



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

**Conocimiento Didáctico
Matemático del Profesor de
Bachillerato sobre las Ecuaciones
Lineales. Un estudio de casos**

T E S I S

Que para obtener el título de

Maestría en Ciencias

con especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

L.M. Guadalupe Morales Ramírez

Directores de tesis:

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

M. C. María Antonieta Rodríguez Ibarra

Hermosillo, Sonora

Enero, 2017

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos

Primeramente, doy gracias a Dios por permitirme tener un logro más en mi vida, por llenarme de fortaleza cada día y poder seguir adelante a pesar de las dificultades.

A mis padres, que se encuentran lejos, gracias por estar en mi vida.

A ustedes hermanos, que siempre han sido mi apoyo en momentos difíciles, muchas gracias por escucharme y preocuparse cuando más los necesito.

A todos mis maestros, por sus valiosas enseñanzas y por los comentarios realizados para la conclusión de mi trabajo, fue muy productiva sus reflexiones. Especialmente quiero agradecer a mis directores, Dr. Agustín Grijalva Monteverde y María Antonieta Rodríguez Ibarra quienes fueron mi guía durante mi paso por la maestría, muchas gracias por su paciencia, dedicación y comprensión.

A mis sinodales, por sus comentarios realizados para la mejora de este trabajo. Especialmente a la Dra. Silvia Elena Ibarra y al Dr. Ramiro Ávila que además fueron mis maestros y que contribuyeron en gran medida al logro de mi trabajo.

A la institución del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo realizado para poder lograr con éxito mi paso por la maestría.

A la familia Rosales Alcantar, que sin duda han contribuido en mi crecimiento como persona y que hasta la fecha lo siguen haciendo, muchas gracias por sus momentos compartidos en mis momentos de alegría y tristezas.

A Cesar Rosales, por acompañarme y estar a mi lado en mi paso por la maestría, sin duda tú también me has enseñado tanto. Gracias por todo.

A mis compañeros, de maestría que fueron parte de las discusiones y conocimientos aprendidos, por sus ideas y aportaciones al trabajo, con ustedes esto fue más interesante, especialmente a ti Lupita Lugo por todo tu apoyo incondicional.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	6
CAPÍTULO 1	8
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS	8
1.1 Introducción	8
1.2 Aspectos generales sobre la formación de profesores	8
1.3 El enfoque por competencias que declara la Reforma Integral de la Educación Media Superior	11
1.3 El diplomado en competencias docentes del nivel medio superior	17
1.4 Resultados de evaluación docente de la educación media superior	18
1.5 Las ecuaciones lineales en el bachillerato.....	20
1.6 Algunas dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones lineales	22
1.7 Algunas investigaciones relacionadas con el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM).....	23
1.8 La pregunta de investigación	25
1.9 Objetivo general y objetivos específicos.....	25
CAPÍTULO 2	27
2. ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLOGÍA.....	28
2.1 Introducción	28
2.2 Prácticas matemáticas y objetos matemáticos.....	28
2.3 Significado personal, institucional y de referencia	30
2.4 Configuraciones epistémicas.....	31
2.5 Normas y metanormas.....	32
2.6 Idoneidad didáctica	33
2.7 Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor	33
2.8 Metodología y acciones metodológicas.....	39
2.9 Acciones metodológicas para la investigación.....	39
2.10 la institución y selección de sujetos de investigación.....	40
2.10.1 La observación y grabación en la investigación	42
2.10.2 La entrevista y el protocolo de observación	42
2.10.3 Trabajo de campo de la investigación.....	43

2.11 Las características del profesor A y profesor B	44
Capítulo 3	46
3. ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DEL PROFESOR.....	46
3.1 Introducción	46
3.2 Análisis del significado institucional de referencia	47
3.3 Descripción de las Prácticas Matemáticas y Didácticas	63
3.3.1 Profesor A.....	64
3.3.2 Profesor B.....	73
3.4 Análisis de las configuraciones epistémicas.....	78
3.4.1 Profesor A.....	78
3.4.2 Profesor B.....	80
3.5 Análisis de las normas y metanormas.....	81
3.5.1 Profesor A.....	81
3.5.2 Profesor B.....	85
3.6 Análisis de la idoneidad didáctica	87
3.6.1 Profesor A	87
3.6.2 Profesor B.....	104
CAPÍTULO 4	119
4. CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR	119
4.1 Introducción	119
4.2 La caracterización del conocimiento didáctico matemático del profesor A y profesor B	119
4.2.1 Profesor A.....	119
4.2.2 La caracterización del profesor A.....	132
4.2.3 Profesor B.....	136
4.2.4 La caracterización del profesor B	148
CAPÍTULO 5	152
5. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES.....	152
5.1 Introducción	152
5.2 Aspectos a resaltar del trabajo de investigación	153
5.3 Conclusiones sobre los objetivos específicos.....	154
5.4 Conclusiones sobre el objetivo general	160
5.5 Aportaciones y limitaciones del estudio	161

5.6 Investigaciones abiertas.....	162
Referencias.....	163
Anexo 1.....	166
Anexo 2.....	168

INTRODUCCIÓN

En la siguiente investigación consiste en un trabajo descriptivo con el objetivo de analizar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor con relación a las ecuaciones lineales, enfocándonos en dos casos de estudio del nivel medio superior, identificando sus características relacionadas con el conocimiento didáctico y disciplinar que ponen en juego al desarrollar el tema.

Para la realización del estudio se utilizó el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) basado en las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), este modelo sirvió como base para la elaboración de los instrumentos de investigación, para la organización y análisis de los resultados, así como la interpretación de los mismos.

El trabajo está organizado en cinco capítulos, los cuales se describen a continuación de manera breve.

En el **Capítulo 1** se presenta la problemática de investigación, su justificación y objetivos, para él cual se hace una revisión sobre los aspectos generales sobre formación de profesores, resultados de evaluación y dificultades que se presentan al estudiar las ecuaciones lineales, así como un análisis del contexto de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) mismos que sirven para dar sustento a nuestro trabajo, además, se muestra la pregunta de investigación y los objetivos que se desprenden para el logro de ésta.

El **Capítulo 2**, se muestra la fundamentación teórica y metodológica de la investigación, en donde se realiza una descripción de los elementos teóricos utilizados en este trabajo, que fue el modelo del CDM, así como el análisis de otros modelos principales que han surgido en torno al desarrollo del conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas, lo que nos ha permitido tener la adecuada selección de nuestra fundamentación teórica y metodológica. Además, dadas las características de nuestro trabajo se procedió a utilizar la metodología cualitativa.

Con relación al **Capítulo 3**, se presenta la descripción de las prácticas matemáticas y didácticas, así como la forma de utilizar las herramientas teóricas del modelo del CDM, ya que éstas apoyaron al análisis del conocimiento didáctico-matemático del profesor con relación a las ecuaciones lineales.

En el **Capítulo 4**, se presenta la caracterización del conocimiento didáctico-matemático de cada uno de nuestros casos de estudio.

En el **Capítulo 5**, se describen los resultados y conclusiones obtenidos a partir de los datos analizados, además, la medida de logro de nuestros objetivos específicos y como consecuencia el logro del objetivo general, para posteriormente dar respuesta a la pregunta de investigación. Finalmente, se concluye con algunas aportaciones y limitaciones que se obtuvieron en el trabajo, así como futuras investigaciones tomando en cuenta este trabajo.

CAPÍTULO 1

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Introducción

Existen en el campo de la Matemática Educativa algunas investigaciones en relación con la formación de profesores y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aportando elementos de justificación a nuestra problemática. Como parte de este primer capítulo presentamos la pregunta de investigación y objetivos planteados con base en los elementos teóricos del modelo del *Conocimiento didáctico-matemático del profesor* (CDM). El trabajo está centrado en dar la caracterización del conocimiento didáctico-matemático de dos casos específicos de profesores sobre el tema de las ecuaciones lineales.

Más adelante se hablará con detalle de la importancia de dicho tema en nuestro trabajo, así como el de la institución.

1.2 Aspectos generales sobre la formación de profesores

Una problemática de interés en la investigación en Matemática Educativa es la formación de profesores, pues el papel de los profesores es de gran importancia para que los alumnos desarrollen competencias (integración de conocimientos, habilidades y actitudes) y en gran medida depende de las prácticas docentes.

Actualmente el sistema educativo en México ha sufrido cambios relevantes, uno de ellos es la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) donde se introducen aspectos centrales enfocados en el aprendizaje del alumno, sin embargo, para que el alumno logre un aprendizaje de calidad debe desarrollar ciertas competencias que declara dicha reforma. El papel que juega el profesor en el aula de clases para el logro de estas competencias es fundamental.

Sosa y Ribeiro (2014) señalan que “el profesor es un elemento clave en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática y por ende es fundamental conocer, comprender y caracterizar

el conocimiento del profesor” (p. 4). En nuestra concepción, es necesario mencionar que la caracterización del profesor debe ser tanto en el terreno de su conocimiento matemático como de los aspectos ligados con su didáctica, pues es la conjunción de estos dos elementos lo que puede facilitar o dificultar el aprendizaje de las matemáticas a sus alumnos.

De acuerdo con Rodríguez, García y Navarro (2013) citado en Garduño (2004) señala que “las competencias docentes pueden ser definidas como la forma práctica en que se articula el conjunto de conocimientos, creencias, capacidades, habilidades, actitudes, valores y estrategias que posee un docente y que determina el modo y los resultados de sus intervenciones pedagógicas” (p. 3). Uno de los retos que enfrenta la educación en nuestro país es la mejora de la calidad en el proceso educativo de los estudiantes, sin embargo, existen evaluaciones de conocimiento matemático que reflejan la deficiencia en los estudiantes de distintos niveles educativos, este es uno de los motivos por lo que es necesario que los profesores desarrollen un mayor dominio de conocimientos, habilidades y destrezas que les permita estar capacitados para un mejor desempeño académico.

Reconociendo que existen diversos problemas en la Educación Matemática, este trabajo está centrado en la función que realizan los profesores de matemáticas de la Educación Media Superior (EMS), así como las prácticas docentes que realizan en el aula, con la pretensión de caracterizar el conocimiento en sus dos modalidades, didáctico y matemático, así como también reflexionar si el nuevo modelo educativo basado en competencias está dando origen a nuevas formas de trabajo por parte de los profesores.

En este contexto, es importante que los profesores reflexionen acerca de sus prácticas profesionales y estén conscientes que no es suficiente poseer dominio de la disciplina que enseña, sino también es necesario poseer estrategias didácticas para su implementación. Godino (2009, p.2) suele reconocer que:

“el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos). Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje”.

El profesor tiene la responsabilidad de promover en sus estudiantes ciertas competencias señaladas en los programas de estudio, motivando la generación de conocimiento matemático, el desarrollo de las habilidades necesarias para enfrentar con éxito los problemas y una actitud positiva hacia la actividad de resolución de problemas. Aunque son muchos los factores que intervienen en los procesos de estudio, comúnmente se asigna una fuerte responsabilidad al profesor de matemáticas en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Para orientarnos en cuál es la actividad que todo docente debe realizar en un salón de clases Perrenoud (2001, p.503-523) propone nueve criterios generales de formación docente que los profesores del siglo XXI deben de poseer. Dichos criterios son los siguientes:

1. *“Una transposición didáctica fundada en el análisis de las prácticas y de sus transformaciones,*
2. *Un referencial de competencias que identifique los saberes y capacidades requeridos,*
3. *Un plan de formación organizado en torno a competencias,*
4. *Un aprendizaje a través de problemas, un procedimiento clínico,*
5. *Una verdadera articulación entre teoría y práctica,*
6. *Una organización modular y diferenciada,*
7. *Una evaluación formativa fundada en el análisis del trabajo,*
8. *Tiempos y dispositivos de integración y de movilización de lo adquirido,*
9. *Una asociación negociada con los profesionales”.*

Evidentemente estos criterios van dirigidos a cualquier profesor que imparta cualquier disciplina, sin embargo, dichos criterios tienen sentido si se dan de una manera integral y sistemática, además de manera general estas se relacionan con las competencias docentes que declara la RIEMS.

1.3 El enfoque por competencias que declara la Reforma Integral de la Educación Media Superior

Como ya se ha mencionado anteriormente, el modelo curricular de la Educación Media Superior (EMS) en México está basado en el enfoque por competencias, se ha observado que en los últimos años la EMS en nuestro país ha experimentado varios cambios, las propuestas curriculares han desarrollado diferentes necesidades, formas de organización del aprendizaje y han sido planteadas distintos enfoques. La última reforma para la educación media superior fue puesta en marcha en el 2008, que introdujo planteamientos centrales como el de la enseñanza enfocada en el desarrollo de competencias que deben tener los egresados del nivel media superior.

El proceso educativo se realiza y desarrolla en condiciones muy diversas y con una variedad de modelos educativos, uno de los principales propósitos de la RIEMS es establecer un marco curricular común entre los diferentes subsistemas a partir del enfoque basado en competencias. A continuación, describimos algunos elementos relevantes para el desarrollo de este trabajo.

La reforma pretende que surjan cambios sustanciales, particularmente en la modificación de un sistema tradicional de enseñanza por parte de los profesores. De acuerdo a nuestra concepción, la práctica docente en el bachillerato no es una tarea fácil, porque para el profesor implica varios retos, como los de implementar estrategias que faciliten el proceso de enseñanza auxiliando al alumno para la apropiación de los conocimientos.

De acuerdo con los planteamientos de la RIEMS, para el éxito de dicha reforma es requisito que los profesores de educación media superior realicen modificaciones a sus prácticas y participen en programas de formación y actualización docente. Según la Dirección General de Bachilleres (DGB), el docente deberá identificar las áreas que necesita fortalecer ya sea en el campo pedagógico, disciplinar, desarrollo académico o tecnología educativa. Sin embargo, es importante mencionar que estos cambios se deben dar gradualmente en las instituciones, y que además el profesor sea consciente y esté dispuesto a participar en estas actualizaciones que le ayuden a implementar y facilitar los conocimientos en el aula de clases y así lograr una mejora en el proceso de enseñanza.

La Secretaría de Educación Pública (SEP) en el documento titulado “Normatividad académica para el personal docente del Bachillerato General modalidad escolarizado” menciona que “es preciso mejorar la calidad de la educación, siendo necesario producir transformaciones en el sistema, profesionalizar y normar las acciones de las instituciones educativas” para lo cual en dicho documento se cita el acuerdo secretarial 447, donde se describen las competencias y atributos docentes para quienes impartan en la educación media superior modalidad escolarizada.

Con base en el acuerdo secretarial 447 que declara “las competencias docentes son las que formulan cualidades individuales, de carácter ético, académico, profesional y social que debe reunir el docente de la EMS, y consecuentemente definen su perfil”.

En este contexto, la RIEMS pretende elevar la calidad de la educación, mejorar el logro académico de los estudiantes y el desarrollo de competencias por parte del profesor. A continuación, se describen las competencias profesionales que el profesor del Sistema Nacional de Bachillerato debe desarrollar en el aula de clases.

1. Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional
2. Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.
3. Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.
4. Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.
5. Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.
6. Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
7. Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes.
8. Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.

Lo anterior nos lleva a reflexionar sobre las prácticas que realiza el profesor de bachillerato en el aula, de acuerdo a los planteamientos de la estructura curricular del bachillerato que establece la Dirección General de Bachillerato, en donde se propone “que la enseñanza centrada en el alumno debe ser a través de la resolución de problemas con el apoyo del paradigma constructivista del aprendizaje a fin de generar una propuesta didáctica que promueva el desarrollo de las habilidades del pensamiento y el rigor lógico que se requiera en el ámbito científico”

Para ello no es suficiente que los profesores de la educación media superior sean expertos en la disciplina o materia por impartir, ya que no acredita que se cuente con las habilidades y capacidades necesarias para enseñar de manera adecuada y eficaz, ni que propicie el aprendizaje de los alumnos; para un desarrollo integral de los estudiantes se requiere de un nuevo tipo de profesores, que atiendan lo señalado por la RIEMS.

Por otro lado, la RIEMS define el perfil básico de los egresados, estableciendo los desempeños comunes que los estudiantes de bachillerato deben conseguir, independientemente de la modalidad de subsistemas que cursen, en lo que constituiría el eje de identidad de la educación media superior. En este sentido, surge la necesidad de formular propuestas curriculares que den respuesta a las necesidades de la sociedad y los estudiantes, pues este nivel educativo debe contribuir a un crecimiento de los individuos a través del desarrollo de habilidades, actitudes y valores que les permitan desempeñarse como miembros de una sociedad cada vez más compleja.

Es importante resaltar el término de competencias pues regularmente es usado con mayor frecuencia en los programas de estudio, currículos, y reformas de la educación básica y media superior. De acuerdo con Godino (2009) “el término *competencia* ha penetrado fuertemente en el discurso de la educación matemática, sobre todo en los ámbitos del desarrollo curricular, la práctica de la enseñanza y la evaluación, donde se habla con frecuencia de “enseñar por competencias”.

A partir de esto se abordan algunas definiciones de competencias para el perfil básico del egresado de la EMS. De acuerdo con la RIEMS, en un documento de la Asociación

Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES) se definen las competencias como:

“Conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales, que debe reunir un titulado para satisfacer plenamente las exigencias sociales. Fomentar las competencias es el objetivo de los programas educativos. Las competencias son capacidades que la persona desarrolla en forma gradual y a lo largo de todo el proceso educativo y son evaluadas en diferentes etapas. Pueden estar divididas en competencias relacionadas con la formación profesional en general (competencias genéricas) o con un área de conocimiento (específicas de un campo de estudio)”. (RIEMS 2008)

Otra definición que vale la pena considerar es la que aparece en la carta descriptiva del COBACH:

“Las competencias son procesos complejos de desempeño integral con idoneidad en determinados contextos, que implican la articulación y aplicación de diversos saberes, para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación, flexibilidad, creatividad y comprensión, dentro de una perspectiva de mejoramiento continuo y compromiso ético”

Partiendo de que existe una estrecha relación entre la sociedad y la educación, donde la primera está en constante transformación, estas competencias pretenden que los estudiantes desarrollen conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes y valores permitiéndoles desenvolverse de manera integrada y efectiva en la construcción de su propia realidad. Las competencias para la vida se desarrollan a lo largo de todo el proceso educativo, dentro y fuera de la escuela, de manera formal e informal, por eso las *competencias genéricas* son las que articulan y dan identidad a la Educación Media Superior (EMS) y son las que determinaran el perfil del egresado del Sistema Nacional de Bachilleres (SNB). “Puesto que nuestro trabajo se desarrolla en este contexto, estamos interesados en reflexionar tanto en las competencias genéricas como en la disciplinares, centrando la atención en las que el profesor de Matemáticas está promoviendo en el aula de clase.

Las competencias reconocidas en la educación media superior de nuestro país son de tres tipos: profesionales, genéricas y disciplinares. Las competencias profesionales se dividen en básicas y extendidas, y se refieren a un campo del quehacer laboral, con base en la RIEMS (2008) la define como; “Capacidad productiva de un individuo que se define y mide en términos de desempeño en un determinado contexto laboral, y no solamente de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes; éstas son necesarias, pero no suficientes por sí mismas para un desempeño efectivo”.

Por su parte las competencias genéricas son aquellas que permiten a los bachilleres desarrollarse como personas y a desenvolverse exitosamente en una sociedad. Con base al documento de la RIEMS (2008, p. 55) plantea que “las competencias genéricas son transversales; no se restringen a un campo específico del saber ni del quehacer profesional y su desarrollo no se limita a un campo disciplinar, asignatura o módulo de estudios. La transversalidad se entiende como la pertinencia y exigencia de su desarrollo en todos los campos en los que se organice el plan de estudios. Por otra parte, las competencias disciplinares se refieren a la disciplina misma, son las que requieren de conocimientos, habilidades y actitudes para la resolución de problemas, de articular la teoría disciplinar con la práctica de resolución. Estas competencias que el alumno debe desarrollar se dividen en básicas y extendidas buscando propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico, reflexivo y crítico entre los estudiantes”.

Las competencias genéricas que se establecen en la RIEMS son las siguientes:

1. Se conoce valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros
3. Elige y practica estilos de vida saludable
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de su vida.
8. Participa y colabora de una manera efectiva en equipos diversos.
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Las *competencias disciplinares* son relevantes para el proceso de estudio del alumno, pues éstas se caracterizan por integrar los conocimientos, habilidades y actitudes enfocados a la resolución de problemas de la disciplina.

Estas competencias disciplinares matemáticas son:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Para desarrollar dichas competencias, es necesario que el profesor vaya más allá de sus prácticas tradicionales de enseñanza; las cuales se basan en un modelo de enseñanza centrado en la exposición del profesor, transmisión y comunicación de información, reproducción de procedimientos o algoritmos, siendo el profesor el único actor, mientras que el papel de los estudiantes es únicamente receptor de información esperando que el profesor indique qué hacer o realizar. El trabajo docente es un factor influyente y fundamental en el aprendizaje del alumno, pues debe analizar y proponer problemas que promuevan el interés de los estudiantes y que se presten para generar nuevos conocimientos, promuevan el trabajo individual y en equipo, el razonamiento y la argumentación de sus ideas de los estudiantes entre otros aspectos.

1.3 El diplomado en competencias docentes del nivel medio superior

A partir del inicio de la RIEMS se creó y llevó a cabo el diplomado en Competencias Docentes en el Nivel Medio Superior implementado en el 2008, con la pretensión de impulsar que los profesores de la educación media superior modifiquen sus prácticas, es relevante mencionar que dicho diplomado es un aspecto necesario para el fortalecimiento de las prácticas docentes, sin embargo, no es suficiente pues no asegura que sus prácticas sean modificadas. El diplomado está dirigido a profesores de bachillerato, según la Secretaría de Educación Media Superior ha sido relevante para la capacitación del desarrollo de competencias de los profesores, pues ha tenido una amplia cobertura en el país iniciando con 20 mil profesores hasta 240 mil como parte del programa Sectorial de Educación 2006-2012. Según la Subsecretaria de Educación Media Superior (SEMS), los profesores al cursar el diplomado estarían capacitados para desarrollar las competencias descritas en el acuerdo secretarial 447.

El Diplomado en Competencias Docentes en el Nivel Medio Superior está dirigido a docentes de EMS de instituciones públicas o privadas interesados en mejorar sus competencias docentes, contribuyendo así al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, siendo una estrategia de formación del Programa de Formación Docente en la Educación Media Superior (PROFORDEMS), para contribuir al alcance del perfil del docente de la EMS.

La Secretaría de Educación Pública, a través de la Subsecretaría de Educación Media Superior y con la participación de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (AUNIES), abre este espacio académico con el propósito de *“formar profesores de la EMS bajo el enfoque por competencias establecido en el Marco Curricular Común, con base en los referentes teóricos, metodológicos y procedimentales que sustentan la RIEMS, para que transformen su práctica docente mediante la incorporación de estrategias innovadoras basadas en la construcción de competencias” PROFORDEMS (2008).*

En general, el Diplomado en Competencias Docentes en el Nivel Medio Superior sustenta que *“el profesor será capaz de generar ambientes y aplicar estrategias de aprendizaje que favorezcan al estudiante en el desarrollo de competencias establecidas en el Marco Curricular Común, a través de una formación innovadora que le provea de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para la vida”.*

Aunque esta iniciativa muestra fuerte impacto en la formación de profesores para la mejora en el desarrollo de competencias y los procesos de aprendizaje y enseñanza, en la actualidad los resultados de evaluación a estudiantes no muestran resultados favorables. Por ejemplo, en PISA (2012) “más de la mitad de los estudiantes mexicanos se ubica en los niveles bajos en Matemáticas (23% Debajo del nivel 1 y 32% en el nivel 1). Aun cuando estos jóvenes pueden realizar tareas sencillas, como efectuar operaciones aritméticas, muchos de ellos presentan deficiencias para resolver problemas matemáticos complejos y para desarrollar un pensamiento abstracto, lo que se reflejará en dificultades para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y lograr un aprendizaje a lo largo de la vida”.

1.4 Resultados de evaluación docente de la educación media superior

Es importante reflexionar sobre los docentes y observar la calidad de la educación en México que actualmente imparten los profesores de matemáticas en el nivel medio superior. La Secretaría de Educación Pública (SEP) y el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) cada año llevan a cabo un concurso de examen de oposición para el ingreso al servicio profesional docente en educación media superior; el propósito de esta evaluación es determinar si el profesor está capacitado o cuenta con las

competencias necesarias para desempeñarse como docente en algún subsistema educativo, cabe destacar que para la evaluación en matemáticas no necesariamente debe realizar el examen alguien especializado en dicha disciplina, pues es posible que participen todas aquellas personas que hayan tenido una formación en relación a las matemáticas.

La evaluación se refiere a diferentes aspectos del perfil de ingreso, las consideraciones a evaluar según la SEP son: conocimientos sobre los contenidos disciplinares, habilidades docentes, plan de clase y exprese, estos dos últimos se refieren a la manera de organizar, comunicar y planear la materia a impartir, a las estrategias o competencias que debe desarrollar para promover el conocimiento y competencias en sus estudiantes. Se evalúan tres niveles de desempeño posibles: Nivel I, Nivel II y Nivel III. Cada nivel de desempeño identifica lo que un profesor es capaz de hacer. Además, en cada uno de los instrumentos a evaluar se encuentran apartados en los que se describen aspectos específicos de cada nivel.

En términos generales el Nivel I, significa un dominio insuficiente del profesor en conocimientos y habilidades contemplados en el instrumento. El Nivel II, significa que el profesor muestra un dominio suficiente y organizado de los conocimientos y habilidades contemplados en el instrumento, y el Nivel III, que el profesor además de mostrar un dominio suficiente y organizado de los conocimientos y habilidades contemplados en el instrumento, demuestra una amplia capacidad de generalización a situaciones novedosas y complejas; es decir, que es capaz de aplicar estos conocimientos y habilidades, en situaciones y escenarios diversos.

Los profesores, son considerados idóneos, si obtiene al menos el Nivel II en todos los instrumentos de evaluación que constituyen el proceso, es decir, los profesores que se encuentran con dominio suficiente y organizado de los conocimientos y son capaces de implementar estrategias didácticas que promuevan el desarrollo de competencias de los estudiantes.

De acuerdo con las estadísticas del concurso de oposición para el ingreso al servicio profesional docente de la EMS ciclo escolar 2015-2016, el número y porcentaje de sustentantes que presentó el examen según el subsistema y la federación, para los Colegios de Bachilleres del Estado de Sonora, el número de sustentantes que presentó el examen

para el ingreso a la educación media superior fue de 336 maestros de 590, que corresponde al 56.95% del total. Para el área de Matemáticas del COBACH solamente el 10.94 % del total resultaron sustentantes idóneos, es decir, aquellos que cuentan con al menos el Nivel II en todos los instrumentos de evaluación que constituyen el proceso.

A continuación, se describe la lista de prelación del ciclo 2015-2016 de la asignatura de Matemáticas del subsistema Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Lista de Prelación															
Entidad:		SONORA													
Función:		DOCENTE													
Asignatura:		MATEMÁTICAS													
Subsistema:		COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA													
Prestación en lista de prelación	Folio del sustentante	Grupo de desempeño	Resultados de la evaluación												
			Examen de Conocimientos sobre Contenidos Disciplinarios				Examen de Conocimientos sobre Habilidades Docentes				Plan de clase		Examen		
			Nivel de desempeño	Puntuación total en el instrumento	ALGEBRA Y GEOMETRÍA	TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA	CÁLCULO Y ESTADÍSTICA	Nivel de desempeño	Puntuación total en el instrumento	Reflexión teórica de la RIESMS	Operatividad de la RIESMS	Nivel de desempeño	Puntuación total en el instrumento	Nivel de desempeño	Puntuación total en el instrumento
1	261400027823	A	NIII	127	43	40	44	NIII	118	52	66	NIII	130	NIII	115
2	261400056662	A	NIII	118	44	40	34	NIII	127	55	72	NIII	124	NIII	115
3	261400054512	B	NIII	117	43	43	31	NIII	117	44	73	NII	102	NIII	112
4	261400041451	C	NIII	128	46	43	39	NII	111	46	65	NII	104	NIII	112
5	261400024413	C	NIII	122	41	44	37	NII	111	51	60	NIII	121	NII	110
6	261400011834	C	NIII	119	49	39	31	NIII	121	49	72	NII	106	NII	110
7	261400034088	C	NIII	116	42	37	37	NIII	114	43	71	NII	105	NII	105
8	261400066680	D	NII	113	46	36	31	NIII	116	52	64	NII	104	NII	110
9	261400031603	D	NII	111	46	32	33	NII	108	46	62	NIII	108	NII	110
10	261400043240	D	NII	110	35	41	34	NII	108	43	65	NIII	117	NII	100
11	261400068988	D	NII	106	38	25	43	NII	113	53	60	NII	106	NIII	120
12	261400004618	E	NII	115	38	42	35	NII	103	36	67	NII	107	NII	102
13	261400008203	E	NII	111	42	27	42	NII	101	42	59	NII	102	NII	102
14	261400056936	E	NII	108	33	38	37	NII	105	47	58	NII	100	NII	102
15	261400044309	E	NII	108	44	31	33	NII	104	44	60	NII	101	NII	110

Tabla1. Resultados globales del proceso de evaluación para el ingreso a la Educación Media Superior, ciclo 2015-2016 tomado de http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/ms/ingreso/estadisticas_concurso/.

Se puede observar que, con los datos anteriores, que resultan pocos los profesores capacitados para desempeñarse con dominio suficiente y organizado de los conocimientos, capaces de implementar estrategias didácticas que promuevan el desarrollo de competencias de los estudiantes y efectivamente los datos muestran una situación alarmante pues este subsistema abarca una gran parte de la población de estudiantes en este nivel, por tanto, cuenta con gran número de profesores.

1.5 Las ecuaciones lineales en el bachillerato

El contenido matemático que se abordó durante el desarrollo de esta investigación se refiere a las ecuaciones lineales; que se ubica en el módulo de Matemáticas 1 del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora con alumnos de primer semestre que ingresan al

Bachillerato. En este trabajo nos centramos en hacer una caracterización de los conocimientos del profesor en torno al desarrollo del tema. El estudio de las ecuaciones lineales ha sido relevante en el proceso educativo, pues desde el nivel básico juegan un papel fundamental dentro de las matemáticas, pues este ha permanecido en los planes y programas de estudio del nivel básico y medio superior. Según el plan de estudios del nivel básico de secundaria 2011 “es importante que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios”.

Por otra parte, la Dirección General de Bachillerato (DGB) declara que en el nivel medio superior específicamente en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora los estudiantes de Matemáticas 1, deben:

1. Identificar que es una ecuación lineal en una variable y una función lineal, así como la relación entre ellas
2. Usar diferentes técnicas para resolver ecuaciones lineales de una variable.
3. Reconocer $y = mx + b$ como una ecuación de dos variables como la función lineal.
4. Aplicar diversas técnicas para graficar una función lineal.
5. Modelar situaciones para describirlas como una ecuación lineal o una función lineal.
6. Redactar y resolver problemas relativos a situaciones que requieran del uso de ecuaciones lineales en una variable o funciones lineales.
7. Describir el comportamiento de la gráfica de una función lineal.
8. Aplicar diferentes técnicas para construir la gráfica de una función lineal.
9. Representar relaciones numéricas y algebraicas entre los elementos de diversas situaciones.
10. Describir el comportamiento de las variables y resultados al solucionar problemas de ecuaciones lineales y funciones lineales en una variable.

Tomando estos puntos como referencia se realizará una valoración pertinente con respecto al conocimiento didáctico-matemático del profesor en el desarrollo de las ecuaciones lineales.

1.6 Algunas dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones lineales

Actualmente en México es evidente que existen dificultades en el aprendizaje en general, estas dificultades son más notorias en el área de matemática, pues con mayor frecuencia hay un mayor índice de reprobación en matemáticas de distintos niveles educativos, particularmente en el nivel medio superior existen resultados de evaluación que dan testimonio de ello, como: PISA, EXCALE, INEE Y PLANEA; de acuerdo con esta última prueba ocho de cada diez estudiantes que cursan el último grado de bachillerato en el país tienen un dominio deficiente en matemáticas, esto se debe a las dificultades que presenta el alumno para realizar interpretaciones de diferentes tipos de representaciones matemáticas tanto como de las expresiones algebraicas, numéricas o gráficas.

Existen diversos trabajos que demuestran los errores y dificultades del aprendizaje de las ecuaciones lineales, desde el punto de vista empírico, se podría decir que algunas de las causas de estas dificultades tienen su origen en la forma de enseñanza tradicional que se ha venido dando en la educación media superior.

Puesto que el estudio de las ecuaciones lineales se aborda desde el nivel básico, es importante resaltar que el uso de sus propiedades algebraicas, como: el significado de la igualdad en una ecuación, el manejo de las literales y el uso de las propiedades para encontrar soluciones de las ecuaciones son algunos tópicos donde los estudiantes del nivel medio superior suelen tener errores comunes, como por ejemplo; el tener una mala interpretación de cómo despejar una ecuación lineal o el significado de la signo igual en la ecuación. De acuerdo con Caballero (2010) “la idea extendida entre los estudiantes de que el signo igual es la "señal de hacer algo", implica que sea considerado como un operador, es decir, separa una cadena de operaciones a realizar de un resultado a obtener, y no verlo como un símbolo de la equivalencia entre los miembros izquierdo y derecho de una ecuación.”

Arroyo (2014) (cita en Muñoz y Ríos (2008)) concuerdan “que el paso de la aritmética al álgebra produce, en la mayoría de estudiantes, dificultades de aprendizaje, las cuales se agudizan en el tema de resolución de problemas cuando aplican ecuaciones lineales, ya que interviene un mayor análisis y no solo la repetición de un proceso mecánico”. También

“afirma que el abordaje poco contextualizado de los problemas que se resuelven con ecuaciones lineales resulta ser un factor influyente en las dificultades de aprendizaje”

Cuando a los estudiantes se les presenta situaciones en contexto extra matemático de las ecuaciones lineales suelen presentar dificultades durante su resolución, ya que el poder interpretar correctamente la información o datos que representa el problema resulta complicado llegar a un planteamiento, sin embargo, si no existe una claridad de interpretación para el alumno puede resultar una frustración que lo lleve a no entender el mismo. Un aspecto importante que el profesor debe considerar es la presentación de situaciones contextualizadas, con una redacción clara para el alumno que lo lleve a tener una mejor comprensión del problema.

De acuerdo con Godino (2008) “Una de las tareas clave del profesor de matemáticas es la selección y adaptación de situaciones–problema que promuevan la contextualización de los contenidos matemáticos, su aplicación y ejercitación. Los problemas no pueden ser excesivamente puntuales/aislados, sino que deben permitir la articulación de las distintas competencias matemáticas, y, por tanto, tener un carácter globalizador”.

1.7 Algunas investigaciones relacionadas con el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM)

Una de las problemáticas que ha generado interés en la comunidad educativa son las investigaciones enfocadas en la formación de profesores y la identificación de componentes de conocimientos con la que deberían contar actualmente los profesores de matemáticas con el fin de desarrollar eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Nuestro trabajo está basado en el modelo del CDM propuesto por Godino (2009) dentro del marco teórico del EOS. Además, algunos especialistas en educación matemática han propuesto diversos modelos en donde se introducen planteamientos centrados en conocimientos de los profesores que ponen en juego para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, Godino (2009) se basa en ellos para crear el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor.

Uno de los pioneros en el desarrollo de investigaciones en este campo fue Shulman, algunas de sus aportaciones están enfocadas a la formación de profesores, el autor trata de

definir conocimientos básicos con los que debe contar un profesor. Shulman (1986) define tres categorías específicas del conocimiento, en el que se ha puesto más atención es el conocimiento pedagógico del contenido de acuerdo con Ball (2008) cita a Shulman (1986) en donde define el conocimiento del contenido pedagógico como:

“Las formas más útiles de representación de esas ideas, las más poderosas analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, en una palabra, las formas más útiles de lo que representa y la formulación de la materia que lo hacen comprensible para los demás. . . . Conocimiento didáctico del contenido también incluye una comprensión de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos fáciles o difíciles: las concepciones e ideas preconcebidas que los estudiantes de diferentes edades y orígenes traen con ellos para el aprendizaje de los temas y lecciones más frecuentemente enseñado”. (p. 9)

Garriz y Trinidad (2004) citan a Shulman (1986) afirmando que “el conocimiento curricular está representado por el abanico completo de programas diseñados para la enseñanza de temas particulares que se encuentra disponible en relación con estos programas, al igual que el conjunto de características que sirven tanto como indicaciones como contraindicaciones para el uso de currículos particulares o materiales de programas en circunstancias particulares”. Mientras que el conocimiento del contenido de la materia se refiere a la organización del conocimiento de algún tópico que planea mentalmente el profesor, es decir, a la variedad de opciones o casos que considera para exponer el objeto matemático antes de llevarlo al hecho o la práctica.

El autor define tres categorías específicas del conocimiento, el primero se refiere al conocimiento didáctico del contenido en donde incluye el contenido de la materia y su organización, es decir no se centra en los conceptos temáticos sino también a los hechos que se realizan sobre la enseñanza. Ball et al (2008) concuerdan con Shulman (1987) que “los profesores también deben entender los principios y estructuras de organización y las reglas para el establecimiento de lo que es legítimo hacer y decir en un campo”, el segundo se relaciona con el conocimiento pedagógico del contenido este lo describe como “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza” y conocimiento curricular este último se refiere a los

programas diseñados para la enseñanza, lo que el profesor conoce del contenido a enseñar y que a su vez es referencia para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes.

1.8 La pregunta de investigación

Los cambios educativos que han surgido y la importancia de la calidad en el aprendizaje de los estudiantes, se deben sustancialmente a las prácticas realizadas por el profesor en el aula, y por eso es de interés realizar una investigación que nos permita caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor sobre las ecuaciones lineales para reflexionar sobre sus prácticas de acuerdo a lo establecido en la RIEMS. Para eso nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cuál es el Conocimiento Didáctico Matemático del profesor de bachillerato con relación a las ecuaciones lineales?

En este trabajo nos enfocamos en el estudio de las prácticas matemáticas y didácticas del profesor de matemáticas, poniendo énfasis en las facetas que declara el modelo del *Conocimiento Didáctico Matemático* basado en el *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática* (EOS) que más adelante se pretende profundizar.

Para darle respuesta a la pregunta de investigación consideramos el siguiente objetivo general y objetivos específicos, estos objetivos específicos se orientan a conocer el tipo de conocimiento que desarrolla el profesor en el aula.

