



UNIVERSIDAD DE SONORA

**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**Teoremas de Extensión Armónica
para Funciones y Distribuciones**

TESIS

que para obtener el grado académico de:

**Maestro en Ciencias
(Matemáticas)**

presenta

Gabriel García Figueroa

Directora de tesis:
Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Hermosillo, Sonora
Septiembre, 2006

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

DA403

.G37

RIL 7.177

© 2006 por Gabriel García Figueira.

RCIA. 700

*A mi esposa, Sandra Elena,
y a mis hijas, Sandra Gabriela y Abril.*

Quiero expresar mi profunda y extensa gratitud a mi maestra y directora de tesis, Dra. Martha Guzmán, por su invaluable interacción en el origen, evolución y progreso de este trabajo, Agradezco sobremedida sus diligentes atenciones, sus observaciones y sugerencias, así como el tiempo y la paciencia que dedicó en ayudarme a corregir mis errores una y otra vez. Mi deuda es grande no sólo por esto, sino por todas y cada una de sus extraordinarias clases. Debo a ella mucho más que la feliz culminación de esta tesis.

Agradezco también, claro está, a toda mi familia. Y *dey* gracias al Creador por todas sus bondades.

Índice general

Preámbulo	vii
1. Funciones Armónicas en el Disco Unitario y Otros Dominios en \mathbb{R}^n	1
1.1. Introducción	1
1.2. Funciones armónicas en el disco unitario	3
1.2.1. El núcleo de Poisson en el disco unitario	6
1.2.2. Solución al problema clásico de Dirichlet en el disco unitario	26
1.2.3. El problema de Dirichlet en versión $L^p(T)$	27
1.2.4. Convergencia no tangencial y comportamiento frontera de integrales de Poisson	30
1.3. Algunos resultados sobre funciones armónicas en dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$	38
1.4. El problema clásico de Dirichlet en bolas de \mathbb{R}^n	47
1.4.1. El problema clásico de Dirichlet en la bola unitaria	47
1.4.2. El núcleo de Poisson en la bola unitaria	48
1.4.3. Solución al problema clásico de Dirichlet en la bola unitaria	51
1.4.4. El problema clásico de Dirichlet en cualquier bola $B_R(x_0)$	53
2. Funciones Armónicas en \mathbb{R}_+^{n+1}	59
2.1. El núcleo de Poisson para \mathbb{R}_+^{n+1}	60
2.2. Solución al problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1}	74
2.3. Funciones subarmónicas	77
2.4. Convergencia no tangencial en \mathbb{R}_+^{n+1}	95
3. Extensiones Armónicas de Distribuciones	101
3.1. Introducción	101
3.1.1. Motivación: un primer encuentro con la teoría de distribuciones	102
3.2. El problema de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} versión distribuciones temperadas	108
3.3. Espacios óptimos para la \mathcal{S} -convolución con el núcleo de Poisson P_1	124
3.4. Extensiones armónicas de distribuciones en $\omega^{n+1}D_{1,1}^s$	132
Apéndices	139
A. La Función Gama	139
B. El Operador Maximal de Hardy-Littlewood	142

C. Soluciones Fundamentales para el Laplaciano	148
D. Estimaciones Útiles	151
Bibliografía	154

Preámbulo

Un problema clásico en Matemáticas el cual involucra funciones armónicas es el bien conocido *problema de Dirichlet*. Se trata de un problema fundamental de valores en la frontera para el Laplaciano, el cual surge con frecuencia en Física y Matemáticas:

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función f definida en su frontera $\partial\Omega$, determinar si existe una función u continua en $\bar{\Omega}$ tal que u sea armónica en Ω y $u = f$ en $\partial\Omega$. Si tal función existe, determinar si es única.

Al parecer, fue Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quien planteó por vez primera este problema en 1840, sin embargo, se dio en llamar a éste “el problema de Dirichlet” en honor al matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien a mediados del s. XIX propuso una solución por medio de un método variacional conocido hoy como el *principio de Dirichlet*. Su “argumento físico” de la existencia de una solución única resulta plausible: cualquier distribución de carga sobre la frontera debe, por las leyes de la electrostática, determinar un potencial eléctrico como solución.

Sin embargo, K. Weierstrass (1815-1897) encontró un error en su argumento y no fue sino hasta 1900 que se publicó una prueba rigurosa de la existencia de una solución por parte de D. Hilbert (1862-1943). Resultó ser que la existencia de una solución depende delicadamente de la suavidad de la frontera y de la *función prescrita* f .

El problema de Dirichlet ha atraído la atención de muchos de los grandes estudiosos del Análisis Matemático y ha motivado gran parte del desarrollo de la teoría de funciones armónicas. El propio problema ha evolucionado y ha adquirido nuevas formas, de modo que se conocen muchas variantes del mismo. Es por eso que nos referiremos al enunciado que presentamos arriba como “el problema clásico de Dirichlet”.

C. Neumann (1832-1925) y H.A. Schwarz (1843-1921) fueron los primeros en considerar el problema clásico de Dirichlet con “métodos modernos”, pero mientras que el enfoque de C. Neumann condujo a la teoría de ecuaciones integrales, ha sido el trabajo de H.A. Schwarz el que más ha influenciado las subsiguientes pruebas del problema de Dirichlet. Contenta ya la idea fundamental de construir clases muy generales de soluciones a partir de soluciones particulares dadas por la *integral de Poisson* para la esfera. Quince o veinte años más tarde, H. Poincaré (1854-1912) hizo grandes contribuciones en este campo, pero fue H. Lebesgue (1875-1941) quien en 1912 dio un gran salto al relacionar ciertos procesos convergentes con la *propiedad del calor medio* que caracteriza a las funciones armónicas.

A lo largo del s. XX el Análisis Armónico se desarrolló extraordinariamente en múltiples direcciones. Nuevas escuelas, como la rusa (Lusin, Menchov, Fatou, Pri-

valor,...), la polaca (Rachjman, Zygmund, Marcinkiewicz...), así como la británica (Hardy, Littlewood, Paley,...) primero y más tarde la norteamericana (Zygmund, Calderón, Stein,...) y la sueca (M. Riesz, Carleson,...) imprimieron una fuerza notable en este terreno que antes era monopolizado por franceses y alemanes.

Por otra parte, con la *teoría de distribuciones*, tal como aparece de forma definitiva con L. Schwartz alrededor de 1950, se abre la posibilidad de utilizar la *transformada de Fourier* en condiciones mucho más amplias que las permitidas hasta entonces. Las distribuciones pusieron de manifiesto el papel central de la *convolución* en el Análisis Armónico y en sus conexiones con las ecuaciones en derivadas parciales.

Contenido

En el presente trabajo, abordaremos el problema de Dirichlet desde su forma más elemental y extendaremos luego nuestro estudio a algunos casos más generales hasta llegar finalmente a la siguiente versión del problema de Dirichlet para distribuciones:

Dada una distribución temperada T en \mathbb{R}^n , encontrar una función armónica u definida en el semiespacio superior \mathbb{R}_+^{n+1} cuyo valor frontera sea justamente T .

El texto consta de tres capítulos como se describe a continuación:

En el Capítulo 1 se caracteriza a la clase de funciones armónicas en el disco unitario que son integrales de Poisson de funciones en $L^p[-\pi, \pi]$, con $1 < p \leq \infty$, o de medidas de Borel en $M[-\pi, \pi]$, y se examina el comportamiento frontera en las topologías correspondientes. Asimismo, se estudia el comportamiento puntual y no tangencial de esta clase de funciones armónicas. Posteriormente, usando resultados clásicos de funciones armónicas en dominios de \mathbb{R}^n , se obtienen caracterizaciones similares a las mencionadas antes, pero para funciones armónicas definidas en la bola arbitraria de \mathbb{R}^n . El análisis del comportamiento frontera en ambos casos conduce de manera natural a la solución del problema clásico de Dirichlet y generalizaciones de éste.

En el Capítulo 2 se extienden los resultados obtenidos previamente al caso del semiespacio superior \mathbb{R}_+^{n+1} . La diferencia principal en esta nueva situación es la falta de acotamiento del dominio. De nueva cuenta, se caracteriza a la clase de funciones armónicas en el semiespacio superior que son integrales de Poisson de funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p \leq \infty$, o de medidas de Borel en $M(\mathbb{R}^n)$, y se examina el comportamiento puntual y no tangencial de esta clase de funciones armónicas. Igual que antes, este estudio permite encontrar soluciones al problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} y generalizaciones de éste.

En el Capítulo 3 se introduce la transformada de Poisson de distribuciones temperadas apropiadas. Puesto que el núcleo de Poisson no puede convolucionarse en el sentido de distribuciones con cualquier distribución arbitraria, se provee primero una definición apropiada de convolución, la llamada \mathcal{S}' -convolución. Posteriormente, se caracteriza a la clase de distribuciones temperadas que admiten \mathcal{S}' -convolución con el núcleo de Poisson para el semiespacio superior. Esta clase de distribuciones resulta ser una versión con peso de la clásica familia de distribuciones integrables $\mathcal{D}'_{L,1}$, a saber, el espacio $\omega^{0+1}\mathcal{D}'_{L,1}$. Provistos con esta familia de distribuciones se prueba que toda

distribución integrable T en \mathbb{R}^n tiene una extensión armónica al semiespacio superior \mathbb{R}_+^{n+1} que es la transformada de Poisson de T en el sentido de la \mathcal{S}' -convolución y cuyo valor en la frontera en la topología de $\omega^{n+1}\mathcal{D}'_{\bar{L}}$ es la distribución T misma. Esto generaliza la situación presentada en el Capítulo 2 y provee soluciones (no únicas) al problema de Dirichlet donde la condición en el borde se entiende en términos de la topología de $\omega^{n+1}\mathcal{D}'_{\bar{L}}$.

Premisas y notación

Nuestro contexto siempre será algún subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y n se referirá siempre a la dimensión. Toda función f debe asumirse como compleja a menos que se especifique lo contrario.

La notación usada en este trabajo es, en general, estándar. Así, por ejemplo, los símbolos C^k , C^∞ , C_c , C_0 , C_c^∞ , L^p , L^∞ , L^p_{loc} , \mathcal{S} , \mathcal{D}' , \mathcal{E}' , \mathcal{S}' , etc., indican a los espacios usuales de distribuciones o funciones definidas en \mathbb{R}^n . El símbolo $|\cdot|$ denota a la norma euclídeana en \mathbb{R}^n , mientras que $\|\cdot\|_p$ denota a la norma en el espacio L^p . Cuando necesitamos enfatizar en qué dominio estamos trabajando, escribimos $C^k(D)$, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|\cdot\|_{L^p(K)}$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, etc. En los dos primeros capítulos, las derivadas parciales son denotadas, como es usual, por $\frac{\partial}{\partial x_i}$. En el Capítulo 3, en el contexto de distribuciones, resulta conveniente usar una notación más compacta; usamos entonces la notación multi-índice. Un multi-índice es una n -ada ordenada de enteros no negativos. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, escribimos $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Con esta notación, las derivadas parciales se denotan por ∂^α o $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Dada una función g denotamos con \tilde{g} a la función $x \mapsto g(-x)$ mientras que, si f es una distribución indicamos con \tilde{f} a la distribución $\varphi \mapsto (f, \tilde{\varphi})$. La transformada de Fourier y la transformada de Fourier inverso las denotamos, respectivamente, por \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} . La letra C denota usualmente a una constante positiva posiblemente diferente en distintas ocasiones. Cuando es importante señalar que la constante depende de uno o más parámetros, lo indicamos agregando subíndices a la constante C , como en C_n , $C_{\alpha,\beta}$, etc. Otras convenciones pertinentes se establecen en su momento en el capítulo o sección correspondiente.

Debido a que los conjuntos *abiertos* y *conexos* juegan un papel importante en el desarrollo de esta teoría, éstos se designan frecuentemente mediante un término especial. Aun cuando su uso no es completamente estándar en la bibliografía, las palabras *región* y *dominio* se usan ampliamente. En este texto, estos términos serán usados como sinónimos de un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n .

Hermosillo, Sonora
Septiembre 2006

GABRIEL GARCIA FIGUEROA

Capítulo 1

Funciones Armónicas en el Disco Unitario y Otros Dominios en \mathbb{R}^n

*Considéname, Señor, esta gracia en la tierra,
penetrar estos dominios,
franquear esta frontera.*

1.1. Introducción

Las funciones armónicas que estudiaremos son siempre funciones definidas en algún dominio Ω del espacio euclideo \mathbb{R}^n . En este capítulo, nos interesaremos, primeramente, por las funciones armónicas en un dominio del plano \mathbb{R}^2 y después pasaremos a regiones más generales. Consideraremos, en especial, el caso en el que el dominio es el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, cuya frontera es el toro $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$, es decir, el círculo unitario; así que estaremos particularmente interesados en estos conjuntos. En este contexto, nos será especialmente útil considerar el siguiente hecho:

Toda función $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ induce otra función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -periódica, tomando $F(t) = f(e^{it})$. Recíprocamente, toda función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -periódica, induce una función $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ mediante $f(e^{it}) = F(t)$.

Haciendo la identificación $f \leftrightarrow F$, podemos pensar en f como en una función definida en \mathbb{R} , 2π -periódica. Más aún, f queda completamente determinada por sus valores $f(e^{it})$ con $t \in [-\pi, \pi]$ (de hecho, basta considerar $t \in [-\pi, \pi)$). En consecuencia, podemos pensar en f como en una función definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Identificaremos a $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$ con $[-\pi, \pi]$ y llamaremos toro de manera indistinta tanto al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ como al intervalo $[-\pi, \pi]$. De hecho, a ambos los denotaremos con la letra T . Resultará siempre clara, por el contexto, a cuál de ellos nos referimos.

Aparecerán también en juego los siguientes espacios de funciones:

$$C(T) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua y } 2\pi\text{-periódica}\},$$

$$L^p(T) = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < \infty\}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(T) = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es esencialmente acotada}\}.$$

Como es usual, a $L^p(T)$ lo dotamos de la norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

y a $L^\infty(T)$, de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in T} |f(x)|.$$

Definición 1.1 Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, una función definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y con valores en los complejos. Decimos que F es armónica en Ω si $F \in C^2(\Omega)$ y satisface la ecuación de Laplace $\Delta F = 0$ en Ω , donde Δ es el operador diferencial Laplaciano:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Las funciones armónicas más simples que no son constantes son las funciones coordenadas x_j ; por ejemplo, $F(x) = x_1$ es armónica. Un ejemplo un poco menos simple, pero también sencillo, es

$$u(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + ix_3.$$

Debido a que el Laplaciano es un operador lineal, las sumas y los múltiplos escalares de funciones armónicas son armónicas.

Para $y \in \mathbb{R}^n$ y u una función en Ω , la y -traslación de u es la función

$$u_y(x) = u(x - y) \quad \text{para } x \in \Omega + y = \{w + y : w \in \Omega\}.$$

Claramente, las traslaciones de funciones armónicas son armónicas.

Para un número positivo r y una función u en Ω , la r -dilatación de u es la función

$$u_r(x) = u(rx) \quad \text{para } x \in \frac{1}{r}\Omega = \left\{ \frac{1}{r}w : w \in \Omega \right\}.$$

Si $u \in C^2(\Omega)$, un cálculo muy sencillo muestra que $\Delta u_r = r^2(\Delta u)_r$ en $\frac{1}{r}\Omega$. En consecuencia, las dilataciones de funciones armónicas son armónicas.

1.2. Funciones armónicas en el disco unitario

Muchos de los tópicos cubiertos por esta tesis tienen su origen en la estrecha relación que guardan entre sí las propiedades de las funciones armónicas o las analíticas en el disco unitario D del plano complejo y el Análisis de Fourier de sus valores frontera en el turo $T = \partial D$. Sin duda, los problemas que surgen en este contexto fueron inicialmente atacados con la ayuda de los poderosos métodos del Análisis Complejo, y ese enfoque es el que seguiremos, en principio, en este capítulo. Aunque tales métodos no resultan muy útiles en situaciones más generales en \mathbb{R}^n , esperamos ganar cierta perspectiva para nuestro trabajo futuro discutiendo primero los problemas en su formulación más simple.

Nuestro primer objetivo será resolver el siguiente caso particular del problema clásico de Dirichlet.

El Problema Clásico de Dirichlet en el Disco: *Dada una función continua f definida en $\partial D = T$ (i.e., 2π -periódica en \mathbb{R}), hallar una función u definida en \bar{D} que sea armónica en D , continua en \bar{D} y tal que $u|_{\partial D} = f$.*

Para tal efecto, estudiaremos algunas de las propiedades que tienen las funciones armónicas en el plano. Usaremos aquí las coordenadas complejas $z = x + iy$, con x, y reales. Existe una relación natural entre funciones armónicas y holomorfas en el plano:

Proposición 1.2 *Toda función holomorfa es armónica.*

Demostración. Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, dada por $F = u + iv$, con u, v funciones reales. Entonces, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

o, equivalentemente, se verifica la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) F = 0.$$

Por otra parte, el operador Laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ puede factorizarse como

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Así,

$$\Delta F = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) F = 0.$$

Por lo tanto, F es armónica. ■

Proposición 1.3 Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω , dada por $F = u + iv$, con u, v funciones reales. Entonces, u, v son armónicas.

Demostración. De la Proposición 1.2, sabemos que

$$\Delta F = 0.$$

Esto es,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) F = 0.$$

Tomando conjugados complejos, obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{F} = 0$$

donde $\bar{F} = u - iv$. Así,

$$\Delta \bar{F} = 0,$$

de modo que \bar{F} también es armónica. Como $u = \frac{F + \bar{F}}{2}$ y $v = \frac{F - \bar{F}}{2i}$, se sigue que u y v son armónicas. ■

Teorema 1.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo del plano complejo y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de clase C^2 en Ω . Entonces, u es armónica si y sólo si existe una función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\operatorname{Re}(F) = u$.

Demostración. Por la Proposición 1.3, ya sabemos que si $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $\operatorname{Re}(F) = u$, entonces u es armónica.

Para probar la recíproca, asumamos que u es armónica. Entonces

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Tomemos $U, V : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad V = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Así,

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Además, puesto que $u \in C^2(\Omega)$, tenemos que $U, V \in C^1(\Omega)$ y, más aún,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

de modo que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para U y V . Luego, la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $g = U + iV$, es holomorfa en Ω .

Por el teorema de existencia de antiderivadas en una región simplemente conexa (ver por ejemplo, [17] p. 153), se sigue que existe una función $G: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en Ω y tal que $G' = g$ en Ω . Es decir, la derivada (en el sentido complejo) de G en Ω es justamente g . Digamos que

$$G = T + iW$$

con T, W funciones reales. Entonces,

$$\frac{\partial T}{\partial x} - i \frac{\partial T}{\partial y} = G' = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

en Ω . Luego,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

en Ω . Se sigue que

$$T = u + c$$

para alguna constante $c \in \mathbb{C}$.

Tomemos $f = u + iW$. Así, $f = (T - c) + iW = G - c$ es holomorfa en Ω . Y $\operatorname{Re}(f) = u$. ■

Proposición 1.5 *Sea u una función armónica a valores reales definida en un disco $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, donde $R > 0$. Entonces, u tiene una representación en serie de la forma*

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \quad (1.1)$$

con $0 \leq r < R$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$, y esta serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0, R)$.

Demostración. Por el Teorema 1.4, existe $F: D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\operatorname{Re}(F) = u$. Sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

la representación en serie de potencias de F (i.e., la serie de Taylor de F alrededor de 0), para $z \in D(0, R)$. Por el teorema de convergencia de series de potencias (ver [17] pp. 228-229), sabemos que esta serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0, R)$.

Usando la forma polar $z = re^{i\theta}$, con $r = |z|$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$, tenemos

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\theta}$$

con $0 \leq r < R$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Luego,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{F(re^{i\theta}) + \overline{F(re^{i\theta})}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} r^k e^{-ik\theta} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}$$

donde

$$a_k = \begin{cases} \frac{\overline{c_k}}{2} & \text{si } k < 0 \\ \frac{1}{2}(c_k + \overline{c_0}) = \operatorname{Re}(c_k) & \text{si } k = 0 \\ \frac{c_k}{2} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

y donde $0 \leq r < R$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Además, la convergencia de esta serie es uniforme en subconjuntos compactos de $D(0, R)$, por ser la suma de dos series de potencias que convergen uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0, R)$. ■

1.2.1. El núcleo de Poisson en el disco unitario

En la Proposición 1.5, obsérvese que si $R > 1$ entonces la representación en serie de u dada en (1.1) vale, en particular, para $r = 1$ (i.e., para los puntos del disco $D(0, R)$ que se encuentran sobre el círculo unitario, cuya forma polar es $z = e^{i\theta}$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$). Así,

$$u(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$$

con $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Resulta, entonces, que los términos a_k son los coeficientes de Fourier de la función $\varphi(t) = u(e^{it})$. En efecto, para cada $k \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} u(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{int} dt \quad \left(\text{por la convergencia} \right. \\ & \quad \left. \text{uniforme de la serie} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt \\ &= a_k. \end{aligned}$$

de modo que, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} u(e^{it}) dt. \quad (1.2)$$

Sustituyendo (1.2) en (1.1), obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} u(e^{it}) dt \right) r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Pero, esto es lo mismo que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right) u(e^{it}) dt, \quad (1.3)$$

siempre y cuando $0 \leq r < 1$ (pues en tal caso, la serie converge uniformemente).

Ahora bien, consideremos la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta},$$

la cual converge uniformemente, siempre que $0 \leq r < 1$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ik\theta} \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z} \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1+z}{2(1-z)} \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{2|1-z|^2} \right] \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Definición 1.6 Para $0 \leq r < 1$, la función $P_r: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t}, \quad \text{para } t \in [-\pi, \pi],$$

se llama núcleo de Poisson para el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

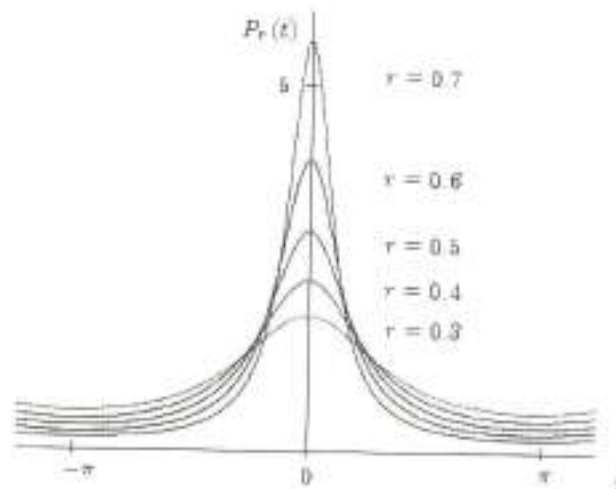


Figura 1.1: El núcleo de Poisson en D para algunos valores de r .

Obsérvese que, para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$, se tiene

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta - t)}. \quad (1.5)$$

Sustituyendo (1.5) en (1.3), obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt. \quad (1.6)$$

Hasta aquí, habíamos asumido que u era una función armónica a valores reales en $D(0, R)$ con $R > 1$. Sin embargo, nótese que la ecuación (1.6) vale incluso si u toma valores en los complejos, pues en tal caso, basta descomponer a u en sus partes real e imaginaria y aplicar a cada una de ellas el caso real. Establezcamos, así, el siguiente resultado:

Proposición 1.7 (Representación de Poisson en discos de radio > 1) Sea u una función armónica definida en un disco $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, donde $R > 1$. Entonces,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt \quad (1.7)$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

La expresión (1.7) no es otra cosa que la convolución del núcleo de Poisson P_r con la función $\varphi(t) = u(e^{it})$ en el toro $T = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ (el cual identificamos con el intervalo $[-\pi, \pi]$). Esto es,

$$u(re^{i\theta}) = (P_r * \varphi)(\theta). \quad (1.8)$$

A esta expresión se lo conoce como la *integral de Poisson* de φ y es una pieza clave para la solución del problema clásico de Dirichlet en el disco. También se dice que u es la *representación de Poisson* de φ y suele abreviarse como $u = P(\varphi)$.

La siguiente definición generaliza este concepto.

Definición 1.8 Sea f una función definida en el toro T . Para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$, diremos que la *convolución*

$$(P_r * f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt$$

es la *integral de Poisson* de f o la *representación de Poisson* de f , y la denotaremos $P(f)$.

Recordemos que, dada una función continua f definida en el toro $T = \partial D$, el problema clásico de Dirichlet en el disco nos pide hallar una función u definida en \bar{D} que sea armónica en D , continua en \bar{D} y tal que $u|_{\partial D} = f$. Por lo expuesto hasta aquí, un candidato natural es la integral de Poisson de f . Más adelante probaremos que, en efecto, $u = P(f)$ es una solución al problema clásico de Dirichlet en el disco y, más aún, demostraremos que dicha solución es única.

Pero antes, vamos a probar algunas propiedades importantes que tiene el núcleo de Poisson y que nos serán de gran utilidad en nuestro propósito.

Lema 1.9 El núcleo de Poisson, $P_r(t)$, tiene las siguientes propiedades:

- (i) Para cada $r \in [0, 1)$ fijo, $P_r(t)$ es una función continua en el toro $T = [-\pi, \pi]$, 2π -periódica, par y positiva.
- (ii) Para cada $r \in [0, 1)$ fijo, se verifica $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$.
- (iii) $P_r(t) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 1$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \forall \delta \in (0, \pi)$.
- (iv) $P_r(t)$, vista como función de re^{it} , es armónica en D .

Demostración.

- (i) Dados $r \in [0, 1)$ y $t \in [-\pi, \pi]$, tenemos $2r \cos t \leq 2r$. O bien,

$$-2r \cos t \geq -2r.$$

Luego,

$$1 + r^2 - 2r \cos t \geq 1 + r^2 - 2r.$$

Así,

$$1 + r^2 - 2r \cos t \geq (1 - r)^2 > 0,$$

de modo que el denominador de $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t}$ nunca se anula. Por tanto, $P_r(t)$ es continuo en el toro $T = [-\pi, \pi]$.

De hecho, vemos que el denominador de $P_r(t)$ es positivo. Por otra parte, también

$$1 - r^2 > 0$$

ya que $r \in [0, 1)$. En consecuencia,

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t} > 0.$$

Además, dado que la función coseno es par y 2π -periódica, es claro que

$$P_r(-t) = P_r(t) \quad \text{y} \quad P_r(t + 2k\pi) = P_r(t) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Dado $r \in [0, 1)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|k|}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt \quad (\text{por la convergencia} \\ &\quad \text{uniforme de la serie}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1. \end{aligned}$$

(iii) Sea $\delta \in (0, \pi)$ y sea $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Entonces, $\delta \leq |t| \leq \pi$, de modo que

$$\begin{aligned} \cos t = \cos |t| &\leq \cos \delta \\ \Rightarrow 1 - \cos t &\geq 1 - \cos \delta. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 + r^2 - 2r \cos t &= (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos t) \\ &> 2r(1 - \cos \delta). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$0 < P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t} < \frac{1-r^2}{2r(1-\cos \delta)}.$$

Así,

$$\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} P_r(t) \leq \frac{1-r^2}{2r(1-\cos \delta)} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0.$$

Por tanto, $P_r(t) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 1$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \forall \delta \in (0, \pi)$.

(iv) Tenemos, de acuerdo con (1.4), que

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k z^k \right], \quad \text{para } z = re^{it},$$

y la serie converge uniformemente, siempre que $0 \leq r < 1$. Así que $P_r(t)$ es la parte real de una función holomorfa en D , pues toda serie de potencias es holomorfa en el interior de su círculo de convergencia ([17] p. 230). Por el Teorema 1.4, concluimos que $P_r(t)$ es armónico en D . ■

A continuación, mostraremos que la representación de Poisson de $\varphi(t) = u(re^{it})$ obtenida en la Proposición 1.7, es decir

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \varphi(t) dt = (P_r * \varphi)(\theta),$$

sigue siendo válida para una clase mucho más amplia de funciones definidas en el toro.

Teorema 1.10 Sea u una función armónica en el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tal que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt < \infty, \quad (1.9)$$

para algún $1 < p < \infty$. Entonces, existe una función $f \in L^p(T)$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt \equiv (P_r * f)(\theta)$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

(Es decir, u es la representación de Poisson de alguna función $f \in L^p(T)$).

Demostración. Sea $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos tal que $r_n \uparrow 1$ (i.e., r_n converge a 1 en forma creciente). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$f_n(t) = u(r_n e^{it}) \quad \text{para } t \in [-\pi, \pi].$$

Por hipótesis, existe $K > 0$ tal que

$$\|f_n\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(r_n e^{it})|^p dt \leq K < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$f_n \in B \equiv \left\{ g \in L^p(T) : \|g\|_p \leq K^{\frac{1}{p}} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en la bola cerrada B del espacio $L^p(T)$.

Pero, $L^p(T)$ es el dual de $L^q(T)$, donde q es el exponente conjugado de p (esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$); o más exactamente, $L^p(T)$ es isomorfo a $L^q(T)^*$ (ver [11] p. 190). De hecho, por el Teorema de Representación de Riesz para espacios L^p (ver [20] pp. 284-286), los espacios $L^p(T)$ y $L^q(T)^*$ son isométricamente isomorfos bajo la función

$$L^p(T) \rightarrow L^q(T)^*, g \mapsto \Lambda_g$$

con Λ_g definida por

$$\Lambda_g(h) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)g(t) dt \quad \forall h \in L^q(T).$$

Como $L^p(T) \cong L^q(T)^*$, el Teorema de Banach-Alaoglu ([21] pp. 68-69) nos asegura entonces que la bola cerrada B es compacta en $L^p(T)$ con la topología débil-*, y, como además, $L^q(T)$ es separable, se sigue que B es metrizable en la topología débil-* (ver [21], teo. 3.16, p. 70).

Tenemos, pues, que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se encuentra en la bola B compacta y metrizable en la topología débil-* del espacio $L^p(T)$. En consecuencia, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posee una subsecuencia convergente en B con la topología débil-*, la cual denotaremos del mismo modo para aligerar la notación. Así, existe $f \in B \subset L^p(T)$ tal que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{en la topología débil-* de } L^p(T) \cong L^q(T)^*.$$

Esto es,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) f(t) dt \quad \forall h \in L^q(T).$$

Por otra parte, por el Lema 1.9(i), sabemos que $P_r(\theta - t)$, con θ fija, es una función continua en el toro $T = [-\pi, \pi]$. Por lo tanto, $P_r(\theta - t) \in L^q(T)$, pues $C(T) \subset L^q(T)$. En consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la dilatación $u_n(z) = u(r_n z)$ para $z \in D(0, \frac{1}{r_n})$. Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n es armónica en $D(0, \frac{1}{r_n})$ y $\frac{1}{r_n} > 1$. Por la representación de Poisson en discos de radio > 1 (Proposición 1.7), tenemos

$$u_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u_n(e^{it}) dt$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Es decir,

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(r_n e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_n(t) dt \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Haciendo a n tender a ∞ , obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt \equiv (P_r * f)(\theta)$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. ■

En síntesis, este teorema nos dice que si u es armónica en D y está uniformemente en $L^p(T)$, con $1 < p < \infty$, entonces $u = P(f)$ para alguna función $f \in L^p(T)$.

De manera natural surgen las siguientes preguntas: ¿será también cierto que $u = P(f)$ para alguna función $f \in L^1(T)$ cuando u cumple la condición (1.9) con $p = 1$? y, por otra parte, ¿existirá un resultado análogo para $p = \infty$? La respuesta es afirmativa para $p = \infty$, modificando apropiadamente la condición (1.9), lo cual haremos en el siguiente teorema. El caso $p = 1$ lo analizaremos después de éste.

Teorema 1.11. Sea u una función armónica en el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tal que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_{\infty} < \infty, \quad (1.10)$$

donde $u_r(t) = u(re^{it})$. Entonces, existe una función $f \in L^{\infty}(T)$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt = (P_r * f)(\theta)$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

(Es decir, u es la representación de Poisson de alguna función $f \in L^{\infty}(T)$).

Demostración. La prueba es esencialmente la misma que la del Teorema 1.10:

Sea $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos tal que $r_n \uparrow 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$f_n(t) = u(r_n e^{it}) = u_{r_n}(t) \quad \text{para } t \in [-\pi, \pi].$$

Por hipótesis, existe $K > 0$ tal que

$$\|f_n\|_{\infty} = \|u_{r_n}\|_{\infty} \leq \sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_{\infty} \leq K < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$f_n \in B = \{g \in L^{\infty}(T) : \|g\|_{\infty} \leq K\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ se encuentra en la bola cerrada B del espacio $L^{\infty}(T)$.

Pero, $L^{\infty}(T)$ es el dual de $L^1(T)$ ([11] p. 190) y $L^1(T)$ es separable. Por el mismo argumento usado en la demostración del Teorema 1.10, se sigue el resultado. ■

Observación 1.12 En las demostraciones de los Teoremas 1.10 y 1.11 hemos usado el hecho de que, para $1 < p \leq \infty$ y q el exponente conjugado de p , se tiene que $L^p(\mathcal{T})$ es el dual de $L^q(\mathcal{T})$. Sin embargo, en el caso $p = 1$, sucede que $L^1(\mathcal{T})$ no es un espacio dual, debido a que $L^1(\mathcal{T})$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodým y todo espacio dual separable debe tener esta propiedad (consultar [9], pp. 79-81).

En vista de lo anterior, no podemos aplicar el argumento usado en la demostración del Teorema 1.10 al caso $p = 1$. Para solventar esta situación, haremos lo siguiente:

Consideremos el espacio $M(\mathcal{T})$ formado por las medidas de Borel complejas en \mathcal{T} con la norma

$$\|\mu\| \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t) = \frac{1}{2\pi} |\mu|(\mathcal{T}),$$

donde $|\mu|$ denota la variación total de μ . [Dada $\mu \in M(\mathcal{T})$, la función conjuntista $|\mu|$ es también una medida, definida en la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ como

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{\{E_i\}_{i=1}^{\infty}} |\mu(E_i)|, \quad \text{para } E \in \mathcal{B}(\mathcal{T}),$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones $\{E_i\}$ de E (ver [22], Capítulo 6, pp. 124-126)].

Se sabe que $M(\mathcal{T})$ es isomorfo a $C(\mathcal{T})^*$, donde $C(\mathcal{T})$ es el espacio de funciones continuas en $\mathcal{T} = [-\pi, \pi]$, 2π -periódicas. De hecho, por el Teorema de Representación de Riesz-Markov ([11], p. 223), los espacios $M(\mathcal{T})$ y $C(\mathcal{T})^*$ son isométricamente isomorfos bajo la función

$$M(\mathcal{T}) \rightarrow C(\mathcal{T})^*, \quad \mu \mapsto \Lambda_{\mu}$$

con Λ_{μ} definida por

$$\Lambda_{\mu}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} h d\mu \quad \forall h \in C(\mathcal{T}).$$

Por otra parte, por el Teorema de Radon-Nikodým ([22], teo. 6.9, pp. 129-131), tenemos que $L^1(\mathcal{T}) \hookrightarrow M(\mathcal{T})$ (i.e., $L^1(\mathcal{T})$ está continuamente incluido en $M(\mathcal{T})$), bajo la función $f \mapsto \mu_f$ con μ_f definida por

$$\mu_f(E) = \int_E f(t) dt \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathcal{T}),$$

de modo que $d\mu_f(t) = f(t) dt$.

Se puede demostrar que

$$|\mu_f|(E) = \int_E |f(t)| dt \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathcal{T}),$$

(ver [23], teo. 6.13, p.134) y, por tanto,

$$\|\mu_f\| = \frac{1}{2\pi} |\mu_f|(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

Esto nos permitirá probar el siguiente resultado análogo a los Teoremas 1.10 y 1.11.

Teorema 1.13 *Sea u una función armónica en el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ tal que*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})| dt < \infty. \quad (1.11)$$

Entonces, existe una medida de Borel μ en T tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) \equiv (P_r * \mu)(\theta)$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Demostración. De nuevo, la prueba es similar a la del Teorema 1.10:

Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos tal que $r_n \uparrow 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$f_n(t) = u(r_n e^{it}) \quad \text{para } t \in [-\pi, \pi]$$

y sea $\mu_{f_n} \in M(T)$ definida por

$$\mu_{f_n}(E) = \int_E f_n(t) dt \quad \forall E \in \mathcal{B}(T).$$

Por hipótesis, existe $K > 0$ tal que

$$\|\mu_{f_n}\| = \|f_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(r_n e^{it})| dt \leq K < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$\mu_{f_n} \in B = \{\lambda \in M(T) : \|\lambda\| \leq K\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, $\{\mu_{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$ se encuentra en la bola cerrada B del espacio $M(T)$.

Como $M(T) \cong C(T)^*$, el Teorema de Banach-Alaoglu ([21] pp. 68-69) nos asegura que la bola cerrada B es compacta en $M(T)$ con la topología débil-*. Y, como además, $C(T)$ es separable (porque los polinomios con coeficientes racionales son densos en $C(T)$ de acuerdo con el teorema de aproximación de Weierstrass ([23] pp. 131-132)), se sigue que B es metrizable en la topología débil-* (ver [21], teo. 3.16, p. 70).

Tenemos, pues, que la sucesión $\{\mu_{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$ se encuentra en la bola B compacta y metrizable en la topología débil-* del espacio $M(T)$. Por lo tanto, $\{\mu_{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$ posee una

subsucesión convergente en B con la topología débil-*, la cual denotaremos del mismo modo para aligerar la notación. Así, existe $\rho \in B \subset M(T)$ tal que

$$\rho_{j_n} \rightarrow \rho \quad \text{en la topología débil-}^* \text{ de } M(T) \cong C(T)^*.$$

Esto es,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) d\rho_{j_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) d\rho(t) \quad \forall g \in C(T).$$

o sea,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) d\rho(t) \quad \forall g \in C(T).$$

Por otra parte, por el Lema 1.9(1), sabemos que $P_r(\theta - t)$, con θ fija, es una función continua en el toro $T = [-\pi, \pi]$ y 2π -periódica; es decir, $P_r(\theta - t) \in C(T)$. En consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\rho(t).$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la dilatación $u_n(z) = u(r_n z)$ para $z \in D\left(0, \frac{1}{r_n}\right)$. Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n es armónica en $D\left(0, \frac{1}{r_n}\right)$ y $\frac{1}{r_n} > 1$. Por la representación de Poisson en discos de radio > 1 (Proposición 1.7), tenemos

$$u_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u_n(e^{it}) dt$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Es decir,

$$\begin{aligned} u(r_n r e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(r_n e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_n(t) dt \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Haciendo a n tender a ∞ , obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\rho(t) = \langle P_r * \rho \rangle(\theta)$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. ■

Definición 1.14 Sea μ una medida de Borel definida en el toro T . Diremos que la convolución

$$\langle P_r * \mu \rangle(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

es la integral de Poisson de μ o la representación de Poisson de μ , y la denotaremos $P(\mu)$. También es usual referirse a ésta como la integral de Poisson-Stieltjes de μ .

En síntesis, el Teorema 1.13 nos dice que si u es armónica D y cumple la condición (1.11), entonces $u = P(\mu)$ para alguna medida $\mu \in M(T)$.

Proposición 1.15 Si $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica y positiva, i.e., $u \geq 0$, entonces existe una medida positiva $\mu \in M(T)$ tal que u es la integral de Poisson de μ ; esto es,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) = (P_r * \mu)(\theta)$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

(El término 'positiva' se usa aquí en el sentido de 'no negativa'.)

Demostración. Sea $r \in (0, 1)$ y definamos la dilatación $u_r(z) = u(rz)$ para $z = \rho e^{i\theta} \in D(0, \frac{1}{r})$. Nótese que u_r es armónica en $D(0, \frac{1}{r})$ y $\frac{1}{r} > 1$. Por la representación de Poisson en discos de radio > 1 (Proposición 1.7), tenemos

$$u_r(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta - t) u_r(e^{it}) dt$$

para $0 \leq \rho < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Es decir,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta - t) u(re^{it}) dt$$

para $0 \leq \rho < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. En particular, con $\rho = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_0(\theta - t) u(re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})| dt \end{aligned}$$

y esto vale para cualquier $r \in (0, 1)$. Por otra parte, para $r = 0$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(0) dt = u(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = u(0).$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})| dt = u(0) \quad \forall r \in [0, 1].$$

Luego,

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})| dt = u(0) < \infty.$$

Por el Teorema 1.13, se sigue que existe $\mu \in M(T)$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) = (P_r * \mu)(\theta)$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Además, dado que $u \geq 0$ y $P_r > 0$, concluimos que $\mu \geq 0$. ■

Nuestro siguiente objetivo es establecer resultados recíprocos para los Teoremas 1.10, 1.11 y 1.13. Con esto, habremos caracterizado a la clase de funciones armónicas en el disco unitario que son integrales de Poisson de funciones en $L^p(T)$, con $1 < p \leq \infty$, o integrales de Poisson de medidas de Borel en $M(T)$. Para ello, introducimos el siguiente concepto.

Definición 1.16 Una identidad aproximada en el toro $T = [-\pi, \pi]$ es una familia de funciones $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ donde I es un conjunto dirigido y la familia satisface:

- (i) Para cada $\alpha \in I$, se tiene $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\alpha(t) dt = 1$.
- (ii) $\exists K > 0$ tal que $\sup_{\alpha \in I} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\alpha(t)| dt = K < \infty$.
- (iii) $\forall \delta \in (0, \pi)$, se verifica $\int_{\theta \leq t \leq \pi} |\varphi_\alpha(t)| dt \rightarrow 0$ cuando α "crece" en el conjunto dirigido I .

Lema 1.17 La familia $\{P_r\}_{0 \leq r < 1}$ es una identidad aproximada en T .

Demostración. Esencialmente, todo está hecho:

- (i) En el Lema 1.9 probamos ya que para cada $r \in [0, 1)$, se verifica

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1.$$

- (ii) Por el mismo Lema 1.9, sabemos que $P_r(t) > 0 \quad \forall r \in [0, 1)$. Por tanto,

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t)| dt = \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1 < \infty.$$

- (iii) Y también por el Lema 1.9, sabemos que $P_r(t) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 1$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \quad \forall \delta \in (0, \pi]$. Así,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\theta \leq t \leq \pi} |P_r(t)| dt = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\theta \leq t \leq \pi} P_r(t) dt = \int_{\theta \leq t \leq \pi} \lim_{r \rightarrow 1} P_r(t) dt = 0.$$

■

Teorema 1.18 Sea $f \in L^p(T)$, con $1 \leq p \leq \infty$, y sea u la integral de Poisson de f , esto es,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt = (P_r * f)(\theta),$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Entonces, u es armónica en el disco unitario D . Además,

(a) si $1 \leq p < \infty$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \quad \forall r \in [0, 1];$$

(b) si $p = \infty$ se tiene

$$|u(z)| \leq \|f\|_{\infty} \quad \forall z \in D.$$

Demostración. Veamos que u es armónica en el disco D :

Consideremos primero el caso en que f toma sólo valores reales. Tenemos que

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right) f(t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|k|} e^{ik\theta}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik t} f(t) dt \quad \left(\text{por la convergencia} \right. \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \quad \left. \text{uniforme de la serie} \right) \end{aligned}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik t} f(t) dt = \hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En particular,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \in \mathbb{R}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{-k}} r^k e^{-ik\theta} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} r^k e^{ik\theta} \\ &= \operatorname{Re} \left(a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} \right). \end{aligned}$$

Esto muestra que, para $z = re^{i\theta}$, se tiene

$$u(z) = \operatorname{Re} \left(a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right)$$

donde la función $a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ es holomorfa en D , ya que toda serie de potencias es holomorfa en el interior de su círculo de convergencia ([17], p. 230).

Por el Teorema 1.A, concluimos que u es armónica.

Consideremos ahora el caso en que f toma valores en \mathbb{C} , entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \operatorname{Re} f(t) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \operatorname{Im} f(t) dt \\ &= v(re^{i\theta}) + iw(re^{i\theta}) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} v(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \operatorname{Re} f(t) dt \quad y \\ w(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \operatorname{Im} f(t) dt. \end{aligned}$$

Dado que $\operatorname{Re} f(t)$ e $\operatorname{Im} f(t)$ son funciones reales, tenemos, por el caso anterior, que v, w son armónicas. En consecuencia, u es armónica.

Pasemos, ahora, a la siguiente parte del teorema. Por hipótesis, tenemos

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) f(\theta-t) dt. \end{aligned}$$

Luego:

(a) Si $f \in L^p(T)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces, por la desigualdad de Minkowski para integrales ([11], p. 194), tenemos

$$\begin{aligned} \|u(re^{i\theta})\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) \|f(\cdot - t)\|_p dt \\ &= \|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt \\ &= \|f\|_p. \end{aligned}$$

(El punto \cdot se usa para indicar a la variable con respecto a la cual se toma la norma).

(b) Por otra parte, si $f \in L^\infty(T)$, entonces

$$\begin{aligned} |u(re^{i\theta})| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) |f(\theta-t)| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.19 Sea $\mu \in M(\mathbb{T})$ y sea u la integral de Poisson de μ ; esto es,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) = (P_r * \mu)(\theta),$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Entonces, u es armónica en el disco unitario D y

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t) \quad \forall r \in [0, 1).$$

Demostración. La prueba es análogo a la del teorema anterior. Veamos que u es armónica en el disco D :

Consideremos primero el caso en que μ toma sólo valores reales. Tenemos que

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right) d\mu(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|k|} e^{ik\theta}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} d\mu(t) \quad (\text{por la convergencia uniforme de la serie}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \end{aligned}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} d\mu(t) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En particular,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) \in \mathbb{R}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{-k}} r^k e^{-ik\theta} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} \\ &= \operatorname{Re} \left(a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} \right). \end{aligned}$$

Por el mismo argumento de antes, concluimos que u es armónica.

Consideremos ahora el caso en que μ toma valores en \mathbb{C} , entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d[\operatorname{Re} \mu(t)] + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d[\operatorname{Im} \mu(t)] \\ &= v(re^{i\theta}) + iw(re^{i\theta}) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}v\left(re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d[\operatorname{Re} \mu(t)] \quad \text{y} \\w\left(re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d[\operatorname{Im} \mu(t)].\end{aligned}$$

Dado que $\operatorname{Re} \mu(t)$ e $\operatorname{Im} \mu(t)$ son medidas reales, tenemos, por el caso anterior, que v, w son armónicas. En consecuencia, u es armónica.

Pasemos, ahora, a la siguiente parte del teorema. Por hipótesis, tenemos

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t).$$

Luego, por el Teorema de Fubini y por la propiedad (ii) del núcleo de Poisson (Lema 1.9(ii)), tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |u\left(re^{i\theta}\right)| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d|\mu|(t) \right] d\theta \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d\theta \right] d|\mu|(t) = \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t) \quad \forall r \in]0, 1[.\end{aligned}$$

■

Examinaremos ahora el comportamiento frontera de las integrales de Poisson. Esto nos permitirá resolver el problema clásico de Dirichlet en D y algunas variantes del mismo por medio de integrales de Poisson. También adquiriremos una mejor noción de cómo u determina a f en los Teoremas 1.10 y 1.11 o a μ en el Teorema 1.13.

Teorema 1.20 Sea $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ una identidad aproximada en el toro T .

- (a) Si $f \in L^p(T)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $f * \varphi_\alpha \rightarrow f$ en $L^p(T)$.
 (b) Si $f \in C(T)$ entonces $f * \varphi_\alpha \rightarrow f$ uniformemente en T .

Demostración.

(a) Sea $f \in L^p(T)$, con $1 \leq p < \infty$. Mostraremos que $\|f * \varphi_\alpha - f\|_p \rightarrow 0$ cuando α crece en el conjunto dirigido I . Esto probará que

$$f * \varphi_\alpha \rightarrow f \text{ en } L^p(T).$$

Sea $\varepsilon > 0$ y denotemos con \succeq a la relación de orden que dirige al conjunto I . Por demostrar que existe $\alpha_0 \in I$ tal que $\|f * \varphi_\alpha - f\|_p < \varepsilon$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}(f * \varphi_\alpha)(\theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) \varphi_\alpha(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \varphi_\alpha(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta - t) - f(\theta)) \varphi_\alpha(t) dt.\end{aligned}$$

Tomando la norma $\|\cdot\|_p$ y usando la desigualdad de Minkowski para integrales ([11], p. 194), obtenemos

$$\|f * \varphi_\alpha - f\|_p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - t) - f\|_p \varphi_\alpha(t) dt. \quad (1.12)$$

Bastará, entonces, probar que el miembro derecho de (1.12) puede hacerse tan pequeño como se quiera.

Sabemos que $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ es una identidad aproximada en \mathcal{T} , por tanto $\exists K > 0$ tal que

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{I}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\alpha(t)| dt = K < \infty.$$

Como $f \in L^p(\mathcal{T})$ y el espacio $C(\mathcal{T})$ es denso en $L^p(\mathcal{T})$ ([22], teo. 3.14, p. 71), existe $g \in C(\mathcal{T})$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{8K}.$$

Denotemos

$$g^t(\theta) = g(\theta - t) - g(\theta), \quad \theta \in \mathcal{T}.$$

Obsérvese que, por la continuidad de g ,

$$g^t \rightarrow 0 \text{ puntualmente, cuando } t \rightarrow 0.$$

Además,

$$\begin{aligned}|g^t(\theta)| &\leq 2 \|g\|_\infty \\ \Rightarrow |g^t(\theta)|^p &\leq 2^p \|g\|_\infty^p \in L^1(\mathcal{T}).\end{aligned}$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada ([11], pp. 54-55), se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g^t(\theta)|^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} |g^t(\theta)|^p d\theta = 0.$$

Así,

$$\|g^t\|_p \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0$$

y, por tanto, existe $\delta \in (0, \pi)$ suficientemente pequeño tal que

$$\text{si } |t| < \delta \text{ entonces } \|g^t\|_p < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - t) - f\|_p &\leq \|f(\cdot - t) - g(\cdot - t)\|_p + \|g(\cdot - t) - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &= 2\|f - g\|_p + \|g'\|_p < 2\left(\frac{\varepsilon}{8K}\right) + \frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{2K} \end{aligned}$$

si $|t| < \delta$.

Ahora, definamos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} \|f(\cdot - t) - f\|_p |\varphi_\alpha(t)| dt, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} \|f(\cdot - t) - f\|_p |\varphi_\alpha(t)| dt \end{aligned}$$

de modo que la desigualdad (1.12) se expresa como

$$\|f * \varphi_\alpha - f\|_p \leq I_1 + I_2.$$

Obsérvese que

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2K} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\alpha(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2K} \left(\sup_{|t| \leq \pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\alpha(t)| dt \right) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte,

$$I_2 \leq \frac{\|f\|_p}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |\varphi_\alpha(t)| dt \rightarrow 0$$

cuando α crece en el conjunto dirigido I , dado que $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una identidad aproximada en T . Por tanto, existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$I_2 = |I_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0.$$

En consecuencia,

$$\|f * \varphi_\alpha - f\|_p \leq I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0.$$

Por lo tanto,

$$f * \varphi_\alpha \rightarrow f \text{ en } L^p(T).$$

(b) Supongamos ahora que $f \in C(T)$. Por demostrar que $f * \varphi_\alpha \rightarrow f$ uniformemente en T .

Sabemos que f es uniformemente continua en $T = [-\pi, \pi]$ por ser continua en un compacto. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |u - v| < \delta \text{ entonces } |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

donde, de nuevo,

$$K = \sup_{\theta \in T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\alpha}(t)| dt < \infty.$$

Obsérvese que

$$|(f * \varphi_{\alpha})(\theta) - f(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta-t) - f(\theta)| |\varphi_{\alpha}(t)| dt.$$

De manera similar al inciso anterior, definámonos

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |f(\theta-t) - f(\theta)| |\varphi_{\alpha}(t)| dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |f(\theta-t) - f(\theta)| |\varphi_{\alpha}(t)| dt$$

de modo que

$$|(f * \varphi_{\alpha})(\theta) - f(\theta)| \leq I_1 + I_2.$$

Pero,

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2K} \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |\varphi_{\alpha}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por otra parte,

$$I_2 \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |\varphi_{\alpha}(t)| dt \rightarrow 0$$

cuando α crece en el conjunto dirigido I , dado que $\{\varphi_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ es una identidad aproximada en T . Por tanto, existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$I_2 = |I_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0.$$

En consecuencia,

$$|(f * \varphi_{\alpha})(\theta) - f(\theta)| \leq I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0$$

y esto vale para toda $\theta \in T$. Por lo tanto,

$$f * \varphi_{\alpha} \rightarrow f \text{ uniformemente en } T.$$

■

Corolario 1.21 Sea f una función 2π -periódica en \mathbb{R} y sea $u = P(f)$, la integral de Poisson de f .

(a) Si $f \in L^p(T)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces

$$u(re^i) \xrightarrow{r \rightarrow 1} f \text{ en } L^p(T).$$

(b) Si $f \in C(T)$ entonces $u(re^i) \xrightarrow{r \rightarrow 1} f$ uniformemente en T .

