"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

La resolución de problemas matemáticos: las estrategias de los profesores de bachillerato

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Arcelia Cecilia Moreno Verdugo

Director de Tesis: Dr. José Luis Soto Munguía

Hermosillo, Sonora, México. Febrero de 2016

SINODALES

Dr. José Guzmán Hernández
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Dr. José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora

M.C. Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
Universidad de Sonora

Agradecimientos

Quiero agradecer:

A mi familia por su apoyo y por creer en mí.

A mi director de tesis, el Dr. José Luis Soto Munguía, por confiar en mí y en este trabajo. Por su dedicación y su tiempo. Por compartir su sabiduría conmigo, por enseñarme tanto de la escuela y de la vida; porque durante esta etapa crecí tanto profesional como personalmente. Y por muchas cosas más.

A la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos, por estar siempre ahí. Por confiar en mí y pensar siempre en lo mejor para mí en todos los sentidos.

A la M.C. Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez y al Dr. José Guzmán Hernández por sus valiosas observaciones y sugerencias hacia este trabajo.

A Neli y a Irma, por su cariño, su apoyo y su amistad.

A mis profesores, en especial al Dr. Agustín Grijalva Monteverde y a la M.C. Maricela Armenta Castro, por su apoyo, por creer en mí y en este trabajo; y por ser con quienes tuve el placer de convivir un poco más dentro y fuera del salón de clases.

A mis amigos y compañeros.

¡Muchas gracias por todo!

Arcelia Cecilia Moreno Verdugo

Hermosillo, Sonora

Febrero de 2016

Índice

Introducción

En este trabajo se presenta un estudio centrado en identificar y analizar las estrategias y las habilidades referidas al control que utilizan profesores del bachillerato al momento de resolver problemas de geometría. El documento que se está presentando consta de cuatro capítulos y de las conclusiones generales derivadas de este estudio.

En el Capítulo 1, se presenta el planteamiento de la problemática en cuestión. Principalmente se considera el resultado de la revisión de las investigaciones realizadas alrededor de la resolución de problemas, así como la justificación que permita ubicar la problemática en cuestión.

En el Capítulo 2 se exhibe una recopilación de elementos teóricos del trabajo de Alan Schoenfeld, con los cuales se puede analizar y describir lo que sucede en el proceso de resolución de problemas, así como lo que influye tanto en el éxito como en el fracaso de dicho proceso.

El Capítulo 3 está dividido en cuatro apartados. En el primero se presenta la caracterización del tipo de estudio que se realizó, siendo éste de carácter cualitativo. En el segundo aparecen las características de los dos profesores con los que se decidió trabajar. En el tercero se describe el instrumento que se utilizó para recopilar la información, las características del problema seleccionado, y la manera en que se realizó el registro de la información obtenida. En el cuatro y último apartado, se muestra un análisis a priori del problema seleccionado.

El Capítulo 4 está conformado por el análisis de los resultados, el cual se realizó considerando los elementos teóricos que se presentan en el Capítulo 2. Se incorporan algunos episodios del proceso de resolución de los profesores, y se exhiben las conclusiones parciales correspondientes al proceso de resolución de problemas de cada profesor.

Por último, se presentan las conclusiones generales de este trabajo, de acuerdo con el objetivo y las preguntas de investigación. Además, se exponen algunas posibles investigaciones derivadas de este estudio.

Capítulo 1

Planteamiento del problema de investigación

1.1. Introducción

La resolución de problemas es la esencia de las matemáticas, y lo ha sido a lo largo de su desarrollo, pues desde tiempos remotos los problemas han sido el motor para la generación y el refinamiento de los conceptos matemáticos. La formación de estudiantes que puedan resolver problemas de su vida cotidiana, ha sido siempre uno de los objetivos generales de la educación para la vida. Sin embargo, la importancia conferida a la resolución de problemas matemáticos en el salón de clases no se corresponde ni con el papel que los problemas matemáticos han jugado en el desarrollo histórico de las matemáticas, ni con el objetivo educativo general antes mencionado.

En el salón de clases, generalmente, el profesor[1] resuelve algún problema, con una determinada fórmula o herramienta matemática, para que después el alumno resuelva alguna variante de éste; lo cual resulta como un problema rutinario, cuya repetición mecánica conduce al estudiante a resolver problemas. El supuesto de esta manera tradicional de enseñar matemáticas, es que los alumnos[2] pueden resolver una gran diversidad de problemas, debido a que han resuelto demasiados ejercicios; pero ésta es una idea que ha resultado errónea. Los problemas rutinarios planteados por el maestro mejoran la utilización de técnicas matemáticas, pero cuando es necesario llevarlas a la práctica, los estudiantes no saben cómo ni cuándo emplearlas. Los resultados obtenidos por nuestros estudiantes en el examen PISA, son ilustrativos a este respecto.

[1]Profesor, maestro y docente se utilizan como sinónimos.
[2]Alumno y estudiante significan lo mismo.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Investigaciones en la resolución de problemas

La resolución de problemas es la esencia de las matemáticas. En este sentido, Halmos (1980, p. 519) decía que "la principal razón de la existencia de los matemáticos es resolver problemas, y que, por lo tanto, las matemáticas consisten *realmente* de problemas y soluciones". Sin embargo, pensar en "resolver problemas" resulta relativo. Debido a los antecedentes que tienen las personas en la resolución de problemas, cuando tienen un problema matemático por resolver inmediatamente se piensa en hallar su solución, sin importar cómo la encontremos. Por ejemplo, los matemáticos comúnmente utilizan o trabajan con "Teoremas", los cuales pueden llegar a ser considerados como el centro de su trabajo, dejando de lado los problemas.

> "Problemas", como los profesionales a veces usan la palabra, ejercicios intrascendentes que se asignan a los estudiantes que más adelante aprenderán a demostrar teoremas. Estas connotaciones emocionales son, sin embargo, no siempre las correctas [. . .] Moraleja: los teoremas pueden ser triviales y los problemas pueden ser extraordinarios. Aquellos que creen que el corazón de las matemáticas consiste de problemas, no necesariamente están equivocados. (Halmos, 1980, p. 519)

Lo mencionado por Halmos en la cita anterior, respecto al significado que se la da a la palabra "problema", se puede ilustrar con el contraste que hace Polya (1945) entre un *problema* y un *problema de rutina*. Un problema va más allá de la matemática misma, es una situación para la que no se encuentra una solución directa, lo cual provoca la estimulación del pensamiento. Por el contrario, un ejercicio o un *problema de rutina* es un problema que "se puede resolver sustituyendo datos específicos en un problema ya resuelto, o bien siguiendo paso a paso, sin ninguna originalidad, algún ejemplo muy conocido" (Polya, 1945, p. 171). El trabajo de Polya (1945), *How To Solve It*, abrió paso a los trabajos de investigación y utilización de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos a expertos y educadores matemáticos.

Entre los investigadores que siguieron la línea de estudio de Polya, se encuentra Kantowski

(1977), quien se apoyó en el trabajo de Polya (1945, 1981) para tratar de responder las dos preguntas siguientes:

- ¿Qué procesos se pueden observar cuando los estudiantes de primer año de preparatoria resuelven problemas no rutinarios de geometría?
- ¿Cómo influyen dichos procesos en el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes?

La investigación que hizo Kantowski, consiste en un estudio exploratorio con ocho estudiantes del curso de álgebra. El estudio estaba compuesto por 4 fases, en las que se les pedía a los estudiantes pensar en voz alta. A continuación se presenta una síntesis de las 4 fases:

1. En la primer fase se les aplicó un pre-test a los estudiantes, para el cual se les pidió que resolvieran ocho problemas en voz alta.

2. Después del pre-test, siguió la segunda fase, la cual fue de entrenamiento durante cuatro semanas. El propósito de esta fase era que los estudiantes se familiarizaran con la instrucción heurística, así como exhibirles a los estudiantes el uso de las heurísticas en la resolución de problemas. Una vez terminado el entrenamiento de los alumnos, se les aplicó un segundo examen.

3. La tercera fase tuvo una duración de 4 meses, y estaba centrada en enseñar a los estudiantes geometría por medio de técnicas de instrucción heurística. El contenido fue divido en tres unidades que consistieron cada una de: seis episodios de instrucción, un examen de manera individual a la mitad de la unidad, otros seis episodios de instrucción, y un examen de manera individual al finalizar la unidad.

4. En la última fase se aplicó un post-test de geometría y de problemas verbales, así como de un examen de conocimientos previos necesarios para resolver los problemas del post-test.

Lester (1994), menciona que durante los últimos 25 años, quizá los investigadores han comprendido cómo resuelven problemas los estudiantes y cómo se puede enseñar la resolución de problemas. Sin embargo, en las escuelas aún existe una problemática relacionada con la resolución de problemas. Lester, hace una recopilación de las investigaciones que se han hecho alrededor del tema. Asimismo, discute acerca de la disminución de interés que muestran los investigadores respecto a la resolución de problemas; y, sugiere algunos temas y preguntas que pudieran ser el foco de la investigación.

Tabla 1.1:
Una visión general de los modelos y metodologías de investigación de la resolución de problemas: 1970-1994. (Tomada de Lester (1994, p. 664))

Fechas	**Modelos de investigación para resolver problemas**	**Metodologías de investigación utilizadas**
1970 - 1982	Aislamiento de los principales factores determinantes de la dificultad del problema; identificación de las características de quienes resuelven problemas exitosamente; entrenamiento heurístico.	Análisis de regresión estadística; primeros "experimentos docentes".
1978 - 1985	Comparación entre quienes resuelven problemas de manera exitosa y no exitosa (expertos contra novatos): entrenamiento estratégico.	Estudios de casos; "pensar en voz alta" el análisis del protocolo.
1982 - 1990	Metacognición; relación de afectos/creencias para resolver problemas: entrenamiento metacognitivo.	Estudios de casos; "pensar en voz alta" el análisis del protocolo.
1990 - 1994	Influencias sociales; resolución de problemas en contexto (resolución de problemas situados).	Métodos etnográficos.

En la Tabla 1.1, aparecen distintos modelos y metodologías de investigación de la resolución de problemas. En dicha tabla se puede observar que alrededor de los años 70 y 80, las investigaciones sobre la resolución de problemas se centraban solamente en los problemas y en los estudiantes. Además, el foco de investigación eran las heurísticas, sin considerar procesos cognitivos que influyen en la resolución de problemas, los cuales comenzaron a ser tema de interés a mediados de los años 80. De acuerdo con las investigaciones previas, y considerando la Tabla 1.1, Lester (1994, p. 663) clasifica las cuatro principales áreas de investigación, las cuales son:

a) Factores determinantes de la dificultad del problema.

b) Diferencias entre individuos buenos y malos en la resolución de problemas.

c) Atención a la enseñanza de la resolución de problemas.

d) El estudio de la metacognición en la resolución de problemas.

Considerando las áreas en las que se había centrado la investigación en la resolución de problemas, Lester concluye que el centro de las investigaciones futuras debe ser la enseñanza a través de la resolución de problemas.

Charles y Lester (1984) diseñaron un programa de instrucción para mejorar el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas, conocido como Resolución de Problemas Matemáticos (MPS, por sus siglas en Inglés). Este programa fue puesto a prueba utilizando grupos de control y grupos experimentales, tuvo una duración de 23 semanas. Para los grupos de control, se contó con la participación de 12 profesores de quinto grado y diez de séptimo grado; para los grupos experimentales, colaboraron once maestros de quinto grado y 13 de séptimo grado. En los grupos experimentales del programa MPS se obtuvieron mejores resultados que en los grupos de control, ya que los estudiantes fueron capaces de comprender los problemas, proponer estrategias de solución y obtener resultados correctos; además, en las entrevistas con los profesores se percibía mayor habilidad hacia la enseñanza por medio de la resolución de problemas matemáticos. Los resultados obtenidos permitieron concluir en qué deben enfocarse las futuras investigaciones para promover el éxito en la enseñanza de la resolución de problemas.

Con el fin de profundizar en el tema de la resolución de problemas, Schoenfeld (1985) retomó el trabajo de Polya (1945) y elaboró un marco para observar cómo los estudiantes resuelven problemas. En él propone cuatro categorías del conocimiento y comportamiento esenciales para el rendimiento en la resolución de problemas. Éstas son:

- ***Recursos.*** Son los conocimientos matemáticos –intuiciones, datos, procedimientos algorítmicos, comprensiones– que poseen los individuos.
- ***Heurísticas.*** Estrategias y técnicas –dibujar figuras, introducir notación adecuada, explotar problemas relacionados– para avanzar al resolver problemas desconocidos o no comunes.
- ***Control.*** Decisiones globales –planificación, supervisión, evaluación, toma de decisiones – respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias.
- ***Sistemas de creencias.*** La "visión personal del mundo matemático" –acerca de sí mismo, del tema, de las matemáticas– el conjunto de (no necesariamente consciente) aquello que determina el comportamiento de un individuo. (p. 15)

A partir de este trabajo, algunos investigadores insistieron en la importancia de estas cuatro categorías y continuaron con el trabajo de Schoenfeld, entre ellos se pueden encontrar a Santos (2007). El estudio de Schoenfeld (1985) motivó el interés de los expertos para concentrarse en una o más categorías de las que propone. Los resultados de estas investigaciones, han puesto en entredicho las formas tradicionales de enseñar matemáticas.

1.2.2. El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas y la formación de profesores

A partir del trabajo de Schoenfeld (1985), se hicieron algunos trabajos orientados hacia la enseñanza de las matemáticas, mediante la resolución de problemas. Por ejemplo, Resnick (1988) dirigió su atención hacia el estudio del papel que juegan los recursos (conocimientos base), lo cual le permitió encontrar que cuando el conocimiento matemático de los estudiantes no es firme, se obstaculiza la resolución exitosa de problemas. Además, señala que la enseñanza de las matemáticas es llevada a cabo tradicionalmente como una "disciplina bien estructurada", en la que se promueve la resolución de problemas por medio de problemas rutinarios.

Generalmente, dichos problemas tienen una dirección definida hacia la solución, y los recursos que se utilizan son conocidos. De esta manera, los estudiantes no alcanzan a tener flexibilidad y creatividad para hacer uso de sus conocimientos matemáticos cuando resuelven problemas. Al respecto de la naturaleza de los problemas propuestos en la escuela y de las herramientas para resolverlos, Resnick dice:

> [. . .] muchos estudiantes tienen conocimientos informales relevantes, que normalmente no se basan en el pensamiento acerca de las expresiones formales [. . .] La enseñanza enfocada en interpretar las expresiones matemáticas, como la matematización de posibles situaciones del mundo real, parece esencial para su desarrollo como resolutores de problemas matemáticos. (Resnick, 1988, p. 13)

Aunque el trabajo de Schoenfeld (1985), *Mathematical Problem Solving*, cambió el rumbo de las investigaciones posteriores acerca de la resolución de problemas, solamente era un marco para observar cómo y por qué las personas tienen éxito al resolver problemas. De esta manera, durante las últimas tres décadas, Schoenfeld ha trabajado en una teoría aplicada al ámbito de la enseñanza, que explique "cómo y por qué la gente toma las decisiones que toma, mientras trabajan en los problemas que les preocupan, en medio de entornos sociales dinámicamente cambiantes" Schoenfeld (2007, p. 2). Schoenfeld (2007) señala que esta teoría ha sido elaborada de acuerdo con el papel del profesor, quien se enfrenta diariamente a tareas nada fáciles. Dichas tareas consisten en la planificación de sus clases y la enseñanza de esas clases mediante la resolución de problemas, además de enfrentarse a los diversos factores que influyen en el entorno escolar y que pueden obstruir el paso hacia el logro de sus propósitos.

Cabe mencionar que la formación de profesores, así como sus propósitos y métodos de enseñanza, pudieran estar alejados de la resolución de problemas. Con frecuencia, los maestros guiados por su experiencia como individuos que resuelven problemas, enseñan a solucionar problemas como ellos los resuelven y partiendo de la instrucción que recibieron. Un ejemplo claro de esta problemática se puede encontrar en la práctica docente de los expertos matemáticos que son competentes en la resolución de problemas, quienes no logran que sus alumnos comprendan una situación problema o sean exitosos al resolver problemas. El hecho de que alguien resuelva problemas exitosamente, no se traduce necesariamente en una práctica docente que promueva la resolución de problemas con buenos resultados. Pero, aunque este hecho sea un factor que influye en la problemática que se presenta en la resolución de problemas matemáticos, intentar cambiar la manera de pensar o enseñar de los profesores, no es una tarea fácil; es necesario invertir tiempo y esfuerzo.

Thompson (1985, p. 135) declara, "la tarea de modificar desde hace mucho tiempo, concepciones de las matemáticas profundamente arraigadas, y su enseñanza en el corto período de un curso de métodos de enseñanza, sigue siendo un problema importante en la formación matemática docente". Este problema puede deberse a que las investigaciones se han centrado en cómo debe ser la instrucción por parte del profesor en el aula, se han propuesto metodologías, entre otras; restándole importancia a la formación de los profesores, como individuos que resuelven problemas.

Las dificultades que un maestro pudiera tener en la enseñanza de la resolución de problemas, comprende desde los primeros niveles escolares, cuando se comienza a resolver problemas –en su defecto ejercicios–, hasta el nivel superior. Con frecuencia, dichas dificultades pueden presentarse en la práctica docente. De esta manera, es de suma importancia considerar cómo resuelven problemas los profesores, y las concepciones que tienen acerca de la resolución de problemas. No obstante, aunque las investigaciones han estado enfocadas en los estudiantes y la instrucción, "se ha reconocido la necesidad de investigar el papel de los profesores durante la implementación de actividades de resolución de problemas en el aula" (Santos y Mancera, 2001, p. 31). Es bien sabido que con frecuencia profesores no dirigen dichas actividades hacia la resolución de problemas, sino a que se perfeccione la utilización de las herramientas matemáticas, por medio de la resolución de diversos problemas rutinarios.

Atendiendo las preocupaciones de enseñar por medio de la resolución de problemas, Santos y Mancera (2001) hicieron un estudio acerca de las concepciones que tienen los profesores del nivel medio superior acerca de la resolución de problemas que surgen de entornos donde "a) profesores participaron (como estudiantes) en seminarios de resolución de problemas, b) profesores como responsables de la diseminación de las ideas de la resolución de problemas a otros profesores, y c) la práctica regular de profesores con sus estudiantes" (p.13). Concluyeron que la instrucción de los docentes está influenciada por las creencias que tienen de las matemáticas, de cómo aprenden los estudiantes, etc; y que "Es importante la consideración de los maestros, sobre sí mismos, como resolvedores de problemas y como enseñantes utilizando problemas" (Santos y Mancera, 2001, p. 49).

Siguiendo la línea del tema de investigación de este trabajo, se analizaron los trabajos de Xenofontos y Andrews (2008) y Xenofontos (2007). Xenofontos (2007) hizo un estudio con una profesora (Ms. Electra) y Xenofontos y Andrews (2008) hicieron un estudio en el que participaron tres maestros de primaria. En ambos estudios se analizó la competencia y las creencias para resolver problemas matemáticos de los profesores en cuestión, así como el impacto de éstas en el aula. Así mismo, se entrevistó a los profesores, se les planteó un problema no rutinario en contexto matemático, para el que debían describir el proceso de resolución del problema mientras lo resolvían; además de apoyarse en dicho problema para organizar una clase de instrucción en la cual se presentara éste.

En los resultados de este estudio se observa "la complejidad de la relación entre las creencias y la competencia para resolver de los profesores." (Xenofontos y Andrews, 2008, p. 9). Tal y como Thompson (1984, citado por Xenofontos y Andrews, 2008, p. 9) afirma:

> los profesores deben (1) experimentar la resolución de problemas matemáticos desde la perspectiva del resolutor de problemas antes de que puedan hacer frente, de manera adecuada, a su enseñanza, (2) reflexionar sobre los procesos de pensamiento que utilizan en la resolución de problemas para obtener conocimientos sobre la naturaleza de la actividad y (3) familiarizarse con la literatura de investigación acerca de la resolución de problemas y la enseñanza de la resolución de problemas.

Esta última referencia hace pensar en una recomendación hacia la formación de profesores y a la concepción que los docentes tienen sobre la resolución de problemas. Tal y como sostenía Halmos (1980):

> Creo que los problemas son el corazón de las matemáticas, y espero que como profesores, en el aula, en seminarios y en los libros y artículos que escribimos, los destacaremos cada vez más, y que formemos a nuestros estudiantes para ser mejores resolutores y compositores de problemas que nosotros. (p. 524)

1.3. Preguntas de investigación y objetivos

En esta tesis se aborda la resolución de problemas como investigación, la cual tiene el objetivo de identificar y analizar las estrategias y las habilidades referidas al control que utilizan profesores del nivel medio superior al momento de resolver problemas. Con el fin de concretar el objetivo de este trabajo se planteó la principal pregunta de investigación:

¿Qué estrategias y qué habilidades referidas al control emplean los profesores al resolver problemas?

De la cual se desprenden tres preguntas específicas.

1. ¿Qué estrategias utiliza para resolver problemas?
2. ¿Qué acciones emprende el profesor para resolver un problema?
3. ¿De qué manera procede el profesor, ante la posibilidad de abandonar una estrategia fallida, así como para emplear otra estrategia en el intento de resolver el problema?

1.4. Justificación

Este trabajo se desarrollará con profesores de matemáticas del nivel medio superior, por lo que se han considerado los siguientes elementos para fundamentar esta tesis, los cuales se verán detalladamente en las secciones consecuentes.

- La importancia de la resolución de problemas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS).
- Formación de los profesores.
- Estudios relacionados con el tema.

1.4.1. La importancia de la resolución de problemas en la RIEMS

En diferentes países se han cambiado los planes y programas de estudios de los diferentes niveles educativos, en parte motivados por los resultados de algunas evaluaciones como PISA.

Incorporándose en ellos las habilidades matemáticas relacionadas con la resolución de problemas; planteándose el reto de cómo se desarrollan estas habilidades en los estudiantes y qué tienen que hacer los profesores para promoverlas. Particularmente en México, en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (SEMS, 2008), se establece que la formación y actualización de los docentes es un requisito esencial para que la RIEMS sea exitosa, y se pretende que los profesores enseñen con el enfoque por competencias. En el caso de matemáticas, los profesores deben desarrollar las habilidades necesarias para poder promover en sus estudiantes las habilidades que favorezcan la resolución de problemas.

Pero, a pesar de lo pretendido, los resultados de la prueba PISA "dejan clara la enorme distancia que existe entre los propósitos de la RIEMS y el nivel alcanzado por los estudiantes de preparatoria en lo que se refiere a la resolución de problemas matemáticos" (Tarazón, 2012, p. 17).

1.4.2. Formación de los profesores

Una buena parte de las investigaciones realizadas sobre resolución de problemas se ha orientado hacia las estrategias que siguen los estudiantes (novatos o expertos) para resolver problemas matemáticos; pero hay pocos trabajos donde se estudien las estrategias que utilizan los profesores para resolver problemas y el impacto que tienen estas estrategias en su práctica docente. La decisión de hacer estudios enfocados en los estudiantes podría deberse a la tendencia cada vez más fuerte de centrar la enseñanza en los estudiantes, que conlleva de manera natural a la necesidad de saber más sobre sus procesos de aprendizaje. De esta manera, se ha dejado de lado la formación de los docentes, sin tener en cuenta que ellos juegan un papel indispensable en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Si se analizan las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas matemáticos, se percibe que una posible causa de estas complicaciones parece estar relacionada con las estrategias utilizadas por los profesores cuando se involucran en la resolución de problemas. Se cree improbable que un profesor cuyas estrategias para resolver problemas son pobres o escasas, pueda involucrarse en actividades didácticas en el salón de clase, que promuevan el desarrollo de buenas estrategias de resolución de problemas en sus estudiantes; y aun entre los profesores que son buenos resolviendo problemas, pudieran existir profesores que consideren que las estrategias utilizadas por ellos no son objetos de enseñanza en el aula. Además, es común que los estudiantes imiten todo lo que hace el maestro, así si un alumno llegara a ser profesor, es probable que la primera vez que enseñe un tema lo haga de la misma manera que se lo enseñaron a él; y lo mismo sucede con las estrategias, enseñan a solucionar problemas como aprendieron a resolver problemas en su etapa estudiantil.

Algunas instituciones sonorenses de nivel medio superior, preocupadas por la actualización de sus profesores de matemáticas, han promovido algunos cursos y diplomados de actualización didáctica y disciplinar. Uno de estos diplomados, bajo el título de *Diplomado en Enseñanza de las Matemáticas*, fue ofrecido por la Universidad de Sonora en el año 2012; fue dirigido a profesores de matemáticas del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP) y del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH-SON). En los materiales de enseñanza usados en este diplomado, aparecen diferentes planteamientos que involucran el papel que juegan la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas en la actividad docente.

Uno de los objetivos más importantes de este diplomado fue el de consolidar las habilidades docentes, que permitan al profesor guiar el proceso de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes a partir de la resolución de problemas, para lo cual se promueve la reflexión y el debate sobre diferentes perspectivas, entre las que se encuentra "El uso que el profesor hace de la resolución de problemas en sus prácticas docentes" (Grijalva, Soto, Bravo, Urrea, Rodríguez, Ávila, y Ibarra, 2012, p. 13). Los objetivos siguientes, plasmados también en este programa de actualización, ilustran que el diplomado ha tenido objetivos más generales:

- Desarrollen habilidades intelectuales para la formulación, análisis y resolución de problemas en diversas situaciones en las que la matemática es útil.
- Desarrollen habilidades para la expresión oral y escrita, particularmente de ideas matemáticas.
- Profundicen en la comprensión de los objetivos, las orientaciones didácticas y los contenidos disciplinares de la matemática del bachillerato.

- Desarrollen competencias para diseñar situaciones problema o variantes de las que se trabajan en los libros de texto, con el propósito de poner en práctica estrategias y actividades didácticas de conformidad con los intereses y modos de aprendizaje de sus alumnos, así como las características sociales, económicas y culturales de su entorno [...] (Grijalva et al., 2012, pp. 11-12)

Cabe aclarar que el mismo año 2012, el equipo de instructores fue ampliado para escribir nuevos libros de texto, para todos los cursos de Matemáticas del COBACH-SON. En estos libros puede verse que la resolución de problemas juega un papel central, aunque el impacto de estos libros, en los aprendizajes de los estudiantes no ha sido evaluado todavía. Lo que se sabe hasta ahora es que la institución ha enfrentado la resistencia de algunos profesores a enseñar matemáticas a partir de problemas, porque esto se traduce en un cambio radical en sus prácticas docentes, que no todos están dispuestos a transitar.

1.4.3. Estudios relacionados con el tema

Como se vio en la Sección 1.2, existen varios investigadores que se han dedicado a estudiar la problemática de la resolución de problemas, entre los que destacan Polya y Schoenfeld. En sus respectivos trabajos presentan estrategias de resolución de problemas, así como su importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. A continuación se hace un recuento de los puntos de vista de algunos investigadores, que abordan el tema desde diferentes perspectivas y ratifican su importancia.

De acuerdo con Freudenthal (1980), la problemática que se presenta en la resolución de problemas matemáticos corresponde a "¿Cómo aprende la gente?, en particular matemáticas", ya que aprender matemáticas está estrechamente relacionado con el proceso de resolución de problemas; como afirma Santos (2007, p. 19), "en el estudio de las matemáticas, la actividad de resolver y formular problemas desempeñan un papel muy importante cuando se discuten las estrategias y el significado de las soluciones". Además, la interrogante "¿Cómo aprende la gente?, en particular matemáticas" (Freudenthal, 1980, p. 5) está relacionada con cuestiones de carácter cognitivo, es decir, con conocer cómo las personas acceden al conocimiento.

De acuerdo con la diferencia que hace Polya acerca de los problemas rutinarios y no rutinarios, Arcavi y Friedlander (2007) agregan:

> Aún dentro de una misma cultura o en un mismo sistema de educación, los desarrolladores del currículum, los profesores, los investigadores en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y los matemáticos no necesariamente comparten los mismos puntos de vista sobre lo que es un problema y lo que se enseña en términos de la resolución de problemas. (p. 356)

Polya (1945) y Schoenfeld (1985) señalan que la resolución de problemas va más allá de encontrar una solución o saber aplicar a la perfección determinados métodos:

> Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemáticas, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel. (Polya, 1965, citado por Vilanova et al., 2008, p. 3)

Schoenfeld, en *Mathematical Problem Solving*, una obra ya clásica sobre el tema, expresó que en la resolución de problemas:

> aprender a pensar matemáticamente implica mucho más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al alcance. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las tácitas “reglas del juego”. (p. XIII)

Thompson (1985) nos muestra la visión que se tiene generalmente sobre la resolución de problemas al señalar, que:

> [...] existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas; saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido. Vilanova et al. (2008, p. 1)

Al respecto de las ideas que se han arraigado en profesores y estudiantes de matemáticas, y que ciertamente serán difíciles de erradicar en las escuelas, Lampert (1992), precisa:

> Comúnmente, la matemática es asociada con la certeza; saber matemática y ser capaz de obtener la respuesta correcta rápidamente van juntas. Estos presupuestos culturales, son modelados por la experiencia escolar, en la cual hacer matemática significa seguir las reglas propuestas por el docente; saber matemática significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el docente hace una pregunta o propone una tarea; y la "verdad" matemática es determinada cuando la respuesta es ratificada por el docente. Las creencias sobre cómo hacer matemática y sobre lo que significa saber matemática en la escuela son adquiridas a través de años de mirar, escuchar y practicar. (Vilanova, 2008, pág. 6)

Y por último, Schoenfeld expresa la necesidad de que en los salones de clases se le dé la importancia y el tiempo debido a la resolución de problemas:

> Si uno espera que los estudiantes alcancen los objetivos planteados aquí –en particular, desarrollar los hábitos matemáticos apropiados y las disposiciones de la interpretación, y dar sentido a las decisiones así como a las formas apropiadas del pensamiento matemático– entonces, las comunidades de práctica en las cuales ellos aprenden matemáticas deben reflejar y promover esas formas de pensamiento. Es decir, los salones de clase deben ser comunidades en las cuales el encontrar sentido

matemático, del tipo que esperamos desarrollen los estudiantes, se practique."
(Schoenfeld, 1992, p. 345)

Capítulo 2

Marco conceptual

En este capítulo se consideran los conceptos teóricos propuestos por Schoenfeld (1985, 2011), quien centra sus investigaciones en el pensamiento, la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Actualmente, Schoenfeld encabeza el grupo "Teacher Model Group" en Berkeley, el cual se enfoca en la caracterización de la naturaleza del conocimiento de los profesores y de las formas en que influye en su práctica. En su obra *Mathematical problem solving*, Schoenfeld (1985) caracteriza lo que significa pensar matemáticamente y describe un curso de nivel licenciatura basado en la investigación de la resolución de problemas matemáticos, considerando que "la relación particular entre un individuo y una tarea, hace de la tarea un *problema* para esa persona [...] si se tiene un acceso directo a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema" (Schoenfeld, 1985, p. 74).