1.9 Objetivo general y objetivos específicos

El interés del trabajo se centra en caracterizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor en torno al tema de las ecuaciones lineales. Particularmente se intenta dar una caracterización fina y detallada de los sujetos de estudio, por lo tanto, se consideró conveniente seleccionar sólo dos casos específicos de profesores de Matemáticas que nos arrojaron información relevante para realizar dicha caracterización al posibilitar un estudio en su contexto natural y detallado. Estamos conscientes que este estudio no pretende generalizar los resultados, simplemente pretendemos que el trabajo muestre las prácticas matemáticas, tanto discursivas como operativas, de los profesores estudiados para que su caracterización pueda tomarse en cuenta las decisiones, tanto de investigación como en

acciones curriculares formativas y didácticas en general. Por lo tanto, nos planteamos el siguiente objetivo general de la investigación.

Objetivo general

- Analizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor con relación a las ecuaciones lineales, para lograr una caracterización del mismo.

En consecuencia, para el logro de este del objetivo general, nos hemos planteado el logro de los siguientes **objetivos específicos** basándonos en las seis facetas del modelo del CDM del profesor:

1. Determinar los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional y la distribución de tiempo que se destina a los diversos componentes del contenido, identificando problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos.
2. Observar y describir las acciones por parte del profesor con relación a los estudiantes, con la intención de valorar acciones tomadas en cuenta con respecto a la construcción de significados de sus estudiantes y su progresión de sus aprendizajes.
3. Identificar y describir acciones del profesor ante las actitudes, emociones, creencias y valores de los alumnos con relación con los objetos matemáticos e identificando acciones y normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio.
4. Describir los recursos mediacionales utilizados en el proceso de estudio, así como la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos por parte del profesor.
5. Conocer patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes, mediante la negociación de significados durante las prácticas matemáticas.
6. Describir las relaciones con el entorno político, social, económico que condicionan y soportan el proceso de estudio.

Es importante mencionar que estos objetivos específicos de la investigación se adaptaron de acuerdo a las seis facetas (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva, ecológica) del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor.

CAPÍTULO 2

2. ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLOGÍA

2.1 Introducción

Los elementos teóricos principales que dan sustento a esta investigación provienen del *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática* (EOS) propuesto por Godino, Batanero y Font, (2008). Esta teoría muestra herramientas teóricas y metodológicas que ayudan a articular aspectos institucionales y personales del conocimiento matemático para una mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Una bondad del EOS es que permite hacer análisis y valoración entre lo pragmático y la realidad de las prácticas y procesos matemáticos. Nuestro interés se centra en la observación para la recolección de información acerca del conocimiento didáctico-matemático del profesor y posteriormente en la realización de un análisis detallado de estos. El EOS nos provee herramientas adecuadas para identificar el tipo de prácticas que se promueven y se integran en la educación matemática.

Una forma de hacer el estudio es observar y analizar los hechos del profesor de matemáticas, es decir, las acciones que lleve a cabo durante el desarrollo de la temática de ecuaciones lineales, pues a partir de sus prácticas docentes desarrolladas en el aula se hará una valoración pertinente sobre las competencias que pone en juego, puesto que estas tendrían influencias en el aprendizaje de los estudiantes.

Así, los elementos teóricos que consideraremos para el desarrollo de este trabajo son: las prácticas matemáticas y objetos matemáticos, procesos matemáticos y significados, normas, facetas y niveles de análisis didáctico e idoneidad didáctica y sus dimensiones. A continuación, se describen los elementos teóricos que forman parte del desarrollo del trabajo.

2.2 Prácticas matemáticas y objetos matemáticos

En el desarrollo de la actividad matemática intervienen objetos matemáticos que se presentan a través de la resolución de problemas, asumiremos como *prácticas matemáticas* todas aquellas acciones operativas y discursivas descritas por un sujeto, es decir, todo lo que pueda hacer y decir de algún objeto matemático, por ejemplo: tipo de lenguaje, verbal,

simbólico, gráfica, numérica, etcétera. Así como los procesos que tienen que ver con ejemplificar, validar, generalizar, particularizar, etcétera.

Por otra parte, las prácticas matemáticas son relativas al sujeto que las realiza: si son realizadas por una persona, les llamamos *prácticas matemáticas personales*; si el sistema de prácticas al resolver un campo de problemas vez son compartidas por una comunidad se les conoce como *prácticas matemáticas institucionales* (referidas a esa comunidad). En las prácticas matemáticas se hace referencia a seis tipos de objetos primarios que emergen de los sistemas de prácticas para resolver un cierto tipo de problema o clase de problemas. En este sentido entendemos por *objeto matemático* no sólo a los conceptos, sino también a sus representaciones, sus propiedades, los procedimientos para resolver un problema y los argumentos con los cuales se valida la solución, es decir, cuando hablamos de un objeto matemático como por ejemplo: ecuación lineal, nos estamos refiriendo a su definición, a su gráfica, a su expresión analítica, a la relación de sus variables, a sus proposiciones y argumentos para transformarla y manipularla, etcétera.

Se describen a continuación los seis objetos matemáticos primarios propuesto por el Enfoque Ontosemiótico:

- *Situación- problema*: se refiere al tipo de problemas planteados en contexto intra-matemático o extra-matemático. (aplicaciones, tarea, ejercicios, ejemplos, actividades etc.)
- *Elementos lingüísticos*: se entienden como aquellas diversas formas de representar un objeto matemático como: verbal, simbólico, numérico, gráfico, expresión algebraica, diagrama, notación etc.
- *Conceptos-definición*: hace referencia a las expresiones por medio de definiciones o descriptores (función, ecuación, etc.), determinado por las cualidades esenciales de un objeto matemático.
- *Procedimientos*: acciones realizadas por el sujeto al emplear una tarea matemática (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Propiedades*: enunciados sobre conceptos como teoremas, corolarios, lemas, proposiciones, etc.

- *Argumentos*: enunciados usados para validar, explicar o justificar las proposiciones que se relacionan los conceptos entre sí (Godino, 2009).

Estos seis objetos primarios se relacionan entre sí formando configuraciones epistémicas. En esta investigación se pondrá énfasis en la identificación de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes en las prácticas de los profesores de matemáticas, en las acciones realizadas referente a su práctica operativa y práctica discursiva con relación a las ecuaciones lineales.

2.3 Significado personal, institucional y de referencia

Otras de las herramientas teóricas que destacar en este trabajo son los significados, personal, institucional y de referencia. Los objetos matemáticos son mencionados y descritos por cada individuo a partir del desarrollo de sus prácticas matemáticas, así consideramos que el *significado* de cada sujeto es todo lo que puede decir y hacer, del y con, el objeto matemático.

Dado que el significado se define no en términos de las prácticas matemáticas aisladas, sino de sistemas de prácticas, si los sistemas de prácticas realizadas son institucionales, le llamaremos *significado institucional*, y si los sistemas de prácticas son personales, será *significado personal* (Godino, Batanero y Font, 2008; Font 2005). Por tanto, el significado institucional de referencia es lo que la institución promueve.

En este trabajo haremos énfasis en las prácticas matemáticas de los profesores, es decir, todo lo que hace en el aula con relación al tema de ecuaciones lineales. Así como de las fuentes que nos pueden proporcionar información sobre estas prácticas matemáticas, a esto nos referimos con: tipos de situaciones problemas planteados en el aula de clase, los sistemas de prácticas matemáticas de los estudiantes de dicha institución (que en el EOS se consideran como sus significados), así como también el programa de estudios propuesto para la asignatura y la interacción entre profesor, alumno y objetos matemáticos que surjan en el aula.

El significado institucional de referencia de esta investigación está compuesto por el programa de estudios de Matemáticas I que declara la Dirección General de Bachillerato, centrándonos en el bloque VI, correspondiente a las ecuaciones lineales, así como también

el libro de texto de Matemáticas 1 del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, el cual fue diseñado con base en los lineamientos que declara la RIEMS (enfoque por competencias) y el programa de estudios de la DGB y es el que la institución promueve.

2.4 Configuraciones epistémicas

De acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) donde se introducen herramientas de análisis de libros de textos, algún tema o actividades expuestas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Cuando se hace referencia a las herramientas de análisis nos referimos a las configuraciones y trayectorias didácticas, estas nociones teóricas hacen referencia a aspectos que están presentes en un proceso de estudio y se utilizan para el análisis de este trabajo.

Para el logro del objetivo de nuestro trabajo, consideramos útiles las nociones de configuraciones didácticas, las cuales tienen asociada una configuración epistémica, la cual de acuerdo con Godino, Batanero y Font se modeliza como “un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales” (2009, p. 12).

A partir de estas trayectorias didácticas y la interacción entre ellas, surgen las configuraciones didácticas que nos permiten hacer un análisis detallado del conocimiento didáctico-matemático del profesor, de acuerdo a las observaciones realizadas en el aula, así como en las entrevistas realizadas a los dos profesores.

Primeramente, se pretende realizar el análisis epistémico del proceso de instrucción matemática, esto con referencia a la trayectoria epistémica, que de acuerdo con Godino (2003 p. 184) consiste en “...descomponerlo en unidades de análisis con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa efectivamente”. Es decir, esta unidad de análisis está constituida por las interacciones puestas en juego entre profesor-alumno con respecto al objeto o contenido matemático, los recursos mediacionales utilizados, así como el trabajo de organización que se da entre ellos.

Las herramientas teóricas del EOS permiten identificar e indicar la trayectoria didáctica de cada profesor, ya que muestran la forma en cómo integran sus conocimientos, así como la

clasificación de los mismos, estas se clasifican en: situacional, actuativo, lingüístico, conceptual, proposicional y argumentativo.

2.5 Normas y metanormas

De acuerdo con el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor las normas y metanormas se relacionan con la identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones, este aspecto se relaciona con uno de los niveles de análisis de dicho modelo.

Las prácticas matemáticas y didácticas están condicionadas y soportadas por un conjunto de normas que regulan las acciones y deben ser analizadas. En la literatura la noción de norma ha sido estudiada y conocida con diversos nombres dependiendo del nivel de análisis o del proceso de estudio: contrato didáctico, normas sociales y sociomatemáticas, pero éstas rigen el comportamiento en el aula en el sentido de que son específicas durante la actividad matemática que desarrollan los estudiantes.

Desde el EOS la dimensión normativa se concibe como la encargada de regular las interacciones que se dan en la educación principalmente las relativas al desarrollo de las prácticas matemáticas. La complejidad del trabajo que realiza el profesor dentro del aula es fundamental para capacitar, reconocer y negociar los significados de los estudiantes.

En el trabajo se consideran tanto las normas sociales en general como las sociomatemáticas en particular, pues éstas rigen el comportamiento en el aula, son específicas sobre aspectos matemáticos de la actividad de los alumnos. En este contexto, son importantes a las normas sociomatemáticas pues corresponden al desarrollo del razonamiento y la relación entre la interacción social y los significados matemáticos de los alumnos. Por tanto, nos interesa identificar y describir las normas o reglas que se dan en el proceso de estudio matemático, considerando que estas normas se presentan en las tareas que proponen los profesores y la manera en cómo se gestionan, pues de esto depende que surjan nuevas normas.

En Godino, Wilhelmi, Font y de Castro (2009) se consideran las facetas (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) para analizar los procesos de

instrucción matemática que a su vez se relacionan con las normas que regulan el proceso de estudio matemático.

2.6 Idoneidad didáctica

La idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006) “como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva y explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula”. Los autores, introducen cinco criterios a tener en cuenta para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional.

Para el análisis de la idoneidad didáctica se consideró un análisis previo que se relaciona con el significado institucional de referencia, el cual se desarrolla dentro de un sistema de prácticas (operativas y discursivas) que conforman el significado (personal o institucional) de un objeto matemático. Consideramos que a través de la identificación de los seis objetos primarios (emergentes y/o intervinientes) se puede identificar un mejor significado del objeto matemático. A estos objetos primarios intervinientes o emergentes se le conoce como las componentes del significado del objeto matemático.

2.7 Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor

Godino (2009) propone un modelo denominado *Conocimiento Didáctico Matemático* (CDM); este modelo incluye seis facetas o dimensiones para el Conocimiento Didáctico Matemático, las cuales están involucradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje con relación a tópicos específicos de matemáticas. De esta forma asumimos este modelo como:

“el CDM viene a ser la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios (y los procesos de significación), que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes (Pino-Fan, Godino y Font, 2010)”.

La actividad que realiza el profesor en el aula durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es nuestro principal interés, pues en esta investigación el objeto de estudio es el profesor de matemáticas del COBACH que imparta la asignatura de Matemáticas 1. El trabajo se enfoca en caracterizar el conocimiento didáctico-matemático en el desarrollo de prácticas que realiza el profesor con relación al tópico de las ecuaciones lineales. Por tanto, optamos por utilizar un modelo que nos permita analizar el conocimiento que desarrolla el profesor en el aula. Con este modelo nos referimos a las facetas y niveles didácticos que propone el EOS para el análisis del profesor de matemáticas.

Se trata de un modelo “poliédrico” (ver Figura 2) el cual representa diversas facetas que se deben tener en cuenta en un proceso de estudio, de los cuales se despliegan cuatro niveles de análisis, los que nos darán las consignas para determinar acciones metodológicas que nos permitan observar y caracterizar el CDM del profesor de matemáticas. Es importante mencionar que estas facetas y niveles se relacionan entre sí dentro de un proceso de estudio.

Godino propone tener en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática. “Estas facetas o dimensiones del CDM son:

1. **Epistémica:** Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. **Cognitiva:** Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
3. **Afectiva:** Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. **Mediacional:** Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
5. **Interaccional:** Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
6. **Ecológica:** Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, que soporta y condiciona el proceso de estudio” (2009, p. 21)

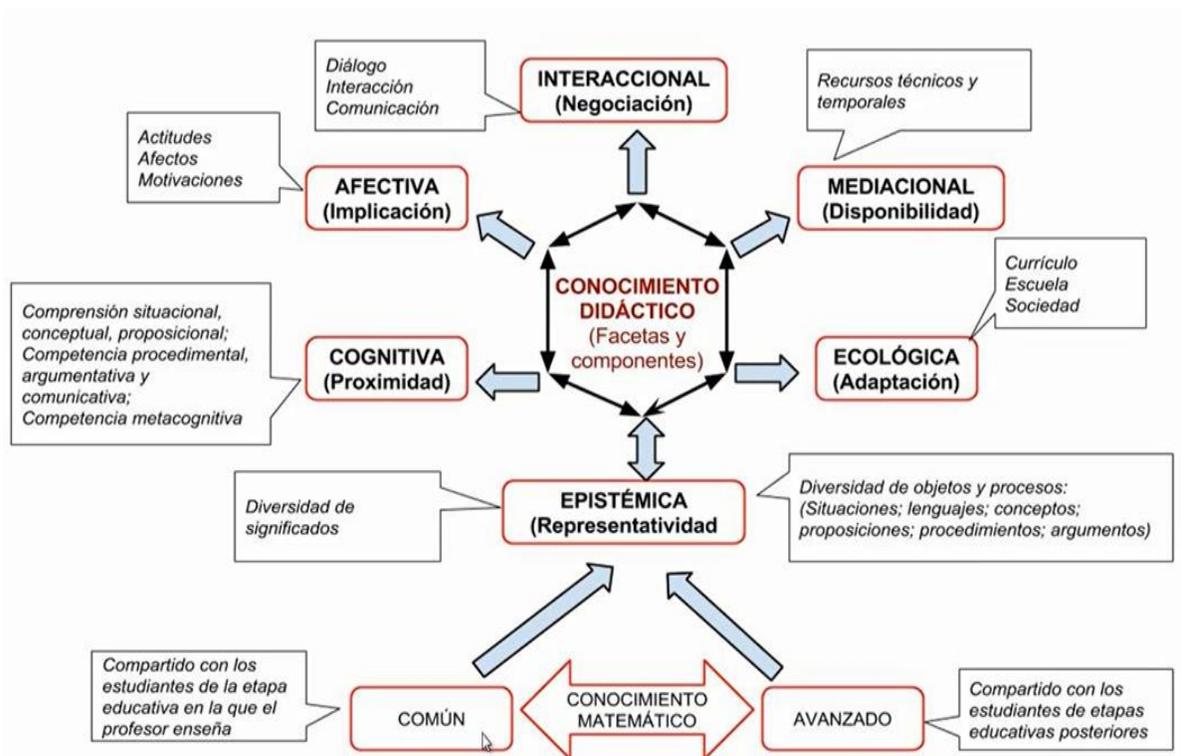


Figura 1. (Godino, 2009) Conocimiento didáctico-matemático basado en EOS tomado de www.ugr.es/local/jgodino

En las facetas que propone el EOS se consideran particularmente relevante la epistémica y cognitiva pues éstas están estrechamente relacionadas, no podemos desligar una de la otra, la epistémica corresponde al grado de representatividad de los conocimiento de los objetos y procesos matemáticos y esto a su vez se relacionan con la cognición de los estudiantes, sin embargo, también se les da importancia a las demás facetas pues son las que condicionan y regulan los procesos de aprendizaje y enseñanza.

El análisis de la información recabada que nos permita hacer la caracterización corresponde a los cuatro niveles de análisis que propone Godino en el modelo del CDM, los cuales son los siguientes:

1. **Prácticas matemáticas y didácticas.** Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
2. **Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos).** Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y

significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.

3. **Idoneidad.** Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

4. **Normas y metanormas.** Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones (2009, p. 21-22).



Figura 2. Godino (2009) Facetas y niveles de análisis del conocimiento del profesor tomado de www.ugr.es/local/jgodino.

Las facetas y niveles de análisis que describimos anteriormente constituyen una categorización de los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor, donde intervienen las concepciones de objetos y procesos matemáticos introducidos en el EOS, mencionados en el capítulo 1, Éstas permiten realizar análisis detallados de la actividad matemática, y por tanto, también de los conocimientos que intervienen en una enseñanza idónea de las matemáticas, así el objeto matemático es interpretado como ente interviniente y emergente en el desarrollo de las prácticas matemáticas y didácticas.

La idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006) “como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva y explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula”. Los autores, introducen cinco criterios a tener en cuenta para valorar la idoneidad de los procesos de

enseñanza y aprendizaje matemático, estas son: idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional.

Por tanto, en este trabajo una manera de hacer una valoración con respecto al conocimiento didáctico del profesor es mediante la herramienta de la idoneidad didáctica que define el EOS, ya que nos permitirá hacer una valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje enfocándonos en las competencias docentes.

Por otra parte, en la literatura de la educación matemática la noción de norma ha sido estudiada y conocida por diversos nombres dependiendo del nivel de análisis o del proceso de estudio: contrato didáctico, normas sociales y sociomatemáticas, pero éstas rigen el comportamiento en el aula de clases en el sentido de que son específicas durante la actividad matemática que desarrollan los estudiantes.

Desde el Enfoque Ontosemiótico la dimensión normativa es la encargada de regular las interacciones que se dan en la didáctica matemática, por tanto, es relevante mencionar la complejidad del trabajo que realiza el profesor dentro del aula, pues es quien debe ser capaz de reconocer y negociar los significados que realizan los estudiantes, además de ser consciente de las normas involucradas en el desarrollo de la práctica matemática.

En la actividad matemática las normas didácticas pueden ser explícitas o implícitas, es decir, desde agentes externos a la institución o como todos los comportamientos y actividades que surgen en el salón de clases con referencia al profesor y sus estudiantes. En este trabajo el enfoque de la dimensión normativa se desarrollará de acuerdo con Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009) como “el sistema de normas que regulan el funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico en un contexto institucional determinado”.

La norma cognitiva es aquella que se refiere a las condiciones con las que el alumno debe aprender y lo que la institución debe hacer para que esto sea posible, de acuerdo con Godino, Font, Wilhelmi y De Castro sostienen que “la institución debe encargarse de que:

- 1) El alumno tenga el conocimiento previo necesario
- 2) Lo que se enseña debe estar dentro de su zona de desarrollo próximo

3) Que la institución se adaptará a la diversidad del alumnado

Como consecuencia del aprendizaje los alumnos pueden generar sus propias interpretaciones de las reglas matemáticas, cuyo campo de validez será necesario explicitar y discutir en la clase a fin de expresar conflictos cognitivos” (2009, p. 63).

Cuando un alumno realiza actividades matemáticas o resuelve una situación problema, suele hacer uso de cierto tipo de lenguaje verbal o simbólico, y a su vez este tipo de lenguaje le ayuda a expresar conceptos o proposiciones que lo lleven a la realización de procedimientos y argumentos que le permitan justificar la solución del problema. A estos tipos de objetos que conocemos como objetos matemáticos primarios, se dan de manera articulada al resolver cierto tipo de problema matemático formando así su “configuración cognitiva”.

Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, (2009) argumentan que “La herramienta configuración cognitiva permite describir la estructura de los objetos que han posibilitado la práctica matemática realizada por el alumno. Las configuraciones cognitivas de los alumnos se pueden considerar como normas que regulan el conocimiento matemático de los alumnos”.

En los procesos de enseñanza y aprendizaje se hace posible, si se tiene presente, la integración de normas, epistémicas, cognitivas, mediacionales, ecológicas, afectivas e interactivas ya que regulan los procesos de estudio durante la actividad matemática. Todas estas normas pueden presentar en las tareas que proponen los profesores y la manera en cómo se gestionan pues de esto depende para que surjan otras nuevas normas.

Por otra parte, los criterios de idoneidad didáctica nos ayudan a identificar potenciales mejoras en el proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica para las distintas facetas de estudio matemático. En este trabajo nos enfocaremos en la observación del proceso de estudio y definiremos un conjunto de indicadores observables que nos permita valorar el grado de idoneidad en las diferentes facetas.

Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007) aportan un sistema de componentes e indicadores empíricos que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

Los criterios de idoneidad, junto con esta guía que los desarrolla, son herramientas útiles para orientar el diseño y la implementación de procesos de estudio y realizar su valoración.

Por tanto, la herramienta de la idoneidad didáctica ayudará a analizar y valorar los conocimientos de nuestros casos de estudio; dejando en evidencia el desarrollo de las prácticas matemáticas y didácticas.

2.8 Metodología y acciones metodológicas

Considerando las características de esta investigación, la metodología empleada es de carácter cualitativo ya que como menciona Sandín (2003, p.123) citado en Bisquerra (2004, p.277) “la investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento”.

2.9 Acciones metodológicas para la investigación

En esta investigación se consideraron una serie de acciones encaminadas a caracterizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor con relación al tópico de las ecuaciones lineales.

1. **Selección de técnicas y estrategias para la recolección de información:** considerando las características del estudio, se seleccionaron las técnicas y estrategias más apropiadas para recabar información.
2. **Diseño de instrumentos:** los diseños de los instrumentos fueron de carácter inductivo y descriptivo, constaron de una entrevista semi estructurada y un protocolo de observación, el cual sirvió como apoyo para las observaciones de clase del tipo no participante, además se utilizaron recursos auxiliares como la videograbación.
3. **Pilotaje de los instrumentos para valorar la pertinencia:** con la intención de conocer la pertinencia de los instrumentos para la recolección de información diseñados, se aplicaron los instrumentos a un profesor de Matemáticas.

4. **Modificaciones a los instrumentos:** a partir del pilotaje, se realizaron modificaciones a los dos instrumentos de recolección de información.
5. **Selección de sujetos de estudio:** se seleccionaron a dos profesores que impartieran la materia de Matemáticas 1 en el COBACH.
6. **Trabajo de campo para la recopilación de información:** se aplicó la entrevista para conocer la parte discursiva y concepciones personales de cada uno de los dos profesores acerca del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, además, se observaron las clases de ambos profesores al momento de impartir el tema de ecuaciones lineales, utilizando el protocolo de observación.
7. **Análisis de la información obtenida:** a partir de la información recabada en el trabajo de campo y considerando los elementos teóricos de la investigación, se realizaron los análisis pertinentes para cada profesor.
8. **Caracterización del conocimiento didáctico-matemático de los sujetos de estudio:** tomando como base los análisis realizados en la fase anterior, se realizó la caracterización del conocimiento didáctico-matemático de cada uno de los sujetos de estudio.

2.10 La institución y selección de sujetos de investigación

La investigación se realizó en una institución pública de educación media superior, con el objetivo de caracterizar su conocimiento didácticos-matemáticos del profesor que imparte la asignatura de Matemáticas 1 del COBACH. Por tanto, nos parece importante resaltar la selección de esta institución, pues el COBACH es un subsistema que ha sido reconocido por sus diferentes participaciones en el Estado, de acuerdo con el Programa Institucional de Desarrollo elaborado en el 2011-2015 el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora reconoce “ser la Institución de nivel medio superior de mayor prestigio en el estado de Sonora y el País, por la formación integral que ofrece a sus estudiantes, basada en el humanismo, impulsando la academia, la ciencia, la tecnología, los valores, la cultura, y el deporte”. Además de acuerdo a dicho documento, actualmente el Colegio cuenta con 34 planteles en el estado de Sonora, así como 48 escuelas incorporadas, de tal manera que la cobertura geográfica de la atención a la demanda del Colegio se extiende a 25 municipios

de los 72 municipios que componen el Estado de Sonora, concentrados en las principales ciudades y comunidades del Estado.

Corral (2014) señala que “El Bachillerato Autónomo, al que pertenece el COBACH, atiende desde el 2003 a la fecha más del 40% del total de alumnos de educación media superior en el estado. De los cuales más del 55% son estudiantes del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, teniendo así que el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora es la institución que atiende más estudiantes en comparación con el resto de subsistemas de bachillerato”. Por esta razón es importante realizar un estudio de caracterización que muestre qué prácticas se realizan en una institución con un mayor número de población.

Como se ha mencionado antes, en este subsistema los estudiantes y profesores cuentan con un módulo de aprendizaje, con cuyo uso se espera que los estudiantes desarrollen las competencias establecidas en el currículo por ello se decidió acotar a un tema específicamente: las ecuaciones lineales, ya que el módulo es amplio y el interés es observar y hacer un estudio detallado de las prácticas del profesor de matemáticas.

Expuesto lo anterior se procedió a la selección de los sujetos de estudio para la obtención de información, en nuestro trabajo consideramos la selección de dos casos que nos permitan el desarrollo de la investigación.

De acuerdo con Sosa (2011, p.54) cita a Rodríguez et al., (1996, p.99)

“la selección del caso o los casos no se plantean en términos de representatividad de los mismos, habida cuenta de que la investigación cualitativa no se caracteriza por su intencionalidad representativa o generalizada. Antes, al contrario, una de las características fundamentales de la investigación cualitativa es su preocupación por lo peculiar, lo subjetivo y lo idiosincrásico”.

Como se ha mencionado anteriormente, en nuestra investigación participan dos profesores de bachillerato, que por cuestiones de ética nos reservamos los nombres oficiales y les asignamos los seudónimos profesor A y profesor B. Para ambos profesores se consideraron algunas características como: años de experiencia docente, formación docente, niveles educativos donde imparte matemáticas, con la intención de contrastar información y determinar si influye en el desarrollo de sus prácticas matemáticas y didácticas.

2.10.1 La observación y grabación en la investigación

Consideramos la observación en nuestro trabajo como una técnica que nos permite obtener información consistente. La selección de esta técnica resulta ser una mayor fuente de información que posee el sujeto o los sujetos estudiados, pues se obtiene información permanente al investigador con relación a lo que ocurre en su entorno.

De acuerdo con Casanova (1998, p.78) lo asumimos como “el examen atento que un sujeto realiza sobre otro u otros sujetos o sobre determinados objetos y hechos, para llegar al conocimiento profundo de los mismos mediante la consecución de una serie de datos, generalmente inalcanzables por otros medios.”

La observación durante el desarrollo del trabajo consistió en realizar técnicas adecuadas para recabar información que ayuden a conocer las prácticas desarrolladas en el aula, para ello se utilizó un protocolo de observación diseñado con los elementos teóricos que fundamentan la investigación, más adelante se describe detalladamente la utilidad que se le dio a dicho protocolo.

Por otra parte, durante las observaciones se optó por utilizar herramientas de apoyo que favorecen la recolección de datos. Por ello consideramos conveniente la audiograbación que acompañó la entrevista semiestructurada y la videograbación junto con el protocolo de observación, pues esta herramienta resulta de gran utilidad para analizar datos fidedignos.

Es importante mencionar que se contó con la aprobación de los profesores observados, así como en su momento se les dio a conocer la finalidad de la información obtenida, pues es un aspecto que se tiene que considerar siempre que se haga uso de estas herramientas, de lo contrario, esto puede traer consecuencias éticas desfavorables.

2.10.2 La entrevista y el protocolo de observación

Con base en los constructos teóricos básicos del Enfoque Ontosemiótico que se utilizan en esta investigación, se diseñaron los instrumentos para recolectar información, que específicamente fueron dos: un guion de entrevista tipo semiestructurada y un protocolo de observación en aula. El propósito de la entrevista consistió en recabar información sobre la práctica discursiva del profesor del COBACH enfocada en la enseñanza y aprendizaje de

las ecuaciones lineales, así como percibir algunas creencias y concepciones del profesor que nos permitieran contrastar con lo observable en el aula de clases. Se seleccionó este tipo de entrevista pues resulta ser flexible y abierta que permite adecuar las preguntas que se consideren necesarias en función de las respuestas recibidas.

Por otra parte, la finalidad del protocolo de observación es obtener datos acerca de las prácticas operativas del profesor. Esta observación pretende registrar elementos de acción que realice el profesor cuando trabaja con el tema de las ecuaciones lineales. La primera parte del protocolo enfocada a la identificación de los objetos primarios –situaciones-problema, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos que aparecen durante el proceso de estudio del cual se pretende hacer un análisis de esa información.

Como una segunda parte se identifican acciones que pone en juego el profesor en el aula de clases, cada una de éstas se relaciona con los elementos que componen las facetas del modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor: epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica, así como la interacción de las mismas. Identificando el tipo de situaciones que plantea, las estrategias que promueve en los alumnos, el tipo de representaciones sobre los objetos matemáticos (verbal, gráfico, tabular, algebraico...), la participación que promueve en el aula de clases entre otras cosas que ayudaran a dar una caracterización sobre sus conocimientos.

Una vez que se tuvieron los instrumentos indicados, se procedió a observar la práctica de dos profesores en diferentes planteles del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora en la ciudad de Hermosillo, a quienes primeramente se les entrevistó con base en el guion de entrevista elaborada.

En las entrevistas se utilizaron herramientas auxiliares como grabadora de voz y en las sesiones de clase se empleó videocámara para registrar lo escrito en el pizarrón y las acciones realizadas por parte del profesor, así como la interacción de sus alumnos.

2.10.3 Trabajo de campo de la investigación

Con base en los instrumentos diseñados en este trabajo de investigación y para la recopilación de información, primeramente, se realizó un pilotaje sobre una primera versión de los instrumentos con profesores de diferente subsistema al Colegio de Bachilleres del

Estado de Sonora, con la finalidad de obtener información que nos permita valorar los datos obtenidos con estos instrumentos. Estos pilotajes fueron realizados con la ayuda de una videocámara y una grabadora de voz, posteriormente se realizó un análisis para valorar si se obtuvo la información requerida y realizar modificaciones pertinentes.

Para la implementación de los instrumentos en el COBACH, se seleccionó a dos profesores que impartieran la asignatura de Matemáticas 1, ubicando el tema de las ecuaciones lineales, los sujetos de estudio se denominaran profesor A y profesor B. Una vez que los profesores aceptaron formar parte de este proyecto, se dio pie a la realización de entrevistas y posteriormente se llevaron a cabo una serie de observaciones de las clases impartidas por los profesores. Cabe resaltar que durante las sesiones se utilizó el protocolo de observación donde se identificaron acciones relevantes del profesor con relación a sus estudiantes, es necesario mencionar que para estas observaciones se contó con el apoyo de un camarógrafo, lo cual permitió que durante el desarrollo de la clase se pudieran tener dos cámaras de grabación: una en particular enfocada a cada acción realizada por el profesor, mientras que la otra permanecía fija para la interacción que existía entre los alumnos.

Como un primer caso, referente al profesor A, la duración de las observaciones fue de 8 sesiones de 50 minutos, mientras que con el profesor B fue de 4 sesiones de 50 minutos, en ambas con la temática de las ecuaciones lineales donde cada una es impartida desde sus creencias y concepciones. Los instrumentos diseñados nos han arrojado información relevante para hablar en términos generales sobre su Conocimiento Didáctico Matemático de los profesores estudiados.

2.11 Las características del profesor A y profesor B

Como se mencionó anteriormente la investigación está desarrollada en el contexto de estudios de dos casos específicos del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora de dos planteles ubicados en la ciudad de Hermosillo. Un requisito fue que el profesor debería impartir la asignatura de Matemáticas 1 de dicho subsistema, ya que en esta materia se ubica el tema de interés: las ecuaciones lineales.

Las características del profesor A, es profesor de matemáticas con cuatro años de experiencia, con una carga de tiempo completo (40 horas), donde este tiempo está

distribuido entre el número de materias que imparte y el tiempo de asesorías que tiene como docente en el COBACH. Con respecto a su formación, tiene estudios de Ingeniería Mecánica y Maestría en Educación Media Superior, en el periodo de observación se encontraba impartiendo un grupo de Matemáticas 1 que corresponde a Álgebra y cuatro grupos de Matemáticas 3 que corresponde a Geometría Analítica, siendo así un total de 25 horas a la semana, con 10 horas de asesorías.

Las características del profesor B son: 24 años de experiencia en el COBACH, con una carga completa de 40 horas, 25 horas frente al grupo y 15 horas impartiendo asesorías y revisor de módulos. Con respecto a su formación académica, el profesor es Licenciado en Matemáticas, además cuenta con diplomado en competencias docentes, cursos de matemáticas para la atención de personas con discapacidad, cursos de trabajo en competencias y habilidades, en el COBACH atiende a tres grupos de Matemáticas 3 correspondiente a Geometría Analítica y Matemáticas 1. Además de impartir clases en el bachillerato antes mencionado, él tiene 19 años impartiendo clases en la Universidad de Sonora con una carga de 20 horas.

A continuación, se muestra una tabla en donde se resaltan las características antes descritas,

Características	Profesor A	Profesor B
Formación profesional:	<ul style="list-style-type: none"> • Ing. Mecánica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Licenciado en Matemáticas
Cursos relacionados con su actividad docente:	<ul style="list-style-type: none"> • Maestría en Educación Media Superior. 	<ul style="list-style-type: none"> • Diplomado PROFORDEMS
Años de experiencia e instituciones:	<ul style="list-style-type: none"> • 4 años en el colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. 	<ul style="list-style-type: none"> • Más de 20 años en el Colegio de Bachilleres del

		Estado.
Tiempo frente al grupo:	<ul style="list-style-type: none"> • Cuenta con tiempo completo (40 horas), 30 horas frente al grupo y 10 horas en asesorías. 	<ul style="list-style-type: none"> • Cuenta con tiempo completo (40 horas), 25 horas frente al grupo y 15 horas en asesorías y revisor de módulos.
Cursos que imparte:	<ul style="list-style-type: none"> • Álgebra • Geometría analítica 	<ul style="list-style-type: none"> • Álgebra • Geometría analítica

Como nuestro trabajo no pretende generalizar las prácticas matemáticas y didácticas que realizan los profesores de dicho subsistema, se presentan aspectos relevantes que dan indicios de cómo son las prácticas del profesor de matemáticas con relación a las ecuaciones lineales.

CAPÍTULO 3

3. ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

3.1 Introducción

De acuerdo a la información obtenida a partir de los instrumentos se procedió a realizar un análisis exhaustivo con relación a los cuatro niveles de análisis que declara el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor. A continuación, presentaremos el tipo de

análisis que se hizo con cada uno de dichos niveles, empezando con las prácticas matemáticas y didácticas en donde se describen las acciones realizadas tanto matemáticas como didácticas del profesor. Las prácticas matemáticas y didácticas de este trabajo se refieren a las acciones realizadas por parte del profesor al momento de resolver tareas matemáticas relativas a las ecuaciones lineales y promover el aprendizaje, así como también la descripción general de la actuación docente y discente.

A continuación, daremos una descripción general sobre las prácticas matemáticas y didácticas del profesor A de acuerdo a las ocho sesiones de clase observadas, con duración de la clase “oficialmente” de 50 minutos.

3.2 Análisis del significado institucional de referencia

En este apartado se muestra el análisis del significado institucional de referencia, que, basándonos en las configuraciones epistémicas y sus respectivas componentes del estado potencial, estas se clasifican como: situacional, actuativo, lingüístico, conceptual, proposicional y argumentativo. Se presenta primero el análisis del programa de estudio de la DGB, resaltando el número de configuraciones epistémicas que se encontraron en dicho documento.

