UNIVERSIDAD DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Un Estudio sobre la Enseñanza del Álgebra

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA

Rosalinda Mena Chavarría

DIRECTORA DE TESIS:
M.C. Martha Cristina Villalba Gutiérrez

HERMOSILLO, SONORA

AGOSTO DE 2005

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Página

INTRODUCCION 1

CAPÍTULO 1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 5
1.1. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN 5
1.2. PROBLEMA Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN 10
1.3. LIMITACIONES DEL PROBLEMA 11
1.4. OBJETIVOS 12

CAPÍTULO 2
CONSIDERACIONES TEÓRICAS 13
2.1. ELEMENTOS TEÓRICOS FUNDAMENTALES 13
2.2. REFERENCIAS TEÓRICAS CONCRETAS 18
2.3. ÁLGEBRA Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO 24
2.3.1. ÁLGEBRA 24
2.3.2. PENSAMIENTO ALGEBRAICO 31

CAPÍTULO 3
ASPECTOS METODOLÓGICOS 38
3.1. MODALIDAD DE LA INVESTIGACIÓN 38
3.2. ACCIONES DE INVESTIGACIÓN 39
3.3. DESCRIPCIÓN DE LOS PERFILES SELECCIONADOS 40
3.4. INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN 41

CAPÍTULO 4
REPORTE 44
4.1. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS 44
4.2. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE LAS VIDEOGRABACIONES 51
4.3. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS 62
4.4. COMENTARIOS FINALES 73

ANEXO 1 76

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 77

INTRODUCCION

La propuesta curricular de la Secretaría de Educación Pública (SEP) para las escuelas secundarias mexicanas, vigente desde 1993, nos presenta no sólo un cambio en los planes de estudio con el fin de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino que esta visión educativa propuesta, tiene que ver con el entorno social, cognitivo y emocional del alumno; con lo cual se amplía la misión del profesor pues deberá tratar de equilibrar el desarrollo académico de sus estudiantes al mismo tiempo que el desarrollo de sus valores y actitudes sociales y humanas.

El profesor tiene que aprender a conocer al alumno y así darle su valor como persona considerándolo un ser humano con estructuras intelectuales interiorizadas que se pueden ampliar y también compartir con otros. En esta propuesta el alumno es el centro del conocimiento, pues se considera que él mismo construye sus ideas matemáticas y les da significado mediante el uso de experiencias anteriores con su medio ambiente, lo que le permite conectarlas con el mundo real. Así, el profesor se convierte en guía y orientador de nuevas experiencias en el salón de clases; al contrario de lo que ha sido la misión del profesor tradicionalista, quien por lo general desconoce que sus alumnos puedan construir sus propias ideas matemáticas y generalmente los conduce a sólo memorizar y repetir lo que él ya construyó.

En esta visión tradicionalista el profesor es la fuente del conocimiento, la autoridad en el aula. Su actividad en el salón de clases está enfocada a los contenidos que debe transmitir, pues su función es llenar de información a los alumnos mediante la metodología de la exposición y la ejercitación mecánica de algoritmos.

Dentro de la propuesta curricular 1993 para la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio básico, se hace notar un cambio significativo, particularmente en lo que se refiere a la enseñanza del álgebra. Podemos mencionar que: mientras en los programas anteriores se enfatizaba la habilidad para manipular los formalismos sintácticos, en esta nueva propuesta se trata de que esa fluidez en el manejo sintáctico se logre a través de actividades significativas para el alumno, asociándolas a sus conocimientos previos, a situaciones contextualizadas mediante la resolución de problemas, a la interpretación de diversas situaciones; y yendo aún más allá, a tratar de desarrollar habilidades como la de encontrar patrones, organizar datos, identificar variables, relaciones entre ellas, darle significado a los elementos que conforman una expresión algebraica de acuerdo al contexto de la situación que modela, hacer generalizaciones, etc. Estas habilidades se consideran propias del razonamiento algebraico; así se propone fomentarlas para lograr que el estudiante, al habituarse a usarlas, desarrolle una nueva manera de pensar.

Como uno de los objetivos primordiales de la propuesta curricular 1993 es que el alumno sea el centro dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos, entonces el profesor viene a ser el elemento clave para implantar los cambios propuestos por la nueva visión educativa y por lo tanto el entendimiento del profesor acerca de la propuesta, se convierte en otro de los objetivos primordiales en el nuevo paradigma educativo, ya que el éxito del alumno dependerá en gran parte de las experiencias a las que se vea sometido en el salón de clases, las que a su vez serán planeadas de acuerdo a las creencias que el profesor tenga acerca de lo que es matemática, en particular de lo que es álgebra, su enseñanza y aprendizaje.

La importancia y justificación de esta investigación, radica en que mediante una exploración de corte cualitativo se muestra el trabajo que están haciendo profesores que ya conocen la propuesta y que están intentando trabajar a favor del cambio educativo dentro del salón de clases, pues exhiben en su forma de enseñar álgebra, cómo intentan desarrollar en sus estudiantes el razonamiento algebraico. Consideramos que un análisis minucioso sobre este quehacer docente podrá ofrecer valiosa información para aquellos interesados en dar seguimiento a esta nueva propuesta para la enseñanza de las matemáticas en secundaria

Específicamente la investigación está dirigida a explorar cómo entienden los profesores de secundaria la propuesta curricular del álgebra y cómo llevan a la praxis las indicaciones metodológicas que sobre un tema se dan en el plan y programas oficiales.

Dado que este problema de investigación tiene que ver con interpretar indicaciones metodológicas alineadas a la propuesta para la enseñanza de temas algebraicos, la investigación profundiza sobre la importancia de las preguntas y su fundamentación, ya que al igual que otras investigaciones recientes también sostenemos que el preguntar pone en acción toda una metodología de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas alineada a la reforma educativa, como lo señalan Alvarado y Santos (2000) cuando se refieren a la necesidad de enseñar a los profesores cómo poner en marcha los cambios en el salón de clases: "la propuesta de la SEP identifica los contenidos y procesos fundamentales que deben desarrollarse en las matemáticas de la secundaria, aunque le hace falta ejemplificar cómo llevarlo acabo en el salón de clases" (Op. cit. Pág. 13).

El trabajo está organizado en cuatro capítulos los cuales se resumen a continuación:

<u>CAPÍTULO 1.</u> Se expone el planteamiento del problema; es aquí donde se dan los antecedentes, así como la ubicación y contexto al problema que se aborda en el presente trabajo. Además, este capitulo incluye las preguntas de investigación y el objetivo especifico de las mismas.

<u>CAPÍTULO 2.</u> Contiene las referencias teóricas y conceptuales; en primer lugar se presentan y discuten los principios teóricos que orientaron el trabajo de investigación, posteriormente se describen brevemente las concepciones teóricas fundamentales que sustentan la investigación, el constructivismo como paradigma cognitivo y el constructivismo social

como paradigma educativo. En segundo lugar se hace una reflexión teórica sobre el álgebra y el pensamiento algebraico y una breve caracterización del mismo. En tercer lugar se da una explicación del por qué de las referencias concretas que se tomaron como "preguntas guías para impulsar el pensamiento algebraico" y de la importancia de éstas.

CAPÍTULO 3. Se presentan los aspectos metodológicos, donde se describen las actividades realizadas para el desarrollo de la investigación y se da una breve explicación del porqué de cada una y el objetivo que se pretende alcanzar con la misma, también se describen los instrumentos utilizados para obtener la información necesaria.

CAPÍTULO 4. Contiene el reporte de la investigación; se presentan organizadas y detalladas todas las observaciones directas y vídeo-grabadas que se realizaron en el aula a cuatro profesores durante el desarrollo del tema Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2X2 mediante el Método Gráfico. También comprende las reflexiones que se obtuvieron al analizar esa información, enfatizando la orientación que llevan a cabo los profesores sobre el proceso de solución a los problemas que plantean para abordar el tema; se toma como guía en este análisis tanto los principios pedagógicos implícitos en la propuesta y las estrategias metodológicas que se derivan de ellos, así como las indicaciones explícitas que contiene. Para terminar, se ofrecen conclusiones y recomendaciones.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

En la reforma educativa de 1993 el plan de estudios emitido por la Secretaría de Educación Pública (SEP), para consolidar y desarrollar la enseñanza secundaria, ha establecido como una de las prioridades *"ampliar y consolidar los conocimientos y habilidades matemáticas y las capacidades para aplicar la aritmética, el álgebra y la geometría en el planteamiento y resolución de los problemas de la actividad cotidiana".* Establece también que *"en la escuela secundaria, el álgebra ha sido tradicionalmente uno de los temas centrales de la enseñanza de las matemáticas y aún conserva estas características en los nuevos planes y programas para educación secundaria".*

Además, de acuerdo con el enfoque actual para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, se establece que es responsabilidad del profesor seleccionar y organizar las actividades para el estudio de los contenidos que marcan los programas en la forma que considere más adecuada para propiciar el aprendizaje de sus alumnos. Para ello, podrá apoyarse en su propia experiencia y en las sugerencias contenidas en los diversos materiales de apoyo que se les proporcionan.

Esto implica, que se deberá resaltar la importancia de la labor del profesor dentro del salón de clases durante la enseñanza del álgebra, en donde, la manera de aprender álgebra de los alumnos dependerá del diseño de la actividad diaria del profesor, la cual puede estar basada en el Programa de Estudios, en el libro de texto, en una metodología propia de enseñanza, en sus teorías de aprendizaje o en la interpretación que le da a los materiales de apoyo que le proporciona la SEP y que están dirigidos a los profesores de matemáticas de educación secundaria.

El nuevo plan de estudios de 1993 indica que al enfocar el aprendizaje del álgebra a través de la resolución de problemas, se fomenta el desarrollo de las habilidades mentales que caracterizan el pensamiento algebraico.

El punto clave que se desprende de esta propuesta curricular actual es que se aprende a través de situaciones problémicas en contexto, por lo que el profesor tiene la responsabilidad de plantear al alumno un álgebra en contexto, lo cual significa simplemente traer al salón de clases esos aspectos de la vida diaria con los que el estudiante de secundaria se relaciona, para planteárselos como problemas, con el fin de que el estudiante, en sus intentos reflexivos por solucionarlos, haga uso de esas habilidades mentales que se fomentan al utilizar el razonamiento propio del álgebra.

Por otro lado, podemos considerar que esta forma de aprender a razonar en el aula, poniendo en juego sus experiencias externas al salón de clases y sus conocimientos generales previos –no sólo matemáticos –, le servirá al estudiante para ver el mundo de otra manera, para analizarlo y para resolver sus propios problemas. Consecuentemente, esto hace resaltar que el profesor debiera enfocarse a desarrollar habilidades mentales que perduren a lo largo del tiempo para que los estudiantes puedan adquirir otros nuevos conocimientos al relacionarlos con los que ya traen interiorizados y poder utilizarlos de manera adecuada.[1]

Tenemos en México una propuesta curricular potente para la enseñanza del álgebra en secundaria, bien fundamentada, y se podría dar por sentado que los profesores, desarrollándose profesionalmente, entenderían los cambios que se les proponen y tratarían de involucrarse en ellos, valorando su

[1] En consecuencia, en este documento entenderemos por *"álgebra en contexto"* aquella que forma parte
del contexto exterior (vida diaria) e interior (pensamiento y conocimiento) del estudiante.

significación y dándose a la tarea de compenetrarse en esta modalidad de enseñanza del álgebra. Es por ello que cada vez se ven más impulsados los proyectos que apuntan en la dirección de dar a los profesores de educación básica oportunidades de superación profesional; se debe recalcar que junto al lanzamiento de los planes y programas de 1993 se prestó especial atención a la creación de espacios y la utilización de medios de comunicación –como los Centros de Maestros, el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa (ILCE), la Producción de Televisión Educativa vía satélite (Edusat), el Portal en internet de la SEP, el Programa *Enciclomedia*, entre otros –, con la finalidad de estar actualizando los materiales de apoyo e impulsando y orientando su uso.

Por otra parte, la comunidad de investigadores en Matemática Educativa en México ha estado de una forma u otra, presentando propuestas de solución para la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la escuela Secundaria, que incluye por supuesto también, la problemática de la formación que precisan los profesores ante un cambio de propuesta en los planes y programas.

Consecuentemente en el documento "Planes de Estudio para la Educación Básica" publicado en Junio de 1993, el proyecto educativo plantea particularmente en lo que respecta a la educación matemática de secundaria, el desarrollo de habilidades básicas propias del razonamiento algebraico iniciadas desde la aritmética. Este plan de estudios produce cambios muy significativos en la educación secundaria, que a la fecha están en marcha. Los cambios están fundamentados en investigaciones recientes y en trabajos nacionales e internacionales de la comunidad de investigadores de Matemática Educativa, y se enfatiza la enseñanza del álgebra orientada a fomentar el pensamiento algebraico.

Sin embargo, durante diez años de esfuerzos continuados en la dirección de que los profesores hagan efectiva la orientación señalada, tenemos indicadores de nuestra localidad de que las cosas no andan del todo bien: Al revisar trabajos escolares realizados por compañeros de esta maestría (Villalba, 1996-2001), encontramos investigaciones cuyos resultados muestran que, en sondeos aleatorios hechos en diversas secundarias y en diferentes años, los textos sugeridos por la SEP y por la Secretaría de Educación y Cultura (SEC) que mejor concretan la propuesta curricular, no son del todo aceptados o no son utilizados en forma adecuada por los profesores; la organización en equipos para desarrollar el trabajo en el aula y la metodología de resolución de problemas no las implementan, o en su caso, si se llevan a cabo, las desvirtúan. Así mismo, en otras investigaciones locales como Martínez (2001) y nacionales como Alvarado y Santos (2000), hacen notar que las orientaciones y materiales que conducen a apoyar la labor docente en el aula no son utilizados de manera adecuada.

Y por otra parte, tomando como premisa que es el profesor quien, en su labor cotidiana, tiene en sus manos el hacer efectivos los cambios propuestos mediante el dominio que tenga tanto del objeto de estudio –el conocimiento matemático– como del convencimiento y habilidad para implementar el enfoque metodológico propuesto, tenemos una realidad desalentadora: Las evaluaciones nacionales hechas a los profesores de educación básica en el área de matemáticas dan resultados bajísimos: De acuerdo a los Informes de la Dirección General de Evaluación de Sonora (1998-2004), los resultados obtenidos por los profesores del Estado de Sonora que han presentado el examen "La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Secundaria" en donde se evalúa el dominio tanto de la disciplina como el de su enfoque pedagógico (pueden haber asistido o no a un curso que los prepara para ello), los porcentajes de reprobación son mayores que los de aprobación.

Y ante ello surge el cuestionamiento: ¿en realidad hay claridad para los profesores respecto de lo que se está tratando de impulsar en los nuevos programas como "desarrollo del pensamiento algebraico"?.

Se puede considerar que la propuesta curricular actual aún no ha podido ser implementada por los profesores que se encuentran en ese rango desalentador que exhibe falta de dominio de la disciplina o de la metodología para su enseñanza. Ante este panorama, la posición decidida es la de redoblar esfuerzos para hacer posible empezar a revertir los resultados y lograr que los profesores no solamente la conozcan, sino que la implementen efectivamente en el aula.

Consideramos que la movilización hacia las orientaciones dadas en la propuesta, por costosa que sea, vale la pena, pues el enfoque tradicional que aún prevalece, favorece un aprendizaje descontextualizado que enfatiza más en promover habilidades mecánicas de manipulación algorítmica, y no da oportunidad de que el estudiante le de significado al conocimiento y por lo tanto no le permite que desarrolle sus habilidades descriptivas y argumentativas, de iniciativa, de trabajo en equipo; y más particularmente, impide el desarrollo de habilidades fundamentales del pensamiento algebraico como son la observación y detección de patrones, su posibilidad de extensión mediante el uso de distintas representaciones, y la validación de su generalización mediante el lenguaje algebraico formal. Es decir se le niega una gran oportunidad para aprender a pensar.

Así mismo, desde una visión académica, estamos de acuerdo en que cualquiera que sea la decisión de transformación curricular futura, para que progrese, debe estar basada en resultados de investigación que señalen no sólo las estadísticas de "rendimiento escolar" y evaluaciones cuantitativas, sino en el conocimiento de aunque sea una parte de la multiplicidad de factores cualitativos que inciden en el fenómeno educativo de las matemáticas escolares. Particularmente, para tomar decisiones acerca de acciones relacionadas con la Propuesta de Enseñanza para las Matemáticas en Secundaria 1993, consideramos necesaria información no sólo de cuántos la conocen o están suficientemente preparados, sino conocer cómo lo hacen aquellos que dicen implementarla, pues como señala Santos Trigo (1999), se hace necesario documentar la consistencia de los principios fundamentales de la Propuesta con las actividades que se llevan a cabo en el salón de clases.

