UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Programa de Maestría en Ciencias

con Especialidad en Matemática Educativa

Propuesta Didáctica Dirigida a Docentes de Secundaria.
Razones Trigonométricas

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:
Maestra en Ciencias
con Especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Guadalupe Isabel Béteme Fierro

Director de tesis:

Dr. José Luis Soto Munguía

HERMOSILLO, SONORA, MÉXICO **ENERO DE 2017**

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo consiste en mostrar el proceso de diseño e implementación de una propuesta didáctica en la cual se presentan problemáticas de contexto extra-matemático en las que se involucran las razones trigonométricas, la cual está dirigida a docentes de secundaria de matemáticas.

Dicha propuesta didáctica se diseñó tomando como base la metodología de diseño ACODESA y está compuesta de tres secuencias didácticas, en cada una de las secuencias se presenta el estudio de diversas problemáticas, además en cada una se incluye un apartado de Cierre en el que se pretende promover la reflexión por parte de los profesores sobre su propia práctica matemática, la cual entendemos como aquella actividad que se realiza al resolver problemas matemáticos.

A continuación, se describen cada uno de los capítulos en los que se divide este documento:

En el Capítulo 1 se presenta la problemática que se pretende atender, así como los elementos que justifican la realización del presente proyecto, se incluyen también los objetivos que se pretenden alcanzar durante su desarrollo.

Durante el Capítulo 2 se analizan diversas investigaciones que se han realizado en la línea de la enseñanza de las razones trigonométricas y que hemos tomado como antecedentes de nuestro trabajo; además, se incluye el análisis realizado sobre el tratamiento que se le da a las razones trigonométricas en el currículo de la educación básica.

El Capítulo 3 se compone de los elementos teóricos que sustentan el diseño de la propuesta didáctica y de las acciones metodológicas que se siguieron durante la realización del proyecto.

La propuesta didáctica y sus características se presenta en el Capítulo 4, además se incluyen los objetivos de la secuencia y se muestran las tres secuencias didácticas que la conforman. Por otra parte, en el Capítulo 5 se muestran la planeación, los resultados y el análisis de las puestas en escena de la secuencia, así como las reflexiones realizadas sobre dicho análisis.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la elaboración de este proyecto, las cuales se dividen en cuatro diferentes apartados.

CAPÍTULO 1
PROBLEMÁTICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS.

1.1. PLANTEAMIENTO DE LA PROBLEMÁTICA

En nuestro país, en los últimos 25 años la Secretaría de Educación Pública, a través de sus normas, ha promovido al menos dos cambios importantes en los enfoques de enseñanza (1993 y 2004), tratando de romper con la inercia de considerar que la atención debería centrarse en la enseñanza. En los cambios más recientes la atención se centra en el aprendizaje, en desarrollar en los niños y jóvenes habilidades y capacidades para aprender por sí solos; en desarrollar competencias en donde el fin no es sólo construir conocimientos, sino en usar dichos conocimientos y desarrollar actitudes que permitan al estudiante ser más eficaz al momento de enfrentar no sólo problemas de tipo académico, sino personales y sociales (SEP, 2011).

Si bien es cierto que estas expectativas de la SEP son una respuesta a necesidades sociales, el cristalizar estas intenciones no es tarea fácil por ser muchas las variables que intervienen, pero no por ello deben soslayarse. Un campo de conocimiento que todo ciudadano debería dominar, por lo menos a niveles básicos, es la matemática, y por ello aparece en todos los programas de educación desde preescolar hasta nivel universitario. Sin embargo, la sensación que se tiene socialmente sobre el aprendizaje de las matemáticas en el medio educativo escolarizado es que los aprendizajes no alcanzan siquiera los niveles elementales, es decir, aquellos que les permitan utilizarlas en contextos cotidianos no escolares.

En educación básica se presentan una gran cantidad de contenidos y las percepciones de las deficiencias en algunos de ellos son notables, como por ejemplo los relacionados con trigonometría, los cuales presentan serias dificultades para los estudiantes, según nuestra experiencia docente. Dicha afirmación se ha venido confirmando con los resultados de las evaluaciones estandarizadas externas realizadas en nuestro sistema educativo mexicano, tales como las evaluaciones realizadas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) a través de la prueba PISA.

En cuanto a los conocimientos trigonométricos de los estudiantes los resultados de la prueba PISA arrojan que casi el 43% de los sustentantes no han escuchado el concepto coseno de un ángulo, lo cual nos indica que los conocimientos que se tienen sobre trigonometría son muy pobres, en el nivel de educación básica. Ésta es la realidad de nuestros estudiantes mexicanos,

Por otro lado, encontramos el panorama de los docentes del mismo nivel educativo, los cuales también son evaluados a través del Instituto Nacional de Evaluación Educativa, en el 2015 fueron 4474 sustentantes en el examen de oposición para obtener una plaza como docente de matemáticas de secundaria, de los cuales el 42.67% resultó no idóneo para trabajar como docente de matemáticas frente a grupo.

Como podemos observar, existen deficiencias tanto en la enseñanza de las matemáticas como en su aprendizaje, de manera particular podemos decir que en el campo de la trigonometría las deficiencias son muy notorias tal es el caso de los resultados que arrojan las pruebas estandarizadas.

Como lo muestran las evaluaciones, hay un nivel bajo en cuanto a conocimientos trigonométricos de los estudiantes, los cuales podrían estar asociados a las deficiencias que presentan los profesores, mismas que, aunque no se tienen datos precisos, se pueden suponer a partir de los resultados del examen de oposición

Después de revisar los resultados de las evaluaciones, específicamente en el tema de razones trigonométricas, se consultó el Programa de Estudios de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, la cual se imparte en la Escuelas Normales del país, con la finalidad de tener una visión sobre la formación que tienen los docentes en dicho contenido matemático, los resultados fueron los siguientes:

Semestre IV: Plano cartesiano y funciones. Énfasis en las ecuaciones lineales y cuadráticas, es deseable que los estudiantes normalistas avancen algo más hacia las funciones trigonométricas o el estudio de las cónicas

Semestre V: Escalas y semejanzas. Se analiza la semejanza de figuras en general y de triángulos rectángulos en particular, para culminar con el estudio de las funciones trigonométricas.

Como se puede observar, en su formación profesional, los docentes no profundizan sobre el tema de razones trigonométricas, a pesar de que es un contenido que tendrán que desarrollar con los estudiantes de secundaria.

Los datos anteriores, nos muestran que existe una problemática tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las razones trigonométricas, y consideramos que una de las razones principales es que el docente carece de recursos didácticos y de experiencias de aprendizaje sobre dicho tema, que le permitan mejorar su práctica docente

1.2. JUSTIFICACIÓN

Las evaluaciones internacionales realizadas a nuestro país mediante la prueba PISA, dan cuenta de la realidad de nuestro sistema educativo, ante esto resulta necesario saber qué está llevando a México a posicionarse en los últimos lugares de los países evaluados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

Dicha prueba evalúa a estudiantes entre los 15 y 16 años, y lo hace utilizando situaciones problemas en las que el sustentante pone en juego sus competencias, que son precisamente éstas las que PISA evalúa, es evidente que los alumnos mexicanos están muy por debajo de lo que se considera como el nivel más elemental (SEP, 2012). Ante esta situación, es necesario tomar medidas educativas que impacten directamente en el aprendizaje de nuestros alumnos.

Al revisar los materiales didácticos con los que cuenta el maestro de secundaria para impartir el tema de las razones trigonométricas, se observa que son escasos y que además el significado que se promueve de dichos objetos matemáticos es demasiado pobre.

Ante esto, surge la necesidad de diseñar materiales que sirvan como recursos didácticos para la enseñanza de las razones trigonométricas. Claro está que esto debe hacerse partiendo de la premisa de que cualquier cambio en la enseñanza de las matemáticas ha de estar fundamentado en una investigación didáctica a la vez teórica y experimental, y que todo trabajo de teorización o de diseño en didáctica de las matemáticas, presupone necesariamente un modelo tanto del saber matemático, en este caso de la trigonometría, como del propio sistema de enseñanza, tanto del proceso de aprendizaje como el de enseñanza (Gascón, 1994).

Para diseñar una secuencia didáctica que tenga mayor posibilidad de éxito consideramos necesario tomar en cuenta distintos elementos teóricos que sustenten lo que en la secuencia se propone; por otra parte, los conocimientos matemáticos que se aborden deberán ser significativos para el alumno.

Para que los objetos matemáticos tengan significación, es necesario que éstos pasen por un tratamiento de adecuación previo a su presentación; a este tratamiento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se le conoce como trasposición didáctica. Dicho tratamiento contempla dos tipos de saberes: el saber-sabio y el saber-enseñado. El primero se refiere al conjunto de saberes propios de la matemática profesional. Después de que dichos saberes son estudiados y analizados, se hace una serie de adecuaciones que permite que dichos saberes puedan ser construidos y aprendidos por el alumno. A estos saberes que han pasado por un proceso de adecuación es a lo que la TAD llama saber a enseñar (Chamorro, 2006).

En el caso de la enseñanza de las razones trigonométricas, puede observarse que el saber-sabio no ha pasado por un proceso de transposición didáctica adecuado, ya que no se presenta de una manera construible para el alumno.

Es por ello que la propuesta didáctica toma en cuenta la génesis histórica de los objetos aquí mencionados, con la finalidad de poder crear un ambiente de construcción de significados que permita al docente construir y reflexionar sobre su aprendizaje. La pregunta ahora es cómo construir dichos ambientes que provoquen en el docente necesidad de emergencia de los objetos, ambientes que propicien el aprendizaje significativo y sobre todo ambientes en lo que la actividad principal sea la de resolver problemas matemáticos relacionados con las razones trigonométricas.

Primeramente, es necesario aclarar que la presente propuesta de diseño de una situación didáctica surgió de la necesidad de atender una problemática en la enseñanza y sobre todo en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, consideramos que para construir un ambiente de aprendizaje como el que antes se menciona, es necesario tomar como base las herramientas teóricas de diseño y análisis que los diferentes enfoques teóricos de la didáctica de las matemáticas nos ofrecen.

OBJETIVOS

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, nos hemos planteado los siguientes objetivos:

Objetivo general

-Involucrar a los docentes de matemáticas en la resolución de situaciones problemáticas enfocadas en las razones trigonométricas, en las cuales reflexionen sobre su propia práctica matemática.

Para lograrlo se han planteado los siguientes objetivos específicos:

-Diseñar situaciones problemáticas que contribuyan a la mejora de la enseñanza de las razones trigonométricas en secundaria, dirigidas a profesores.

-Poner en escena la secuencia diseñada con profesores de matemáticas de secundaria.

-Analizar la actividad matemática de los docentes participantes.

CAPÍTULO 2
ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN Y UBICACIÓN CURRICULAR.

2.1. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN.

Conocer la evolución de la construcción de los significados es de suma importancia para poder enseñar matemáticas. En el caso de la Trigonometría, es indispensable que el docente realice transposiciones didácticas sobre los objetos matemáticos intervinientes, como tal, y lo que se pretende que el alumno construya con dichos objetos. Para ello, se debe contar con un amplio dominio sobre la disciplina y sobre los procesos de construcción de significados, entendiendo a éstos como producto de la actividad mental del individuo y de sus interacciones sociales.

Al analizar la evolución y construcción de la trigonometría, se percibe que ésta es una herramienta para resolver problemas que involucran el cálculo de distancias no accesibles y tiene una aplicación más allá del triángulo rectángulo. A diferencia de como habitualmente nos la presentan en la escuela, fue desarrollada mediante la necesidad de resolver problemas astronómicos y tiene sus orígenes en la geometría, además de tener gran intervención en algunas ramas de la física.

Por otra parte, nos percatamos que en el currículo no se alcanza a identificar en qué momentos recurre a la geometría para desarrollar el conocimiento trigonométrico. Además, no se plantea que el alumno, mediante la actividad de resolver problemas vaya construyendo su conocimiento trigonométrico, ya que el hecho de que el alumno conozca de manera conceptual el término, por ejemplo, de razón trigonométrica, y que sepa utilizarlo para encontrar el valor de uno de los lados de un triángulo rectángulo no significa que él maneje los conocimientos trigonométricos.

Dicha situación, no concuerda con el cómo de manera histórica se desarrolló la geometría. Sin embargo, con esto no se propone que se enseñe la trigonometría tal cual como se construyó, sino que se tomen en cuenta las dificultades que de manera histórica se han presentado y sobre todo que se utilicen todos los recursos tecnológicos digitales para enseñar y promover el aprendizaje significativo de la trigonometría.

La didáctica de las matemáticas abarca múltiples ámbitos de reflexión e indagación, tales como el desarrollo de teorías educativas, el currículo, la política educativa, la formación de profesores, el aprendizaje, la enseñanza y el aula de matemáticas. Sin embargo, en este capítulo vamos a analizar y presentar algunas investigaciones que resultaron significativas en torno al aprendizaje y sobre todo a la enseñanza de las razones trigonométricas.

Las indagaciones realizadas sobre el tema de razones trigonométricas arrojan, en primer lugar, que el currículo de educación básica no promueve la construcción de un significado rico de las razones trigonométricas, ya que las presenta como una herramienta matemática, previamente construida, que sirve para resolver cierto tipo de problemas matemáticos, que por lo general tienen que ver con el cálculo de alguno de los lados de un triángulo rectángulo.

Hemos encontrado un gran número de investigaciones y reflexiones acerca de la enseñanza de las razones trigonométricas. Éstas tienen como propósito diseñar secuencias didácticas enfocadas en lograr que los alumnos aprendan dicho objeto matemático con un significado más rico, en comparación con lo que se propone en el currículo. En estas investigaciones se presentan diversas premisas teóricas que fundamentan y justifican el enfoque y diseño de las secuencias didácticas.

A continuación, se presentan de manera puntual, algunas de las investigaciones que se han hecho sobre la enseñanza de las razones trigonométricas.

San Martín (2003), desarrolló una investigación en la que se pone de manifiesto la falta de correspondencia entre el enfoque constructivista de las matemáticas y el enfoque tradicional que impregnaba los textos de la época en la que fue elaborada la investigación. En este trabajo se presenta un análisis didáctico de 17 libros de texto de matemáticas de secundaria, y se llega a la conclusión de que no promueven la construcción, por parte del alumno, de un significado rico de las razones y funciones trigonométricas.

En esta investigación se propone e implementa una secuencia didáctica para la enseñanza de las razones trigonométricas, partiendo de las premisas teóricas propuestas por Brousseau sobre las situaciones didácticas, además utiliza la tecnología como un recurso didáctico.

Los resultados obtenidos en la investigación muestran, tanto cuantitativa como cualitativamente, que se puede lograr enriquecer los significados de los alumnos partiendo de secuencias didácticas enfocadas en promover la construcción y no la transmisión de los conocimientos matemáticos.

Dos años después de haberse publicado la investigación anterior se presentó un estudio socio-epistemológico de la función trigonométrica (Montiel G. , 2005). En éste, después de un análisis teóricamente fundamentado, se llega a la conclusión de que los libros de texto de matemáticas, particularmente de nivel medio superior, no presentan una transposición didáctica pertinente. Por otra parte, dicha investigación le otorga un papel fundamental a la actividad de hacer matemáticas en un ambiente basado en la resolución de problemas y generado a partir de las interacciones sociales.

Las conclusiones a las que se llegan radican, esencialmente, en poner a la luz lo que desde tiempos remotos se ha venido presentando, referente a la falta de recursos didácticos para el profesor. Por otra parte, hace mención de la falta de tratamiento didáctico que se le da a los objetos matemáticos y que por tanto los convierten en saberes poco digeribles para el alumno.

En la línea de formación de profesores, no se ha encontrado trabajos de investigación relacionados con las razones trigonométricas, lo cual no significa que no existan; sin embargo, el hecho de que no haber encontrado nos indica que, como lo dijimos al inicio, el profesor no cuenta con recursos didácticos que lo lleven a mejorar su práctica docente y a reflexionar sobre sus propias prácticas de enseñanza.

2.2. UBICACIÓN CURRICULAR DEL OBJETO MATEMÁTICO, RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Primeramente, identificamos curricularmente el tópico dentro de la educación básica. Al revisar el Plan de Estudios 2011, nos dimos cuenta que el primer acercamiento oficial a la trigonometría se hace durante el tercer grado de la educación secundaria, y se presenta de la siguiente manera (SEP, 2011):

Tercer Grado. Bloque III y IV
• **Competencias que se favorecen:** Resolver problemas de manera autónoma, Comunicar información matemática, Validar procedimientos y resultados, Manejar técnicas eficientemente. • **Aprendizajes esperados**: -Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. -Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. **Eje "Forma, Espacio y Medida":** • Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con el eje de las abscisas y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

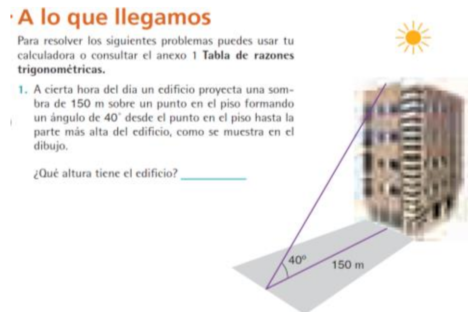
• Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. • Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Los conceptos matemáticos que se promueven son los siguientes:

Altura: en el caso de los prismas, la altura es la distancia que existe entre las bases, en tanto que en las piramides es el segmento perpendicular a la base, que coincide con el vértice común a todas las caras laterales (SEP, 2014, pág. 92).
Ángulo: es la abertura comprendida entre dos rectas que se unen en un punto llamado vértice. Las rectas que lo forman se llaman lados. (SEP, 2014, pág. 117).
Arco de circunferencia: los lados de cualquier ángulo en una circunferencia, inscrito o central, determinan un arco en la circunferencia (SEP, 2006, pág. 89).
Área: medida de la superficie de las figuras (SEP, 2014, pág. 249).
Capacidad: el espacio vacío de un recipiente (cubeta, jarra, frasco, etcétera) (SEP, 2014, pág. 45).
Circunferencia: conjunto de puntos que están a la misma distancia de otro punto al que se le llama centro, dicha distancia en el radio de la circunferencia (SEP, 2014, pág. 279).
Congruencia: dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño (SEP, 2014, pág. 163).
Coseno de un ángulo: relación que hay entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa (SEP, 2011, pág. 152).
Volumen de cilindro circular recto: Volumen de un cilindro: para calcular el volumen de un cilindro, al igual que el de un prisma, se multiplica el área de su base por su altura. Dado que la base de un cilindro siempre es un círculo, el volumen se calcula multiplicando el valor de π por el radio al cuadrado y por la altura (SEP, 2008, pág. 205).

Proporcionalidad múltiple: se caracterizan porque dos o más cantidades se encuentran relacionadas con otra cantidad. Por ejemplo, cuando las medidas del ancho y la altura de un prisma rectangular permanecen fijas, la medida de su largo se encuentra en proporción directa con la medida de su volumen. Es decir, cuando se aumenta el doble o triple, etcétera, la medida del largo del prisma rectangular y la altura y el ancho permanecen fijos, la medida del volumen aumenta al doble o triple, etcétera (SEP, 2008, pág. 114).
Seno de un ángulo: relación que hay entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa del triángulo (SEP, 2008).
Segmento circular: no se encontró definición sobre este concepto matemático.
Sector circular: es una parte del circulo delimitada por un ángulo central (SEP, 2006, pág. 93).
Tangente de un ángulo: en trigonometría es una función y el valor de la tangente en un ángulo entre 0 y 360 grados se obtiene como la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. Es también el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente a un ángulo dado, es una razón, entonces a la tangente también se le llama “razón trigonométrica” (SEP, 2008, pág. 150)
Teorema de Pitágoras: en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa (SEP, 2008).
Razón trigonométrica: es el cociente entre dos de las medidas de los lados en un triángulo rectángulo. Estas razones pueden compararse, y cuando hay igualdad de razones entonces los triángulos rectángulos son semejantes (SEP, 2008, pág. 150).
Volumen: el espacio que ocupa un cuerpo, por lo tanto, entre capacidad y volumen existe una relación muy estrecha (SEP, 2014, pág. 45).

Debido a la importancia que tiene en este concepto en el desarrollo de nuestro trabajo, consideramos necesario mostrar a manera de ejemplo el tipo de problemas que se abordan al trabajar con este contenido matemático en el nivel de secundaria:


A lo que llegamos

Para resolver los siguientes problemas puedes usar tu calculadora o consultar el anexo 1 **Tabla de razones trigonométricas.**

1. A cierta hora del dia un edificio proyecta una sombra de 150 m sobre un punto en el piso formando un ángulo de 40° desde el punto en el piso hasta la parte más alta del edificio, como se muestra en el dibujo.

   ¿Qué altura tiene el edificio? ____________

Por otra parte, la continuación del conocimiento trigonométrico en la educación obligatoria se encuentra en el nivel medio superior de la siguiente manera (Bachillerato.DGB, 2013) :

Matemáticas II:
• Bloque VI: Describes las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. En el Bloque VI identificarás diferentes sistemas de medida de ángulos y describirás las razones trigonométricas para ángulos agudos. Finalmente, aplicarás las razones trigonométricas en ejercicios teórico-prácticos. • Bloque VII: Aplicas funciones trigonométricas. En el Bloque VII interpretarás y aplicarás las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, así como en el círculo unitario. • Bloque VIII: Aplicas las leyes de senos y cosenos. En el Bloque VIII aplicarás las leyes de los senos y cosenos. **Competencias disciplinares:** 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. 2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.

5. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.

Como podemos observar, la trigonometría, dentro de la educación obligatoria, se desarrolla de la siguiente manera. Primero se pretende que el alumno resuelva problemas relacionados con el triángulo rectángulo, utilizando para ello las razones trigonométricas. En el siguiente nivel el alumno tiene que describir las razones trigonométricas para resolver problemas sobre triángulos rectángulos.

Después de investigar sobre cómo se distribuyen en la educación obligatoria los temas relacionados con el conocimiento trigonométrico, surgió el interés por identificar cuáles son los significados de los objetos matemáticos (razones trigonométricas, funciones trigonométricas, entre otros) que ayudan al alumno a construir su conocimiento trigonométrico y que se promueven en el currículo, además de saber cuáles son los que se están promoviendo en el proceso de enseñanza, y sobre todo, cuál es el impacto que esta promoción tiene en el aprendizaje de los alumnos.

Por lo anterior, consideramos pertinente presentar, a manera de ejemplo, el tipo de actividades que se promueven en los libros de texto de matemáticas de secundaria cuando se trabaja con las razones trigonométricas:

Al analizar los problemas mayores a los que se refiere Freudenthal (1980), nos dimos cuenta que la situación antes descrita se corresponde con uno de los problemas mayores. Este problema el autor lo presenta mediante la siguiente pregunta: ¿cómo aprende la gente? Este cuestionamiento invita al docente a reflexionar sobre ¿cómo estoy enseñando? y ¿qué tan significativo resulta lo que enseño? Para él, saber cómo aprende la gente es una situación clave para poder entender qué estamos haciendo para las dificultades que se presentan para aprender, lo cual consideramos que es de suma importancia, tanto para el maestro como para el sistema educativo, ya que si se sabe cómo se aprende, se podrán proponer acciones que promuevan una enseñanza de calidad.