Bloque VI: resuelve ecuaciones lineales I	Configuraciones epistémicas del bloque VI del programa de estudios de Matemáticas I	Conf. Epist.	Estados potenciales
Desempeños del estudiante al concluir el bloque VI	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identifica lo que es una ecuación lineal en una variable y una función lineal, así como la relación entre ellas. 2. Usa diferentes técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable. 3. Reconoce a $y = mx + b$ como una ecuación de dos variables como la forma de una función lineal. 4. Aplica diversas técnicas para graficar una función lineal. 5. Modela situaciones para escribirlas como una ecuación lineal y/o función lineal. 6. Redacta y resuelve problemas relativos a situaciones que requieren el uso de ecuaciones lineales en una 	CE1	<p style="text-align: center;">Situacional</p> <p style="text-align: center;">Actuativo</p> <p style="text-align: center;">Lingüístico</p>

	<p>variable y/o funciones lineales</p> <p>7. Describe el comportamiento de las variables y/o resultados al solucionar problemas de ecuaciones y/o funciones lineales; tanto algebraicas como gráficas</p> <p>8. Aplica diferentes técnicas para construir la gráfica de una función lineal.</p> <p>9. Describe el comportamiento de una gráfica de una función lineal.</p> <p>10. Representa relaciones numéricas y algebraicas entre los elementos de diversas situaciones.</p>		<p>Conceptual</p> <p>Argumentativo</p>
Objetos de aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> • Representación de relaciones entre magnitudes • Modelos aritméticos o algebraicos • Elabora graficas de funciones lineales mediante las técnicas de intersección con ejes, pendiente, ordenada al origen y tabulación. • Características y propiedades de las ecuaciones lineales. 	CE2	<p>Lingüístico</p> <p>Conceptual</p> <p>Proposicional</p>
	<p>➤ Construye e interpreta la ecuación y función lineal, mediante la aplicación de procedimientos aritméticos algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de las situaciones reales, hipotéticas o formales.</p> <p>➤ Formula y resuelve problemas sobre ecuaciones y funciones lineales con una incógnita, aplicando diferentes técnicas.</p>		

<p>Competencias a desarrollar</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante las técnicas para la elaboración de gráficas (intersección con los ejes pendiente-ordenada al origen y tabulación) y los contrasta con modelos establecidos. ➤ Argumenta la solución obtenida de un problema de ecuación lineal o función lineal con una incógnita, con el método gráfico, con el uso de las tecnologías de información y la comunicación. ➤ Analiza las relaciones entre dos variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento utilizando la función de tipo lineal. ➤ Cuantifica y representa matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean en los problemas planteados. ➤ Interpreta tablas, gráficas y textos con símbolos matemáticos y científicos. ➤ Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. 	<p>CE3</p>	<p>Actuativo</p> <p>Lingüístico</p> <p>Conceptual</p> <p>Argumentativo</p> <p>Situacional</p> <p>Proposicional</p>
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Presentar brevemente las características y propiedades de las ecuaciones lineales. ▪ Explicar cómo se resuelven ecuaciones lineales con una incógnita 		

<p>Actividades de enseñanza</p>	<p>tanto entera como fraccionaria.</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Emplear propiedades de las igualdades al resolver ecuaciones. ▪ Describir el comportamiento de las variables y los resultados al solucionar problemas de ecuaciones y/o funciones lineales. ▪ Comprobar las soluciones de un problema en el modelo lineal para obtener su solución. ▪ Elaborar graficas de funciones lineales mediante las técnicas de intersecciones con los ejes, pendientes ordenada al origen y tabulación. ▪ Presentar un problemario al grupo para que por equipos resuelvan problemas de su entorno u otros ámbitos que pueden representarse mediante una ecuación lineal con una variable, (mezclas, movimiento rectilíneo uniforme, palancas, cantidad y valor e interés simple). 	<p>CE4</p>	<p>Situacional</p> <p>Conceptual</p> <p>Actuativo</p> <p>Argumentativo</p> <p>Proposicional</p>
<p>Actividades de aprendizaje</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Resolver problemas de su entorno y/u otros ámbitos que pueden representarse mediante una ecuación lineal con una variable, relativos a mezclas que identifiquen en el ambiente, movimiento rectilíneo uniforme en caminos y trayectos conocidos para el alumnado. ▪ Interpretar solución de problemas que se plantearon mediante la solución de una ecuación lineal con una incógnita. 	<p>CE5</p>	<p>Situacional</p> <p>Argumentativo</p> <p>Actuativo</p>

	<ul style="list-style-type: none"> Realizar las gráficas correspondientes mediante las técnicas expuestas por el profesor (se sugiere el uso de un software graficador, por ejemplo, el GeoGebra) 		
--	--	--	--

De la tabla anterior podemos resaltar que en las cinco configuraciones se contempla la integración de los diferentes estados potenciales. Por ejemplo, en la configuración epistémica tres (CE3), que trata de las competencias a desarrollar por los estudiantes se identifican los seis estados potenciales.

Se presenta el análisis epistémico correspondiente al módulo de aprendizaje de Matemáticas 1 del COBACH, bloque VI: ecuaciones lineales, relacionando con los seis objetos primarios. Es importante mencionar que el modulo está compuesto por 9 bloques y éstos a su vez por secuencias y actividades didácticas, se desarrollan en tres momentos que corresponden al de inicio desarrollo y cierre.

Con el desarrollo de las actividades del bloque VI se espera que los alumnos aprendan diferentes formas de representar las funciones lineales y las ecuaciones lineales interpretando y elaborando gráficas, expresiones algebraicas y tablas numéricas que modelen distintos fenómenos, para lo cual se deberá analizar y comprender cabalmente la información que se presenta, establecerá comunicación con tus compañeros para escuchar y para expresar ideas en el lenguaje propio de las matemáticas, lo cual les permitirá, a la vez, argumentar sólidamente las acciones realizadas.

Secuencia didáctica 1: Interpretando información	Configuraciones epistémicas del módulo de aprendizaje de Matemáticas 1: ecuaciones lineales	Conf. Epist.	Estados Potenciales
---	--	-------------------------	--------------------------------

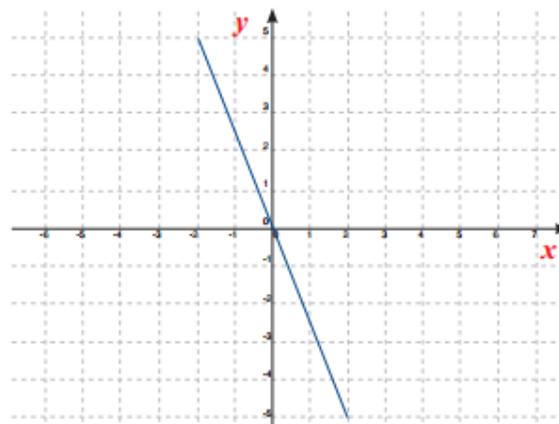
<p>Actividad de inicio 1 (individual): velocidad de una reacción química</p>	<p>Se inicia el estudio de una situación extra-matemática referente a la velocidad de una reacción química, es decir, cuando es rápida, por ejemplo: la combustión de gasolina o, por el contrario, que la reacción sea lenta, como es el caso de la oxidación de una estructura de hierro.</p> <p>Cuestionamientos y análisis sobre la claridad del concepto de la reacción química.</p> <p>Representación de gráficas que describen el comportamiento de las reacciones químicas, así como las relaciones entre magnitudes (tiempo y peso).</p> <p>Interpreta información a partir de gráficas que representan una línea recta.</p>	<p>CE1</p>	<p>Situacional</p> <p>Conceptual</p> <p>Lingüístico</p> <p>Actuativo</p>
<p>Actividad de desarrollo 2 (individual): velocidad de un objeto en caída libre.</p>	<p>Desde una altura de 300 metros se deja caer un objeto en caída libre y se miden sus velocidades en diferentes momentos.</p> <p>A partir de una gráfica que representa las velocidades del objeto con relación al tiempo transcurrido, con sus respectivas unidades de medición. Solicitan a los alumnos que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El comportamiento de un objeto en caída libre • La descripción del comportamiento de la gráfica con relación a la velocidad y el tiempo. • La interpretación de por qué la gráfica que representa la situación se encuentra en el cuarto cuadrante. <p>Con base en la tabla siguiente se solicita determinar la velocidad del objeto en los instantes de tiempo determinados.</p>	<p>CE2</p>	<p>Situacional</p> <p>Actuativo</p> <p>Lingüístico</p> <p>Conceptual</p> <p>Argumentativo</p>

<i>Tiempo (seg)</i>	<i>Velocidad (m/seg)</i>
<i>0</i>	
<i>1</i>	
<i>1.5</i>	
<i>2</i>	
<i>2.5</i>	
<i>3</i>	
<i>3.5</i>	
<i>3.8</i>	

A partir de la tabla determinar la pendiente y la expresión algebraica en cualquier instante de tiempo, así como la argumentación de cómo se obtuvo.

Se establece relación entre la expresión algebraica en la actividad de inicio y en la actividad de desarrollo poniendo atención en los cambios que tiene la velocidad con respecto al tiempo. Solicitando la argumentación.

La siguiente figura se muestra el comportamiento de dos cantidades que están variando, representados por “x” y “y”.



A partir de la gráfica anterior se pretende analizar cuando “x” e “y” están variando, así como la relación entre gráficas mostradas en

Actividad 3
(individual): un estudio general

la actividad 2.

Posteriormente se propone una tabla con valores numéricos en “x” e “y” solicitados.

x	y
-2	
-0.5	
0	
0.5	
1	
2	
3.5	

En esta tabla se espera que los alumnos analicen el comportamiento de los valores de esas parejas, encuentren la expresión algebraica a partir de dos valores involucrados, así como su relación entre ellos. Por otro lado, se pretende conocer el valor de la pendiente con relación al ángulo de inclinación con respecto al eje de las “x”.

En la sección de cierre se presenta la institucionalización de las relaciones de variables, la emergencia de la función lineal y las variables dependientes e independientes vistos anteriormente mediante algunas representaciones (gráficas y tablas numéricas).

*Siempre que la razón entre dos valores correspondientes de dos magnitudes variables es una constante, se dice que ambas magnitudes son **directamente proporcionales** o, simplemente, que son **proporcionales** y a la constante se le denomina **constante de proporcionalidad**.*

*Así, en el caso de las expresiones de la forma $y = mx$, tenemos que x e y son **directamente proporcionales** pues $\frac{y}{x} = m$ es una constante. Consecuentemente, desde este punto de vista m puede interpretarse como la **constante de proporcionalidad** entre dos magnitudes que son **proporcionales**.*

Actividad
(individual): cierre

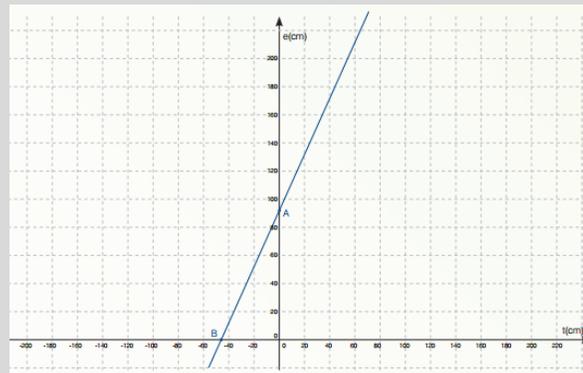
4

	<p>Desde otra perspectiva, puede observarse que la constante m de la expresión algebraica $y = mx$ representa la razón de crecimiento de la variable y entre el crecimiento de la variable x. Esto puede interpretarse como el cambio del valor de la variable y cuando la variable x se incrementa en una unidad. En términos gráficos representa el cambio en el valor de la ordenada cuando la abscisa se modifica en una unidad y, por tal motivo, lo identificamos también con el nombre de razón de avance o pendiente de una recta.</p> <p>En el caso de una función lineal cuya expresión analítica es de la forma $y = mx$, llamaremos variable independiente a la x y variable dependiente a la y. El carácter dependiente de la variable y conduce a que con frecuencia se emplee la expresión “y está en función de x”, idea que se expresa algebraicamente escribiendo $y = f(x)$, lo cual suele leerse diciendo “y es igual a f de x”.</p> <p>En el caso de una función como las que hemos estudiado aquí es entonces frecuente que se escriban expresiones como $f(x) = 4x$, $f(x) = -3x$, etc. y, de forma general, $f(x) = mx$.</p>		
<p>Secuencia didáctica 2: Las funciones lineales</p> <p>Actividad 1 (individual): inicio</p>	<p>En la actividad de inicio se aborda un problema en contexto extra-matemático, donde introduce el concepto de función lineal.</p> <p>Por ejemplo, según Santiago Genovés, (datos consultados en Krenzer, 2006), la estatura de un ser humano medida en centímetros puede determinarse de la siguiente manera:</p> <p>Si se trata de un varón, mediante la relación $E = 2.26f + 66.38^*$ (1) donde $E =$ estatura; $f =$ longitud del fémur en centímetros</p> <p>A partir de la expresión algebraica del ejemplo anterior, se le solicita al alumno que determine aproximadamente cuánto mide su estatura a partir de la medida de su fémur, con el fin de analizar la relación entre las dos variables (fémur y estatura), así como el análisis de cómo se llegó a esa expresión.</p> <p>Además, se solicita la representación gráfica de la expresión algebraica, y la interpretación de cuando la $E = 0$.</p>	<p>CE3</p>	<p>Situacional</p> <p>Actuativo</p> <p>Conceptual</p> <p>Proposicional</p> <p>Lingüístico</p> <p>Argumentativo</p>

Actividad 2
(individual): desarrollo

En esta parte se pretende que el alumno analice otra forma de estimar la estatura de una persona, pero ahora a partir de la tibia, planteando primero ¿En qué parte del cuerpo humano está ubicado la tibia?

Posteriormente se muestra una gráfica que indica la relación entre la medida de la tibia y la estatura.



Se pretende que a partir de la gráfica se solicita un análisis de los puntos que intersectan al eje x y al eje y, así como la expresión algebraica.

Actividad 3
(individual): desarrollo

Puesto que no es sencillo a partir de esa gráfica se proporcionan unos puntos de la recta que ayuden a encontrar la expresión.

Medida de la tibia (centímetros)	Estatura (centímetros)
35	145.46
38	152.24
40	156.76
50	179.36

Actividad 4 (equipo):
desarrollo

Se somete a discusión en equipo para determinar cuáles son los aspectos que se deben considerar para construir un modelo algebraico.

Posteriormente se procede a relacionar los modelos vistos anteriormente, y tratan de invertir variables para determinar ahora el fémur dada la estatura, es decir, la siguiente expresión:

$$f = \left(\frac{1}{2.59}\right)(e - 49.74)$$

donde $e =$ estatura; $f =$ longitud del fémur en centímetros

A partir de la expresión se solicita al alumno determinar la gráfica, así como la tabla de algunos puntos que pasan por esa gráfica con el fin de analizar otras representaciones que interpreten el modelo algebraico.

Actividad de cierre

En esta parte el interés es institucionalizar el contenido matemático que se ha venido trabajando, es decir, definir conceptos de manera formal, como lo siguiente:

Tomando en cuenta las formas posibles de las funciones cuyas gráficas corresponden a líneas rectas, decimos que la expresión algebraica de una función lineal es $y = mx + b$, lo cual también suele expresarse como $f(x) = mx + b$.

Cuando el valor de b es 0, se trata de una función cuya gráfica corresponde a una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y si $b \neq 0$, se trata de una línea recta desplazada b unidades sobre el eje de las y arriba o abajo del eje de las x , en dependencia de si el valor de b es positivo o negativo. Nuevamente identificamos a x como la variable independiente y a la y como variable dependiente.

	<p><i>Observamos que, en general, cuando hablamos de una función lineal (como sucede con todas las funciones), podemos hacerlo a partir de diferentes formas de representarla o de referirnos a la misma. Es posible hacerlo por medio de una gráfica, de una expresión analítica o de parejas ordenadas de números (frecuentemente presentadas en una tabla numérica). Así, cada función puede representarse de cualquiera de estas tres formas.</i></p> <p><i>Por esta razón, cuando hablamos de una función lineal (y de una función en general), además de la gráfica, tabla numérica o expresión algebraica correspondiente, es necesario referirse al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. A este conjunto de valores lo denominamos con el nombre de dominio de la función.</i></p> <p><i>En dependencia de los valores del dominio de la función, los valores posibles de la variable dependiente tienen sus propias restricciones. Al conjunto de valores posibles de la variable dependiente le llamaremos rango de la función.</i></p>		
<p>Secuencia didáctica 3: Ecuaciones lineales</p> <p>Actividad 1 (individual): inicio</p>	<p>Se explica que en las secuencias anteriores se ha trabajado con funciones lineales, y que en esta secuencia se espera estudiar las ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita, así como su relación entre ellas. Se plantea un problema en contexto extra-matemático;</p> <p>Para iniciar este desarrollo conoceremos un poco acerca de los fenómenos de depreciación. Es común encontrar en notas periodísticas expresiones como "el dólar estadounidense se depreció frente al peso mexicano", "el barril de petróleo mexicano se depreció a partir de la inundación del mercado petrolero con el petróleo venezolano", o simplemente expresiones más cotidianas como "necesito vender mi carro, pero es modelo 2000, no sé cuánto se habrá depreciado".</p> <p>Primeramente, se solicita una interpretación de las frases mencionadas en el texto anterior y se plantea un problema que tiene que ver con la depreciación de los bienes, específicamente de los automóviles, proporcionando la siguiente tabla de información:</p>	<p>CE4</p>	<p>Situacional</p> <p>Actuativo</p> <p>Conceptual</p> <p>Proposicional</p> <p>Argumentativo</p> <p>Lingüístico</p>

Ley de Ingresos del Estado de Sonora
Artículo 212 G-7

Modelo del vehículo	Factor de depreciación
2012	0.850
2011	0.725
2010	0.600
2009	0.500
2008	0.400
2007	0.300
2006	0.225
2005	0.150
2004 y anteriores	0.075

Para esta situación se espera que los alumnos establezcan procesos que ayuden a conocer la depreciación de los automóviles, es decir, conocer su valor original, sabiendo el precio de algún año actual.

En el **Estado de Sonora, México**, existe una región muy famosa a nivel nacional por el reto que significó convertir lo que son terrenos semidesérticos en zonas con una alta productividad agrícola. Nos referimos a la zona geográfica conocida como "*La Costa de Hermosillo*", en la cual la producción de vid, nuez y naranja es alta.

Se plantea la siguiente información para propiciar preguntas de reflexión que ayuden al alumno, como lo siguiente:

- a) **¿Conoces la Costa de Hermosillo? Investiga algunos datos de producción de los cultivos que mayoritariamente se realizan en ese lugar.**

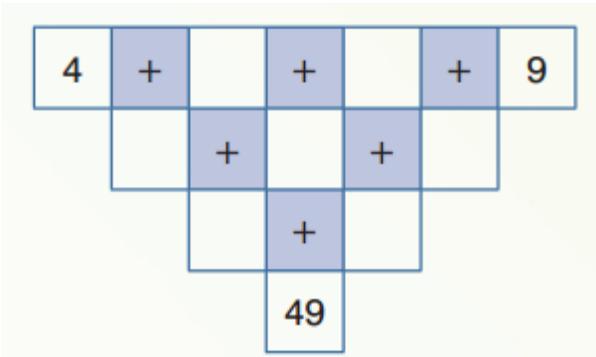
Hace algunos años se empezó a hablar del peligro que significaba para esa zona agrícola la salinización de los mantos acuíferos, de los cuales se extrae el agua necesaria para el riego de los diferentes cultivos.

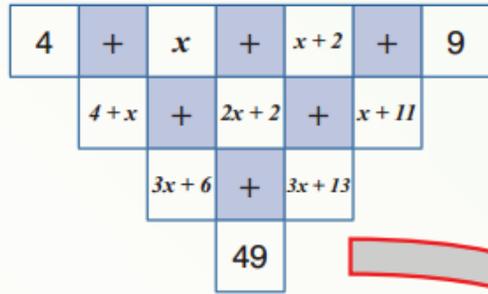
- b) **¿En qué crees que consiste la salinización de los mantos acuíferos? ¿Habías escuchado con anterioridad hablar de este problema? ¿Realmente consideras que es un problema? Expresa ampliamente tu opinión y lo que conozcas sobre el tema.**

Por otro lado, se proporciona más información que ayude a tener sentido el

Actividad
(individual): inicio

2

	<p>siguiente modelo que se desea plantear:</p> <p><i>Por ejemplo</i> Para el caso de la vid, dicha expresión, consultada en Jiménez (2002), es</p> $P = 100 - 9.62 (S - 1.5)$ <p>Donde: <i>P = Producción del cultivo en % (100% sería el máximo esperado).</i> <i>S = Salinidad de suelo, medida en unidades conocidas como deciSiemens.</i></p> <p>Posteriormente, se procede a dar diferentes valores a las P que representa la producción del cultivo, con la finalidad de darle sentido a la ecuación lineal, haciendo referencia a una función lineal</p>		
<p>Actividad 3 (individual): desarrollo</p>	<p>Se solicita completar el siguiente arreglo, sabiendo que su solución es la siguiente indicación: la solución del siguiente arreglo son dos números de tal manera que uno está aumentado en dos más que el otro.</p>  <p>La solución sería:</p>		



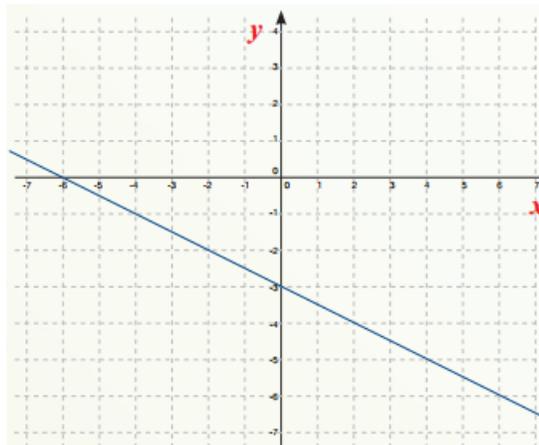
$$6x + 19 = 49$$

$$x = \frac{49 - 19}{6}$$

$$x = 5$$

Se plantean cuestiones con respecto a su solución.

Posteriormente se proporciona la siguiente gráfica:



Se solicita encontrar la expresión $y = mx + b$ correspondiente a la recta. Además, si a y le asigna un valor, ¿Qué representa la expresión?

Después se solicita llenar la siguiente tabla para ciertos valores de y:

	<table border="1"> <thead> <tr> <th>y</th> <th>Forma de $y = mx + b$</th> <th>Transformaciones necesarias para encontrar el valor de x</th> <th>Valor encontrado para x</th> <th>(x, y)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-5</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>$-\frac{3}{5}$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	y	Forma de $y = mx + b$	Transformaciones necesarias para encontrar el valor de x	Valor encontrado para x	(x, y)	-5					$-\frac{3}{5}$					0					k						
y	Forma de $y = mx + b$	Transformaciones necesarias para encontrar el valor de x	Valor encontrado para x	(x, y)																								
-5																												
$-\frac{3}{5}$																												
0																												
k																												
<p>Actividad 6: cierre</p>	<p>Se proporciona un ejemplo para identificar cual es la diferencia entre una ecuación lineal y una identidad:</p> <p>Por ejemplo:</p> <p>En la expresión $2x + 3y - 1 = 4x + 2y + 4$ podemos verificar que si $x = 1$ y $y = 0$, en el lado izquierdo de la expresión se cumple que $2x + 3y - 1 = 2(1) + 3(0) - 1 = 1$, mientras que en el lado derecho tenemos $4x + 2y + 4 = 4(1) + 2(0) + 4 = 8$. Evidentemente la igualdad no se cumple.</p> <p>¿Qué diferencias existen entre un caso como éste y el de una identidad de las estudiadas en los bloques anteriores, como $(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$?</p> <p>Además, se cierra con la institucionalización de los conceptos que se desarrollan en el estudio de las ecuaciones lineales:</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 10px; margin-top: 20px;"> <p><i>En esta secuencia nos hemos centrado en el estudio de las ecuaciones lineales, igualdades que sólo son válidas para un número determinado de valores de las variables involucradas y en las que la potencia a la que se eleva cada variable es uno. Cuando una ecuación tiene dos variables, digamos x e y, decimos que la ecuación es lineal de dos variables.</i></p> <p><i>Aquí estamos interesados particularmente en las ecuaciones lineales de una variable, es decir, de ecuaciones lineales que pueden escribirse (o reducirse) en la forma $ax + b = 0$.</i></p> <p><i>Diremos que el valor de x que hace que la igualdad sea cierta, es una solución de la ecuación lineal.</i></p> </div>																											

	<p><i>Si en una función lineal de la forma $y = ax + b$ nos interesa determinar el valor de la variable x para el cual el valor de la variable y es igual a un valor específico, nos estamos planteando resolver una ecuación lineal que, por ejemplo, puede ser $5x + 2 = -8$, la cual es equivalente (en el sentido de que tiene la misma solución) a la ecuación $5x + 10 = 0$.</i></p> <p><i>Esta es una ecuación lineal que tiene la forma general $ax + b = 0$, donde $a = 5$ y $b = 10$. Éste es el tipo de ecuaciones que hemos estudiado en esta secuencia.</i></p> <p><i>Análogamente, cuando nuestro propósito es determinar el valor de x en el cual la función lineal $f(x) = ax + b$ cruza o interseca el eje de las abscisas o eje x, nos estamos planteando resolver la ecuación lineal $ax + b = 0$.</i></p> <p><i>En el caso de las funciones lineales decimos que el valor de x para el cual y es igual a 0, es una raíz o un cero de la función. Podemos percatarnos, entonces, que determinar la raíz de una función lineal $f(x) = ax + b$ es equivalente a determinar la solución de la ecuación lineal de una variable $ax + b = 0$.</i></p> <p><i>Todas las ecuaciones lineales de una variable pueden reducirse a la forma $ax + b = 0$ y su solución siempre es $x = -\frac{b}{a}$.</i></p> <p>Finalmente se propone una serie de tareas, problemas con relación al estudio de las ecuaciones lineales, así como una autoevaluación de sus conocimientos en este tópico.</p>	
--	--	--

En el bloque VI del libro de Matemáticas 1 se identificaron cuatro configuraciones epistémicas y así como en el análisis del programa de estudio, se encontró la integración de los diferentes estados potenciales, por mencionar, en la CE4 correspondiente a la secuencia didáctica 3, se tienen los siguientes estados: situacional, actuativo, conceptual, proposicional, argumentativo y lingüístico.

3.3 Descripción de las Prácticas Matemáticas y Didácticas

3.3.1 Profesor A

Es relevante mencionar que el profesor en todas las sesiones hace uso de proyector y computadora para proyectar una presentación con diapositivas para mostrar las actividades por realizar en cada sesión.

- **Sesión 1**

En un inicio el “profesor A” plantea una situación problema en contexto extra-matemático que consiste en: ¿cuántos vasos se necesitan para formar una torre de 187 cm de altura? haciendo uso de material manipulable (vasos desechables y reglas para medir), sin indicar la manera precisa de cómo usar este material, deja que sus alumnos establezcan un patrón de medición de tal forma que los vasos queden apilados, para eso les pide que se reúnan en parejas, les reparte 4 vasos a cada pareja y una regla para tomar las medidas que consideren necesarias y dar solución al problema.

El profesor asigna un tiempo para que trabajen en parejas y puedan dar solución al problema, en tanto él recorre las parejas con el fin de guiarlos en los posibles conflictos o procedimientos que están realizando, por ejemplo, implícitamente el profesor sugiere a sus alumnos diseñar una tabla variando el número de vasos y observar qué otra variable va cambiando. Además, el profesor cuestiona a sus alumnos con respecto a lo que están haciendo y así poder explicar lo que no está claro. Después de trabajar 15 minutos en el problema, el profesor pide a sus alumnos posibles soluciones al mismo, los alumnos se muestran participativos y aportan posibles respuestas, posteriormente invierte la situación problema, ¿Cuál sería la altura de una torre con 60 vasos, 80 vasos y 100 vasos? En sus cuestionamientos y sugerencias, resultó evidente que el profesor estaba interesado en que los alumnos establecieran una relación de dependencia entre el número de vasos y la altura correspondiente.

El profesor fue insistente en esta relación, enfocando el trabajo a la identificación de variables dependientes e independientes, como base para la posterior introducción de la definición de una función matemática.

Para cerrar lo que corresponde a la sesión 1, el profesor intenta dar una expresión de manera verbal al problema planteando lo siguiente:

altura de la torre = borde de vaso \times número de vasos + altura sin borde,
posteriormente asigna variables correspondientes para obtener la siguiente expresión algebraica, $a = 1.4(V) + 10$ donde a representa la altura de la torre, 1.4 es lo que mide el borde del vaso que permanece fijo, V el número de vasos y 10 la altura sin borde del vaso. Esto con la finalidad de presentar la definición de función.

- **Sesión 2**

En la sesión 2, el profesor hace un recordatorio de la definición de función y explica la relación que existe entre las variables de la definición de función y la situación planteada en la sesión 1. En esta sesión el profesor señala que ellos ya conocen otras relaciones funcionales que se relacionan con áreas y perímetros de figuras, haciendo referencia que esto ya se ha estudiado en secundaria.

Posteriormente define la estructura de una función lineal indicando: las funciones lineales o de primer grado se representan mediante la expresión algebraica $y = mx + b$, donde m y b son números reales y sus dos variables son siempre de grado uno. Además, menciona que cada uno de los elementos de esta expresión se puede relacionar con el problema de la sesión 1. A partir de esta expresión define los elementos que la componen, dando unos minutos a sus alumnos para que copien lo que está en el pizarrón. De acuerdo al problema visto en la sesión anterior el profesor empieza a hacer la relación de acuerdo a la estructura que ha proporcionado de la función, identificando cada uno de esos elementos que definió.

A partir de la expresión de la función lineal y para ciertos valores que corresponden al número de vasos que ha proporcionado en una tabla, les pide a sus alumnos que la completen haciendo uso de la fórmula, mencionando que a este proceso se le conoce como tabulación. Es importante mencionar que los alumnos en esta sesión se muestran poco participativos, esperando a que el profesor declare si se tiene que copiar o resolver lo que está exponiendo. Mientras los alumnos intentan llenar la tabla el profesor empieza a recorrer los lugares de los alumnos observando lo que están haciendo, surgiendo dudas por parte de uno de ellos al no saber qué operación efectuar al momento de multiplicar 1.4V, el profesor observa que ese alumno efectuaba suma o resta cuando llenaba de la tabla.

Después a partir de la tabla el profesor introduce la representación gráfica correspondiente a la expresión con los valores dados, preguntando a sus alumnos qué tipo de graficas conocen, así que los alumnos se muestran participativos y responden algunas opciones como: barras, pastel, líneas, y puntos, el profesor describe cuál es la representación gráfica de una función lineal, opta por utilizar la gráfica de puntos pidiendo a sus alumnos que la construyan en sus cuadernos, esta gráfica tiene la intención de ver que los puntos quedan en línea recta, sin embargo, reconoce que no puede unir los puntos en una línea recta porque la información que estarían transmitiendo no sería del todo acertada, ejemplifica tomando un punto entre dos valores que se obtuvieron de la tabla, puesto que se está hablando de vasos, en la gráfica ese punto no le corresponde un vaso entero, por tanto ese punto se encuentra fuera del contexto del problema. Posteriormente pasa a otra actividad preguntando si hay dudas al momento de elaborar la tabla, sus alumnos responden que no.

Finalmente cierra la sesión 2 presentando una actividad con algunos problemas en contexto extra-matemático que se relacionan con las funciones lineales. Les pide que lo resuelvan mientras que el profesor recorre los lugares para responder dudas y cierra revisando lo que cada alumno plasmó en su cuaderno.

- **Sesión 3**

En la sesión 3, el profesor inicia recordando la actividad realizada anteriormente, en la que los alumnos trabajaron individualmente, en esta sesión él inicia dándole solución a la actividad con la finalidad de que se expongan posibles procedimientos, y a su vez los alumnos puedan comparar y comprobar sus propios resultados y se llegue a un consenso en la solución de cada situación problema de la actividad.

Posteriormente el profesor propone la siguiente situación: Una compañía de renta de automóviles alquila un Malibú con la tarifa de \$200.00 diarios más \$3.00 por cada kilómetro que se recorra. Determinar el costo si en un día recorre a) 80 km b) 125km c)

250km d) 475km e) 1200km. (El profesor usa la palabra costo para referirse tanto a la tarifa como a la cantidad por pagar).

La finalidad de este problema consiste en ver la relación que existe entre el costo de renta de un auto por día y la distancia recorrida en kilómetros. El profesor pretende que la relación de las variables la establezcan a través de una función lineal. Con respecto a la dinámica el profesor conduce la actividad por medio de preguntas que le permita conocer los conocimientos de sus estudiantes a partir de los procedimientos utilizados para resolver la situación. A partir de las respuestas, el profesor pide que expongan el procedimiento que los llevó a su solución.

Posteriormente plantea otra situación problema en que les pide escriban la función lineal que representa el costo de un día de renta de otros dos diferentes automóviles (Spark y Cheyenne) donde en cada uno su precio de renta es diferente, manteniéndose la tarifa de \$200.00 diarios, pero sin especificar la tarifa por la distancia recorrida. El profesor tiene el propósito de que los estudiantes perciban la necesidad de contar con esa tarifa y que la incluyan genéricamente, empleando literales diferentes. En esta situación aprovecha para plantear que las literales usadas en matemáticas pueden ser distintas y lo recomendable es hacer uso de letras que faciliten saber a cuál variable se hace referencia. Adicionalmente menciona que las funciones lineales se estudian en problemas relacionados con la naturaleza, economía y ciencias sociales.

A partir del primer problema y tomando la función lineal planteada en esa situación, el profesor propone otra situación problema donde ahora invierte la pregunta, es decir, si se rentó el Malibú por un día ¿Cuántos kilómetros se recorrieron si se pagaron a) \$1100.00? b) \$2675.00? c) \$516.20?

Ahora el problema pide los kilómetros recorridos si se paga cierta cantidad, según las prácticas del profesor él trata de introducir con este caso la ecuación lineal, pues en este caso él fija una de las variables desconocidas que representa la función lineal, por tanto, cuestiona a los estudiantes preguntándoles si alguno de ellos representó la función de la siguiente forma: $1100 = 3d + 200$ con la intención de que los alumnos identifiquen la ecuación lineal con una incógnita.

El profesor afirma que a una ecuación lineal se le conoce con ese nombre porque proviene de una función lineal, es decir, cuando en una función lineal se conoce una de las variables que están relacionadas entre sí, y ese valor conocido se sustituye en la función lineal lo que queda representado es una ecuación lineal. Posteriormente declara la diferencia que existe entre una función lineal y una ecuación lineal, enfatizando que a la función lineal se le puede asignar cualquier valor a la variable dependiente mientras que en la ecuación lineal no se le puede asignar cualquier valor a la variable dependiente, comenta que hay algo que lo restringe. Para ver las diferencias antes mencionadas el profesor escribe en el pizarrón una función y una ecuación respectivamente representada por las siguientes expresiones: $c = 3d + 200$, $1100 = 3d + 200$ el profesor trata de ejemplificar haciendo variar distintos valores a la función lineal, mientras que en la ecuación lineal él explica que sólo existe un valor que la satisface.

A partir de lo anterior introduce la definición de ecuación algebraica, luego expresa que la solución de una ecuación lineal con una incógnita es un número real que al sustituirlo en la ecuación hace que se cumpla la igualdad establecida, y que para conocer esta solución se procede a realizar un procedimiento conocido como despeje de la incógnita. El profesor comenta que además de las ecuaciones lineales, existen las cuadráticas, cubicas, fraccionarias y trigonométricas que ellos estudiarán en los próximos semestres. Hasta esta parte de la sesión el profesor sólo se ha dedicado a exponer y escribir en el pizarrón.

Con las situaciones planteadas anteriormente en contexto extra-matemático, el profesor reconoce que cuando los problemas son de este tipo, los alumnos llegan fácilmente a su solución y enfatiza la necesidad de aprender a resolver los que se encuentran en contexto intra-matemático, pues a su parecer los alumnos se pierden al momento de resolverlos. Para cerrar esta sesión es relevante resaltar que el profesor no establece una relación entre estos conceptos, ya que sólo se limita a definir de manera independiente la función matemática, función lineal y ecuación lineal.

- **Sesión 4**

En la sesión 4 el profesor inicia recordando que para las ecuaciones lineales sólo existe un valor que satisface la expresión, después plantea la expresión algebraica de una ecuación lineal con la intención de que los alumnos identifiquen el grado y los elementos que la componen: miembro de una ecuación, igualdad, incógnita, términos y solución de la ecuación. Posteriormente explica que la manera de encontrar las soluciones de las ecuaciones lineales es despejando la incógnita de la ecuación, es decir, dejar sola la incógnita en alguno de los miembros.

Para ejemplificar plantea una ecuación lineal y explica cómo despejar la incógnita, además les recuerda a los alumnos que ya lo han estudiado en secundaria, por esta razón los cuestiona sobre cómo proceder para despejar, mientras algunos alumnos recitan pasos mecanizados sin saber la razón o justificación de ellos. El profesor explica que detrás de esos pasos mecanizados existen unas propiedades de suma y resta de la igualdad. Para introducir las propiedades mencionadas el profesor ilustra las cosas por medio de una balanza, pues quiere ejemplificar dichas propiedades quitando y agregando peso, esto con la intención de mostrar que la balanza siempre tiene que estar equilibrada y lo que agregue o quite por un lado lo tienen que hacer del otro lado también, mencionando que de la misma manera se cumple con las ecuaciones lineales enfatizando que sus alumnos se tienen que hacer conscientes de las propiedades y saber por qué “si algo está sumando pasa restando” y viceversa.

A partir de lo anterior el profesor escribe de manera formal las propiedades de suma y resta:

- Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$
- Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$

Menciona que estas propiedades deben ser utilizadas apropiadamente para cuando se les presenten ecuaciones más complicadas, primero procede a dar un ejemplo sencillo en donde utiliza las propiedades, específicamente el siguiente ejemplo donde muestra su solución: $x - 5 = 10$. Utilizando las propiedades tiene,

$$x - 5 + 5 = 10 + 5$$

$$x = 10 + 5$$

Después plantea otros dos casos similares para que los alumnos concienticen las propiedades, también hace énfasis en mencionar que utilizando las propiedades es menos probable que los estudiantes se equivoquen al resolver la ecuación lineal. Es importante mencionar que al mismo tiempo que el profesor resuelve en el pizarrón estos ejemplos cuestiona a los estudiantes con intención de que participen en la resolución.

Posteriormente pide que copien seis ecuaciones lineales y las resuelvan usando las propiedades de suma y resta de la igualdad para encontrar la incógnita o la solución de la ecuación. Después de darles aproximadamente 10 minutos para que los alumnos resuelvan estos ejercicios, en donde él se dedicó a recorrer lugares y detectar posibles conflictos e identificó que los alumnos estaban teniendo problemas con los dos últimos ejercicios, pues a diferencia de los anteriores estos involucraban términos fraccionarios. El profesor decide resolver uno en el pizarrón (resuelve la ecuación usando la calculadora) sugiriéndoles a sus alumnos que usen calculadora para reducir las fracciones.

Luego vuelve a dar más tiempo para que continúen resolviendo y al mismo tiempo él sigue recorriendo lugares para ver cómo aplican las propiedades e identificar posibles conflictos, así que el profesor observa que al llegar al despeje de la incógnita los alumnos no están realizando las operaciones involucradas en la resolución para llegar al número que satisface la ecuación. Por lo que resuelve el primer ejercicio en el pizarrón y encuentra el número que es la solución de la ecuación escribiéndolo con un marcador de color diferente.

Para cerrar con esta sesión presenta otro tipo de ecuación de la forma $2x = 8$, cuestiona a sus alumnos cómo se resuelve esa ecuación, una alumna responde de manera correcta, sin embargo, él pregunta ¿Por qué?, entonces plática a sus alumnos que para este tipo de ecuaciones deben de desarrollar un método que les permita quitar ese dos para despejar la incógnita haciendo referencia a la ilustración mostrada en la sesión anterior, finaliza la sesión diciendo que la balanza siempre tiene que estar equilibrada.