1.2 PROBLEMA Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Por las razones señaladas, en esta investigación interesa obtener, documentar y analizar información de lo que pasa en el aula cuando al frente se encuentran profesores que dicen conocer la Propuesta, estar de acuerdo con su enfoque y que se encuentran implementándola basándose en todos los materiales oficiales que tienen a su alcance.

Así, se aborda la exploración del desempeño en el aula de profesores de matemáticas de secundaria, cuyos perfiles corresponden a personas con suficiente capacidad matemática y pedagógica –por sus estudios, nivel, experiencia, resultados satisfactorios en los exámenes mencionados–, y declaran estar trabajando a favor del cambio curricular y llevando a cabo las orientaciones metodológicas para la enseñanza de las matemáticas propuestas en el *Plan y Programas de Estudio* vigente en el Sistema de Educación Básica.

Consecuentemente, se plantea como pregunta general que orienta esta exploración la siguiente:

¿Cómo interpretan los profesores de secundaria la propuesta curricular del álgebra y cómo llevan al aula las indicaciones metodológicas que sobre un tema de estudio se dan en el plan y programas oficiales?.

Y de manera más particular, para explorar la metodología de resolución de problemas y la importancia que el profesor le da al desarrollo de la actividad cognitiva del alumno al tratar de impulsar el pensamiento algebraico:

- *Cómo utiliza los problemas: ¿para ejemplificar aplicaciones de lo ya estudiado, para "afianzar" el conocimiento adquirido, o para promover nuevo conocimiento?*
- *Cómo organiza el trabajo en el aula: ¿propicia el trabajo autónomo por equipos?¿les proporciona el ambiente para que discutan entre ellos sus conjeturas? ¿les permite expresarse?*

- *Qué hace para guiar a los estudiantes durante los procesos de solución de problemas: ¿Su práctica docente se basa en la formulación de preguntas? ¿si utiliza preguntas, están formuladas pertinentemente? ¿promueve con ellas habilidades del pensamiento algebraico?¿los induce a reflexionar sobre el proceso?*

1.3 LIMITACIONES DEL PROBLEMA

Se hace necesario en este trabajo, por las características propias de una investigación personal en corto plazo, acotar el problema de investigación. Se ha seleccionado para este fin desarrollar las observaciones solamente en la parte del programa de secundaria que trata la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas 2 x 2 por el método gráfico, ya que algunas de las formas más importantes del pensamiento algebraico se ponen en práctica explícitamente al desarrollar este tema a través de la resolución de problemas:

- Al plantear la búsqueda de solución de un problema en el ambiente gráfico se puede dar lugar –si se guía el proceso adecuadamente–, al manejo significativo de múltiples representaciones: las gráficas mismas como unión de puntos alineados y que tienen relación con una serie de casos particulares de la situación que se intenta modelar, entender y solucionar; las tablas de pares de valores numéricos que se generan a partir de esos casos particulares y la posibilidad de proponer, a partir de un patrón extraído de cada una de las tablas, las expresiones algebraicas (analíticas) correspondientes.
- Así mismo, y aún antes de proponer las expresiones analíticas, se presta para que los estudiantes propongan –a partir de lo que grafican y tabulan– la solución del problema, y argumenten sobre lo que significa el punto de intersección con la situación modelada y

extiendan sus razonamientos en cuanto a la validación de la existencia única de la solución.

- Igualmente, el análisis de situaciones que resulten modeladas en rectas paralelas o bien en una misma recta y su relación con el significado de "no hay solución" o hay una infinidad de soluciones. Finalmente, la relación de este método gráfico con los de procesos algorítmicos sobre la expresión analítica del sistema de ecuaciones lineales, favorece las significaciones de ambos.

1.4 OBJETIVOS.-

De acuerdo a la importancia que damos a la información de carácter cualitativo, vista a través del estado que guarda el currículo real frente al currículo formal propuesto desde 1993 para la enseñanza del álgebra, como base para una gran cantidad de acciones educativas como pueden ser, entre otras: la toma de decisiones curriculares, de propuestas de formación de profesores, de elaboración de guías prácticas para orientar las acciones de enseñanza, o de diseño de actividades; se propone en este estudio como

Objetivo General: contribuir con información de carácter cualitativo que ayude a orientar la toma de decisiones de carácter curricular, describiendo y valorando:

- Las concepciones que tienen los profesores acerca de la propuesta para la enseñanza del álgebra en secundaria.
- Las acciones específicas mediante las cuales los profesores pretenden seguir las indicaciones generales de la enseñanza del álgebra a través de problemas.

CAPÍTULO 2

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

En una primera parte de este capítulo, con la intención de exponer los elementos teóricos que –de acuerdo a la interpretación que en este documento se hace– fundamentan la visión pedagógica contenida en la propuesta curricular 1993 para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en secundaria, y en los que igualmente se encuentra sentido para dar fundamento a la metodología de la enseñanza a través de problemas, se hace referencia en forma general, al *constructivismo*.

En una segunda parte, se hace referencia a los resultados del Proyecto Nacional LUMR ("Leadership for Urban Mathematics Reform; 1994-1997) dirigido por Mark Driscoll en Estados Unidos, ya que en él se encuentran los indicadores concretos que, de acuerdo a los aspectos teóricos expuestos, permitirán, de manera más concreta, orientar la exploración pretendida en esta investigación.

Finalmente en un tercer apartado, se expone la visión que actualmente se está gestando, sustentada por el mismo enfoque pedagógico (el constructivismo), en torno a lo que podemos entender por Álgebra escolar y Pensamiento Algebraico. Esta referencia se considera necesaria, no sólo para dar claridad a la propuesta curricular, sino para apoyar los análisis, observaciones y recomendaciones que se hagan sobre la información colectada en esta exploración.

2.1 ELEMENTOS TEÓRICOS FUNDAMENTALES

En los últimos 14 o 15 años, la teoría del constructivismo ha dominado las investigaciones en educación matemática (Glassersfeld, 1991; Steffe & Gale, 1995), y han inundado las reformas de los curriculums de matemáticas y de pedagogía (Nacional Council of Teachers of Mathematics, 1989, 1991, 1995). Basado en el constructivismo epistemológico de Jean Piaget, el constructivismo –como una teoría del conocimiento– se define como una concepción interactiva y dinámica de aprendizaje en la cual todo conocimiento es construido (Glassersfeld, 1987).

Desde esta proyección teórica, el individuo se concibe como un sujeto autónomo, cuyos procesos de aprendizaje, se vislumbran como procesos invariantes de asimilación-acomodación de nuevas estructuras mentales (procesos de desequilibrio cognoscitivo), apuntando en este sentido, al logro de *aprendizajes significativos* (procesos de equilibrio cognoscitivo). Como menciona Glassersfeld (1996) : "En la teoría de Piaget sobre el conocimiento se tienen los siguientes principios: La mente primero asimila lo que percibe y categoriza la experiencia en términos de lo que ya conoce. Sólo si el resultado de este proceso causa una alteración y crea una perturbación, se inicia una revisión que puede conducir a una *acomodación*. Por así decirlo, puede propiciar el cambio en una estructura existente o la formación de una nueva". Además, en el mismo artículo el autor menciona "Para Piaget, la reflexión conciente surge en el contexto de interacción o colaboración con otros"

Por otra parte, para el constructivismo social –denominado así por P. Ernest (1998) – el conocimiento y la lógica son un fenómeno epistemológico que incluye lenguaje, negociación, conversación y aceptación grupal. Así el conocimiento matemático está constituido de lo que es aceptado y garantizado por la comunidad matemática, o sea que, todo conocimiento está enraizado en un conocimiento humano básico y ligado con una fundamentación compartida donde el acuerdo humano es el último árbitro que justifica ese conocimiento.

El educador brasileño Paulo Freire (1970) dice que el sistema tradicional no toma en cuenta la dignidad del alumno, pues la figura del profesor como autoridad absoluta, reduce a los alumnos a "máquinas receptoras de información" sin ninguna oportunidad de desarrollar su pensamiento a través de conexiones apropiadas del nuevo conocimiento con su propia realidad. En contraste, él propone que el enfoque de un nuevo modelo educativo se debe basar en orientar al alumno para que continuamente haga reflexiones sobre la conexión que hay entre su realidad cotidiana y el saber disciplinar tratado en el aula. Freire tuvo la idea de incluir al alumno cuando se le pregunta sobre sus ideas u opiniones; de esta manera crea un acto de inclusión al invitarlos a participar en un nuevo sistema social. Este acto estimula a la persona, la hace sentirse menos temerosa, propicia su apertura e incrementa su autoestima.

Un científico chileno de talla internacional que ha hecho importantes aportaciones en este campo es Humberto Maturana. Sus ideas tienen resonancia con las de Freire (1970). Maturana con su colega Francisco Varela escribieron El Árbol del Conocimiento (1983) en el que se hace un tratamiento del tema parecido a Freire. Maturana y Varela dicen que la conversación humana crea un nuevo mundo en el acto de participarse sus ideas uno al otro. Una conversación con preguntas dignifica al hombre y disuelve la atmósfera de dominio. La conversación es un acto de colaboración. Si en la enseñanza no se incluye al alumno en la conversación, se le hace sentir negado y oprimido (Maturana y Varela, 1991).

Dentro de los materiales que proporciona la SEP a los profesores con el fin de que conozcan los fundamentos de la Propuesta, se encuentra La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer Nivel (1995). En esta obra encontramos artículos de diversos autores, algunos se refieren explícitamente a ideas desprendidas de estos enfoques constructivistas. Se citan a continuación algunas de las más relevantes:

- Moreno, L. y Waldegg, G. (Lecturas, Op. Cit: pp. 56-57) El alumno es quien construye el conocimiento:

Los objetos matemáticos son construidos por el mismo alumno en un proceso continuo de asimilaciones y acomodaciones que ocurren en sus estructuras cognoscitivas.

- Ontoria, A. et. al. (Lecturas, Op. Cit: pp. 195-197) : La enseñanza está determinada totalmente por la actividad mental constructiva del alumno:

  Pues las actividades propuestas durante la enseñanza están orientadas a la consecución de aprendizajes significativos, los cuales se dan cuando el alumno logra relacionar los nuevos conocimientos con los conocimientos o experiencias ya existentes.

  Así la enseñanza, es un proceso activo y personal, consecuentemente el logro de un aprendizaje significativo está en función del sentido que tiene para el alumno y no de su memorización

- Moreno, L. y Waldegg, G. (Lecturas: Op. Cit. pp. 58 y 62) La actividad mental del alumno se aplica a contenidos que son el resultado de un cierto proceso de construcción a nivel social que se da cuando una demostración o razonamiento es presentada a un cuerpo de matemáticos, donde se pone bajo escrutinio y donde se discute su aceptación o rechazo; y así este ciclo continúa hasta que se llega a un acuerdo. Por lo tanto los alumnos construyen o reconstruyen objetos de conocimiento que ya están construidos socialmente.

Así, tenemos que la socialización del proceso de construcción de significados se da cuando el salón de clases es el reflejo de una comunidad de expertos y los alumnos dialogan entre ellos, discuten conjeturas, las revisan, y las demuestran durante un proceso de validación que termina cuando se llega a un acuerdo entre ellos, o con el profesor. Y entonces las características más importantes del aspecto constructivista social del aprendizaje del álgebra escolar son: el aprendizaje en cooperación, el discurso, las habilidades del lenguaje para explicar los modelos logrados en el lenguaje matemático y la negociación de significados. Además, en un ambiente así va incluido, en una escala más amplia, el aspecto emocional del alumno al entrar en relación con otros compañeros y su profesor.

Se puede considerar que este paradigma abre las puertas a una etapa de transición de una visión tradicionalista cerrada de la educación, hacia una nueva visión educativa.

Sin embargo, no podemos perder de vista que la enseñanza tradicional de las matemáticas de secundaria ha estado vigente durante mucho tiempo, y en ella se conduce al alumno –en el aprendizaje del álgebra– a manipular símbolos que no puede conectar con problemas del mundo real. De acuerdo a esta visión tradicionalista, el alumno adquiere habilidades matemáticas imitando los procesos de resolución, o las demostraciones que hace el profesor, o que vienen en los libros de texto. También adquiere los conceptos algebraicos memorizando mecánicamente lo que el profesor o los libros exponen.

La nueva visión educativa del álgebra, en contraste, propone usar como metodología de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas la resolución de problemas para desarrollar habilidades cognitivas propias del pensamiento algebraico en el alumno. Además se establece que en términos generales, la resolución de un problema hace explícita una forma de pensar; por lo que los profesores, usando la metodología de resolución de problemas tienen mejor oportunidad de tomar el rol de guías del proceso de enseñanza-aprendizaje, en el sentido de que pueden estar atentos a las acciones que llevan a cabo los estudiantes, fijándose no sólo en los modelos que están tratando de usar para interpretar la situación propuesta, sino dando lugar a la exposición y confrontación de ideas con el fin de hacer explícitas las conjeturas con las que están fundamentando tales modelos. En el contexto instruccional de la propuesta se recomienda a los profesores hacer preguntas durante la construcción de sus ideas matemáticas y la resolución de problemas pero no se profundiza en ello ni se ejemplifica.

En nuestra interpretación del enfoque pedagógico de la propuesta, el constructivismo se ve como un paradigma que sostiene que el alumno, tanto en los aspectos cognoscitivos, sociales, como afectivos, se va construyendo o haciéndose él mismo por su interacción diaria con el ambiente, con el objeto de conocimiento, su contexto interno (sus conocimientos y razonamientos) y con su forma de construir tal conocimiento.

2.2 REFERENCIAS TEÓRICAS CONCRETAS

Advertimos que el enfoque del actual currículo mexicano, por la innovación de las ideas, ilustra una aplicación de la postura constructivista. En particular, al proponer como metodología central la resolución de problemas en ambientes de participación de los estudiantes mediante trabajo en equipos, sitúa al profesor como un guía, y como tal, su rol es de propiciar situaciones especificas que orienten al alumno hacia la reflexión, la inspiración, la iniciativa de hacer y probar conjeturas, de contrastarlas con sus compañeros, etc.

En la búsqueda de investigaciones importantes que incorporaran las reflexiones teóricas anteriores y al mismo tiempo nos sirvieran de guía para explorar la práctica de los profesores al iniciar cambios en la enseñanza-aprendizaje del álgebra de secundaria, nos encontramos con 3 proyectos llamados: “Linked Learning in Mathematics” (1997-), “Leadership for Urban Mathematics Reform”(LUMR; 1994-1997) y “Assessment Communities of Teachers” (ACT; 1994-1997) que se abordan desde la nueva visión de un álgebra en contexto. En esos proyectos se llevaron a cabo tres programas de desarrollo profesional donde participaron cientos de profesores con sus alumnos.

Seleccionamos el proyecto LUMR, cuyo director es el investigador Mark Driscoll; porque es un reporte muy completo que delinea hábitos del pensamiento algebraico claves, que caracterizan un aprendizaje significativo y una utilización del álgebra no aislada de otros conocimientos matemáticos y en contexto. También presenta las estrategias que los maestros pueden utilizar para fomentar los hábitos del razonamiento algebraico y va llevando hacia un patrón para lograr evaluar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. Particularmente este reporte nos proporciona las herramientas apropiadas para poner en acción una metodología para la enseñanza y aprendizaje del álgebra, donde los conceptos algebraicos se comprenden mejor y pasan a formar parte de los conocimientos que se tienen interiorizados. Nos ilustra cómo se puede construir el conocimiento algebraico, cómo los conceptos van madurando y se van perfeccionando en el sentido del uso que se les da al resolver un problema.

La construcción del conocimiento es consistente con el modelo de Driscoll al utilizar las preguntas que propone para explorar las ideas y/o insight que surgen al intentar resolver un problema. Este énfasis en la exploración a través de preguntas, requiere una nueva metodología instruccional y el conocimiento de lo que significa aprender y enseñar en el nuevo enfoque educativo.

El modelo de Driscoll se desarrolla a través de los ejemplos y trabajos realizados por los propios estudiantes, que después de analizarlos ayudan a los profesores a identificar patrones de razonamiento algebraico, así como a formular preguntas que se pueden utilizar para guiar y ampliar el razonamiento de los estudiantes

Estamos de acuerdo, cuando él establece que el fundamento del desarrollo profesional del profesor de álgebra está en el conocimiento y utilización de las habilidades del pensamiento algebraico a través de preguntas pertinentes.

En este enfoque de aprendizaje, el éxito del alumno que está aprendiendo puede fundamentarse en las siguientes consideraciones:

a) Que el profesor sea consciente de su forma de pensar para que logre hacer las preguntas pertinentes que desarrollan las habilidades del razonamiento algebraico.

b) Que el profesor use pertinentemente un sistema potente de preguntas para desarrollar el razonamiento algebraico.

c) Que en la forma de evaluar el trabajo de sus estudiantes el profesor tome en cuenta los procesos de construcción del nuevo conocimiento.

