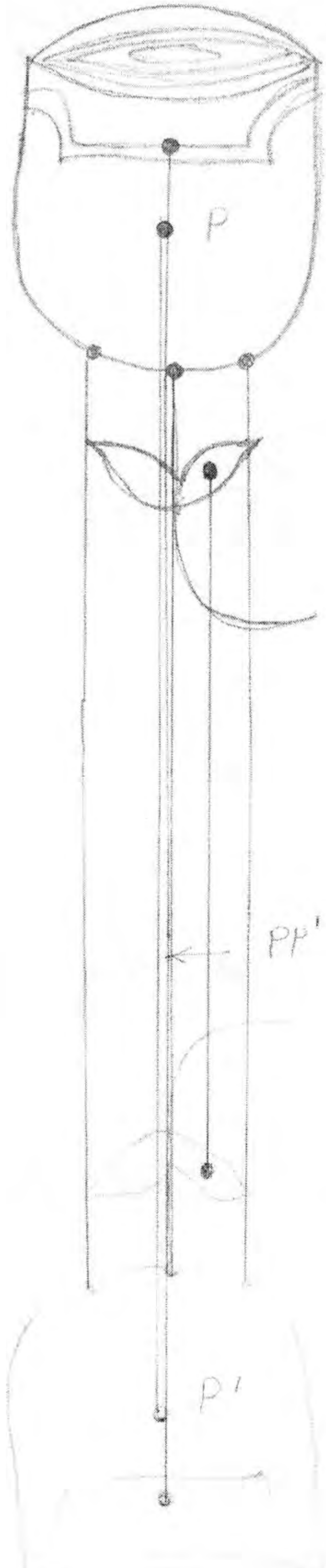
- ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura.
- Anota tus observaciones: Sí. La diferencia es que los segmentos están trazados a distintas distancias uno del otro.

¿Qué relación habrá entre la distancia del punto P al espejo imaginario y de éste al punto P'? Que es la misma distancia del espejo imaginario hacia los dos puntos

- Experimenta con más puntos.

¿Tienes la misma respuesta para la pregunta anterior? Sí

Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones: Que al trazar los puntos en la figura real se reflejan en la otra y tienen la misma distancia hacia el espejo imaginario y que la figura está trazada de la misma forma que el lado contrario al real pero aún siguen siendo iguales


P
PP'
P'

En esta parte el caso "A" lo que logra observar es, además que la figura es igual a la de su reflejo, que el segmento trazado forma un eje de coordenadas (Creemos con esto que ya está pensando en perpendicularidad), logra observar que el ángulo formado entre ellos es recto. Al hacer el mismo experimento observa que sucede lo mismo con más puntos de la figura, sin embargo esperaríamos que además dijera en sus comentarios que en todos los casos, el eje y el segmento que une al punto original con su reflejo forman un ángulo recto, pero no, escribe algo muy vago; y así, dice: "Si. La diferencia es que los segmentos están trazados a distintas distancias uno del otro".

Aunque no es muy clara su redacción, al hablar de la relación que hay entre la distancia del punto P al espejo imaginario y de éste a P', dice que "es la misma distancia del espejo imaginario hacia los dos puntos" queremos pensar que se refería a que es la misma distancia del eje a cada uno de los puntos, es decir del eje a P y del eje a P'.

Comparó la distancia para los demás puntos con los que había experimentado y se dio cuenta que sucede lo mismo. Aunque en el dibujo le falta poner etiquetas a los demás puntos con los que experimentó y a su imagen reflejada.

Al escribir sus comentarios, sobre todo el proceso que hizo para esta hoja de trabajo, hace más énfasis en la distancia, que las figuras son iguales, y en la posición de las figuras, omite algo muy importante que observó y comentó anteriormente que es el ángulo formado entre el eje imaginario y el segmento formado por los puntos P y P'; por lo que, si en este momento le pidiéramos que escribiera unja definición, con sus propias palabras, del concepto de reflexión, podría esperarse que diera una definición confusa.

Caso B:

HOJA DE TRABAJO No. 3

Nombre: ______________________ **Fecha:** ______________

ACTIVIDADES:

- En la actividad anterior dibujaste el reflejo de una figura utilizando un espejo imaginario. Utiliza tu dibujo anterior, toma un punto (llámale P) de la figura original y siguiendo el mismo procedimiento (de trabajar con el papel carbón) encuentra su reflejo (P').
- Experimenta para más puntos de la figura.
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- ¿Puedes observar algo con respecto a la relación de éste segmento con el eje de reflexión (espejo imaginario)?
  que el eje de reflexión intersecta al segmento en el punto medio de dicho segmento PP'

Al segmento que trazaste le llamaremos PP'.

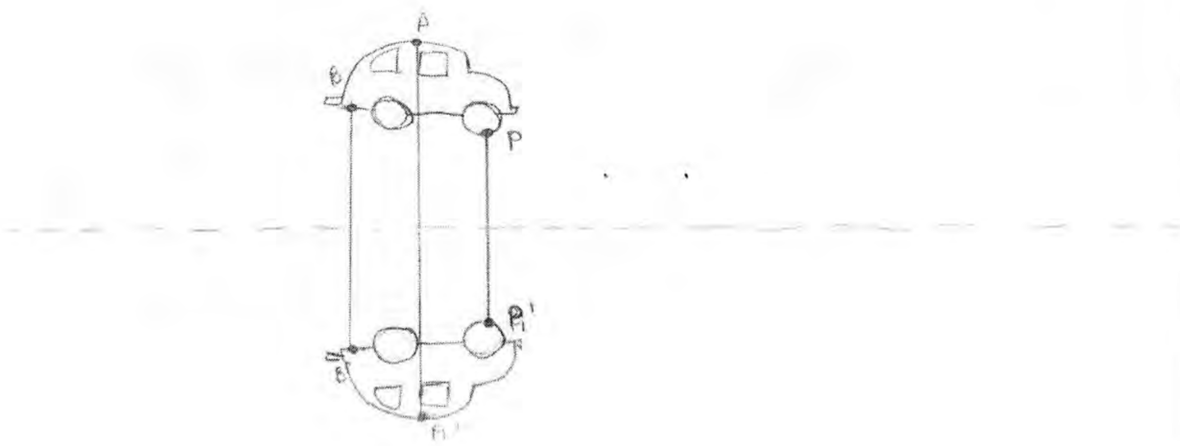
- Ayúdate de una escuadra ¿Me puedes decir que ángulo se forma entre el segmento PP' y el eje de reflexión? 90° (un recto)
- ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura.
- Anota tus observaciones:
  Si sucede lo mismo

¿Qué relación habrá entre la distancia del punto P al espejo imaginario y de éste al punto P'?
las distancias iguales

- Experimenta con más puntos.

¿Tienes la misma respuesta para la pregunta anterior? Si

Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:
* El eje de reflexión se encuentra en el punto medio del segmento PP'.
* La distancia de P al eje de reflexión es igual a la distancia de P' al eje de reflexión
* El ángulo que forma el eje de reflexión con la distancia del eje a P ó a P' forma un recto



En cuanto a esta hoja de trabajo, en la primera pregunta omite lo referente a perpendicularidad, habla solo de que el eje de reflexión intercepta al segmento PP' en el punto medio. En cuanto a las preguntas 2, 3, 4 y 5 las contesta de manera muy escueta, sin mucha explicación, pero de manera correcta. Los dibujos los hace de manera correcta y etiqueta cada punto con los que experimentó, así como sus reflejos.

En la última pregunta, donde después de comentar con sus compañeros todo lo observado en el proceso, tiene que escribir sus conclusiones, tuvo algunas imprecisiones como las siguientes:

a) Afirma que el eje de reflexión se encuentra en el punto medio del segmento PP', en lugar de afirmar que pasa por ahí.
b) Habla del ángulo que forma el eje de reflexión con la distancia del eje a P o a P', en lugar de referirse al segmento PP' por lo que su referencia a la perpendicularidad queda un tanto vaga e imprecisa. A pesar de estas deficiencias de expresión y redacción, puede percibirse que el

proceso vivido, lo llevó a interiorizar alguna noción, más precisa en su mente que en su expresión.

Caso C:

HOJA DE TRABAJO No. 3

Nombre:______________________________ **Fecha:** ______________

ACTIVIDADES:

- En la actividad anterior dibujaste el reflejo de una figura utilizando un espejo imaginario. Utiliza tu dibujo anterior, toma un punto (llámale P) de la figura original y siguiendo el mismo procedimiento (de trabajar con el papel carbón) encuentra su reflejo (P').
- Experimenta para más puntos de la figura.
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- ¿Puedes observar algo con respecto a la relación de éste segmento con el eje de reflexión (espejo imaginario)? PARECE QUE SON PERPENDICULARES

Al segmento que trazaste le llamaremos PP'.

- Ayúdate de una escuadra ¿Me puedes decir que ángulo se forma entre el segmento PP' y el eje de reflexión? 90°

- ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura.
- Anota tus observaciones:

SUCEDE LO MISMO PARA TODOS LOS PUNTOS QUE TRACE, LOS SEGMENTO P_1P_1' SON PERPENDICULARES AL EJE.

¿Qué relación habrá entre la distancia del punto P al espejo imaginario y de éste al punto P'?

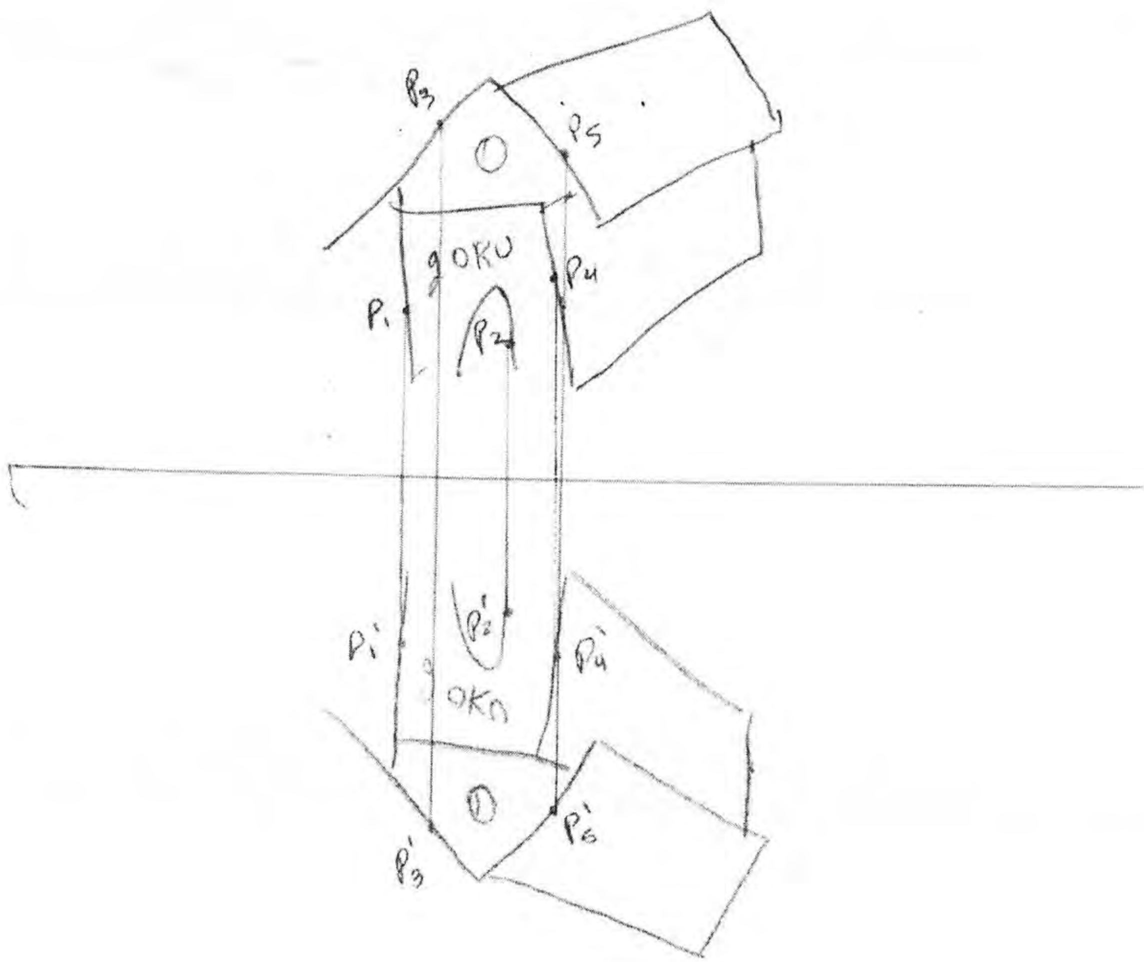
ES LA MISMA DE P AL EJE QUE DE P' AL EJE.

- Experimenta con más puntos.

¿Tienes la misma respuesta para la pregunta anterior? SI

Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

ENCONTRE QUE CADA PUNTO P EN UNA FIGURA, AL UNIRSE CON SU REFLEJO P' CON RESPECTO A UN EJE DADO, FORMAN SEGMENTOS DE LINEA QUE ~~[illegible]~~ SON TODOS PARALELOS Y PERPENDICULARES AL EJE.



Este estudiante en la primera parte del experimento percibe rápidamente la propiedad de la perpendicularidad, y esto que percibe le queda más claro cuando se le pide que con ayuda de una escuadra mida el ángulo entre el eje de reflexión y el segmento PP'.

En la segunda parte de esta hoja, cuando se le pide que experimente con más puntos y anote sus observaciones, no solo contesta bien sino que llega a escribirlo de forma general "Sucede lo mismo para todos los puntos que tracé, los segmentos P_iP_i' son perpendiculares al eje".

En cuanto a su dibujo etiqueta los puntos con los que experimentó así como sus respectivos reflejos.

Las preguntas 4 y 5 las contesta de manera correcta. Al pedirle que anote sus observaciones, estas nos parecen muy bien, al generalizar lo que sucede con los puntos......"forman segmentos de línea que son todos paralelos y perpendiculares al eje" estamos seguros (por sus diálogos) que quiso decir que los "segmentos de línea son todos paralelos entre sí y perpendiculares al eje". Lo que omitió en ese momento, es hablar de la relación entre las distancias del punto al eje y de éste al punto reflejado, algo que durante el proceso ya había manifestado percibirlo.

Comentario a la hoja No. 3: No olvidemos que el nivel de respuesta de esta hoja de trabajo (No.3) representa para nosotros la categoría de análisis para el logro de las tres primeras fases en el segundo nivel de Van Hiele. Al concluir el análisis de la quinta hoja daremos nuestro juicio relativo al logro del 2°. Nivel.

Recordemos que estas tres primeras hojas de trabajo, como lo mencionamos en el capítulo de metodología, nos sirvió como instrumento para la elección de los casos A, B y C, por lo que tenemos que A es el de desempeño bajo, B de desempeño medio y C de desempeño alto. Aunque se tenían 2 casos de desempeño bajo, 3 de desempeño medio y dos de desempeño alto, decidimos tomar solo uno de cada estrato.

Enseguida presentamos el análisis individual y comparativo de cada uno de los tres casos, siendo ésta la primera actividad propiamente después del proceso diagnóstico.

Análisis de la hoja de trabajo No. 4

En esta hoja de trabajo, esperamos que cada uno de sus apartados sirva de reforzamiento de las ideas construidas acerca de la reflexión, así como que propicie el inicio de un proceso de maduración y reflexión del concepto. Además esta actividad nos permite decidir si el estudiante se desempeña de manera satisfactoria en las primeras fases del nivel 3 del modelo.

En nuestras expectativas, esperábamos que ninguno de los apartados representara dificultad alguna para los estudiantes, excepto tal vez, en los últimos apartados donde hay ejes oblicuos.

Ya que, por ejemplo, en el penúltimo apartado, es difícil trazar, con ayuda de la cuadrícula, una línea perpendicular al eje; y más aún, si dicha línea debería de pasar por los vértices del triángulo dado, esto debido a que la pendiente de dicha recta, si tomáramos la línea horizontal inferior como eje "x", sería 6/8, igual a ¾, por lo que la pendiente de su perpendicular debe ser -4/3. Muchas veces se conoce una relación algebraica entre los objetos, como en este caso la de las pendientes de rectas perpendiculares, pero debido a esa tendencia formalista, no se enfatiza la habilidad de identificar dicha relación en el ámbito de la geometría sintética; como en este caso sería el uso de la cuadrícula para trazar una perpendicular a una recta dada; si a esto le agregamos el que además tenga que pasar por algún punto dado, como sería en este caso un vértice del triángulo dado, complica aún más la posible visualización de la perpendicular buscada.

En el último apartado, requiere prolongar el espacio cuadriculado para completar la imagen reflejada del triángulo, aunque es sencillo, en este caso, trazar líneas perpendiculares al eje de reflexión basados en la cuadricula, ya que, con respecto a la horizontal, el eje tiene una pendiente de -1 (135°), por lo cual, cualquier perpendicular al eje tendrá pendiente 1 (45°) .