Demostración. El resultado se sigue de inmediato del teorema anterior ya que

$$u(re^i) \equiv (P_r * f)(\theta)$$

y $\{P_r\}_{0 \leq r < 1}$ es una identidad aproximada en T , según vimos en el Lema 1.17. ■

1.2.2. Solución al problema clásico de Dirichlet en el disco unitario

El inciso (b) del Corolario 1.21 nos permite resolver el problema clásico de Dirichlet en el disco: *Dada una función continua f definida en $\partial D = T$ (i.e., 2π -periódica en \mathbb{R}), hallar una función u definida en \overline{D} que sea armónica en D , continua en \overline{D} y tal que $u|_{\partial D} = f$.*

Teorema 1.22 (Solución al problema clásico de Dirichlet en D) *Sea u una función definida en \overline{D} por*

$$u = \begin{cases} P(f) & \text{en } D \\ f & \text{en } \partial D \end{cases} \quad (1.13)$$

es decir,

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} (P_r * f)(\theta) & \text{si } re^{i\theta} \in D \\ f(\theta) & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Entonces u es una solución al problema clásico de Dirichlet en el disco, es decir, u es armónica en D , continua en \overline{D} y tal que $u|_{\partial D} = f$.

(Más adelante veremos que esta solución es única).

Demostración. Claramente, u es armónica en D pues

$$\Delta u = \Delta(P_r * f) = \Delta P_r * f = 0,$$

ya que el núcleo de Poisson es armónico en D . Además, $u|_{\partial D} = f$, por definición. Sólo falta ver que u es continua en $\partial D = T$.

Tomemos $z_0 = e^{i\theta_0} \in \partial D$. Entonces, para $z = re^{i\theta} \in \overline{D}$ se tiene

$$\begin{aligned} |u(z) - u(z_0)| &= |u(z) - f(\theta_0)| \\ &\leq \left| u(re^{i\theta}) - f(\theta) \right| + |f(\theta) - f(\theta_0)| \rightarrow 0 \text{ cuando } z \rightarrow z_0 \end{aligned}$$

por el inciso (b) del Corolario 1.21 y por la continuidad de f en T . Así,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u(z_0)$$

y, por lo tanto, u es continua en ∂D . ■

Por brevedad, en lugar de la función (1.13), se dice que $P(f)$ es la solución del problema clásico de Dirichlet en el disco. Que la integral de Poisson de f es la única solución al problema clásico de Dirichlet en el disco es un resultado que adelantamos y que probaremos posteriormente con un carácter más general (ver Corolario 1.42). No obstante el lector puede ensayar una prueba directa de la unicidad mostrando que toda solución tiene necesariamente la misma serie de Fourier que la integral de Poisson de f .

1.2.3. El problema de Dirichlet en versión $L^p(T)$

Observación 1.23 El inciso (a) del Corolario 1.21 nos da también una solución a una "versión en $L^p(T)$ " del problema de Dirichlet:

Dada una función $f \in L^p(T)$, con $1 \leq p < \infty$, hallar una función u armónica en D tal que

$$u(re^{it}) \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} f \text{ en } L^p(T).$$

De acuerdo con el Corolario 1.21(a), una solución es $u = P(f)$.

Observación 1.24 Cabe decir, también, que $u = P(f)$ es la única solución al problema de Dirichlet en versión $L^p(T)$, $1 < p < \infty$, con función frontera f , en el siguiente sentido: si v es otra solución, entonces $v = P(g)$ para alguna $g \in L^p(T)$ tal que $g = f$ c.t.p.

Demostración. Supongamos que v es otra solución al problema de Dirichlet en versión $L^p(T)$ con función frontera f . Entonces, v es armónica en D y tal que

$$v(re^{it}) \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} f \text{ en } L^p(T). \quad (1.14)$$

Para cada $0 \leq r < 1$, consideremos la función $v_r(t) = v(re^{it})$. De acuerdo con (1.14), para $\varepsilon = 1$ existe $0 < r_0 < 1$ tal que

$$\left| \|v_r\|_p - \|f\|_p \right| \leq \|v_r - f\|_p < 1 \quad \text{si } r_0 \leq r < 1.$$

Esto implica que

$$\|v_r\|_p < 1 + \|f\|_p \quad \text{si } r_0 \leq r < 1.$$

Así,

$$\sup_{r_0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{it})|^p dt < \infty.$$

Por los mismos argumentos empleados en la demostración del Teorema 1.10, existe una función $g \in L^p(T)$ tal que $v = P(g)$. Y, por el Corolario 1.21(a), se sigue que

$$v(re^{it}) \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} g \text{ en } L^p(T). \quad (1.15)$$

De (1.14) y (1.15) se concluye que $g = f$ c.t.p. ■

Un resultado análogo al Teorema 1.20 es el siguiente:

Teorema 1.25 Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una identidad aproximada en el toro T .

(a) Si $f \in L^\infty(T)$ entonces $f * \varphi_n \rightarrow f$ en la topología débil- $*$ de $L^\infty(T)$.

(b) Si $\mu \in M(T)$ entonces $\mu * \varphi_n \rightarrow \mu$ en la topología débil- $*$ de $M(T)$.

Demostración.

(a) Sea $f \in L^\infty(T)$.

Veamos primero que, efectivamente, $f * \varphi_\alpha \in L^\infty(T) \forall \alpha \in I$.

Como $(\tilde{\varphi}_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una identidad aproximada en T , sabemos que $\exists K > 0$ tal que

$$\sup_{\alpha \in I} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\varphi}_\alpha(t)| dt = K < \infty.$$

Luego, $\forall \alpha \in I$

$$\begin{aligned} |(f * \tilde{\varphi}_\alpha)(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| |\tilde{\varphi}_\alpha(t)| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\varphi}_\alpha(t)| dt \leq K \|f\|_\infty < \infty, \end{aligned}$$

de modo que, en efecto, $f * \tilde{\varphi}_\alpha \in L^\infty(T) \forall \alpha \in I$.

Ahora probemos que $f * \tilde{\varphi}_\alpha \rightarrow f$ en la topología débil- $*$ de $L^\infty(T)$. Como $L^\infty(T) = L^1(T)^*$, debemos mostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * \tilde{\varphi}_\alpha)(\theta) \psi(\theta) d\theta \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \psi(\theta) d\theta \quad \forall \psi \in L^1(T). \quad (1.16)$$

Por el Teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * \tilde{\varphi}_\alpha)(\theta) \psi(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{\varphi}_\alpha(\theta - t) dt \right] \psi(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}_\alpha(\theta - t) \psi(\theta) d\theta \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\varphi}_\alpha * \psi)(t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * \tilde{\varphi}_\alpha)(\theta) \psi(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \psi(\theta) d\theta \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\psi * \tilde{\varphi}_\alpha)(t) f(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \psi(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(\psi * \tilde{\varphi}_\alpha)(t) - \psi(t)| |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(\psi * \tilde{\varphi}_\alpha)(t) - \psi(t)| dt \\ &= \|\psi * \tilde{\varphi}_\alpha - \psi\|_1 \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Pero, por el Teorema 1.20(a), sabemos que $\forall v \in L^1(T)$

$$\|v * \tilde{\varphi}_\alpha - v\|_1 \rightarrow 0$$

cuando α crece en el conjunto dirigido I . Por tanto,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * \varphi_\alpha)(\theta) \psi(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \psi(\theta) d\theta \right| \rightarrow 0$$

cuando α crece en el conjunto dirigido I , lo cual prueba (1.16).

(b) La segunda parte del teorema es similar. Sea $\mu \in M(T)$. Observemos que, $\forall \alpha \in I$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(\mu * \varphi_\alpha)(\theta)| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\alpha(\theta-t)| d|\mu|(t) \right] d\theta \\ &\leq \|\varphi_\alpha\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right] d|\mu|(t) \\ &= \|\varphi_\alpha\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t) = \|\varphi_\alpha\|_\infty \|\mu\| < \infty, \end{aligned}$$

de modo que $\mu * \varphi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(T) \quad \forall \alpha \in I$.

Como $M(T) = C(T)'$, para probar que $\mu * \varphi_\alpha \rightarrow \mu$ en la topología débil* de $M(T)$, debemos mostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) (\mu * \varphi_\alpha)(\theta) d\theta \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\mu(\theta) \quad \forall g \in C(T). \quad (1.17)$$

Por el Teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) (\mu * \varphi_\alpha)(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\alpha(\theta-t) d\mu(t) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \varphi_\alpha(\theta-t) d\theta \right] d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\varphi}_\alpha * g)(t) d\mu(t). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) (\mu * \varphi_\alpha)(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\mu(\theta) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\varphi}_\alpha * g)(t) d\mu(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) d\mu(t) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(g * \tilde{\varphi}_\alpha)(t) - g(t)| d|\mu|(t) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando α crece en el conjunto dirigido I , ya que

$$g * \tilde{\varphi}_\alpha \rightarrow g$$

uniformemente en T , de acuerdo con el Teorema 1.20(b). Por tanto,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * \varphi_n)(\theta) \psi(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \psi(\theta) d\theta \right| \rightarrow 0$$

cuando n crece en el conjunto dirigido J , lo cual prueba (1.17). ■

Corolario 1.26 .

(a) Si $f \in L^\infty(T)$ y $u = P\{f\}$, entonces $u(re^i\theta) \xrightarrow{r \rightarrow 1} f$ en la topología débil- $*$ de $L^\infty(T)$.

(b) Si $\mu \in M(T)$ y $u = P\{\mu\}$, entonces $u(re^i\theta) \xrightarrow{r \rightarrow 1} \mu$ en la topología débil- $*$ de $M(T)$.

Demostración. El resultado se sigue de inmediato del teorema anterior ya que

$$u(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta)$$

y $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ es una identidad aproximada en T , según vimos en el Lema 1.17. ■

1.2.4. Convergencia no tangencial y comportamiento frontera de integrales de Poisson

Vamos ahora a estudiar el comportamiento puntual de integrales de Poisson para puntos en la frontera de D . Para tal efecto, es conveniente introducir la siguiente noción de límite.

Definición 1.27 Sea u una función definida en D y sea $z_0 = e^{i\theta_0} \in \partial D = T$. Diremos que u tiene límite no tangencial L en $z_0 \in T$ si para cada $\epsilon > 0$ tenemos que $u(z) \rightarrow L$ cuando $z \rightarrow z_0$ estando siempre $z = re^{i\theta}$ dentro de la región

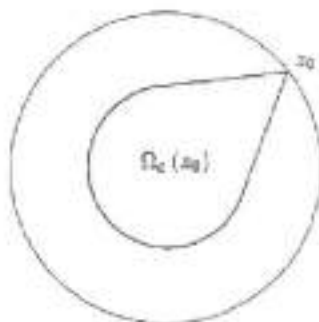
$$\Omega_\epsilon(z_0) = \left\{ re^{i\theta} : |\theta - \theta_0| < \epsilon(1-r) \right\}.$$

Denotaremos esto escribiendo

$$\lim_{z \xrightarrow{NT} z_0} u(z) = L$$

o bien,

$$u(z) \rightarrow L \text{ cuando } z \xrightarrow{NT} z_0.$$

Figura 1.2: $\Omega_c(z_0)$, región de aproximación no tangencial a z_0

Se usa el término "no tangencial" porque ninguna curva en $\Omega_c(z_0)$ que se aproxime a z_0 puede ser tangente a ∂D .

Dada $\mu \in M(T)$, resultará también conveniente considerar la función

$$F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t).$$

la cual es de variación acotada en T . En efecto, si

$$\theta_0 = -\pi < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m = \pi,$$

entonces, para $1 \leq k \leq m$, tenemos

$$\begin{aligned} |F(\theta_k) - F(\theta_{k-1})| &= \left| \int_0^{\theta_k} d\mu(t) - \int_0^{\theta_{k-1}} d\mu(t) \right| = \left| \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} d\mu(t) \right| \\ &\leq \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} d|\mu|(t) = |\mu|[\theta_{k-1}, \theta_k]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^m |F(\theta_k) - F(\theta_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^m |\mu|[\theta_{k-1}, \theta_k] \leq |\mu|[0, 2\pi] < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, F es de variación acotada.

Teorema 1.28 Sea $\mu \in M(T)$ y sea $F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t)$. (Se sabe que F es una función de variación acotada en T y, por tanto, $F'(\theta)$ existe y es finita para casi todo θ , pues todas las funciones de variación acotada tienen esta propiedad). Sea θ_0 uno de los puntos donde $F'(\theta_0)$ existe y es finita. Sea $u = P(\mu)$ y sea $z_0 = e^{i\theta_0}$. Entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = F'(\theta_0).$$

Demostración. La prueba se basa en integración por partes. Para simplificar la notación, podemos asumir que $\theta_0 = 0$ (i.e., $z_0 = e^{i\theta_0} = 1$).

Podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que $F'(0) = 0$. Por demostrar que, en tal caso,

$$u(re^{i\theta}) \rightarrow F'(0) = 0 \text{ cuando } re^{i\theta} \xrightarrow{N.T.} 1 - e^{i\theta}. \quad (1.18)$$

Si probamos (1.18), entonces para el caso general bastará considerar la medida $d\lambda(t) = d\mu(t) - F'(0)dt$ y la función $U = P(\lambda)$. En efecto, si definimos

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \int_0^\theta d\lambda(t) = \int_0^\theta d\mu(t) - \int_0^\theta F'(0) dt \\ &= F(\theta) - \int_0^\theta F'(0) dt = F(\theta) - F'(0)\theta, \end{aligned}$$

entonces

$$G'(\theta) = F'(\theta) - F'(0).$$

Así,

$$G'(0) = 0.$$

Por (1.18) tendremos

$$U(re^{i\theta}) \rightarrow 0 \text{ cuando } re^{i\theta} \xrightarrow{N.T.} 1,$$

es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\lambda(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } re^{i\theta} \xrightarrow{N.T.} 1.$$

Pero,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\lambda(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F'(0) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) - F'(0). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) \rightarrow F'(0) \text{ cuando } re^{i\theta} \xrightarrow{N.T.} 1,$$

i.e.,

$$u(z) \rightarrow F'(0) \text{ cuando } z \xrightarrow{N.T.} z_0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Para probar (1.18), debemos hacer $u(re^{i\theta})$ pequeño en módulo si $|\theta| < \varepsilon(1-r)$ con r cerca de 1.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que

$$0 = F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t},$$

por tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(t)| < \varepsilon |t| \quad \text{sí } |t| < \delta, \quad (1.19)$$

Restringamos nuestra atención a las r 's próximas a 1 tales que

$$c(1-r) < \frac{\delta}{4}$$

con $re^{i\theta}$ en la región de aproximación $\Omega_r(z_0) = \{re^{i\theta} : |\theta| < c(1-r)\}$. Entonces,

$$|\theta| < \frac{\delta}{4}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} P_r(\theta-t) d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta-t) d\mu(t) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ahora, obsérvese que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} P_r(\theta-t) d|\mu|(t) \leq \sup_{\frac{\delta}{4} < |t| \leq \pi} P_r(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu|(t) \\ &= \sup_{\frac{\delta}{4} < |t| \leq \pi} P_r(t) |\mu|([- \pi, \pi]) \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0 \end{aligned}$$

ya que $P_r(t) \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$ uniformemente en $[-\pi, -\frac{\delta}{2}] \cup [\frac{\delta}{2}, \pi]$, según vimos en el Lema 1.9(iii).

Por consiguiente, sólo tenemos que preocuparnos por el término

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta-t) d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-t)} d\mu(t).$$

Integrando por partes, con

$$\begin{aligned} w &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-t)} \quad , \quad dw = d\mu(t), \\ dx &= \frac{(r^2-1)(2r \sin(t-\theta))}{(1+r^2-2r \cos(\theta-t))^2} dt \quad , \quad v = F(t), \end{aligned}$$

tenemos

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t) F(t) \Big|_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{(1-r^2) r \operatorname{sen}(t-\theta)}{(1+r^2-2r \cos(\theta-t))^2} F(t) dt = A + B.$$

Pero,

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t) F(t) \Big|_{-\delta}^{\delta} \right| = \frac{1}{2\pi} |P_r(\theta - \delta) F(\delta) - P_r(\theta + \delta) F(-\delta)| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|t| \leq \delta} |F(t)| (P_r(\theta - \delta) + P_r(\theta + \delta)) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\sup_{|t| \leq \tau} |F(t)| \right) \left(\sup_{\frac{\pi}{2} < t \leq \pi} P_r(t) \right) \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0. \end{aligned}$$

ya que F es de variación acotada en $T =]-\tau, \pi]$ y $P_r(t) \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$ uniformemente en $[-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$ (de nuevo Lema 1.9(III)).

En consecuencia, sólo necesitamos ocuparnos del término

$$B = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{(1-r^2) r \operatorname{sen}(t-\theta)}{(1+r^2-2r \cos(\theta-t))^2} F(t) dt.$$

Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $\theta > 0$. Entonces,

$$B = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\delta}^0 + \int_0^{2\theta} + \int_{2\theta}^{\delta} \right) \frac{(1-r^2) r \operatorname{sen}(t-\theta)}{(1+r^2-2r \cos(\theta-t))^2} F(t) dt = C + D + E.$$

Mostraremos que cada uno de estos términos tiende a 0 cuando r tiende a 1.

Por (1.19), para $-\delta \leq t \leq 0$, tenemos

$$|F(t)| \leq \varepsilon |t| = \varepsilon(-t) \leq \varepsilon(\theta - t).$$

Así,

$$\begin{aligned} |C| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^0 \frac{(1-r^2) r |\operatorname{sen}(t-\theta)|}{(1+r^2-2r \cos(\theta-t))^2} |F(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} (1-r^2) \int_{-\delta}^0 \frac{r |\operatorname{sen}(t-\theta)|}{(1+r^2-2r \cos(\theta-t))^2} \varepsilon(\theta-t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi} (1-r^2) \int_{\theta}^{\theta+\delta} \frac{r |\operatorname{sen} s|}{(1+r^2-2r \cos s)^2} ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi} (1-r^2) \int_0^{\pi} \frac{r \operatorname{secc} t}{(1+r^2-2r \cos t)^2} dt. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Integrando otra vez por partes, con

$$\begin{aligned} w &= z, \quad dv = \frac{r(\operatorname{secc} t)}{(1+r^2-2r \cos t)^2} dt, \\ dw &= dt, \quad v = \frac{1}{2} \frac{1}{1+r^2-2r \cos t}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |C| &\leq -\frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{(1-r^2)t}{1+r^2-2r\cos t} \Big|_0^\pi + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} dt \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{(1-r^2)}{(1+r)^2} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\pi P_r(t) dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi P_r(t) dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $0 \leq t \leq 2\theta$, entonces

$$|F(t)| < \varepsilon|t| = \varepsilon t \quad \text{y} \quad |\theta - t| < \theta.$$

De manera que

$$\begin{aligned} |D| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\theta} \frac{(1-r^2)r|\operatorname{sen}(t-\theta)|}{(1+r^2-2r\cos(\theta-t))^2} |F(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\theta} \frac{(1-r^2)r(t-\theta)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-t))^2} \varepsilon t dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\theta} \frac{(1-r^2)r}{(1+r^2-2r)^2} \theta \varepsilon t dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\theta} \frac{(1-r)(1+r)r}{(1-r)^4} \theta \varepsilon t dt \\ &< \frac{1}{\pi} \int_0^{2\theta} \frac{2}{(1-r)^3} \theta \varepsilon (2\theta) dt \\ &= \frac{8\theta^3\varepsilon}{\pi(1-r)^3} < \frac{8\varepsilon^3\varepsilon}{\pi} \end{aligned}$$

pues $|\theta| < \varepsilon(1-r)$.

Finalmente, para $2\theta \leq t \leq \delta$, tenemos

$$|F(t)| < \varepsilon t \leq 2\varepsilon(t-\theta).$$

De modo que

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{2\theta}^\delta \frac{(1-r^2)r|\operatorname{sen}(t-\theta)|}{(1+r^2-2r\cos(\theta-t))^2} |F(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} (1-r^2) \int_{2\theta}^\delta \frac{r\operatorname{sen}(t-\theta)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-t))^2} 2\varepsilon(t-\theta) dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} (1-r^2) \int_\theta^{\delta-\theta} \frac{r\operatorname{sen}s}{(1+r^2-2r\cos s)^2} 2\varepsilon ds \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\pi} (1-r^2) \int_0^\pi \frac{r\operatorname{sen}t}{(1+r^2-2r\cos t)^2} t dt. \end{aligned}$$

Y, procediendo como lo hicimos con la integral (1.20), obtenemos

$$|E| < 2\epsilon.$$

■

Observación 1.29 En síntesis, el Teorema 1.28 nos dice que si $\mu \in M(T)$, $F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t)$ y $u = P\{\mu\}$, entonces

$$\lim_{z \xrightarrow{N, r} e^{i\theta}} u(z) = F'(\theta) \text{ para casi todo } \theta \in T. \quad (1.21)$$

En particular, existen los límites radiales casi en todas partes:

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta}) = F'(\theta) \text{ para casi todo } \theta \in T.$$

Corolario 1.30 Si u es armónica en D y $u = P\{f\}$ con $f \in L^p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\lim_{z \xrightarrow{N, r} e^{i\theta}} u(z) = f(\theta) \text{ para casi todo } \theta \in T.$$

Demostración. Obsérvese que $f \in L^1(T)$, pues $L^p(T) \subset L^1(T)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ ([11], p.186, prop. 6.12). Consideremos la medida $d\mu(t) = f(t) dt$. Entonces

$$F'(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t) = \int_0^\theta f(t) dt$$

Por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue ([11], p. 98),

$$F'(\theta) = f(\theta)$$

y el resultado se sigue por (1.21). ■

Observación 1.31 Combinando este corolario con los Teoremas 1.10 y 1.11 vemos que:

(i) si u es una función armónica en el disco D tal que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p dt < \infty \text{ para algún } 1 < p < \infty, \quad (1.22)$$

entonces existe $f \in L^p(T)$ tal que $u = P\{f\}$ y

$$\lim_{z \xrightarrow{N, r} e^{i\theta}} u(z) = f(\theta) \text{ para casi todo } \theta \in T;$$

(ii) si u es una función armónica en el disco D y $\exists M > 0$ tal que

$$|u(z)| \leq M \quad \forall z \in D, \quad (1.23)$$

entonces existe $f \in L^\infty(T)$ tal que $u = P(f)$ y

$$\lim_{z \xrightarrow{N.T.} e^{i\theta}} u(z) = f(\theta) \text{ para casi toda } \theta \in T.$$

Observación 1.32 Similarmente, combinando los Teoremas 1.13 y 1.28 vemos que: si u es una función armónica en el disco unitario D tal que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta < \infty, \quad (1.24)$$

entonces existe una medida de Borel μ en T tal que $u = P(\mu)$ y

$$\lim_{z \xrightarrow{N.T.} e^{i\theta}} u(z) = F^{\mu}(\theta) \text{ para casi toda } \theta \in T,$$

con $F^{\mu}(\theta) = \int_0^{\theta} d\mu(t)$.

Como un caso particular de lo anterior se obtiene el siguiente resultado clásico:

Corolario 1.33 (Teorema de Fatou) Si F es una función holomorfa y acotada en D , entonces existe $\lim_{z \xrightarrow{N.T.} e^{i\theta}} F(z)$ para casi toda $\theta \in T$.

Demostración. Como F es holomorfa y acotada en D , entonces F es armónica en D y acotada en D . De acuerdo con la Observación 1.31(ii), existe $f \in L^\infty(T)$ tal que $u = P(f)$ y

$$\lim_{z \xrightarrow{N.T.} e^{i\theta}} u(z) = f(\theta) \text{ para casi toda } \theta \in T. \quad \blacksquare$$

Cuando u es una función armónica en D que satisface la condición (1.22) + la condición (1.23), sabemos que podemos recuperar a u a partir de su función frontera f por medio de $u = P(f)$. En cambio, si u satisface sólo la condición (1.24), entonces no necesariamente se puede recuperar a u por medio de su valor frontera F^{μ} . De hecho, sabemos que $u = P(\mu)$ para alguna $\mu \in M(T)$, pero no podemos afirmar que $u = P(F^{\mu})$. Por ejemplo, para

$$u(re^{i\theta}) = P_r(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2-2r \cos t}$$

tenemos que u es armónica en D y

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) d\theta = 1,$$

de modo que u está uniformemente en $L^1(T)$ y, por tanto, satisface la condición (1.24). Su función frontera es 0, pues $P_r(t) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 1$ para cada $t \neq 0$ en $[-\pi, \pi]$. Sin embargo, $u > 0$, así que no puede ser la integral de Poisson de 0, la cual es idénticamente 0.

Notemos, por otra parte, que

$$u = P(\lambda)$$

donde $\lambda = 2\pi\delta$ y δ es la medida de Dirac en 0. En efecto,

$$P(\lambda)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\lambda(t) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\delta(t) = P_r(\theta) = u(re^{i\theta})$$

y

$$F(t) = \int_0^t d\delta(t) = \delta(0) = 1.$$

Nuestro siguiente propósito es salirnos un poco del disco y explorar regiones más generales. Lo notable hasta aquí es que con la solución del problema de Dirichlet en el disco y con el uso de teoremas de Variable Compleja se puede dar solución al problema de Dirichlet en dominios planos muy generales.

1.3. Algunos resultados sobre funciones armónicas en dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Extenderemos nuestro estudio ahora a regiones más generales de \mathbb{R}^n . Empezaremos con un par de proposiciones muy sencillas.

Proposición 1.34 Si φ es armónica en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, entonces $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ es armónica en Ω , para cualquiera de las coordenadas x_j de \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea $1 \leq j \leq n$ y denotemos

$$\Delta = \Delta_j + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad \text{donde } \Delta_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Por hipótesis,

$$\Delta_j \varphi + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Delta_j \varphi + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi \right] &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \Rightarrow \Delta_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right] &= 0 \quad \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\Delta \left[\frac{\partial}{\partial x_j} x^2 \right] = 0 \text{ en } \Omega. \quad \blacksquare$$

Proposición 1.35 Para $n > 2$, la función radial $f(x) = |x|^{2-n}$ es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Demostración. Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{2-n}{2}} = (2-n) x_j \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} &= -n(2-n) x_j^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-\frac{n+2}{2}} + (2-n) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}} \\ &= -n(2-n) x_j^2 |x|^{-n-2} + (2-n) |x|^{-n}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = -n(2-n) |x|^{-n-2} \sum_{j=1}^n x_j^2 + (2-n) |x|^{-n} \sum_{j=1}^n 1 \\ &= -n(2-n) |x|^{-n} + n(2-n) |x|^{-n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para $x \neq 0$. \(\blacksquare\)

De manera similar a como lo hicimos en el toro, introducimos el siguiente concepto:

Definición 1.36 Una identidad aproximada en \mathbb{R}^n es una familia de funciones $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ donde I es un conjunto dirigido y la familia satisface:

- (i) Para cada $\alpha \in I$, se tiene $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(x) dx = 1$.
- (ii) $\exists K > 0$ tal que $\sup_{\alpha \in I} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\alpha(t)| dt \equiv K < \infty$.
- (iii) $\forall \delta > 0$, se verifica $\int_{|x| > \delta} |\varphi_\alpha(x)| dx \rightarrow 0$ cuando α "crece" en el conjunto dirigido I .

A continuación veremos que las funciones armónicas están caracterizadas por una importante propiedad: Se trata de la llamada *propiedad del valor medio* (PVM), la cual es bien conocida en el caso de dimensión $n = 2$, por aplicación de los resultados para funciones holomorfas de una variable compleja.

Teorema 1.37 (Propiedad del Valor Medio para Funciones Armónicas) Sea u una función continua en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, u es armónica en $\Omega \Leftrightarrow u$ satisface la propiedad del valor medio en Ω , esto es, para cada $x_0 \in \Omega$ y para cada $r > 0$ tal que

$$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\} \subset \Omega$$

se tiene

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma \quad (1.25)$$

donde $\Sigma_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ es la esfera unitaria en \mathbb{R}^n , $d\sigma$ es la medida de Lebesgue en Σ_{n-1} y $|\Sigma_{n-1}| = \int_{\Sigma_{n-1}} d\sigma$.

Demostración.

(\Rightarrow) Supongamos que u es armónica en Ω . Sean $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que

$$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\} \subset \Omega.$$

Por demostrar que se cumple (1.25). Como u es continua en el compacto $\overline{B_r(x_0)}$, tenemos que u es acotada en $\overline{B_r(x_0)}$. Es decir, existe $K > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq K \quad \text{si } x \in \overline{B_r(x_0)}$$

o bien,

$$|u(x_0 + ty)| \leq K \quad \text{si } y \in \Sigma_{n-1}, t \in (0, r].$$

Para cada $t \in (0, r]$ sea

$$f(t) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + t\sigma) d\sigma.$$

Como consecuencia del Teorema de Convergencia Dominada, tenemos que f es diferenciable en $(0, r]$ y se puede derivar bajo el signo de la integral (ver [11], teo. 2.27, pp. 54-56). Así,

$$f'(t) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0 + t\sigma) \cdot \sigma_j \right) d\sigma.$$

Por la regla de la cadena, para $\varphi(t) = x_0 + t\sigma$, se tiene

$$D(u \circ \varphi)(t) = Du(\varphi(t)) D\varphi(t) = Du(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Entonces,

$$f'(t) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} D_u u(x_0 + t\sigma) d\sigma$$

donde $D_\sigma u(x_0 + t\sigma)$ es la derivada direccional de u en la dirección del vector normal exterior en el punto $x_0 + t\sigma$.

Tomando el cambio de variable $x = x_0 + t\sigma$ obtenemos

$$f'(t) = \frac{1}{t^{n-1} |\Sigma_{n-1}|} \int_{\partial B_t(x_0)} D_\sigma u(x) d\sigma(x)$$

donde $\partial B_t(x_0)$ es la frontera de la bola $B_t(x_0)$ y $d\sigma$ es la medida de Lebesgue natural en $\partial B_t(x_0)$.

Ahora, recordemos que si \mathbf{F} es un campo vectorial suave definido en una región R y \mathbf{n} es la normal unitaria exterior a ∂R , entonces el Teorema de la Divergencia nos asegura que

$$\int_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

En particular, cuando $\mathbf{F} = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)$, con g función escalar, se tiene $\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} = \Delta g$ y entonces

$$\int_R \Delta g dV = \int_{\partial R} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

Usando este hecho, tenemos

$$f'(t) = \frac{1}{t^{n-1} |\Sigma_{n-1}|} \int_{\partial B_t(x_0)} \Delta u(x) dx = 0,$$

ya que u es armónica en $B_t(x_0) \subset \Omega$.

Puesto que esto vale para toda $t \in (0, r]$, se sigue que f es constante en $(0, r]$.

Esto implica que

$$f(t) = f(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma \quad \forall t \in (0, r].$$

Pero, por otro lado, por el Teorema de Convergencia Acotada,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{n-1} |\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + t\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \lim_{t \rightarrow 0} u(x_0 + t\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0) d\sigma = u(x_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma.$$

(\Leftarrow) **Caso 1:** Supongamos que $u \in C^2(\Omega)$ y satisface la propiedad del valor medio en Ω . Probaremos que u es armónica en Ω procediendo por contradicción.

Supongamos que u no es armónica en Ω . Entonces, $\exists x_0 \in \Omega$ tal que

$$\Delta u(x_0) \neq 0.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\Delta u(x_0) > 0.$$

Por continuidad, debe existir un $r > 0$ tal que

$$\Delta u(x) > 0 \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Más aún, podemos elegir tal r de modo que

$$\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega.$$

Definamos

$$f(t) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + t\sigma) d\sigma \quad \forall t \in (0, r].$$

Es decir,

$$f(t) = u(x_0) \quad \forall t \in (0, r],$$

ya que, por hipótesis, u satisface la PVM. Así, f es constante en $(0, r]$ y, por lo tanto,

$$f'(t) = 0 \quad \forall t \in (0, r].$$

Por otra parte, por el mismo argumento de antes, obtenemos

$$0 = f'(t) = \frac{1}{t^{n-1} |\Sigma_{n-1}|} \int_{B_t(x_0)} \Delta u(x) dx > 0 \quad \forall t \in (0, r].$$

Esta contradicción prueba que u debe ser armónica en Ω .

Caso general: Asumamos únicamente que u es continua en Ω y satisface la PVM. Dado que el problema es local (es decir, requerimos mostrar que $\Delta u = 0$ en una vecindad de cada punto $x_0 \in \Omega$), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que Ω es un dominio acotado y que u es acotada en Ω .

Sea $\phi \in C_0^\infty$ tal que $\text{supp } \phi = \overline{B_1(0)}$, $\phi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ y ϕ es radial (i.e., $\phi(x) = \psi(|x|)$, con ψ continua). Por ejemplo, basta considerar

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

y si $M = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi > 0$, entonces tomamos $\delta = \frac{1}{2} \Phi$.

Definamos

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{para } \varepsilon > 0.$$

Obsérvese que $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ es una identidad aproximada en \mathbb{R}^n . Mostraremos que la función $u * \phi_\varepsilon$ verifica la propiedad del valor medio en

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

y como $u * \phi_\varepsilon$ es de clase C^∞ , entonces será armónica en Ω_ε , por el Caso 1.

Sea $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega_\varepsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} (u * \phi_\varepsilon)(x_0 + r\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x_0 - y + r\sigma) \phi_\varepsilon(y) dy d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 - y + r\sigma) d\sigma \right] \phi_\varepsilon(y) dy \end{aligned} \quad (1.26)$$

por el Teorema de Fubini. Pero, como $\overline{B_r(x_0 - y)} \subset \Omega$ y u satisface la propiedad del valor medio en Ω , sabemos que

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 - y + r\sigma) d\sigma = u(x_0 - y). \quad (1.27)$$

Sustituyendo (1.27) en (1.26), obtenemos

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} (u * \phi_\varepsilon)(x_0 + r\sigma) d\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} u(x_0 - y) \phi_\varepsilon(y) dy = (u * \phi_\varepsilon)(x_0).$$

Esto muestra que $u * \phi_\varepsilon$ verifica la PVM en Ω_ε y, por el Caso 1, $u * \phi_\varepsilon$ es armónica en Ω_ε para todo $\varepsilon > 0$.

Para demostrar que u es armónica en Ω , tomemos $x \in \Omega = \bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega_\varepsilon$. Entonces, $x \in \Omega_\varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} (u * \phi_\varepsilon)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y) \phi_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x - r\sigma) \phi_\varepsilon(r\sigma) d\sigma dr \quad \left(\text{en coordenadas polares} \right) \\ &= \varepsilon^{-n} \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x - r\sigma) \phi\left(\frac{r\sigma}{\varepsilon}\right) d\sigma dr. \end{aligned}$$

Pero, como $\phi(x) = \psi(|x|)$, se sigue que

$$\begin{aligned} (u * \phi_\varepsilon)(x) &= \varepsilon^{-n} \int_0^\infty r^{n-1} \left[\int_{\Sigma_{n-1}} u(x - r\sigma) d\sigma \right] \psi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) dr \\ &= \varepsilon^{-n} \int_0^\infty r^{n-1} |\Sigma_{n-1}| u(x) \psi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) dr. \end{aligned}$$

ya que u satisface la PVM en Ω . Así,

$$\begin{aligned} (u * \phi_r)(x) &= u(x) \int_0^\infty r^{n-1} |\Sigma_{n-1}| \varepsilon^{-n} \psi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) d\varepsilon \\ &= u(x) \int_0^\infty r^{n-1} |\Sigma_{n-1}| \phi_r(r\sigma) dr \\ &= u(x) \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\Sigma_{n-1}} \phi_r(r\sigma) d\sigma dr \\ &= u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_r(y) dy \\ &= u(x) \end{aligned}$$

dado que $(\phi_r)_{r>0}$ es una identidad aproximada en \mathbb{R}^n . Esto muestra que

$$u = u * \phi_r$$

y, por tanto u es armónica en Ω_r . Concluimos entonces que u es armónica en una vecindad de cada punto $x \in \Omega$. ■

Observación 1.38 La propiedad del valor medio, tal como aparece en el teorema anterior, es equivalente al siguiente hecho: para cada $x_0 \in \Omega$ y para cada $r > 0$ tal que

$$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\} \subset \Omega$$

se tiene

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx, \quad (1.28)$$

Demostración. Supongamos que para cada $x_0 \in \Omega$ y para cada $r > 0$ tal que

$$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\} \subset \Omega$$

se tiene

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma.$$

Entonces, $\forall s \in (0, r]$

$$\begin{aligned} u(x_0) s^{n-1} &= \frac{s^{n-1}}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + s\sigma) d\sigma \\ \Rightarrow u(x_0) \int_0^r s^{n-1} ds &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_0^r s^{n-1} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + s\sigma) d\sigma ds \\ \Rightarrow u(x_0) \frac{r^n}{n} &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \\ \Rightarrow u(x_0) &= \frac{n}{r^n |\Sigma_{n-1}|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx$$

entonces

$$u(x_0) = \frac{n}{r^n |\Sigma_{n-1}|} \int_0^r s^{n-1} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + s\sigma) d\sigma ds.$$

Derivando ambos miembros con respecto a r , obtenemos

$$0 = \frac{n}{r^n |\Sigma_{n-1}|} r^{n-1} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma - \frac{n^2}{r^{n+1} |\Sigma_{n-1}|} \int_0^r s^{n-1} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + s\sigma) d\sigma ds$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{n}{r |\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma &= \frac{n^2}{r^{n+1} |\Sigma_{n-1}|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \\ &= \frac{n^2}{r^{n+1} |\Sigma_{n-1}|} |B_r(x_0)| u(x_0). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma = \frac{n}{r^n |\Sigma_{n-1}|} |B_r(x_0)| u(x_0) = u(x_0).$$

■

Una consecuencia de la propiedad del valor medio es el Principio del Máximo, que se enuncia como sigue:

Corolario 1.39 (Principio del Máximo para Funciones Armónicas) *Sea u una función armónica a valores reales definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces u no puede alcanzar un máximo en Ω a menos que u sea constante en Ω .*

Demostración. Supongamos que u sí alcanza un valor máximo en Ω ; es decir, $\exists \xi \in \Omega$ tal que

$$u(x) \leq u(\xi) = m \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.29)$$

Sea

$$A = \{x \in \Omega : u(x) = m\}.$$

Nótese que A es no vacío, pues $\xi \in A$. Mostraremos que A es abierto.

Sea $x_0 \in A$, de modo que

$$u(x_0) = m \quad (1.30)$$

y sea $r > 0$ tal que

$$\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega.$$

Afirmamos que $B_r(x_0) \subset A$. Si no, entonces $\exists y \in B_r(x_0)$ tal que $y \notin A$. Esto implica que $u(y) < m$.

Como $B_r(x_0)$ es un conjunto abierto y u es continua en Ω , $\exists \delta > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$B_\delta(y) \subset B_r(x_0) \quad \text{y} \quad u(z) < m \quad \forall z \in B_\delta(y). \quad (1.31)$$

Puesto que u es armónica en Ω , se cumple la propiedad del valor medio. Así,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \\ &= \frac{1}{|B_r(x_0)|} \left[\int_{B_\delta(y)} u(x) dx + \int_{B_r(x_0) - B_\delta(y)} u(x) dx \right]. \end{aligned}$$

De (1.29) y (1.31), se sigue que

$$\begin{aligned} u(x_0) &< \frac{1}{|B_r(x_0)|} \left[\int_{B_\delta(y)} m dx + \int_{B_r(x_0) - B_\delta(y)} m dx \right] \\ &= \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} m dx \\ &= m. \end{aligned}$$

Esto muestra que $u(x_0) < m$, lo cual contradice a (1.30). Por lo tanto, debe satisfacerse la contención $B_r(x_0) \subset A$. Y, en consecuencia, A es abierto.

Por otra parte, el conjunto

$$\Omega - A = \{x \in \Omega : u(x) < m\}$$

también es abierto pues, por la continuidad de u , dado $x \in \Omega - A$ existe $\rho > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$u(z) < m \quad \forall z \in B_\rho(x)$$

y entonces $B_\rho(x) \subset \Omega - A$.

Como A es no vacío y Ω es conexo, se sigue que $\Omega - A$ debe ser necesariamente vacío. Consecuentemente, $A = \Omega$. Y así, u es constante en Ω . ■

Con una argumentación análoga se demuestra el Principio del Mínimo para funciones armónicas:

Corolario 1.40 (Principio del Mínimo para Funciones Armónicas) *Sea u una función armónica a valores reales definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces u no puede alcanzar un mínimo en Ω a menos que u sea constante en Ω .*

He aquí una consecuencia inmediata de los Principios del Máximo y del Mínimo:

Corolario 1.41 *Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n y sea $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que u es armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces, u alcanza su valor máximo y su valor mínimo en la frontera $\partial\Omega$ (y sólo en la frontera $\partial\Omega$ si u no es constante).*

Demostración. Puesto que u es continua en el compacto $\overline{\Omega}$, sabemos que u alcanza su máximo y su mínimo en $\overline{\Omega}$. Así, $\exists x_0, x_1 \in \overline{\Omega}$ tales que

$$u(x_0) \leq u(x) \leq u(x_1) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

De acuerdo con los principios del máximo y del mínimo, si u no es constante en Ω , entonces x_0, x_1 no pueden estar en Ω . En tal caso, $x_0, x_1 \in \overline{\Omega} - \Omega = \partial\Omega$.

En cambio, si u es constante en Ω entonces, por continuidad, u es constante en la cerradura $\overline{\Omega}$. En tal caso,

$$u(x_0) = u(x) = u(x_1) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

y, obviamente, u alcanza su máximo y su mínimo en cada punto de $\overline{\Omega}$. En particular, u alcanza su máximo y su mínimo en la frontera $\partial\Omega$. ■

Como consecuencia de este resultado, establecemos la unicidad de la solución del problema clásico de Dirichlet (si existe) en dominios acotados de \mathbb{R}^n . Enunciamos esto como sigue:

Corolario 1.42 *Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n y sean u, v funciones continuas en la cerradura $\overline{\Omega}$ y armónicas en Ω tales que $u(x) = v(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$. Entonces, $u(x) = v(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$.*

Demostración. Podemos asumir que u y v son funciones con valores reales. Es claro que la función $u - v$ es continua en la cerradura $\overline{\Omega}$ y armónica en Ω . Luego, por el Corolario 1.41, tenemos que $u - v$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo en la frontera $\partial\Omega$.

Pero, por hipótesis, $u - v = 0$ en $\partial\Omega$. Por lo tanto, $u - v = 0$ en todo $\overline{\Omega}$. ■

1.4. El problema clásico de Dirichlet en bolas de \mathbb{R}^n

1.4.1. El problema clásico de Dirichlet en la bola unitaria

En esta sección resolveremos el problema de Dirichlet en la bola unitaria de \mathbb{R}^n , es decir dada una función continua sobre la esfera unitaria

$$\Sigma_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\},$$

veremos cómo extenderla a una función continua en la bola cerrada

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

y armónica en su interior

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Por simplicidad, denotaremos $B = B_1(0)$.

En la Sección 1.2.2 resolvimos ya este problema para el caso $n = 2$. Dada $f \in C(\mathcal{T})$, la solución en D es la integral de Poisson de la función frontera f , i.e.,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt$$

donde

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} = \frac{1 - |re^{i\theta}|^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2}$$

es el núcleo de Poisson en el disco.

En el caso general ($n \geq 2$), veremos que se obtiene una solución análoga.

1.4.2. El núcleo de Poisson en la bola unitaria

Definición 1.43 Para $x \in B$ y $s \in \Sigma_{n-1}$ la función definida por

$$P(x, s) = \frac{1 - |x|^2}{|x - s|^n}$$

se llama núcleo de Poisson para la bola unitaria $B = B_1(0)$ de \mathbb{R}^n .

Veremos que, en general,

$$u(x) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x, s) f(s) ds$$

es la solución del problema de Dirichlet en B con función frontera f continua en Σ_{n-1} .

Para tal efecto, vamos a probar algunas propiedades importantes que tiene el núcleo de Poisson en B .

Lema 1.44 Sea $s \in \Sigma_{n-1}$ fija. Entonces $P(\cdot, s)$ es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{s\}$.

(En particular, $P(\cdot, s)$ es armónica en B .)

Demostración. Observemos que

$$P(x, s) = \frac{1 - |x|^2}{|x - s|^n} = -|x - s|^{2-n} - \frac{2}{n-2} \sum_{j=1}^n s_j \frac{\partial}{\partial s_j} \left(|x - s|^{2-n} \right).$$

En efecto, para cada $j = 1, \dots, n$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial s_j} (|x-s|^{2-n}) = (n-2) |x-s|^{-n} (x_j - s_j)$$

y entonces

$$\begin{aligned} & -|x-s|^{2-n} - \frac{2}{n-2} \sum_{j=1}^n s_j \frac{\partial}{\partial s_j} (|x-s|^{2-n}) \\ &= -|x-s|^{2-n} - 2|x-s|^{-n} \sum_{j=1}^n s_j (x_j - s_j) \\ &= |x-s|^{-n} \left\{ -|x-s|^2 - 2 \sum_{j=1}^n (x_j s_j - s_j^2) \right\} \\ &= |x-s|^{-n} \left\{ -\sum_{j=1}^n (x_j - s_j)^2 - 2 \sum_{j=1}^n (x_j s_j - s_j^2) \right\} \\ &= |x-s|^{-n} \left\{ -\sum_{j=1}^n x_j^2 + \sum_{j=1}^n s_j^2 \right\} \\ &= |x-s|^{-n} (1 - |x|^2) = P(x, s). \end{aligned}$$

Ahora bien, como consecuencia de la Proposición 1.35, para $n \geq 2$, la función radial $|x-s|^{2-n}$ es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{s\}$ respecto a x . Además, obsérvese que los parciales $\frac{\partial}{\partial s_j}$ y los factores s_j no afectan la armonicidad. Por lo tanto, $P(x, s)$ es armónico en $\mathbb{R}^n \setminus \{s\}$ respecto a x . ■

Lema 1.45 El núcleo de Poisson, $P(x, s)$, tiene las siguientes propiedades:

- (i) $P(x, s) \geq 0$ y dados $a, b \in \Sigma_{n-1}$ se verifica $P(ra, b) = P(rb, a) \forall 0 \leq r < 1$.
- (ii) $\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x, s) ds = 1$ para cada $x \in D$.
- (iii) $\forall \delta > 0, \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|a-s| > \delta} P(ra, s) ds = 0 \forall a \in \Sigma_{n-1}$ (i.e., uniformemente en Σ_{n-1}).

Demostración.

- (i) De la definición, es claro que $P(x, s) \geq 0$. Por otra parte, si $a, b \in \Sigma_{n-1}$ y $0 \leq r < 1$, entonces,

$$\begin{aligned} |ra - b|^2 &= \sum_{j=1}^n (ra_j - b_j)^2 = \sum_{j=1}^n (r^2 a_j^2 - 2ra_j b_j + b_j^2) \\ &= r^2 |a|^2 - 2r(a \cdot b) + |b|^2 = r^2 - 2r(a \cdot b) + 1. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$|rb - a|^2 = r^2 - 2r(b \cdot a) + 1.$$

Así,

$$|ra - b| = |rb - a|.$$

Luego,

$$P(ra, b) = \frac{1 - r^2}{|ra - b|^n} = \frac{1 - r^2}{|rb - a|^n} = P(rb, a).$$

- (ii) Sea $s \in \Sigma_{n-1}$ y definamos $u_s(x) = P(x, s)$ para cada $x \in B$. Por el Lema 1.44, sabemos que u_s es armónica en B .

Por la PVM, $\forall 0 < r < 1$ se verifica

$$u_s(0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u_s(0 + rx') dx'.$$

Pero, por definición,

$$u_s(0) = P(0, s) = 1.$$

Así, $\forall 0 < r < 1$ se tiene

$$1 = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u_s(rx') dx' = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(rx', s) dx'.$$

Más aún, esto vale también para $r = 0$, pues $\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} dx' = \frac{|\Sigma_{n-1}|}{|\Sigma_{n-1}|} = 1$.

Y, usando la igualdad del inciso (i), se sigue que

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(rs, x') dx' = 1 \quad \forall s \in \Sigma_{n-1} \text{ y } \forall 0 \leq r < 1.$$

O equivalentemente,

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x, x') dx' = 1 \quad \forall x \in B.$$

- (iii) Sea $\delta > 0$. Entonces, $\forall 0 \leq r < 1$ y $\forall a, s \in \Sigma_{n-1}$ tales que

$$|s - a| > \delta$$

se tiene

$$\delta < |a - s| \leq |a - ra| + |ra - s| = 1 - r + |ra - s|$$

$$\Rightarrow \delta - 1 + r < |ra - s|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|ra - s|} < \frac{1}{\delta - 1 + r}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{|s-a|>\delta} P(ru, s) ds &= \int_{|s-a|>\delta} \frac{1-r^2}{(ru-s)^n} ds < \int_{|s-a|>\delta} \frac{1-r^2}{(\delta-1+r)^n} ds \\ &\leq \frac{1-r^2}{(\delta-1+r)^n} \int_{\Sigma_{n-1}} ds = \frac{1-r^2}{(\delta-1+r)^n} |\Sigma_{n-1}| \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0 \end{aligned}$$

independientemente de $a \in \Sigma_{n-1}$. Es decir,

$$\int_{|s-a|>\delta} P(ru, s) ds \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0 \text{ uniformemente en } \Sigma_{n-1}.$$

■

1.4.3. Solución al problema clásico de Dirichlet en la bola unitaria

Teorema 1.46 (Solución al problema clásico de Dirichlet en $B = B_1(0)$) Sea f continua en Σ_{n-1} . Entonces, la función u definida en \bar{B} como

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x, s) f(s) ds & x \in B \\ f(x) & x \in \Sigma_{n-1} \end{cases}$$

es continua en \bar{B} y armónica en B . Por lo tanto, es la solución al problema clásico de Dirichlet en B con función frontera f .

Demostración. Veamos primero que u es armónica en B . Sean $x_0 \in B$ y $r > 0$ tales que

$$\overline{B_r(x_0)} \subset B.$$

Como $P(\cdot, s)$ es armónico en B (Lema 1.44), sabemos que $P(\cdot, s)$ debe satisfacer la PVM en B ; así, para cada $s \in \Sigma_{n-1}$, tenemos

$$P(x_0, s) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x_0 + r\sigma, s) d\sigma.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x_0, s) f(s) ds \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \left(\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x_0 + r\sigma, s) d\sigma \right) f(s) ds \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \left(\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x_0 + r\sigma, s) f(s) ds \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Esto muestra que u cumple la PVM en B y, por lo tanto, u es armónica en B .

Para demostrar la continuidad de u en \bar{B} , sólo falta probar que u es continua en Σ_{n-1} . Bastará mostrar que

$$u(rx') \xrightarrow{r \rightarrow 1} f(x') \quad \forall x' \in \Sigma_{n-1}. \quad (1.32)$$

Sea $M = (\Sigma_{n-1} / (1 + 2\|f\|_\infty))^{-1}$.

Veamos: como f es uniformemente continua en el compacto Σ_{n-1} , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |a - b| < \delta \text{ entonces } |f(a) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

y, por la propiedad (iii) del núcleo de Poisson (Lema 1.45(iii)),

$$\int_{|a-x'| \geq \delta} P(rx', s) ds < \frac{\varepsilon}{M}$$

si r está suficientemente cerca de 1.

Luego,

$$\begin{aligned} |u(rx') - f(x')| &= \left| \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(rx', s) f(s) ds - f(x') \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x, s) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(rx', s) [f(s) - f(x')] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \left(\int_{|s-x'| < \delta} + \int_{|s-x'| \geq \delta} \right) P(rx', s) |f(s) - f(x')| ds \\ &< \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \left(\frac{\varepsilon}{M} \int_{|s-x'| < \delta} P(rx', s) ds + 2\|f\|_\infty \int_{|s-x'| \geq \delta} P(rx', s) ds \right) \\ &\leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \left(\frac{\varepsilon}{M} \int_{\Sigma_{n-1}} P(rx', s) ds + 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{M} \right) \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} (1 + 2\|f\|_\infty) \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

si r está suficientemente cerca de 1. Esto prueba (1.32). ■

Por brevedad, decimos que

$$u(x) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x, s) f(s) ds$$

es la solución al problema clásico de Dirichlet en B con función frontera f .

1.4.4. El problema clásico de Dirichlet en cualquier bola $B_R(x_0)$

Si queremos resolver el problema clásico de Dirichlet en cualquier bola $B_R(x_0)$ de \mathbb{R}^n con función frontera f , i.e., f continua en $\partial B_R(x_0)$, todo lo que tenemos que hacer es reducir el problema al caso de la bola unitaria, usando traslaciones y dilataciones.

Teorema 1.47 (Solución al problema clásico de Dirichlet en cualquier bola)
Sea f continua en $\partial B_R(x_0)$. Entonces, la función

$$u(x) = \frac{R^{n-2}}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - x_0 - Rs|^n} f(x_0 + Rs) ds \quad (1.33)$$

es la solución al problema clásico de Dirichlet en $B_R(x_0)$ con función frontera f .