- **Sesión 5**

En la sesión 5, los alumnos hacen fila para que el profesor les revise la tarea de la clase anterior, el profesor no pone atención en lo que los alumnos hicieron o contestaron en la resolución de las ecuaciones lineales, únicamente se limita a poner un sello de revisado.

Posteriormente revisan de manera grupal las ecuaciones que se resolvieron en la clase anterior, las resuelve usando las propiedades de suma y resta de la igualdad, pero esta vez explicando que una manera de saber si llegaron a la solución correcta, es realizando la comprobación, es decir, sustituyendo el valor de la “x” en la ecuación y ver que lo que está a la izquierda de la ecuación es lo mismo que está a la derecha. Luego abordan el otro caso donde la incógnita de la ecuación lineal es acompañada por una constante, plantea esto con la intención de introducir la propiedad multiplicativa de la igualdad, y la define de la siguiente manera pidiendo a sus alumnos que apunten en su cuaderno:

- Si $a = b$, entonces $a(c) = b(c)$

Ejemplifica la propiedad regresando a la ilustración de la balanza, después procede a explicar cómo usar esta propiedad al realizar un despeje de una ecuación lineal, y describe que esta propiedad “sirve para lograr que el coeficiente de la incógnita sea 1, multiplicando por el inverso multiplicativo a ambos miembros de la igualdad”. Deja unos minutos para que los alumnos puedan copiar lo que está presentando en el pizarrón.

Para explicar la propiedad multiplicativa de la igualdad, primero procede a ejemplificar de manera numérica lo que significa el inverso multiplicativo, siempre recurriendo a preguntar a los alumnos para que participen y ellos sean quienes lleguen a la respuesta, sin embargo, podemos notar que para los alumnos no es muy claro el significado del inverso multiplicativo y el profesor presenta de manera independiente el inverso multiplicativo con respecto a la propiedad multiplicativa de la igualdad.

Después asume que sus alumnos han comprendido el significado de inverso multiplicativo y pasa a resolver las siguientes ecuaciones: $2x = 8$ y $\frac{x}{5} = 10$

$$\frac{2}{2}x = \frac{8}{2} \quad x = 4 \quad (5)\frac{1}{5}x = 10(5) \quad x = 10(5)=50$$

Después de haber resuelto de manera grupal estos ejemplos, en contexto intra-matemático, presenta seis ecuaciones lineales para utilizar la propiedad multiplicativa de la igualdad, indicándoles que únicamente resuelvan las primeras cuatro, dejando dos para la siguiente sesión. Mientras los alumnos resuelven los problemas, el profesor se acerca a ellos para apoyarlos en alguna duda o conflicto que se les presente.

Finalmente, como parte de cierre de la sesión el profesor hace énfasis en que los alumnos apliquen o utilicen la propiedad multiplicativa de la igualdad para resolver las ecuaciones lineales, señalando que no importa el orden en que las usen, siempre llegarán al resultado, así como también muestra interés en que entiendan el despeje de la ecuación. El profesor cuestiona las respuestas de los alumnos con la intención de verificar si entienden lo que hacen, además se percata de los errores que cometieron al momento de resolver la ecuación lineal aplicando la propiedad.

- **Sesión 6**

En la sesión 6, el profesor inicia haciendo un recordatorio de la propiedad de suma y multiplicación como las definió anteriormente, además explica dos ecuaciones lineales utilizando ambas propiedades, sin embargo, se puede notar que el profesor se enfoca en que sus alumnos utilicen correctamente las propiedades.

Después de estudiar los casos sencillos de ecuaciones lineales, explica que pasarán a estudiar casos más complejos en donde también harán uso de estas dos propiedades, procediendo a dar las siguientes recomendaciones para la resolución de estas ecuaciones:

- Quitar paréntesis
- Quitar denominadores

- Agrupar los términos que posean la incógnita en un miembro de la ecuación y los términos independientes en el otro miembro
- Reducir términos semejantes
- Despejar o aislar la incógnita

Podemos sospechar que con estas recomendaciones el profesor se enfoca más en que los alumnos memoricen un procedimiento que a encontrar la solución que satisface la ecuación. Después de presentar estos pasos como un algoritmo, escribe en el pizarrón algunos ejemplos en donde la incógnita se encuentra en ambos miembros de la ecuación, el profesor se apoya de sus estudiantes haciendo preguntas para su resolución. Cuando encuentra el valor de la incógnita procede a dar su comprobación sustituyendo el valor de la misma en la ecuación, y hacer énfasis en que ambos miembros de la igualdad tienen el mismo valor. Al hacerlo, el profesor revisa cada uno de los pasos del algoritmo.

Luego pasa a resolver otro ejemplo apoyándose en sus alumnos, aunque uno de ellos expone que resulta más fácil no usar las propiedades, el profesor sigue haciendo énfasis en la importancia de usarlas y que se hagan conscientes de por qué algo que “está sumando pasa restando y por qué algo que está dividiendo pasa multiplicando”, comenta que “no importa el orden en que utilicen estas propiedades, si las utilizan bien llegarán a la solución de la ecuación”, también explica a sus alumnos que hacerlo como están acostumbrados, es decir, sin usar las propiedades es una forma de equivocarse más fácilmente.

Después procede a dictarles una actividad que consiste en la resolución de cuatro ecuaciones lineales en contexto intra-matemático, las indicaciones del profesor son que los alumnos sigan utilizando las propiedades, así como también las recomendaciones mencionadas anteriormente para su resolución.

Los alumnos trabajan de manera individual mientras el profesor recorre los lugares para identificar y responder dudas de los estudiantes, así como también darles orientación en el procedimiento que están implementando. Durante la interacción podemos ver que el profesor hace algunas sugerencias o comentarios con respecto a la resolución de las ecuaciones lineales, en algunos casos se presentaron las siguientes:

- El profesor sugiere a un alumno agrupar los términos que tienen literal por un lado de la igualdad, y los que no tienen de otro lado de la igualdad, aplicando las propiedades.
- Para otro caso el profesor comenta a un alumno que lo está realizando bien, pero que no está aplicando correctamente las propiedades.
- En otro caso observamos que un alumno presenta el procedimiento tal y como el profesor quiere (aplicando las propiedades de suma y multiplicación de la igualdad).
- En otro caso cuando el profesor revisa los trabajos individuales, cuestiona a los alumnos para que expliquen el procedimiento realizado y, en caso de equivocación,

promueve que se den cuenta de los errores cometidos al utilizar las propiedades de la igualdad.

- También se puede observar que en algunas ocasiones el profesor escribe y resuelve la ecuación para explicar el procedimiento como lo ha venido resolviendo en el pizarrón.
- Muestra interés por los que nota o cree que no le están entendiendo al procedimiento, o en cómo utilizar las propiedades, y para los que a su parecer están con dudas sin poder avanzar, en cuyos casos les sugiere que vayan a asesorías.

Finalmente, como cierre de la sesión el profesor escribe una ecuación lineal que incluye paréntesis en ambos miembros de la igualdad, es decir, $3(x + 2) = 4(2x - 3)$ y la deja de tarea para la siguiente sesión.

- **Sesión 7**

En la sesión 7, el profesor inicia preguntando a sus alumnos si tuvieron alguna duda sobre los ejercicios trabajados en la sesión anterior, aclara que sólo resolverá los primeros dos con la intención de que puedan revisar si tuvieron algún error al momento de resolverlos. El profesor resuelve las siguientes ecuaciones haciendo énfasis en usar las propiedades y las recomendaciones para su resolución: $4x + 5 = 3x + 9$ y $6x - 4 = 11 + 8x$.

Después les pregunta si resolvieron la tarea que dejó en la sesión anterior, algunos alumnos parecen no recordarlo, así que procede a escribir la ecuación en el pizarrón, $3(x + 2) = 4(2x - 3)$. En este caso resalta que primero deben eliminarse paréntesis para dejarlo como uno de los casos que ya han venido resolviendo, les da primero un tiempo para que intenten resolverlo de manera individual y luego procede a resolverlo él en el pizarrón.

En este caso podemos percatarnos que el profesor al momento de explicar el procedimiento que han venido haciendo con las propiedades de la igualdad va dejando de lado ese procedimiento explícito de usar las propiedades, y va haciendo lo que tradicionalmente conocen los alumnos, (pasar restando cuando está sumando del otro lado de la igualdad y pasar dividiendo cuando está multiplicando del otro lado de la igualdad) tratan de revolver ambas cosas y eso causa alguna confusión en su solución.

Por consiguiente, aborda otro tipo de ecuación lineal, la cual incluye fracciones en ambos miembros de la igualdad. El profesor cuestiona a sus estudiantes sobre las diferencias de esta ecuación con las anteriores, y explica que utilizando el inverso multiplicativo puede eliminar las fracciones y dejarla como las que se estudiaron en las primeras sesiones.

En este caso el maestro observa la falta de claridad de algunos alumnos, a quienes no les está quedando claro cómo proceder utilizando las propiedades, pues cuando pregunta si tienen alguna duda, la respuesta es: “en todo”, entonces borra lo antes escrito y justificado por las propiedades, entonces vuelve a explicar asumiendo que los alumnos ya han entendido o comprendido cómo utilizar las propiedades, así que procede a resolverlo como los alumnos están acostumbrados (los pasos mecanizados), ya no lo hace de manera explícita, entonces, comienza a resolver las ecuaciones únicamente mencionando las

propiedades sin escribirlas en el pizarrón, realiza la comprobación de la ecuación como lo ha venido haciendo (sustituyendo el valor de la incógnita en la ecuación), y procede a dictar una actividad con el título de: “encuentren la solución de las siguientes ecuaciones”.

Las instrucciones del profesor son que en ese momento resolverán las primeras dos y las otras tres quedarán de tarea, así como también que quien termine y revise puede ir saliendo del salón, comentando que no deben copiar. Las ecuaciones por resolver son las siguientes:

$$6(x + 3) = 5(x + 4)$$

$$\frac{x + 10}{3} = \frac{x + 16}{5}$$

$$7(x + 4) = -3(x - 8)$$

$$\frac{2x + 6}{4} = 3\frac{x + 4}{7}$$

$$2(x + 14) = 5(x + 8)$$

En esta última parte de la sesión el profesor les deja que trabajen en las dos primeras ecuaciones, y espera a que los alumnos revisen lo que han hecho. Se observa que algunos alumnos las resuelven bien, así como también que otros aún siguen cometiendo errores al momento de utilizar las propiedades, al dividir fracciones y también tienen problemas con las leyes de los signos, aspectos donde el profesor hace correcciones.

- **Sesión 8**

En esta sesión y la última, el profesor cierra el tema con una actividad trabajándola en parejas, pide a los alumnos que elijan su pareja con la que les gustaría competir, pues propone una actividad similar a la del programa de televisión llamado “JEOPARDY”, este programa en algún momento fue famoso, en él los competidores ponen en juego sus conocimientos. El juego consiste en diferentes categorías entre las cuales un concursante puede elegir una categoría con un cierto valor, si el concursante responde correctamente, gana los puntos que le corresponden. Adaptando este juego a una actividad matemática donde en este caso las preguntas de cada categoría será la resolución de una ecuación lineal, el profesor asigna cuatro categorías con el nombre de: un regalo, elemental, bien pro y NASA, el puntaje asignado para cada categoría va desde 200 hasta 500 puntos.

La dinámica propuesta por el profesor para esta actividad consiste en:

1. Ponerse en parejas.
2. Concurrar el uno con el otro.
3. El ganador obtendrá 5 puntos extras para el parcial.
4. Y el que pierda, pero esté trabajando bien obtendrá sólo 2 puntos extras.

5. El alumno que haya obtenido el número mayor de puntos, obtendrá los 5 puntos extras.
6. No consultar notas.

Las categorías y puntajes se eligen al azar y el profesor da un tiempo no mayor a cinco minutos para que resuelvan la ecuación lineal presentada para cada categoría, después que hayan resuelto el problema cada pareja tiene que intercambiar el cuaderno para que su compañero lo revise con base en la respuesta del profesor en el pizarrón. Las ecuaciones lineales presentadas en la dinámica de la actividad van desde ecuaciones sencillas, como las incluidas en las primeras sesiones (de inicio), hasta las más complicadas cubiertas en el desarrollo. Al final de la dinámica pide a sus alumnos que sumen la cantidad de puntos obtenidos por su compañero, pues éstos contarán como puntos extras. Además, les indica que deben arrancar las hojas y ponerles su nombre, y cada uno entregar todo lo que escribió en cada hoja. Con esta última actividad se cierra la clase y el tema de las ecuaciones lineales.

3.3.2 Profesor B

- **Sesión 1**

De acuerdo con las cuatro sesiones de clase observadas con el profesor B, a diferencia del profesor A, inicia directamente con el tema de las ecuaciones lineales. En la primera sesión escribe el título del tema, “Ecuaciones lineales (de primer grado) con una incógnita” empieza relacionando este tema con otros anteriores ya estudiados, como el de expresiones algebraicas y binomios, donde la expresión algebraica la relaciona con la ecuación, ya que explica que son similares cuando se tiene que identificar el grado de la expresión.

Siguiendo con cuestionamientos, les pide a sus alumnos dar ejemplos que cumplan con esta característica, es decir, que sean de primer grado y con una incógnita. Los alumnos proporcionan algunos ejemplos como: $15x$, $18y$ y $5 + 5x$, el profesor afirma que efectivamente son expresiones algebraicas de primer grado y con una incógnita. Para introducir la ecuación lineal las expresiones anteriores las iguala a un valor, con la intención de mostrarles a sus alumnos que solo existe un valor que satisface esa expresión.

Recordando las expresiones algebraicas el profesor pone el ejemplo del cuadrado de un binomio y su expresión desarrollada: $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Procede a preguntar ¿para qué valor se cumple la igualdad?, así, la dinámica grupal empieza con cuestionamientos por parte del profesor y los alumnos dan valores que satisfagan esa igualdad, el profesor pone esta expresión que representa una identidad, por tanto, existen una infinidad de valores que la satisfacen. De esta manera hace una comparación entre una ecuación y una identidad. Señala que en el tema a desarrollar se tratarán las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita, por lo cual se satisfarán sólo para un determinado valor de la incógnita.

Posteriormente, procede a presentar la definición formal de la ecuación lineal como: $Ax + B = 0$, haciendo énfasis que ésta es la forma reducida de las diferentes ecuaciones que se tratarán. Primero aborda ecuaciones con expresiones de este tipo y posteriormente estudia algunos problemas de aplicación utilizando estas ecuaciones. El profesor establece que las ecuaciones y sus soluciones están enmarcadas en el sistema de los números reales (puede ser enteros, fracciones, decimal, entero negativo etc.) y deben verificar que los resultados satisfagan la igualdad.

A continuación, hace una discusión gráfica de las ecuaciones y sus soluciones, identificando la solución con un punto determinado de la recta numérica. El profesor sigue actuando únicamente de manera expositiva y asume que los alumnos ya saben cómo es la solución de una ecuación lineal, procede a señalar que para la resolución de la ecuación es necesario despejar la incógnita, menciona que existen algunas sencillas en las que a simple vista puedes conocer su solución.

Explica que para hacer esos despejes tienen que hacer uso de lo que se conoce como las propiedades de los números reales, las cuales estudiaron al principio del curso (propiedad conmutativa, asociativa, existencia del neutro, del inverso aditivo y multiplicativo, etc.).

Habla de que esas propiedades se pueden usar en la práctica para desarrollar técnicas que les ayudan a encontrar de manera más sencilla la incógnita. Con técnicas se refiere, por ejemplo, cuando en una ecuación lineal un término está sumando lo pasan restando del otro lado de la igualdad, lo cual respalda con la propiedad del inverso aditivo de los números reales, haciendo énfasis en su interés de que sepan resolver las ecuaciones lineales usando las técnicas que están respaldadas por las propiedades de los números reales.

Posteriormente escribe en el pizarrón siete ecuaciones lineales desde las más sencillas hasta las que incluyen miembros con fracciones, estas ecuaciones lineales las resuelven de manera grupal, explicando que cuando se habla de una ecuación tiene que aparecer una igualdad, y en todos los ejemplos existe una igualdad, recordando que si está sumando de lado izquierdo pasa restando de lado derecho, no dejándolo del mismo lado, pues esto los lleva a equivocarse, por eso es importante que identifiquen el símbolo igual, haciendo referencia a las expresiones escritas en el pizarrón.

Al mismo tiempo que va resolviendo estos ejemplos con ayuda de los alumnos, también realiza la comprobación de algunos, mostrando que efectivamente el valor encontrado satisface la igualdad. También resalta los posibles errores que los alumnos cometen al resolver estas ecuaciones, como, por ejemplo: no sumar correctamente las fracciones.

Cuando aborda cada ejemplo, señala cuál es la diferencia entre las que ya se han venido resolviendo y además sugiere que para la resolución separen términos semejantes, agrupando términos que contengan la incógnita y por otro lado los que no tengan incógnita.

Por último, en esta sesión el profesor no alcanza a resolver los tres últimos ejemplos, así que los deja de tarea, explicando el procedimiento de manera verbal o el camino que tendrían que seguir para encontrar su solución.

- **Sesión 2**

En la sesión 2, el profesor inicia pasando lista de asistencia y preguntando si resolvieron la tarea (ejemplos pendientes de la sesión anterior), después pregunta si alguien quiere pasar al pizarrón a resolver algún ejemplo de la tarea, tres alumnas de manera voluntaria pasan al pizarrón y resuelven cada una ecuación las dos primeras realizan bien el procedimiento mientras que la tercera comete errores al momento de agrupar términos semejantes y separarlos hacia ambos lados de la igualdad. El profesor resalta los errores que cometió y procede a corregir el procedimiento.

Posteriormente el profesor comenta a sus alumnos que va a realizar otros ejemplos que se les pueden presentar cuando resuelvan algunos ejercicios, específicamente cuando en cada miembro de la igualdad aparecen fracciones. El profesor pregunta ¿cómo le harían para resolverla?, un alumno sugiere obtener el mínimo común múltiplo para reducir fracciones, así que el profesor procede por esa ruta y así sucesivamente resuelve las demás, centrándose en el procedimiento tradicional que conocen los alumnos, hace énfasis en las técnicas específicas para despejar la x , y en ningún momento vuelve a mencionar las propiedades que deben utilizar o que justifican las técnicas aplicadas. Finalmente, pide a sus alumnos que trabajen unos ejercicios de tarea que escribe en el pizarrón, y si tienen dudas los retomarán en la siguiente clase. También les proporciona una serie de problemas de “aplicación” de las ecuaciones lineales, indicándoles que lo pasen a su cuaderno para trabajar en la siguiente sesión y no perder tiempo en estar copiando o dictando.

- **Sesión 3**

En la sesión 3, el profesor empieza trabajando con la serie de problemas de aplicación propuestos en la tarea, que pidió únicamente que los trajeran escritos en el cuaderno. El profesor escribe en el pizarrón “Problemas de aplicación”.

El profesor da la instrucción para que seleccionen dos o tres problemas de aplicación de las ecuaciones lineales, y los resuelvan de manera grupal en el salón de clase, para que los demás queden de tarea y cerrar, abarcando hasta donde llegará su próximo examen. Plantea que la última sesión será para aclarar dudas, con la intención de que los alumnos trabajen primeramente en la serie de problemas. Ahora les pide que lean y elijan un problema para resolverlo en clase, considerando el que les representa mayor dificultad. Además, comenta sobre la importancia de plantear adecuadamente la expresión algebraica que modela la situación, señalando que hay diferentes caminos, pues hay problemas que se pueden resolver aritméticamente y hacerlo así, aunque correcto, no es el tema de interés y los esfuerzos deben encaminarse al establecimiento de un planteamiento algebraico.

Posteriormente hace énfasis en cinco pasos que les permitirán plantear y resolver de manera algebraica un problema, y que, en general, les ayudarán a resolver cualquier tipo de problemas (hace referencia a las ecuaciones lineales, sistema de 2×2 , sistema de 3×3 y ecuaciones cuadráticas) estos pasos consisten en lo siguiente:

- Leer todo el enunciado del problema, sin prisas, porque algunas veces leen mal y eso los puede llevar a un planteamiento erróneo.
- Identifiquen lo que se está buscando o lo que se les está pidiendo del problema.
- Escribir con sus palabras de tal manera que ellos mismos lo puedan entender.
- Asignen la incógnita o las incógnitas que vayan a utilizar. Hace referencia que en este caso solo se va a trabajar con una incógnita.
- Leer otra vez el enunciado, pero ahora haciéndolo por partes para que esta vez el mismo enunciado les vaya ayudando a ir formando la ecuación que represente la situación y les permita resolver el problema.

Después menciona que estos son los cinco pasos básicos, sin embargo, existen otros recursos de los sugiere usar, como, por ejemplo: volver a leer el problema las veces que sean necesario, emplear algún otro recurso como dibujar, ejemplificar con números, o recurrir a alguna fórmula. Después pide a sus alumnos que elijan un problema para resolver de manera grupal, de preferencia el que no les queda muy claro o que se les complique un poco más. Un alumno pide que se resuelva el problema número 38, que consiste en:

38. Un triángulo tiene tres lados distintos, si el primero mide 8 unidades, se desconoce la longitud del segundo y el tercero es 2 unidades mayor que el segundo de sus lados, ¿ qué longitudes tienen sus lados si su perímetro es de 24 unidades?

Lo primero que hace el profesor es recurrir a los pasos mencionados anteriormente, y solicita a un alumno que lea el problema, posteriormente, como dicta el segundo paso, identificar lo que se está solicitando, por lo cual los cuestiona y los alumnos responden: la longitud de los lados. Después pasan a realizar el tercer paso que consiste en escribir la variable, y aquí el profesor pide a alguien que vuelva a leer y al mismo tiempo asigna las variables. Por último, pide de nuevo que un alumno lea el problema y dado que se habla de una figura geométrica, procede a dibujar un triángulo que cumpla con las características mencionadas, además asigna valor a cada uno de los lados de acuerdo con lo que el problema plantea. Menciona que en el problema está presente el concepto de perímetro, así que pregunta, ¿cómo calculan el perímetro de un triángulo? un alumno responde: base por altura, mientras que otro comenta: sumar todos los lados. En esta parte podemos darnos cuenta que el profesor toma en cuenta a sus alumnos con la intención de que sigan participando en la resolución de problemas.

Después de plantear la expresión que representa la situación, les hace saber que no ha terminado ahí, porque el propósito del problema no es resolver la ecuación lineal, sino lo que representa la incógnita involucrada.

Posteriormente resuelven dos problemas más, donde su resolución se basa en utilizar básicamente los cinco pasos mencionados, además el profesor enfatiza en la es necesidad de recurrir a otras herramientas matemáticas que les ayuden a solucionar el problema.

- **Sesión 4**

Finalmente, en la sesión 4, se organizan en equipos de tres personas para iniciar con una actividad donde se proponen dos problemas, él espera que hagan el planteamiento algebraico para observar de qué manera lo hacen y la forma en la cual los solucionan. Menciona que quizá ya han estudiado esos problemas en secundaria, sin embargo, los alumnos responden que no los conocen. A raíz de esto platica de manera breve en qué consisten los problemas, así como también les hace saber que el equipo que resuelva el problema con un planteamiento algebraico adecuado y lo presente frente al grupo quedará exento en el próximo examen, pero si lo resuelven y no alcanzan a presentarlo, lo harán en la siguiente clase, pero sólo contará puntos extras. Procede a repartir los problemas en una hoja de papel para que comiencen a resolverlos. Los problemas son:

Un gavilán vio a un grupo de palomas y les dijo adiós mis 100 palomas y una de ellas se detuvo y le dijo: no somos cien señor, pero, nosotras más nosotras más la mitad de nosotras más la mitad de la mitad de nosotras más usted si seríamos cien.

- ¿Cuánto tiempo vivió Diofanto?

Para saber cuántos años vivió Diofanto es preciso considerar el curioso epitafio en la tumba de este famoso matemático griego, donde podremos encontrar diversas expresiones algebraicas ocultas en algunos enunciados.

Lo único que se conoce del tiempo de vida de Diofanto de Alejandría es que nació alrededor del 200/214 D.C y falleció alrededor de 284/298 D.C. Pero gracias al epitafio mencionado tenemos una clave para descifrar la cantidad exacta de años que esta singular persona vivió.

El epitafio ha sido traducido a una gran cantidad de idiomas y en el español ha tomado diversas adaptaciones, pero en su naturaleza siempre se pueden identificar ecuaciones de primer grado para resolver un problema.

Epitafio de la tumba de Diofanto (en una de sus varias versiones):

“Esta tumba contiene a Diofanto. ¡Oh gran maravilla! Y la tumba dice con arte, la medida de su vida. Dios hizo que fuera niño una sexta parte de su vida. Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba. Le encendió el fuego nupcial después del séptimo, y en el quinto año después de la boda le concedió un hijo. Pero. ¡Ay! niño tardío y desgraciado, en la mitad de la vida de su padre, lo arrebató la helada tumba. Después de consolar su pena en cuatro años con esta ciencia del cálculo, llegó al término de su vida”

En esta parte de resolución del problema el profesor sólo se encuentra como moderador, apoyando a los alumnos que solicitan ayuda, quienes empiezan a trabajar y pareciera que con el primer problema la mayoría escribe el planteamiento de manera correcta, mientras que el profesor recomienda que sigan los cinco pasos. Se observa que algunos alumnos plantean el problema de manera numérica, es decir, comienzan con aproximaciones de tal manera que sean cien el total, lo cual representa el total de palomas más el gavián, también se observa que son muy pocos los que logran llegar al segundo problema.

Algunos alumnos plantean números que no satisfacen la ecuación y además no tienen sentido en el contexto del problema, ante lo cual el profesor los cuestiona o simplemente les pide que vuelvan a leer, sin olvidar sugerir que sigan los cinco pasos recomendados.

Por otra parte, el profesor sigue recorriendo los equipos y observando cuál es el camino que están siguiendo y cuáles son los errores presentes al resolver el problema, se observa que los alumnos empiezan a dar valores al tanteo para, explorando, llegar a la respuesta de cuál es el número de palomas y la edad de Diofanto.

Después de más de media hora de trabajo con esos problemas, hay un equipo que los resolvió, sin embargo, se nota que en realidad lo hizo sólo un alumno, no todo el equipo, pues el profesor decide cuestionar al equipo completo con respecto a la solución y los estudiantes y ellos no tienen claridad ni siquiera de lo que se solicita en el problema.

La clase concluye sin que se hayan resuelto los problemas y se revisarán en la clase de dudas. A esa sesión también se asistió, pero el tema no se trató.

3.4 Análisis de las configuraciones epistémicas

Presentamos a continuación un primer análisis de la trayectoria epistémica de acuerdo con Godino, Contreras y Font (2006 p. 6) “es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. Estos componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción”.

En esta investigación relacionamos estos componentes con la observación de lo que el profesor hizo durante el desarrollo del tema. A continuación, se muestra el análisis de las configuraciones epistémicas para cada uno de los profesores.

3.4.1 Profesor A

Configuraciones Epistémicas**Análisis de las configuraciones epistémicas del profesor A**

CE1 Y CE2	Con relación a estas configuraciones las prácticas son de carácter esencialmente conceptual, pues inician con una situación extra-matemática cuya resolución se relaciona primordialmente con la identificación y definición de función, variable dependiente e independiente. Asimismo, con la concepción del proceso de medición.
CE3	La práctica desarrollada con respecto a esta configuración epistémica es de carácter conceptual y lingüística pues el profesor intenta hacer un recordatorio de la sesión anterior para identificar el concepto de función lineal y establecer relación con la expresión algebraica obtenida en la resolución de la situación-problema involucrada. Además, usa representación tabular y gráfica para la función lineal.
CE4, CE5 Y CE6	Con referencia a estas configuraciones las prácticas realizadas son puramente situacionales y procedimentales, pues la actividad propuesta tiene el interés de modelizar la situación una función lineal que involucre dos variables con intención de ejecutar procedimientos para su resolución.
CE7	Esta configuración epistémica es de carácter conceptual, ya que el interés es definir la solución presente al resolver una ecuación lineal.
CE8	La práctica desarrollada en esta configuración corresponde esencialmente a lo procedimental y lingüístico, ya que se hace una comparación de las funciones y ecuaciones lineales utilizando puramente lenguaje algebraico.
CE9	La configuración es de carácter conceptual, con los conceptos dados implícitamente, recurriendo a una ecuación analítica para identificar los elementos que la componen. Asimismo, se presenta la definición de solución de la ecuación lineal y la técnica para el despeje de la misma.
CE10	Aquí el profesor enfatiza en la componente conceptual pues a partir de una ecuación lineal ejemplifica las propiedades de suma y resta de la igualdad usadas para el desarrollo de despeje de las ecuaciones lineales.
CE11	En esta parte se resalta la componente procedimental, ya que las prácticas del profesor se relacionan específicamente con la resolución de las ecuaciones lineales usando las propiedades mencionadas en la CE10, iniciando con ecuaciones sencillas y con la guía del profesor.
CE12	Posteriormente en esta configuración epistémica la componente que resalta es esencialmente procedimental, ya que el profesor propone una serie de ejercicios que les permiten a los alumnos reproducir el despeje de las ecuaciones, sin embargo, esta vez sin la ayuda del profesor.
CE13	En este caso la componente es de carácter conceptual, pues a partir de una ecuación del tipo $2x = 8$ se define la propiedad multiplicativa de la igualdad y su utilización para la resolución de las ecuaciones

	lineales.
CE14	Posteriormente, esta configuración epistémica corresponde a la componente procedimental pues a partir de una serie de ecuaciones lineales se espera que los alumnos las resuelvan utilizando la propiedad multiplicativa de la igualdad.
CE15	Ahora el profesor se centra en la componente procedimental, pues de manera explícita presenta recomendaciones o algoritmos que a su parecer son útiles para resolver cualquier ecuación lineal. Posteriormente propone ejemplos donde puedan ejecutar estas recomendaciones.
CE16	En esta configuración epistémica propone una actividad llamada “resolviendo ecuaciones lineales” por tanto, propone una serie de ecuaciones lineales donde tienen que ejecutar o implementar las propiedades de suma, resta o multiplicación de la igualdad. Por esta razón la configuración es de carácter procedimental.
CE17	En esta configuración se hace un repaso de lo que se estudió en la CE16, con la intención de verificar que los alumnos realizaron correctamente y desarrollaron las sugerencias dadas por el profesor.
CE18	Aquí el profesor plantea ecuaciones en donde ambos miembros incluyen cocientes, profesor y alumnos las resuelven usando las recomendaciones para despejar la incógnita, así como la propiedad multiplicativa. Por tanto, la configuración es esencialmente procedimental.
CE19	Esta configuración es esencialmente procedimental, pues a partir del ejemplo propuesto en la CE18, el profesor propone una serie de ecuaciones que incluyen fracciones, esperando que los alumnos las resuelvan utilizando las propiedades. Por tanto, esta configuración corresponde a la componente procedimental.
CE20	La última configuración es también procedimental, pues el profesor propone una actividad que incluye otra serie de ecuaciones lineales, en este caso las ecuaciones van desde las más sencillas hasta las que incluyen varios términos y cocientes, esta actividad se propone trabajarla en parejas de tal manera que los alumnos se dediquen a la resolución de las ecuaciones.

3.4.2 Profesor B

Configuraciones Epistémicas

Análisis de las configuraciones epistémicas del profesor B

CE1	Esta configuración es de carácter conceptual, pues el profesor recurre a conceptos previos estudiados para posteriormente definir el concepto de función lineal en su forma general $Ax + B = 0$. Además, define la
------------	--

	solución de las ecuaciones lineales como un número real que satisface la igualdad, así como su representación gráfica.
CE2	Esta configuración corresponde a la componente procedimental, pues el profesor presenta la resolución de una serie de ecuaciones lineales, enfatizando en las técnicas que deben utilizar para despejar la incógnita.
CE3	Aquí la práctica del profesor se relaciona con la propuesta de ecuaciones lineales que tienen cocientes en ambos términos. Les pide a los alumnos que las resuelvan utilizando técnicas de despeje, explica que detrás de estas técnicas están las propiedades de los números reales. Por tanto, esta configuración es de carácter procedimental.
CE4	Ésta es una configuración de carácter procedimental, pues el profesor propone una serie de ejercicios, donde solicita resolver las ecuaciones usando las técnicas para encontrar la solución.
CE5	La configuración se centra en la solución de “problemas de aplicación” en donde los alumnos deben modelar una ecuación lineal a partir de un problema en contexto extra matemático, asimismo el profesor propone cinco pasos que los alumnos deben emplear para llegar a la solución.
CE6	Esta configuración es esencialmente de carácter procedimental, ya que el profesor promueve que se resuelvan tres problemas de aplicación utilizando los pasos propuestos por el profesor.

3.5 Análisis de las normas y metanormas

Se presenta en las siguientes tablas las normas y reglas identificadas con relación a cada una de las facetas de la dimensión normativa de los procesos de estudio matemático de cada caso de nuestra investigación durante el desarrollo de las ecuaciones lineales.

3.5.1 Profesor A

Facetas normativas	Dimensión normativa del profesor A
	<ol style="list-style-type: none"> 1. En general la mayoría de las situaciones presentadas por el profesor no son contextualizados, y el profesor muestra interés para que los alumnos generen conocimiento puramente procedimental. 2. Plantea la situación problema dejando que los alumnos interpreten abiertamente la solución observando los procedimientos usados. 3. Cuestiona a los alumnos independientemente del tipo de problema (extra-matemático o intra-matemático) que se esté estudiando.

**Normas
epistémicas**

4. El profesor no promueve los diferentes tipos de lenguajes (verbal, tabular algebraico) de las situaciones problemas.
5. No se promueve la argumentación con respecto a las soluciones del problema.
6. En la primera situación usa lenguaje verbal para después pasar a lenguaje algebraico, observando que en la mayoría de las tareas resueltas no se hace uso de esta conversión de lenguajes.
7. Usa las definiciones de función y función lineal interpretando correctamente los elementos que las componen y su relación con la situación, pero al abordar la ecuación lineal no hay una comunicación clara y precisa, ni se observa la relación con la función lineal.
8. El profesor reconoce la validez de los argumentos de sus alumnos cuando participan en la resolución de las situaciones problema.
9. En los problemas de contexto extra matemático hay énfasis en identificar cuándo las variables de una función están relacionadas.
10. El profesor identifica cuándo los alumnos se encuentran en un conflicto semiótico y los apoya para que puedan responder a la solución del problema que se les presenta.
11. En la mayoría de las ecuaciones lineales planteadas algebraicamente por el profesor, solicita el procedimiento utilizando las propiedades sugeridas para su resolución.
12. Hay énfasis en utilizar las sugerencias y propiedades para el despeje de las ecuaciones lineales.
13. Enfatiza que sus alumnos deben hacerse conscientes del uso de las propiedades.
14. El lenguaje verbal del profesor a veces no es claro para los estudiantes, por ejemplo, cuando presenta la balanza y ejemplifica las propiedades de la igualdad, menciona que: “suponiendo que la caja no pesa nada, cuántas bolsas de tostitos hay ahí adentro”, esta afirmación puede dar pie para diferentes interpretaciones.

1. Los alumnos se limitan a cuestionar al profesor sobre lo expuesto en el pizarrón y sólo responden lo que a él les plantea sobre el tema.
2. Los alumnos afirman que en secundaria no hacían uso de las

<p>Normas cognitivas</p>	<p>propiedades de la igualdad para el despeje de las ecuaciones lineales.</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. El profesor sólo toma como conocimientos previos el concepto de función y función lineal. 4. Los significados personales de los alumnos se relacionan sólo con seguir procedimientos en la resolución de las ecuaciones lineales. 5. Los problemas propuestos por el profesor no se encuentran en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, pues sólo se trata de realizar procedimientos y repetición. 6. Los alumnos se encuentran arraigados en los significados que han aprendido en secundaria, sin querer utilizar las propiedades para despejar una ecuación lineal.
<p>Normas interactivas</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. El profesor indica cuándo trabajar en equipo o parejas. 2. El profesor interviene para resolver dudas o conflictos semióticos de los alumnos cuando asigna tareas individuales, generalmente cuando resuelven ecuaciones lineales. 3. El profesor atiende el papel de expositor durante el desarrollo de clase y el de los alumnos de receptores de información. 4. La mayoría de los alumnos dan muestras de no entender algunas cosas. Sin embargo, ellos no intervienen cuando el profesor expone. 5. Cuando los alumnos cuestionan al profesor sobre alguna duda, él tiende a responder dando solución a sus dudas. 6. Los alumnos suelen pedir permiso para salir del salón, y únicamente pueden salir al sanitario. 7. Los alumnos respetan la opinión o ideas propuestas por sus compañeros. 8. Los alumnos evitan usar el celular cuando el profesor está explicando. 9. Cuando los alumnos trabajan individualmente, el profesor recorre los lugares para resolver dudas, mientras que algunos alumnos alteran la disciplina 10. El profesor está pendiente de lo que realizan los alumnos, por ejemplo, que realicen lo que está indicando, y que traten de hacerlo por ellos mismo.