Caso A:

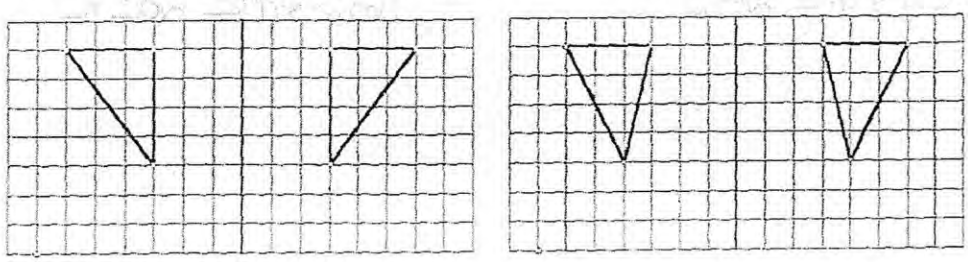
A continuación presentamos la hoja de respuestas del caso A:

HOJA DE TRABAJO No. 4

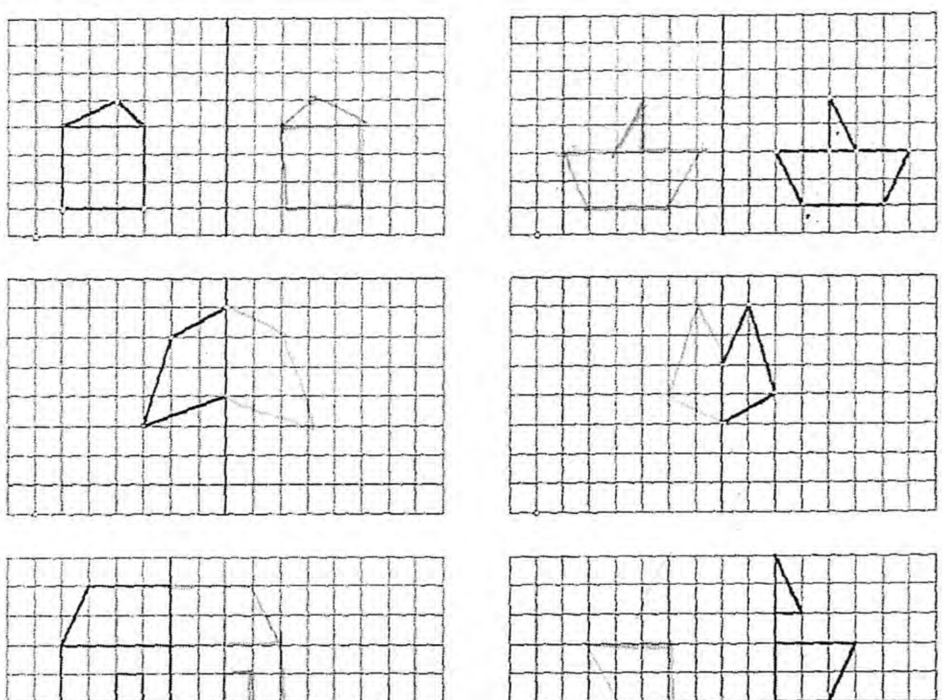
Nombre:_ _ ________________ Fecha: ______________

ACTIVIDADES:

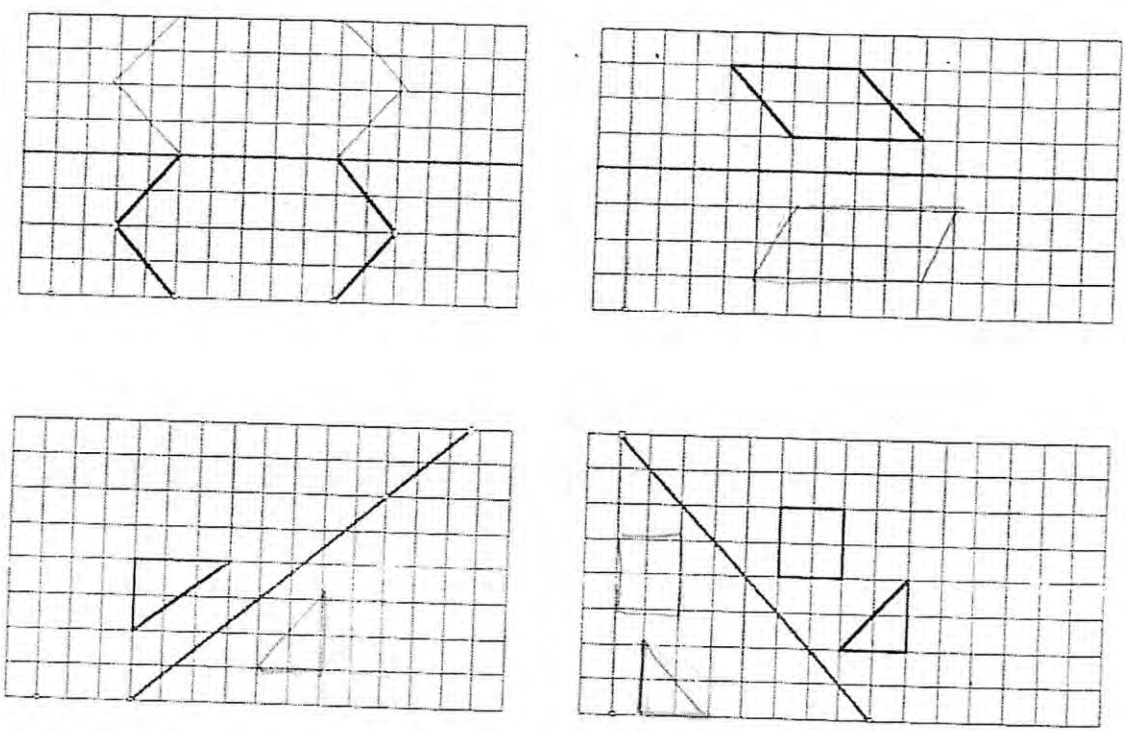
1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir si los pares de figuras en ellas contenidas son simétricas o no con respecto al eje resaltado.



2.- En cada una de las siguientes cuadrículas, dibujar la figura simétrica a la figura dada con respecto al eje indicado.



HOJA DE TRABAJO No. 4



Este caso presenta dificultades desde los primeros apartados, donde no esperábamos que sucediera. Sobre todo, a la hora de dibujar los reflejos se le olvida una de las propiedades importantes y en la que pudo haberse basado rápidamente, es la relación de distancia de cada uno de los puntos de la figura al eje y de éste a los puntos reflejados. Nos causa especial extrañeza los errores cometidos en los dos últimos apartados de la primera página. Dónde si esperábamos un cierto grado de dificultad, nuestro pronóstico si se cumplió en este estudiante, pero el error fue más notorio en el último apartado que en el penúltimo, aún cuando éste presenta mayor grado de dificultad que él último.

Este caso como recordaremos, no vivió el proceso de la hoja de trabajo No.1, en la hoja de trabajo No. 2 su desempeño general fue muy deficiente, aunque en la hoja No. 3, tuvo desempeño medianamente satisfactorio; lo que podría explicar que una falta de secuencialidad, como el modelo lo exige, propició que el reforzamiento que esperábamos para la hoja No. 4, no fue tal, sino más bien, expresión de las deficiencias con respecto a las nociones básicas que debió haber construido en las primeras dos hojas de trabajo. Por lo que, por la falta de secuencialidad del proceso y el no haber percibido las ideas centrales en sus actividades, tenemos estos resultados en esta hoja de trabajo.

No perdamos de vista que, además de la intención global de reforzamiento del proceso, a la vez esta hoja de trabajo nos permite decidir si el estudiante se desempeña satisfactoriamente en las primeras fases del nivel 3; en éstos términos, podemos afirmar que este estudiante, por lo que puede verse en su desempeño deficiente en esta hoja de trabajo, está aún lejos de llegar siquiera a los umbrales del 3er nivel.

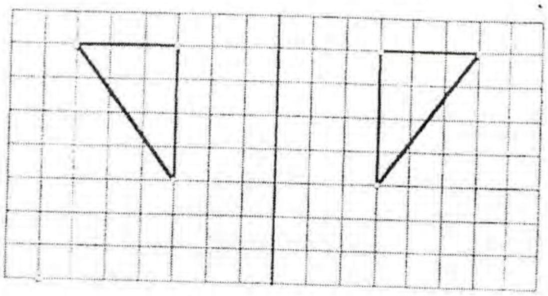
Caso B:

HOJA DE TRABAJO No. 4

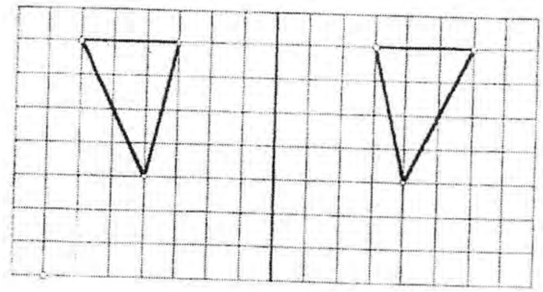
Nombre:________________________ **Fecha:** 13 - Mayo - 1999

ACTIVIDADES:

1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir si los pares de figuras en ellas contenidas son simétricas o no con respecto al eje resaltado.

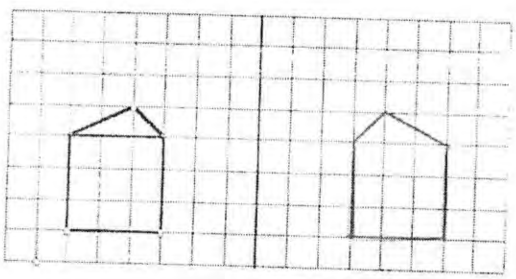


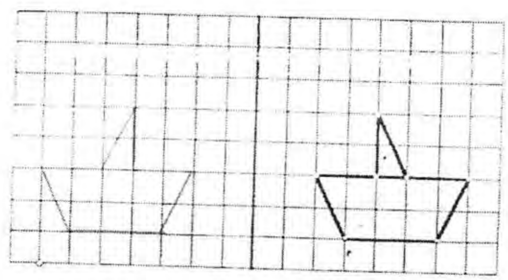
Si

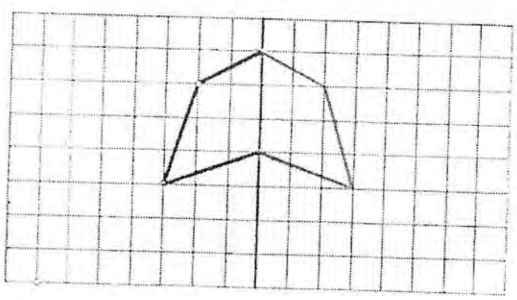


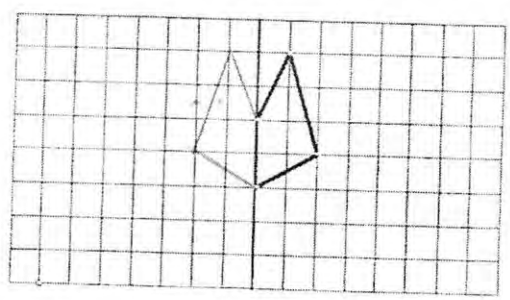
Si

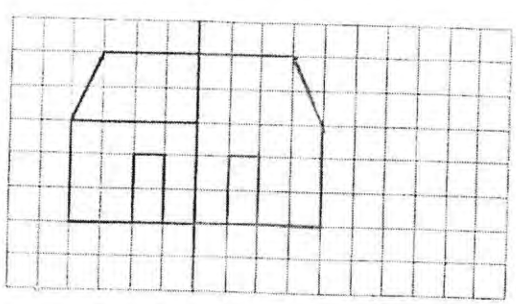
2.- En cada una de las siguientes cuadrículas, dibujar la figura simétrica a la figura dada con respecto al eje indicado.

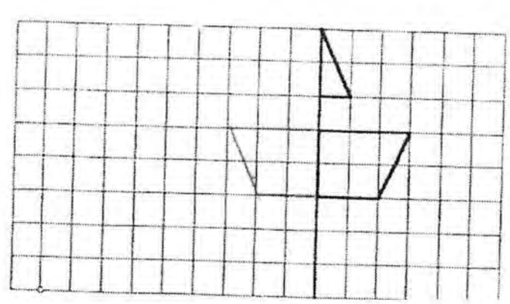




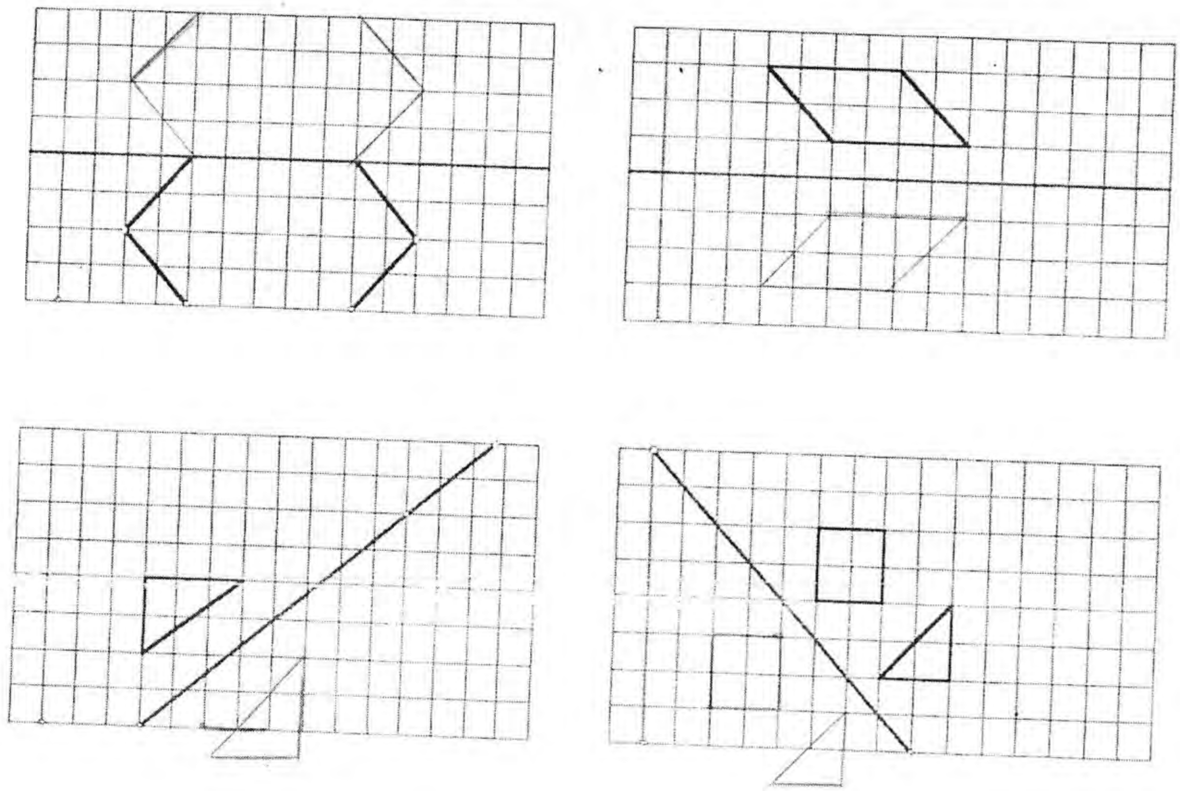








HOJA DE TRABAJO No. 4



Este caso, contesta de manera correcta la mayoría de los apartados, y tiene una habilidad para resolver la última cuadrícula donde podía esperase, según nuestros pronósticos, un mayor grado de dificultad; donde sí tuvo una leve falla fue en el penúltimo apartado, donde era aún más difícil trazar, con ayuda de la cuadricula, una línea perpendicular al eje; y más aún, si dicha líneas deberían de pasar por los vértices del triángulo dado.

Recordemos que este caso sí vivió completamente el proceso y logramos que perciba las propiedades importantes de la reflexión, por lo que en él, el objetivo de ésta hoja de trabajo (de reforzamiento), se cumple; además, según el otro objetivo de la hoja, podemos afirmar que en este momento se encuentra ya arribando al tercer nivel de Van Hiele.

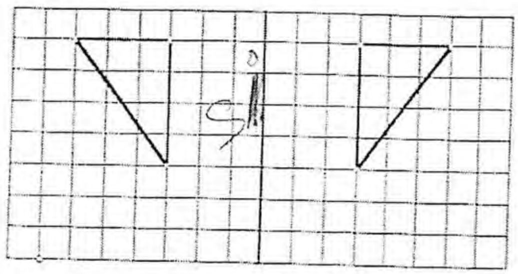
Caso C:

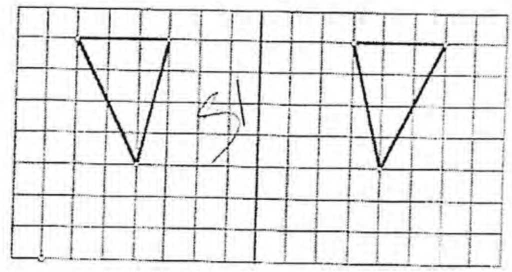
HOJA DE TRABAJO No. 4

Nombre:__ ______________ ____ **Fecha:** 1-JUNIO-99

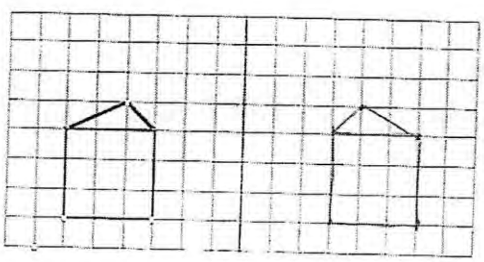
ACTIVIDADES:

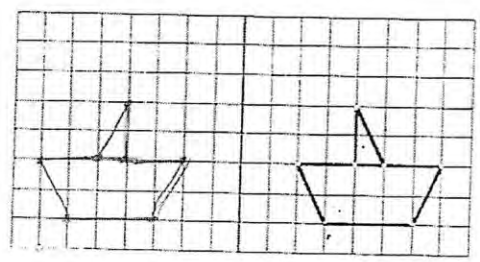
1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir si los pares de figuras en ellas contenidas son simétricas o no con respecto al eje resaltado.

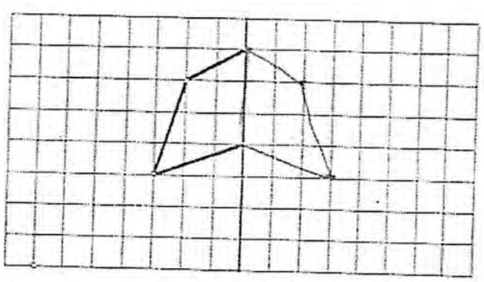


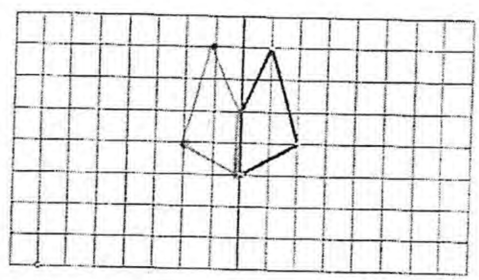


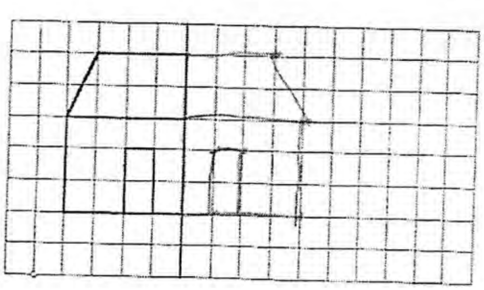
2.- En cada una de las siguientes cuadrículas, dibujar la figura simétrica a la figura dada con respecto al eje indicado.