Demostración. Obsérvese que, para $x \in B_R(x_0)$, tenemos $x = x_0 + Rx'$, con $x' \in B = B_1(0)$. Consideremos la función

$$g(x') = f(x_0 + Rx') \quad \text{para } x' \in B$$

y resolvamos el problema de Dirichlet en la bola unitaria con función frontera g . Sabemos que la solución es

$$v(x') = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P(x, s) g(s) ds.$$

Luego, la solución del problema de Dirichlet original en $B_R(x_0)$ con función frontera f viene dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= v\left(\frac{x - x_0}{R}\right) \\ &= \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} P\left(\frac{x - x_0}{R}, s\right) f(x_0 + Rs) ds \\ &= \frac{R^{n-2}}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - x_0 - Rs|^n} f(x_0 + Rs) ds. \end{aligned}$$

■

Observación 1.48 Una consecuencia inmediata del Teorema 1.47 es la siguiente: Supongamos que u es una función armónica en $B_R(x_0)$ y continua en $\overline{B_R(x_0)}$, de modo que u es, en particular, continua en $\partial B_R(x_0)$. Entonces,

$$u(x) = \frac{R^{n-2}}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - x_0 - Rs|^n} u(x_0 + Rs) ds. \quad (1.34)$$

(Nótese que u misma es la función frontera). Se dice que (1.34) es la representación de Poisson para u en $\overline{B_R(x_0)}$.

El Teorema 1.47 nos permite probar el siguiente resultado, que nos será de gran utilidad.

Teorema 1.49 *Supongamos que u es una función continua en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y satisface la siguiente condición: para cada $x_0 \in \Omega$, existe una sucesión de números positivos $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $r_j \downarrow 0$ (la sucesión puede depender del punto x_0) y tal que, para cada r_j ,*

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r_j s) ds.$$

Entonces, u es armónica en Ω .

(Nótese que ésta es una versión débil de la propiedad del valor medio.)

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$ y elijamos $r > 0$ tal que

$$\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega.$$

Sea v la solución al problema de Dirichlet en $B_r(x_0)$ con función frontera u . Mostraremos que $u = v$ en $B_r(x_0)$ y, como v es armónica en $B_r(x_0)$, entonces v también. Puesto que x_0 es un punto arbitrario de Ω , el teorema estará probado.

Supongamos que $u - v > 0$ para algún punto de $B_r(x_0)$ y sea

$$m = \max \{ u(x) - v(x) : x \in \overline{B_r(x_0)} \} > 0.$$

Dado que $u - v = 0$ en la frontera $\partial B_r(x_0)$, entonces el conjunto

$$K = \{ x \in \overline{B_r(x_0)} : (u - v)(x) = m \}$$

es un subconjunto compacto de $B_r(x_0)$, pues K no puede cortar a $\partial B_r(x_0)$.

Ahora bien, como la función

$$d(x) = |x - x_0| \text{ para } x \in K$$

es una función continua en el compacto K , existe $x_1 \in K$ de distancia maximal a x_0 .

Consecuentemente, existe $j \in \mathbb{N}$ de modo que $B_{r_j}(x_1) \subset B_r(x_0)$ y al menos la mitad de la esfera $\partial B_{r_j}(x_1)$ no interseca a K , debido a la maximalidad de la distancia $|x_1 - x_0|$.

Ahora, por hipótesis,

$$u(x_1) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_1 + r_j s) ds.$$

Además, v cumple la propiedad del valor medio en $B_{r_j}(x_1)$ por ser armónica en $B_r(x_0)$. Así,

$$v(x_1) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} v(x_1 + r_j s) ds.$$

Luego,

$$m = (u - v)(x_1) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} (u - v)(x_1 + r_j s) ds. \quad (1.35)$$

Pero,

$$(u - v)(x_1 + r_j s) < m$$

en al menos la mitad de la esfera $\partial B_{r_j}(x_1)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} (u - v)(x_1 + r_j s) ds < m \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} ds = m,$$

lo cual contradice a (1.35).

Si suponemos que $u - v < 0$ para algún punto de $B_r(x_0)$, procedemos de forma análoga usando el mínimo en lugar del máximo y obtenemos de nuevo una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $u = v$ en $B_r(x_0)$. ■

Teorema 1.50 (Principio de Reflexión) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio simétrico respecto al hiperplano $x_n = 0$, i.e.,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, -x_n) \in \Omega.$$

Sea u una función continua en Ω , armónica en

$$\Omega^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega : x_n > 0\}$$

e impar en la variable x_n , esto es,

$$u(x_1, x_2, \dots, -x_n) = -u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega.$$

Entonces, u es armónica en Ω .

Demostración. Será suficiente mostrar que u satisface la propiedad del valor medio en la forma expuesta en el teorema previo.

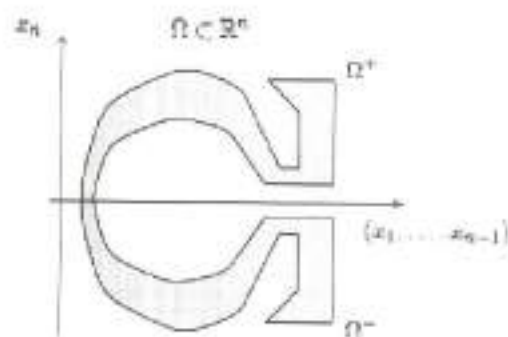
Caso 1: Si $x_0 \in \Omega^+$ entonces $\forall r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega^+$ se tiene

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r s) ds$$

ya que u es armónica en Ω^+ por hipótesis y, por tanto, satisface la PVM en Ω^+ .

Caso 2: Si $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega : x_n < 0\}$, entonces $(x_1, x_2, \dots, -x_n) \in \Omega^+$.

Para cada $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega$, definamos $y' = (y_1, y_2, \dots, -y_n) \in \Omega$.

Figura 1.3: Un dominio simétrico respecto al hiperplano $x_n = 0$

Así, tenemos que $x'_0 \in \Omega^+$. Luego, como en el Caso 1, $\forall r > 0$ tal que $\overline{B_r(x'_0)} \subset \Omega^+$ se tiene

$$u(x'_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x'_0 + rs) ds.$$

O, equivalentemente, $\forall r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega^-$ se tiene

$$-u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} (-u)(x_0 + rs') ds'$$

i.e.,

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + rs') ds'.$$

Caso 3: Si $x_0 = (x_1, x_2, \dots, 0)$ entonces $v(x_0) = -v(x_0)$. Por tanto,

$$u(x_0) = 0.$$

Por otra parte, $\forall r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, se tiene

$$\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + rs) ds = 0$$

debido a que el valor de u en un punto x y en su simétrico son opuestos aditivos, de modo que el promedio en la esfera es cero. Entonces,

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + rs) ds.$$

En cualquier caso, tenemos que si $x_0 \in \Omega$ entonces

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + rs) \, ds$$

si $r > 0$ es suficientemente pequeño.

Por lo tanto, es claro que $\forall x_0 \in \Omega$, podemos construir una sucesión de números positivos $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $r_j \downarrow 0$ y tal que, para cada r_j ,

$$u(x_0) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r_j s) \, ds.$$

Por el Teorema 1.49, concluimos que u es armónica en Ω . ■

Como una última aplicación de la propiedad del valor medio, probaremos una extensión del tradicional Teorema de Liouville.

Teorema 1.51 (Teorema de Liouville Extendido) *Sea u una función armónica y acotada en \mathbb{R}^n , entonces u es constante.*

Demostración. Por hipótesis, $\exists M > 0$ tal que $|u(x)| \leq M \, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y sea $d = |x_1 - x_2|$. Elijamos $r > d \geq 0$. Entonces, por la PVM (como la vimos en la Observación 1.38, ecuación (1.28)),

$$\begin{aligned} |u(x_1) - u(x_2)| &= \left| \frac{1}{|B_r(x_1)|} \int_{B_r(x_1)} u(x) \, dx - \frac{1}{|B_r(x_2)|} \int_{B_r(x_2)} u(x) \, dx \right| \\ &= \frac{n}{r^n |\Sigma_{n-1}|} \left| \int_{B_r(x_1)} u(x) \, dx - \int_{B_r(x_2)} u(x) \, dx \right| \\ &= \frac{n}{r^n |\Sigma_{n-1}|} \left| \int_{B_r(x_1) - B_r(x_2)} u(x) \, dx - \int_{B_r(x_2) - B_r(x_1)} u(x) \, dx \right| \\ &\leq \frac{n}{r^n |\Sigma_{n-1}|} \left(\int_{B_r(x_1) - B_r(x_2)} |u(x)| \, dx + \int_{B_r(x_2) - B_r(x_1)} |u(x)| \, dx \right) \\ &\leq \frac{nM}{r^n |\Sigma_{n-1}|} \left(\int_{B_r(x_1) - B_r(x_2)} dx + \int_{B_r(x_2) - B_r(x_1)} dx \right) \\ &= \frac{nM}{r^n |\Sigma_{n-1}|} (|B_r(x_1) - B_r(x_2)| + |B_r(x_2) - B_r(x_1)|) \\ &= \frac{2nM}{r^n |\Sigma_{n-1}|} |B_r(x_1) - B_r(x_2)|. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} |B_r(x_1) - B_r(x_2)| &= |B_r(x_1)| - |B_r(x_1) \cap B_r(x_2)| \\ &= \frac{r^n |\Sigma_{n-1}|}{n} - |B_r(x_1) \cap B_r(x_2)|. \end{aligned} \tag{1.37}$$

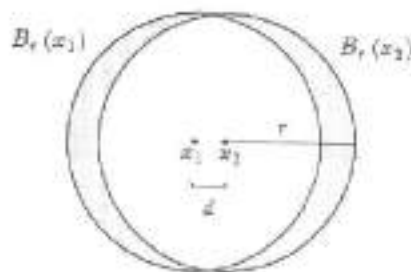


Figura 1.4: La región sombreada corresponde a $|B_r(x_1) - B_r(x_2)| + |B_r(x_2) - B_r(x_1)|$

Pero, dado que $r > d = |x_1 - x_2| \geq 0$, tenemos

$$|B_r(x_1) \cap B_r(x_2)| \geq |B_{r-d}(0)| = \frac{(r-d)^n |\Sigma_{n-1}|}{n} = \frac{s^n |\Sigma_{n-1}|}{n} \quad (1.38)$$

donde $s = r - d \leq r$. De (1.37) y (1.38), obtenemos

$$\begin{aligned} |B_r(x_1) - B_r(x_2)| &\leq \frac{r^n |\Sigma_{n-1}|}{n} - \frac{s^n |\Sigma_{n-1}|}{n} \\ &= \frac{|\Sigma_{n-1}|}{n} (r^n - s^n) \\ &= \frac{|\Sigma_{n-1}|}{n} (r - s) (r^{n-1} + r^{n-2}s + \dots + rs^{n-2} + s^{n-1}) \\ &\leq \frac{|\Sigma_{n-1}|}{n} d \underbrace{(r^{n-1} + r^{n-1} + \dots + r^{n-1} + r^{n-1})}_{n \text{ veces}} \\ &= |\Sigma_{n-1}| dr^{n-1}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

De (1.36) y (1.39) resulta

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \frac{2nMd}{r}.$$

Tomando el límite cuando $r \rightarrow \infty$, se sigue que

$$u(x_1) = u(x_2)$$

y concluimos que u es constante. \blacksquare

Capítulo 2

Funciones Armónicas en \mathbb{R}_+^{n+1}

*Permiteme, Señor, ampliar mis horizontes
y encontrar la armonía entre sus bordes.*

El problema de Dirichlet puede también formularse para dominios no acotados. Consideremos el espacio euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , cuyos puntos denotaremos por (x, t) con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$. En este capítulo, plantearemos el problema clásico de Dirichlet para el semiespacio superior de \mathbb{R}^{n+1} ; es decir, nuestro dominio será

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$$

cuya frontera es

$$\partial\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n.$$

El Problema Clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} : Dada una función continua f definida en $\partial\mathbb{R}_+^{n+1} \cong \mathbb{R}^n$, se busca una función $u(x, t)$ definida en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ que sea armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} , continua en

$$\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$$

y tal que

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Obsérvese que, en caso de existir una solución al problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} , ésta no es única, pues si $u(x, t)$ es una solución entonces $v(x, t) = u(x, t) + t$ también lo es. En efecto, es claro que $\Delta[u(x, t) + t] = 0$ y, además, es evidente que $v(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ y v es continua en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ por ser suma de continuas.

Sin embargo, podremos asegurar la unicidad siempre que la solución sea acotada. Para probar esto requerimos el siguiente teorema:

Teorema 2.1 *Sea u una función continua y acotada en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ y armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} . Supongamos que $u(x, 0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $u = 0$.*

Demostración. Definamos $v : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$v(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{si } t \geq 0 \\ -u(x, t) & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Así, v es continua en \mathbb{R}^{n+1} , armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} (pues $v = u$ para $t > 0$) e impar en la variable t . Por el Principio de Reflexión, se sigue que v es armónica en todo \mathbb{R}^{n+1} .

Además, v está acotada porque u lo está. El Teorema de Liouville Extendido nos asegura entonces que v es constante en \mathbb{R}^{n+1} y, como $v(x, 0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, se sigue que $v = 0$ en \mathbb{R}^{n+1} .

En consecuencia, $u = 0$. ■

Corolario 2.2 (Unicidad para soluciones acotadas) *Si u es una solución acotada para el problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} con función frontera f , entonces u es la única solución acotada.*

Demostración. Supongamos que v es otra solución acotada para el mismo problema. Entonces, la función $u - v$ definida en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} , continua y acotada en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$. Además, $(u - v)(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Por el Teorema 2.1, concluimos que $u - v = 0$. Es decir, $u = v$. ■

2.1. El núcleo de Poisson para \mathbb{R}_+^{n+1}

La teoría de funciones armónicas en \mathbb{R}_+^{n+1} tiene características notablemente distintas a las estudiadas en el Capítulo 1. Si queremos encontrar una solución para el problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} , de entrada, se advierte que tendremos que trabajar con el siguiente hecho importante: el dominio \mathbb{R}_+^{n+1} no es acotado y su frontera $\partial\mathbb{R}_+^{n+1}$ no es compacta. Esto nos obliga a observar cuidadosamente el comportamiento de la función frontera f en infinito.

En el capítulo anterior, cuando estudiamos el problema de Dirichlet en dominios acotados, no se requería esto. Más aún, contábamos con otra gran ventaja: la función frontera era acotada. En efecto, dado que f es una función continua en la frontera $\partial\Omega$ de alguna región Ω acotada en \mathbb{R}^n , iba implícito este rasgo importante de f , pues toda función continua definida en un compacto K es acotada en K .

Mucho nos ayudaría aquí que el comportamiento de f en infinito fuese "bondadoso". Así que, para empezar la búsqueda de una solución al problema clásico de

Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} , impondremos una fuerte condición a f : a saber, que f esté en la clase $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En lo que sigue, procederemos formalmente. Asumiendo que *el dato* (la función frontera) es una función en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, queremos encontrar una función $u(x, t)$ definida en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, continua en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ tal que

$$\Delta u(x, t) = 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

y tal que

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Expresamos

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Entonces, lo que queremos es

$$\begin{cases} \Delta_x u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Nuestra herramienta será ahora la transformada de Fourier en \mathbb{R}^n , así como las series de Fourier nos sirvieron para el caso del disco. En (2.1), tomemos transformadas de Fourier con respecto a la variable espacial x :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\Delta_x u(\cdot, t))(\xi) + \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\cdot, t)\right)(\xi) = 0 \\ \mathcal{F}(u(\cdot, 0))(\xi) = \hat{f}(\xi). \end{cases} \quad (2.2)$$

Definamos

$$h(\xi, t) = \mathcal{F}(u(\cdot, t))(\xi)$$

y observamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\cdot, t)\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{F}(u(\cdot, t))(\xi) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(\xi, t). \end{aligned}$$

Entonces, (2.2) es lo mismo que

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\Delta_x u(\cdot, t))(\xi) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(\xi, t) = 0 \\ h(\xi, 0) = \hat{f}(\xi). \end{cases} \quad (2.3)$$

Ahora, como $\Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, aplicando la fórmula

$$\mathcal{F}(\partial^{\alpha} g)(\xi) = (2\pi i \xi)^{\alpha} \widehat{g}(\xi),$$

([11] p. 249), tenemos que

$$\mathcal{F}(\Delta_x u(\cdot, t))(\xi) = \left[\sum_{j=1}^n (2\pi i \xi_j)^2 \right] \mathcal{F}(u(\cdot, t))(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 h(\xi, t).$$

Por tanto, (2.3) es lo mismo que

$$\begin{cases} -4\pi^2 |\xi|^2 h(\xi, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(\xi, t) = 0 \\ h(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi). \end{cases} \quad (2.4)$$

Para cada ξ , ésta es una simple ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea con coeficientes constantes, de segundo orden, cuya ecuación característica (ver, por ejemplo, [27] pp. 133-136) es

$$am^2 + bm + c = 0$$

con $a = 1$, $b = 0$, $c = -4\pi^2 |\xi|^2$. Las raíces son: $m_1 = 2\pi |\xi|$ y $m_2 = -2\pi |\xi|$, de modo que la solución general de (2.4) es

$$h(\xi, t) = c_1 e^{-2\pi |\xi| t} + c_2 e^{2\pi |\xi| t}.$$

Como $h(\xi, t) = \mathcal{F}(u(\cdot, t))(\xi) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (ver Lema de Riemann-Lebesgue, [11], teo. 8.22(f), p. 249), buscamos una solución acotada. La única posibilidad es entonces

$$h(\xi, t) = c_1 e^{-2\pi |\xi| t}.$$

Luego, la condición $h(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$ implica que

$$h(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi |\xi| t}.$$

Pero, por definición, $h(\xi, t) = \mathcal{F}(u(\cdot, t))(\xi)$. Cabe esperar, por tanto, que la transformada de Fourier inversa de esta función sea la solución $u(x, t)$ que andamos buscando. Supongamos, pues, que

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(h(\cdot, t))(x) \quad \text{con } h(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi |\xi| t}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x} e^{-2\pi |\xi| t} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \right] e^{-2\pi i \xi \cdot x} e^{-2\pi |\xi| t} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot (y-x)} e^{-2\pi |\xi| t} d\xi \right] f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Definamos

$$P(x) = \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|x|}\right)(x) \quad (2.6)$$

y sea

$$P_t(x) = t^{-n} P\left(\frac{x}{t}\right).$$

Así,

$$\begin{aligned} P_t(y-x) &= t^{-n} P\left(\frac{y-x}{t}\right) = t^{-n} \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)\left(\frac{y-x}{t}\right) \\ &= t^{-n} t^n \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)(y-x) = \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)(y-x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|\xi|} e^{-2\pi\xi \cdot (y-x)} d\xi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.7) en (2.5), obtenemos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy$$

ya que la transformada de Fourier de una función radial también es radial (ver [26], p.135).

En conclusión, nuestro candidato a solución para el problema de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} con función frontera $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy = (P_t * f)(x)$$

donde $P_t(x) = t^{-n} P\left(\frac{x}{t}\right)$, con $P(x) = \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)(x)$.

Para $t > 0$, a la función $P_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P_t(x) = t^{-n} P\left(\frac{x}{t}\right) \text{ donde } P(x) = \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)(x) \text{ para } x \in \mathbb{R}^n$$

se le llama el núcleo de Poisson para el semiespacio superior \mathbb{R}_+^{n+1} (o para \mathbb{R}^n). Daremos la definición formal después de determinar explícitamente a $P(x) = \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)(x)$.

Para $n = 1$ es muy simple obtener $P(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\xi|} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi(-\xi)} e^{-2\pi i x \xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi(1-ix)} d\xi + \int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi(1+ix)} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{-2\pi(1-ix)} e^{-2\pi t(1-ix)} \right]_0^\infty + \left[\frac{1}{-2\pi(1+ix)} e^{-2\pi t(1+ix)} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2\pi(1-ix)} + \frac{1}{2\pi(1+ix)} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, para $n = 1$,

$$P_1(x) = t^{-1} P\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{t^{-1}}{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}. \quad (2.8)$$

La solución propuesta es, en este caso:

$$u(x, t) = (P_1 * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(x-y) f(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + (x-y)^2} f(y) dy.$$

Para el caso general ($n \geq 1$), el cálculo de $P(x) = \mathcal{F}(e^{-2\pi|x|})(x)$ es algo más complicado. Necesitamos considerar primero las siguientes identidades:

$$\frac{1}{1+t^2} = \int_0^\infty e^{-(1+t^2)u} du \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

$$e^{-\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta t}{1+t^2} dt \quad \forall \beta > 0. \quad (2.10)$$

La igualdad (2.9) es obvia, mientras que la identidad (2.10) se obtiene aplicando el Teorema del Residuo ([17], pp. 280-285) a la función $e^{i\beta z}/(1+z^2)$.

Combinando estas ecuaciones, tenemos $\forall \beta > 0$

$$\begin{aligned}
e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \beta t \left(\int_0^\infty e^{-u} e^{-u^2} du \right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left(\int_0^\infty e^{-u^2} \cos \beta t dt \right) du \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} e^{i\beta t} dt \right) du \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left(\pi \int_{-\infty}^\infty e^{-i\beta^2 u^2} e^{-2\pi i \beta s} ds \right) du \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} \right) du,
\end{aligned}$$

o.e.,

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} du \quad \forall \beta > 0. \quad (2.11)$$

Usando la identidad (2.11) podemos ahora sí calcular $P(x)$:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \mathcal{F}\left(e^{-2n|\cdot|}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2r|\xi|} e^{-2r|\xi|} d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{u^2 + \xi^2}{4r}} du \right) e^{-2r|\xi|^2} d\xi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{u^2 + \xi^2}{4r}} e^{-2r|\xi|^2} d\xi \right) du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\left(\sqrt{\frac{u}{r}} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-u|x|^2} \right) du \\
 &= \frac{1}{r^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-ru} u^{\frac{n+1}{2}} e^{-u|x|^2} du \\
 &= \frac{1}{r^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{n+1}{2}} dv \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{r^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}
 \end{aligned}$$

donde Γ es la famosa *función gamma* de Euler, definida para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$, por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

(En el Apéndice A, presentamos una breve nota sobre algunos hechos relevantes de esta función.)

Así,

$$P(x) = c_n \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{r^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2}{|\Sigma_n|}$$

y Σ_n es la frontera de la bola unitaria en \mathbb{R}^{n+1} . Finalmente, tenemos

$$P_t(x) = t^{-n} P\left(\frac{x}{t}\right) = c_n \frac{t^{-n}}{\left(1+\left|\frac{x}{t}\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = c_n \frac{t}{\left(t^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (2.12)$$

[Nótese que para $n = 1$ la expresión (2.12) se reduce a la ecuación (2.8).]

Por lo tanto, en general, para $n \geq 1$ la solución propuesta es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (P_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy \\ &= c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y) dy. \end{aligned}$$

Definición 2.3 Para $t > 0$, la función $P_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P_t(x) = c_n \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

donde

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2}{|\Sigma_n|}$$

se llama núcleo de Poisson para el semiespacio superior \mathbb{R}_+^{n+1} (o para \mathbb{R}^n).

Definición 2.4 Dada $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, diremos que la convolución

$$(P_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy$$

con $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, es la integral de Poisson de f o la representación de Poisson de f , y la denotaremos $P_t(f)$.

Más adelante probaremos que, en efecto, $u = P_t(f)$ es una solución al problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} y extenderemos a $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ los teoremas tipo Fatou que demostramos para el disco. Necesitamos probar primero algunas propiedades importantes que tiene el núcleo de Poisson.

Lema 2.5 El núcleo de Poisson, $P_t(x)$, tiene las siguientes propiedades:

- (i) Para cada $t > 0$, $P_t(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, es positivo y es radial.
- (ii) Para cada $t > 0$, se verifica $\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x) dx = 1$.
- (iii) $\forall \delta > 0$, $P_t(x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ uniformemente en $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta\}$.
- (iv) $\forall \delta > 0$, se verifica $\int_{|x| > \delta} P_t(x) dx \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$.

Demostración.

(i) Claramente, para cada $t > 0$,

$$P_t(x) = c_n \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} > 0 \tag{2.13}$$

pues

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2}{|\Sigma_n|} > 0$$

y, como el denominador en (2.13) no se anula, $P_t(x)$ es una función continua en \mathbb{R}^n . Además, es claro que $P_t(x)$ se va a cero en infinito y es una función radial.

(ii) Para cada $t > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-1} P\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} P(u) du \\ &= c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|u|^2)^{\frac{n+1}{2}}} du \\ &= c_n \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\Sigma_{n-1}} \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx dr \quad (\text{en coordenadas polares}) \\ &= c_n |\Sigma_{n-1}| \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aplicando la fórmula (A.2) del Apéndice A, vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.15) en (2.14), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x) dx = c_n |\Sigma_{n-1}| \left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)$$

y, aplicando la fórmula (A.1) del Apéndice A,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x) dx &= c_n \left(\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right) \left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right) \\ &= c_n \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = 1. \end{aligned}$$

(iii) Sea $\delta > 0$. Para todo $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta\}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq P_t(x) &= c_n \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &\leq c_n \frac{t}{(t^2 + \delta^2)^{\frac{n+1}{2}}} \leq c_n \frac{t}{\delta^{n+1}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

(iv) Por el inciso anterior, sabemos que $P_t(x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ uniformemente en $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta\} \quad \forall \delta > 0$. Así,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \delta} P_t(x) dx = \int_{|x| \geq \delta} \lim_{t \rightarrow 0} P_t(x) dx = 0,$$

■

Las propiedades del núcleo de Poisson, $P_t(x)$, probadas en el Lema 2.5 demuestran, de hecho, el siguiente resultado:

Lema 2.6 *La familia $(P_t)_{t>0}$ es una identidad aproximada en \mathbb{R}^n .*

Lema 2.7 *La transformada de Fourier del núcleo de Poisson está dada por*

$$\widehat{P}_t(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}. \quad (2.16)$$

Además, $\forall s, t > 0$, se tiene

$$P_{s+t}(x) = (P_s * P_t)(x). \quad (2.17)$$

Demostración. Sabemos que

$$P_t(x) = t^{-n} P\left(\frac{x}{t}\right)$$

donde, por definición,

$$P(\xi) = \mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)(\xi).$$

Usando la fórmula

$$\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(t\xi)$$

(ver [11], tomo 8.22(b)), se sigue que

$$\widehat{P}_t(x) = \widehat{P}(t\xi) = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left(e^{-2\pi|\cdot|}\right)\right](t\xi) = e^{-2\pi|t\xi|} = e^{-2\pi t|\xi|}.$$

Para demostrar la fórmula (2.17), observemos que

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{s+t}(\xi) &= e^{-2\pi(s+t)|\xi|} \\ &= e^{-2\pi s|\xi|} e^{-2\pi t|\xi|} \\ &= \widehat{P}_s(\xi) \widehat{P}_t(\xi) \\ &= \widehat{P_s * P_t}(\xi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widehat{P}_{s+t} = \widehat{P_s * P_t}$ y, en consecuencia, $P_{s+t} = P_s * P_t$. ■

Otra característica valiosa de $P_t(x)$ es la siguiente:

Lema 2.8 El núcleo de Poisson $P_t(x)$, como función de (x, t) , es armónico en \mathbb{R}_+^{n+1} .

Demostración. Para $n > 1$, consideremos la función

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Obsérvese que

$$P_t(x) = \frac{-c_n}{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{-c_n}{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \left[(t^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \right] &= \left(\frac{-c_n}{n-1} \right) \left(\frac{1-n}{2} \right) (2t) (t^2 + |x|^2)^{-\frac{n+3}{2}} \\ &= c_n \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = P_t(x). \end{aligned}$$

Pero,

$$\varphi(x, t) = (t^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} = |(x, t)|^{1-n},$$

es decir, $\varphi(x, t)$ es la función radial

$$\varphi(x, t) = |(x, t)|^{2-(n+1)}.$$

De acuerdo con la Proposición 1.35, $\varphi(x, t)$ es armónica en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Y, por la Proposición 1.34, se sigue que $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t)$ es armónica en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Por lo tanto, $P_t(x) = \frac{-c_n}{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t)$ es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} .

En el caso $n = 1$, sabemos que

$$P_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}$$

y, entonces,

$$P_t(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \log(t^2 + x^2) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \log |(x, t)|.$$

Pero, la función $\psi(x, t) = \log |(x, t)|$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. En efecto, un cálculo directo muestra que

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2} + \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} = 0, \quad \text{con } (x, t) \neq (0, 0).$$

De nuevo por la Proposición 1.34, se sigue que $P_t(x)$ es armónico en \mathbb{R}_+^2 . ■

Teorema 2.9 Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Sea $u = P(f)$, la integral de Poisson de f , definida en \mathbb{R}_+^{n+1} ; esto es,

$$u(x, t) = (P_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy.$$

Entonces, u es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} y, además:

- (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- (b) Si f es uniformemente continua y acotada en \mathbb{R}^n , entonces $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$ uniformemente en \mathbb{R}^n .
- (c) Si f es continua en \mathbb{R}^n , entonces $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$ uniformemente en cada compacto de \mathbb{R}^n .
- (d) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$ en la topología débil- $*$ de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. La armonicidad de u se sigue de la armonicidad de P_t porque

$$\Delta u(x, t) = \Delta (P_t * f)(x) = (\Delta P_t * f)(x) = 0.$$

Pasemos a lo demás:

- (a) Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$. Mostremos que $\|P_t * f - f\|_p \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Esto probará que $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} (P_t * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) f(x-y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)] P_t(y) dy. \end{aligned}$$

Tomando la norma $\|\cdot\|_p$ y usando la desigualdad de Minkowski para integrales ([11], p. 194), obtenemos

$$\begin{aligned} \|P_t * f - f\|_p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - y) - f\|_p P_t(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p P_t(y) dy \end{aligned}$$

donde τ_y es el operador traslación definido por $\tau_y f(x) = f(x-y)$.

Como τ_y es continuo en la norma de $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ver [11] p.238, prop. 8.5), tenemos que $\tau_y f \rightarrow f$ cuando $y \rightarrow 0$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Es decir,

$$\|\tau_y f - f\|_p \rightarrow 0 \text{ cuando } y \rightarrow 0.$$

Así, para el ε dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\tau_y f - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } |y| < \delta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|P_t * f - f\|_p &\leq \int_{|y| < \delta} \|\tau_y f - f\|_p P_t(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} \|\tau_y f - f\|_p P_t(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \int_{|y| < \delta} P_t(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} \|f(\cdot - y) - f\|_p P_t(y) dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) dy + 2\|f\|_p \int_{|y| \geq \delta} P_t(y) dy \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_p \int_{|y| \geq \delta} P_t(y) dy. \end{aligned}$$

Pero, por el Lema 2.5,

$$\int_{|y| \geq \delta} P_t(y) dy \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow 0;$$

por tanto,

$$\int_{|y| \geq \delta} P_t(y) dy < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}$$

para t suficientemente pequeño. En consecuencia,

$$\|P_t * f - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para t suficientemente pequeño. Por lo tanto,

$$u(\cdot, t) = P_t * f \rightarrow f \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^n).$$

- (b) Sea f uniformemente continua y acotada en \mathbb{R}^n . Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |a - b| < \delta \quad \text{entonces } |f(a) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Obsérvese que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$|(P_t * f)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) - f(x)| P_t(y) dy = I_1 + I_2$$

donde

$$I_1 = \int_{|y| < \delta} |f(x - y) - f(x)| P_t(y) dy < \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) dy = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$I_2 = \int_{|y| \geq \delta} |f(x - y) - f(x)| P_t(y) dy \leq 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} P_t(y) dy \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

de modo que

$$I_2 = |J_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } t \text{ es suficientemente pequeño.}$$

Por lo tanto,

$$|(P_t * f)(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ si } t \text{ es suficientemente pequeño}$$

y esto vale para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Por conclusión, $u(\cdot, t) = P_t * f \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$ uniformemente en \mathbb{R}^n .

(c) Si f es continua en \mathbb{R}^n , entonces para todo compacto K se tiene que f es uniformemente continua y acotada en K . Luego, por el mismo argumento de (b), se sigue que $u(\cdot, t) = P_t * f \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$ uniformemente en K .

(d) Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Obsérvese que, $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} |(P_t * f)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| P_t(y) dy \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) dy = \|f\|_\infty < \infty, \end{aligned}$$

de modo que $P_t * f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \forall t > 0$.

Como $L^\infty(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n)^*$, para probar que $u(\cdot, t) = P_t * f \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$ en la topología débil- $*$ de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, debemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (P_t * f)(x) \varphi(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n). \quad (2.18)$$

Sea, pues, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por el Teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * f)(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy \right] \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t(y-x) \varphi(x) dx \right] f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * \varphi)(y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * f)(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * \varphi)(y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(P_t * \varphi)(y) - \varphi(y)| |f(y)| dy \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |(P_t * \varphi)(y) - \varphi(y)| dy \\ &= \|f\|_\infty \|P_t * \varphi - \varphi\|_1 \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

pues, por el inciso (a), sabemos que $u(\cdot, t) = P_t * \varphi \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por tanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * f)(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

lo cual prueba (2.18). ■

Considerando el espacio $M(\mathbb{R}^n)$ formado por las medidas de Borel finitas en \mathbb{R}^n con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|(x) < \infty,$$

establecemos un resultado análogo al del inciso (d) del Teorema 2.9.

Teorema 2.10 Sea $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$, i.e., una medida de Borel finita en \mathbb{R}^n , y sea $u = P(\mu)$, la integral de Poisson de μ , definida en \mathbb{R}_+^{n+1} . Esto es,

$$u(x, t) = (P_t * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x - y) d\mu(y).$$

Entonces, u es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} y, además, $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mu$ en la topología débil- $*$ de $M(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. De nuevo, la armonicidad de u se sigue de la armonicidad de P_t porque

$$\Delta u(x, t) = \Delta (P_t * \mu)(x) = (\Delta P_t * \mu)(x) = 0.$$

Por otra parte, obsérvese que $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(P_t * \mu)(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x - y) d|\mu|(y) dx \\ &= \|P_t\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|(y) = |\mu|(\mathbb{R}^n) = \|\mu\| < \infty, \end{aligned}$$

de modo que $P_t * \mu \in L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow M(\mathbb{R}^n) \forall t > 0$. Como $M(\mathbb{R}^n) = C_0(\mathbb{R}^n)^*$ (ver [11], p. 223), para probar que $u(\cdot, t) = P_t * \mu \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mu$ en la topología débil- $*$ de $M(\mathbb{R}^n)$, debemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (P_t * \mu)(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n). \quad (2.19)$$

Sea, pues, $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Por el Teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * \mu)(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x - y) d\mu(y) \right] \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t(y - x) \varphi(x) dx \right] d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * \varphi)(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * \mu)(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * \varphi)(y) d\mu(y) - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) d\mu(y) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(P_t * \varphi)(y) - \varphi(y)| d|\mu|(y). \end{aligned}$$

Pero, por el Teorema 2.9(b), sabemos que $u(x, t) = P_t * \varphi \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \varphi$ uniformemente en \mathbb{R}^n . Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe t suficientemente pequeño tal que

$$|(P_t * \varphi)(y) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{|\mu|}.$$

En consecuencia,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (P_t * \mu)(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) \right| < \frac{\varepsilon}{|\mu|} \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|(y) = \varepsilon$$

si t es suficientemente pequeño, lo cual prueba (2.19). \blacksquare

2.2. Solución al problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1}

El inciso (c) del Teorema 2.9 nos permite resolver el problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} , con función frontera f :

Teorema 2.11 (Solución al Problema Clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1}) Sea f una función continua y acotada en \mathbb{R}^n . Entonces, la función $u(x, t)$ definida en \mathbb{R}_+^{n+1} por

$$u(x, t) = \begin{cases} (P_t * f)(x) & \text{si } t > 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

es continua en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ y armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} . Y, por lo tanto, es una solución al problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} , con función frontera f .

Demostración. Claramente, u es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} pues

$$\Delta u = \Delta (P_t * f) = \Delta P_t * f = 0,$$

ya que el núcleo de Poisson es armónico en \mathbb{R}_+^{n+1} . Además, $u|_{\partial\mathbb{R}_+^{n+1}} = f$, por definición. Sólo falta ver que u es continua en $\partial\mathbb{R}_+^{n+1} \cong \mathbb{R}^n$, es decir, en los puntos de la forma $(x, 0)$, con $x \in \mathbb{R}^n$.

Tomemos $(x_0, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^{n+1}$. Mostraremos que

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x,t) = u(x_0,0).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de f , existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x - x_0| < \delta$.

Por el inciso (c) del Teorema 2.9, sabemos que $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$ uniformemente en cada compacto de \mathbb{R}^n . En particular, $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$ puntualmente. Por tanto, existe t suficientemente pequeño tal que

$$|u(x,t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u(x_0,0)| &= |u(x,t) - f(x_0)| \\ &\leq |u(x,t) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que t sea suficientemente pequeño y que x esté suficientemente cerca de x_0 (i.e., $|x - x_0| < \delta$). Esto prueba que $u(x,t) \rightarrow u(x_0,0)$ cuando $(x,t) \rightarrow (x_0,0)$ y, por lo tanto, u es continua en $\partial\mathbb{R}_+^{n+1}$. ■

Recuérdese que la solución del problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} no es única, pues si $u(x,t)$ es una solución entonces $v(x,t) = u(x,t) + t$ también es solución.

Proposición 2.12 Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Sea $u = P(f)$, la integral de Poisson de f , definida en \mathbb{R}_+^{n+1} ; esto es,

$$u(x,t) = (P_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy.$$

Entonces,

$$\|u(\cdot, t)\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall t > 0.$$

Demostración. Por hipótesis

$$u(x,t) = (P_t * f)(x) = (f * P_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) P_t(y) dy.$$

Si $1 \leq p < \infty$, entonces tomamos la norma $\|\cdot\|_p$ y usamos la desigualdad de Minkowski para integrales ([11], p. 184), con lo cual obtenemos

$$\|u(\cdot, t)\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - y)\|_p P_t(y) dy = \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) dy = \|f\|_p.$$

Para el caso $p = \infty$, observamos que

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| P_t(y) dy \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) dy = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

■

Observación 2.13 Nótese que, en particular, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $u = P(f)$ es armónica en \mathbb{R}^n (por el Teorema 2.9) y también acotada en \mathbb{R}^n porque

$$|u(x, t)| \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

por la Proposición 2.12.

Teorema 2.14 Sea $u(x, t)$ una función continua y acotada en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ y armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} . Entonces, u debe ser necesariamente la integral de Poisson de su función frontera $x \mapsto u(x, 0)$; esto es,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) u(y, 0) dy.$$

(Es decir, u es la representación de Poisson de su función frontera $f = u(\cdot, 0)$).

Demostración. Definamos $v(x, t)$ para $(x, t) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ por

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) u(y, 0) dy & \text{si } t > 0 \\ u(x, 0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Por el Teorema 2.11, tenemos que $v(x, t)$ es continua en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ y armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} .

Ahora, sea $w = u - v$, entonces w también es continua en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ y armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} , pues u y v lo son. Pero,

$$w(x, t) = \begin{cases} u(x, 0) - \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) u(y, 0) dy & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Como $w(x, 0) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$, el Teorema 2.1 nos asegura que $w = 0$ en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$. Por lo tanto,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) u(y, 0) dy = 0.$$

■

Este teorema puede interpretarse de nuevo como la unicidad para soluciones acotadas del problema clásico de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} con función frontera continua y acotada, lo cual habíamos probado ya en el Corolario 2.2. Sin embargo, sabemos que, en general, la solución no es única.

2.3. Funciones subarmónicas

Definición 2.15 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y sea u una función $u: \Omega \rightarrow]-\infty, +\infty]$. Decimos que u es subarmónica en Ω si se cumple lo siguiente:

- (i) u es semicontinua superiormente en Ω .
 (ii) $\forall x_0 \in \Omega \exists r(x_0) > 0$ tal que $B_{r(x_0)}(x_0) \subset \Omega$ y $\forall 0 < r \leq r(x_0)$ se verifica

$$u(x_0) \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} u(x_0 + r\sigma) d\sigma.$$

Que u sea semicontinua superiormente en Ω significa que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in \Omega : u(x) < \alpha\} \text{ es abierto.}$$

Puede verse que esto es equivalente a decir: $\forall x_0 \in \Omega$ y $\forall \varepsilon > 0 \exists$ una vecindad U de x_0 tal que

$$u(x) < u(x_0) + \varepsilon \quad \forall x \in U.$$

O equivalentemente: $\forall x_0 \in \Omega$ se tiene

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq u(x_0).$$

También se puede hacer una definición análoga de semicontinuidad inferior.

Trivialmente, las funciones continuas son semicontinuas superiormente. Otros ejemplos son: χ_A si A es cerrado, y $f = \inf_{\alpha \in I} f_\alpha$ si cada f_α es continua.

Observación 2.16 Si u es una función armónica, entonces u y $|u|$ son subarmónicas. Por otra parte, se puede demostrar que la condición (ii) de la Definición 2.15 es equivalente a:

- (II)' $\forall x_0 \in \Omega \exists r(x_0) > 0$ tal que $B_0 = B_{r(x_0)}(x_0) \subset \Omega$ y $\forall 0 < r \leq r(x_0)$ se verifica

$$u(x_0) \leq \frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} u(x) dx.$$

Con el propósito de caracterizar a las integrales de Poisson de funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, o medidas en $M(\mathbb{R}^n)$, haremos algunas estimaciones básicas para las funciones armónicas y subarmónicas en \mathbb{R}_+^{n+1} .

Teorema 2.17 Sea $v(x, t)$ una función subarmónica y no negativa en \mathbb{R}_+^{n+1} , la cual está uniformemente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\exists M > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t)^p dx = M^p < \infty.$$

para algún $1 \leq p < \infty$. Entonces,

$$v(x, t) \leq CMt^{-\frac{n}{p}} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \quad (2.20)$$

donde C es una constante que depende sólo de p y de n . En particular, $v(x, t)$ está acotada en cada sub-semiespacio propio $S_0 = \{(x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : t \geq t_0\}$ donde $t_0 > 0$. Más aún, en cada sub-semiespacio propio S_0 , se cumple que $v(x, t) \rightarrow 0$ cuando $(x, t) \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ y sea B_0 la bola $(n+1)$ -dimensional $B_{\frac{t_0}{2}}((x_0, t_0))$. Como v es subarmónica en \mathbb{R}_+^{n+1} , tenemos que

$$\begin{aligned} v(x_0, t_0) &\leq \frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} v(x, t) dx dt \\ &\leq \left[\frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} v(x, t)^p dx dt \right]^{\frac{1}{p}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{por (1.10)} \\ 1 \leq p < \infty \end{array} \right) \\ &= \left[\frac{n+1}{|\Sigma_n| \left(\frac{t_0}{2}\right)^{n+1}} \int_{B_0} v(x, t)^p dx dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\frac{C_n}{t_0^{n+1}} \int_{B_0} v(x, t)^p dx dt \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde $C_n = \frac{(n+1)|\Sigma_n|}{|\Sigma_n|}$. Pero,

$$\begin{aligned} B_0 &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |(x, t) - (x_0, t_0)| < \frac{t_0}{2} \right\} \\ &\subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \frac{t_0}{2} \right\} \times \left\{ t > 0 : |t - t_0| < \frac{t_0}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} v(x_0, t_0) &\leq \left[\frac{C_n}{t_0^{n+1}} \int_{|t-t_0| < \frac{t_0}{2}} \int_{|x-x_0| < \frac{t_0}{2}} v(x, t)^p dx dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\frac{C_n}{t_0^{n+1}} \int_{\frac{t_0}{2}}^{\frac{3t_0}{2}} M^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{C}{t_0^{\frac{n+1}{p}}} \left[\int_{\frac{t_0}{2}}^{\frac{3t_0}{2}} M^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{C}{t_0^{\frac{n+1}{p}}} |M^p t_0|^{\frac{1}{p}} = CMt_0^{-\frac{n}{p}} \quad \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \end{aligned}$$

donde C es una constante que depende sólo de p y de n . Esto prueba (2.20).

Ahora bien, para t_0 fijo se cumple

$$t^{-\frac{n}{p}} \leq t_0^{-\frac{n}{p}} \quad \text{siempre que } t \geq t_0.$$

Por lo tanto,

$$v(x, t) \leq CMt^{-\frac{n}{p}} \leq CMt_0^{-\frac{n}{p}}$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tal que $t \geq t_0$ (i.e., $\forall (x, t) \in S_0$).

Resta ver que $v(x, t) \rightarrow 0$ cuando $(x, t) \rightarrow \infty$ en S_0 . Sea $t_0 > 0$ fijo y sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $t_1 > t_0$ suficientemente grande, de modo que $CMt_1^{-\frac{n}{p}} < \varepsilon$. Así,

$$\text{si } t \geq t_1 \text{ entonces } 0 \leq v(x, t) \leq CMt^{-\frac{n}{p}} \leq CMt_1^{-\frac{n}{p}} < \varepsilon.$$

Ahora, tomemos $(x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tal que $|x| > t_1$ y $t_0 \leq t \leq t_1$. Procediendo como en la primera parte de la demostración, tendremos

$$\begin{aligned} v(x, t)^p &\leq \frac{C'}{t^{\frac{n+1}{p}}} \left[\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{|y-x| < \frac{t}{2}} v(y, s)^p dy ds \right] \\ &\leq \frac{C'}{t_0^{\frac{n+1}{p}}} \left[\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{|y-x| < \frac{t}{2}} v(y, s)^p dy ds \right] \\ &\leq \frac{C'}{t_0^{\frac{n+1}{p}}} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \left[\int_{|y-x| < \frac{t}{2}} v(y, s)^p dy \right] ds \\ &= \frac{C'}{t_0^{\frac{n+1}{p}}} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} F(x, s) ds \end{aligned}$$

donde

$$F(x, s) = \int_{|y-x| < \frac{s}{2}} v(y, s)^p dy \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0.$$

Además, sabemos que

$$F(x, s) = \int_{|y-x| < \frac{s}{2}} v(y, s)^p dy \leq M^p.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada ([11], pp. 54-55), se sigue que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} F(x, s) ds = \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x, s) ds = 0.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x, t)^p = 0.$$

Esto prueba que $v(x, t) \rightarrow 0$ cuando $(x, t) \rightarrow \infty$ en S_0 . ■

Deseamos ahora mostrar un resultado análogo al Teorema 2.17 pero para $0 < p < 1$. No podemos usar el mismo argumento de la prueba presentada antes, ya que la desigualdad (2.21) no es válida para $p < 1$. Veremos, sin embargo, que sí se puede demostrar un resultado similar si agregamos la condición $v(x, t) = |u(x, t)|$ con u armónica y uniformemente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p > 0$. Para ello, requerimos el siguiente resultado:

Lema 2.18 Sea u armónica en una bola B de \mathbb{R}^{n+1} y continua en \bar{B} . Si (x_0, t_0) es el centro de la bola B , entonces

$$|u(x_0, t_0)|^p \leq \frac{C}{|B|} \int_B |u(x, t)|^p dx dt \quad (2.22)$$

para $p > 0$, donde C es una constante que depende sólo de p y de n .

Demostración. Por supuesto, ya sabemos que el lema vale para $p \geq 1$ con $C = 1$, por el Teorema 2.17. Analicemos el caso $0 < p < 1$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que B es la bola unitaria centrada en el origen. Si probamos el lema para este caso, entonces el caso general se resuelve tomando $v(x, t) = u(x_0 + Rx, t_0 + Rt)$ para $(x, t) \in B = B_1((0, 0))$. En efecto, pues

$$|u(x_0, t_0)|^p = |v(0, 0)|^p \leq \frac{C}{|B|} \int_B |v(x, t)|^p dx dt \leq \frac{C}{|B| R^n} \int_{B_{R^2}(x_0, t_0)} |u(x, t)|^p dx dt$$

por el Teorema de Cambio de Variable ([23] pp. 186-187).

También podemos suponer sin pérdida de generalidad, que

$$\frac{1}{|B|} \int_B |u(x, t)|^p dx dt = 1$$

o, equivalentemente,

$$\int_B |u(x, t)|^p dx dt = |B|.$$

Si esto no ocurre, basta considerar

$$w(x, t) = \frac{|B|^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_B |u(x, t)|^p dx dt\right)^{\frac{1}{p}}} u(x, t),$$

pues

$$\int_B |w(x, t)|^p dx dt = \frac{|B|}{\int_B |u(x, t)|^p dx dt} \int_B |u(x, t)|^p dx dt = |B|.$$

Así que, será suficiente demostrar que

$$|u(0, 0)|^p \leq C \quad (2.23)$$

para alguna constante C que depende sólo de p y de n .

Para $0 < r < 1$ y $0 < p \leq 1$ definamos

$$m_p(r) = \left[\frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}}$$

y sea

$$m_\infty(r) = \sup_{r^2+t^2 \leq r^2} |u(x,t)|.$$

Obsérvese que tampoco hay pérdida de generalidad en suponer $m_\infty(r) \geq 1$ $\forall r \in (0, 1)$. En efecto, pues si existe $r_0 \in (0, 1)$ tal que $m_\infty(r_0) < 1$, entonces, por el Principio del Máximo

$$|u(0,0)| \leq \sup_{r^2+t^2 \leq r_0^2} |u(x,t)| = m_\infty(r_0) < 1$$

y (2.23) quedaría probada con $C = 1$.

Por definición,

$$\begin{aligned} m_1(r) &= \frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)| d\sigma \\ &= \frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)|^p |u(r\sigma)|^{1-p} d\sigma \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)|^p m_\infty(r)^{1-p} d\sigma \\ &= m_\infty(r)^{1-p} \frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)|^p d\sigma \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$= m_p(r)^p m_\infty(r)^{1-p}. \quad (2.26)$$

Para aligerar la notación, en el resto de la prueba denotaremos a los puntos (x, t) de \mathbb{R}^{n+1} simplemente como $z \in \mathbb{R}^{n+1}$. En particular, al centro de la bola B lo denotaremos por x_0 y al origen de \mathbb{R}^{n+1} por 0 .

Consideremos la representación de Poisson para u en $\overline{B_r(0)}$ (ver fórmula (1.34) en la Observación 1.48), entonces

$$u(x) = \frac{r^{n-1}}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} \frac{r^2 - |x|^2}{|x - r\sigma|^{n+1}} u(r\sigma) d\sigma.$$

Luego, para cada $0 < s < r$ y $\bar{x} \in \Sigma_n$,

$$\begin{aligned} u(s\bar{x}) &= \frac{r^{n-1}}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} \frac{r^2 - s^2}{|s\bar{x} - r\sigma|^{n+1}} u(r\sigma) d\sigma \\ &= r^{n-1} (r-s)(r+s) \frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} \frac{u(r\sigma)}{|s\bar{x} - r\sigma|^{n+1}} d\sigma. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$|u(s\bar{x})| \leq r^{n-1} (r-s)(r+s) \frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} \frac{|u(r\sigma)|}{|s\bar{x} - r\sigma|^{n+1}} d\sigma.$$

Pero,

$$|s\bar{x} - r\sigma|^{n+1} \geq (|r\sigma| - |s\bar{x}|)^{n+1} = (r-s)^{n+1}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |u(s\bar{x})| &\leq \frac{r^{n-1}(r-s)(r+s)}{(r-s)^{n+1}} \frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)| d\sigma \\ &\leq \frac{2r^n}{(r-s)^n} \frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)| d\sigma \\ &= 2 \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{-n} m_1(r). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$m_\infty(s) = \sup_{|x|=s} |u(x)| \leq 2 \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{-n} m_1(r)$$

y esto vale para toda $0 < s < r$. En particular, para $s = r^a$, con $a > 1$, obtenemos

$$m_\infty(r^a) \leq 2(1 - r^{a-1})^{-n} m_1(r), \quad (2.27)$$

Combinando (2.26) y (2.27), resulta

$$m_\infty(r^a) \leq 2(1 - r^{a-1})^{-n} m_p(r)^p m_\infty(r)^{1-p}.$$

Tomando logaritmos y multiplicando después por $\frac{1}{r}$, tenemos

$$\frac{\log m_\infty(r^a)}{r} \leq \frac{\log 2}{r} + \frac{n \log(1 - r^{a-1})^{-1}}{r} + \frac{\log m_p(r)^p}{r} + \frac{(1-p) \log m_\infty(r)}{r}.$$

E integrando con respecto a r entre $\frac{1}{2}$ y 1,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_\infty(r^a) \frac{dr}{r} &\leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \log 2 \frac{dr}{r} + n \int_{\frac{1}{2}}^1 \log(1 - r^{a-1})^{-1} \frac{dr}{r} \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_p(r)^p \frac{dr}{r} + (1-p) \int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r} \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Ahora, obsérvese que

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \log 2 \frac{dr}{r} = \log 2 (\log r) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\log 2 \left(\log \frac{1}{2} \right) = (\log 2)^2.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 |I_2| &\leq n \int_{\frac{1}{2}}^1 |\log(1-r^n)| \frac{dr}{r}, \quad \alpha = n-1 > 0 \\
 &= \frac{n}{\alpha} \int_{\frac{1}{2^n}}^1 |\log(1-s)| \frac{ds}{s} \\
 &= \frac{n}{\alpha} \int_0^{1-\frac{1}{2^n}} |\log t| \frac{dt}{1-t} \\
 &= \frac{n}{\alpha} \int_0^\beta |\log t| \frac{dt}{1-t}, \quad \beta = 1 - \frac{1}{2^n} \in (0, 1).
 \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
 1-t &= s-r^n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha = 1-\beta \\
 &\Rightarrow \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-\beta}.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$|I_2| \leq \frac{n}{\alpha} \frac{1}{1-\beta} \int_0^\beta |\log t| dt = K_{\alpha,n} < \infty.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_p(r)^\alpha \frac{dr}{r} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_p(r)^\alpha \frac{r^\alpha}{r^{\alpha+1}} dr \\
 &\leq 2^{\alpha+1} \int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_p(r)^\alpha r^\alpha dr \leq 2^{\alpha+1} \int_{\frac{1}{2}}^1 m_p(r)^\alpha r^\alpha dr. \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Pero, por hipótesis,

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{|B|} \int_B |u(z)|^p dx \\
 &= \frac{n+1}{|\Sigma_n|} \int_0^1 r^n \left[\int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)|^p d\sigma \right] dr \quad (\text{en coordenadas polares}) \\
 &= (n+1) \int_0^1 r^n \left[\frac{1}{|\Sigma_n|} \int_{\Sigma_n} |u(r\sigma)|^p d\sigma \right] dr \\
 &= (n+1) \int_0^1 r^n m_p(r)^\alpha dr.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^1 r^n m_p(r)^\alpha dr = \frac{1}{n+1}. \quad (2.29)$$

Sustituyendo (2.29) en (2.28), obtenemos

$$I_3 \leq \frac{2^{\alpha+1}}{n+1}.$$

Por consiguiente, la suma $I_1 + I_2 + I_3$ está acotada superiormente por una constante $C_{a,p}$.