<p style="text-align: center;">Normas mediacionales</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se puede utilizar la calculadora, por ejemplo, para la reducción de fracciones. 2. El profesor utiliza computadora y proyector únicamente para exponer la presentación de la clase, así como pizarrón y marcadores. 3. Los alumnos sólo utilizan cuaderno, lápiz y calculadora. 4. El profesor indica cuando copiar en el cuaderno. 5. El tiempo asignado para la resolución de algún problema donde el trabajo es individual es de aproximadamente de 15 a 20 min. 6. El profesor no asigna tiempo suficiente para que sus estudiantes copien del pizarrón, pues se observa que los alumnos piden más tiempo para seguir avanzando.
<p style="text-align: center;">Normas afectivas</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. El tipo de situaciones presentadas sólo en dos sesiones por el profesor para la resolución de ecuaciones lineales resultan motivantes y los alumnos se muestran interesados. 2. En algunas situaciones el profesor motiva a los estudiantes haciéndoles saber que el problema es sencillo de resolver y que podrán resolverlo sin ninguna dificultad. 3. El profesor es amable y respetuoso con sus alumnos. 4. Los alumnos se muestran indispuestos para realizar los apuntes o copiar lo que el profesor presenta en el pizarrón, por ejemplo: indican que es mucho lo que se hay que copiar. 5. El horario no fue apropiado en dos sesiones pues correspondieron a dos últimas clases de dos días de observación, pues los alumnos no mostraban interés ni ganas de trabajar, en esos momentos ellos querían salir de la escuela. 6. Los alumnos muestran cuando algo no está claro, generalmente es en la resolución de las ecuaciones lineales.
<p style="text-align: center;">Normas ecológicas</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Para ese grupo se establece un código de conducta para los alumnos, establecida por la institución, en donde se consideran algunos aspectos como: <ul style="list-style-type: none"> • Pedir permiso para entrar al aula

	<ul style="list-style-type: none"> • Cumplir con tareas y trabajos • Mantener limpio el salón de clases • Portar bien el uniforme • Evitar comer en clase <p>2. Por el mayor número de estudiantes, la institución cuenta con turno vespertino, y en los 8 días de observación dos días que la clase de matemáticas fueron de las últimas clases, por tanto, los alumnos mostraron muy poco interés al trabajo en clase.</p> <p>3. La resolución de ecuaciones lineales se centra en un contexto puramente intramatemático.</p>
--	---

3.5.2 Profesor B

Facetas normativas	Dimensión normativa del profesor B
Normas epistémicas	<ol style="list-style-type: none"> 1. Las situaciones presentadas mayormente están en contexto intra-matemático enfocándose sólo en procedimientos. 2. Se muestran algunas situaciones en contexto extra-matemático siendo éstas poco claras y precisas, así como también problemas comunes y poco reales. 3. Hay interpretación de la solución en el contexto del problema. 4. El profesor determina pasos o sugerencias de cómo resolver las situaciones en contexto extra-matemático. 5. El profesor decide cuándo es válida una argumentación. 6. El procedimiento utilizado se refiere a técnicas de despeje, haciendo énfasis que detrás de estas técnicas están las propiedades de inverso aditivo y multiplicativo. 7. No define explícitamente las propiedades, dejando estas definiciones en el aire. 8. Utilizan el mínimo común múltiplo, como un camino para llevar una ecuación lineal con coeficientes racionales a uno con coeficientes enteros.

<p>Normas cognitivas</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Toma en cuenta los conocimientos previos estudiados en temas anteriores relacionados con el estudio de las ecuaciones lineales, excepto las funciones lineales. 2. Los alumnos no recuerdan conceptos vistos al inicio del semestre, pues cuando el profesor cuestiona, recurren a observar los apuntes en su cuaderno.
<p>Normas interactivas</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. El profesor cuestiona a sus estudiantes para el desarrollo del tema de las ecuaciones lineales. 2. Son pocos y los mismos alumnos que participan o responden a las preguntas del profesor. 3. Los alumnos se limitan a responder lo que el maestro solicita. 4. Los alumnos no argumentan sus respuestas y el profesor suele dar la respuesta inmediata. 5. Algunos alumnos muestran sus dudas y conflictos 6. Solicita a sus alumnos expresar sus soluciones pasándolos al pizarrón.
<p>Normas mediacionales</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. El profesor solo utiliza como recursos mediacionales el pizarrón y marcadores. 2. Los alumnos solo se apoyan en su cuaderno, lápiz y calculadora para reducción de fracciones. 3. La exposición por parte del maestro es el mayor tiempo de la clase.
<p>Normas afectivas</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Los alumnos se muestran atentos en aprender a realizar despejes de las ecuaciones lineales. 2. El profesor motiva a los alumnos con la resolución de dos situaciones para exentar el examen parcial. 3. El profesor motiva a los que no suelen participar.
<p>Normas ecológicas</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. El profesor pasa lista al entrar al salón de clases. 2. El profesor atiende a un alumno con discapacidad especial. 3. La resolución de problemas se centra en contexto intra-matemático sólo en la disciplina de las matemáticas.

3.6 Análisis de la idoneidad didáctica

De acuerdo con Godino (2011, p. 8) “La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular”.

En este sentido, la evaluación de los criterios mencionados en este trabajo de investigación corresponde a la observación del proceso de estudio de las prácticas matemáticas y didácticas del profesor, en nuestro caso serán sesiones de clases en torno al tema de las ecuaciones lineales con el fin de caracterizar los conocimientos didácticos-matemáticos. Describimos a continuación una valoración del conjunto de indicadores empíricos en las prácticas desarrolladas por los profesores estudiados, empezando con el profesor A, estos indicadores son guía para valorar el grado de idoneidad didáctica en cada una de las componentes o facetas del proceso de estudio. Estos indicadores fueron adaptados de acuerdo a las prácticas realizadas por ambos profesores.

3.6.1 Profesor A

Nuestro primer caso corresponde al profesor A, para el cual se realiza una valoración de sus prácticas con relación al significado institucional de referencia.

IDONEIDAD EPISTÉMICA

Entendemos la idoneidad epistémica como el grado de representatividad de los significados pretendidos o implementados con respecto al significado de referencia. La componente de esta idoneidad se refiere a los seis tipos de objetos primarios (situaciones problemas, lenguaje, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos). Para la primera componente, con relación a las situaciones problemas hacemos referencia a los siguientes dos indicadores.

1. ¿La selección de situaciones problemas implementadas por el profesor (que son una muestra representativa y articulada de acuerdo al significado de referencia) conllevan a la contextualización del contenido matemático, ejercitación de los conocimientos pretendidos y la aplicación de situaciones relacionadas?

De acuerdo con las prácticas matemáticas observadas del profesor A, en las primeras tres sesiones y parte de la cuarta, utiliza situaciones problema en contexto extra matemático,

con el fin de introducir la definición de función identificando las variables dependientes e independientes, a partir de un situación que involucra o relaciona dos variables, con la intención de que los alumnos identifiquen la relación que existe entre ellas y consideren el concepto de medición, el cual corresponde al siguiente planteamiento en contexto extra matemático; ¿Cuál es el número de vasos necesarios para construir una torre de 187 cm?, en la situación los 187 cm corresponde a la altura del profesor, mientras que el vaso mide aproximadamente 10 cm. Con este planteamiento el profesor realiza una dinámica grupal utilizando la expresión que particulariza la situación problema.

Posteriormente introduce la definición formal de función lineal, presentando la estructura de la misma, así como su representación gráfica utilizando la situación problema anterior, además relaciona cada una de las variables de la expresión formal de la función lineal con la expresión de la situación planteada anteriormente. Podemos notar que el profesor realiza una contextualización del contenido y la aplicación de situaciones relacionadas. Sin embargo, al introducir el tópico de las ecuaciones lineales, el profesor enfatiza que las ecuaciones lineales provienen de las funciones lineales, pues según el profesor A, cuando se sustituye un valor en la variable dependiente lo que representa es una ecuación lineal, sin tomar en cuenta el caso cuando la ecuación lineal es del tipo $ax + b = 0$ con $a \neq 0$.

Después describe los elementos que conforman la ecuación, (término, incógnita, igualdad, miembro) su solución y cómo despejar la incógnita. Cuando explica a sus alumnos cómo despejar la incógnita hace una analogía con una balanza, con lo que introduce las propiedades de suma, resta y multiplicación de la igualdad para que los alumnos las puedan emplear para justificar los pasos a que recurren para resolver una ecuación lineal. A partir de la última parte de la cuarta sesión y hasta la séptima, plantea ecuaciones lineales puramente en contexto intra matemático, centrando la atención en la utilización de las propiedades de la igualdad en la resolución como una práctica de ejercitación.

En la octava y última sesión, el profesor introduce una actividad donde la dinámica consiste en trabajar en la resolución de ecuaciones lineales sobre un juego llamado “JEOPARDY”, para esta última parte el profesor también se enfoca en la reproducción y ejercitación de las ecuaciones lineales, considerando correcta o incorrecta la respuesta, y en la clase no se ven expuestos los procedimientos o caminos de resolución por parte de los alumnos. También podemos resaltar que para el cierre del tema no selecciona una muestra de situaciones contextualizadas que les permita a los estudiantes relacionar un contexto real.

2. ¿El profesor propone situaciones que generen la problematización (en el sentido de desestabilización y cuestionamiento de los alumnos) en los estudiantes?

Los problemas que plantea el profesor cuando aborda el tema de funciones y función lineal podrían resultar interesantes para los alumnos y promover su interés, pues crea un ambiente familiar con las situaciones planteadas en las primeras tres sesiones, y estas situaciones sirvieron al profesor para cuestionar a los alumnos e intentar problematizarlos.

Sin embargo, después de la sesión cuatro y hasta la siete, la dinámica se tornó monótona, con repetición y ejercitación de resolución de ecuaciones con el fin de que los alumnos aprendieran a encontrar soluciones o despejar la incógnita utilizando correctamente las propiedades de suma, resta y multiplicación de la igualdad. Se observó que planteado este tipo de ejercicios los alumnos se encontraban en su zona de confort, sin situaciones que estuvieran en su zona de desarrollo próximo, sin problematización ni desestabilización. Aunque en la última sesión la situación propuesta (de carácter lúdico) fue motivante para los alumnos, no se problematizaron mayormente pues el maestro no presentó situaciones complejas ni realizó cuestionamientos buscando desequilibrios cognitivos, restringiéndose únicamente a la ejercitación.

En lo que respecta a los tipos de lenguaje, tenemos:

1. ¿El profesor utiliza diferentes formas de lenguaje (verbal, algebraico, gráfico, etc.), traducción y conversiones de los mismos?

En el desarrollo de las ecuaciones lineales, en un inicio el profesor utiliza lenguaje verbal para plantear la primera situación problema, haciendo después un planteamiento algebraico, a partir de ese planteamiento pide a sus alumnos que llenen una tabla sustituyendo valores en la expresión y finalmente hacen una representación gráfica a partir de tabla. Por tanto, podemos notar que, en esta primera situación del tema, donde introduce las definiciones de función y función lineal, establece una conversión entre los tipos de lenguaje.

Sin embargo, cuando pasa a la explicación de las ecuaciones lineales se centra sólo en el lenguaje algebraico, pues las situaciones presentadas son diferentes tipos de ecuaciones lineales (varios términos, términos con fracciones y términos en orden jerárquico), presentadas y tratadas únicamente en lenguaje algebraico.

2. ¿El nivel de lenguaje con el que se dirige el profesor es adecuado para los alumnos?

El profesor se expresa con un lenguaje familiar para los alumnos, tanto en lo verbal como en lo algebraico, pues cuando aborda la definición de función sugiere que cuando escriban alguna expresión algebraica utilicen letras que les ayuden a saber qué están representando. También en esta primera parte, cuando presenta la expresión algebraica de la primera situación problema (donde se relacionan los vasos y la altura), les pide que llenen una tabla

asignándole valores numéricos (del 1 hasta 9) y recordándoles que a ese proceso se le conoce como tabulación. Además, en ocasiones el profesor relaciona el contenido con lo que han estudiado en secundaria, asumiendo que es un tema que ya estudiaron.

3. ¿El profesor propone situaciones de expresión matemática e interpretación?

Cuando el profesor aborda las ecuaciones lineales, plantea expresiones algebraicas en lenguaje matemático enfocándose sólo en resolver las ecuaciones lineales de acuerdo a las sugerencias dadas para despejar la incógnita, además en el cierre del tema no propone situaciones que le permitan hacer un recuento de lo que se ha venido trabajando. Por lo anterior, decimos que el profesor no propone situaciones en contexto extra matemático que lleve a los alumnos hacer los planteamientos de las ecuaciones lineales y que además promueva la interpretación de las mismas.

Los siguientes tres indicadores se relacionan con las reglas establecidas entre los conceptos (o definiciones), conceptos y procedimientos.

1. ¿Las definiciones propuestas por el profesor son claras y correctas, y están adaptados al nivel educativo al que se dirige?

Con relación a las definiciones o conceptos propuestos en el tema de ecuaciones lineales, primero define función en lenguaje común describiéndola de manera correcta, aunque es impreciso con los conceptos de variable dependiente e independiente, asume que los alumnos lo entienden, sólo explica que se relacionan mutuamente donde una depende de la otra. También define qué es una función lineal, mediante su expresión algebraica ($y = mx + b$, donde m y b son números reales y sus dos variables son siempre de grado uno, además define cada uno de los elementos que la componen. Por tanto, consideramos que la definición es clara y además es la que comúnmente se estudia en el nivel bachillerato.

Para las ecuaciones lineales no establece una definición formal y clara para los estudiantes, pues a partir de una función lineal de una situación fija un valor a la variable dependiente, según el profesor a esa expresión se le conoce como ecuación lineal lo cual no resulta ser claro para los estudiantes y posteriormente procede a dar la definición de la solución, así como de las propiedades de suma, resta y multiplicación de la igualdad.

2. ¿El profesor presenta los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado?

El profesor presenta lo mínimo de los conocimientos básicos que se espera aprendan los alumnos, pues cuando habla de función lineal no profundiza en los significados de dominio y rango, al abordar las ecuaciones lineales no analiza el caso de una expresión de identidad ni menciona que existen otros casos de ecuaciones lineales de dos o tres variables, llamadas

también de segundo y tercer grado. No hace uso de ninguna representación gráfica de la solución que a su vez relacione con alguna situación en contexto extra matemático, ni menciona que cuando una función lineal interseca al eje de las abscisas o eje de las x, el problema es equivalente a resolver una ecuación lineal de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, para la cual y es igual a 0.

3. ¿El profesor propone situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos?

El profesor no propone situaciones donde los alumnos pongan en juego sus conocimientos matemáticos con el fin de negociar definiciones o proposiciones. En buen grado, propone que resuelvan ecuaciones usando los procedimientos sugeridos, y que son aspectos relacionados con ejercitación y repetición de los mismos, por ejemplo, en casos como: $3x = 18$, $-7x = 35$, $\frac{4x}{6} = 6$, $\frac{x}{9} = 2$, $\frac{x}{-8} = 4$, $\frac{3}{5}x = 8$, en los que solicita a los alumnos que utilicen las propiedades de la igualdad para encontrar el valor de la incógnita.

Para la componente de los argumentos consideramos:

1. ¿Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones del profesor son adecuadas al nivel educativo que se dirige?

En la resolución de las ecuaciones lineales el profesor no demuestra o explica las propiedades de una igualdad, sólo las usa, mostrando conocimientos básicos, consideramos que implementa los conocimientos adecuados y básicos, pero no lo suficiente.

Con respecto a las comprobaciones de los resultados obtenidos, sólo explica a sus alumnos que la solución es un valor que satisface la ecuación.

2. ¿El profesor promueve situaciones donde el alumno tenga que argumentar?

La mayoría de las situaciones que propone el profesor están en contexto intra matemático, y se restringe a solicitar a los alumnos el uso de las propiedades y los pasos recomendados (quitar paréntesis, quitar denominadores, agrupar los términos que posean la incógnita en un miembro de la ecuación y los términos independientes en el otro, reducir términos semejantes y despejar o aislar la incógnita). Por tanto, se observa que las situaciones propuestas no van más allá de realizar procedimientos o algoritmos, donde los alumnos no se involucran en actividades de argumentación sobre los procedimientos realizados.

Por último, nos interesa valorar la conexión del significado:

1. ¿Relaciona y articulan los objetos matemáticos puestos en juego (problemas, definiciones, procedimientos etc.)?

En las primeras dos sesiones de clase, intenta relacionar los objetos matemáticos función, función lineal y ecuación lineal, sin que se vea una clara articulación entre los mismos que ayuden al estudiante a tener una mayor comprensión, por ejemplo, cuando trata con las funciones y ecuaciones lineales, plantea: Si se rentó un Malibú por un día, ¿Cuántos kilómetros se recorrieron si se pagó: ¿\$1100? ¿\$2675? ¿\$516.20? Aquí trata de introducir la expresión de ecuación lineal, diciendo que deben fijarse en una de las variables desconocidas de la función, y de manera subrepticia pregunta si alguien escribió

$$1100 = 3d + 200,$$

$$516.20 = 3d + 20$$

Las expresiones se retoman de una situación planteada anteriormente que de igual manera tiene que ver con la renta de carros, que consiste en: Se alquila un Malibú con el siguiente costo de \$200 diarios, más \$3 por cada kilómetro que se recorra en él. Si se renta por día calcula el costo si se recorren 80 km, 125 km, 250km, 475km y 1200 km.

Por otro lado, el profesor afirma que la ecuación lineal proviene de una función lineal por eso se le conoce con ese nombre (ecuación lineal), pues “cuando en una función lineal conocemos uno de las variables que están relacionadas entre sí, y ese valor que conocemos lo sustituimos en la función lo que queda escrito es lo que se conoce como ecuación lineal.” Por tanto, podemos ver que las relaciones se presentan dentro del mismo contexto y les plantea invertir la pregunta relacionando así ambas situaciones, sin embargo, no se ve una articulación clara entre ambos objetos matemáticos.

2. ¿Identifica y articula los diversos significados de los alumnos con respecto a los objetos que intervienen sus prácticas matemáticas?

En ocasiones el profesor muestra interés por conocer los significados de sus estudiantes, se interesa en sus dudas, realiza cuestionamientos que ayuden a los alumnos a resolver sus dudas o problemas, aunque ocasiones tiende a decirles directamente la solución, sin hacer que ellos logren una articulación clara y precisa de sus significados personales con relación a los objetos matemáticos.

IDONEIDAD COGNITIVA

Consideramos la idoneidad cognitiva como el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo próximo de los alumnos con referencia al contenido matemático, así como también la cercanía de los significados personales logrados por los estudiantes con los significados pretendidos e implementados.

La primera componente de la idoneidad cognitiva se refiere a los conocimientos previos.

1. ¿Planifica el profesor el estudio de los conocimientos previos para el estudio del tema o considera conocimientos previos estudiados anteriormente?

Las funciones, funciones lineales y ecuaciones lineales, están en estrecha relación y tienen gran uso en la modelación. El programa de estudios de la Dirección General de Bachillerato establece que antes de abordar el tópico de las ecuaciones lineales, los alumnos deberán haber estudiado o tener comprensión de ciertos temas, por ejemplo: números reales y sus propiedades, modelos algebraicos, relaciones numéricas y algebraicas, jerarquía de operaciones numéricas y algebraicas, transformaciones algebraicas, reducción de factores comunes entre otros.

En general, de acuerdo a nuestras observaciones, el profesor no parece considerar los conocimientos previos de sus alumnos, sin embargo, al señalar que la ecuación lineal corresponde a una ecuación de primer grado, pregunta a sus alumnos si recuerdan cómo identificaban el grado de un polinomio, describiendo y explicando cómo identificar su grado, y de manera análoga lo hace con la ecuación lineal, también cuestiona a sus alumnos sobre conocimientos relacionados con los despejes pues asume que es un tema que ya se ha estudiado en secundaria. Estos son los casos en los que el profesor toma en cuenta los conocimientos previos para el estudio del tema, que son las ecuaciones lineales.

2. ¿Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversos componentes?

El desarrollo de las prácticas del profesor no muestra diversidad de actividades o situaciones que permitan la emergencia de los significados pretendidos, consideramos que existen dificultades para el logro de ello, no se identificó un avance positivo sobre los significados personales de los alumnos, por ejemplo; cuando el profesor insiste en que apliquen las propiedades de suma, resta y multiplicación de la igualdad, los alumnos continúan haciendo lo que están acostumbrados a realizar cuando resuelven una ecuación lineal, es decir, despejan las incógnitas sin estar conscientes de que existen propiedades que respaldan esos pasos de despeje.

La segunda componente de la idoneidad cognitiva corresponde a las adaptaciones curriculares de las diferencias individuales:

1. ¿El profesor incluye actividades de ampliación y refuerzo?

Aunque los alumnos se muestran motivados e interesados en algunas de las situaciones propuestas por el profesor, las actividades se centran específicamente en el refuerzo de resolución de las ecuaciones lineales, pues propone varios ejemplos en donde deben utilizar las propiedades de forma repetitiva y realizar correctamente los despejes de la incógnita. Por otra parte, no incorpora actividades de ampliación que se relacionen con otras disciplinas o contextos de la matemática, las actividades o situaciones propuestas son del uso común en donde se ve reflejado un conocimiento pobre.

2. ¿El profesor promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes?

En un inicio el profesor espera que todos los alumnos logren una mayor comprensión del tema estudiado, e intenta que los alumnos se integren, exponiendo sus dudas y así tener un acceso al conocimiento, sin embargo, conforme avanza el desarrollo del tema, se puede ver que algunos se van quedando atrasados sin que el profesor intervenga en el desarrollo de sus habilidades promoviendo el avance de todos sus estudiantes.

La tercera componente de la idoneidad cognitiva corresponde a los aprendizajes:

1. ¿Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas?

Para este indicador el único modo de evaluación que se observó fue la revisión de tareas de días anteriores, el maestro no aplicó una evaluación particular en el tema. Esta revisión de tareas consistió sólo en ver que todos los alumnos trajeran escrito algo de la tarea en el cuaderno, sin detenerse a revisar con detalle, después pasaban a discutirlo de manera grupal. Por otra parte, con referencia a la evaluación no considera la comprensión conceptual y proposicional, ni competencia comunicativa y argumentativa, de acuerdo a lo anterior podemos decir que se centra específicamente en la competencia procedimental.

2. ¿La evaluación implementada por el profesor tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia?

3. ¿Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones?

Para estos dos indicadores el profesor no realiza una evaluación que atienda a los niveles de comprensión o competencias, pues sólo en algunas de las sesiones observadas revisa tareas de manera individual y posteriormente hace una discusión grupal, por ejemplo en una serie de ejercicios sólo se revisaron dos ejemplos de manera grupal, y se pudo observar que pocos alumnos logran un buen dominio de cómo determinar la solución utilizando las propiedades de suma y resta de la igualdad. Por tanto, esta evaluación no cumple con un

nivel significativo que ayude a los estudiantes a tener una mayor comprensión y competencia, así como tampoco influyen estos resultados para la toma de decisiones.

IDONEIDAD AFECTIVA

La siguiente idoneidad consiste en el grado de implicación, intereses y motivación de los estudiantes en el proceso de instrucción, relacionados con factores que dependen tanto del alumno como de su historial académico, así como también de la institución.

Para valorar esta idoneidad se emplean tres componentes con sus respectivos indicadores.

1. ¿Las tareas propuestas por el profesor son de interés para los alumnos?

Tanto en la primera sesión como en la octava se abordaron situaciones interesantes, en las cuales se promueve la interacción entre alumnos y profesor-alumno, en ellas los alumnos muestran interés pues en ambas se sienten motivados por resolverlas. En la primera, hacen uso de material de apoyo, se muestran participativos con las cuestiones planteadas por el profesor, mientras que en la última sesión el profesor presenta un juego dinámico donde los alumnos sólo tienen que competir en la resolución de las ecuaciones lineales, aunque básicamente el apoyo se centra en resolver procedimientos de despeje de la incógnita.

Por otra parte, en las restantes cinco sesiones las tareas propuestas por el profesor se centran en resolver ecuaciones lineales fuera del contexto extra matemático, que les ayude a razonar, a plantear un modelo a partir de una situación, falta de argumentación acerca de sus respuestas, interpretar de información, justificar sus procedimientos etc. Por esta razón los alumnos no muestran motivación e interés por las tareas propuestas por el profesor.

2. ¿El profesor propone situaciones que permita a los estudiantes valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional?

En general, en todo el desarrollo del tema el profesor no propone situaciones que permitan a los alumnos valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y en la profesional, pues en la mayoría de los casos se presentan situaciones exclusivamente intra-matemáticas, de carácter procedimental. Excepto en la segunda sesión cuando el profesor propone una actividad que se relaciona con la modelación de funciones lineales, plantea una situación extra matemática que representa la renta de un automóvil con un costo de \$200 por día más \$3 por cada kilómetro recorrido, con esta situación intenta ver la relación que existe entre el costo y los kilómetros recorridos. Consideramos que esta actividad podría representar para los estudiantes un ejemplo de la vida cotidiana que les ayude a valorar las matemáticas, sin embargo, esta no es una situación de la vida real.

La siguiente componente se refiere a las actitudes que están presentes y dan sentido a la respuesta cognitiva requerida, y se relacionan con los siguientes dos indicadores:

1. ¿El profesor promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.?

En cada una de las sesiones, el profesor cuestiona a los alumnos con la finalidad de que los alumnos participen y expongan sus ideas, sin embargo, siempre son los mismos alumnos que responden y él continúa explicando el tema sin hacer algo por lo que no intervienen en la clase, y aunque en dos de las sesiones el trabajo se da por parejas no promueve la participación entre ellos con relación a las situaciones planteadas.

La perseverancia por parte de los alumnos se muestra en muy pocos, se observa que, aunque unos trabajan no preguntan acerca de sus dudas o deciden no avanzar hasta que el profesor los cuestione, pero en su mayoría se puede observar que siguen las indicaciones del profesor mostrando avances del trabajo realizado en clase y tareas dejadas por el profesor.

2. ¿El profesor favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora por sí mismo y no por quien lo dice?

El profesor se centra únicamente en tomar el papel de expositor sin permitirles a los alumnos que argumenten sobre sus respuestas, o más bien cuestionarlos a partir de la situación resuelta tanto en el aula como en las tareas, es decir, preguntas ya sea de manera verbal o escrita que ayude al alumno a razonar y resolver la situación, y por ende argumentar respuestas a partir de la solución propuesta.

Los siguientes dos indicadores de la última componente de esta idoneidad corresponde a las emociones, las cuales respaldan las actitudes, motivaciones, sentimientos y la autoconfianza en el alumno.

1. ¿El profesor promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas?’

En varias sesiones se puede observar que el profesor enfatiza en que las matemáticas son sencillas, que los problemas propuestos son fáciles de resolver, confiando en que ellos los podrán hacer, esto es, los motiva tratando de generar una actitud positiva y animando a los estudiantes. Sin embargo, con relación a acciones tomadas por el profesor, no propone actividades atractivas que los motiven o convenzan, de tal manera que los inspiren a ver las matemáticas como una herramienta que les ayude a incrementar sus habilidades.

2. ¿Muestra el profesor las cualidades de estética y precisión de las matemáticas?

Para el desarrollo del tema, el profesor usa un lenguaje apropiado hacia los alumnos tanto verbal como escrito, pero no es muy preciso con respecto a los conceptos o definiciones, por ejemplo, al introducir el concepto de ecuación lineal, no se refiere al caso $Ax + b = 0$ donde $A \neq 0$, y nunca representa gráficamente la solución de una ecuación lineal.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

En un proceso de enseñanza y aprendizaje, se refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas.

La primera componente corresponde a la interacción docente-discente, los siguientes cinco indicadores se relacionan a las interacciones entre el profesor y los estudiantes, así como entre los propios estudiantes.

1. ¿El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)?

El profesor aborda las ecuaciones lineales introduciendo primero la definición de función a partir de una situación en contexto extra matemático, después función lineal, para posteriormente pasar al estudio de las ecuaciones lineales, consideramos una manera apropiada de abordar el tema, sin embargo, la presentación no lleva una relación entre uno y otro, lo cual hace que los temas estudiados no sean del todo claros, pues les plantea una actividad, en donde si entienden el problema, a lo que los alumnos responden que no. En algunas ocasiones habla rápido sin darse cuenta que los estudiantes no están siguiendo su ritmo de explicación, asume que todo es claro para los estudiantes y no se percató de que ellos muestran dudas. Por otra parte, enfatiza mucho en cómo utilizar las propiedades de suma, resta y producto de la igualdad, pues hace hincapié en que los estudiantes la sepan utilizar al momento de resolver una ecuación lineal.

2. ¿El profesor reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)?

Con respecto a los conflictos de los alumnos podemos percatarnos de que el profesor sí cuestiona a sus alumnos, muestra interés en que aprendan y les quede todo claro. La dinámica que sigue para atender conflictos es recorrer los mesa-bancos haciendo preguntas y respondiendo las de ellos. En un principio deja que los alumnos trabajen con la actividad para que lo razonen y posteriormente interviene para responder dudas o preguntas.

3. ¿El profesor y los alumnos buscan llegar a consensos con base al mejor argumento?

De acuerdo a las observaciones, los alumnos no argumentan sus soluciones o respuestas dadas a las situaciones, es evidente que ellos realizan acciones, pero esperan a que el profesor diga lo que es correcto, o plantee cómo realizar un procedimiento. Por tanto, podríamos decir que el único argumento es el de autoridad y no alguno otro consensado por todos.

Por ejemplo, después de haber visto las propiedades para realizar un despeje de una ecuación lineal, el profesor plantea recomendaciones que pretende que el alumno las siga tal y cual. Las recomendaciones a las que el profesor hace hincapié son:

- a) Quitar paréntesis,
- b) Quitar denominadores,
- c) Agrupar los términos que posean la incógnita en un miembro de la ecuación y los términos independientes en el otro miembro,
- d) Reducir términos semejantes,
- e) Despejar o aislar la incógnita.

4. ¿El profesor utiliza diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos?

Para este indicador un aspecto argumentativo que ayudó a captar la atención de los alumnos es, que cuando presenta las propiedades, se basa en la imagen de una balanza que usa semejando una ecuación lineal. Consideramos que con esa analogía es más fácil que los alumnos recuerden cómo y cuándo utilizar las propiedades.

Además, al cierre del tema, el profesor organiza un juego en donde los alumnos se sienten motivados y se muestran atentos, logrando que la actividad lúdica capte su atención.

5. ¿El profesor facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase?

La inclusión de los alumnos a la dinámica de la clase resulta difícil, pues el profesor no realiza algo en que el alumno logre integrarse, pues como se mencionó anteriormente, a algunos les cuesta un poco más de trabajo participar que a otros, y es ahí donde el profesor omite acciones que les ayude a incorporarse fácilmente a la dinámica de la clase.

La siguiente componente se relaciona con la interacción entre los alumnos:

1. ¿Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes?

En el desarrollo del tema sólo hay un momento que favorece el dialogo y la comunicación entre estudiantes, pues en la primera sesión cuando abordan la primera situación se les pide que trabajen en parejas, de ahí en adelante nunca comparan resultados o discuten procedimientos, todo se hace de manera grupal dirigiendo, con la dirección total del profesor sobre la dinámica empleada.

2. ¿Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos?

Puesto que el profesor no promueve la argumentación en sus estudiantes, ellos no cuentan con herramientas propicias para hacerlo, que les permita convencerse a sí mismos, y mucho menos a los demás, sólo siguen el procedimiento que dicta el profesor y esperan a que todo se haga de manera grupal para ver los resultados de las situaciones trabajadas, donde el profesor es casi siempre el emisor de información y los alumnos los receptores.

3. ¿Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión?

En general en el desarrollo del tema notamos que el profesor no responde a las dudas y necesidades de todos los estudiantes, pues se limita a aquéllos que están atentos y participan un poco más, y, por decirlo de alguna manera, cuentan con habilidades más desarrolladas que le permiten comprender mejor e ir al ritmo del profesor. Mientras que por otro lado él no centra su atención en los alumnos que carecen de los conocimientos previos y por tanto se encuentran desorientados con respecto a las actividades realizadas

La siguiente componente corresponde a la autonomía, éste se relaciona con:

1. ¿Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio? (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)

Como se mencionó anteriormente el profesor está casi siempre al frente en cada clase, la mayor parte del tiempo exponiendo procedimientos, resolviendo alguna situación en contexto extra matemático etc. sin que los alumnos intervengan. Pero no hay momentos en que los estudiantes asuman la responsabilidad del estudio más que cuando trabajan de manera individual y el profesor se dirige directamente a ellos, mientras por si solos no se apropiaran de los problemas ni plantean algún ejemplo o duda que les ayude a investigar o

conjeturar, tampoco hacen conexiones con otras herramientas, pues por ejemplo cuando se les presentan las fracciones en una ecuación, no saben efectuar las operaciones básicas.

2. ¿El profesor observa sistemáticamente el progreso cognitivo de los alumnos?

Como el profesor se centra en que los alumnos usen las propiedades que están detrás al realizar despejes en las ecuaciones lineales, llega un momento en que se da cuenta que no logran hacerlas parte de sus valoraciones, pues después de varios ejercicios, se nota que siguen confundidos sin poder aplicar las propiedades (suma, resta, multiplicación de la igualdad), y sugieren al profesor que la forma en que ellos están acostumbrados a resolverlos es más fácil, es decir, si un número está restando pasa sumando y si está sumando pasa restando, para ellos eso es más fácil y es lo que han venido haciendo desde la secundaria. Entonces el profesor se da cuenta que los alumnos no han adaptado las propiedades a sus conocimientos y decide proceder por el camino fácil, al que los alumnos están acostumbrados, sin embargo, enfatiza en que deben ser conscientes de la utilidad de esas propiedades que justifican los pasos que ellos están acostumbrados a realizar.

Entonces con esto, el profesor logra percibir que no se ha dado del todo un proceso cognitivo, y decide pasarlo por alto, y continúa con lo que los alumnos ya están acostumbrados, reproducir algoritmos o procedimientos mecanizados.

IDONEIDAD MEDIACIONAL

La idoneidad mediacional la consideramos como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, los siguientes indicadores se relacionan con los recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores etc.)

1. ¿El profesor utiliza materiales manipulativos e informáticos que permitan introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido?

En primera instancia cuando aborda la primera situación problema el profesor hace uso de material manipulable (vasos desechables y regla) para introducir el concepto de función y función lineal, pues le interesa que los alumnos establezcan la relación que existe entre las variables independientes y las dependientes, es decir, número de vasos y altura de una torre de 187 cm con la finalidad de plantear la expresión que represente esa situación. También los alumnos hacen uso de la calculadora sugerido por el profesor, para realizar operaciones básicas, como la suma de fracciones.

Es importante mencionar que durante las ocho sesiones de observación el profesor hizo uso de una computadora que le sirvió de herramienta de apoyo únicamente para proyectar el contenido que se estaba estudiando, como pizarrón electrónico nada más.

2. ¿Las definiciones y propiedades propuestas por el profesor son contextualizadas y motivadas usando situaciones, modelos concretos y visualizaciones?

Las definiciones de función y función lineal propuestos por el profesor, fueron contextualizadas a partir de una situación y modelación de funciones lineales y, por otra parte, cuando introduce las propiedades de suma, resta, multiplicación de la igualdad, las promueve con una ilustración que le ayuda a representarlas de manera visual. Luego cuando comienza hablar de las ecuaciones, no recurre a alguna situación en contexto extra matemático que ayude a los alumnos a modelar situaciones concretas que los motiven.

Las siguientes componentes corresponden al número de alumnos, horario y condiciones del aula:

1. ¿El número y distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida?
2. ¿El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido?

Consideramos que el número y la distribución de alumnos no son apropiados, pues no permiten llevar a cabo adecuadamente el proceso de enseñanza el número de estudiantes del grupo, como en la mayoría en el Colegio de Bachilleres del estado de Sonora, es de aproximadamente 45 alumnos y en estas condiciones es difícil llevar a cabo una enseñanza que cubra las necesidades de los alumnos.

Con respecto al segundo indicador, el aula es amplia y en condiciones para el desarrollo de proceso de estudio, cada alumno cuenta con un mesa-banco propio y limpio, con proyector y se establecen las reglas que deben respetar los alumnos al entrar dentro del salón.

3. ¿El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a la última hora)?

Las sesiones observadas eran del turno vespertino del plantel, las clases se impartieron después de las 3:30 pm, 4:20 pm y 6:00 pm, un día, dos días y dos días respectivamente a la semana. Cuando las sesiones fueron a la última hora que corresponde a las 6:00 pm los alumnos se mostraban inquietos por querer irse temprano a sus casas, manifestaban que tenían que caminar mucho, tomar camión y el trabajo era mucho por hacer etc.

La siguiente componente se relaciona con el tiempo (de enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje), para el cual se desarrollan los siguientes tres indicadores.

1. ¿El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida?

Para este indicador que corresponde al tiempo establecido para la enseñanza pretendida, la consideramos insuficiente, pues las horas presenciales por parte del alumno son seis diarias, de las cuales toman 50 minutos para la asignatura de Ma, eso equivale a 5 horas a la semana, sin embargo, además lo que también consideramos insuficiente son las horas dedicadas al tema de estudio, que en este caso consistió de ocho sesiones de clase, y las consideramos así porque en ningún momento el profesor alcanza presentarles a los alumnos situaciones en contexto extra matemático, donde los alumnos realicen planteamientos sobre las ecuaciones lineales.

2. ¿El profesor dedica suficiente tiempo a los contenidos más importante del tema?
3. ¿El profesor dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión?

Para estos indicadores, el tema más importante es el aprendizaje de las ecuaciones lineales así que el profesor dedica seis sesiones de las ocho observadas, mientras que al de las funciones y funciones lineales sólo le invierte dos sesiones. Aunque le invierta el mayor tiempo a las ecuaciones lineales, es importante mencionar que sólo enfatiza en las propiedades de la igualdad para realizar despejes, es decir, hace énfasis en procedimientos o algoritmos memorizados por los alumnos, sin dar pie a que los alumnos construyan un significado personal rico y fuerte en el tema.

Puesto que el tema de las ecuaciones lineales es relevante en el proceso educativo, consideramos que el profesor centra su atención en el mismo, y por tanto le dedica mayor parte del tiempo para su aprendizaje.

IDONEIDAD ECOLÓGICA

La idoneidad ecológica se refiere al grado en que el proceso de estudio se ajusta al currículo educativo de la institución, considera las necesidades e intervenciones del medio social en que se ubica la misma, así como las conexiones intra e interdisciplinarias.

La primera componente que corresponde a esta idoneidad es la adaptación al currículo:

1. ¿Los contenidos, su implementación y evaluación por el profesor se corresponden con las directrices curriculares?

La implementación corresponde a las ocho horas que establece el programa de estudios de la Dirección General del Bachillerato, pero no así con la evaluación, pues no corresponde a lo que establece la directriz curricular, toda vez que el profesor se basa en implementar una evaluación que propone la institución, y consiste en examen y tareas, asignando un mayor porcentaje al examen. Por otra parte, y de acuerdo a los lineamientos de evaluación, se considera que el alumno sea evaluado a través de portafolios, rubricas, tablas de cotejo etc.

El profesor considera que su método de evaluación tiene como finalidad que los alumnos se esfuercen un poco más en aprender conceptos y la resolución de problemas, y que no sólo se esfuercen en copiar problemas para llenar un portafolio, rubricas, tablas, etc.

La segunda componente se refiere a la apertura hacia la innovación educativa:

1. ¿El profesor promueve una innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva?