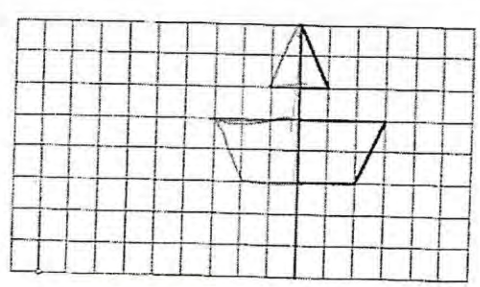




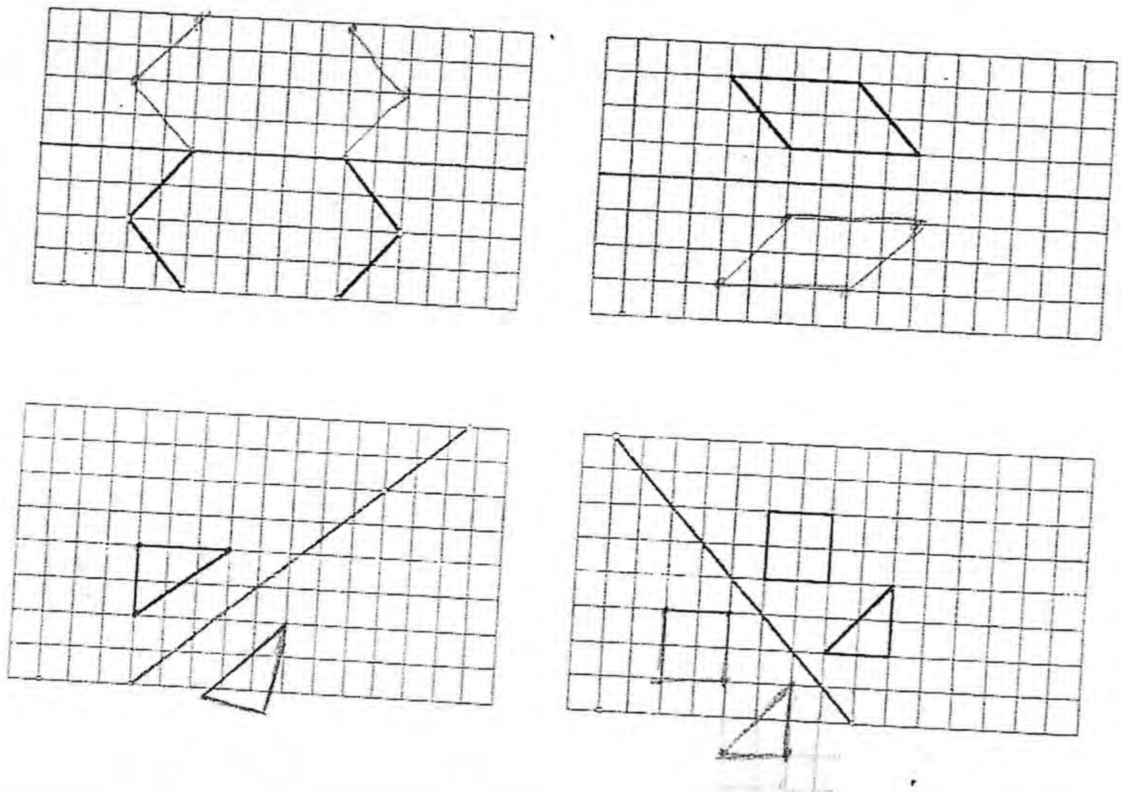








HOJA DE TRABAJO No. 4



En este caso, al igual que el caso B, se presenta la misma situación, sólo presenta dificultad en la penúltima cuadrícula. Además que este caso vivió de manera completa el proceso de las hojas anteriores de trabajo, y cumplió con nuestras expectativas satisfactoriamente, por lo que podemos asegurar con certeza, de que en este momento tiene cubierta las primeras fases del tercer nivel.

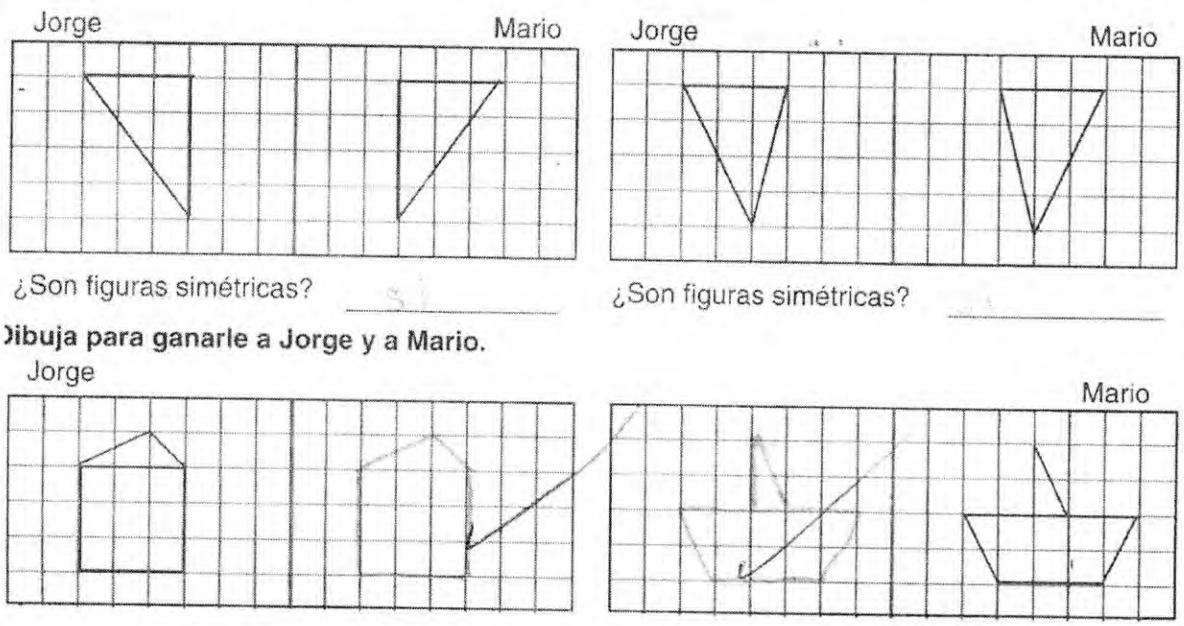
Observaciones generales de la hoja de trabajo No. 4: Si recordamos el comportamiento de los casos en las tres hojas anteriores, observamos que tiene sentido la secuencia ordenada de las hojas de trabajo, y que al perder la secuencia al no realizar alguna de ellas, manifiesta dificultades para poder contestar las siguientes, como sucedió en el caso "A".

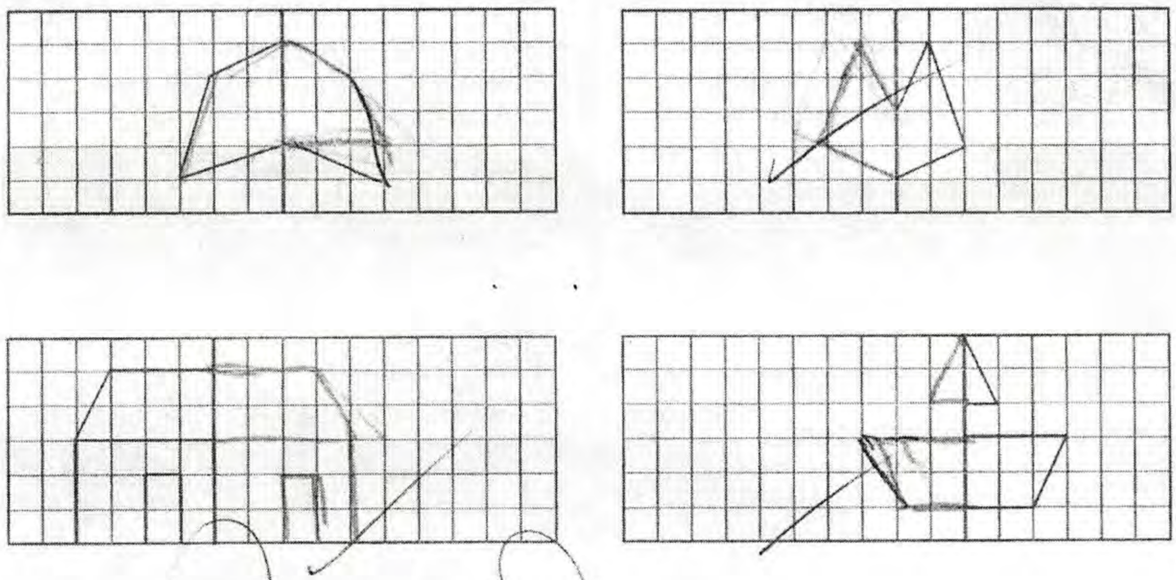
En cuanto a los casos B y C, aún cuando contestaron esta hoja extraordinariamente bien; y sobre todo el caso C que, como veremos, fue el único que realizó actividades correspondientes al nivel 5, es sorprendente el grado de dificultad que presentó para ellos la parte final de la segunda página de esta hoja de trabajo. Podría decirse que la hoja, en sí misma, sobre todo en su segunda página, presenta un grado de dificultad sobresaliente, lo cual nunca nos hubiéramos imaginado, debido al nivel del documento de donde lo tomamos (Matemáticas Tercer grado, de primaria) que contiene ya las últimas reformas para la educación primaria realizadas en 1992.

Estos textos plantean, de alguna manera, el modelo de Van-Hiele y el constructivismo (por lo menos se encuentra bien explícito en los libros de lectura de los maestros de primaria), esto quiere decir que nuestros estudiantes con los que hemos realizado el trabajo de investigación, no vivieron este proceso en su educación primaria (ya que ingresaron en 1998 o 1999 a la Universidad); por lo que nos pareció interesante aplicarles estas actividades, que las consideramos muy adecuadas para el tema y para lograr las primeras fases del 3er. nivel del modelo.

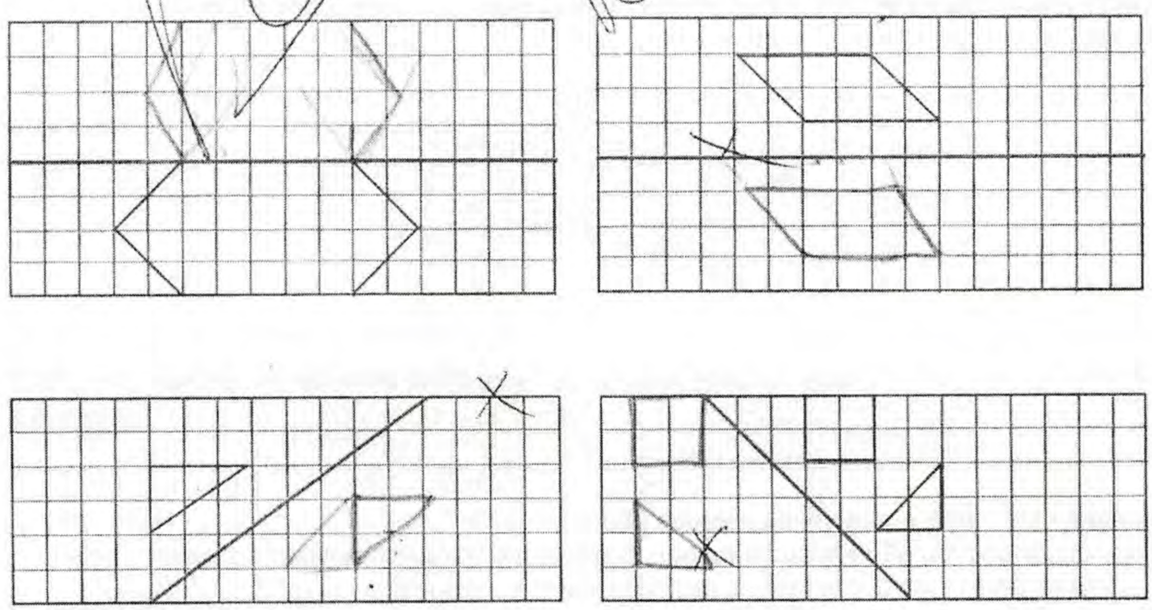
Comentario adicional a nuestra observaciones: Podríamos conjeturar que esta actividad muestra , a los años de haberse iniciado la educación primaria con este enfoque, la importancia de tomar en cuenta los lineamientos planteados en el libro del maestro y así descubrir, a largo plazo, los frutos, de este proceso; ya que a quienes no les tocó vivirlo (Como se aprecia en nuestros casos de estudio), manifiestan, con cierta claridad, que les causa alguna dificultad el realizar determinadas actividades de nivel primaria que podría esperarse no se presente con quienes vivieron o están viviendo este proceso; esto requeriría una experimentación adicional para rechazar o comprobar la conjetura.

Por ahora, solo presentamos lo que un estudiante, entonces niño de tercer año, contestó esta actividad, tomando en cuenta que en su momento era un estudiante destacado.





2 En las cuadrículas de abajo el eje de simetría está en distintas posiciones. **Márcalo con azul y haz dibujos simétricos con respecto al eje que marcaste.**



Obsérvese además el criterio de calificación del profesor, lo cual podría darnos a entender, o un descuido del profesor, o inclusive manejo deficiente del concepto por parte del mismo profesor.

Aunque esto también podría propiciar reflexiones, para investigaciones futuras, acerca del nivel de dificultad propio de esta actividad y su posible ubicación equivocada para nivel de 3er. año de primaria.

Análisis de la hoja de trabajo No. 5

Continuando con el análisis de las hojas de trabajo de nuestros casos, presentamos la hoja de trabajo No. 5, en ella se hace uso del "Semiespejo" (Descrito en el capitulo de Antecedentes), mediante este dispositivo es posible estudiar todos los aspectos de la reflexión y la congruencia de figuras planas ya considerados, que fueron estudiados mediante otros dispositivos tales como papel y papel carbón de desecho y así como en la hoja No. 6, la computadora; pero aquí destacamos lo que no se puede lograr ni con el papel carbón y ni siquiera con la computadora, a saber, el estudio de algunas propiedades geométricas de las figuras tridimensionales.

Esta hoja de trabajo corresponde al segundo nivel, complementando lo que se hace en la hoja 3, correspondiente al inicio de dicho nivel.

Esperaríamos que el estudiante amplíe y redacte mejor las propiedades de la reflexión, y observe qué sucede con las figuras tridimensionales.

Caso A:

HOJA DE TRABAJO No. 5

Nombre: Fecha: ____________

ACTIVIDADES

- Comprueba que todas tus actividades realizadas con la ayuda del papel carbón pueden llevarse a cabo por medio del vidrio reflecta, colocando éste perpendicular a la superficie y alineado al eje de reflexión.
  Explica brevemente que pasos seguiste para concluir lo antes mencionado.

- Utiliza de nuevo el vidrio reflecta colocando una figura por un lado de él observa su reflejo, ahora coloca otra figura de igual forma y tamaño pero de diferente color del otro lado del vidrio reflecta y observa su reflejo.
¿Observas alguna propiedad en la reflexión? Enúnciala. Conmutativo.

- Haz un resumen de lo observado, describe las propiedades que debe cumplir una figura para ser reflejo de otra con respecto a un espejo real o virtual.

Este estudiante sigue bien las instrucciones para el uso del semiespejo, pero la pregunta No. 2 la contesta de manera incorrecta, habla de la propiedad conmutativa, sin precisar el sentido en el que la aplica; tal vez se refiera al hecho de que son mutuamente reflejo uno del otro; es decir, si el objeto A es imagen del objeto B, entonces B también es imagen del objeto A; pero se aprecia aún su tendencia a expresar las cosas en el lenguaje formal, que para ellos es el convencional, lo cual le limita el poder hacer una observación libre y objetiva de los hechos.

En la pregunta no. 3, el estudiante presenta problemas de redacción, es decir, se puede observar que el proceso le ayuda a construir una idea de un concepto, aunque presente dificultades para expresarlo con precisión.

Podríamos decir que este caso, después de contestar la hoja 3 y 5, alcanza con ciertas dificultades el nivel 2.

Caso B:

HOJA DE TRABAJO No. 5

Nombre: ______________________ **Fecha:** 11- Mayo -1999

ACTIVIDADES:

- Comprueba que todas tus actividades realizadas con la ayuda del papel carbón pueden llevarse a cabo por medio del vidrio reflecta, colocando éste perpendicular a la superficie y alineado al eje de reflexión.

Explica brevemente que pasos seguiste para concluir lo antes mencionado.

1. Dibujar una figura en una hoja.
2. Trazar el eje de reflexión
3. se observo que paso lo mismo que con el papel carbon

- Utiliza de nuevo el vidrio reflecta colocando una figura por un lado de él observa su reflejo, ahora coloca otra figura de igual forma y tamaño pero de diferente color del otro lado del vidrio reflecta y observa su reflejo.

¿Observas alguna propiedad en la reflexión? Enúnciala.

Que una es el reflejo de la otra.

- Haz un resumen de lo observado, describe las propiedades que debe cumplir una figura para ser reflejo de otra con respecto a un espejo real o virtual.

1. las distancias del mismo punto de cada figura son iguales con respecto al eje de reflexión
2. Las figuras tienen la misma Area
3. son semejantes

En cuanto a la hoja de trabajo No. 5, en la pregunta no. 1, le falta mencionar lo más importante que es de qué manera usó el vidrio reflecta. En la pregunta No. 2 no contesta, más bien responde con una expresión afirmativa de la pregunta. En la pregunta no. 3, al hacer el resumen de las propiedades que debe cumplir una figura para ser reflejo de otra con respecto a un espejo real o virtual, no es preciso, y no solo eso, sino que le falto mencionar una propiedad muy importante que es la perpendicularidad.

Podríamos decir que este caso, después de contestar la hoja 3 y 5, logra construir en su mente el pensamiento geométrico adecuado al nivel 2, pero manifiesta ciertas dificultades para expresarlas por escrito con precisión; lo cual, de alguna manera, proporciona elementos para cuestionar el grado de dominio de este nivel.

Caso "C":

HOJA DE TRABAJO No. 5

Nombre:___ _______________ ______ **Fecha:** 4-Junio-99

ACTIVIDADES:

- Comprueba que todas tus actividades realizadas con la ayuda del papel carbón pueden llevarse a cabo por medio del vidrio reflecta, colocando éste perpendicular a la superficie y alineado al eje de reflexión.

Explica brevemente que pasos seguiste para concluir lo antes mencionado.

COLOQUÉ EL VIDRIO REFLECTA ALINEADO SOBRE EL EJE DE REFLEXIÓN, PERPENDICULAR AL PLANO DONDE ESTÁ EL DIBUJO; EL DIBUJO SE REFLEJA SOBRE EL VIDRIO Y ÉSTE REFLEJO PARECE ESTAR SOBRE LA HOJA AL OTRO LADO DEL VIDRIO; LO QUE HICE FUE SOLO "REMARCARLO".

- Utiliza de nuevo el vidrio reflecta colocando una figura por un lado de él, observa su reflejo; ahora coloca otra figura de igual forma y tamaño pero de diferente color del otro lado del vidrio reflecta y observa su reflejo.

¿Observas alguna propiedad de la reflexión? Enúnciala.

LOS COLORES SE COMBINAN.

- Haz un resumen de lo observado, describe las propiedades que debe cumplir una figura para ser reflejo de otra con respecto a un espejo real o virtual.