Luego,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_\infty(r^n) \frac{dr}{r} \leq C_{a,n} + (1-p) \int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r}.$$

Con un cambio de variable en la integral del lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{\frac{1}{2^a}}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r} &\leq C_{a,n} + (1-p) \int_{\frac{1}{2}}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r} \\ &\leq C_{a,n} + (1-p) \int_{\frac{1}{2^a}}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r}, \end{aligned}$$

lo cual vale para toda $a > 1$. En consecuencia,

$$\left[\frac{1}{a} - (1-p) \right] \int_{\frac{1}{2^a}}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r} \leq C_{a,n} \quad \forall a > 1.$$

En particular, para $1 < a < \frac{1}{1-p}$, tenemos

$$\frac{1}{a} - (1-p) > 0$$

y, consecuentemente,

$$\int_{\frac{1}{2^a}}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r} \leq \frac{C_{a,n}}{\left[\frac{1}{a} - (1-p) \right]} = C_{a,p}. \quad (2.30)$$

A continuación, mostraremos que $\exists r_0 \in \left[\frac{1}{2^a}, 1 \right]$ tal que $m_\infty(r_0)$ está acotado por una constante de la forma $K_{a,p} = e^{\frac{C_{a,p}}{1-\frac{1}{2^a}}}$, con $C_{a,p}^* > C_{a,p}$. Por contradicción, supongamos que

$$m_\infty(r) > e^{\frac{r^{1-\frac{1}{2^a}}}{1-\frac{1}{2^a}}} \quad \forall r \in \left[\frac{1}{2^a}, 1 \right].$$

Entonces,

$$\frac{\log m_\infty(r)}{r} \geq \log m_\infty(r) \geq \frac{C_{a,p}^*}{1-\frac{1}{2^a}} \quad \forall r \in \left[\frac{1}{2^a}, 1 \right].$$

Luego,

$$\int_{\frac{1}{2^a}}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r} \geq \int_{\frac{1}{2^a}}^1 \frac{C_{a,p}^*}{1-\frac{1}{2^a}} dr = C_{a,p}^* > C_{a,p}$$

lo cual contradice a (2.30).

Por lo tanto, debe satisfacerse la condición

$$m_\infty(r_0) \leq e^{\frac{r_0^{1-\frac{1}{2^a}}}{1-\frac{1}{2^a}}} = K_{a,p} \quad \text{para algún } r_0 \in \left[\frac{1}{2^a}, 1 \right].$$

Finalmente, por el Principio del Máximo, concluimos que

$$|u(0, 0)| \leq \sup_{x^2+t^2=r_0^2} |u(x, t)| = m_{\infty}(r_0) \leq K_{n,p}$$

lo cual prueba (2.23) y el lema queda demostrado. ■

Podemos, ahora, extender el Teorema 2.17.

Teorema 2.19 Sea $u(x, t)$ una función armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} , la cual está uniformemente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\exists M > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx = M^p < \infty,$$

para algún $0 < p < \infty$. Entonces,

$$|u(x, t)| \leq CMt^{-\frac{n}{p}} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$$

donde C es una constante que depende sólo de p y de n . En particular, $u(x, t)$ está acotada en cada sub-semiespacio propio $S_0 = \{(x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : t \geq t_0\}$ donde $t_0 > 0$. Más aún, en cada sub-semiespacio propio S_0 , se cumple que $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $(x, t) \rightarrow \infty$.

Demostración. Procedemos como lo hicimos en la demostración del Teorema 2.17, pero esta vez empezamos con la desigualdad

$$|u(x_0, t_0)|^p \leq \frac{C}{|B_0|} \int_{B_0} |u(x, t)|^p dx dt$$

donde B_0 es la bola $(n+1)$ -dimensional $B_{\frac{t_0}{2}}((x_0, t_0))$, con $t_0 > 0$. El argumento usado antes es ahora válido para toda $p \in (0, \infty)$ gracias al Lema 2.18. ■

El siguiente teorema proporciona una caracterización para las integrales de Poisson de funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ (algo análogo a lo que hicimos en el disco).

Teorema 2.20 Sea $u(x, t)$ definida en \mathbb{R}_+^{n+1} y sea $1 < p \leq \infty$. Entonces, son equivalentes:

(a) u es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} y está uniformemente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\exists M > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_p \leq M < \infty.$$

(b) Existe $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que u es la integral de Poisson de f ; es decir,

$$u(x, t) = (P_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy.$$

Demostración. Si (b) se verifica, ya sabemos que u es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} por el Teorema 2.9; además, por la Proposición 2.12,

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_p \leq \|f\|_p = M < \infty.$$

Para establecer la recíproca, asumamos que (a) se verifica. Consideremos la sucesión de funciones $f_j(x) = u(x, t_j)$ donde $(t_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión de números positivos tal que $t_j \downarrow 0$. Entonces,

$$\|f_j\|_p = \|u(\cdot, t_j)\|_p \leq M \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Así, $(f_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión que se encuentra dentro de una bola cerrada de $L^p(\mathbb{R}^n) \cong L^q(\mathbb{R}^n)^*$ ([11] p. 190), donde q es el exponente conjugado de p . El Teorema de Banach-Alaoglu ([21] pp. 68-69) nos asegura entonces que tal bola es compacta en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con la topología débil-*. Y, como además, $L^q(\mathbb{R}^n)$ es separable, se sigue que la bola es metrizable en la topología débil-* (ver [21], teo. 3.16, p. 70).

En consecuencia, existe una subsucesión de $(f_j)_{j=1}^\infty$, la cual denotaremos del mismo modo para aligerar la notación, y una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$f_j \rightarrow f \quad \text{en la topología débil-* de } L^p(\mathbb{R}^n) \cong L^q(\mathbb{R}^n)^*.$$

Esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_j(x) dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Ahora, obsérvese que, para cada j , la función $(x, t) \mapsto u(x, t + t_j)$ es armónica (y, por tanto, continua) para toda (x, t) con $t > -t_j$. En particular, es continua en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ y armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} . Además, por el Teorema 2.19, $u(x, t + t_j)$ es acotada. De acuerdo con el teorema de representación 2.14, dicha función debe ser la integral de Poisson de su función frontera $u(\cdot, t_j)$. Así,

$$\begin{aligned} u(x, t + t_j) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x - y) u(y, t_j) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x - y) f_j(y) dy. \end{aligned}$$

Haciendo a j tender a ∞ , obtenemos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x - y) f(y) dy$$

para $P_t(x - y) \in L^q(\mathbb{R}^n)$; en efecto, dado que $1 \leq q < \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |P_t(x - y)|^q dy &= c_n^q \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{t}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right]^q dy \\ &= c_{n,q} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\frac{x-y}{t}|^2)^{\frac{(n+1)q}{2}}} dy < \infty \end{aligned}$$

ya que $(n+1)q \geq n+1 > n$ y es bien sabido que $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} < \infty$ si $r > n$. ■

Como en el toro, el caso $p = 1$ es diferente, pero consideramos el hecho de que $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow M(\mathbb{R}^n)$ bajo la función

$$\mu_f(E) = \int_E f(x) dx \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

de modo que $d\mu_f(x) = f(x) dx$ y

$$|\mu_f|(E) = \int_E |f(x)| dx \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

(ver [23], teo. 6.13, p.134). Así,

$$\|\mu_f\| = |\mu_f|(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Usando esto, podemos obtener un resultado similar al Teorema 2.20:

Teorema 2.21 Sea $u(x, t)$ definida en \mathbb{R}_+^{n+1} . Entonces, son equivalentes:

(a) u es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} y está uniformemente en $L^1(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\exists M > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)| dx \leq M < \infty.$$

(b) Existe $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ tal que u es la integral de Poisson de μ , esto es,

$$u(x, t) = (P_t * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) d\mu(y).$$

Demostración. La prueba es similar a la del Teorema 2.20.

Si (b) se verifica, ya sabemos que u es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} por el Teorema 2.10; además,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) d|\mu|(y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) dx \right] d|\mu|(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|(y) = |\mu|(\mathbb{R}^n) = \|\mu\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)| dx \leq |\mu|(\mathbb{R}^n) = M < \infty.$$

Para establecer la recíproca, asumamos que (a) se verifica. Consideremos la sucesión de funciones $f_j(x) = u(x, t_j)$ donde $(t_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión de números positivos tal que $t_j \downarrow 0$ y sea $\mu_{t_j} \in M(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\mu_{t_j}(E) = \int_E f_j(t) dt \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Entonces,

$$\|\mu_{t_j}\| = \|f_j\|_1 = \|u(\cdot, t_j)\|_1 \leq M \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Así, $(\mu_{t_j})_{j=1}^\infty$ es una sucesión que se encuentra dentro de una bola cerrada de $M(\mathbb{R}^n) \cong C_0(\mathbb{R}^n)^*$ ([11] p. 223). El Teorema de Banach-Alaoglu ([23] pp. 68-69) nos asegura entonces que tal bola es compacta en $M(\mathbb{R}^n)$ con la topología débil-*. Y, como además, $C_0(\mathbb{R}^n)$ es separable, se sigue que la bola es metrizable en la topología débil-* (ver [21], tes. 3.16, p. 70).

En consecuencia, existe una subsucesión de $(\mu_{t_j})_{j=1}^\infty$, la cual denotaremos del mismo modo para aligerar la notación, y una medida $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mu_{t_j} \rightharpoonup \mu \quad \text{en la topología débil-* de } M(\mathbb{R}^n) \cong C_0(\mathbb{R}^n)^*.$$

Esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu_{t_j}(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu(x) \quad \forall g \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

o sea,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_j(x) dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu(x) \quad \forall g \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Ahora, obsérvese que, para cada j , la función $(x, t) \mapsto u(x, t + t_j)$ es armónica (y, por tanto, continua) para toda (x, t) con $t > -t_j$. En particular, es continua en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ y armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} . Además, por el Teorema 2.19, $u(x, t + t_j)$ es acotada. De acuerdo con el teorema de representación 2.14, dicha función debe ser la integral de Poisson de su función frontera $u(\cdot, t_j)$. Así,

$$\begin{aligned} u(x, t + t_j) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) u(y, t_j) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f_j(y) dy. \end{aligned}$$

Haciendo a j tender a ∞ , obtenemos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) d\mu(y)$$

pues $P_t(x-y) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, ya que $c_n \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ se va a cero en infinito. \blacksquare

Un ejemplo típico donde f está en L^1_ω , pero no en L^1 es el siguiente: sea $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \frac{1}{t}$, entonces $f \notin L^1(0, 1)$ pues

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} = \log t \Big|_0^1 = +\infty.$$

Sin embargo, $f \in L^1_\omega(0, 1)$ pues, $\forall \lambda > 0$

$$\begin{aligned} |\{x \in (0, 1) : |f(x)| > \lambda\}| &= \left| \left\{ x \in (0, 1) : \frac{1}{x} > \lambda \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ x \in (0, 1) : 0 < x < \frac{1}{\lambda} \right\} \right| \\ &= \left| \left(0, \frac{1}{\lambda}\right) \right| = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L^1(0, 1) \subsetneq L^1_\omega(0, 1).$$

Definición 2.24 Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (i.e., una función localmente integrable en \mathbb{R}^n). Para $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$Mf(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy : x \in \tilde{Q}, Q \text{ un } n\text{-cubo con lados paralelos a los ejes de } \mathbb{R}^n \text{ y no degenerado} \right\},$$

donde $|Q|$ denota a la medida de Lebesgue de Q .

A Mf se le conoce como la función maximal de Hardy-Littlewood de f . Al operador M tal que $f \mapsto Mf$ se le llama el operador maximal de Hardy-Littlewood.

En el Apéndice B se demuestra que el operador $M: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p \leq \infty$, es continuo (i.e., acotado); esto es, $\exists C > 0$ tal que

$$\|Mf\|_p \leq C \|f\|_p$$

y $M: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ es de tipo débil (1,1), esto es, $\exists C > 0$ tal que $\forall \lambda > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Como consecuencia, veremos que P^* también es continuo y de tipo débil (1,1).

Lema 2.25 Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces

$$|(P_t * f)(x)| \leq CMf(x, t)$$

donde C es una constante que sólo depende de n , y donde

$$Mf(x, t) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy : x \in Q, Q \text{ cubo con longitud de lado } \geq t \right\}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 |(P_t * f)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy \right| \\
 &\leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} |f(y)| dy \\
 &= c_n \left(\int_{|x-y| \leq t} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}t < |x-y| \leq 2^{k+2}t} \right) \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} |f(y)| dy \\
 &\leq c_n \left\{ \frac{1}{t^n} \int_{|x-y| \leq t} |f(y)| dy + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}t < |x-y| \leq 2^{k+2}t} \frac{t}{(2^{k+1}t)^{n+1}} |f(y)| dy \right\} \\
 &\leq c_n \left\{ \frac{1}{t^n} \int_{|x-y| \leq t} |f(y)| dy + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k (2^{k+1}t)^n} \int_{2^{k+1}t < |x-y| \leq 2^{k+2}t} |f(y)| dy \right\} \\
 &\leq c_n \left\{ \frac{1}{t^n} \int_{Q_t} |f(y)| dy + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k (2^{k+1}t)^n} \int_{Q_{2^{k+1}t}} |f(y)| dy \right\}
 \end{aligned}$$

dónde

Q_t es el cubo centrado en x con longitud de lado $= 2t$,

$Q_{2^{k+1}t}$ es el cubo centrado en x con longitud de lado $= 2^{k+1}t$.

Luego,

$$\begin{aligned}
 |(P_t * f)(x)| &\leq c_n \left\{ \frac{2^n}{(2t)^n} \int_{Q_t} |f(y)| dy + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^k (2^{k+1}t)^n} \int_{Q_{2^{k+1}t}} |f(y)| dy \right\} \\
 &= c_n \left\{ \frac{1}{|Q_t|} \int_{Q_t} |f(y)| dy + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k |Q_{2^{k+1}t}|} \int_{Q_{2^{k+1}t}} |f(y)| dy \right\} \\
 &\leq c_n \left\{ Mf(x, t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} Mf(x, t) \right\} \\
 &= C_n Mf(x, t).
 \end{aligned}$$

■

Proposición 2.26 La función maximal de Poisson $P^* : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ es un operador continuo en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 < p < \infty$; esto es, $\exists C > 0$ tal que

$$\|P^*(f)\|_p \leq C \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty. \quad (2.31)$$

Además, P^* es de tipo débil $(1, 1)$, esto es, $\exists C' > 0$ tal que $\forall \lambda > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : P^*(f)(x) > \lambda\}| \leq \frac{C'}{\lambda} \|f\|_1. \quad (2.32)$$

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Por el lema anterior sabemos que

$$|(P_t * f)(x)| \leq C_n Mf(x, t)$$

donde C_n es una constante que sólo depende de n . Luego

$$\sup_{t>0} |(P_t * f)(x)| \leq C_n \sup_{t>0} Mf(x, t) = C_n Mf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

i.e.,

$$P^*(f)(x) \leq C_n Mf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|P^*(f)\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |P^*(f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_n \|Mf\|_p \leq C \|f\|_p, \end{aligned}$$

ya que el operador $M: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p \leq \infty$, es continuo. Esto prueba (2.31).

Para probar (2.32) tomemos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y observemos que, por (2.33),

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P^*(f)(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \frac{\lambda}{C_n}\right\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : P^*(f)(x) > \lambda\}| &\leq \left| \left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \frac{\lambda}{C_n}\right\} \right| \\ &\leq \frac{C'}{\lambda} \|f\|_1 \end{aligned}$$

ya que M es de tipo débil $(1, 1)$. ■

Teorema 2.27 Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces,

$$(P_t * f)(x) \rightarrow f(x) \text{ as } t \rightarrow 0 \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración.

Caso $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$: Bastará demostrar que, para cada $s > 0$, el conjunto

$$A_s = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{t \rightarrow 0} |(P_t * f)(x) - f(x)| > s\right\}$$

tiene medida cero, porque si esto ocurre, entonces el conjunto

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^n : (P_t * f)(x) \not\rightarrow_{t \rightarrow 0} f(x)\right\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{\frac{1}{j}}$$

es de medida cero, lo cual implica que

$$(P_t * f)(x) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f(x) \quad \text{para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Tomemos, pues, $\varepsilon > 0$. Como $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|f - g\|_p^p < \varepsilon.$$

Sea $h = f - g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $f = h + g$ con $\|h\|_p^p < \varepsilon$ y $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $t > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} |(P_t * f)(x) - f(x)| &= |(P_t * (h + g))(x) - (h(x) + g(x))| \\ &\leq |(P_t * h)(x)| + |(P_t * g)(x) - g(x)| + |h(x)|. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, sabemos que g es uniformemente continua y acotada en \mathbb{R}^n . Por el Teorema 2.9(b), se sigue que $P_t * g \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} g$ uniformemente en \mathbb{R}^n . Por tanto,

$$\limsup_{t \rightarrow 0} |(P_t * g)(x) - g(x)| = 0$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} |(P_t * f)(x) - f(x)| &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} |(P_t * h)(x)| + |h(x)| \\ &\leq \sup_{t > 0} |(P_t * h)(x)| + |h(x)| \\ &= P^*(|h|)(x) + |h(x)|. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$A_\varepsilon \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : P^*(|h|)(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Luego,

$$|A_\varepsilon| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : P^*(|h|)(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|. \quad (2.34)$$

Ahora, si $1 < p < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^p}{2^p} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : P^*(|h|)(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| &\leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : P^*(|h|)(x) > \frac{\varepsilon}{2}\}} |P^*(|h|)(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |P^*(|h|)(x)|^p dx = \|P^*(|h|)\|_p^p \leq C \|h\|_p^p \end{aligned}$$

de acuerdo con la Proposición 2.26. Por consiguiente,

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : P^*(|h|)(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \leq C \frac{2^p}{\varepsilon^p} \|h\|_p^p < C \frac{2^p}{\varepsilon^p} \varepsilon \quad \forall 1 < p < \infty.$$

Por otra parte, si $p = 1$ entonces

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : P^\varepsilon(h)(x) > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|h\|_1 < \frac{2C}{\varepsilon} \varepsilon$$

ya que P^ε es de tipo débil $(1, 1)$.

Con esto tenemos controlado el primer sumando de (2.34) para toda $1 \leq p < \infty$. Para controlar al segundo, obsérvese que:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^p}{2^p} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| &\leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}} |h(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^p dx = \|h\|_p^p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así,

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| < \frac{2^p}{\varepsilon^p} \varepsilon \quad \forall 1 \leq p < \infty.$$

Por lo tanto,

$$|A_\varepsilon| < C_{p,\varepsilon} \varepsilon$$

y, como a ε lo elegimos en forma arbitraria, concluimos que $|A_\varepsilon| = 0$. Esto prueba el teorema para el caso $1 \leq p < \infty$.

Caso $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$: Sean $R > 0$ y $B = B_R(0)$. Demostraremos que

$$(P_t * f)(x) \rightarrow f(x) \quad \text{si } t \rightarrow 0$$

para casi toda $x \in B$. Como R es arbitrario, se seguirá el resultado.

Definamos $B' = B_{R+1}(0)$ y escribamos $f = f_1 + f_2$, donde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) \chi_{B'}(x), \\ f_2(x) &= f(x) \chi_{(B')^c}(x). \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| dx = \int_{B'} |f(x)| dx \leq \|f\|_\infty \int_{B'} dx = \|f\|_\infty |B'| < \infty,$$

por tanto, $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por el caso previo, se sigue que

$$(P_t * f_1)(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_1(x) \quad \text{para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

En particular,

$$(P_t * f_1)(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_1(x) = f(x) \quad \text{para casi toda } x \in B.$$

Por otra parte, para cada $x \in B$ tenemos

$$\begin{aligned} |(P_t * f_2)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f_2(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) |f_2(y)| dy \\ &= \int_{|y| \geq t} P_t(x-y) |f_2(y)| dy \leq \int_{|u| > t} P_t(u) |f(u+x)| du \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{|u| > t} P_t(u) du \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

de acuerdo con el Lema 2.5(iv). Así,

$$(P_t * f_2)(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ para toda } x \in B.$$

Como $P_t * f = P_t * f_1 + P_t * f_2$, concluimos que

$$(P_t * f)(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x) + 0 = f(x) \text{ para casi toda } x \in B.$$

■

2.4. Convergencia no tangencial en \mathbb{R}_+^{n+1}

Vamos ahora a estudiar el comportamiento puntual de integrales de Poisson para puntos en la frontera de \mathbb{R}_+^{n+1} restringiendo la convergencia a regiones de aproximación no tangencial, de manera similar a como lo hicimos antes en el disco. Necesitamos precisar algunas definiciones.

Definición 2.28 Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $N > 0$. El cono con vértice x y apertura N es

$$\Gamma_N(x) = \{(y, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |y - x| < Nt\}.$$

Definición 2.29 Dada una función u definida en \mathbb{R}_+^{n+1} , diremos que $u(y, t)$ converge a L cuando (y, t) tiende a x (de hecho a $(x, 0)$) no tangencialmente si, $\forall N > 0$, $u(y, t)$ converge a L cuando (y, t) tiende a x permaneciendo siempre en el cono $\Gamma_N(x)$. Denotaremos esto como

$$u(y, t) \rightarrow L \text{ si } (y, t) \xrightarrow{N\text{-NT}} x,$$

o bien

$$\lim_{(y, t) \xrightarrow{N\text{-NT}} x} u(y, t) = L.$$

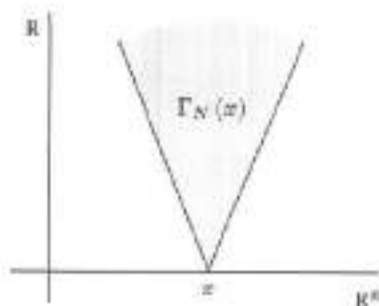


Figura 2.1: El cono con vértice x y apertura N .

Veamos que $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$,

$$(P_t * f)(y) \rightarrow f(x) \text{ si } (y, t) \xrightarrow{Nt} x \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Necesitamos considerar el siguiente operador:

Definición 2.30 El operador o función maximal de Poisson no tangencial de apertura $N > 0$ se define por

$$P_{\mathbb{R}^n, N}^*(f)(x) = \sup_{(y, t) \in \Gamma_N(x)} |(P_t * f)(y)|.$$

Queremos demostrar que: $P_{\mathbb{R}^n, N}^*(f)(x)$ es de tipo fuerte (p, p) con $p > 1$ (i.e., continuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$) y de tipo débil $(1, 1)$.

Lema 2.31 Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces,

$$P_{\mathbb{R}^n, N}^*(f)(x) \leq C_N Mf(x)$$

donde C_N es una constante que sólo depende de N y de la dimensión n .

Demostración. Por el Lema 2.25, sabemos que

$$|(P_t * f)(y)| \leq C Mf(y, t)$$

donde C es una constante que sólo depende de n y donde

$$Mf(y, t) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx : y \in Q, Q \text{ cubo con longitud de lado } \geq t \right\}.$$

Sea $(y, t) \in \Gamma_N(x)$, de modo que, $|y - x| < Nt$. Sea Q un cubo en \mathbb{R}^n tal que $y \in Q$, con longitud de lado $l_Q \geq t$ y sea Q^{2N+1} el cubo cuyo centro es el centro de Q pero con longitud de lado igual a $(2N+1)$ veces l_Q . Mostraremos que $x \in Q^{2N+1}$.

Obsérvese que

$$x \in B_{Nt}(y)$$

por tanto

$$x \in R$$

donde R es el cubo centrado en y con longitud de lado $l_R = 2Nt$. Luego,

$$x \in S$$

donde S es el cubo cuyo centro es el centro de Q pero con longitud de lado $l_S = 2Nt + l_Q$.

Pero,

$$2Nt + l_Q \leq 2Nl_Q + l_Q = (2N + 1)l_Q,$$

por lo tanto

$$S \subset Q^{2N+1}$$

y así,

$$x \in Q^{2N+1}.$$

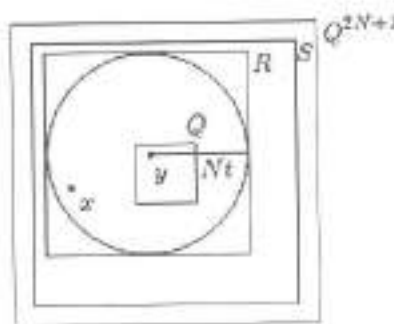


Figura 2.2: $x \in Q^{2N+1}$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx &= \frac{(2N+1)^n}{|Q^{2N+1}|} \int_Q |f(x)| dx \\ &\leq \frac{(2N+1)^n}{|Q^{2N+1}|} \int_{Q^{2N+1}} |f(x)| dx \leq (2N+1)^n Mf(x). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$Mf(y, t) \leq (2N+1)^n Mf(x).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P_{\nabla, N}^{\alpha}(f)(x) &= \sup_{(y,t) \in \Gamma_N(x)} |(P_1 * f)(y)| \\ &\leq \sup_{(y,t) \in \Gamma_N(x)} CMf(y, t) \leq C(2N+1)^{\alpha} Mf(x). \end{aligned}$$

■

Teorema 2.32. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Entonces,

$$(P_1 * f)(y) \rightarrow f(x) \text{ si } (y, t) \xrightarrow{N, \Gamma} x \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Procedemos de manera análoga a la demostración del Teorema 2.27.

Caso $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$: Basta demostrar que, para cada $N > 0$, el conjunto

$$E_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{\substack{(y,t) \rightarrow x \\ (y,t) \in \Gamma_N(x)}} |(P_1 * f)(y) - f(x)| > 0 \right\}$$

tiene medida cero. De hecho, el conjunto de puntos de \mathbb{R}^n donde no es cierto que $(P_1 * f)(y) \rightarrow f(x)$ si $(y, t) \xrightarrow{N, \Gamma} x$ es el conjunto

$$E = \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} E_N \right) \subset \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} E_{\frac{1}{N}} \right).$$

Si demostramos que $|E_N| = 0 \forall N > 0$, es claro que $|E| = 0$, lo cual implica que

$$(P_1 * f)(y) \rightarrow f(x) \text{ si } (y, t) \xrightarrow{N, \Gamma} x \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Fijemos $N > 0$ y sea $(y, t) \in \Gamma_N(x)$. Por el mismo argumento del Teorema 2.27, dado $\varepsilon > 0$, se tiene

$$|(P_1 * f)(y) - f(x)| \leq |(P_1 * h)(y)| + |(P_1 * g)(y) - g(x)| + |h(x)|$$

donde $f = h + g$ con $\|h\|_p^{\alpha} < \varepsilon$ y $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

También igual que antes,

$$P_1 * g \xrightarrow{t \rightarrow 0} g \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n.$$

Además, por continuidad, se tiene

$$P_1 * g(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} g(x) \text{ puntualmente en } \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto,

$$P_1 * g(y) \rightarrow g(x) \text{ cuando } (y, t) \rightarrow (x, 0).$$

Pero, si (y, t) tiende a x no tangencialmente en el cono $\Gamma_N(x)$, tenemos de hecho que $(y, t) \rightarrow (x, 0)$. Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{(y,t) \rightarrow x \\ (y,t) \in \Gamma_N(x)}} |(P_t^N * g)(y) - g(x)| = 0.$$

Por consecuencia,

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{(y,t) \rightarrow x \\ (y,t) \in \Gamma_N(x)}} |(P_t^N * f)(y) - f(x)| &\leq \limsup_{\substack{(y,t) \rightarrow x \\ (y,t) \in \Gamma_N(x)}} |(P_t^N * h)(y)| + |h(x)| \\ &\leq \sup_{(y,t) \in \Gamma_N(x)} |(P_t^N * h)(y)| + |h(x)| \\ &= P_{\mathbb{Q}, N}^*(h)(x) + |h(x)|. \end{aligned}$$

De aquí se procede de manera idéntica a como lo hicimos en el Teorema 2.27, para demostrar que E_N tiene medida cero.

Caso $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$: Sean $R > 0$ y $B = B_R(0)$. Probemos que

$$(P_t^N * f)(y) \rightarrow f(x) \quad \text{si} \quad (y, t) \xrightarrow{N, T} x \quad \text{para casi toda } x \in B.$$

Como R es arbitrario, se seguirá el resultado.

Definamos $B^1 = B_{R+1}(0)$ y escribamos $f = f_1 + f_2$, donde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) \chi_{B^1}(x), \\ f_2(x) &= f(x) \chi_{(B^1)^c}(x). \end{aligned}$$

Por el mismo argumento usado en la demostración del Teorema 2.27, tenemos que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Y por el caso previo, se sigue que

$$(P_t^N * f_1)(y) \rightarrow f_1(x) \quad \text{si} \quad (y, t) \xrightarrow{N, T} x \quad \text{para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

En particular,

$$(P_t^N * f_1)(y) \rightarrow f_1(x) = f(x) \quad \text{si} \quad (y, t) \xrightarrow{N, T} x \quad \text{para casi toda } x \in B.$$

Falta probar lo mismo para f_2 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|y| < R + 1$. Así,

$$\begin{aligned} |(P_t^N * f_2)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P_t(u) f_2(y-u) du \right| \leq \int_{|y-u| \geq R+1} P_t(u) |f_2(y-u)| du \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{|y-u| \geq R+1} P_t(u) du \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{|u| \geq R+1-|y|} P_t(u) du \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

de acuerdo con el Lema 2.5(iv). En particular,

$$(P_t * f_2)(y) \rightarrow 0 \text{ si } (y, t) \xrightarrow{N\mathcal{I}} x \text{ para toda } x \in B.$$

Como $P_t * f = P_t * f_1 + P_t * f_2$, concluimos que

$$(P_t * f)(y) \rightarrow f(x) + 0 = f(x) \text{ si } (y, t) \xrightarrow{N\mathcal{I}} x \text{ para casi toda } x \in B.$$

■

Como consecuencia, obtenemos un resultado análogo al Teorema de Fatou para funciones holomorfas acotadas en el disco, pero ahora en el contexto de \mathbb{R}_+^{n+1} :

Corolario 2.33 *Sea u una función armónica y acotada en \mathbb{R}_+^{n+1} . Entonces, u tiene valores frontera no tangenciales casi en todas partes sobre \mathbb{R}^n , la frontera de \mathbb{R}_+^{n+1} .*

Demostración. Por hipótesis, $\exists M > 0$ tal que $|u(x, t)| \leq M \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Por lo tanto,

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq M,$$

es decir, u está uniformemente en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, u es armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} . El Teorema 2.20 nos asegura, entonces, que existe $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u(y, t) = (P_t * f)(y).$$

Pero, por el Teorema 2.32,

$$(P_t * f)(y) \rightarrow f(x) \text{ si } (y, t) \xrightarrow{N\mathcal{I}} x \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

■

Capítulo 3

Extensiones Armónicas de Distribuciones

*Concédeme, Señor, que extienda mi conciencia
y leta el corazón temperado en tus promesas.*

3.1. Introducción

Durante muchos años, físicos e ingenieros han encontrado conveniente manejar en sus estudios ciertos objetos matemáticos que, hablando burdamente, se parecen a las funciones, pero que son algo más singular que las funciones. A pesar de su evidente eficacia, tales objetos fueron en un principio vistos con desdén por los matemáticos puros, y uno de los avances conceptuales más importantes en el análisis moderno es el desarrollo de métodos que permitan tratar a estos objetos en una forma rigurosa y sistemática.

Fue el matemático ruso Sergei Sobolev quien dio los primeros pasos en la formalización de una teoría adecuada de “funciones generalizadas” en 1935, mientras trabajaba con “soluciones débiles” de ecuaciones diferenciales parciales. Diferentes propuestas han aparecido desde entonces en la literatura, pero el método que ha mostrado ser, en general, el más útil es el de la *teoría de distribuciones* desarrollada en la década de los 1950's por el francés Laurent Schwartz.

En este último capítulo queremos llevar nuestro estudio de extensiones armónicas al contexto de las distribuciones. Nos interesa, en particular, resolver la siguiente versión del problema de Dirichlet:

El Problema de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} en versión distribuciones temperadas: Dada una distribución temperada T en \mathbb{R}^n , encontrar una función armónica u definida en \mathbb{R}_+^{n+1} cuyo valor frontera sea justamente T .

3.1.1. Motivación: un primer encuentro con la teoría de distribuciones

Antes de atacar el problema de Dirichlet que acabamos de plantear, examinaremos un poco algunos resultados obtenidos en el Capítulo 2 que nos introducen en el terreno de la teoría de distribuciones.

Todo lo que necesitamos saber acerca de distribuciones se puede encontrar con detalle en [24] o [6], pero presentamos aquí la información más esencial que ocuparemos.

Definición 3.1 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Una distribución en U es un funcional lineal continuo en $C_c^\infty(U)$. El espacio de todas las distribuciones en U es denotado por $\mathcal{D}'(U)$.

Cuando escribimos \mathcal{D}' sin especificar el dominio significa que éste es \mathbb{R}^n . Dotamos a $\mathcal{D}'(U)$ de la topología débil-*, esto es, la topología de la convergencia puntual en $C_c^\infty(U)$.

Toda $f \in L_{loc}^1(U)$ define una distribución en U por medio del funcional

$$\Lambda_f(\varphi) = \int f\varphi, \text{ para } \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Dos funciones definen la misma distribución precisamente cuando éstas son iguales casi en todas partes.

Toda medida de Radon μ en U , define también una distribución mediante

$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int \varphi d\mu, \text{ para } \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Si $f \in L_{loc}^1(U)$, se denota a veces a la distribución Λ_f también por la letra f , identificando a $L_{loc}^1(U)$ con un subespacio de $\mathcal{D}'(U)$. Para evitar confusión entre $f(x)$ y $f(\varphi) = \int f\varphi$ adoptamos una notación diferente para el valor de f en φ escribiendo $\langle f, \varphi \rangle$ en vez de $f(\varphi)$.

Algunas veces es conveniente pretender que una distribución F es una función aun cuando en realidad no lo es, y escribimos $\int F(x)\varphi(x)dx$ en lugar de $\langle F, \varphi \rangle$. Esto sucede especialmente cuando la presencia explícita de la variable x resulta útil.

Afirmaciones análogas se pueden hacer para una medida μ .

Un espacio de funciones relevante en la teoría de distribuciones es el espacio de Schwartz \mathcal{S} consistente de todas aquellas funciones de clase C^∞ que, junto con todas sus derivadas, se anulan rápidamente en infinito. Más precisamente,

Definición 3.2 El espacio (o clase) de Schwartz es

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{|N,\alpha|} < \infty \text{ para toda } N \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha \text{ multi-índice} \right\}$$

donde

$$\|f\|_{|N,\alpha|} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|.$$

A las funciones en \mathcal{S} se les llama funciones rápidamente decrecientes en infinito y también se les conoce usualmente como funciones de prueba.

Otro espacio de funciones importante aquí es el espacio de las funciones suaves que, junto con todas sus derivadas tienen un crecimiento a lo más polinomial en infinito. Para decirlo con formalidad:

Definición 3.3

$$\mathcal{O}_M = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \left| \begin{array}{l} \forall \text{ multi-índice } \alpha \exists \text{ un polinomio } P_\alpha(x) \\ \text{tal que } |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq |P_\alpha(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \right\}.$$

A \mathcal{O}_M se le llama el espacio de funciones suaves lentamente crecientes en infinito.

Decimos que una distribución T es cero en un conjunto V si

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(V).$$

Definición 3.4 Dada una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$, llamamos soporte de T al complemento del conjunto abierto V más grande donde T es cero.

Definición 3.5 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Una distribución de soporte compacto en U es una distribución en U cuyo soporte es un subconjunto compacto de U . También definimos el espacio

$$\mathcal{E}'(U) = \{ T \in \mathcal{D}'(U) : T \text{ es de soporte compacto en } U \}.$$

Definición 3.6 Una distribución temperada es un funcional lineal continuo en la clase de Schwartz \mathcal{S} . El espacio de todas las distribuciones temperadas es denotado por \mathcal{S}' .

Equipamos a \mathcal{S}' con la topología débil-*, esto es, la topología de la convergencia puntual en \mathcal{S} . Así, decimos que una red $(F_j)_{j \in I}$ en \mathcal{S}' converge a $F \in \mathcal{S}'$ en la topología de \mathcal{S}' si

$$\langle F_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Igual que antes, toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ define una distribución temperada por medio del funcional

$$\Lambda_f(\varphi) = \int f \varphi, \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Esto vale en particular para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$, pues $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Haciendo la identificación

$$L^p(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \Lambda_f \in \mathcal{S}'$$

se puede ver que

$$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}', \quad (3.1)$$

de modo que si $(f_j)_{j \in I}$ es una red en $L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$f_j \rightarrow f \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \Lambda_{f_j} \rightarrow \Lambda_f \text{ en } \mathcal{S}'.$$

Volvamos, ahora, a nuestro contexto de funciones armónicas en \mathbb{R}_+^{n+1} para hacer algunas observaciones interesantes:

Supongamos que $u(x, t)$ es una función armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} , la cual está uniformemente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\exists M > 0$ tal que

$$\sup_{t > 0} \|u(\cdot, t)\|_p \leq M < \infty,$$

para algún $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $t > 0$, denotemos $u_t(x) = u(x, t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Combinando los Teoremas 2.9, 2.10, 2.20 y 2.21, podemos resumir lo siguiente:

- (i) Si $1 < p < \infty$, entonces $\exists f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_t = P_t * f$ y $u_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $p = \infty$, entonces $\exists f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_t = P_t * f$ y $u_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$ en la topología débil-* de $L^\infty(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n)'$, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x) \varphi(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

- (iii) Si $p = 1$, entonces $\exists \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_t = P_t * \mu$ y $u_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \mu$ en la topología débil-* de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = C_0(\mathbb{R}^n)'$, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x) \varphi(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Estas afirmaciones son particularmente válidas $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ y también $\mathcal{S} \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Así, el hecho de que la función armónica u esté uniformemente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$, implica la convergencia de la familia u_t cuando $t \rightarrow 0$ en el sentido de distribuciones temperadas.

¿Se podrá decir algo similar para $0 < p < 1$? Veremos que la respuesta es afirmativa. Recordéese que el Teorema 2.19 nos asegura que si $u(x, t)$ es una función armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} uniformemente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para algún $0 < p < \infty$, entonces

$$|u(x, t)| \leq CMt^{-\frac{n}{p}} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$$

donde C es una constante que depende sólo de p y de n . Esto implica que, para cada $t > 0$, las funciones u_t son acotadas: por tanto están en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego, son distribuciones temperadas, de acuerdo con (3.1). Sólo falta ver que $\exists f \in \mathcal{S}'$ tal que $u_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$ en \mathcal{S}' . Eso es precisamente lo que afirma el siguiente teorema:

Teorema 3.7 Sea $u(x, t)$ una función armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} , la cual está uniformemente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\exists M > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \|u_t\|_p = M < \infty,$$

para algún $0 < p \leq \infty$, donde $u_t(x) = u(x, t)$. Entonces, existe $f \in \mathcal{S}'$ tal que $u_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$ en \mathcal{S}' y f determina a u de modo único.

Demostración. El caso $1 \leq p \leq \infty$ ya está resuelto, según lo que acabamos de discutir. Resta examinar el caso $0 < p < 1$.

Para cada $\delta > 0$, definamos $u_\delta(x, t) = u(x, t + \delta)$. Nótese que cada u_δ es armónica (y, por tanto, continua) para toda (x, t) con $t > -\delta$. En particular, es continua en $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ y armónica en \mathbb{R}_+^{n+1} . Además, u_δ es acotada. En efecto, por el Teorema 2.19,

$$|u_\delta(x, t)| = |u(x, t + \delta)| \leq CM(t + \delta)^{-\frac{n}{p}} \leq CM\delta^{-\frac{n}{p}} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

En consecuencia, de acuerdo con el teorema de representación 2.14, u_δ debe ser la integral de Poisson de su función frontera $x \mapsto u_\delta(x, 0)$. Así, para cada $\delta > 0$,

$$u_\delta(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x - y) u_\delta(y, 0) dy,$$

o bien,

$$u_\delta(x, t) = (P_t * u_\delta)(x), \quad (3.2)$$

donde $u_\delta(x) = u(x, \delta)$. Mostraremos que $u_\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para cada $\delta > 0$.

Fijemos $\delta > 0$ y observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p |u(x, t)|^{1-p} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p (CMt^{-\frac{n}{2}})^{1-p} dx \\ &= (CM)^{1-p} t^{-\frac{n}{2}(1-p)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx \\ &\leq (CM)^{1-p} t^{-\frac{n}{2}(1-p)} M^p \\ &= Kt^{-n(\frac{1}{2}-1)} \quad \text{para cada } t > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\delta(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \delta)| dx \\ &\leq K\delta^{-n(\frac{1}{2}-1)} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ahora, tomemos $\eta > \delta > 0$. Entonces,

$$u_\eta(x) = u(x, \eta) = u(x, \eta - \delta + \delta) = u_\delta(x, \eta - \delta).$$

Usando (3.2), esto se expresa como sigue

$$u_\eta(x) = (\widehat{P}_{\eta-\delta} * u_\delta)(x).$$

Tomando transformadas de Fourier en ambos lados de esta ecuación y usando la fórmula $\widehat{P}_\delta(\xi) = e^{-2\pi\delta|\xi|}$ (ver Lema 2.7), obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{u}_\eta(x) &= \widehat{P}_{\eta-\delta}(\xi) \widehat{u}_\delta(\xi) = e^{-2\pi(\eta-\delta)|\xi|} \widehat{u}_\delta(\xi) \\ &\rightarrow e^{2\pi\eta|\xi|} \widehat{u}_\eta(x) = e^{2\pi\delta|\xi|} \widehat{u}_\delta(\xi). \end{aligned}$$

Nótese que esta relación vale para toda $\eta > \delta > 0$ y, por lo tanto, no depende ni de η ni de δ . Esto nos permite definir la siguiente función:

$$\psi(\xi) = e^{2\pi\delta|\xi|} \widehat{u}_\delta(\xi), \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nótese que ψ está bien definida como función de $\xi \in \mathbb{R}^n$, pues no depende de δ . Además, ψ es continua, ya que $\widehat{u}_\delta(\xi) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ por ser la transformada de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ (Lema de Riemann-Lebesgue, [11], teo. 8.22(f), p. 249) y además, claramente, $e^{2\pi\delta|\xi|}$ es continua. Mostraremos que ψ es lentamente creciente en infinito y, en consecuencia, $\psi \in S'$.

Veamos,

$$\begin{aligned} |\psi(\xi) e^{-2\pi t|\xi|}| &= |\widehat{u}_t(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_t(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)| dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De (3.3) y (3.4), obtenemos

$$|\psi(\xi) e^{-2\pi t|\xi|}| \leq K t^{-N} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall t > 0,$$

donde $N = n \left(\frac{1}{p} - 1 \right) > 0$. Luego,

$$|\psi(\xi)| \leq K \inf_{t>0} t^{-N} e^{2\pi t|\xi|} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

Por otra parte, si definimos

$$f(t) = t^{-N} e^{\alpha t}, \quad \text{con } \alpha \text{ una constante } \geq 0 \text{ y } t > 0,$$

entonces tenemos

$$f'(t) = \alpha t^{-N} e^{\alpha t} - N t^{-N-1} e^{\alpha t},$$

y

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\Leftrightarrow \alpha t^{-N} e^{\alpha t} = N t^{-N-1} e^{\alpha t} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{N}{\alpha}. \end{aligned}$$

Se puede ver que $f''\left(\frac{N}{\alpha}\right) > 0$, de modo que f tiene un mínimo en $\frac{N}{\alpha}$ y además $f\left(\frac{N}{\alpha}\right) = \left(\frac{N}{\alpha}\right)^{-N} e^N = \left(\frac{N}{\alpha}\right)^N \alpha^N$.

Aplicando esto a (3.5) con $\alpha = 2\pi|\xi|$, se sigue que

$$|\psi(\xi)| \leq K \left(\frac{\pi}{N}\right)^N (2\pi|\xi|)^N = K_N |\xi|^N \leq K_N (1 + |\xi|)^N \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Esto muestra que ψ es una función lentamente creciente. En consecuencia, es una distribución temperada.

Ahora bien, se sabe que la transformada de Fourier en el sentido de distribuciones es un isomorfismo topológico de \mathcal{S}' en \mathcal{S}' ([6], p.118). Por lo tanto, existe una única $f \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{f} = \psi$.

Demostraremos que u_t converge a esta distribución $f \in \mathcal{S}'$ en \mathcal{S}' . Debemos probar que $\langle u_t, \varphi \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$. Usando el Teorema de Inversión de Fourier ([11], teo. 8.26, pp. 251-252), tenemos

$$\begin{aligned} \langle u_t, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x) \widehat{\mathcal{F}^{-1}(\varphi)}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}_t(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} \psi(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) dx. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle u_t, \varphi \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\epsilon|x|^2} \psi(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) dx,$$

donde

$$\left| e^{-2\epsilon|x|^2} \psi(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) \right| \leq |\psi(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x)|. \quad (3.6)$$

Ahora bien, se sabe que la transformada de Fourier inversa es un mapeo lineal continuo de \mathcal{S} en \mathcal{S} ([6], pp.113-114), así que $\mathcal{F}^{-1}(\varphi) \in \mathcal{S}$. Puesto que ψ es lentamente creciente, tenemos que $\psi \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \in \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Luego, por el Teorema de Convergencia Dominada ([11], pp. 54-55), se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \langle u_t, \varphi \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\epsilon|x|^2} \psi(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-2\epsilon|x|^2} \psi(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) dx \\ &= \langle \tilde{f}, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Esto prueba que $u_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$ en \mathcal{S}' . Además, si $f = 0$ entonces forzosamente $u = 0$; por consiguiente, f determina a u de modo único. ■

Queremos ver ahora si se puede hacer una afirmación, de algún modo, recíproca a la que establece el teorema que acabamos de demostrar. Concretamente, nos preguntamos lo siguiente: *Dada una distribución temperada T en \mathbb{R}^n , ¿existirá una función armónica u definida en \mathbb{R}_+^{n+1} cuyo valor frontera sea justamente T ?*

Esto no es otra cosa que “el problema de Dirichlet en versión distribuciones temperadas”, lo cual motiva el objetivo final de esta tesis.

3.2. El problema de Dirichlet en \mathbb{R}_+^{n+1} versión distribuciones temperadas

Desearnos resolver el problema:

Dada una distribución temperada T en \mathbb{R}^n , encontrar una función armónica u definida en \mathbb{R}_+^{n+1} cuyo valor frontera sea justamente T .

En otras palabras, queremos encontrar una función armónica $u(x, t)$ definida en \mathbb{R}_+^{n+1} tal que, en algún sentido apropiado, se tenga

$$u(\cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} T.$$

Examinando los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, resulta natural esperar que la solución a este problema sea, de algún modo, "la convolución del núcleo de Poisson P_1 con la distribución $T \in \mathcal{S}'$ ", es decir, algo de la forma

$$u(x, t) = (P_1 * T)(x),$$

para una definición adecuada de convolución entre el núcleo de Poisson P_1 y la distribución T .

Lo primero que debemos observar es que, en esta situación específica, no podemos remitirnos a la definición clásica de convolución introducida por L. Schwartz en [24]. Veamos por qué:

Se sabe que, bajo esta definición, el espacio \mathcal{O}'_C formado por aquellas distribuciones T tales que para cada polinomio P se verifica que PT es una suma finita de derivadas (en el sentido de distribuciones) de funciones en L^∞ es el mayor espacio de distribuciones temperadas que actúa en \mathcal{S}' por convolución ([6], teo. 6.7, p. 186), de forma que, si $S \in \mathcal{O}'_C$ y $T \in \mathcal{S}'$, entonces $S * T$ está bien definida y $S * T \in \mathcal{S}'$. Además, se verifica la siguiente fórmula de intercambio para la transformada de Fourier ([6], teo. 6.10, p. 188)

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T).$$

No existe un espacio más grande que \mathcal{O}'_C con esta propiedad. \mathcal{O}'_C es, de hecho, un subespacio propio de \mathcal{S}' ([6], pp. 181-182). También se sabe que $\mathcal{F} : \mathcal{O}'_C \rightarrow \mathcal{O}_M$ es un isomorfismo topológico ([6], teo. 6.8, p. 186). Ahora bien, obsérvese que $P_1 \notin \mathcal{O}'_C$, ya que su transformada de Fourier es

$$\mathcal{F}(P_1)(\xi) = e^{-2|\xi|}$$

(ver Lema 2.7), la cual no pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (puesto que no es diferenciable en $\xi = 0$) y, por lo tanto, $\mathcal{F}(P_1) \notin \mathcal{O}_M$.

No podemos, entonces, aplicar la convolución de L. Schwartz al núcleo de Poisson P_1 con una distribución temperada T . Así, pues, el primer problema que debemos abordar es el de encontrar una definición apropiada de convolución para el núcleo de Poisson P_1 y una distribución $T \in \mathcal{S}'$.

Diversas definiciones han sido introducidas y estudiadas por diferentes autores con el fin de dar sentido a la convolución de dos distribuciones. Restringiremos aquí nuestro estudio a la llamada \mathcal{S}' -convolución definida por Y. Hirata y H. Ogata en [16]. La \mathcal{S}' -convolución es una operación conmutativa que extiende apropiadamente la convolución de dos distribuciones temperadas definida por L. Schwartz, a la vez que preserva la validez en un sentido apropiado de la fórmula $\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T)$.

Para motivar la definición de la \mathcal{S}' -convolución recordemos que, dadas $\varphi, f, g \in C_c^\infty$, podemos expresar la acción de la convolución clásica $f * g$ sobre la función de prueba φ como

$$(f * g, \varphi) = \int \int \varphi(x) f(x-y) g(y) dy dx$$

o bien, tomando el cambio de variable $y \rightarrow z = x - y$,

$$(f * g, \varphi) = \int \int \varphi(x) f(z) g(x-z) dz dx = (f(\tilde{g} * \varphi), 1)_{L^1, L^\infty}$$

donde $f(\tilde{g} * \varphi)$ debe interpretarse como el producto de f y $(\tilde{g} * \varphi)$.

Observación 3.8 La expresión $(f(\tilde{g} * \varphi), 1)_{L^1, L^\infty}$ denota la acción de la función integrable $f(\tilde{g} * \varphi)$ sobre la función acotada idénticamente 1, vía integración, así que puede ser interpretada como una dualidad entre L^1 y L^∞ .

Cuando $f \in \mathcal{S}'$ y $\varphi, g \in \mathcal{S}$, $f(\tilde{g} * \varphi)$ ya no es necesariamente una función en L^1 . Sin embargo, podríamos pedir que, bajo una definición apropiada de convolución, $f(\tilde{g} * \varphi)$ fuera una distribución temperada en alguna clase que generalice de manera natural al espacio L^1 .

Para darnos una idea de cómo debería ser esa clase, observemos que

$$(f(\tilde{g} * \varphi), \psi)_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = (f, (\tilde{g} * \varphi)\psi)_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$$

lo cual sugiere que la distribución temperada $f(\tilde{g} * \varphi)$ todavía podría actuar en una clase de funciones más grande que \mathcal{S} : funciones ψ en C^∞ con derivadas $\partial^\alpha \psi$ acotadas $\forall \alpha$, ya que esto seguiría asegurando que $(\tilde{g} * \varphi)\psi \in \mathcal{S}$.

Esto motiva a definir los espacios que estudiaremos a continuación:

Definición 3.9 Definimos

$$B = \{ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \in C^\infty \text{ y } \partial^\alpha \varphi \text{ es acotada } \forall \text{ multi-índice } \alpha \}.$$

O, equivalentemente,

$$B = \{ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \in C^\infty \text{ y } \partial^\alpha \varphi \in L^\infty \forall \text{ multi-índice } \alpha \}.$$

Dotamos a B con la topología de la convergencia uniforme en \mathbb{R}^n en cada derivada $\partial^\alpha \varphi$. Esta topología es la topología inducida por la familia de seminormas

$$\|\varphi\|_{m, \infty} = \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty, \quad m \in \mathbb{N}.$$

En efecto, una sucesión $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ converge a φ en B si y sólo si

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \varphi_j &\longrightarrow \partial^\alpha \varphi \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \forall \text{ multi-índice } \alpha \\ \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| &\longrightarrow 0 \quad \forall \text{ multi-índice } \alpha \\ \Leftrightarrow \|\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi\|_\infty &\longrightarrow 0 \quad \forall \text{ multi-índice } \alpha \\ \Leftrightarrow \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi\|_\infty &\longrightarrow 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \|\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi\|_{m, \infty} &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

El espacio B con esta topología es, entonces, un espacio localmente convexo (ELC) (por [11], teo. 5.14, p. 166). Más aún, es un espacio de Fréchet ([11], p. 167). Nótese además que

$$C_c^\infty \subset B \subset \mathcal{D}'.$$

sin embargo, se puede demostrar que C_c^∞ no es denso en B con esta topología. Vamos a definir, entonces, un subespacio de B en el cual C_c^∞ resultará ser denso.