Es decir, hacer explícito y conciente el conocimiento que ya se tiene, desarrollar más el conocimiento y saber evaluarlo vienen a ser las acciones claves en este enfoque. Por otra parte, lograr la meta de desarrollar el pensamiento algebraico está en gran medida condicionada a la clase de preguntas que hacen a sus estudiantes.

¿Por qué es importante saber cómo enseñar al estudiante a desarrollar su razonamiento algebraico en forma significativa por medio de preguntas guías pertinentes?

- El trabajo que realiza un profesor para fomentar hábitos de razonamiento algebraico, tiene que ver con la práctica en el salón de clases ya que los profesores tienen que "ver" hilos de tal razonamiento algebraico en las respuestas de los alumnos, notar sus huellas para poder seguirlas y por medio de preguntas guías, redireccionar o ayudar a llegar a la meta propuesta.
- Al ayudar en el salón de clases al alumno a trabajar de tal modo que él mismo se esté fomentando hábitos del pensamiento algebraico, se logra que el propio alumno se haga las preguntas cuando está trabajando en alguna actividad didáctica.
- Al proponer en el salón de clases actividades matemáticas pertinentes para desarrollar el pensamiento algebraico, y al fomentar

el hábito de realizarse preguntas uno mismo cuando se trata de resolver un problema, se puede lograr que emerjan en el alumno reflexiones similares a las de un profesor bien preparado en un aprendizaje significativo del álgebra.

Compartimos al igual que esta propuesta, que los hábitos del pensamiento algebraico se pueden aprender, y para impulsar este aprendizaje se le sugieren el profesor las siguientes consideraciones:

- El profesor debiera modelar consistentemente el pensamiento algebraico por medio de preguntas guía para darle significado a las reflexiones de los estudiantes*:*

  Dentro de una actividad matemática el profesor debería estar atento a las respuestas de los alumnos con el fin de tratar de hacer explícito lo que los estudiantes han dejado implícito en sus pensamientos, o sea, tratar de seguir el pensamiento de los estudiantes, para que por medio de preguntas pertinentes pueda hacer explicito lo que tiene interiorizado, como rasgos de razonamiento algebraico, por ejemplo: "*O sea que ¿Decidiste probar tu regla en algunos números más grandes para ver si podría funcionar?*".

  Como el papel del profesor sigue principios, podríamos citar algunos. Driscoll enuncia los principios que deben guiar al profesor durante el aprendizaje:

  a) El profesor se debe centrar en formular las preguntas que induzcan al estudiante a generalizar su razonamiento, que reflexione y se enfrente a sus formulaciones incorrectas.

  b) El profesor debe enfrentar al alumno por medio de preguntas a las contradicciones que genera la hipótesis que esté manejando en ese momento, con el fin de inducirlo al desequilibrio que lo lleve o lo motive a que busque mejores soluciones.

c) El profesor no debe centrarse en las soluciones a los problemas que están resolviendo los estudiantes, pues inhibe el crecimiento de su razonamiento. Por otra parte, los errores del estudiante informan sobre los niveles conceptuales en los que se encuentra.

- El profesor debiera ser oportuno y pertinente al usar preguntas guías :

Que las preguntas guía sean señalamientos hechos a tiempo, que los ayuden a poner atención a lo que es importante para re-direccionar o expandir el pensamiento del estudiante; por ejemplo, si el profesor ve la oportunidad de enfatizar un pensamiento algebraico puede decir "*Una vez que realicen su tabla busquen un camino más fácil, pongan atención a cómo el grupo de números y cómo las agrupaciones pueden sugerir un camino más fácil*".

El estudiante ha construido su propio conocimiento cuando guiado por preguntas pertinentes encuentra por sí mismo soluciones correctas. Esta construcción de su propio conocimiento se presenta cuando el estudiante está seguro que resolvió una contradicción que emergió cuando él buscaba soluciones adecuadas.

- El profesor debiera hacerse el hábito de formular una variedad de preguntas:

Es lo fundamental para que se dé el proceso de cambio, tanto en el profesor como en el alumno, así también como para aprender a organizar los pensamientos y aprender a responder de acuerdo al modo de razonar en un álgebra que se está proponiendo. Por ejemplo, *¿Puedes explicar que representan el tres y el cinco de esa ecuación?*

Con las preguntas y las reflexiones el alumno crece intelectualmente y se le desarrollan otras capacidades como: sociabilidad, seguridad de sí mismo, capacidad de expresarse correctamente y capacidad de darse a entender. Con ello se constituye otro principio que cabe destacar y que es la "Socialización del Conocimiento" pues con este término deseamos enfatizar que otra finalidad de la enseñanza-aprendizaje del álgebra, dentro de esta reforma algebraica actual es, desarrollar la autonomía en el alumno tanto en el plano afectivo, intelectual, como social; lo cual se puede lograr a través del uso de preguntas. A través de la socialización, trabajando en equipos se pretende que el estudiante aprenda de los demás. Pero para que se de este carácter social del conocimiento y se aplique este nuevo aprendizaje se requiere que en el salón de clases se dé un clima de trabajo, de libertad y respeto mutuo en el que se pueda preguntar sin temor.

¿Por qué la propuesta de Driscoll, valora en gran medida la acción de preguntar?

- Un valor está en la intención que lleva la pregunta, es decir, ésta tendrá valor solamente si la intención que conlleva induce a una respuesta que implique avance en el proceso de razonamiento.
- El otro valor está en los momentos en los que se deben hacer esas preguntas guías. Las preguntas se deben proponer tanto en situaciones potentemente algebraicas como también en situaciones en las cuales, durante su formulación, no parecieran tan importantes los rasgos del pensamiento algebraico que aparecen: El profesor tiene que tener en cuenta que las preguntas que parecen tontas y que se hacen en el salón de clases, ayudan a desarrollar el pensamiento algebraico a otros que pensaron en lo mismo y necesitan reiniciar su razonamiento.
- Otras preguntas ayudan a enriquecer las percepciones cuando son preguntas que provienen de un *insight.*

2.3 ÁLGEBRA Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

En este apartado se exponen algunas ideas extraídas de diversos reportes de investigaciones recientes, tanto nacionales como internacionales y que son impulsadas en los foros de discusión, acerca de los conceptos de "álgebra" y "pensamiento algebraico" con el fin de tratar de clarificar la relación que tienen estos conceptos en las modernas propuestas curriculares para la enseñanza del álgebra en secundaria así como para poder aquilatar hasta dónde se extiende su desarrollo.

La documentación de estas ideas nos lleva a "ver" cómo las concepciones actuales de lo que es álgebra escolar tienden a integrar las características del pensamiento algebraico, para lograr una de las metas más importantes de la enseñanza del álgebra: desarrollar habilidades cognitivas en el alumno. Se espera que con esta breve exposición se logre tener mayor claridad sobre el currículum y los acuerdos instruccionales, y así, poder comprender que la importancia de esta relación "binomial" de álgebra y pensamiento algebraico radica en que de las nuevas propuestas – no sólo de México, sino de otros países de América y Europa– para la enseñanza del álgebra, se desprende que si se desarrolla el pensamiento algebraico en los alumnos, se les preparará para tener experiencias exitosas en álgebra , en la vida diaria escolar y extra-escolar.

2.3.1. Álgebra

Se exponen a continuación los resultados de la investigación documental acerca de lo que es álgebra de acuerdo a algunos expertos:

A. El investigador Alan Bell (Kieran 1996), afirma que: "*Históricamente, álgebra es resolver problemas para formar y resolver ecuaciones*". Él establece que hoy, esta misma concepción de lo que es álgebra se amplía agregándole las acciones de generalización, y el trabajo con funciones y fórmulas como características dominantes en toda actividad algebraica. Aún está presente en la actualidad la forma de un álgebra históricamente tradicional, la cual inicia con la solución de problemas relativamente complejos concernientes a cantidades (números) y a las cuatro operaciones básicas. En esta visión la mayoría de los problemas que se pueden resolver utilizando razonamiento algebraico también se pueden resolver con razonamiento aritmético, minimizándose el valor del desarrollo del pensamiento algebraico. El sentido amplio del álgebra, continua diciendo Bell, está basado en la exploración de problemas en forma abierta, extendiéndolos y desarrollándolos en la búsqueda de más resultados y más resultados generales, lo cual constituye la actividad algebraica esencial.

B. Para el investigador James J. Kaput (1995-a):

- Históricamente los contenidos del álgebra han sido, hileras e hileras de letras y números guiados por leyes algebraicas o formalismos sintácticos, dónde los escasos problemas que se plantean son presentados como aplicaciones al final de cada tema. Pero presentar el álgebra así, es restringirla al estudio de una sola cosa, sin relaciones a otros procesos mentales, es tener una visión de un álgebra sin relaciones, fuera del contexto de la nueva propuesta de enseñanza.
- La esencia del álgebra en el nivel secundaria es dinámica y transformacional. El álgebra elemental es acción: colectar términos semejantes, factorizar, hacer desarrollos, solucionar ecuaciones, simplificar expresiones, sumar sucesiones, graficar, etc. El álgebra elemental parece ser una extraordinaria colección de procesos transformacionales. Todo lo algebraico parece fluido y variable, pero la experiencia nos dice, que el valor de la potencia del álgebra se ha

sobre-simplificado, su fluidez se contiene en el aula con tan sólo no hablar de las propiedades de la estructura que emergen de la naturaleza de los objetos algebraicos con los que el álgebra manipula, y que son números concretos o generales. Pero sobre todo, al no presentar esa fluidez a través de situaciones concretas que llevan a darle significado a las ideas fundamentales del álgebra.

El mismo James J. Kaput como parte de la comunidad internacional de investigadores en matemática educativa, presentó en San Francisco durante una reunión del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en 1995 (b), un documento con una amplia visión del álgebra, que tiende hacia una reforma, en la que él y sus seguidores presentan las características del pensamiento algebraico como englobadas en la forma en la que ellos consideran que es álgebra:

- generalizar y formalizar modelos.
- razonamiento aritmético generalizado.
- razonamiento cuantitativo generalizado
- manipulación de formalismos guiados sintácticamente.
- un estudio de funciones, relaciones y variación
- tecnología

C. **El investigador Louis Charbonneau,** (Kieran Op. Cit.) hace referencia a varias formas de considerar lo que es el álgebra:

- *Álgebra es una extensión de la aritmética.* En la escuela se enseña álgebra diciendo que los símbolos, w, a, b, e, etc. son como números, o sea, se comportan como números. El enfatizar en números escondidos en letras, fomenta la idea de que los símbolos algebraicos se comportan no por el modo para el cual fueron creados, sino como otro objeto matemático.

- *Álgebra es simbolismo.* El simbolismo es central en el álgebra. El simbolismo reduce el volumen de la presentación de un argumento, por lo que se podría decir que el simbolismo es un lenguaje. Un obstáculo muy general, al considerar al álgebra como un lenguaje que emplea muchas palabras y símbolos que los estudiantes ya han usado en aritmética, puede ser, por el lado positivo, que le permita al estudiante entender rápidamente y de una forma muy simple, lo que es el álgebra, pero tiene un lado negativo también y es crêer que las palabras comunes y corrientes y los símbolos tienen exactamente el mismo significado que ellos les dan en aritmética. El simbolismo nos permite ponerle un nombre a algo que no lo tenía, lo cual es muy importante en la forma analítica de maniobrar un problema. Pero en álgebra, no todo es simbolismo. El simbolismo es un medio para resolver problemas, es un medio que acompaña al análisis de un problema. Los símbolos son herramientas del razonamiento.

D. Lesley Lee (Kieran Op. Cit.) considera que álgebra es: una cultura que permite integrarla como un conjunto de actividades, como en un lenguaje, y que dentro de este proceso de aculturación algebraica que toma lugar en el salón de clases, ayuda mucho pensar en la interacción del lenguaje y el conocimiento, de la misma forma como en la interacción entre álgebra y otra cultura matemática que es la aritmética. Si álgebra es una cultura, entonces iniciarse en ella es la primera etapa de un largo proceso de aculturación, una iniciación dentro de esta nueva cultura, con sus propias concepciones usuales, sus formas sociales, sus maneras de comunicación con formas escritas y visuales, su selección de temas, estructuras, código de conductas, etc. En esta nueva cultura se amplía el espacio de la creatividad, el alumno se siente parte de una comunidad matemática y siente que está haciendo algo importante por la comunidad. Así, desarrollan la comunicación y habilidades con notable rapidez porque es una necesidad social para ellos, dentro del salón de clases.

E. Luis Radford (Kieran Op. Cit.) establece en su artículo que álgebra consiste: "En herramientas conceptuales con las cuales operamos para producir mas adelante abstracciones. *Las herramientas son, clasificar, comparar, combinar, transformar y usar la reversibilidad que contiene acciones asociadas con estructuras básicas de conjuntos de números, relaciones, funciones, etc.* Además álgebra consiste en desarrollar procesos como lenguaje algebraico, usar relaciones o conexiones y trabajar con representaciones:

- Utilizar el lenguaje algebraico para expresar relaciones y trabajar con las representaciones.
- Manipular las expresiones simbólicas de diferentes formas para exponer aspectos nuevos al realizar relaciones.
- Utilizar los procesos para desarrollar algunas características del pensamiento algebraico, de las cuales las más importantes son formar y resolver ecuaciones, generalizar y trabajar con funciones y fórmulas.
- A los alumnos se les dificulta trabajar algebraicamente representando la situación simbólicamente, después hacer transformaciones sintácticas y luego, verificar si desde la solución se puede llegar a la situación original, que corresponde a escribir lo que se hace con símbolos numéricos y algoritmos desde el final hasta el inicio. Trabajar algebraicamente es hacer todo esto con cantidades que no se especifican numéricamente (número generalizados) ó con cantidades que aún no están especificadas (incógnitas).

- Se puede aprender el aspecto lingüístico aprendiendo a usar la notación correctamente a través de un aprendizaje donde los símbolos tengan una significación.
- Es muy necesario adquirir el hábito de la estrategia “saber-preguntarse” que es indispensable para lograr el éxito en actividades tales como generalización, formulación y resolución de problemas y además el trabajo con funciones y sus relaciones.

F. Usiskin (1997) Para este investigador álgebra es un lenguaje. Este lenguaje tiene los siguientes aspectos principales: 1) Incógnitas, 2) Fórmulas, 3) Generalización de patrones, 4) Representaciones, 5) Relaciones

Como en estudios nacionales relacionados a los contenidos de los curriculums propuestos por la SEP y el NCTM se han encontrado puntos de coincidencia en cuanto a la visión y ejes de contenidos de las propuestas, también se integra a continuación lo que es álgebra en ambas propuestas las cuales se consideran congruentes:

G. Dentro de los estándares de la NCTM (1989) álgebra es: entender el concepto de variable, expresión y ecuación; representar situaciones y patrones numéricos con tablas, gráficas, reglas verbales y ecuaciones y explorar las interrelaciones de esas representaciones; analizar tablas y gráficas para identificar propiedades y relaciones; desarrollar confianza en resolver ecuaciones lineales utilizando métodos concretos, formales e informales; investigar desigualdades y ecuaciones lineales y no lineales; aplicar métodos algebraicos para resolver una variedad de problemas del mundo real y problemas matemáticos.

Al enfatizar en el uso de patrones y funciones para representar y resolver problemas, la NCTM (Op. Cit.) considera que álgebra es: describir, extender, analizar y crear una amplia variedad de patrones; describir y representar relaciones entre gráficas, tablas, reglas; analizar relaciones funcionales para explicar cómo un cambio en una cantidad provoca cambio en otra.

H. **Según estándares de la SEP** (1993) el álgebra de hoy es: un álgebra que nos enseña a expresar los fenómenos cotidianos para poder plantearlos como problemas en nuestro propio contexto y resolverlos. Aprender álgebra hoy implica que se nos enseñe a razonar, a conjeturar, a preguntar, a demostrar y argumentar. Es un álgebra que debe promover que el alumno construya su propio aprendizaje, que la orientación que se reciba del profesor apunte hacia aprendizajes significativos para que aprenda a pensar y así pueda construir un razonamiento cada día más evolucionado. Porque en la nueva reforma algebraica, lo que deben saber de álgebra los estudiantes se encuentra interiorizado en las características del pensamiento algebraico, las cuales desarrollan habilidades, ya que aprender álgebra hoy es aprender a pensar a través de procesos como son la resolución de problemas, la comunicación, el razonamiento, las relaciones y el uso de representaciones.