- DEBEN TENER IGUAL TAMAÑO, MISMA FORMA Y TENER UN EJE DE SIMETRÍA.

En la hoja de trabajo no. 5, contesta de manera correcta la pregunta No. 1, en la pregunta No. 2, solo contesta lo que observó, pero no enuncia las propiedades matemáticas de la reflexión, que es a lo que nos referíamos; lo mismo sucede con la pregunta 3, no enuncia de manera correcta las propiedades.

Después de analizar las hojas 3 y 5, podemos decir que este caso logra el nivel 2, pero con algunas observaciones que hablan de que el logro no fue perfecto.

Análisis de las hojas 6,7 y 8.

Las hojas 4,4b, 6,7 y 8, se diseñaron con la finalidad de lograr el nivel 3 (de Clasificación) de razonamiento geométrico y decimos que este nivel se logra si el estudiante:

-Puede justificar la existencia de un solo eje de reflexión.

-Da una definición formal de reflexión.

-Describe qué sucede con la composición de reflexiones.

-Concluye que la reflexión es una de las isometrías.

- Describe la relación de la reflexión con otras isometrías.

Caso A:

HOJA DE TRABAJO No. 6

Nombre: ______________________ **Fecha:** 19-05-99

ACTIVIDADES:

Tu ya conoces el paquete Geometra's Sketchpad y tienes algunas conclusiones (debido a tus experiencias en las actividades anteriores) sobre las propiedades que debe de cumplir una figura para ser reflejo de otra con respecto a un espejo real o virtual (eje de reflexión).
Haz uso de ese paquete en las siguientes actividades:

- Dibuja un punto P y tu espejo imaginario (un eje), ahora refleja ese punto (Llámalo P').
- Trata de mover P. ¿Qué observas?

Al mover el punto [illegible] se mueve [illegible]

- Une tu punto P con su reflejo P' por medio de un segmento (PP').
- Mide el ángulo que se forma entre el eje de reflexión y el segmento PP'.
- ¿Qué relación existe entre esas dos líneas?

[illegible] siempre [illegible]

- Ahora mide la distancia que existe entre tu punto P y el eje, así mismo la distancia del eje al reflejo del punto. ¿Que observas?

Existe la misma distancia de P al eje y del eje a P'

- Desliza el punto P. ¿Qué observas en cuanto a las medidas que obtuviste anteriormente?

Siempre son iguales

- Ahora haz una figura y refléjala, tomando un punto P de ella, sigue el sig. procedimiento:
  a) A ese punto P encuentra su reflejo (P') y únelos por medio de un segmento.
  b) Mide el ángulo que se forma entre el eje de reflexión y el segmento PP'.
  c) Mide la distancia que existe entre tu punto P y el eje, así mismo la distancia del eje al reflejo del punto.
  d) De la misma forma sigue experimentando deslizando al punto P sobre la figura.
  e) Dale animación al punto P sobre la figura. Anota tus observaciones:

La distancia que existe de el punto P al eje es la misma que del eje al [illegible]
Al deslizar P a cualquier parte el punto P' se mueve de igual forma.

- Mueve tu figura original, ya sea de forma total o parcial. ¿Qué observas? Ahora mueve su reflejo.

- ¿Se estará cumpliendo alguna propiedad?

Sí la propiedad [illegible]

Ms. T. 1289

HOJA DE TRABAJO No. 7

Nombre:______________________ Fecha: 21-05-99

ACTIVIDADES:

- ¿Qué tan importante es para ti la perpendicularidad al hablar de reflexión?

Muy importante, puesto que para que una figura sea reflejo de otra, al unir las dos figuras por medio de un segmento lo cual forma un ángulo de 90° entre el segmento y el eje imaginario. Angulo el cual siempre es de 90° para los dos lados.

- Trata de enunciar todas las propiedades o condiciones que se deben cumplirse para que exista reflexión (Para que una figura sea reflejo de otra).

La propiedad conmutativa que el reflejo y la figura real sea de igual forma y de igual tamaño. Y que el eje de reflexión debe de estar a la misma distancia de las dos figuras.

- Selecciona un conjunto mínimo de condiciones o propiedades de manera que definan una reflexión.

El reflejo de la figura, debe ser identica a la real. La propiedad conmutativa.

- ¿Podrías enunciar una definición formal de reflexión? ¡Inténtalo! :

Yo pienso que se podría entender por reflexión, como una sombra que tiene cualquier figura con respecto a un eje imaginario, ya que esa sombra es de igual tamaño y de igual forma que la original.

HOJA DE TRABAJO No. 8

Nombre: ________ **Fecha:** 27-05-99

ACTIVIDADES:

- Te diste cuenta que la reflexión es una de las transformaciones que respeta tamaño y forma (La imagen es congruente al objeto) ¿Conoces otras transformaciones que conserven estas propiedades? ¿Cuáles?

____

____

- Este tipo de transformaciones que conservan tamaño y forma ¿Qué nombre técnico tienen?

____

- Ayudándote del paquete Geometra's Sketch Pad, dibuja la reflexión de una figura con respecto a cierto eje.
- Ahora a la figura imagen refléjala con respecto a otro eje.
- Anota tus observaciones:

____

____

____

- Intenta encontrar un eje para el cual la figura que obtuviste sea reflejo de la figura original. Escribe tus observaciones.

____

____

- En caso de que consideres que lo que en el párrafo anterior se te pide no sea posible, entonces explica qué tipo de transformación geométrica me lleva de la figura original a la final.

____

____

____

____

- Lo que hiciste en el tercer párrafo de esta actividad fue, utilizando el lenguaje funcional, una composición de reflexiones. ¿Se cumple la propiedad de cerradura para la composición de reflexiones? Explica tu respuesta. ________________________

____

____

____

En la hoja de trabajo No. 6, observamos en la pregunta No.2 una respuesta fuera de lugar, aunque logra contestar de manera correcta el resto de las preguntas (que son las observaciones naturales de experimentar con el Sketchpad) a la hora de formalizar un poco, o cuando se le pregunta por propiedades, no contesta de manera correcta, como es el caso de la respuesta a la última pregunta de esta hoja de trabajo; tal vez quiso decir que si un objeto A tiene como reflejo A', entonces recíprocamente A' tiene como reflejo a A.

En la hoja de trabajo No. 7, observamos que a pesar de que no logró expresar de manera explícita la perpendicularidad, en la primera pregunta de esta hoja de trabajo dice que si es muy importante ésta propiedad al hablar de reflexión y da su justificación (aunque esta es un poco vaga). Durante toda esta hoja de trabajo, se observa que sí le ayuda el proceso a construir ciertas ideas, pero sigue teniendo problemas al redactar; el tipo de respuestas no es de nivel de un estudiante universitario; muco menos de una licenciatura en matemáticas, en la cual se tienen ya varios semestres cursados.

La hoja de trabajo No. 8 ya no la contesta, aunque vivió el proceso (hizo el experimento necesario, por cierto que al hacerlo mostró mucha inseguridad) no quiso o desistió hacerlo, ya que solo se limitó a escribir su nombre.

En este caso nos atreveríamos a afirmar que el estudiante no lo logró este nivel en su totalidad, sólo parcialmente en algunas de sus fases; se quedó con algunas ideas importantes gracias al proceso vivido, pero no construyó lo suficiente como para dominar satisfactoriamente lo requerido para superar el nivel 3. Y hasta aquí concluye su participación, porque ya no sigue con el proceso.

Caso B:

HOJA DE TRABAJO No. 6

Nombre:_______________________________ **Fecha:** 18 - Mayo - 1999

ACTIVIDADES:

Tu ya conoces el paquete Geometra's Sketchpad y tienes algunas conclusiones (debido a tus experiencias en las actividades anteriores) sobre las propiedades que debe de cumplir una figura para ser reflejo de otra con respecto a un espejo real o virtual (eje de reflexión). Haz uso de ese paquete en las siguientes actividades:

- Dibuja un punto P y tu espejo imaginario (un eje), ahora refleja ese punto (Llámalo P').
- Trata de mover P. ¿Qué observas?

Que el punto P' se mueve tambien, en la misma forma que P.

- Une tu punto P con su reflejo P' por medio de un segmento (PP').
- Mide el ángulo que se forma entre el eje de reflexión y el segmento PP'.
- ¿Qué relación existe entre esas dos líneas?

Son perpendiculares.

- Ahora mide la distancia que existe entre tu punto P y el eje, así mismo la distancia del eje al reflejo del punto. ¿Que observas?

Son iguales.

- Desliza el punto P. ¿Qué observas en cuanto a las medidas que obtuviste anteriormente?

Siguen siendo iguales

- Ahora haz una figura y refléjala, tomando un punto P de ella, sigue el sig. procedimiento:
  a) A ese punto P encuentra su reflejo (P') y únelos por medio de un segmento.
  b) Mide el ángulo que se forma entre el eje de reflexión y el segmento PP'.
  c) Mide la distancia que existe entre tu punto P y el eje, así mismo la distancia del eje al reflejo del punto.
  d) De la misma forma sigue experimentando deslizando al punto P sobre la figura.
  e) Dale animación al punto P sobre la figura. Anota tus observaciones:

* El angulo sigue siendo 90°
* La distancia de P al eje de reflexion es igual a la distancia del eje al punto P'.
* Al hacer mas grande o mas pequeña la figura su reflejo tambien lo hace.

- Mueve tu figura original, ya sea de forma total o parcial. ¿Qué observas? Ahora mueve su reflejo.

- ¿Se estará cumpliendo alguna propiedad?

Si, la congruencia de las figuras.

HOJA DE TRABAJO No. 7

Nombre: ______________________ **Fecha:** 21 - Mayo - 1999

ACTIVIDADES:

- ¿Qué tan importante es para ti la perpendicularidad al hablar de reflexión?

Es importante por que si no fueran perpendiculares las figuras ya no serian iguales, por lo que las distancias de las figuras al eje de reflexión ya no serian iguales, ademas de que el angulo de reflexión ya no seria 90° si no diferente

- Trata de enunciar todas las propiedades o condiciones que se deben cumplirse para que exista reflexión (Para que una figura sea reflejo de otra).

* La distancia de una figura al eje de reflexión, debe ser igual a la distancia del eje de reflexion a la figura reflejada
* El eje de reflexión debe ser perpendicular al segmento que une a las dos figuras en un punto en comun.

- Selecciona un conjunto mínimo de condiciones o propiedades de manera que definan una reflexión.

* Distancias iguales de las figuras al eje de reflexión
* Angulo entre el eje de reflexión y el segmento debe ser igual a 90°

- ¿Podrias enunciar una definición formal de reflexión? ¡Inténtalo! :

"Una figura es reflexión de otra si el eje de reflexión se encuentra en el punto medio de un segmento que une a las dos figuras en un punto en comun, ademas de que dicho eje sea perpendicular al segmento"

HOJA DE TRABAJO No. 8

Nombre: ____________________ **Fecha:** 27 / Mayo / 99

ACTIVIDADES:

- Te diste cuenta que la reflexión es una de las transformaciones que respeta tamaño y forma (La imagen es congruente al objeto)' ¿Conóces otras transformaciones que conserven estas propiedades? ¿Cuáles?

  si, trasladando la figura y girandola sobre un eje

- Este tipo de transformaciones que conservan tamaño y forma ¿Qué nombre técnico tienen?

  traslación y rotación.

- Ayudándote del paquete Geometra's Sketch Pad, dibuja la reflexión de una figura con respecto a cierto eje.
- Ahora a la figura imagen refléjala con respecto a otro eje.
- Anota tus observaciones:

  La figura concervo su tamaño y su forma

- Intenta encontrar un eje para el cual la figura que obtuviste sea reflejo de la figura original. Escribe tus observaciones.

  se cumple lo del parrafo uno pero la posición en que se encuentran las figuras ya no son iguales ecepto con una circunsferencia

- En caso de que consideres que lo que en el párrafo anterior se te pide no sea posible, entonces explica qué tipo de transformación geométrica me lleva de la figura original a la final.

  la de rotación por que al reflejar la figura conserva su forma y tamaño pero no su posicion, entonces al girarla toma su posicion original.

- Lo que hiciste en el tercer párrafo de esta actividad fue, utilizando el lenguaje funcional, una composición de reflexiones. ¿Se cumple la propiedad de cerradura para la composición de reflexiones? Explica tu respuesta. no por que al reflejar la figura sobre un eje y esta sobre otro se conserva el tamaño y la forma pero no su posición

Caso B:

En la hoja de trabajo No. 6, nos parece muy bien cómo contestó las preguntas, solo una observación con respecto a la última pregunta; aquí se observa que el concepto de congruencia es tan dominante en su mente, que le impide centrar su atención en otros aspectos definitorios de la reflexión. Por otro lado, se nota que el uso del software llamado "El Geómetra" le ayuda a madurar algunas imprecisiones que presentó en las hojas anteriores, como el de enunciar la perpendicularidad como una de las propiedades esenciales en el concepto de reflexión de un punto con respecto a un eje.

La hoja de trabajo No. 7, la contesta en su totalidad, mientras en la pregunta uno contesta de manera inconsistente, en el resto de las preguntas escribe las ideas más importantes que se quería rescatar con esta hoja de trabajo, un poco de redacción le hizo falta pero se dio a entender bien (sus respuestas en el recorrido de la hoja completan bien las ideas). En particular se observa cómo ha integrado ya en el proceso de definición de reflexión, la noción de perpendicularidad.

En la hoja de trabajo No. 8, se le nota un poco más de madurez al escribir, se da a entender muy bien, aunque tenemos algunas observaciones importantes: Por ejemplo, en la pregunta No.1, en su respuesta habla de girar sobre un eje, donde más bien esperábamos que mencionara "girar sobre un punto". La pregunta No. 2 no la contestó de manera correcta, no conocía el nombre técnico de las transformaciones que conservan tamaño y forma, y además, al enlistarlas, le faltó incluir la propia reflexión. La pregunta No. 3, lo que contesta está bien, pero esperábamos que observara un poco más allá, en la pregunta No.4, se da a entender, solo que parece que asocia la palabra circunferencia con "giro". En la pregunta No. 5, ya hace referencia a la rotación, se expresa mejor. En la pregunta No.6, se podría haber expresado mejor en términos de qué sucedía con esa composición de reflexiones, dado que es una propiedad que en ese momento era ya muy conocida por ellos en las diferentes ramas de las matemáticas; pero se da a entender.

En general, lo que observamos en este estudiante, es que nunca titubeó en contestar, siempre lo hizo sin temor a equivocarse, plasmaba en el papel lo primero que se le venía a la mente, hasta donde pudo trabajar sus hojas quedaron totalmente contestadas.

Ciertas imprecisiones y problemas de expresión, los fue superando a través del desarrollo del experimento; en particular, se puede percibir el efecto positivo, que en el proceso de construcción y asimilación de algunos conceptos, le propició el hecho de utilizar software de geometría dinámica, como "El Geómetra" ("Geometer´s SketchPad").

Con esto podemos afirmar que este estudiante alcanza sin problemas el nivel 3; creo que el proceso lo pudo haber llevado a otros niveles, solo que por circunstancias no previstas, no continuó participando en el proyecto.

Caso C:

HOJA DE TRABAJO No. 7

Nombre: ______________________ **Fecha:** 21/05/99

ACTIVIDADES:

- ¿Qué tan importante es para ti la perpendicularidad al hablar de reflexión?

LA PERPENDICULARIDAD ES UNA CONDICIÓN "NECESARIA" PARA LA REFLEXIÓN, POR LO QUE NO SOLO IMPORTANTE, SINO IMPRESCINDIBLE

- Trata de enunciar todas las propiedades o condiciones que se deben cumplirse para que exista reflexión (Para que una figura sea reflejo de otra).

I - LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS SEGMENTOS QUE UNEN PUNTOS RESPECTIVOS DE LAS DOS FIGURAS, DEBEN ESTAR ALINEADOS, Y DEBEN FORMAR UNA LÍNEA PERPENDICULAR A ÉSTOS SEGMENTOS.
- LAS FIGURAS DEBEN TENER LAS MISMAS DIMENSIONES.

- Selecciona un conjunto mínimo de condiciones o propiedades de manera que definan una reflexión.

I

- ¿Podrías enunciar una definición formal de reflexión? ¡Inténtalo! :

- DOS FIGURAS ESTÁN EN REFLEXIÓN SI EXISTE UN SEGMENTO DE RECTA TAL QUE CONTIENE A TODOS LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS SEGMENTOS QUE UNEN LOS PUNTOS RESPECTIVOS EN LAS DOS FIGURAS, Y ADEMÁS ES PERPENDICULAR A ÉSTOS SEGMENTOS

HOJA DE TRABAJO No. 8

Nombre: ______________________ **Fecha:** ______________

ACTIVIDADES:

- Te diste cuenta que la reflexión es una de las transformaciones que respeta tamaño y forma (La imagen es congruente al objeto) ¿Conoces otras transformaciones que conserven estas propiedades? ¿Cuáles?
LAS TRASLACIONES Y LAS ROTACIONES.
(Y COMPOSICIONES DE TODAS ESTAS)

- Este tipo de transformaciones que conservan tamaño y forma ¿Qué nombre técnico tienen?
ISOMETRÍAS.

- Ayudándote del paquete Geometra's Sketch Pad, dibuja la reflexión de una figura con respecto a cierto eje.
- Ahora a la figura imagen refléjala con respecto a otro eje.
- Anota tus observaciones:
SE CAMBIA DOS VECES LA ORIENTACIÓN DE LA FIGURA. EL RESULTADO FINAL TIENE DOS POSIBILIDADES:
1. SI LOS EJES DE REFLEXIÓN SON PARALELOS EL RESULTADO ES UNA TRASLACIÓN DE LA FIGURA
2. SI SE INTERSECTAN EN P, EL RESULTADO FINAL ES UNA ROTACIÓN ALREDEDOR DE P.
- Intenta encontrar un eje para el cual la figura que obtuviste sea reflejo de la figura original. Escribe tus observaciones.
SÓLO EN EL CASO EN QUE LA FIGURA SEA "INVARIANTE" RESPECTO A REFLEXIONES, ES POSIBLE HAYAR TAL EJE. EN OTRO CASO, ES IMPOSIBLE YA QUE CON UNA SOLA REFLEXIÓN SE CAMBIA LA ORIENTACIÓN.
- En caso de que consideres que lo que en el párrafo anterior se te pide no sea posible, entonces explica qué tipo de transformación geométrica me lleva de la figura original a la final.
UNA TRASLACIÓN O UNA ROTACIÓN

- Lo que hiciste en el tercer párrafo de esta actividad fue, utilizando el lenguaje funcional, una composición de reflexiones. ¿Se cumple la propiedad de cerradura para la composición de reflexiones? Explica tu respuesta. NO SE CUMPLE LA CERRADURA, YA QUE LA COMPOSICIÓN DE 2 REFLEXIONES NO ES UNA REFLEXIÓN.