Definición 3.10 *Definimos*

$$\hat{B} = \{ \varphi \in C^\infty \mid \partial^\alpha \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty \text{ para cada multi-índice } \alpha \}.$$

Obviamente $\hat{B} \subset B$. Otra observación inmediata es que $\mathcal{S} \subset \hat{B} \subset B$, pues el espacio de Schwartz \mathcal{S} consiste de todas aquellas funciones de clase C^∞ que, junto con todas sus derivadas, se anulan rápidamente en infinito.

Proposición 3.11 *El espacio \hat{B} es un subespacio cerrado de B .*

Demostración. Supongamos que $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión en \hat{B} que converge a φ en B . Esto es, para cada multi-índice α ,

$$\partial^\alpha \varphi_j \longrightarrow \partial^\alpha \varphi \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

Fijemos α y sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo con (3.7), $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq j_0 \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En particular,

$$|\partial^\alpha \varphi_{j_0}(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $\varphi_j \in \hat{B} \forall j \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$\partial^\alpha \varphi_j(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty, \text{ para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, para cada $j \in \mathbb{N}$ y para el ε dado antes, $\exists M_j > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha \varphi_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } |x| > M_j.$$

En particular,

$$|\partial^\alpha \varphi_{j_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } |x| > M_{j_0}.$$

En consecuencia, si $|x| > M_{j_0}$, entonces

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq |\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi_{j_0}(x)| + |\partial^\alpha \varphi_{j_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto muestra que

$$\partial^\alpha \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty, \text{ para cada multi-índice } \alpha.$$

Por consiguiente, $\varphi \in \hat{B}$. Y, por lo tanto, \hat{B} es cerrado en B . ■

Dado que B es un espacio de Fréchet, una consecuencia inmediata de este teorema es que \hat{B} también es un espacio de Fréchet.

Proposición 3.12 *El espacio C_c^∞ es denso en \hat{B} .*

Demostración. Sea $\varphi \in \hat{B}$. Mostraremos que existe una sucesión en C_c^∞ que converge a φ en la topología de \hat{B} (que es la de B). Como $\varphi \in \hat{B}$, sabemos que

$$\partial^\alpha \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty, \text{ para cada multi-índice } \alpha.$$

Fijemos α y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, $\exists M_\alpha > 0$ tal que

$$|\partial^\beta \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall |\beta| \leq |\alpha| \text{ si } |x| > M_\alpha. \quad (3.8)$$

Por otra parte, por el Lema C^∞ de Urysohn ([11] p. 245), existe $\psi \in C_c^\infty$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, con $\psi(y) = 1$ si $|y| \leq 1$ y $\psi(y) = 0$ si $|y| \geq 2$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, definamos

$$\psi_j(y) = \psi\left(\frac{y}{j}\right)$$

y consideremos la función producto $\psi_j \varphi$. Nótese que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\psi_j \varphi$ es una función en C_c^∞ , pues $\psi \in C_c^\infty$ y $\varphi \in C^\infty$.

Mostraremos que la sucesión $(\psi_j \varphi)_{j=1}^\infty$ converge a φ en la topología de \hat{B} . Es decir,

$$\partial^\alpha \psi_j \varphi \rightarrow \partial^\alpha \varphi \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \text{ } \forall \text{ multi-índice } \alpha.$$

Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario.

Caso $|x| > M_\alpha$: Obsérvese que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(\psi_j\varphi)(x) - \partial^\alpha\varphi(x)| &\leq |\partial^\alpha(\psi_j\varphi)(x)| + |\partial^\alpha\varphi(x)| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} |\partial^\beta\psi_j(x)| |\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)| + |\partial^\alpha\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Por (3.8), se sigue que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(\psi_j\varphi)(x) - \partial^\alpha\varphi(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} |\partial^\beta\psi_j(x)| \varepsilon + \varepsilon \\ &= \varepsilon \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} \left| \partial^\beta \psi \left(\frac{x}{j} \right) \right| + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} \frac{1}{j^{|\beta|}} |\partial^\beta\psi(x)| + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} \frac{1}{j^{|\beta|}} \|\partial^\beta\psi\|_\infty + \varepsilon \\ &= C_\alpha \varepsilon \end{aligned}$$

donde $C_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} \frac{1}{j^{|\beta|}} \|\partial^\beta\psi\|_\infty + 1$ es una constante que sólo depende de α .

Caso $|x| \leq M_\alpha$: Existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq M_\alpha \leq j_0$. Luego, $\forall j \geq j_0$

$$\psi_j(x) = \psi\left(\frac{x}{j}\right) = 1 \text{ ya que } \left|\frac{x}{j}\right| = \frac{|x|}{j} \leq 1.$$

Así,

$$|\partial^\alpha(\psi_j\varphi)(x) - \partial^\alpha\varphi(x)| = |\partial^\alpha\varphi(x) - \partial^\alpha\varphi(x)| = 0 < C_\alpha \varepsilon \quad \forall j \geq j_0.$$

Esto muestra que, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$|\partial^\alpha(\psi_j\varphi)(x) - \partial^\alpha\varphi(x)| < C_\alpha \varepsilon \quad \forall j \geq j_0.$$

Por lo tanto,

$$\partial^\alpha\psi_j\varphi \longrightarrow \partial^\alpha\varphi \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \text{ para cada multi-índice } \alpha.$$

Es decir, $(\psi_j\varphi)_{j=1}^\infty$ converge a φ en la topología de \mathcal{B} . Y, por lo tanto, concluimos que C_c^∞ es denso en $\hat{\mathcal{B}}$. ■

Definición 3.13 Denotaremos con \mathcal{D}'_{L^1} al espacio dual fuerte de $\hat{\mathcal{B}}$. Esto es,

$$\mathcal{D}'_{L^1} = \left\{ \Lambda : \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{C} \mid \Lambda \text{ es lineal y continuo} \right\},$$

(i.e., el espacio de funcionales lineales y continuos definidas en $\hat{\mathcal{B}}$) dotado con la topología fuerte. A los elementos de \mathcal{D}'_{L^1} se les llama distribuciones integrables.

Recuérdese que la topología fuerte es la asociada a la siguiente noción de convergencia:

una red $(A_i)_{i \in I}$ converge fuertemente a A en \mathcal{D}'_{ℓ} si y sólo si $A_i \rightarrow A$ uniformemente en cada subconjunto acotado de \hat{B} .

(Un subconjunto A de \hat{B} es acotado si para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $M_m > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{m, \infty} \equiv \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty} \leq M_m \quad \forall \varphi \in A.)$$

Se puede ver que \mathcal{D}'_{ℓ} es un subespacio del espacio de distribuciones \mathcal{D}' . Un resultado importante es el siguiente.

Teorema 3.14 $T \in \mathcal{D}'_{\ell} \Leftrightarrow \exists m = m(T) \in \mathbb{N}$ tal que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha \quad \text{con } f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

(Las derivadas $\partial^\alpha f_\alpha$ son derivadas en el sentido de distribuciones; ver [11], p. 384). Es debido a esta caracterización que a los elementos de \mathcal{D}'_{ℓ} se les llama distribuciones integrables.

Demostración.

(\Leftarrow) Supongamos que $T \in \mathcal{D}'$ se expresa en la forma

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha \quad \text{con } f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall |\alpha| \leq m,$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Probemos que T es un funcional lineal continuo en \hat{B} .

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $T = \partial^\alpha f$, para algún multi-índice α y alguna $f \in L^1$.

Claramente, T es lineal. Sólo resta probar que T es continuo. Para ello, bastará probar que T es continuo en 0. Tomemos una sucesión $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ en \hat{B} tal que

$$\varphi_j \rightarrow 0 \text{ en } \hat{B}.$$

Esto significa que $\partial^\beta \varphi_j \rightarrow 0$ uniformemente en \mathbb{R}^n \forall multi-índice β .

Fijemos β y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \partial^\beta \varphi_j(x) \right| < \frac{\varepsilon}{1 + \|f\|_1} \quad \forall j \geq j_0 \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, $\forall j \geq j_0$ se tiene

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi_j \rangle| &= \left| \langle \partial^j f, \varphi_j \rangle \right| = \left| (-1)^{|j|} \langle f, \partial^j \varphi_j \rangle \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial^j \varphi_j(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |\partial^j \varphi_j(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{1 + \|f\|_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \frac{\varepsilon}{1 + \|f\|_1} \|f\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$\text{si } \varphi_j \rightarrow 0 \text{ en } \hat{B}, \text{ entonces } \langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, T es un funcional lineal continuo en \hat{B} . Es decir, $T \in \mathcal{D}'_{\hat{B}}$.
(\Rightarrow) Recíprocamente, supongamos que $T \in \mathcal{D}'_{\hat{B}}$. Es decir, $T: \hat{B} \rightarrow \mathbb{C}$ define un funcional lineal continuo. Como \hat{B} es un ELC cuya topología está inducida por la familia de seminormas

$$\|\varphi\|_{m, \infty} = \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty}, \text{ con } m \in \mathbb{N},$$

se sigue que existe una constante $C > 0$ y un número finito de seminormas, digamos $\|\cdot\|_{m_1, \infty}, \|\cdot\|_{m_2, \infty}, \dots, \|\cdot\|_{m_k, \infty}$ tales que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{i=1}^k \|\varphi\|_{m_i, \infty} \quad \forall \varphi \in \hat{B}$$

(ver [11], prop. 5.15, p. 166). Tomando $M = \max\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$, obtenemos

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C(M \|\varphi\|_{M, \infty}) \quad \forall \varphi \in \hat{B}.$$

Luego,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty} \quad \forall \varphi \in \hat{B}. \quad (3.9)$$

Sea N el número de n -adas $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que satisfacen $|\alpha| \leq m$. Denotemos

$$(C_0(\mathbb{R}^n))^N = \underbrace{C_0(\mathbb{R}^n) \times \dots \times C_0(\mathbb{R}^n)}_{N \text{ veces}}$$

y consideremos la función

$$\begin{aligned} J: \hat{B} &\rightarrow (C_0(\mathbb{R}^n))^N \text{ tal que} \\ \varphi &\mapsto (\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m} \end{aligned}$$

$((\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m})$ es una N -ada ordenada en $(C_0(\mathbb{R}^n))^N$. Claramente, J es 1-1 por lo que podemos identificar $J(\hat{B})$ con un subespacio de $(C_0(\mathbb{R}^n))^N$.

En $J(\hat{B})$, provisto con la topología inducida por $(C_0(\mathbb{R}^n))^N$, definamos el funcional lineal $F: J(\hat{B}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$F((\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m}) = \langle F, (\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m} \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \hat{B}. \quad (3.10)$$

De (3.9) y (3.10), tenemos que

$$|F((\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m})| \leq M \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in \hat{B}$$

y así, F es un funcional lineal continuo en $J(\hat{B})$.

Por el Teorema de Hahn-Banach ([11], p. 158), F puede extenderse a un funcional lineal continuo en $(C_0(\mathbb{R}^n))^N$ y, puesto que el dual de $C_0(\mathbb{R}^n)$ es $M(\mathbb{R}^n)$ ([11], p. 223), podemos encontrar medidas de Borel μ_α , para cada $|\alpha| \leq m$, tales que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle F, (\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m} \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu_\alpha(x) \quad \forall \varphi \in \hat{B}.$$

Así,

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \mu_\alpha, \partial^\alpha \varphi \rangle = \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha \left[(-1)^{|\alpha|} \mu_\alpha \right], \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha \lambda_\alpha, \varphi \right\rangle$$

donde $\lambda_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \mu_\alpha$ son, claramente, medidas de Borel finitas.

Con esto tenemos que T se expresa en la forma

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha \lambda_\alpha \quad \text{con } \lambda_\alpha \in M(\mathbb{R}^n) \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

En seguida, fijemos una de estas λ_α y denotémosla simplemente por λ , para aligerar la notación. Consideremos una *solución fundamental* E del operador $(I - \Delta)^k$, con k un entero positivo (ver Apéndice C para una breve reseña sobre soluciones fundamentales). Así,

$$(I - \Delta)^k E = \delta.$$

De acuerdo con el Lema C.2 del Apéndice C, $E \in L^1(\mathbb{R}^n)$ siempre que escojamos k suficientemente grande. Así,

$$\lambda = \lambda * \delta = \lambda * (I - \Delta)^k E = (I - \Delta)^k (\lambda * E).$$

Ahora, obsérvese que, para k suficientemente grande,

$$\lambda * E \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

En efecto, por la desigualdad de Minkowski para integrales,

$$\begin{aligned} \|\lambda * E\|_1 &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |E(\cdot - y)| d|\lambda|(y) \right\|_1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|E(\cdot - y)\|_1 d|\lambda|(y) \leq \|E\|_1 \|\lambda\| < \infty \end{aligned}$$

para k suficientemente grande. Así,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha \left[(I - \Delta)^k (\lambda_\alpha * E) \right] \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m'} \partial^\alpha (\lambda_\alpha * E) \quad \text{con } \lambda_\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \forall |\alpha| \leq m'. \end{aligned}$$

Por consiguiente, T se expresa como suma finita de derivadas en el sentido de distribuciones de funciones integrables. ■

Observación 3.15 Debido a la representación obtenida en el teorema anterior para los elementos de \mathcal{D}'_L , podemos ver que

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'_L \subset \mathcal{S}'.$$

En efecto, pues se sabe que toda distribución $T \in \mathcal{E}'$ puede ser representada en la forma

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha \quad \text{con } f_\alpha \in C_c(\mathbb{R}^n) \forall |\alpha| \leq m$$

(ver [6], cap. 2.22, p. 74) y, puesto que $C_c \subset L^1$, se tiene la contención $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'_L$. Por otra parte, por el Teorema 3.14 que acabamos de probar, si $T \in \mathcal{D}'_L$, entonces

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha \quad \text{con } f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n) \forall |\alpha| \leq m$$

y, puesto que $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'$, se tiene la contención $\mathcal{D}'_L \subset \mathcal{S}'$.

Proposición 3.16 La multiplicación puntual está bien definida y es continua de $B \times B$ en B y también de $\hat{B} \times B$ en \hat{B} .

Demostración. Probaremos que la multiplicación puntual está bien definida y es continua de $\hat{B} \times B$ en \hat{B} . El otro caso es similar. Supongamos que $\varphi \in \hat{B}$, $\psi \in B$, entonces, por definición,

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^\infty \text{ y } \partial^\alpha \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty \text{ para cada multi-índice } \alpha, \\ \psi &\in C^\infty \text{ y } \forall \text{ multi-índice } \alpha \exists K_\alpha > 0 \text{ tal que } |\partial^\alpha \psi| \leq K_\alpha. \end{aligned}$$

Luego, por la regla de Leibniz, para todo multi-índice α ,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (\varphi v)| &= \left| \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} (\partial^\beta \varphi) (\partial^{\alpha-\beta} v) \right| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} |\partial^\beta \varphi| |\partial^{\alpha-\beta} v| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} K_\alpha |\partial^\beta \varphi| \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi v \in \dot{B}$. Esto prueba que la multiplicación puntual de $\dot{B} \times B \rightarrow \dot{B}$ está bien definida. Para probar la continuidad, tomemos una sucesión $(f_j, g_j)_{j=1}^\infty$ en $\dot{B} \times B$ tal que $(f_j, g_j) \rightarrow (f, g)$ en $\dot{B} \times B$, entonces

$$\begin{aligned} f_j &\rightarrow f \text{ en } \dot{B} \\ y \quad g_j &\rightarrow g \text{ en } B, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f_j &\rightarrow \partial^\alpha f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \quad \forall \text{ multi-índice } \alpha \\ y \quad \partial^\alpha g_j &\rightarrow \partial^\alpha g \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \quad \forall \text{ multi-índice } \alpha. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} &|\partial^\alpha (f_j g_j)(x) - \partial^\alpha (fg)(x)| \\ &\leq |\partial^\alpha (f_j g_j)(x) - \partial^\alpha (f_j g)(x)| + |\partial^\alpha (f_j g)(x) - \partial^\alpha (fg)(x)| \\ &\leq |\partial^\alpha [f_j (g_j - g)](x)| + |\partial^\alpha [g (f_j - f)](x)| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} |\partial^\beta f_j(x)| |\partial^{\alpha-\beta} (g_j - g)(x)| + \sum_{\beta \leq \alpha} C'_{\alpha, \beta} |\partial^\beta g(x)| |\partial^{\alpha-\beta} (f_j - f)(x)| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} |\partial^\beta f_j(x)| \varepsilon + \sum_{\beta \leq \alpha} C'_{\alpha, \beta} |\partial^\beta g(x)| \varepsilon \end{aligned}$$

si j es suficientemente grande.

Ahora bien, como $(\partial^\beta f_j)_{j=1}^\infty \subset \dot{B} \subset B$ y la sucesión converge uniformemente, entonces $(\partial^\beta f_j)_{j=1}^\infty$ está uniformemente acotada \forall multi-índice $\beta \leq \alpha$. Así, $\exists M'_\alpha > 0$ tal que $|\partial^\beta f_j| \leq M'_\alpha \quad \forall \beta \leq \alpha$.

Por otra parte, como B es un espacio de Fréchet, $g \in B$, pues es el límite de una sucesión en B . Así, $\forall \beta \leq \alpha \exists M''_\alpha > 0$ tal que $|\partial^\beta g| \leq M''_\alpha$. Luego,

$$|\partial^\alpha (f_j g_j)(x) - \partial^\alpha (fg)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} M'_\alpha \varepsilon + \sum_{\beta \leq \alpha} C'_{\alpha, \beta} M''_\alpha \varepsilon = K_{\alpha, \beta} \varepsilon.$$

Esto demuestra que $f_j g_j \rightarrow fg$ en \hat{B} y, por lo tanto, la multiplicación puntual de $\hat{B} \times B$ en \hat{B} es continua. ■

Como consecuencia de la Proposición 3.16, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.17 \mathcal{D}'_L es cerrada bajo multiplicación por funciones en B .

Demostración. Sean $T \in \mathcal{D}'_L$ y $\psi \in B$. Probaremos que $\psi T \in \mathcal{D}'_L$, es decir, que ψT es un funcional (lineal) continuo en \hat{B} .

Supongamos que $\varphi_j \rightarrow 0$ en \hat{B} . Entonces, por la Proposición 3.16,

$$\begin{aligned} \varphi_j \psi &\rightarrow 0 \text{ en } \hat{B} \\ \Rightarrow \langle T, \varphi_j \psi \rangle &\rightarrow 0 \text{ en } \mathbb{C}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\langle \psi T, \varphi_j \rangle \rightarrow 0 \text{ en } \mathbb{C}$$

pues, por definición, $\langle T, \varphi_j \psi \rangle = \langle \psi T, \varphi_j \rangle$. Por lo tanto, $\psi T \in \mathcal{D}'_L$. ■

También consideraremos en B una noción alternativa de convergencia: una sucesión $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ converge a φ en B si para cada multi-índice α se tiene

$$(i) \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_\infty < \infty,$$

(ii) la sucesión $(\partial^\alpha \varphi_j)_{j=1}^\infty$ converge a $\partial^\alpha \varphi$ uniformemente en cada subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Denotaremos con B_c al espacio B con la topología asociada a esta noción de convergencia.

Proposición 3.18 El espacio C_c^∞ es denso en B_c .

Demostración. Sea $\varphi \in B_c$. Mostraremos que existe una sucesión en C_c^∞ que converge a φ en la topología de B_c . Fijemos α y sea $\varepsilon > 0$. Como $\varphi \in B$, sabemos que

$$\varphi \in C^\infty \text{ y } \exists M_\alpha > 0 \text{ tal que } |\partial^\alpha \varphi| \leq M_\alpha.$$

Por otra parte, por el Lema C^∞ de Urysohn ([11] p. 245), existe $\psi \in C_c^\infty$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, con $\psi(y) = 1$ si $|y| \leq 1$ y $\psi(y) = 0$ si $|y| \geq 2$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, definamos

$$\psi_j(y) = \psi\left(\frac{y}{j}\right)$$

y consideremos la función producto $\psi_j \varphi$. Nótese que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\psi_j \varphi$ es una función en C_c^∞ , pues $\psi \in C_c^\infty$ y $\varphi \in C^\infty$.

Mostraremos que la sucesión $(\psi_j \varphi)_{j=1}^\infty$ converge a φ en la topología de B_c :

(i) Obsérvese que, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(\psi_j \varphi)(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} \left| \partial^\beta \psi_j(x) \right| \left| \partial^{\alpha-\beta} \varphi(x) \right| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} \left| \partial^\beta \psi \left(\frac{x}{j} \right) \right| K_\alpha \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} M_\alpha \frac{1}{j^{|\alpha|}} \left| \partial^\beta \psi(x) \right| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} M_\alpha \|\partial^\alpha \psi\|_\infty = C_\alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\partial^\alpha \psi_j \varphi\|_\infty \leq C_\alpha < \infty.$$

(ii) Supongamos, ahora, que K es un compacto de \mathbb{R}^n . Entonces, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq j_0 \forall x \in K$. Luego, $\forall x \in K$

$$\psi_j(x) = \psi \left(\frac{x}{j} \right) = 1 \text{ si } j \geq j_0, \text{ ya que } \left| \frac{x}{j} \right| = \frac{|x|}{j} \leq 1.$$

Así, $\forall x \in K$

$$|\partial^\alpha(\psi_j \varphi)(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| = |\partial^\alpha \psi_j(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| = 0 < \varepsilon \text{ si } j \geq j_0.$$

Por lo tanto,

$$\partial^\alpha \psi_j \varphi \longrightarrow \partial^\alpha \varphi \text{ uniformemente en cada subconjunto compacto } K \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

■

Observación 3.19 Como consecuencia de la Proposición 3.18, \hat{B} es denso en B_c . Luego, dada $T \in \mathcal{D}'_c$, tenemos que T está bien definida en C_c^∞ y, además, es continua con respecto a la topología de B_c ([24, p. 203]). Por consiguiente, T puede ser extendido de manera única a un funcional lineal continuo en B_c . En este sentido, podemos decir que \mathcal{D}'_c es el dual de B_c .

Y. Hirata y H. Ogata definieron en [16] la noción de \mathcal{S}' -convolución con el objeto de extender la validez de la fórmula de intercambio de Fourier

$$\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S).$$

R. Shiraishi introdujo después una definición equivalente en [25], que es la que aquí presentamos:

Definición 3.20 Dadas $T, S \in \mathcal{S}'$ diremos que su \mathcal{S}' -convolución existe si $(\tilde{S} * \varphi) T \in \mathcal{D}'_{l,0}$ para cada $\varphi \in \mathcal{S}$.

Aquí, $(\tilde{S} * \varphi) T$ denota el producto de la distribución T con la regularización $\tilde{S} * \varphi$, el cual está bien definido porque $\tilde{S} * \varphi$ es C^∞ y lentamente creciente junto con todas sus derivadas ([24], p. 248). (Recuérdese que \tilde{S} denota a la distribución $\varphi \mapsto (S, \tilde{\varphi})$.)

Shiraishi probó que, cuando la \mathcal{S}' -convolución existe, el mapeo

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \varphi &\mapsto \langle (\tilde{S} * \varphi) T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_{l,0}} \end{aligned}$$

es lineal y continuo y define una distribución temperada que denotaremos por $T * S$.

En otras palabras,

$$(T * S, \varphi)_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle (\tilde{S} * \varphi) T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_{l,0}}.$$

Shiraishi probó también que $T * S$ existe si y sólo si $S * T$ existe, y ambas distribuciones coinciden. Es decir, la \mathcal{S}' -convolución es conmutativa. Más aún, esta definición coincide con la de L. Schwartz en todos los casos en los cuales la definición de Schwartz es aplicable.

Finalmente señalamos que esta definición está motivada por el hecho de que, cuando las distribuciones temperadas S, T son funciones integrables, entonces

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{S} * \varphi) T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_{l,0}} &= \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \left[\int_{\mathbb{R}^n} S(y-x) \varphi(y) dy \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} T(x) S(y-x) dx \right] \varphi(y) dy \\ &= (T * S, \varphi)_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \end{aligned}$$

donde $T * S$ denota la convolución en el sentido clásico de dos funciones integrables.

A continuación, abordaremos el problema de encontrar espacios óptimos de distribuciones temperadas que admitan \mathcal{S}' -convolución con el núcleo de Poisson

$$P_t(x) = c_n \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

donde

$$c_n = \frac{2}{|\Sigma_n|} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

En otras palabras, queremos encontrar el mayor espacio de distribuciones temperadas T tales que $(\tilde{P}_t * \varphi) T \in \mathcal{D}'_{l,0}$ para cada $\varphi \in \mathcal{S}$. Para atacar este problema es conveniente observar el siguiente resultado, que es una generalización al contexto de distribuciones de un resultado clásico para funciones:

Proposición 3.21 Dada $T \in \mathcal{D}'_{L,1}$, la distribución T admite S' -convolución con el núcleo de Poisson. De hecho, la S' -convolución está dada por la fórmula

$$(T * P_t)(y) = \langle T_x, P_t(x-y) \rangle_{\mathcal{D}'_{L,1}, \mathcal{B}} \quad (3.11)$$

para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Demostración. Sean $t > 0$ y $\varphi \in \mathcal{S}$. Por demostrar que $(\tilde{P}_t * \varphi) T \in \mathcal{D}'_{L,1}$.

Como $\mathcal{D}'_{L,1}$ es cerrado bajo multiplicación por funciones en \mathcal{B} , bastará demostrar que $\tilde{P}_t * \varphi = P_t * \varphi \in \mathcal{B}$.

Sea $f(x) = (P_t * \varphi)(x)$. Entonces f es una función en C^∞ dada por

$$f(x) = \frac{c_n}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x-y|^2}{t^2} + 1 \right)^{-\frac{n+1}{2}} \varphi(y) dy.$$

Debemos mostrar que $\partial^\alpha f$ es acotada en $\mathbb{R}^n \forall$ multi-índice α . Tenemos que

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{c_n}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x-y|^2}{t^2} + 1 \right)^{-\frac{n+1}{2}} (\partial^\alpha \varphi)(y) dy.$$

Usando la desigualdad de Peetre (ver Lema D.1 del Apéndice D)

$$\left(|x-y|^2 + 1 \right)^r \leq 2^{r'} \left(|x|^2 + 1 \right)^r \left(|y|^2 + 1 \right)^{r'}$$

con $r = \frac{-n+1}{2}$, obtenemos para cada $t > 0$,

$$\left(\frac{|x-y|^2}{t^2} + 1 \right)^{-\frac{n+1}{2}} \leq 2^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{|x|^2}{t^2} + 1 \right)^{-\frac{n+1}{2}} \left(\frac{|y|^2}{t^2} + 1 \right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Luego,

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{c_n}{t^n} \left(\frac{|x|^2}{t^2} + 1 \right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|y|^2}{t^2} + 1 \right)^{\frac{n+1}{2}} |\partial^\alpha \varphi(y)| dy. \quad (3.12)$$

Esta estimación ya nos muestra que $f \in \mathcal{B}$ para cada $t > 0$. Sin embargo, podemos obtener una dependencia explícita en t si estimamos la integral en (3.12). Fijemos $t > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|y|^2}{t^2} + 1 \right)^{\frac{n+1}{2}} |\partial^\alpha \varphi(y)| dy &= \left(\int_{|y| < t} + \int_{|y| \geq t} \right) \left(\frac{|y|^2}{t^2} + 1 \right)^{\frac{n+1}{2}} |\partial^\alpha \varphi(y)| dy \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

donde

$$I_1 \leq C_n \int_{|y| < 1} |\partial^\alpha \varphi(y)| dy \leq C_n \|\partial^\alpha \varphi\|_1,$$

$$I_2 \leq C_n \int_{|y| \geq 1} \left(\frac{|y|}{t}\right)^{n+1} |\partial^\alpha \varphi(y)| dy \leq \frac{C_n}{t^{n+1}} \left\| |y|^{n+1} \partial^\alpha \varphi \right\|_1.$$

Por consiguiente,

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{C_n}{t^n} \left(\frac{|x|^2}{t^2} + 1\right)^{\frac{-(n+1)}{2}} \left[\|\partial^\alpha \varphi\|_1 + \frac{1}{t^{n+1}} \left\| |y|^{n+1} \partial^\alpha \varphi \right\|_1 \right]$$

i.e.,

$$|\partial^\alpha (P_t * \varphi)(x)| \leq \frac{C_n}{t^n} \left(\frac{|x|^2}{t^2} + 1\right)^{\frac{-(n+1)}{2}} \left[\|\partial^\alpha \varphi\|_1 + \frac{1}{t^{n+1}} \left\| |y|^{n+1} \partial^\alpha \varphi \right\|_1 \right]. \quad (3.13)$$

Por lo tanto, $P_t * \varphi \in B \forall \varphi \in \mathcal{S}$. Y, en consecuencia, $(\tilde{P}_t * \varphi) T \in \mathcal{D}'_L$. Esto demuestra que la \mathcal{S}' -convolución $T * P_t$ existe. Falta demostrar la fórmula (3.11).

Como

$$\left(\frac{|x|^2}{t^2} + 1\right)^{\frac{-(n+1)}{2}} \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty,$$

tenemos que

$$\partial^\alpha (P_t * \varphi) \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, $P_t * \varphi \in \dot{B} \forall \varphi \in \mathcal{S}$. Además, como $T \in \mathcal{D}'_L$, por el Teorema 3.14 sabemos que T se expresa como una suma finita

$$T = \sum_{\alpha} \partial^\alpha f_{\alpha} \text{ con } f_{\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^n) \forall \alpha.$$

Luego, para cada $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle T * P_t, \varphi \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}'} &= \langle (P_t * \varphi) T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_L, \mathcal{D}} = \langle T, P_t * \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_L, \dot{B}} \\ &= \left\langle \sum_{\alpha} \partial^\alpha f_{\alpha}, P_t * \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'_L, \dot{B}} \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \langle f_{\alpha}, \partial^\alpha (P_t * \varphi) \rangle_{\mathcal{D}'_L, \dot{B}} \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha}(x) \partial^\alpha (P_t * \varphi)(x) dx \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha}(x) \partial^\alpha P_t(x-y) \varphi(y) dy dx \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_{\alpha}(x), \partial^\alpha P_t(x-y) \rangle_{\mathcal{D}'_L, \dot{B}} \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Es decir, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} (T * P_t, \varphi)_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} &= \sum_n \int_{\mathbb{R}^n} \langle \partial^\alpha f_n(x), P_t(x-y) \rangle_{\mathcal{D}'_t, \dot{B}} \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle T_t, P_t(x-y) \rangle_{\mathcal{D}'_t, \dot{B}} \varphi(y) dy \end{aligned}$$

por lo cual concluimos que

$$\langle T * P_t \rangle [y] = \langle T_t, P_t(x-y) \rangle_{\mathcal{D}'_t, \dot{B}}.$$

■

3.3. Espacios óptimos para la \mathcal{S}' -convolución con el núcleo de Poisson P_t

El hecho de que la función $P_t * \varphi$ no sólo esté en B sino también en \dot{B} para cada $\varphi \in \mathcal{S}$, sugiere que \mathcal{D}'_t no es el espacio más grande de distribuciones temperadas que admite \mathcal{S}' -convolución con el núcleo de Poisson P_t .

La estimación (3.13) sugiere que P_t podría admitir \mathcal{S}' -convolución con distribuciones en "versiones con peso" del espacio \mathcal{D}'_t . Por esta razón damos la siguiente definición.

Definición 3.22 Sea $\omega(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{\mu}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Para $\mu \in \mathbb{R}$ fijamos

$$\omega^\mu \mathcal{D}'_t = \{T \in \mathcal{S}' : \omega^{-\mu} T \in \mathcal{D}'_t\}$$

con la topología inducida por la función

$$\begin{aligned} \omega^\mu \mathcal{D}'_t &\rightarrow \mathcal{D}'_t \\ T &\rightarrow \omega^{-\mu} T. \end{aligned}$$

Es claro que $\omega^\mu \mathcal{D}'_t$ puede también definirse como el espacio de las distribuciones $T \in \mathcal{D}'$ tales que $\omega^{-\mu} T \in \mathcal{D}'_t$. De hecho, si $T \in \omega^\mu \mathcal{D}'_t$, entonces forzosamente $T \in \mathcal{S}'$.

En la siguiente proposición, obtendremos una representación para las distribuciones en $\omega^\mu \mathcal{D}'_t$ que resultará de mucha utilidad posteriormente.

Proposición 3.23 Dadas $T \in \mathcal{S}'$ y $\mu \in \mathbb{R}$, las siguientes enunciadós son equivalentes:

- (a) $T \in \omega^\mu \mathcal{D}'_t$.
- (b) $T = T_1 + |x|^\mu T_2$, donde $T_1 \in \mathcal{S}'$, $T_2 \in \mathcal{D}'_t$, y $T_2 = 0$ en una vecindad de cero.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b) Sea $\theta \in C_c^\infty$ tal que $0 \leq \theta \leq 1$, con $\theta = 1$ para $|x| \leq \frac{1}{2}$ y $\theta = 0$ para $|x| \geq 1$.

Escribamos

$$\begin{aligned} T &= \theta T + (1 - \theta) T \\ &= \theta T + (1 - \theta) \frac{(1 + |x|^2)^{\frac{\mu}{2}}}{|x|^\mu} |x|^\mu (1 + |x|^2)^{-\frac{\mu}{2}} T. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$(1 - \theta) \frac{(1 + |x|^2)^{\frac{\mu}{2}}}{|x|^\mu} \in \mathcal{B} \quad (3.14)$$

y es cero en una vecindad de cero. Además, por hipótesis, $\omega^{-\mu} T \in \mathcal{D}'_{\ell, \omega}$,

$$(1 + |x|^2)^{-\frac{\mu}{2}} T \in \mathcal{D}'_{\ell, \omega}.$$

Por la Proposición 3.17, se sigue que

$$(1 - \theta) \frac{(1 + |x|^2)^{\frac{\mu}{2}}}{|x|^\mu} (1 + |x|^2)^{-\frac{\mu}{2}} T \in \mathcal{D}'_{\ell, \omega}.$$

Si escribimos $T_1 = \theta T$ y $T_2 = \frac{(1 - \theta)}{|x|^\mu} T$, obtenemos $T = T_1 + |x|^\mu T_2$, donde $T_1 \in \mathcal{E}'$, $T_2 \in \mathcal{D}'_{\ell, \omega}$, y $T_2 = 0$ en una vecindad de cero.

(b) \Rightarrow (a) Si T puede representarse como se describe, entonces debido a que

$$\mathcal{E}' \subset \omega^\mu \mathcal{D}'_{\ell, \omega} \quad \text{y} \quad |x|^\mu T_2 \in \omega^\mu \mathcal{D}'_{\ell, \omega}$$

se tiene de manera inmediata que $T \in \omega^\mu \mathcal{D}'_{\ell, \omega}$. ■

La fórmula de representación provista por la Proposición 3.23 es sólo una de las varias posibles representaciones. Por ejemplo, dada $T \in \omega^\mu \mathcal{D}'_{\ell, \omega}$, tenemos que

$$(1 + |x|^2)^{-\frac{\mu}{2}} T = \sum_{\text{finia}} \theta^\alpha f_\alpha, \quad \text{con } f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha,$$

o

$$T = \sum_{\text{finia}} (1 + |x|^2)^{\frac{\mu}{2}} \theta^\alpha f_\alpha, \quad \text{con } f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha. \quad (3.15)$$

En seguida caracterizamos a las distribuciones temperadas que admiten \mathcal{S}' -convolución con el núcleo de Poisson P_ν .

Teorema 3.24 Dada $T \in \mathcal{S}'$, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_{L^1}$
 (b) T admite \mathcal{S}' -convolución con el núcleo de Poisson P_t , para cada $t > 0$.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b) Sean $t > 0$ y $\varphi \in \mathcal{S}$. Por demostrar que $(P_t * \varphi)T \in \mathcal{D}'_{L^1}$. De acuerdo con (3.13), tenemos que

$$(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} (P_t * \varphi) \in B$$

y por hipótesis

$$(1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} T \in \mathcal{D}'_{L^1}.$$

Por la Proposición 3.17, se sigue que

$$(P_t * \varphi)T \in \mathcal{D}'_{L^1}.$$

(b) \Rightarrow (a) Supongamos que $T \in \mathcal{S}'$ es tal que $(P_t * \varphi)T \in \mathcal{D}'_{L^1}$, para cada $\varphi \in \mathcal{S}$ y para cada $t > 0$. Para probar que $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_{L^1}$, demostraremos que T puede ser representado como en la Proposición 3.23.

Sea $\theta \in C_c^\infty$ tal que $0 \leq \theta \leq 1$, con $\theta = 1$ para $|x| \leq \frac{1}{2}$ y $\theta = 0$ para $|x| \geq 1$. Escribamos

$$T = \theta T + (1 - \theta)T$$

y notemos que $T_1 = \theta T \in \mathcal{E}'$. Para analizar el segundo sumando, tomemos $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ fijo y sea $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \text{ si } |x| \geq \varepsilon, \\ \varphi &> 0 \text{ si } |x| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así,

$$(P_t * \varphi)(x) = \int_{|a| < \varepsilon} \frac{c_n}{t^n} \frac{\varphi(y)}{(1 + \frac{|x-y|^2}{t^2})^{\frac{n+1}{2}}} dy.$$

Ahora bien, si $|x| > \frac{1}{4}$ entonces

$$\frac{|x-y|}{t} \leq \frac{|x| + \varepsilon}{t} \leq \frac{2|x|}{t}$$

y, en tal caso,

$$\left(1 + \frac{|x-y|^2}{t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \leq \left(1 + \frac{4|x|^2}{t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \leq \frac{c_n}{t^{n+1}} \left(t^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Por lo tanto, para $|x| > \frac{1}{2}$ se tiene

$$(P_t * \varphi)(x) \geq \frac{c_n t}{\left(t^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \|\varphi\|_1. \quad (3.16)$$

Combinando las estimaciones (3.16) y (3.13) podemos concluir que, para cada $t > 0$,

$$\frac{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{-n+1}{2}}}{P_t * \varphi} \in B.$$

Además, como en (3.14),

$$(1-\theta) \frac{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}{|x|^{n+1}} \in B$$

y es cero en una vecindad de cero. Ahora, definamos

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{(1-\theta)}{|x|^{n+1}} T \\ &= (1-\theta) \frac{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}{|x|^{n+1}} \frac{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{-n+1}{2}}}{P_t * \varphi} (P_t * \varphi) T. \end{aligned}$$

Nótese que $T_2 = 0$ en una vecindad de cero y $T_2 \in \mathcal{D}'_{L,t}$, ya que $\mathcal{D}'_{L,t}$ es cerrado bajo multiplicación por funciones en B . Además,

$$(1-\theta)T = |x|^{n+1} T_2$$

y así,

$$T = \theta T + (1-\theta)T = T_1 + |x|^{n+1} T_2.$$

Por la Proposición 3.23, concluimos que $T \in \omega^{n+1} \mathcal{D}'_{L,t}$. ■

Proposición 3.25 Dada $T \in \omega^{n+1} \mathcal{D}'_{L,t}$, la S' -convolución $T * P_t$ está dada por la fórmula

$$(T * P_t)(y) = \left\langle \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{-n+1}{2}} T_x, \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}} P_t(x-y) \right\rangle_{\mathcal{D}'_{L,t}, B} \quad (3.17)$$

para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Demostración. Como $\omega^{-(n+1)}T \in \mathcal{D}'_{L^1}$, podemos escribir

$$\omega^{-(n+1)}T = \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} f_{\alpha} \quad \text{con } f_{\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ } \forall \alpha, \text{ y la suma es finita.}$$

Así, para toda $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} (T * P_1, \varphi)_{\mathcal{D}', \mathcal{S}} &= ((P_1 * \varphi)T, 1)_{\mathcal{D}'_1, \mathcal{B}} \\ &= \left\langle \omega^{n+1} (P_1 * \varphi) \omega^{-(n+1)}T, 1 \right\rangle_{\mathcal{D}'_1, \mathcal{B}} \\ &= \left\langle \omega^{-(n+1)}T, \omega^{n+1} (P_1 * \varphi) \right\rangle_{\mathcal{D}'_1, \mathcal{B}} \\ &= \sum_{\alpha} \langle \partial^{\alpha} f_{\alpha}, \omega^{n+1} (P_1 * \varphi) \rangle_{\mathcal{D}'_1, \mathcal{B}} \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \langle f_{\alpha}, \partial^{\alpha} (\omega^{n+1} (P_1 * \varphi)) \rangle_{L^1, L^{\infty}} \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha}(x) \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} \partial^{\beta} \omega^{n+1}(x) \partial^{\alpha-\beta} (P_1 * \varphi)(x) dx \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha}(x) \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} \partial^{\beta} \omega^{n+1}(x) \partial^{\alpha-\beta} P_1(x-y) \varphi(y) dy dx \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} [\omega^{n+1}(x) P_1(x-y)] \varphi(y) dy dx \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_{\alpha}(x), \partial^{\alpha} [\omega^{n+1}(x) P_1(x-y)] \rangle_{L^1, L^{\infty}} \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} f_{\alpha}(x), \omega^{n+1}(x) P_1(x-y) \right\rangle_{\mathcal{D}'_1, \mathcal{B}} \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \omega^{-(n+1)}(x) T_x, \omega^{n+1}(x) P_1(x-y) \right\rangle_{\mathcal{D}'_1, \mathcal{B}} \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

por lo cual concluimos que

$$(T * P_1)(y) = \left\langle \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{-n+1}{2}} T_x, \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}} P_1(x-y) \right\rangle_{\mathcal{D}'_1, \mathcal{B}}.$$

■

El Teorema 3.24 nos muestra que el espacio óptimo de distribuciones temperadas que admiten \mathcal{S}' -convolución con el núcleo de Poisson es el espacio "pesado" de distribuciones $\omega^{n+1}\mathcal{D}'_1$. Este espacio es una extensión natural al contexto de distribuciones del espacio pesado $L^1(\omega^{-n-1})$, donde $\omega(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$. (Como es usual, la notación

$L^1(\omega^{-n})$ indica al espacio de funciones integrables con respecto a la medida $\omega^{-n}dx$, para un peso apropiado ω^{-n} . T. M. Flett probó en [10, p. 762] que $L^1(\omega^{-n-1})$ es justamente el espacio de funciones Lebesgue-medibles para las cuales la integral de Poisson está bien definida.

En lo que sigue, presentaremos algunos resultados que nos permitirán finalmente extender los teoremas que demostramos en el Capítulo 2 en relación al problema de Dirichlet con valores frontera que son funciones en L^p o medidas de Borel finitas. Esta vez, los valores frontera serán distribuciones apropiadas que incluyen los casos anteriores.

Como vimos en la Proposición 3.25, dada $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_{L^1}$, la S' -convolución $T * P_t$ es una función definida en \mathbb{R}^n como

$$(T * P_t)(x) = \langle \omega^{-n-1}(y) T, \omega^{n+1}(y) P_t(x-y) \rangle_{\mathcal{D}'_{L^1}, \mathcal{D}_t}$$

para cada $t > 0$. Pero, podemos decir todavía más:

Lema 3.26 *El espacio $\omega^{n+1}\mathcal{D}'_{L^1}$ es cerrado bajo diferenciación. Además, dada $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_{L^1}$, la función $(T * P_t)(x)$ es suave y*

$$\partial^\alpha (T * P_t) = \partial^\alpha T * P_t \quad \forall t > 0. \quad (3.18)$$

Demostración. Sea $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_{L^1}$. Entonces $\omega^{-(n+1)}T \in \mathcal{D}'_{L^1}$ y podemos escribir

$$\omega^{-(n+1)}T = \sum_{\alpha} \partial^\alpha f_\alpha \quad \text{con } f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n) \forall \alpha, \text{ y la suma es finita.}$$

Entonces,

$$T = \sum_{\alpha} \omega^{n+1} \partial^\alpha f_\alpha.$$

Luego, para cualquier multi-índice β tenemos

$$\begin{aligned} \partial^\beta T &= \partial^\beta \left(\sum_{\alpha} \omega^{n+1} \partial^\alpha f_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\gamma \leq \beta} C_{\beta, \gamma} \partial^\gamma \omega^{n+1} \partial^{\beta-\gamma} (\partial^\alpha f_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\gamma \leq \beta} C_{\beta, \gamma} \partial^\gamma \omega^{n+1} \partial^{\alpha+\beta-\gamma} f_\alpha. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\omega^{-(n+1)} \partial^\beta T = \sum_{\alpha} \sum_{\gamma \leq \beta} C_{\beta, \gamma} \omega^{-(n+1)} \partial^\gamma \omega^{n+1} \partial^{\alpha+\beta-\gamma} f_\alpha. \quad (3.19)$$

Ahora, obsérvese que, por el Teorema 3.14,

$$\sum_{\alpha} \sum_{\gamma \leq \beta} C_{\beta, \gamma} \partial^{\alpha + \beta - \gamma} f_{\alpha} \in \mathcal{D}'_K,$$

y, como

$$\omega^{-(n+1)} \partial^{\alpha} \omega^{n+1} \in B,$$

se sigue que el lado derecho de (3.19) está en $\mathcal{D}'_{L,1}$. Por tanto,

$$\omega^{-(n+1)} \partial^{\beta} T \in \mathcal{D}'_{L,1}$$

es decir,

$$\partial^{\beta} T \in \omega^{n+1} \mathcal{D}'_{L,1}.$$

Esto prueba que $\omega^{n+1} \mathcal{D}'_{L,1}$ es cerrado bajo diferenciación.

La demostración de que $(T + P_1)(x)$ es una función suave puede hacerse como en el caso clásico (ver [6], teo. 3.2, p. 95); aquí lo omitiremos.

Para demostrar la fórmula (3.18), debemos probar que $\forall \varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle \partial^{\alpha} T + P_1, \varphi \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}'} &= \langle \partial^{\alpha} (T + P_1), \varphi \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}'} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T + P_1, \partial^{\alpha} \varphi \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}'} \end{aligned}$$

Es decir, que

$$\langle (P_1 + \varphi), \partial^{\alpha} T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_{L,1}, \mathcal{D}_L} = (-1)^{|\alpha|} \langle (P_1 + \partial^{\alpha} \varphi), T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_{L,1}, \mathcal{D}_L} \quad (3.20)$$

Sea $\psi \in C_c^{\infty}$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, con $\psi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\psi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, definamos

$$\psi_j(y) = \psi\left(\frac{y}{j}\right).$$

Nótese que $(\psi_j)_{j=1}^{\infty} \subset C_c^{\infty}$ y es tal que $\psi_j \rightarrow 1$ en B_r . En efecto:

(i) Obsérvese que, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$|\partial^{\alpha} (\psi_j)(y)| = \left| \partial^{\alpha} \psi\left(\frac{y}{j}\right) \right| \leq \frac{1}{j^{|\alpha|}} |\partial^{\alpha} \psi(y)| \leq \|\partial^{\alpha} \psi\|_{\infty} = C_{\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\partial^{\alpha} \psi_j\|_{\infty} \leq C_{\alpha} < \infty.$$

(ii) Supongamos, ahora, que K es un compacto de \mathbb{R}^n . Entonces, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq j_0 \forall x \in K$. Luego, $\forall x \in K$

$$\psi_j(x) = \psi\left(\frac{x}{j}\right) = 1 \text{ si } j \geq j_0, \text{ ya que } \left|\frac{x}{j}\right| = \frac{|x|}{j} \leq 1.$$

Así, $\forall x \in K$, si $|\alpha| > 0$ entonces

$$|\partial^\alpha(\psi_j)(x)| = |\partial^\alpha(1)| = 0 < \varepsilon \quad \text{si } j \geq j_0.$$

Por lo tanto, $\psi_j \rightarrow 1$ en B_c . Luego,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle (P_t + \varphi) \partial^\alpha T, \psi_j \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c} = \langle (P_t + \varphi) \partial^\alpha T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c}.$$

Pero,

$$\begin{aligned} \langle (P_t + \varphi) \partial^\alpha T, \psi_j \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c} &= \langle \partial^\alpha T, \psi_j (P_t + \varphi) \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha [\psi_j (P_t + \varphi)] \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \psi_j (P_t + \partial^\alpha \varphi) \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &\quad + (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 < \beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} \langle T, \partial^\beta \psi_j (P_t + \partial^{\alpha-\beta} \varphi) \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \end{aligned}$$

y, como $T = \omega^{n+1} S$ para alguna $S \in \mathcal{D}'_t$, se sigue que

$$\begin{aligned} \langle (P_t + \varphi) \partial^\alpha T, \psi_j \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c} &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \psi_j (P_t + \partial^\alpha \varphi) \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &\quad + (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 < \beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} \langle S, \omega^{n+1} \partial^\beta \psi_j (P_t + \partial^{\alpha-\beta} \varphi) \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ahora, por (3.13),

$$|P_t + \partial^{\alpha-\beta} \varphi| \leq c \omega^{-u-1},$$

Entonces,

$$|\omega^{n+1} \partial^\beta \psi_j (P_t + \partial^{\alpha-\beta} \varphi)| \leq c_t |\partial^\beta \psi_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

ya que $\psi_j \rightarrow 1$ en B_c .

Así, tomando límites en (3.21) cuando $j \rightarrow \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle (P_t + \varphi) \partial^\alpha T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle (P_t + \varphi) \partial^\alpha T, \psi_j \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle T, \psi_j (P_t + \partial^\alpha \varphi) \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &\quad + \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 < \beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} \langle S, \omega^{n+1} \partial^\beta \psi_j (P_t + \partial^{\alpha-\beta} \varphi) \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle T, \psi_j (P_t + \partial^\alpha \varphi) \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle (P_t + \partial^\alpha \varphi) T, \psi_j \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle (P_t + \partial^\alpha \varphi) T, 1 \rangle_{\mathcal{D}'_t, B_c}. \end{aligned}$$

Esto demuestra la ecuación (3.20) y, por tanto, la fórmula (3.18) queda probada. ■

3.4. Extensiones armónicas de distribuciones en $\omega^{n+1}\mathcal{D}'_L$

En esta sección probaremos que toda distribución $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_L$ tiene una extensión armónica al semiespacio superior \mathbb{R}_+^{n+1} .

Definición 3.27 Definimos

$$\mathcal{D}_L = \{ \varphi \in C^\infty \mid \partial^\alpha \varphi \in L^1 \ \forall \text{ multi-índice } \alpha \}$$

dotado con la topología inducida por la familia de normas

$$\|\varphi\|_{m,j} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_j, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Análogamente, definimos

$$\mathcal{D}_{L(\mu)} = \{ \varphi \in C^\infty \mid \partial^\alpha \varphi \in L^1(\mu) \ \forall \text{ multi-índice } \alpha \}$$

donde μ es una medida de Borel en \mathbb{R}^n .

Observemos que

$$\mathcal{D}_{L(\omega^{-n-1})} = \omega^{n+1}\mathcal{D}_L = \{ f \in C^\infty \mid \omega^{-n-1}f \in \mathcal{D}_L \}.$$

Lema 3.28 Dada $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_L$, la S' -convolución $T * P_t$ pertenece al espacio $\omega^{n+1}\mathcal{D}'_L$ para cada $t > 0$.