Como se puede notar, los estándares de la SEP en relación a la enseñanza del álgebra, concretan los enfoques constructivistas del conocimiento descritos en la sección primera de este capítulo.

2.3.2. Pensamiento Algebraico.

La nueva propuesta educativa mexicana establece que la resolución de problemas y el razonamiento algebraico son inseparables, porque durante la resolución de problemas, se tiene como fin que el alumno desarrolle habilidades de modelar, conjeturar, argumentar, comunicar, validar, extender, generalizar, representar, etc, las cuales, al usarlas una y otra vez, va fortaleciendo su manera de razonar algebraicamente, es decir va construyendo su propio pensamiento algebraico.

Se intenta resaltar ahora que, aunque se aborde desde aspectos distintos, son también muchos los expertos que relacionan el Álgebra y el Pensamiento Algebraico:

A. **Vance** (1988): Álgebra se define algunas veces como aritmética generalizada o como un lenguaje para generalizar la aritmética, sin embargo en las dos situaciones, lo algebraico es más que un conjunto de reglas para manipular símbolos: es una manera de pensar.

B. **Alan Bell** (Kieran Op. Cit.): Pensamiento algebraico significa uno o mas de los aspectos siguientes presentes durante la resolución de problemas aritméticos complejos:

- Métodos hechos paso por paso, trabajando con datos dados que involucran o no incógnitas.
- Percepción global del enunciado del problema con el procedimiento y uso de múltiples relaciones aritméticas.
- Saber reconocer métodos generales similares en diferentes tipos de problemas.

- Saber encontrar y comprobar las generalizaciones
- Reconocer y utilizar propiedades generales de sistemas numéricos y sus operaciones.
- Saber reconocer, denotar, representar y utilizar funciones.
- Utilizar un lenguaje simbólico manipulable para ayudar en todo el trabajo que hay por hacer en los incisos anteriores.

C. **Louis Charbonneau** (1996): Una forma del pensamiento algebraico involucra:

- Operaciones aritméticas entre símbolos y números
- Preocupación por las relaciones matemáticas en lugar de la preocupación por el objeto matemático. La forma del pensamiento algebraico está basada entonces sobre relaciones en lugar de enfocarse en predicciones lógicas.
- Hacer preguntas con confianza, hasta aquellas donde la idea expresa existencia de los objetos algebraicos, conectada con la abstracción.

D. **Battista y Brown** (1998): El pensamiento algebraico es pensar acerca de los procedimientos, es pensar, reflexionar hasta el punto de poder expresar esos procedimientos en el símbolo algebraico. El pensamiento o razonamiento algebraico le da sentido al uso del álgebra. Los estudiantes deben de utilizar significativamente el álgebra, para lo cual su enseñanza debe enfocarse en aprendizajes significativos, no en la manipulación simbólica. A lo largo de sus cursos de matemáticas los estudiantes deben de aprender a pensar y hablar acerca de los procedimientos generales realizados sobre números y cantidades…Pensando acerca de los procedimientos numéricos que empiezan en grados elementales y continúan…hasta que los estudiantes puedan expresar y reflexionar acerca de los procedimientos en donde se usa el simbolismo algebraico.

E. **Herbert y Brown** (1997): pensamiento algebraico es usar el simbolismo matemático y las herramientas para analizar diferentes situaciones como (1) extraer información de una situación propuesta (2) representar esa situación matemáticamente en palabras, diagramas, tablas, gráficas y ecuaciones; y (3) interpretar y aplicar las matemáticas para encontrar la solución de las incógnitas, para comparar conjeturas e identificar relaciones funcionales.

F. **Kieran y Chalouh** (1993): El pensamiento algebraico involucra el desarrollo del razonamiento matemático dentro de un marco mental algebraico al construir significados para los símbolos y las operaciones del álgebra en términos de la aritmética

G. **Kaput** (NCTM, 1994): El pensamiento algebraico involucra la construcción y representación de patrones, generalización, y lo más importante la acción de explorar y hacer conjeturas. Y afirma que el detallar las conexiones entre las diversas formas del razonamiento algebraico, especialmente la manera de desarrollarlas en la mente de los estudiantes a través de actividades didácticas, es lo más importante para estar inmersos en la nueva propuesta algebraica que promueve el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por consiguiente, en la nueva Reforma Algebraica proponen Kaput y otros lo que deben saber los aprendices del álgebra se encuentra interiorizado en las características del pensamiento algebraico, que entrelazadas, constituyen la forma relacionada de ver el álgebra a través de la visión educativa actual.

H. **Proyecto LUMR** (Driscoll, 1999): Los hábitos mentales que se construyen usando el pensamiento algebraico incluyen la habilidad de pensar acerca del trabajo que se desarrolla con funciones y pensar acerca del impacto que tienen las propiedades de las estructuras de los sistemas numéricos sobre los cálculos.

El pensamiento algebraico involucra uno o mas de los aspectos siguientes presentes durante la resolución de problemas: métodos hechos paso a paso, saber reconocer métodos generales similares de varios problemas, encontrar generalizaciones y comprobarlas, reconocer y utilizar propiedades generales de sistemas numéricos y sus operaciones, saber reconocer, denotar, representar y utilizar funciones y utilizar el lenguaje simbólico en todo lo anterior.

I. **Kriegler** (2000): El pensamiento algebraico está formado por dos grandes componentes: una se integra por las habilidades específicas para la resolución de problemas, habilidades de razonamiento y habilidades para usar representaciones; y la otra por el estudio de las ideas algebraicas fundamentales que son el objeto de estudio de la materia, el contenido sobre el cual se desarrollan las habilidades (el contenido sobre el cual se va a reflexionar).

A la primera componente se le puede denominar la de las *herramientas del pensamiento algebraico,* y a la segunda, la de las *concepciones sobre el álgebra.*

Es importante señalar que las concepciones sobre el álgebra de un profesor, determinarán en gran medida los contextos que proponga para tratar de impulsar las correspondientes habilidades que de acuerdo a su esquema serán las que más faciliten acceder a pensar algebraicamente.

A continuación se esquematizan en la tabla estas componentes.

Herramientas del Pensamiento Algebraico	*Concepciones sobre el Álgebra*
Habilidades para la Resolución de Problemas • Uso de Estrategias • Exploración de múltiples estrategias / soluciones	Como una Generalización de la Aritmética • Basada en cómputo simbólico
Habilidades en el Uso de Representaciones • Relacionar lo gráfico, simbólico, numérico y verbal. • Trasladarse entre diferentes representaciones • Interpretar la información dentro de las representaciones.	Como el Lenguaje de las Matemáticas • Significado de las incógnitas y soluciones • Entendimiento y uso apropiado del sistema numérico • Manipulación sintáctica. • Uso de representaciones simbólicas equivalentes (=,<,>, ...)
Habilidades de Razonamiento • Inductivo • Deductivo	Como una Herramienta para Estudiar Funciones y Modelos • Búsqueda, expresión y generalización de patrones y reglas en contextos cotidianosRepresentación de ideas matemáticas usando ecuaciones, tablas, gráficas y/o palabras • Relación entrada /salida

Generalmente, si a los profesores que tienen a su cargo cursos de álgebra en secundaria y que están al tanto de las nuevas propuestas curriculares se les pregunta sobre su idea o definición del pensamiento algebraico, se sitúan bajo las perspectivas sobre las que introducen el álgebra. Así, encontramos una diversidad de respuestas, de las cuales damos una muestra a continuación:

- *el pensamiento algebraico es la habilidad para operar con una cantidad desconocida como si fuera conocida.* Esta es una definición en la que se advierte una introducción didáctica relacionada con la aritmética, ya que definen el pensamiento aritmético como la habilidad para operar sobre cantidades conocidas.
- Cuando en la enseñanza del álgebra se enfatizan las funciones, definen el pensamiento algebraico como *la habilidad para representar las relaciones entre las variables,* ya sea de una manera tabular, gráfica o analítica.
- Si la introducción del álgebra la hacen enfatizando en la generalización entonces, para el profesor: el pensamiento algebraico es *la habilidad de poder llegar más allá de lo que se ha obtenido como conocido de las incógnitas que aparecen en una situación problemática*, o sea, *la habilidad de extender el planteamiento de la solución de un problema más allá de lo convencional.*
- Para los que optan por introducir el álgebra por medio de la resolución de problemas, piensan que: el pensamiento algebraico es *la habilidad de establecer el modelo de solución del problema*, como si el pensamiento algebraico fuera la manera de resolver un problema.
- Para otros profesores: el pensamiento algebraico puede ser definido como *el procedimiento desarrollado durante* la simplificación de expresiones, o durante la resolución de ecuaciones, la resolución de problemas, o también los procedimientos desarrollados durante la comparación de funciones o modelado, etc.

Como hemos visto en este reporte documental sobre la visión del álgebra y pensamiento algebraico que tienen tanto los profesores como investigadores, se pone de manifiesto una postura integradora que enfatiza en dar importancia a las habilidades o procedimientos de los alumnos, y por lo tanto, confronta la postura en donde el álgebra se enseña como en bloques aislados. Además, en las visiones vanguardistas sobre la enseñanza del álgebra se pretende que a las ideas que el profesor tiene acerca de lo que es álgebra –y que constituye su forma de enseñarla–, les integre las herramientas propias del pensamiento algebraico, y que son: las habilidades para la resolución de problemas, habilidades de razonamiento, habilidades de comunicación, habilidades de uso de representaciones, habilidades relacionales que se obtienen de aprender álgebra a través de procesos. Sin embargo, esta meta la alcanzará el profesor si plantea situaciones didácticas apropiadas en donde se haga explícito que enseñar álgebra es fomentar el pensamiento algebraico.

CAPÍTULO 3
ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1 MODALIDAD DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología de investigación se ha seleccionado desde una perspectiva cualitativa apoyada en la modalidad de estudio de casos, porque el interés de la investigación ha sido recolectar información sobre la práctica de los profesores en el aula en relación con las propuestas didácticas para la enseñanza del álgebra, sugeridas en los Planes y Programas de Estudio para Secundaria en nuestro País.

La finalidad de las observaciones en este trabajo de investigación es buscar o identificar las estrategias que el profesor utiliza en el salón de clases para desarrollar habilidades propias del pensamiento algebraico cuando utiliza la metodología de resolución de problemas, pues creemos que esto nos puede llevar a entender la conceptualización que tiene el profesor de lo que es "pensar algebraicamente". Consecuentemente, estas observaciones nos pueden llevar a reflexionar en lo que significa para el profesor esta nueva forma de aprendizaje.

En el aula, al observarlo, se podrán ver emerger sus concepciones: ya sean de un álgebra contextualizada promovida en la propuesta curricular actual, o de un álgebra tradicional, o, de un álgebra que mezcla las dos posturas. El análisis de estas observaciones nos permitirá caracterizar a los profesores de acuerdo a su manera de enseñar y obtener información valiosa acerca del currículum real para la enseñanza del álgebra.

El salón de clases es el medio ideal para observar y reflexionar sobre qué tan distante está el profesor de entender qué enseñar en álgebra y cómo enseñarla, una vez que él mismo se declara como conocedor de la actual propuesta y a favor de la metodología de resolución de problemas. Esta "distancia" la mediremos en función de la forma en la que el profesor orienta a sus alumnos por medio de preguntas pertinentes, de acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 2. Así, en función de las características del pensamiento algebraico que el profesor trata de inducir en el alumno para que éste llegue a una meta establecida, trataremos de hacer explícitos los rasgos del pensamiento algebraico que el profesor tiene interiorizados.

Con el fin de poder caracterizar las prácticas didácticas de los profesores en el aula mediante la observación y la reflexión, se utilizarán como guías las consideraciones conceptuales que se han hecho en el marco teórico y los planteamientos desprendidos de documentos de la SEP y de propuestas vanguardistas alrededor de métodos específicos para desarrollar el pensamiento algebraico, como la mencionada en el mismo marco teórico de este documento, del investigador Mark Driscoll (1999).

3.2 ACCIONES DE INVESTIGACIÓN

Como parte importante de las acciones metodológicas, y previas a las de observación, se incorporó, antes de este capitulo, una referencia documental en relación a diferentes concepciones de investigadores y profesores, sobre lo que es álgebra y pensamiento algebraico, con el fin de tener un panorama más claro y completo sobre el problema de investigación.

Otra acción metodológica importante consistió en el estudio de los materiales que conforman el currículo matemático de la educación media básica, como lo son: El plan y Programas oficiales, libros de texto, Libro del Maestro, Fichero de Actividades y la Secuencia Didáctica. Al analizarlos, se observó que en todos los materiales se encuentra implícito al constructivismo como fundamento teórico en el cual se basa la propuesta oficial, por lo que se incluyó, en el Capítulo 2, una breve caracterización del mismo, así como de todos los conceptos que se consideraron claves para la mejor fundamentación de este trabajo de investigación, por ejemplo: Lo que significa en esta propuesta aprender o enseñar álgebra, y la importancia de usar las preguntas como una estrategia metodológica de enseñanza.

El tratar de resaltar en este trabajo de investigación la importancia de las preguntas para ayudar al alumno a desarrollar el razonamiento algebraico, surgió al encontrar que, en ocasiones explícitamente, ó en otras implícitamente, el plan y programas oficiales, los libros de texto, el libro del maestro y los reportes de algunos investigadores sobre el tema, indican, que una herramienta para abrir el proceso de razonamiento en los alumnos es el preguntar, pero, en general, no ejemplifican cómo hacerlo.

Se tomó como modelo el trabajo del investigador Mark Driscoll (Op. Cit) para fundamentar la importancia de las preguntas pertinentes, ya que además de ejemplificar cómo, cuándo y qué preguntar, su trabajo está realizado con profesores de secundaria, y en él se analizan las acciones de enseñanza y aprendizaje del álgebra cuando están basadas en preguntas guías.

Como ya se mencionó, para dar respuestas a las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo, se seleccionó la modalidad de estudio de casos, con el fin de poder observar el desempeño de profesores de matemáticas de educación secundaria, al realizar su trabajo en el salón de clases, durante la enseñanza del álgebra, en el tema de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2, por el método gráfico.

3.3 DESCRIPCIÓN DE LOS PERFILES SELECCIONADOS

Se investigaron *cuatro casos* de la localidad que fueron seleccionados mediante diversas acciones en las que se incluyó la aplicación de los instrumentos que se detallan más adelante. Así, los perfiles de cada uno de los *casos* que conformaron la muestra intencionada de investigación, son los siguientes:

- El primer y segundo *casos*, que se denotaron como *"A"* y *"B"* respectivamente, corresponden a profesores que tienen estudios de postgrado en relación a la enseñanza de las matemáticas, que conocen a fondo el plan de estudios de secundaria 1993 y actualmente están aplicando los contenidos de los programas concientemente en su práctica docente.

- El tercer *caso*, denotado por *"C"*, es un profesor que conociendo las indicaciones curriculares actuales, las pone también en práctica en el aula y cuya formación disciplinaria es suficiente, pero es más fuerte su formación pedagógica, por tener estudios de postgrado en el área de pedagogía.
- El cuarto *caso*, denotado por *"D"*, se refiere al perfil "típico" del maestro que conoce formalmente la propuesta y afirma estar de acuerdo con ella. Su formación profesional no cuenta con estudios de postgrado, solamente ha estado sometido a los cursos que se ofrecen dentro del Programa de Formación Continua en el área de matemáticas.

El número de observaciones que se realizaron en el aula para el *caso A*, fue de 10 clases efectivas durante las cuales se hicieron las video-grabaciones. Para los *casos B y C* se realizaron cuatro semanas de observaciones en el aula con video-grabaciones y para el *caso D* sólo dos clases para su observación.

3.4 INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Se obtuvieron respuestas a los cuestionamientos hechos en este trabajo, al analizar la información registrada mediante los instrumentos utilizados en la investigación, entre otros: un cuestionario inicial, la entrevista con el profesor, la observación directa, la video-grabación y las notas de campo. La información colectada y los resultados de su análisis se presentan en el siguiente Capítulo. A continuación se detallan las características de los instrumentos mencionados:

- **El Cuestionario.-** Se aplicó a 30 profesores de matemáticas de secundaria de escuelas oficiales locales con el fin de reconocer sus concepciones sobre aquellas cuestiones que se consideraron características fundamentales para los casos que se pretendían estudiar, es decir, tener una primera aproximación para catalogar a aquellos que conocieran los planteamientos hechos en los programas de secundaria. Sirvió como base para la pre-selección de los casos. Este cuestionario se anexa en el apartado correspondiente.

- **Entrevistas:** Para determinar cuáles profesores de los pre-seleccionados reunían las características más apropiadas para los propósitos de esta investigación se llevaron a cabo entrevistas personales a cada uno de los profesores que están participando en el estudio, con el fin de darle mayor contexto a la intención de sus respuestas al cuestionario.