Este estudiante vivió el proceso de las actividades de la hoja no. 6, solo que el día en que se iba a contestar esa hoja de trabajo, no asistió, por lo que no contamos con ella. Pero estuvo muy bien en su participación.

La hoja no. 7, la contesta de manera correcta, aquí se hace notar que cuando un estudiante se puede expresar libremente y escribir todo lo que ha asimilado, nos da la oportunidad de detectar el nivel de asimilación que obtuvo mediante el proceso. Esto lo confirma la respuesta a la última pregunta de esta hoja de trabajo, ya que él da una definición espontánea, hecha con sus propias palabras; lo contrario a algunos estudiantes o personas con cierto nivel de abstracción y formalismo, que aunque tienen la habilidad de leer y escribir en un lenguaje formal y riguroso, sus enunciados a veces son parcial o totalmente huecos de contenido y de visualización.

La hoja No.8, la contesta de manera correcta, su redacción es muy precisa y clara.

Este estudiante, a pesar de haber tenido errores de imprecisión en la hoja No.5 y no haber contestado la No. 6, alcanza muy bien el nivel 3 de razonamiento, ello se puede observar en su buen desempeño al realizar las actividades solicitadas en las hojas 7 y 8, donde tenía que culminar todo lo observado con buenos niveles de formalización.

Como ya lo comentamos anteriormente, el caso "C" es el único que continúa con las actividades hasta el final, por lo que continuamos analizando sus hojas de trabajo

Análisis de las hojas de trabajo 9 y 10

Primeramente presentamos sus *hojas 9 y 10, que son las que nos permiten decidir si el estudiante logra el nivel 4 (de deducción); para ello observamos si:*

-La visión de las isometrías en el plano es global para el estudiante.

-Hace uso de la estructura de grupo para explicar porqué el conjunto de isometrías bajo la operación composición forman un grupo llamado "Grupo de isometrías".

-Determina cuáles de las isometrías forman, por sí mismas con respecto a la composición, un grupo y cuáles no

HOJA DE TRABAJO No. 9

Nombre:____________________ **Fecha:** ____________

ACTIVIDADES:

En la actividad anterior concluiste que al hacer la composición de reflexiones cuyos ejes no son paralelos, lo que obtuviste no fue una reflexión de la primera sino una rotación.

- Vuelve a experimentar haciendo uso del Sketch Pad.
- ¿Cuál es el centro de giro? EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LAS RECTAS
- ¿Cuánto mide el ángulo girado? —
- ¿Qué relación encuentras entre el ángulo de giro con el ángulo que forman los ejes?

2(ángulo entre ejes) = ángulo de giro.

Ahora experimenta utilizando ejes paralelos

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original a la que obtuviste?

UNA TRASLACIÓN.

¿Podrías describir esta transformación? SE TRASLADA LA FIGURA SIN ROTARLA...

¿Qué relación encuentras en las distancias? Esto es, en lo que se refiere a la comparación de la distancia que existe entre la figura trasladada y su imagen con respecto a la distancia que existe de un eje a otro.

2(distancia entre ejes) = distancia entre la fig. trasladada y su imagen.

Escribe alguna observación o comentario que quieras hacer sobre las isometrías, después de haber experimentado con ejes que se intersectan y luego con ejes paralelos:

• SI r_L Y r_M SON REFLEXIONES, ENTONCES $r_L \circ r_M$ ES UNA ROTACIÓN O UNA REFLEXIÓN.

• SI DEFINIMOS UNA ISOMETRÍA COMO UNA "FUNCIÓN" QUE PRESERVA LA DISTANCIA, ENTONCES TODA ISOMETRÍA SE PUEDE ESCRIBIR COMO LA COMPOSICIÓN DE UNA, DOS O TRES REFLEXIONES.

HOJA DE TRABAJO No. 10

Nombre ______________________ Fecha ____________

- Escribe la definición del concepto algebraico llamado "Grupo".

SEA G UN CONJUNTO NO VACÍO Y $* : G \times G \to G$ UNA OPERACIÓN BINARIA. DECIMOS QUE LA PAREJA $(G, *)$ ES UN GRUPO RESPECTO A $*$, SI SATISFACE LO SIGUIENTE:
1. ASOCIATIVIDAD. PARA CADA $g_1, g_2, g_3 \in G$ SE TIENE $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$
2. IDENTIDAD. EXISTE $e \in G$ TAL QUE $e * g = g * e = g \ \forall g \in G$.
3. INVERSOS. PARA CADA $g \in G$, EXISTE $g' \in G$ TAL QUE $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

- Explica por qué el conjunto de isometrías bajo la operación composición forman un grupo llamado "Grupo de isometrías".

SEA $Isom(E^2)$ EL CONJUNTO DE TODAS LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO. COMO LA COMPOSICIÓN DE ISOMETRÍAS ES UNA ISOMETRÍA, SE SIGUE QUE LA OPERACIÓN $\circ : Isom(E^2) \times Isom(E^2) \to Isom(E^2)$ (COMPOSICIÓN) ESTÁ BIEN DEFINIDA (ES CERRADA). LAS OTRAS 3 PROPIEDADES DE UN GRUPO SON TRIVIALES: $e = id_{E^2}$ Y SIEMPRE EXISTE EL INVERSO.

- Explica si el conjunto de reflexiones con respecto a un eje en un plano forman un grupo bajo la composición o no.

¡NO!. POR EJEMPLO, CON EJE L: $G = \{r_L, r_L^{-1}\}$ NO TIENE IDENTIDAD, AUNQUE TENGA INVERSO (PORQUE LA IDENTIDAD NO ES UNA REFLEXIÓN)

La hoja no. 9, la contesta de manera correcta, sobre todo en la última pregunta llega a hacer una conjetura. Sólo una observación en la última pregunta, en el primer punto creemos, sin mucho temor a equivocarnos, que solo fue error de escritura cuando repitió la palabra "reflexión" en lugar de escribir "traslación".

En la hoja número 10, las dos primeras preguntas las contesta de manera correcta, sobre todo presenta un detalle muy fino al enunciar las propiedades de grupo, define la operación binaria * como * : GxG → G; pero en la pregunta No.3, se esperaba que al responder muy bien las dos anteriores preguntas, esta la contestaría sin mayor dificultad, es decir, que "la composición de reflexiones no cumple con la cerradura", él comenta que no se cumple la identidad, cuando el énfasis del proceso intenta llevarlo al hecho de que la operación no es cerrada (Tal vez influya su manera de concebir operación binaria, en la cual el concepto de cerradura está implícito).

Podemos decir que el estudiante logra el nivel 4, que es el de formalización.

Análisis de las hojas de trabajo 11, 12, 13 y 14.

Las hojas de trabajo de la 11 a la 14 sirven para decidir si el estudiante alcanza o no el nivel 5 (de Rigor), se logrará este nivel si el alumno distingue los diferentes grupos de transformaciones geométricas y adquiere la capacidad de transitar en ellos (haciendo uso del programa de Erlangen).

HOJA DE TRABAJO No. 11

Nombre ________________________________ **Fecha** ____________

1.- En la pareja de transparencias No.1, traslada la superior sobre la inferior mediante el vector definido del punto A al punto B; anota tus observaciones.

LOS CABALLITOS (SON CABALLOS CON ALAS?) SE EMPALMAN Y PARECE, AL FINAL, QUE NADA PASO AQUI.

2.- Define y experimenta otras traslaciones donde suceda algo similar a lo que observaste en la actividad anterior; descríbelo a continuación.

AL PARECER HAY UNA INFINIDAD (NUMERABLE) DE DIRECCIONES EN LAS QUE SE PUEDE TRASLADAR, DE TAL FORMA QUE COINCIDAN DE NUEVO LOS CABALLITOS.

3.- Después de experimentar, describe si existen otras isometrías que propicien las invariantes que observaste anteriormente.

AL PARECER NO HAY. NI LAS ROTACIONES, NI LAS REFLEXIONES HACEN LO QUE SUCEDE CON LAS TRASLACIONES.

HOJA DE TRABAJO No. 12

Nombre:_________________________________ **Fecha:** ______________

1.- Describe detalladamente, en las parejas de teselaciones de la 2 a la 6, las transformaciones que dejan invariantes las configuraciones definidas por las respectivas teselaciones en el plano.

2. ROTACIÓN EN 180°, TRASLACIONES

3. ROTACIONES EN 120° Y 240°; TRASLACIONES

4. ROTACIONES EN 180°, TRASLACIONES Y REFLEXIÓN.

5. TRASLACIONES Y REFLEXIONES,

6. TRASLACIONES, ROTACIONES Y REFLEXIONES.

2.- ¿Cuáles de las isometrías que acabas de analizar en la actividad anterior crees que forman un grupo con la operación composición, sin combinarla con otras isometrías?

LAS ROTACIONES Y LAS TRASLACIONES.

3.- Describe combinaciones de isometrías (que también dejen invariante la configuración), que mediante la operación composición formen grupo.

- $ISOM(E^2) = \langle$ ROTACIONES, REFLEXIONES, TRASLACIONES $\rangle$ ES UN GRUPO
- $ISOM^*(E^2) = \langle$ ROTACIONES, TRASLACIONES $\rangle$ ES UN GRUPO.

4.- Escribe la definición general de simetría en un plano.

UNA ISOMETRÍA ES UNA TRANSFORMACIÓN $T: E^2 \to E^2$ QUE PRESERVA LA DISTANCIA, ES DECIR, $d(x, y) = d(Tx, Ty)$ Y UNA **SIMETRIA** DE UNA FIGURA F ES UNA ISOMETRÍA T TAL QUE $T(F) = F$

HOJA DE TRABAJO No. 13

Nombre:__________________________________ **Fecha:** ________________

ACTIVIDADES:

- Describe alguna transformación en donde se conserve solo la forma de la figura pero no el tamaño
  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Tx = 2x$. ESTA TRANSFORMACIÓN AUMENTA EL TAMAÑO, AL DOBLE, DE CUALQUIER FIGURA DEL PLANO, PERO CONSERVA SU FORMA.
- Escribe ejemplos de transformaciones geométricas que no respeten tamaño ni forma.
  (1) LA TRANSFORMACIÓN CONSTANTE: $T(x_1, x_2) = (0,0)$
  (2) $T(x_1, x_2) = (2|x_1|, 2x_2)$ NO RESPETA TAMAÑO. TAMPOCO RESPETA LA FORMA: LA IMAGEN DEL CIRCULO $C = \{(\cos\varphi, \operatorname{Sen}\varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ ES EL SEMICIRCULO $TC = \{(\cos\varphi, \operatorname{Sen}\varphi) : \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$
- Explica lo que es una transformación proyectiva.
  ES UNA TRANSFORMACIÓN QUE RESPETA LINEAS RECTAS, ES DECIR, TRANSFORMA RECTAS EN RECTAS.
- Da un ejemplo de una transformación no proyectiva que respete continuidad.
  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1^3, x_2^3)$

HOJA DE TRABAJO No. 14

Nombre:______________________________ Fecha: _______________

- Según el capitulo XI del libro II de la obra "Estudios de las Geometrías" de H. Eves, donde se da una descripción del Programa de Erlangen Tesis doctoral de Félix Klein), explica cómo se utilizan los distintos grupos de transformaciones geométricas para clasificar las geometrías

EN EL PROGRAMA DE ERLANGEN, FÉLIX KLEIN AFIRMA QUE LA GEOMETRÍA ES EL ESTUDIO DE UN ESPACIO (UN CONJUNTO DE PUNTOS) JUNTO CON UN GRUPO DE TRANSFORMACIONES (UN CONJUNTO ESPECÍFICO DE FUNCIONES DEL PLANO EN SÍ MISMO) Y DE LAS ESTRUCTURAS QUE PERMANECEN INVARIANTES BAJO EL GRUPO.

Observaciones:

La hoja No.11 la contesta de manera correcta; esta hoja de trabajo fue solo para introducirlos en el movimiento de las transparencias que contienen teselaciones y las cuales se encuentran en pareja con el fin de analizar los movimientos requeridos que nos lleven a determinar grupos de isometrías que dejen invariante la configuración.

La hoja número 12, en general la contesta de manera correcta, aunque le hacemos algunas observaciones; por ejemplo, en la pareja que enumeramos con el número 5, solo se encuentran traslaciones y él encuentra traslaciones y reflexiones. En la pregunta número 3, donde se le pide que de ejemplos de combinaciones de isometrías que formen grupo bajo la composición, están muy bien sus ejemplos, aunque el listado no es exhaustivo.

En la hoja no 13, están bien sus respuestas; solo una observación en la 3, no está mal contestada, solo le faltó precisar que una transformación proyectiva respeta, además de colinealidad de puntos, concurrencia de rectas.

También se esperaba que ejemplificara en forma sintética (Sin uso de expresiones analíticas) como se venía haciendo.

En la hoja de trabajo número 14 (última hoja de trabajo), el estudiante da una explicación muy general, pero sin embargo, describe de manera concisa y esquemática cómo se utilizan los distintos grupos de transformaciones geométricas en el plano para clasificar las geometrías según el Programa de Erlangen, lo cual nos da indicios considerables de haber alcanzado el tipo de razonamiento geométrico correspondiente al quinto nivel.

Este caso "C", es el único estudiante que llega a este nivel de formalización, salvo otro caso no elegido para este análisis que llegó al nivel 4.

Pudimos darnos cuenta que el hecho de manejar desde el principio definiciones, conceptos y criterios de prueba formales, no necesariamente indica que en sus mentes esté construído ya un significado, o al menos, un sentido de los objetos de estudio.

CONCLUSIONES.

La idea de enriquecer el Modelo de Van Hiele con el uso de principios constructivistas en el momento de desarrollar las actividades correspondientes a cada fase de cada nivel permite:

- Presentar una secuencia organizada que gradualmente va propiciando la construcción de conocimientos que tienen la cualidad de ir desarrollando el pensamiento geométrico y el nivel de razonamiento correspondiente. El estar fuera de esta secuencia provocó efectos muy marcados en el corto plazo al caso A.
-
- Que los estudiantes se expresen con sus propias palabras, lo cual nos permitió, por lo espontáneo de su expresión, analizar el nivel de razonamiento que ha alcanzado, según lo planteado ene l proyecto que nos ocupa; como puede verse en la hoja de trabajo No. 7 del estudiante C.

Creemos que el uso y diseño de prototipos didácticos estratégicos, si se logra que sean utilizados de forma coherente con los principios teóricos y metodológicos declarados, produce un efecto de construcción del conocimiento perceptible y medible, como puede verse en el proceso de interiorización y avance conceptual presentado en los casos analizados, aún en el de mas bajo rendimiento, al usar secuencialmente, a lo largo del proceso, cada uno de los dispositivos didácticos utilizados (Papel carbón, semiespejo, software, etc.), a la vez que se avanzaba en las fases y niveles del modelo.

El uso de videos tomados en el momento de desarrollar las actividades, nos permitió observar de manera objetiva y vivencial el desempeño del estudiante y las actitudes que asume, no perceptibles en lo escrito, como lo muestra uno de los caos no incluido en este estudio (por razones de ética de la investigación, ya que aparece la imagen del sujeto investigado), en el cual, expresa el nivel de razonamiento alcanzado en ese momento al desistir de continuar, no por limitantes técnicas, ya que manejaba muy bien el software, sino por no haber superado ese nivel en ese momento (hoja no. 8 de trabajo, correspondiente al 3er. nivel).

Mientras que en nuestra propuesta se busca propiciar estrategias de descubrimiento y construcción, que permitan proponer conjeturas y definir estrategias de corroboración o rechazo de las mismas; la educación formalista recibida previamente, dificulta un desempeño libre y espontáneo; es marcada la tendencia a contestar a priori las preguntas planteadas, conducidos precisamente por esas tendencias formalistas manifestadas en su lenguaje, como se observa en el proceso del caso C, pero más marcadamente en el caso B; sobre todo en los niveles iniciales, cuando se podía apreciar una mayor inercia a trabajar en una dinámica distinta, pero el trabajo sistemático logró algún avance, al impulsar al estudiante a integrarse a una dinámica de este tipo.

Se podría suponer que por ser estudiantes de licenciatura en matemáticas, se encuentran, de entrada, en un nivel superior (4 ó 5) del modelo de Van Hiele; pero nuestra experiencia nos demostró que no es así; en cambio, nuestro modelo nos permite ubicar al estudiante en un nivel inicial (generalmente por debajo del nivel 3 de Van Hiele) y a partir de ahí, se pudo a la vez propiciar, al hacer un recorrido detallado a lo largo de las fases con esta visión constructiva al utilizar los instrumentos diseñados, un avance gradual hacia los siguientes niveles de pensamiento geométrico;

como puede apreciarse en todos los casos, destacando el caso B y más aún el caso C.

Para complementar lo anterior, damos enseguida más detalles, sobre todo en lo referente al caso C.

Además de ayudar a ubicar en su nivel de partida, el uso del modelo, con las características descritas, como ya se dijo, realmente impulsó a los estudiantes a avanzar hacia los siguientes niveles; en particular, del "caso C", ya se analizó sus logros en cuanto la manera de alcanzar y superar el nivel 3 (Ver análisis de respuestas a las hojas 7 y 8); pero el análisis de respuestas de la hoja 13, evidencia que no conocía el "Programa de Erlangen" y que sus respuestas están influenciadas por su formación previa, en la que comúnmente hay que responder con una fórmula o una expresión analítica; pero la síntesis de vivencias propiciadas por las hojas 9 a 13, le permiten comprender, cuando se le proporciona el material de lectura, la esencia del "Programa de Erlangen" y lo expresa en una síntesis precisa en su respuesta a la hoja 14, lo cual nos indica que, si no lo había superado completamente, cuando menos ya se desenvolvía en el nivel 5 de Van Hiele.

Pudimos darnos cuenta que el hecho de manejar desde el principio definiciones, conceptos y criterios de prueba formales, no necesariamente indica que en sus mentes esté construído ya un significado, o al menos, un sentido de los objetos de estudio, mientras que nuestra propuesta mostró que es capaz de impulsarlos a un proceso de construcción de dichos sentidos y significados.

INVESTIGACIONES FUTURAS RELACIONADAS

Experimentar con niños o jóvenes que ya cursaron 3er. año de primaria dentro de la reforma educativa de 1992, al menos con las hojas de trabajo de la 1 a la 4 o su equivalente, en particular hacer hincapié en la hoja 4.

Experimentar con las transformaciones, pero haciendo énfasis en sus expresiones analíticas.

Repetir experiencias similares a la presente, pero metodológicamente enriquecidas con entrevistas clínicas.