Schoenfeld afirma que entendemos cómo pensar matemáticamente cuando somos ingeniosos, flexibles y eficientes con nuestras habilidades para poder abordar satisfactoriamente nuevos problemas de matemáticas. Así, retoma el trabajo de Polya (1945), *How to Solve It*, y propone cuatro categorías del conocimiento y comportamiento esenciales para el rendimiento en la resolución de problemas, un marco para observarla, pero no una teoría de resolución de problemas. Éstas son: *recursos*, *heurísticas*, *control* y *sistemas de creencias*. Aunque años más tarde, en 2011, en *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*, como su nombre lo dice, se presenta una teoría en donde Schoenfeld asegura que las cuatro categorías propuestas en 1985 son transferibles a otras áreas como la física, incluso la cocina, y asevera la importancia del control y las creencias. En las secciones siguientes son discutidas las cuatro categorías propuestas por Schoenfeld (1985, 2011).

2.1. Recursos

El desempeño en la resolución de problemas requiere de los conocimientos básicos matemáticos con los que cuenta quien resuelve problemas; estos conocimientos son denominados recursos.

> Los recursos son los pilares sobre los cuales está apoyado el rendimiento de la resolución de problemas. Una descripción de estos pilares –un inventario de lo que saben las personas que resuelven problemas y la forma en que acceden a ese conocimiento– es esencial si se quiere comprender lo que sucede en la resolución de problemas. (Schoenfeld, 1985, p. 46)

Schoenfeld (1985), se refiere a los recursos como los conocimientos matemáticos que poseen las personas y que pueden ser empleados al resolver problemas; de aquí la importancia de conocer con qué herramientas matemáticas cuenta un individuo para entender el comportamiento de las personas al resolver problemas. Si el conocimiento matemático de un individuo es limitado o impreciso, difícilmente podrá usarlo como herramienta para resolver un problema exitosamente. Así, los recursos son un elemento esencial en el rendimiento de la resolución de problemas. Entre los recursos que se pueden usar al resolver un problema, Schoenfeld (1985) señala los siguientes:

- Intuiciones y conocimientos informales respecto a la esfera de conocimiento donde esté inmerso el problema, como podrían ser:
  - ◇ Datos, o partes aisladas del conocimiento.
  - ◇ Procedimientos algorítmicos.
  - ◇ Procedimientos de "rutina" no algorítmicos.
  - ◇ Comprensiones (conocimiento proposicional) sobre las reglas elegidas para trabajar en el ámbito de que se trate. (p. 15)

Años más tarde y a partir de una revisión bibliográfica acerca de los recursos que tienen las personas y cómo acceden a ellos, Schoenfeld (2011) señala los siguientes tipos de conocimientos:

- Datos, o partes aisladas del conocimiento.
- Conocimiento procedimental – cómo hacer las cosas.
- Conocimiento conceptual – los fundamentos intelectuales que explican cómo encajan las cosas entre sí y por qué funcionan como lo hacen.
- Estrategias de resolución de problemas, también conocidas como heurísticas o reglas generales para la solución de problemas. (pp. 77 - 79)

Con el siguiente problema se ejemplificarán los recursos que permiten resolverlo.

Problema 1. (Un problema de construcción). *Inscribir un cuadrado en un triángulo dado (Figura 2.1). Dos vértices del cuadrado deben estar en la base del triángulo dado, los otros dos vértices del cuadrado deben estar en los otros dos lados del triángulo, uno en cada uno.* (Tomado de Schoenfeld, 1985, p. 85)

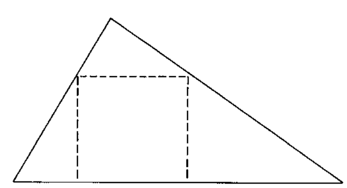

Figura 2.1

En el problema anterior, se identifican recursos tales como: triángulo, cuadrado, cuadrado inscrito, área de un triángulo, área de un cuadrado, altura de un triángulo, trazar dibujos de las figuras geométricas en cuestión, entre otros. Además, se percibe que el problema puede resolverse con recursos geométricos y algebraicos, por lo que el conocimiento procedimental algebraico también forma parte de esta categoría. Como se puede ver en el problema anterior, se pueden identificar los conocimientos con los que las personas cuentan al enfrentarse a un problema, pero, ¿cuál es la naturaleza de ese conocimiento?, ¿cómo se organiza y se accede a él para utilizarlo?

Con frecuencia, las actividades que las personas llevan a cabo se basan en los estímulos que se han experimentado y la mayoría lo hace de manera automática, porque de tantas veces que se han realizado dejaron de representar una situación problema. Así, deja de ser necesario buscar y descubrir alguna dirección hacia la solución; sin embargo, las habilidades que permiten a un individuo enfrentarse a una determinada tarea, son parte importante en la resolución de problemas. Es común que se tome como información la experiencia en situaciones problema previas, para poder identificar el tipo de problema que se presenta y así determinar las técnicas adecuadas para resolverlo. Se debe identificar las características de un problema con el propósito de prevenir confusiones al momento de establecer la relación con un determinado tipo de problemas.

Hinsley, Hayes, y Simon (1977, p. 92) clasificaron cuatro afirmaciones del rendimiento matemático basado en esquemas, las cuales aparecen en el trabajo *From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems*. Schoenfeld (1985, p. 51) retoma dichas afirmaciones, y profundiza en el tema para plantear una ampliación de ellas, la cual se presenta a continuación.

1. *Las personas clasifican su experiencia en tipos.*

2. *Las personas suelen clasificar sus nuevas experiencias de manera coherente con sus clasificaciones previas, con frecuencia antes de que las nuevas experiencias sean analizadas detalladamente.* Si las "características esenciales" de la nueva experiencia corresponden con las de una categoría ya definida, dicha categoría se obtiene antes de que la formulación de la nueva experiencia se complete, y ayuda a darle forma.

3. *Las personas tienen "cuerpos" de información sobre las categorías de experiencia que son potencialmente útiles al tratar con nuevas experiencias que entran en esas categorías.* Es decir, las personas elaboran sus expectativas de las circunstancias a la luz de su experiencia previa; herramientas y técnicas que han sido útiles en el pasado "vienen a nuestra mente" en la situación presente.

4. *Las personas usan su "conocimiento categórico" para interpretar y abordar nuevas*

> *situaciones*. De hecho, su opinión sobre estas situaciones está definida –a veces de forma imprecisa– por sus categorizaciones previas.

De acuerdo con la cita anterior, y como se menciona previamente, las experiencias en la resolución de problemas marcan rumbo de las decisiones y percepciones que tienen las personas acerca de un problema, pero el comportamiento que muestran cuando se presenta un problema no se limita a dicha acción; lo mismo sucede en la enseñanza–aprendizaje de las matemáticas, así como en otros ambientes. Es preciso tener en mente que los recursos son una parte esencial en el rendimiento de la resolución de problemas, y es necesario saber identificar en qué situaciones utilizarlos; porque así como pueden permitir al resolutor el éxito en la resolución de un problema, de la misma manera pueden llevarlo al fracaso.

2.2. Heurísticas

El pionero en las investigaciones en la resolución de problemas fue Polya (1945), quien considera que las heurísticas tienen un papel muy importante en la resolución de problemas. Para Polya (1945), una Heurística o heurética, o "ars inveniendi" era:

> [...] el nombre de una determinada rama de estudio, no muy claramente delimitada, que se relacionaba con la lógica, con la filosofía o con la psicología, se describían con frecuencia las líneas generales, pero rara vez sus detalles, y era tan buena como olvidada. El objetivo de la heurística es el estudio de las reglas y de los métodos del descubrimiento y de la invención [...] Heurística, como adjetivo, significa "que sirve para descubrir". (Polya, 1945, pp. 112-113)

Cuando se tiene un problema no rutinario por resolver, en primera instancia, no se cuenta con una estrategia determinada para encontrar su solución. Es ahí donde se percibe el papel que juegan las heurísticas. Una heurística es "una sugerencia general o técnica que ayuda a quienes resuelven problemas a entender o a resolver un problema" (Schoenfeld, 1985, p. 23). En *How to solve it*, Polya (1945) presenta una lista que tituló "Para resolver un problema se necesita" (pp. 17-19), lo que ahora se conoce coloquialmente como el "método de los cuatro pasos de Polya". En ella aparecen una serie de preguntas y sugerencias que suelen surgir de la interacción entre maestro y alumno al momento de resolver problemas. A continuación presentamos una versión resumida de dicha lista.

Para resolver un problema se necesita:

1. **Comprender el problema**
   - ¿Cuál es la incógnita?
   - ¿Cuáles son los datos?
   - ¿Cuál es la condición?
   - ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Es redundante?, ¿Es contradictoria?

2. **Concebir un plan**
   - Determinar la relación entre los datos y la incógnita.
   - De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares.
   - Obtener finalmente un plan de solución.
     - ◇ ¿Se ha encontrado con un problema semejante?
     - ◇ ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
     - ◇ ¿Conoce un problema relacionado?
     - ◇ ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?
     - ◇ ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
     - ◇ ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

3. **Ejecución del plan**
   - ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?
   - ¿Puede demostrarlo?

4. **Examinar la solución obtenida**
   - ¿Puede verificar el resultado?

- ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Schoenfeld (1985) expone dos estrategias heurísticas generales, las cuales son una colección de subestrategias relacionadas entre sí, como es el caso de las heurísticas propuestas por Polya (1945), las cuales presenta de manera muy general. Estas estrategias consisten en examinar casos particulares y establecer subobjetivos, que son explicadas a continuación.

I. Examinar casos particulares.

> **Estrategia S.** Para entender mejor un problema desconocido, puede ejemplificar el problema considerando varios casos particulares. Esta acción puede sugerir la dirección de, o quizá la verificación de, una solución.

Considérese el siguiente problema, el cual es del tipo de problemas en los que se obtienen resultados satisfactorios aplicando la Estrategia S.

Problema 2. *Encuentre la ecuación o fórmula de forma cerrada de la serie*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^{k+1}}$$

Solución:

Empleando la Estrategia S, se consideran casos particulares calculando las primeras 10 sumas parciales, que se muestran a continuación.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{1-1}{2^{1+1}} = 0, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{k-1}{2^{k+1}} = 0 + \frac{2-1}{2^{2+1}} = \frac{1}{8},$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{8} + \frac{3-1}{2^{3+1}} = \frac{1}{4}, \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} + \frac{4-1}{2^{4+1}} = \frac{11}{32},$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{5} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{11}{32} + \frac{5-1}{2^{5+1}} = \frac{13}{32}, \qquad S_6 = \sum_{k=1}^{6} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{13}{32} + \frac{6-1}{2^{6+1}} = \frac{57}{128},$$

$$S_7 = \sum_{k=1}^{7} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{57}{128} + \frac{7-1}{2^{7+1}} = \frac{15}{32}, \qquad S_8 = \sum_{k=1}^{8} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{15}{32} + \frac{8-1}{2^{8+1}} = \frac{247}{512},$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^{9} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{247}{512} + \frac{9-1}{2^{9+1}} = \frac{251}{512}, \quad S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{251}{512} + \frac{10-1}{2^{10+1}} = \frac{1013}{2048}.$$

A partir de los resultados de las sumas parciales, se puede concluir que S_k converge a $\frac{1}{2}$, por lo que la fórmula de la suma parcial S_k debe ser de la forma $\frac{1}{2} - h$, donde h es una sucesión finita. La primer suma parcial de S_k, S_1 es igual a cero, entonces una posible fórmula para S_k tendría que ser $\frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}$. De esta manera, para $k = 1$, se tiene que $S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^1} = 0$, por lo que la fórmula se cumple para $k = 1$. Ahora, veamos si se cumple para $k = 2$; entonces $S_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \neq \frac{1}{8}$. Como la fórmula no es válida para $k = 2$, debe ser modificada.

Considérese la segunda suma parcial, la cual es igual a $\frac{1}{8}$. Para que la fórmula $\frac{1}{2} - h$ se cumpla para $k = 2$, h tiene que ser igual a $\frac{3}{8}$. De esta manera, la fórmula de S_k tiene que ser igual a $\frac{1}{2} - \frac{k+1}{2^{k+1}}$. Verifiquemos si esta fórmula se cumple para $k = 1, 2, \ldots, 10$. Entonces

para $k = 1$, $S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1+1}{2^{1+1}} = 0$; para $k = 2$, $S_2 = \frac{1}{2} - \frac{2+1}{2^{2+1}} = \frac{1}{8}$;
para $k = 3$, $S_3 = \frac{1}{2} - \frac{3+1}{2^{3+1}} = \frac{1}{4}$; para $k = 4$, $S_4 = \frac{1}{2} - \frac{4+1}{2^{4+1}} = \frac{11}{32}$;
para $k = 5$, $S_5 = \frac{1}{2} - \frac{5+1}{2^{5+1}} = \frac{13}{32}$; para $k = 6$, $S_6 = \frac{1}{2} - \frac{6+1}{2^{6+1}} = \frac{57}{128}$;
para $k = 7$, $S_7 = \frac{1}{2} - \frac{7+1}{2^{7+1}} = \frac{15}{32}$; para $k = 8$, $S_8 = \frac{1}{2} - \frac{8+1}{2^{8+1}} = \frac{247}{512}$;
para $k = 9$, $S_9 = \frac{1}{2} - \frac{9+1}{2^{9+1}} = \frac{251}{512}$; para $k = 10$, $S_{10} = \frac{1}{2} - \frac{10+1}{10^{2+1}} = \frac{1013}{2048}$.

Así, la fórmula que se eligió para S_k se cumple para $k = 1, 2, \ldots, 10$. Entonces, supóngase que:

$$S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^{k+1}} = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{11}{32} + ... + \frac{n-2}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

la cual es fácilmente demostrable por inducción matemática. Por lo tanto, la fórmula de forma cerrada de la serie es

$$\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Hay que estar conscientes de que esta estrategia puede tener un alto grado de dificultad para quienes no tienen experiencia en la resolución de problemas por ser una estrategia muy general, lo que puede llevar a una mala interpretación de la misma.

II. Establecer subobjetivos.

Estrategia H. Si no puede resolver el problema dado, establezca subobjetivos (el cumplimiento parcial de las condiciones deseadas). Habiéndolos alcanzado, utilizarlos como base para resolver el problema original.

El siguiente problema se resuelve con la misma estrategia.

Problema 3. *Coloca los números del 1 al 9 en los nueve círculos de la Figura 2.2, para que la suma de los tres números de cada recta sea 15. Deben usarse todos los números y no deben repetirse en los nueve círculos.*

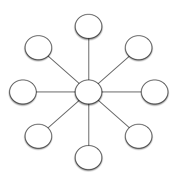

Figura 2.2

En este problema, se debe reducir el campo de búsqueda de soluciones, ya que se pueden acomodar de diversas maneras los nueve números; por eso es necesario plantear subobjetivos. El primer subobjetivo, para resolver el problema, es encontrar el número que tiene que colocarse en el centro de la figura, por estar implicado en la suma de cada recta, y porque de dicho número depende de que la suma de cada recta sea 15.

Las estrategias **S** y **H**, por ser de carácter general, con frecuencia suelen significar otro problema para quien lo está resolviendo; teniendo como consecuencia que él no alcance a emplearlas de manera correcta. Precisamente, debido a las dificultades que pueden presentarse al intentar solucionar el problema, y a diferencia del trabajo de Polya, Schoenfeld (1985) muestra de manera explícita las heurísticas utilizadas con más frecuencia en la resolución de problemas (ver Tabla 2.1). Dichas heurísticas están clasificadas por etapas en las que se utilizan, que son el análisis, la exploración y la verificación de la solución; las cuales se explican con detalle en la Sección 2.3.

Tabla 2.1: Heurísticas utilizadas frecuentemente. (Tomada de Schoenfeld, 1985, p. 109)

Análisis

1. Dibujar una figura o un diagrama cuando sea posible.
2. Examinar casos especiales:
   a. Elegir valores especiales para ejemplificar el problema y obtener una idea de ello.
   b. Analizar casos límite para explorar el rango de posibilidades.
   c. Establecer cualesquiera parámetros enteros iguales a 1, 2, 3, [...] , en secuencia, y buscar un modelo inductivo.
3. Intentar simplificar el problema por
   a. Explotación de la simetría, o
   b. Usando argumentos "sin pérdida de la generalidad".

Exploración

1. Considere problemas esencialmente equivalentes:
   a. Reemplace las condiciones por otras equivalentes.
   b. Recombine los elementos del problema en diferentes maneras.
   c. Introduzca elementos auxiliares.
   d. Reformule el problema.
      (i) cambie la perspectiva o la notación,
      (ii) tome en cuenta el argumento por contradicción o contraposición,
      (iii) suponga que tiene una solución y determine sus propiedades.

Continúa en la siguiente página

Tabla 2.1 – *Continuación de la página anterior*

2. Considere problemas ligeramente modificados:
   a. Elija subobjetivos.
   b. Expandir una condición e intentar imponerla de nuevo.
   c. Descomponga el dominio del problema y trabaje en él caso por caso.
3. Considere problemas ampliamente modificados.
   a. Construya un problema análogo con menos variables.
   b. Mantenga fijas todas las variables a excepción de una para determinar las consecuencias de dicha variable.
   c. Intente explotar los problemas relacionados que tienen semejante
      (i) forma,
      (ii) "datos",
      (iii) conclusiones.

   Recuerde: cuando se trata de problemas relacionados, y más fáciles, usted debe tratar de explotar tanto el resultado como el método de solución en el problema dado.

Verifique su solución

1. ¿Sus soluciones pasan estas pruebas específicas?
   a. ¿Se utilizan todos los datos dados?
   b. ¿Es conforme a las estimaciones o predicciones razonables?
   c. ¿Soporta las pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?
2. ¿Pasa las pruebas generales?
   a. ¿Puede obtenerla de otra manera?
   b. ¿Puede ser justificada por casos especiales?
   c. ¿Pueden reducirse a resultados conocidos?
   d. ¿Puede utilizarse para generar algo que usted ya conoce?

Para ejemplificar el uso de las heurísticas que aparecen en la Tabla 2.1, se considera el **Problema 1** de la sección anterior, en él se requiere inscribir un cuadrado en un triángulo dado y que dos vértices del cuadrado estén en la base del triángulo dado, y que los otros dos vértices del cuadrado estén en los otros dos lados del triángulo, uno en cada uno de los dos lados restantes. Primeramente, como sucede siempre que se tiene un problema por resolver, se intenta convertir el problema en un ejercicio, por lo que es común revisar el problema para ver si es "rutinario" o reducible a un problema solucionable mediante técnicas de rutina, pero como para el **Problema 1** no existe una solución habitual, entonces deben considerarse otras estrategias.

Por ejemplo, de no poder resolver el problema original, primero puede intentarse resolver un problema relacionado –en el sentido de Schoenfeld (1985)– con el **Problema 1**, buscando soluciones conocidas para problemas relacionados. Para obtener problemas relacionados se puede modificar una de las condiciones del problema y habiendo encontrado la solución, restablecer esa condición o considerando la posibilidad de la construcción de una figura semejante a la que da el problema. Continuando con la estrategia de "resolver un problema relacionado" se puede encontrar una vía de acceso hacia la solución en los siguientes:

Problema $\mathbf{P}_2$: Inscribir un rectángulo en el triángulo dado.

Problema $\mathbf{P}_3$: Obtener un cuadrado con sólo tres vértices sobre triángulo.

Problema $\mathbf{P}_4$: Inscribir un círculo en un triángulo dado.

Problema $\mathbf{P}_5$: Dibuja el triángulo dado alrededor de un cuadrado. Mejor, dibuje un triángulo semejante alrededor de un cuadrado.

Problema $\mathbf{P}_6$: Inscribir un cuadrado, en un triángulo especial, como un triángulo isósceles o un triángulo equilátero.

Se debe tomar en cuenta que algunos de los problemas anteriores pueden ser más complicados de resolver, aún contando con los recursos para hacerlo; incluso puede suceder que no se pueda transferir su solución al problema original. Es entonces donde deben considerarse las habilidades relacionados con la categoría del control, las cuales se presentan en la sección siguiente.

2.3. Control

Como se vio en el rubro de las heurísticas, Polya (1945) se centraba únicamente en ellas, considerándolas como el factor más importante que influía en la resolución de problemas. Sin embargo, en 1985, Schoenfeld propuso por primera vez otra categoría esencial que podría definir el éxito o el fracaso al intentar resolver un problema: el control. Definió esta categoría como "las decisiones globales respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias", refiriéndose a la forma en que las personas explotan la información que tienen a su disposición, a la planificación, a las decisiones que se toman de qué hacer o no hacer al intentar resolver problemas. La toma de decisiones puede llevar a quien resuelve el problema al éxito o al fracaso en el intento de encontrar la solución. Algunos autores (e.g. Brown, 1978) han considerado la toma de decisiones en el momento adecuado, en sí el control, como la esencia de la inteligencia; ya no importa solamente lo que sabe quien resuelve el problema, sino cómo, cuándo, y si él lo usa.

Para ejemplificar la presencia del control en la resolución de problemas, considérese como continuación de la sección 2.2 el **Problema 1**, para el que se identificaron como heurísticas distintos problemas relacionados. Si se hace uso de problemas relacionados para intentar resolver el problema, es necesario elegir qué estrategias se utilizan y conocer la formas específicas de éstas, las cuales permiten resolver el problema. Después se debe generar una colección de problemas relacionados, adecuados y más fáciles de resolver; valorar cada uno de ellos considerando la probabilidad de obtener la solución y que ésta sirva para resolver el problema original. Las acciones antes mencionadas, son hechas para tomar una o más decisiones respecto al problema con el que se trabaja y así proceder a encontrar la solución. Para finalizar, es necesario aprovechar la solución (quizás el método utilizado o el resultado) para resolver el problema original.

Son diversos los factores que influyen en el fracaso o el éxito en la resolución de problemas, pero a partir de sus investigaciones Schoenfeld (1985) muestra un esquema del proceso de resolución de problemas (ver Figura 2.3). En dicho esquema aparecen cinco etapas del proceso de resolución de un resolutor ideal o experto. Como se observa en la Figura 2.3, la primer etapa es el análisis, la cual consiste en la lectura y comprensión del problema para entender los requerimientos, datos o contexto del problema; además, se puede tener una idea de qué heurísticas o recursos se pueden utilizar. Una vez concluido el análisis, el individuo experto puede hacer conjeturas a partir de principios ya establecidos; además, puede hacer una evaluación de la etapa de análisis, por ejemplo, valorar el nivel de comprensión del problema.

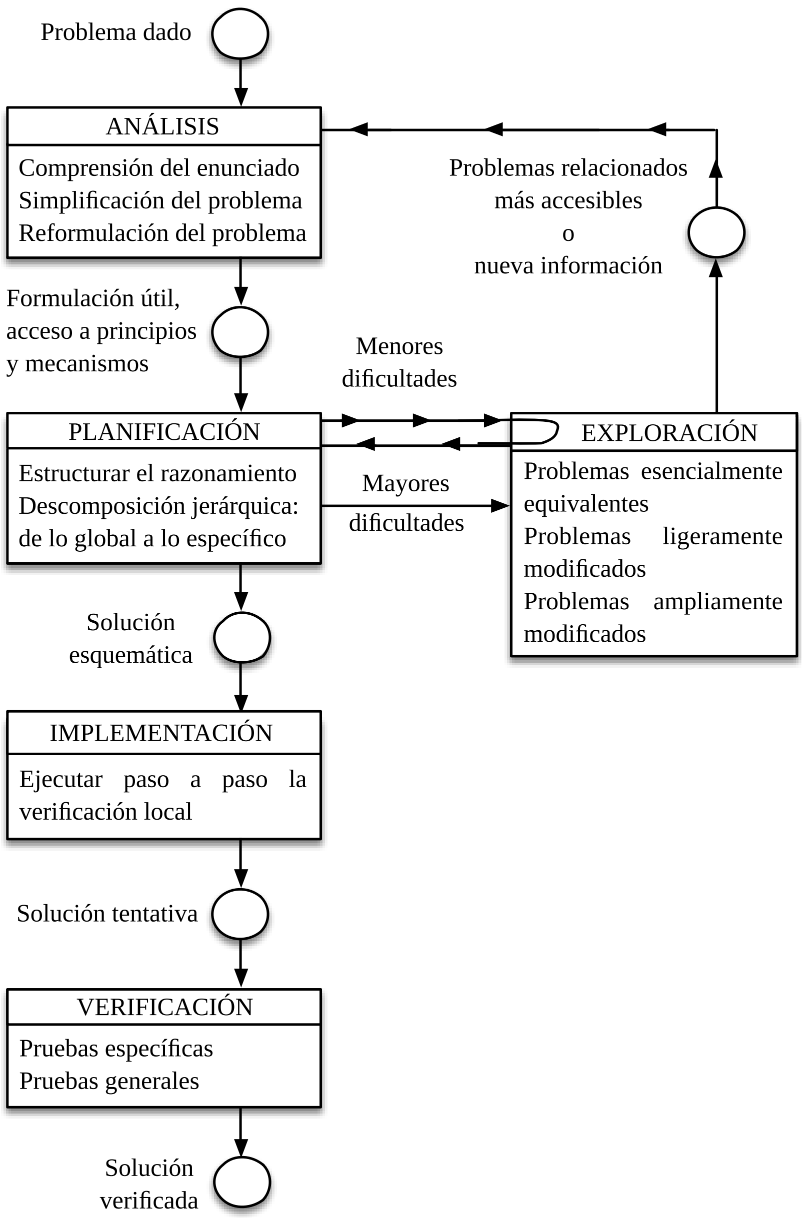

Figura 2.3: Esbozo esquemático del proceso de resolución de problemas. (Schoenfeld, 1985, p. 110)

A continuación, el resolutor pasa a la etapa de la planificación, en la cual se puede tener un "control maestro" del proceso de resolución, así como una solución esquemática del problema. Al elaborar un plan, debe hacerse con objetivos a corto plazo, para refinarlo durante el proceso, ya que durante el proceso se pueden presentar dificultades o nuevas direcciones. De acuerdo a lo antes mencionado, Schoenfeld (1985, p.109) recomienda que se realice el proceso "sin involucrarse en los cálculos detallados u operaciones complejas hasta que: (1) haya pensado en otras alternativas; (2) exista una justificación clara para ellas; (3) otras etapas de la solución del problema hayan avanzado hasta el punto en que los resultados de los cálculos o son necesarios, o son sin duda útiles".

Otra etapa del proceso de resolución de un individuo experto, es la exploración, la cual es la esencia de la estrategia, ya que en esta fase entran en juego la mayoría de las heurísticas. Durante la etapa de planificación, el resolutor puede tener mayores o menores dificultades para diseñar un plan, por lo que dependiendo del grado de dificultad, la exploración puede ser útil para redefinir un plan o elaborar uno nuevo, así como para reformular el problema. Además, en esta etapa se puede obtener nueva información del problema; por lo que, al terminar la exploración, el individuo experto decide si vuelve a la planificación, o regresa al análisis, para hacer uso de la nueva información.

La siguiente fase es la implementación, en la cual se ejecuta el plan y a partir de ella se obtiene una solución tentativa; Schoenfeld considera que ésta debe ser la parte final de la resolución del problemas. La última etapa es la verificación de la solución, en la cual es posible encontrar errores que pudieran afectar a la solución del problema; además, se pueden identificar otras posibles direcciones hacia la solución. Esta etapa final es frecuentemente olvidada, ya que la obtención de un resultado es suficiente para algunos resolutores.

En los párrafos anteriores, se mencionan las estrategias que conforman el proceso de resolución de un individuo experto. Sin embargo, en 1985 era complicado afirmar las razones que llevaban a quienes resolvían problemas a tomar determinadas decisiones (por ejemplo, cuándo termina el proceso), por lo que solamente se podían hacer suposiciones al respecto. Años después, Schoenfeld (2011, p. 63) pretende explicar el comportamiento de las personas a través de las siguientes preguntas: ¿Cuál es su visión acerca de la situación – qué es lo que les importa, en qué forma?, ¿qué objetivos se establecen con alta prioridad o se fortalecen como consecuencia de sus orientaciones[1] y de su visión acerca de la situación?, ¿cuentan con los recursos intelectuales y materiales para proceder hacia sus objetivos de máxima prioridad a través de la implementación de rutinas familiares? Los cuestionamientos antes mencionados, permiten describir cómo toman decisiones las personas "en el momento" (ver Tabla 2.2).

Tabla 2.2: Cómo funcionan las cosas, a grandes rasgos. (Schoenfeld, 2011, pp. 62-63)

- Una persona se introduce en un contexto particular con un conjunto específico de recursos, objetivos y orientaciones.
- El individuo enfrenta y orienta la situación. Algunos elementos de información y conocimiento se convierten en fundamentos importantes y se activan.
- Se establecen los objetivos (o se consolidan si ya existían).
- Se toman las decisiones en relación con los objetivos, consciente o inconscientemente, en cuanto a qué direcciones seguir y qué recursos utilizar:
    - ◇ Si la situación resulta familiar, entonces el proceso puede ser relativamente automático, donde la acción(es) tomada permite, en esencia, el acceso y la implementación de secuencias de comandos, marcos, rutinas o esquemas.
    - ◇ Si la situación no es familiar o hay algo no rutinario al respecto, entonces la toma de decisiones se realiza por un mecanismo que puede ser modelado (es decir, es consistente con los resultados esperados) utilizando los valores subjetivos esperados de las opciones disponibles, dadas la orientaciones de los individuos.
- Comienza la implementación.
- Supervisión (si es eficaz o no) se lleva a cabo de manera continua.
- Este proceso se repite, hasta declaraciones o decisiones individuales.
    - ◇ Las rutinas dirigidas a objetivos particulares tienen subrutinas.
    - ◇ Si se cumple un subobjetivo, el individuo procede a otro objetivo o subobjetivo.

Continúa en la siguiente página

[1]Término general, que incluye un grupo de términos relacionados tales como disposiciones, creencias, valores, gustos y preferencias. (Schoenfeld, 2011, p. 84)

Tabla 2.2 – *Continuación de la página anterior*

- ◇ Si se logra un objetivo, otros objetivos toman prioridad a través de la toma de decisiones.
- ◇ Si el proceso se interrumpe o las cosas no parecen ir bien, la toma de decisiones entra en acción una vez más. Este acto puede o no puede dar lugar a un cambio de objetivos y/o a las vías que se utilizan para tratar de lograrlos.

Contar con herramientas para entender cómo toman decisiones las personas, permite tener una visión general de lo que sucede durante el proceso de resolución. No obstante, un individuo puede tomar buenas o malas decisiones que influyen en el éxito del proceso, por lo que (Schoenfeld, 1985) muestra los efectos de los diferentes tipos de decisiones, los cuales se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 2.3: Efectos de los diferentes tipos de decisiones sobre el éxito en la resolución de problemas: Un espectro de impacto. (Tomada de Schoenfeld, 1985, p. 116)

Tipo A.	Malas decisiones garantizan el fracaso: Búsquedas sin esperanzas desperdician los recursos, y se ignoran las direcciones potencialmente útiles.
Tipo B.	Comportamiento ejecutivo es neutral: Búsquedas fallidas se reducen antes de causar desastres, pero los recursos no son explotados como podrían serlo.
Tipo C.	Las decisiones son una fuerza positiva en la solución: Los recursos son cuidadosamente elegidos y explotados, o abandonados adecuadamente como resultado de un cuidadoso monitoreo.
Tipo D.	No hay necesidad del control: Los hechos y procedimientos apropiados para la solución de problemas son accedidos en la memoria a largo plazo (LTM, por sus siglas en inglés).