CAPÍTULO 3
REFERENTE TEÓRICO Y METODOLOGÍA.

En este capítulo se incluyen los referentes teóricos, los cuales se presentan en dos apartados, un primer apartado que se refiere a los elementos que sustentan el diseño de nuestra secuencia didáctica, y un segundo, en el cual se incluye el marco teórico que se utilizó para analizar la actividad matemática de los participantes. Además, se presentan las acciones metodológicas que se realizaron durante el desarrollo de nuestro proyecto.

3.1. REFERENTE TEÓRICO PARA EL DISEÑO.

Para realizar el diseño de la secuencia didáctica se ha tomado como base la metodología ACODESA (Hitt & Cortés, 2009), misma que retoma las premisas teóricas propuestas por Vergnaud en lo que refiere a los campos conceptuales, *"un concepto adquiere sentido para el sujeto a través de situaciones y problemas. El campo conceptual está constituido por problemas que permiten el desarrollo de un concepto, operaciones que son necesarias de utilizar para la resolución de esos problemas, dentro de un sistema matemático".*

Dicha teoría enfatiza la importancia de distinguir entre ejercicio, problema y situación problema, mismas que define de la siguiente manera:

Ejercicio: Si en la lectura de un enunciado matemático recordamos de inmediato un proceso o algoritmo a seguir para resolverlo, se dice que el enunciado es un ejercicio.

Problema: Si en la lectura del enunciado no recordamos un proceso o algoritmo directo a utilizar, y la situación nos obliga a producir representaciones que nos permitan ligar aspectos matemáticos no en forma directa sino a través de articulaciones entre representaciones y procesos de tratamiento al interior de los registros involucrados, diremos que ese enunciado es un problema.

Situación problema: La situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no debe ser explicitada en el enunciado.

La metodología ACODESA integra varias situaciones problema interrelacionadas unas con otras. En dicha metodología la manipulación de materiales y trabajo con papel y lápiz es sumamente importante.

Una de las principales características de la metodología es que toma en consideración las siguientes fases de trabajo:

1. Trabajo individual: en esta etapa se aborda de manera individual la situación propuesta y se producen las primeras representaciones funcionales, tiene la finalidad de que el estudiante comprenda la situación problema.

2. Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).

3. Debate. Proceso de discusión y validación entre los miembros de todo el grupo, que pudiera convertirse en un debate científico.

4. Auto-reflexión: en esta etapa se aborda de manera individual la situación propuesta y se reflexiona sobre las primeras representaciones funcionales.

5. Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales por parte del profesor.

Con el uso de la metodología antes descrita se pretende promover la producción de representaciones institucionales a través del tratamiento de las representaciones funcionales o espontáneas de los participantes. Las representaciones institucionales se definen como aquellas que se encontramos en libros de texto, en la web, o las que utiliza el profesor. Por otro lado, las funcionales son aquellas representaciones mentales que emanan de la actividad matemática no rutinaria que se expresa con una representación espontánea ligada a la acción.

La posición que los autores asumen sobre el uso de la tecnología en el aula de matemáticas es que éste, debe ser reflexivo, tomando en consideración el contexto matemático en donde se utiliza. Además de que el uso de la tecnología debe ayudar a la construcción de conocimientos.

Es importante destacar que dicha metodología ha sido probada por los autores en diferentes ambientes de aprendizaje y han obtenido resultados favorables.

3.2. REFERENTE TEÓRICO PARA EL ANÁLISIS.

Después de consultar diversos marcos teóricos propios de la didáctica de las matemáticas, se ha tomado la decisión de utilizar uno en particular, el denominado Espacios de Trabajo Geométrico (ETG) propuesto por Kuzniak y colaboradores, ya que dicho enfoque permite analizar e interpretar las situaciones áulicas en las que se involucran, principalmente, objetos matemáticos propios de la geometría, además aporta elementos teóricos que permiten entender los procesos de enseñar y aprender desde una perspectiva cognitivo-epistémica. Dicho marco retoma premisas teóricas propuestas por Duval en su enfoque de las Representaciones Semióticas, así como también los propuestos en la teoría de la Génesis Instrumental. Ante la evidente riqueza de herramientas teóricas que nos ofrece el enfoque de los ETG, resulta necesario investigar e interpretar cada uno de los conceptos que en éste se presentan.

Con la finalidad de entender las componentes teóricas y sobre todo la utilidad práctica de dicho enfoque, se ha realizado la siguiente interpretación (Kuzniak & Richard) de los conceptos, que se han considerado primordiales, de un Espacio de Trabajo Geométrico.

Conceptualización:

Espacio de trabajo matemático (ETM): ambiente pensado y organizado para el trabajo del individuo al resolver problemas matemáticos.

El ETM es un espacio que contempla los elementos de la actividad matemática en general, sin embargo, surgió de una de las ramas de la matemática, la geometría. Debido a la naturaleza de nuestro hemos decidido enmarcarlo en la particularidad de los Epacios de Trabajo Geométrico, mismos que a continuación se describen:

Espacio de Trabajo Geométrico ETG: es un ambiente organizado por y para el tratamiento de la geometría.

Espacio de Trabajo Geométrico idóneo ETG_i**:** organización y diseño de un proceso que permita a los alumnos comprometerse con la actividad de resolver problemas geométricos.

Espacio de Trabajo Geométrico personal ETG_p: es el tratamiento personal y local que un individuo le da a un problema geométrico.

Es importante aclarar que en el presente trabajo se analizarán los Espacios de Trabajo Geométrico idóneo y personal (ETGi, ETGp).

En cada uno de los espacios de trabajo matemático se pueden encontrar distintas componentes, las cuales van desde las cognitivas hasta las epistemológicas. Es por ello que estos espacios se conforman en dos planos; uno relacionado con los procesos cognitivos de la persona que está involucrada en la actividad matemática, que en nuestro caso serán los docentes de secundaria, la manera en la que se abordan los problemas, la noción misma de problema, los medios para resolverlos; y el otro que se refiere a los objetos matemáticos y su naturaleza.

¿Qué es un espacio de trabajo geométrico?

Es el ambiente organizado por y para el tratamiento de la geometría. Tiene como propósito integrar tres componentes fundamentales de la actividad matemática: los objetos matemáticos, los artefactos y los referentes teóricos del objeto matemático.

Dentro del Espacio de Trabajo Geométrico podemos encontrar, en el *Plano Epistemológico*:

Referencial: los conocimientos geométricos institucionales que se tomarán como referencia para el diseño de actividades, además el Plan y Programas de estudio que determinar qué es lo que se debe enseñar y cómo.

Instrumento: las herramientas de dibujo que permitirán la visualización de los objetos geométricos.

Espacio Real y local: lo que se utiliza como representación de los objetos matemáticos

Los teóricos de los ETG contemplan el estudio de un segundo plano denominado *Plano Cognitivo*, el cual tiene como objetivo comprender cómo comunidades de individuos, pero también individuos particulares, utilizan, le dan sentido y se apropian de los conocimientos durante su actividad matemática. Esta apertura hacia el campo cognitivo se debe realizar en estrecha relación con las componentes del nivel epistemológico y, con la finalidad de continuar en un marco didáctico, los autores de la teoría realizaron una adaptación del enfoque semiótico propuesto por Duval (1995, 2005), como resultado de dicha adaptación se presentan los siguientes tres procesos cognitivos fundamentales:

<u>Visualización extensa:</u> se debe distinguir de la simple visión o percepción de los objetos, y se puede considerar como el proceso de estructuración de las informaciones aportadas por los diagramas y los signos. Además, este proceso alimenta la intuición de las propiedades y, a veces, fundamenta cognitivamente la validez de estas propiedades.

<u>Construcción:</u> dependerá del uso que se le dé al instrumento y cómo éste permite que se lleve a cabo la representación y el tratamiento del objeto.

<u>Prueba:</u> forma parte de las argumentaciones y validación de conclusiones a las que se ha llegado, consiste en el proceso de validación de la solución o de la conjetura a la que se ha llegado.

Las componentes del Plano epistemológico y Plano cognitivo se complementan entre sí mediante tres génesis que a continuación se describen.

Génesis semiótica: proceso mediante el cual el sujeto, que está resolviendo problemas, se apropia, le otorga significado y funcionalidad a las representaciones semióticas de los objetos matemáticos. Para que el proceso de génesis semiótica pueda ocurrir, es necesario que se activen y relacionen distintos elementos, tanto del plano semiótico (visualización, representaciones, tratamiento, significados) como del epistémico (objetos matemáticos y sus representaciones).

Dicho proceso no ocurre de manera espontánea dentro del salón de clase, es por ello que el docente deberá estudiar y organizar todos los elementos que se relacionan en el Espacio de Trabajo Geométrico idóneo.

Génesis instrumental: el proceso mediante el cual un artefacto (instrumentación) se convierte en instrumento (instrumentalización). Dicho proceso se da cuando la persona que está usando el artefacto, con la finalidad de resolver un problema, es capaz de mejorar el funcionamiento prescriptivo del artefacto.

Génesis discursiva: proceso de interpretación y validación de los referentes teóricos, que permitirá manejar la información y comunicar los resultados.

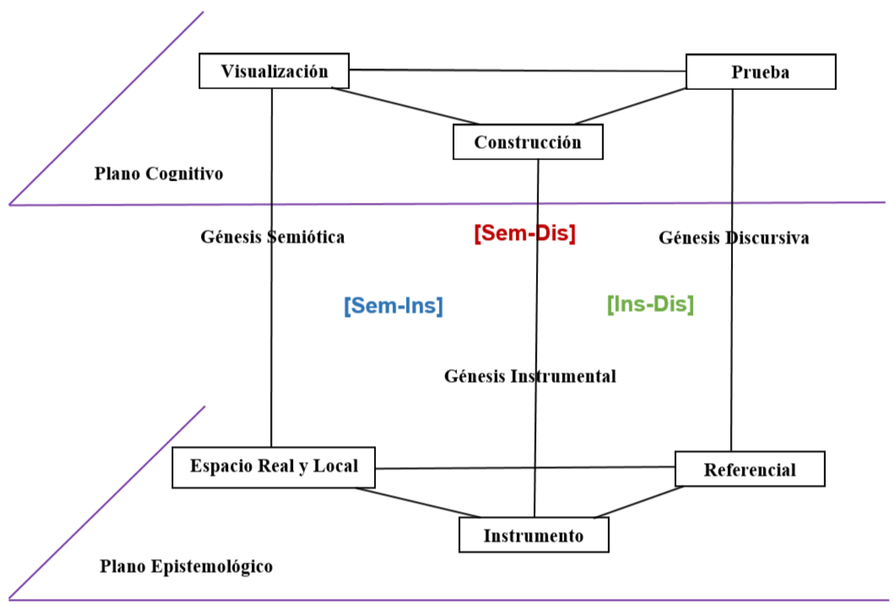
Todas estas génesis son las que mantienen y provocan que se dé la comunicación entre el plano epistémico y el cognitivo, a su vez dichas génesis se relacionan mediante los siguientes procesos cognitivos:

Descubrimiento y exploración [Sem-Ins]: Un primer tipo de interacciones con objeto de desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos privilegia la identificación y la exploración de los objetos apoyándose en las génesis semiótica e instrumental.

Justificación y razonamiento [Ins-Dis]: un segundo tipo de interacciones desarrolla el razonamiento matemático, fundado en la justificación de los descubrimientos, articulando las génesis instrumental y discursiva.

Presentación y comunicación [Sem-Dis]: un último tipo está orientado hacia la comunicación matemática de los resultados y se apoya esencialmente en las génesis semiótica y discursiva.

Diagrama de Espacio de Trabajo Geométrico



Paradigmas geométricos:

Trabajar en el campo de la geometría implica tener en cuenta que existen, por lo menos, tres paradigmas sobre la manera en que se abordan los problemas de este tipo, los cuales determinaran la naturaleza de los componentes que integran los Espacios de Trabajo Geométrico.

Paradigma geométrico:

"Un *paradigma geométrico* es *la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y* *distinguir las diferentes entidades constitutivas de la geometría puesta en juego*." (Montoya E. , pág. 5)

Es decir, la manera de aprender geometría o de abordar los problemas geométricos dependerá del paradigma geométrico en el que se haya formado el geómetra[1].

Tipos de paradigmas geométricos:

Geometría natural (GI): en esta geometría los objetos matemáticos son concretos y además producto de las representaciones reales que les da el sujeto. El proceso que la define podría ser experimentación-deducción, con un componente de intuición. Para validar basta con la visualización de las pruebas.

Geometría axiomática natural (GII): los objetos matemáticos son abstracciones y se demuestra bajo una hipótesis.

Geometría axiomática formalista (GIII): los objetos geométricos provienen de un sistema de axiomas, y para validar es imprescindible la utilización de demostraciones axiomáticas.

En el análisis de la puesta en escena se utilizará la teoría de los Paradigmas Geométricos para definir en cuál de los tres paradigmas se desarrolló el Espacio de Trabajo Geométrico personal.

3.3. ACCIONES METODOLÓGICAS.

Después de plantear los objetivos que se pretenden lograr durante el desarrollo de este proyecto, se decidió establecer una serie de acciones que contribuyeran a alcanzar dichos objetivos:

- Identificar la problemática que se estudiará.
- Definir los elementos que justifiquen la pertinencia de nuestro trabajo.
- Plantear los objetivos que se persiguen con la elaboración de este proyecto.

[1] Persona que resuelve problemas de geometría.

- Analizar las investigaciones que se hayan realizado anteriormente, para que formen parte de nuestros antecedentes de investigación.
- Identificar en el currículo oficial el tratamiento que se le da a las razones trigonométricas, con la finalidad de tener una perspectiva general de la manera en la que los docentes de secundaria trabajan dicho contenido.
- Elegir y analizar el marco teórico que sustenta nuestro trabajo.
- Diseñar la propuesta didáctica tomando como marco referencial la metodología de diseño seleccionada.
- Planear una primera puesta en escena, con la finalidad de identificar las debilidades de la propuesta.
- Reportar la primera puesta en escena.
- Planear una segunda puesta en escena, con la finalidad de caracterizar y analizar la actividad matemática de los docentes.
- Analizar bajo una perspectiva teórica la actividad matemática de los participantes.

ENERO DE 2017

CAPÍTULO 4
DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

4.1. LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo se presenta una descripción de la propuesta didáctica, mediante los elementos principales que la caracterizan, declarando el objetivo general y específicos de la misma, así como los elementos necesarios de planeación para su puesta en escena, como son el tiempo estimado para su desarrollo, materiales y recursos necesarios. También se describen las diferentes fases de la metodología ACODESA consideradas en el diseño y en su implementación, además se incluyen orientaciones pedagógicas como ayuda para una posible réplica.

La propuesta didáctica está compuesta por tres secuencias didácticas de contexto extra-matemático en las cuales se retoman los principios fundamentales de la metodología ACODESA. La secuencia didáctica 1 se denomina “Cálculo de volúmenes”, la secuencia didáctica 2 “Los cortes del carpintero” y la secuencia didáctica 3 “La altura máxima del paso a desnivel”

Cada una de las secuencias involucra al docente resolutor en situaciones problema, bajo la definición que propone ACODESA, de contexto extra-matemático en las cuales necesita poner en práctica sus conocimientos sobre trigonometría y geometría para poder resolverlos, cada uno de los contextos que se incluyen fueron analizados con la finalidad de poder utilizarlos en el planteamiento de problemas sobre razones trigonométricas.

El objetivo general de la propuesta es:

- Promover que los docentes analicen, discutan y resuelvan situaciones problema de contexto extra-matemático utilizando herramientas trigonométricas.

Y para el logro de este objetivo se plantean los siguientes objetivos específicos. Se espera que el participante**:**

- Identifique las variables que intervienen en la situación problema, a través del uso de manipulables.
- Establezca relaciones entre las variables que intervienen en las situaciones.
- Utilice el software GeoGebra para manipular y visualizar las situaciones planteadas.
- Modele geométricamente situaciones problema.
- Realice reflexiones de corte didáctico sobre las características de la situación planteada.

A continuación, se presentan las principales características de las secuencias didácticas diseñadas:

a) Abordan problemáticas de contexto extra-matemático.
b) Para su desarrollo es necesario el uso del software GeoGebra.
c) Incluyen materiales manipulables.
d) Al finalizar cada secuencia, se promueve la reflexión matemática y didáctica.

Cada una de las secuencias se divide en tres secciones, Inicio, Desarrollo y Cierre, dicha estructura se retoma de lo que se propone en el Programa de Matemáticas 2011.

El contenido matemático que se pretende desarrollar es razones trigonométricas (seno, coseno y tangente de un ángulo), sin embargo, por la naturaleza de las situaciones se presentan conceptos como, área, volumen, proporcionalidad, teorema de Pitágoras, ángulos, distancia euclidiana, congruencia.

Se recomienda a los futuros aplicadores que antes de poner en escena la actividad realicen un análisis de la misma, que la resuelvan y reflexionen sobre las preguntas planteadas. Además, es importante mencionar que las orientaciones que aquí se han mostrado son producto de ciertas reflexiones basadas en las recomendaciones propuestas en la metodología de diseño que se ha utilizado, sin embargo, no constituyen una camisa de fuerza para el aplicador, ya que éste tiene la plena libertad de realizar los cambios que considere conveniente según la situación que se le presente.

Secuencia didáctica 1: "Cálculo de volúmenes"

Objetivo de la secuencia: que el docente modele geométricamente el problema de calcular el área de un segmento circular, utilizando para ello sus conocimientos sobre trigonometría.

-Población a la que está dirigida: docentes de matemáticas de nivel básico, en formación y en servicio.

-Tiempo estimado para su desarrollo: 200 minutos (cuatro sesiones de 50 minutos cada una).

-Materiales y recursos necesarios: cuadernillo de actividades, lápiz, calculadora, caja de cartón en forma de prisma rectangular, arroz, proyector, computadora para cada docente.

-Contexto en el que se desarrolla la actividad: Como sabemos, la trigonometría es una herramienta potente para el cálculo de distancias a las que no tenemos acceso de manera directa, pero que podemos calcular conociendo ciertas medidas que están a nuestro alcance, un claro ejemplo de ello es que, utilizando herramientas de lo que hoy se conoce como trigonometría, Aristarco de Samos obtuvo una buena aproximación de la distancia que hay entre la tierra y la luna. En esta actividad la naturaleza del problema responde a la necesidad, como en el ejemplo anterior, de conocer una medida a la que no se tiene acceso de manera directa pero que es posible conocer utilizando las herramientas trigonométricas, se trata de calcular cuánta carga transporta un camión, cuyo contenedor tiene forma de cilindro circular recto, a partir de conocer las dimensiones del mismo.

Sección de inicio:

Cálculo de volúmenes

Desde tiempos remotos, el cálculo de volúmenes ha sido uno de los contenidos matemáticos más prácticos, debido a su campo de aplicación, ya que es fácil encontrar un contexto extra-matemático en el cual sea necesario calcular el volumen de alguna mercancía o la capacidad de algún objeto, la naturaleza de los problemas, en la mayoría de los casos, exige que se conozca la fórmula que permiten calcular el volumen.
Por lo anterior, es común creer que para resolver problemas matemáticos en los que se involucre el cálculo de volúmenes, basta con recordar y aplicar las fórmulas, pero, qué pasa cuando no conocemos las fórmulas, cuando no basta con aplicarlas, ¿el problema de calcular volúmenes tendrá solución?

Actividad 1.
Calculando la cantidad de arroz que hay en la caja

A continuación, se presentan una serie de actividades en las que se propone calcular diferentes volúmenes contenidos en diferentes recipientes

En equipo, trabaje con la caja de cartón, el arroz y la regla, que serán proporcionadas por el instructor. Ponga dentro de la caja cierta cantidad de arroz y distribúyalo de manera uniforme.

a) Calculen la capacidad de la caja (cm^3)
b) Calculen el volumen de arroz que hay en la caja
c) Expliquen el procedimiento utilizado para calcular el volumen de arroz
d) ¿Qué relación encuentran entre las medidas de la caja y las medidas que utilizaron para calcular el volumen de arroz que hay en la caja?
e) Suponiendo, que el área que cubre el arroz en una de las caras de la caja es de 30 cm2, ¿cuál es el volumen de arroz que contiene la caja que usted tiene?

Características del diseño (ACODESA):

Se inicia con una actividad en la cual no estarán involucrados los conocimientos trigonométricos, ya que se pretende que los docentes, analicen el contexto en el que se desarrolla la actividad y que quedan claros los términos técnicos que están involucrados.

Como se puede observar se inicia con la fase de *trabajo individual*, que se refiere a la lectura de la parte inicial, posteriormente en la Actividad 1, se inicia con el *trabajo en equipo* ya que la actividad requiere que se trabaje con un manipulable y consideramos que para que emerjan las primeras representaciones funcionales necesitan compartir ideas y procedimientos relacionados con el cálculo de volúmenes y que además propongan diferentes métodos de medición.

En esta primera actividad se trabaja con una caja de cartón en forma de prisma rectangular, dicha caja contendrá arroz, el objetivo es que calculen la cantidad de arroz que hay en la caja, los maestros la tendrán a su alcance y podrán tomar las medidas que necesiten, con esta actividad se pretende que los docentes muestren sus primeras representaciones funcionales sobre el cálculo de volúmenes, por ejemplo que expresen que para calcular volúmenes es necesario solamente tener tres medidas lineales, en todos los casos, sin tomar en cuenta que hay situaciones de cálculo de volumen en las que no es suficiente contar con tres medidas.

Se tomó la decisión de incluir esta actividad, ya que promueve que el docente participante comprenda el contexto en el que se desarrolla la secuencia, es por ello que se le pide que calcule el volumen de arroz que hay en la caja, lo esencial es que pongan especial atención en el método que están utilizando para tomar las medidas que necesiten, ya que en actividades posteriores utilizar dicho método es de gran importancia.

Actividad 2.

Calculando el volumen de carga que transporta un camión

a) Se necesita calcular la cantidad de trigo que transporta el camión de la Figura 1, sabemos que la capacidad de la caja es de 30 m³ y que la caja no está llena. Si la caja no está llena, y suponiendo que el trigo está distribuido de manera uniforme De manera individual, responda:
1. ¿Cuáles medidas necesitamos para calcular el volumen que ocupa el trigo dentro del camión?
2. ¿Cómo podemos obtener dichas medidas?

Figura 1

b) Si como se dijo al inicio, la capacidad de la caja es de 30 m³, y además sabe que mide 2.4m de ancho y 2.5m de alto
1. ¿Qué medida necesitamos para conocer la cantidad de trigo que trae la caja?

c) Si la altura que alcanza el trigo dentro de la caja es de 1.5 m
1. Realice un dibujo que represente la situación

2. ¿Cómo es la relación entre el área de una de las caras frontales de la caja y el área que ocupa el trigo en esa cara?

d) Calcule la cantidad de trigo que hay en el camión en cada uno de los siguientes casos:

Altura que alcanza el trigo dentro de la caja del camión.	Área que cubre el trigo en la tapa.	Porcentaje de área de la tapa que cubre el trigo	Cantidad de trigo (m³)	Porcentaje de espacio que ocupa el trigo dentro de la caja
1.75m				
1 m				
x m				
2. 5 m				

e) ¿Fue necesario conocer todas las medidas de la caja para determinar la cantidad de trigo?