Demostración. Fijemos $t > 0$ y sea $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_L$. Bastará demostrar que $T * P_t \in L^1(\omega^{-n-1})$, ya que por el Lema 3.26, tendremos que

$$\partial^\alpha (T * P_t) = \partial^\alpha T * P_t \in L^1(\omega^{-n-1}) \quad \forall \text{ multi-índice } \alpha,$$

i.e.,

$$T * P_t \in \mathcal{D}_{L(\omega^{-n-1})} = \omega^{n+1}\mathcal{D}_L.$$

Como $T \in \omega^{n+1}\mathcal{D}'_L$, entonces podemos escribir

$$\omega^{-(n+1)}T = \sum_{\alpha} \partial^\alpha f_\alpha \quad \text{con } f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n) \ \forall \alpha, \text{ y la suma es finita.}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\omega^{-(n+1)}T = \partial^\alpha f$ con $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por la fórmula (3.17),

$$\begin{aligned} \langle T * P_t \rangle(x) &= \langle \omega^{-n-1}(y) T_y, \omega^{n+1}(y) P_t(x-y) \rangle_{\mathcal{D}'_L, \mathcal{D}_L} \\ &= \langle \partial^\alpha f(y), \omega^{n+1}(y) P_t(x-y) \rangle_{\mathcal{D}'_L, \mathcal{D}_L} \\ &= \sum_{j \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-j|} C_{\alpha,j} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial^j \omega^{n+1}(y) \partial^{\alpha-j} P_t(x-y) dy. \end{aligned}$$

En seguida observamos que

$$|\partial^3 \omega^{n+1}(y)| \leq C_{\alpha,\beta} (1+|y|^2)^{\frac{n+1-\beta}{2}}$$

y

$$|\partial^{k-\beta} P_1(x-y)| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{t^{n+|\alpha-\beta|}} \left(1 + \frac{|x-y|^2}{t^2}\right)^{\frac{-(n+1-\alpha-\beta)}{2}}$$

por lo cual podemos escribir

$$|(T * P_1)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{C_{\alpha,\beta}}{t^{n+|\alpha-\beta|}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| (1+|y|^2)^{\frac{n+1-\beta}{2}} \left(1 + \frac{|x-y|^2}{t^2}\right)^{\frac{-(n+1-\alpha-\beta)}{2}} dy.$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(T * P_1)(x)| \omega^{-n-1}(x) dx \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{C_{\alpha,\beta}}{t^{n+|\alpha-\beta|}} I_{\alpha,\beta} \quad (3.22)$$

donde

$$I_{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega^{-n-1}(x) \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| (1+|y|^2)^{\frac{n+1-\beta}{2}} \left(1 + \frac{|x-y|^2}{t^2}\right)^{\frac{-(n+1-\alpha-\beta)}{2}} dy dx.$$

A continuación procedemos a estimar cada integral $I_{\alpha,\beta}$. Usando el hecho de que $\forall u > 0$, $(1+u)$ y $(1+u^2)^{\frac{1}{2}}$ son equivalentes, y usando el Teorema de Tonelli, tenemos

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{n+1-\beta}{2}} \left(1 + \frac{|x-y|^2}{t^2}\right)^{\frac{-(n+1-\alpha-\beta)}{2}} dx \right] (1+|y|^2)^{\frac{n+1-\beta}{2}} dy \\ &\leq C_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} \left(1 + \frac{|x-y|^2}{t^2}\right)^{-n-1-|\alpha-\beta|} dx \right] (1+|y|)^{n+1-|\beta|} dy. \end{aligned}$$

Ahora, observamos que

$$\left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-n-1-|\alpha-\beta|} \leq C_{\alpha,\beta,t} (1+|x-y|)^{-n-1-|\alpha-\beta|} \quad (3.23)$$

donde

$$C_{\alpha,\beta,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{n+1+|\alpha-\beta|} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Así, de acuerdo a la integral que se estima en el Lema D.2 del Apéndice D y en virtud de (3.23), tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} \left(1 + \frac{|x-y|}{t}\right)^{-n-1-|\alpha-\beta|} dx \leq C_{\alpha,\beta,t} (1+|y|)^{n-1}.$$

por lo cual

$$\begin{aligned} I_{\alpha, \beta} &\leq C_{n, \alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| (1 + |y|)^{-\alpha-1} (1 + |y|)^{\alpha+1-|\beta|} dy \\ &\leq C_{n, \alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy < \infty. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De (3.22) y (3.24) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(T * P_t)(x)| \omega^{-\alpha-1}(x) dx < \infty.$$

Por lo tanto, $T * P_t \in L^1(\omega^{-\alpha-1})$. Esto completa la prueba. ■

Observación 3.29 Como consecuencia del Lema 3.28, vemos que $\forall t > 0$ la S' -convolución con el núcleo de Poisson P_t preserva el espacio $L^1(\omega^{-\alpha-1})$, pues $\forall T \in \omega^{\alpha+1}\mathcal{D}'_{L^1}$ se tiene que $T * P_t \in L^1(\omega^{-\alpha-1})$.

El siguiente lema nos proporciona otra representación para distribuciones en el espacio $\omega^{\alpha+1}\mathcal{D}'_{L^1}$.

Lema 3.30

$$\omega^{\alpha+1}\mathcal{D}'_{L^1} = \left\{ T \in S' : T = \sum_{\text{finito}} \partial^\alpha g_\alpha, \text{ con } g_\alpha \in L^1(\omega^{-\alpha-1}) \forall \alpha \right\}. \quad (3.25)$$

Demostración. Denotemos por \mathcal{A} al conjunto que aparece en el lado derecho de (3.25). Dada $T \in \mathcal{A}$, podemos escribir

$$T = \sum_{\text{finito}} \partial^\alpha (\omega^{\alpha+1} f_\alpha), \text{ con } f_\alpha \in L^1 \forall \alpha$$

(hasta tomar $f_\alpha = g_\alpha \omega^{-\alpha-1} \in L^1 \forall \alpha$). Esto es,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\text{finito}} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} (\partial^{\alpha-\beta} \omega^{\alpha+1}) \partial^\beta f_\alpha \\ &= \omega^{\alpha+1} \sum_{\text{finito}} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} \omega^{-\alpha-1} (\partial^{\alpha-\beta} \omega^{\alpha+1}) \partial^\beta f_\alpha. \end{aligned}$$

Por definición, la distribución $\partial^\beta f_\alpha \in \mathcal{D}'_{L^1}$. Además, $C_{\alpha, \beta} \omega^{-\alpha-1} (\partial^{\alpha-\beta} \omega^{\alpha+1}) \in B$. Puesto que \mathcal{D}'_{L^1} es cerrado bajo multiplicación por funciones en B , concluimos que $T \in \omega^{\alpha+1}\mathcal{D}'_{L^1}$.

Recíprocamente, dada $T \in \omega^{\alpha+1}\mathcal{D}'_{L^1}$, podemos escribir

$$T = \omega^{\alpha+1} \sum_{\text{finito}} \partial^\alpha f_\alpha, \text{ con } f_\alpha \in L^1 \forall \alpha.$$

O bien,

$$T = \omega^{n+1} \sum_{\text{finita}} \partial^\alpha (\omega^{-n-1} g_\alpha), \text{ con } g_\alpha \in L^1(\omega^{-n-1}) \quad \forall \alpha$$

(basta observar que $\omega^{n+1} f_\alpha \in L^1(\omega^{-n-1}) \quad \forall \alpha$). Ahora, dada $\varphi \in \mathcal{S}$, tenemos

$$\begin{aligned} (T, \varphi)_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} &= \left\langle \sum_{\text{finita}} \partial^\alpha (\omega^{-n-1} g_\alpha), \omega^{n+1} \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &= \sum_{\text{finita}} (-1)^{|\alpha|} \langle g_\alpha, \omega^{-n-1} \partial^\alpha (\omega^{n+1} \varphi) \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &= \sum_{\text{finita}} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha|} C_{\alpha, \beta} \langle g_\alpha, \omega^{-n-1} (\partial^{\alpha-\beta} \omega^{n+1}) \partial^\beta \varphi \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \langle g_\alpha, h_{\alpha, \beta} \partial^\beta \varphi \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \end{aligned}$$

donde

$$h_{\alpha, \beta} = (-1)^{|\alpha|} C_{\alpha, \beta} \omega^{-n-1} (\partial^{\alpha-\beta} \omega^{n+1}) \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha, \beta.$$

Así,

$$\begin{aligned} (T, \varphi)_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} &= \sum_{\alpha, \beta} \langle h_{\alpha, \beta} g_\alpha, \partial^\beta \varphi \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \langle \partial^\beta [(-1)^{|\beta|} h_{\alpha, \beta} g_\alpha], \varphi \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T = \sum_{\alpha, \beta} \partial^\beta [(-1)^{|\beta|} h_{\alpha, \beta} g_\alpha].$$

Como $g_\alpha \in L^1(\omega^{-n-1}) \quad \forall \alpha$ y este espacio es cerrado bajo multiplicación por funciones en \mathcal{B} , concluimos que $T \in \mathcal{A}$. ■

Lema 3.31 El espacio $L^1(\omega^{-n-1})$ está incluido continuamente en $\omega^{n+1}\mathcal{D}'_{L,1}$.

Demostración. Sea $(f_j)_{j=1}^\infty$ tal que $f_j \rightarrow 0$ en $L^1(\omega^{-n-1})$ y sea A un subconjunto acotado de $\omega^{-n-1}\hat{B}$ (el predual de $\omega^{n+1}\mathcal{D}'_{L,1}$), entonces $\omega^{n+1}A$ es acotado de \hat{B} . Así, \forall multi-índice $\alpha \exists M_\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{\eta \leq |\alpha|} \|\partial^\alpha (\omega^{n+1} \varphi)\|_\infty \leq M_\alpha \quad \forall \varphi \in A.$$

En particular,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\varphi(x)| \leq M_0 \quad \forall \varphi \in A.$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$, donde la función del lado derecho es integrable. Además,

$$|f(y) - h(y)| P_{l+r}(y) \xrightarrow{r \rightarrow 0} |f(y) - h(y)| P_l(y).$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - h(y)| P_{l+r}(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - h(y)| P_l(y) dy \\ &= c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - h(y)| \frac{dy}{(1 + |y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= c_n \|f - h\|_{L^1(\omega^{-n-1})}. \end{aligned}$$

Por tanto, para $t > 0$ suficientemente pequeño,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - h(y)| P_{t+\varepsilon}(y) dy \leq c_\varepsilon \|f - h\|_{L^1(\omega^{-s-\varepsilon})} + \varepsilon \leq c_0 \varepsilon + \varepsilon.$$

Así, si elegimos $t > 0$ suficientemente pequeño,

$$\|P_t * f - f\|_{L^1(\omega^{-s-1})} \leq c_0 \varepsilon + 3\varepsilon$$

y el teorema queda probado. \blacksquare

Observación 3.33 El Teorema 3.32 implica que, dada una distribución $T \in \omega^{s+1} \mathcal{D}'_{L^1}$, la función suave $u(x, t) = [T * P_t](x)$ es una solución al problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 + \Delta_x) u &= 0 \text{ en } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(0, t) &= T \end{aligned}$$

donde la condición en la frontera debe ser interpretada en el sentido de convergencia en $\omega^{s+1} \mathcal{D}'_{L^1}$ cuando $t \rightarrow 0^+$. Por supuesto, esta solución no es única pues $u(x, t) + t$ es otra solución de este problema.

Puesto que $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \omega^{s+1} \mathcal{D}'_{L^1}$, $1 \leq p \leq \infty$, y también $M(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \omega^{s+1} \mathcal{D}'_{L^1}$, este teorema generaliza los casos correspondientes analizados en los capítulos anteriores.

Apéndice A

La Función Gama

La función gama fue introducida en 1730 por Leonhard Euler (1707-1783) en respuesta a un problema de interpolación que ha sido estudiado desde el siglo XVIII: *¿cuál es la mejor forma de definir una función continua de una variable real o compleja que coincida con la función factorial en los enteros?* La función gama es una solución. Esta función se define para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$, por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

(existen otras definiciones equivalentes, ver por ejemplo [17]).

Grandes personajes de las matemáticas, como Legendre (de quien deriva la notación $\Gamma(z)$), Gauss, Liouville, Weierstrass, Hermite y muchos otros han dado cuenta de la trascendencia de la función gama en muy diversas áreas de estudio. Aparece, por ejemplo en el estudio de series asintóticas, integrales definidas, series hipergeométricas, la función zeta de Riemann, teoría de números, etc. con importantes aplicaciones en muchas áreas de la física y la ingeniería. Algunas de sus propiedades son:

1. Γ es meromorfa con polos simples en $0, -1, -2, \dots$
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para $z \neq 0, -1, -2, \dots$
3. $\Gamma(n+1) = n!$ para $n = 0, 1, 2, \dots$
4. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ para $z \neq 0, -1, -2, \dots$
5. $\Gamma(z) \neq 0$ para toda z .
6. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

En [17] pp. 454-470, se pueden encontrar las demostraciones de éstas y otras propiedades de Γ .

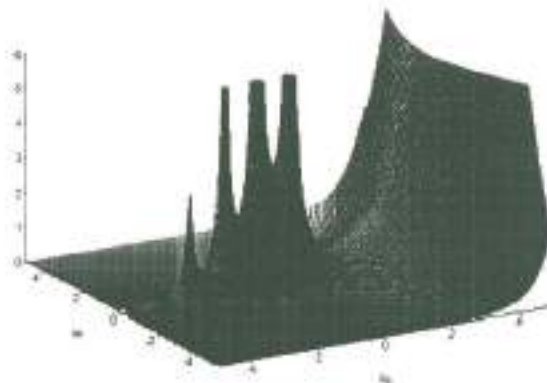


Figura A.1: Gráficas del valor absoluto de $\Gamma(z)$.

La función gamma aparece en muchos ámbitos. Por ejemplo, una fórmula para el volumen de la bola n -dimensional de radio R , $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq R\}$, es la siguiente:

$$\int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \cdots dx_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n$$

(ver [13], p. 646). Y una fórmula para la semiárea de la superficie de la esfera unitaria $(n+1)$ -dimensional, $\Sigma_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, es:

$$\int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}, \quad \text{para } n > 1,$$

([13], p. 647); de modo que el área de la esfera unitaria en \mathbb{R}^{n+1} es

$$|\Sigma_n| = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}, \quad \text{para } n > 1. \quad (\text{A.1})$$

Otra fórmula que podemos encontrar en [13], p. 649, y que resulta de mucha utilidad en nuestro estudio es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1}}{[1 + (r_1 x_1)^{q_1} + \cdots + (r_n x_n)^{q_n}]^s} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(\frac{p_1}{q_1}) \Gamma(\frac{p_2}{q_2}) \cdots \Gamma(\frac{p_n}{q_n}) \Gamma(s - \frac{p_1}{q_1} - \cdots - \frac{p_n}{q_n})}{q_1 q_2 \cdots q_n r_1^{\frac{p_1}{q_1}} r_2^{\frac{p_2}{q_2}} \cdots r_n^{\frac{p_n}{q_n}} \Gamma(s)}. \end{aligned}$$

donde $p_i > 0$, $q_i > 0$, $r_i > 0$, $s > 0$.

En particular, cuando la dimensión es $n = 1$, esta expresión se reduce a

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{[1+(rx)^q]^s} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(s - \frac{p}{q}\right)}{qr^{p/q}\Gamma(s)},$$

donde $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$. Y si $r = 1$, entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x^q)^s} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(s - \frac{p}{q}\right)}{q\Gamma(s)} \quad (\text{A.2})$$

para $p > 0$, $q > 0$, $s > 0$.

Hacemos uso de esta fórmula en la demostración del Lema 2.5.

Apéndice B

El Operador Maximal de Hardy-Littlewood

Una herramienta poderosa en Análisis Armónico es el concepto de función maximal. Recuerdese que, dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (i.e., una función localmente integrable en \mathbb{R}^n), para $x \in \mathbb{R}^n$, se define

$$Mf(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy : x \in \overset{\circ}{Q}, Q \text{ un } n\text{-cubo con lados paralelos a los ejes de } \mathbb{R}^n \text{ y no degenerado} \right\},$$

donde $|Q|$ denota a la medida de Lebesgue de Q .

A Mf se le conoce como la función maximal de Hardy-Littlewood de f y al operador M tal que $f \mapsto Mf$ se le llama el operador maximal de Hardy-Littlewood.

El operador M es sublineal en el sentido de que, para cualesquiera dos funciones localmente integrables f, g se tiene $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$. También es claro que $Mf(x) = M|f|(x)$ de modo que podemos siempre asumir que f es no negativa cuando estudiamos a Mf .

Lema B.1. Sea \mathcal{B} una colección de bolas abiertas en \mathbb{R}^n y sea $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Si $c < |U|$, entonces existe una subcolección finita de bolas disjuntas $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}$ tal que $c < 3^n \sum_{j=1}^m |B_j|$.

Demostración. Tomemos un compacto $K \subset U$ con $|K| > c$. Por compacidad, existe una subcolección finita \mathcal{B}_1 de bolas en \mathcal{B} tal que

$$K \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B.$$

Sea $B_1 \in \mathcal{B}_1$ la bola con mayor diámetro en \mathcal{B}_1 y sea $\mathcal{B}_2 = \{B \in \mathcal{B}_1 : B \cap B_1 = \emptyset\}$. Si \mathcal{B}_2 no es vacío, tomemos $B_2 \in \mathcal{B}_2$ la bola con mayor diámetro en \mathcal{B}_2 y sea $\mathcal{B}_3 =$

($B \in \mathcal{B}_2 : B \cap B_2 = \emptyset$). Continuamos con este proceso, tomando bolas $B_j \in \mathcal{B}_j$ con $j = 1, \dots, m$ hasta que \mathcal{B}_{j+1} sea vacía. Así, obtenemos una colección $\mathcal{C} = \{B_1, \dots, B_m\}$ de bolas abiertas y disjuntas.

Ahora, para cada $j = 1, \dots, m$, consideremos la bola B_j^* concéntrica con B_j pero de radio tres veces el de B_j . Mostraremos que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m B_j^*.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B &= \left(\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_1 \\ B \in \mathcal{C}}} B \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_1 \\ B \notin \mathcal{C}}} B \right) \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_1 \\ B \notin \mathcal{C}}} B \right). \end{aligned}$$

Pero, si $B \in \mathcal{B}_1$ no es una de las B_j 's de \mathcal{C} , entonces, por construcción, existe un primer j tal que $B \cap B_j \neq \emptyset$. En tal caso, el radio de B es a lo más el de B_j y, por tanto, $B \subset B_j^*$. Consecuentemente,

$$K \subset \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m B_j^* \right) = \bigcup_{j=1}^m B_j^*.$$

Luego, por subaditividad,

$$c < |K| \leq \sum_{j=1}^m |B_j^*| = 3^n \sum_{j=1}^m |B_j|.$$

■

Teorema B.2 M es de tipo débil $(1, 1)$, esto es, $\exists C > 0$ tal que $\forall \lambda > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y sea $\lambda > 0$. Denotemos $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$. Escribamos $f = f_1 + f_2$, donde

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \geq \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces,

$$Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x) \leq Mf_1(x) + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{B.1})$$

dado que $f_2 \leq \frac{\lambda}{2}$ implica que también $Mf_2 \leq \frac{\lambda}{2}$.

De (B.1) se sigue que

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Luego,

$$|E_\lambda| \leq |E'_\lambda|$$

donde $E'_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > \frac{\lambda}{2}\}$.

Pero, por definición,

$$Mf_1(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_1(y)| dy : \begin{array}{l} x \in \bar{Q}, Q \text{ un } n\text{-cubo con lados paralelos} \\ \text{a los ejes de } \mathbb{R}^n \text{ y no degenerado} \end{array} \right\},$$

así que, para cada $x \in E'_\lambda$ existe un cubo Q_x que contiene a x en su interior y tal que

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f_1(y)| dy > \frac{\lambda}{2}.$$

Para cada $x \in E'_\lambda$, denotemos con l_x a la longitud de lado de Q_x y sea B_x la bola cuyo centro es el centro de Q_x con diámetro $2l_x$. Consideremos también el cubo Q_x^2 cuyo centro es el centro de Q_x pero con longitud de lado igual a $2l_x$. Nótese que $Q_x \subset B_x \subset Q_x^2$, de modo que

$$|Q_x| < |B_x| < |Q_x^2| = 2^n |Q_x|.$$

Definamos

$$U = \bigcup_{x \in E'_\lambda} B_x.$$

Obviamente, $E'_\lambda \subset U$ y, por tanto, $|E'_\lambda| \leq |U|$.

Ahora, tomemos $c < |E_\lambda| \leq |E'_\lambda|$. Entonces, $c < |U|$ y, por el Lema B.1, existe una cantidad finita de puntos $x_1, \dots, x_m \in E'_\lambda$ tales que las bolas B_{x_j} son disjuntas y $c < 3^n \sum_{j=1}^m |B_{x_j}|$. En consecuencia,

$$c < 3^n \sum_{j=1}^m |B_{x_j}| < 3^n 2^n \sum_{j=1}^m |Q_{x_j}| < 3^n 2^n \sum_{j=1}^m \frac{2}{\lambda} \int_{Q_{x_j}} |f_1(y)| dy.$$

Pero, los cubos Q_{x_j} son disjuntos, ya que $Q_{x_j} \subset B_{x_j}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c &< \frac{2(3^n 2^n)}{\lambda} \sum_{j=1}^m \int_{Q_{x_j}} |f_1(y)| dy \leq \frac{2(3^n 2^n)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)| dy \\ &\leq \frac{2(3^n 2^n)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \frac{C}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Y, tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow |E_\lambda|$, obtenemos

$$|E_\lambda| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

■

Definición B.3 Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$, definimos

$$m_f(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| \quad \text{para } \lambda > 0.$$

$m_f(\lambda)$ es llamada la función distribución de f .

Claramente, $m_f(\lambda)$ es una función decreciente.

Lema B.4 Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda. \quad (\text{B.2})$$

Demostración. Nótese que

$$m_f(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(\lambda, \infty)}(|f(x)|) dx.$$

Además, obsérvese que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} pu^{p-1} du = \int_0^\infty pu^{p-1} \chi_{(0, |f(x)|)}(u) du.$$

Luego, aplicando el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty pu^{p-1} \chi_{(0, |f(x)|)}(u) du \right) dx \\ &= \int_0^\infty pu^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(0, |f(x)|)}(u) dx \right) du \\ &= \int_0^\infty pu^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(u, \infty)}(|f(x)|) dx \right) du \\ &= \int_0^\infty pu^{p-1} m_f(u) du. \end{aligned}$$

■

Teorema B.5 El operador $M : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p \leq \infty$, es continuo (i.e., acotado), esto es, $\exists C > 0$ tal que $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|Mf\|_p \leq C \|f\|_p.$$

Demostración. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, el resultado es obvio por la definición de Mf . En efecto, pues

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy : x \in \overset{\circ}{Q}, Q \text{ un } n\text{-cubo con lados paralelos} \right. \\ &\quad \left. \text{a los ejes de } \mathbb{R}^n \text{ y no degenerado} \right\} \\ &\leq \|f\|_\infty \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q 1 \, dy : x \in \overset{\circ}{Q}, Q \text{ un } n\text{-cubo con lados paralelos} \right. \\ &\quad \left. \text{a los ejes de } \mathbb{R}^n \text{ y no degenerado} \right\} \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

y, por tanto, $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Consideremos, ahora, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $f \geq 0$. Descompongamos a f en una parte acotada y una parte no acotada, digamos:

$$f = f_\alpha + f^\alpha$$

donde

$$f_\alpha = f\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : f \leq \alpha\}}, \quad f^\alpha = f\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : f > \alpha\}}, \quad \alpha > 0.$$

Como el operador M es sublineal, tenemos

$$Mf(x) \leq Mf_\alpha(x) + Mf^\alpha(x) \leq \alpha + Mf^\alpha(x).$$

De aquí se sigue que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 2\alpha\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf^\alpha > \alpha\}.$$

En términos de la función de distribución

$$m_{Mf}(2\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 2\alpha\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf^\alpha > \alpha\}|.$$

Pero, f^α vive en un conjunto de medida finita, ya que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f^\alpha > 0\}| = |\{x \in \mathbb{R}^n : f > \alpha\}| \leq \frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p}.$$

Además, $|f^\alpha| \leq \alpha + |f|$ de modo que $f^\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Cambiemos α por 2α y apliquemos el Lema B.4:

$$\begin{aligned} \|Mf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p \, dx = p \int_0^\infty (2\alpha)^{p-1} m_{Mf}(2\alpha) \, d(2\alpha) \\ &= p2^p \int_0^\infty \alpha^{p-1} m_{Mf}(2\alpha) \, d\alpha \\ &\leq p2^p \int_0^\infty \alpha^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf^\alpha > \alpha\}| \, d\alpha. \end{aligned}$$

Pero, M es de tipo débil (1.1) (Teorema B.2), de modo que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf^n > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \|f^n\|_1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|Mf\|_p^p &\leq p2^p C \int_0^\infty \alpha^{p-2} \|f^n\|_1 d\alpha \\ &= p2^p C \int_0^\infty \alpha^{p-2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^n(x) dx \right) d\alpha \\ &= p2^p C \int_0^\infty \alpha^{p-2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \chi_{(0,\alpha)}(f(x)) |f(x)| dx \right) d\alpha \\ &= p2^p C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{f(x)} \alpha^{p-2} \chi_{(0,f(x))}(\alpha) d\alpha \right) |f(x)| dx \\ &= p2^p C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{f(x)} \alpha^{p-2} d\alpha \right) |f(x)| dx \\ &= \frac{p2^p C}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-1} |f(x)| dx \\ &= C_p \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

■

Apéndice C

Soluciones Fundamentales para el Laplaciano

Definición C.1 Sea $P = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \partial^\alpha$ un operador diferencial parcial con coeficientes constantes en \mathbb{R}^n . Una distribución $E \in \mathcal{D}'$ se llama solución fundamental de P si $P(\partial)E = \delta$, donde δ es la medida de Dirac concentrada en cero.

Las soluciones fundamentales son herramientas muy útiles en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, por ejemplo, en la solución de ecuaciones homogéneas, proporcionan información acerca de la regularidad y el crecimiento de las soluciones. También, ciertos operadores diferenciales parciales pueden ser caracterizados por las propiedades de sus soluciones fundamentales.

Desde hace mucho tiempo, se conocen soluciones fundamentales para algunos operadores diferenciales clásicos como el operador de Laplace, el operador de calor, y el operador de Cauchy-Riemann. Por ejemplo, el operador de Laplace tiene las siguientes soluciones fundamentales en dos y tres dimensiones:

$$\begin{aligned} E_{2D} &= \frac{1}{2\pi} \ln|x|, \\ E_{3D} &= -\frac{1}{4\pi|x|}. \end{aligned}$$

La conjetura de que todo operador diferencial parcial con coeficientes constantes tiene una solución fundamental fue probada en 1954 de manera independiente por Malgrange y Ehrenpreis. Desde entonces, muchas otras pruebas han aparecido en la literatura, obteniendo información más precisa sobre las soluciones fundamentales. Hörmander, por ejemplo, probó en 1958 por medio de un problema de división que todo operador diferencial parcial con coeficientes constantes tiene una solución fundamental temperada.

Consideremos, ahora, el operador $P = I - \Delta$. Veamos que P tiene una solución fundamental: queremos encontrar una distribución temperada E tal que

$$(I - \Delta)E = \delta.$$

Tomando transformadas de Fourier obtenemos

$$(1 + 4\pi^2 |\xi|^2) \widehat{E} = 1,$$

de modo que

$$\widehat{E} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 |\xi|^2}.$$

La transformada de Fourier inversa de esta expresión nos da la solución buscada.

Lema C.2 Existe un entero positivo k suficientemente grande, tal que el operador $(I - \Delta)^k$ posee una solución fundamental $E \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea E una solución fundamental del operador $(I - \Delta)^m$, con $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$(I - \Delta)^m E = \delta.$$

Tomando transformadas de Fourier tenemos

$$(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^m \widehat{E} = 1.$$

De modo que

$$\widehat{E} = \frac{1}{(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^m} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

siempre que $m > \frac{n}{2}$. Así,

$$E = (\widehat{E})^\vee \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

por ser la transformada de Fourier inversa de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Luego, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ tenemos

$$\begin{aligned} \left((1 + 4\pi^2 |x|^2)^k E \right)^\wedge &= (I - \Delta)^k \widehat{E} \\ &= (I - \Delta)^k \frac{1}{(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^m} \end{aligned}$$

Pero,

$$\left| (I - \Delta)^k \frac{1}{(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^m} \right| \leq C_{k,m,n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{m-k}}$$

por lo tanto,

$$\left| \left((1 + 4\pi^2 |x|^2)^k E \right)^\wedge \right| \leq C_{k,\omega,n} \frac{1}{(1 + \xi^2)^m} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left((1 + 4\pi^2 |x|^2)^k E \right)^\wedge &\in L^1(\mathbb{R}^n) \\ \Rightarrow (1 + 4\pi^2 |x|^2)^k E &\in C_0(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $E \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si elegimos, por ejemplo, $k > \frac{n}{2}$. ■

Cuando uno tiene una solución fundamental E de un operador diferencial $P = P(\partial)$ y si $f \in \mathcal{D}'$, entonces podemos ver que una solución de la ecuación $Pu = f$ está dada por $u = E * f$, cuando la convolución está definida. En efecto,

$$P(E * f) = P(E) * f = \delta * f = f.$$

Apéndice D

Estimaciones Útiles

Lema D.1 (Desigualdad de Peetre) Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\left(\frac{1 + |x|^2}{1 + |y|^2} \right)^r \leq 2^{|r|} \left(1 + |x - y|^2 \right)^{|r|}. \quad (\text{D.1})$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y hagamos $z = y - x$. Entonces,

$$(|y| - |z|)^2 \geq 0.$$

De aquí obtenemos

$$2|y||z| \leq |y|^2 + |z|^2. \quad (\text{D.2})$$

Por otra parte, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que

$$|y - z| \leq |y||z|. \quad (\text{D.3})$$

Usando (D.2) y (D.3), tenemos

$$\begin{aligned} 1 + |y - z|^2 &\leq 1 + |y|^2 - 2|y - z| + |z|^2 \\ &\leq 1 + |y|^2 + 2|y||z| + |z|^2 \\ &\leq 1 + 2|y|^2 + 2|z|^2 \\ &\leq 2 \left(1 + |y|^2 \right) \left(1 + |z|^2 \right). \end{aligned}$$

Es decir,

$$1 + |z|^2 \leq 2 \left(1 + |y|^2 \right) \left(1 + |y - z|^2 \right).$$

Por consiguiente,

$$\frac{1 + |z|^2}{1 + |y|^2} \leq 2 \left(1 + |y - z|^2 \right). \quad (\text{D.4})$$

Si $r \geq 0$, elevamos ambos lados de la desigualdad (D.4) a la potencia $r = |r|$ y obtenemos el resultado (D.1). Si $r < 0$, intercambiamos los papeles de x, y en (D.4) y luego elevamos a la potencia $-r = |r|$, con lo cual de nuevo obtenemos (D.1). ■

Lema D.2 La integral $I(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^r (1 + |\eta - \xi|)^s d\xi$ es finita, para cada $\eta \in \mathbb{R}^n$, si $r + s + n < 0$. Más aún, si éste es el caso, tenemos

$$I(\eta) \leq \begin{cases} C_{n,r,s} (1 + |\eta|)^{r+s+n} & \text{si } r+n > 0 \text{ y } s+n > 0 \\ C_{n,r,s} (1 + |\eta|)^{\max(r,s)} & \text{si } r+n < 0 \text{ o } s+n < 0. \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

Demostración. Por la desigualdad de Peetre, tenemos

$$(1 + |\eta - \xi|)^s \leq (1 + |\eta|)^{|s|} (1 + |\xi|)^s.$$

De esta desigualdad resulta claro que $I(\eta)$ es finita cuando $r + s + n < 0$. Así que, en lo que sigue, asumiremos que $r + s + n < 0$.

Para $\eta \in \mathbb{R}^n$ fijo, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\eta - \xi| \leq \frac{|\eta|}{2} \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \frac{|\eta|}{2} \right\}, \\ \Omega_3 &= \mathbb{R}^n - (\Omega_1 \cup \Omega_2), \end{aligned}$$

y las integrales

$$J_i(\eta) = \int_{\Omega_i} (1 + |\xi|)^r (1 + |\eta - \xi|)^s d\xi, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para estimar estas integrales, asumamos primero que $r + n > 0$ y $s + n > 0$.

Si $\xi \in \Omega_1$ tenemos que $\frac{|\eta|}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3|\eta|}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} J_1(\eta) &\leq C_{r,s} |\eta|^r \int_{\Omega_1} (1 + |\eta - \xi|)^s d\xi \\ &\leq C_{n,r,s} |\eta|^r \int_0^{\frac{3}{2}} t^{n-1} (1+t)^s dt \\ &\leq C_{n,r,s} (1 + |\eta|)^{r+s+n}, \end{aligned}$$

ya que $s + n > 0$.

Si $\xi \in \Omega_2$ tenemos que $\frac{|\eta|}{2} \leq |\xi - \eta| \leq \frac{3|\eta|}{2}$. Así que, por simetría, tenemos también

$$J_2(\eta) \leq C_{n,r,s} (1 + |\eta|)^{r+s+n}.$$

Por otra parte, si $\xi \in \Omega_3$, entonces $C_1 |\xi| \leq |\eta - \xi| \leq C_2 |\xi|$. De hecho, como $|\eta - \xi| \geq \frac{|\eta|}{2}$ y $|\xi| \geq \frac{|\eta|}{2}$, tenemos

$$\frac{|\xi - \eta|}{|\xi|} \leq \frac{|\xi| + |\eta|}{|\xi|} \leq 3$$

y

$$\frac{|\xi|}{|\xi - \eta|} \leq \frac{|\xi - \eta| + |\eta|}{|\xi - \eta|} \leq 3.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I_3(\eta) &\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)} (1 + |\xi|)^{r+s} d\xi \\ &= C_n \int_{\frac{\eta}{2}}^{\infty} t^{n-1} (1+t)^{r+s} dt \\ &\leq C_{n,r,s} (1+|\eta|)^{r+s+n}. \end{aligned}$$

Esto prueba (D.5) en el caso $r+n > 0$ y $s+n > 0$.Pasemos, ahora, al caso $r+n < 0$ o $s+n < 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $r \geq s$ y $s+n < 0$. Nótese que

$$\begin{aligned} I_3(\eta) &\leq C_{n,r,s} (1+|\eta|)^r \int_0^{\frac{\eta}{2}} (1+t)^{s+n-1} dt \\ &\leq C_{n,r,s} (1+|\eta|)^{r+s+n}, \end{aligned}$$

por consiguiente,

$$I_1(\eta) \leq C_{n,r,s} (1+|\eta|)^r.$$

Para estimar $I_2(\eta)$ observemos que si $\xi \in \Omega_2$, entonces $|\eta - \xi| \geq \frac{|\eta|}{2} \geq |\xi|$. En seguida, consideremos primero el caso $r = \infty$. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} I_2(\eta) &\leq C_r \int_{|\xi| \leq \frac{|\eta|}{2}} (1+|\xi|)^{2r} d\xi \\ &\leq C_{n,r} \int_0^{\frac{|\eta|}{2}} (1+t)^{2r+n-1} dt \\ &\leq C_{n,r} (1+|\eta|)^{2r+n} \leq C_{n,r} (1+|\eta|)^r. \end{aligned}$$

Si $r > s$, escribimos

$$\begin{aligned} I_2(\eta) &\leq C_s (1+|\eta|)^s \int_{|\xi| \leq \frac{|\eta|}{2}} (1+|\xi|)^r d\xi \\ &\leq C_{n,r,s} (1+|\eta|)^s \int_0^{\frac{|\eta|}{2}} (1+t)^{r+n-1} dt. \end{aligned}$$

Luego, si $r \neq -n$, concluimos que

$$I_2(\eta) \leq C_{n,r,s} (1+|\eta|)^{r+s+n} \leq C_{n,r,s} (1+|\eta|)^r.$$

Si $r = -n$, tenemos en cambio

$$I_2(\eta) \leq C_{n,r,s} (1+|\eta|)^s \ln(1+|\eta|).$$

- [9] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, Mathematical Surveys 15, Amer. Math. Soc. (1977).
- [10] T. M. Flett, *On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions*, Proc. London Mat. Soc. (3) 20 (1970).
- [11] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications* (2nd ed.), Wiley-Interscience (1999).
- [12] J. García-Cuerva, J. L. Rubio De Francia, *Weighted Norms and Related Topics*, North Holland, Amsterdam (1985).

- [13] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (5th ed.), Academic Press, San Diego CA. (1994).
- [14] M. de Guzmán, *Impactos del Análisis Armónico*, Discurso de Ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, (1983).
- [15] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand (1950).
- [16] Y. Hirata, H. Ogata, *On the exchange formula for distributions*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 22 (1958) 147-152.
- [17] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Basic Complex Analysis* (2nd ed.), W.H. Freeman and Company, (1998).
- [18] J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial* (3ra ed.), Addison-Wesley Iberoamericana, México (1991).
- [19] M. A. Pinsky, *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, Brooks/Cole (2002).
- [20] H. L. Royden, *Real Analysis* (3rd ed.), Prentice Hall (1988).
- [21] W. Rudin, *Functional Analysis* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York (1991).
- [22] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York (1953).
- [23] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York (1974).
- [24] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann (1998).
- [25] R. Shiraishi, *On the definition of convolutions for distributions*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 23 (1959) 19-32.
- [26] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, (1971).
- [27] D. G. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (6ta. ed.), International Thompson Editors, México (1997).

INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFISICA
OPTICA Y ELECTRONICA

ESPECTROSCOPIA OPTICA MEDIANTE
FIBRAS CON GRADIENTE DE INDICE
DE REFRACCION

T E S I S
que para obtener el grado de:
MAESTRO EN CIENCIAS
p r e s e n t a :
Miguel Arturo Cervantes Montoya

TONANTZINTLA, PUE.

1 9 7 6

Al Pueblo de Sonora

A mis padres

A mis Hermanos

A mi esposa

S U M A R I O

En la presente Tesis proponemos el uso de medios ópticos con gradiente de índice de refracción con simetría cilíndrica para el análisis espectroscópico con alto poder de resolución.

Nuestra principal intención es discutir la posibilidad de un mejor análisis espectral de pulsos de láser de duración del orden de picosegundos que el que se puede obtener con medios convencionales como son el interferómetro Fabry-Pérot y las rejillas de difracción.

El contenido ha sido agrupado en cuatro capítulos y un apéndice.

En el primer capítulo estudiamos el fenómeno de dispersión desde el punto de vista clásico y se introducen los conceptos básicos en términos de los cuales se consideran posteriormente las propiedades de análisis espectral del prisma dispersor y de los medios inhomogéneos.

En el capítulo dos hacemos un resumen de los mecanismos analizadores del espectro más usados como son los ya clásicos, prisma, rejilla de difracción e interferómetro Fabry-Pérot, poniendo especial énfasis en sus capacidades de resolución espectroscópica así como su respuesta a pulsos de luz extremadamente cortos.

Los dos últimos capítulos que son la parte más importante de este trabajo, contienen algunos aspectos de las propiedades dispersoras de los medios inhomogéneos caracterizados por una distribución axialmente simétrica del indi-

ce de refracción. Este planteamiento se hace de acuerdo con el modelo de la Óptica geométrica que resulta apropiado.

La idea de desarrollar un trabajo de investigación sobre el empleo de medios inhomogéneos para producir dispersión en el dominio espacial, se ha sido propuesto por el Sr. Chandrasekhar Roychoudhuri, investigador y profesor de este Instituto y surgió a raíz de las dificultades que presenta el análisis espectral de pulsos ultracortos de luz por medio de los métodos convencionales enumerados en el capítulo dos.

En el apéndice hemos propuesto un criterio de resolución espectroscópico para haces Gaussianos en el dominio espacial. Con ello hemos hecho notar que para haces Gaussianos, el criterio de Rayleigh resulta inadecuado en su aplicación.

INDICE

	Página
Prólogo	
Introducción	
Capítulo 1. Teoría clásica de dispersión.....	1
1.1 Introducción	1
1.2 Teoría clásica de dispersión	3
1.3 Ondas pulsadas	10
Capítulo 2. El interferómetro Fabry-Perot, la rejilla de difracción y el prisma disper- sor	15
2.1 Introducción	15
2.2 El interferómetro Fabry-Perot	15
2.3 Discusión	19
2.4 Respuesta del Fabry-Perot a pulsos ex- tremadamente cortos	19
2.5 La rejilla de difracción	21
2.6 Poder de resolución	22
2.7 Superposición de órdenes	23
2.8 Prisma dispersor	24
2.9 Resumen	27
Capítulo 3. Propagación de haces de luz a través de fibras con gradiente de índice	32
3.1 Introducción	32
3.2 Fibras con distribución continua	39
3.3 Propagación paraxial	42
3.4 Propagación no paraxial	44

	Página
Capítulo 4. Dispersión frecuencial de pulso	
certos	47
4.1 Dispersión de pulso cuasi-monocromá-	
ticos	47
4.2 Análisis en términos de grupo de on-	
das	51
4.3 Separación espacial	53
4.4 Estimación numérica	56
4.5 Dispersión angular	56
4.6 Aplicaciones a espectroscopia	57
4.7 Separación de los modos longitudina-	
les de un láser He-Ne	61
Conclusión	62
Apéndice	63
Bibliografía	65
Bibliografía Suplementaria	68

Lista de símbolos usados en esta Tesis

A	Primer coeficiente de la ecuación de Cauchy
Å	Unidad Angstrom
A.N.	Abertura Numérica
\bar{B}	Inducción magnética; también usado para denotar el segundo coeficiente de la ecuación de Cauchy
c	velocidad de la luz
COO	Diferencia de camino Óptico
\vec{E}	Vector de campo eléctrico
e	magnitud de la carga electrónica
f_k	factor de peso en la ecuación de Sellmeier
F	Finera
F-P	Fabry-Perot
\vec{H}	Vector de campo magnético
k	número de onda
LED	Diode luminiscente (Light emitting diode)
m_e	masa electrónica
M	masa iónica
n	densidad de electrones por unidad de volumen
N	Índice de refracción
nm	Nanometros
\vec{P}	vector de polarización
R	Reflectancia
\mathcal{R}	Poder de resolución
T	Transmitancia
$T(\lambda)$	Función de transmitancia
W	Anchura del haz Gaussiano

α	Constante de gradiente de índice de refracción
γ	Constante de viscosidad
δ	Incremento
ϵ	Permitividad
θ	usado para denotar ángulos en general
κ	Constante de elasticidad
λ	longitud de onda
μ_0	Permeabilidad magnética
ν	Frecuencia
χ_e	Susceptibilidad eléctrica
ρ	coordenada radial cilíndrica
σ	Conductividad; también denota desviación estándar
τ	en general denota tiempo
ω	Frecuencia angular
∇	Operador gradiente
π	3.141592...
e	2.718281...
i	$(-1)^{1/2}$

INTRODUCCION

Desde el punto de vista de la Óptica, los materiales de mayor interés son los que permiten el paso de la luz sin ser substancialmente absorbida ni reflejada difusamente. Estas son las llamadas substancias transparentes que excluyen a los metales y los cuerpos opacos.

Las propiedades ópticas de una substancia transparente son determinadas por la función escalar de índice de refracción, N , que en general es una función de las coordenadas espaciales:

$$N = N(x, y, z).$$

En la Óptica convencional, esta función presenta discontinuidades seccionalmente.

El índice de refracción está relacionado con la permitividad por:

$$N = \epsilon^{1/2}$$

En la gran mayoría de los casos, los medios ópticos tienen un índice que no varía de punto a punto, es decir tienen un gradiente cero y en este sentido se les considera homogéneos (no consideramos en este trabajo los medios anisotrópicos).

Por otro lado se encuentran los medios inhomogéneos caracterizados por un gradiente de índice distinto de cero y que recibirán nuestra atención, sobre todo en la segunda parte de este trabajo.

Los medios con gradiente de índice aparecen espontáneamente en la naturaleza y son ejemplos típicos la atmós-

fera terrestre donde ocurre el espejismo y el cambio de posición aparente de los astros, el cristalino del ojo humano y los de algunos animales, sin embargo, hasta ahora solo han sido estudiados sin aplicaciones al análisis espectral.

Maxwell en 1854, demostró que un medio con variación radial de índice era capaz de formar imágenes de los puntos en su interior, mostrando así que era posible, al menos teóricamente considerar un sistema óptico perfecto en el sentido de formar imágenes bien definidas de objetos puntuales (puntos conjugados).

Wood en 1905 (32), sugiere el uso de cilindros inhomogéneos como pseudo-lentes capaces de formar buenas imágenes de objetos extendidos. En estos medios las superficies de igual índice son cilindros coaxiales con el valor máximo del índice a lo largo del eje de simetría y disminuyendo cuadráticamente con la distancia al eje.

No es hasta los últimos años (1969) que debido a los avances de las técnicas de producción, los medios inhomogéneos han despertado un interés marcado y se ha hecho un considerable número de estudios teóricos y experimentales sobre la propagación de la luz através de estos medios. Podemos decir que el principal incentivo que ha promovido la realización de sistemas con variaciones continuas y controladas de índice de refracción, es la idea de enviar información a gran escala através de fibras ópticas de gran longitud lo cual, además, requiere del uso de materiales con un muy bajo nivel de pérdidas.

Cabe también mencionar el estudio realizado por Sands en 1971 (31), (33), sobre la fabricación de los llamados lentes inhomogéneos. En este contexto la idea central es permitir mayor grado de corrección para los lentes que tie-

al respecto.

nen variación de índice de refracción por medio de la introducción del gradiente de índice como un parámetro adicional para controlar las aberraciones de Seidel y cromáticas, además de los conocidos que son el radio de curvatura, separación y forma de las superficies y tipo de vidrio, propios de las lentes convencionales.

Tanto en las fibras ópticas como en las lentes inhomogéneas, se pretende disminuir hasta donde sea posible el efecto de dispersión frecuencial o cromática, es decir, la dependencia con la frecuencia del índice de refracción, lo cual produce en ambos casos efectos indeseables ya que la información se envía a través de las fibras como un tren de pulsos de luz los cuales son distorsionados por efecto de la dispersión y ello se traduce en una disminución de la capacidad de transmisión de información y por otro lado, en las lentes inhomogéneas, se quiere formar mejores imágenes con una aberración cromática minimizada.

Hasta ahora los medios con gradiente de índice han sido estudiados principalmente con esta orientación y nuestro punto de vista es producir los mayores efectos cromáticos encaminados a servir al análisis de la luz.

Con la idea en mente de que los medios inhomogéneos pueden ser considerados, por lo pronto potencialmente, como una herramienta útil en el análisis espectral, hemos abordado el problema y presentamos resultados alentadores al respecto.

CAPITULO I

TEORIA CLASICA DE DISPERSION

1.1 Introducción.-

Se llama dispersión al fenómeno asociado con la dependencia en la longitud de onda del índice de refracción de una sustancia. Este fenómeno se observó primeramente en la región visible del espectro en donde para la mayoría de las sustancias transparentes, a lo largo de esta región, presenta el comportamiento ilustrado en la figura 1.1. Al crecer la longitud de onda disminuye el índice de refracción de modo relativamente lento.

Empíricamente Cauchy en 1836 propuso la siguiente expresión para describir el fenómeno

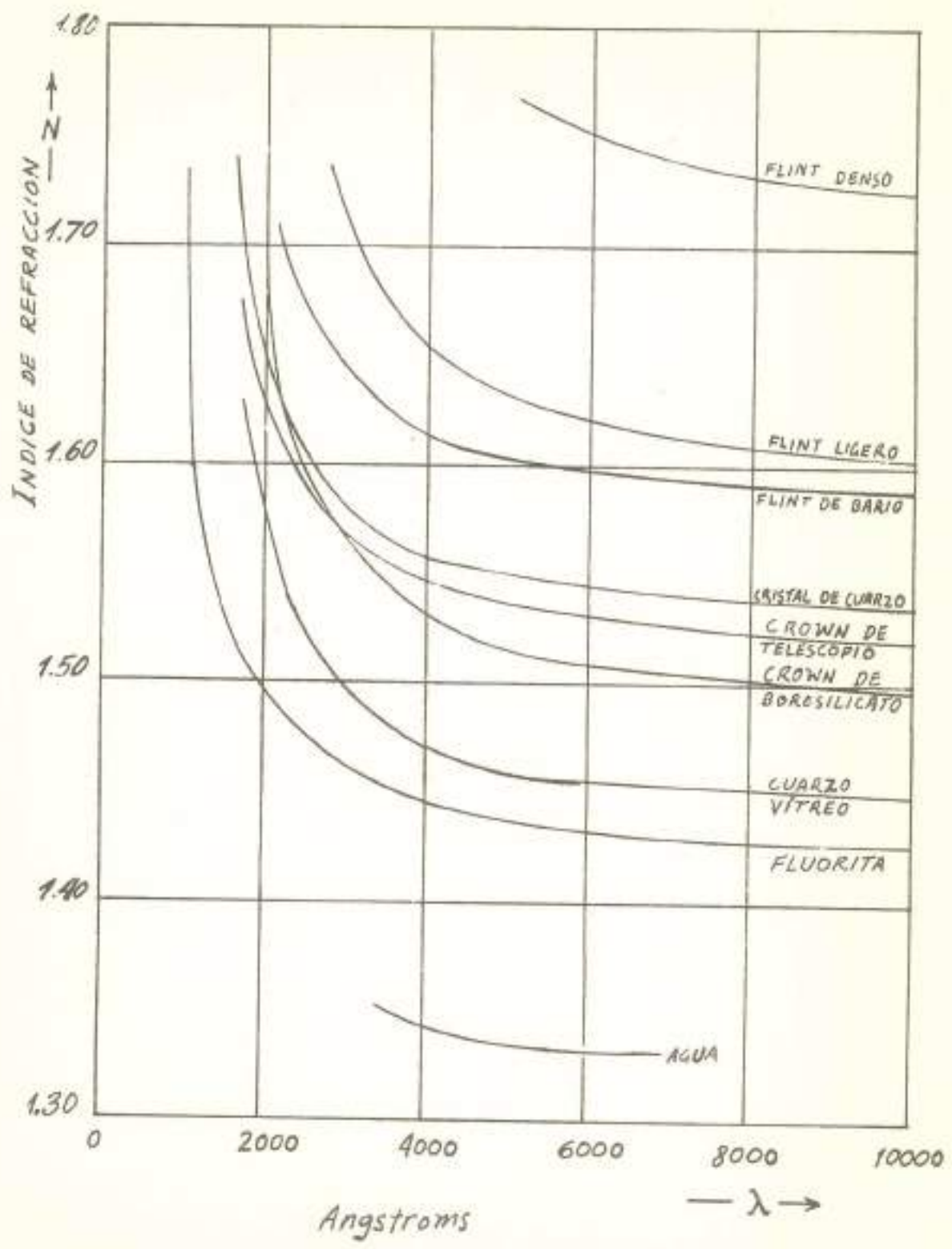
$$N(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^3} + \dots \quad (1.1)$$

donde A, B, C, etc. son constantes que caracterizan a la sustancia y λ es la longitud de onda. Dichas constantes pueden ser calculadas conociendo N para tantos valores de λ , distintos, como términos de (1.1) se tomen y resolviendo luego el sistema de ecuaciones que resulta.

La pendiente de la curva es:

$$\frac{dN}{d\lambda} = - \frac{2B}{\lambda^3}$$

(tomando solo los dos primeros términos se obtiene una precisión aceptable en la mayoría de los casos). Como A y B son positivos, esto muestra que N crece al disminuir λ



Esto se conoce como dispersión normal.

El comportamiento de la curva de dispersión en la región del lejano infrarrojo, es radicalmente distinto ya que se encuentra que el índice decrece más rápidamente de lo que predice la ecuación de Cauchy. En esta parte es difícil hacer mediciones debido a que la luz es absorbida por el material. En esta vecindad se localiza una banda de absorción, después de la cual, el índice de refracción toma nuevamente valores muy grandes y varía de manera monótona decreciente.

Para obtener una fórmula de dispersión más fiel a los resultados, es necesario considerar el mecanismo por el cual la luz interactúa con la materia.

Sellmeier en 1871 supuso que el medio en cuestión contenía partículas cargadas ligadas elásticamente y que tenían una frecuencia natural de vibración y que si se iluminaba con luz de esta frecuencia característica, las partículas entraban en resonancia y la energía era absorbida. Para luz de otras frecuencias la partícula ejecutaba oscilaciones forzadas cuya amplitud crecía al acercarse la frecuencia a la frecuencia resonante.

El medio puede estar formado por solo un tipo de partículas en cuyo caso la fórmula de Sellmeier da:

$$N^2 = 1 + \frac{f\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

siendo f una constante que depende de la densidad de masa y λ_0 la longitud de onda de resonancia.

Cuando hay más de un tipo de partículas, o sea varias bandas de absorción, tenemos:

$$N^2 = 1 + \sum_m \frac{f_m \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{mo}^2}$$

Aunque la fórmula de Sellmeier representa un considerable adelanto respecto a la de Cauchy. Aquella presenta discontinuidades en los valores $\lambda = \lambda_{m0}$ para los cuales N crece indefinidamente. Lo cual está alejado de la realidad. Sin embargo en regiones del espectro alejadas de una banda de absorción, la fórmula de Sellmeier se aproxima bastante a los datos observados.

Se verá seguidamente como es posible deducir la ecuación de Sellmeier en base a la teoría electromagnética de la luz.

La ecuación de Cauchy puede obtenerse a partir de la de Sellmeier, si hacemos la suposición de que $\lambda_0^2 \ll \lambda^2$ y entonces

$$N^2 = 1 + A \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right)^{-1}$$

$$\approx 1 + A \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} + \dots \right)$$

que tiene la misma forma que la expresión de Cauchy.

1.2.- Teoría Clásica de dispersión.