Rediseñar la experiencia, con cambios metodológicos, en cuanto a hacerlo con un número considerable de casos y aplicar estadística para poder descubrir ciertas constantes en lo ya detectado en el estudio de casos (Sugerencia hecha por el Dr. Pedro Pérez Carreras).

ANEXO I

Grupo en Educación Matemática e Historia

Ciudad: Medellín, Colombia Fecha de Creación: 07/07/97
Director: Andrés Felipe de la Torre Gómez
Institución a la que esta adscrito: Universidad de Antioquia (Matemáticas)
Correo Electrónico: adatorre@matematicas.udea.edu.co
Línea de Investigación Principal: Proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el primer año de universidad
Otras Líneas de Investigación: El modelo de van Hiele

Génesis:

El grupo se inició en Julio de 1997, cuando los profesores Andrés de la Torre, Pedro Vicente Esteban y Carlos Mario Jaramillo ingresaron como estudiantes al programa de Doctorado en Ciencias Matemáticas ofrecido por la Universidad Politécnica de Valencia (UPV), en convenio con la Universidad EAFIT. Desde el comienzo mismo del programa de Doctorado, los tres profesores mencionados seleccionaron el área de Educación Matemática - que era una de las cuatro áreas ofrecidas para realizar las Tesis Doctorales - y empezaron a trabajar bajo la dirección del catedrático **Pedro Pérez Carreras** de la UPV, quien dirigió las Tesis Doctorales de de la Torre y Jaramillo. Las tres tesis se desarrollaron en torno al modelo educativo de van Hiele.
De la Torre, Esteban y Jaramillo constituyeron así un grupo de estudio e investigación, motivados por sus intereses comunes. Una vez defendidas con éxito sus Tesis Doctorales - defensas que se cumplieron en el primer semestre de 2000 -, decidieron mantener vigente el grupo en torno a la Educación Matemática en general, concentrando sus actividades investigativas en los problemas del aprendizaje de las matemáticas en los años finales del Bachillerato e iniciales de la educación universitaria, en las carreras científicas y en las ingenierías.

Importancia Estratégica:

Los trabajos ya realizados por el grupo se inscriben en el problema general de la extensión del modelo de van Hiele - que inicialmente surgió de experiencias con niños de educación elemental en torno a los conceptos de la geometría - a los conceptos fundamentales del Análisis Matemático y en el contexto de la educación universitaria del primer año de carreras científicas e ingenierías. El entendimiento de estos conceptos, derivados de la noción central de infinito, presenta dificultades específicas puesto que su formulación precisa dista mucho de la imagen previa que la mera intuición y el empleo del lenguaje cotidiano han formado en el estudiante. Es urgente la elaboración de estrategias metodológicas que garanticen un mejor aprendizaje de estas nociones, pues ellas son la clave para la asimilación del Cálculo Diferencial e Integral, disciplinas estas indispensables en las carreras científicas y en las ingenierías.

Lideres:

El grupo ha reconocido, a lo largo de sus tres años de existencia, a Pérez C. como su líder natural. Este reconocimiento se explica en parte por sus aportes como matemático y como autor de textos de matemáticas para las carreras científicas y las ingenierías y se debe, también, a la función cumplida por él como director de las Tesis Doctorales de Campillo, de la Torrre y Jaramillo. Su liderazgo, sin embargo, se explica primordialmente por el espacio que él ha construído para el grupo. Efectivamente, gracias a su gestión, el grupo ha publicado en revistas seriadas y con indexación internacional, como "Divulgaciones Matemáticas", y tiene acceso a eventos de alta calidad y de notable participación internacional en el área de la Educación Matemática, como el "Taller sobre la enseñanza de las matemáticas en ingeniería y arquitectura", de la Habana, Cuba.
El grupo reconoce también la autoridad ejercida por de la Torre gracias a su prestigio como docente y conferencista, además de sus publicaciones sobre algunos temas de la matemática griega. Por esta razón, el grupo ha designado a de la Torre como su Director.

Logros y Balance de actividades:

En los tres años que lleva funcionando, el grupo ha logrado la formación de sus miembros colombianos, a saber, de la Torre, Esteban y Jaramillo, como investigadores en Educación Matemática. La capacidad de cada uno de ellos quedó demostrada en el proceso de lectura y defensa de sus Tesis Doctorales en UPV. Esta solvencia de los miembros colombianos del grupo y su potencial como investigadores queda complementada, además por la experiencia en el área que pueden mostrar los miembros españoles del grupo, es decir, Pérez Carreras de UPV y Campillo de la Universidad Miguel Hernández, experiencia atestiguada por sus publicaciones de los últimos años y, en el caso de Pérez C., por su labor como director de las Tesis Doctorales de Campillo, de la Torre y Jaramillo.

Fortalezas:

Ámbito científico: La principal fortaleza del grupo en este ámbito proviene de su trabajo original relacionado con la extensión del modelo de van Hiele a los conceptos fundamentales del Análisis Matemático para la educación universitaria.
Ámbito académico: La principal fortaleza que puede exhibir el grupo en este ámbito consiste en que todos sus miembros tienen formación académica de Doctorado en Ciencias Matemáticas.
Ámbito comunicacional: La principal fortaleza del grupo en este ámbito radica en el acceso de algunos de sus miembros a publicaciones seriadas.

tanto de nivel nacional ("Matemáticas -Enseñanza Universitaria", que es la revista de la ERM), como de nivel internacional ("Divulgaciones Matemáticas", que es una revista con indexación internacional, publicada por la Universidad del Zulia, Venezuela) El grupo participará en el IV Taller Internacional de Educación Matemática de la Habana, a realizarse en Noviembre del 2000: Tanto de la Torre y Pérez C., como Esteban y Pérez C., enviaron sendas ponencias que serán publicadas en las actas del Taller.
Ámbito organizacional: El grupo puede exhibir como su principal fortaleza en este ámbito el hecho de haberse consolidado alrededor de un trabajo en temas afines, a lo largo de los tres últimos años.

Perspectivas:

1. El grupo se formó como resultado del esfuerzo colectivo en torno a ciertas áreas de la Educación Matemática, representadas por autores como van Hiele, Vinner y Herschkowitz, Dubinsky, Sierpinska, etc., y se orientó hacia el aprendizaje de los conceptos matemáticos en el periodo de transición Bachillerato-Universidad. Después de leídas las Tesis Doctorales de de la Torre, Esteban y Jaramillo en la UPV, los miembros del grupo vinculados a universidades colombianas han continuado en el mismo ámbito, presentando proyectos de investigación en sus respectivas instituciones. Es así como de la Torre presentó ante la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN) de la UdeA un proyecto a 6 meses de duración y con 1/4 de tiempo de dedicación, que se inició el 15 de Agosto de 2000, titulado "Los obstáculos epistemológicos relativos al concepto de continuo", en el cual se busca una lista hipotética de dichos obstáculos mediante el escrutinio histórico del concepto de continuo. La hipótesis inicial que resulte en esta primera etapa de la investigación deberá someterse posteriormente a la comprobación experimental mediante instrumentos como la entrevista clínica y el test escrito, en etapas posteriores de trabajo que se presentarán como nuevos proyectos en los próximos semestres.
Similarmente, Jaramillo presentó en la FCEN de UdeA un proyecto titulado "Aplicación del análisis factorial de correspondencias múltiples (AFCM), como técnica exploratoria para la determinación de niveles de razonamiento de van Hiele en la noción de convergencia". Su propósito es investigar la posible aplicación del AFCM a la muestra estudiada en la tesis doctoral "Noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele", comparar con los resultados que se obtuvieron en dicha tesis mediante el K-means y establecer conclusiones. La investigación se inicio el 1 de Agosto de 2000, con un cronograma de actividades a 6 meses y 1/4 de tiempo de dedicación.
De igual manera, Esteban presento en EAFIT el proyecto titulado: "La Visualización en el Cálculo Diferencial", con fecha inicial el 1 de Agosto de 2000 y con 1/4 de tiempo de dedicación durante 12 meses. El aspecto a

considerar es que la enseñanza de las matemáticas cumple una función muy importante en la formación de cada individuo en todo su proceso educativo.La masificación de la educación trae consigo nuevos retos para quienes se dedican a transmitirla a las nuevas generaciones. Es por esto que en el proceso de enseñanza-aprendizaje se les deben proporcionar a los estudiantes las experiencias de aprendizaje adecuadas que les permitan apropiarse de los conceptos matemáticos básicos y que los hagan pensadores independientes. Uno de los aportes de Vinner (1992) a la enseñanza de las nociones matemáticas es el haber podido distinguir en cada concepto dos partes, a saber, el concepto imagen y el concepto definición, los cuales deben de ser integrados por el estudiante para que este pueda interiorizar el concepto estudiado. La investigación se propone diseñar una serie de experiencias de aprendizaje apoyadas en la visualización, para los conceptos de tangente a una curva en un punto, de continuidad local y de derivada, con la ayuda de asistentes matemáticos.
2 La UPV está adelantando conversaciones con algunas universidades latinoamericanas, con miras a establecer convernios interinstitucionales que permitan ofrecer programas de Doctorado en Ciencias Matemáticas, con áreas específicas en Educación Matemática. Ya existen proyectos de Tesis Doctorales que pueden ser dirigidas por los miembros colombianos del grupo, por ejemplo, sobre la construcción del concepto de infinito potencial en el marco del modelo de van Hiele (Tesis que sería dirigida por de la Torre).
3. El grupo está impulsando en Medellín el ofrecimiento conjunto, por parte de UdeA y EAFIT, de un programa de Maestría en Educación Matemática tendiente a la capacitación de profesores de matemáticas del período de transición Bachillerato-Universidad. Una propuesta en tal sentido, presentada por le grupo, está bajo consideración en la FCEN de UdeA y en la Escuela de Ciencias y Humanidades de EAFIT.

Impacto:

1. De la Torre participó en el V Encuentro de la ERM, organizado por la Universidad del Cauca en Popayán, entre el 18 y el 21 de Noviembre de 1997. Allí hizo la presentación ante los asistentes al Encuentro de su libro "Anotaciones a una lectura de Arquímedes" .
2. De la Torre participó como conferencista en el VI Encuentro de la ERM, organizado por la Universidad Tecnológica de Pereira entre el 31 de Agosto y el 4 de Septiembre de 1998. Allí dictó una conferencia titulada "En torno a la braquistocrona".
3. El grupo participó en el VII Encuentro de la ERM, organizado por U de A en Medellín entre el 23 y el 27 de Agosto de 1999. Allí presentó, en forma colectiva, una ponencia sobre los modelos educativos matemáticos del siglo XX. En el mismo Encuentro, participó Pérez C. en calidad de profesor invitado con un seminario sobre la génesis y la historia de los conceptos matemáticos.

4. De la Torre y Esteban presentaron sendas ponencias en el Congreso Colombiano de Matemáticas organizado por la Sociedad Colombiana de Matemáticas, la Academia Colombina de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y la Escuela Regional de Matemáticas, en Bogotá, entre el 14 y el 18 de Agosto de 2000.Allí, de la Torre dictó una conferencia titulada "La modelización del espacio y del tiempo" y Esteban otra, titulada "Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía del modelo de van Hiele". En el mismo Congreso, de la Torre y Esteban participaron en el panel sobre estudios de doctorado en Educación Matemática en el país, coordinado por Carlos Vasco y Luis Carlos Arboleda.
5. El grupo se inscribió en el primer encuentro de grupos de estudio e investigación, organizado por la ERM en Popayán entre el 21 y el 23 de Septiembre de 2000. Allí, de la Torre intervino con una conferencia titulada "El modelo educativo de van Hiele" y Esteban con otra, titulada "La visualización en el Cálculo Diferencial". En el mismo Encuentro, de la Torre actuó como moderador de la reunión del área de Educación Matemática.
6. El grupo inscribió dos ponencias en el IV Taller sobre la enseñanza de las matemáticas para ingeniería y arquitectura , que se llevará a cabo en la Habana, Cuba, entre el 27 de Noviembre y el 1 de Diciembre de 2000 y en cuya organización toma parte Pérez C. en nombre de la UPV al lado de Ricardo Cantoral U. del CINESTAV de México y otros. Las ponencias fueron aceptadas y serán publicadas en las actas del Taller. Sus títulos son: "La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele", presentada por de la Torre y Pérez C., y " Propuesta metodológica para introducir el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente " , presentada por Esteban y Pérez C.
7. Pérez C. recibió una invitación de parte de U de A y EAFIT para dictar un seminario sobre la enseñanza del Cálculo asistida por ordenador en Febrero de 2000. El seminario estuvo dirigido a los profesores de Cálculo de ambas instituciones.
8. Los miembros colombianos del grupo recibieron invitaciones para participar en actividades de investigación con la contraparte española. De la Torre y Esteban fueron invitados por la UPV y Jaramillo, por la Universidad Miguel Hernández , durante algunos meses en el primer semestre de 2000.
9.La revista "Matemáticas- Enseñanza Universitaria", de la ERM, publicará el artículo titulado "Una aplicación del modelo de van Hiele al concepto de continuo", escrito por de la Torre. La publicación se hará en el volumen 8, números 1 y 2, páginas 117- 141, en Noviembre de 2000.

Investigadores:

- de la Torre Gómez Andrés Felipe

Correo electrónico: adatorre@matematicas.udea.edu.co

Trayectoria escolar del investigador:
Titulo obtenido: Doctor en Ciencias Matemáticas, Fecha de finalización: 24/03/00
Institución: Universidad Politécnica de Valencia , Valencia
Áreas de interés: Ciencias de la Educación, Educación en disciplinas científicas.

- Jaramillo López Carlos Mario
  Correo electrónico: cama@matematicas.udea.edu.co

  Trayectoria escolar del investigador:
  Titulo obtenido: Doctor en Ciencias Matemáticas, Fecha de finalización: 31/03/00
  Institución: Universidad Politécnica de Valencia , Valencia
  Áreas de interés: Ciencias de la Educación, Educación e Investigación en Educación.

- Esteban Duarte Pedro Vicente
  Correo electrónico: pesteban@sigma.eafit.edu.co

  Trayectoria escolar del investigador:
  Titulo obtenido: Doctor en Ciencias Matemáticas, Fecha de finalización: 5/04/00
  Institución: Universidad Politécnica de Valencia , Valencia
  Áreas de interés: Ciencias de la Educación, Educación e Investigación en Educación.

- Pérez Carreras Pedro
  Correo electrónico: pperezc@mat.upv.es

  Trayectoria escolar del investigador:
  Titulo obtenido: Doctor en Ciencias Matemáticas, Fecha de finalización: 2/11/73
  Institución: Universidad Politécnica de Valencia , Valencia
  Áreas de interés: Ciencias de la Educación, Educación e Investigación en Educación.

- Campillo Herrero Pedro
  Correo electrónico: pcampillo@umh.es

Trayectoria escolar del investigador en formación:
Titulo obtenido: Doctor en Ciencias Matemáticas, Fecha de finalización: 2/11/73
Institución: Universidad Politécnica de Valencia , Valencia
Áreas de interés: Ciencias de la Educación, Educación e Investigación en Educación.

Líneas de Investigación

- Análisis de clasificación en conglomerados
  Jefe de Línea: Jaramillo López Carlos Mario

  Descripción e Importancia de la Línea:
  El AFCM es una técnica del análisis multivariado aplicable a estudios donde prevalecen las variables cualitativas, con la cual se hace posible detectar características afines y encubiertas satisfechas por los individuos, las cuales pueden sintetizarse en forma de factores, alrededor de los cuales tales individuos no solo se agrupan, sino que se pueden establecer tipologías de éstos y relaciones subyacentes entre las variables que intervengan en el estudio.

- Línea Investigación: El modelo de van Hiele
  Jefe de Línea: de la Torre Gómez Andrés Felipe

  Descripción e Importancia de la Línea:
  El modelo de van Hiele fue creado en la decada de 1950 y aplicado inicialmente a conceptos de geometría en el nivel educativo elemental. A partir de 1994, el modelo se ha extendido a algunos de los conceptos fundamentales del Análisis matemático, caracterizados por procesos de razonamiento infinito, y se ha orientado a la implementación de metodologias, distintas de la tradicional, para la enseñanza del Análisis en el último año de educación secundaria y el primer año de Universidad.

- Línea Investigación: La visualización
  Jefe de Línea: Esteban Duarte Pedro Vicente

  Descripción e Importancia de la Línea:
  En el artículo "The role of definitions in the teaching and learning of mathematics" de Vinner, 1991 en "Advanced Mathematical Thinking", se distingue entre concepto imagen y concepto definición para un concepto matemático. Esta distinción ha permitido extender el modelo educativo de van Hiele a conceptos del Análisis Matemático, permitiendo determinar el nivel de razonamiento de un anprendiz frente al concepto estudiado.
  Con la ayuda de los asistentes matemáticos (DERIVE, MATLAB, etc), es posible diseñar esperiencias de aprendizaje que le permitan al estudiante integrar el concepto imagen y el concepto definición dejandolo a las

puertas de la formalización.

- Línea Investigación: Niveles de razonamiento
  Jefe de Línea: Pérez Carreras Pedro

  Descripción e Importancia de la Línea:
  Determianar los niveles de razonamiento de los estudiantes en el "concepto de convergencia de una serie". Conocidos los niveles de razonamiento es posible estructurar una propuesta metodologica que facilite la asimilación del concepto

- Línea Investigación: Obstáculos epistemológicos
  Jefe de Línea: de la Torre Gómez Andrés Felipe

  Descripción e Importancia de la Línea:
  El concepto de obastáculo epistemológico fue introducido por G. Bachelard en 1938, en "La formación del espíritu científico". Sirvió de isnpiración a las investigaciones dirigidas por G. Brousseau a partir de 1980,en el sistema educativo francés, así como a la publicación de A. Sierpinska de 1985 tituiada "Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite".

- Línea Investigación: Proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el primer año de universidad
  Jefe de Línea: de la Torre Gómez Andrés Felipe

  Descripción e Importancia de la Línea:
  El tema central de esta línea de investigación se refiere al proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático, en el contexto de la educación universitaria del primer año de las carreras científicas y las ingerierías. Estos conceptos se derivan de la noción de infinito y presentan dificultades especificas debidas al contraste entre la formulación precisa del concepto, por un lado, y la imagen previa que la mera intuición y el lenguaje cotidiano han formado en el estudiante, por el otro.

Artículos

- Articulo: Una experiencia en el uso de un asitente matemático
  Revista: Revista EMA, Volumen: 5, Marzo 2000.

  Descripción articulo:
  El artículo hace referencia a una experiencia relacionada con el uso de un asitente matemático, en la docencia de las matemáticas. A través de la discusión de algunos ejemplos se argumenta que es posible utilizar el asistente matemático de forma adecuada o inadecuada. Se concluye que se

debe utilizar con precaución la innovación que el asistente matemático puede proporcionar revisando sus posibilidades y teniendo en cuenta los propositos de la enseñanza.