La caja contenedora del camión tiene forma de prisma rectangular, pero algunos camiones que transportan líquidos, conocidos como camiones cisterna (popularmente llamados “pipas”), cuentan con un contenedor cilíndrico. ¿Podríamos aplicar el procedimiento anterior para calcular el volumen de agua en una pipa que no está completamente llena?

Características del diseño (ACODESA):

La Actividad 2 pretende que el participante, de manera *individual*, nuevamente realice cálculo de volúmenes, sin embargo, en está ocasión no cuenta con manipulables, por lo tanto, tiene que realizar una abstracción de la situación planteada.

En esta actividad se sigue trabajando con las representaciones funcionales, ya que por métodos propios el participante tendrá que resolver el problema, además se da un primer indicio de la auto-reflexión al momento de regresar a los métodos y técnicas utilizados para resolver el problema de la caja de cartón.

En el inciso **e** de la **Actividad 2** se pretende que el participante establezca relaciones de variación proporcional entre las dimensiones que alcanza el trigo dentro de la caja del tráiler y el volumen de trigo, de las relaciones que establezca entre las dimensiones dependerá la manera en la que solucione la problemática planteada en la sección de desarrollo.

Después de la pregunta **1** del inciso **e**, se incluye una reflexión sobre lo que se realizó en la **Actividad 2**, la cual tiene la intención de provocar un primer *debate* entre los miembros del grupo, ya que podrán ofrecer sus argumentos sobre la respuesta a la pregunta, dicho debate quedará suspendido y podrán continuar y terminarlo después de realizar la actividad de desarrollo.

Hasta este momento la actividad matemática se ha planeado de manera casi exclusiva para los participantes, ya que como se menciona en ACODESA, durante las primeras cuatro fases la intervención del docente (como guía de la actividad) es muy poca y su papel fundamental se desarrolla en la fase de institucionalización.

Sección de desarrollo

Actividad 3
Volumen de agua contenida en una pipa

a) Se tiene una pipa cuyo contenedor tiene forma de cilindro circular recto, como la que se muestra en la Figura 2, la cual cuenta con una capacidad es 15 m^3 aproximadamente y el diámetro de la cisterna mide 2m. Suponiendo que la pipa no está llena:

1. ¿Cómo podríamos calcular el volumen que ocupa el agua? Justifica tu respuesta

Figura 2

2. Suponiendo que la altura que alcanza el agua dentro de la pipa es 0.75m, haga el dibujo de la vista trasera de la pipa, en el que se muestre el nivel que alcanza el agua.
3. Haga una estimación del área que representa el agua en su dibujo.
4. ¿Qué relación encuentras entre el área que estimó y la cantidad de agua que contiene la pipa?
5. Use el área que estimó para calcular el volumen de agua que contiene la pipa.
6. En plenaria, analicen los resultados obtenidos en la indicación anterior.

b) Construya en GeoGebra una representación de la vista trasera de la pipa, en la que pueda hacerse variar la altura del agua entre 0m y 2m

1. Con las herramientas que proporciona GeoGebra, calcule el área que representa el agua en su modelo
2. ¿Cómo es la estimación que usted hizo en comparación con la que hizo GeoGebra?
3. A continuación, intentaremos encontrar un método analítico que permita calcular el área mojada y en consecuencia poder obtener el volumen de agua para cualquier altura h. En equipo, realice lo siguiente:
4. Si el nivel del agua alcanza una altura *h,* exprese el área mojada en términos de h:
5. De no poder expresarlo en términos de h, expréselo en función del cálculo de áreas que le resulten más familiares:
6. Calcule el área mojada para cada uno de los siguientes valores de h, utilizando la expresión algebraica:

Valor de *h*	Área mojada
0.5m	
1m	
1.5m	
1.75m	

Características del diseño (ACODESA):

La **Actividad 3** inicia con la fase de auto-reflexión, ya que los participantes tendrán que regresar a la pregunta próxima anterior, con la finalidad de proponer un método efectivo para calcular el volumen de agua que transporta la pipa.

Las preguntas correspondientes al inciso **a** tienen como objetivo que los participantes empiecen a evidenciar los primeros cambios en sus representaciones funcionales. Se pretende que los docentes propongan el método de calcular el área que se encuentra mojada en la parte trasera de la pipa, tomando en cuenta lo que realizaron en la actividad de inicio, para ello necesitan conocer la altura a la que llega el agua la cual pueden obtener por distintos métodos.

El objetivo de la pregunta **1** es que se identifiquen las diferencias entre las formas de los contenedores y lo que esto implica en la resolución del problema. En este momento es posible que se presente la idea de calcular el área del segmento circular lo cual no es correspondiente a calcular el área de un rectángulo como en la actividad anterior.

La pregunta **2** muestra un caso particular en el cual hay que calcular la cantidad de agua que transporta la pipa, se pide que los docentes hagan una representación gráfica de la situación planteada ya que es importante que organicen los datos y que tracen un plan que les permita calcular el área del segmento circular.

En la pregunta **3** y **4** se pretende que los docentes empiecen a proponer métodos para calcular el área del segmento circular, es posible que empiecen a hacer trazos sobre el dibujo y que intenten calcular el área por métodos geométricos, en este momento es donde empiezan las complicaciones, ya que tendrán que empezar a utilizar las herramientas geométricas y trigonométricas.

La intención de las preguntas **5** y **6** del inciso **a** es que se realice la *fase de debate* en la cual los participantes presenten argumentos sobre los resultados obtenidos, con la finalidad de confrontar las diferentes soluciones y determinar cuál es la más pertinente, a partir de esta fase, es posible que se empiecen a notar los cambios en las representaciones funcionales y que empiecen a evidenciar un acercamiento a las primeras representaciones institucionales.

En el inciso b se solicita que calculen el área mojada utilizando el software GeoGebra, es importante señalar que dicho software no cuenta con una herramienta que permita calcular el área de segmentos circulares, es por ello que el docente tendrá que realizar trazos auxiliares que le permitan calcular el área a través de la suma o resta de áreas compuestas. Se pretende que en esta actividad los docentes identifiquen en función de qué las magnitudes están variando y que realicen procesos iniciales de generalización que les permitirán modelar la expresión algebraica de la situación.

Durante esta actividad es importante que el aplicador realice preguntas que permitan al docente iniciar con un proceso previo a la generalización. Por ejemplo ¿qué datos se mantienen constantes? ¿en función de qué se está calculando el área? Por otro lado, puede recomendar o promover que se dejen las operaciones suspendidas con la finalidad de obtener una expresión que permita calcular el área para cualquier valor de h.
El inciso **d** promueve la última etapa de la *auto-reflexión*, ya que para resolverlo habrá que reflexionar sobre lo realizado en las actividades anteriores, es decir, tomar en cuenta las relaciones de proporcionalidad, la descomposición de áreas, el cálculo del seno y coseno de un ángulo, así como el cálculo de volúmenes.
Los incisos **e, f** y **g,** tienen una doble intención, ya que se pretende que durante su ejecución se promueva una última *fase de debate* en la que se lleguen a las conclusiones a través de la confrontación de ideas y procedimientos matemáticamente fundamentados, en el nivel que se está trabajando.

Además, se promueve la *fase de institucionalización,* en la cual el instructor generaliza las ideas geométricas expuestas por los participantes y da a conocer, en caso de que no se sepa, que el área mojada en este caso recibe el nombre de segmento circular, y que una de las expresiones algebraicas que modelaron el problema corresponde a la fórmula para calcular el área de dicho sector.

En la Actividad 3 los participantes concluyen con su actividad matemática para continuar con una serie de preguntas que promueven la institucionalización de los contenidos matemáticos, para finalizar se incluye un apartado en el que se les presentan un cuestionario que tiene como objetivo promover la reflexión de los docentes en términos didácticos.

Sección de cierre

Reflexionando sobre lo que aprendimos

Sobre el contenido matemático

a) De manera individual realice lo siguiente:

1. ¿cuál es el nombre geométrico que reciben las figuras que tienen una forma similar a la que se ha nombrado área mojada?
2. Calcule el área de color azul, Figura 3:

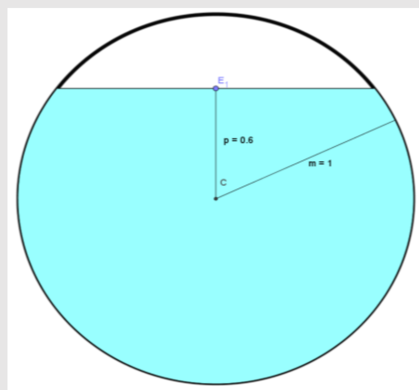


Figura 3

b) En equipo, expongan y justifiquen la expresión analítica que obtuvieron

1. ¿Consideran que la expresión que obtuvieron funciona para calcular el área de cualquier segmento circular? Justifique su respuesta

Sobre la secuencia didáctica:

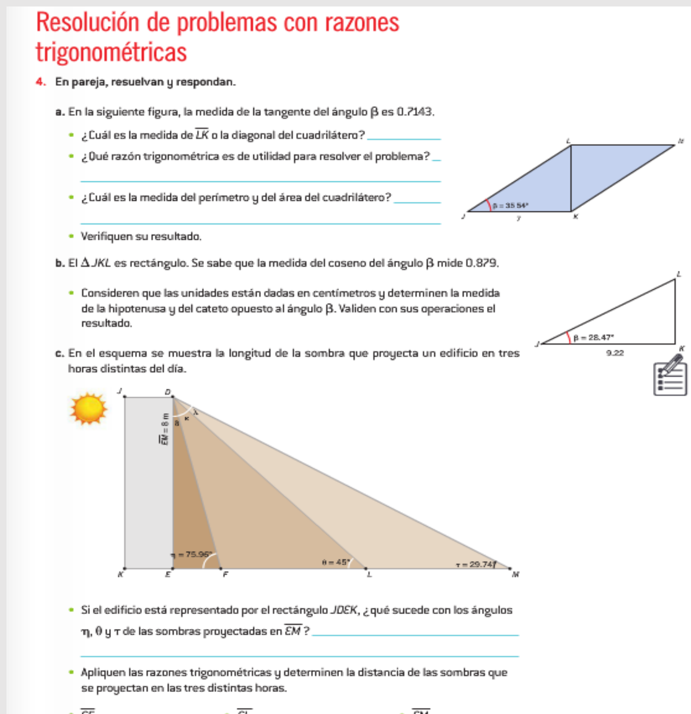
a) De manera individual, realice lo siguiente:

1. Describa el proceso del trabajo que realizó durante la secuencia.
2. Mencione cuales, de las cuatro competencias que se proponen en el Programa de Matemáticas para Secundaria 2011, se promueven en esta secuencia didáctica.
3. ¿Cuál competencia se promueve en cada actividad y de qué manera?
4. ¿Qué sección presentó mayores retos al momento de resolverla?
5. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los conocimientos matemáticos?
6. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los recursos tecnológicos?
7. ¿Considera de utilidad el uso de manipulables? ¿Por qué?
8. ¿Qué aspectos le resultaron más interesantes de la secuencia didáctica? ¿Por qué?
9. ¿Qué opina del uso que se les dio a las razones trigonométricas?
10. ¿Qué opina de los contextos que se presentaron durante el desarrollo de la secuencia?

11. Si tuviera que dar una clase a sus alumnos de secundaria con esta secuencia, ¿cuáles serían las modificaciones que haría?

b) En equipo, realicen lo siguiente.

1. A continuación, se presenta una de las actividades que se proponen en un libro de matemáticas de 3° de secundaria sobre el tema de razones trigonométricas, resuelva la actividad que ahí se propone:



Resolución de problemas con razones trigonométricas

4. En pareja, resuelvan y respondan.

a. En la siguiente figura, la medida de la tangente del ángulo β es 0.7143.

- ¿Cuál es la medida de $\overline{LK}$ o la diagonal del cuadrilátero? ______
- ¿Qué razón trigonométrica es de utilidad para resolver el problema? ______
- ¿Cuál es la medida del perímetro y del área del cuadrilátero? ______
- Verifiquen su resultado.

b. El ΔJKL es rectángulo. Se sabe que la medida del coseno del ángulo β mide 0.879.

- Consideren que las unidades están dadas en centímetros y determinen la medida de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo β. Validen con sus operaciones el resultado.

c. En el esquema se muestra la longitud de la sombra que proyecta un edificio en tres horas distintas del día.

- Si el edificio está representado por el rectángulo $JDEK$, ¿qué sucede con los ángulos η, θ y τ de las sombras proyectadas en $\overline{EM}$? ______
- Apliquen las razones trigonométricas y determinen la distancia de las sombras que se proyectan en las tres distintas horas.
- $\overline{EF}$ ______ • $\overline{EL} =$ ______ • $\overline{EM} =$ ______

2. En plenaria, discutan sobre las diferencias entre el uso de las razones trigonométricas que se promueve en esta actividad y el que se promueve en la secuencia de “Cálculo de volúmenes”, ¿cuáles son esas diferencias?

c) De manera individual, responda:

1. Considera que la forma de trabajo que se propone en la secuencia de “Cálculo de volúmenes” funcionaría con sus alumnos. ¿Por qué?

Características de la actividad:

La actividad de **Cierre** tiene como objetivo que se realice la fase de *institucionalización,* a través de las reflexiones Sobre el contenido matemático, ya que es ahí donde se promueve que el participante verifique la validez de la expresión matemática obtenida y que a partir de ello sea capaz de generalizarla como la fórmula para calcular el área de un segmento circular.

En la sección de reflexionando Sobre la secuencia didáctica se pretende lo siguiente:

1. Analizar la pertinencia de la secuencia: saber cuáles preguntas o indicaciones están mal redactadas o confusas, en qué momentos se presentaron mayores dificultades y conocer la causa.
2. Que los docentes reflexionen en los siguientes aspectos: sobre la manera en la que se usan los conocimientos matemáticos, la forma en la que se presentan los problemas, el uso que se le da a la tecnología, la variedad de métodos de resolución de problemas, la variedad de campos de aplicación que tienen los contenidos matemáticos, las dificultades que pueden presentarse al resolver los problemas, así como la confrontación entre lo que presentan los libros de texto y la secuencia con la finalidad de que tengan a su alcance una manera diferente de diseñar actividades.

Características del diseño (ACODESA):

Como se puede observar en un primer momento los participantes responden de manera individual, después en equipo y posteriormente discuten en plenaria. Para finalizar realizan un proceso de auto-reflexión en el cual tienen que tomar en cuenta la forma de aprender de sus alumnos.

Esta última actividad también fue diseñada tomando en cuenta las fases de trabajo que se proponen en ACODESA, a pesar de no tratarse de una actividad matemática, ya que consideramos que las características de diseño que se proponen en la metodología funcionan para cualquier actividad de enseñanza y de aprendizaje.

Secuencia didáctica 2 “Los cortes del carpintero”

Objetivo de la secuencia: que el docente identifique la relación entre la variación de los márgenes de error en función de los ángulos que se forman entre dos segmentos de recta, utilizando para ello sus conocimientos sobre trigonometría y geometría.

-Contenido matemático que se trabaja:

Explícito: trigonometría.

Implícito, debido a la naturaleza de la situación: bisectriz de un ángulo, distancia entre dos puntos, teorema de Pitágoras.

-Población a la que está dirigida: docentes de matemáticas de nivel básico, en formación y en servicio.

-Tiempo estimado para su desarrollo: 100 minutos (dos sesiones de 50 minutos cada una).

-Materiales y recursos necesarios: cuadernillo de actividades, regla graduada, transportador, hojas de foami, hojas de cartón, equipo de cómputo, software GeoGebra.

-Contexto en el que se desarrolla la actividad: para la mayoría de las personas, el uso de las razones trigonométricas se limita a resolver triángulos, sin embargo, en esta secuencia estamos involucrando al docente en la actividad de trabajar con la madera, específicamente en la precisión de los cortes que se hacen sobre este material, para ello incluimos una actividad en la que se tengan que realizar dichos cortes sobre hojas de papel que simulen los cortes de la madera y que a partir de esto determinen por qué es tan importe la precisión en los cortes y cuáles son los contenidos matemáticos que están involucrados o que justifican dicha precisión.

Sección de inicio:

Los cortes del carpintero

Como es bien sabido el oficio de la carpintería consiste en trabajar con la madera, por ejemplo, para construir puertas, ventanas o muebles.

A las personas que elaboran objetos de carácter más decorativo que utilitario se les ha nombrado ebanistas. Al observar la mayoría de las obras realizadas por ebanistas, podemos apreciar objetos muy detallados y estéticos, es por ello que en la fabricación de estos muebles los cortes deben ser muy estéticos.

Actividad 1

a) Las siguientes imágenes muestran algunos muebles elaborados por ebanistas:

1. ¿Qué herramientas usadas por los ebanistas conoces?
2. ¿Qué tipos de cortes se le hacen a la madera para hacer los diferentes muebles? Dibújelos
3. ¿Qué herramientas de trabajo utiliza un ebanista para cortar la madera con mayor precisión?
4. Identifique y describa alguna fundamentación matemática que considere se encuentra tras los procedimientos que utiliza el ebanista para hacer los cortes.

Características del diseño (ACODESA):

La actividad de Inicio tiene el objetivo de introducir a los participantes en el contexto que se abordará, dicha etapa se trabaja en la *fase individual,* con las preguntas **1, 2, 3, 4** y **5** se espera que surjan las primeras representaciones funcionales de los participantes.

Además, se pretende que se ponga especial atención en los tipos de cortes que se hacen sobre la madera, ya que la secuencia se centra en el estudio de dichos cortes y la actividad matemática que ahí podemos identificar.

Sección de desarrollo

Desarrollo

Actividad 2

a) Suponga que en su casa se está construyendo la cocina integral que usted puede ver en la imagen:

Para construir las cubiertas dispone de dos tablas de formicas en forma de rectángulo que miden 60cm de ancho por 2m de largo.

Para cubrir la esquina de la cocina, los ebanistas podrían cortar las formicas de las muchas maneras diferentes, las siguientes imágenes muestran algunas de estas posibilidades:

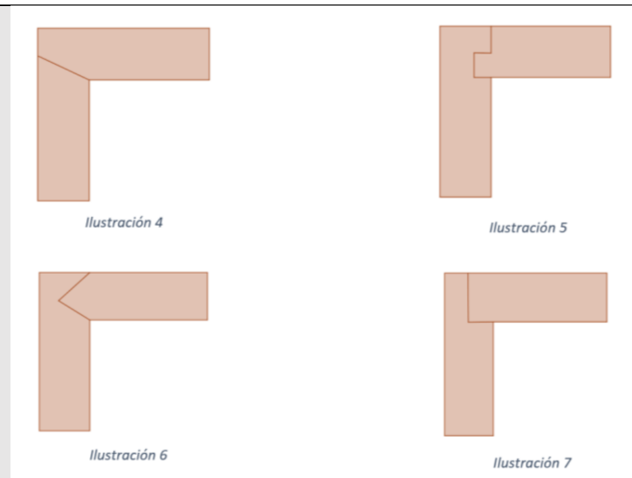


Ilustración 4

Ilustración 5

Ilustración 6

Ilustración 7

Sin embargo, el corte más común por cuestiones de estética es el siguiente:

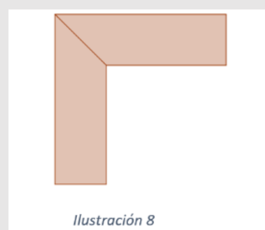


Ilustración 8

A continuación, el instructor le proporcionará dos plantillas que representan las formicas a una escala de 1:10 cm y una hoja en la que se representa la esquina de la cocina sobre la cual pegará ambas plantillas:

a) Realice cortes sobre las plantillas y colóquelas sobre la hoja, de tal manera que pueda representar la situación de cubrir la cocina
b) Ambas plantillas ya ensambladas, ¿lucen estéticas?
c) Describa el procedimiento que utilizó para trazar los cortes
d) Compartan y analicen los diferentes procedimientos que utilizaron para realizar los cortes

b) Reunidos en equipo, completen la siguiente tabla. (El instructor le proporcionará plantillas para que simule las siguientes situaciones tomando en cuenta que estamos trabajando con el corte más común).

Ángulo de corte Formica 1	Ángulo de corte Formica 2	Diferencia entre las longitudes de los cortes
30°		
40°		
	55°	
		5 cm

1. Las situaciones representadas, ¿lucen estéticas?
2. ¿De qué depende que luzcan o no estéticas?

c) Calcula las medidas que tendrán las formicas en cada uno de los siguientes casos:

Ángulo de corte Formica 1	Medida del corte (cm)	Ángulo de corte Formica 2	Medida del corte (cm)	Diferencia entre los cortes
48°				
				10 cm
		47°		
X°				
		63°		

1. Presenten los resultados obtenidos ante el grupo y de ser necesario realice adecuaciones en los datos de la tabla.

d) De manera individual, diseñe una aplicación en GeoGebra que le permita manipular la situación antes planteada y responda las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál sería el máximo error en el corte que a usted le parecería aceptable como usuario? ¿Por qué?
   b) ¿Existe un ángulo de corte que garantice que el margen de error sea cero? Justifique su respuesta
   c) ¿Cuál es la recta que se forma cuando el margen de error es 0?

Características del diseño (ACODESA):

La Actividad 2, se inicia presentando una problemática que se refiere a terminar una cocina integral, posteriormente se define cuál es el tipo de corte que van a estudiar y a partir de ello se realizan las actividades posteriores.

En la ejecución del inciso **a,** específicamente en las preguntas **2** y **3** se continua en la *fase individual,* se propone resolver el problema planteado a través del uso de manipulables, para ello el participante contará con todos los materiales sobre los que tiene que realizar los cortes, es probable que tenga fallas al momento de ensamblar las formicas de papel, sin embargo, estas fallas resultarían explicables en virtud de que no cuentan con un método apropiado para hacer los cortes.

Por otra parte, la pregunta **4** tiene el objetivo de que el participante reflexione sobre lo que hizo para realizar los cortes y que empiece a notar cuál es el tipo de corte que garantiza que las formicas luzcan estéticas.
En el inciso **b** se lleva a cabo la *fase de trabajo en equipo,* donde se refina la idea de que el ángulo de corte determina la precisión en el mismo, se pretende que dentro del equipo se realicen las primeras conjeturas y que se utilicen las razones trigonométricas como una herramienta para calcular distancias.

El inciso **c** promueve la generalización, al incluir en la tabla el cálculo de diversas longitudes en función de x, la indicación **1** promueve la *fase de debate,* en la que se tendrán que presentar los resultados de la generalización y discutir las ideas y los argumentos, la intervención del instructor consistirá en guiar la presentación y confrontar entre los integrantes del grupo los resultados obtenidos en cada equipo.