Derivaremos ahora la ecuación de dispersión a partir de la teoría electromagnética y el modelo de Lorentz de los osciladores armónicos simples para lo cual suponemos un medio que presenta las siguientes características:

Es un material homogéneo e isotrópico, no conductor ($\sigma = 0$) y no magnetizable; constituido por moléculas no polares cuyo momento dipolar es cero en ausencia de campos eléctricos externos. De acuerdo con lo anterior podemos escribir:

$$B = \mu_0 H$$

Ahora supongamos la presencia de un campo electromagnético descrito por los vectores \vec{E} y \vec{H} que varían armónicamente con una frecuencia angular ω y que incide en el medio considerado. De acuerdo con la teoría clásica, el campo polarizará los átomos desplazando las cargas positivas en la dirección del campo y las negativas en dirección opuesta. Figura 1.2. la carga negativa la consideramos como la

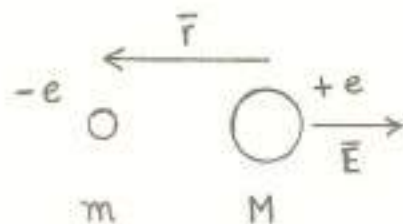


figura 1.2

de un electrón y la positiva como la carga de un protón cuyas masas difieren grandemente, es decir se trata de un átomo con un electrón de valencia en donde

$$M_{\text{ion}} \gg m_e$$

El vector de polarización definido como el momento dipolar total por unidad de volumen está dado por

$$\vec{P} = -n e \vec{r} \quad (1.2)$$

donde n es el número de átomos por unidad de volumen; $-e$ es la carga electrónica y \vec{r} es el desplazamiento medio desde el centro de masa de las cargas positivas. El movimiento elástico de los electrones ligados al resto del átomo está descrito por la ecuación diferencial

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r} - e \vec{E}$$

en esta expresión se ha despreciado el efecto del campo magnético, es decir

$$-e\bar{E} \gg -e(\bar{V} \times \bar{B}) \quad (V \ll c)$$

lo cual se puede escribir:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \bar{r} = -\frac{e\bar{E}}{m_e} \quad (1.3)$$

siendo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

sin embargo es necesario incluir en esta expresión una fuerza de amortiguamiento perturbadora debida principalmente a colisiones entre los átomos y a la interacción de los electrones con su propio campo y que es proporcional a la velocidad de los electrones

$$f = \gamma \frac{d\bar{r}}{dt}$$

ahora las oscilaciones cuasi-elásticas de los electrones son descritos por la ecuación

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\bar{r}}{dt} + \omega_0^2 \bar{r} = -\frac{e\bar{E}}{m_e}$$

o sea

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \bar{r} = -\frac{e\bar{E}}{m_e}$$

haciendo uso de (1.2) podemos escribir en función de la polarización

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \bar{p} = \frac{ne^2}{m_e} \bar{E}$$

ahora, puesto que $P = \epsilon \chi_e \bar{E}$ siendo χ_e la susceptibilidad eléctrica del medio

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0 \right) \epsilon_0 \chi_e \bar{E} = \frac{n e^2}{m_e} \bar{E}$$

y en vista de la variación armónica de \bar{E} , la anterior expresión se puede escribir:

$$\epsilon_0 \chi_e (-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{n e^2}{m_e}$$

$$\chi_e = \frac{n e^2 / m_e \epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad \text{pero} \quad N^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$$

$$N^2 = 1 + \frac{n e^2 / m_e \epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Esta última expresión representa un índice complejo que se puede estudiar como sigue: para los gases, es decir, n suficientemente pequeño

$$\frac{n e^2 / m_e \epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \ll 1$$

para todas las frecuencias. Podemos aproximar

$$N = \sqrt{1 + \frac{n e^2 / m_e \epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} \frac{n e^2 / m_e \epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Expresando $N = N_R + iN_I$ tenemos:

$$N_R = 1 + \frac{1}{2} \frac{(ne^2/m_e \epsilon_0) (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$y \quad N_I = \frac{1}{2} \frac{(ne^2/m_e \epsilon_0) \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

para frecuencias ω lo suficientemente alejadas de la frecuencia de resonancia, $N_I \ll N_R$ y $N_I \neq 0$ para toda ω . Para frecuencias cercanas a ω_0 , el comportamiento es completamente distinto como veremos, pues al substituir $\omega \approx \omega_0$ excepto donde aparece la diferencia $\omega_0^2 - \omega^2$ y en esta última por

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 &= (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \\ &\approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} N_R &\approx 1 + \frac{1}{2} \frac{(ne^2/m_e \epsilon_0) 2\omega_0(\omega_0 - \omega)}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 \omega_0^2} \\ &= 1 + \frac{(ne^2/m_e \epsilon_0 \omega_0)(\omega_0 - \omega)}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N_I &\approx \frac{1}{2} \frac{(ne^2/m_e \epsilon_0) \gamma \omega_0}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 \omega_0^2} \\ &= \frac{(ne^2/m_e \epsilon_0 \omega_0) \gamma / 2}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \end{aligned}$$

el comportamiento de ambos índices se muestra en la figura 1.3 -a), para un gas de densidad alta en la figura 1.3 -b)

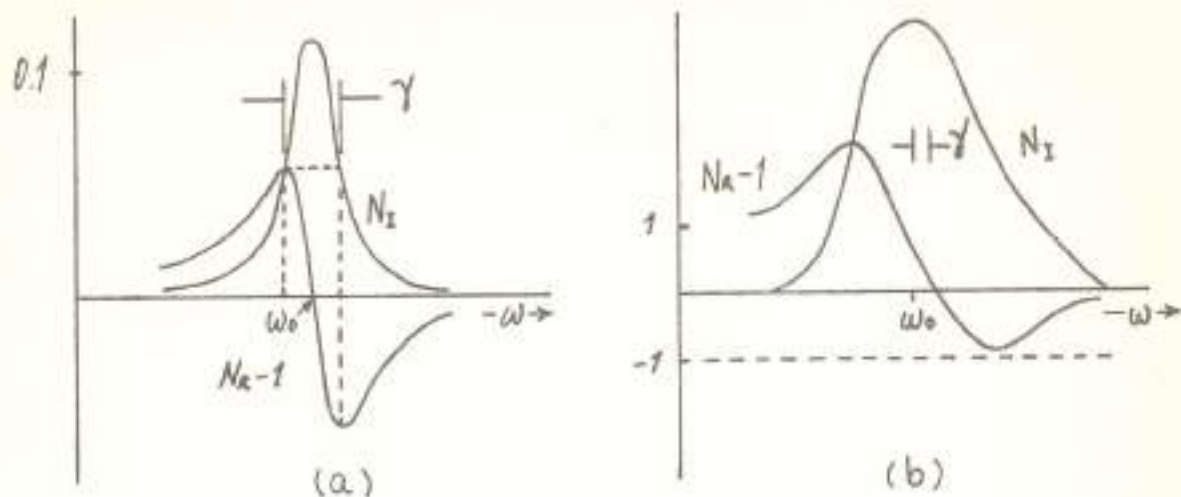


figura 1.3

en el intervalo donde $\frac{dN}{d\omega} > 0$, se dice que ocurre dispersión normal y cuando $\frac{dN}{d\omega} < 0$, se dice que ocurre dispersión anómala.

En esta derivación hemos supuesto que solo existe una clase de electrones oscilantes caracterizados por una frecuencia de resonancia ω_0 . Cuando existen q frecuencias resonantes en nuestro sistema, es decir q bandas de absorción, la expresión general para el índice de refracción, es

$$N = 1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{k=1}^q \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega}$$

donde ω_k es la frecuencia asociada con la k -ésima banda; f_k es un factor de peso asociada a cada oscilador y γ_k la correspondiente constante de amortiguamiento (δ viscosidad)

En la figura 1.4 se muestra el comportamiento de N_R y N_I para dos bandas de absorción caracterizadas por ω_k y ω_{k+1} . Se puede observar que en frecuencias alejadas de las bandas, el índice imaginario es substancialmente cero y en aquí que podemos considerar N^2 puramente real y escribir

$$N = 1 + \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0} \sum_{k=1} \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (1.5)$$

esta es la expresión de Sellmeier aplicada a regiones transparentes del medio, que para un vidrio óptico común se extiende desde el cercano infrarrojo hasta el cercano ultravioleta. Más allá de estos límites se encuentran las bandas de absorción de los rayos x y las radiofrecuencias.

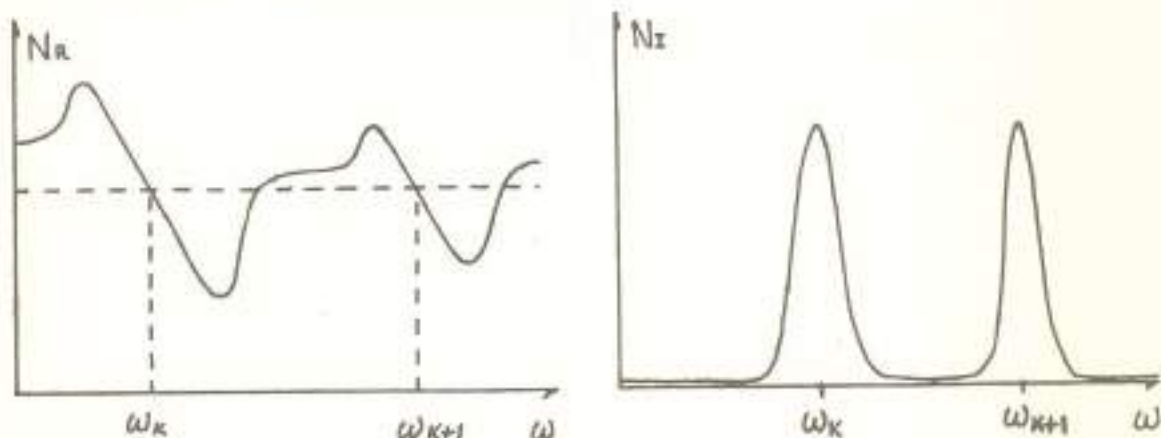


figura 1.4

Para medios líquidos o sólidos donde n es 10^3 veces más denso que un gas en condiciones normales, la fórmula anterior (1.5), no debe ser ya aplicada debido a la fuerte interacción que existe entre los electrones oscilantes y los átomos vecinos los cuales perturban más fuertemente a los electrones. Sin embargo el comportamiento del índice es cualitativamente igual y la teoría clásica se vale de la introducción de parámetros empíricos ajustables que permiten usar las expresiones encontradas sin tomar en cuenta efectos cuánticos los cuales por otro lado sirven para obtener una visión más profunda del mecanismo por el cual se produce el efecto de dispersión anómala pero no introducen

nuevos conocimientos sobre el comportamiento cualitativo - del índice de refracción con la frecuencia (1). Así por ejemplo la fórmula de Sellmeier se usa en la forma

$$N^2 = a + \frac{b_1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{b_2}{\omega_2^2 - \omega^2} + \dots \quad b_i, \omega_i \text{ constantes}$$

y según sea el número de bandas de absorción que caracterizan al material, se toman tantos términos en la suma. Aunque la mayoría de los materiales ópticos, tienen una banda de absorción en el infrarrojo y otra en el ultravioleta. la fórmula de Sellmeier da bastante precisión con solo dos términos.

1.3 Ondas Pulsadas.-

A continuación estudiamos el efecto producido al sumar dos ondas luminosas de frecuencias ligeramente diferentes y de igual amplitud

$$E_1 = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$E_2 = E_0 e^{-i[(\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z]}$$

la superposición de estas ondas es otra onda:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 (e^{-i(\omega t - kz)} + e^{-i[(\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z]})$$

$$= E_0 [e^{i\frac{1}{2}(\delta\omega t - \delta k z)} + e^{-i\frac{1}{2}(\delta\omega t - \delta k z)}] e^{-i(\bar{\omega} t - \bar{k} z)}$$

$$= 2E_0 \cos \frac{1}{2}(\delta\omega t - \delta k z) e^{-i(\bar{\omega} t - \bar{k} z)}$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$, $\bar{\omega} = \omega + \frac{1}{2}\delta\omega$, $\bar{k} = k + \frac{1}{2}\delta k$

esta expresión representa una onda con frecuencia $\bar{\omega}$ y número de onda \bar{k} que viaja en el sentido $+z$ y cuya amplitud va-

ría de acuerdo con el factor:

$$2E_0 \cos \frac{1}{2} (\delta\omega t - \delta k z)$$

y que se representa en la figura 1.5.

La onda que representa la envolvente de la amplitud viaja con una velocidad

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$$

llamada velocidad de grupo. Mientras que la onda modulada - viaja con una velocidad

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

llamada velocidad de fase.

La separación entre dos mismos valores de la amplitud, dos máximos consecutivos por ejemplo, es en tiempo,

$$\delta t = 2\pi / \delta\omega$$

y espacialmente:

$$\delta z = 2\pi / \delta k$$

mientras que para la función de fase

$$\delta t = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{y} \quad \delta z = \frac{2\pi}{k}$$

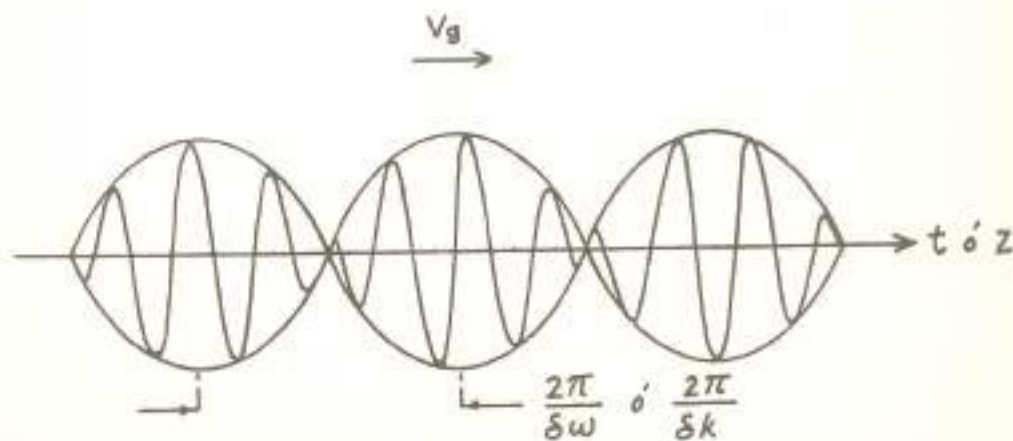


figura 1.5

Es posible aplicar los anteriores conceptos al caso más general de un grupo de ondas cuyas frecuencias angulares varían continuamente en un intervalo $\Delta\omega$ centrado en una frecuencia media $\bar{\omega}$ dentro del cual la amplitud E_ω difiere apreciablemente de cero.

La onda resultante en este caso se representará por $V(z, t)$ tal que

$$V(z, t) = e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \int_{(\Delta\omega)} E_\omega e^{-i[(\bar{\omega} - \omega)t - (\bar{k} - k)z]} d\omega$$

si se cumple la condición:

$$\frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} \ll 1$$

donde

$$\bar{k} = N(\bar{\omega}) \bar{\omega}/c \quad ; \quad N(\omega)$$

podemos expresar lo anterior como:

$$V(z, t) \equiv A(z, t) e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)}$$

con

$$A(z, t) = \int_{(\Delta\omega)} E_\omega e^{-i[(\bar{\omega} - \omega)(t - (\frac{dk}{d\omega})z)]} d\omega$$

es decir para $\Delta\omega$ suficientemente pequeño, $V(z, t)$ se puede interpretar como una onda de frecuencia $\bar{\omega}$ y número de onda \bar{k} propagándose en la dirección $+z$ con una velocidad de fase

$$v_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

y modulada en amplitud por la función envolvente dada por $A(z, t)$ la cual se propaga con una velocidad

$$s\omega/sk$$

y que resulta de la superposición de ondas cuyas frecuencias son $\omega - \bar{\omega}$. Puesto que $\Delta\omega$ es muy pequeño, la variación de A es muy lenta siendo su velocidad de propagación, llamada de grupo, dada por la condición

$$t - \left(\frac{\delta k}{\delta \omega} \right)_{\bar{\omega}} z = 0$$

o sea

$$v_g = \left(\frac{\delta \omega}{\delta k} \right)_k$$

podemos encontrar la relación entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo como sigue

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d}{dk} (v_f k) \\ &= v_f + k \frac{dv_f}{dk} \\ &= v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \end{aligned}$$

siendo todas las cantidades referidas a la frecuencia media $\bar{\omega}$.

o escribir en función de la dispersión

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} &= \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{v_f} \right) = \frac{1}{v_f} - \frac{\omega}{v_f^2} \frac{dv_f}{d\omega} \\ &= \frac{1}{v_f} + \frac{\omega}{c} \frac{dN}{d\omega} \end{aligned}$$

En el capítulo 4 párrafo 4.2 hacemos uso de esta relación en la forma

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_f} - \frac{\lambda}{c} \frac{dN}{d\lambda} \quad (1.6)$$

en conexión con la propagación de pulsos en fibras ópticas.

C A P I T U L O 2

EL INTERFEROMETRO FABRY-PEROT, LA REJILLA DE DIFRACCION Y EL PRISMA DISPERSOR.

2.1 Introducción.-

Con el fin de hacer una comparación con las fibras ópticas, en el presente capítulo nuestra intención es hacer un breve resumen sobre las propiedades analizadoras de los siguientes mecanismos espectroscópicos: el interferómetro Fabry-Perot, la rejilla de difracción y el prisma dispersor. Los cuales han sido, por mucho, extensivamente usados en el análisis espectral en comparación con otros métodos de análisis, como los espectrómetros de transformada de Fourier o de pulsaciones. (beat spectroscopy).

Queremos señalar que cuando la radiación que va a ser analizada se presenta en forma de pulsos de luz de duración extremadamente corta, la respuesta de espectrómetros como el Fabry-Perot o la rejilla difractora, puede ser distinta a la respuesta en condiciones normales, es decir, cuando se trata de un haz continuo.

2.2 El Interferómetro Fabry-Perot .-

Un interferómetro Fabry-Perot produce franjas de interferencia al combinarse los haces múltiples producidos por división de amplitud en una placa de caras planas y paralelas recubiertas con algún material parcialmente reflector, (figura 2.1), denominando con T y R la transmitancia y reflectancia de flujo, respectivamente, de las caras de la placa, (etalón), las franjas de interferencia -por transmisión- son obtenidos al combinar los haces transmitidos de

los cuales el n -ésimo tiene una amplitud A_n dada por

$$A_n = TR^n e^{in\phi}$$

donde hemos asumido una amplitud incidente unitaria. aquí ϕ , es la diferencia de fase entre dos haces vecinos cualesquiera, la cual es, despreciando cualquier cambio de fase en la reflexión, dada por (2), (3):

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2Nd \cos \theta$$

siendo λ la longitud de onda y los demás parámetros ilustrados en la figura 2.1. La amplitud resultante es:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} TR^n e^{in\phi} = \frac{T}{(1 - Re^{i\phi})}$$

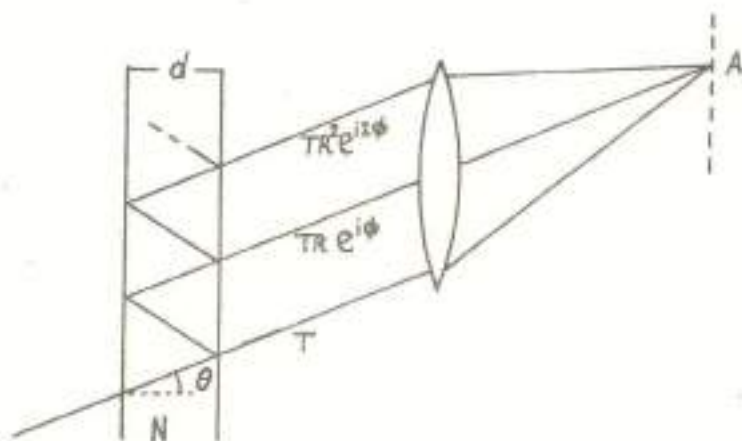


figura 2.1

La distribución de irradiancia en el plano focal de una lente usada para combinar los haces, está dada por el cuadrado de la amplitud resultante:

$$I = \frac{\mathcal{C}}{1 + \mathcal{N} \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}} \quad (2.1)$$

donde

$$\mathcal{G} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

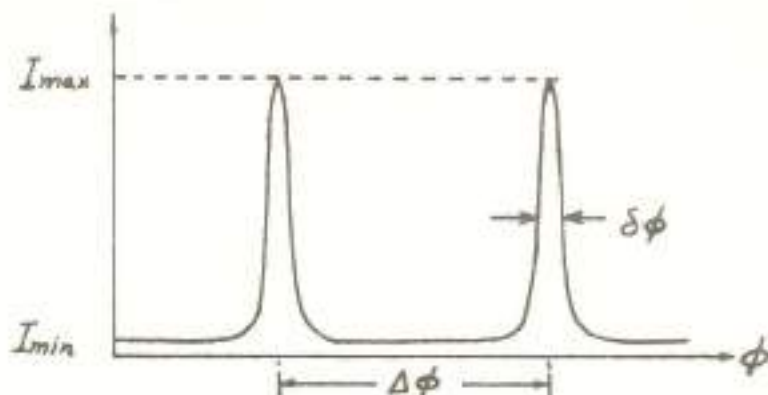


figura 2.2

En esta situación en que el haz inicial incide con cierto ángulo $0 < \theta < 90^\circ$, se producen las franjas características (figura 2.2) del P-P.

La transmitancia máxima es:
$$I_{max} = \frac{T^2}{(1-R)^2}$$

y la mínima es:
$$I_{min} = \frac{T^2}{(1+R)^2}$$

La condición para que la transmisión sea unitaria es que

$$\phi = \frac{4\pi Nd \cos \theta}{\lambda} = 2m\pi$$

con m cualquier entero.

De aquí obtenemos que las frecuencias para las que ocurre transmitancia máxima, son

$$\nu_m = m \frac{c}{2Nd \cos \theta}$$

las cuales están separadas entre sí por el llamado rango espectral libre.

En términos de frecuencias:

$$\nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2Nd \cos \theta}$$

en otras palabras:

$$\Delta \phi = 2\pi$$

Por otro lado, el ancho de la franja a media irradiancia se obtiene de sustituir $I = \frac{1}{2}$ en la ecuación (2.1)

$$\text{Sen}^2 \left(\frac{\phi_{1/2} - 2m\pi}{2} \right) = \frac{2\mathcal{C} - 1}{\mathcal{F}} = \frac{(1-R)^2}{4R}$$

donde $\phi_{1/2}$ es el valor de ϕ correspondiente a los puntos de media irradiancia.

Si se hace la suposición de que $\frac{\phi_{1/2} - 2m\pi}{2} \ll \pi$ obtenemos

$$\frac{\phi_{1/2} - 2m\pi}{2} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$$

de donde

$$\delta\phi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

La razón $\frac{\Delta\phi}{\delta\phi}$, es decir la razón del rango espectral libre al ancho del anillo a media irradiancia se llama Fineza:

$$F = \frac{\Delta\phi}{\delta\phi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

la cual está directamente relacionada con el poder de resolución del Fabry-Perot. La expresión para el poder de resolución es derivada en Born y Wolf (2):

$$\text{Poder de resolución} = \mathcal{R} = \lambda/\delta\lambda = m(0.97)F \quad (2.2)$$

donde $m = \frac{2Nd \cos \theta}{\lambda}$ es el orden de interferencia.

2.3 Discusión.-

El anterior resultado es hasta cierto punto idealizado pues existen otros factores que limitan el poder de resolución como es la presencia de pérdidas por absorción, de tal manera que en lugar de

$$R + T = 1$$

debemos tener

$$R + T + A = 1$$

siendo A la fracción de pérdidas.

Aunque, A puede ser una fracción suficientemente pequeña como para despreciarse.

Otro factor que no se ha tomado en cuenta, son las irregularidades en la superficie del etalón, en la práctica se han logrado superficies de gran tersura que hacen despreciable este efecto (4).

2.4 Respuesta del Fabry-Perot a pulsos extremadamente cortos.

Hoychoudhuri (5) ha demostrado que para obtener franjas de interferencia con un Fabry-Perot iluminado con pulsos de duración τ_p , debe cumplirse que

$$\tau_p \gg \tau_R$$

donde τ_R es el tiempo de respuesta asociado al Fabry-Perot que para una diferencia de camino óptico, DCO,

$$DCO = 2Nd \cos \theta$$

está dada por

$$\tau_R = \frac{2Nd \cos \theta}{c}$$

Para clarificar este punto, asumamos por simplicidad que un pulso cuadrado de duración temporal τ_p incide normal-

mente en un etalón de índice N y separación d . (figura 2.3)

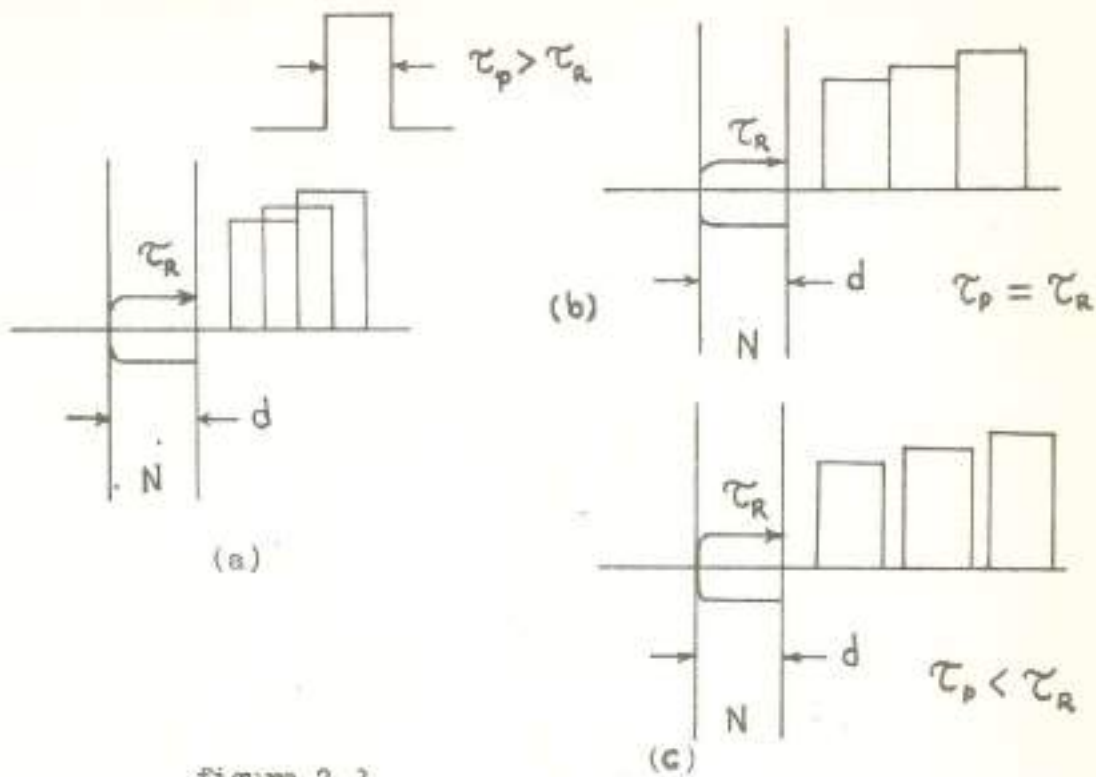


figura 2.3

Este pulso da origen a un tren de pulsos de intensidad de -
creciente separados temporalmente por

$$\Delta\tau_p = \frac{2Nd}{c}$$

debido al retraso que sufre en un viaje redondo cada pulso
reflejado.

Aparentemente la situación mostrada en la figura 2.3-a)
produce franjas de interferencia, pero no ocurre así en las
situaciones mostradas en (b) y (c), para incidencia no nor-
mal,

$$\Delta\tau_p = \frac{2Nd \cos \theta}{c}$$

2.5 La rejilla de Difracción.-

Considérese una rejilla constituida por M rendijas separadas entre sí por una distancia d . figura 2.4, también supóngase que incide un frente de onda plano monocromático de longitud de onda λ , con un ángulo i respecto a la normal a la rejilla.

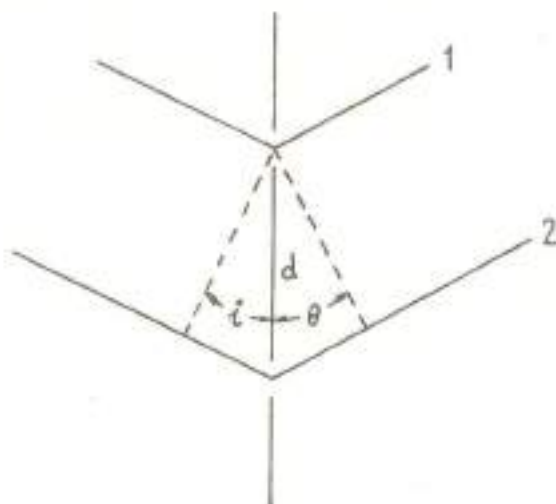


figura 2.4

Al difractarse la luz, ésta es enviada en todas direcciones y la luz de cada rendija interfiere con la del resto de las rendijas. Esta interferencia es totalmente constructiva cuando la DCO entre dos rayos paralelos, 1 y 2, sea igual a un número entero de longitudes de onda, esto es cuando:

$$d(\sin i + \sin \theta) = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots (2.3)$$

Los ángulos i y θ se toman positivos hacia arriba de la normal, correspondiendo con el signo + de m y negativos en caso contrario.

La ecuación (2.3) determina la posición de los máximos de intensidad correspondientes a esta longitud de onda. La dispersión angular $\frac{d\theta}{d\lambda}$ se obtiene directamente de (2.3).

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \quad (2.4)$$

una característica importante que podemos apreciar es que $d\theta/d\lambda$ varía directamente proporcional con el orden en que se observa y además de que es una relación lineal respecto a λ , a diferencia del prisma, la rejilla produce una mayor desviación a las longitudes de onda mayores.

Para ángulos θ no muy grandes, $d\theta/d\lambda$ varía inversamente proporcional con d por lo cual resulta conveniente hacer d tan pequeño como sea posible. Para que los máximos de intensidad sean bien definidos y angostos, se requiere un número M , de rendijas, muy grande, por lo tanto son deseables rejillas con una gran densidad de líneas.

2.6 Poder de Resolución.-

Dos frentes de onda provenientes de la rejilla, asociadas a las longitudes de onda λ y $\lambda + \delta\lambda$ se considerarán resolubles, cuando formen un ángulo entre sí $\delta\theta$, tal que

$$\delta\theta = \lambda / M d \cos \theta$$

debido a que se trata de difracción de Fraunhofer para una abertura rectangular y para el cual el criterio de Rayleigh determina que

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{b}$$

siendo b la proyección de la abertura sobre un plano perpendicular a la dirección de los rayos difractados, la cual para el caso presente, es igual a la anchura total de la rejilla por $\cos \theta$ es decir

$$M d \cos \theta$$

ahora, substituyendo en 2.4, obtenemos

$$\lambda / \delta\lambda = (M d \cos \theta / d \cos \theta) m = m M$$

esto es, el poder de resolución teórico de la rejilla de difracción, depende solo del orden m y el número total de rendijas, y es independiente del tamaño de la rejilla.

2.7 Superposición de Ordenes.-

De 2.3 tenemos que:

$$\text{sen } \theta = \frac{m\lambda}{d} - \text{sen } i$$

aquí i y d son constantes, sin embargo es posible que esta relación se cumpla para otro valor de m y λ digamos m' y λ' tal que

$$\text{sen } \theta = \frac{m'\lambda'}{d} - \text{sen } i$$

lo cual se cumple para $m' = 2m$ y $\lambda' = \frac{1}{2}\lambda$; $m' = 3m$, $\lambda' = \frac{1}{3}\lambda$; etc. Esto significa que los máximos de orden m' y longitud de onda λ' , coincidirán en el mismo punto, es decir, tendremos una superposición de ordenes lo cual equivale a un traslape de espectros; por ejemplo: la línea $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ del primer orden, se traslapa con la línea $\lambda' = 3000 \text{ \AA}$ de orden 2. Afortunadamente el traslape ocurre con frecuencias extremas del espectro o más aún del cercano infrarrojo y cercano ultravioleta.

Es posible salvar este problema, absorbiendo una de las frecuencias indeseables con algún filtro adecuado o bien con el uso de algún medio como puede ser un prisma.

En el caso de una rejilla de difracción, también tenemos la situación estudiada en el párrafo 2.4.

Es decir: cuando se intenta analizar espectralmente pulsos ultracortos cuya duración τ_p es menor que el tiempo de respuesta de la rejilla, no es posible producir efectos de difracción, en este caso, que den información sobre el contenido espectral del pulso. (34) (35).

La situación se muestra en la figura 2.5.

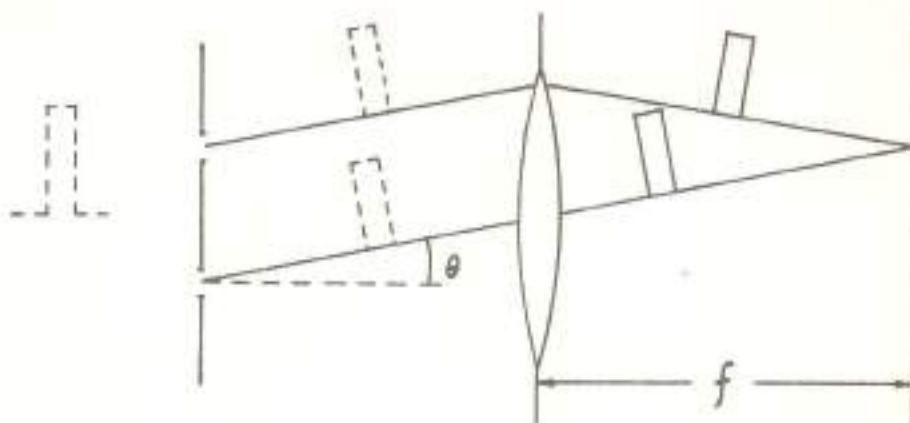


figura 2.5

Asumiendo incidencia normal, un pulso que incide sobre la rejilla difractora, da origen a una serie de pulsos difractados separados temporalmente por

$$\Delta\tau_p = \frac{2d \operatorname{Sen} \theta}{c}$$

La condición para superposición real de los pulsos difractados es que $\tau_p \gg \Delta\tau_p$, o sea $\tau_p > 2d \operatorname{Sen} \theta / c$

Naturalmente que esto determina un ángulo θ_c tal que para θ menor que θ_c , se tiene superposición de los pulsos difractados y para $\theta > \theta_c$, no existe tal superposición.

2.8 Prisma Dispersor.

Supóngase que se tiene un prisma de B cm. de base y hecho con un material caracterizado por una función de dispersión, $N = N(\lambda)$, conocida por lo menos en una cierta región espectral de interés. figura 2.6 .

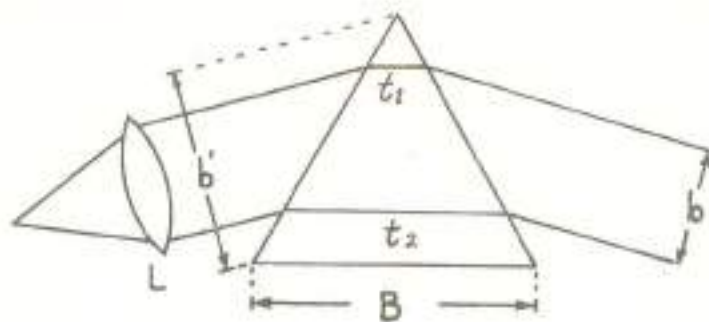


figura 2.6

Ahora considerense las siguientes situaciones:

(a) Se hace pasar un haz colimado de tal modo que se atraviesa el prisma con un ángulo de desviación mínima. El diámetro del haz está determinado por la abertura circular de una lente colimadora L de diámetro b. La dispersión angular, $\frac{d\theta}{d\lambda}$, está dada (6) por:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{t_2 - t_1}{b} \frac{dN}{d\lambda}$$

con t_1 , t_2 definidas en la misma figura 2.6.

El poder resolutor del prisma, definido por la razón

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

siendo λ y $\lambda + \delta\lambda$ las longitudes de onda de dos señales incidentes, se encuentra que: (6)

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = (t_2 - t_1) \frac{1}{1.22} \left(\frac{dN}{d\lambda} \right)_\lambda$$

a esta expresión se llega substituyendo $\delta\theta$, el ángulo límite de resolución, por

$$\delta\theta = 1.22 \lambda / b$$

el cual se obtiene en base al criterio de Rayleigh. figura 2.8.
 (b) Si ahora, la lente colimadora es suficientemente grande para iluminar la cara completa del prisma, entonces las anteriores expresiones se vuelven:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{B}{b'} \left(\frac{dN}{d\lambda} \right)_{\lambda}$$

y

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = B \left(\frac{dN}{d\lambda} \right)_{\lambda} \quad (2.5)$$

debido a que en (a) el patrón de difracción de Fraunhofer de la abertura circular (pupila de entrada de la lente), tiene el primer mínimo de intensidad a una distancia angular

$$1.22 \frac{\lambda}{b}$$

de la imagen geométrica de la rendija mientras que en (b), el patrón de difracción de una abertura rectangular, tiene dicho primer mínimo a una distancia angular

$$\delta\theta = \lambda / b'$$

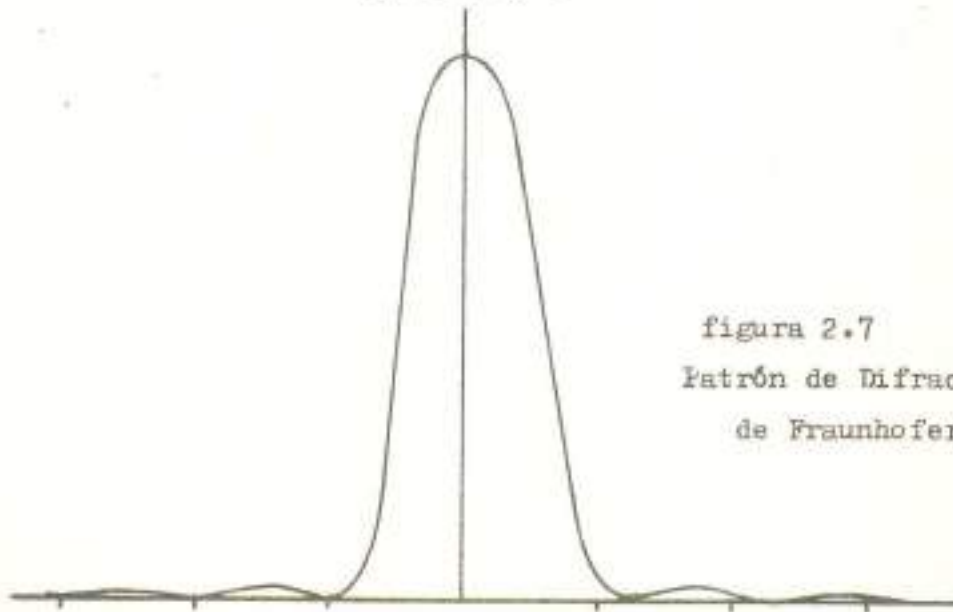


figura 2.7
 Patrón de Difracción
 de Fraunhofer.

el cual se obtiene en base al criterio de Rayleigh. figura 2.8.
 (b) Si ahora, la lente colimadora es suficientemente grande para iluminar la cara completa del prisma, entonces las anteriores expresiones se vuelven:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{B}{b'} \left(\frac{dN}{d\lambda} \right)_{\lambda}$$

y

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = B \left(\frac{dN}{d\lambda} \right)_{\lambda} \quad (2.5)$$

debido a que en (a) el patrón de difracción de Fraunhofer de la abertura circular (pupila de entrada de la lente), tiene el primer mínimo de intensidad a una distancia angular

$$1.22 \frac{\lambda}{b}$$

de la imagen geométrica de la rendija mientras que en (b), el patrón de difracción de una abertura rectangular, tiene dicho primer mínimo a una distancia angular

$$\delta\theta = \lambda / b'$$

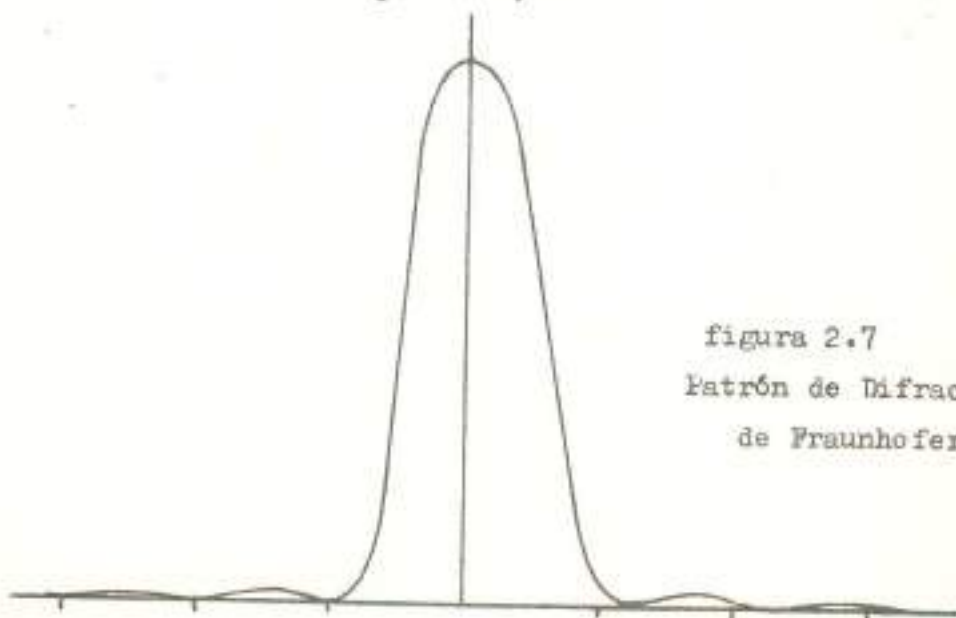


figura 2.7
 Patrón de Difracción
 de Fraunhofer.

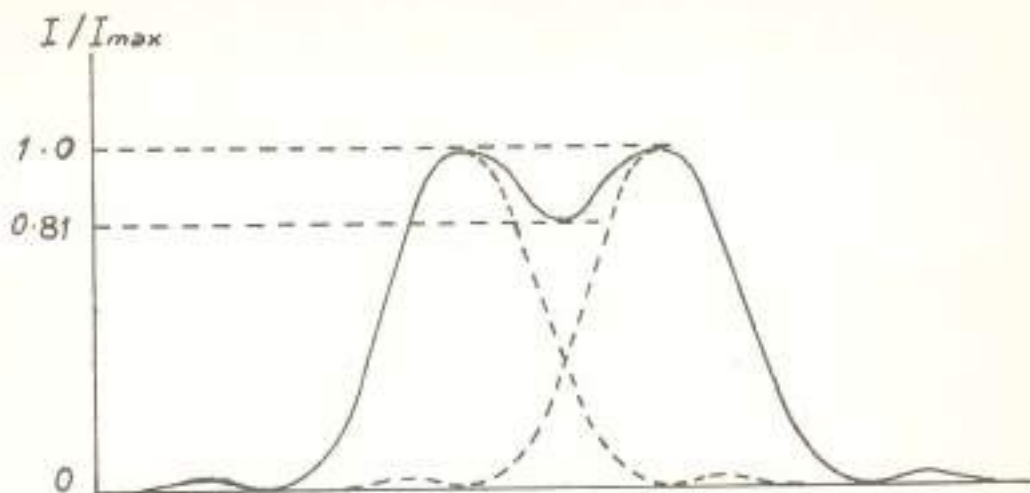


figura 2.8

Criterio de Resolución de Rayleigh.

Es posible incrementar el poder de resolución de sistemas con prismas, colocándolos en tándem y en ese caso, el poder de resolución total, es igual a la suma algebraica de los poderes de resolución de cada prisma tomándolo individualmente, es decir n prismas idénticos colocados para desviación mínima en serie, producen n veces el poder de resolución de cada uno de ellos

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = n B \frac{dN}{d\lambda}$$

2.9 Resumen.-

A continuación comparamos los poderes resolutores de los tres mecanismos espectroscópicos anteriores en términos de valores típicos de sus parámetros.

terferencia m dados, para incidencia aproximadamente normal, por:

$$F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R}$$

$$m = \frac{2Nd}{\lambda}$$

(a) Prisma.-

Como vimos, el poder de resolución de un prisma está dado por la ecuación (2.5).

Un material comúnmente usado es el vidrio Flint denso que tiene un valor de $dN/d\lambda = 0.5 \times 10^{-5} \text{ \AA}^{-1}$, en $\lambda = 5893 \text{ \AA}$. Un prisma de base B cm. tiene un poder de resolución teórico de:

$$R = 500 B$$

Para $B = 5$ cm.

$$R = 2.5 \times 10^3$$

(b) Rejilla de difracción.-

En este caso tenemos que:

$$R = n M$$

donde n es el orden de difracción y M es el número total de rendijas de la rejilla.

Tomando una rejilla algo típica de 6000 líneas/cm y un total de 30 000 líneas, esto da:

$$R = 30\,000 n$$

y el poder de resolución varía entre 6×10^4 , para el 2do. orden, hasta 1.8×10^5 para el sexto. Esto se ilustra en la figura 2.9.

(c) Fabry-Perot.-

Como se vió anteriormente, para un F-P, el poder de resolución es proporcional a la fineza F y al orden de interferencia m dados, para incidencia aproximadamente normal, por:

$$F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R}$$

$$m \approx \frac{2Nd}{\lambda}$$

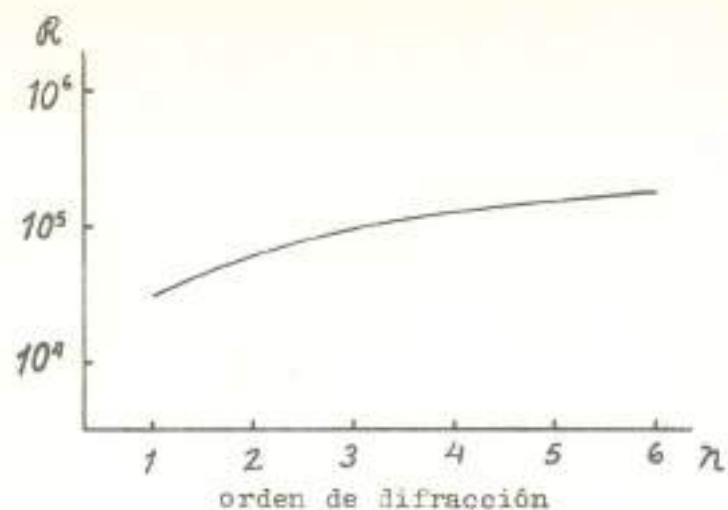


figura 2.9

Poder de resolución de una rejilla
de 6×10^3 líneas/cm.

asumiendo

$$R = 0.95$$

$$Nd = 3 \text{ cm.}$$

$$\lambda = 5.5 \times 10^{-5} \text{ cm.}$$

obtenemos

$$F = 61$$

y

$$m = 1.1 \times 10^5$$

substituyendo en la ecuación 2.2, obtenemos:

$$R = 6.5 \times 10^6$$

En la figura 2.10 se muestra la variación de R para distintos valores de los parámetros de un M-P.

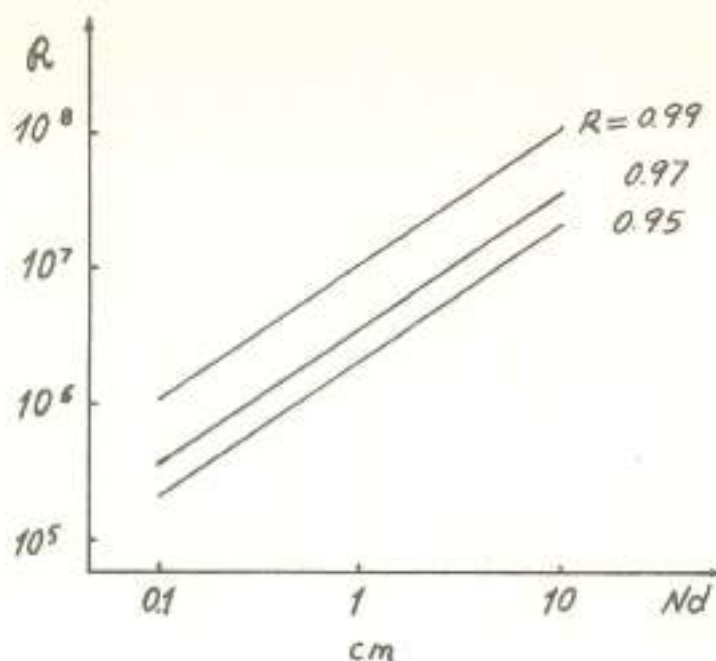


figura 2.10

Variación del poder de resolución teórico de un P-P con distintos valores de R y Nd y $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ y $\theta \cong 0$.

De los anteriores resultados podemos deducir, que en términos generales, una rejilla de difracción típica, es dos órdenes de magnitud más potente que un prisma igualmente típico pero que aquella resulta ser un orden de magnitud menos potente que un P-P.

No obstante, este último es capaz de mayor potencia hasta en tres órdenes de magnitud con respecto a la rejilla, como se muestra en la figura 2.10. Para un P-P de reflectancia de 0.99 y de una separación relativamente grande de los espejos. Reflectancias de este valor no son difícilmente adquiribles, sobre todo con materiales reflectantes dieléctricos.

C A P I T U L O 3

PROPAGACION DE HACIA DE LUZ A TRAVES DE FIBRAS CON GRADIENTE DE INDICE.

3.1 Introducción.-

Una fibra óptica está constituida por un medio dieléctrico generalmente de forma cilíndrica circular por donde se transmite información en forma de ondas electromagnéticas usualmente de la región visible y del cercano infrarrojo.

Los materiales que comúnmente se usan son vidrios que llenan los requerimientos de bajo nivel de pérdidas de energía luminosa como son vidrios de Fosfosilicato (7) y Borosilicato (8)¹. Se requiere una pequeña fracción de pérdidas debido a la relativamente grande longitud de la fibra que es del orden de kilómetros.

Las fuentes que se usan para este propósito son los diodos luminiscentes (LED) y algunos láseres que emiten entre 8000 y 10 000 Å. Los primeros producen iluminación incoherente y coherente los segundos.

En la práctica la información se envía codificada así que las señales viajan como un tren de pulsos hasta que son registrados por un detector de intensidad.

Fundamentalmente existen dos tipos de fibras atendiendo a la distribución del índice de refracción pudiendo ser

-----¹ También se han reportado estudios de propagación de pulsos en fibras con núcleo líquido(9).

esta escalonada o graduada (discontinua y continua).

(a) Fibras Escalonadas.-

En la figura 3.1 (a) se muestra esquemáticamente dos tipos de fibras escalonadas comúnmente usadas.

La fibra multimodal permite el paso a un gran número de modos (rayos) debido a su núcleo relativamente grande y a su mayor apertura numérica¹; esto lo hace apropiada para fuentes lambertianas como es el diodo luminoso y otras fuentes distintas a los láseres, en esta modalidad, la luz viaja siguiendo trayectoria de zig-zag sufriendo múltiples reflexiones totales en la interfase núcleo - cubierta.

El ángulo θ que forman los rayos con el eje óptico de la fibra, está acotado por el ángulo θ_{\max} .

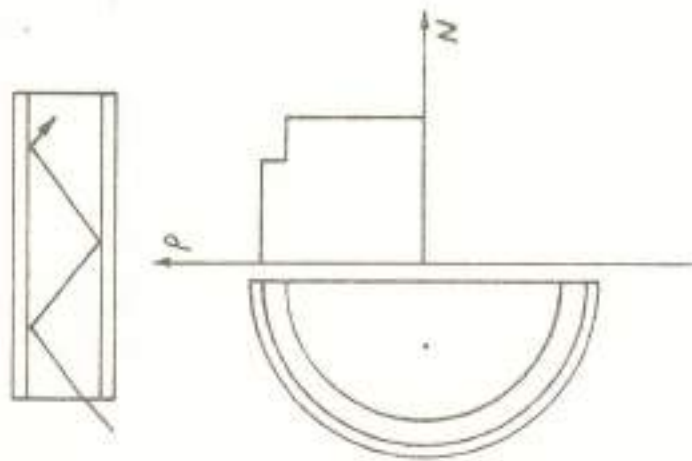
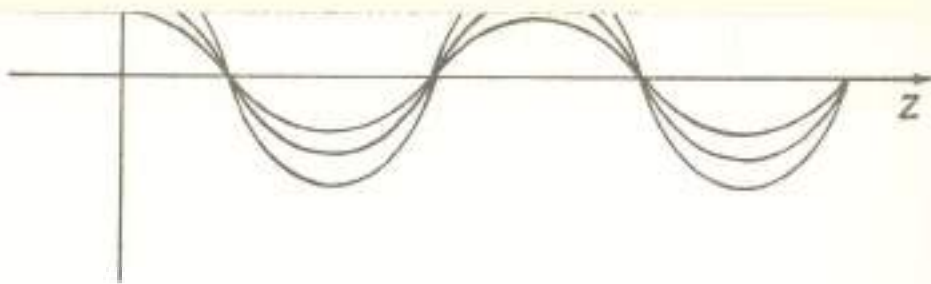
$$\theta_{\max} = 90^\circ - \sin^{-1} \frac{N_1}{N_2}$$

Una desventaja de esta forma es que permite valores de θ muy grandes, lo cual se traduce en mayor deformación y atenuación de los pulsos como veremos más adelante. Una manera de salvar este problema es por medio de la fibra unimodal la cual solo se propagan modos que forman un ángulo muy pequeño con el eje óptico. Esto se puede lograr de dos maneras: haciendo el núcleo suficientemente pequeño o bien, haciendo que los índices N_1 y N_2 difieran poco, con lo cual se logra confinar solo los modos paraxiales.