2.4. Sistemas de creencias

Schoenfeld (1985) describe los sistemas de creencias como "La "visión personal del mundo matemático", el conjunto de (no necesariamente consciente) determinantes del comportamiento de un individuo acerca de *si mismo*, de *su entorno*, de *el tema* y de *las matemáticas*"(Schoenfeld, 1985, p. 15). Las creencias de las personas están constituidas por lo que creen sobre las matemáticas, siendo lo que lleva a decidir cómo abordar un problema, qué herramientas y habilidades se usarán en la resolución del problema, y así establecer el contexto con el que funcionan los recursos, las heurísticas y el control.

Considérese un problema de geometría. De manera inicial, y casi automática, puede pensarse en alguna estrategia de carácter geométrico para resolverlo, sin considerar otra estrategia o sin hacer una integración de los conocimientos. Además, alguien que no esté familiarizado con esta rama de las matemáticas, podría encontrarse en un conflicto debido a que en su entorno no aparecen conceptos geométricos. Las cuestiones sobre las creencias son muy importantes, ya que ocupan un lugar poco estable entre los determinantes cognitivos y afectivos del comportamiento matemático.

Podría pensarse que las cuestiones afectivas no son importantes, o no tanto como las cuestiones cognitivas. Sin embargo, muchas personas muestran desinterés por las matemáticas, posiblemente porque no se consideran buenos resolutores de problemas. Su experiencia les dice que difícilmente tendrán éxito al resolver un problema y eso les genera el suficiente miedo como para negarse a emprender la resolución. Esta actitud es conocida como *matefobia*, y esto viene sucediendo desde que somos pequeños, porque se tiene la idea de que las matemáticas son muy difíciles, lo cual puede afectar el comportamiento ante la resolución de problemas matemáticos.

Capítulo 3

Método

En este capítulo se presenta una descripción de la metodología que guía esta investigación. En las secciones siguientes, se explican con detalle:

- Las características del estudio.
- Los sujetos de estudio.
- El instrumento de investigación.
- El análisis a priori del problema.

3.1. Características del estudio

Para alcanzar el propósito de esta investigación, analizar las estrategias y habilidades referidas al control empleadas por los profesores de matemáticas en la resolución de problemas, se hizo un estudio cualitativo. Los estudios cualitativos, de acuerdo con Sampieri, Fernández-Collado, y Baptista (2006), se fundamentan en método inductivo. Por ejemplo, un investigador entrevista a un individuo, analiza los datos obtenidos y concluye; puede entrevistar a cuántas personas considere necesario para comprender e interpretar lo que está buscando. Además, en este tipo de estudios se utilizan técnicas como la observación en ambientes cotidianos para los participantes, entrevistas abiertas, grabaciones de audio y/o video, entre otras. Los resultados no se reducen a números ni se analizan estadísticamente.

3.2. Sujetos de estudio

En esta investigación participaron dos profesores, a quienes se identifica como **A** y **B**. Ellos tienen formación en ingeniería química y especializaciones relacionadas con la educación; además cuentan con más de 20 años de experiencia docente. Asimismo, como el área de las matemáticas de interés para esta investigación es la geometría, los profesores seleccionados imparten el curso correspondiente a esta área. Los profesores fueron seleccionados a partir de la observación de su práctica docente, durante la cual ambos maestros mostraron preocupación por la problemática que se presenta respecto a la enseñanza por medio de la resolución de problemas. Además, sus prácticas docentes son contrastantes, ya que **A** y **B**, respectivamente, promovían con menor y mayor énfasis la resolución de problemas.

3.3. Instrumento de investigación

Un factor que influyó positivamente para determinar el instrumento de investigación, fue el estudio exploratorio que se hizo con estudiantes de la Lic. En Matemáticas de la Universidad de Sonora, a quienes se les plantearon distintos problemas de geometría por medio de una entrevista. Dicho estudio contribuyó en la refinación de las cuestiones y momentos esenciales a tratar al momento de plantearles el problema a los profesores. Al observar las estrategias que usaron los estudiantes, se eligió solamente un problema, para no prolongar demasiado el proceso de resolución.

El problema que se les planteó a los profesores, fue tomado de un examen de admisión al Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa (2009) de la Universidad de Sonora. Una vez determinado el problema, se hizo un análisis a priori para recopilar algunas de las posibles estrategias para su resolución, el cual se presenta con detalle en la Sección 3.4. Los criterios para seleccionar el problema fueron los siguientes:

- Que fuera un problema de carácter geométrico, ya que debe estar relacionado con el curso que el profesor imparte.
- Que pudiera resolverse haciendo uso de recursos matemáticos del bachillerato.
- Que pueda resolverse utilizando diversas estrategias y heurísticas.
- Que fuera un problema por resolver y no por demostrar. Es un problema por resolver, por lo que el profesor puede tener más posibilidades de resolverlo.

Para obtener la información necesaria para este estudio, se les planteó el problema a los maestros por medio de una entrevista basada en tareas con un diseño semiestructurado. En este tipo de entrevistas “un sujeto o grupo de sujetos hablan mientras trabajan en una tarea matemática o un conjunto de tareas.” (Maher y Sigley, 2014, p. 579), lo cual permite al investigador observar abiertamente todo el proceso de resolución, en si cómo un individuo recorre cada una de las etapas de éste y qué sucede durante la transición de una etapa a otra. Además, se puede comprobar si las acciones del individuo son consistentes con lo que dice. Asimismo, durante la entrevista existe mayor posibilidad de percibir las habilidades referidas al control, en particular la toma de decisiones, la cual no se alcanza a advertir en el registro del proceso de resolución en papel.

Durante el desarrollo de la entrevista se planteó un problema a los profesores, quienes no tenían idea de qué problema se trataba. La duración de las entrevistas fue de una hora aproximadamente. La principal instrucción que recibieron los profesores, fue que durante el proceso de resolución “piensen en voz alta”, con la intención de qué las ideas y las estrategias de solución quedaran explícitas. Para reunir una cantidad considerable de información sobre el proceso de resolución, tanto de los registrados en papel como los externados por el profesor al “pensar en voz alta”, las entrevistas fueron videograbadas.

3.4. Análisis a priori

En esta sección se presentan algunas posibles estrategias de resolución para el problema que se les planteó a los profesores. El propósito de hacer un análisis a priori, consiste en conocer las posibles estrategias o direcciones a las que pudiera recurrir el profesor al intentar resolver el problema, para así tener una idea de las posibles cuestiones a tratar durante la entrevista. El análisis se hizo de acuerdo con las heurísticas propuestas por Schoenfeld (1985), explicadas con detalle en el Capítulo 2; además, se hace alusión a algunos recursos que pudieran ser útiles en la resolución del problema. El problema es el siguiente:

Problema. *En la figura siguiente ABCD es un cuadrado de lado 3, la circunferencia es tangente a dos de los lados de este cuadrado y pasa por el vértice del cuadrado de lado 1. Encuentre la medida del radio del círculo.*

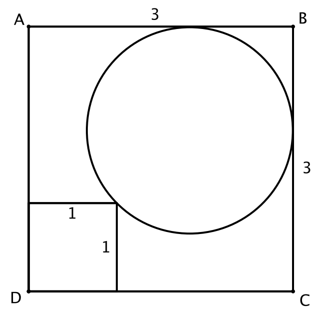

Figura 3.1

A continuación, se presentan algunas posibles estrategias de resolución al problema antes planteado.

Estrategia 1. Descomposición de la diagonal BD.

La diagonal BD puede descomponerse en diferentes segmentos, por lo que dentro de esta estrategia aparecen distintas descomposiciones y el uso de diferentes recursos.

Estrategia 1.1. Descomposición en tres segmentos y uso de recursos algebraicos.

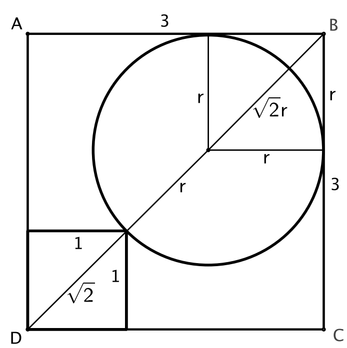

Figura 3.2

En la Figura 3.2 se observa que r representa al radio, y que la diagonal $BD = \sqrt{18}$ está descompuesta en tres segmentos de medidas: $\sqrt{2}$, r y $\sqrt{2}r$. Así, empleando recursos algebraicos, tenemos que

$$
\begin{aligned}
BD = \sqrt{18} &= \sqrt{2} + r + \sqrt{2}r \\
\Rightarrow \sqrt{18} - \sqrt{2} &= r + \sqrt{2}r \qquad\qquad \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \\
\Rightarrow 3\sqrt{2} - \sqrt{2} &= r(1+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Estrategia 1.2. Descomposición en tres segmentos. Subobjetivo: encontrar la medida del segmento k (ver Figura 3.3).

En esta estrategia se descompuso la diagonal BD en tres segmentos: el diámetro, la diagonal del cuadrado de lado uno y el segmento k. Como se puede ver en la Figura 3.3, se tienen las medidas de los dos primeros segmentos, por lo que se establece como subobjetivo calcular la medida de k. Para encontrar dicha medida se pueden establecer distintas relaciones y emplear diferentes recursos, tal como se muestra en las estrategias **1.2.1**, **1.2.2**, **1.2.3** y **1.2.4**.

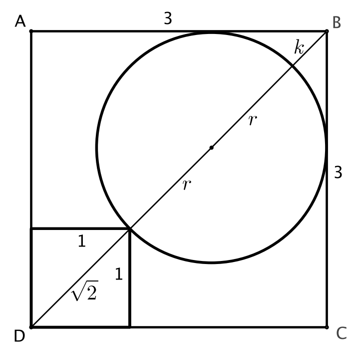

Figura 3.3

Estrategia 1.2.1. En la Figura 3.4 se puede ver que k es la diagonal de un cuadrado, la medida de cuyo lado puede expresarse como $3-x$, donde x representa la medida del cateto de un triángulo rectángulo isósceles, con hipotenusa igual a $\sqrt{2}+2r$.

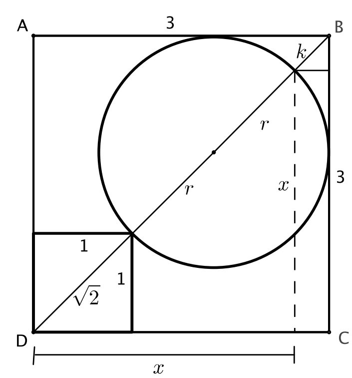

Figura 3.4

Aplicando el teorema de Pitágoras para encontrar x, se tiene que:

$$2x^2 = (\sqrt{2} + 2r)^2$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{(\sqrt{2} + 2r)^2}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{(\sqrt{2} + 2r)}{\sqrt{2}}$$

Una vez que se expresa x en términos de r, se procede a calcular k. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$k^2 = 2(3 - x)^2$$
$$\Rightarrow k^2 = 2\left(3 - \frac{\sqrt{2} + 2r}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$\Rightarrow k = \sqrt{2}\left(3 - \frac{\sqrt{2} + 2r}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2r$$
$$= 2\sqrt{2} - 2r$$

Ahora, es momento de sustituir k en $\sqrt{18} = \sqrt{2} + 2r + k$, sin embargo, al hacer la sustitución, se obtiene que $\sqrt{18} = \sqrt{18}$. Este resultado no es correcto, porque de serlo significaría que $\sqrt{18} = \sqrt{2} + 2r + k$ tiene una infinidad de soluciones, lo cual no puede ser cierto. Entonces, considerando la Figura 3.6, se puede ver que $2r = 2\sqrt{2}r - 2k$ (*), donde $2\sqrt{2}r$ es la medida diagonal de un cuadrado de lado $2r$.

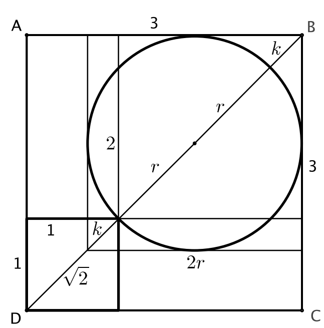

Figura 3.5

Sustituyendo k en (*), se tiene que:

$$2r = 2\sqrt{2}r - 2k$$
$$\Rightarrow 2r = 2\sqrt{2}r - 2(2\sqrt{2} - 2r)$$
$$\Rightarrow 2r = 2\sqrt{2}r - 4\sqrt{2} + 4r$$
$$\Rightarrow -2r = 2\sqrt{2}r - 4\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow -2r - 2\sqrt{2}r = -4\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow -2r(1 + \sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow r(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})}$$

Estrategia 1.2.2. De la Figura 3.6 se puede deducir que $k = 2\sqrt{2}r - 2\sqrt{2}$, donde $2\sqrt{2}r$ y $2\sqrt{2}$ son las medidas de las diagonales del cuadrado circunscrito y del cuadrado de lado dos, respectivamente.

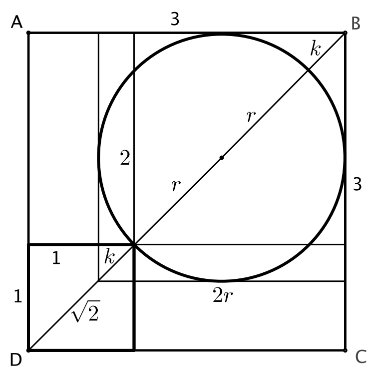

Figura 3.6

Una vez alcanzado el subobjetivo se procede a calcular la medida del radio. Se conoce la medida de la diagonal $BD = \sqrt{18}$ y tenemos que $\sqrt{18} = \sqrt{2} + 2r + k$. Entonces, sustituyendo k en esta última expresión, se tiene que:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2} + 2r + (2\sqrt{2}r - 2\sqrt{2})$$
$$\Rightarrow 3\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2r + 2\sqrt{2}r$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{2} = 2r + 2\sqrt{2}r$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{2} = r(\Big(2 + 2\sqrt{2}\Big)$$
$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{(2 + 2\sqrt{2})} = r$$
$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

Estrategia 1.2.3. En esta estrategia se considera la potencia de un punto respecto a una circunferencia; para este problema se considera el vértice B como un punto exterior a la circunferencia. Por una parte, la $Pot_B = k(k + 2r) =$

k^2+2rk. Por otro lado, se sabe que la potencia de un punto exterior es igual al cuadrado de la longitud de una tangente a la circunferencia desde dicho punto. Por lo que podemos considerar el triángulo rectángulo BOQ, donde BQ es tangente a la circunferencia; además $BQ = r$ y $OQ = r$, por lo que $BQ = OQ$ (ver Figura 3.7).

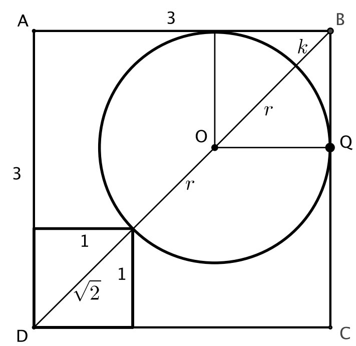

Figura 3.7

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$(r+k)^2 = 2(BQ)^2 \Rightarrow BQ = \frac{r+k}{\sqrt{2}}$$

Entonces, la $Pot_B = \frac{(r+k)^2}{2}$, y por lo tanto, $k^2+2rk = \frac{(r+k)^2}{2}$. Haciendo uso de recursos algebraicos, se tiene que

$$\begin{aligned} &2k^2+4rk = (r+k)^2 && \Rightarrow k^2+2kr+r^2-2r^2 = 0 \\ &\Rightarrow 2k^2+4rk = r^2+2kr+k^2 && \Rightarrow (k+r)^2-2r^2 = 0 \\ &\Rightarrow k^2+2kr-r^2 = 0 && \Rightarrow (k+r-\sqrt{2}r)(k+r+\sqrt{2}r) = 0 \end{aligned}$$

Para que se cumpla esta última ecuación, se debe tener $k+r-\sqrt{2}r = 0$ o $k+r+\sqrt{2}r = 0$. Así, tendríamos que $k = \sqrt{2}r - r$ o $k = -\sqrt{2}r - r$; pero esta última solución para k es negativa, por lo que consideraremos la primera. Sustituyendo $k = \sqrt{2}r - r$ en $BD = \sqrt{18} = \sqrt{2} + 2r + k$, se obtiene

$$\sqrt{18} = \sqrt{2} + 2r + \sqrt{2}r - r$$
$$\Rightarrow 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + r + \sqrt{2}r$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2})$$
$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

Estrategia 1.2.4. En la Figura 3.8, se puede ver que hay dos triángulos rectángulos isósceles, que son semejantes y cuyos catetos respectivos hemos denotado como a y b.

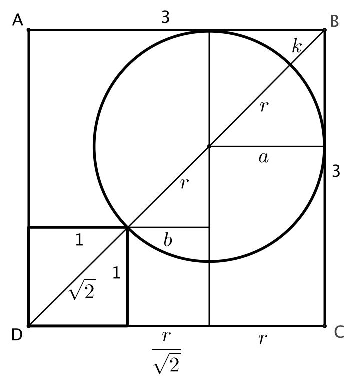

Figura 3.8

Considerando el criterio de semejanza, tenemos que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ y que $\frac{k+r}{r} = \sqrt{2}$. Entonces, $k = \sqrt{2}r - r$. Sustituyendo k en $BD = \sqrt{18} = \sqrt{2} + 2r + k$, se obtiene

$$\sqrt{18} = \sqrt{2} + 2r + \sqrt{2}r - r$$
$$\Rightarrow 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + r + \sqrt{2}r$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2})$$
$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

Estrategia 2. Descomposición del cuadrado $ABCD$ en áreas.

Para esta estrategia se descompuso el cuadrado $ABCD$ en distintas figuras geométricas, de las cuales se puede calcular su área.

Estrategia 2.1 En la Figura 3.9 se observa que el cuadrado $ABCD$ está descompuesto en tres figuras: el papalote y dos triángulos rectángulos con áreas iguales. Entonces, tenemos que Área de ABCD= Área del papalote + 2(Área del triángulo) (*).

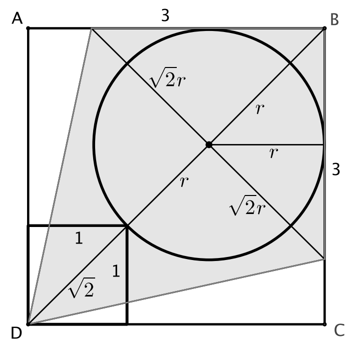

Figura 3.9

Se conoce el área de $ABCD$, que es igual a nueve, y de la Figura 3.9 se puede concluir que la diagonal $BD = \sqrt{18}$ está compuesta por tres segmentos: la diagonal del cuadrado de lado 1, el radio, y la diagonal del cuadrado de lado r. Respectivamente, las medidas de dichos segmentos son: $\sqrt{2}$, r y $\sqrt{2}r$; por lo que se tiene que $\sqrt{18} = \sqrt{2} + r + \sqrt{2}r$. Además, sabemos que la fórmula para calcular el área de un papalote es $A_p = \frac{D_1 D_2}{2}$ (**) . D_1 y D_2 son la diagonal mayor y la diagonal menor, respectivamente. Para este problema, $D_1 = \sqrt{18}$ y $D_2 = 2r\sqrt{2}$. Sustituyendo D_1 y D_2 en (**), se tiene que

$$A_P = \frac{(\sqrt{2} + r + \sqrt{2}r)(2r\sqrt{2})}{2}$$

Luego, los triángulos rectángulos tienen lados iguales a 3 y $3-2r$. Así, el área de un triángulo es $\frac{3(3-2r)}{2}$; por lo que el área de la suma de los dos triángulos es $3(3-2r)$. Sustituyendo en (*) las áreas del papalote y de los triángulos, se obtiene que

$$9 = \frac{(\sqrt{2} + r + \sqrt{2}r)(2r\sqrt{2})}{2} + 3(3 - 2r)$$
$$\Rightarrow 9 = 2r + 2\sqrt{2}r^2 + 2r^2 + 9 - 6r$$
$$\Rightarrow 0 = -4r + r^2(\sqrt{2} + 2)$$

$$\Rightarrow 4r = r^2(\sqrt{2}+2)$$
$$\Rightarrow 4 = r(\sqrt{2}+2)$$
$$\Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{2}+2}$$

Estrategia 2.2 Descomposición de $ABCD$ en distintas figuras geométricas.

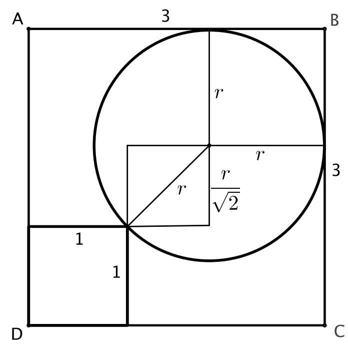

Figura 3.10

En la figura anterior se puede observar que el cuadrado $ABCD$ se descompuso en diferentes figuras. Dos figuras son cuadrados de lados 1 y r, respectivamente; las otras dos figuras son rectángulos iguales, con lados 2 y $3-r$. Entonces, tenemos que las áreas son:

Área del cuadrado $ABCD$ es 9.	Área del cuadrado de lado r es r^2.
Área del cuadrado de lado 1 es 1.	Área de un rectángulo es $6-2r$.

Así, se tiene que el Área $ABCD = 1 + r^2 + 2(r-2r)$; pero hay que tener en cuenta que los rectángulos se superponen formando un cuadrado de lado $2-r$, o bien $\frac{r}{\sqrt{2}}$ (ver Figura 3.10). Entonces

$$1 + r^2 + 2(6-2r) - \frac{r^2}{2} = 9$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{r^2}{2} + 12 - 4r = 9$$
$$\Rightarrow \frac{r^2}{2} + 13 - 4r = 9$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{2} + 4 - 4r = 0$$
$$\Rightarrow \frac{r^2}{2} - 8r + 8 = 0$$

Ahora, se tiene una una ecuación cuadrática, para encontrar sus soluciones apliquemos la fórmula general.

$$r_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow r_1 = 4 + 2\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad r_2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

La solución al problema es $r_2 = 4 - 2\sqrt{2}$, debido a que $r_1 > \sqrt{18}$, por lo tanto no puede ser el radio de la circunferencia.

Estrategia 3. Considérese el triángulo rectángulo de la Figura 3.12, el cual tiene catetos de medida a $2 - r$ y la hipotenusa es un radio del círculo.

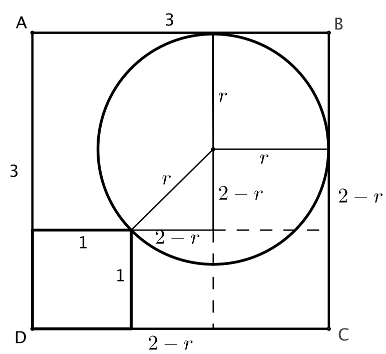

Figura 3.11

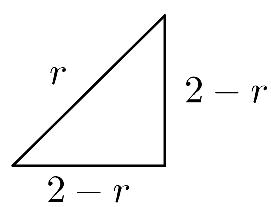

Figura 3.12

Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$r^2 = (2-r)^2(2-r)^2$$
$$\Rightarrow r^2 = 2(2-r)^2$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{2}(2-r)$$
$$\Rightarrow r = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}r$$
$$\Rightarrow r + \sqrt{2}r = 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow r(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Estrategia 4. En la Figura 3.13, se observa que $DO = \sqrt{2} + r$ es la medida de la diagonal de un cuadrado de lado $3 - r$.

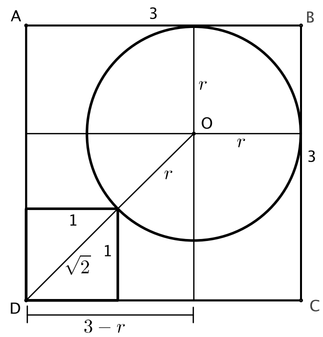

Figura 3.13

Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que

$$(DO)^2 = (3-r)^2 + (3-r)^2$$
$$\Rightarrow (DO)^2 = 2(3-r)^2$$
$$\Rightarrow (\sqrt{2}+r)^2 = 2(3-r)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}+r = \sqrt{2}(3-r)$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}+r = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}r$$
$$\Rightarrow r + \sqrt{2}r = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow r(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Capítulo 4

Análisis de datos y discusión de resultados

En este capítulo se presenta el análisis de los procesos de resolución de los profesores entrevistados, a quienes se identifican como profesora **A** y profesor **B**. Los análisis aparecen en las secciones 4.1 y 4.2, respectivamente. Las entrevistas se analizan de acuerdo a las categorías heurísticas y control, propuestas por Schoenfeld (1985) (ver Secciones 2.2 y 2.3); cada análisis se hace por fragmentos tomados de las transcripciones de las entrevistas. Los fragmentos fueron elegidos de acuerdo con la toma de decisiones respecto al cambio de estrategias. Al finalizar cada análisis, se presentan las conclusiones correspondientes al proceso de resolución de cada profesor.

El problema que se les planteó fue el siguiente:

Problema. *En la figura siguiente ABCD es un cuadrado de lado 3, la circunferencia es tangente a dos de los lados de este cuadrado y pasa por el vértice del cuadrado de lado 1. Encuentre la medida del radio del círculo.*

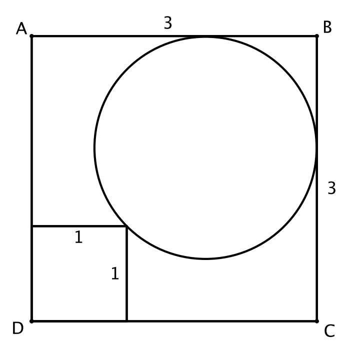

Figura 4.1

4.1. Análisis de resultados: profesor A

A continuación se presenta el análisis del proceso de resolución llevado a cabo por el profesor **A**, el cual se hace por fragmentos tomados de la transcripción de la entrevista.

4.1.1. Análisis: Fragmento 1

Al comenzar el proceso de resolución, **A** leyó el problema, exploró e identificó en la Figura 4.1 los datos que le proporcionaba el enunciado, ya fueran explícitos (por ejemplo las medidas de los lados de los cuadrados) o implícitos (la diagonal del cuadrado de lado 1 o el segmento de medida 2; ver Figura 4.2). **A** se encontraba en la etapa de análisis del problema y pareciera que las exploraciones que hizo tienen que ver con la idea de reunir elementos o trazos auxiliares que le ayuden a ubicar el radio, pero no alcanzó a situar el radio o a conjeturar cómo está relacionado con los datos. Después y durante aproximadamente un minuto continuó haciendo exploraciones en el dibujo; trazó una cuerda, una línea que pasaba por el centro y dibujó el centro (ver Figura 4.3). Da la impresión de que diseñó un plan, o bien que estableció un subobjetivo (o subproblema): calcular un radio a partir de las relaciones entre el centro y los trazos auxiliares.

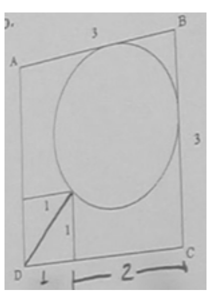

Figura 4.2

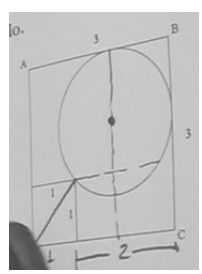

Figura 4.3

Hasta este momento, **A** estaba orientando la resolución del problema, ya que se fijó un subobjetivo y las intervenciones de los entrevistadores eran mínimas y no influenciaron las acciones de **A**. No obstante, la iniciativa de encontrar un radio y las dificultades para ubicarlo, le exigía seguir haciendo exploraciones sobre el dibujo que le permitieran visualizar por lo menos un radio y establecer un punto de partida para el cálculo de la medida del radio. En la búsqueda del radio, él procede de la siguiente manera (episodios 8, 9 y 10 del Anexo A):

> **A**: Ésta pasa por el centro [la línea paralela a BC] ...entonces éste vale uno y éste también vale uno [anota las medidas de las mitades de la cuerda, y traza el radio de la circunferencia como prolongación de la diagonal del cuadrado de lado uno (ver Figura 4.4)] ...aaah ...mmh ...éste también vale uno [señala el lado del cuadrado de lado uno] ...muy bien ...mmh ...[hace un silencio de 5 segundos].

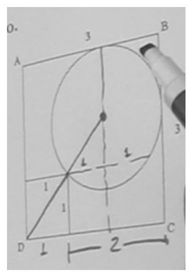

Figura 4.4

> **$\mathbf{E_1}$**: ¿Esos trazos los está haciendo con la idea de buscar el centro?

> **A**: Mmh, si pues, para buscar cómo está relacionado pues las medidas y decir dónde puedo yo encontrar pues la relación ...la relación de esta medida [el lado del cuadrado de lado uno] si conozco la completa [el lado del cuadrado $ABCD$], y ver esteee, cómo se relaciona con el diámetro, con el centro ¿no?, de la circunferencia, pues, nos está pidiendo el radio ¿no? ...el radio ...mmh ...éste no vale uno, y éste tampoco [tacha los valores de los segmentos de la cuerda (ver Figura 4.5)] ...[hace un silencio de 7 segundos].

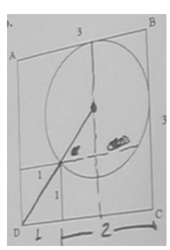

Figura 4.5

Cuando **A** dice "Ésta pasa por el centro ... entonces éste vale 1 y éste también vale 1", estaba conjeturando que el segmento paralelo a BC y que pasa por el centro de la circunferencia divide en dos partes iguales a la cuerda que trazó. En la búsqueda de recursos, **A** considera una falsa conjetura, y a pesar de que se observa que la cuerda no mide 2, no cae en cuenta del error; la suposición que hizo requería de una verificación acerca de la consistencia de los datos, la cual no percibió en este momento del proceso. Las acciones hechas por **A** se pueden clasificar dentro del comportamiento de **Tipo A**, definido por Schoenfeld (1985) como "Malas decisiones garantizan fallos" (ver a detalle en la Tabla 2.3, pág. 35).

Se explica ese tipo de comportamiento, porque él considera, en un primer momento, que la paralela a BC que pasa por el centro divide en dos partes iguales al segmento en CD de medida 2. Pero su consideración es falsa y la lleva a suponer que las medidas de las mitades de la cuerda miden uno; teniendo como consecuencia dos supuestos falsos a partir de la búsqueda de recursos que hace. Además, parece no tener como justificar por qué dichos segmentos miden 1 (más allá de la visualización), lo cual puede ser consecuencia de que tomara una dirección hacia una solución incorrecta.

Quizá con esta conjetura, **A** pretendía encontrar una relación entre la cuerda (o bien, la mitad de la cuerda) y el radio, y tal vez la conclusión de que tales segmentos medían 1 le resolvía el problema; aunque segundos después, como puede verse en su segunda intervención, menciona la relación que está buscando. Cuando dice: "puedo encontrar ... la relación de esta medida si conozco la completa", posiblemente se refiere a encontrar la medida del diámetro a partir de las medidas del cuadrado de lado 1 y del cuadrado $ABCD$, aunque pareciera no saber cómo encontrar dicha relación. En este momento da la impresión de que ya no está considerando tomar en cuenta las mitades de la cuerda, encaminándose ahora a la búsqueda de otra relación que le sea útil, entre el radio, la cuerda y las medidas antes mencionadas. Otra relación que pudo considerar, tiene que ver con lo que resulta al unir los trazos de la cuerda, el radio y la línea paralela a BC; se forma un triángulo rectángulo (véase la Figura 4.6), del cual **A** conoce la supuesta medida de los catetos (que miden 1), y de la hipotenusa (el radio). Sin embargo, no alcanza a usar dicha relación, porque se da cuenta de que los valores no son correctos.