Para este indicador no se promueve en ningún momento la investigación por conceptos o procedimientos que ayude a los alumnos a reflexionar y compartirla. No aplica para las observaciones realizadas.

2. ¿Las nuevas tecnologías integradas por el profesor (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) se ven reflejadas en el currículo educativo?

El profesor no integra mayor conocimiento con herramientas tecnológicas que le ayuden a llevar un mejor aprendizaje dentro del aula, aunque el currículo educativo lo declare, las nuevas tecnologías no se ven reflejadas en el proceso de estudio de los estudiantes.

La siguiente componente se relaciona con la adaptación socio-profesional y cultural:

1. ¿Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes?

El contenido de las ecuaciones lineales es un tema importante que se estudia desde la educación básica, pues con esta se pueden modelar problemas de la naturaleza y la vida real, y con relación a esto, consideramos que el contenido contribuye a una formación socio-profesional del estudiante.

La siguiente componente de la idoneidad ecológica corresponde a la educación en valores:

1. ¿El profesor contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico?

Este indicador no se ve reflejado en nuestras observaciones, el profesor no promueve un pensamiento crítico en los estudiantes, así como tampoco contempla una formación de valores democráticos.

La última componente tiene que ver con las conexiones intra e interdisciplinarias:

2. ¿El profesor relaciona los contenidos con otros contenidos intra e interdisciplinarios?

Es un aspecto importante la relación de los contenidos con otras disciplinas que permitan al estudiante plantear situaciones problemas dentro de otros contextos y puedan tener una visión más amplia de las matemáticas, sin embargo, con respecto a las observaciones realizadas el profesor no implementa la relación con otros contextos que les ayude a sus alumnos a entender la matemática dentro de la vida real.

3.6.2 Profesor B

De acuerdo con el análisis realizado del profesor A en relación a los indicadores de las idoneidades (idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad afectiva, idoneidad mediacional, idoneidad interaccional, idoneidad ecológica) serán tomados de igual manera para este caso.

IDONEIDAD EPISTÉMICA

Para la primera componente, con relación a las situaciones problemas hacemos referencia a los siguientes dos indicadores.

1. ¿La selección de situaciones problemas implementadas por el profesor (que son una muestra representativa y articulada de acuerdo al significado de referencia) conllevan a la contextualización del contenido matemático, ejercitación de los conocimientos pretendidos y la aplicación de situaciones relacionadas?

De acuerdo a las situaciones observadas por el profesor B, no cumple con la identificación de una función lineal y la relación que establece con las ecuaciones lineales, en general, promueve situaciones que lleven a los alumnos a la ejercitación de solución de ecuaciones lineales en contexto intra matemático y en algunos casos extras matemáticos, sin embargo, no presenta una muestra de las situaciones articuladas de acuerdo al significado de referencia.

Primeramente, con relación a las primeras dos sesiones el profesor aborda el tema de las ecuaciones lineales, planteando ejemplos de expresiones algebraicas con el interés de que los alumnos puedan relacionar esto con las ecuaciones lineales. Además, les introduce una expresión algebraica que representa una identidad, con la finalidad de hacer analogía sobre la ecuación lineal y ver que la identidad se cumple para cualquier valor, mientras que la ecuación no, así que, a raíz de esto, procede a introducir la definición general de la

ecuación lineal $Ax + B = 0$, sin mencionar que $A \neq 0$, además presenta la definición de la solución de las ecuaciones lineales, así como su representación gráfica en la recta real.

Por otra parte, habla de las propiedades de los números reales que ayudan a despejar las ecuaciones lineales, estas propiedades no las define formalmente, sin embargo, comenta que las usarán como técnicas, es decir, cuando un número está restando pasa del otro lado de la igualdad sumando, etc. Con estas herramientas intenta resolver ecuaciones lineales, y en las dos últimas sesiones las aplicaciones sobre las ecuaciones lineales, contextualizando el contenido matemático.

2. ¿El profesor propone situaciones que generen la problematización (en el sentido de desestabilización y cuestionamiento de los alumnos) en los estudiantes?

Con respecto a este indicador, el profesor no maneja situaciones en contexto extra matemático que ayuden a generar problematización y cuestionamientos entre los alumnos, excepto en la última sesión cuando les plantea dos situaciones en contexto extra matemático, pues con esas situaciones se espera que los alumnos interpreten información, realicen un planteamiento, y den solución al problema, en este caso podríamos decir que los alumnos se encontraban problematizados, pues el trabajo se realizó en equipo y se pudo observar que fue cuando los alumnos se enfrentaron a la resolución del problema.

Para la segunda componente que corresponde a los tipos de lenguaje se proponen tres indicadores de idoneidad.

1. ¿El profesor utiliza diferentes formas de lenguaje (verbal, algebraico, gráfico, etc.), traducción y conversiones de los mismos?

Durante el desarrollo del tema, el profesor sólo usa lenguaje algebraico, pues en ningún momento hace uso de representaciones gráficas, numéricas o verbales, ni recurre a la conversión dentro del mismo sistema de representación. En este indicador consideramos que la forma de lenguaje matemático es muy pobre por parte del profesor, pues la visión del conocimiento que puede darle al alumno se ve limitado, pues algo que consideramos relevante es analizar la solución de las ecuaciones lineales a partir de una gráfica.

2. ¿El nivel de lenguaje con el que se dirige el profesor es adecuado para los alumnos?

Con relación a este punto, el profesor se expresa con un lenguaje familiar hacia los alumnos, aunque sólo se limita a utilizar expresiones algebraicas, recuerda algunas expresiones, identidades algebraicas y números reales con relación a temas que ya se han estudiado antes de abordar las ecuaciones lineales, este tipo de lenguaje al alumno le suena familiar, por tanto, ayuda a clarificar su significado. Consideramos que para lograr que los alumnos enriquezcan su significado, el profesor debe utilizar diferentes formas de lenguaje que le ayude al alumno a clarificar sus conocimientos.

3. ¿El profesor propone situaciones de expresión matemática e interpretación?

En un primer momento el profesor propone situaciones en contexto intra matemático, enfocado en resolverlas con ayuda de los alumnos. Consideramos que las expresiones matemáticas aparecen ya planteadas en la mayoría de los casos, pues sólo se enfoca en resolver las ecuaciones lineales con énfasis en el uso de técnicas para el despeje de la incógnita de una ecuación, apoyándose en las propiedades de los números reales. Por otra parte, cuando propone las situaciones en contexto extra matemático, éstos no se relacionan con la vida real, aunque es cierto que los alumnos deben interpretar, planteando un modelo que les ayude a representar lo que pide el problema, para después darle solución.

Para la solución el profesor sugiere que realicen unos pasos generales que les ayudarán a resolver e interpretar situaciones problemas, refiriéndose a la lista de problemas en contexto extra matemático propuesto por él, los pasos consisten en lo siguiente.

- Leer todo el enunciado del problema, sin prisas, porque algunas veces leen mal y eso los puede llevar a un planteamiento erróneo.
- Identifiquen lo que se está buscando o lo que se les está pidiendo del problema.
- Escribir con tus palabras de tal manera que tú mismo lo puedas entender que se les está pidiendo del problema.
- Asignen la incógnita o las incógnitas con las que se vayan a utilizar. Hace referencia que en este caso solo se va a trabajar con una incógnita.
- Leer otra vez el enunciado, pero esta vez leyéndolo por partes para que esta vez el mismo enunciado les valla ayudando a ir formando la ecuación que le represente el enunciado que le permita resolver el problema.

Los siguientes tres indicadores se relacionan con las reglas establecidas entre los conceptos (o definiciones), conceptos y procedimientos.

1. ¿Las definiciones propuestas por el profesor son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirige?

Las únicas definiciones propuestas por el profesor son las de las ecuaciones lineales y sus soluciones, es importante mencionar que, cuando define formalmente la ecuación lineal lo hace de manera incorrecta pues cuando define el concepto ($Ax + B = 0$) omite la condición $A \neq 0$, lo cual es un aspecto que tiene que declarasen la definición. Con respecto a la solución menciona que es un número real " x_0 " que satisface la igualdad, consideramos que da una definición adecuada, pues también describe la representación de la gráfica de la solución, dibujado en una recta numérica.

Con respecto a las propiedades de los números reales se refiere específicamente al elemento inverso aditivo e inverso multiplicativo que ayudan a resolver las ecuaciones lineales, sin embargo, el profesor no describe una definición formal, sólo las describe verbalmente, pues explica que con base en esas propiedades los alumnos utilizan las técnicas (a técnicas se refiere a que cuando algo está sumando pasa del otro lado de la igualdad restando y cuando al está multiplicando pasa dividiendo del otro lado de la igualdad) que tienen que ver cuando se despeja la incógnita de una ecuación lineal.

2. ¿El profesor presenta los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado?

Con respecto a los enunciados fundamentales, consideramos que las funciones lineales son un tema que declara el programa de estudios de acuerdo a la Dirección General del Bachillerato, y es un tema que se relaciona directamente con el estudio de las ecuaciones lineales, sin embargo, el profesor observado no contempla el estudio de éste. Por otro lado, el procedimiento fundamental para el desarrollo de las ecuaciones lineales es el despeje, así que esto corresponde a una presentación de acuerdo al nivel educativo.

3. ¿El profesor propone situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos?

Para este indicador, el profesor propone situaciones de resolución de ecuaciones lineales, con la intención de que los alumnos puedan resolverlas usando un procedimiento o algoritmo que los estudiantes conocen desde la secundaria, con estas situaciones el profesor no promueve la negociación de definiciones o proposiciones, sino más bien, se centra en que estas situaciones promuevan solo procedimientos.

Para el siguiente caso donde propone problemas de aplicación el profesor también promueve procedimientos, explícitamente sugiere seguir cinco pasos propuestos por él para la resolución de problemas en contexto extra matemático, los cuales resultan más flexibles, pero al final de cuentas el profesor los plantea como un procedimiento, para que los alumnos puedan realizar el planteamiento de la situación.

En la última sesión el profesor plantea otras dos situaciones en contexto extra matemático, pero ahora propone que se trabaje en equipos de tres personas, lo cual se presta para que se generen discusiones que dan pie a negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.

Para la componente de los argumentos se describen dos indicadores.

1. ¿Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones del profesor son adecuadas al nivel educativo que se dirige?

De acuerdo con las observaciones de las sesiones, se abordan comprobaciones y demostraciones fundamentales, aunque sólo en la resolución y no en su aplicación, pero lo hecho sí se corresponde con situaciones comunes del nivel medio superior. Por tanto, consideramos que las explicaciones, comprobaciones y demostraciones vistas en el desarrollo de las ecuaciones lineales corresponden a los conocimientos básicos que se espera que los alumnos aprendan.

2. ¿El profesor promueve situaciones donde el alumno tenga que argumentar?

Para este indicador el profesor cuestiona a sus estudiantes para que ellos respondan lo que el profesor quiere escuchar, por ejemplo, cuando les pregunta si recuerdan las expresiones algebraicas o las propiedades de los números reales, sin embargo, las propias situaciones propuestas no ayudan a que el estudiante argumente sobre la resolución.

Los últimos dos indicadores de la idoneidad epistémica tienen que ver con la conexión del significado.

1. ¿Relaciona y articulan los objetos matemáticos puestos en juego (problemas, definiciones, procedimientos etc.)?

Los objetos matemáticos puestos en juego en estas sesiones se enfocan exclusivamente al estudio de las ecuaciones lineales, las expresiones algebraicas y la propiedad del inverso aditivo y multiplicativo. Las expresiones algebraicas las relaciona en un inicio para introducir la definición de ecuación lineal utilizadas como ejemplo de que las ecuaciones lineales son expresiones algebraicas, mientras que las propiedades mencionadas anteriormente, son utilizadas para el despeje de la incógnita.

2. ¿Identifica y articula los diversos significados de los alumnos con respecto a los objetos que intervienen sus prácticas matemáticas?

El profesor B muestra interés en conocer los significados personales de los estudiantes pues cuestiona a los alumnos sobre el avance de sus conocimientos, sin embargo, no se evidencia la articulación de los objetos matemáticos, así como tampoco la integración y articulación de los seis objetos primarios necesarios para una mayor comprensión y aprendizaje de las ecuaciones lineales.

IDONEIDAD COGNITIVA

La primera componente de la idoneidad cognitiva tiene que ver con los conocimientos previos.

1. ¿Planifica el profesor el estudio de los conocimientos previos para el estudio del tema o considera conocimientos previos estudiados anteriormente?

Con respecto a este indicador no tenemos información que nos ayude a ver si la planificación de los conocimientos previos para el estudio de las ecuaciones lineales son tomadas en cuenta para el desarrollo de las mismas, sin embargo, durante las sesiones de clase el profesor considera algunos conocimientos previos que se han estudiado anteriormente, como son las expresiones algebraicas, las propiedades de los números reales, así como también como identificar el grado de una expresión algebraica. Por tanto, consideramos que el profesor toma conocimientos estudiados por los previamente.

Por otra parte, el programa de estudios de la Dirección General de Bachillerato establece que antes de abordar el tópico de las ecuaciones lineales los alumnos, deberán haber estudiado o tener una mayor comprensión de ciertos temas que ayuden a comprender las ecuaciones lineales, como por ejemplo: los números reales y sus propiedades, modelos algebraicos, relaciones numéricas y algebraicas, jerarquía de operaciones numéricas y algebraicas, transformaciones algebraicas, reducción de factores comunes entre otros.

2. ¿Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversos componentes?

De acuerdo al programa de estudios de la asignatura de Matemáticas 1, se espera que los significados pretendidos corresponden a que los alumnos identifiquen una ecuación lineal de una variable y una función lineal y su relación entre ellas, el uso de diferentes técnicas para resolver las ecuaciones, aplicación de técnicas para graficar una función lineal, modelación de situaciones para escribirlas como una ecuación lineal o una función lineal, representación entre relaciones numéricas y algebraicas entre otros elementos. Entonces de acuerdo a estos significados pretendidos, el profesor solo incluye lo mínimo, únicamente dos aspectos que tiene que ver con reconocer una ecuación lineal en una variable y su solución en una recta numérica, así como modelación a partir de situaciones contexto extra matemático que les permite a los alumnos obtener el planteamiento de una ecuación lineal e interpretar la solución con respecto al problema.

Por tanto, consideramos que los significados pretendidos no se logran alcanzar pues el profesor no abarca la mayoría de aspectos que se deberían abordar para una mejor comprensión tanto de las funciones lineales como de las ecuaciones lineales, y en consecuencia lograr un mayor significado pretendido.

La segunda componente de la idoneidad cognitiva corresponde a las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales y consta de dos indicadores.

1. ¿El profesor incluye actividades de ampliación y refuerzo?

Para este indicador, el profesor no integra actividades de ampliación, pues como mencionamos anteriormente, solo se limita en estudiar el conocimiento común. Con respecto a actividades de refuerzo el profesor incluye algunas situaciones que ayudan a los alumnos a reforzar el procedimiento utilizado para encontrar la solución.

2. ¿El profesor promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes?

En un inicio el profesor intenta que todos los alumnos logren una mayor comprensión del tema estudiado (ecuaciones lineales), el profesor cuestiona a los estudiantes, sin embargo son pocos los que logran entrar en un proceso de aprendizaje, pues muchos de ellos no expresan sus dudas y no logran integrarse, sin embargo, conforme avanza el desarrollo del tema, se puede ver que algunos alumnos se van quedando atrasados sin que el profesor intervenga en el desarrollo de sus habilidades promoviendo un logro de todos sus estudiantes.

La tercera componente de la idoneidad cognitiva corresponde a los aprendizajes este se compone por los siguientes tres indicadores.

1. ¿El profesor utiliza diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas?

Durante las observaciones realizadas, el profesor no implementa algún tipo de evaluación excepto la revisión de una de las tareas dejadas en una de las sesiones, donde las tareas revisadas consisten en situaciones de reforzamiento sobre las ecuaciones lineales.

Por tanto, no podemos decir mucho sobre los diversos modos de evaluación que utiliza el profesor para que los estudiantes logren una apropiación y comprensión de los conocimientos pretendidos.

2. ¿La evaluación implementada por el profesor tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia?

3. ¿Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones?

Con respecto a estos dos indicadores, el profesor no implementa tal cual una evaluación durante las sesiones observadas que ayude a ver en los alumnos una mayor comprensión y competencia, solo se revisa una tarea en una sesión, que corresponde a una tres ejercicios de resolución de ecuaciones lineales, para la revisión de la tarea recurre únicamente a

preguntar si la resolvieron, donde los alumnos se limitan a contestar sí o no, y luego revisarlos de manera grupal pasando a tres alumnos al pizarrón a resolverlas.

Además, el profesor comenta a sus alumnos que próximamente realizaran un examen en donde les evaluará temas vistos anteriormente y también el tópico de las ecuaciones lineales y sus aplicaciones que relacionan una serie de ejercicios dejadas por él, las cuales consisten en resolver tres situaciones de aplicación, dejando otras para que los alumnos las resuelvan como tarea de reforzamiento.

IDONEIDAD AFECTIVA

Se muestran los siguientes indicadores correspondientes a la idoneidad afectiva.

1. ¿Las tareas propuestas por el profesor son de interés para los alumnos?

Los alumnos no se muestran interesados en la resolución de ecuaciones lineales donde solo tiene que realizar procedimientos, sin embargo, cuando propone dos situaciones en la última sesión, se ven motivados e interesados, pues una técnica que usa el profesor es exentar al equipo que presente los problemas resueltos, pero por si solos las demás aplicaciones a las ecuaciones lineales no muestran interés para los alumnos.

2. ¿El profesor propone situaciones que permita a los estudiantes valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional?

Aunque el profesor promueve situaciones en contexto extra matemáticos, son situaciones comunes de la matemática, sin embargo, estas no se relacionan en un contexto real de los estudiantes que les permita valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana.

La siguiente componente se refiere a las actitudes que están presentes y dan sentido a la respuesta cognitiva requerida, y se relacionan con los siguientes dos indicadores:

1. ¿El profesor promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.?

Con respecto a este indicador, el profesor recurre a cuestionar a sus alumnos para promover la participación grupal, sin embargo, no todos los alumnos participan, pues el profesor se restringe a avanzar con el desarrollo del tema solo con los alumnos que participan, sin tomar en cuenta a los que no están entendiendo el contenido. Una manera de promover participación es pasando a sus alumnos a resolver ecuaciones lineales al pizarrón y así discutir grupalmente las soluciones propuestas por ellos.

Con respecto a la perseverancia y responsabilidad de sus conocimientos, el profesor enfrenta a los alumnos a la resolución de aplicaciones de las ecuaciones lineales, donde

ellos con los procedimientos aprendidos intentan resolver dos situaciones que impliquen el planteamiento de las ecuaciones lineales.

2. ¿El profesor favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora por sí mismo y no por quien lo dice?

El profesor no promueve la argumentación a través de las situaciones propuestas, solo en la dinámica de la clase, cuando cuestiona a los estudiantes, la valora por quien lo dice, pues cuestiona las respuestas dadas por los alumnos o trata de convencerlos.

Los siguientes dos indicadores de la última componente de esta idoneidad corresponde a las emociones, las cuales respaldan las actitudes, motivaciones, sentimientos y la autoconfianza en el alumno.

1. ¿El profesor promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas?

Con base a la tercera sesión, cuando el profesor aborda los problemas de aplicación uno de los problemas una alumna da un planteamiento a partir de una regla de tres, sin hacer un planteamiento algebraico en relación a una ecuación lineal, el profesor se muestra abierto a otros planteamientos afirmando que también esa forma de resolverlo representa una solución correcta a la situación problema. Esto corresponde a una acción que el profesor no limita a los alumnos, reconoce que un problema se puede resolver de diferente manera y no necesariamente por el procedimiento establecido por él.

2. ¿Muestra el profesor las cualidades de estética y precisión de las matemáticas?

Con respecto a las definiciones y procedimientos incorporados al desarrollo de las ecuaciones lineales, el profesor no muestra estética ni precisión de las matemáticas, pues aunque menciona las propiedades de los números reales para la resolución de las ecuaciones, las aplica correctamente, explícitamente no se ven utilizadas de manera apropiada, solo utiliza las técnicas de despeje, explicando que detrás de esas técnicas existen esas propiedades, sin embargo, no las define formalmente con lenguaje preciso de la matemática. Por otro lado, cuando define la ecuación lineal de manera formal, no escribe con precisión pues no menciona que para que $Ax + B = 0$ siempre $A \neq 0$.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

Se presentan los siguientes indicadores correspondientes a la idoneidad interaccional.

1. ¿El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)?

Durante el desarrollo de las ecuaciones lineales, aborda el tema de manera tradicional donde primero introduce los conceptos, ejemplos resueltos por él y ejercicios de reforzamiento del procedimiento de la resolución de ecuaciones, para posteriormente estudiar las aplicaciones que planteen una ecuación lineal. Consideramos que el profesor no tiene una presentación clara que ayude a los estudiantes a construir su significado personal de las ecuaciones lineales, además no enfatiza en los conceptos clave, en este caso las propiedades utilizadas para realizar los despejes de la incógnita, pues desde que las menciona, no hace referencia a ellas en el procedimiento.

2. ¿El profesor reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)?

Para este indicador el profesor reconoce cuando un alumno se encuentra en conflicto pues a partir de cuestionamientos puede saber si los alumnos tienen dudas o los ve poco convencidos a lo que están realizando, sin embargo, solo resuelve aquellos conflictos que los alumnos muestran, que en su mayoría son muy pocos lo que realmente expresan ideas y cuestionan al maestro, y para el maestro con ellos es suficiente para proseguir con el desarrollo del tema.

3. ¿El profesor y los alumnos buscan llegar a consensos con base al mejor argumento?

Por parte de los alumnos no muestran concesos con el profesor, pues ellos se limitan a realizar y creer todo lo que el profesor dice que está bien y que espera que hagan. Pues esto muestra que los alumnos no muestran argumentos para refutar o aprobar con referencia a sus conocimientos.

4. ¿El profesor utiliza diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos?

Un aspecto importante que cabe resaltar en este indicador, es que el profesor pregunta en repetidas acciones “si todo está claro” “está bien” o “sí” en un tono imponente, esperando que los alumnos respondan lo que quiere escuchar después de explicar que algún resultado o procedimiento, etc.

5. ¿El profesor facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase?

Con relación a este indicador facilita la inclusión de la dinámica de la clase, solo con los alumnos que ya se muestran incluidos en la dinámica, los que se muestran interesados, pasando desapercibido por los demás que necesitan más apoyo para el desarrollo de sus habilidades.

Además, las dinámicas de las clases en la mayoría de las sesiones son de manera expositiva donde el profesor es el emisor de información mientras que los alumnos actúan como receptores de información.

La siguiente componente se relaciona con la interacción entre los alumnos, correspondiendo a los siguientes tres indicadores.

1. ¿Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes?

En la última sesión del trabajo en equipo donde los alumnos tienen oportunidad de interacción entre ellos, el profesor les plantea dos situaciones donde tienen que plantear las ecuaciones respectivamente que modelen el problema, se puede notar que se encuentran motivados pues el profesor les propuso exentar el examen si había un primer equipo que lo presentara de manera correcta ante el grupo. Consideramos que en esta situación propuesta por el profesor promueve la motivación, diálogo y comunicación para que los alumnos expongan ideas, argumentos y soluciones a los problemas planteados.

2. ¿Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos?

Para este indicador lo relacionamos con las dos últimas situaciones propuestas por el profesor, en estos casos los estudiantes logran plantear la expresión de manera numérica, pues por si solos no logran apropiarse del problema, sin embargo, se observa que algunos estudiantes no se apoyan en argumentos matemáticos que les ayude a plantearlo de manera algebraica

Algunos alumnos plantean números que no cumplen o no satisfacen la ecuación y que además no tienen sentido al hablar del contexto del problema, es decir, que no tienen validez dentro del contexto.

3. ¿Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión?

Como se mencionó anteriormente, el profesor se centra en aquellos estudiantes que siguen su paso y participan conjuntamente con él, mientras los demás quedan excluidos, pues se puede notar que a los alumnos no les queda claro algún procedimiento realizado, se observa además que ciertos alumnos les causa aburrimiento estar en la clase.

La siguiente componente corresponde a la autonomía, este se relaciona con los siguientes indicadores.

1. ¿Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos

para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, ¿resolver problemas y comunicarlos)?

El profesor asume cierta responsabilidad en que los alumnos hagan suyas las situaciones problemas, pues en algunas ocasiones no suele decirles las respuestas inmediatamente, espera que los alumnos planteen cuestiones, presenten la solución colaborando en resolver las ecuaciones lineales, sin embargo, como no se logra hacer un estudio amplio donde incluyan por ejemplo el estudio de las ecuaciones lineales, no se da tiempo para que se exploren ejemplos o contra ejemplos para investigar, conjeturar y argumentar, utilizando herramientas que ayuden hacer conexiones con otros problemas.

2. ¿El profesor observa sistemáticamente el progreso cognitivo de los alumnos?

Puesto que el número de estudiantes es aproximadamente 50 alumnos, el profesor no muestra acciones que nos permitan determinar si toma en cuenta el progreso cognitivo de los estudiantes, podríamos considerar que a partir de respuestas dadas por los estudiantes considera una valoración con respeto a sus significados personales.

IDONEIDAD MEDIACIONAL

Se consideran los siguientes indicadores correspondientes a la idoneidad mediacional.

1. ¿El profesor utiliza materiales manipulativos e informáticos que permitan introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido?

Para este indicador que relaciona los recursos o materiales utilizados por el profesor para facilitar el proceso de estudio, el profesor únicamente utiliza la calculadora para realizar la suma de fracciones, los cuales se presentan durante los despejes de ecuaciones lineales.

2. ¿Las definiciones y propiedades propuestas por el profesor son contextualizadas y motivadas usando situaciones, modelos concretos y visualizaciones?

La definición de las ecuaciones lineales es contextualizada a través de las aplicaciones en contexto extra matemático, promoviendo la modelización de estas mismas. Puesto que no se muestra la definición formal de las propiedades de los números reales solo se menciona de manera excluyente consideramos que no son suficientes las definiciones y propiedades propuestas para que los alumnos construyan un avance significativo de conocimientos de las ecuaciones lineales.

Las siguientes componentes corresponden al número de alumnos, horario y condiciones del aula, para el cual se proponen los siguientes tres indicadores.

1. ¿El número y distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida?
2. ¿El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido?

El número de estudiantes aproximadamente en el salón de clases es de 50 alumnos, consideramos no es un número apropiado para un aprendizaje que permita lograr el significado pretendido. Pues el profesor se limita a enseñar a unos cuantos perdiendo de vista a los demás. Con respecto a la distribución los alumnos se acomodan en el aula de clases como ellos quieren, algunos ya tienen un lugar ubicado, por lo regular los alumnos de las esquinas o de los que se ubican hasta atrás son los menos involucrados en la dinámica de la clase, el aula es adecuada y se muestra en buenas condiciones donde los alumnos cuentan con mesa banco propio para el proceso de estudio.

3. ¿El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a la última hora)?

Con respecto al horario del curso es la hora apropiada para que los estudiantes muestren más interés al desarrollo del tema, pues la asignatura se imparte en horario del turno matutino, con tres días a las 11:10 am y dos días a las 08:40 am, consideramos que no es tarde ni muy temprano, es un horario apropiado para captar la atención de los estudiantes.

La siguiente componente se relaciona con el tiempo (de enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje), para el cual se desarrollan los siguientes tres indicadores.

1. ¿El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida?

Para este indicador que corresponde al tiempo establecido para la enseñanza pretendida, la consideramos insuficiente, pues las horas presenciales por parte del alumno son seis diarias, de las cuales el profesor de matemáticas 1 les imparte una hora diaria, eso equivale 5 horas a la semana, sin embargo, las horas dedicadas al tema de estudio, en este caso consistió de cuatro sesiones de clase, consideramos que el tiempo presencial al desarrollo del tema es insuficiente pues no cumple con la enseñanza pretendida. Pues el profesor se limita a ver cosas básicas y de manera tradicional.

2. ¿El profesor dedica suficiente tiempo a los contenidos más importante del tema?
3. ¿El profesor dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión?

Con respecto a estos dos indicadores, el tiempo dedicado al estudio de las ecuaciones lineales la consideramos insuficiente por todos los criterios que se debe de estudiar de acuerdo al programa de estudios referentes al significado pretendido, por otro lado, dedica

el tiempo necesario al tema, pero no emplea técnicas que ayuden una mejor comprensión, como los diferentes tipos de lenguajes, técnicas de otros procedimientos etc.

IDONEIDAD ECOLÓGICA

La primera componente que corresponde a esta idoneidad es la adaptación al currículo, y consta del siguiente indicador.

1. ¿Los contenidos, su implementación y evaluación por el profesor corresponden con las directrices curriculares?

El contenido corresponde a las directrices curriculares del proceso educativo, mientras que la implementación y la evaluación propuesta por el profesor no corresponden con la propuesta del profesor, pues la implementación solo corresponde a explicar cómo se resuelven las ecuaciones lineales con una incógnita, tanto con número reales como fraccionaria, sin emplear apropiadamente las propiedades para resolver la ecuación lineal, evitando que los alumnos se apropien de los problemas. Por otra parte, la evaluación corresponde a la que implementa la institución pues de acuerdo con el currículo se propone que la evaluación se incluyendo otros aspectos como rubricas, portafolios, tablas de cotejo etc.

La segunda componente se refiere a la apertura hacia la innovación educativa, a este se le asocian los siguientes dos indicadores.

1. ¿El profesor promueve una innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva?

Para este indicador no se promueve en ningún momento la investigación por conceptos o procedimientos que les ayude a los alumnos a reflexionar y compartirla con sus compañeros. No aplica para las observaciones realizadas.

2. ¿Las nuevas tecnologías integradas por el profesor (calculadoras, computadoras, TIC, etc.) se ven reflejadas en el currículo educativo?

Este indicador no aplica de acuerdo a la información obtenida pues el profesor no hace uso de recursos tecnológicos integrados en el proceso de instrucción. Sin embargo, el currículo declara que se deben utilizar como herramientas de apoyo en el proceso de aprendizaje-enseñanza.

La siguiente componente se relaciona con la adaptación socio-profesional y cultural, la cual le corresponde el siguiente indicador.

3. ¿Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes?

El contenido de las ecuaciones lineales es un tema importante que se viene estudiando desde la educación básica, pues con esta se pueden modelar problemas de la naturaleza y la

vida real, y con relación a esto, consideramos que el contenido contribuye a una formación socio-profesional del estudiante.

La siguiente componente de la idoneidad ecológica corresponde a la educación en valores, para la cual se relaciona con el siguiente indicador.

1. ¿El profesor contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico?

Para este indicador el profesor contempla la formación en valores democráticos pues a través de cuestiones, los alumnos muestran respuestas de manera crítica y democrática, que en definitiva no siempre son correctos, pero se ven presentes en la dinámica.

La última componente de esta idoneidad tiene que ver con las conexiones intra e interdisciplinarias, la cual le corresponde el siguiente indicador.

1. ¿El profesor relaciona los contenidos con otros contenidos intra e interdisciplinarios?

Este indicador no aplica de acuerdo a la información obtenida, pues el profesor no relaciona situaciones con otras disciplinas que ayuden a ver la matemática en ambos campos de la vida real.

CAPÍTULO 4

4. CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR

4.1 Introducción

En este capítulo del trabajo haremos una caracterización de nuestros sujetos de estudio, profesor A y profesor B, es decir, con base en los datos obtenidos a partir de la entrevista y observaciones de clases, describimos con detalle las características principales de sus prácticas matemáticas y didácticas, tomando como eje de análisis las seis facetas del modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor, presentando algunas conclusiones generales con base en las consignas estipuladas para cada una de las facetas.

4.2 La caracterización del conocimiento didáctico matemático del profesor A y profesor B

En este apartado se muestra la caracterización de nuestros sujetos de estudio con relación a sus conocimientos didáctico matemáticos, relacionados con cada una de las facetas del modelo del CDM. Se consideraron las consignas que corresponden a cada una de las seis facetas del modelo: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. Para dicha caracterización nos basamos en el análisis de las prácticas discursivas a través de la entrevista y el análisis de las prácticas operativas a partir de las clases observadas, auxiliados por el protocolo de observación.

4.2.1 Profesor A

El haber realizado una caracterización de nuestros casos de estudio, fue fundamental haber realizado la entrevista y la observación de las sesiones de clase, pues con ello pudimos darnos una idea satisfactoria del Conocimiento Didáctico Matemático de los profesores observados.

En la siguiente tabla se presenta la información concentrada y analizada, tanto de la entrevista como de las observaciones de clase, así como la caracterización correspondiente.

Faceta epistémica	Consignas	Entrevista	Observaciones de clase
Conocimiento común	Resuelve la tarea	<ul style="list-style-type: none"> • Conocimientos de aritmética: operaciones numéricas, lenguaje algebraico y su transformación, comprensión del símbolo igual y los miembros de una ecuación. • Reconoce que el plan de estudios contempla actividades de repaso. • Introduce las funciones lineales para representar situaciones de la vida real. • Plantea problemas donde se conoce el valor de la variable dependiente pero no de la independiente. • Propone resolución de ecuaciones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Manejó situaciones en contexto extra-matemático, como: <ul style="list-style-type: none"> ➤ ¿cuántos vasos necesitan para formar una torre de 187 cm de altura? ➤ ¿Cuál sería la altura de una torre con 60 vasos, 80 vasos y 100 vasos? • Dadas las situaciones intentó usar diferentes tipos de lenguaje: <ol style="list-style-type: none"> 1. Algebraico 2. Tabular 3. Gráfico <ul style="list-style-type: none"> • Manejó situaciones en contexto intra-matemático del tipo: <ul style="list-style-type: none"> • $x + 4 = 8$ $3x = 18$ • $x - 5 = 10$ $\frac{4x}{6} = 6$ • $-4 + x = 21$ • $-7x = 35$ • $x + \frac{3}{5} = \frac{1}{4}$ • $2x = 8$
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas	No hay evidencia	No hay evidencia
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.	Resolución de ecuaciones.	<ul style="list-style-type: none"> • Aborda de manera general el concepto de función lineal. • Se limita a ver casos particulares de las ecuaciones lineales, sin dar su definición formal.
Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representacion	No hay evidencia.	<ul style="list-style-type: none"> • Intenta utilizar diferentes tipos de representaciones (algebraica, tabular y

	es.		gráfico), sin embargo, el que mayor predomina es el algebraico.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales)	No se especifican aspectos relacionados con procedimientos.	<ul style="list-style-type: none"> Se limita a un procedimiento para la resolución de ecuaciones lineales que consiste en: Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos que posean la incógnita en un miembro de la ecuación y los términos independientes en el otro miembro Reducir términos semejantes Despejar o aislar la incógnita
Conceptos/ propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.	No se especifican aspectos relacionados con propiedades o conceptos.	Define: <ul style="list-style-type: none"> Función lineal Propiedades de suma de la igualdad Propiedad multiplicativa de la igualdad
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.	No se especifican aspectos relacionados con argumentos, esto con respecto a las propiedades.	<ul style="list-style-type: none"> En las situaciones intra matemáticas justifica el porqué de las técnicas de despeje de una ecuación lineal. Sustituir la solución en la ecuación, justifica que se satisfaga la ecuación.
Conocimiento ampliado			
Conexiones	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.	No se muestran aspectos relacionados entre el objeto matemático y otras disciplinas o tópicos de la misma asignatura.	Expresa que los conocimientos discutidos los utilizarán en otras materias.

Tabla 3: Consignas de la faceta epistémica

De acuerdo con la información mostrada pudimos contrastar y complementar la información de acuerdo a la entrevista y las observaciones, así como resaltar los siguientes

puntos generales de la faceta epistémica. Para ello nos basamos en los estudios mostrados de cada uno de los niveles del CDM y los significados institucionales de referencia.

- El profesor inicia con el planteamiento de situaciones problema de carácter extramatemático, involucrando a los estudiantes en el análisis y resolución de las situaciones, cuya finalidad, como se observa en el estudio de las configuraciones epistémicas, consisten en definir lo que es una función, una función lineal y la caracterización de las variables dependientes e independientes.
- Posteriormente plantea que una ecuación lineal se obtiene cuando en una función lineal se determina algún valor específico de la variable dependiente de una función lineal, sin profundizar en el hecho y sin plantear posibilidades de obtener una ecuación lineal sin recurrir a las funciones lineales.
- Las gráficas y tablas relacionadas con las funciones lineales sólo aparecen como un recurso para graficar una función lineal por medio del “punteo”, sin mayores discusiones sobre las mismas.
- Posteriormente se centra en aspectos de carácter procedimental, en los que se incluyen justificaciones de los pasos a seguir para “despejar” la variable o incógnita de una ecuación.
- El énfasis en los aspectos procedimentales se pone de manifiesto al seguir puntualmente una serie de pasos que el estudiante debe seguir para resolver una ecuación.

Con las descripciones hechas hasta este punto y con base en el significado institucional de referencia, tanto los planteamientos de la DGB como el módulo de aprendizaje que la institución pone a disposición de alumnos y profesores, podemos afirmar que:

- Las prácticas matemáticas del profesor se centran fundamentalmente en los procesos procedimentales, atendiendo al uso del lenguaje propio del álgebra y el establecimiento de reglas de validez para cada acción que se realiza en la resolución de ecuaciones. Sin embargo, existen también muestras de interés en establecer relaciones entre situaciones extramatemáticas en el caso de la función lineal.

- Con respecto a los criterios de idoneidad, nuevamente podemos observar que el profesor no presenta una muestra representativa de situaciones problema extramatemáticas sobre el tema de las ecuaciones lineales, pero procura hacerlo en la variedad de tipos de ecuaciones lineales, representadas en los pasos algorítmicos que revisa, incluyendo paréntesis, fracciones y otros. El profesor más que negociar significados pretende que los estudiantes asuman aquéllos que él presenta.
- En lo que respecta a la trayectoria epistémica, se puede observar que, en el caso de las funciones lineales y el inicio de las ecuaciones lineales, las configuraciones son de carácter conceptual, con elementos situacionales y lingüísticos, pero la mayor parte de las configuraciones y el énfasis de las configuraciones son procedimentales y entradas en el manejo algorítmico-algebraico.
- Esta situación se observa también en la revisión de los aspectos normativos, en los cuales podemos notar que el énfasis del trabajo está puesto en su presentación y la expectativa de que los estudiantes asuman los procedimientos algorítmicos como válidos, con poca discusión del uso de diferentes representaciones matemáticas y de análisis de interpretación de situaciones. De hecho, lo único que hace, en un determinado momento es señalar que pueden verificar la solución de una ecuación “sustituyendo la solución en la incógnita para verificar la igualdad”.