- **La Observación Directa:** Como parte de la investigación se decidió hacer uso de la observación, allí, en el ambiente propio del maestro, como el punto de partida más factible para lograr los objetivos del trabajo. Se investigó cómo se desempeñan, al enseñar álgebra, los profesores de secundaria que se están formando bajo este nuevo enfoque curricular propuesto en los Programas Oficiales. Las notas que se recabaron están en la dirección de poder analizar después qué hace y cómo lo hace de acuerdo a las concepciones que él tiene sobre el álgebra y las habilidades del pensamiento algebraico que intenta promover.

- **Video-Grabaciones:** Al buscar enriquecer las observaciones directas del trabajo de investigación, se determinó la realización de una filmación durante la labor de cada uno de los cuatro profesores en el salón de clases, mientras desarrollan el tema seleccionado de álgebra, de tal manera que se pudiera contar con un registro de apoyo para analizar una y otra vez –las que fuesen necesarias– aquellos momentos en donde pudiéramos considerar que su práctica ofrece elementos ricos y precisos acerca de sus concepciones sobre el álgebra y su enseñanza, mostrando su concepción acerca del pensamiento algebraico y la importancia de fomentar su desarrollo.

Una vez llevada a cabo la aplicación del cuestionario, la entrevista, la selección de los casos, hechas las observaciones y video-grabaciones; el análisis de cada uno de los casos se hizo finalmente con la interpretación y contrastación conjunta de la información ofrecida por todos los instrumentos.

Con el propósito de orientar el análisis de los datos con las acciones ya descritas, se hicieron comparaciones entre las particularidades que propone la nueva visión sobre la enseñanza del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico, a través de preguntas pertinentes y las formas de intervención que realizan los profesores al organizar la clase para resolver un problema cuya solución requiere la utilización del método gráfico. Las comparaciones se realizaron basándose en las sugerencias que se dan al profesor en el Libro del Maestro para apoyar su práctica docente a través del tema de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2X2 (Cf: pp 174-183, 191-192), en las indicaciones metodológicas generales que en la propuesta se dan para la enseñanza de este tema, en el libro Lecturas (pp. 14-17), en la Guía de Estudio (pp. 113-126), en el Fichero de Actividades Didácticas (pp. 91-93), en la Secuencia y Organización de Contenidos (pp. 56 y 57) y en las características del pensamiento algebraico que se presentaron en el capítulo anterior.

CAPÍTULO 4

REPORTE

4.1 PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS.

Como se mencionó en el capítulo anterior, la información se recabó del cuestionario aplicado, de las entrevistas hechas para la selección de los casos, de las observaciones en el aula mediante video grabaciones y de la toma de notas.

Para el análisis de la información se interrelacionó la observación obtenida en las vídeo grabaciones y en las notas tomadas durante la observación directa en el aula, organizándola en un cuadro para facilitar su análisis. Fue fundamental observar la habilidad del profesor moviéndose por todo el proceso de resolución de un problema haciendo preguntas y haciendo sugerencias para tratar de seguir las indicaciones generales dadas en la propuesta.

La información de las vídeo-grabaciones es tan extensa, que se presenta organizada y en forma resumida en una tabla. Se vació de las mismas video grabaciones en donde la guía para caracterizar la actuación del profesor, emanó de las preguntas de investigación enriquecidas por la dinámica que establece el profesor dentro del salón de clases.

La tabla está estructurada con doble entrada; por renglones se agrupan las preguntas específicas en torno a preguntas particulares, luego por columnas, se da entrada a los cuatro casos de estudio: A, B, C, D.

Después de observar las video-grabaciones se construyeron preguntas de tal manera que sus respuestas reflejaran la información viva y al mismo tiempo ayudaran a la organización de la que se consideró era la más relevante para su análisis.

Para ello se tomó en cuenta por una parte que, como se indica en lo dicho por Driscoll en el marco teórico de este documento (pp. 6), se debe tener presente que lograr la meta de desarrollar el pensamiento algebraico está en gran medida condicionada a la clase de preguntas que los profesores hacen a sus estudiantes –atendiendo a su potencia, pertinencia y variedad. Por otra parte, como se expone en el mismo marco teórico (pp. 19) acerca de las determinaciones que hacen los especialistas sobre el álgebra y el pensamiento algebraico, en particular como se refiere la síntesis Kriegler (2000) quien caracteriza al pensamiento algebraico como aquél que integra diversas habilidades – para la resolución de problemas, de razonamiento y para usar representaciones; utilizadas sobre las ideas algebraicas fundamentales que son el objeto de estudio de la materia, es decir, el contenido sobre el cual se desarrollan las habilidades –el contenido sobre el cual se va a reflexionar.

Además, siempre se tuvo presente que las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo de este documento servirían como guías para orientar las observaciones y toma de datos.

Por lo tanto se puede considerar que lo que está en la Tabla intenta ser un primer indicador de la conceptualización del pensamiento algebraico de cada uno de los casos de estudio en esta investigación. Consecuentemente también un indicador de las habilidades que intentan desarrollar en sus alumnos. Igualmente, informa sobre la interpretación que cada uno de los profesores hace de las indicaciones metodológicas que sobre el tema se dan en los diferentes documentos oficiales que apoyan el trabajo didáctico en el salón de clases.

A continuación, en las páginas que siguen, se muestra la Tabla mencionada y posteriormente se presenta la discusión y análisis de las observaciones hechas a cada caso.

Instrumento de análisis para las video grabaciones

		CASOS A	CASOS B	CASOS C	CASOS D
1. Cuando está frente al grupo, ¿a quién dirige las preguntas?	¿Al grupo en general?	si	si	si	no
	¿A un alumno determinado?	no	no	no	si
2. ¿Cómo explora las respuestas de los alumnos?	¿Ayuda con mas preguntas a llegar a la respuesta correcta?	si (lo intenta)	si (rápidamente)	si (rápidamente)	no
	¿Le ayuda al alumno, completándole la respuesta correcta?	si	si	si	si
	¿Ayuda preguntando para que el alumno cambie su respuesta equivocada?	no	no	Lo intenta	no
	Cuando la respuesta del alumno está equivocada, ¿él da la respuesta correcta?	no (le pregunta a otro alumno)	si	si (luego de hacer 1 ó 2 preguntas)	si
3. Sólo expone		no	no	no	si
4. ¿Expone y hace preguntas?		si	si	si	si (dirigidas)
5. ¿Forma equipos?		si	si	si	si
6. ¿Algunos trabajan independientemente?		si (aunque estén en un equipo)	si (aunque estén en un equipo)	si (aunque estén en un equipo)	si (aunque estén en un equipo)
7. ¿El profesor fomenta que los alumnos compartan su trabajo e ideas con los demás?		si	si	si	no
8. ¿Les da tiempo para explorar una estrategia para resolver el problema?		si	si	si	no
9. Después de un tiempo de exploración, ¿incita a la discusión de cada estrategia por medio de preguntas?		no	no	si	no
10. ¿Permite que el alumno explique de forma verbal su estrategia, sin tratar de conducirlo hacia un patrón, construcción del profesor?		no	si (escuetamente, sin la interacción del grupo en gral.)	Si (escuetamente, sin la interacción del grupo en gral.)	no
11. ¿Hace que el alumno exponga su estrategia, en el pizarrón en forma escrita, permitiéndole que la copie del cuaderno?		si	si	si	no
12. ¿Qué parte del equipo se entusiasma por integrarse cuando se trabaja intentando todos estos cambios?		40%	75% del equipo	100% del equipo	El 0% : Todos intentan copiar del pizarrón o del cuaderno

Instrumento de análisis para las videograbaciones

		CASOS A	CASOS B	CASOS C	CASOS D
13. ¿ Cómo son los problemas que plantea el profesor en el aula?	¿Son todos de un texto?	si	no	si	no plantea
	¿Incluye situaciones que no están en un texto?	no	si	no	no plantea
	¿En que contexto?	Matemático en su mayoría	De la vida real	De la vida real	no plantea
	¿Le resultan motivantes al alumno?	si (Para muy pocos alumnos)	si	si	no plantea
14. ¿Cómo utiliza los problemas?	Para reforzar un procedimiento	si	si	si	no plantea
	Para ejemplificar una aplicación de un procedimiento	si	si	si	no
15. ¿Con los problemas pretende / (logra) orientar la construcción de ciertos conocimientos?		si / no	si / no	si / no	no
16. ¿Usa las preguntas en el desarrollo de resolución del problema para desarrollar habilidades?		si	si	si	Solo las que considera le ayudan a memorizar un proceso algorítmico
17. ¿Muestra una actitud abierta, nueva, que favorece el razonamiento flexible del problema?	¿Acepta o considera otros puntos de vista?	Si (pero no los explora suficientemente)	si (pero no los explora suficientemente)	si	no
	¿Permite el uso de diferentes estrategias de solución?	Sí, las escucha pero no las exponen ante el grupo	si (Se ubica en el método algebraico)	si (él pone ejemplos para reforzarlas)	no
18. ¿Cómo pretende desarrollar habilidades con los problemas?		Tratando de orientar hacia una memorización significativa del algoritmo	Tratando de orientar hacia una memorización significativa del algoritmo	Reforzándoles diferentes estrategias de sol. Para un mismo problema y orientando a una memorización significativa	Memorizando mecánicamente algoritmos
19. ¿La forma de operar durante el procedimiento de resolución del problema es única?		si (encuentra ecuaciones, tabula, grafica y relaciona la respuesta con las condiciones del problema)	si (encuentra ecuaciones, tabula, grafica y relaciona la respuesta con las condiciones del problema)	si (encuentra ecuaciones, tabula, grafica y relaciona la respuesta con las condiciones del problema)	si
20. ¿Resalta las propiedades de la igualdad y de las estructuras numéricas?		si	si	si	si

Instrumento de análisis para las video grabaciones

		CASOS			
		A	B	C	D
21. ¿Qué hace el profesor para asegurarse que el estudiante leyó el enunciado del problema?	¿Leyéndolo el maestro en voz alta?	si	si	si	no pone problemas
	¿Leyéndolo en voz alta un alumno?	si (Primero el alumno y después el profesor lo hace)	no	si	no pone problemas
	¿Le pide al alumno que lo diga con sus propias palabras?	no	no	no	no pone problemas
22. ¿El profesor influencia las observaciones del alumno en el texto del problema, con su interpretación?		no (Al principio, pero luego **sí** por que no contesta el alumno)	no (Al principio, pero luego **sí** por que no contesta el alumno)	no (Al principio, pero luego **sí** por que no contesta el alumno)	no
23. ¿Los orienta con preguntas para que las condiciones de los objetos involucrados en el problema las traduzcan en ecuaciones?		si	si	si	no
24. ¿Los orienta a explorar si los valores de las variables están limitados por las condiciones del problema?		no	si	no	no
25. Las estrategias de resolución del problema que se presentan, ¿las relaciona con el problema?		La que usa, la relaciona con el problema	Las relaciona con el problema	Las relaciona con el problema pero presenta en forma aislada cada estrategia para reforzarla	no
26. ¿Le pide al alumno que explore varias formas de resolución del problema?		no (Los induce a reforzar el procedimiento algebraico)	no (Los induce a reforzar el procedimiento algebraico)	Si (Pero luego induce a reforzar el procedimiento algebraico)	no
27. ¿Le da al alumno la libertad para usar su propia estrategia de solución?		no	no	si	no

		CASOS			
		A	B	C	D
28. ¿ El profesor los induce al uso de ensayo y error?	¿Pregunta con que números puede iniciar su estrategia?	no	si	si	no
	¿Y cuáles siguen después?	no	si	si	no
	¿Los guía al uso de una tabla?	no	no	si	no
29. ¿El profesor orienta a usar un método algebraico?	¿Les preguntan si podrían usar el álgebra para resolver el problema?	si	si	si	no
	¿Les pregunta cuales son las variables y como las representarían?	si	si	si	no
	¿Pregunta qué ecuaciones pueden escribir para representar el problema?	si	si	si	no
30. ¿Les pregunta como podrían resolver o encontrar el valor de algunas de las variables?		no	no	si	no
31. ¿Relaciona el aspecto de la grafica con la expresión algebraica?		si (lo intenta)	si (lo intenta)	si (lo intenta)	no
32. ¿El profesor guía hacia un análisis de la solución?	¿Hacia el significado de la solución con respecto a los objetos del problema?	si	si	si	no
	¿Para que comprenda por qué la solución está en la intersección?	no	no	no	no
	¿Para que observe que la solución es la pareja común en ambas tablas?	si (apresuradamente)	si (apresuradamente)	si (apresuradamente)	no
33. ¿El profesor se asegura que el estudiante entendió el modelo de solución del problema?	¿Preguntándoselos e invitándolos a preguntar lo no entendido?	si	si	si	no
	¿Revisándoselo en el cuaderno a algunos?	si	si	si	no
	¿Ejercitando aparte el algoritmo?	no	no	si	no

Instrumento de análisis para las videograbaciones

		CASOS			
		A	B	C	D
34. ¿El profesor establece claramente las reglas para trabajar en equipo antes de empezar?		no	no	no	no
35. ¿Permite que trabajen libremente o insiste en que todo el equipo trabaje los mismos pasos del método que pretende reforzar?		insiste en que trabajen el método presentado en el pizarrón	insiste en que trabajen el método presentado en el pizarrón	Respeta que usen el método de ensayo y error, pero insiste que trabajen el método del pizarrón	Insiste en que trabajen el método presentado en el pizarrón
36. ¿Permite que trabajen diferentes estrategias e insiste en que las discutan con los demás?		no	no	Sí, después les indica que tienen que seguir el modelo del pizarrón	no
37. ¿Los profesores tienen desarrollado un esquema amplio de lo que es el trabajo en equipo?		Sólo uno intuitivo	Sólo uno intuitivo	Sólo uno intuitivo	no
38. ¿Cómo orienta el profesor a los equipos?	¿ Con preguntas sobre una reflexión significativa del método?	no	no	no	no
	¿Conduciéndolos durante un procedimiento que ya ha sido ejemplificado?	sí	sí	sí	no
	¿Hacia la obtención de la solución ?	sí	sí	sí	no
39. ¿Qué cambios se hicieron notorios al trabajar en la organización del grupo en equipos?	¿Trabajan como lo hacían tradicionalmente?	no	no	no	sí
	¿ Se comunican más?	sí	sí	sí	no
	¿Los alumnos se ponen de acuerdo?	no	no	no	no
	Los que no son líderes en el equipo:¿observan cómo trabajan otros, y a éstos les preguntan qué hacer , o les expresan sus dudas'?	sí	sí	sí	no

4.2 DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE LAS VIDEOGRABACIONES

Inicialmente cabe mencionar que por la naturaleza de esta investigación se deben considerar limitaciones como las siguientes:

- Se perdió mucho de la riqueza de la colección de datos hecha mediante las video-grabaciones, pues esa riqueza no se pudo trasladar a la forma escrita del reporte, por lo que se tiene una limitación de la metodología –sin embargo las video–grabaciones están disponibles en los archivos del Programa de Maestría en Matemática Educativa, UNISON.
- Como es una investigación a corto plazo, solamente se observó la actuación de los profesores en un solo tema.
- Una limitación inherente al tipo de investigación es que los resultados no son generalizables, sin embargo las muestras de su riqueza se tratarán de expresar en lo que sigue.

Los profesores –casos de estudio A, B, y C de esta investigación– han iniciado la puesta en marcha de la propuesta, haciendo innovaciones en su manera de enseñar que no hubieran sido posibles cuando su visión de la educación era totalmente tradicionalista. Mediante las observaciones con video grabaciones se pudo confirmar que el ambiente dentro del aula es diferente; hay confianza y ausencia de temor para trabajar, así como una continua intención de los profesores por motivar a sus alumnos a que participen, que pregunten y también que aprendan a trabajar en equipo. Se observó que el hacer preguntas, aunque a veces no sean tan pertinentemente hechas, ayudan sobremanera a mantener este ambiente durante todo el tiempo de la clase.

En un primer análisis global de la Tabla I, se puede notar un contraste entre los valores (respuestas) que se encuentran para D y los dados para A, B, y C; por lo que de entrada se podría afirmar que los casos A, B, y C están en cierto nivel de entendimiento de la propuesta, ya que en la introducción del tema de resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2X2, tratan de seguir las sugerencias que se dan en el libro de texto y en los materiales de apoyo que ellos consideran favorables para desarrollar el razonamiento algebraico.