La *fase de auto-reflexión* e *institucionalización* se promueve en el inciso **d**, ya que se pide al participante que confronte los resultados que arroja el software con lo que ha realizado, por otra parte, el instructor promueve la *institucionalización* a través de las últimas dos preguntas, donde se pretende que los participantes institucionalicen sus representaciones y determinen que el ángulo de corte que garantiza la estética en los cortes es el que está delimitado por la recta bisectriz.

Sección de cierre

Reflexionando sobre lo que aprendimos

Sobre el contenido matemático

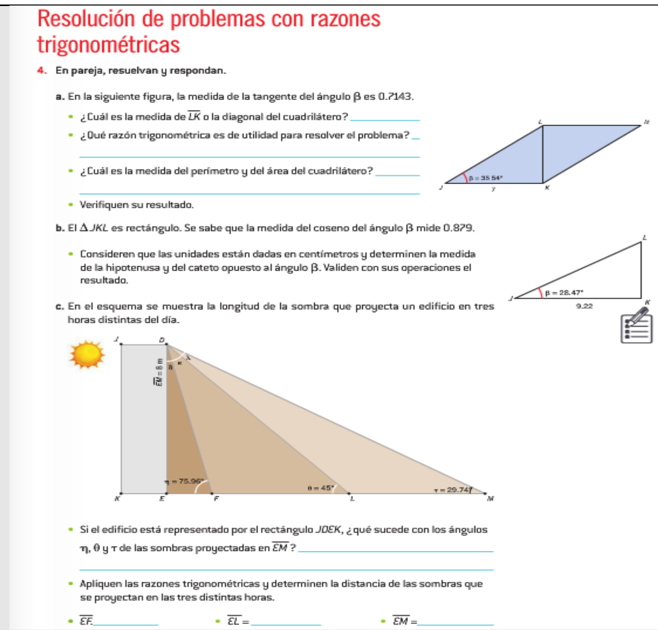
a) De manera individual realice lo siguiente:
1. ¿Cuál es el nombre geométrico que recibe la recta sobre la cual se realiza el corte, cuando el margen de error es cero?

b) En equipo, expongan y justifiquen la expresión analítica que obtuvieron
1. ¿Consideran que la expresión que obtuvieron funciona para calcular el error en cualquier tipo de corte? Justifique su respuesta

Sobre la secuencia didáctica:

a) De manera individual, realice lo siguiente:
1. Describa el proceso del trabajo que realizó durante la secuencia.
2. Mencione cuales, de las cuatro competencias que se proponen en el Programa de Matemáticas para Secundaria 2011, se promueven en esta secuencia didáctica.
3. ¿Cuál competencia se promueve en cada actividad y de qué manera?
4. ¿Qué sección presentó mayores retos al momento de resolverla?
5. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los conocimientos matemáticos?
6. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los recursos tecnológicos?
7. ¿Considera de utilidad el uso de manipulables? ¿Por qué?
8. ¿Qué aspectos le resultaron más interesantes de la secuencia didáctica? ¿Por qué?
9. ¿Qué opina del uso que se les dio a las razones trigonométricas?
10. ¿Qué opina de los contextos que se presentaron durante el desarrollo de la secuencia?
11. Si tuviera que dar una clase a sus alumnos de secundaria con esta secuencia, ¿cuáles serían las modificaciones que haría?

b) En equipo, realicen lo siguiente.
1. A continuación, se presenta una de las actividades que se proponen en un libro de matemáticas de 3° de secundaria sobre el tema de razones trigonométricas, resuelva la actividad que ahí se propone:



Resolución de problemas con razones trigonométricas

4. En pareja, resuelvan y respondan.

a. En la siguiente figura, la medida de la tangente del ángulo β es 0.7143.

- ¿Cuál es la medida de $\overline{LK}$ o la diagonal del cuadrilátero? ____________
- ¿Qué razón trigonométrica es de utilidad para resolver el problema? ____________
- ¿Cuál es la medida del perímetro y del área del cuadrilátero? ____________
- Verifiquen su resultado.

b. El ΔJKL es rectángulo. Se sabe que la medida del coseno del ángulo β mide 0.879.

- Consideren que las unidades están dadas en centímetros y determinen la medida de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo β. Validen con sus operaciones el resultado.

c. En el esquema se muestra la longitud de la sombra que proyecta un edificio en tres horas distintas del día.

- Si el edificio está representado por el rectángulo *JDEK*, ¿qué sucede con los ángulos η, θ y τ de las sombras proyectadas en $\overline{EM}$? ____________
- Apliquen las razones trigonométricas y determinen la distancia de las sombras que se proyectan en las tres distintas horas.
- $\overline{EF}$ ____________ • $\overline{EL}$ = ____________ • $\overline{EM}$ = ____________

2. En plenaria, discutan sobre las diferencias entre el uso de las razones trigonométricas que se promueve en esta actividad y el que se promueve en la secuencia de “Los cortes del carpintero”, ¿cuáles son esas diferencias?

   De manera individual, responda:

c) Considera que la forma de trabajo que se propone en la secuencia de “Los cortes del carpintero” funcionaría con sus alumnos. ¿Por qué?

Características de la actividad:

La actividad de **Cierre** tiene como objetivo que se realice la fase de *institucionalización,* a través de las reflexiones Sobre el contenido matemático, ya que es ahí donde se promueve que el participante verifique la validez de la expresión matemática obtenida y que a partir de ello sea capaz de generalizarla como la fórmula para calcular el área de un segmento circular.

En la sección de reflexionando Sobre la secuencia didáctica se pretende lo siguiente:

3. Analizar la pertinencia de la secuencia: saber cuáles preguntas o indicaciones están mal redactadas o confusas, en qué momentos se presentaron mayores dificultades y conocer la causa.
4. Que los docentes reflexionen en los siguientes aspectos: sobre la manera en la que se usan los conocimientos matemáticos, la forma en la que se presentan los

problemas, el uso que se le da a la tecnología, la variedad de métodos de resolución de problemas, la variedad de campos de aplicación que tienen los contenidos matemáticos, las dificultades que pueden presentarse al resolver los problemas, así como la confrontación entre lo que presentan los libros de texto y la secuencia con la finalidad de que tengan a su alcance una manera diferente de diseñar actividades.

Características del diseño (ACODESA):

Como se puede observar en un primer momento los participantes responden de manera individual, después en equipo y posteriormente discuten en plenaria. Para finalizar realizan un proceso de auto-reflexión en el cual tienen que tomar en cuenta la forma de aprender de sus alumnos. Esta última actividad también fue diseñada tomando en cuenta las fases de trabajo que se proponen en ACODESA, a pesar de no tratarse de una actividad matemática, ya que consideramos que las características de diseño que se proponen en la metodología funcionan para cualquier actividad de enseñanza y de aprendizaje.

Secuencia didáctica 3 “El paso a desnivel y su altura máxima”

Objetivo de la secuencia: que el docente modele geométricamente el problema de calcular la altura máxima que puede pasar por debajo de un paso a desnivel, utilizando para ello sus conocimientos sobre trigonometría y geometría.

-Contenido matemático que se trabaja:

Explícito: trigonometría.

Implícito, debido a la naturaleza de la situación: distancia euclidiana, teorema de Pitágoras, variación.

-Población a la que está dirigida: docentes de matemáticas de nivel básico, en formación y en servicio.

-Tiempo estimado para su desarrollo: 100 minutos (dos sesiones de 50 minutos cada una).

-Materiales y recursos necesarios: cuadernillo de actividades, lápiz, calculadora, cartón y hoja de papel, software GeoGebra.

-Contexto en el que se desarrolla la actividad: en la presente actividad se estudia el problema de la altura máxima permitida que debe tener un vehículo para lograr pasar por debajo de un paso a desnivel, la situación que se presenta está muy al alcance de los docentes, ya que es muy común observar vehículos atorados en los desniveles.

Inicio:

El conductor de un trailer conoce la altura del trailer que maneja, la cual es la distancia entre la parte superior del remolque al suelo, cuando este se encuentra sobre un terreno plano. Suponiendo, que llega a un puente donde el señalamiento de la altura máxima permitida dice que es mayor a la altura del trailer:

¿Crees que el trailer logre pasar por debajo del puente? Justifica tu respuesta

Actividad 1: Analizando la situación anterior desde una perspectiva matemática:

El instructor le proporcionará los siguientes materiales:

- -Hoja de papel (representación del trailer)
- -Dibujo en cartoncillo (representación del puente y del camino)

a) Dobla la hoja de papel, de tal manera que representes las siguientes tres situaciones:

-El tráiler logra pasar por debajo del puente

-El tráiler logra entrar, pero no logra salir del puente

-El tráiler no logra entrar al puente.

A continuación, analizaremos la manera en la que varía la altura del tráiler (hoja de papel) con respecto al suelo, durante su recorrido antes y durante el ingreso al puente.

b) Desliza la hoja de papel por el camino y haz variar la inclinación del camino, con base en lo anterior, contesta las siguientes preguntas:

1. Cuando el camino no está inclinado, ¿Cómo es la distancia entre la parte superior de la hoja y el camino durante todo el recorrido?

2. Cuando el camino está inclinado, ¿Cómo es la distancia entre la parte superior de la hoja y el camino durante todo el recorrido?

3. ¿En qué momentos la distancia entre la parte superior de la hoja y el camino cambia?

4. ¿Cuáles son las medidas que están cambiando?

Características del diseño (ACODESA):

En esta secuencia la parte de inicio trabaja la *fase individual,* la intención de realizar lo que se indica en el inciso **a** y **b** es que los participantes identifiquen las magnitudes que están variando al momento de determinar si un tráiler logra o no pasar por debajo de un paso a desnivel.

En un primer momento la actividad se trabaja con manipulables y se analizan las medidas que están cambiando al manipular el material, esto con la finalidad de conocer las primeras representaciones funcionales

Las preguntas están diseñadas para que además de identificar las relaciones entre las cantidades, también se preste especial atención a la situación referente al tráiler que logra entrar al paso a desnivel pero que no logra salir de el, ya que ésta es la situación que se analiza con detalle en las actividades posteriores.

Sección de desarrollo:

Desarrollo

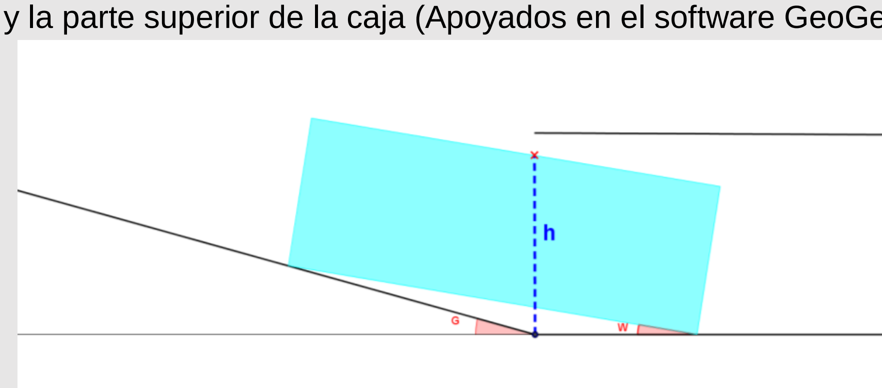
Actividad 2

Suponiendo que un tráiler mide 14m de largo y 4m de alto, y quiere pasar por debajo de un puente cuya altura máxima permitida es de 4.2m, además sabemos que la inclinación del camino con respecto al suelo es de 7º.

a) ¿Crees que el tráiler logre pasar por debajo del puente?

b) Reunidos en equipo, respondan la pregunta anterior desde una perspectiva matemática, tomando en cuenta lo siguiente:

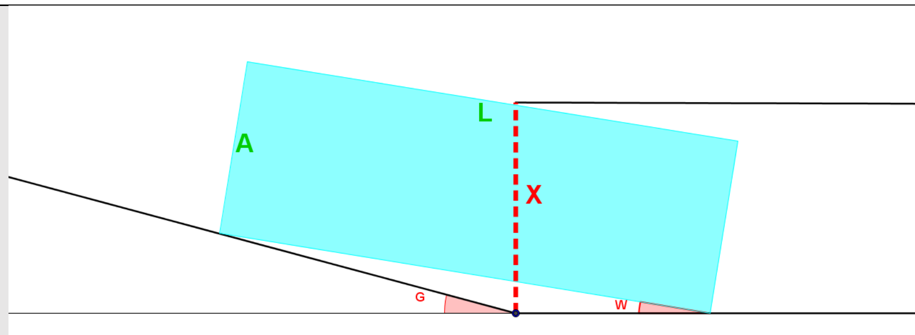
1. Realicen un bosquejo que permita visualizar la situación anterior:
2. Construyan una tabla en la que registren las diferentes alturas (h) entre el suelo y la parte superior de la caja (Apoyados en el software GeoGebra):



Largo del tráiler	Ancho del tráiler	Ángulo de inclinación del camino	Ángulo de inclinación del tráiler con respecto al camino	Medida de h	Altura del puente
14m	4m	7°	0°		4.2m
14m	4m	7°	1.5°		4.2m
14m	4m	7°	2°		4.2m
14m	4m	7°	2.5°		4.2m
14m	4m	7°	3°		4.2m
14m	4m	7°	3.5°		4.2m
14m	4m	7°	4.5°		4.2m

3. ¿Cuáles son las dimensiones que están variando durante el recorrido del tráiler?
4. Construye una gráfica en la que relaciones la medida del ángulo de inclinación del tráiler con respecto al camino (x) y la medida de h (y).
5. ¿Qué tipo de gráfica se formó?
6. ¿Qué representa el punto máximo de la gráfica en el problema?
7. ¿En qué momento la distancia del suelo a la parte superior de la caja alcanza su nivel máximo, con respecto al suelo?
8. Cuando la distancia del suelo a la parte superior de la caja alcanza su nivel máximo ¿cómo es la relación entre el ángulo de inclinación del tráiler con respecto al camino y el ángulo de inclinación del camino?

c) Suponiendo que un tráiler mide L de largo y A de alto, y quiere pasar por debajo de un puente cuya altura es de h, además sabemos que la inclinación del camino con respecto al suelo es G y que la inclinación del tráiler con respecto al camino es X.



1. Modelen la expresión algebraica que permita determinar en qué momento el tráiler alcanza una altura máxima al ingresar al puente. (Apoyados en el software GeoGebra).
2. Compartan y justifiquen, de manera grupal, la expresión algebraica que obtuvieron.
3. Utilicen la expresión anterior para revisar los resultados obtenidos en la tabla de la sección anterior:

Largo del tráiler	Ancho del tráiler	Ángulo de inclinación del camino	Ángulo de inclinación del tráiler con respecto al camino	Medida de h	Altura del puente
14m	4m	7°	0°		4.2m
14m	4m	7°	1.5°		4.2m
14m	4m	7°	2°		4.2m
14m	4m	7°	2.5°		4.2m
14m	4m	7°	3°		4.2m
14m	4m	7°	3.5°		4.2m
14m	4m	7°	4.5°		4.2m

4. ¿Obtuvieron los mismos resultados?
5. ¿Cuál es la utilidad de la expresión que construyeron?
6. ¿Cómo se utiliza la expresión algebraica que construyeron?
7. Planteen una situación en la que la expresión algebraica te permita identificar si un tráiler logra pasar por debajo del paso a desnivel.

Características del diseño (ACODESA):

En el inciso **a** de la actividad de desarrollo, pretende que el participante realice las primeras inferencias sobre el cálculo de la altura máxima, la intención es que responda según su criterio, incluso es probable que no realice operaciones matemáticas para contestar.

La *fase de trabajo en equipo* se desarrolla a partir del inciso **b,** en la indicación **1** se pide que realicen un bosquejo de la situación antes planteada, con la finalidad de saber si la situación y los elementos que la componen han sido comprendidos. El uso de la tecnología se introduce en la indicación **2**, se pretende que apoyados en el software completen los datos de la tabla y que a partir de la observación y manipulación del mismo establezcan las relaciones de variación que les permitan modelar una expresión algebraica.

La indicación **1** y **2** del inciso **c** presenta la *fase de debate,* ya que es necesario modelar una expresión algebraica y posteriormente presentarla y justificarla, se pretende que durante esta fase los participantes realicen una generalización sobre la manera en la que se relacionan entre si las variables intervinientes.

A partir de la indicación **3** se desarrolla la *fase de auto-reflexión,* ya que se regresa a la situación anterior y se comprueba la utilidad de la expresión algebraica que obtuvieron, durante esta fase se pretende que los resolutores afinen la expresión algebraica utilizada y sean capaces de utilizarla para resolver la problemática planteada.

La *fase de institucionalización* se presenta, de manera implícita, a partir de la indicación **2** del inciso **c**, ya que es en ese periodo donde el instructor tendrá que intervenir con la finalidad de generalizar de manera grupal los modelos algebraicos que se obtengan.

Sección de cierre

Reflexionando sobre lo que aprendimos

Sobre el contenido matemático

a) De manera individual realice lo siguiente:

1. ¿Cuál es el contenido matemático que se trabaja durante la secuencia?

b) En equipo, expongan y justifiquen la expresión analítica que obtuvieron

1. ¿Consideran que la expresión que obtuvieron funciona para calcular cuál es la altura máxima de un tráiler para que logre pasar por debajo de un paso a desnivel? Justifique su respuesta.

Sobre la secuencia didáctica:

a) De manera individual, realice lo siguiente:

1. Describa el proceso del trabajo que realizó durante la secuencia.
2. Mencione cuales, de las cuatro competencias que se proponen en el Programa de Matemáticas para Secundaria 2011, se promueven en esta secuencia didáctica.
3. ¿Cuál competencia se promueve en cada actividad y de qué manera?
4. ¿Qué sección presentó mayores retos al momento de resolverla?
5. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los conocimientos matemáticos?
6. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los recursos tecnológicos?
7. ¿Considera de utilidad el uso de manipulables? ¿Por qué?
8. ¿Qué aspectos le resultaron más interesantes de la secuencia didáctica? ¿Por qué?
9. ¿Qué opina del uso que se les dio a las razones trigonométricas?
10. ¿Qué opina de los contextos que se presentaron durante el desarrollo de la secuencia?
11. Si tuviera que dar una clase a sus alumnos de secundaria con esta secuencia, ¿cuáles serían las modificaciones que haría?

b) En equipo, realicen lo siguiente.

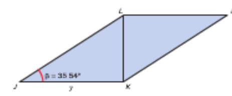
1. A continuación, se presenta una de las actividades que se proponen en un libro de matemáticas de 3° de secundaria sobre el tema de razones trigonométricas, resuelva la actividad que ahí se propone:

Resolución de problemas con razones trigonométricas

4. En pareja, resuelvan y respondan.

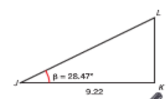
a. En la siguiente figura, la medida de la tangente del ángulo β es 0.7143.

- ¿Cuál es la medida de $\overline{LK}$ o la diagonal del cuadrilátero? ____________
- ¿Qué razón trigonométrica es de utilidad para resolver el problema? ____________
- ¿Cuál es la medida del perímetro y del área del cuadrilátero? ____________
- Verifiquen su resultado.

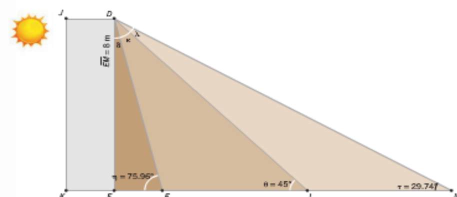


b. El Δ*JKL* es rectángulo. Se sabe que la medida del coseno del ángulo β mide 0.879.

- Consideren que las unidades están dadas en centímetros y determinen la medida de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo β. Validen con sus operaciones el resultado.



c. En el esquema se muestra la longitud de la sombra que proyecta un edificio en tres horas distintas del día.



- Si el edificio está representado por el rectángulo *JDEK*, ¿qué sucede con los ángulos η, θ y τ de las sombras proyectadas en $\overline{EM}$? ____________
- Apliquen las razones trigonométricas y determinen la distancia de las sombras que se proyectan en las tres distintas horas.
- $\overline{EF}$ ____________ • $\overline{EL}$ = ____________ • $\overline{EM}$ = ____________

2. En plenaria, discutan sobre las diferencias entre el uso de las razones trigonométricas que se promueve en esta actividad y el que se promueve en la secuencia de “Cálculo de volúmenes”, ¿cuáles son esas diferencias?

c) De manera individual, responda:

1. Considera que la forma de trabajo que se propone en la secuencia de “Cálculo de volúmenes” funcionaría con sus alumnos. ¿Por qué?

Características de la actividad:

La actividad de **Cierre** tiene como objetivo que se realice la fase de *institucionalización,* a través de las reflexiones Sobre el contenido matemático, ya que es ahí donde se promueve que el participante verifique la validez de la expresión matemática obtenida y que a partir de ello sea capaz de generalizarla como la fórmula para calcular el área de un segmento circular.

En la sección de reflexionando Sobre la secuencia didáctica se pretende lo siguiente:

5. Analizar la pertinencia de la secuencia: saber cuáles preguntas o indicaciones están mal redactadas o confusas, en qué momentos se presentaron mayores dificultades y conocer la causa.

6. Que los docentes reflexionen en los siguientes aspectos: sobre la manera en la que se usan los conocimientos matemáticos, la forma en la que se presentan los problemas, el uso que se le da a la tecnología, la variedad de métodos de resolución de problemas, la variedad de campos de aplicación que tienen los contenidos matemáticos, las dificultades que pueden presentarse al resolver los problemas, así como la confrontación entre lo que presentan los libros de texto y la secuencia con la finalidad de que tengan a su alcance una manera diferente de diseñar actividades.

Características del diseño (ACODESA):

Como se puede observar en un primer momento los participantes responden de manera individual, después en equipo y posteriormente discuten en plenaria. Para finalizar realizan un proceso de auto-reflexión en el cual tienen que tomar en cuenta la forma de aprender de sus alumnos.

Esta última actividad también fue diseñada tomando en cuenta las fases de trabajo que se proponen en ACODESA, a pesar de no tratarse de una actividad matemática, ya que consideramos que las características de diseño que se proponen en la metodología funcionan para cualquier actividad de enseñanza y de aprendizaje.

CAPÍTULO 5.

ANÁLISIS DE LA PUESTA EN ESCENA

5.1. LA PUESTA EN ESCENA.

5.1.1. Descripción de la primera puesta en escena

Después de diseñar una versión preliminar de la propuesta didáctica, se tomó la decisión de realizar una primera puesta en escena, con la finalidad de identificar las posibles fallas en la elaboración de las secuencias y poder afinar el diseño.

El objetivo de la primera puesta en escena fue:

-Identificar las posibles fallas de la propuesta didáctica en términos de diseño.

Para cumplir con dicho objetivo se realizó lo siguiente:

-Elegir la población a la cual se aplicó la secuencia.

-Video-grabar la puesta en escena.

-Se tomaron notas de observadores adicionales.

-Se recogieron los cuadernillos de trabajo de los docentes.

Es importante destacar que se contó con la participación de 21 docentes de matemáticas de secundaria en servicio, bajo el marco del taller "Actividades didácticas para la matemática de secundaria, apoyadas en GeoGebra".