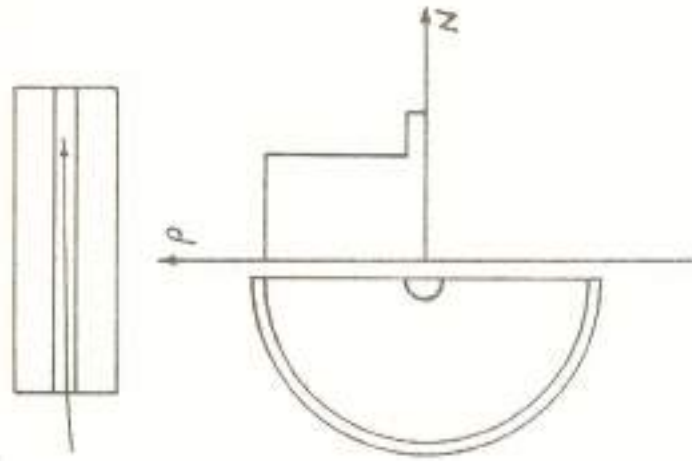
La fibra graduada (figura 3.1 (b)), esta caracterizada por una distribución radial del índice de refracción casi-parabólica. Es decir varía cuadráticamente con la distancia al eje de la fibra decreciendo monótonamente.

¹ La apertura numérica (A.N.) se define como:

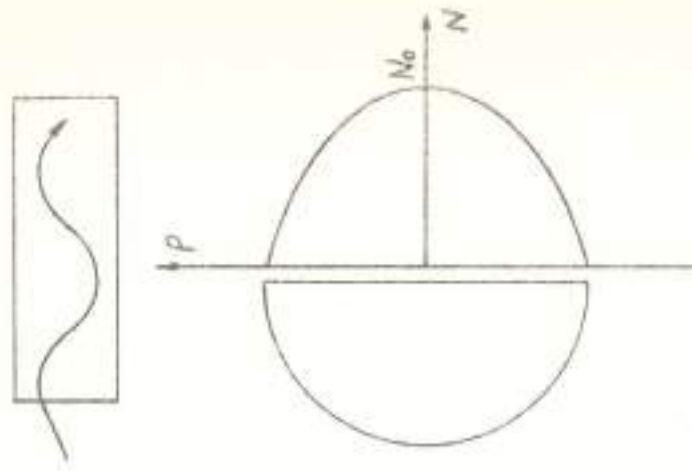
$$A.N. = \left(N_{\text{núcleo}}^2 - N_{\text{cubierta}}^2 \right)^{1/2}$$



(a) fibra multimodal



(a) fibra unimodal



(b) fibra graduada

figura 3.1

En coordenadas cilíndricas circulares:

$$N(\rho) = N_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \rho^2 \right) \quad (3.1)$$

donde N_0 es el índice en el eje óptico, y α es la constante de variación o de gradiente.

La propagación de un frente de onda que penetra en este medio es tal que la ecuación de la trayectoria de los rayos correspondientes a este frente es:

$$\rho(z) = \rho_0 \cos \alpha z + \frac{1}{\alpha} \rho'_0 \sin \alpha z \quad (3.2)$$

donde ρ_0 es $\rho(z=0)$, (esta expresión se derivará en el párrafo 3.3).

Es decir, ahora la propagación en lugar de ser a lo largo de una trayectoria en zig - zag será senoidal.

En la figura 3.2, se muestra un trazo de rayos para el plano meridional.

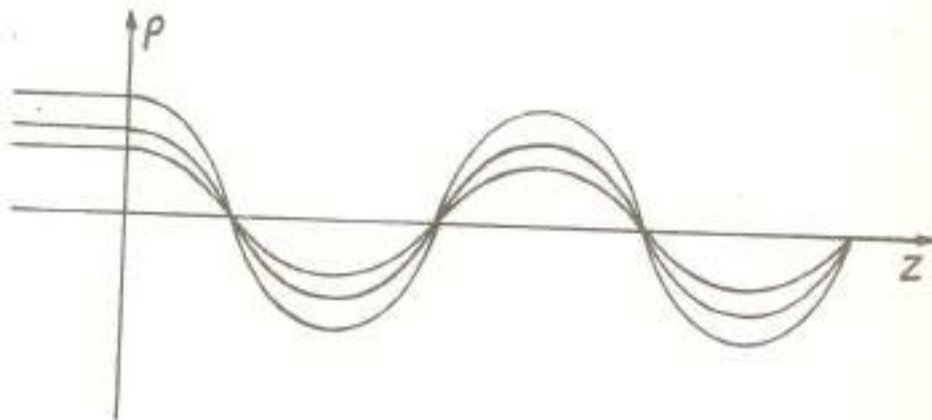


figura 3.2

El efecto de autoenfoco periódico, es decir el que existan puntos sobre el eje z , por el que pasan todos los rayos en determinado tiempo, es causado por la compensación

de la mayor trayectoria que siguen los rayos por una mayor velocidad de propagación (menor valor del índice de refracción para ese rayo de λ constante).

Las fibras ópticas son objeto de especial estudio tanto teórico como experimental, debido a su potencial extensivo uso en el campo de las comunicaciones (10).

Nuestro objetivo en este trabajo es poder obtener información cuantitativamente del contenido espectral de pulsos de luz de duración ultra corta (del orden de 10^{-12} s.).

Estos pulsos se producen con una variedad de métodos (11), (12), entre los más eficientes está el llamado amarre-modos (mode locking) y el llamado Q-switching y utilizándose para ello la potencia de salida de algún sistema láser apropiado: Nd-Glass Láser, Rubi, Nd-Yag.

El análisis espectral de estos pulsos de luz ultracortos no se puede llevar a cabo con los espectrómetros convencionales como el prisma dispersor, la rejilla de difracción y el interferómetro de Fabry-Perot; debido a la angosta banda de frecuencias dentro de las cuales se emiten los pulsos. Para este propósito, un prisma convencional resulta un instrumento de muy bajo poder resolutor -ver párrafo 2.9-, y la rejilla y el Fabry-Perot tienen tiempo de respuesta demasiado grandes comparados con la duración de los pulsos (5).

En lo que sigue veremos que es posible obtener esa información que buscamos, con la ayuda de las fibras ópticas de índice graduado.

Al propagarse un pulso de esta naturaleza a través de una fibra óptica, el pulso de salida presenta las siguientes características:

- (a) La energía del pulso de salida es menor que la de entrada.
- (b) La duración del pulso de salida es mayor que la del pul-

so de entrada.

Lo primero se debe a disipación de energía por absorción, por fugas de luz en la fibra y pérdidas por esparcimiento de la luz, debido a la presencia de impurezas y a inhomogeneidades en la interfase núcleo-cubierta (13). Sin embargo, el nivel de pérdidas totales se ha logrado disminuir sustancialmente (14), (15), (16), al grado de hacer meritorio el uso de estas fibras como portadoras de información en gran escala en la práctica.

Así pues, las pérdidas atenúan la energía pico de los pulsos.

El efecto del ensanchamiento de los pulsos, no obstante, es independiente de las pérdidas que se tengan y el mecanismo que lo produce se explica a continuación.

Con el nombre de ensanchamiento de pulso denotaremos la diferencia

$$t_2 - t_1$$

siendo t_1 el ancho del pulso entrante y t_2 el ancho del pulso saliente (medido entre los puntos de intensidad igual a la mitad de la intensidad del pico).

El ensanchamiento se debe primordialmente a:

- i) Dispersión de Retraso Espacial.
- ii) Dispersión Frecuencial.

Dispersión de Retraso Espacial.-

Esta se debe a que la energía del pulso no se propaga toda ella recorriendo la misma trayectoria óptica, esto es, parte de esta energía recorre la fibra en mayor o menor tiempo que el resto; este efecto es particularmente notable en las fibras escalonadas multimodales donde la energía que se propaga a través de rayos paraxiales recorre la fibra en menos tiempo que la que lo hace en rayos no paraxiales (17)

debido a que son menos dispersivas que las fibras escalonadas comparables y además se han logrado fabricar con el bajo nivel de pérdidas necesario para hacerlas dignas de tomarse en consideración (6), (20).

En el presente trabajo centraremos nuestra atención en las fibras de índice graduado por las razones anteriormente expuestas.

El análisis que hacemos se basa en el modelo de la Óptica Geométrica el cual ha resultado suficiente para analizar completamente la propagación en fibras ópticas con cualquier distribución de índice (21), (22), (23).

3.2 Fibras con Distribución Continua.-

En esta parte estudiaremos la propagación de la luz y la dispersión que sufre en un medio inhomogeneo, el cual tiene simetría cilíndrica circular y donde las propiedades ópticas están determinadas por una distribución de índice refractivo dado por:

$$N(\rho) = N_0 \operatorname{sech} \alpha \rho \quad (3.3)$$

donde ρ representa la distancia al eje óptico a lo largo del cual el índice vale N_0 y α es una constante que representa la diferencia relativa de índice con respecto al eje.

Además se trata de un medio idealmente transparente (sin pérdidas) e isotrópico sumergido en un medio con índice refractivo unitario.

Como veremos, la propiedad más importante que tiene esta distribución, es que presenta el efecto de auto enfoque periódico y por esta razón se le encuentra asociado con la longitud de poco más de un kilómetro.

transmisión de imágenes a distancia en el campo de las comunicaciones ópticas.

Parece ser que la más anticipada referencia que se hace sobre esta propiedad de enfocamiento fue hecha en 1932 en relación con la interpretación de curvas de tiempo de recorrido de ondas sísmicas (24).

En un artículo poco conocido, Fletcher et. al. (25) demuestran que para rayos meridionales, la única distribución con simetría axial que hace converger todos los rayos paralelos en un mismo punto, es de la forma 3.3. Esto significa que esta distribución es capaz de formar imágenes periódicas de objetos y transmitirlos con amplificación unitaria. Al menos para rayos meridionales¹, a través de cierta distancia. Esta propiedad ha sido también utilizada para formar imágenes por medio de delgadas secciones de este medio a la manera de lentes. Kapron, en 1970, (21) hace un análisis al respecto con base en la aproximación Gaussiana.

Un medio como el que nos ocupa puede ser aproximado en la práctica por las llamadas lentes de gas en donde se introduce la variación de índice deseada por medio de un gradiente térmico, en un cierto gas confinado en un recipiente cilíndrico. En este caso, la variación de índice es muy pequeña, lo cual permite hacer análisis restringido a la óptica paraxial (26 - 30).

Sin embargo los medios gaseosos son de poca utilidad práctica.

Desde este punto de vista, las fibras sólidas dieléctricas son más atractivas por su flexibilidad y mayor facilidad para rayos oblicuos, la distribución óptima de índice es diferente (24).

lidad de manejo. Atractivas también para quienes ven en ellas el medio de conducir señales luminosas con una enorme capacidad de transportación de información. Esta gran capacidad potencial ha promovido en los últimos años el desarrollo de nuevas técnicas de producción y ha intensificado notablemente el interés por estudios teóricos y experimentales sobre el tema. Sin duda que en un futuro no lejano la introducción de las fibras ópticas ha de causar la gran innovación en el campo de las comunicaciones (véase la bibliografía suplementaria).

Pero nuestro interés por el momento está enfocado en el estudio de las propiedades dispersoras de las fibras de índice graduado. Dispersión en el sentido de la dependencia con la longitud de onda del índice de refracción.

Este aspecto de los medios inhomogéneos ha sido relativamente poco estudiado, si se considera que lo encontrado en la actualidad en la literatura es sobre el control de la aberración cromática en lentes inhomogéneas (31) y sobre la dispersión frecuencial de pulsos ultracortos la cual produce ensanchamiento de pulsos.

De cualquier forma, en ambos casos, la tendencia general es la de disminuir lo más posible los efectos cromáticos: producir la distribución de índice que anule la aberración cromática y que se minimice la dispersión de pulsos.

Aquí, nuestro objetivo es lo contrario, esto es, producir lo más posible la descomposición de la luz con ayuda de un medio inhomogéneo, en este caso, una fibra de índice graduado.

Hacemos la exploración con base a la óptica geométrica, luego introducimos el efecto de dispersión y sacamos las conclusiones.

A continuación estudiamos la propagación en este medio. Primeramente el caso paraxial y luego el caso no restringido.

3.3 Propagación Paraxial.-

Considerando la expresión 3.3 y usando la expansión en serie de Taylor de la secante hiperbólica, tenemos:

$$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \dots$$

si $\alpha\rho$ es suficientemente pequeño, podemos obtener una buena aproximación tomando solo los dos primeros términos y expresar

$$N(\rho) = N_0 \left(1 - \frac{\alpha^2 \rho^2}{2} \right) \quad (3.4)$$

donde α es una constante que depende del valor de N en $\rho = 0$ y el valor en la orilla de la fibra.

Bajo esta suposición de que la variación del índice de la fibra no es mayor que unas cuantas milésimas, podemos asumir una aproximación paraxial, la cual nos permitirá hacer una simplificación del problema en el momento de resolver la ecuación de trayectoria seguida por los rayos en el interior de la fibra.

Un rayo de luz que entra en este medio se comporta de acuerdo con la ecuación diferencial (2)

$$\frac{d}{ds} \left(N \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla N \quad (3.5)$$

donde s es el elemento diferencial de longitud de arco, \vec{r} es el vector de posición sobre el rayo y ∇ el operador gradiente.

Esta ecuación diferencial vectorial es equivalente a tres ecuaciones diferenciales escalares acopladas, una para cada coordenada ρ, ϕ, z .

Antes de resolver esta ecuación hay que mencionar que el índice de refracción depende también de la longitud de onda λ , así que $n = n(\rho, \lambda)$.

En primera aproximación hacemos uso de la fórmula de dispersión de Cauchy, que se puede escribir:

$$n(\lambda) = A + B/\lambda^2$$

substituyendo ésta en la ecuación (3.4) obtenemos:

$$N(\rho, \lambda) = (A + B/\lambda^2) (1 - \alpha^2 \rho^2 / 2)$$

la cual se puede escribir después de hacer algunos arreglos así:

$$N(\rho, \lambda) = A \left(L - \frac{L \alpha^2 \rho^2}{2} \right)$$

donde

$$L = 1 + B/A\lambda^2$$

ahora substituyendo en (3.5) y recordando que se trata de una propagación paraxial, lo cual nos permite escribir:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{dz}$$

y además que

$$1 \gg \alpha^2 \rho^2 / 2$$

con estas condiciones

$$\frac{d}{dz} \left(N(\rho, \lambda) \frac{d\bar{r}}{dz} \right) = \nabla N(\rho, \lambda)$$

$$\frac{d}{dz} \left(N(\rho, \lambda) \frac{d\bar{r}}{dz} \right) = -A L \alpha^2 \rho \quad \text{luego que}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

tomando solo la componente p

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = \frac{-L\alpha^2 p}{L - L\alpha^2 p^2/2}$$

ahora desarrollando en serie y tomando solo términos lineales

$$(L - L\alpha^2 p^2/2)^{-1} \approx L + \frac{L\alpha^2 p^2}{2}$$

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = -L\alpha^2 p \left(L - \frac{L\alpha^2 p^2}{2} \right)$$

despreciando términos que contienen α^4 obtenemos

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = -L^2 \alpha^2 p$$

Una solución a esta ecuación diferencial es de la forma:

$$\left. \begin{aligned} p(z, \lambda) &= p_0 \cos L\alpha z + \frac{1}{L\alpha} p'_0 \operatorname{sen} L\alpha z \\ p'(z, \lambda) &= -L\alpha p_0 \operatorname{sen} L\alpha z + p'_0 \cos L\alpha z \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

donde $p_0 = p(z=0)$ y $p'_0 = p'(z=0)$

estas son las ecuaciones de la trayectoria que sigue un rayo meridional.

3.4 Propagación No Paraxial.-

Consideramos ahora la propagación de rayos meridionales en un medio con simetría cilíndrica circular en donde el índice de refracción se distribuye de acuerdo con (3.3).

En el plano $z = 0$ incide un rayo, a una distancia p_0 del eje. La función que describe la trayectoria que sigue este rayo, satisface la ecuación (3.5).

Puesto que estamos considerando solo rayos meridionales las dos ecuaciones componentes de (3.5) que nos interesan son

$$\frac{d}{ds} \left(N \frac{dp}{ds} \right) = \frac{dN}{dp} \quad (3.7)$$

y

$$\frac{d}{ds} \left(N \frac{dz}{ds} \right) = 0 \quad (3.8)$$

de (3.8) obtenemos

$$N \frac{dz}{ds} = \text{CONSTANTE} = C \quad \therefore \frac{dz}{ds} = \frac{C}{N}$$

haciendo uso de

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{ds}$$

substituyendo en (3.7) obtenemos

$$\frac{C^2}{N} \frac{d^2 p}{dz^2} = \frac{dN}{dp}$$

pero de (3.3)

$$\frac{dN}{dp} = -N_0 \alpha \operatorname{sech} \alpha p \tanh \alpha p$$

así que

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = -\frac{N_0 \alpha}{C^2} \operatorname{sech}^2 \alpha p \tanh \alpha p$$

ahora con ayuda de la siguiente substitución podemos resolver esta ecuación

$$\frac{dp}{dz} = u$$

así que

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = u \frac{du}{dp}$$

y por lo tanto

$$u du = -\frac{N_0^2 \alpha}{C^2} \operatorname{sech}^2 \alpha p \tanh \alpha p dp$$

integrando y haciendo uso de las condiciones iniciales

$p(z=0) = p_0$ y $p'(z=0) = 0$ (esta última condición no resta generalidad al análisis final que haremos)

obtenemos

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{N_0}{c} \sqrt{\operatorname{sech}^2 \alpha \rho - \operatorname{sech}^2 \alpha \rho_0}$$

de donde

$$z = \frac{c}{N_0} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\operatorname{sech}^2 \alpha \rho - \operatorname{sech}^2 \alpha \rho_0}}$$

después de evaluar esta integral, llegamos a

$$\rho(z) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{snh}^{-1}(\cos \alpha z \cdot \operatorname{snh} \alpha \rho_0) \quad (3.9)$$

esta es la ecuación de la trayectoria de un rayo que incide paralelamente al eje z con una distancia ρ_0 al mismo eje. Figura 3.3 .

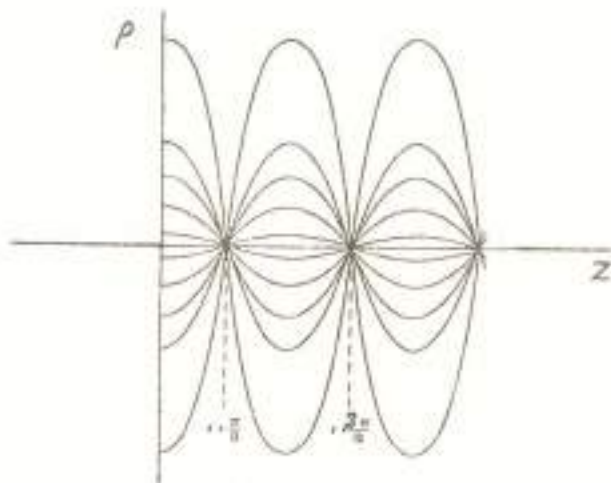


figura 3.3

En el párrafo 3.3 hemos derivado la ecuación de la trayectoria de un rayo paraxial en un medio donde la variación del índice de refracción es cuadrática. Las ecuaciones 3.6 son resultado conocido (36), nuestra contribución ha sido la introducción del parámetro L que pone de manifiesto la dependencia del período de los rayos con la longitud de onda asociada al rayo.

En el párrafo 3.4 hemos derivado la ecuación de la trayectoria en un medio con una fuerte variación de índice. Tampoco este es un resultado nuevo pues ya anteriormente la ecuación 3.9 había sido señalada (37)(24).

Como veremos en el siguiente capítulo, nuestra aportación consiste en introducir la dependencia con la longitud de onda del parámetro α y consecuentemente del período de los rayos.

CAPITULO 4

DISPERSION FRECUENCIAL DE PULSOS CORTOS.

4.1 Dispersión de Pulsos Cuasi-Monocromáticos.-

Al ser introducida energía luminosa en el núcleo de una fibra óptica con índice variable, aquella se propaga de acuerdo con la ecuación de rayos (3.2). Es decir, autoenfocándose un número de veces hasta emerger en la cara de salida donde se registrará la forma del pulso por medio de un detector.

Supongamos que se inyecta un pulso luminoso de longitud de onda λ , si denotamos por l la longitud de la fibra, el tiempo t_λ en que recorre la fibra es

$$t_\lambda = \frac{l}{c} N_0(\lambda)$$

donde N_0 es el índice máximo del núcleo de la fibra, valor que toma a lo largo de su eje.

Por simplicidad, supongamos por el momento que la propagación es en línea recta.

En primera aproximación $N_0(\lambda)$ está dado por la ecuación de dispersión de Cauchy (1.1) con los dos primeros términos

$$N_0(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Esta ecuación es válida lejos de una banda de absorción. substituyendo obtenemos:

$$t_\lambda = \frac{l}{c} \left(A + \frac{B}{\lambda^2} \right) \quad (4.1)$$

esto es, las mayores longitudes de onda recorren la fibra en menos tiempo.

Una vez que la distribución de energía dentro de un cierto rango de frecuencias es conocida, podemos asignar un tiempo de propagación a la energía luminosa de cada longitud de onda y el perfil del pulso de salida se obtiene integrando (sumando) sobre todas las longitudes de ondas.

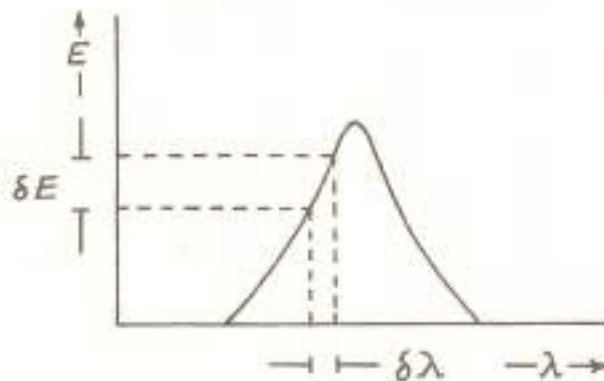


figura 4.1

La distribución de energía puede expresarse en términos de la función de energía radiante $E(\lambda)$ en Joules. Para determinar el pulso de salida, es necesario evaluar la distribución de energía

$$\delta E = E'(\lambda) \delta \lambda \quad , \quad E'(\lambda) = \frac{dE}{d\lambda}$$

contenida en el intervalo determinado por las longitudes de onda λ y $\lambda + \delta \lambda$. (Estamos suponiendo que $E(\lambda)$ es constante en el tiempo).

Ahora, la energía δE recorre la fibra en un tiempo entre $t(\lambda)$ y $t(\lambda + \delta \lambda) = t + \delta t$. Asignando el factor de trans-

misión $T(\lambda)$, el cual es uno cuando las pérdidas son cero, la potencia $P(\lambda)$ que llega al detector durante el intervalo de tiempo

$$t(\lambda + \delta\lambda) - t(\lambda)$$

es:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{E'(\lambda) T(\lambda) \delta\lambda}{t(\lambda + \delta\lambda) - t(\lambda)} \\ &= \frac{E'(\lambda) T(\lambda)}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)_\lambda} \end{aligned}$$

ahora de la ecuación (4.1) $\frac{dt}{d\lambda} = -\frac{2lB}{c} \frac{1}{\lambda^3}$ y consecuentemente

$$P(t) = -E'[\lambda(t)] T[\lambda(t)] \frac{\lambda^3(t) c}{2lB} \quad (4.2)$$

donde

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{Bl}{ct - Al}}$$

el resultado (4.2) es muy general pero podemos obtener información sobre situaciones comúnmente encontradas en que tiene alguna forma bien conocida como puede ser un perfil Gaussiano, Lorentziano, etc.

Podemos también proceder al revés, es decir, conociendo $P(t)$ el perfil del pulso de salida, obtener la distribución espectral de energía radiante:

$$E'(\lambda) = \frac{P(t)}{T[\lambda(t)]} \cdot \frac{2lB}{c} \cdot \frac{1}{\lambda^3(t)}$$

$$dE = \frac{P(\lambda)}{T(\lambda)} \cdot \frac{2lB}{c\lambda^3} d\lambda \quad \text{con } P(\lambda) = P[\lambda(t)]$$

Distribución Espectral Gaussiana.-

En este caso tenemos

$$E(\lambda) = E_0 \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{\sigma^2}\right]$$

Como se muestra en la figura 4.2

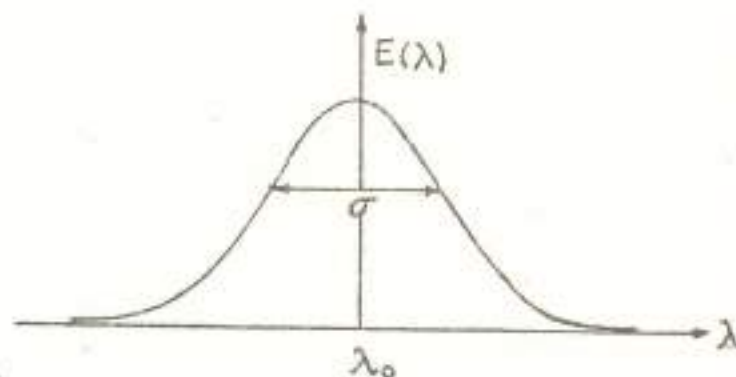


figura 4.2

y el pulso tiene un perfil descrito por

$$|P(t)| = \frac{c}{2lB} T(\lambda) \times E_0 \frac{\lambda^3(\lambda_0 - \lambda)}{\sigma^2} e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\sigma^2}}$$

que se muestra en la figura 4.3.

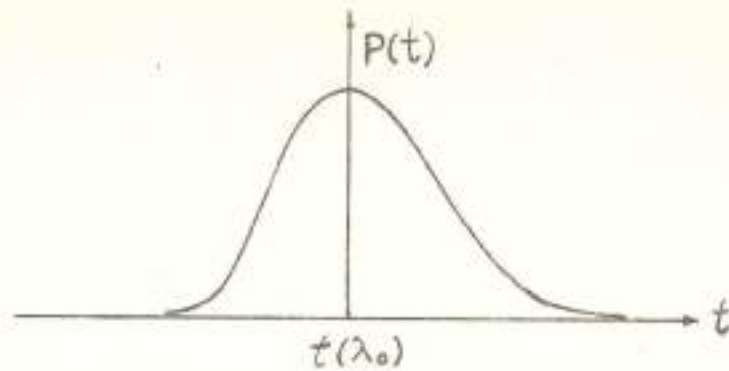


figura 4.3

4.2 Análisis en términos de grupo de ondas.-

Ahora consideramos un pulso en forma de un frente de onda plano que se propaga a partir de $t=0$ en una fibra de índice variable como en el párrafo 4.1. El pulso tiene un contenido espectral del ancho $\Delta\lambda$ descrito por $E(\lambda)$.

El tiempo de grupo es el tiempo que tardan las distintas frecuencias en recorrer una distancia l y está dado por:

$$\tau = \frac{l}{v_g} \quad (4.8)$$

donde v_g es la velocidad de grupo dada por (1.6)

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_f} - \frac{\lambda}{c} \frac{dN}{d\lambda}$$

substituyendo en (4.8)

$$\tau = \frac{l}{c} \left(N - \lambda \frac{dN}{d\lambda} \right)$$

En primera aproximación la relación de Cauchy puede ser usada y obtener así:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{l}{c} \left[A + \frac{B}{\lambda^2} - \lambda \left(-\frac{2B}{\lambda^3} \right) \right] \\ &= \frac{l}{c} \left[A + \frac{3B}{\lambda^2} \right]\end{aligned}$$

$$\tau(\lambda) = \frac{l}{c} \left[A + \frac{3B}{\lambda^2} \right] \quad (4.9)$$

Nuevamente, consideramos una distribución espectral de energía $E(\lambda)$ y una función de transmisión $T(\lambda)$ y entonces la potencia de salida $P(t)$ estará dada por:

$$\begin{aligned}P(\tau) &= \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{E(\lambda) T(\lambda) \delta\lambda}{\tau(\lambda + \delta\lambda) - \tau(\lambda)} \\ &= \frac{1}{\frac{d\tau}{d\lambda}} E(\lambda) T(\lambda)\end{aligned}$$

pero de (4.9)

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = -\frac{6lB}{c\lambda^3}$$

así que:

$$|P(\tau)| = \frac{\lambda^3 c}{6lB} E[\lambda(t)] T[\lambda(\tau)]$$

donde

$$\lambda^2(\tau) = 3B \left(\frac{l}{c\tau - Al} \right)$$

4.3 Separación Espacial.-

La trayectoria de un rayo meridional que incide paralelamente al eje z , y con una altura p_0 esta dada por la ecuación (3.9):

$$p(z) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{senh}^{-1}(\cos \alpha z \cdot \operatorname{senh} \alpha p_0). \quad (3.9)$$

donde α entra en la relación

$$N(p) = N_0 \operatorname{sech} \alpha p$$

Ahora, si tomamos en cuenta el fenómeno de dispersión (dispersión frecuencial o material) producido por la fibra, es decir N es una función de dos variables, p y λ .

$$N = N(p, \lambda)$$

$$N = N_0(\lambda) \operatorname{sech} \alpha(\lambda) p$$

donde hemos dado margen para que la diferencia relativa de índice α dependa también de la longitud de onda λ , consecuentemente, el período de los rayos que es $2\pi/\alpha$, también será función de la longitud de onda (figura 4.4).

Ahora derivamos (3.9) con respecto a z y obtenemos:

$$\frac{dp}{dz} = - \frac{\operatorname{sen} \alpha z \operatorname{senh} \alpha p_0}{(1 + \operatorname{senh}^2 \alpha p_0 \cos^2 \alpha z)^{1/2}}$$

esto es la tangente del ángulo que forma el rayo con el eje z en función de z .

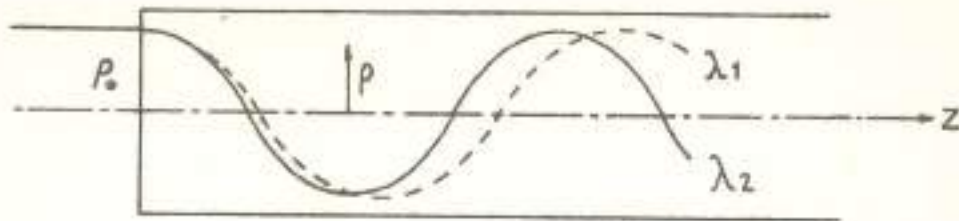


figura 4.4

Efecto de Dispersión en una Fibra Cilíndrica con variación de índice casi-cuadrática.

Ahora calcularemos la variación de este ángulo con respecto a λ , específicamente.

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\rho}{dz} \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right) \left(\frac{d\rho}{dz} \right)$$

llamando p a $\frac{d\rho}{dz}$:

$$\frac{dp}{d\lambda} = \frac{dp}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\lambda}$$

primeramente calculamos $dp/d\alpha$
por brevedad hacemos

$$\mu = \sinh \alpha \rho \cdot \sin \alpha z$$

$$\xi = [1 + \sinh^2 \alpha \rho \sin^2 \alpha z]^{1/2}$$

así que

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{\mu \frac{d\xi}{d\alpha} - \xi \frac{d\mu}{d\alpha}}{\xi^2} \quad (4.10)$$

donde:

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{P_0 \operatorname{senh} \alpha P_0 \operatorname{cosh} \alpha P_0 \cos^2 \alpha z - z \operatorname{senh}^2 \alpha P_0 \cos \alpha z \operatorname{sen} \alpha z}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 \alpha P_0 \cos^2 \alpha z}}$$

y

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = z \operatorname{senh} \alpha P_0 \cos \alpha z + P_0 \operatorname{sen}^2 \alpha z \cos \alpha P_0$$

ahora para calcular $d\alpha/d\lambda$, procedemos de la siguiente manera:

Para P constante digamos P_0 .

$$N(P_0, \lambda) = N_0(\lambda) \operatorname{sech} \alpha(\lambda) P_0$$

de aquí despejamos α .

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{P_0} \operatorname{sech}^{-1} \frac{N(\lambda)}{N_0(\lambda)}$$

así que:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{P_0} \frac{(-1)}{N N_0 \sqrt{1 - \frac{N^2}{N_0^2}}} \left(N_0 \frac{dN}{d\lambda} - N \frac{dN_0}{d\lambda} \right)$$

tomando en cuenta (4.10) tenemos:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{\mu \frac{d\xi}{d\alpha} - \xi \frac{d\mu}{d\alpha}}{\xi^2} \frac{1}{P_0} \frac{(-1)}{N N_0 \sqrt{1 - \frac{N^2}{N_0^2}}} \left(N_0 \frac{dN}{d\lambda} - N \frac{dN_0}{d\lambda} \right) \quad (4.11)$$

4.4 Estimación numérica.

A continuación hacemos una estimación del valor de $\frac{dp}{d\lambda}$ con algunos valores de ρ_0 , z , N , N_0 , y α , considerados relativamente accesibles:

$$\rho_0 = 0.05 \text{ mm}$$

$$z = 1 \text{ km}$$

$$N = 1.460$$

$$N_0 = 1.600$$

$$\alpha = 8.9 \text{ mm}^{-1}$$

$$(dN/d\lambda)_p = -0.35 \times 10^{-5} \text{ \AA}^{-1} \text{ (Cuarzo vítreo).}$$

$$(dN_0/d\lambda)_p = -0.50 \times 10^{-5} \text{ \AA}^{-1} \text{ (Flint de Bario).}$$

Substituyendo estos valores en (4.11) llegamos a que:

$$\frac{dp}{d\lambda} = 8.1 \text{ radianes/\AAngstrom}$$

4.5 Dispersión angular.

Hemos obtenido un valor para $\frac{dp}{d\lambda}$ cuyo orden de magnitud es de aproximadamente ocho radianes por Angstrom.

Ahora, como $p = \tan \theta$, siendo θ la inclinación del rayo con respecto al eje z , tenemos que:

$$\frac{dp}{d\lambda} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{d\lambda}$$

y por lo tanto

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 8.1 \cos^2 \theta \text{ radianes / Angstrom}$$

La dispersión angular alcanza un valor máximo cuando la pendiente del rayo en la cara de salida es cero.

Para una longitud de la fibra fija, esta pendiente se puede ajustar cambiando la pendiente del rayo incidente en la cara de entrada, en $z = 0$. En otras palabras, ajustando el radio de curvatura del frente de onda inicial.

4.6 Aplicaciones a espectroscopía.

Una fibra como la estudiada anteriormente puede encontrar aplicaciones en el campo del análisis espectral en base a que es posible separar espacialmente dos señales luminosas de longitud de onda muy cercanas entre sí, siempre que, en conformidad con la expresión (4.11) el poder dispersor de la fibra, así como su longitud, sean suficientemente grandes y en este caso podamos obtener a la salida de la fibra dos haces de rayos, uno por cada señal con distintas convergencias y mediante una lente (por ejemplo) separar ambas señales. figura 4.5.

Para fines de análisis espectral, es recomendable que dos rayos con λ_1 y λ_2 que viajan en un medio como el estudiado anteriormente, tengan una separación angular que sea lo mayor posible y esto evidentemente se logra cuando uno de los rayos emerja con la mayor pendiente positiva y el otro con la mayor pendiente negativa. Más precisamente: en virtud de la dependencia del período con la longitud de onda, las trayectorias se irán desfasando progresivamente con la longitud z de la fibra (para una determinada distribución de índice de refracción) y cuando esta longitud sea tal que el desfaseamiento al cabo del recorrido total, produzca una máxima separación angular de los rayos, entonces se cumplirá que:

$$\alpha_1 z = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (4.13)$$

$$\alpha_2 z = \left(n + \frac{3}{2} \right) \pi \quad (4.14)$$

lo anterior se ilustra en la figura 4.6.

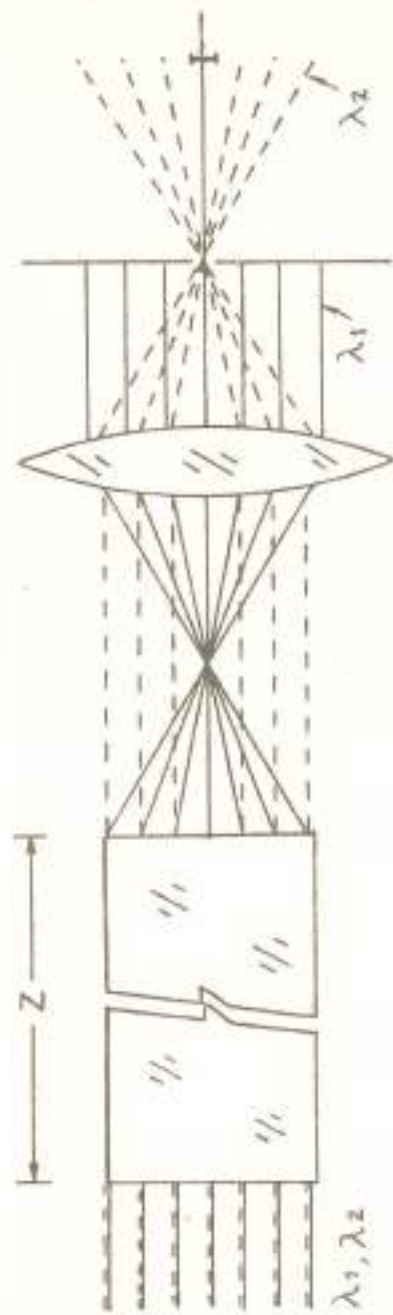


FIGURA 4.5

siendo

$$\alpha_{1,2} = \alpha(\lambda_{1,2})$$

Esto equivale a afirmar que las trayectorias están desfasadas por un semiperíodo (estamos asumiendo que λ_1 y λ_2 están muy próximas entre sí, de tal manera que sus períodos difieran en una pequeña fracción). Restando miembro a miembro (4.14) de (4.13) obtenemos:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\pi}{\alpha(\lambda_2) - \alpha(\lambda_1)} \\ &= \frac{\pi P_0}{\operatorname{sech}^{-1} \frac{N(\lambda_2)}{N_0(\lambda_2)} - \operatorname{sech}^{-1} \frac{N(\lambda_1)}{N_0(\lambda_1)}} \end{aligned}$$

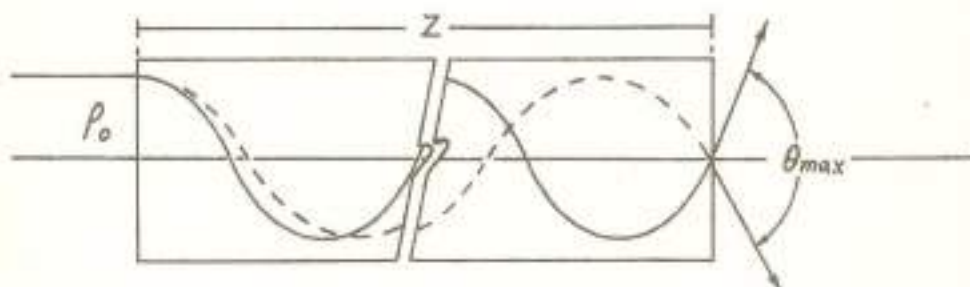


figura 4.6

La máxima separación angular que pueden llegar a tener dos rayos correspondientes a dos componentes espectrales es θ_{max} tal que:

$$\frac{1}{2} \theta_{max} = \tan^{-1} (\sinh \alpha \rho_0)$$

o sea

$$0 \leq \frac{1}{2} \theta_{max} \leq \tan^{-1} (\sinh \alpha \rho_0)$$

este ángulo $\frac{1}{2} \theta_{max}$ es el máximo valor de la función:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\sinh \alpha \rho_0 \sin \alpha z}{\sqrt{1 + \sinh^2 \alpha \rho_0 \cos^2 \alpha z}}$$

obtenida en el párrafo 4.3.

4.7 Separación de los modos longitudinales de un láser de He-Ne.

De acuerdo con el resultado anteriormente obtenido, es posible al menos teóricamente, resolver los modos longitudinales de oscilación de un láser de He-Ne estándar con una fibra de un kilómetro de longitud. Como en el párrafo 4.6, asumimos una diferencia de longitud de onda $\delta\lambda = 0.006 \text{ \AA}$ y substituyendo en (4.12) y presuponiendo $\cos \theta = 1$, tenemos:

$$\delta\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \delta\lambda = 8.1 \times 6 \times 10^{-3} = 48.6 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

que es mayor que el ángulo de divergencia del haz Gaussiano el cual típicamente tiene un valor de:

$$0.5 \times 10^{-3} \text{ radianes.}$$

y por lo tanto es posible separarlos.

CONCLUSION

Del análisis anteriormente expuesto podemos concluir que las fibras ópticas con gradiente de índice de refracción, pueden ser consideradas como una herramienta útil en el análisis espectral, tanto en el dominio temporal como en el espacial.

En el dominio temporal hemos demostrado, con base en el modelo geométrico, que es posible obtener información sobre el contenido espectral de pulsos de luz ultracortos conociendo el perfil del pulso de salida, lo cual podemos considerar prácticamente realizable aún para pulsos cuya duración es de unos cuantos picosegundos.

En el dominio espacial, hemos mostrado como una fibra con un gradiente de índice de refracción relativamente grande es capaz de producir una dispersión angular del orden de magnitud de algunos radianes por Angstrom que es suficiente para resolver los modos longitudinales de oscilación de un láser de Helio-Neón estándar.

Este método es aplicable a señales luminosas pulsadas o continuas.

Este método es aplicable a señales luminosas pulsadas o continuas ya que no se ha hecho suposición alguna sobre la forma en que se propagan las señales, en particular, estimamos que resulta, al menos teóricamente, útil para el análisis espectral de pulsos de luz láser cuya duración es del orden de picosegundos.

A P E N D I C E

Criterio de Resolución Espectroscópica para Haces Gaussianos.

A-1 El criterio de Rayleigh ha sido usado extensivamente para definir el poder de resolución de instrumentos ópticos como telescopios, microscopios y espectroscopios. Esto se debe en parte a la simplicidad y precisión con que arbitrariamente se establece el criterio, a saber: la distancia límite de resolución es tal que el máximo de intensidad de la función de respuesta coincide con el primer mínimo de otra función muy próxima. Esto es presuponiendo que la respuesta instrumental es de la forma $\text{sinc}^2 x$.

Como vimos en la sección 2.6 para aberturas circulares este criterio establece una separación angular de

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

y para aberturas cuadradas

$$\theta = \frac{\lambda}{D}$$

donde D es en el primer caso el diámetro y en el segundo la longitud del lado.

A-2 En vista del creciente uso de haces Gaussianos en el laboratorio de óptica creemos pertinente definir un criterio de resolución de haces Gaussianos en terminos del ancho mínimo del haz W_0 como sigue: la separación límite de resolución entre dos haces Gaussianos caracterizados por dos longitudes de onda que difieren ligeramente, es tal que la separación entre

los máximos de intensidad es igual a b con $b = W_0/\sqrt{2}$, con W_0 la cintura del haz Gaussiano.

Esto es equivalente a decir que el máximo de un haz coincide con el punto de intensidad $\frac{1}{e} I_0$ del otro haz.

BIBLIOGRAFIA

- (1) A.A. Sokolov, Y.M. Loskutov, I.M. Ternov. "Quantum Mechanics" Holt Reinhart & Winston N. York (1965) P. 253.
- (2) M. Born y E. Wolf. "Principles of Optics", Pergamon, Oxford (1975). p.323-335.
- (3) W.H. Steel, "Interferometry", Cambridge University Press, Cambridge (1967)
- (4) C. Roychoudhuri, "Multipass Fabry-Perot Interferometer for Brillouin Scattering Measurements", Ph.D. thesis, (University of Rochester, N.York, 1973).
- (5) C. Roychoudhuri, "Response of Fabry-Perot Interferometers to light pulses of very short duration", J. Opt. Soc. Am. 65, 1418 (1975).
- (6) F.E. Jenkins y H.A. White, "Fundamentals of Optics" McGraw-Hill, Tokio 3a. Edic.
- (7) B. Luther-Davis et. al. "Evaluation of material dispersion in low loss Phosphosilicate Core optical fibers", Opt. Commun. 13, 84 (1975).
- (8) L.G. Cohen et. al., "Pulse dispersion in multimode fibers with graded $B_2O_3-SiO_2$ cores and uniform B_2O_3-SiO cladding", Apl. Phys. letters 28, 391 (1976).
- (9) W.A. Gambling et.al., "Dispersion in low-loss liquid core optical fibres", Electron. letters 8, 568 (1972).
- (10) S.J. Buchsbaum, "Lightwave Communications" Phys. Today, 29, 23 (1976).
- (11) R.R. Alfano y S.L. Shapiro, Sci. Amer. junio de 1973.

- (12) D.W. Gwdwin, "Advances in Quantum Electronics" Vol.2 Academic Press, Londres (1974) p.160.
- (13) M.H. Reeve, et.al. "Studies of radiative losses from multimode optical fibres", Optical and Quantum Electronics, 8, 39 (1976).
- (14) K. Hockman, Proc. IEE (Londres) 113, 1151 (1966).
- (15) F.P. Kapron et. al. "Radiation losses in glass optical waveguides", Appl. Phys. letters 17, 423 (1970).
- (16) W.G. French et. al. "Graded index waveguides with Borosilicate composition". Appl. Opt. 15, 1803 (1976).
- (17) J.P. Dakin et. al. "Theory of dispersion in lossless multimodes optical fibres", Opt. Commun. 7, 1 (1973).
- (18) L.E. Chinnock, "Pulse spreading dependence of length in C.G.W.-Bell-10 fiber". Proc. IEEE, 61, 1499 (1973).
- (19) R. Olshansky "Pulse broadening caused by deviation from the optimal index profile", Appl. Opt. 15, 799 (1976).
- (20) L.G. Cohen et. al. "Transmission properties of a low loss near-parabolic index fiber", Appl. Phys. letters 26, 472 (1975).
- (21) F.P. Kapron "Geometrical Optics of parabolic index gradient cylindrical lenses", J. Opt. Soc. Am. 60, 1433 (1970).
- (22) A.M. Scheggi et. al. "Dispersion characteristics in quasi-step and graded-index slab waveguides by ray tracing technique", J. Opt. Soc. Am. 65, 1022 (1975).
- (23) P.F. Checcacci et. al. "Ray-tracing technique for evaluating the dispersion characteristics of graded index cylindrical fibers", Electron. letters 11, 633 (1975).
- (24) Según refieren: E.G. Rawson et. al. en "Analysis of

- refractive index distributions in cylindrical graded-index glass rods used as image relays", Appl. Opt. 9, 753 (1970).
- (25) Fletcher A. et.al. "Solutions to two optical problems" Proc. Roy. Soc. (London), 223, 216 (1954).
- (26) D. Marcuse "Theory of thermal gradient gas lens" IEEE Trans. Micr. Theo. and Techniques MTP-13, 734 (1965).
- (27) S.E. Miller, Bell Syst. Tech. J. 44, 2013 (1965).
- (28) D. Marcuse "Comparison between a gas lens and its equivalent thin lens", Bell Syst. Tech. J. 45, 1339 (1966).
- (29) W.H. Steier "Measurement on a thermal gradient gas lens", IEEE Trans. Micr. Theo. and Techniques MTP-13 740 (1965).
- (30) E.A.J. Marcatilli, Bell Syst. Tech. J. 46, 149 (1967).
- (31) F.J. Sands "Inhomogeneous lenses chromatic aberrations", J. Opt. Soc. Am. 61, 777 (1971).
- (32) R.W. Wood "Physical Optics", McMillan, N. York 1905.
- (33) F.J. Sands "Inhomogeneous lenses" J. Opt. Soc. Am. 61, 886, 879, 1086, 1495 (1971).
- (34) C. Roychoudhuri "Causality and classical interference and diffraction pattern", J. Opt. Soc. Am. 65, 1224A (1975).
- (35) C. Roychoudhuri "High resolution spectrometers and picosecond pulse spectroscopy", J. Opt. Soc. Am. 66, 1073A (1976).
- (36) A. Yariv "Introduction to optical electronics", Holt Reinhart & Winston, N. York. 1a.edic. p. 25.
- (37) W.H. Southwell "Plane-wave optical paths in gradient index media", J. Opt. Soc. Am. 61, 1715 (1971).

BIBLIOGRAFIA SUPLEMENTARIA

La siguiente Bibliografía No es citada en el texto pero se pretende que pueda ser de utilidad al lector interesado en el tema.

A.- Fibras Ópticas.

- 1.- D. Anderson "Pulse propagation in dispersive and slightly absorbing media", *Proced. IEEE*, 63, 715 (1975).
- 2.- C. Burrus "Pulse dispersion and refractive index profiles of low noise multimode fibers", *Proced. IEEE*, 61, 1498 (1973).
- 3.- A.C. Beck "An experimental gas lens optical transmission line", *IEEE Trans. Micr. theo. and techniques* MTT-15, 433 (1967).
- 4.- G. Eichmann "Quasi-Geometric optics of media with Inhomogeneous index of refraction", *J. Opt. Soc. Am.* 61, 161 (1971).
- 5.- L.G. Cohen "Pulse transmission measurements for determining near optimal profile gradings in multimode borosilicate optical fibers", *Appl. Opt.* 15, 1808 (1976).
- 6.- D. Gloge y E.A.J. Marcatilli "Multimode theory of graded core fibers", *Bell Syst. Tech. J.* 52, 1563 (1973).
- 7.- D. Gloge et. al. "Study of pulse distortion in self-foc fibers", *Electron. letters* 8, 856 (1972).
- 8.- D. Gloge "Dispersion in weakly guiding fibers" *Appl.*

- Opt. 10, 2448 (1971).
- 9.- D. Gloge et. al. "Dispersion in low-loss multimode fibre measured at three wavelengths", Electron. letters, 8, 527 (1972).
 - 10.- M. Ikeda y H. Yoshikiyo "Pulse separating in transmission characteristics of multimode graded index optical fibres", Appl. Opt. 15, 1307 (1976).
 - 11.- S. Kawakami y J. Nishizawa "An optical waveguide with the optimum distribution of the refractive index with reference to waveform distortion", IEEE Trans. Micr. Theo. and Techniques MTT-16, 814 (1968).
 - 12.- S. E. Miller "Delay distortion in generalized lens like media", Bell Syst. Tech. J. 53, 177 (1974).
 - 13.- D. Marcuse "The impulse response of an optical fiber with parabolic index profile", Bell Syst. Tech. J. 52, 1169 (1973).
 - 14.- D. Marcuse "Losses and impulse response of a parabolic index fiber with random bends", Bell Syst. Tech. J. 52, 1423 (1973).
 - 15.- E.W. Marchand "Ray tracing in cylindrical gradient media", Appl. Opt. 11, 1104 (1972).
 - 16.- E.W. Marchand "Ray tracing in gradient index media" J. Opt. Soc. Am. 60, 1 (1970).
 - 17.- R. Olshansky y D.B. Keck "Pulse broadening in graded index optical fibres", Appl. Opt. 15, 483 (1976).
 - 18.- O. Takeshi y A. Watanabe "Measurement of wavelength dependence of group delay in multimode silica fiber", Appl. Phys. letters 28, 382 (1975).
 - 19.- K.B. Paxton y W. Streiffer "Analytic solution of ray equation in cylindrically inhomogeneous guiding media: Skew rays", Appl. Opt. 10, 1164 (1971).

- 20.- K. Uchida et. al. "A light focusing fibre guide"
IEEE J. Quant. Electron. QE-5, 331 (1969).

B.- Pulsos Ultracortos.

- 1.- N. Blömborgen "Picosecond laser pulses", Comments on solid state physics 1, 37 (1968).
- 2.- Dahlström L. "A new method for compression of light pulses in a Q-Switched high power laser", Opt. Commun. 4, 289 (1971).
- 3.- A.J. De María "Picosecond light pulses", Proceed IEEE 57, 2 (1969).
- 4.- A.E. Siegman y D.J. Kuizenga "Simple analytic expression for AM and FM mode locked pulses in homogeneous lasers", Appl. Phys. letters 14, 181 (1969).
- 5.- Orazio Svelto "On the subpicosecond structure and frequency sweep of mode locked lasers", Opt. Commun. 3, 105 (1971).
- 6.- D.A. Stetser y A.J. De María "Optical spectra of ultrashort optical pulses generated by mode locked glass-Nd lasers", Appl. Phys. letters 9, 118 (1966).
- 7.- Von der Linde et. al. "Experimental investigation of single picosecond pulses", Opt. Commun. 2, 149 (1970).

C.- Libros.

- 1.- D. Marcuse "Light transmission optics"
Van Nostrand Reinhold, N. York (1967).
- 2.- N.S. Kapany "Fiber optics"
Academic Press, N. York (1967).
- 3.- M.P. Lisitsa, L.I. Berezhinskii, M. Ya. Valakh.
"Fiber optics" Israel Program for scientific translations, N. York (1972). (traducción del Ruso).

- 4.- W.B. Allan "fibre Optics, theory and practice".
Plenum Press, Londres (1973).

AGRADECIMIENTOS

Deseo manifestar mi reconocimiento a la gran labor que realizan las autoridades del INAOE en beneficio del desarrollo de la Ciencia en nuestro País. Al Dr. Guillermo Haro y al Dr. Daniel Malacara.

Quisiera expresar mi agradecimiento sincero, especialmente al Dr. Chandrasekhar Roychoudhuri bajo cuya supervisión ha sido realizado este trabajo, sus valiosas sugerencias y consejos.

Al Dr. Robert H. Noble con cuya valiosa asesoría conté durante mis estudios en el INAOE y quien amablemente revisó el manuscrito.

Al Dr. Marco A. Machado Gama por sus estimulantes conversaciones y por su revisión del manuscrito.

A la Srta. Martha Olmos F. por su gentil ayuda en la búsqueda de las Referencias de esta Tesis.

Y finalmente a mi esposa Ana Leticia por su inapreciable ayuda en la preparación del manuscrito.

A todos mis compañeros del INAOE por los agradables ratos que pasamos juntos.

M.A.C.M.