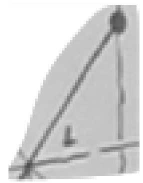

Figura 4.6

Segundos más tarde, sin explicación alguna, **A** señaló que los segmentos no medían 1 y tachó la medida como se ve en la Figura 4.5. Él dejó de lado la conjetura que hizo, ya que quizá verificó que ésta era falsa, porque no era consistente con los datos del problema. El hecho de que **A** desechara dicha conjetura en ese preciso momento, probablemente se debe a que detecta el error y no le encuentra sentido continuar con dicha conjetura; no obstante, requería de una revisión de la estrategia que estaba utilizando, quizá si **A** representaba de otra manera las medidas de las mitades de la cuerda pudo llegar a un resultado consistente con los datos. Pero, este mecanismo de control estuvo ausente en este momento del proceso, lo cual requería que **A** buscara otras relaciones entre los trazos.

Las acciones de **A** pueden clasificarse dentro del comportamiento de **Tipo B** "Comportamiento directivo neutral" (ver a detalle en la Tabla 2.3, pág. 35), por que una vez que desecha la conjetura, sigue desperdiciando elementos potencialmente útiles como el triángulo rectángulo de la Figura 4.6. Una estrategia que pudo percibir **A**, es la Estrategia 4 (véase el Análisis a priori del Capítulo 3). Dicha estrategia se centra en calcular el radio por medio del triángulo de la Figura 4.6. También, pudo considerar aplicar otra estrategia, como la Estrategia 1.2.5 (ver pág. 49) para la cual sólo le hacía falta calcular la diagonal del cuadrado de lado 1, considerando también la hipotenusa del triángulo de la Figura 4.6. Para emplear correctamente cualquiera de las estrategias antes mencionadas o cualquier otra, era necesario que **A** algebrizara y etiquetara el radio, pero parecía que estaba buscando datos numéricos que pudiera utilizar. Sin embargo, sólo puede hacer suposiciones o aproximaciones respecto a dichos datos, porque la mayoría de las medidas de los segmentos pueden expresarse en términos del radio, el cual no conoce.

Hasta este momento, **A** identificaba la incógnita del problema como un segmento sobre la diagonal BD (aunque no la etiquetaba) y no había trazado los radios paralelos a los lados del cuadrado $ABCD$, esto le impedía usar las medidas $3 - r$ y $2 - r$, requeridas en las posibles estrategias de resolución mencionadas previamente. Segundos después al diálogo presentado, **A** dice "voy a buscarle por otro lado" y completó el trazo de la diagonal BD (ver Figura 4.7). En este momento se confirma que él descarta la conjetura que tenía, para continuar haciendo exploraciones en el dibujo mediante otros trazos auxiliares.

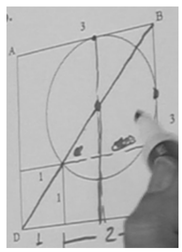

Figura 4.7

4.1.2. Análisis: Fragmento 2

Una vez que **A** descartó su conjetura inicial, trató de centrarse en la diagonal del cuadrado $ABCD$, como puede verse en el siguiente diálogo (episodios 12, 13 y 14 del Anexo A).

A: Voy a encontrar lo que vale todo esto [la diagonal BD] …¿qué otra cosa puedo encontrar? …mmh …bueno …[traza una línea paralela a AB por el centro de la circunferencia (ver Figura 4.8)] …mmh …[hace un silencio de 19 segundos].

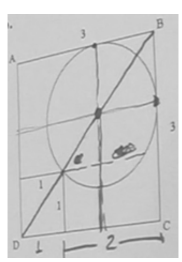

Figura 4.8

E_2: Cuando traza esta línea, ¿para qué o con qué intención lo hace? [señalando la línea paralela a AB y que pasa por el centro].

A: Bueno, esta línea pasa por el, es, pasa por el centro ¿no?, del círculo, o sea, quiero ver las relaciones ¿no?, que puedo encontrar, en las figuras ¿no?, que se puedan formar ... mmh ... éste vale 2 [señala el segmento que se forma al restarle a CD el lado del cuadrado de lado 1] ... voy a trazar otra ... [traza una línea paralela a AD, prolongando el lado del cuadrado de lado 1 (ver Figura 4.9)] hacia acá.

Figura 4.9

En las intervenciones de **A**, se percibe que el subobjetivo sigue siendo encontrar un radio a partir de las relaciones entre el centro y los trazos auxiliares, ya que las acciones que emprende y las relaciones que está buscando tienen que ver con el centro. Así lo muestra, por ejemplo, cuando dice "está línea ... pasa por el centro ¿no?", o bien cuando traza la línea paralela a AB que pasa por el centro (ver Figura 4.8). Asimismo, es claro que hará uso de otros trazos auxiliares para poder acercarse a dicho subobjetivo; ahora va a tomar en cuenta la medida de la diagonal BD, ya que de alguna manera puede ayudarle a ubicar el radio.

Hasta este momento, los hechos de **A** denotan sus esfuerzos por encontrar la medida del radio, o bien el diámetro. Parece que está explorando con trazos que le sean fáciles de calcular, lo cual se nota cuando dice "Voy a encontrar lo que vale todo esto [la diagonal BD]", ya que aparentemente tiene los recursos suficientes para encontrar la medida de BD; además de que pareciera que esté pensando en encontrar una relación entre BD y el radio, para encontrar una descomposición en segmentos. Sin embargo, continua haciendo exploraciones que parecieran infructuosas para encontrar la medida de BD, pero que son recursos que le ayudan a distinguir una posible descomposición de la diagonal BD; por ejemplo, considerando la diagonal del cuadrado de lado 2 (véase la Estrategia 1.1. pág. 40), aunque en este momento no pareciera que no ha identificado tales recursos.

El hecho de que de **A** siga explorando y de que aún no haya implementado una estrategia de descomposición, puede ser consecuencia de que quizá no percibía alguna manera de llevar acabo la estrategia, pero también tiene que ver con que sigue sin identificar la medida del radio en el dibujo; pareciera que éste sigue siendo un segmento sobre la diagonal BD y continúa sin etiquetarlo. Él parece no saber en qué segmentos puede descomponer la diagonal o por lo menos no propone una descomposición; no obstante, para identificar algunos trazos que puedan serle útiles, tardó tres minutos explorando y buscando más recursos, tal como se observa a continuación (episodio 15 del Anexo A).

A: Donde corta al círculo [refiriéndose a la cuerda. Traza la intersección de ésta con la circunferencia y, a partir de la intersección, dibuja una cuerda paralela a AD, aunque su trazo no fue completo (ver Figura 4.10)] ...okey ...okey, todo esto vale raíz de 18 [la diagonal del cuadrado $ABCD$] ...toda la línea completa [delinea con otro color la diagonal BD e indica en la hoja la medida de ésta como $\sqrt{18}$].

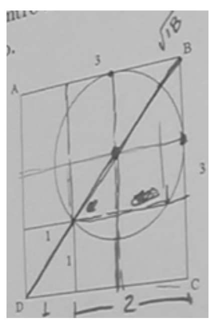

Figura 4.10

En la intervención anterior, **A** implementa parte de su plan: encontrar la medida de la diagonal BD. Se percibe un comportamiento de **Tipo D**, ya que para calcular la medida de BD, **A** aplicó el teorema de Pitágoras recurriendo a la memoria de largo plazo. Después el entrevistador le preguntó cómo encontró la medida y él ofrece la explicación siguiente (episodios 17 y 18 del Anexo A):

A: Aah, si porque es un, es un triángulo ¿no?, 3 al cuadrado y 3 al cuadrado [mientras eleva al cuadrado las medidas de los lados del triángulo rectángulo BCD], son nueve más nueve, 18 ¿verdad?, entonces aquí es, raíz de 18 ¿no? [señalando la diagonal] . . . a ver . . . muy bien, ¿en qué me ayuda eso? [mientras señala la diagonal] . . . un triángulo [el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa el segmento que une al vértice D y al centro (ver Figura 4.11)], otro aquí [el triángulo que tiene como hipotenusa la diagonal del cuadrado de lado 1], otro triángulo acá [el triángulo BCD], otro acá [delinea con otro color lo que en su figura pareciera ser un radio que va del centro a BC] . . . mmh . . . [hace un silencio de 10 segundos].

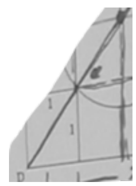

Figura 4.11

A: Okey . . . raíz de 2 [señalando la diagonal del cuadrado de lado 1] . . . raíz de 2 [escribe $\sqrt{2}$ en la diagonal del cuadrado de lado 1 (ver Figura 4.12)]. Entonces esto, de aquí a acá [delinea el diámetro que forma parte de la diagonal BD, así como sus extremos] . . . será . . . la raíz de 18, completa . . . menos raíz de 2, me da lo que está aquí ¿verdad? [**A** señalaba una parte de la diagonal (ven en la Figura 4.13 la parte que nosotros hemos enmarcado en una elipse)].

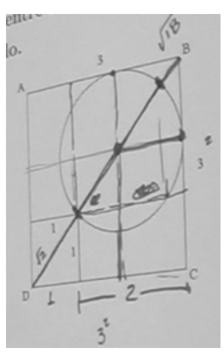

Figura 4.12

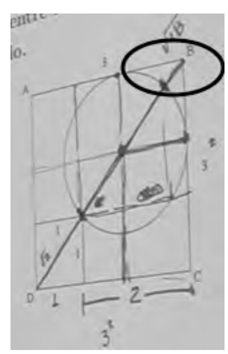

Figura 4.13

A Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo BCD para explicar cómo encontró la medida de la diagonal BD, y vuelve a la etapa de exploración. Parece que busca de qué manera puede aprovechar medida de la diagonal para una descomposición, no sólo porque dice "¿en qué me ayuda eso?", sino porque el análisis que hace del dibujo tiene que ver con ello. **A** señala los tres triángulos: el BCD, el que aparece en la Figura 4.11 y el que tiene como hipotenusa la diagonal del cuadrado de lado 1. Además, señala otro triángulo (ver Figura 4.14), lo cual queda en evidencia cuando recalca el radio paralelo a AB y se refiere al triángulo como "otro acá". Cuando **A** señala los triángulos mencionados, pareciera que está buscando una descomposición de BD, o bien una relación entre las hipotenusas de los triángulos y el radio, ya que puede calcular sus medidas con el teorema de Pitágoras. No obstante, pareciera no tener idea de cómo usar dichas relaciones para generar una descomposición.

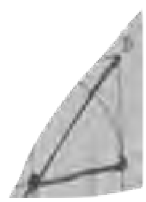

Figura 4.14

El nuevo subobjetivo de **A** es encontrar el diámetro a partir de la partición de BD en los segmentos formados por las hipotenusas de los triángulos, entonces empieza a hacer cálculos. **A** supone que ha encontrado una relación entre las diagonales y el diámetro, cuando dice que el diámetro es "la raíz de 18, completa . . . menos raíz de 2, me da lo que está aquí ¿verdad?". Aunque señala el segmento que hemos encerrado en una elipse en la Figura 4.13, en su discurso pareciera que pretende encontrar la medida de la diagonal del cuadrado de lado 2, o bien, que establece una doble igualdad en la que el diámetro= $\sqrt{18} - \sqrt{2} = x$, donde x representa al segmento que hemos encerrado en una elipse en la 4.13. **A** tiene una perspectiva global de cómo acercarse a la solución del problema y tiene un nuevo subobjetivo: encontrar la medida del segmento de la Figura 4.13 (véase la Estrategia 1.2, pág. 41, con la cual tiene similitudes). Sin embargo, estableció una relación incorrecta entre los segmentos y ahora intenta probarla.

El hecho de que **A** estableciera una conjetura falsa, pudiera estar relacionado con sus dificultades para visualizar la relación entre los segmentos considerados, o bien con su poca familiaridad para operar aritméticamente con ellos. Luego, **A** implementa su estrategia de descomposición para encontrar la medida del diámetro por medio de la conjetura que hizo. Escribió $\sqrt{18} - \sqrt{2}$ y descompuso en factores primos a $\sqrt{18}$ para simplificar la operación, lo que le da como resultado: $\sqrt{18} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; encontró que la medida del segmento que hemos encerrado dentro de una elipse en la Figura 4.13, mide $2\sqrt{2}$ (ver Figuras 4.15 y 4.16). Entonces, como ya tenía esta medida, la de BD y la de la diagonal del cuadrado de lado 1, dijo "el diámetro, entonces, sería ... sería la diferencia ¿verdad?"; refiriéndose a la medida del diámetro sería la diferencia entre las tres medidas.

Figura 4.15

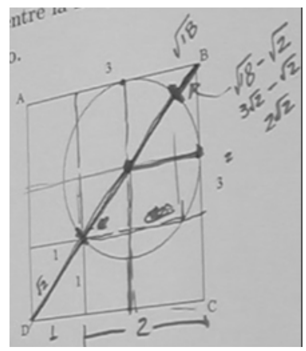

Figura 4.16

Llama la atención que **A** no detecte su error, a pesar de que su resultado no es consistente con el dibujo, en donde puede verse que un segmento que mide $2\sqrt{2}$ es más grande que otro cuya medida es $\sqrt{2}$. De acuerdo con Schoenfeld (1985), este hecho tiene que ver con la verificación de la solución, en particular con revisar si un resultado "¿Es conforme a las estimaciones o predicciones razonables?" (ver Tabla 2.1, pág. 28). De esta manera, pareciera que para **A** es suficiente encontrar un resultado, y no concibe la posibilidad de verificar si éste es correcto o consistente con los datos del problema.

Hasta ese momento **A** seguía pensando que su conjetura era correcta y procedió a hacer las operaciones para encontrar la medida del diámetro, como se muestra en la siguiente intervención (episodio 20 del Anexo A).

A: Raíz de 18, sería la raíz de 18 [escribe d=$\sqrt{18}$]. El diámetro ¿verdad? El diámetro sería la raíz de 18, que es completo [la diagonal BD], menos la raíz de 2 [escribe

$-\sqrt{2}$ (ver Figura 4.17)], menos [escribe $-$] este pedacito [el segmento de la Figura 4.13] que sería ... a ver, en que me estoy equivocando ... 18, menos raíz de 2, aah no, es todo esto completo [la diagonal del cuadrado de lado 2].

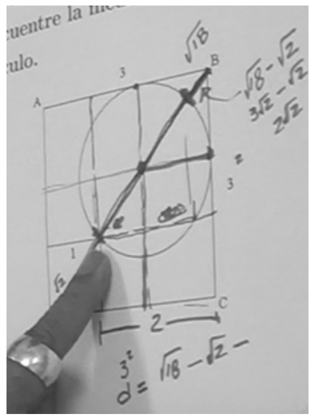

Figura 4.17

Como se puede ver en la intervención anterior, **A** está anotando las medidas de las diagonales en cuestión, cuando se da cuenta que algo no va bien, por lo que el proceso de resolución se interrumpe, aunque él no menciona alguna causa. Lo que posiblemente sucede es que percibió que si $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ y a ésta se le resta $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, entonces el resultado es igual a cero. El hecho, de que **A** se de cuenta de que la solución que encontró no era correcta, tiene que ver con verificar la solución, en particular con la pregunta "¿Es conforme a las estimaciones o predicciones razonables?" (ver Tabla 2.1, pág.28); quizá él pensó que el resultado no era consistente con lo que buscaba, o bien porque el diámetro no puede medir cero. En seguida, **A** decide retomar el proceso de resolución analizando en el dibujo las diagonales que estaba considerando, y notó que la diferencia entre la diagonal BD y la diagonal del cuadrado de lado 1, es igual a la diagonal del cuadrado de lado 2.

Sin embargo, no accede a los mecanismos de autorregulación, ya que no retrocede para revisar lo que hizo y así determinar en qué se equivocó o qué estaba omitiendo; y aunque todavía hace algunas exploraciones en el dibujo, como señalar el centro o el cuadrado circunscrito, llega un momento en el que decide volver a empezar, haciendo exploraciones en un nuevo dibujo. El hecho de que **A** reinicie la etapa de exploración muestra un comportamiento de **Tipo B**, ya que no puede percibir alguna relación entre los trazos que tiene o no sabe cómo alcanzar el subobjetivo de encontrar la medida del "pedacito" a partir de ellos. Hasta ese momento, él aún no abandona el subobjetivo, ni la estrategia de descomposición de la diagonal.

4.1.3. Análisis: Fragmento 3

De todos los trazos que tenía en el fragmento anterior, en el nuevo dibujo, **A** consideró solamente el trazo de la diagonal BD, así como los segmentos que forman parte de ésta y que miden $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$. Hace exploraciones incluyendo trazos de líneas paralelas a los lados AD y BC, descomponiendo a $ABCD$ en una cuadrícula . Segundos después descompone la diagonal BD en tres segmentos que miden $\sqrt{2}$ cada uno (ver Figura 4.18), posiblemente con la idea de encontrar un diámetro que forme parte de la diagonal, a partir del subobjetivo que tiene en el fragmento anterior: encontrar la medida del segmento, que hemos encerrado en una elipse, en la Figura 4.19. Pero ninguna de sus acciones muestra algún indicio de que pretenda traducir el problema al álgebra; no etiqueta el radio, ni el diámetro, ni el "pedacito". Quizá pretende encontrar valores numéricos que le permitan hacer cálculos. Como no encuentra datos numéricos, necesita seguir explorando para encontrar una relación entre los segmentos.

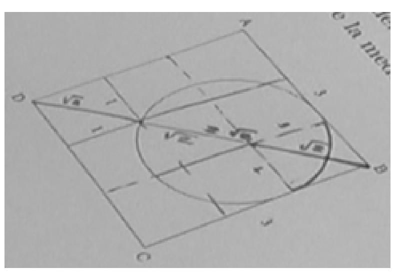

Figura 4.18

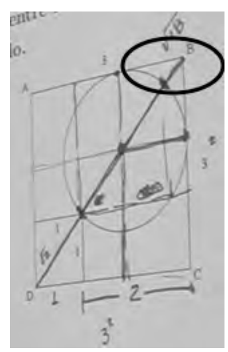

Figura 4.19

Luego, **A** hace exploraciones en el cuadrado de lado 1 con vértice en B, con la idea de reunir elementos que le permitan establecer alguna relación entre el radio y los segmentos conocidos y desconocidos. Mientras, indica en el dibujo las medidas de los lados del cuadrado de lado 1, identifica el arco de una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 2, el cual señala sin hacer trazos; concluye que el centro de esta nueva circunferencia es un vértice del cuadrado de lado 1 con vértice en B y recalca un radio (ver Figura 4.20). En primera instancia, pareciera que **A** está utilizando una heurística que se corresponde con lo que menciona Schoenfeld (1985), acerca de considerar un problema relacionado con el problema original, pero no es así. O por lo menos no hay indicios de que haya pensado la relación entre los nuevos segmentos de su descomposición y los que tenía antes, entre los que se contaba el diámetro. Sólo está buscando relaciones en las que pueda hacer uso de sus recursos, o bien, identifica trazos correspondientes con recursos que están en su memoria de largo plazo (como el arco de la circunferencia), pero sin saber cómo puede utilizarlos de acuerdo a las condiciones de este problema.

Figura 4.20

En la búsqueda del radio, él procede de la siguiente manera (episodio 53 del Anexo A):

A: O sea si fuera una circunferencia así ¿verdad? [una circunferencia inscrita en el cuadrado de lado 2] ... conocer este radio [lo que a su juicio es un radio (Figura 4.20)] a través del ángulo [señala un ángulo del cuadrado de lado uno con vértice en B (ver Figura 4.21)], éste vale 45 [escribe en el ángulo el número 45], y tengo radio 1 [señala un lado del cuadrado de lado 1 con vértice en B, e indica que mide 1], tengo ra ... aah, pues es que este radio vale 1, éste, este pedacito vale 1 [señalando lo que él considera que es el radio en el episodio 51, Figura 4.20, y escribe el número 1].

Figura 4.21

En la intervención anterior, se observa que **A** pretende encontrar la medida del radio de la nueva circunferencia a partir de un ángulo de $45°$, y probablemente piense hacerlo considerando el arco de la circunferencia, o bien el área de un sector circular de $45°$; quizá con la idea de establecer una ecuación y de ahí despejar el radio. No obstante, sigue sin etiquetar el radio que va en dirección al vértice B, y las relaciones que encuentre parecen necesitar algebrizar; ya que los datos que tiene no le son útiles directamente, porque a partir de ellos podría encontrar relaciones redundantes. También, en la intervención de **A**, se percibe que cuando está buscando relaciones entre los trazos para encontrar la medida del radio, inmediatamente se percata de que el radio mide 1; quizá porque observó que los lados del cuadrado de lado 1, con vértice en B, también eran radios de la nueva circunferencia. Ahora, **A** ya conoce la medida del radio de la nueva circunferencia, pero da la impresión de que no tiene una estrategia clara, como se puede ver en el siguiente diálogo (episodios 57-61 del Anexo A):

A: Es un cuadrado ¿no?, y tiene ... aaah, pero es que no es un ángulo central éste.

$\mathbf{E_1}$: No, no es, ¿verdad?

A: [El profesor **A** tacha el valor de $45°$ del ángulo, que había escrito en el episodio 53] éste no es un ángulo central. Si. Por ahí no va, por ahí no va.

$\mathbf{E_1}$: Porque el centro no está ahí ¿verdad?

A: No es, no, no está ahí.

Cuando **A** dice "pero es que no es un ángulo central éste", está pensando en la circunferencia del problema original; quizá al observar el cuadrado de lado uno con vértice en B, percibe que el vértice opuesto a B no es el centro, lo cual confirma que él no es consciente de que está analizando una circunferencia diferente, porque el ángulo de $45°$ sí es central para la circunferencia de radio 1. **A** abandona la estrategia cuando dice "por ahí no va", mostrando un comportamiento de **Tipo B**, ya que pudo pensar que si sus consideraciones son falsas llegaría a un resultado erróneo. No obstante, los mecanismos de autorregulación están ausentes, porque no reconstruye sus consideraciones para identificar en qué se estaba equivocando; no se detiene a cuestionarse acerca de por qué pensó que se trataba de un ángulo central, para así remediar las dificultades.

Segundos después, **A** hace exploraciones en el dibujo e identifica el diámetro; y se da cuenta de que puede encontrarlo a través de la diagonal que mide $2\sqrt{2}$. En la búsqueda del diámetro, percibe que la diagonal del cuadrado de lado 2, la cual mide $2\sqrt{2}$, está compuesta por el diámetro y el "pedacito" que tiene como subobjetivo al inicio de este fragmento. Así, conjetura que el diámetro es menor que $2\sqrt{2}$ y por consecuencia el radio tiene que ser menor que $\sqrt{2}$ (ver Figura 4.22).

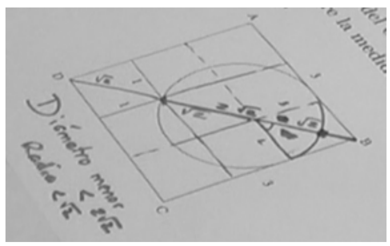

Figura 4.22

Aunque ubica el diámetro, sigue sin denotarlo como una incógnita algebraica, lo cual lleva al entrevistador a intervenir con sugerencias que le permitan etiquetar algebraicamente la incógnita; pero él parece no tener mayor preocupación por indicar el radio en el dibujo, tal como se muestra a continuación (episodios 81-84 del Anexo A):

E_1: Un problema aquí [en la figura]es que no tiene el radio a la vista ¿no?, que digamos es lo que está buscando.

A: Si.

E_1: Ese es un problema, porque, digamos, eh . . . cuando trata de relacionarlo con otras cosas pues no, no se ve dónde está ¿verdad?, ahí.

A: No. Okey . . . [hace un silencio de un minuto, aproximadamente].

Luego, **A** traza un cuadrado circunscrito a la circunferencia y señala los dos "pedacitos" que quedan fuera de ésta (ver Figura 4.23), pero no visualiza alguna relación, posiblemente porque no tiene datos directos y numéricos que le permitan hacer cálculos para encontrar el diámetro. A partir del trazo del cuadrado circunscrito y del hecho de que **A** no necesite etiquetar el radio, el entrevistador le hace sugerencias para que él explore y pueda traducir al álgebra el problema. Algunas de las sugerencias e intervenciones del entrevistador son: "Este cuadrado nuevo que trazó [mientras señala el cuadrado circunscrito a la circunferencia], ¿qué medidas tiene?", "Y el círculo de éste, ¿qué radio tiene?" Así, **A** etiqueta el radio como *radio* (ver Figura 4.24).

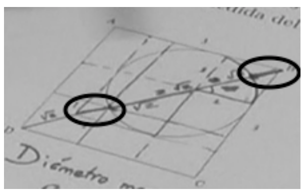

Figura 4.23

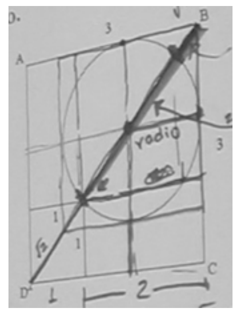

Figura 4.24

Las intervenciones posteriores del entrevistador pretenden que **A** establezca una relación entre las diagonales del cuadrado circunscrito de lado $2r$ y el cuadrado de lado 2. Véanse las siguientes intervenciones:

119.$\mathbf{E_1}$: A ver. Si usted tiene un círculo inscrito en un cuadrado, ¿no? Si quiere dibújelo ahí aparte. [el profesor **A** dibuja en la hoja de papel bond (Figura 4.25)]. Tiene un círculo inscrito en un cuadrado, ¿no?, entonces . . . [hay un silencio mientras el maestro dibuja] . . . si el círculo tiene radio r, ¿el cuadrado cuánto medirá?

120. **A**: Pues $2r$ [escribe $2r$ en la medida del lado del cuadrado que dibujó (ver Figura 4.25)].

Figura 4.25

136. **A**: Mjm. Y el más pequeño, pues, mide 2. Entonces, ahora si, ahora si puedo sacar ... puedo sacar este valor [la medida diagonal del cuadrado circunscrito], y puedo sacar éste de aquí [la diagonal del cuadrado de lado 2], el valor del cuadrado grande, la diagonal del cuadrado grande [el cuadrado circunscrito], le quito la diagonal del cuadrado de lado 1 [el cuadrado de lado 2], y entonces ya tengo este pedacito [el segmento que hemos encerrado en una elipse en la Figura 4.26]y ya puedo encontrar ... el diámetro, y el radio.

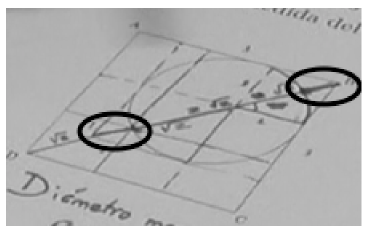

Figura 4.26

En las intervenciones presentadas anteriormente, puede parecer que el entrevistador induce a **A** y que él es quien orienta la situación, en vez de que él lo haga. Si bien, hasta momentos previos a las sugerencias del entrevistador, **A** orientaba el proceso, pero de seguir así posiblemente no hubiera identificado las relaciones necesarias para resolver el problema. No obstante, como puede verse en la intervención 136, **A** toma de nuevo el control del proceso y lo orienta hacia su subobjetivo: encontrar la medida del "pedacito". Él tiene un plan y establece una relación de manera adecuada, considerando medidas que sabe que puede calcular, lo cual es muestra de un comportamiento de **Tipo C**. Además, a diferencia de los intentos anteriores, es posible que tenga éxito en la resolución; ahora tiene los recursos suficientes para llegar a un resultado correcto.

Ésta es una estrategia en la que se pretende encontrar la medida del radio considerando segmentos que forman parte de la diagonal BD, los cuales son: las diagonales del cuadrado de lado 2, del cuadrado de lado $2r$ y del cuadrado de lado 1, así como la medida del "pedacito". Posteriormente, **A** procede a hacer cálculos y expresa las diagonales de los cuadrados, de lados $2r$ y 2, como $\mathrm{D}_{CM} = \sqrt{8r^2}$ y $\mathrm{D}_{CP} = \sqrt{8}$, respectivamente (ver Figura 4.27); y muestra un comportamiento de **Tipo D**, ya que aplica el teorema de Pitágoras recurriendo a la memoria de largo plazo. Una vez que **A** conoce las medidas de las diagonales, implementa la estrategia mencionada anteriormente. Primero calcula la medida del "pedacito", la cual está representada por la diferencia de la medida de las diagonales: $\sqrt{8r^2} - \sqrt{8}$(ver Figura 4.28); posteriormente, expresa el diámetro como $r\sqrt{8} - 2(r\sqrt{8} - \sqrt{8})$ (ver Figura 4.29). **A** muestra un comportamiento de **Tipo D**; accede a los procedimientos de manera adecuada y sin complicaciones.

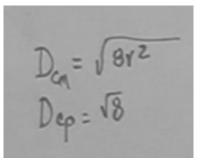

Figura 4.27

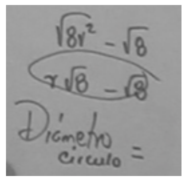

Figura 4.28

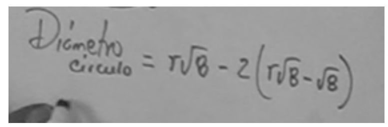

Figura 4.29

Como la incógnita del problema es la medida del radio, para **A** es suficiente dividir la medida del diámetro entre 2, como se muestra a continuación (episodio 142 del Anexo A):

> **A**: Y el radio ... sería sobre 2 [divide entre 2 la expresión que tenía en la Figura A.50, $r\sqrt{8} - 2(r\sqrt{8} - \sqrt{8})$, y sobrescribe en "Diámetro círculo =" la palabra "Radio" (ver Figura 4.30)], el radio del círculo ... si, no, no puedo pasar de lo ... me falta pasar, de lo aritmético a lo algebraico, mmh, me cuesta trabajo.

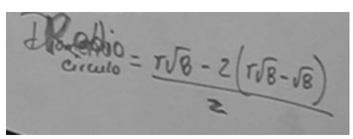

Figura 4.30

Como se observa en la intervención anterior, **A** plantea una ecuación en términos de r, pero no la resuelve. Sin embargo, pareciera que dicha ecuación le es suficiente, y no se da cuenta de que el radio es un número que todavía no encuentra. Además, él confiesa que tiene dificultades para traducir al álgebra este tipo de problemas, lo cual ha sido evidente a lo largo del proceso. Segundos después, se abre un diálogo entre **A** y los entrevistadores, en el que se le requiere a **A** que verifique la solución, o bien, que compruebe que es consistente con los datos; con la intención de que él perciba que aún no encuentra el resultado.

4.1.4. Análisis: Fragmento 4

Atendiendo la petición del entrevistador, de verificar la solución, **A** hace el dibujo de un cuadrado circunscrito de lado $2r$, traza su diagonal, la circunferencia y el cuadrado de lado 2 (ver Figura 4.31).

Figura 4.31

Él vuelve a analizar la estrategia que empleó para hallar la medida del "pedacito", como se puede ver a continuación (episodio 192 del Anexo A).

> **A**: Porque es un 2, y empieza desde el cuadrito aquí, aquí está el cuadrito [refiriéndose al cuadrado de lado 1 y traza éste (ver Figura 4.32)], de lado 1. Y entonces tenemos ... es la roja [refiriéndose a la diagonal del cuadrado de lado 2], como la raíz de 8 [indica en el dibujo el valor $\sqrt{8}$]. Aquí está el [indica el centro en la figura], el radio [delinea el radio de la circunferencia] ... okey [vuelve a indicar el centro] ... entonces ... la verde [la diagonal del cuadrado circunscrito] ... la verde ... menos la roja [la diagonal del cuadrado de lado 2], me da este pedacito [el segmento que hemos encerrado dentro de una elipse en la Figura 4.33].