La puesta en escena consistió en resolver la secuencia didáctica 1 "Cálculo de volúmenes" (no fue posible aplicar las tres secuencias debido a la duración del taller), la secuencia se desarrolló en dos sesiones de 50 minutos cada una, cada docente contó con un cuadernillo de actividades y a cada equipo se le entregó un paquete de manipulables. El desarrollo de la secuencia estuvo a cargo de un instructor, además se contó con tres observadores que siguieron la guía de observación previamente diseñada.

Reporte de observación de la primera puesta en escena

Después de analizar los reportes de observación y la video grabación se identificaron ciertas deficiencias en el diseño de la secuencia, es por ello que se tomó la decisión de realizar los ajustes correspondientes. A continuación, se muestran a manera de ejemplo, algunos de los cambios que se realizaron en la secuencia didáctica:

En la sección de inicio encontrábamos solamente lo siguiente:

INICIO

Calculando la cantidad de arroz que hay en la caja

Actividad 1

En equipo, trabaje con la caja de cartón, el arroz y la regla, que serán proporcionadas por el instructor. Ponga dentro de la caja cierta cantidad de arroz y distribúyalo de manera uniforme.
1. Calculen la capacidad de la caja (cm^3)

2. Calculen el volumen de arroz que hay en la caja

3. Expliquen el procedimiento utilizado para calcular el volumen de arroz

4. ¿Qué relación encuentran entre las medidas de la caja y las medidas que utilizaron para calcular el volumen de arroz que hay en la caja?

5. Suponiendo, que el área que cubre el arroz en una de las caras de la caja es de 30 cm^2, ¿cuál es el volumen de arroz que contiene la caja que usted tiene?

Después de identificar las dificultades que se presentaron para resolver las actividades propuestas en el desarrollo se decidió incluir en la sección de inicio la siguiente actividad, con la finalidad de clarificar el contexto del problema y de que identificaran con mayor profundidad las relaciones de proporcionalidad que están involucradas:

Actividad 2
Calculando el volumen de carga que transporta un camión
a) Se necesita calcular la cantidad de trigo que transporta el camión de la imagen 1, sabemos que la capacidad de la caja es de 30 m^3 y que la caja no está llena. De manera individual, responda:

Si la caja no está llena, y suponiendo que el trigo está distribuido de manera uniforme;
1. ¿Cuáles medidas necesitamos para calcular el volumen que ocupa el trigo dentro del camión?
2. ¿Cómo podemos obtener dichas medidas?

b) Si como se dijo al inicio, la capacidad de la caja es de 30 m^3, y además sabe que mide 2.4m de ancho y 2.5m de alto
1. ¿Qué medida necesitamos para conocer la cantidad de trigo que trae la caja?

c) Si la altura que alcanza el trigo dentro de la caja es de 1.5 m
1. Realice un dibujo que represente la situación
2. ¿Cómo es la relación entre el área de una de las caras frontales de la caja y el área que ocupa el trigo en esa cara?

Uno de los cambios más relevantes fue el que se realizó en la sección de cierre en donde se incluyen las reflexiones didácticas, a continuación, presentamos la versión anterior y la actual de dicha sección:

Versión anterior

CIERRE

1. Enliste los conceptos matemáticos involucrados en la actividad anterior:

2. ¿En qué parte de la actividad usted encontró mayores dificultades?

3. ¿Cuáles son las diferencias entre las actividades que se proponen en los libros de texto oficiales y las que aquí se presentan?

4. ¿Qué cambios sugiere que se realicen a la actividad?

Versión actual

CIERRE

Responda las siguientes preguntas, a partir de las actividades realizadas en la secuencia anterior.

1. ¿Cuál es el enfoque didáctico que se promueve en la secuencia?
2. ¿Qué sección presentó para usted mayores retos al momento de resolverla?
3. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los conocimientos matemáticos?
4. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los recursos tecnológicos?
5. ¿Considera que fueron de utilidad los recursos manipulables? ¿Por qué?
6. ¿Qué aspectos le resultaron más interesantes de la secuencia didáctica? ¿Por qué?
7. ¿Qué opinas del uso que se le dio a la trigonometría?
8. ¿Qué opina de los contextos que se presentaron durante el desarrollo de la secuencia?
9. ¿Qué cambios haría a la secuencia didáctica?
10. ¿Encuentra diferencias entre las actividades que se proponen en los libros de texto oficiales y la secuencia que aquí se presenta? Si su respuesta es sí, mencione dichas diferencias.

Por último, se revisó y modificó la redacción de algunas de las preguntas de la sección de desarrollo con la finalidad de mejorar la comprensión de las mismas.

5.1.2. Descripción de la segunda puesta en escena

Como consecuencia de la primera aplicación de la secuencia, se realizaron algunos cambios a la estructura, con la finalidad de mejorar el diseño y prever posibles dificultades ocasionadas por la redacción de las indicaciones o de las preguntas, posteriormente se llevó a cabo la segunda aplicación de la secuencia, en la cual participaron 25 maestros en formación del sexto semestre de la carrera de Licenciado en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas.

Se presentó la secuencia didáctica 1 “Cálculo de volúmenes”, para realizar la actividad completa fueron necesarias 4 sesiones con una duración de 2 horas cada una. A los participantes se les asignó un cuadernillo de trabajo y material manipulable.

El objetivo de realizar una segunda puesta en escena fue:

-Analizar la actividad matemática de los docentes de secundaria, desde una perspectiva teórica, al involucrarlos en ambientes de aprendizaje en los que se resuelven problemas de contexto extra-matemático.

Para poder cumplir con el objetivo antes mencionado se realizó lo siguiente:

- Se eligió a los docentes participantes.

- Se video grabó la puesta en escena.

- Se recolectaron los cuadernillos de actividades de los docentes.

- Se eligió la teoría de los Espacios de Trabajo Geométrico como herramienta de análisis.

5.2. ANÁLISIS DE LA PUESTA EN ESCENA.

Como primer nivel de análisis se realizó una caracterización de los elementos de la secuencia didáctica tomando como referencia el Espacio de Trabajo Geométrico idóneo.

El análisis de la secuencia didáctica contempla solamente los elementos del plano epistemológico de los ETG_i, ya que es ahí donde se identifican los conceptos matemáticos que se pretenden trabajar (referencial), las herramientas que se ponen a disposición del geómetra (artefactos) y las representaciones de los objetos matemáticos involucrados (espacio real y local).

Descripción general del ETG$_i$: la propuesta didáctica que se diseñó tiene como objetivo contribuir a que los docentes reflexionen sobre su propia práctica matemática a partir de trabajar con situaciones problema en las que se involucran conceptos geométricos, particularmente el estudio de las razones trigonométricas. Para su diseño se ha tomado como base la metodología ACODESA.

En la secuencia se presentan tres situaciones problema de contexto extra-matemático, en cada situación se trabaja de manera distinta con las razones trigonométricas, sin embargo, en todas se promueve el uso de éstas como la herramienta matemática que permitirá modelar, analizar y resolver la problemática planteada.

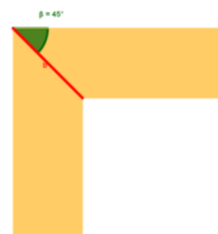
A continuación, se presentan los elementos que conforman el ETGi, en el Plano Epistemológico:

Elementos del Plano Epistemológico	
Referencial	**Razones trigonométricas:** la secuencia se ha diseñado para que las razones trigonométricas formen parte de la resolución de problemas en los cuales es necesario conocer alguna distancia físicamente inaccesible, pero que con el uso de esta herramienta matemática es posible calcular y además construir modelos algebraicos que permitan resolver la situación de manera general.
	Teorema de Pitágoras: el teorema de Pitágoras se utiliza como una herramienta de apoyo que surge de manera natural en la resolución de los problemas planteados.
	Proporcionalidad: la noción de proporcionalidad directa entre dos cantidades, resulta necesaria al momento de modelar la problemática y de establecer relaciones entre las cantidades que intervienen.

	Ángulos: el conocimiento de los ángulos resulta una herramienta que permite determinar o decidir cuál de las herramientas trigonométricas es más viable usar.
	Área: algunos de los problemas radican en calcular la medida de áreas no comunes, por ejemplo, segmentos y sectores circulares. Calcular el área de figuras como estas, en términos generales, es uno de los principales problemas de la propuesta.
	Volumen: el problema de calcular volúmenes se presenta como algo que posiblemente no se haya trabajado antes, ya que realizar dicho cálculo no depende de la multiplicación de tres dimensiones de manera automática, sino de poder encontrar cuáles son esas tres dimensiones que se necesitan y encontrar maneras diversas de obtenerlas.
	Congruencia: la noción de congruencia entre dos figuras, especialmente entre dos o más triángulos, en esta secuencia resulta necesaria para poder encontrar relaciones geométricas que permitan modelar algebraicamente uno de los problemas aquí planteados.
	Distancia euclidiana: dentro de la secuencia, al referirnos a una distancia cualquiera, estamos tomando como el concepto de la distancia más corta que hay entre dos puntos.
Artefactos	**Manipulables:** cada una de las situaciones planteadas cuenta con un manipulable, el cual consiste en presentar al geómetra una serie de recursos que le permitan entender la problemática e identificar las variables intervinientes.
	GeoGebra: el papel del software radica en diseñar un modelo geométrico que permita identificar, de manera clara, la relación entre las variables intervinientes, previamente identificadas.

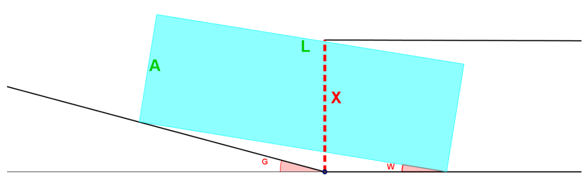
	Instrumentos geométricos: al momento de trabajar con los manipulables es necesario tomar medidas de distancias, ángulos, así como realizar trazos auxiliares que permitan una mejor visualización del problema.
	Calculadora: se utiliza para realizar operaciones básicas que tienen que ver con el cálculo de volúmenes, áreas, distancias. Además, se utiliza para calcular la medida de ángulos.
Espacio real y local	Representación de objetos matemáticos a través de imágenes: **Secuencia didáctica 1 “Cálculo de volúmenes”** Prisma de base rectangular (marcado con rojo):  Cilindro circular recto (marcado con rojo):  Segmento circular (marcado con rojo):  **Secuencia didáctica 2 “Los cortes del carpintero”**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Bisectriz de un ángulo (marcada con rojo)



Secuencia didáctica 3 “La altura máxima del paso a desnivel”

Distancia euclidiana (marcada con rojo)



</td>
</tr>
</table>

5.2.1. Análisis de la actividad matemática de los participantes (ETGp)

En este apartado se analiza la actividad geométrica realizada por los participantes durante la puesta en escena de la secuencia didáctica, para ello se ha tomado como evidencia las videograbaciones, los cuadernillos de trabajo, las construcciones realizadas en GeoGebra, así como las notas de observación.

A continuación, se presenta el análisis realizado el cual consiste en definir y caracterizar los elementos que conforman el Espacio de *Trabajo Geométrico personal* (ETGp), el cual se define como: *“El tratamiento personal y local que un individuo le da a un problema geométrico”.*

Presentamos, a continuación, los artefactos que tenía al alcance el participante al momento de realizar su actividad matemática.

<u>Tecnológicos:</u>

- Equipo de cómputo: que le permitió utilizar el software GeoGebra

- Regla graduada de 30 cm: con la cual midió sobre los objetos físicos y los dibujos.
- Transportador: que le permitió dibujar y medir ángulos.

Digitales:

- Software GeoGebra: les permitió modelar geométricamente las situaciones planteadas.
- Construcciones en GeoGebra: les permitió manipular las situaciones geométricas presentadas.
- Vídeo: videograbaciones sobre problemáticas de contexto real.

Manipulables:

- Situación didáctica 1 *"Cálculo de volúmenes"*: caja de cartón, arroz y regla.

Descripción del Espacio de Trabajo Geométrico personal (ETGp).

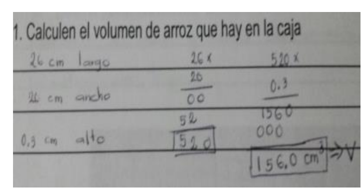
En este apartado se describe el ETGp conformado por la actividad matemática de los participantes a través del tratamiento que se le dio a las situaciones problema que se plantearon en la Secuencia 1 "Cálculo de volúmenes". El análisis se organizó a partir de las actividades realizadas durante el desarrollo de la secuencia, Actividad 1, Actividad 2 y Actividad 3.

Durante la descripción se muestran las producciones de los participantes, las cuales han sido tomadas del cuadernillo de actividades, de las video grabaciones y de las construcciones en GeoGebra, en cada uno de los ejemplos se muestra sólo una producción de las 25, dicha producción fue elegida de tal manera que representara a la mayoría.

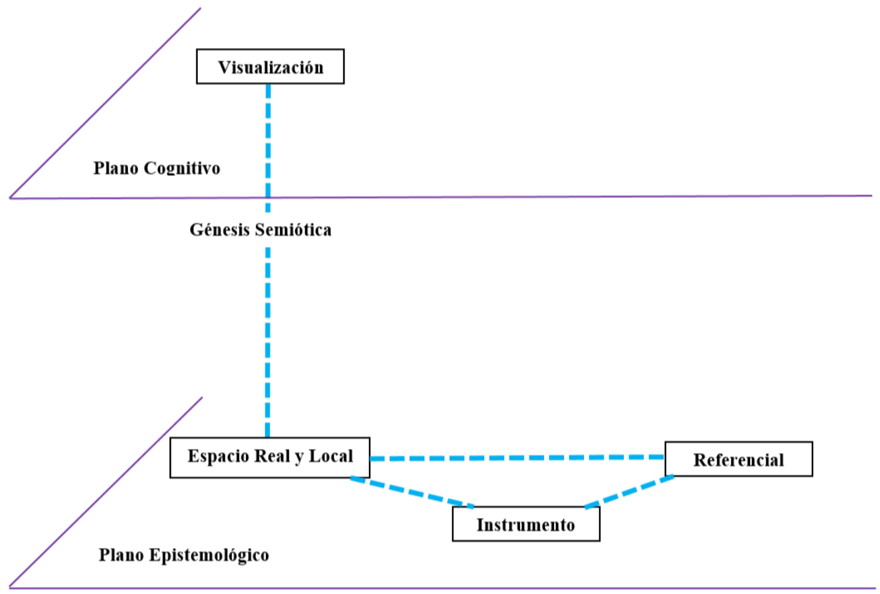
Actividad 1: calcular el volumen de arroz que contiene una caja.

Para calcular el volumen de arroz que contenía la caja de cartón los participantes tomaron las medidas de la caja (largo, ancho y alto), introdujeron la regla a la caja para medir la altura a la que llegaba el arroz dentro de la caja y aplicaron la fórmula para calcular el volumen, V = (largo) (ancho) (alto), donde el largo y el ancho fueron las medidas de la base de la caja y lo alto fue la altura del trigo.

Elementos identificados correspondientes al ETGp:

Plano epistemológico	Génesis identificadas	Plano cognitivo
Referencial teórico: los participantes mostraron conocimiento de la fórmula para calcular el volumen de un prisma de base rectangular **Artefactos:** caja de cartón, arroz y regla graduada. **Espacio real y local:** prisma de base rectangular representada a través de la caja de cartón.	**Génesis semiótica:** se le dotó de sentido y utilidad a los elementos del plano epistemológico, y se logró visualizar la problemática planteada y resolverla. 	**Visualización:** podemos decir que el proceso de visualización de evidencia al momento de reconocer las características de la caja de cartón y poder sustituirlas en la fórmula. 

En esta actividad el esquema del Espacio de Trabajo Geométrico personal se define de la siguiente manera:



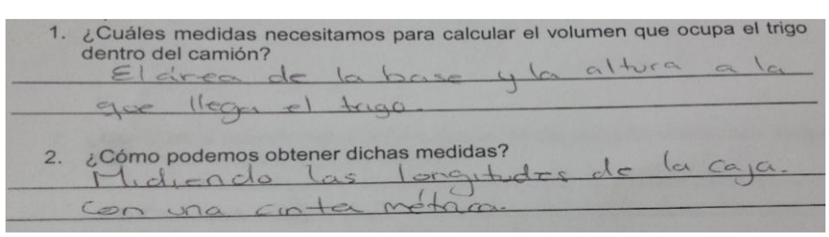
Actividad 2: calculando el volumen de carga que transporta un camión.

La actividad que se presentó consistía en calcular el volumen de trigo que transporta un camión cuya caja tiene forma de prisma rectangular, el objetivo de realizar dicha actividad fue que identificaran las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes del prisma y el volumen del mismo.

Al momento de plantear a los participantes la siguiente situación:

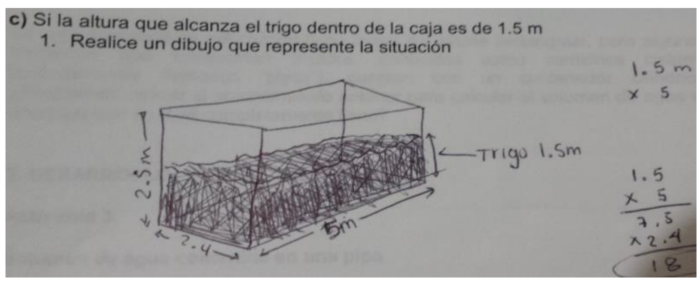
> *Si la caja no está llena, y suponiendo que el trigo está distribuido de manera uniforme;*
> 1. *¿Cuáles medidas necesitamos para calcular el volumen que ocupa el trigo dentro del camión?*
> 2. *¿Cómo podemos obtener dichas medidas?*

Se obtuvieron respuestas como la siguiente:


1. ¿Cuáles medidas necesitamos para calcular el volumen que ocupa el trigo dentro del camión?
El área de la base y la altura a la que llega el trigo.
2. ¿Cómo podemos obtener dichas medidas?
Midiendo las longitudes de la caja. Con una cinta métrica.

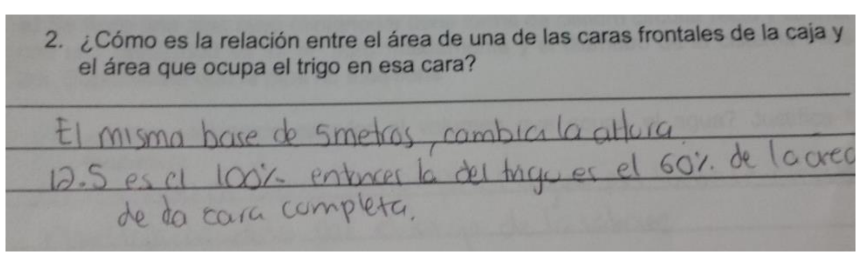
En las respuestas se puede notar que los participantes retomaron el método de la Actividad 1, que se refiere a obtener las medidas necesarias a través de objetos de medición como la cinta métrica, además muestran claridad en los datos que se necesitan conocer para resolver el problema.

Posteriormente se les presentó la situación de que el trigo alcance una altura de 1.5m dentro de la caja, y se les pidió de la representarán mediante un dibujo. Los dibujos realizados por los participantes fueron representaciones de las tres dimensiones de la caja, como se muestra a continuación:

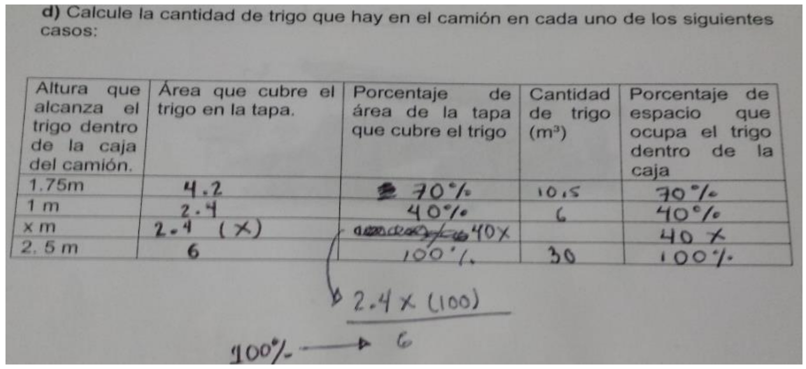


Como se puede observar, los participantes lograron representar los datos del enunciado mediante una representación gráfica.

Posteriormente se les pidió que determinaran la relación entre el área de una de las caras frontales de la caja y el área que ocupa el trigo en esa caja.



Al identificar que el trigo ocupa el 60% del área total de las caras se les pidió que determinaran la relación entre el volumen que ocupa el trigo cuando la altura es 1.5m y la capacidad de la caja, ante está pregunta los participantes determinaron que la relación entre el volumen y la capacidad era la misma que en las áreas antes mencionadas. Para formalizar dichas relaciones de proporcionalidad, los docentes completaron la siguiente tabla:



d) Calcule la cantidad de trigo que hay en el camión en cada uno de los siguientes casos:

Altura que alcanza el trigo dentro de la caja del camión.	Área que cubre el trigo en la tapa.	Porcentaje de área de la tapa que cubre el trigo	Cantidad de trigo (m^3)	Porcentaje de espacio que ocupa el trigo dentro de la caja
1.75m	4.2	70%	10.5	70%
1 m	2.4	40%	6	40%
x m	2.4 (x)	40x		40 x
2. 5 m	6	100%	30	100%

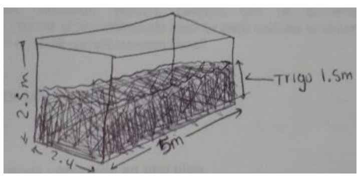
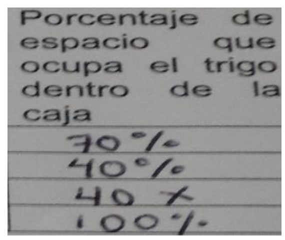
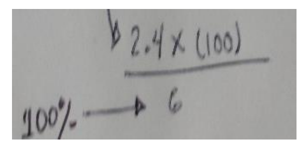
$\frac{2.4 \times (100)}{6}$

100% → 6

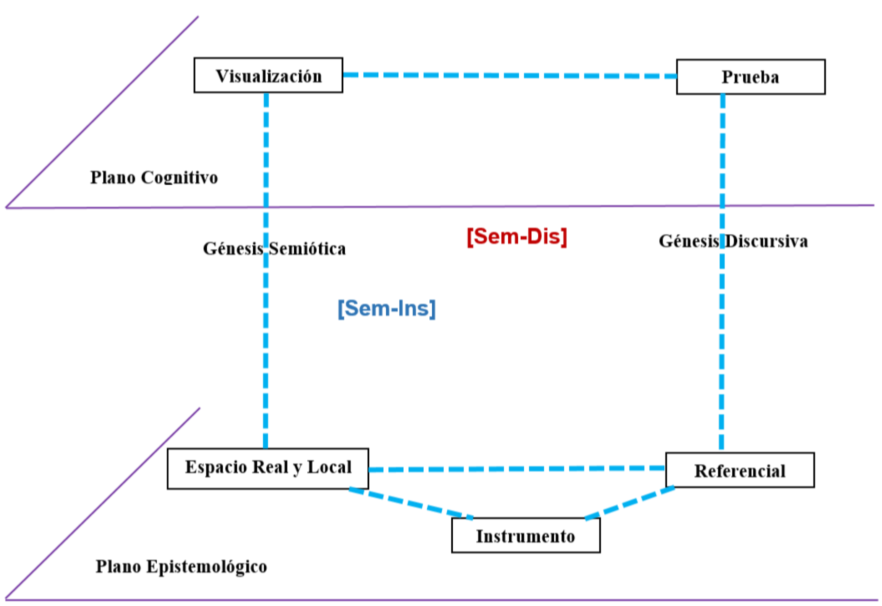
Para obtener los datos de la tabla utilizaron la relación de proporcionalidad antes descrita, es decir, calculaban el porcentaje de área de la tapa que cubre el trigo y a partir de ahí obtenían el porcentaje del espacio total de la caja que ocupa el trigo cuando está a cualquier altura.