Por otro lado, en un análisis más detenido, podemos observar que los profesores:

a. A, B y C intentan guiar al alumno con preguntas hacia el entendimiento del problema. Enfatizan en las condiciones del problema para guiar a los alumnos a que las traduzcan en ecuaciones algebraicas. (Tabla I: 21-24). Cabe hacer notar que éste –el entendimiento del problema– es un trabajo que desarrollan los profesores frente al grupo. Parece que la indicación de asegurarse que los estudiantes entiendan el problema (Cf. Lecturas. pp. 100) se toma como un trabajo anterior al proceso de solución y no como un primer momento de éste. Ciertamente encontramos una referencia metodológica específica basada en la solución de problemas (Cf. Op. Cit. pp. 110) que aborda este aspecto en los materiales oficiales que se les proporciona a los profesores, sin embargo, se esperaba que al menos los casos A y B, que han tenido a su alcance información más amplia –y se han visto involucrados en reflexiones y en diversas discusiones concernientes a esta metodología y a enfoques constructivistas– hubieran podido dar muestras , desde el entendimiento del problema, de su intención de dejar trabajar a los estudiantes en una forma más independiente. Aunque sin duda la guía que los profesores ofrecen a los estudiantes en este aspecto está muy bien estructurada –pues hacen muchas preguntas, muy bien hechas y muy atinadas –, resulta sumamente intencionada pues dichas preguntas las formulan tan dirigidas a lograr una respuesta, en términos de encontrar una relación específica entre las constantes y variables dadas en el problema, que prácticamente los llevan de la mano para escribir correctamente las expresiones algebraicas que originan el sistema de ecuaciones 2X2. El caso C deja a los estudiantes trabajar solos en los equipos después de que ya escribieron las ecuaciones. O, también (casos A, B, C) durante el tiempo para el trabajo en equipo re-direccionan los intentos mostrados por los alumnos en sus cuadernos, con preguntas e indicaciones precisas para que las establezcan.

b. Todos resaltan las propiedades de la igualdad y de las estructuras numéricas inherentes a los elementos que conforman las ecuaciones. (Tabla I: 20). En relación a este punto, se puede considerar que todos enfatizan en el trabajo matemático que consiste en darle fuerza o validar cada recurso que se usa para convertir una expresión algebraica en otra equivalente con el fin de despejar las incógnitas buscadas: una y otra vez insisten en la propiedad distributiva, en la asociativa, en los principios de cancelación para la suma y el producto, en los neutros aditivo y multiplicativo, etc. Se nota un énfasis notable en este punto. Otro aspecto que enfatizan los profesores en su trabajo ante el grupo –posterior al proceso de solución en equipos–, es la validez de la solución encontrada en términos de satisfacer ambas ecuaciones del sistema.

c. Ningún profesor (Tabla I: 31,32) orienta hacia la comprensión del significado de la intersección de las rectas como solución, ni tampoco introducen el tema como se sugiere en el programa (a través de tablas en donde se registren valores de dos variables relacionadas linealmente como se presenta en el Fichero de Actividades Didácticas pp. 92); es decir, hacer tablas para estimar con una buena aproximación el resultado esperado.

El caso C es quien inicia el tema con la construcción de tablas como estrategia de solución del problema, tratando de seguir las indicaciones del programa (Libro Del Maestro: pp.172), sin embargo, el hacer tablas lo deja sólo como uno de los métodos algebraicos que se estudian para resolver el problema en forma precisa. Las tablas que propone son una forma de ver que para encontrar la solución del problema, los valores de X y Y deben satisfacer ambas ecuaciones al mismo tiempo, y que se pueden calcular por ensayo y error (así dice caso C) hasta encontrarlos.

Aunque también en el Fichero de Actividades Didácticas (pp. 91) se indica proponer tablas en donde el alumno encuentre el patrón que se genera en la tabla dada y aclara que todo el análisis lo deben construir los alumnos asesorados por el profesor pero en el caso de que haya que introducir un nuevo concepto, no.

d. En relación al punto anterior, se puede añadir que en el análisis de la solución del problema indican que está en la intersección de las dos rectas. Pero faltaron las preguntas para clarificar el objetivo fundamental de este método gráfico que, como está declarado en el Libro del Maestro (pp.174), consiste en dar oportunidad a que se haga un análisis cualitativo de los sistemas lineales 2X2. Es decir, se pierde totalmente esa finalidad del análisis cualitativo que se persigue: darle sentido al tipo de soluciones de los sistemas –solución única, ninguna solución o infinidad de soluciones; ya que en ningún momento, ninguno de los profesores hizo referencia a la relación con rectas que se intersectan, que son paralelas o coincidentes con los coeficientes de las correspondientes ecuaciones.

   Tampoco se recordó o se dio a conocer como se sugiere (Fichero de Actividades Didácticas, pp. 91), lo que es la pendiente y la ordenada en el origen y cómo se pueden identificar en las ecuaciones algebraicas. Y dice que los alumnos noten, qué representan de acuerdo al problema, éstos dos parámetros en la gráfica.

e. También en relación con el inciso c. se hace notar que todos ponen énfasis en que la solución la define la pareja ordenada común que se obtiene en las dos tablas de los valores que se le asignan a las variables, y que corresponden a cada una de las ecuaciones algebraicas que modelan el problema, pero no se hacen suficientes y adecuadas preguntas para resaltar la importancia que tiene el problema propuesto para entender por qué las incógnitas *x* e *y* representan correspondientemente los mismos valores en ambas ecuaciones, y cómo de este hecho depende el principio de sustitución. En el proceso de graficación hizo falta relacionar la línea recta que se obtiene de la tabla con la expresión algebraica de la función.

Una relación de este tipo es indispensable para entender lo útil de las distintas representaciones de una función. Sin embargo cabe aclarar que advertimos la falta de percepción por parte de los profesores respecto a incorporar la visión de función lineal para cada expresión, esto con el fin de aprovechar los parámetros de su expresión (pendiente y ordenada en el origen) para la graficación directa de la recta correspondiente. Al ver primero la tabulación como vía indispensable y única para llegar a la gráfica, y al obtener la solución del sistema a través de los valores numéricos de las variables, se pierde el significado de graficar, así como el objetivo pedagógico de la actividad tanto para el profesor como para los estudiantes, pues llegar a la solución del sistema parece ser, para los profesores, la finalidad más importante del proceso de aprendizaje del método gráfico. Por otro lado, el incorporar la visión de función lineal para cada una de las ecuaciones encontradas, permitiría pasar de la expresión analítica a la gráfica directamente, analizando la ordenada en el origen y el valor de la pendiente. Este procedimiento permite enfatizar en el tipo de inclinación que tienen las rectas y visualizar la posibilidad de intersección cercana o lejana, la no intersección o incidencia total.

f. En la tabla de valores para generar la gráfica, los casos A y C sólo asignan a la variable *x* valores de cero, uno, dos, tres, cuatro, y cuando mucho hasta 7, sin usar valores negativos y decimales (Tabla I: 24). Esto podría ser efecto de seguir las indicaciones didácticas (Secuencia y Organización de Contenidos, pp. 57) acerca de empezar con valores enteros para los coeficientes que no compliquen mucho los cálculos; sin embargo, se nota cierta confusión con la indicación de generar la tabla a partir de valores acordes al contexto del problema (se confunde la indicación: ésta se hace para los coeficientes y se toma para las variables). En un momento determinado del desarrollo de la clase, el caso A se vio en la necesidad de ampliar ese rango de valores, pues se dio cuenta que la solución estaba en uno mucho mayor y como el profesor quería señalar el punto de intersección como el del par ordenado común a ambas tablas, en lugar de usar alguna escala apropiada para los ejes, decidió ampliar el rango de valores, lo cual incluso generó asombro en una estudiante que le inquirió el por qué no se tomaban "*números más grandes aunque no fueran de uno en uno*" ; el profesor no tomó esta observación como ocasión para salirse del esquema; su respuesta se limitó a señalarle a la estudiante que las rectas las podía *"continuar hasta el infinito"*, pero se tendría *"que ir hasta el techo para poder ver esos puntos"*. Como vemos, el esquema de solución del profesor incluye esquemas pre-determinados hasta para el proceso de graficación; se excluyen otras posibles estrategias cuando éstas no "encuadran" en las posibilidades que el profesor conoce. Así, lejos de hacer preguntas pertinentes para explorar otras estrategias y guiar al estudiante para que pueda hacer consistentes sus propios argumentos, no da la posibilidad de construcción significativa ni de ejercitar la argumentación bien razonada de los estudiantes.

Además: como la finalidad de resolución de los problemas para los casos A, B y C es llegar a la solución, no se dieron cuenta de que el comportamiento de las funciones se puede enriquecer agregando otras columnas a la tabulación, para ver cómo se incrementan los valores de las variables. No se tuvo cuidado de hacer notorio al grupo cuando se presentó el caso de alumnos que encontraron mentalmente algunos valores para graficar (como en la observación en el aula del caso A), pues el maestro tiene que estar conciente de que el alumno tiene en clase la oportunidad de desarrollar sus propios procedimientos por lo que no se debe dejar que estos momentos pasen desapercibidos.

g. En los casos A, B y C el profesor va a cada equipo y se ve su exhaustivo trabajo al atender particularmente a cada equipo resolviendo dudas y dirigiéndolos para que continúen con el proceso de solución. Se ve que los que hacen intentos reales de resolución son a lo más dos alumnos de cada equipo, los cuales están formados por cuatro o cinco alumnos; el resto del grupo está en espera de lo que hagan los más aventajados para continuar con su trabajo. (Tabla I:38).

Aquí el trabajo del profesor, aunque bien intencionado, no tiene la eficacia esperada debido también por ese desinterés que acompaña a un gran número de estudiantes (esto se observa más en la clase del caso A). De aquellos que están desligados de la actividad de la clase no se puede esperar una participación activa en el trabajo planteado, sin embargo, muchos de los que usualmente se limitan a copiar del pizarrón, ahora ven cómo trabajan sus compañeros, y aunque copien, lo hacen después de que han estado atentos tanto a las discusiones entre ellos como a las preguntas y respuestas entre ellos y el profesor. También se observó en la clase del caso A que los alumnos de los equipos en su mayoría tienden a trabajar independientemente como lo hacen cuando trabajan alineados todos en filas (las dudas se las preguntan al profesor).

Como la orientación del profesor tiende a que el alumno encuentre la solución, por consecuencia la orientación del profesor, en los equipos es apresurada por la presión que ejerce el poco tiempo de duración de la clase; lo cual refuerza también en los equipos, la tendencia del profesor de sobre simplificar el trabajo matemático de él y los alumnos, así como también su guía a través de preguntas.

La orientación de los equipos por los casos A y B crea inseguridad en los alumnos sobre lo que están haciendo o pensando hacer, ya que el profesor, al observar el trabajo de los alumnos en un equipo determinado, hace sugerencias y observaciones especificas en voz alta sobre el error o la estrategia a seguir, y por estar tan próximo un equipo del otro, éstas, al ser escuchadas por otros equipos cercanos, coartan iniciativas.

Los casos de la investigación no alcanzan a desarrollar la capacidad comunicativa entre los alumnos de cada equipo ni se desarrollan las capacidades del razonamiento algebraico, como justificar y fundamentar lo que se afirma, o refutar algo con lo que no se está de acuerdo. Ni sirve como ayuda para percibir distintas formas de afrontar una misma situación. No se alcanza a entender que la finalidad principal de la actividad en los equipos puede quedar perfectamente cumplida aunque los problemas no se resuelvan. Que es muy conveniente que los estudiantes trabajen en grupo para formular la hipótesis, planear la investigación, hacer observaciones, recolectar datos, organizarlos y analizarlos; comprobar cada caso, sacar conclusiones.

h. Después de que los equipos tienen alguna solución, habiendo seguido las indicaciones del profesor, los casos A, B y C pasan al pizarrón al alumno que encontró primero la solución del problema, el alumno lo explica con la guía del profesor, quien lo va orientando hacia enfatizar lo que él considera que propicia una memorización significativa del algoritmo, es decir, la memorización de un procedimiento lógico y específico: representar con ecuaciones las condiciones del problema, despejar una variable en ambas ecuaciones, dar valores para generar las tablas correspondientes, graficar las rectas en el mismo plano, detectar su intersección y determinar las coordenadas de ese punto como solución del sistema. O sea, orienta insistiendo o señalando con precisión cada uno de los pasos del procedimiento que coinciden con lo que él previamente había mostrado al grupo como "método gráfico" (Tabla I:38-39).

Al resolver el alumno del equipo el problema en el pizarrón, el profesor vuelve a explicar todo el proceso hasta la solución, por lo que podría tomarse ésta como la finalidad u objetivo primordial del uso de este método gráfico y no resalta el análisis cualitativo de la solución del sistema de ecuaciones lineales 2x2 que de manera especial se facilita con él, y como ya se dijo anteriormente se tiene que ver la relación entre las inclinaciones de las rectas y sus respectivas pendientes, expresadas generalmente en forma implícita mediante los coeficientes de las ecuaciones, o predecir, por la gráfica, si hay o no solución.

i. El caso B organiza el trabajo del aula en equipos, insistiendo en que todos trabajen los mismos pasos del método utilizado, que se comuniquen y que lleguen a un acuerdo. Se tiene grabado que dice: "*¿Porqué tú despejaste "y" y ella despejó "x" para hacer la tabla? se trata de que trabajen en equipo, así que pónganse de acuerdo y hagan lo mismo*". El caso B parece que tiene la idea intuitiva de que el trabajo en equipo es comunicarse, cooperar para ponerse de acuerdo en cómo llevar a cabo en común la estrategia previamente desarrollada en el pizarrón.

Algo similar se observó en los otros casos (Tabla I: 34-38), es decir, todos siguen el patrón de "guiar" al grupo en un proceso de solución inicial que a su vez, servirá después de "guía" para resolver los problemas que se planteen. Con esto se advierte una seria limitación en la concepción de los profesores acerca de resolver problemas en equipo: en lugar de aprovecharlos en la dirección que marca la propuesta, esto es, en utilizarlos para favorecer el desarrollo de habilidades cognitivas de los estudiantes en un ambiente enriquecido socialmente, ven tan sólo la oportunidad de desarrollar habilidades instrumentales (operativas) del álgebra. El caso C respeta la selección de cualquier método de solución que hacen los alumnos dentro del mismo equipo y los orienta a cada uno por separado, e insiste en que comenten con sus compañeros los procedimientos. Pasa al pizarrón a los que llegaron a la solución y les permite que copien de su cuaderno todo el procedimiento, o si quieren, que lo resuelvan de nuevo, también el profesor explica todo el proceso del método después de que ya el alumno lo ha hecho en el pizarrón.

De nuevo se advierte una actitud que aunque intenta respetar de forma la indicación de dejar en libertad el trabajo de los estudiantes, el profesor no lo aprovecha para que cada quién valore lo que hizo y lo que hicieron sus compañeros, sino que una vez que cumple con el requisito didáctico de darles independencia, retoma la conducción del grupo para llevarlos a afianzar el procedimiento que él ya estableció previamente.

Cabe hacer notar que el caso B, reconoce que el contexto de los problemas no necesariamente debe incluir fenómenos de la vida real, sino que el problema debe incorporar algunas experiencias previas de los alumnos. Así me tocó observar en sus clases anteriores al tema de investigación, proponer problemas matemáticos de completar cuadrados mágicos, que utilizó para discutir estrategias importantes asociadas con el quehacer matemático.

j. Los casos A, B y C tienen la intención de que con los problemas los alumnos afiancen un algoritmo de solución ya que favorecen su guía para que lo aprendan paso por paso. Se nota que el profesor mantiene una visión tradicionalista en su manera de enseñar a través de la resolución de problemas, ya que su concepción parece ser la desarrolló a lo largo de su paso por las escuelas, en donde sus experiencias estuvieron basadas en libros también tradicionales. Luego, al poner otros problemas y guiar durante su resolución para que se utilicen los mismos pasos de resolución, está usando los problemas para ejemplificar una aplicación de un determinado algoritmo y para reforzamiento del mismo.

k. Por último podemos referirnos a caso D, con un perfil tradicionalista. El profesor D estuvo dispuesto a participar por estar convencido de que su manera de dar la clase tiene algunos aspectos acordes con lo que propone la propuesta de 1993, como: hacer uso de la calculadora, trabajar en equipo, interacción del profesor con el alumno dentro del salón de clases, y aunque sus preguntas están muy dirigidas a memorizar un procedimiento y las hace a determinados alumnos, él considera que los hace participar durante la enseñanza del concepto algebraico, y se refiere a él mismo como conocedor de la nueva propuesta, a la que considera demasiado complicada y piensa que es difícil de llevar a cabo aún para los demás profesores, y dice que no cree que haya profesores que puedan estar tratando de incorporarla del todo a su metodología de enseñanza. El caso D con una concepción tradicionalista total no permite que el alumno vea la necesidad de ampliar sus conocimientos o sus recursos algorítmicos ya que él resuelve primero el problema que servirá de modelo a los alumnos para la resolución de los siguientes y él mismo plantea y responde las preguntas derivadas durante todo el proceso (Lecturas: pp. 21). El caso D no utiliza los problemas para introducir un nuevo conocimiento y al respecto Santos Trigo (1996, pp. 413-414) nos dice que es común encontrar métodos de enseñanza en donde el contenido se presenta como algo independiente al contexto en donde el aprendizaje tiene lugar y que éstos, limitan el aprendizaje enriquecido de un conocimiento en los alumnos. Continúa diciendo que aprender un vocabulario por medio del diccionario, es similar al método de enseñar conceptos abstractos, independientes de un contexto. Que un concepto continuará evolucionando a partir de sus usos, a medida que nuevas situaciones, negociaciones y actividades, ayuden a robustecer su significado. Lo que quiere decir que un concepto matemático siempre está en evolución y construcción.