Figura 4.32

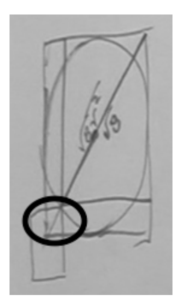

Figura 4.33

A: Aquí está [mientras señala la expresión de la Figura 4.28, $\sqrt{8r^2} - \sqrt{8}$], la verde menos la roja [se refiere a la diagonal del cuadrado circunscrito menos la diagonal del cuadrado de lado 2].

En la intervención de **A**, se percibe que está revisando y reconstruyendo a detalle el razonamiento que hizo y la estrategia que implementó; pareciera que la idea que tiene de verificar la solución se corresponde con comprobar que todos los procedimientos y los recursos fueron elegidos adecuadamente. Como, aparentemente, **A** encontró el radio, el entrevistador orienta el proceso de resolución con el propósito de guiarla para analizar otra posible estrategia de descomposición de la diagonal BD. En la búsqueda de alguna relación entre los trazos para descomponer la diagonal, sucede lo siguiente (episodios 204-205 del Anexo A):

E$_1$: Y de qué pedazos le convendría, digamos, eh. ¿De qué pedazos le convendría descomponerla [descomponer la diagonal]?

A: Pues en estos dos [mientras señala la diagonal del cuadrado de lado 1 y la diagonal del cuadrado de lado 2]. Entonces, aquí tenemos, dijimos de aquí a aquí era la raíz de 2 [indica en el dibujo la medida $\sqrt{2}$], la raíz de 2, hasta acá [delinea la diagonal del cuadrado de lado 1]. Y entonces, de aquí hasta acá [señala la diagonal del cuadrado de lado 2], sería, raíz de 18, menos la raíz de 2 [el profesor **A** escribe $\sqrt{18} - \sqrt{2}$ (ver Figura 4.34)] ...y entonces ...la verde [la diagonal del cuadrado circunscrito], la verde menos ésta [señala el segmento que va del centro al vértice B], la verde menos esto, es igual a esto [igual a $\sqrt{18} - \sqrt{2}$], ¿y ya saco el radio? Ay, ¿es así?

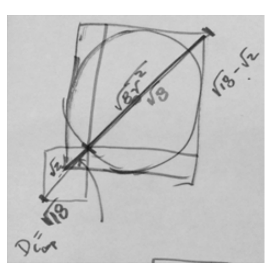

Figura 4.34

En la intervención anterior, cuando **A** encuentra la medida de la diagonal del cuadrado de lado 2, lo hace de manera correcta, recurriendo al teorema de Pitágoras en la memoria de largo plazo. Además, da la impresión de que ya no tiene el subobjetivo de encontrar la medida del "pedacito", ya que no lo considera en la relación que establece cuando conjetura que $2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r - \sqrt{2}r = \sqrt{2}r$, que es falsa. Dicha conjetura la hace cuando dice: "la verde menos ésta [señala el segmento que va del centro al vértice B], es igual a esto [igual a $\sqrt{18}-\sqrt{2}$], ¿y ya saco el radio?"; lo que sucede es que **A** no establece una relación adecuada. Quizá lo que pretende es establecer una relación como la de la Estrategia 1.1 considerada en el análisis a priori (ver pág. 40), en la que se descompone la diagonal BD en tres segmentos (r, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}r$) y se obtiene la igualdad $\sqrt{18} - \sqrt{2} = r + \sqrt{2}r$. Pero, a diferencia de la Estrategia 1, **A** considera la diagonal del cuadrado de lado $2r$, que la conduce a una conjetura falsa.

Segundos después, el entrevistador orienta nuevamente la situación, por medio de sugerencias, con la intención de que que **A** analice otra posible heurística para descomponer la diagonal BD. Dicha estrategia tiene similitudes con la Estrategia 1.2 del análisis a priori (ver pág. 41), y que toma en cuenta la diagonal del cuadrado de lado 1, el diámetro y el "pedacito". Como **A** ya encontró previamente la medida del "pedacito", lo único que necesita es hacer operaciones y establece que $\sqrt{18} = 2r + \sqrt{2} + 2\sqrt{2}r - 2r$ para despejar el radio, donde $2\sqrt{2}r - 2r$ representa a la medida del segmento (ver episodios 239-244 del Anexo A), como se puede ver a continuación (episodio 245 del Anexo A):

> **A**: Si, ajá. Ah, si, era, 8 r cuadrada menos . . . 8 r cuadrada, menos, $2r$ . . . entonces aquí sería, más [continúa escribiendo enseguida de la expresión, escribe $+\sqrt{8r^2}$], 8, la raíz ¿no?, de 8 r cuadrada . . . menos, $2r$ [escribe $-2r$ (ver Figura 4.35)].

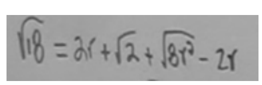
$$\sqrt{18} = 2r + \sqrt{2} + \sqrt{8r^2} - 2r$$

Figura 4.35

La medida que **A** dice que es del "pedacito" no es correcta, porque ésta representa a la medida de dos "pedacitos", lo cual muestra la ausencia de los mecanismos de control, ya que no tiene mayor cuidado ni supervisa el análisis que hace de las relaciones entre los segmentos, además de que ya antes calculó dicha medida. Como él está teniendo tropiezos al analizar y el proceso puede interrumpirse, el entrevistador interviene con la idea de que **A** observe que ya había encontrado la medida del "pedacito" y se la indica en el primer dibujo que hizo; él corrige la expresión y sustituye $2r$ por $\sqrt{8}$. Además, le pregunta cuánto valdrá r. De esta manera, y nuevamente, es él quien orienta en cierta medida el proceso (ver episodios 246-268 del Anexo A).

Puede pensarse que **A** no necesita de un comportamiento de control, porque ya sabe que debe encontrar la medida de r y quizá acceder a los procedimientos correctos en la memoria de largo plazo. Y, en efecto, en un primer momento muestra un comportamiento de **Tipo D** cuando simplifica y factoriza la expresión que tiene (ver Figura 4.36). Sin embargo, segundos después muestra un comportamiento de **Tipo C** cuando dice "mejor voy a juntar las r's, éste no me va a llevar a nada", refiriéndose a que la factorización que está considerando no es la adecuada; quizá porque percibió que ésta no le permite despejar r.

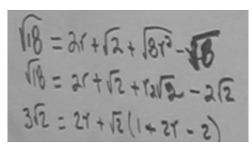

Figura 4.36

Y así, desecha la expresión factorizada, como puede verse a continuación (episodio 269 del Anexo A).

> **A**: Entonces ... tres veces raíz de 2 [mientras escribe $3\sqrt{2}$] ... menos $2r$ [escribe $-2r$], es igual, a la raíz de 2, por 1 más $2r$, menos 2 [mientras escribe $= \sqrt{2}(1 + 2r - 2)$ (ver Figura 4.37)] ... mmh, mmh, mejor voy a juntar las r's, éste no me va a llevar a nada [encierra entre paréntesis las ecuaciones de la Figura 4.38].

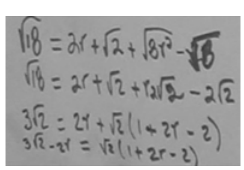

Figura 4.37

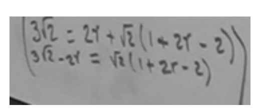

Figura 4.38

Después (ver episodios 274-276 del Anexo A), **A** muestra un comportamiento de **Tipo D** cuando desarrolla procedimientos, tales como, asociar los términos semejantes, factorizar y despejar r (ver Figura 4.39); los cuales parecen formar parte de la memoria de largo plazo. Segundos después (ver episodio 279 del Anexo A), el entrevistador le indica que divida entre 2 el numerador y el denominador de la expresión que halló, para simplificarla; así encuentra que $r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ (ver Figura 4.40; ver episodio 279 del Anexo A).

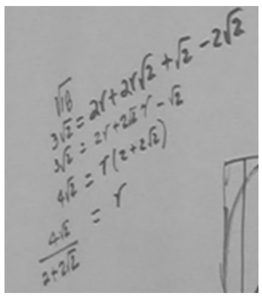

Figura 4.39

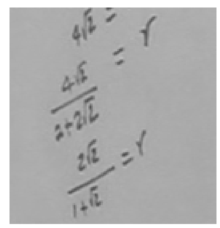

Figura 4.40

Enseguida, el entrevistador hace una recapitulación acerca de las estrategias que **A** consideró y abandonó, en particular acerca del cambio de la primera estrategia en la que quiere encontrar la medida del "pedacito" (ver episodios 299-313 del Anexo A). El diálogo fue el siguiente:

E₁: Entonces, ¿por qué abandonó esta estrategia? [refiriéndose a la estrategia que empleó en la hoja de registro 1].

A: Mjm. Mmh, bueno, la abandoné porque ya, aritméticamente, o sea, mi pensamiento aritmético, ya no me permitió avanzar pues, de esta manera. Entonces, ya cuando yo recibo la ayuda de, expréselo pues, si esto es el radio, pues es r, o sea, ya, al momento de, de brincar ¿verdad?, a la expresión, a expresarlo, esteee, de una manera algebraica, entonces, ya un poquito pues … pero éste es el problema pues, que todavía no desarrolla uno muy bien el pensamiento algebraico.

En la intervención anterior, **A** atribuye de nuevo sus dificultades a sus limitaciones para modelar el problema algebraicamente, la cual estuvo presente en la mayor parte del proceso de resolución, ya que pretende encontrar datos numéricos y directos que le permitan conocer numéricamente la medida del radio. A pesar de los intentos fallidos y de que el proceso se veía interrumpido, él no abandonaba esta idea en la búsqueda del radio, sino hasta que el entrevistador le suguiere etiquetarlo.

4.1.5. Conclusiones

Esta sección está centrada en contrastar el proceso de resolución del profesor **A** con el de un experto en la resolución de problemas, con el propósito de obtener información suficiente para hablar acerca de la experiencia de él en la resolución de problemas. En las figuras 4.41, 4.42, 4.43 se muestra por fragmentos el proceso de resolución llevado a cabo por **A**; al lado izquierdo de cada figura se introdujo el proceso de resolución de un individuo experto, de acuerdo con Schoenfeld (1985), con la intención de contrastar ambos. Se identifica a un individuo experto como **S**. En la Sección 2.3, se explica a detalle cada una de las etapas que aparecen en el proceso de **S**.

Una de las principales diferencias entre ambos procesos, es la cantidad de estrategias que se emplean. Por un lado, el proceso de **S** corresponde solamente a una estrategia, probablemente debido a la presencia del control, así como a la colección de heurísticas que tiene un experto en la resolución de problemas. Por otro lado, en el proceso de **A**, la toma de decisiones influyó tanto positivamente como negativamente, teniendo como consecuencia que empleara cuatro estrategias, debido a que algunos intentos fueron fallidos. Pareciera que dichos intentos tienen que ver con el catálogo de heurísticas que él tiene, por ejemplo, en la exploración se limita a introducir trazos auxiliares. Además, cuando obtiene nueva información relevante en dicha fase, la desecha o le pasa inadvertida, por lo que continúa explorando. Lo contrario sucede con **S**, quien al encontrar nueva información en la exploración, va a la etapa de análisis para valorar otra perspectiva del problema; gracias a su inventario de heurísticas, en especial la de considerar problemas modificados.

En el esquema de la Figura 4.41 puede observarse el papel central que juega la planificación en el caso de **S**. De manera contraria, en el proceso de **A**, la exploración es el “corazón” del proceso, debido a que sus intentos por elaborar un plan son muy débiles. Así, sus dificultades para diseñar un plan la llevan una y otra vez a la exploración, porque no puede generar una estrategia exitosa. No obstante, las diferencias entre ambos procesos no se restringen a la colección de heurísticas del individuo, o a sus acciones durante el proceso; también se perciben diferencias respecto a lo que parece tener que ver con los sistemas de creencias. Una particularidad del proceso de **S**, es que no tiene dificultades para verificar la solución, no solamente porque cuenta con los elementos para hacerlo, sino porque además tiene claro en qué consiste hacerlo, asegurándose de que cuenta con una solución correcta. De manera contraria, **A** pareciera conformarse con encontrar una solución, pero en su "verificación"no busca la consistencia entre los datos y la solución, se limita a revisar que cada uno de los pasos que siguió han sido correctos.

Posiblemente, las diferencias que se han referido previamente no son las únicas; sin embargo, son suficientes para hablar acerca de la experiencia de **A** en la resolución de problemas. De esta manera, pareciera que él tiene poca experiencia en la resolución de problemas, lo cual se desprende también de su comportamiento durante el proceso de resolución. Él muestra comportamientos de **Tipo A** y **Tipo B**, los cuales tienen que ver con desperdiciar recursos potencialmente útiles o ignorar direcciones que pudieran llevarla al éxito en la resolución del problema.

El hecho de tener los recursos para resolver un problema, no significaría que el individuo llegue a un resultado; tal como puede verse en el desempeño de él, al intentar encontrar una solución. En distintos momentos él le adjudica sus dificultades para encontrar una solución a la transición de la aritmética al álgebra, pero da la impresión de que no es así, ya que cuando se le sugiere representar el radio algebraicamente pareciera no tener inconvenientes; tiene los recursos pero parece no tener claro cómo y cuándo usarlos. Posiblemente, este hecho se deba a que en el problema existen datos numéricos, por lo que puede pensarse que es fácil encontrar un resultado a partir de procedimientos aritméticos y geométricos, que se desprenden de los datos. Da la impresión de que no puede encontrar una estrategia en la que haga procedimientos algebraicos; lo cual puede haber influido en el hecho de que no identifique datos implícitos, posiblemente porque necesitan representarse en términos de r, por lo cual no hay una comprensión total del problema.

Probablemente, debido a que **A** no piensa que necesite aplicar procedimientos algebraicos, no puede orientar el proceso de resolución. De esta manera, en algunos momentos, el entrevistador le hace sugerencias directas que le ayudan a tomar una dirección hacia la solución, tal como se observa en los episodios 81-84, 119 y 120. A partir de este hecho, pareciera que necesita sugerencias puntuales del entrevistador, quien eventualmente actúa como un monitor interno en el proceso.

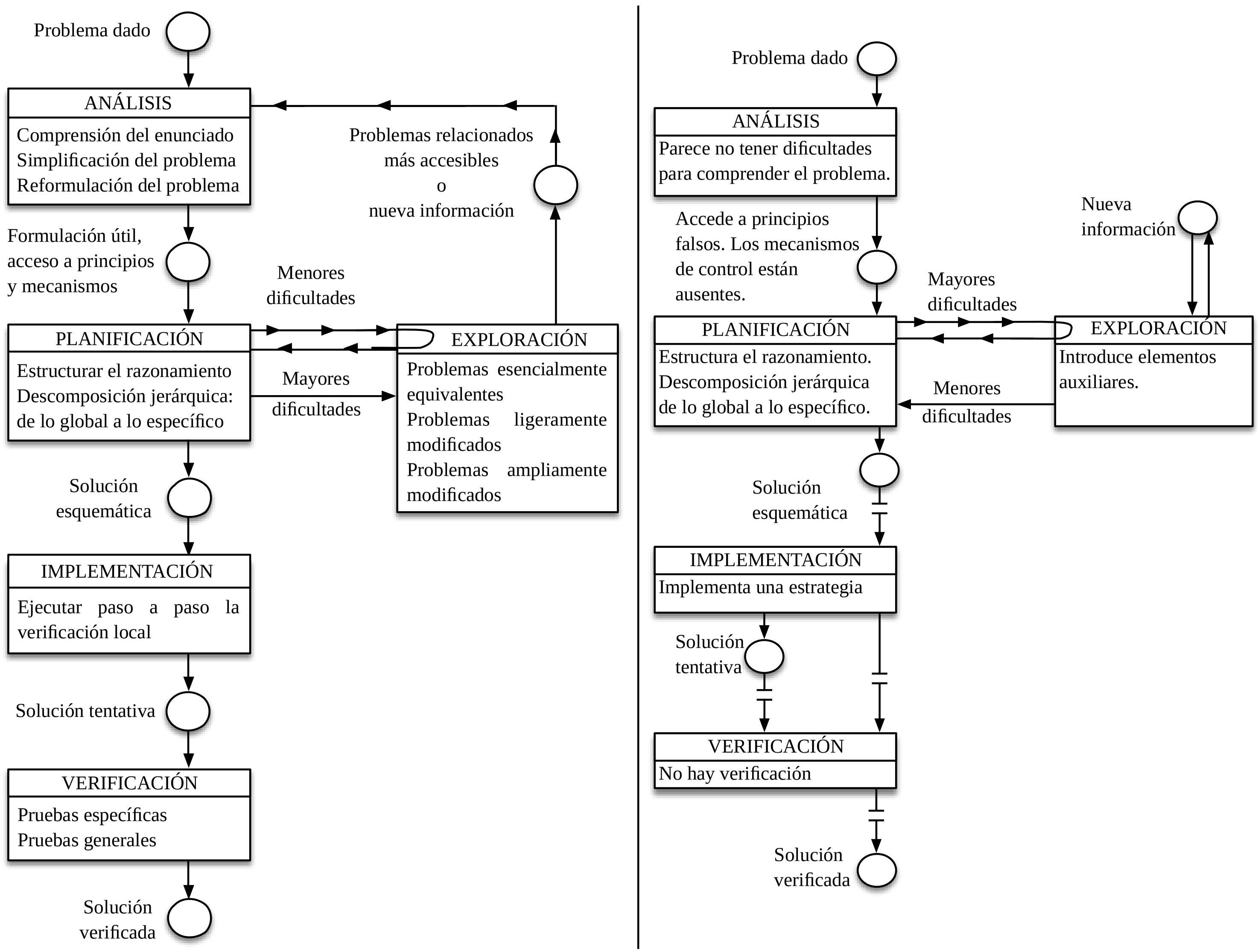

Figura 4.41: Izquierda: Proceso de resolución de problemas de un resolutor ideal o experto (Tomada de Schoenfeld, 1985, p. 110). Derecha: Fragmento 1 del proceso de resolución de **A**.

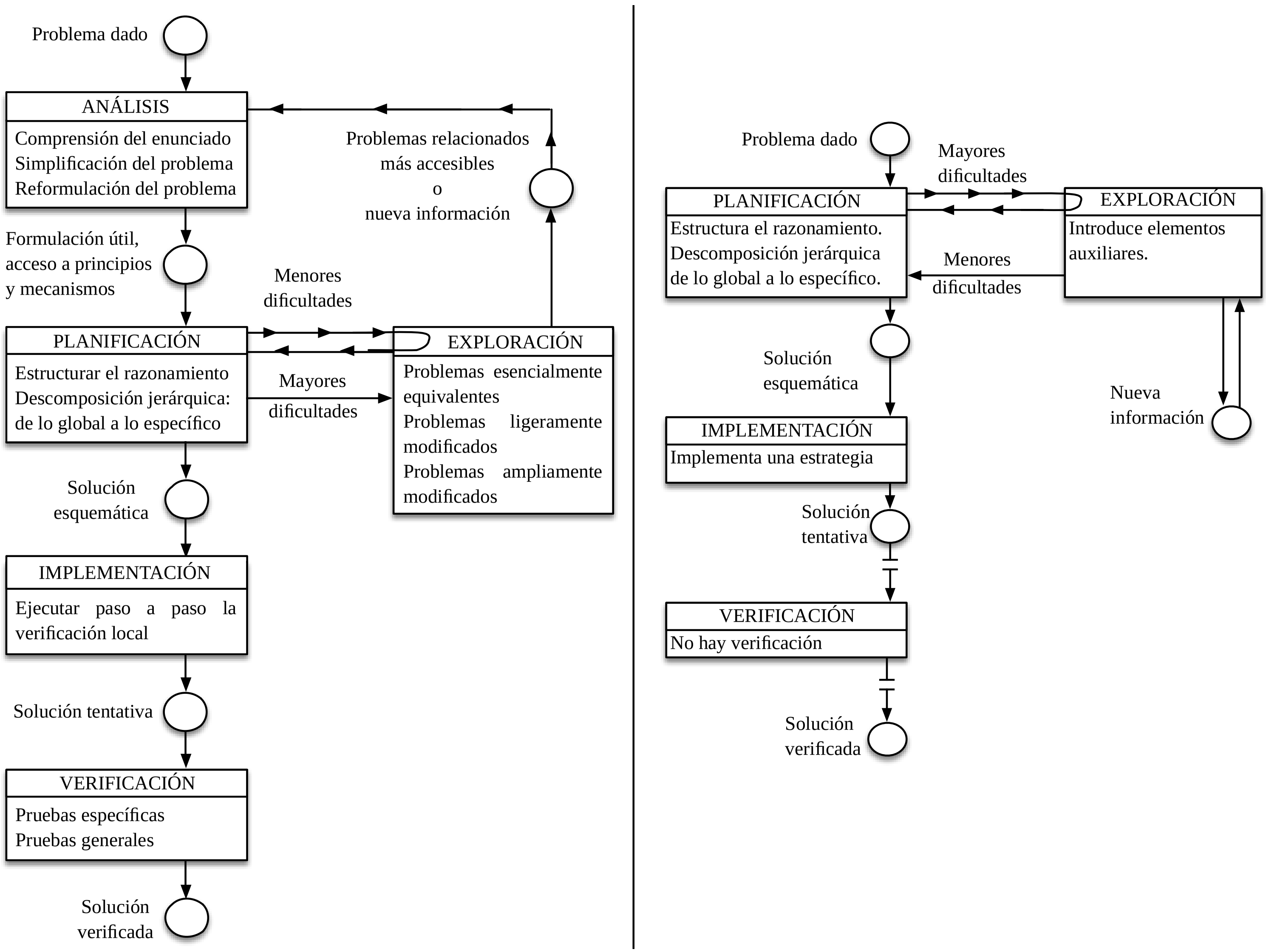

Figura 4.42: Izquierda: Proceso de resolución de problemas de un resolutor ideal o experto (Tomada de Schoenfeld, 1985, p. 110). Derecha: Fragmentos 2 y 4 del proceso de resolución de **A**.

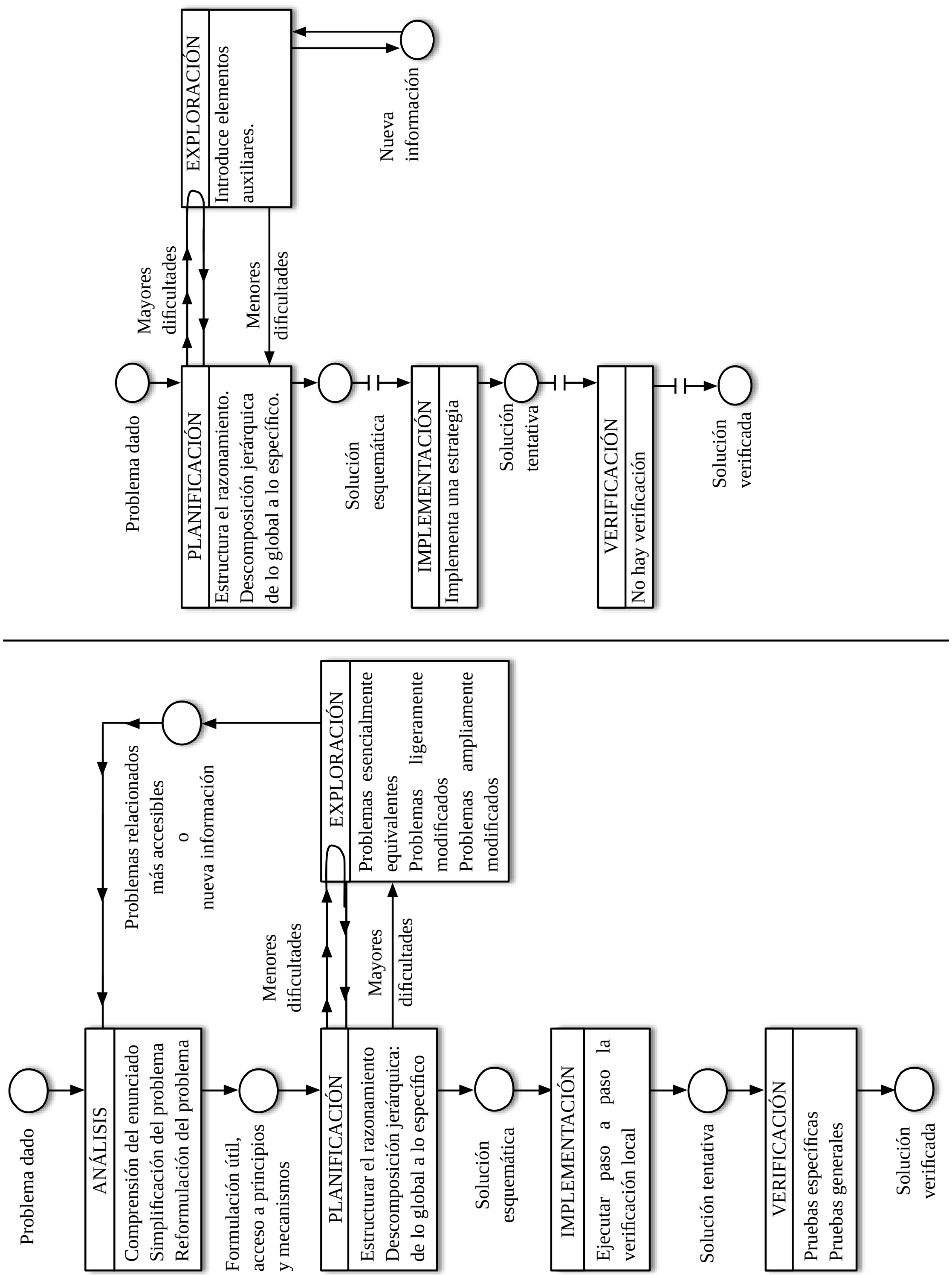

Figura 4.43: Izquierda: Proceso de resolución de problemas de un resolutor ideal o experto (Tomada de Schoenfeld, 1985, p. 110). Derecha: Fragmento 1 del proceso de resolución de **A**.

4.2. Análisis de resultados: profesor B

A continuación se presenta el análisis del proceso de resolución llevado a cabo por el profesor **B**, el cual se hace por fragmentos tomados de la transcripción de la entrevista (ver Anexo B).

4.2.1. Análisis: Fragmento 1

Al comenzar el proceso de resolución, **B** está en la etapa de análisis. Lee el problema e indica en la Figura 4.1 las medidas del los lados del cuadrado de lado 1, y de los segmentos restantes en AD y CD; además hace exploraciones, a través de trazos auxiliares tratando de aclarar las relaciones entre los segmentos y precisando algunas medidas que no aparecen en el problema como datos explícitos. (ver Figura 4.44).

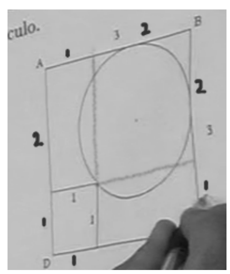

Figura 4.44

Luego, ubica tres posibles radios y los traza, el que va al vértice del cuadrado de lado 1, y los dos que van a los puntos que están sobre los lados del cuadrado $ABCD$; como se puede ver a continuación (episodio 3 del Anexo B).

R: Éste valdría 1, éste valdría 2 [nuevamente, señala en el dibujo las medidas de los segmentos sobre el lado BC que determinó prolongando los lados del otro cuadrado. Traza el radio de la circunferencia desde el centro hacia el vértice del cuadrado de lado 1 (véase la Figura 4.45). Luego, dibuja los radios hacia los puntos de tangencia (ver Figura 4.46)]. Pues no logro visualizar bien si éste sería, el, la mitad de aquí ¿no?, que valiera 1 y 1 [**B** se refería a que no estaba seguro de si, el radio que va hacia el punto de tangencia en AB, dividía en dos partes iguales al segmento que mide 2].

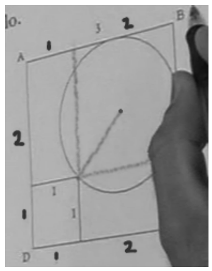

Figura 4.45

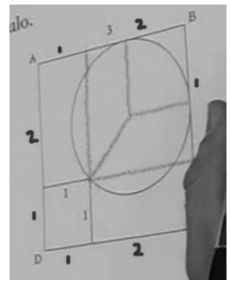

Figura 4.46

En la intervención de **B**, pareciera que su objetivo es encontrar la medida del radio a partir de alguna relación entre los segmentos que conoce o puede conocer y alguno de los radios que ha trazado, los cuales etiqueta como r (ver Figura 4.47). El hecho de que él denote a los radios, pudiera ser consecuencia de que dice "no logro visualizar bien si éste sería, el, la mitad de aquí ¿no?, que valiera 1 y 1", ya que no tiene una manera directa de saber con exactitud la medida de los segmentos determinados por los puntos de tangencia sobre los lados de $ABCD$. Por otra parte, trata de establecer las medidas de todos los segmentos que puede obtener directamente de los datos. La etiquetación de los radios con la literal r, es una evidencia de que está tratando de encontrar alguna relación posible entre los datos y la incógnita.

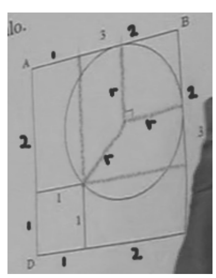

Figura 4.47

Las acciones de **B**, muestran un comportamiento de **Tipo C**, por el cuidadoso monitoreo que hace al determinar la medida de los segmentos. También, dicho comportamiento se percibe posteriormente, cuando considera que AB y el radio paralelo a AD son perpendiculares (aunque en su discurso dice que son tangentes), y dibuja las marcas de ángulo recto en algunos ángulos del cuadrado de lado r. Se considera dicho tipo de comportamiento, porque parece que lo hace con la intención de hacer evidente su suposición de que se trata de un cuadrado, ya que después denota el resto de los lados del cuadrado como r, como se muestra a continuación (episodio 13 del Anexo B).

> **B**: Mjm. Esta recta sería tangente al radio ¿no? [señala el lado AB, y posiblemente quiso decir perpendicular en lugar de tangente]. Noventa, noventa [dibuja las marcas de ángulo del cuadrado formado por los radios]. Éste sería r, éste sería r [identifica en el dibujo como "r" a los lados del cuadrado formado por los radios (ver Figura 4.48)].

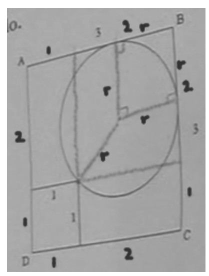

Figura 4.48

La acción de etiquetar a los radios, le permite expresar la medida del otro segmento determinado sobre AB, como $2 - r$. Ahora, **B** ya tiene información suficiente para buscar alguna relación útil, entre alguno de los radios y los segmentos conocidos; por lo que procede de la siguiente manera (episodio 16 del Anexo B):

> **B**: Si sumo esto pues debe quedar 3 ¿no? [refiriéndose a sumar las medidas de los tres segmentos en que está dividido el lado AB]. 1, más 2 menos r, más r igual a 3 [escribe $1+2-r+r=3$]; esto serían 3 [refiriéndose a 1+2, y tacha $-r+r$ ya que es igual a 0]. Caigo en el círculo vicioso, 3 igual a 3 [escribe $3 = 3$ (ver Figura 4.49)].