Autores del Articulo: Pedro Campillo Herrero, Antonio Devesa .

- Articulo: La modelización del espacio y del tiempo
  Revista: Divulgaciones Matemáticas, Volumen: 8, Enero 2000.

  Descripción producto:
  El objeto del artículo es validar una propuesta metodológica para acercar al alumnado de educación secundaria a la modelización que matemáticos y físicos hacen de nociones como espacio y tiempo, modelización que permite estudiar el fenómeno del movimiento y medir sus bondades en alumnos universitarios como alternativa a la versión tradicional. El estudio, cuyas bases se presentan aquí, esta encuadrado en esfuerzos similares hechos con otras nociones básicas del Análisis vía el modelo educativo de van Hiele, como son la noción de continuidad y la existencia de recta tangente.

  Autores del Articulo: Andrés Felipe de la Torre Gómez, Pedro Pérez Carreras.

- Articulo: La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele
  Revista: Divulgaciones Matemáticas, Volumen: 6, Agosto 1998.

  Descripción producto:
  La definición de continuidad no se corresponde con la imagen habitual de "curva sin cortes" que es lo que el término continuidad parece sugerir. Este trabajo propone una visualización de la definición de Cauchy que, partiendo de supuestos elementales como son punto, recta y curva, evoluciona hacia la comprensión de la definición, observándola como un proceso de aproximación local infinito y presentando el discurrir de esa comprensión como el paso satisfactorio por varios niveles de razonamiento, en concordancia con el modelo educativo de van Hiele. Previamente, describimos cuáles eran esos niveles de razonamiento y sus descriptores y, en este trabajo, validamos su existencia mediante un tratamiento estadístico realizado sobre

  Autores del Articulo: Pedro Campillo Herrero, Pedro Pérez Carreras.
  Proyectos de los cuales se obtuvo el Articulo: Máquinas de Turing dinámicas: Historia

Libros

- Libro: Anotaciones a una lectura de Arquímedes
  ISBN: 958-655-269-1, Editorial: U de Antioquia

  Descripción producto:
  Los ensayos reunidos en este volumen poseen un tema en comun: Arquímedes de Siracusa, el gran matemático de la Grecia antigua, y los sorprendentes desarrollos que dio a la matemática griega, hasta llevarla a su punto culminante. En ellos se muestran además los profundos lazos existentes entre algunos de tales desarrollos y teorías posteriores, como la del número real elaborada en el siglo XIX, lo que pone de manifiesto el perfil moderno de quien fuera llamado por Plinio "el dios de las matemáticas". Estos ensayos amplían la escasa bibliografía disponible en español acerca de la obra de Arquímedes. Van dirigidos tanto a quienes se inician o se especilizan en los temas de la matemática, como al lector ilustrado, que siente que el

  Autores del libro: Andrés Felipe de la Torre Gómez

Proyectos

- Proyecto: La noción de convergencia de una serie desde la óptica del modelo de van Hiele
  Fecha Inicio: 7/07/97 Fecha Finalización: 31/03/00
  Línea Investigación Principal: El modelo de van Hiele
  Estado: Finalizado

  Descripción:
  Extension del modelo de van Hiele al concepto de convergencia de una serie.
  Palabra Clave Temática: Modelo de van Hiele
  Palabra Clave Objeto: Niveles de razonamiento

  Integrantes del Proyecto: Carlos Mario Jaramillo López, Pedro Pérez Carreras.

- Proyecto: La modelización del espacio y del tiempo: Su estudio vía el modelo de van Hiele
  Fecha Inicio: 27/07/97 Fecha Finalización: 24/03/00
  Línea Investigación Principal: El modelo de van Hiele
  Estado: Finalizado

  Descripción:
  Extensión del modelo de van Hiele al concepto de continuo geométrico

Palabra Clave Temática: Modelizacón
Palabra Clave Objeto: Descriptores

Integrantes del Proyecto: Andrés Felipe de la Torre Gómez, Pedro Pérez Carreras.

- Proyecto: Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele
  Fecha Inicio: 7/07/97 Fecha Finalización: 5/04/00
  Línea Investigación Principal: El modelo de van Hiele
  Estado: Finalizado

  Descripción:
  Comparar los niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, obtenidos a partir de los mecanismos del haz de secantes y del zoom para el concepto de aproximación local
  Palabra Clave Temática: Modelo de van Hiele
  Palabra Clave Objeto: Aproximación local

  Integrantes del Proyecto: Pedro Vicente Esteban Duarte.

- Proyecto: Obstáculos epistemológicos relativos al concepto de continuo
  Fecha Inicio: 15/08/00 Fecha Finalización: 15/02/01
  Línea Investigación Principal: Obstáculos epistemológicos
  Estado: Desarrollo

  Descripción:
  El propósito del estudio es presentar una lista de obstáculos epistemológicos relativos al concepto de continuo, que resultará de un escrutinio al desarrollo historico de este
  Palabra Clave Temática: Subjetividad
  Palabra Clave Objeto: Cuadrámenes lógicos de producción

  Integrantes del Proyecto: Andrés Felipe de la Torre Gómez

- Proyecto: Aplicación del análisis factorial de correspondencias multiples (AFCM), como
  Fecha Inicio: 1/08/00 Fecha Finalización: 1/02/01
  Línea Investigación Principal: Análisis de clasificación en conglomerados.
  Estado: Desarrollo

  Descripción:
  Investigar la posible aplicación del AFCM a la muestra estudiada en la tesis doctoral "Noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele",
  Palabra Clave Temática: Conglomerado

Palabra Clave Objeto: Niveles de razonamiento

Integrantes del Proyecto: Carlos Mario Jaramillo López.

- Proyecto: La visualización en el Cálculo Diferencial
  Fecha Inicio: 1/08/00 Fecha Finalización: 30/06/01
  Línea Investigación Principal: La visualización.
  Estado: Desarrollo

  Descripción:
  La enseñanza de las matemáticas cumple una función muy importante en

  la formación de cada individuo en todo su proceso educativo. La masificación de la educación trae
  Palabra Clave Temática: Experiencia de aprendizaje
  Palabra Clave Objeto: Concepto imagen-concepto definición

  Integrantes del Proyecto: Pedro Vicente Esteban Duarte

ANEXO II

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y los principios del constructivismo.

TEMA: "REFLEXIÓN"

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 2	**Fase 1**	El profesor deberá informarse sobre los conocimientos de sus alumnos sobre reflexión, en particular de la noción de perpendicularidad y de distancia de un punto a una línea. En caso de ser necesario, diseñar actividades que induzcan hacia la adquisición y manipulación de la noción de perpendicularidad y de distancia de un punto a una línea.
	Fase 2	Identificar las figuras que corresponden a una reflexión. Se deberá inducir a los alumnos a medir la distancia desde un punto de la figura al espejo imaginario y luego desde el espejo al punto que le corresponde en el reflejo. Se les hará ver la necesidad de comprobarlo para más de un punto de la figura. Unirá un punto de la figura con el reflejo de éste por medio de un segmento. Verificará que pasa con ese segmento con respecto al espejo imaginario (lo hará con la ayuda de una escuadra).
	Fase 3	Discusión por parte de los alumnos entre sí, sobre lo observado.
	Fase 4	Ahora haciendo uso del vidrio reflecta el profesor puede hacer que descubran conmutatividad (Se coloca una figura de papel u objeto por un lado del vidrio reflecta y por el otro lado uno de la misma forma pero de diferente color).
	Fase 5	El profesor debe de inducir que el alumno haga un resumen centrado en: La importancia del eje de reflexión (lo que el tomo como espejo imaginario), de la equidistancia de un punto de la figura al eje y de este al reflejo del punto, perpendicularidad. Es suficiente con la imagen de un punto para colocar bien la imagen de la figura completa? Cuál es el resultado del producto de reflexiones con distinto eje no paralelos?

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y los principios del constructivismo.

TEMA: "Reflexión"

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 3	Fase 1	Debido a la relación entre reflexiones y demás isometrías que se plantean a partir de éste nivel, el profesor debe obtener información sobre el nivel de los alumnos en estos movimientos.
	Fase 2	Justificar porque dado un punto P y su reflejo P' existe solo un eje de reflexión (el cual es mediatriz del segmento de recta PP'). Determine el eje de reflexión que transforma una figura en otra. Dadas varias propiedades o condiciones, seleccionar un conjunto mínimo de manera que definan una reflexión. Enunciar una definición formal de reflexión. Expresar el significado de esa definición usándola para dibujar la reflexión de una figura mediante la reflexión de algunos de sus puntos clave, mediante los cuales se pueda reconstruir la imagen reflejada. Inducir a que los alumnos construyan una demostración de algún teorema sencillo utilizando la noción de reflexión, ejemplo: "En todo triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo formado por los lados iguales, es a la vez mediana, mediatriz y altura sobre el lado opuesto a dicho ángulo".
	Fase 3	Dialogo entre los mismos alumnos sobre lo estudiado anteriormente.
	Fase 4	Propiciar que los estudiantes descubran que: "La composición de reflexiones cuyos ejes no son paralelos, no es otra reflexión sino otra transformación; es una rotación cuyo centro es el punto de corte y cuyo ángulo es el doble del formado por los ejes". Anteriormente dijimos que la composición de reflexiones da como resultado una rotación. Encuentra un par de reflexiones intermedias (será única?). Realizar composiciones de reflexiones de distinto eje. Plantearles la siguiente pregunta: - Dada una composición de reflexiones. ¿Cómo tendría que ser el segundo eje de reflexión para que la figura obtenida sea reflejo de la figura original? Plantear la descomposición de un deslizamiento como una reflexión seguida de una traslación o viceversa.

	Fase 5	Tratar de que el alumno haga un resumen tomando en cuenta lo sig.: - La reflexión es otro tipo de isometría. - La relación de reflexión con las demás transformaciones. - Que en este resumen el alumno sienta la necesidad de hacer algunas justificaciones de sus mismos planteamientos y observaciones, así como la necesidad de enunciar de manera más formal sus resultados y le encuentre sentido al tener que justificar alguno de ellos con recursos propios de este nivel.

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y los principios del constructivismo.

TEMA: "Reflexión"

NiVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 4	Fase 1	Las experiencias de las actividades anteriores pueden hacernos suponer la asimilación de la fase uno. De todas formas, se pueden plantear algunas actividades tomando en cuenta las características propias del nivel 4, encaminadas al formalismo: Enunciar la hipótesis y la tesis que hay que tener en cuenta para demostrar que la composición de reflexiones con respecto a distintos ejes, es una rotación. Enunciar la hipótesis y la tesis que hay que tener en cuenta para demostrar que las reflexiones son isometrías (es decir que conservan forma y tamaño).
	Fase 2	Realizar las demostraciones de las dos propiedades enunciadas en la fase anterior. Demostrar que la composición de dos reflexiones cuyos ejes se cortan es una rotación. Caracterizar dicha rotación.
	Fase 3	Dialogo entre los mismos alumnos sobre lo estudiado anteriormente.
	Fase 4	Comprendidas las demostraciones anteriores, en las que el elemento básico es la asimilación de la descomposición de manera adecuada de rotaciones en el producto de reflexiones, queda todo un campo abierto para demostrar formalmente otro tipo de composiciones. Como ejemplo se presentan algunos ejercicios diversos que se pueden plantear. - Demostrar que la composición de reflexiones con respecto al mismo eje es la transformación identidad. - Demostrar que la composición de dos reflexiones de ejes. intersectados es una rotación con centro en el punto de intersección de esas líneas, y ángulo el doble del ángulo formado entre ellas. - Demostrar que la composición de dos reflexiones con respecto a ejes no paralelos produce una simetría central con respecto al punto de intersección de los ejes, sí y sólo si los ejes son perpendiculares. - Explicar cuál es el resultado de la composición de un deslizamiento con una reflexión. - Demostrar que toda isometría del plano se puede expresar como producto de a lo más tres reflexiones.

	Fase 5	En esta fase la visión que los alumnos tienen acerca de las isometrías del plano ya debe de ser global, en la medida que se consideran todas las isometrías relacionadas entre sí. El hacer el resumen en esta fase debe consistir en destacar las relaciones antes mencionadas; donde el elemento globalizador es el concepto algebraico de grupo. En la transición de esta fase y el paso al nivel 5 es conveniente completar el estudio con otros puntos de vista, como el matricial (aunque no necesariamente) y entender el significado de la variación de cada entrada de la matriz o relación entre ellos con los tipos de movimientos en el plano.

ANEXO III

HOJAS DE TRABAJO

HOJA DE TRABAJO No. 1

Nombre:____________________________________ **Fecha:** __________________

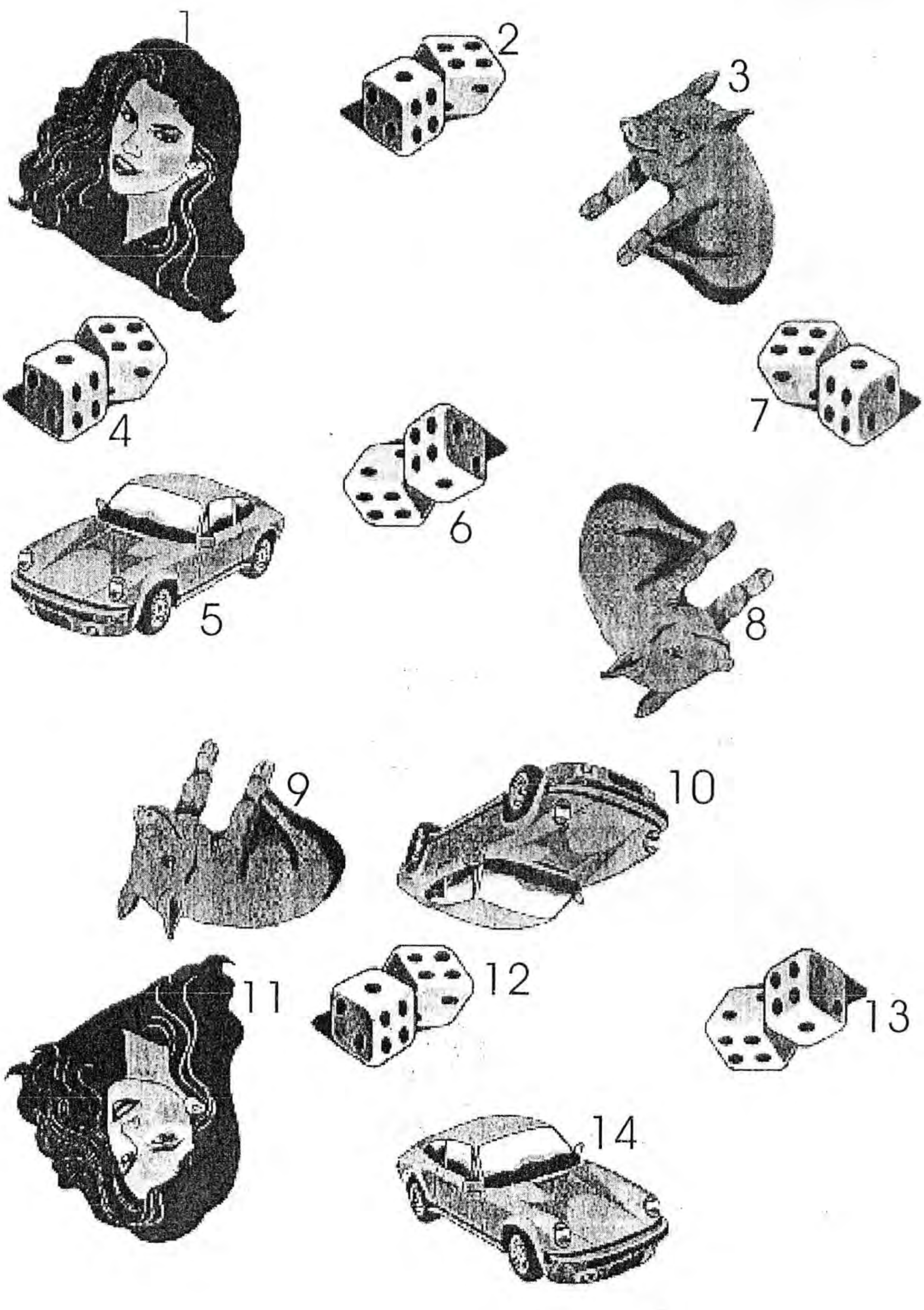
ACTIVIDADES:

- Observa tu imagen a través de un espejo. Realiza algunos movimientos frente a él.
- Ahora haz movimientos de figuras geométricas frente al espejo.

Anota tus observaciones acerca de tu imagen cada vez que te miras al espejo con diferentes movimientos, así como las imágenes de las figuras.

- Da otros ejemplos de pares de cosas que parecieran ser una reflejo de la otra.
- Haz un dibujo en una hoja de papel, trata de dibujar su imagen reflejada.

- Sustituye el espejo por un vidrio transparente, con la ayuda de uno de tus compañeros, obsérvense y hagan movimientos de tal forma que uno sea la imagen del otro. Escribe tus observaciones.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

HOJA DE TRABAJO No. 3

Nombre:________________________________ **Fecha:** ________________

ACTIVIDADES:

- En la actividad anterior dibujaste el reflejo de una figura utilizando un espejo imaginario. Utiliza tu dibujo anterior, toma un punto (llámale P) de la figura original y siguiendo el mismo procedimiento (de trabajar con el papel carbón) encuentra su reflejo (P').
- Experimenta para más puntos de la figura.
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- ¿Puedes observar algo con respecto a la relación de éste segmento con el eje de reflexión (espejo imaginario)?

Al segmento que trazaste le llamaremos PP'.

- Ayúdate de una escuadra ¿Me puedes decir que ángulo se forma entre el segmento PP' y el eje de reflexión? __________________________

- ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura.
- Anota tus observaciones:

____

____

¿Qué relación habrá entre la distancia del punto P al espejo imaginario y de éste al punto P'?

____

- Experimenta con más puntos.