4.3 CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

En este apartado se presentarán inicialmente conclusiones acompañadas de comentarios acerca del desempeño de los profesores en el desarrollo del tema "sistemas de ecuaciones lineales 2X2", basándonos en las observaciones antes descritas en los incisos y que caracterizan la visión que tienen los profesores de la investigación para la enseñanza y aprendizaje del álgebra y que está contenida en las video grabaciones. Posteriormente, se tratará de ofrecer conclusiones más generales de acuerdo a las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 1.

Primeramente, como referencia, destacaremos algunos de los propósitos de los planes y programas vigentes de educación básica para utilizar el método gráfico en los sistemas de ecuaciones lineales de 2 x 2:

- De acuerdo a la Guía de Estudio (pp. 113), el profesor deberá diseñar y elaborar actividades y problemas para que el alumno se acostumbre al plano cartesiano, a la representación de conjuntos de puntos y regiones y, de manera gradual y apoyándose en situaciones concretas, a la noción de función. Enseguida continúa diciendo que se buscará que el maestro tenga oportunidad de resolver problemas que lo conduzcan a plantear e investigar el comportamiento de funciones, a través del estudio de una tabla de valores o de una gráfica.
- Por otro lado tenemos en la misma Guía de Estudio (pp. 125), que dice: "El propósito de estas sesiones consiste en que, basándose en

las sugerencias contenidas en el Libro para el maestro, así como en el análisis y solución de ejemplos y problemas extraídos de otros textos, el maestro desarrolle su capacidad para elaborar y diseñar problemas que conduzcan a la solución de ecuaciones y resulten adecuados para sus alumnos."

- En la misma Guía de Estudio (pp. 126) dice: "Los diversos métodos algebraicos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, son bien conocidos por el profesor, por lo que después de revisarlos brevemente, podrá centrarse en la solución de problemas y en el repaso de las ideas que subyacen en los métodos gráficos de solución."

Sin embargo, de acuerdo a las observaciones comentadas anteriormente, se puede afirmar que los profesores no profundizan suficientemente en las indicaciones metodológicas que sobre el tema de resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 por el método gráfico se dan en el plan y programas oficiales, ya que, por ejemplo, no integran del todo las funciones como parte del razonamiento algebraico, aunque en investigaciones vanguardistas (Driscoll Op. Cit.) y en la propuesta se enfatiza hacer notar lo siguiente:

- que en las funciones subyace la idea de variación (Libro Del Maestro: pp.174-183),
- que en las ecuaciones lo importante es encontrar su solución, pero en las funciones se trata de estudiar el comportamiento de las ecuaciones a través de su gráfica (Libro Del Maestro: pp.182).
- que si al tabular se agregan columnas adicionales para ver cómo se incrementan los valores de las variables, se enriquece el estudio del comportamiento de una función (Libro Del Maestro: pp.183).

- que el objetivo es enriquecer el significado de las expresiones algebraicas mediante su representación en el plano cartesiano y al alumno se le debe dar la oportunidad de encontrar mentalmente algunos valores y desarrollar sus propios procedimientos (Libro Del Maestro: pp.179).
- que también es muy importante desarrollar la habilidad de expresar la gráfica a través de su ecuación analizando el valor de m y de b (Libro Del Maestro: pp. 191-192).
- que en la práctica docente cotidiana, para desarrollar una de las principales habilidades del pensamiento algebraico que es la generalidad, se debieran formular preguntas como: ¿vale para todos? ¿funciona siempre? ¿la condición se cumple siempre?. Las cuales resultan muy difícil hacerlas si en el proceso de construcción de la tabla, se dan únicamente los mismos dos o cuatro valores para las variables, e inmediatamente después se procede a graficar.

Incluso, haciendo de nuevo referencia a las observaciones enlistadas anteriormente, podemos decir que A, B y C no han ampliado suficientemente su visión de lo que es álgebra, pues a la manera que en el marco teórico refiere Alan Bell (0p.cit), siguen con la concepción de que álgebra es “resolver problemas para formar y resolver ecuaciones”, mientras que en la nueva propuesta se indica ampliar esta concepción agregándole la generalización, el trabajo con funciones y fórmulas (ecuaciones que modelan la situación).

Por otra parte, tomando la referencia de Driscoll acerca de formular preguntas potentes, pertinentes y variadas para poner en acción el enfoque constructivista de la metodología de enseñanza y aprendizaje del álgebra, a continuación se enlistan algunas preguntas que pudieron haber jugado ese papel durante el desarrollo de las actividades observadas –y que no se hicieron:

- Durante la tabulación;

  ¿Si la *x* fuese 100, cuál sería el valor de *y*?, ¿para qué valor de *x* la *y* vale 50? ¿Cómo calculas el valor de si conoces el valor de *x*? ¿Qué sucede en los valores de *y* cuando crecen los valores de *x*? También se podrían construir preguntas para comprender el significado de los valores Δx y Δy en la tabulación. ¿Qué relación tiene Δx y Δy con la recta? o ¿ Δx y Δy tienen relación con la *m*? ¿Qué pasa si graficas en la recta un valor de Δx y su respectivo Δy en diversos puntos?¿Cuál es la relación de la posición de la recta con su inclinación? ¿Varía la inclinación de la recta de punto a punto?

- Cuando se tienen ya las dos ecuaciones del sistema en la forma $y = mx + b$, así como la tabulación de cada una de ellas:

  ¿Qué significa que la *x* valga cero de acuerdo al contexto del problema? ¿Y en ese caso, cuánto vale la *y*? ¿Ese valor de *y* con *x= 0*, qué constante representa en la ecuación?¿Cómo quedan en la gráfica esos dos puntos (el punto de ordenada en el origen para cada caso)? ¿Puedes decir la característica común que guardan en la gráfica estos dos puntos?

- Cuando se tienen ya las dos rectas intersectadas:

De acuerdo a su posición, ¿puedes comparar la inclinación de cada una de las dos rectas? ¿Puedes encontrar una relación entre una inclinación mayor y otra menor de las rectas, y los parámetros *m* de las ecuaciones de donde partieron las gráficas? ¿Cómo son los coeficientes de *x* con respecto al signo? ¿Tiene relación el signo de los coeficientes de *x* con la inclinación de las rectas? ¿Podrías relacionar el valor numérico del coeficiente de *x* con la inclinación de las rectas?

- Después cuando ya se hayan hecho más problemas:

Al ver un sistema de ecuaciones, ¿puedes apreciar cuál va a ser la inclinación de cada recta y predecir en dónde más o menos van a intersectarse? ¿Podrías relacionar los valores de los coeficientes de las dos ecuaciones con el hecho de que las rectas se intersectan? ¿Cómo son los valores de los coeficiente de las dos ecuaciones cuando las rectas se intersectan? ¿Y el coeficiente de la variable independiente puede ser igual en ambas ecuaciones? ¿Cómo son los coeficientes de la variable independiente cuándo el problema no tiene solución? ¿Podrías predecir si la ecuación tiene o no solución viendo las ecuaciones del sistema? Y en el caso de tener infinidad de soluciones para el sistema ¿cómo son los coeficientes de las ecuaciones?

La propuesta considera que las acciones del profesor y el ambiente que logre crear dentro de su clase, darán significado a la práctica de la resolución de problemas (Lecturas: pp. 19). Los casos A, B y C de la investigación, en efecto, crean un buen ambiente, ya que:

- Al inicio de la clase explican al grupo en general la manera en que se llevará a cabo la clase: animan a preguntar, a compartir con sus compañeros las ideas, a expresarlas a todos en general, les recalcan a los alumnos que no deben sentir temor al preguntar, ni al contestar y que intenten plasmar en su trabajo sus propias ideas ya que su trabajo no se criticará. También con preguntas tratan de integrar al alumno al inicio de la actividad de resolución de problemas, discuten las palabras del enunciado de los problemas y sus condiciones, observan el trabajo de los alumnos en equipo y les hacen preguntas para ver en qué tienen dificultad, les hacen sugerencias, además hacen algunas preguntas tratando de motivar a la resolución.

En el libro Lecturas (pp. 14-17) se especifica que en la propuesta de problemas se espera desarrollar en el alumno habilidades cognitivas para que durante el aprendizaje de un determinado conocimiento, en este caso del método gráfico, desarrolle sus propias estrategias, sus propias formas de razonar, de pensar, de conjeturar, inducir, experimentar, demostrar, de comunicar o expresar –usando el lenguaje algebraico. Por lo que la propuesta considera necesario conceder al alumno un tiempo suficiente para que reflexione. Además, cabe señalar que estos objetivos concretan claramente una visión constructivista de la enseñanza, ya que como afirma Von Glassersfeld (1999; pp.8) "*El conocimiento matemático no puede ser reducido a un inventario memorizado de "hechos" recuperables, aunque es de interés el calcular nuevos resultados. Para usar los términos de Piaget, es operativo más que figurativo. Es el producto de la reflexión y aún cuando la reflexión como tal no es observable, sus productos pueden ser inferidos de respuestas observables.*"

Pero las observaciones hechas a los profesores –casos A, B y C– nos indican que aunque su actuación la orientan hacia reflexionar durante la resolución de problemas, lo hacen con la meta de llegar a la solución durante la hora de clase, así que la aplicación del método gráfico se sobresimplifica en pasos mecánicos de un procedimiento y no consideran dentro de su tiempo el revisarlo y enriquecerlo.

Por lo tanto la presión que tiene el profesor del tiempo del que dispone en cada clase y su interpretación acerca del objetivo didáctico principal de la resolución de un problema –el cual, él considera que es obtener el resultado, y al cual siempre se apresura a llegar antes del timbre de salida–, son factores que impiden al profesor ver que el objetivo didáctico principal del método gráfico no es encontrar la respuesta, sino reflexionar acerca del aspecto cualitativo de los sistemas lineales, por lo cual no puede ver la necesidad de hacer preguntas orientadas hacia ello y consecuentemente, no se puede dar a sí mismo la oportunidad de desarrollar su habilidad de construirlas y usarlas.

Estas limitantes alejan al profesor de convertirse en un investigador, tanto de los conocimientos previos del alumno, como del tipo de razonamientos que hace; los cuales le podrían servir para orientar al alumno a que los explicite tanto oralmente como por escrito.

Y aunque la reforma curricular manifiesta que se deben explorar las ideas del alumno para indagar su nivel de desarrollo cognitivo, sucede que por la estrecha visión que tiene el profesor del tiempo que se debe de usar para desarrollar habilidades cognitivas, no lo hace.

Una causa por la que también el profesor no le da tiempo suficiente al alumno de reflexionar, podría ser debida a la evaluación tradicional institucionalizada a la que deben ser sometidos, y que establece evaluar determinados temas en tiempos específicos: el profesor considera que si se van a evaluar problemas en un examen, lo importante es calificar el resultado, o en todo caso, el procedimiento escrito, para el cual se hace referencia a las pautas del algoritmo de solución estudiado en clase, y no a las posibles reflexiones, relaciones y construcciones que el estudiante pudiera haber realizado.

Otra implicación de lo expuesto anteriormente está en la actuación de los profesores cuando un alumno contesta equivocadamente o hace mal algún paso de un procedimiento determinado; el profesor refleja una actuación tradicionalista al señalar el error y corregirlo dando por sentado de que con una explicación de su parte sobre el error cometido por el alumno, éste ya entendió y lo va a corregir.

Los profesores no consideran que la forma más conveniente, de acuerdo al nuevo enfoque, de darse cuenta de su error es llevar al estudiante a enfrentarlo a situaciones que lo conflictúen, que lo hagan reflexionar y ajustar sus esquemas de tal forma que él mismo rectifique y logre construir un conocimiento viable.

Los profesores de la investigación no están concientes de que aprender álgebra para desarrollar habilidades cognitivas, es un proceso gradual. Se ve la urgencia de una preparación profesional del profesor para que comprenda y ejercite la metodología de resolución de problemas, de tal forma que él vea que el tiempo de duración de la clase no es limitante para desarrollar habilidades cognitivas en el alumno, y entonces pueda no sólo orientar un proceso, sino aprovechar ese proceso para tratar de evaluarlo adecuadamente. Pero como ya se dijo, el profesor evalúa al alumno con un examen tradicional en donde importa el resultado, lo cual hace que su práctica sea conflictiva en el salón de clases ya que en las pruebas institucionales que se aplican se califica el aprendizaje de algoritmos paso a paso.

En lo que respecta a la visión que tienen los profesores de los objetivos principales de la resolución de problemas y que ellos explicitan durante la enseñanza del tema de resolución de sistemas de ecuaciones por el método gráfico podemos observar:

- Resalta en su actuación la creencia por parte del profesor de que los problemas son para resolverse. Pero los problemas son para que el alumno aprenda a pensar desarrollando habilidades cognitivas durante el proceso de resolución.
- El método gráfico lo orientan hacia una manipulación sintáctica, o sea, para el cálculo preciso del valor numérico que corresponde a las variables buscadas en las expresiones algebraicas.
- Cuando se insiste en las propiedades de las estructuras numéricas durante el proceso de resolución de un problema, según Kaput (1998), si no se limitan, se pueden desarrollar habilidades del pensamiento algebraico; està insistencia se observó en los casos de esta investigación, sin embargo, por la actuación de los profesores se podría conjeturar que están tratando de desarrollar en el alumno más

herramientas algorítmicas, o tratando de darle más información sintáctica para llegar a la solución.

- Para graficar las funciones que representan las condiciones del problema orientan hacia la tabulación en todos los problemas, asignando casi siempre los mismos valores a todas las tabulaciones hechas – por lo que se puede decir que están enfatizando en un registro numérico limitado– , perdiéndose del análisis de cada una de las funciones lineales en lo que respecta a su pendiente y su ordenada en el origen, lo cual le permitiría visualizar en el tipo de inclinación que tienen las rectas y encontrar intuitivamente la posibilidad de intersección cercana o lejana, la no intersección o la coincidencia total. En el Fichero de Actividades Didácticas (pp. 91), se sugiere recordar o dar a conocer lo que es la pendiente y la ordenada en el origen y cómo se pueden identificar en las ecuaciones algebraicas. Que los alumnos noten qué representan la pendiente y la ordenada en la gráfica y aclara que todo el análisis lo deben construir los alumnos, asesorados por el profesor.
- Se notó que los profesores no guían a examinar los casos que pueden presentarse al resolver sistemas de ecuaciones 2 x 2, como son: cuando las ecuaciones representan dos rectas que se intersectan en un solo punto y entonces la solución es única; cuando las dos ecuaciones representan una misma recta y se tiene un número infinito de soluciones y por último cuando las dos ecuaciones representan rectas paralelas, por lo que al no haber un punto común a ambas rectas, el sistema no tiene solución.

Por lo que se puede concluir que el profesor usa el problema como un medio para ejercitar la aplicación de un nuevo conocimiento, que refuerza con otros problemas que propone, hasta que considera que el método ha sido memorizado. Sin embargo, en el libro de Lecturas (pp.22) encontramos que dice: "*Si la resolución de problemas se ve como un ejercicio de aplicación de* *un método, entonces no se entiende como un proceso sino como un reactivo en el que se enfatiza la selección y realización del algoritmo correcto*". Por lo que se puede concluir que en este sentido, los problemas no se utilizaron para ampliar el pensamiento algebraico tal y como lo indica la propuesta curricular, el cual proporciona las habilidades cognitivas para desarrollar una nueva forma de pensar.

Así, lo que el maestro llama Razonamiento Algebraico consiste en: Identificar las condiciones del problema, identificar la pregunta y usar el algoritmo estudiado en la clase para llegar a la solución, por lo que según el libro de Lecturas (pp. 24): El profesor mantiene la concepción escolar de lo que es un problema, es decir, básicamente, un ejercicio de aplicación de algoritmos estudiados en clase.