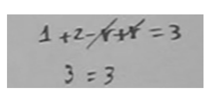

Figura 4.49

B identifica una heurística de descomposición de un lado del cuadrado $ABCD$, pero al usar dicha estrategia se da cuenta de que obtiene una identidad de la que es imposible obtener el valor de r. Quizá lo que él está buscando, es establecer una expresión en términos de r, de la cual pueda hacer algún despeje y encontrar la medida el radio; por lo que abandona la idea de descomponer el lado del cuadrado $ABCD$, mostrando un comportamiento de **Tipo C**. Luego, continúa explorando en el dibujo y traza la diagonal del cuadrado de lado 2, la cual descompone en dos segmentos, el radio r y una de las diagonales del cuadrado de lado r, el cual denota como k (ver Figura 4.50).

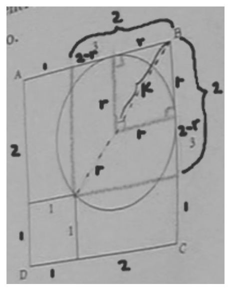

Figura 4.50

Luego, **B** tiene como subobjetivo encontrar la medida del segmento k y observa que ésta es la diagonal del cuadrado de lado r, por lo que aplica el teorema de Pitágoras para calcularla, así como para calcular la diagonal del cuadrado de lado 1, la cual etiqueta como m (ver Figura 4.51). Para encontrar dichas medidas, accede a los procedimientos algebraicos en la memoria de largo plazo, que puede identificarse como un comportamiento de **Tipo D**, y encuentra que el valor de k es $r\sqrt{2}$ y que el de m es $\sqrt{2}$ (ver Figura 4.52).

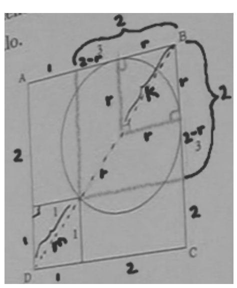

Figura 4.51

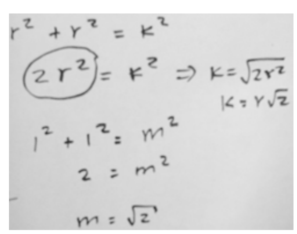

Figura 4.52

Como podrá confirmarse en los episodio siguientes (episodios 21 y 22 del Anexo B), **B** sigue la Estrategia 1.1 descrita en los análisis a priori (ver pág. 40).

B: Entonces, sería [hace un nuevo dibujo del cuadrado de lado 3 y traza una de sus diagonales, que corresponde a BD] r más r raíz de 2, más la raíz de 2 [escribe en el dibujo $r + r\sqrt{2} + \sqrt{2}$. También dibuja la marca de un ángulo del cuadrado (véase la Figura 4.53). Escribe $3^2 + 3^2 = (r + r\sqrt{2} + \sqrt{2})$. Luego reescribe la ecuación como puede verse en la Figura 4.54].

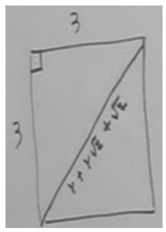

Figura 4.53

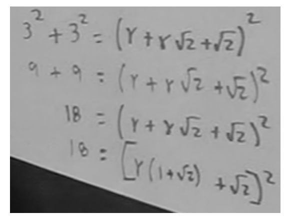

Figura 4.54

B: Entonces, sería [mientras escribe $18 = [r(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}]^2$, y después eleva a la raíz cuadrada a la ecuación para simplificar ésta (ver Figuras 4.55 y 4.56). Llega al resultado de que $r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$].

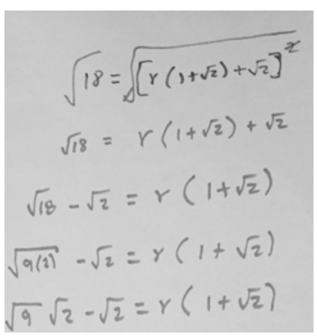

Figura 4.55

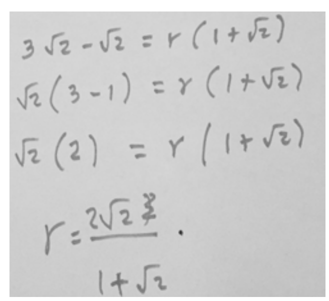

Figura 4.56

En las intervenciones anteriores, **B** hace un dibujo del cuadrado $ABCD$ y traza la diagonal BD, expresándola como $r + r\sqrt{2} + \sqrt{2}$ y que representa la descomposición de BD en tres segmentos, como se menciono anteriormente: en $k = r\sqrt{2}$, $m = \sqrt{2}$ y r. Pareciera que el nuevo dibujo le ayuda a clarificar la estrategia que va a usar. Después, muestra un comportamiento de **Tipo D**, ya que accede a los recursos en la memoria de largo plazo, lo cual se observa cuando utiliza el teorema de Pitágoras para establecer una ecuación que le sea útil para despejar r, o bien al factorizar los términos de r (ver Figura 4.54). Asimismo, se percibe el mismo comportamiento en las operaciones que lleva a cabo y mediante las que encuentra la medida de r correctamente (ver Figura 4.55).

Segundos después, comenta que de suponer que los segmentos que se forman a partir del trazo de la línea paralela a AD y que pasa por el centro miden 1, el problema estaría resuelto; pero a pesar de las ventajas que dicha suposición le brinda, dice "pero no podía haberlo supuesto ¿no?". **B** descarta esta conjetura porque no le convence, y como argumenta en una de sus intervenciones, esta conjetura sería contradictoria con los datos del problema, según lo ha percibido directamente del dibujo. En esta acción se manifiesta un comportamiento de **Tipo C**, es cuidadoso al elegir los recursos, además de que sus decisiones son precedidas de una exploración meticulosa, lo cual se percibe en algunos de sus comentarios, como por ejemplo: "si hubiera estado por acá ... pues a lo mejor si vale diferente esto ¿no? ... pues aquí ya podría suponer que, que sí, esto es igual a esto". Véase el siguiente diálogo (episodios 24-28 del Anexo B).

B: Sí, aquí mi duda era si, para mí hubiera sido muy fácil si hubiese sabido que esto a lo mejor valía 1 [refiriéndose al segmento del lado AB que mide r], pero no podía haberlo supuesto ¿no?

E: Mjm. ¿Por qué cree que no valga 1?

B: Por qué creo que no valga 1 ... por estos pedazos ¿no? [mientras señala el segmento de la circunferencia que corta la prolongación paralela a AD del lado del cuadrado de lado 1].

E: Le sobra ¿no? [se refiere a que una parte de la circunferencia queda fuera del cuadrado de lado 2].

B: Sí, le sobra. Pero, si hubiera estado por acá [si la prolongación del lado fuera tangente a la circunferencia, y traza una línea paralela a AD tangente a la circunferencia (ver Figura 4.57)], aquí, pues a lo mejor si vale diferente esto ¿no? [las medidas de los lados del cuadrado de lado 1 serían diferentes], pues aquí ya podría suponer que, que sí, esto es igual a esto [el segmento que mide $2 - r$ mediría igual al que mide r].

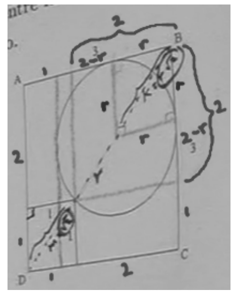

Figura 4.57

Posteriormente, el entrevistador le pregunta acerca de cómo podría verificar que el resultado es correcto, a lo que **B** responde que puede sustituir r en las expresiones $1+2-r+r=3$, o $r^2+r^2=k^2$ donde $k=r\sqrt{2}$, las cuales puede establecer a partir de los datos observables en el dibujo ya modificado y de recursos como el teorema de Pitágoras. La estrategia de verificación por la que ha optado **B** parece clara: encontrar una ecuación que modele el problema y en la que pueda verificar que el valor encontrado de r es una solución. Sorprende un poco que emprenda esta búsqueda, teniendo ya una ecuación con estas características y que utilizó para resolver el problema. Los dos intentos de encontrar la ecuación de "verficación" son infructuosos porque en ambos casos llega a una identidad que se satisface para toda r. **B** no pareciera estar consciente de que modelar el problema con otra ecuación no equivalente a la que usó, es en realidad encontrar otra manera de resolver el problema.

A pesar de que **B** no logra verificar que su solución es correcta, es indudable que accede a sus recursos algebraicos y aritméticos, como la sustitución, la simplificación y el despeje de términos en una ecuación; así, manifiesta un comportamiento de **Tipo D**, ya que los procedimientos que aplica están en la memoria de largo plazo, tal como se puede observar a continuación (episodio 44 del Anexo B):

B: Ya se me complicó más [mientras sustituye los valores de r y k en la ecuación $r^2+r^2=k^2$. Después realiza una serie de operaciones para simplificar la ecuación que obtuvo y encontrar el valor de r (ver Figuras 4.58, 4.59 y 4.60)]. Es lo mismo que tengo acá [el valor de r que encontró previamente en el episodio 22].

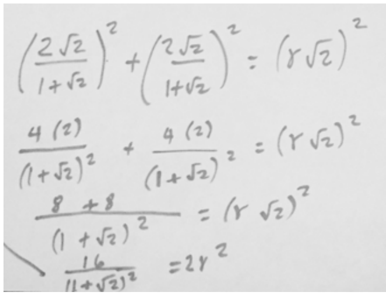

Figura 4.58

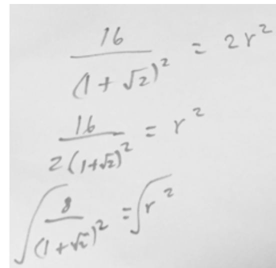

Figura 4.59

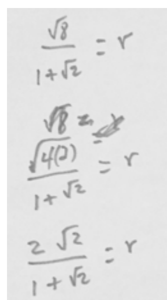

Figura 4.60

Ahora **B** ha verificado que el valor encontrado para r satisface la ecuación $r^2 + r^2 = 2r^2$, pero no alcanza a percibir que esta ecuación se satisface para cualquier r y por lo tanto su verificación es de nuevo fallida; aunque la solución es correcta.

4.2.2. Análisis: Fragmento 2

Con la intención de que **B** intente otra estrategia u otra forma de resolver el problema, el entrevistador interviene preguntándole acerca de si él cree que pueda haber otras posibilidades para abordar el problema, a lo que **B** responde (episodio 60 del Anexo B):

B: Si. No, pues. Bueno, aquí le puse la otra [traza una línea paralela a AB tangente a la circunferencia (véase la Figura 4.61)], trataría de.

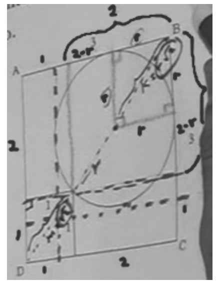

Figura 4.61

En la intervención anterior, él hace exploraciones y completa el cuadrado circunscrito, quizá pensando en otra estrategia de descomposición de BD a partir de la diagonal de dicho cuadrado, aunque no hace mención a qué otros segmentos de BD puede considerar. De esta manera obtiene una variante de la estrategia anterior. Posteriormente, el entrevistador hace una recapitulación sobre los intentos que hizo **B** para resolver el problema, con el fin de sugerirle que retome alguna relación que no aprovechó; en particular, la descomposición que hizo del segmento AB en los segmentos de medidas 1, $2-r$ y r. El entrevistador le pregunta sobre la relación entre el segmento de medida $2-r$, con el radio que va al vértice del cuadrado de lado 1 (véase la Estrategia 3, pág. 48). Así, **B** interviene (episodios 72, 76-80 del Anexo B):

72. **B**: 2 menos r, con éste [refiriéndose al radio. Traslada ahora el segmento que mide $2-r$ hasta el centro del círculo (ver Figura 4.62)]. 2 menos r ...¿este pedacito dice? [refiriéndose al segmento que mide $2-r$].

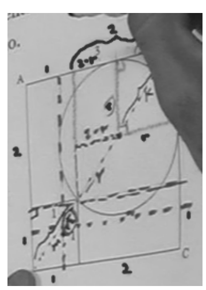

Figura 4.62

76. **B**: [Repasa el trazo del segmento de medida $2-r$ y el radio que va hacia el vértice del cuadrado de lado 1]. Éste es igual que éste [refiriéndose a que el segmento

trasladado no altera su medida $2 - r$ al trasladarse (ver Figura 4.63). Segundos extiende hacia su izquierda el segmento trasladado, hasta dejarlo de medida r (véase la Figura 4.64). Transcurrido aproximadamente un minuto, el profesor traza un nuevo radio hacia el extremo de unas de las cuerdas de la circunferencia y lo denota también con r (ver Figura 4.65)].

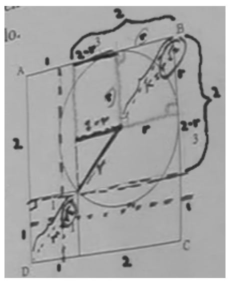

Figura 4.63

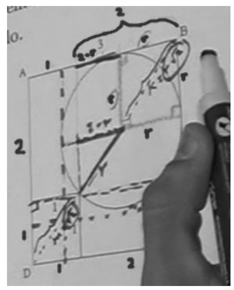

Figura 4.64

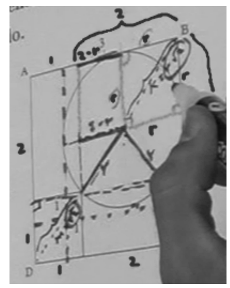

Figura 4.65

77. **E**: Ese también es r ¿no? [refiriéndose al radio que acaba de dibujar **B**].

78. **B**: Sí, también es r. Y este pedacito también sería 2 menos r [mientras traza la altura del triángulo que se formó con los dos radios recientemente trazados y la cuerda, denotando esta altura como $2 - r$ (véase la Figura 4.66)].

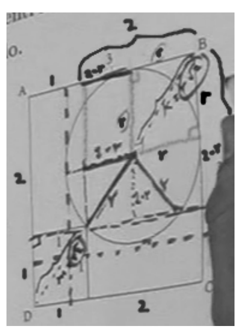

Figura 4.66

79. **E**: ¿O sea es igual que éste? [señala el segmento trasladado y denotado como $2-r$].

80. **B**: Ajá. Sería la diagonal de éste [refiriéndose al cuadrado de lado $2 - r$], entonces éste valdría 2 menos r [indica en la figura que el otro lado del cuadrado que se

forma mide $2-r$ (véase la Figura 4.67)], y entonces aquí también se tendría que cumplir el teorema de Pitágoras ¿no?

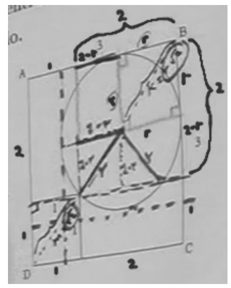

Figura 4.67

En el diálogo anterior, **B** está explorando para alcanzar su subobjetivo: encontrar la relación entre el segmento $2-r$ en AB y el radio que va hacia el vértice del cuadrado de lado 1; en la búsqueda de recursos para hallar dicha relación, él es cuidadoso al hacer exploraciones que le sean útiles, mostrando un comportamiento de **Tipo C**. Dicho comportamiento, se percibe cuando traslada al centro el segmento $2-r$, y con el que finalmente completa un triángulo rectángulo; pero no le resulta suficiente, ya que continúa analizando el dibujo para encontrar más relaciones. Ahora ha dejado de lado algunos trazos y está concentrado en establecer la relación entre el lado $2-r$ del cuadrado que ha logrado trazar y la diagonal r de este cuadrado (ver Figura 4.65); los cuales le resultan útiles para lograr su subobjetivo.

Como se menciona en el párrafo anterior, los trazos auxiliares que hace **B** le resultan útiles, y da la impresión de que los hace para mejorar su visualización y tomar decisiones con más fundamento. Así, es evidente la constante supervisión que hace de su propio trabajo. Una vez que identifica el cuadrado de lado $2-r$, accede en la memoria de largo plazo al teorema de Pitágoras y establece la expresión $(2-r)^2+(2-r)^2=r$, la cual está incompleta, por lo que el entrevistador le indica que es r cuadrada. **B** corrige la expresión expresión y luego la simplifica hasta transformarla en $2(2-r)^2=r^2$, mostrando un comportamiento de **Tipo D**; así, obtiene una nueva ecuación: $r^2-8r+8=0$, como se observa a continuación (episodios 84 y 86 del Anexo B):

B: Que sería dos veces 2 menos r al cuadrado, igual a r cuadrada [mientras escribe

$2(2-r)^2 = r^2$ (ver Figura 4.68)]. Podemos aplicar la fórmula general aquí ¿no?

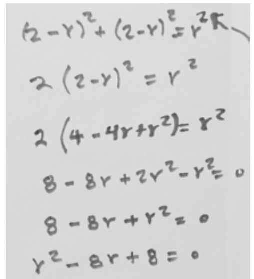

Figura 4.68

B: Tengo la factorización de ésta ¿no? [de la ecuación $r^2 - 8r + 8 = 0$ (ver Figuras 4.69, 4.70). Afirma que el valor correcto para r es el de r_1, que resolverá enseguida (véase la palomita en la Figura 4.70). Luego, trabaja con la expresión de la Figura 4.71, y se retracta de su afirmación, para decir que r_2 es la solución para el problema y la encierra en una elipse].

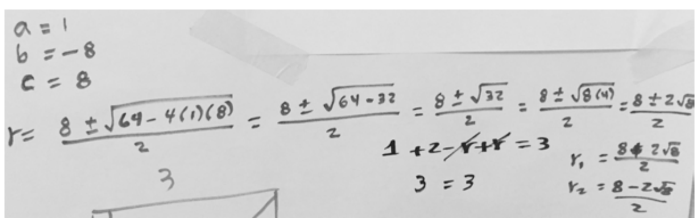

Figura 4.69

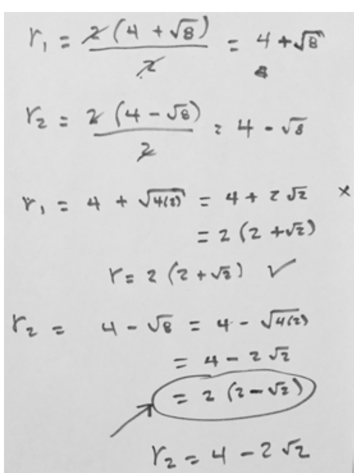

Figura 4.70

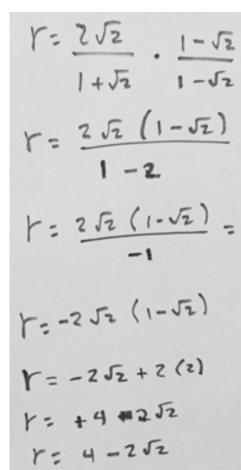

Figura 4.71

Una vez que **B** plantea la ecuación $r^2 - 8r + 8 = 0$, se propone resolverla aplicando la fórmula general. Primero, escribe los coeficientes de la expresión como $a = 1$, $b = -8$ y $c = 8$; luego aplica la fórmula general hasta llegar a la expresión $r = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(8)}}{2}$. Después, hace una serie de operaciones aritméticas para simplificar la expresión y obtiene como resultados: $r_1 = \frac{8+2\sqrt{8}}{2}$ y $r_2 = \frac{8-2\sqrt{8}}{2}$, las cuales simplifica, posiblemente con la intención de ver cual se parece más $r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ (ver Figuras 4.69 y 4.70). Hasta este momento, **B** ha mostrado un comportamiento de **Tipo D**, accediendo en la memoria de largo plazo a sus recursos y llevando a cabo procedimientos apropiados.

Una vez que simplifica las expresiones de r_1 y r_2, asegura que la medida del radio es r_1, sin dar argumentación alguna. Es posible que **B** considerara tal solución, porque a simple vista puede pensarse que la medida de r_2 es un número negativo. Llama la atención que **B** no regresa al problema para estimar cuál de las dos soluciones es la correcta, sobre todo porque una revisión al dibujo le hubiera permitido excluir r_1, dado que $4 + 2\sqrt{2}$ es más grande que el lado del cuadrado $ABCD$, por lo cual esta solución resulta absurda. Prefiere en cambio el trabajo aritmético y simplifica la solución originalmente encontrada, para compararla con las nuevas. Corrige de esta manera la selección de la solución, quedándose con la correcta: $4 - 2\sqrt{2}$. Todos los procedimientos ejecutados por **B** forman parte de la memoria de largo plazo, por lo que se puede decir que tiene un comportamiento de **Tipo D**; también, se observa un comportamiento de **Tipo C**, por el mayor cuidado que muestra al seleccionar los recursos y por su iniciativa para buscar un criterio que le permita seleccionar la solución correcta y fundamentar la selección.

Además, la verificación que hace **B** tiene que ver con dos heurísticas importantes: "¿Es conforme a las estimaciones o predicciones razonables?" y "¿Puede reducirse a resultados conocidos?" (ver Tabla 2.1, pág.28). Usa la primera heurística cuando comprueba que una de las soluciones encontradas se corresponde con la que ya tenía; y usa la segunda al simplificar sus soluciones buscando una comparación con la solución que conoce. Posteriormente, el entrevistador recapitula acerca de la estrategias que consideró previamente **B**, y le pregunta cómo puede resolver el problema considerando el cuadrado circunscrito, que trazó al inicio de este fragmento.

4.2.3. Análisis: Fragmento 3

En este fragmento, a partir de la intervención del entrevistador, **B** comienza por analizar otra posible estrategia de descomposición, por lo que vuelve a hacer el dibujo del problema y considera datos que tiene en el dibujo anterior. Indica en el nuevo dibujo las medidas de los lados de $ABCD$, del cuadrado de lado 1 y de los segmentos de medida 2; asimismo, traza dos líneas tangentes a la circunferencia y paralelas a los lados de $ABCD$, y cuatro radios que denota como r (ver Figura 4.72).

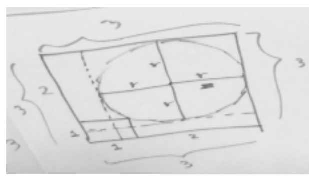

Figura 4.72

Él está pensando en una descomposición (aunque no declara de cuál se trata), tomando en cuenta el cuadrado circunscrito, tal como se lo sugiere el entrevistador; pero mientras hace exploraciones en el dibujo percibe una nueva estrategia. Véase el diálogo que se presenta a continuación (episodios 92, 94-98 del Anexo B).

92. **B**: Entonces, aquí, éste es r [indica en el dibujo que r también es la mitad de los lados del cuadrado circunscrito (véase la Figura 4.73)]. Ya se me acaba de ocurrir otra aquí [otra estrategia], no, mejor le voy a dar primero por ésta [considerando el cuadrado circunscrito]. A lo mejor agarrando un cuarto de circunferencia o este cuadradito ¿no? [uno de los cuadrados de lado r (ver Figura 4.74)], y con eso sacar el radio.

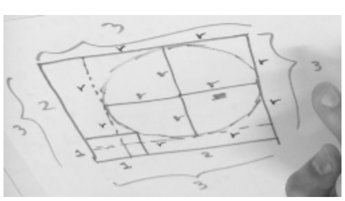

Figura 4.73

Figura 4.74

94. **B**: Pero aquí sería, todo esto valdría [mientras señala el cuadrado circunscrito a la circunferencia], entonces serían $2r$ aquí ¿verdad? [refiriéndose a un lado del cuadrado circunscrito, e indica en la figura que dos lados de dicho cuadrado miden cada uno $2r$]. Entonces sería $3 - 2r$ [mientras escribe en la hoja $3 - 2r$ (ver Figura 4.75)] ¿no?, considerando el cuadrado [refiriéndose al cuadrado de lado $2r$].

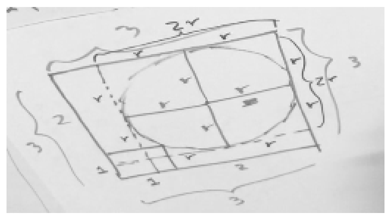

Figura 4.75

95. **E**: $3 - 2r$ ¿cuál sería?

96. **B**: Sería, bueno, esto es $2r$ [un lado del cuadrado circunscrito], y si considero todo esto [el lado AB], eso sería el $3 - 2r$ [el lado del cuadrado circunscrito].

97. **E**: Y ese ¿cuánto sería?, ¿$3 - 2r$?.

98. **B**: Igual a esto ¿no? [encierra juntos a $3 - 2r$ y $2r$ (véase la Figura 4.76)].

Figura 4.76

Aunque en algún momento **B** menciona que se le ha ocurrido otra estrategia, no se alcanza a saber en qué consiste, porque la abandona de inmediato. Decide entonces, aprovechando la sugerencia del entrevistador, tratar de calcular el radio a partir del cuadrado de lado r que muestra la Figura 4.74. El camino que ha tomado es difícil, porque al aislar este cuadrado deja por un lado el resto de los datos del problema, pero no percibe de inmediato que en este cuadrado aislado es imposible calcular el radio. En sus intentos por encontrar una relación útil entre los segmentos en los que ha descompuesto el lado del cuadrado $ABCD$, llega a la conclusión de que $3 - 2r$ y $2r$ son iguales. El error es muy elemental y **B** no había cometido este tipo de errores hasta este punto de la entrevista, es probable entonces que el error se deba al cansancio porque la entrevista ya ha sobrepasado la hora de duración.

El entrevistador tiene que intervenir para que **B** se percate del error cometido al considerar iguales $2r$ y $3 - 2r$ (véanse los episodios 95-98 transcritos arriba). Con la intervención del entrevistador, **B** se da cuenta de inmediato que su consideración es incorrecta (ver la región señalada con una elipse en la Figura 4.77).

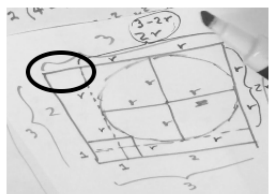

Figura 4.77

En el resto de la entrevista, **B** hace exploraciones mediante las cuales da la impresión que identifica una estrategia de descomposición del cuadrado $ABCD$ en: el cuadrado circunscrito, los rectángulos de lados $2r$ y $3 - 2r$, y el cuadrado de lado $3 - 2r$ (ver Figura 4.78). Sin embargo, calcula el área del círculo y del cuadrado circunscrito, y a su vez encuentra el área de un cuadrado de lado r; y pareciera que la estrategia de descomposición de $ABCD$ en la que está pensando, consiste en el cálculo de áreas que conoce, o bien, que puede conocer con los datos que tiene. Aunque, es evidente que no alcanza a visualizar una relación entre las áreas que le sea útil.

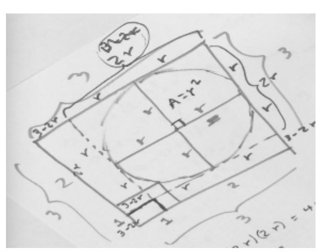

Figura 4.78

La entrevista termina con un diálogo entre el entrevistador y **B**, acerca de las posibilidades de calcular el radio por medio de áreas o de la descomposición de la diagonal BD en términos de r.

4.2.4. Conclusiones

En esta sección se contrasta el proceso de resolución del profesor **B** con el de un experto en la resolución de problemas, para analizar el desempeño mostrado por **B** en la resolución de problemas. En la Figura 4.79 aparece el proceso de resolución del profesor **B**; al lado izquierdo se presenta el proceso de resolución de un individuo experto, de acuerdo con Schoenfeld (1985). Se identifica a un individuo experto como **S**. En la Sección 2.3, se explica con detalle cada una de las etapas que aparecen en el proceso de **S**.

Para contrastar ambos procesos, se identifican las características relevantes de cada uno, ya sean diferencias o similitudes. Cabe mencionar que en el proceso de **S** se muestra sólo una estrategia, y en el de **B** recurre a tres estrategias para resolver el problema, debido a la petición del entrevistador, quien tiene interés de observar otras estrategia. **B** desarrolla dos estrategias exitosamente, y por cuestiones de tiempo la tercera se ve interrumpida. De acuerdo con Schoenfeld (1985), el hecho de que un individuo considere otra manera de resolver el problema, parece tener que ver con la etapa de verificación de la solución, donde una de las cuestiones es ver si la solución "¿Puede obtenerla de otra manera?" (ver Tabla 2.1, pág. 28). Puede ser que **S** considere otra manera de resolver el problema, sin embargo en la Figura 4.79 no se hace alusión a él. De esta manera, para contrastar ambos procesos, en el proceso de **B** se considera solamente la primera estrategia.

Una de las principales similitudes entre ambos procesos, es que terminan exitosamente, lo cual puede deberse a la presencia de los mecanismos de control. Sin embargo, una característica del proceso de **S** es que cuenta con un amplio inventario de heurísticas, y al encontrar nueva información en la etapa de exploración, vuelve a la etapa de análisis para analizar un problema relacionado o modificado. A diferencia de lo antes mencionado, en el proceso de **B**, cuando obtiene nueva información continúa haciendo exploraciones, en las que se limita a considerar la heurística de introducir elementos auxiliares para establecer relaciones entre trazos.

Otra diferencia entre los dos procesos, es que en la Figura 4.79, se observa que durante el proceso de **S** la planificación es el centro del proceso, y la exploración una etapa de apoyo en la que entran en juego distintas heurísticas. Lo contrario sucede en el proceso de **B**, quien aunque parece tener menores dificultades para establecer un plan, para refinarlo recurre con frecuencia a la exploración, la cual es el "núcleo" del proceso, ya que le resulta útil para justificar sus decisiones respecto a cómo y cuándo implementar un plan.

Una singularidad del proceso de **S** es que termina hasta encontrar una "solución verificada". Algo similar sucede con el proceso de **B**, aunque intenta verificar la solución a partir de la sugerencia del entrevistador de que compruebe la solución. Pese a esto último, parece tener una idea clara de qué significa verificar la solución; no obstante, los recursos que utiliza para hacerlo no son los adecuados, ya que considera una identidad que se satisface para toda r. De esta manera, aunque la solución es correcta, la verificación no es válida.

Considerando las diferencias y similitudes que se han mencionado en los párrafos anteriores, el proceso de **B** se asemeja al de un individuo experto, por lo que se puede decir que es un buen resolutor de problemas. Una característica en particular, que tiene que ver con la habilidad para resolver problemas, es el hecho de que durante el proceso **B** muestra un cuidadoso monitoreo; desde tomar decisiones para elegir o desechar recursos y estrategias, hasta para justificar por qué lo hace. Además, en la exploración pareciera que él quiere asegurarse de la validez del plan antes de implementarlo. Estas acciones, son definidas por Schoenfeld (1985) como un comportamiento de **Tipo C** (ver Tabla 2.3, p. 35), el cual influye positivamente en el éxito en la resolución de problemas.