Faceta cognitiva + afectiva	Consignas	Entrevista	Observaciones de clase
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones,)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.	Afirma que los alumnos recuerdan vagamente las literales, las operaciones básicas. Pocos alumnos dominan el tema.	El profesor centra su atención en las dudas o conflictos que se le presentan a los estudiantes. Los cuestiona con referencia al desarrollo o

		<p>Considera que un alumno ha aprendido las ecuaciones lineales cuando plantea problemas por medio de una ecuación lineal, y entiende por qué lo hace de esa manera, resuelve la ecuación, y entiende el significado de la misma.</p> <p>Considera que a través de preguntas sobre el problema o cuando presenta su resultado puede darse cuenta si el alumno entendió el significado de las ecuaciones lineales, preguntas como; ¿Y esto por qué lo planteaste así? ¿Y ese número que tuviste como resultado qué significa?</p>	<p>procedimiento de la situación problema (ecuación lineal o situación donde modelen la función lineal)</p>
<p>Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones</p>	<p>Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Reconoce que no utiliza el módulo de aprendizaje Matemáticas I, tiene dificultades para utilizarlo. • Considera que tienen muchas deficiencias para abordar el tema de las ecuaciones lineales. • Introduce alguna situación contextualizada de las funciones lineales con la intención de problematizar a sus alumnos. • Identifica dificultades para que los alumnos expongan sus ideas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Se presentan conflictos del cómo utilizar regla de signos. • Poco interés de los alumnos al resolver ejercicios sólo con procedimientos. • Los alumnos muestran conflictos al querer utilizar las propiedades de las igualdades. • Muestran resistencia al uso de las propiedades.

<p>Evaluación de aprendizajes</p>	<p>Formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La evaluación es por medio de exámenes escritos y actividades con un porcentaje de 50% cada uno. • Afirma que es una evaluación por parte de la institución, el currículo declara que la evaluación será por medio de portafolios de actividades, sin enfocarse tanto en exámenes escritos. 	<ul style="list-style-type: none"> • La evaluación de aprendizajes es limitada, pues la observación sólo fue en un tópico y no se presentan aspectos de evaluación de manera detallada. • Únicamente menciona que el tema será parte de la evaluación en el examen. • En cada ejercicio resultado de ecuación lineal, revisa si se resolvió de manera correcta.
<p>Actitudes, emociones, creencias, valores</p>	<p>Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Algunos alumnos están acostumbrados a gritar sus ideas. • Sólo algunos alumnos participan en las discusiones grupales. • Explica que uno como profesor se debería preocupar por todos pero a veces es muy difícil sacarles las palabras a los muchachos frente al grupo. 	<ul style="list-style-type: none"> • En general, las actitudes y emociones de los alumnos son de interés por logran un aprendizaje puramente procedimental. • También se dan casos en que los alumnos muestran apatía para la resolución de ecuaciones lineales. • Las situaciones resultan poco atractivas para que los alumnos se sientan motivados.

Tabla 4: Consignas de las facetas cognitiva y afectiva

Con relación a las facetas cognitiva y afectiva podemos destacar que:

De acuerdo a las prácticas realizadas por el profesor, tanto discursivas como operatorias, podemos observar que él parte de asumir que los estudiantes tienen una serie de deficiencias y procura involucrarlos en la discusión de las situaciones planteadas, siempre bajo su conducción y exposición, planteando primero una situación con material manipulable para el caso del estudio de las funciones lineales y organizándolos en equipos. Promueve tanto la discusión en equipo como grupal. Es de notarse, sin embargo, que presta atención fundamentalmente a los alumnos más participativos y deja de lado a aquéllos más apáticos.

Por otro lado, atendiendo a la trayectoria epistémica realizada por el profesor con el tema, al centrarse sólo en los aspectos de carácter algorítmico-algebraico, limita las posibilidades de plantear situaciones que promuevan un significado más acorde a las expectativas institucionales (significado institucional de referencia) y que los estudiantes asuman como propias las situaciones planteadas, comprometiéndose con la búsqueda de soluciones y logrando una mejor actitud hacia el estudio de las funciones lineales y ecuaciones lineales.

En cuanto a las idoneidades se observa que las situaciones planteadas están en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes. No obstante, en los puntos conflictivos que se consideran en el significado institucional de referencia, como las argumentaciones para justificar los algoritmos de resolución de ecuaciones lineales, el profesor presenta las propiedades de las igualdades y, acepta que los estudiantes las obvien u omitan y sólo apliquen mecánicamente acciones como “pasar sumando si está restando” y otras similares. Análogamente, al inicio propone situaciones que ayuden a que el estudiante se comprometa en la búsqueda de soluciones a los problemas, pero la dinámica posterior se limita a proponer que resuelvan ecuaciones lineales sin hacer mayores esfuerzos por lograr que los alumnos hagan suyas las situaciones. Esto se traduce finalmente en que los alumnos sólo realizan las acciones que el profesor les plantea puntualmente e incluso manifiestan enfado por realizar algunas de esas acciones, como copiar en el cuaderno lo escrito en el pizarrón.

Si se atienden a las normas cognitivas y afectivas, la dinámica general consiste en que los estudiantes sigan paso a paso las instrucciones del profesor, con claros intentos para

involucrarlos por sí mismos en la solución de los problemas, como en las discusiones por equipo con manipulables y la última sesión con la actividad lúdica de resolución de ecuaciones. Pero en general y en lo que él subraya como más importante, los alumnos deben seguir paso a paso sus instrucciones para resolver ecuaciones lineales, aceptando que no usen las propiedades de las igualdades explícitamente, abandonando un aspecto señalado por él mismo como trascendente y relacionado con una vertiente de argumentación en la resolución de ecuaciones.

Faceta instruccional (interaccional y mediacional)	Consignas	Entrevista	Observaciones de clase
<p>Configuración didáctica:</p> <p>Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido</p>	<p>Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.</p>	<p>Considera que la resolución de problemas es la única manera que los alumnos aprendan las ecuaciones lineales.</p> <p>Aborda la resolución de ecuaciones de manera grupal con la intención de ir viendo los pasos que van siguiendo los alumnos para su solución.</p> <p>Con respecto a las actividades que debería realizar un profesor para enseñar matemáticas considera saber plantear un problema y como transmitirlo.</p> <p>Planeación de algún tipo de actividad para poner en contacto a los muchachos con los conocimientos necesarios para poder dar solución a las</p>	<p>La configuración didáctica que implementa el profesor al resolver una situación, es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Práctica en el sentido de procedimientos. • Desarrollar pasos algorítmicos. • Basarse en situaciones parecidas para resolver un problema • Posteriormente, revisar si los alumnos respondieron correctamente.

		ecuaciones.	
Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos-alumnos Recursos materiales - tiempo asignado	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.	Trabajo individual de los alumnos Trabajo grupal Trabajo guiado por el profesor y los alumnos Trabajo en parejas. Utiliza los libros de texto diseñados para nivel preparatoria. Consulta material en internet, en algún blog de educación, como, por ejemplo; situaciones didácticas o actividad de enseñanza. Utiliza muy poco el módulo de aprendizaje. No utiliza computadora.	La interacción por parte del profesor con los alumnos es mediante cuestionamientos sobre la resolución de problemas (ejercicios). La interacción de alumno a alumno se da sólo cuando el profesor indica que tienen que interactuar, ya sea en pareja o de manera grupal. Ocasionalmente también hay interacción entre algunos alumnos cuando les surgen dudas y se sienten en confianza para preguntare entre ellos.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)		La trayectoria didáctica que propone es la resolución de problemas generando preguntas para que los alumnos resuelvan ecuaciones lineales.	En la observación se enfoca a repetir procedimientos y algoritmos.

Tabla 5: Consignas de la faceta interaccional y mediacional

La faceta interaccional y mediacional se pueden relacionar mediante el tipo de interacción que existe entre profesor- alumno y alumno- alumno a partir de los medios o recursos

utilizados con la intención de provocar interacciones en el proceso de instrucción, por tanto, en estas facetas podemos destacar que:

En cuanto a las prácticas del profesor, impulsa momentos de trabajo individual, en equipo y discusiones grupales, promoviendo la participación de los estudiantes. Una limitación a este hecho es que en mucho las discusiones sólo se realizan en términos de los planteamientos del profesor y en casos conflictivos no se ocupa suficientemente por la progresión de los aprendizajes y se restringe a que los alumnos logren un mínimo de conocimientos alejado del significado institucional de referencia, descuidando los aspectos referentes a las habilidades y actitudes que los estudiantes deben desarrollar.

Un aspecto muy positivo del discurso del profesor es el señalamiento de que la solución de problemas es la única forma en la cual los alumnos aprenden, pero en su práctica operatoria se observa que en mucho la solución de problemas se restringe al seguimiento de procedimientos algorítmico-algebraicos para obtener la solución de ecuaciones lineales.

En lo que respecta a la trayectoria y configuraciones epistémicas, se observa que la falta de recursos mediacionales para el trabajo de los alumnos, dentro y fuera del salón de clases, no incentiva la discusión entre ellos ni se explotan suficientemente las posibilidades que ofrecen los recursos digitales para la discusión de representaciones matemáticas diversas. El único que se hace de estos recursos es la proyección, como pizarrón electrónico, de los puntos presentados por el profesor. Asimismo, los tiempos destinados al tema son mayoritariamente los de uso de reglas para solución de ecuaciones.

En cuanto a las idoneidades interaccional y mediacional el profesor da muestras de un conocimiento didáctico matemático con puntos favorables como promover la participación de los estudiantes en discusiones por equipo y grupales, pero con énfasis en las funciones lineales y poca discusión y búsqueda de consensos en el caso de las ecuaciones lineales, donde la participación colectiva consiste en promover que los alumnos asuman las reglas que el profesor ha expuesto y sigan los pasos mecanizados para la solución de las mismas.

El uso de recursos mediacionales se observa con fuerza en el caso de los manipulables para el estudio de las funciones lineales y de la proyección del equilibrio de la balanza con el

cañón de video, para ilustrar las propiedades de la igualdad y con ello la justificación de los pasos a seguir en la solución de ecuaciones.

En lo que se refiere a las normas, la dinámica seguida es siempre la que el profesor señala, indicando si una situación debe realizarse individualmente, en equipo o en discusión grupal. A pesar de promover la participación colectiva, se sigue el patrón de que el profesor es quien expone las ideas centrales y presenta las formas de proceder, dejando a los estudiantes el papel de receptores de la información presentada. La concepción del profesor es tal en ese sentido que no promueve el trabajo extraclase con el uso de recursos digitales, ni software matemático ni búsquedas en internet. En el salón de clases no se promueve el uso de la calculadora, sin embargo, permite que los alumnos la utilicen. Por otro lado, prohíbe el uso de celulares, para lograr una mayor concentración y atención de sus alumnos.

Faceta ecológica	Consignas	Entrevista	Observaciones de clase
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).	Sigue un plan de estudios asignado por la institución, sin embargo, no siempre se abordan todos los temas.	Es consciente del material a cubrir de acuerdo al plan de estudios, pero aún así, no promueve lo que señala la DGB.
Conexiones intra-disciplinarias	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.	No muestra aspectos relacionados con las orientaciones interdisciplinarias.	Únicamente explica que son tópicos que ayudarán al estudio de otros temas y materias, como el de sistemas de ecuaciones lineales y que más adelante estudiarán.
Conexiones interdisciplinarias	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio	No muestra aspectos relacionados con las orientaciones curriculares.	No se muestran aspectos relacionados con conexiones interdisciplinarias.

	mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.		
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.	Plan de estudios muy extenso, se estudia el tema de manera rápida El tiempo un factor que afecta en profundizar en los temas. No deja tarea a sus alumnos.	El tiempo siempre resulta un factor poco controlable por parte del profesor Lo extenso del programa de estudios, pues los temas no se estudian del todo.

Tabla 6: Consignas de la faceta ecológica

Durante el desarrollo de las ecuaciones lineales, en la faceta ecológica se rescata que:

Las prácticas centrales del profesor son procedimentales y la única alusión a la importancia del tema es de carácter genérico, señalando que el tema es importante para estudios de matemáticas posteriores.

En la trayectoria epistémica se observa, nuevamente, que para el caso de las funciones lineales existe una preocupación por presentar situaciones de carácter extramatemático pero no así en el caso de las ecuaciones lineales. Similarmente no se encuentra ninguna relación explícita entre los aspectos promovidos y el resto de las asignaturas del bachillerato, ni de los cursos de matemáticas u otro tipo de cursos.

En cuanto a la idoneidad ecológica la situación es similar pues el tema de las ecuaciones lineales se plantea desligado de otros cursos y saberes, sin promoción para el desarrollo de habilidades y actitudes para enfrentar problemas matemáticos o de otra índole, sin relación con problemáticas sociales o naturales.

En el aspecto normativo, las únicas formas de relación que encontramos son las referentes a los aspectos más generales, como la puntualidad, el uso del uniforme y otros similares, pero ninguna discusión significativa sobre el papel de las funciones lineales y de las ecuaciones

lineales en la vida cotidiana y otras asignaturas, de las posibilidades que ofrece la sistematización en el uso de recursos para resolver las situaciones presentadas.

4.2.2 La caracterización del profesor A

La información recopilada y los análisis realizados respecto a las prácticas del profesor A, de la trayectoria epistémica, del estudio de las normas y metanormas observadas en clase y la entrevista, así como del estudio de idoneidad, nos permiten hacer una caracterización del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Respecto a la faceta epistémica:

Tanto en la entrevista como en clases el profesor evidencia su concepción de que la única forma de que un estudiante avance en sus aprendizajes, es resolviendo problemas. Sin embargo, su concepción sobre lo que significa resolver problemas pareciera más ligada a la solución de ejercicios siguiendo algoritmos, pues es en esta parte donde más tiempo dedicó y en donde puso énfasis.

Sin embargo, es también de notarse, respecto a su conocimiento común, que al tratar con la función lineal su tratamiento fue más amplio e involucró situaciones problema que si bien no se corresponden con la solución de algún problema práctico, la manipulación de objetos y la discusión que se promovió, muestran que el profesor plantea situaciones con una gran riqueza didáctica, suscitando la discusión de cómo debe hacerse un proceso de medición, de identificación de variables dependientes e independientes y el establecimiento de una regla de correspondencia como parte importante de una función.

Esta riqueza didáctica se ve limitada por el hecho de que el profesor no explora suficientemente las ventajas de usar representaciones geométricas y numéricas para el tratamiento de las funciones y rápidamente pasa a plantear que si en una función, representada algebraicamente, se conoce un valor determinado de la variable dependiente, entonces se tiene una ecuación lineal y resolverla representa encontrar los valores correspondientes de la variable dependiente.

Una vez planteada la caracterización de una ecuación lineal, el profesor se centra fundamentalmente en que los estudiantes sean capaces de resolver ecuaciones, centrandose

sus actividades en los pasos algorítmicos que deben seguirse para tal efecto. De esta manera, las acciones realizadas en el tratamiento de las funciones lineales quedan, en buena medida, como introducción para motivar el estudio de las ecuaciones lineales.

Respecto de su significado especializado, el profesor evidencia serias limitaciones tanto en lo didáctico como en lo que concierne a su conocimiento matemático. Así, por ejemplo, en el caso del uso de diferentes representaciones, se limitó, en el caso de las funciones lineales, a elaborar una tabla de valores en la primera situación presentada y con ello elaborar por punteo la gráfica correspondiente. Después de eso, todas las sesiones se desarrollaron con base en el tratamiento algebraico.

Los problemas planteados fueron, en su gran mayoría, ejercicios de resolución de ecuaciones en los que sí se procuró el desarrollo de argumentaciones al aplicar las propiedades de la igualdad y se hicieron esfuerzos, mediante la analogía con una balanza, de que tales propiedades se entendieran y usaran conscientemente por parte de los alumnos, pero finalmente desistió de su propósito y aceptó que se siguieran mecánicamente pasos como los de “si está restando pasa sumando”.

A resumidas cuentas puede decirse que el profesor tiene un conocimiento especializado, que tanto en lo didáctico como en lo matemático, evidencia que avanza más allá del conocimiento común pero con serias limitaciones.

Respecto al conocimiento ampliado, el profesor A no dio muestra de contar con mayores conocimientos de la interconexión de los temas tratados, procurando sacar ventajas didácticas y matemáticas para el uso de lo aprendido en el curso en asignaturas posteriores.

Respecto a las facetas cognitiva y afectiva:

En esta parte identificamos que el profesor toma en cuenta la situación de sus alumnos, de los que considera tienen serias deficiencias en su desarrollo matemático, con dificultades para el manejo de las operaciones aritméticas básicas, principalmente con el manejo de las fracciones.

En sus actividades promueve la participación de los alumnos tanto individualmente como en trabajo de equipo y grupal, motivando su interés por aprender y que asuman las actividades matemáticas por sí mismos. Una vez más sin embargo, es de notarse que el tipo de acciones que realiza son diferentes en el tratamiento de las funciones lineales que en el de las ecuaciones lineales. En el primero de los casos, el profesor logró interesar e involucrar a los alumnos en la búsqueda de soluciones a las situaciones planteadas y, mediante la inversión de los papeles de las variables dependiente e independiente de la situación de medición de alturas con vasos, procuró que los estudiantes se hicieran cargo, por sí mismos, de la solución de los problemas.

Pero en el tratamiento de las ecuaciones lineales regresó, la mayor parte del tiempo, a la conducción tradicional de la clase, en la cual exponía y los alumnos debían reproducir los procedimientos algorítmicos presentados, con algunos intentos por lograr que avanzaran más y fueran capaces de justificar, con base en las propiedades de la igualdad, los pasos desarrollados, lo cual no logró y, al centrar la atención en los alumnos más participativos, el resto dejó de involucrarse suficientemente en las actividades y se limitaron a atender las indicaciones del profesor. No promovió el trabajo extraclase ni la búsqueda de información por otras vías como INTERNET, limitándose, en algunos casos, a verificar si los estudiantes habían hecho las tareas que asignaba, sin cerciorarse si lo habían hecho bien.

Por otra parte, es de notarse que el profesor es consciente de la necesidad de elevar la participación de los alumnos y que ellos mismos se hicieran cargo de hacer progresar sus aprendizajes y, en la última sesión, por medio de una actividad lúdica, logró que se involucraran en la actividad de resolución de ecuaciones y en la revisión de sus soluciones. Esta actividad puso de manifiesto que ese involucramiento de los estudiantes se promovió sólo en la búsqueda de solución mecánica de las ecuaciones.

Respecto a la faceta instruccional (mediacional e interaccional):

Respecto a la faceta interaccional, en condiciones complicadas por el número de estudiantes que tiene a su cargo y la falta de mejor infraestructura, el profesor promueve la participación individual, en equipo y grupal, logrando que se dé una alta participación en la relación profesor-alumno y alumno-alumno. La mayor riqueza de interacción se logra al

inicio con la presentación de una situación que hace uso de manipulables y promueve la discusión sobre la mejor forma de proceder para la solución de la situación.

En el resto de las actividades, la interacción no tiene la misma riqueza pues en los hechos, las normas epistémicas son un freno para ello, toda vez que la actividad gira en torno a la reproducción de procedimientos mostrados por el profesor, con lo cual los estudiantes no tienen espacios para analizar información, para conjeturar, para proponer formas de solución que no sean las de mecanizar más los algoritmos abandonando toda posibilidad de justificación de los pasos realizados. El profesor centra su atención en los alumnos más participativos y su interacción se limita a presentar las reglas a seguir para resolver una ecuación y, a revisar, en algunos casos, si los alumnos están siguiendo dichas reglas.

Incluso en la actividad lúdica final, la interacción alumno-alumno y profesor-alumno gira en torno a la verificación de cuál es la solución de las ecuaciones lineales planteadas y la asignación de puntos extras a quienes las hayan resuelto correctamente en menor tiempo.

En cuanto a la faceta mediacional, al inicio el profesor hizo uso de material manipulable, enriqueciendo la discusión dentro de la clase, y posteriormente empleó el pizarrón y un proyector de video conectado a una computadora, la cual usó como pizarrón electrónico, presentando sistemáticamente los temas a tratar en el curso. Los alumnos, por su parte, usaban calculador, lápiz y papel.

No se presentó ningún software matemático y el uso sistemático de las representaciones algebraicas como único recurso de solución y análisis de las situaciones, limitó las posibilidades mediacionales. Respecto a la posibilidad de ampliar el uso de recursos tecnológicos digitales con actividades extraclase, el profesor señaló explícitamente en la entrevista que no promovía estas actividades pues existen alumnos sin acceso a una computadora y/o a INTERNET.

Esta concepción lleva implícita también una limitación respecto a las facetas cognitiva y afectiva, pues no proporciona orientaciones para que los alumnos que tengan recursos y deseen hacer progresar sus aprendizajes con actividades extraclase y la asunción de una actitud de responsabilizarse de su propio conocimiento lo hagan adecuadamente.

Respecto a la faceta ecológica:

En este aspecto el profesor evidencia que conoce el currículo pero centra su atención en el seguimiento de los temas matemáticos establecidos, en este caso de las funciones lineales y las ecuaciones lineales, dejando de lado el desarrollo general de competencias.

Las trayectorias epistémicas, los análisis de idoneidad y las normas y metanormas, permiten ver, por ejemplo, que se hace poca promoción del desarrollo de habilidades para interpretar información a partir de diferentes representaciones matemáticas para modelar fenómenos sociales, naturales o de otra índole. Asimismo, aunque los alumnos trabajen individualmente, en equipos y de forma grupal, la promoción para el trabajo autónomo e independiente es muy limitado y la falta de trabajo extraclase acentúa más este aspecto. Ante la falta de tiempo para el desarrollo de estos aspectos en clase, el profesor desdeña las posibilidades que proporcionan los medios digitales para cubrir estos aspectos. Esta situación evidencia que la consideración de que las posibilidades de enriquecimiento que aportan los aspectos epistémicos y mediacionales no hacen parte del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Respecto a las conexiones con otros temas, lo único que el profesor señala explícitamente es que las ecuaciones lineales serán de utilidad posterior en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y la única conexión con otros temas son las situaciones presentadas en el inicio, con el estudio de las funciones lineales.

4.2.3 Profesor B

Continuando con la caracterización para nuestro segundo caso, se muestra en las tablas siguientes la descripción de las consignas consideradas para la entrevista y las observaciones de clase de cada una de las facetas del modelo CDM.

Faceta epistémica	Consignas	Entrevista	Observaciones de clase
		Espera que el alumno tenga ya conocimiento del tema, o en otro caso, trata de incorporarlos conforme se	El profesor centra su atención en revisar aspectos básicos de las expresiones algebraicas de primer grado e inicia

Conocimiento común	Resuelve la tarea	<p>requiera para el estudio y desarrollo de las ecuaciones lineales.</p> <p>Intenta hacer semejanza de expresiones algebraicas con las ecuaciones lineales.</p> <p>Considera que el alumno sólo debe tener los conocimientos básicos, ya que el programa de estudios es extenso.</p> <p>Intenta definir qué son las ecuaciones lineales para posteriormente resolver problemas de “aplicación”, lo cual considera básico.</p>	<p>definiendo ecuación lineal para después hacer una repetición de ejercicios y al final cerrar con problemas de aplicación.</p> <p>Se ve limitado a contenidos matemáticos que se relacionen con las ecuaciones lineales, sin llevarlos a otros contextos extra-matemáticos que se asemejen a la vida real de los estudiantes.</p>
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:	Menciona que se centra en lo básico, en donde interfieren algunos objetos matemáticos relacionados con las ecuaciones, por tanto, el conocimiento especializado se ve limitado esencialmente a lo básico.	No se presentan procesos que se relacionen con el conocimiento especializado.
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.	Problematización sobre la resolución de problemas.	Los problemas abordados en clase consisten en repetir procedimientos de solución de ecuaciones lineales.
Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.	No se especifica aspectos específicos que relaciones el lenguaje y representaciones.	Predomina el lenguaje algebraico durante la resolución de problemas y ejercicios.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales)	No se especifican aspectos relacionados con procedimientos utilizados en la resolución de problemas.	Reproduce un único procedimiento o algoritmo tanto en los problemas en contexto, como en los ejercicios de repetición.
Conceptos/ propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.	No se especifican aspectos relacionados con los conceptos o propiedades.	Durante el desarrollo del tema, sólo define la ecuación lineal en su forma general, $Ax + B = 0$, así como su solución.
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.	No se presentan aspectos relacionados con	En la resolución de ejercicios y problemas en contexto, lo

		argumentos durante el desarrollo de las ecuaciones lineales.	elementos de argumentación que se observaron sólo fueron las técnicas de despeje de ecuaciones.
Conocimiento ampliado			
Conexiones	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.	No se muestran aspectos relacionados con el objeto matemático y otras disciplinas o tópicos de la misma asignatura.	Las únicas conexiones de las situaciones problema se presentan cuando propone problemas en contexto extramatemático que están fuera de lo real.

Tabla 7: Consignas de la faceta epistémica

Con base a la entrevista y observaciones de clase se pudo contrastar y complementar la información obtenida en el desarrollo del tema de las ecuaciones lineales. Se resaltan los siguientes aspectos de la faceta epistémica y los cuatro niveles de análisis del modelo CDM así como el significado institucional de referencia:

- El profesor inicia estableciendo la relación entre la expresión algebraica y la ecuación lineal, promoviendo la participación de los estudiantes, en el sentido de si recuerdan las expresiones algebraicas, además señala la relación que hay entre una identidad algebraica y una ecuación lineal.
- Posteriormente da la definición formal de la ecuación lineal, la solución de la misma haciendo referencia que para encontrar su solución es necesario despejar la incógnita, además representa la solución de la ecuación lineal en la recta numérica.
- Posteriormente pone énfasis en aspectos de carácter procedimental, en donde no se incluye justificaciones al desarrollar el despeje de las ecuaciones. Por otra parte, los pasos realizados para el despeje les llama técnicas de despeje, los cuales están respaldadas por las propiedades de los números reales.
- Las “situaciones de aplicación” asignadas en su mayoría son de carácter extramatemático sin embargo, aunque pudieran ser didácticamente útiles no resuelven una situación de aplicación real.

- Las “situaciones de aplicación” son en algún sentido planteamientos tradicionales en donde el profesor centra su atención en que los estudiantes sean capaces de pasar del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

Con las descripciones hechas hasta este momento y tomando como base el significado institucional de referencia, se resaltan los siguientes aspectos:

- Las prácticas matemáticas del profesor se centran fundamentalmente en los procesos procedimentales, haciendo uso del lenguaje propio del álgebra y aritmética, aunque existen muestra de interés en proponer situaciones extramatemáticas con relación a las ecuaciones lineales, intentando que los alumnos modelicen la ecuación a partir de una situación. Además, recurre a pasos generalizados para la resolución de cualquier problema.
- Con respecto a los criterios de idoneidad, muestra una variedad de tipos de ecuaciones lineales, sin embargo, durante la resolución se limita en hacer uso de representaciones gráficas o numéricas, dejando de lado la conversión en el mismo sistema de representación. Además, no da muestra de justificación de los pasos algorítmicos para la resolución de las ecuaciones lineales, es decir, no da un significado claro a que se refiere con las propiedades de los números reales. Lejos de promover y negociar un significado personal en los estudiantes de las ecuaciones lineales, intenta solamente que reproduzcan algoritmos.
- La trayectoria epistémica que muestra el profesor se puede observar que, cuando aborda las situaciones, tanto de carácter intramatemática como extramatemáticas, las configuraciones son de carácter procedimental, con elementos lingüísticos y algorítmicos. Por otra parte, durante el desarrollo de estas situaciones se puede mostrar que el énfasis del trabajo está puesto en la presentación y la expectativa de que los alumnos realicen procedimientos algorítmicos válidos y modelicen situaciones relacionadas con las ecuaciones lineales, inclinándose por aquellos alumnos que le permiten avanzar en el tema.

Faceta cognitiva + afectiva	Consignas	Entrevista	Observaciones de clase
--	------------------	-------------------	-----------------------------------

<p>Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones,)</p>	<p>Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.</p>	<p>Espera que los alumnos tengan conocimientos de aritmética y de expresiones algebraicas, sin embargo, considera que el alumno tiene deficiencias en estos temas durante el aprendizaje de las ecuaciones lineales.</p> <p>Trata de que todos los alumnos tengan los conocimientos previos para el desarrollo del tema.</p> <p>Promueve la argumentación, pero afirma que se centra más en el planteamiento algebraico de los problemas en contexto.</p>	<p>Algunas configuraciones cognitivas presentes en el desarrollo del tema fueron específicamente el aprendizaje de procedimientos o algoritmos para la resolución de ejercicios.</p> <p>Se identifican situaciones típicas de contexto extra-matemático que se centran cognitivamente en el planteamiento de ecuaciones lineales.</p> <p>Los alumnos aplican correctamente algunas técnicas para la solución de ecuaciones lineales, sin embargo, muestran dificultades al momento de resolver las situaciones extra-matemáticas.</p> <p>Los alumnos muestran mecanizaciones y memorización de técnicas para resolver las ecuaciones lineales.</p>
<p>Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones</p>	<p>Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.</p>	<p>Es consciente que son temas que los alumnos ya han estudiado en su nivel de secundaria, sin embargo, menciona que el alumno espera que el profesor de la solución al problema.</p> <p>Espera que los alumnos tengan conocimientos previos de aritmética y expresiones algebraicas, sin embargo, retoma un repaso que ayude a comprender el tema de las</p>	<p>Se presentan dificultades en el alumno al momento de identificar una expresión algebraica, así de cómo resolver una ecuación lineal.</p> <p>Cuando se enfrentan a las situaciones en contexto extra-matemático, los alumnos tienen conflictos en la</p>

		<p>ecuaciones lineales.</p> <p>Considera que existen algunos conflictos de aprendizaje en los alumnos cuando no tienen claro el cómo resolver un problema y esperan que el profesor diga algún procedimiento de resolución.</p> <p>Considera que su aprendizaje de las ecuaciones lineales debe ir más allá de saber que es una ecuación, es decir, saber el significado, saber aplicarlas y utilizarlas para la resolución de problemas.</p> <p>Considera a la matemática una materia importante que se debe impartir, independientemente de los conocimientos que se aporten, pues ayuda al alumno al razonamiento y reflexión.</p>	<p>interpretación de información, así como en el planteamiento de la ecuación.</p> <p>El profesor enfatiza en un procedimiento para la resolución que resulta un conflicto para los estudiantes al seguir este algoritmo.</p> <p>El profesor enfatiza los posibles errores que comenten los alumnos al resolver las ecuaciones lineales.</p>
Evaluación de aprendizajes	<p>Formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).</p>	<p>Aplica dos exámenes para la evaluación, uno “no calendarizado” y otro “calendarizado”, así como participación y tareas, sin embargo, tiende a dar mucho peso a los exámenes escritos y menos al trabajo en clase.</p>	<p>La evaluación de aprendizajes es limitada en el tema, pues el tiempo de estudio fue muy corto y no hubo evaluación escrita.</p> <p>Cognitivamente se muestran niveles bajos del significado personal con relación al objeto de estudio.</p>

Actitudes, emociones, creencias, valores	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).	Considera que los alumnos muestran actitudes apáticas para realizar trabajo colaborativo en el aula de clases. Además, aunque promueve la participación, el alumno no muestra interés o alguna motivación que le permita avanzar en las tareas.	Al iniciar el estudio del tema se muestran actitudes y emociones poco positivas por parte de los alumnos, pues siguen un proceso de repetición y memorización de técnicas para la solución de ecuaciones lineales. Conforme se avanza, los alumnos van mostrando interés y logran tener una participación mayor entre ellos, y se plantean cuestiones que les permite comprender las situaciones de contexto extra-matemático.
---	--	--	---

Tabla 8: Consignas de la faceta cognitiva y afectiva

Con relación a la faceta cognitiva y afectiva podemos destacar que:

- Las practicas matemáticas muestran que no se toma en cuenta conocimientos previos de los estudiantes, únicamente los incorpora si se requiere, aunque es consciente que los alumnos muestran deficiencia con relación a las ecuaciones lineales, sus intentos por lograr un consenso en sus significados son únicamente basándose en aquellos alumnos que dan respuesta a sus cuestionamientos y le permiten seguir con el desarrollo del tema dejando de lado aquellos que muestran poco interés, promoviendo poco el trabajo en equipo. De acuerdo a la entrevista y observación, para él es importante saber utilizar y aplicar las ecuaciones lineales, sin embargo, se limita en el desarrollo de procedimientos algorítmicos.
- Con relación a las idoneidades se rescata que las situaciones propuestas se encuentran en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, sin embargo, no muestra importancia a las argumentaciones en la resolución de las situaciones

propuestas, sólo asume que los alumnos conocen las técnicas de despeje, como: “pasar sumando si está restando” o “pasar dividiendo si está multiplicando” apoyándose de eso para llegar a la solución, ya que los alumnos muestran una interiorización y memorización de las técnicas. Pues en un inicio solo muestra situaciones intramatemáticas limitándose a la reproducción de las técnicas dejando al final una serie de situaciones extramatemáticas que implican un poco más de análisis y aplicación a las ecuaciones lineales, aunque estas no muestren mucho sentido para los estudiantes en un contexto de la vida real.

- Atendiendo a la trayectoria epistémica realizada por el profesor con el tema, al centrarse sólo en los aspectos de carácter algorítmico-algebraico y planteamiento de ecuaciones a partir de una situación, intenta promover el significado institucional de referencia haciendo que los estudiantes asuman como propias las situaciones planteadas, comprometiéndose con la búsqueda una ecuación que represente la situación y posteriormente su solución promoviendo que se involucren en la resolución de problemas de las ecuaciones lineales, mientras que el profesor se esfuerza por responder las dudas y conflictos de los alumnos.
- Con relación a las normas afectivas y cognitivas, la dinámica general mostrada por el profesor, durante la resolución de ecuaciones les da libertad de aplicar las técnicas en el orden que quieran haciendo referencia que siempre llegaran a la misma solución, así como también les hace saber a los alumnos que existen diferentes formas de resolver un problema, pero que en ese momento se tenía que resolver planteando ecuación lineal. En general, señala que lo más importante es seguir paso a paso las sugerencias para el planteamiento de la ecuación lineal, siguiendo el orden y de ser posible repetir el que sea necesario y tener sentido de lo que representa la solución.

Faceta instruccional (interaccional y mediacional)	Consignas	Entrevista	Observaciones de clase
Configuración	Describe la configuración	Se centra en reproducir técnicas de resolución de	La configuración en el desarrollo del tema es la

<p>didáctica:</p> <p>Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido</p>	<p>didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.</p>	<p>ecuaciones lineales y problemas de contexto, sin incluir razonamientos a detalle que expliquen la importancia sobre el estudio del tema.</p> <p>El rol del profesor, se centra prácticamente en el estudio básico de las ecuaciones lineales.</p>	<p>mecanización dentro de una enseñanza tradicional pues, aunque el profesor intenta realizar y promover una interacción con sus alumnos, no logra captar la atención de todos, por tanto, deja de lado aquellos que no logran seguir su ritmo o el paso de aprendizaje.</p>
<p>Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos-alumnos</p> <p>Recursos materiales - tiempo asignado</p>	<p>Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.</p>	<p>Considera que promueve la interacción el trabajo grupal, sin embargo, resalta que en grupos tan numerosos es difícil trabajar así, pues siempre en la interacción existe el alumno que resuelve la tarea.</p> <p>Considera que promueve la participación cuestionándolos, sin embargo, resalta que seguido el alumno no pone de su parte.</p> <p>El tiempo asignado al tema de ecuaciones lineales es de 4 sesiones de 50 minutos, pues considera que el programa es extenso y el tiempo no alcanza para ver todo a detalle.</p> <p>Con respecto a los materiales o recursos para el desarrollo del tema es sólo calculadora, cuaderno lápiz y una serie de problemas en contextos “extra-</p>	<p>La interacción entre profesor y alumnos es muy poca y limitada, centrándose únicamente en aquellos que logran responder sus preguntas en tanto observa que otros alumnos actúan como si no estuvieran en la clase.</p> <p>Por otro lado, la interacción entre alumnos es muy pobre, pues durante el desarrollo del tema de cuatro sesiones los alumnos sólo tuvieron un momento de interacción por equipo, donde se pudo observar un buen desenvolvimiento por parte de ellos.</p>

		matemático”. Al mismo tiempo declara que es un inconveniente utilizar recursos tecnológicos pues su acceso es complicado en la institución.	
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)		La trayectoria didáctica que propone tiene que ver con la solución de ecuaciones lineales, iniciando con la definición y después con la solución.	De las observaciones se puede rescatar que el profesor sigue una serie de pasos para promover la resolución de las ecuaciones lineales.

Tabla 9: Consignas de la faceta interaccional y mediacional

La faceta interaccional y mediacional se pueden relacionar mediante el tipo de interacción que existe entre profesor-alumno y alumno-alumno a partir de los medios o recursos utilizados dentro de un proceso de instrucción, con la intención de provocar un progreso en los procesos de enseñanza y aprendizaje, con relación a la faceta interaccional y mediacional podemos rescatar destacar que:

Las prácticas matemáticas del profesor muestran pocos momentos de trabajo en equipo y grupal, la mayoría de las ocasiones se recurrió al trabajo individual promoviendo la participación de los estudiantes. Una limitación fue que el profesor solo respondía a aquellos que mostraban sus dudas, dejando de lado la progresión de su significado personal de aquellos estudiantes que simplemente asumían lo que el profesor presentaba, dejando de lado el desarrollo de habilidades y actitudes. Sin embargo, un aspecto importante que resalta es que el mayor número de estudiantes complica la interacción con cada uno de ellos, asumiendo que es imposible darles a todos atención.

En lo que respecta a la trayectoria y configuraciones epistémicas, se observa que la falta de recursos mediacionales para el aprendizaje de los alumnos, pues asume que es un se tiene poco acceso a los recursos tecnológicos que ofrece la institución. Los únicos recursos con los que se apoya es con el pizarrón y lista de problemas llevados en el aula, no obstante, esta no se analiza completa, además permite que sus estudiantes utilicen la calculadora para

operaciones de números. Mientras que con respecto al tiempo se centra mayormente en la realización de procedimientos para la resolución de ecuaciones lineales.