Sin embargo, se puede decir que los profesores de los casos A, B y C de la investigación se están iniciando en el uso de una metodología enfocada al constructivismo, ya que se observó durante la investigación que las preguntas que hacen están de acuerdo al nivel de la conceptualización que tienen acerca de su propio razonamiento algebraico, y consecuentemente, es la que desarrollan en el alumno. También saben "de forma" lo que es en la nueva visión educativa enseñar álgebra, por lo tanto también, lo que es el razonamiento algebraico que se debe desarrollar en los alumnos, aunque no se les ha dado la oportunidad de experimentar en talleres el uso de una metodología de enseñanza a través de preguntas, en la cual se podría proponer hacer una lista diaria de las características del razonamiento algebraico y de las preguntas pertinentes que necesita para desarrollar el tema que verá en el salón de clases.

Por lo anterior, se está de acuerdo con la propuesta de Driscoll referida en el marco teórico, la cual sostiene que, lograr la meta de desarrollar el razonamiento algebraico está en gran medida condicionada a la clase de preguntas que hacen a sus estudiantes. Además, lo fundamental para que se de el proceso de cambio, tanto en el profesor como en el alumno, el profesor debiera hacerse el hábito de formular una variedad de preguntas.

Así, se puede concluir que la capacidad de los profesores participantes en la investigación se encuentra en un nivel inicial en lo que se refiere a ampliar sus habilidades cognitivas propias del pensamiento algebraico al mismo tiempo que las de sus alumnos.

Este trabajo de investigación pretende clarificar la situación que se está dando en el aula dentro del movimiento de cambio en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Así como también arrojar luz sobre la forma en que se dan las relaciones entre profesor y alumno cuando se intentan alcanzar los fines de la reforma educativa. La propuesta teóricamente vale la pena, pero por la realidad social de las instituciones públicas resulta muy difícil hacer que en un primer intento se pueda implementar cabalmente, pues tenemos importantes limitantes como las siguientes:

- El número de alumnos por grupo.
- El tiempo destinado al desarrollo de la clase diaria.
- La presencia de múltiples distractores (ruido, paso de gente, etc.) que impiden la concentración.
- El gran número de alumnos que conforman un equipo de trabajo.
- Falta de espacio, tiempo y cultura para compartir reflexiones entre los profesores.
- Ausencia de material didáctico y aulas apropiadas.
- La presión institucional para desarrollar el programa en tiempos predeterminados.
- Las creencias de los profesores arraigadas en una concepción tradicionalista adquirida en su larga experiencia como docentes.

4.4 COMENTARIOS FINALES

- Los casos A, B y C tienen desarrollado un esquema intuitivo de lo que es el trabajo en equipo y de cómo desarrollar habilidades cognitivas del alumno cuando están trabajando en él, pues necesitan establecer a todo el grupo en general la estrategia que marcará el nivel en el cual se trabajará, es decir : cada uno trabaja solo y después discuten lo que hizo cada quien, o, todos discuten los procedimientos que haya para resolver el problema primero, o bien, no sólo discutir sino consensuar un procedimiento y distribuir las tareas entre los miembros del equipo.

- Al profesor le hacen falta conocer guías especializadas de preguntas para cada momento de solución ya que no tiene asideros para guiar el proceso de solución de los problemas a través de preguntas. Hacer prácticas constantes en el aula con este tipo de preguntas le puede ayudar a construir su propia técnica para elaborar preguntas apropiadas para impulsar el pensamiento algebraico. De esta manera, si el profesor amplía su concepción del álgebra y de los procesos cognitivos que conlleva el desarrollo del pensamiento algebraico, estará mejor preparado para elaborar una amplia variedad de preguntas pertinentes. Se recomiendan talleres en donde se pueda experimentar la potencia de las preguntas pertinentes en su propia preparación algebraica y la necesidad de su integración a la metodología de enseñanza.

- El profesor que está intentando seguir la propuesta tiene la limitante del propio alumno que no pregunta ni está acostumbrado a hacerlo, porque le faltan conocimientos, o no está motivado, o no está impuesto a hacer cosas por él mismo porque supone que no puede hacerlo, y todo esto debido a su formación tradicional previa tanto familiar como escolar.

- El profesor podría aprender a reconocer su propio proceso cognitivo si observándose a sí mismo, ve su manera de llevar el proceso de enseñanza y aprendizaje en el salón de clases, si conoce más profundamente la propuesta y se le da la oportunidad en cursos de ver algunas buenas prácticas de lo que es la metodología de enseñanza del sistema de ecuaciones 2x2 que propone la propuesta y sus ventajas. O someter al profesor a una práctica donde se le ponga en una experiencia como alumno y lo vayan guiando a él con preguntas.

- Ya que el Libro del maestro no ejemplifica problemas cuya solución sea diferente a la de dos rectas que se intersectan; se entiende que al profesor se le deja ese trabajo en donde debe usar su iniciativa y creatividad para inventarlos, pero no se le dice cómo hacerlo, lo cual se observa en la generalidad de los temas. Por lo que se propone que a los profesores se les den talleres en donde éstos, interactuando como alumnos, puedan resolver los problemas propuestos en los libros que le da la SEP. Mejorándolos, extendiéndolos, o creando nuevos que sirvan para ejemplificar que así como hay solución para problemas también se tiene problemas que no tienen solución.

- La propuesta supone que los estudiantes van a tener al alcance el manejo de las calculadoras y la restricción que se ve durante la resolución de problema es que no todos las tienen y las instituciones no proveen de calculadoras a los estudiantes de matemáticas. Por poner un ejemplo de acción consecuente, se puede mencionar que las Secretarías de Educación Estatales podrían impulsar proyectos atractivos para empresas cuyas políticas de mercadotecnia incluyen dotación de equipo de esta naturaleza,

- Se observa que el contexto del problema que es en lo que la propuesta funda la motivación hacia su resolución, no es válida para la mayoría de los alumnos ya que sus actitudes tradicionalistas de dependencia, no los deja, los inhibe para preguntar y exponer oralmente a los demás alguna conjetura. Sin embargo, persistir en un ambiente de invitación a la participación e insistir con preguntas que lo hagan reflexionar una y otra vez, aunque es un trabajo lento y pesado podrá, a mediano o largo plazo, invertir esa actitud pasiva, incluso más allá de la clase de matemáticas.

- Se observa también que el profesor requiere tener acceso a textos apropiados ya que los que tiene no son un apoyo suficiente, también orientación adecuada y continua, tanto de asesores expertos como de profesores que estén preparados en este tema, para aprender a enseñar de acuerdo a la nueva propuesta, así como para que amplíen la preparación disciplinar de tal manera que le sirva de fundamento para su transformación.

Entonces, cabe mencionar que debido al sentido que tiene esta investigación, de ninguna manera es en demérito del profesor exponer su arraigo al sistema tradicional, sino que, al contrario, se pretende poner en evidencia que un cambio tan significativo en el sistema educativo requiere un cambio integral del profesor, pues para interpretar bien los cambios en los planes y programas, necesita tiempo para construir su propio entendimiento de los cambios, trabajar sobre sus esquemas cognitivos producto de experiencias anteriores exitosas que no le dejan tomar decisiones sobre cómo responder a las sugerencias de la reforma.

Se termina este trabajo de investigación concluyendo que estamos seguros que para los profesores, casos A, B, C, llegar hasta donde están situados hoy en la puesta en marcha de su propio entendimiento de la propuesta no ha sido nada fácil, sino que es un largo camino que se tiene que recorrer. Que ha sido un aliciente muy estimulante para nosotros pues estamos de acuerdo con uno de los productos de la investigación educativa, presentada por la SEP, (Hargreaves et al, 2000; pp. 281) que dice: "La paradoja del cambio educativo necesita ser rápida y lenta a un tiempo, estrecha y amplia, pero no tiene por qué llevar al desaliento. Puede convertirse en una paradoja esperanzadora en la que *llegar allí* se logre mediante la acumulación de iniciativas pequeñas pero significativas, conformadas por un pensamiento multidimensional, que conduzca a profesores y estudiantes no al nirvana de la educación perfecta para los estudiantes, sino a mejoras significativas en marcha".

ANEXO 1

CUESTIONARIO

En las hojas que se anexan de respuesta a los siguientes cuestionamientos lo más ampliamente posible. Si alguna cuestión le resulta confusa déjela en blanco:

1. ¿Cómo interpretaría lo que es el álgebra?
2. ¿Podría dar un ejemplo de un problema cuya solución se aborde algebraicamente?
3. ¿Qué conocimientos matemáticos o habilidades considera usted que requiere un alumno para tener éxito en la materia de álgebra de secundaria?
4. ¿Cuáles son sus metas principales como profesor de álgebra?
5. En la enseñanza del álgebra ¿Cuál es su rol como profesor en el salón de clases?
6. ¿Cuáles de las representaciones indicadas para la enseñanza del álgebra utiliza usted comúnmente?
7. ¿Utiliza usted algún tipo de material didáctico concreto como apoyo para el desarrollo de su clase de álgebra?
8. ¿Qué tipo de apoyos bibliográficos utiliza?
9. Ejemplifique una de sus estrategias más utilizadas en su práctica docente.
10. ¿Cómo continúa usted desarrollándose profesionalmente?
11. Cuando trabaja con calculadoras, computadoras u algún otro instrumento tecnológico, ¿Considera que sus alumnos están desarrollando habilidades de razonamiento algebraico?
12. Enumere 5 habilidades propias del razonamiento algebraico.
13. ¿Qué es un problema y qué es un ejercicio?
14. ¿Cuáles son los elementos que influyen principalmente para la comprensión de un contenido algebraico?
15. ¿Cómo puede medir la comprensión de un contenido algebraico?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, M. y Santos, L. M. (2000). Reforma curricular y desempeño de los estudiantes del nivel medio superior en el proceso de resolución de problemas no rutinarios. En F. Hitt y A Hernández (Eds.), *Experimentaciones en educación matemática en los niveles medio superior y universitario* (pp. 1- 41). México, D.F., México: Taller Editorial del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Battista, M. & Brown, C. "Using Spreadsheets to Promote Algebraic Thinking". Teaching Mathematics (January, 1998): 470-478.

Bell, A. (1996) Algebraic thogught an role of manipulable symbolic language. En C. Kieran et. al (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching.* (pp.151-154) Boston: Kluwer Academic Publishers.

Charbonneau, L. (1996) From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. En C. Kieran et.al (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching.* (pp.15-37) Boston: Kluwer Academic Publishers.

Driscoll M.(1999) Fostering Algeabraic Thinking : A guide for teachers, Grades 6-10. USA: Education Development Center, Inc.

Ernest, P. (1998) Variedades del constructivismo: sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas. En M. Villalba (Ed.) *Antología de Lecturas para el Curso Paradigmas en Educación Matemática.* (pp. 21-34). Hermosillo, Sonora, México: Programa de Maestría en Matemática Educativa de la UNISON.

Freire, P. (1970) Pedagogy of the oppressed New,York: Continuum

Gascon, J. (1994) El papel de la resolución de problema en la enseñanza de las matemáticas. En Revista: Educación matemática vol.6-No.3. Universidad autónoma de Barcelona. España, Barcelona.

Guzman, M. de,.(1987) Enseñanza de las matematicas a tráves de la resolución de problemas. Esquema de un curso inicial de preparación, aspectos didacticos de matemáticas 2. Publicaciones del instituto de ciencias de la educación de la Universidad de Zaragoza, (pp .31-46).

Hargreaves, A. et al.(2000) Una educación para el cambio, reinventar la educación de los adolescentes. (Ed.) Octaedro/SEP. México, D.F., Traducción: José M. Pomares.

Herbert, K., & Brown, R. "Patterns as Tools for Algebraic Reasoning." Teaching Mathematics (February 1997): 340-344.

Hitt, F.y Hernández A. (Eds. 2000). Experimentación en educación Matemática en los niveles medio superior y universitario. (Ed.) Departamento de matemática educativa del Cinestav-IPN. Mexico, D.F.

Kaput, J. (1994) The representational roles of technology in connecting mathematicas with autenthic experiences. Didactic of mathematics as scientific discipline. Boston: Klwer Academic Publishers.

Kaput, J. (1995-a) Transforming Algebra from an engine of inequitiy to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Documento presentado en el Congreso de la NCTM, San Francisco.

Kaput, J. (1995-b). A research based supporting long term Algebra Reform . USA.: Paper presented at the 17th Annual Meeting of North American.

Kieran, C. y Chalouh, L. (1993). Prealgebra: transition from arithmetic to algebra. En D.T. Owens (Ed.) *Reserarch Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics.* (pp. 179-198). New York: Macmillan.

Kriegler, S. (1998). Just what is algebraic thinking?. En *http://www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/Algebrat.htm.,* Submitted for Algebraic Concepts in the Middle School A special edition of Mathematics Teaching in the Middle School. Creative Publications.

Lee, L. (1996) An initiation into algebraic culture through generalization activities. En C. Kieran et.al (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching.* (pp. 87-106). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Martínez, R. Y Villalba, M. (2001). La enseñanza de las matemáticas en educación básica en Hermosillo, Sonora y su relación con el Plan y Programa de estudios 1993 de la Secretaría de Educación Pública. En J.E. Ramos (Ed.) *Investigaciones Educativas en Sonora, Volumen 3* (pp. 3-14). Hermosillo, Sonora, México: Red de Investigación Educativa en Sonora, A.C.

Maturana, H. y Varela, F. (1983) El árbol del conocimiento Boston: Shambala.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1995). Constructivismo y educación matemática. En *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer Nivel.* (pp.49-66) Programa Nacional de Actualización Permanente. México. SEP

National Council of Teachers of Matemáticas (1989, 1991, 1995) En V. Reston (Ed) Principles and standars for school mathematics: A discussion draft. E.U.A. : NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (1989). En V.A. Reston Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. E.U.A. : NCTM

Ontoria, A. et. al. (1995). Construcción de Conocimiento desde el aprendizaje significativo-cognitivo. En *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer Nivel.* (pp.49-66) Programa Nacional de Actualización Permanente. México. SEP

Radford, L. Some reflections on teaching algebra through generalization. En C. Kieran et.al (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching.* (pp. 107-111) Boston: Kluwer Academic Publishers.

Santos, L. M. (1996) La importancia de la transferencia del conocimiento en el estudio situado de las matematicas. En F Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp.405-422). México: Grupo Editorial Iberoamérica

Santos, L. M. (1999) Problematizar el estudio de las matemáticas: Un aspecto esencial en la organización del currículo y el aprendizaje de los estudiantes. En F Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.425-443). México: Grupo Editorial Iberoamérica

SEP (1993) *Planes y programas en la escuela secundaria.* México.

SEP (1994) *Libro para el maestro.* Matemáticas. Educación secundaria. México.

SEP (1995) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.* Lecturas. Educación secundaria. México.

SEP (1995) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.* Guia de estudio. Educación secundaria. México.

SEP (1999) *Fichero de actividades didácticas.* Matemáticas. Educación secundaria. México.

SEP (2000) *Secuencia y organización de contenidos.* Matemáticas. Educación secundaria. México.

Stefe, L y Gale, J. (Eds.) (1995) Constructivism in education. U.S.A.: Hillsdale

Usiskin, Z. (1987) Conceptions of school agebra and uses of viariables. En V.A. Reston (Ed.) *Ideas of Algebra K-12. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 8-19).U.S.A: NCTM

Vance, J.H. (1998). Number operations from an algebraic perspective. Teaching Mathematics, No.5, 282-285. (Refereed, international)

Villalba, M. (1996- 2001). Utilización de textos de matemáticas en la escuela básica, Organización en el aula , Metodología de resolución de problemas , Currículo formal y Currículo Real Documentos de trabajo: Tareas de estudiantes del Posgrado en Matemática Educativa de la Unison y Escuela Normal Superior de Hermosillo. Hermosillo, Sonora, México: UNISON,

Von Glasersfeld, Ernst. (1983) Learning as a constructive activity. En J.C. Bergeron y N. Herscovics (Eds.) *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 1, pp. 42-69) Montreal: Universidad de Montreal, Facultad de Ciencias de la Educación

Von Glasersfeld, Ernst. (1987) El aprendizaje como una actividad constructiva. En *http://fractus.uson.mx/Papers/vonGlasersfeld/* Traducción de V. Hernández. (1999) México: Servidor del Programa de Maestría en Matemática Educativa de la UNISON.

Von Glaserfeld, E. (1991). An exposition of constructivism: why some like it radical. En Davis, R.B. Maher, C.A. y Noddings, N. *Constructivist views of the teaching and learning of mathematics,* Washington, DC, National Council of Teachers of Mathematics.

Von Glasersfeld, Ernst. (1996) Homenaje a Jean Piaget. En *http://fractus.uson.mx/Papers/* Traducción de San Martín, Oscar en 1999. México: Servidor del Programa de Maestría en Matemática Educativa de la UNISON.