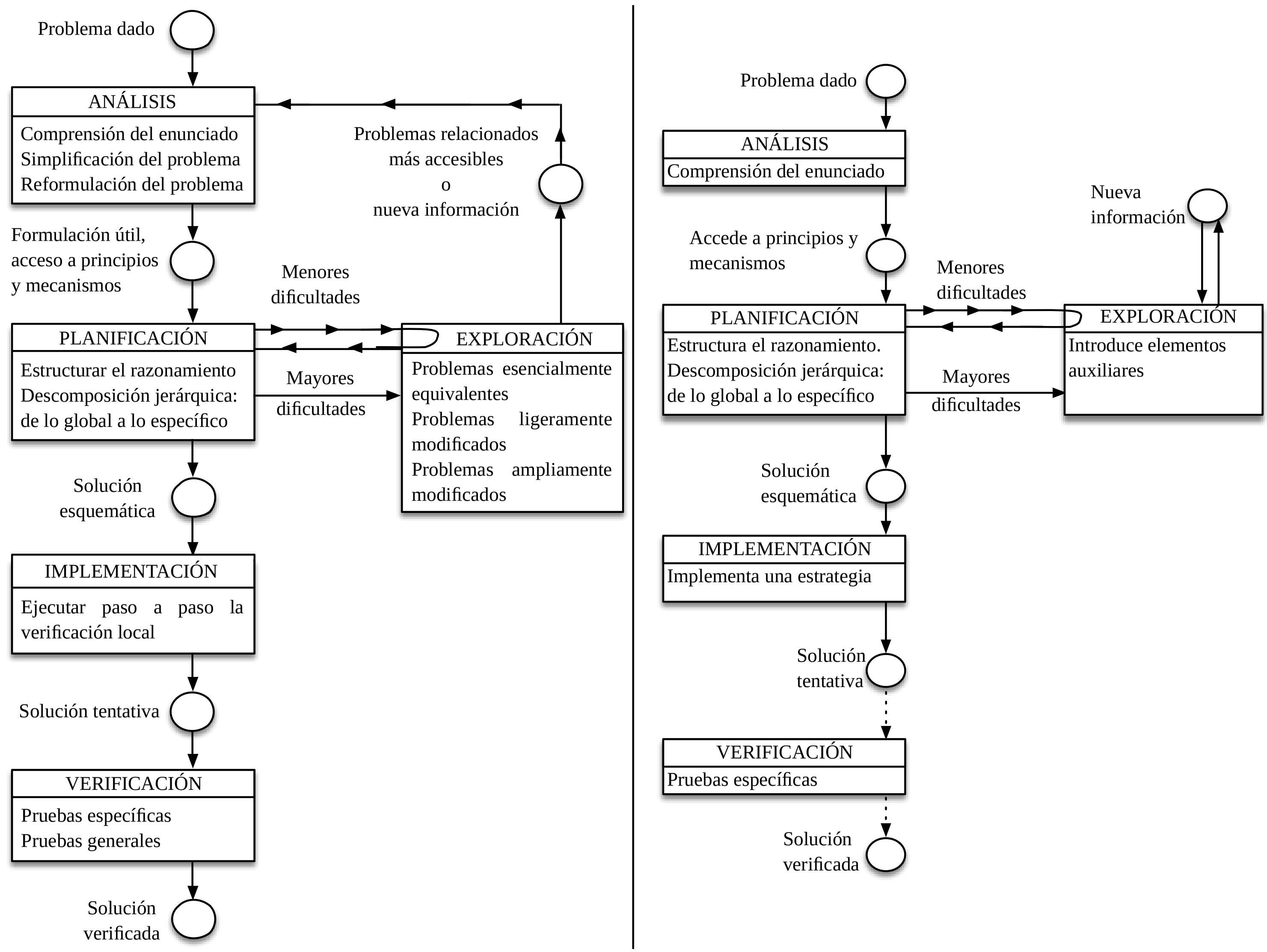

Figura 4.79: Izquierda: Proceso de resolución de problemas de un resolutor ideal o experto (Tomada de Schoenfeld, 1985, p. 110). Derecha: Proceso de resolución del profesor **B**.

Conclusiones generales

Esta sección está dividida en los siguientes apartados:

1. Principales resultados. Se presentan los principales resultados de este estudio, de acuerdo con el objetivo y las preguntas de investigación.
2. Problemas abiertos. Se muestran algunas de las posibles futuras investigaciones ligadas a este estudio.

1. Principales resultados

El objetivo de esta investigación es: identificar y analizar las estrategias y habilidades referidas al control que utilizan profesores del bachillerato al momento de resolver problemas. De acuerdo con este objetivo, en el proceso de resolución del problema planteado a los profesores **M** y **R**, se observaron y analizaron diferentes estrategias y habilidades referidas al control. Entre las estrategias que emplean se pueden observar estrategias similares a la 1.1 y 1.2 del análisis a priori, que consisten en descomponer la diagonal BD. Aunque durante el proceso de resolución, **M** pareciera no tener una estrategia definida, contrariamente al proceso de **R**, quien descubre nuevas estrategias, entre las que se encuentra la descomposición del cuadrado $ABCD$ en áreas.

Al comparar ambos procesos de resolución con el de un experto, se puede concluir lo siguiente:

- El análisis del problema consiste en la comprensión del problema, y de los datos explícitos e implícitos de éste.
- En ambos procesos la exploración es la fase a la que los profesores dedican más tiempo.
- En algunos momentos, en particular en el proceso de **M** se describe un plan, y en otros se deduce que existe un plan a partir de la implementación.

- Durante la fase de verificación, ambos profesores enfrentan dificultades. Para **M**, la verificación consiste en revisar paso a paso los procedimientos, o bien reconstruir la estrategia. Para **R**, aunque sabe cómo puede verificar la solución, utiliza recursos inadecuados, por lo que la verificación no es válida.

Para conocer en qué medida se alcanzó este objetivo, se responden las siguientes preguntas específicas:

1. ***¿Qué estrategias utiliza para resolver problemas?***

   El objetivo de ambos profesores es encontrar el radio a partir de las relaciones que pueden establecer entre el radio, los datos del problema y los trazos que hacen. De esta manera, algunas de las estrategias que aparecen en los procesos de resolución de **M** y **R**, y que les son útiles para alcanzar su objetivo son las siguientes:

   - Descomposición de la diagonal BD, particularmente las estrategias 1.1 y 1.2 del análisis a priori.
   - Descomposición del lado AB.
   - Descomposición de una cuerda en dos segmentos.
   - Descomposición de la diagonal del cuadrado circunscrito.
   - Descomposición del cuadrado $ABCD$ en áreas.

   Algunas de las estrategias anteriores resultaron fallidas, en especial durante el proceso de **M**, debido a la dificultad que muestra para generar estrategias y desechar posibles direcciones hacia la solución. Las estrategias que se destacan en ambos procesos, tienen similitudes con las estrategias 1.1 y 1.2 del análisis a priori, que consisten en descomponer la diagonal BD en distintos segmentos, y establecer subobjetivos.

   Las heurísticas que sobresalen en los dos procesos son las siguientes:

   - Dibujar un diagrama cuando sea posible. En algunos episodios la profesora **M** hace nuevos dibujos para tener una perspectiva diferente del problema que le permita analizar individualmente algunas relaciones y así identificar las medidas de algunos segmentos, tal como sucede en los episodios 120, 191 y 192.

- *Introducir elementos auxiliares.* Al tratarse de un problema de carácter geométrico, puede esperarse que un individuo haga trazos auxiliares, tal como sucede con los profesores. En ambos procesos, los trazos auxiliares les permiten establecer relaciones entre los datos, que difícilmente hubieran podido identificar sin ellos.
- *Establecer subobjetivos.* En las diferentes estrategias que emplearon, los maestros establecieron subobjetivos relacionados con el cálculo indirecto del radio buscado. Este hecho los ayudó a emplear el método de descomposición y recomposición, y si bien es cierto, esto no los condujo siempre a la solución del problema, sus dificultades parecieran más relacionadas con la falsedad o imprecisión de las relaciones propuestas entre los elementos de la descomposición.
- *¿Es conforme a las estimaciones o predicciones razonables?, ¿Pueden reducirse a resultados conocidos?* Ninguno de los dos profesores revisa qué tan razonables son los resultados obtenidos. Una primera estimación sobre la consistencia del resultado con los datos, podría hacerse recurriendo a dibujo del problema, llama la atención que ninguno de los dos profesores regresó al dibujo a comparar el resultado con los datos. Aunque **R** tiene en mente que debe llevar a cabo la verificación de los resultados, intenta hacerlo sin éxito usando métodos algebraicos.

2. *¿Qué acciones emprende el profesor para resolver un problema?*

Entre las acciones de los maestros, predominan:

- Introducir trazos auxiliares.
- Hacer conjeturas.
- Desechar conjeturas.
- Descomponer segmentos; en particular la diagonal BD y el cuadrado $ABCD$.
- Denotar las medidas de algunos segmentos.
- Hacer operaciones aritméticas y algebraicas.
- Establecer relaciones a partir de los trazos en el dibujo.
- Identificar datos implícitos.
- Justificar la toma de decisiones.
- Aproximar las medidas de algunos segmentos.
- Establecer subobjetivos.
- Supervisar el proceso.

- Trazar figuras de apoyo.
- Abandonar estrategias fallidas.
- Recurrir a recursos en la memoria de largo plazo.

3. ***¿De qué manera procede el profesor, ante la posibilidad de abandonar una estrategia fallida, así como para emplear otra estrategia en el intento de resolver el problema?***

   Esta cuestión tiene que ver con las habilidades referidas al control, las cuales influyeron tanto positiva como negativamente en ambos procesos, en los que se presenciaron los cuatro tipos de comportamiento que influyen en la resolución de problemas, definidos por Schoenfeld (1985) (ver Tabla 2.1, pág. 28). En particular en el caso de **R**, generalmente él es quien con sus decisiones orienta el proceso, y hace una supervisión constante de sus acciones, lo cual muestra en el cuidadoso monitoreo que hace para justificar sus decisiones. No obstante, durante la verificación no percibe que sus recursos son inadecuados, lo cual reduce los mecanismos de control.

   Durante el proceso de resolución de **M**, con frecuencia ella abandona estrategias fallidas y desecha sus conjeturas falsas, sin reconstruirlas para tener una idea de qué error pudiera estar cometiendo, por lo que desaprovecha recursos que pudieran serle útiles en las nuevas direcciones que sigue hacia la solución. Debido a este hecho, el proceso se ve detenido repetidas veces. Y aunque ella da repetidas muestras de que cuenta con los recursos para resolver el problema, su caso ilustra muy bien que contar con los recursos no es suficiente para resolver exitosamente un problema.

2. Problemas abiertos

De acuerdo con la Reforma Integral de la Educación Media Superior, hay dos aspectos que son fundamentales para la enseñanza de la matemática: la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales. El presente trabajo está relacionado con el primero de estos aspectos, porque la conducción de los procesos de resolución de problemas en un salón de clases es una tarea muy difícil para un profesor, que no es un buen resolutor de problemas. Los dos casos analizados aquí, que contaban con una amplia experiencia docente, ponen en evidencia que aún aquellos profesores más experimentados, pueden enfrentar serias dificultades cuando resuelven problemas para sí mismos. El impacto de estas dificultades en las prácticas docentes de un profesor, es un tema que ha quedado fuera de los alcances del presente trabajo, pero sería interesante abordar este punto en futuros trabajos, que pudieran dar respuesta a una pregunta de investigación como la siguiente:

> ¿Cuál es el impacto en el salón de clases, de las dificultades que enfrenta un profesor cuando resuelve problemas para sí mismo?

Por otra parte, la tarea asignada a los profesores en el presente trabajo, ha sido propuesta para que la desarrollen a lápiz y papel. Pero un tema que ha cobrado mucha importancia, sobre todo a partir de la aprobación de la RIEMS, es el uso de las tecnologías digitales en la resolución de problemas. Al respecto de la problemática derivada de este uso, habría por lo menos dos preguntas, cuya respuesta podría darle continuidad al presente trabajo:

1. ¿Cómo usan los profesores las tecnologías digitales cuando resuelven problemas para sí mismos?

2. ¿Cómo incorporan el uso de las tecnologías digitales a los procesos de resolución de problemas que conducen en el aula?

Anexos

Anexo A

Transcripción de entrevista del profesor A

El problema que se le planteó al profesor fue el siguiente:

Problema. *En la figura siguiente $ABCD$ es un cuadrado de lado 3, la circunferencia es tangente a dos de los lados de este cuadrado y pasa por el vértice del cuadrado de lado 1. Encuentre la medida del radio del círculo.*

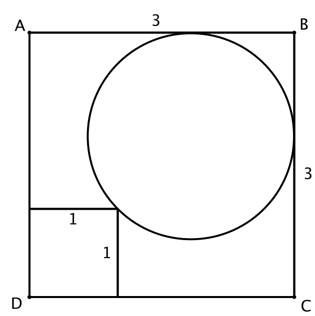

Figura A.1

A continuación se presenta la transcripción de la entrevista, donde identificaremos al profesor como **A**, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ a los entrevistadores.

Episodios:

1. **A**: Pues lo primero es leer ¿no?, el problema.

2. $\mathbf{E_1}$: Sí, léalo por favor en voz alta.

3. **A**: Okey. Dice, en la figura siguiente $ABCD$ [mientras señala los vértices del cuadrado $ABCD$] es un cuadrado de lado tres [señalando los lados del cuadrado] ... tres, muy bien, tres ... la circunferencia es tangente a dos de los lados de ese cuadrado [señala los dos lados] y pasa por el vértice del cuadrado de lado 1 [señalando dicho vértice en la figura] ... encuentre dice, la medida del radio del círculo. Okey, entonces nosotros tenemos algo como esto, de lo que podemos conocer ... algo de lo que

podemos conocer ¿verdad?, de lo que ya nos da [los datos del problema]. Sabemos que de aquí a aquí [el lado CD menos la medida del lado del cuadrado de lado 1, y anota 2 en la figura (ver Figura A.2)] va a medir dos ¿no? ... okey.

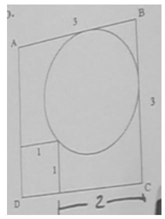

Figura A.2

4. **A**: Entonces, ya tenemos una cuerda [refiriéndose la prolongación de uno de los lados del cuadrado de lado 1, aunque no hace ningún trazo] ... bien ... podemos conocer también lo que mide esto [traza la diagonal del cuadrado de lado 1] ... éste vale uno también [anota la medida del lado del cuadrado de lado 1 (ver Figura A.3)] ... entonces ... [hace un silencio de unos 4 segundos].

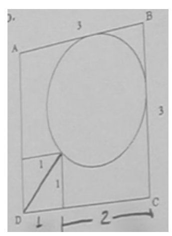

Figura A.3

5. **A**: A ver, vamos a ver ... mmh ... okey ... [traza la prolongación de uno de los lados del cuadrado de lado 1, que es una cuerda de la circunferencia, y una línea paralela a AD que a su juicio pasa por el centro de la circunferencia (ver Figura A.4)] ... ¿me pueden dar otro de estos, verdad? [refiriéndose a la hoja del problema] para trazar otras cosas.

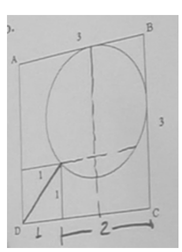

Figura A.4

6. $\mathbf{E_1}$: No, sí, puede usar este espacio [la hoja de papel bond].

7. **A**: Para que, sí, no. Para relacionar lo que es el ... el radio [señala el diámetro de la circunferencia] ... más bien ... el diámetro ... okey ... entonces esta cuerda [la cuerda paralela a BC], ésta sí, ésta pasa por el centro [refiriéndose a la línea paralela a BC, y traza el centro (ver Figura A.5)].

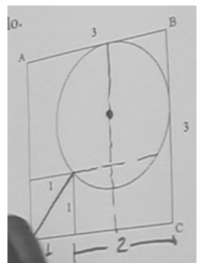

Figura A.5

8. **A**: Ésta pasa por el centro [la línea paralela a BC] ... entonces éste vale uno y éste también vale uno [anota las medidas de las mitades de la cuerda, y traza el radio de la circunferencia como prolongación de la diagonal del cuadrado de lado 1 (ver Figura A.6)] ... aaah ... mmh ... éste también vale uno [señala el lado del cuadrado de lado 1] ... muy bien ... mmh ... [hace un silencio de 5 segundos].

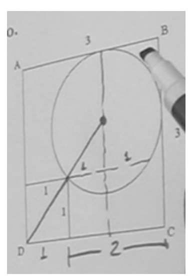

Figura A.6

9. $\mathbf{E_1}$: ¿Esos trazos los está haciendo con la idea de buscar el centro?

10. **A**: Mmh, si pues, para buscar cómo está relacionado pues las medidas y decir dónde puedo yo encontrar pues la relación ... la relación de esta medida [el lado del cuadrado de lado 1] si conozco la completa [el lado del cuadrado $ABCD$], y ver esteee, cómo se relaciona con el diámetro, con el centro ¿no?, de la circunferencia, pues, nos está pidiendo el radio ¿no? ... el radio ... mmh ... éste no vale uno, y

éste tampoco [tacha los valores de los segmentos de la cuerda (ver Figura A.7)] ... [hace un silencio de 7 segundos].

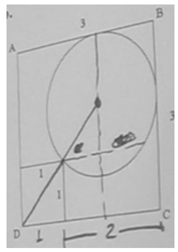

Figura A.7

11. **A**: No es cierto, no es cierto, no es cierto esto [y raya el punto de tangencia de la circunferencia con el lado BC], okey, voy a buscarle por otro lado, voy a buscarle por otro lado [raya el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AB (ver Figura A.8)] ... mmh, a ver, vamos a ver [completa el trazo de la diagonal BD].

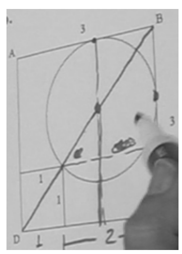

Figura A.8

12. **A**: Voy a encontrar lo que vale todo esto [la diagonal BD] ... ¿qué otra cosa puedo encontrar? ... mmh ... bueno ... [traza una línea paralela a AB por el centro de la circunferencia (ver Figura A.9)] ... mmh ... [hace un silencio de 19 segundos].

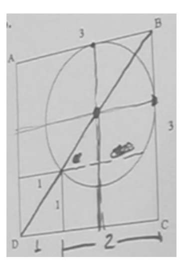

Figura A.9

13. **E$_2$**: Cuando traza esta línea, ¿para qué o con qué intención lo hace? [señalando la línea paralela a AB y que pasa por el centro].

14. **A**: Bueno, esta línea pasa por el, es, pasa por el centro ¿no?, del círculo, o sea, quiero ver las relaciones ¿no?, que puedo encontrar, en las figuras ¿no?, que se puedan formar ... mmh ... éste vale dos [señala el segmento que se forma al quitarle a CD el lado del cuadrado de lado 1] ... voy a trazar otra ... [traza una línea paralela a AD, prolongando el lado del cuadrado de lado 1 (ver Figura A.10)] hacia acá [hace un silencio mientras completa la cuerda que trazó en el episodio 5, formando un cuadrado de lado dos (ver Figura A.11)] y hacia acá.

Figura A.10

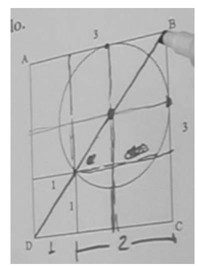

Figura A.11

15. **A**: Donde corta al círculo [refiriéndose a la cuerda. Traza la intersección de ésta con la circunferencia y, a partir de la intersección, dibuja una cuerda paralela a AD, aunque su trazo no fue completo (ver Figura A.12)] ... okey ... okey, todo esto vale raíz de 18 [la diagonal del cuadrado $ABCD$] ... toda la línea completa [delinea con otro color la diagonal BD e indica en la hoja la medida de ésta como $\sqrt{18}$].

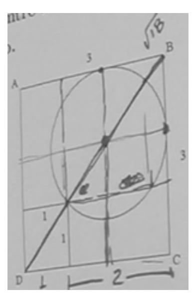

Figura A.12

16. **E$_2$**: ¿Cómo lo encontró esto? [señalando la medida, $\sqrt{18}$, que anotó el profesor **A**].

17. **A**: Aah, si porque es un, es un triángulo ¿no?, tres al cuadrado y tres al cuadrado

[mientras eleva al cuadrado las medidas de los lados del triángulo rectángulo BCD (ver Figura A.13)], son nueve más nueve, 18 ¿verdad?, entonces aquí es, raíz de 18 ¿no? [señalando la diagonal] ... a ver ... muy bien, ¿en qué me ayuda eso? [mientras señala la diagonal] ... un triángulo [el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa el segmento que une al vértice D y al centro (ver Figura A.14)], otro aquí [el triángulo que tiene como hipotenusa la diagonal del cuadrado de lado 1], otro triángulo acá [el triángulo BCD], otro acá [delinea con otro color lo que en su figura pareciera ser un radio que va del centro a BC] ... mmh ... [hace un silencio de 10 segundos].

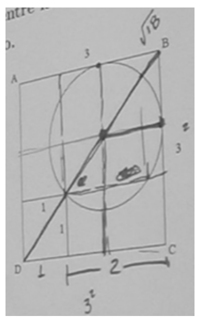

Figura A.13

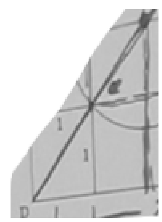

Figura A.14

18. **A**: Okey ... raíz de dos [señalando la diagonal del cuadrado de lado 1] ... raíz de dos [escribe $\sqrt{2}$ en la diagonal del cuadrado de lado 1 (ver Figura A.15)]. Entonces esto, de aquí a acá [delinea con otro color el diámetro que forma parte de la diagonal BD, así como sus extremos] ... será ... la raíz de 18, completa ... menos raíz de dos, me da lo que está aquí ¿verdad? [**A** señalaba una parte de la diagonal (ver Figura A.16, la parte que nosotros hemos enmarcado en una elipse)].

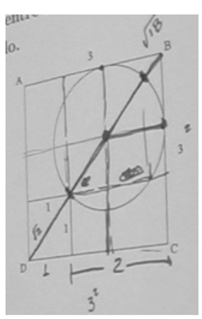

Figura A.15

Figura A.16

19. **A**: A ver . . . este pedacito [el segmento de la Figura A.16] . . . este pedacito sería entonces [señala con una flecha el segmento], la raíz de 18, menos la raíz de dos [escribe $\sqrt{18} - \sqrt{2}$ (ver Figura A.17)], menos la raíz de dos. Entonces raíz de 18 es, ¿qué?, eeh, 4 por 4, 16, sería . . . aah . . . 18, okey [comienza a escribir para encontrar una simplificación de la raíz de 18 (ver Figura A.18)] . . . es tres por raíz de dos, tres por raíz de dos . . . tres por raíz de 2 menos raíz de 2 [escribe $3\sqrt{2} - \sqrt{2}$] . . . entonces tendríamos aquí, tres menos raíz de dos, sería, dos veces la raíz de dos [escribe $2\sqrt{2}$], este pedacito [el segmento de la Figura A.16], y ya tengo éste [señalando la diagonal del cuadrado de lado 1], y entonces ya encuentro el radio . . . bueno, encuentro el diámetro ¿no?, encuentro el diámetro . . . el diámetro, entonces, sería . . . sería . . . raíz de 18 menos raíz de dos, sería este pedazo, y entonces para encontrar el diámetro tendríamos, raíz de dos . . . sería la diferencia ¿verdad?

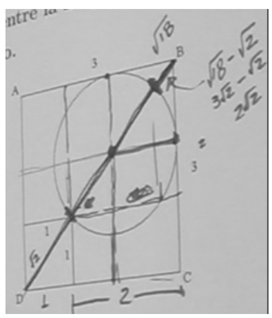

Figura A.17

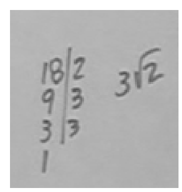

Figura A.18

20. **A**: Raíz de 18, sería la raíz de 18 [escribe d=$\sqrt{18}$]. El diámetro ¿verdad? El diámetro sería la raíz de 18, que es completo [la diagonal BD], menos la raíz de dos [escribe $-\sqrt{2}$ (ver Figura A.19)], menos [escribe $-$] este pedacito [el segmento de la Figura A.16] que sería . . . a ver, en que me estoy equivocando . . . 18, menos raíz de dos, aah no, es todo esto completo [la diagonal del cuadrado de lado dos].

21. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

22. **A**: Sí, jajaja.

23. $\mathbf{E_1}$: Sí.

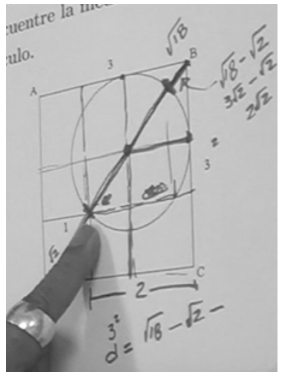

Figura A.19

24. **A**: Es todo esto completo [refiriéndose a la diagonal del cuadrado de lado dos]. Dos raíz de dos . . . sería . . . todo esto completo, ¿verdad? . . . raíz de 18 menos raíz de dos sería todo esto completo. Entonces, esto es esto [señala con una flecha la diagonal del cuadrado de lado dos (ver Figura A.20)], esto es esto.

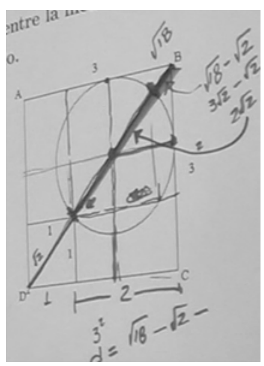

Figura A.20

25. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

26. **A**: Bueno . . . okey, ahora me falta este pedacito [Figura A.16] . . . me falta este pedacito . . . okey, ya quedó esto completo [la diagonal del cuadrado de lado dos] . . . okey . . . entonces . . . hacemos un cuadrado aquí [traza el cuadrado circunscrito (ver Figura A.21)]. A ver si de algo sirve, y luego voy a necesitar otro [otro dibujo], porque ya, lo rayonie todo esto [refiriéndose a que su hoja ya estaba muy rayada].

27. $\mathbf{E_1}$: Mjm. Sí, no importa.

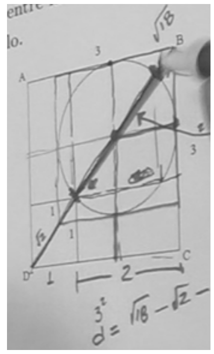

Figura A.21

28. **A**: Okey ... mmh ... mmh ... [señala el centro de la circunferencia] ... mmh [señala la línea paralela a AB que pasa por el centro de la circunferencia], a ver [pareciera que quiso decir "a ver, semejanza"]... éste [señala el lado del cuadrado de lado 1 y después señala el radio que va del centro al lado BC] ... tenemos uno completo, un triángulo completo [y señala el triángulo rectángulo del cuadrado de lado dos (ver Figura A.22)] ... [señala el centro de la circunferencia] ... mmh ... [hace un silencio de 10 segundos].

Figura A.22

29. **A**: Bueno, voy a recapitular eh, voy a volver a hacer el dibujo ... [se le proporciona otra hoja con el dibujo, a la que llamaremos "hoja de registro 2" y a la anterior "hoja de registro 1"] ... Entonces, teníamos de aquí a aquí, teníamos la raíz de dos [traza la diagonal del cuadrado de lado 1 y escribe $\sqrt{2}$], y completo era raíz de 18, completo [la diagonal del cuadrado $ABCD$]. Y entonces, luego, de aquí a acá, de aquí a acá [completa el trazo de la diagonal BD], era dos veces la raíz de dos [escribe $2\sqrt{2}$, mientras observa la hoja de registro 1 (ver Figura A.23)] ... okey, muy bien ... este lado [posiblemente quiso decir "traza este lado", mientras señalaba la diagonal AC] ... mmh ... [señala el punto de tangencia de la circunferencia con el lado BC] ... [hace un silencio de 10 segundos].

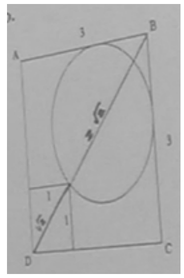

Figura A.23

30. **A**: Mmh ... éste cabe tres veces [refiriéndose a que en cada lado del cuadrado $ABCD$ caben tres cuadrados pequeños. Indica en el lado AD un punto, donde a su juicio se encuentra a una unidad de distancia del cuadrado de lado 1, y traza una línea paralela a AB punteada (ver Figura A.24). Luego, prolonga el trazo paralelo a AD del lado del cuadrado de lado 1, y traza una línea paralela a AD, que a su juicio pareciera estar a una unidad de distancia del cuadrado de lado 1 (ver Figura A.25)].

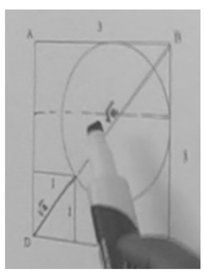

Figura A.24

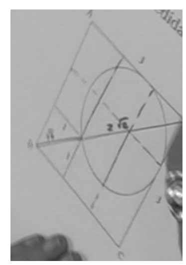

Figura A.25

31. **A**: Lo que tenemos es la misma raíz de dos, de aquí a acá, hasta acá [señalando la diagonal del cuadrado de lado 1 de la Figura A.26)].

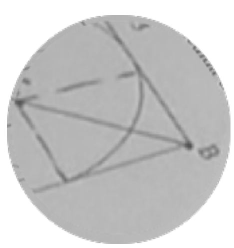

Figura A.26

32. **E$_1$**: ¿Qué distancia está buscando maestra?

33. **A**: Pues el radio maestro [traza con otro color la diagonal del cuadrado superior derecho, y escribe $\sqrt{2}$ (ver Figura A.27)].

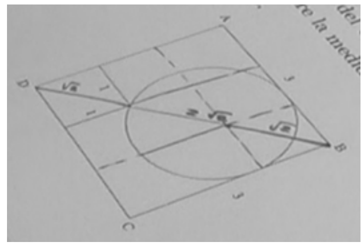

Figura A.27

34. **E$_1$**: El radio. Okey.

35. **A**: El radio . . . o el diámetro en este caso, y ya de ahí que salga el radio.

36. **E$_1$**: A esto ¿cuánto le puso? [señalando la medida que escribió el profesor **A** en el episodio 33]

37. **A**: Mmh, raíz de dos, es que es, está dividido en tres partes ¿no? [refiriéndose a los lados del cuadrado, y traza la prolongación paralela a AB del lado del cuadrado de lado 1, aunque ésta quedó incompleta (ver Figura A.28)], entonces . . . mmh, estas diagonales, todas valen raíz de dos ¿no? . . . ésta también [refiriéndose a la diagonal del cuadrado central de lado 1] . . . aaaah, pues si.

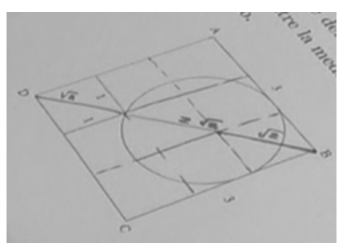

Figura A.28

38. **E$_1$**: ¿Serán iguales?

39. **A**: . . . [hizo un silencio de 9 segundos] . . . Pues si. Porque si éste es un cuadrado [señalando el cuadrado de lado 1 del problema] y este cuadrito tiene tres por tres

[se refiere al cuadrado $ABCD$, y señala cada uno de sus lados], entonces son iguales los, los, los [mientras señala los cuadrados pequeños], ¿verdad?

40. $\mathbf{E_1}$: Mjm. Pero mire, este es un radio ¿verdad? [señala la diagonal del cuadrado central de lado 1].

41. **A**: Aah, no, no es un radio.

42. $\mathbf{E_1}$: Aah, no es un radio.

43. **A**: No, no.

44. $\mathbf{E_1}$: Okey, okey. O sea está dividido en tres nada más.

45. **A**: Está dividido en tres. Sí.

46. $\mathbf{E_1}$: Okey.

47. **A**: Sí. Entonces aquí, lo que pretendo yo es conocer este pedacito pues [el segmento dentro de la elipse que aparece en la Figura A.29], ya para conocer esta parte de acá [señala el diámetro], y ya encontrar el diámetro.