Elementos identificados correspondientes al ETGp:

Plano epistemológico	**Génesis identificadas**	**Plano cognitivo**
Referencial teórico: fórmula para calcular el volumen de un prisma de base rectangular, fórmula para calcular el área de un rectángulo, identificación de relaciones de proporcionalidad directa. **Artefactos:** regla graduada.	**Génesis semiótica:** se llevó a cabo el proceso de Génesis Semiótica durante la identificación de las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes, ya que el participante les dio sentido a dichas relaciones para poder completar los datos de la tabla.	**Visualización:** los docentes lograron dotar de sentido a los objetos matemáticos presentados en el Plano epistemológico, lo cual se muestra al momento en el cual completaron la tabla de datos y pudieron generalizar las relaciones de proporcionalidad.

Espacio real y local: representación de un prisma de base rectangular y sus dimensiones mediante un dibujo. 	**Génesis Discursiva:** los participantes lograron utilizar sus conocimientos matemáticos (referencial) para realizar conjeturas y generalizar. 	**Prueba:** se presentó una validación, mediante la generalización de las relaciones de proporcionalidad identificadas. 

En esta actividad el esquema del Espacio de Trabajo Geométrico personal quedó definido de la siguiente manera:



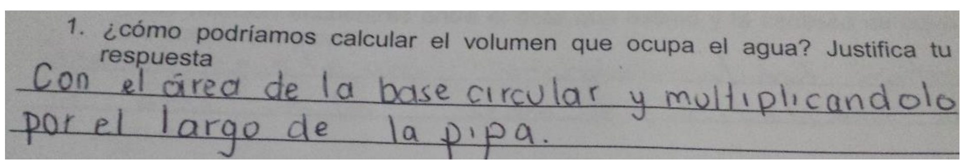
En la Actividad 2 los participantes lograron activar un mayor número de elementos del ETGp, en comparación con lo realizado en la Actividad 1.

Actividad 3: volumen de agua contenida en una pipa.

La actividad consistía en calcular el volumen de agua que había en una pipa que no estaba al límite de su capacidad y que su forma correspondía a lo que conocemos como cilindro circular recto.

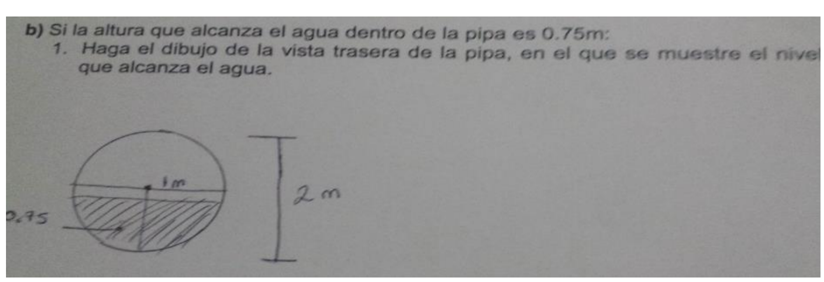
El Espacio de Trabajo Geométrico construido por los participantes se describe a continuación:

La primera pregunta presentada fue sobre cómo calcularían el volumen de agua que transporta una pipa que no está a su máxima capacidad, a la cual respondieron de la siguiente manera:


1. ¿cómo podríamos calcular el volumen que ocupa el agua? Justifica tu respuesta
Con el área de la base circular y multiplicandolo por el largo de la pipa.

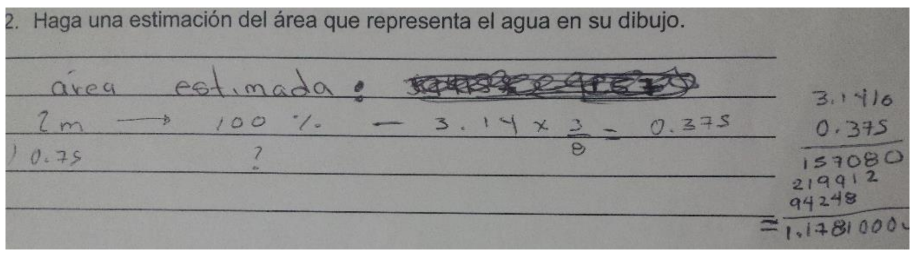
La respuesta anterior muestra que los participantes lograron identificar que en esta nueva actividad es posible aplicar las relaciones de proporcionalidad que descubrieron en la Actividad 2.

Lo siguiente fue que realizaran una representación gráfica de la vista trasera de la pipa. Las producciones de los participantes fueron de la siguiente manera:


b) Si la altura que alcanza el agua dentro de la pipa es 0.75m:
1. Haga el dibujo de la vista trasera de la pipa, en el que se muestre el nivel que alcanza el agua.

Posteriormente, los participantes tuvieron que estimar el área mojada de la parte trasera de la pipa, tomando en cuenta los datos de la imagen anterior, los participantes realizaron la estimación de la siguiente manera[2]:

Tipo de estimación 1:


2. Haga una estimación del área que representa el agua en su dibujo.

área estimada: ~~[illegible]~~

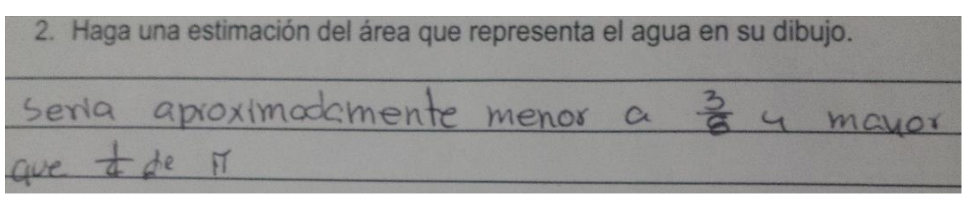
2 m → 100 % — 3.14 x $\frac{3}{8}$ = 0.375

0.75 ?

3.1416
0.375
157080
219912
94248
= 1.1781000

Aproximadamente la mitad de los participantes respondieron como se muestra en la imagen, establecieron una relación de proporcionalidad directa entre el porcentaje del diámetro que cubre el agua dentro de la pipa y el volumen de agua que hay en la pipa, es decir, dieron por hecho que la relación entre el área del circulo y del segmento circular tendría que mantener la misma proporción, dicha relación no se presentó en las actividades anteriores.

Tipo de estimación 2:


2. Haga una estimación del área que representa el agua en su dibujo.

Seria aproximadamente menor a $\frac{3}{8}$ y mayor que $\frac{1}{4}$ de π

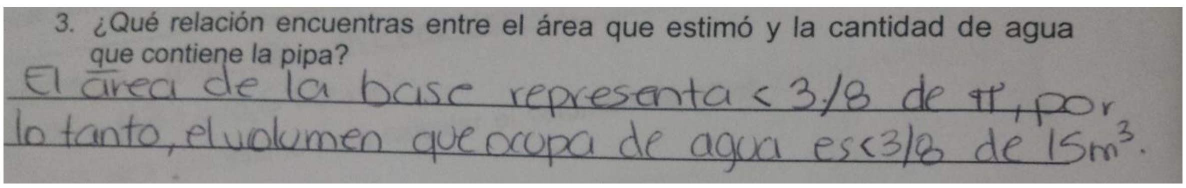
El resto de los participantes simplemente realizó una estimación tomando en cuenta la representación gráfica de la vista trasera de la pipa.

Al observar las respuestas correspondientes al tipo de estimación 1, en el cual se establecieron relaciones de proporcionalidad entre magnitudes que no mantenían dicha relación, el instructor optó por confrontar a los participantes, con la finalidad de aclarar

[2] Hasta el momento las producciones de los participantes fueron representadas mediante una sola imagen, a partir de aquí será más de una, ya que la manera de procesar y solucionar la problemática tomó dos vertientes dentro del mismo grupo donde se aplicó la secuencia:

las ideas sobre las relaciones establecidas, ante esto los participantes lograron identificar que la estimación 1 no resulta válida cuando se trata de cuerpos geométricos que no son primas de base rectangular.

Posteriormente, se les preguntó a los participantes si encuentran alguna relación entre el área que estimaron y la cantidad de agua que contiene la pipa, el tipo de respuestas fue como se muestra a continuación:

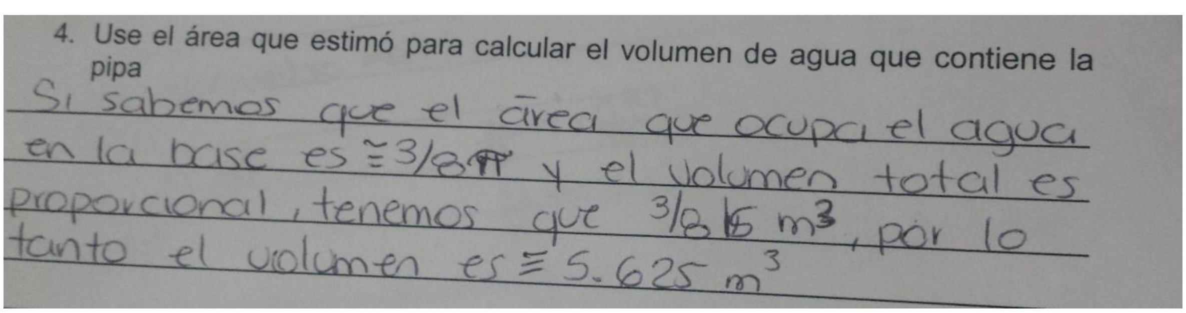


3. ¿Qué relación encuentras entre el área que estimó y la cantidad de agua que contiene la pipa?

El área de la base representa $< 3/8$ de π, por lo tanto, el volumen que ocupa de agua es $< 3/8$ de $15 m^3$.

En la imagen anterior se muestra cómo los participantes, a través de una serie de preguntas sobre la situación son capaces de relacionar magnitudes que están variando de manera proporcional, a pesar de que esté tipo de relaciones no es común que se trabajen en el currículo oficial, ya que se privilegian relaciones de proporcionalidad entre magnitudes lineales.

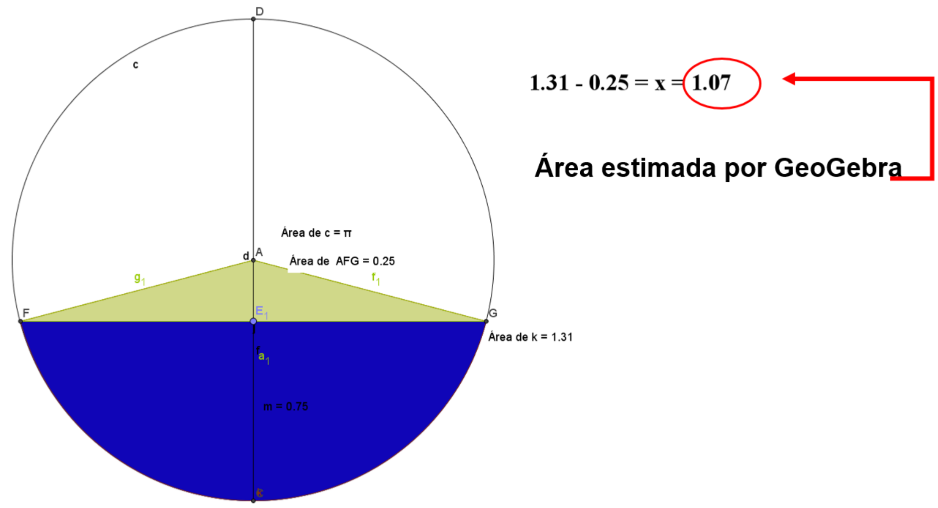
Después de lograr identificar la relación que básicamente resuelve el problema planteado, se les pidió que con la estimación realizada calcularán el volumen de agua que contiene la pipa para el caso en estudio, los participantes realizaron lo siguiente:



4. Use el área que estimó para calcular el volumen de agua que contiene la pipa

Si sabemos que el área que ocupa el agua en la base es $\cong 3/8 \pi$ y el volumen total es proporcional, tenemos que $3/8\ 15 m^3$, por lo tanto el volumen es $\cong 5.625 m^3$

Las primeras aproximaciones sobre el volumen resultaron apropiadas, posteriormente se les pidió que realizaran una construcción de la situación en GeoGebra que permitiera hacer variar la altura a la que llega el agua y que a su vez calcule el área mojada de la parte trasera de la pipa. Los participantes realizaron construcciones como las siguientes:



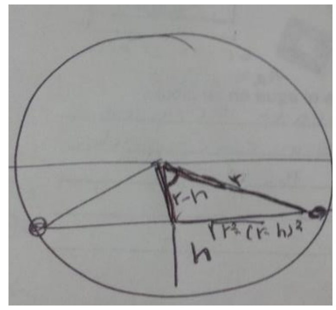
Es importante aclarar que el software no cuenta con una herramienta que proporcione automáticamente el área de figuras como la que representa el área mojada, ante esto, los participantes propusieron calcular el área del sector circular formado por el ángulo FAG que se muestra en la imagen y a dicha área restarle el área del triángulo AFG, para que GeoGebra pudiera calcular el área solicitada de manera automática los participantes optaron por introducir una fórmula látex y programarla para que realizara la resta antes mencionada.

Al comparar el cálculo realizado a través del software con las estimaciones que ellos realizaron, llegaron a la conclusión que habían realizado una buena aproximación.

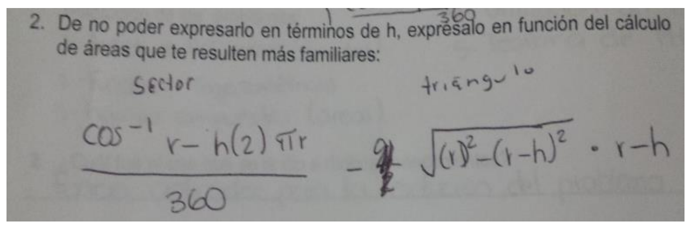
El proceso de generalización se llevó a cabo mediante la indicación de que construyeran un método analítico que permita calcular el área mojada y en consecuencia poder obtener el volumen de agua para cualquier altura *(h).*

El método que se utilizó fue similar al que realizaron con el software, decidieron construir una expresión analítica para calcular el área del sector circular, otra expresión para modelar el área del triángulo y al final restar ambas expresiones y obtener el modelo analítico que represente al área mojada en términos de *h,* a continuación, se muestran los resultados obtenidos por los participantes:

Representación gráfica:



Representación analítica:



2. De no poder expresarlo en términos de h, exprésalo en función del cálculo de áreas que te resulten más familiares:

sector triangulo

$$\frac{\cos^{-1} r-h(2)\pi r}{360} - \sqrt{(r)^2-(r-h)^2}\cdot r-h$$

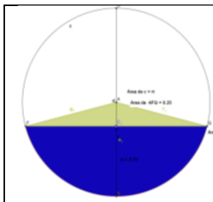
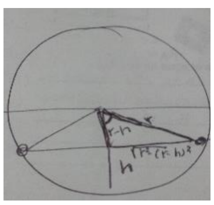
La expresión analítica que obtuvieron se realizó para cualquier valor de *h* y del radio (*r*), la mayoría de los participantes construyeron expresiones como la anterior, además hubo quienes modelaron la expresión para cualquier valor de h y para el caso especial en el que el radio mide 1, como es el caso del problema de la pipa.

Posteriormente, se les pidió a los participantes que calcularan el área mojada para distintas alturas del agua, utilizando para ello la expresión algebraica, lograron completar la tabla sin complicación alguna, durante la fase de presentación de la misma no hubo diferencias significativas entre los resultados obtenidos entre los equipos.

Para finalizar con la actividad matemática, los participantes tuvieron que exponer y justificar la expresión algebraica que construyeron, dicha justificación se basó en comprobar la correspondencia entre los resultados que daba el software al calcular el área del segmento circular y los resultados obtenidos al aplicar la fórmula, al identificar que ambos resultados coincidían concluyeron que la fórmula era válida.

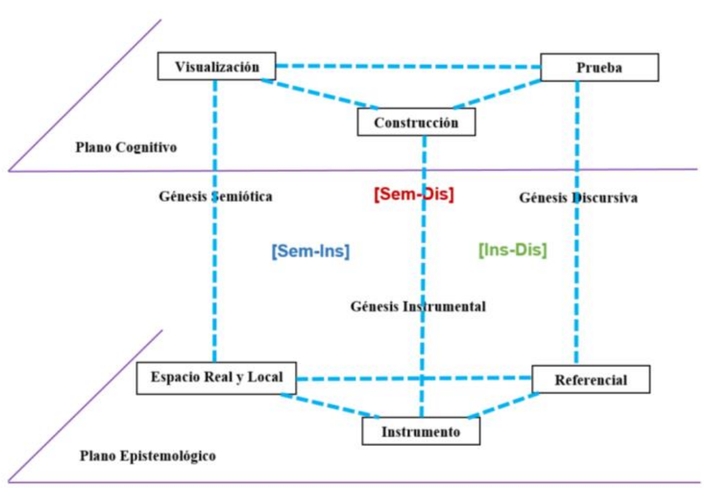
Elementos identificados correspondientes al ETGp:

Plano epistemológico	Génesis identificadas	Plano cognitivo
Referencial teórico: fórmula para calcular el volumen de un prisma de base rectangular, fórmula para calcular el área de un rectángulo, identificación de relaciones de proporcionalidad directa. teorema de Pitágoras, fórmula para calcular el área del círculo, razones trigonométricas, fórmula para calcular el área de un sector circular **Artefactos:** software GeoGebra, calculadora. **Espacio real y local:** representación de un segmento circular a través de la descomposición de áreas conocidas. Representación gráfica inicial:	**Génesis semiótica:** consideramos que durante la Actividad 3 se movilizó la génesis semiótica, ya que, a través del desarrollo de cada actividad propuesta, los participantes lograron relacionar los elementos del Espacio Real y Local con el proceso de visualización. **Génesis Instrumental:** podemos decir que se activó la génesis instrumental, ya que los participantes trabajaron con el software GeoGebra y lograron que realizara representaciones geométricas y cálculos a través de la programación del mismo, lo cual le permitió mejorar la visualización. **Génesis Discursiva:** la génesis discursiva se activó mediante los	**Visualización:** los elementos del Espacio Real y Local permitieron, a través de la génesis semiótica, que se llevará a cabo el proceso de visualización. Consideramos que la principal muestra de ello es la manera en la que los participantes lograron construir una representación analítica que modelara la problemática planteada, a partir del tratamiento de sus representaciones geométricas. **Construcción:** durante la Actividad 3, los participantes lograron realizar construcciones geométricas a través de los artefactos, las cuales les permitieron generalizar y construir modelos analíticos basados en dicha construcción geométrica.

 Representación gráfica final: 	diferentes procesos de validación de los resultados. Como se pudo observar los participantes lograron utilizar los elementos del referencial teórico para establecer conjeturas y generalizar sobre sus procedimientos, lo cual se realizó a través de las distintas preguntas planteadas durante la Actividad 3.	Además, podemos afirmar que los participantes lograron instrumentar el artefacto, ya que lo programaron para que realizara cálculos que no realiza de manera automática, como es el caso de calcular áreas de segmentos circulares. **Prueba:** identificamos que el proceso de prueba se presentó en tres momentos distintos. Momento 1: las pruebas y validaciones estuvieron dadas tomando como referencia los modelos geométricos, tal es el caso de la estimación de áreas, la cual se dijo que era menos de la mitad porque así lo percibían gráficamente. Momento 2: un segundo proceso de prueba consistió en validar las

		aproximaciones realizadas a través del software. Momento 3: el último proceso de prueba se desarrolló durante la validación de la expresión analítica a través de calcular el área para diferentes valores de *h.*

En esta actividad el esquema del Espacio de Trabajo Geométrico personal quedó definido de la siguiente manera:

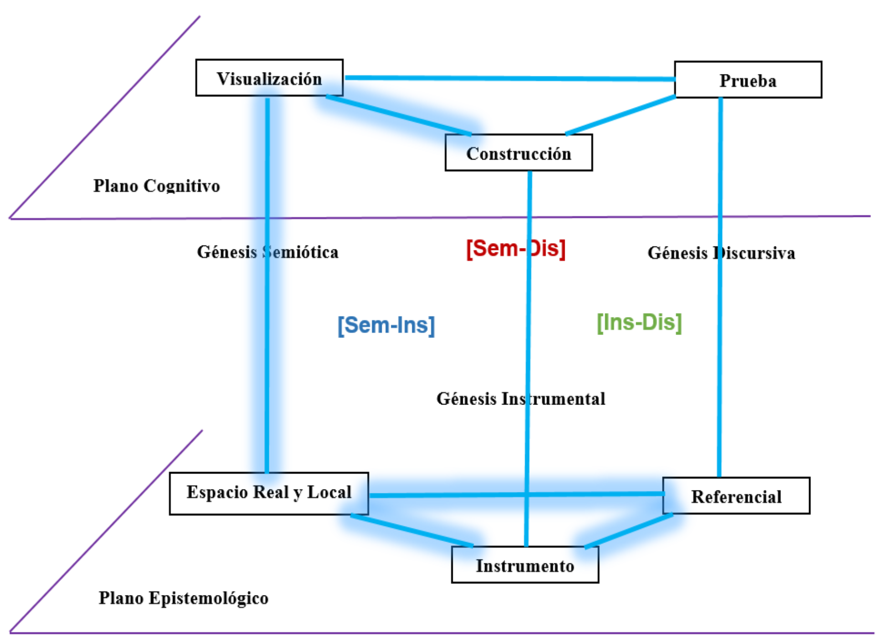


Durante el desarrollo de la Actividad 3, se activaron todas las génesis, por lo tanto, todos los elementos del ETGp estuvieron relacionados entre sí, lo cual resulta natural, ya que es ahí donde se termina con la actividad matemática de la secuencia.

Reflexiones sobre el análisis de la actividad matemática de los docentes participantes

A partir de la actividad matemática de los participantes, podemos inferir que formaron un Espacio de Trabajo Matemático personal (ETGp) en el cual se trabajó bajo el paradigma de la *Geometría Natural GI,* ya que las demostraciones y justificaciones que se realizaron tuvieron como fundamento la observación de casos particulares, además el espacio de trabajo conformado tuvo un mayor peso en la Génesis Instrumental y en la Semiótica los cual nos indica que se llevaron a cabo, en mayor medida, los procesos de experimentación y deducción mismos que son característicos de la GI.