En cuanto a las idoneidades interaccional y mediacional el profesor da muestras de un conocimiento didáctico matemático, como promover la participación de los estudiantes en discusiones por equipo y a través de cuestionamientos hechos por él, pero poniendo énfasis en el planteamiento de las ecuaciones lineales a partir de una situación extramatemática, mostrando poca discusión en la argumentación de las técnicas utilizadas para la resolución de las ecuaciones lineales, la participación colectiva se centra en promover el uso de las técnicas al resolver ecuaciones y llevar paso a paso las sugerencias para el planteamiento de las ecuaciones a partir de situaciones extramatematicas.

El uso de recursos mediacionales no muestra impacto, puesto que éstas resultan escasas para el desarrollo de este tema, podríamos decir que el recurso importante que genero dinámica y trabajo grupal fue la lista de situaciones extramatemáticas, y como consecuencia genero más interacción.

En lo que se refiere a las normas, la dinámica seguida es siempre la que el profesor señala, indicando el tipo de ecuación que hay que resolver y el momento en que se tiene que trabajar de manera grupal. Aunque muestra interés de promover la participación colectiva, se sigue el patrón de que el profesor es quien expone las ideas centrales y presenta las formas de proceder a partir de cuestionamientos realizados por él dejando a los estudiantes el papel de receptores de la información presentada. Sus concepciones muestran que en todo momento él tiene que ser el guía sin dejar que los alumnos se problematicen y realicen el mayor trabajo además no hace uso de recursos digitales, ni software matemático.

Faceta ecológica	Consignas	Entrevista	Observaciones de clase
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta	Sigue el programa de la asignatura asignado por la institución, sin embargo, no aborda con profundidad el tema.	Se identifica y aborda el tópico de ecuaciones lineales, relevante en el currículo de bachillerato, específicamente en Matemáticas 1, sin embargo, su estudio no

	(fines, objetivos).		resultó a profundidad.
Conexiones intra-disciplinarias	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.	No muestra aspectos relacionados con las orientaciones interdisciplinarias.	<p>Puesto que el tema de ecuaciones lineales no se estudia a profundidad, solamente se relaciona con el concepto de expresiones algebraicas e identidad algebraica.</p> <p>No se observan conexiones intra-disciplinarias que ayuden a tener una mejor comprensión de las tareas realizadas.</p> <p>Es decir, se realizan tareas o situaciones problema que se encuentran dentro de lo común o cotidiano.</p>
Conexiones inter-disciplinarias	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.	No muestra aspectos relacionados con las orientaciones interdisciplinarias.	El profesor no complementa con conexiones interdisciplinarias que relacionen el objeto matemático ecuaciones lineales en el contexto de otra disciplina. Por tanto, las tareas realizadas son pobres, es decir, se quedan dentro de un contexto cotidiano.
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.	Un factor que resalta e identifica como problemático para el aprendizaje de los alumnos en el curso en general, es que los alumnos se ven limitados en los apoyos por parte de	Los factores de índole social, material, etc. no se identifican dentro de la práctica matemática y didáctica o durante la realización de tareas

		<p>su familia.</p> <p>Plantea que el módulo de aprendizaje no es un buen apoyo para facilitar el tratamiento del tema.</p>	
--	--	--	--

Tabla 10: Consignas de la faceta ecológica

Durante el desarrollo de las ecuaciones lineales, con relación a la faceta ecológica, se rescata que:

Las prácticas del profesor están puestas en desarrollar procedimientos, haciendo uso de técnicas, pues en la trayectoria epistémica existe el interés por aprender a resolver ecuaciones lineales, y posteriormente resolver situaciones de carácter extramatemático, asumiendo que los procedimientos aprendidos los puedan aplicar a partir de estas situaciones, siguiendo la estructura matemática de presentar definición, procedimiento y aplicación. Sin embargo, no se muestra aspectos promovidos con relación a cursos de matemáticas o algunas otras asignaturas del bachillerato.

Con relación a la idoneidad ecológica no hay muestras representativas de situaciones que se relacionen con otros cursos y saberes, dejando en evidencia contextos reales y con sentido para los estudiantes, por tanto, este hecho evita el desarrollo de habilidades y actitudes para enfrentar problemas matemáticos relacionados con otros contextos disciplinares.

En el aspecto normativo es de carácter general pues estas se enfocan en pasar lista al iniciar la clase, la puntualidad, el ceder permisos, entre otros, sin mostrar ninguna discusión significativa sobre la aplicación e importancia de las ecuaciones lineales en la vida cotidiana y otras asignaturas, así como los recursos para resolver este tipo de situaciones.

4.2.4 La caracterización del profesor B

En esta parte hacemos nuevamente uso de la información y análisis de la misma, con respecto al profesor B.

Respecto a la faceta epistémica:

Tanto en la entrevista como en clases el profesor evidencia la necesidad de considerar los conocimientos previos de los estudiantes, como punto de partida de la trayectoria epistémica descrita con anterioridad y que en principio permiten caracterizar su conocimiento común. Los significados de referencia que toma como intervinientes son las expresiones algebraicas generales y los productos notables, definiendo las ecuaciones lineales a partir de igualar una expresión lineal con un valor real determinado y plantear entonces la necesidad de determinar el valor de la incógnita que hace válida la igualdad.

Posteriormente desarrolla actividades fundamentalmente de resolución de ecuaciones lineales, presentadas algebraicamente y estableciendo relaciones superficiales con las representaciones numéricas y geométricas.

Con relación al conocimiento especializado, se observa el uso de dos tipos de problemas, la mayoría de ejercicios de resolución de ecuaciones y otros de diferentes contextos, que podríamos llamar “típicos”, consistentes en promover el paso del lenguaje oral al algebraico. Tales problemas pueden tener o no utilidad práctica, pues en ningún caso se realiza algún análisis al respecto y sólo se promueve el tránsito de un lenguaje a otro, para posteriormente resolver la ecuación resultante.

Se promueve el seguimiento de una serie de pasos mecanizados para resolver las ecuaciones y la única argumentación presentada, sin mayor discusión, es que tales pasos se justifican en las propiedades de los números reales y de las igualdades, como el uso de inversos aditivos y multiplicativos para despejar incógnitas.

En lo referente a su conocimiento ampliado, no se evidencian, ni de la entrevista ni de las clases observadas, mayores esfuerzos por establecer conexiones entre las ecuaciones lineales y otras asignaturas de matemáticas u otras ramas del saber.

Respecto a las facetas cognitiva y afectiva:

El profesor señala en la entrevista que para el tratamiento del tema matemático en cuestión debe tomarse en cuenta los estudiantes tienen deficiencias en el manejo de las expresiones

algebraicas y en la misma resolución de ecuaciones, que es un tema ya estudiado en la escuela secundaria.

En ese sentido, inicia su tratamiento haciendo un “repaso” de los conocimientos previos que juzga esenciales, que son precisamente el reconocimiento de las expresiones algebraicas y, al igualar las expresiones a un valor determinado, llega a una ecuación lineal, procurando que los estudiantes se interesen por resolverlas, lo cual no se logra con la mayoría.

Recurre entonces a fomentar una mayor interacción con ellos, cuestionándolos directamente pero centrándose en las respuestas correctas de los alumnos más participativos. El poco trabajo realizado en equipo, que sólo se promovió en una ocasión, dificulta que los estudiantes se responsabilicen de su propio conocimiento, respondiendo sólo a los cuestionamientos que formula el profesor, lo cual hacen sólo los más participativos.

Dado que el profesor formula situaciones para que los estudiantes transiten del lenguaje verbal al algebraico y resuelvan las ecuaciones que modelan las mismas, paulatinamente logra que más estudiantes se incorporen a la discusión de ideas, formulen propuestas para resolver las situaciones y se interesen en resolver las tareas de forma autónoma. Aunque estos avances son notorios, el tipo de problemas planteados no da pie a una mayor participación de los alumnos, pues la aplicación de los problemas a contextos de interés es poca, congruente con la concepción del profesor planteada en la entrevista en el sentido de que su interés no es la aplicación de los conocimientos en contextos reales, sino en lograr el desarrollo cognitivo de los alumnos al mejorar sus formas de razonamiento.

Respecto a la faceta instruccional (mediacional e interaccional):

El profesor muestra evidencias de la importancia que le da a la interacción entre él y sus alumnos, haciendo exposiciones en las que formula cuestionamientos para motivar la participación de ellos, pero rápidamente se centra en quienes responden, ya sea correctamente o no, para continuar con sus exposiciones.

Al centrarse en los procedimientos algorítmicos de resolución de ecuaciones, usa exclusivamente sus exposiciones y se apoya en el pizarrón para escribir los aspectos centrales de su exposición. Los estudiantes no participan mayormente en la discusión de ideas, transcriben en su cuaderno lo que está escrito en el pizarrón y aplican las reglas algorítmicas presentadas para la solución de ecuaciones.

En la parte final, cuando se presentan situaciones para transitar del lenguaje verbal al algebraico, los propios estudiantes establecen una mayor interacción entre ellos, señalando sus dificultades para modelar algebraicamente lo planteado y posteriormente para resolver las ecuaciones lineales correspondientes. A pesar de las limitaciones que epistémica y cognitivamente representa esta forma de proceder, el profesor logra incrementar la interacción y el progreso de los aprendizajes al menos para la resolución de ecuaciones.

Debe destacarse que el uso de medios digitales, manipulativos y de cualquier otra índole, están ausentes en las prácticas del profesor.

Respecto a la faceta ecológica:

El profesor evidencia su conocimiento del currículo pero se centra sólo en atender la parte de atención al tema matemático en estudio, las ecuaciones lineales.

En esta parte ni siquiera establece relaciones entre las ecuaciones lineales y las funciones lineales, no atiende a las habilidades y actitudes que se considera pertinente que desarrollen los alumnos y de hecho señala explícitamente, que sólo se preocupará por discutir con mayor profundidad con aquellos alumnos que lo busquen fuera de clase.

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

5.1 Introducción

En esta investigación se ha hecho indagación sobre el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor con relación a las ecuaciones lineales, específicamente nos enfocamos en conocer las prácticas desarrolladas dentro del aula con la intención de conocer los conocimientos que poseen los profesores en el desarrollo de las ecuaciones lineales. En este sentido se procedió al diseño de una entrevista semiestructurada y un protocolo de observación, mismos que sirvieron como instrumentos para recabar información, estos instrumentos se basaron en el modelo del CDM del profesor (Godino 2009).

En este capítulo se presenta una síntesis de los resultados obtenidos y analizados, así mismo las conclusiones de la investigación que han permitido dar respuesta a la pregunta de investigación y la descripción del logro y alcance de los objetivos. Por otra parte, reconocer

las limitaciones y aportaciones que se tuvieron en este trabajo. Estas conclusiones se dependen de la descripción, análisis y caracterización lograda de las prácticas matemáticas y didácticas realizadas por el profesor A y profesor B con relación a las ecuaciones lineales.

Para llevar a cabo el análisis de los conocimientos de nuestros sujetos de estudio con relación al tópico antes mencionado utilizamos como referente teórico algunas herramientas del EOS, los cuales nos permitieron tener claridad de los objetos matemáticos que intervinieron durante la práctica realizada de cada profesor y lograr su caracterización. Como nuestro trabajo no pretende generalizar las prácticas matemáticas y didácticas que realizan los profesores de dicho subsistema, se presentan aspectos relevantes que dan indicios de cómo son las prácticas del profesor de matemáticas con relación a las ecuaciones lineales.

5.2 Aspectos a resaltar del trabajo de investigación

Considerando el diseño de los libros de texto por parte del grupo colegiado de Matemática Educativa del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, cabe resaltar la importancia de conocer cuál fue el impacto del módulo de aprendizaje de Matemáticas 1 al ser implementado en el aula, y tener indicios de cómo es el desarrollo de prácticas matemáticas de dos profesores del COBACH, ya que dicho texto fue diseñado bajo el nuevo enfoque por competencias que declara el modelo educativo.

Por tanto, se optó por diseñar instrumentos que nos permitieran recabar la información necesaria para conocer el impacto de los textos, sin embargo, si el caso fuera que no se utilizaban, que era un camino probable, también sirvieran para conocer las prácticas matemáticas y didácticas y como consecuencia caracterizar su Conocimiento Didáctico-Matemático.

Por otra parte, el modelo educativo declara que las prácticas docentes deben ser modificadas e ir más allá de lo tradicional, promoviendo el desarrollo de competencias y a su vez desarrollar las suyas, podemos decir que nuestros sujetos de estudio promovieron el desarrollo de algunas competencias, dejando de lado conexiones interdisciplinarias.

Además, podemos notar que sus prácticas siguen siendo limitadas, pues no se observa una integración de los objetos primarios que se relacionan con la faceta epistémica del modelo

CDM. Sin embargo, podemos resaltar que tanto el profesor A como el profesor B hacen un intento por equilibrar los conocimientos que debe desarrollar dentro del aula de clases, así como cumplir con lo que la institución declara.

Un aspecto fundamental para el logro de este trabajo fue la utilización de las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, ya que el Enfoque Ontosemiótico ayudó para el diseño de instrumentos, la descripción y análisis detallado de las prácticas matemáticas y didácticas tanto del profesor A como del profesor B. Además, queremos resaltar que la observación en el aula resultó necesaria para conocer estas prácticas, con el propósito de caracterizar su CDM.

Para la realización de este trabajo nos planteamos una serie de objetivos que nos han permitido responder apropiadamente nuestra pregunta de investigación, por tanto, el trabajo se ha organizado en dos momentos; la primera en la elección de un modelo teórico que nos permitiera caracterizar los conocimientos puestos en juego en la prácticas de nuestros sujetos de estudio, ya que fue fundamental utilizar estas herramientas teóricas tanto para el diseño de instrumentos como para el análisis de la información; un segundo momento fue la recolección de información a partir de los instrumentos, para posteriormente realizar un análisis de los mismos.

Dado que nuestro interés fue caracterizar el Conocimiento Didáctico-Matemático de dos profesores con relación a las ecuaciones lineales, debíamos tener un punto de referencia de qué conocimientos didácticos matemáticos debían tener nuestros sujetos de estudio, así que se optó por analizar el significado institucional de referencia, el cual fue el programa de estudios de matemáticas 1 y el libro de texto diseñado bajo ese programa y el enfoque por competencias que declara en modelo educativo del nivel medio superior.

5.3 Conclusiones sobre los objetivos específicos

En lo que sigue presentamos las conclusiones que se obtuvieron en nuestra investigación de acuerdo a los análisis realizados y los resultados obtenidos, éstos nos permitieron responder a los objetivos planteados en el Capítulo 1, que a su vez se derivan de nuestra pregunta de investigación:

- **¿Cuál es el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor de bachillerato con relación a las ecuaciones lineales?**

Considerando la pregunta de investigación y los objetivos con relación a las facetas del modelo CDM, el primer objetivo específico se relaciona primordialmente con la faceta epistémica, el cual consiste en:

1. Conclusiones relacionadas con el primer objetivo

Determinar los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional y la distribución de tiempo que se destina a los diversos componentes del contenido, identificando problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos.

Para dar respuesta a este primer objetivo específico se identificaron en la entrevista pocos aspectos de la faceta epistémica, pues con relación a la misma hizo falta considerar elementos que profundizaran sobre ésta. Por tanto, la caracterización que se hace aquí se relaciona fundamentalmente con lo observado durante las sesiones de clases.

Para ubicar los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional, se realizó un análisis del significado institucional de referencia, que fue el programa de estudios propuesto por la DGB y el libro de texto de Matemáticas 1 con enfoque por competencias. Sin embargo, cabe mencionar que, aunque las trayectorias epistémicas de ambos profesores no resultaron las mismas, concluimos que ambos desarrollan prácticas tradicionales, es decir, parten de la definición y propiedades formales de acuerdo a la estructura matemática para posteriormente desarrollar ejercicios donde reproduzcan pasos algorítmicos, dejando de lado la integración de los diferentes tipos de lenguajes, las argumentaciones y situaciones interdisciplinarias.

En general, las trayectorias epistémicas de ambos profesores parten de ubicar sólo dos tipos de objetos matemáticos: los conceptos y los procedimientos, poniendo especial énfasis en que los alumnos aprendan a aplicar los algoritmos en ecuaciones matemáticas ya establecidas, sin mayor relación con situaciones de la vida cotidiana o en el contexto de otras disciplinas de estudio del bachillerato.

Por otra parte, la faceta epistémica se centra en tres tipos de conocimientos, refiriéndose al común en donde solo se centran en resolver tareas sencillas como, por ejemplo: la reproducción de procedimientos de problemas o situaciones particulares. El conocimiento especializado se enfoca en la integración y configuración de objetos primarios, es decir; (situaciones, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), mientras que el ampliado se relaciona con la conexión de posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados. Por lo anterior, podemos decir que para nuestros casos sólo cumplen con el conocimiento común, mientras que en el conocimiento especializado y ampliado sólo muestran un intento.

Ahora bien, dadas las competencias profesionales docentes que los mismos profesores deben desarrollar, esta situación nos conduce a decir que el camino por recorrer es aún muy amplio, pues, desde nuestro punto de vista, para la promoción del desarrollo de competencias se requiere que el profesor dé muestras de tener conocimientos especializados y ampliados que tuvieron poca manifestación tanto en la entrevista como en la observación de sus prácticas.

Así, por ejemplo, al referirnos al conocimiento especializado, se espera que el profesor planea y estructura situaciones en las que se utilicen diferentes representaciones semióticas. Con ello podrá promover, entre otras, las competencias disciplinares de los alumnos que establecen que éste “Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales” e “Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos”.

Similarmente, en el conocimiento ampliado se espera que el profesor proponga generalizaciones de las tareas propuestas y relaciones los conocimientos matemáticos con temas más avanzados, el cual tiene relación directa con las competencias disciplinares establecidas, por ejemplo con las que plantean que el alumno “Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean” y “Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia”.

En el mejor de los casos los profesores dan indicios de que ellos tienen desarrolladas las competencias que se espera de los estudiantes, pero el modelo que empleamos, en el que se conjugan y yuxtaponen los conocimientos matemáticos y didácticos, la realización de tareas con aplicación de procedimientos mecanizados.

2. Conclusiones relacionadas con el segundo objetivo

Observar y describir las acciones por parte del profesor con relación a los estudiantes, con la intención de valorar acciones tomadas en cuenta con respecto a la construcción de significados de sus estudiantes y su progresión de sus aprendizajes.

Esta faceta se refiere a los conocimientos personales de los estudiantes y la progresión de sus aprendizajes, para evidenciar este objetivo específico se observó que en ambos casos no consideran los conocimientos previos de los alumnos y por tanto no muestran evidencias de que las situaciones planteadas se encuentren en la zona de desarrollo próximo de alumno, evitando que muestren la construcción de significados.

Cabe mencionar que durante la observación ambos profesores cuestionaban a sus estudiantes como una técnica de evaluación de sus aprendizajes, a estas preguntas mostraron poca exploración, argumentación y respuestas por parte del alumno. En alguna medida las preguntas formuladas eran parte de la exposición del profesor, más que intentos por valorar las respuestas de los mismos y, en ese sentido, tomar decisiones para impulsarlos a mejorar sus aprendizajes.

3. Conclusiones relacionadas con el tercer objetivo

Identificar y describir acciones del profesor ante las actitudes, emociones, creencias y valores de los alumnos con relación con los objetos matemáticos e identificando acciones y normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio.

Aunque ambos profesores son conscientes de que el aprendizaje de las matemáticas debe ser a través de la resolución de problemas y con atención a contextos extra-matemáticos, se identificaron acciones por parte del profesor que dejan ver su experiencia como docente y sus concepciones sobre la enseñanza de la matemática, que no se corresponden con lo declarado en la entrevista. Así, en concordancia con este tercer objetivo, observamos que el profesor A al inicio intentó crear un ambiente dinámico con la propuesta de una situación extra matemática, promoviendo así la motivación, interés y comunicación con los alumnos, no obstante, mientras avanzaban en el desarrollo del tema los alumnos mostraban apatía por la resolución de problemas ya que sólo se centraron en realizar la repetición de procedimientos.

Una norma que se pudo identificar durante las observaciones fue que el profesor siempre actuó como el expositor, dejando al alumno la tarea de poner atención y limitando con ello su participación más activa. Por otro lado, al inicio del tema, en el caso del profesor B, los alumnos mostraron desinterés y poca participación hacia los cuestionamientos del profesor.

Debe destacarse que ambos profesores coincidieron en que los tiempos resultan muy cortos y que se tienen que ajustar a ellos pues la institución les exige cubrir un currículo extenso, por tanto, se ven en la necesidad de acortar los temas. Ante tal situación, al mismo tiempo intentan hacer un equilibrio con lo que la institución solicita y con lo que deben de enseñar. Si bien es cierto que el planteamiento de los profesores es auténtico, sus decisiones muestran una vez más su concepción tradicional de la enseñanza, pues sus prácticas ponen énfasis en el tratamiento convencional de las matemáticas y ponen poca atención al desarrollo de las competencias que explícitamente se señalan en el currículo y, en general, las exigencias institucionales se orientan en el mismo sentido y al profesor se le exige que cubra los contenidos matemáticos del programa, de forma similar a como se ha hecho durante años.

4. Conclusiones relacionadas con el cuarto objetivo

Describir los recursos mediacionales utilizados en el proceso de estudio, así como la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos por parte del profesor.

Con relación a esta faceta los recursos o medios utilizados durante las prácticas de ambos profesores fueron limitados, pues el profesor A hizo un intento por crear un ambiente dinámico donde partió de una situación extra matemática utilizando material manipulable; calculadora, vasos de plástico, cinta métrica, lápiz y papel creando interés de los alumnos, sin embargo, conforme fueron avanzando en el proceso de instrucción estos recursos dejaron de tener algún interés, volviendo a lo cotidiano y en un contexto puramente intra matemático.

Mientras que en el caso del profesor B no se evidenciaron aspectos relacionados con recursos o medios que ayudaran a una contextualización de las situaciones presentadas, sino más bien sólo planteo conceptos y definiciones pasando posteriormente a la resolución de ejercicios, aplicando procesos algorítmicos y mecanizados. Por tanto, ambas trayectorias con relación a los recursos mediacionales caen dentro de la enseñanza tradicional, donde el profesor reproduce procedimientos y proporciona información, sin darse cuenta qué tan importante es el papel de los medios o recursos para la generación del conocimiento.

5. Conclusiones relacionadas con el quinto objetivo

Conocer patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes, mediante la negociación de significados durante las prácticas matemáticas.

Como respuesta a este objetivo específico podemos decir que un patrón de interacción que se pudo observar en ambos casos, fue que los profesores actuaron como expositores mientras que los alumnos estuvieron en el papel de receptores de información, limitándose únicamente a los estudiantes que avanzaban en el desarrollo del tema, es decir, pasando por alto a alumnos que no se encontraban dentro de la misma interacción o dinámica de trabajo que realizaba el profesor con los alumnos que le permitían avanzar.

Otro aspecto relevante sobre la interacción y negociación de significados durante el desarrollo de las ecuaciones lineales, es que, aunque ambos profesores realizan un intento por provocar una dinámica más activa y de interacción cuestionando a sus estudiantes, algunos, siguen mostrando apatía por las matemáticas y los profesores no realizan mayores esfuerzos por involucrarlos.

6. Conclusiones relacionadas con el sexto objetivo

Describir las relaciones con el entorno político, social, económico que condicionan y soportan el proceso de estudio.

Las actividades de los profesores se limitan a presentar conceptos matemáticos y algoritmos de solución de las ecuaciones lineales, no obstante que en la entrevista señalaron estar conscientes de que el aprendizaje de las matemáticas debe ser a través de la resolución de problemas, con una fuerte dosis de atención a contextos extra-matemáticos, cercanos a las experiencias reales de los estudiantes y su relación con otras asignaturas.

Por tanto, este estudio permitió contrastar la práctica discursiva (entrevista) con la práctica operativa (observación presencial) de acuerdo al análisis de la información, encontrando fuertes inconsistencias entre lo declarado y lo realizado en el salón de clases.

5.4 Conclusiones sobre el objetivo general

Considerando el objetivo general de la investigación planteado en el Capítulo 1, se analizaron los Conocimientos Didáctico Matemáticos del profesor del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH) con relación a las ecuaciones lineales, para posteriormente dar una caracterización de los mismos. Aunque nuestro trabajo no fue un estudio con una muestra amplia, una conclusión general que se desprende de este trabajo de investigación es el surgimiento o la necesidad de modificar las prácticas matemáticas y didácticas, así como el programa de estudios que se implementa en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, pues para los docentes resulta ser una limitación para el progreso o la modificación de sus prácticas matemáticas.

Además, a partir de este trabajo podemos concluir que las prácticas docentes carecen de programas que ayuden a realizar modificaciones sustanciales dentro de la práctica matemática del profesor, para ello los profesores deben estar abiertos a los cambios que se dan en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En este sentido podemos resaltar dos aspectos; que no resulta suficiente los programas de capacitación y actualización de profesores o que es necesario poner atención en partes específicas de su formación docente.

Cabe mencionar que como parte de las conclusiones generales se desprende que la existencia de los módulos de aprendizaje, basados en competencias, no garantiza que el docente realice cambios sustanciales en sus prácticas, ya que lo que entra en juego primordialmente son los conocimientos y las estrategias que implementa el profesor para lograr que los alumnos construyan su conocimiento y doten de significado a los objetos matemáticos que emergen de la actividad realizada. Además, durante la investigación se observaron efectos negativos tanto de parte del profesor como por parte de los estudiantes, ya que se identificaron elementos de apatía por parte de los estudiantes y poca comunicación con los profesores, mientras que por otro lado los profesores tienen muy arraigadas sus concepciones y creencias, que consideran que eso afecta el bajo nivel de sus conocimientos didáctico matemáticos para los procesos de enseñanza y aprendizaje.

5.5 Aportaciones y limitaciones del estudio

Consideramos que este trabajo constituye una aportación relevante y novedosa que permite dar cuenta de los Conocimientos Didáctico Matemáticos de los profesores del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora con relación a la enseñanza de las ecuaciones lineales, auxiliando a la toma de decisiones para la realización y ejecución de acciones para el mejoramiento de la educación en matemáticas.

Una aportación que se desprende de este trabajo es que, aunque no se hizo el estudio de una muestra representativa, este trabajo se puede tomar como base para una futura investigación amplia, así como también el requerimiento de una caracterización del modelo CDM para decir cómo debe ser aquel profesor que desarrolle prácticas matemáticas basadas en competencias.

Además, a partir de lo analizado podemos conjeturar que detrás de esta práctica destacan conocimientos y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, basados en la experiencia docente. Podemos resaltar que ambos profesores declaran sentirse limitados por el tiempo, la extensión del currículo y el número de alumnos a atender, por lo que tienen que ajustarse al contexto institucional. En este sentido, este estudio muestra cómo son las prácticas matemáticas en el Bachillerato y dan un indicio de por qué, aunque no podemos generalizar dado que se trata de estudio de casos.

Una limitación que se consideró en el trabajo de investigación es con relación a los instrumentos de indagación, ya que faltó incorporar tanto en la entrevista semiestructurada como en el protocolo de observación aspectos que profundizaran y arrojaran más información relacionada con la faceta epistémica. A nuestro parecer este trabajo puede servir como base para futuras investigaciones del desarrollo y Conocimiento Didáctico Matemático del profesor.

Asimismo, el análisis que se realizó de las prácticas observadas de nuestros sujetos de estudio se realizó desde una perspectiva ontosemiótica, pues constituye un aporte que ha permitido identificar distintos objetos matemáticos y significados presentes dentro del desarrollo de un tópico específico de las ecuaciones lineales, sirviendo esto como referente para futuros diseños de material didáctico y ayude a promover un alto nivel de la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Por otra parte, una limitación que se tuvo en esta investigación fue el no haber realizado una entrevista posterior a la recopilación de datos y el análisis de los mismos con la intención de conocer las razones del por qué el profesor procedió a realizar durante las clases lo que realizó.

5.6 Investigaciones abiertas

Dado que las investigaciones relacionadas con nuestro estudio son muy escasas, se presentan a continuación algunas opciones de líneas de investigación para desarrollar a futuro.

1. Contrastar este trabajo basado en el modelo del CDM con el modelo educativo de enfoque por competencias.
2. Un aspecto relevante a rescatar a partir de esta información es rediseñar los instrumentos de investigación que ayuden a indagar sobre aspectos que relacionen o involucren aún más a la faceta epistémica, pues de acuerdo con Godino esta faceta involucra conocimientos relacionados con el objeto matemático, así como el conocimiento común, especializado y ampliado del profesor.
3. Ampliar el estudio a una muestra mayor de profesores de educación media superior que ayuden a comparar los resultados con los obtenidos en nuestro estudio, y de esta forma ver si los resultados pueden ser generalizados.
4. Diseñar e implementar un programa de intervención, a partir de los resultados obtenidos en esta investigación, que permita mejorar y desarrollar el conocimiento didáctico-matemático con relación a las ecuaciones lineales para profesores del nivel medio superior.

Referencias

- Arroyo. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, 15-44.
- AUNIES. (2015). *Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior*. Obtenido de <http://www.anuies.mx/programas-y-proyectos/programa-de-formacion-docente-de-educacion-media-superior-profords/diplomado-en-competencias-docentes-del-nivel-medio-superior>
- Ball, Thames, & Phelps. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, p. 389-407.
- Bisquerra. (2004). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid : LA MURALLA, S.A.
- Bojórquez. (2014). Las creencias vs las concepciones de los profesores de matemáticas y sus cambios. *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, p.5.
- Caballero. (2010). Concepciones y enseñanza del concepto ecuación lineal. Un estudio con profesores de Bachillerato. Yucatán, México.
- Casonova, A. (1998). *La Evaluación Educativa*. España: Muralla.

- Chavarría. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia Vol. 28 No. 2*, p. 37.
- Chavarría. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales. El caso de estudiantes de octavo nivel de un Colegio de Heredia. *Uniciencia Vol. 28 N° 2*, p. 37.
- CNSPD. (2015). *Codinación Nacional del Servicio Profesional Docente*. Obtenido de Sistema Nacional de Registro Profesional Docente : www.servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/ms/ingreso/consulta_resultados/
- CNSPD. (2015). *Sistema Nacional de Registro del Servicio Profesional Docente*. Obtenido de http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/ms/ingreso/consulta_resultados/
- Corral. (2014). *Un estudio sobre las prácticas docentes en la matemática del bachillerato* . Hermosillo, Sonora : Tesis de maestría .
- DGB. (2014). *Dirección General de Bachillerato*. México, Df.: Secretaría de Educación Pública.
- Díaz, Mendoza, & Porras. (Abril de 2007). Guía para la elaboración de estudios de casos. *Razon y palabra*, 3-7.
- Garritz, & Trinidad. (2044). *El conocimiento pedagógico del contenido*. Obtenido de Educación Química : http://andoni.garritz.com/documentos/edit_cpc.pdf
- Godino. (2009). Categorías de Análisis de los Conocimientos del Profesor de Matemáticas . *UNION*, 13-31.
- Godino, & Font. (8 de marzo de 2009). *Teoría y metodología de la investigación en la educación matemática*. Obtenido de www.urg.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- Godino, Batanero, & Font. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la intrucción matemática . *The International Journal on Mathematics Education*, 127-135.
- Godino, Batanero, Rivas, & Artega. (2013). *Componente e indicadores de la idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas*. Obtenido de <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nlp46>
- Godino, Contreras, & Font. (2006). Análisis de proceso de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática . *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39-88.
- Godino, Font, & Wilhelmi. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 221-252.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de la educación matemática*, 13-31.

- Godino, J. D., & Font, C. B. (8 de marzo de 2009). *Teoría y metodología de investigación en educación matemática*. Recuperado el 10 de enero de 2015, de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- Godino, Wilhelmi, & Castro, D. (2009). Aproximación de la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias* , 59-76.
- Linares, G. y. (2000). *Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa*. Obtenido de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Luis R. Pino Fant, Font, Godino;. (s.f.). *El conocimiento didáctico matemático de los profesores: pautas para su criterio evaluación y desarrollo* . Obtenido de http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Pino-Fan-et-al.-2014_Extracto-sin-portada.pdf
- Martínez. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*, 165-193.
- Mendoza. (2013). *Seguimiento de Prácticas de Profesores de Matemáticas de Secundaria. Tesis de Maestría* . Hermosillo: Universidad de Sonora.
- Moreno, & Azcárate. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias* , p. 267.
- Perrenoud. (2001). La formación de los docentes en el siglo XXI. *Tecnología Educativa*, 503-523.
- Rodríguez, Navarro, & Martínez. (2013). Competencias docentes, un reto para el nivel medio superior de México. *Consejo de transformación educativa*, p. 3.
- Sampieri, Collado, & Lucio. (2006). *Metodología de la investigación* . México: McGRAW-HILLINTERAMERICANA.
- SEMS. (20 de Junio de 2013). *NORMATIVIDAD ACADÉMICA PARA EL PERSONAL DOCENTE DEL BACHILLERATO GENERAL MODALIDAD ESCOLARIZADA*. Obtenido de Dirección General del Bachillerato: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/otros/FI_Normatividad_Docente.pdf
- SEP. (2008a). *Acuerdo secretarial 447*. México, D.F.: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2008c). *La Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS)*. México: SEP.
- SEP. (2011b). *La Reforma Integral de la Educación Básica*. México.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, p. 1-22.
- Sosa. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. Huelva : Tesis doctoral .

Sosa, & Ribeiro. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de la Producción Académica y Gestión Educativa*, p.4.

Vargas, Morales, & Arroyo. (2009). Competencias Docentes en el Bachillerato. *Colegio de Ciencias y Humanidades para el Bachillerato*, 10-17.

Vargas, R., Rodríguez, M., Del Castillo,A., Villalva,M., Ibarra, S., Grijalva, A., Armenta, M., Ávila, R., Urrea, M., Soto, J., Bravo, J. (2014). Matemáticas 1. Módulo de Aprendizaje. Colegio de Colegios de Bachilleres del Estado de Sonora. México. Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. Centro, S.A. de C.V.

Anexo 1

Datos de Identificación

Nombre del profesor:

Clave: _____

Formación profesional:

Licenciatura: _____ Posgrado:

Si ha tomado cursos relacionados con su actividad docente, escriba los tres últimos:

Años de experiencia docente:

Institución (es) donde labora actualmente:	No. de horas que labora a la semana:
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Nivel educativo que imparte:	Asignatura (s):
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Fecha de entrevista:

Guion de entrevista

I. Concepciones personales y su práctica discursiva:

- 1) ¿Qué conocimientos considera Usted como base para el aprendizaje de las ecuaciones lineales?
- 2) ¿Cómo desarrolla Usted el tema de ecuaciones lineales?
- 3) ¿Qué tiempo asigna al estudio de las ecuaciones lineales?
- 4) ¿Qué tipo de actividades propone para el aprendizaje de las ecuaciones lineales?
- 5) ¿Qué porcentaje de tiempo de la sesión de clase le asigna a:
 - La exposición ante su grupo:
 - Trabajo individual:
 - Trabajo en equipo:
 - Trabajo grupal:
- 6) ¿Promueve Usted la participación de sus alumnos en el aula de clases? ¿Cómo?
- 7) ¿Utiliza usted recursos mediacionales para el estudio de las ecuaciones lineales?
 - ¿Utiliza alguno de los siguientes recursos, con qué finalidad?
 - Módulo de aprendizaje
 - Applets
 - Material didáctico manipulable
 - Calculadora
 - Libros de texto

Actividades didácticas propuestas por usted
Videos, grabaciones, etc.
Software

- 8) ¿Qué tipo de actitudes expresan los alumnos durante el desarrollo del tema?
- 9) ¿Cómo evalúa Usted el aprendizaje de sus alumnos en este tema?
- 10) ¿Cuándo podría Usted decir que un alumno ha aprendido ecuaciones lineales?
- 11) ¿Qué tipo de actividades considera Usted que debería de realizar un alumno para aprender matemáticas?
- 12) ¿Qué tipo de actividades considera Usted que debería de realizar el profesor para enseñar matemáticas?
- 13) ¿Qué son para Usted las matemáticas?

Anexo 2

Protocolo de observación

Clave del profesor: _____

Fecha de Observación: _____

Secuencia didáctica/tema: _____

IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS PRIMARIOS DURANTE LA SECUENCIA DIDÁCTICA/TEMA

Objetos primarios	Observaciones	Frecuencia de uso durante la secuencia didáctica/tema
Situaciones – problemas		

Facetas del CDM	<i>¿Qué pretendo observar?</i>	Observaciones
-----------------	--------------------------------	---------------

Lenguajes V G A N T		
Conceptos – definiciones		
Procedimientos		
Proposiciones		
Argumentos		

Epistémica	<i>¿Cómo inicia el profesor el desarrollo del tema?</i>		
	<i>¿Cómo es el desarrollo del tema durante la secuencia didáctica/sesión?</i>		
	<i>¿Qué contexto predomina en el desarrollo del tema, intra-matemático o extra-matemático?</i>		
	<i>¿Hace uso de diversas representaciones para el desarrollo del tema?</i>	SI	
		NO	
<i>¿Hace uso de las diferentes estrategias para la solución del problema propuesto?</i>	SI		
	NO		
Cognitiva	<i>¿Qué tipo de dificultades muestran los estudiantes al resolver las tareas planteadas por el profesor?</i>		
	<i>¿Los estudiantes hacen uso de la argumentación para justificar sus prácticas matemáticas?</i>	SI	
NO			
Mediacional	<i>¿Qué tipo de recursos mediacionales utiliza el profesor para el desarrollo del tema?</i>		
	<i>¿Con que frecuencia hace uso del recurso mediacional?</i>		

		<i>Individual</i>	<i>Equipo</i>	<i>Grupal</i>	<i>Otros</i>
Interaccional	<i>El profesor fomenta el trabajo:</i>				
	<i>Tiempo que asigna al trabajo:</i>				
	<i>¿Cuánto tiempo asigna a la exposición ante el grupo?</i>				
	<i>¿Cuál es la finalidad de la exposición ante el grupo?</i>				
Afectiva	<i>¿Qué actitudes se presentan por parte de los estudiantes en el desarrollo del tema?</i>				
	<i>¿Qué acciones realiza el profesor para cambiar las actitudes de los estudiantes (actitudes positivas)?</i>				
Ecológica	<i>¿Hace uso de situaciones – problema dentro de su contexto social para el desarrollo del tema?</i>	SI			
		NO			
	<i>¿Con que frecuencia hace uso de este tipo de situaciones problema?</i>				