¿Tienes la misma respuesta para la pregunta anterior? ____________________

____

Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

____

____

____

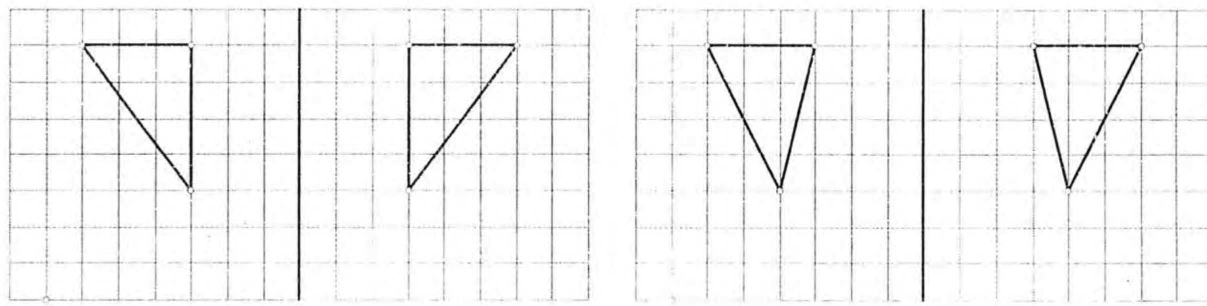
____

HOJA DE TRABAJO No. 4

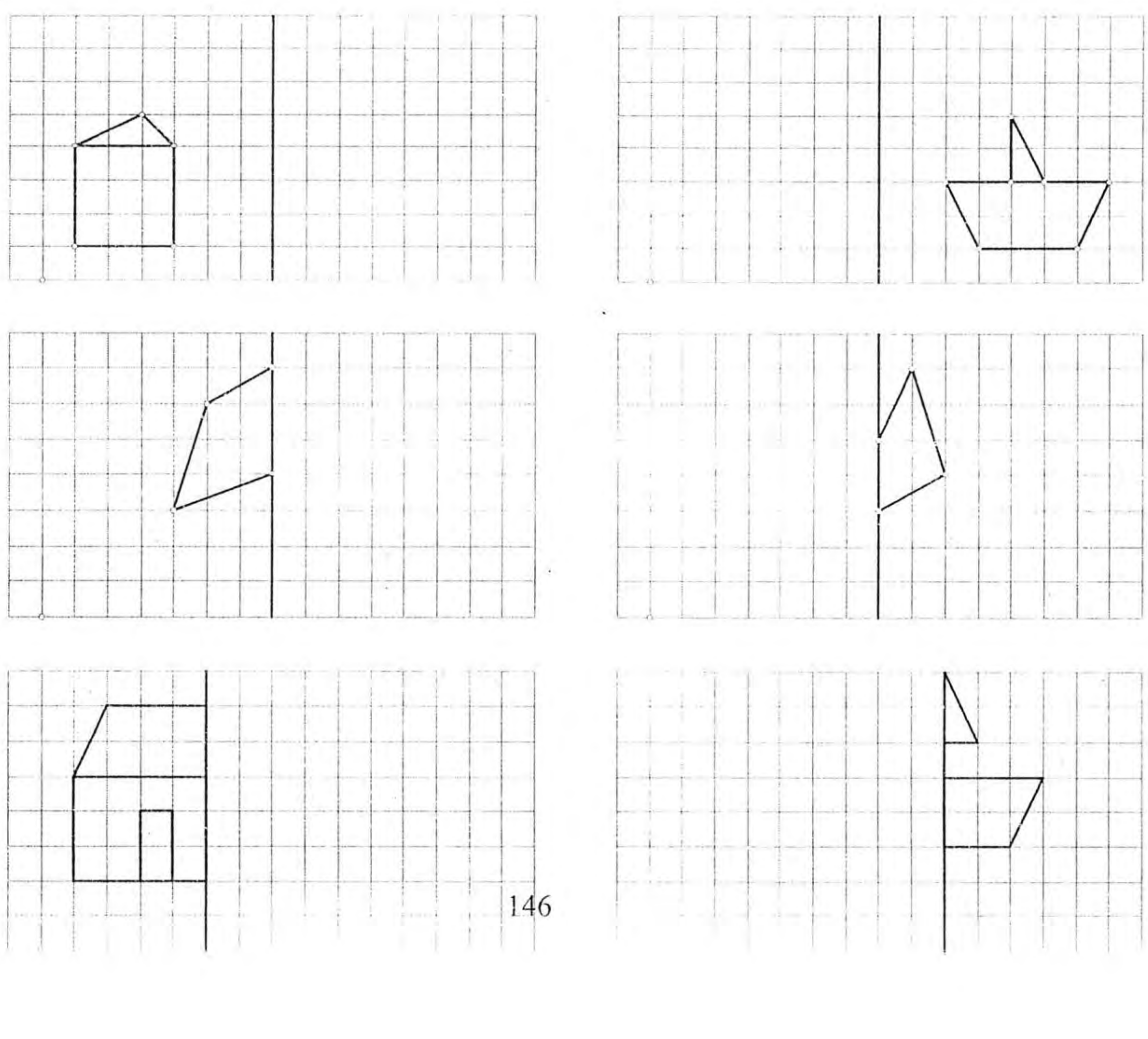
Nombre:____________________________________ **Fecha:** __________________

ACTIVIDADES:

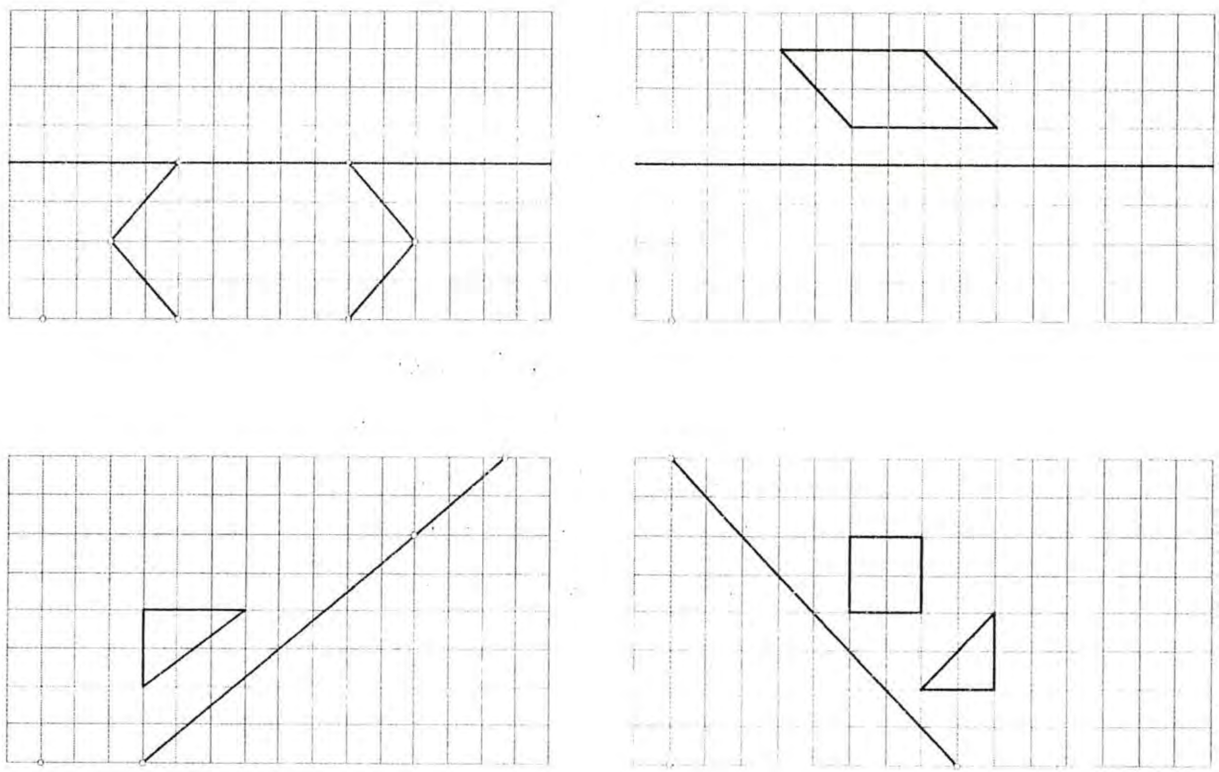
1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir si los pares de figuras en ellas contenidas son simétricas o no con respecto al eje resaltado.



2.- En cada una de las siguientes cuadrículas, dibujar la figura simétrica a la figura dada con respecto al eje indicado.



HOJA DE TRABAJO No. 4b



En la siguiente hoja de trabajo se hace uso del "Semiespejo" (Descrito en el capitulo de Antecedentes), mediante este dispositivo es posible estudiar todos los aspectos de la simetría y la congruencia de figuras planas ya considerados, que fueron estudiados mediante otros dispositivos tales como "basura" (Papel y papel carbón de desecho) y así como en la hoja No. 6 la computadora, pero aquí destacamos lo que no se puede lograr ni con la "basura" y ni siquiera con la computadora, a saber, el estudio de algunas propiedades geométricas de las figuras tridimensionales.

Después de esta explicación, pasamos a describir, como ya lo indicamos, la hoja de trabajo # 5.

HOJA DE TRABAJO No. 5

Nombre:__________________________________ **Fecha:** ________________

ACTIVIDADES:

- Comprueba que todas tus actividades realizadas con la ayuda del papel carbón pueden llevarse a cabo por medio del vidrio reflecta, colocando éste perpendicular a la superficie y alineado al eje de reflexión.

  Explica brevemente que pasos seguiste para concluir lo antes mencionado.

____

____

____

____

- Utiliza de nuevo el vidrio reflecta colocando una figura por un lado de él observa su reflejo, ahora coloca otra figura de igual forma y tamaño pero de diferente color del otro lado del vidrio reflecta y observa su reflejo.

¿Observas alguna propiedad en la reflexión? Enúnciala.

____

- Haz un resumen de lo observado, describe las propiedades que debe cumplir una figura para ser reflejo de otra con respecto a un espejo real o virtual.

____

____

____

____

____

____

____

____

HOJA DE TRABAJO No. 6

Nombre:____________________________________ **Fecha:** __________________

ACTIVIDADES:

Tu ya conoces el paquete Geometra's Sketchpad y tienes algunas conclusiones (debido a tus experiencias en las actividades anteriores) sobre las propiedades que debe de cumplir una figura para ser reflejo de otra con respecto a un espejo real o virtual (eje de reflexión).
Haz uso de ese paquete en las siguientes actividades:

- Dibuja un punto P y tu espejo imaginario (un eje), ahora refleja ese punto (Llámalo P').
- Trata de mover P. ¿Qué observas?

____

- Une tu punto P con su reflejo P' por medio de un segmento (PP').
- Mide el ángulo que se forma entre el eje de reflexión y el segmento PP'.
- ¿Qué relación existe entre esas dos líneas?

____

- Ahora mide la distancia que existe entre tu punto P y el eje, así mismo la distancia del eje al reflejo del punto. ¿Que observas?

____

- Desliza el punto P. ¿Qué observas en cuanto a las medidas que obtuviste anteriormente?

____

- Ahora haz una figura y refléjala, tomando un punto P de ella, sigue el sig. procedimiento:
  a) A ese punto P encuentra su reflejo (P') y únelos por medio de un segmento.
  b) Mide el ángulo que se forma entre el eje de reflexión y el segmento PP'.
  c) Mide la distancia que existe entre tu punto P y el eje, así mismo la distancia del eje al reflejo del punto.
  d) De la misma forma sigue experimentando deslizando al punto P sobre la figura.
  e) Dale animación al punto P sobre la figura. Anota tus observaciones:

  ____
  ____
  ____
  ____
  ____

- Mueve tu figura original, ya sea de forma total o parcial. ¿Qué observas? Ahora mueve su reflejo.
  - ¿Se estará cumpliendo alguna propiedad?

____

HOJA DE TRABAJO No. 7

Nombre:____________________________________ **Fecha:** __________________

ACTIVIDADES:

- ¿Qué tan importante es para ti la perpendicularidad al hablar de reflexión?

- Trata de enunciar todas las propiedades o condiciones que se deben cumplirse para que exista reflexión (Para que una figura sea reflejo de otra).

- Selecciona un conjunto mínimo de condiciones o propiedades de manera que definan una reflexión.

- ¿Podrías enunciar una definición formal de reflexión? ¡Inténtalo! :

HOJA DE TRABAJO No. 8

Nombre:_______________________________ **Fecha:** ________________

ACTIVIDADES:

- Te diste cuenta que la reflexión es una de las transformaciones que respeta tamaño y forma (La imagen es congruente al objeto) ¿Conoces otras transformaciones que conserven estas propiedades? ¿Cuáles?

____

____

- Este tipo de transformaciones que conservan tamaño y forma ¿Qué nombre técnico tienen?

____

- Ayudándote del paquete Geometra's Sketch Pad, dibuja la reflexión de una figura con respecto a cierto eje.
- Ahora a la figura imagen refléjala con respecto a otro eje.
- Anota tus observaciones:

____

____

____

- Intenta encontrar un eje para el cual la figura que obtuviste sea reflejo de la figura original. Escribe tus observaciones.

____

____

- En caso de que consideres que lo que en el párrafo anterior se te pide no sea posible, entonces explica qué tipo de transformación geométrica me lleva de la figura original a la final.

____

____

____

____

- Lo que hiciste en el tercer párrafo de esta actividad fue, utilizando el lenguaje funcional, una composición de reflexiones. ¿Se cumple la propiedad de cerradura para la composición de reflexiones? Explica tu respuesta.

____

HOJA DE TRABAJO No. 9

Nombre:____ **Fecha:** ___________________

ACTIVIDADES:

En la actividad anterior concluiste que al hacer la composición de reflexiones cuyos ejes no son paralelos, lo que obtuviste no fue una reflexión de la primera sino una rotación.

- Vuelve a experimentar haciendo uso del Sketch Pad.
- ¿Cuál es el centro de giro? ____
- ¿Cuánto mide el ángulo girado?_______________________________________
- ¿Qué relación encuentras entre el ángulo de giro con el ángulo que forman los ejes?

____

____

Ahora experimenta utilizando ejes paralelos

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original a la que obtuviste?

____

¿Podrías describir esta transformación?_______________________________________

____

¿Qué relación encuentras en las distancias? Esto es, en lo que se refiere a la comparación de la distancia que existe entre la figura trasladada y su imagen con respecto a la distancia que existe de un eje a otro.

____

____

Escribe alguna observación o comentario que quieras hacer sobre las isometrías, después de haber experimentado con ejes que se intersectan y luego con ejes paralelos:

____

____

____

____

HOJA DE TRABAJO No. 10

Nombre ________________________________ **Fecha** ________________

- Escribe la definición del concepto algebraico llamado "Grupo".

____

____

____

- Explica por qué el conjunto de isometrías bajo la operación composición forman un grupo llamado "Grupo de isometrías".

____

____

____

- Explica si el conjunto de reflexiones con respecto a un eje en un plano forman un grupo bajo la composición o no.

____

____

____

HOJA DE TRABAJO No. 11

Nombre ____ Fecha________________

1.- En la pareja de transparencias No.1, traslada la superior sobre la inferior mediante el vector definido del punto A al punto B; anota tus observaciones.

____

____

2.- Define y experimenta otras traslaciones donde suceda algo similar a lo que observaste en la actividad anterior; descríbelo a continuación.

____

____

3.- Después de experimentar, describe si existen otras isometrías que propicien las invariantes que observaste anteriormente.

____

____

HOJA DE TRABAJO No. 12

Nombre:_______________________________ **Fecha:** ________________

1.- Describe detalladamente, en las parejas de teselaciones de la 2 a la 6, las transformaciones que dejan invariantes las configuraciones definidas por las respectivas teselaciones en el plano.

____

____

____

____

2.- ¿Cuáles de las isometrías que acabas de analizar en la actividad anterior crees que forman un grupo con la operación composición, sin combinarla con otras isometrías?

____

____

____

3.- Describe combinaciones de isometrías (que también dejen invariante la configuración), que mediante la operación composición formen grupo.

____

____

____

4.- Escribe la definición general de simetría en un plano.

____

____

____

HOJA DE TRABAJO No. 14

Nombre:______________________________________ Fecha: __________________

- Según el capitulo XI del libro II de la obra "Estudio de las Geometrías" de H. Eves, donde se da una descripción del Programa de Erlangen, tesis doctoral de Félix Klein, explica cómo se utilizan los distintos grupos de transformaciones geométricas para clasificar las geometrías

____

____

Referencias:

1.- Van Hiele, P. (Julio, 1957). **El problema de la comprensión** en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría. Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Matemáticas y Ciencias Naturales en la Universidad Real de Utrecht. (Traducida al Español en 1990, por el Dr. Ángel Gutiérrez).

2.- Block, D. y equipo (1996). La enseñanza de las **Matemáticas** en la escuela Primaria. Libro de Lecturas (taller para maestros) **SEP** Programa para la transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales.

3.- De la Torre, A. (Enero, 2000). La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de Van Hiele. Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas (Dirigida por el Dr. Pedro Pérez C.) Valencia.

4.- Navarro, M. (Junio, 2002). Un estudio de la convergencia encuadrado en el modelo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica. Memoria presentada para optar por el grado de Doctora (Dirigida por el Dr. Pedro Pérez C.). Sevilla.

5.- Serra, M., (1997)Discovering Geometry. An Inductive Aproach. Editorial key curriculum press, Berkeley, California.

6.- Educación Matemática. Vol.8. No.3. Diciembre 1996. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

7.- Aebli, H., (1958). Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Editorial Kapelusz. Buenos Aires.

8.- Eves, H., Estudio de las Geometrías (2 tomos). Ed. Hispano – Americana, S.A. de c.v. (1ra. Ed. En Español 1969, México) Reimpresión 1985.

9.- Ávila, A; Balbuena, H; Bollás, P., Castrejón, J., (5ta. Reipresión 1999). Matemáticas 3er. Grado. Secretaría de Educación Pública. México.

10.- Libro para el maestro. Matemáticas de Tercer grado. SEP y Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

11.- Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1986). **Traslaciones, Giros y Simetrías en el Plano.** Papeles de Enseñanza de la Matemática. Colección de Monografías/2. Escuela Universitaria del Profesorado de Educación General Básica. Universidad de Valencia.

12.- Alarcón, J. y equipo. (1994). El libro para el maestro. Educación Secundaria . **SEP.**

13.- http://www.uv.es/~didmat/angel/archivos/seiem/JaimeGutierrez90.pdf

14.- http://www.jornada.unam.mx/1999/ago99/990816/cien-galeria.html (El Lenguaje de la Simetría)

15.- http://www.ti.com/calc/latinoamerica/act/pdf/Ensenar_la_demostracion_en_Geometria.pdf

16.- http://www.eafit.edu.co/departamentos/cbasicas/matematicas/investigacion/educacion.html

17.- http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/futureb.pdf (Algunos desarrollos en la enseñanza de la Geometría).

18.- Vargas, R. (1998) Etapas o Estadios de una Teoría Matemática. Material didáctico de apoyo a cursos de Maestría y Diplomados. Hermosillo, Sonora.

19.- http://www.memfod.edu.uy/componentes/mejoramiento/guias/guia3_pdf/matematica/mat_unidad7.pdf (Geom. del Espacio).

20.- http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/capitulos/01/01-01.shtm