Al analizar la conformación del espacio durante el desarrollo de las diferentes actividades podemos concluir, que de manera general el ETGp quedó conformado de la siguiente manera:



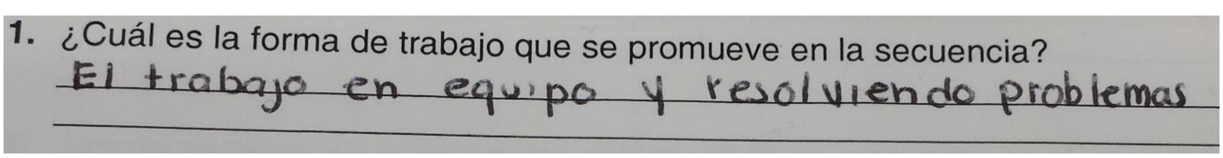
A partir del análisis realizado concluimos que los docentes enriquecieron cada uno de los elementos que conforman el Plano Cognitivo, ya que se sumaron objetos a cada uno de ellos, en el Referencial se agregaron objetos matemáticos como segmento circular, además se amplió el concepto de volumen de un cilindro, en cuanto a los Artefactos se incluyó el uso del software como una herramienta para modelar situaciones y poder analizar las magnitudes que están variando, por último en el Espacio Real y Local se incluyó la representación de objetos matemáticos abstractos a través de objetos concretos como por ejemplo la caja del camión y la cisterna de la pipa.

Actividad de cierre: reflexiones didácticas.

Al finalizar la actividad matemática los participantes respondieron un cuestionario referente a la actividad realizada y a su experiencia al resolver la secuencia.

A continuación, se describen y analizan las reflexiones didácticas realizadas por los participantes durante la actividad de Cierre:

Primeramente, se les pidió a los participantes que identificaran la forma de trabajo que se propone durante la secuencia, a lo que respondieron lo siguiente:


1. ¿Cuál es la forma de trabajo que se promueve en la secuencia?
El trabajo en equipo y resolviendo problemas

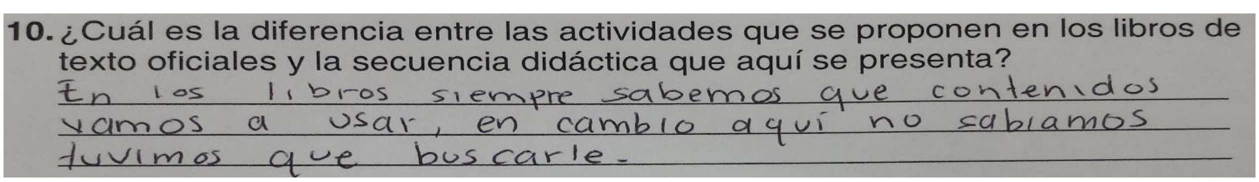
Al preguntar a los participantes sobre la sección en la cual presentaron mayores dificultades todos coincidieron en que fue calcular el área del segmento, ya que no habían resuelto problemáticas similares.

En cuanto al uso de manipulables y recursos tecnológicos, los docentes consideran que se utilizaron como apoyo para resolver el problema, además mencionan que uno de los aspectos que les resultaron más interesantes fue los tipos de problemas que se presentaron porque se utilizaron contextos muy reales.

Por otra parte, los participantes opinan que el uso que se le dio a las razones trigonométricas fue para resolver problemas, además mencionan que fue interesante que dichos problemas no se enfocaran en resolver un triángulo rectángulo.

Para finalizar el cuestionario se les pidió a los participantes que compararan la secuencia propuesta con las lecciones que se incluyen en los libros de texto oficiales de matemáticas de secundaria con los cuales ellos trabajan, las respuestas obtenidas fueron las siguientes:

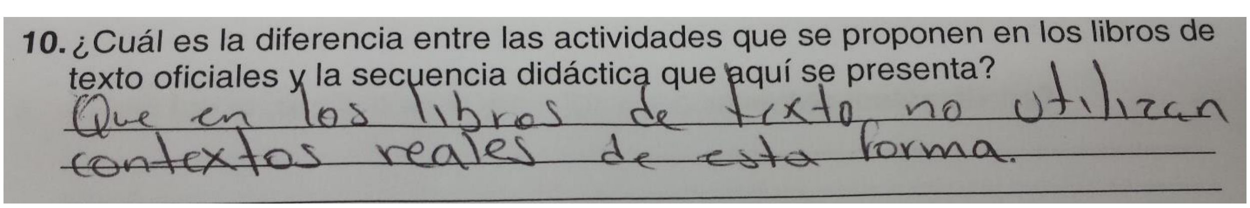
Los docentes identificaron como una diferencia la manera en la que se resuelven los problemas, mencionaron que en los libros de texto pueden prever la solución del problema a partir del contenido matemático que están trabajando en ese momento, por ejemplo si están estudiando el teorema de Pitágoras, todos los problemas que ahí se presenten tendrán que resolverse con base en dicho tema, en cambio en la secuencia aquí presentado los contenidos matemáticos no estaban explícitos e iban surgiendo conforme los iban necesitando para resolver la problemática.



10. ¿Cuál es la diferencia entre las actividades que se proponen en los libros de texto oficiales y la secuencia didáctica que aquí se presenta?

En los libros siempre sabemos que contenidos vamos a usar, en cambio aquí no sabiamos tuvimos que buscarle.

Además, consideran que una diferencia más se encuentra en los contextos que se plantean y la manera en la que se utilizan:



10. ¿Cuál es la diferencia entre las actividades que se proponen en los libros de texto oficiales y la secuencia didáctica que aquí se presenta?

Que en los libros de texto no utilizan contextos reales de esta forma.

Después de analizar la actividad de Cierre podemos concluir que los participantes, fueron capaces de realizar una actividad de meta-cognición al reflexionar sobre aspectos relacionados con su propio proceso de aprendizaje.

CONCLUSIONES

A continuación, se presentan los resultados más relevantes del proceso de realización del proyecto, decidimos presentar dichos resultados en los siguientes apartados.

1. Sobre el cumplimiento del Objetivo general del proyecto:

El objetivo del presente trabajo fue lograr que los docentes reflexionaran sobre su propia práctica matemática, lo cual fue posible lograr a través de involucrarlos en un ambiente de aprendizaje en el cual tuvieran que resolver problemas matemáticos poco comunes, para ello se diseñó una propuesta didáctica basada en la metodología ACODESA.

Dentro de cada secuencia hay una sección de Cierre donde se promueve la reflexión, de manera explícita, en la cual se presenta a los participantes un cuestionario en el que se incluyen preguntas sobre su actividad matemática.

El cuestionario mencionado, arrojó que los docentes presentan dificultades para reflexionar sobre su actividad matemática, ya que en un principio mostraron cierta resistencia, sin embargo, conforme avanzó el cuestionario se detectó que reflexionaban sobre aspectos como el diseño de la secuencia y la diferencia entre las matemáticas que se proponen en el currículo oficial y las que aquí se presentan.

2. Sobre el diseño de la Propuesta didáctica:

El diseño de la propuesta didáctica tuvo como sustento la metodología ACODESA, la cual resultó de gran utilidad, ya que cada elemento de la propuesta perseguía un objetivo y cumplió con una función específica, es por ello que la selección de cada actividad se realizó tomando en cuenta lo propuesto en la metodología y los objetivos a alcanzar.

La versión final de la propuesta es producto de dos puestas en escena, ya que a partir de las observaciones realizadas en cada una de ellas fue posible realizar ajustes en cuanto a la redacción de las preguntas y a las actividades que formaban parte de la misma.

Para validar la pertinencia de la propuesta didáctica se analizaron las observaciones realizadas durante las dos puestas en escena utilizando para ello el modelo teórico de los ETG. Este análisis nos indica que se alcanzó los objetivos que se pretendían lograr con dicha secuencia, principalmente en de involucrar a los docentes en ambientes de trabajo basados en la resolución de problemas que requieren de las razones trigonométricas.

3. Sobre el Análisis de la actividad matemática de los participantes:

Después de analizar el ETGp que se construyó a partir de la secuencia planteada, podemos decir que los participantes lograron poner en juego todos los elementos que formaban parte de su Plano Epistemológico y que fueron capaces de relacionarlos con cada uno de los componentes del Plano cognitivo.

En la descripción y análisis del ETGp se puede percibir que se activaron todas las génesis, sin embargo, fue en la Génesis Semiótica donde se presentó un mayor número de interacciones, lo cual nos indica que los participantes desarrollaron formas de trabajo que se pueden identificar en el paradigma de la Geometría Natural (GI).

En cuanto a la conformación del espacio pudimos observar que éste fue transformándose conforme se fue desarrollando la secuencia, es decir, en un primer momento los elementos de cada componente eran una serie de objetos que no tenían relación entre sí, posteriormente y a través de las actividades presentadas, los participantes lograron articular dichos conceptos y ampliar el significado de los mismos, incluso añadieron nuevos objetos matemáticos a la componente Referencial, por ejemplo, el de segmento circular.

Además, los participantes lograron aprender y diseñar técnicas que les permitieron resolver los problemas matemáticos que planteados. También, fueron capaces de utilizar sus conocimientos para resolver un tipo de problema a los que, según sus opiniones, no habían resuelto antes.

1. Sobre la realización del proyecto:

La razón principal por la cual se decidió realizar este trabajo, fue el interés que tenemos en lograr que los docentes reflexionen sobre sus prácticas matemáticas, con la finalidad de que dichas reflexiones impacten positivamente, en su práctica docente.

Consideramos que cada una de las acciones metodológicas que se llevaron a cabo para realizar este proyecto contribuyeron, en alguna medida, a lograr que se cumpliera con los objetivos planteados, desde la elección de los elementos teóricos hasta el análisis de la actividad matemática.

Diseñar la propuesta didáctica bajo la metodología ACODESA, permitió organizar un ambiente de trabajo en el cual cada uno de los elementos que conformaban las secuencias tuvo una intención particular, lo cual dio buenos resultados.

Por otra parte, analizar la actividad matemática bajo la perspectiva teórica de los ETG, nos permitió caracterizar cada uno de los elementos que formaron parte del ETGp y así poder distinguir los procesos que llevaron al participante a resolver la situación planteada.

El hecho de utilizar un marco teórico para diseñar la propuesta didáctica y uno distinto para analizar los resultados obtenidos, nos permitió mostrar las potencialidades de cada uno de ellos, ya que los resultados obtenidos fueron favorables.

Líneas abiertas:

Después de realizar este proyecto quedan posibles líneas de indagación que podrían seguirse en un futuro, como las que a continuación se mencionan:

- Extender el tema al estudio de las funciones trigonométricas.
- Involucrar a los docentes en actividades que impliquen el diseño de secuencias didácticas enfocadas en las razones trigonométricas.

Bibliografía

Arcavi, A. (2003). THE ROLE OF VISUAL REPRESENTATIONS IN THE LEARNING. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 217.

Bachillerato.DGB, D. G. (2013). *Programa de Matemáticas II y IV.*

DGB, D. G. (2013). *Matemáticas II y IV.*

Freudenthal, H. (1980). PROBLEMAS MAYORES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. *Major Problems of Matematics Education* (págs. 1-16). Berkeley: KluwerAcademic Publishers.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 6*(3).

Hitt, F., & Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencia en la modelización matemática y uso de calculadora. con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet.*

Kuzniak, A., & Richard, P. (s.f.). Espacios de Trabajo Maemático. Puntos de vista y perspectivas. *Relime*.

Montiel, E. G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico.*

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* México : Instituto Politécnico Nacional.

Montoya, E. (s.f.). EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO: UNA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS. *FONDECYT*, 5.

San Martín Sicre, O. (2003). *Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función y como razón.* Hermosillo: Universidad de Sonora.

SEP. (2006). *Matemáticas III. Volumen I. Libro para el maestro. TELEsecundaria.* México, D.F.: Secretaría de Educación Pública, SEP.

SEP. (2008). *Matemáticas II. Libro para el maestro. Volumen I. Telesecundaria.* México, DF: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2008). *Matemáticas III. Libro para el maestro. Volumen II. Telesecundaria.* México, D.F.

SEP. (2011). *Acuerdo número 592 por el que se establece la Articulación de la Educación Básica.* México D.F.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares: casos y perspectivas. En D. g. curricular., *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares: casos y perspectivas.* (págs. 38-43). Cuahutémoc, México, D.F.: SEP.

SEP. (2011). *Matemáticas. Cuarto grado.* México, DF.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2011). *Matemáticas. Quinto grado.* México, DF: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2011). *Matemáticas. Sexto grado.* México, DF: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2011). *Matemáticas. Tercer grado.* México, DF.: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2011). Programa de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación básica. México, D.F.: SEP.

SEP. (2011). *Programa de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación básica.* Mexico, D.F.: SEP.

SEP. (2011). *Programa de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas.*

SEP. (2011). *Programas de Estudio. Guía para el maestro.Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2012). *Http://www.pisa.sep.gog.mx/pisa en mexico.html*. Recuperado el 2012, de Http://www.pisa.sep.gog.mx/pisa en mexico.html.

SEP. (2014). *Desafíos matemáticos. Cuarto Grado. Libro para el maestro.* México, D.F.: Secretaría de Educación Pública, SEP.

SEP. (2014). *Desafíos matemáticos. Quinto grado. Libro para el maestro.* México, D.F.: Secretaría de Educación Pública, SEP.

SEP. (2014). *Desafíos matemáticos. Sexto grado. Libro para el maestro.* México, D.F.: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (s.f.). *Recursos didácticos. Primaria*. Obtenido de http://www.isftic.mepsyd.es/w3/recursos/primaria/matematicas/fracciones/menuu4.html

SEP, & SEBN. (2000). *Licenciatura en Educación Secundaria. Especialidad: Matemáticas.* Mèxico.

ANEXO 1. CUADERNILLO DE ACTIVIDADES

CUADERNILLO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS DIRIGIDAS A DOCENTES DE SECUNDARIA DE MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN

El presente cuadernillo está compuesto por tres secuencias didácticas en las cuales se presentan situaciones problema de contexto extra-matemático.

- Secuencia didáctica 1 “Cálculo de volúmenes”
- Secuencia didáctica 2 “Los cortes del carpintero”
- Secuencia didáctica 3 “La altura máxima del paso a desnivel”

SECUENCIA DIDÁCTICA 1. CÁLCULO DE VOLUMENES

Desde tiempos remotos, el cálculo de volúmenes ha sido uno de los contenidos matemáticos más prácticos, debido a su campo de aplicación, ya que es fácil encontrar un contexto extra-matemático en el cual sea necesario calcular el volumen de alguna mercancía o la capacidad de algún objeto, la naturaleza de los problemas, en la mayoría de los casos, exige que se conozca la fórmula que permiten calcular el volumen.
Por lo anterior, es común creer que para resolver problemas matemáticos en los que se involucre el cálculo de volúmenes, basta con recordar y aplicar las fórmulas, pero, qué pasa cuando no conocemos las fórmulas, cuando no basta con aplicarlas, ¿el problema de calcular volúmenes tendrá solución?

INICIO

A continuación, se presentan una serie de actividades en las que se propone calcular diferentes volúmenes contenidos en diferentes recipientes

Actividad 1
Calculando la cantidad de arroz que hay en la caja

a) En equipo, trabaje con la caja de cartón, el arroz y la regla, que serán proporcionadas por el instructor. Ponga dentro de la caja cierta cantidad de arroz y distribúyalo de manera uniforme.

1. Calculen el volumen de arroz que hay en la caja

____
____
____

2. Expliquen el procedimiento utilizado para calcular el volumen de arroz

____
____
____

3. ¿Qué relación encuentran entre las medidas de la caja y las medidas que utilizaron para calcular el volumen de arroz que hay en la caja?

____
____
____

4. Suponiendo, que el área que cubre el arroz en una de las caras de la caja es de 30 cm^2, ¿cuál es el volumen de arroz que contiene la caja que usted tiene?

____

____

____

Actividad 2

Calculando el volumen de carga que transporta un camión

a) Se necesita calcular la cantidad de trigo que transporta el camión de la imagen 1, sabemos que la capacidad de la caja es de 30 m^3 y que la caja no está llena. De manera individual, responda:

1. Si la caja no está llena, y suponiendo que el trigo está distribuido de manera uniforme: ¿Cuáles medidas necesitamos para calcular el volumen que ocupa el trigo dentro del camión?

____

____

____

2. ¿Cómo podemos obtener dichas medidas?

____

____

____

b) Si como se dijo al inicio, la capacidad de la caja es de 30 m^3, y además sabe que mide 2.4m de ancho y 2.5m de alto

1. ¿Qué medida necesitamos para conocer la cantidad de trigo que trae la caja?

____

____

____

c) Si la altura que alcanza el trigo dentro de la caja es de 1.5 m

1. Realice un dibujo que represente la situación

2. ¿Cómo es la relación entre el área de una de las caras frontales de la caja y el área que ocupa el trigo en esa cara?

____
____
____

d) Calcule la cantidad de trigo que hay en el camión en cada uno de los siguientes casos:

Altura que alcanza el trigo dentro de la caja del camión.	Área que cubre el trigo en la tapa.	Porcentaje de área de la tapa que cubre el trigo	Cantidad de trigo (m^3)	Porcentaje de espacio que ocupa el trigo dentro de la caja
1.75m				
1 m				
x m				
2. 5 m				

1. ¿Fue necesario conocer todas las medidas de la caja para determinar la cantidad de trigo?

____
____
____

La caja contenedora del camión tiene forma de prisma rectangular, pero algunos camiones que transportan líquidos, conocidos como camiones cisterna (popularmente llamados “pipas”), cuentan con un contenedor cilíndrico. ¿Podríamos aplicar el procedimiento anterior para calcular el volumen de agua en una pipa que no está completamente llena?

DESARROLLO

Actividad 3

Volumen de agua contenida en una pipa

a) Se tiene una pipa cuyo contenedor tiene forma de cilindro circular recto y cuenta con una capacidad es 15 m^3 aproximadamente y el diámetro de la cisterna mide 2m. Suponiendo que la pipa no está llena

1. ¿cómo podríamos calcular el volumen que ocupa el agua? Justifica tu respuesta

b) Si la altura que alcanza el agua dentro de la pipa es 0.75m:

1. Haga el dibujo de la vista trasera de la pipa, en el que se muestre el nivel que alcanza el agua.

2. Haga una estimación del área que representa el agua en su dibujo.

3. ¿Qué relación encuentras entre el área que estimó y la cantidad de agua que contiene la pipa?

4. Use el área que estimó para calcular el volumen de agua que contiene la pipa

____
____
____

c) Construya en GeoGebra una representación de la vista trasera de la pipa, en la que pueda hacerse variar la altura del agua entre 0m y 2m

1. Con las herramientas que proporciona GeoGebra, calcule el área que representa el agua en su modelo
2. ¿Cómo es la estimación que usted hizo en comparación con la que hizo GeoGebra?

____
____
____

d) A continuación, intentaremos encontrar un método analítico que permita calcular el área mojada y en consecuencia poder obtener el volumen de agua para cualquier altura h. En equipo, realice lo siguiente:

1. Si el nivel del agua alcanza una altura *h,* exprese el área mojada en términos de h:

2. De no poder expresarlo en términos de h, exprésalo en función del cálculo de áreas que te resulten más familiares:

3. Calcule el área mojada para cada uno de los siguientes valores de h:

Valor de *h*	Área mojada
0.5m	
1m	
1.5m	
1.75m	

CIERRE

Reflexionando sobre lo que aprendimos

Sobre el contenido matemático:

a) De manera individual realice lo siguiente:

1. ¿cuál es el nombre geométrico que reciben las figuras que tienen una forma similar a la que se ha nombrado área mojada?

____

2. Calcule el área de color azul, Figura 3:

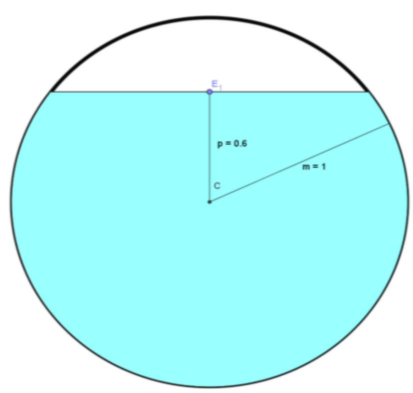


Figura 3

b) En equipo, expongan y justifiquen la expresión analítica que obtuvieron

1. ¿Consideran que la expresión que obtuvieron funciona para calcular el área de cualquier segmento circular? Justifique su respuesta

____

____

____

Sobre la secuencia didáctica:

a) De manera individual, realice lo siguiente:

1. Describa el proceso del trabajo que realizó durante la secuencia.

____
____
____

2. Mencione cuales, de las cuatro competencias que se proponen en el Programa de Matemáticas para Secundaria 2011, se promueven en esta secuencia didáctica.

____
____
____

3. ¿Cuál competencia se promueve en cada actividad y de qué manera?

____
____
____

4. ¿Qué sección presentó mayores retos al momento de resolverla?

____
____
____

5. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los conocimientos matemáticos?

____
____
____

6. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los recursos tecnológicos?

____
____
____

7. ¿Considera de utilidad el uso de manipulables? ¿Por qué?

____
____
____

8. ¿Qué aspectos le resultaron más interesantes de la secuencia didáctica? ¿Por qué?

____
____
____

9. ¿Qué opina del uso que se les dio a las razones trigonométricas?

____

____

____

10. ¿Qué opina de los contextos que se presentaron durante el desarrollo de la secuencia?

____

____

____

11. Si tuviera que dar una clase a sus alumnos de secundaria con esta secuencia, ¿cuáles serían las modificaciones que haría?

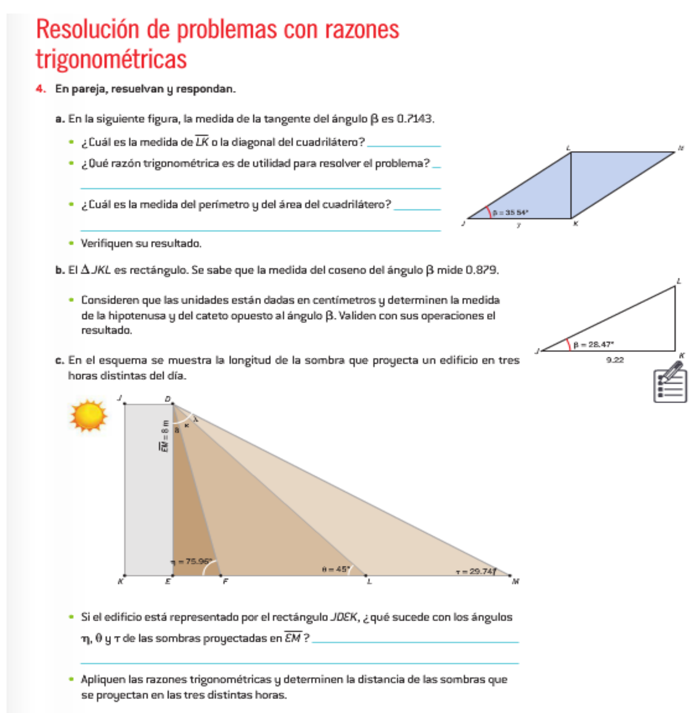
____

____

____

b) En equipo, realicen lo siguiente.

1. A continuación, se presenta una de las actividades que se proponen en un libro de matemáticas de 3° de secundaria sobre el tema de razones trigonométricas, resuelva la actividad que ahí se propone:



Resolución de problemas con razones trigonométricas

4. **En pareja, resuelvan y respondan.**

a. En la siguiente figura, la medida de la tangente del ángulo β es 0.7143.

- ¿Cuál es la medida de $\overline{LK}$ o la diagonal del cuadrilátero? ____________
- ¿Qué razón trigonométrica es de utilidad para resolver el problema? ____________
- ¿Cuál es la medida del perímetro y del área del cuadrilátero? ____________
- Verifiquen su resultado.

b. El ΔJKL es rectángulo. Se sabe que la medida del coseno del ángulo β mide 0.879.

- Consideren que las unidades están dadas en centímetros y determinen la medida de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo β. Validen con sus operaciones el resultado.

c. En el esquema se muestra la longitud de la sombra que proyecta un edificio en tres horas distintas del día.

- Si el edificio está representado por el rectángulo *JDEK*, ¿qué sucede con los ángulos η, θ y τ de las sombras proyectadas en $\overline{EM}$? ____________
- Apliquen las razones trigonométricas y determinen la distancia de las sombras que se proyectan en las tres distintas horas.
- $\overline{EF}$ ________
- $\overline{EL}$ = ________
- $\overline{EM}$ = ________

2. En plenaria, discutan sobre las diferencias entre el uso de las razones trigonométricas que se promueve en esta actividad y el que se promueve en la secuencia de “Cálculo de volúmenes”, ¿cuáles son esas diferencias?

c) De manera individual, responda:
1. Considera que la forma de trabajo que se propone en la secuencia de “Cálculo de volúmenes” funcionaría con sus alumnos. ¿Por qué?

SECUENCIA DIDÁCTICA 2. LOS CORTES DEL CARPINTERO

INICIO

Actividad 1

Como es bien sabido el oficio de la carpintería consiste en trabajar con la madera, por ejemplo, para construir puertas, ventanas o muebles.

A las personas que elaboran objetos de carácter más decorativo que utilitario se les ha nombrado ebanistas. Al observar la mayoría de las obras realizadas por ebanistas, podemos apreciar objetos muy detallados y estéticos, lo cual se debe a la precisión con la que se hacen los cortes.

a) Las siguientes imágenes muestran algunos muebles elaborados por ebanistas:

1. ¿Qué herramientas usadas por los ebanistas conoces?

____
____
____

2. ¿Qué tipos de cortes se le hacen a la madera para hacer los diferentes muebles? Dibújelos

3. ¿Qué herramientas de trabajo utiliza un ebanista para cortar la madera con mayor precisión?

___

___

___

4. Identifique y describa alguna fundamentación matemática que considere se encuentra tras los procedimientos que utiliza el ebanista para hacer los cortes.

___

___

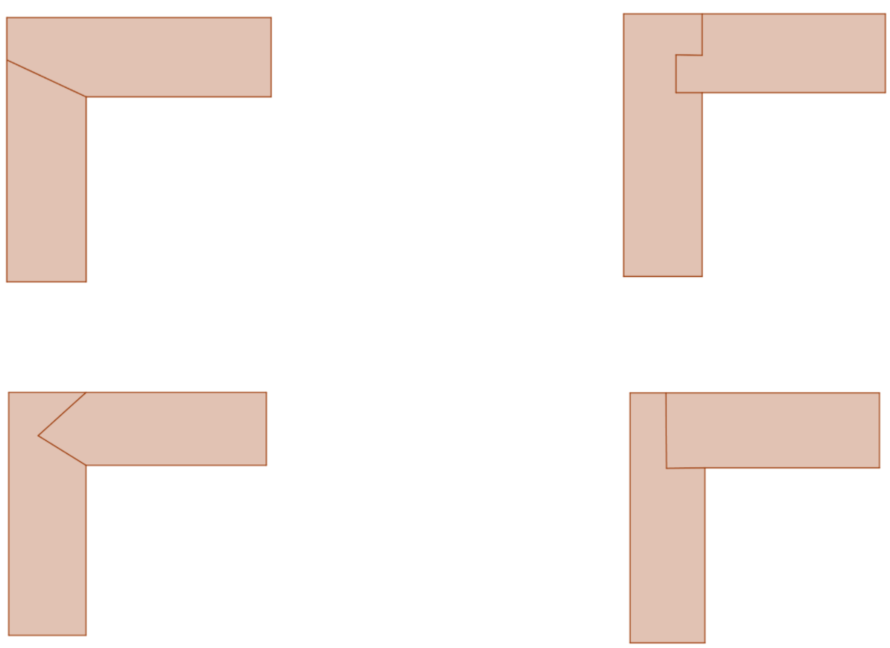
___

Desarrollo

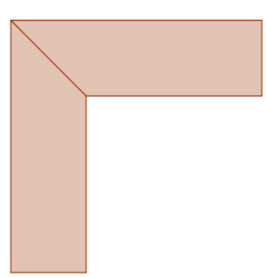
Suponga que en su casa se está construyendo la cocina integral que usted puede ver en la imagen:

Para construir las cubiertas dispone de dos formicas en forma de rectángulo que miden 60cm de ancho por 2m de largo.

Para cubrir la esquina de la cocina, los ebanistas podrían cortar las formicas de las muchas maneras diferentes, las siguientes imágenes muestran algunas de estas posibilidades:



Sin embargo, el corte más común por cuestiones de estética es el siguiente:



a) A continuación, el instructor le proporcionará dos plantillas que representan las formicas a una escala de 1:10 y una hoja en la que se representa la esquina de la cocina sobre la cual pegará ambas plantillas:

1. Realice cortes sobre las plantillas y colóquelas sobre la hoja, de tal manera que pueda representar la situación de cubrir la cocina
2. Ambas plantillas ya ensambladas, ¿lucen estéticas?

____

____

____

3. Describa el procedimiento que utilizó para trazar los cortes

____

____

____

4. Compartan y analicen los diferentes procedimientos que utilizaron para realizar los cortes

b) El instructor le proporcionará plantillas para que simule las siguientes situaciones (tomando en cuenta que estamos trabajando con el corte más común)

Ángulo de corte Formica 1	Ángulo de corte Formica 2	Diferencia entre las longitudes de los cortes
30°		
40°		
	55°	
		5 cm

1. Las situaciones representadas, ¿lucen estéticas?

____

____

____

2. ¿De qué depende que luzcan o no estéticas?

____
____
____

c) Calcula las medidas que tendrán las formicas en cada uno de los siguientes casos:

Ángulo de corte Formica 1	Medida del corte (cm)	Ángulo de corte Formica 2	Medida del corte (cm)	Diferencia entre los cortes
48°				
				10 cm
		47°		
X°				
		63°		

d) Realice una aplicación en GeoGebra que le permita manipular la situación antes planteada y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Existe un ángulo de corte que garantice que el margen de error sea cero? Justifique su respuesta

____
____
____

2. ¿Cuál sería el máximo en el corte error que a usted le parecería aceptable como usuario? ¿Por qué?

____
____
____

CIERRE

Reflexionando sobre lo que aprendimos

Sobre el contenido matemático

a) De manera individual realice lo siguiente:

1. ¿Cuál es el nombre geométrico que recibe la recta sobre la cual se realiza el corte, cuando el margen de error es cero?}

____
____
____

2. En equipo, expongan y justifiquen la expresión analítica que obtuvieron

____
____
____

3. ¿Consideran que la expresión que obtuvieron funciona para calcular el error en cualquier tipo de corte? Justifique su respuesta

____
____
____

Sobre la secuencia didáctica:

a) De manera individual, realice lo siguiente:

1. Describa el proceso del trabajo que realizó durante la secuencia.

____
____
____

2. Mencione cuales, de las cuatro competencias que se proponen en el Programa de Matemáticas para Secundaria 2011, se promueven en esta secuencia didáctica.

____
____
____

3. ¿Cuál competencia se promueve en cada actividad y de qué manera?

____
____
____

4. ¿Qué sección presentó mayores retos al momento de resolverla?
____
____
____

5. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los conocimientos matemáticos?
____
____
____

6. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los recursos tecnológicos?
____
____
____

7. ¿Considera de utilidad el uso de manipulables? ¿Por qué?
____
____
____

8. ¿Qué aspectos le resultaron más interesantes de la secuencia didáctica? ¿Por qué?
____
____
____

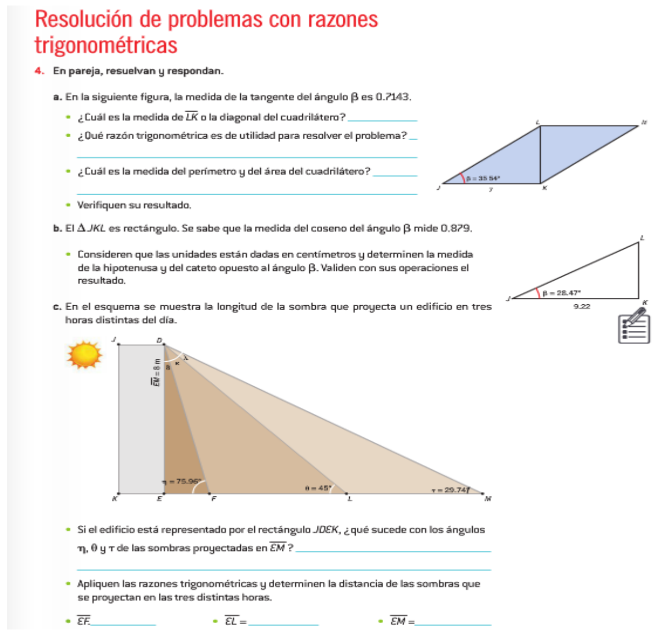
9. ¿Qué opina del uso que se les dio a las razones trigonométricas?
____
____
____

10. ¿Qué opina de los contextos que se presentaron durante el desarrollo de la secuencia?
____
____
____

11. Si tuviera que dar una clase a sus alumnos de secundaria con esta secuencia, ¿cuáles serían las modificaciones que haría?
____
____
____

b) En equipo, realicen lo siguiente.

1. A continuación, se presenta una de las actividades que se proponen en un libro de matemáticas de 3° de secundaria sobre el tema de razones trigonométricas, resuelva la actividad que ahí se propone:



Resolución de problemas con razones trigonométricas

4. En pareja, resuelvan y respondan.

a. En la siguiente figura, la medida de la tangente del ángulo β es 0.7143.

- ¿Cuál es la medida de $\overline{LK}$ o la diagonal del cuadrilátero? ___
- ¿Qué razón trigonométrica es de utilidad para resolver el problema? ___
- ¿Cuál es la medida del perímetro y del área del cuadrilátero? ___
- Verifiquen su resultado.

b. El ΔJKL es rectángulo. Se sabe que la medida del coseno del ángulo β mide 0.879.

- Consideren que las unidades están dadas en centímetros y determinen la medida de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo β. Validen con sus operaciones el resultado.

c. En el esquema se muestra la longitud de la sombra que proyecta un edificio en tres horas distintas del día.

- Si el edificio está representado por el rectángulo JDEK, ¿qué sucede con los ángulos η, θ y τ de las sombras proyectadas en $\overline{EM}$? ___
- Apliquen las razones trigonométricas y determinen la distancia de las sombras que se proyectan en las tres distintas horas.
- $\overline{EF}$ ___ • $\overline{EL}$ = ___ • $\overline{EM}$ = ___

2. En plenaria, discutan sobre las diferencias entre el uso de las razones trigonométricas que se promueve en esta actividad y el que se promueve en la secuencia de “Los cortes del carpintero”, ¿cuáles son esas diferencias?

___
___
___

c) De manera individual, responda:

1. Considera que la forma de trabajo que se propone en la secuencia de “Los cortes del carpintero” funcionaría con sus alumnos. ¿Por qué?

___
___
___

SECUENCIA DIDÁCTICA 3. El paso a desnivel

INICIO

El conductor de un trailer conoce la altura del trailer que maneja, la cual es la distancia entre la parte superior del remolque al suelo, cuando este se encuentra sobre un terreno plano. Suponiendo, que llega a un puente donde el señalamiento de la altura máxima permitida dice que es mayor a la altura del trailer:

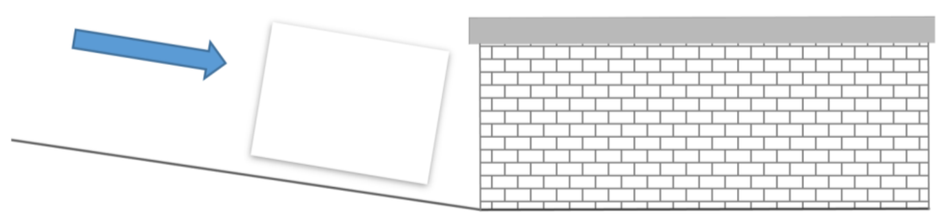
¿Crees que el trailer logre pasar por debajo del puente? Justifica tu respuesta

Actividad 1

Analizando la situación anterior desde una perspectiva matemática:

El instructor le proporcionará los siguientes materiales:

-Hoja de papel (representación del trailer)
-Dibujo en cartoncillo (representación del puente y del camino)



a) Dobla la hoja de papel, de tal manera que representes las siguientes tres situaciones:

   -El tráiler logra pasar por debajo del puente

   -El tráiler logra entrar, pero no logra salir del puente

   -El tráiler no logra entrar al puente.

b) A continuación, analizaremos la manera en la que varía la altura del tráiler (hoja de papel) con respecto al suelo, durante su recorrido antes y durante el ingreso al puente. Desliza la hoja de papel por el camino y haz variar la inclinación del camino, con base en lo anterior, contesta las siguientes preguntas:

1. Cuando el camino no está inclinado, ¿Cómo es la distancia entre la parte superior de la hoja y el camino durante todo el recorrido?

2. Cuando el camino está inclinado, ¿Cómo es la distancia entre la parte superior de la hoja y el camino durante todo el recorrido?

3. ¿En qué momentos la distancia entre la parte superior de la hoja y el camino cambia?

4. ¿Cuáles son las medidas que están cambiando?

DESARROLLO

Actividad 2

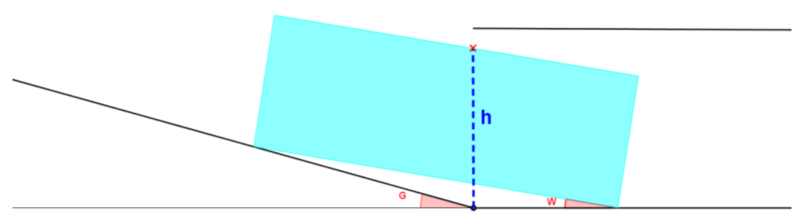
a) Suponiendo que un tráiler mide 14m de largo y 4m de alto, y quiere pasar por debajo de un puente cuya altura máxima permitida es de 4.2m, además sabemos que la inclinación del camino con respecto al suelo es de 7º.

1. ¿Crees que el tráiler logre pasar por debajo del puente?

b) Reunidos en equipo, respondan la pregunta anterior desde una perspectiva matemática, tomando en cuenta lo siguiente:

1. Realicen un bosquejo que permita visualizar la situación anterior:

2. Construyan una tabla en la que registren las diferentes alturas (h) entre el suelo y la parte superior de la caja (Apoyados en el software GeoGebra):



Largo del tráiler	Ancho del tráiler	Ángulo de inclinación del camino	Ángulo de inclinación del tráiler con respecto al camino	Medida de h	Altura del puente
14m	4m	7°	0°		4.2m
14m	4m	7°	1.5°		4.2m
14m	4m	7°	2°		4.2m
14m	4m	7°	2.5°		4.2m
14m	4m	7°	3°		4.2m
14m	4m	7°	3.5°		4.2m
14m	4m	7°	4.5°		4.2m

3. ¿Cuáles son las dimensiones que están variando durante el recorrido del tráiler?

____
____
____

4. Construye una gráfica en la que relaciones la medida del ángulo de inclinación del tráiler con respecto al camino (x) y la medida de h (y).

5. ¿Qué tipo de gráfica se formó?

____
____
____

6. ¿Qué representa el punto máximo de la gráfica en el problema?

____
____
____

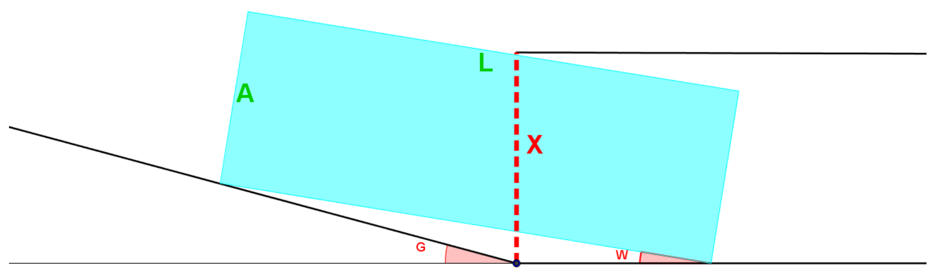
7. ¿En qué momento la distancia del suelo a la parte superior de la caja alcanza su nivel máximo, con respecto al suelo?

____
____
____

8. Cuando la distancia del suelo a la parte superior de la caja alcanza su nivel máximo ¿cómo es la relación entre el ángulo de inclinación del tráiler con respecto al camino y el ángulo de inclinación del camino?

____
____
____

c) Suponiendo que un tráiler mide L de largo y A de alto, y quiere pasar por debajo de un puente cuya altura es de h, además sabemos que la inclinación del camino con respecto al suelo es G y que la inclinación del tráiler con respecto al camino es X.



1. Modelen la expresión algebraica que permita determinar en qué momento el tráiler alcanza una altura máxima al ingresar al puente. (Apoyados en el software GeoGebra).

2. Utilicen la expresión anterior para revisar los resultados obtenidos en la tabla de la sección anterior:
3. ¿Obtuvieron los mismos resultados?

___

___

___

4. ¿Cuál es la utilidad de la expresión que construyeron?

___

___

___

5. ¿Cómo se utiliza la expresión algebraica que construyeron?

___

___

___

CIERRE

Reflexionando sobre lo que aprendimos

Sobre el contenido matemático

a) De manera individual realice lo siguiente:
1. ¿Cuál es el contenido matemático que se trabaja durante la secuencia?

____
____
____

c) En equipo, expongan y justifiquen la expresión analítica que obtuvieron
2. ¿Consideran que la expresión que obtuvieron funciona para calcular cuál es la altura máxima de un tráiler para que logre pasar por debajo de un paso a desnivel? Justifique su respuesta.

____
____
____

Sobre la secuencia didáctica:

a) De manera individual, realice lo siguiente:
1. Describa el proceso del trabajo que realizó durante la secuencia.

____
____
____

2. Mencione cuales, de las cuatro competencias que se proponen en el Programa de Matemáticas para Secundaria 2011, se promueven en esta secuencia didáctica.

____
____
____

3. ¿Cuál competencia se promueve en cada actividad y de qué manera?

____
____
____

4. ¿Qué sección presentó mayores retos al momento de resolverla?

____
____
____

5. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los conocimientos matemáticos?

____
____
____

6. ¿Cuál fue el uso que se le dio a los recursos tecnológicos?

____
____
____

7. ¿Considera de utilidad el uso de manipulables? ¿Por qué?

____
____
____

8. ¿Qué aspectos le resultaron más interesantes de la secuencia didáctica? ¿Por qué?

____
____
____

9. ¿Qué opina del uso que se les dio a las razones trigonométricas?

____
____
____

10. ¿Qué opina de los contextos que se presentaron durante el desarrollo de la secuencia?

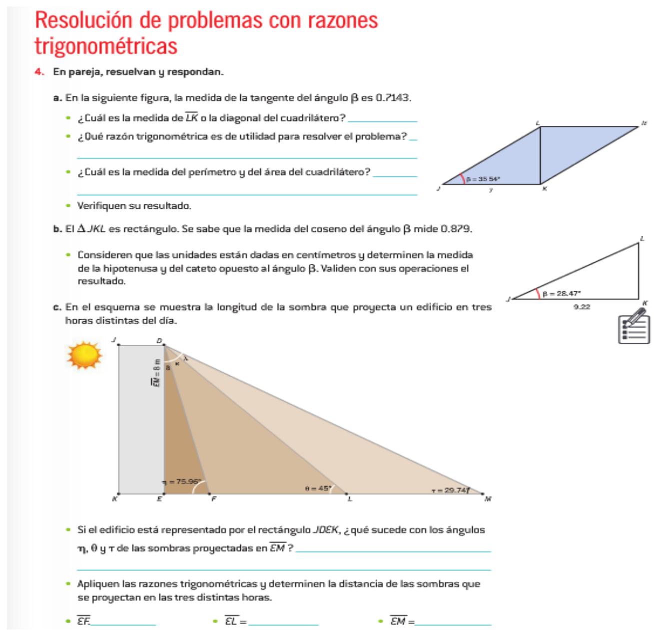
____
____
____

11. Si tuviera que dar una clase a sus alumnos de secundaria con esta secuencia, ¿cuáles serían las modificaciones que haría?

____
____
____

b) En equipo, realicen lo siguiente.

1. A continuación, se presenta una de las actividades que se proponen en un libro de matemáticas de 3° de secundaria sobre el tema de razones trigonométricas, resuelva la actividad que ahí se propone:



Resolución de problemas con razones trigonométricas

4. **En pareja, resuelvan y respondan.**

   a. En la siguiente figura, la medida de la tangente del ángulo β es 0.7143.
   - ¿Cuál es la medida de $\overline{LK}$ o la diagonal del cuadrilátero? ____________
   - ¿Qué razón trigonométrica es de utilidad para resolver el problema? ____________
   - ¿Cuál es la medida del perímetro y del área del cuadrilátero? ____________
   - Verifiquen su resultado.

   b. El ΔJKL es rectángulo. Se sabe que la medida del coseno del ángulo β mide 0.879.
   - Consideren que las unidades están dadas en centímetros y determinen la medida de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo β. Validen con sus operaciones el resultado.

   c. En el esquema se muestra la longitud de la sombra que proyecta un edificio en tres horas distintas del día.
   - Si el edificio está representado por el rectángulo *JDEK*, ¿qué sucede con los ángulos η, θ y τ de las sombras proyectadas en $\overline{EM}$? ____________
   - Apliquen las razones trigonométricas y determinen la distancia de las sombras que se proyectan en las tres distintas horas.
   - $\overline{EF}$ ____________ • $\overline{EL}$ = ____________ • $\overline{EM}$ = ____________

2. En plenaria, discutan sobre las diferencias entre el uso de las razones trigonométricas que se promueve en esta actividad y el que se promueve en la secuencia de “Los cortes del carpintero”, ¿cuáles son esas diferencias?

____
____
____

c) De manera individual, responda:

1. Considera que la forma de trabajo que se propone en la secuencia de “Los cortes del carpintero” funcionaría con sus alumnos. ¿Por qué?

____
____
____