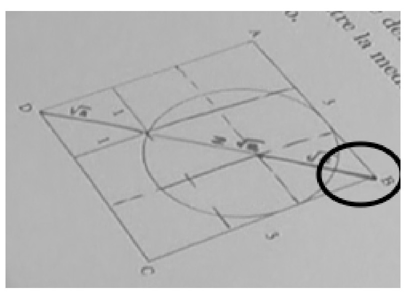

Figura A.29

48. $\mathbf{E_1}$: Muy bien.

49. **A**: Entonces, es la estrategia ¿no?

50. $\mathbf{E_1}$: Claro.

51. **A**: Bueno ... entonces ... éste también vale raíz de dos [la diagonal del cuadrado central, y escribe $\sqrt{2}$] ... okey ... entonces [señala el diámetro en la diagonal BD e

indica en la figura los puntos de intersección de la circunferencia con la diagonal] ... mmh, mmh ... entonces tenemos aquí, un uno y un uno [escribe las medidas de los lados del cuadrado de la esquina superior derecha, y delinea con el marcador el arco de circunferencia que se encuentra en dicho cuadrado (ver Figura A.30)] ... tenemos una longitud de arco [refiriéndose al que delineó previamente] ... pues también, podríamos ... conocer este radio [señala lo que pareciera ser un radio de la circunferencia (ver Figura A.31)].

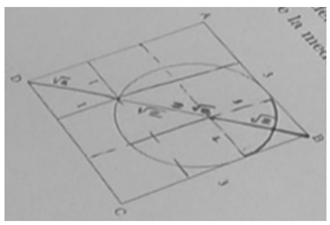

Figura A.30

Figura A.31

52. **$\mathbf{E_2}$**: ¿Cómo?

53. **A**: O sea si fuera una circunferencia así ¿verdad? [una circunferencia inscrita en el cuadrado de lado dos] ... conocer este radio [lo que a su juicio es un radio (ver Figura A.31)] a través del ángulo [señala un ángulo del cuadrado de lado 1 con vértice en B (ver Figura A.32)], éste vale cuarenta y cinco [escribe en el ángulo el número 45], y tengo radio uno [señala un lado del cuadrado de lado 1 con vértice en B, e indica que mide uno], tengo ra ... aah, pues es que este radio vale uno, éste, este pedacito vale uno [señalando lo que él considera que es el radio en el episodio 51, Figura A.31, y escribe el número 1].

Figura A.32

54. $\mathbf{E_1}$: Éste ¿verdad? [señalando un lado del cuadrado de la esquina superior derecha]. Esta figura qué es pues, ésta.

55. **A**: Pues, es igual que ésta ¿no? [refiriéndose al cuadrado de lado 1 de los datos del problema].

56. $\mathbf{E_1}$: Mjm. Es un cuadrado.

57. **A**: Es un cuadrado ¿no?, y tiene . . . aaah, pero es que no es un ángulo central éste.

58. $\mathbf{E_1}$: No, no es, ¿verdad?

59. **A**: [El profesor **A** tacha el valor de 45 del ángulo, que había escrito en el episodio 53] éste no es un ángulo central. Sí. Por ahí no va, por ahí no va.

60. $\mathbf{E_1}$: Porque el centro no está ahí ¿verdad?

61. **A**: No es, no, no está ahí.

62. $\mathbf{E_1}$: Entonces, usted tiene un cuadrado aquí ¿no? [señalando el cuadrado de la esquina superior derecha]

63. **A**: Sí.

64. $\mathbf{E_1}$: ¿Verdad?, que sabe cómo es porque así lo construyó. Y acá también tiene un cuadrado [señalando el cuadrado de la Figura A.33, en la hoja de registro 1] ¿verdad?

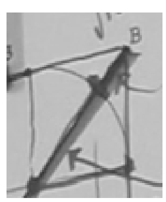

Figura A.33

65. **A**: Sí.

66. $\mathbf{E_1}$: Pero usted cambió de estrategia a ésta.

67. **A**: A ésta.

68. $\mathbf{E_1}$: Por que ésta [la estrategia anterior, empleada en la hoja de registro 1] pareciera como que ya no. ¿Por qué cambio de estrategia? Como que no le . . . ¿no le veía posibilidades a aquél?

69. **A**: Mmh, no, porque ya estaba toda rayada ahí, ya no le entendía. Jajaja.

70. $\mathbf{E_1}$: Pero lo que hizo acá [la estrategia actual en la hoja de registro 2], es otra cosa ¿verdad?

71. **A**: Eh, sí, aquí sí, hice otra cosa.

72. $\mathbf{E_1}$: ¿Le buscó por otro lado?

73. **A**: Por otro lado. Mjm. Si pues, con los datos que tengo, pues yo sé que puedo dividir [el cuadrado $ABCD$], ¿verdad?, en cuadraditos ¿no? . . . entonces [completa la prolongación paralela a AB del lado del cuadrado de lado 1, que no se completó en el episodio 37 (ver Figura A.34)] . . . a ver . . . nomas que hay algo que no estoy viendo. Espérenme tantito eh, no se me desesperen.

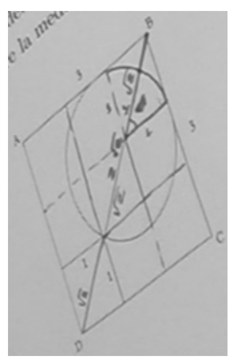

Figura A.34

74. $\mathbf{E_1}$: Sí, no hay ningún problema.

75. **A**: No se me desesperen, jajaja.

76. $\mathbf{E_1}$: No, no, no.

77. **A**: Mmh . . . entonces éste no era [tacha la medida del supuesto radio (ver Figura A.35], pero éste si y éste si [refiriéndose a que los lados del cuadrado de la esquina superior

derecha si miden uno]. Esto vale raíz de dos [la diagonal del cuadrado de la esquina superior derecha] ... es que también esto es raíz de dos ¿verdad? [la diagonal del cuadrado central]. Aah, pues ahí está el diámetro ya ... el diámetro [escribe D en la hoja] ... pero es que no está completo aquí [señala el segmento que hemos encerado en una elipse en la Figura A.36].

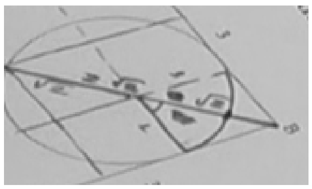

Figura A.35

Figura A.36

78. **A**: Mmh ... mmh ... bueno, un primer, jaja, un primer resultado [escribe la palabra "Diámetro" en la hoja], el diámetro, de esa circunferencia, es menor [escribe la palabra "menor"], bueno, menor [anota el símbolo $<$], menor que ... que dos veces la raíz de dos [escribe $2\sqrt{2}$ (ver Figura A.37)] obviamente, jaja, un primer acercamiento. Jajaja. Si no. Pero ahora vamos a ver cuánto es. Espérenme tantito.

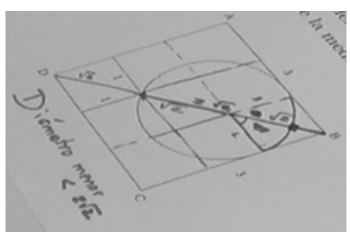

Figura A.37

79. **E_1**: Sí, tómese el tiempo que quiera.

80. **A**: ... [hace un silencio de 40 segundos, aproximadamente] ... y por supuesto, verdad, que el radio [escribe "Radio"] también, el radio, va a ser menor que raíz de dos [escribe "$< \sqrt{2}$" (ver Figura A.38)] ... una cuerda aquí [refiriéndose a la diagonal del cuadrado central], pero ésta no [señalando la diagonal del cuadrado de la Figura A.39], ésta no ... [hace un silencio de aproximadamente 20 segundos].

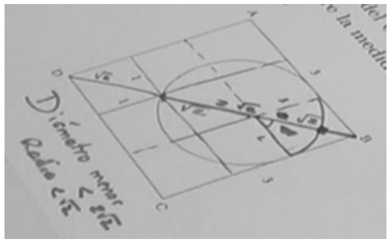

Figura A.38

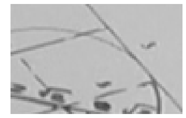

Figura A.39

81. $\mathbf{E_1}$: Un problema aquí [en la figura]es que no tiene el radio a la vista ¿no?, que digamos es lo que está buscando.

82. **A**: Sí.

83. $\mathbf{E_1}$: Ese es un problema, porque, digamos, eh ... cuando trata de relacionarlo con otras cosas pues no, no se ve dónde está ¿verdad?, ahí.

84. **A**: No. Okey ... [hace un silencio de un minuto, aproximadamente].

85. $\mathbf{E_1}$: Si quiere puede hacer otra figura eh, a mano puede hacer otra figura, a mano.

86. **A**: Sí, está bien ... a ver, vamos a voltear [voltea la hoja], vamos a cambiar la perspectiva eh. mmh ... [traza un cuadrado circunscrito a la circunferencia (Figura A.40)] ... éste es igual a éste [los segmentos de la diagonal del nuevo cuadrado que están fuera de la circunferencia (ver los segmentos que hemos encerrado con una elipse en la Figura A.41)].

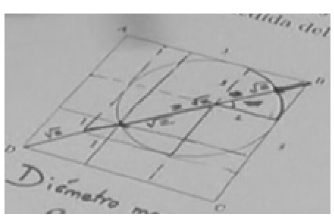

Figura A.40

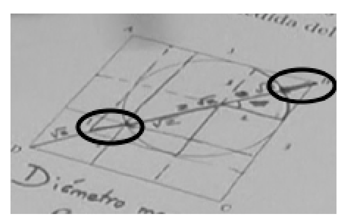

Figura A.41

87. $\mathbf{E_2}$: ¿Cómo? ¿que es igual?

88. **A**: Mjm. Éste es igual a éste [señala los segmentos de la Figura A.41]. Sí, pero no me lleva a nada tampoco, como no tengo otras, las otras medidas ... pero buscando

relaciones . . . a ver [regresa la hoja a la posición inicial y dibuja una parte de la figura del problema en la hoja de papel bond (ver Figura A.42)] . . .

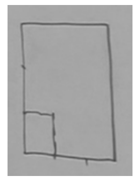

Figura A.42

89. $\mathbf{E_1}$: Este cuadrado nuevo que trazó [mientras señala el cuadrado circunscrito a la circunferencia], ¿qué medidas tiene? El que trazó como tangente, digamos; como circunscrito ¿verdad?

90. **A**: Mjm.

91. $\mathbf{E_1}$: Ese, ¿qué medidas tendrá?

92. **A**: . . . [hay un silencio de aproximadamente un minuto] . . . pues, a ver . . . tengo la raíz de 18 hasta acá [la diagonal del cuadrado $ABCD$].

93. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

94. **A**: El lado es tres [señala un lado del cuadrado $ABCD$] . . . [señala uno de los segmentos de la Figura A.41] . . . pues tengo este pedacito, es, que es el mismo de éste [refiriéndose a los segmentos de la Figura A.41] . . . [hay un silencio de 30 segundos].

95. $\mathbf{E_1}$: Este cuadrado que trazó, bueno, el círculo está inscrito en este cuadrado ¿verdad? [mientras señala el cuadrado circunscrito].

96. **A**: Sí.

97. $\mathbf{E_1}$: Y el círculo de éste, ¿qué radio tiene?

98. **A**: . . . [hay un silencio de 15 segundos] pues tiene la mitad ¿no?, del lado del cuadrado.

99. $\mathbf{E_1}$: Sí.

100. **A**: El radio es la mitad del lado del cuadrado.

101. $\mathbf{E_1}$: Mjm. Estamos buscando el radio, ¿verdad?

102. **A**: El radio.

103. $\mathbf{E_1}$: Okey. Y, ¿en ninguna parte está marcado?

104. **A**: No.

105. $\mathbf{E_1}$: ¿Allá tampoco? [refiriéndose a la hoja de registro 1].

106. **A**: … [hay un silencio de 5 segundos].

107. $\mathbf{E_1}$: [al no obtener respuesta, el entrevistador interviene de nuevo] Como indicada la cantidad en donde estuviera presente.

108. **A**: Mmh.

109. $\mathbf{E_1}$: Okey.

110. **A**: Sí, aquí está, pero, pero no.

111. $\mathbf{E_1}$: Okey, no, pero póngale un nombre.

112. **A**: Ah, okey, ¿aquí?, ¿al radio?

113. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

114. **A**: Por ejemplo, este azulito es el radio, ¿no? [refiriéndose al radio que va del centro al lado BC, y en la hoja de registro 1 lo denota como "radio" (ver Figura A.43)].

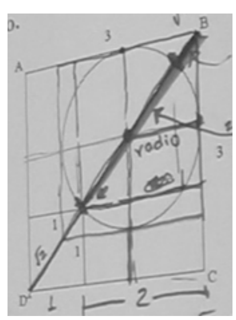

Figura A.43

115. **E_1**: Okey.

116. **A**: Mjm.

117. **E_1**: Okey. Y, entonces, el cuadrado, en donde está inscrito el círculo, eh, ¿cuánto tendrá de lado?

118. **A**: . . . [el profesor **A** hace un silencio de 20 segundos] . . . a ver . . . [hay un silencio de 20 segundos].

119. **E_1**: A ver. Si usted tiene un círculo inscrito en un cuadrado, ¿no? Si quiere dibújelo ahí aparte [**A** dibuja en la hoja de papel bond (Figura A.44)]. Tiene un círculo inscrito en un cuadrado, ¿no?, entonces . . . [hay un silencio mientras la maestra dibuja] . . . si el círculo tiene radio r, ¿el cuadrado cuánto medirá?

120. **A**: Pues $2r$ [escribe $2r$ en la medida del lado del cuadrado que dibujó (ver Figura A.44)].

Figura A.44

121. **E_1**: Okey. Entonces tiene información sobre este cuadrado [circunscrito], ¿no?; sobre el más grande, ¿no?

122. **A**: Ah, okey, okey. ¿Para relacionar?

123. **E_1**: Mjm.

124. **A**: Okey. Entonces sería tres menos $2r$ [refiriéndose al lado del cuadrado circunscrito], por ejemplo, este cuadrado, este lado [señala el lado del cuadrado circunscrito, en la hoja de registro 1].

125. **E_1**: Ese sería, digamos, pues $2r$ nada más ¿no?

126. **A**: $2r$ [y lo denota como $2r$ en la figura (ver Figura A.45)].

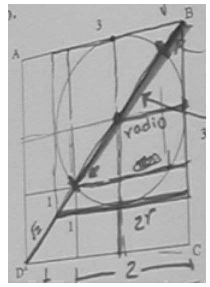

Figura A.45

127. $\mathbf{E_1}$: Sí, eso mediría ¿que no? Si éste es r, pues éste mide $2r$ ¿verdad?

128. **A**: Sí, éste mide $2r$, si. Aah, okey ... bueno.

129. $\mathbf{E_1}$: Y el otro que tiene, el más pequeño que tenía antes ¿cuánto mide? También tiene éste verdad [el cuadrado de lado dos], que también es un cuadrado, ¿y ese cuánto mide?

130. **A**: El que está acá [delinea el cuadrado de lado dos] ... mmh ... ese mide, dos, éste mide dos de lado, aquí está, éste mide dos.

131. $\mathbf{E_1}$: Okey.

132. **A**: Mjm ... mmh, okey ... muy bien ... entonces ... este lado también mide $2r$, ¿no? [refiriéndose al cuadrado circunscrito].

133. $\mathbf{E_1}$: El más grande ¿no?

134. **A**: El más grande.

135. $\mathbf{E_1}$: Sí.

136. **A**: Mjm. Y el más pequeño, pues, mide dos. Entonces, ahora sí, ahora si puedo sacar ... puedo sacar este valor [la medida diagonal del cuadrado circunscrito], y puedo sacar éste de aquí [la diagonal del cuadrado de lado dos], el valor del cuadrado grande, la diagonal del cuadrado grande [el cuadrado circunscrito], le quito la diagonal del cuadrado de lado 1 [el cuadrado de lado dos], y entonces ya tengo este

pedacito [el segmento de la Figura A.46, que buscaba en el episodio 86], y ya puedo encontrar ... el diámetro, y el radio.

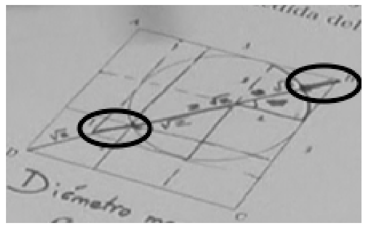

Figura A.46

137. $\mathbf{E_1}$: ¿Cómo sería eso?

138. **A**: Aah. A ver. Entonces, tendríamos, tendríamos la diagonal del cuadrado mayor [el cuadrado circunscrito], le voy a poner ... la hipotenusa ¿verdad?, que sería la diagonal del cuadrado mayor [escribe "D$_{CM}$ =" en la hoja de papel bond], va a ser igual, a la raíz de, cuatro r cuadrada más cuatro r cuadrada [mientras señala la medida $2r$ del lado del cuadrado circunscrito]. Entonces sería, ocho r cuadrada ¿no? [escribe $\sqrt{8r^2}$], ocho r cuadrada. Y la diagonal del cuadrado pequeño [refiriéndose al cuadrado de lado 2, y escribe "D$_{CP}$="], sería igual a dos ... sería igual a la raíz de, a la raíz de ocho [escribe $\sqrt{8}$ (ver Figura A.47)], a la raíz de ocho.

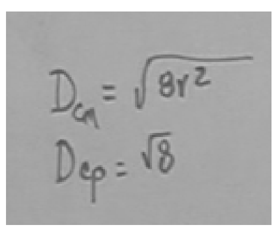

Figura A.47

139. **A**: Entonces, tendría, tendría, todo esto [mientras señala la diagonal del cuadrado circunscrito], y tendría todo esto [señalando la diagonal del cuadrado de lado dos]. Lo resto, y entonces tengo este pedacito [señala uno de los segmentos de la Figura A.41], que es igual a éste [señala el otro segmento] ... entonces ya tengo el diámetro. Entonces ... entonces sería [mientras señala D$_{CM}$ = $\sqrt{8r^2}$, Figura A.47] ... sería, la raíz de ocho [escribe $\sqrt{8r^2}$], menos la raíz de ocho [escribe $-\sqrt{8}$ (Figura A.48)],

más bien es r; r por la raíz de ocho menos la raíz de ocho [escribe $r\sqrt{8} - \sqrt{8}$ (Figura A.48)], menos la raíz de ocho, menos la raíz de ocho ... sería este pedazo [señalando uno de los segmentos de la Figura A.41] ... entonces ... el diámetro, el diámetro del círculo [escribe “Diámetro”] ... [escribe “círculo =”] del círculo, sería igual ... tengo esto [mientras señala la diagonal del cuadrado circunscrito] ... [parece que dice “no puedo con todo el rayonero”] tengo, tengo esto [vuelve a señalar la diagonal del cuadrado circunscrito], menos, esto [menos la diagonal del cuadrado de lado dos], me da este pedacito [señalando el segmento de la Figura A.41], que es esto [encierra la expresión $r\sqrt{8} - \sqrt{8}$ (Figura A.49)]. Y entonces, sería ... sería, ésta [la diagonal del cuadrado circunscrito], menos dos veces ese pedacito ... sí, ¿verdad?

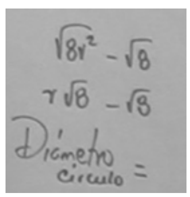

Figura A.48

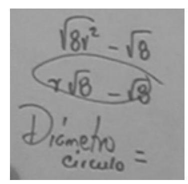

Figura A.49

140. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

141. **A**: Entonces, el diámetro del círculo ... sería ... r por la raíz de ocho [enseguida de “Diámetro círculo =” (Figura A.48), escribe $r\sqrt{8}$], menos [escribe el símbolo $-$], dos veces [escribe el número 2] ... este pedacito [mientras selecciona la expresión que encerró en la Figura A.49]. r por la raíz de ocho menos raíz de ocho [escribe enseguida del número 2, $(r\sqrt{8} - \sqrt{8})$ (ver Figura A.50)].

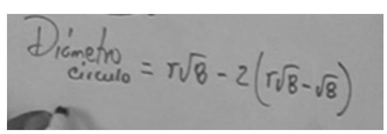

Figura A.50

142. **A**: Y el radio ... sería sobre dos [divide entre 2 la expresión que tenía en la Figura A.50, $r\sqrt{8} - 2(r\sqrt{8} - \sqrt{8})$, y sobrescribe en “Diámetro círculo =” la palabra “Radio” (ver Figura A.51)], el radio del círculo ... sí, no, no puedo pasar de lo ... me falta

pasar, de lo aritmético a lo algebraico, mmh, me cuesta trabajo.

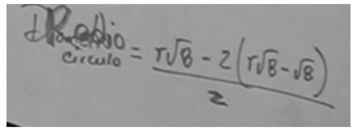

Figura A.51

143. $\mathbf{E_1}$: Claro.

144. **A**: Okey. Bueno, si eso.

145. $\mathbf{E_1}$: Ahí tiene una expresión para el radio ¿no?

146. **A**: Sí, éste es el radio [señala la expresión de la Figura A.51].

147. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

148. **A**: Sí. Se puede reducir ¿no? . . . [hay un silencio de 10 segundos] .

149. $\mathbf{E_2}$: Y ¿cómo podría decir que sí es correcta?

150. **A**: . . . [hay un silencio de 30 segundos, aproximadamente] . . . comprobar dices, que es correcto o, o el valor de del, del radio.

151. $\mathbf{E_2}$: Comprobar.

152. $\mathbf{E_1}$: ¿Qué es correcta la expresión? [comprobar que es correcta].

153. $\mathbf{E_2}$: Encontrar el valor [despejar para encontrar el valor de r].

154. $\mathbf{E_1}$: No, pues nomas tiene la expresión, un expresión para el radio ¿no?

155. **A**: Mjm.

156. $\mathbf{E_1}$: Ya encontró una manera de expresar el radio ¿verdad? Pero, pues de ahí no va, no va a poder.

157. **A**: Encontrar el valor.

158. $\mathbf{E_1}$: Encontrar el valor ¿no?, porque, digamos, esa es una, una forma de expresarlo ¿no?

159. **A**: Sí.

160. $\mathbf{E_1}$: Mmh. Pues si quisiera encontrar el valor, pues quizás debiera tener otra ¿no?

161. $\mathbf{E_2}$: Pero puede, comprobar si es correcta, por ejemplo.

162. $\mathbf{E_1}$: ¿La expresión?

163. $\mathbf{E_2}$: Ajá.

164. $\mathbf{E_1}$: Si podría intentarlo ¿no?

165. **A**: A ver, comprobar cómo, qué es correcta.

166. $\mathbf{E_1}$: No, nomas que la expresión es consistente dice él.

167. $\mathbf{E_2}$: Ajá, consistente con, con los datos ¿no?

168. **A**: Okey . . . mmh.

169. $\mathbf{E_1}$: A ver, me daba la impresión de que al principio, usted decía, pues yo ya puedo saber cuánto vale esto ¿no? [señala la diagonal del cuadrado de lado dos].

170. **A**: Mjm.

171. $\mathbf{E_1}$: ¿Verdad?

172. **A**: Sí.

173. $\mathbf{E_1}$: Y . . . digamos, del planteamiento original [del planteamiento del problema] parecía como que yo podía saber cuánto valía todo esto [la diagonal del cuadrado de lado dos] ¿verdad?

174. **A**: Mjm.

175. $\mathbf{E_1}$: Y, ahora parece que sé cuánto vale éste [señala lo que pareciera un radio de la circunferencia (ver Figura A.52)], digamos ¿no?

Figura A.52

176. **A**: Mmh.

177. $\mathbf{E_1}$: Entonces, cuando usted decía que podía saber cuánto valía todo esto.

178. **A**: Sí.

179. $\mathbf{E_1}$: Decía, bueno, mi problema en todo caso es este pedacito [el segmento que hemos encerrado dentro una elipse en la Figura A.53] ¿no?

Figura A.53

180. **A**: Sí.

181. $\mathbf{E_1}$: Y ese pedacito, ¿no logramos nunca saber cuál era o si?

182. **A**: No.

183. $\mathbf{E_2}$: Sí. Fue lo que sacó [en el episodio 139, la expresión $r\sqrt{8}-\sqrt{8}$ (ver Figura A.49)].

184. **A**: Sí, con los cuadraditos ¿no? [señala el cuadrado de lado dos y el cuadrado circunscrito].

185. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

186. **A**: Mjm.

187. $\mathbf{E_1}$: Porque si lográramos saber cuánto es, a lo mejor, ya estaríamos más cerca ¿no? [más cerca de resolver el problema].

188. **A**: ¿Es a lo que te refieres, de que, vea el valor del radio?

189. $\mathbf{E_2}$: No ... como pueda ... no es valor si no qué consistencia tiene con los datos pues, como que vea que relación hay ¿no?

190. **A**: A ver, ¿qué relación tiene la expresión con el dibujo? o ¿cómo? ... okey. La diagonal entonces del cuadrado mayor ... la diagonal del cuadrado mayor, o sea dijimos que era, esto [señala la medida del lado del cuadrado circunscrito, que es $2r$] al cuadrado, sumo, cuatro r cuadrada más cuatro r cuadrada son ocho r cuadrada. Okey. O sea, todo esto [mientras señala la diagonal del cuadrado circunscrito] ... a ver, voy a ir haciéndolo en otro lado, aquí [refiriéndose al dibujo de la Figura A.42]. Éste es el cuadrado, mayor, el que está circunscrito ¿verdad? ... el que está circunscrito [dibuja un cuadrado y una circunferencia inscrita en él (ver Figura A.54)]. Ahí está.

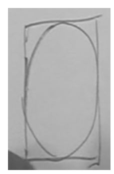

Figura A.54

191. **A**: Y entonces, esto [traza la diagonal del cuadrado], ésta es la que vale ocho, ocho, raíz de ocho r cuadrada. ¿Está bien? Raíz de ocho r cuadrada [indica en su dibujo la medida de la diagonal, $\sqrt{8r^2}$ (Figura A.55)], ahí está, es la diagonal ésta. Luego ... teníamos el otro cuadrado, que viene a partir de aquí [traza, lo que a su juicio sería el cuadrado de lado dos (Figura A.56)] ¿verdad?, a partir de aquí ... y a esta diagonal [la diagonal del cuadrado de lado dos] también la tengo ... ¿no?, que es la raíz de ocho.

Figura A.55

Figura A.56

192. **A**: Porque es un dos, y empieza desde el cuadrito aquí, aquí está el cuadrito [refiriéndose al cuadrado de lado 1 y traza éste (ver Figura A.57)], de lado uno. Y entonces tenemos ... es la roja [refiriéndose a la diagonal del cuadrado de lado dos], como la raíz de ocho [indica en el dibujo el valor $\sqrt{8}$]. Aquí está el [indica el centro en la figura], el radio [delinea el radio de la circunferencia] ... okey [vuelve a indicar el centro] ... entonces ... la verde [la diagonal del cuadrado circunscrito] ... la verde ... menos la roja [la diagonal del cuadrado de lado dos], me da este pedacito [el segmento que se observa dentro de la elipse de la Figura A.58, la cual no forma parte de los trazos de **A**].

Figura A.57

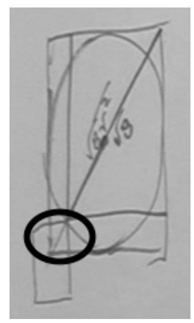

Figura A.58

193. **A**: Aquí está [mientras señala la expresión de la Figura A.49, $\sqrt{8r^2} - \sqrt{8}$], la verde menos la roja [se refiere a la diagonal del cuadrado circunscrito menos la diagonal del cuadrado de lado dos].

194. **$\mathbf{E_1}$**: Okey. Ya tiene ese pedazo ¿no? [el segmento de la Figura A.58].

195. **A**: El pedacito. Que era el que, este pedacito [señala con una flecha el segmento de la Figura A.58].

196. **$\mathbf{E_1}$**: Me daba la impresión al principio, que si encontraba este pedacito o éste [señalando los segmentos que encerramos dentro de las elipses en la Figura A.59], ya tendría resuelto el problema. Pero ahora no sé muy bien. Eh, ya sabe cuánto vale ese [el segmento] ¿verdad?, en términos de r ¿no?

197. **A**: En términos de r, sí.

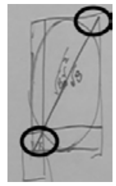

Figura A.59

198. $\mathbf{E_1}$: Mjm. Okey. A ver, vamos a tratar de ver entonces, la diagonal completa ¿cómo sería? [señala la diagonal BD en la hoja de registro 1].

199. **A**: La raíz de 18. Pero la completa.

200. $\mathbf{E_1}$: 18, raíz de 18.

201. **A**: Ajá. Con otro color [toma otro marcador]. Toda completa [completa el trazo de la diagonal BD (ver Figura A.60)].

Figura A.60

202. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

203. **A**: Todo esto es raíz de 18 [la diagonal completa, refiriéndose a la diagonal del cuadrado de lado 3. Indica en el dibujo que la diagonal es D$_{Comp}=\sqrt{18}$ (ver Figura A.61)], toda la completa.

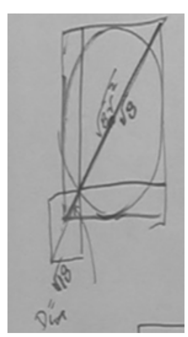

Figura A.61

204. **E_1**: Y de qué pedazos le convendría, digamos, eh. ¿De qué pedazos le convendría descomponerla [descomponer la diagonal]?

205. **A**: Pues en estos dos [mientras señala la diagonal del cuadrado de lado 1 y la diagonal del cuadrado de lado dos]. Entonces, aquí tenemos, dijimos de aquí a aquí era la raíz de dos [indica en el dibujo la medida $\sqrt{2}$], la raíz de dos, hasta acá [delinea la diagonal del cuadrado de lado 1]. Y entonces, de aquí hasta acá [señala la diagonal del cuadrado de lado dos], sería, raíz de 18, menos la raíz de dos [**A** escribe $\sqrt{18}-\sqrt{2}$ (ver Figura A.62)] ... y entonces ... la verde [la diagonal del cuadrado circunscrito], la verde menos ésta [señala el segmento que va del centro al vértice B], la verde menos esto, es igual a esto [igual a $\sqrt{18}-\sqrt{2}$], ¿y ya saco el radio? Ay, ¿es así?

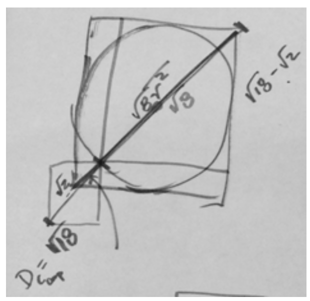

Figura A.62

206. **E_1**: Pues no sabemos ¿no? ... a ver, acá [en la hoja de registro 1], vamos a ver aquí, éste es lo que dice usted que mide raíz de 18 ¿verdad? [mientras señala la diagonal del cuadrado $ABCD$].

207. **A**: Sí. Sí.

208. **E_1**: Entonces, ya tengo como varios elementos o varios pedazos de este segmento ¿verdad? [refiriéndose a la diagonal BD]. Entonces, ¿cuáles me convendría tomar en cuenta?, ¿no?, ese es el punto.

209. **A**: Sí.

210. **E_1**: ¿Verdad?

211. **A**: Sí.

212. $\mathbf{E_1}$: Entonces. Conozco cuáles de todos esos, o puedo expresarlos, digamos ¿no?

213. **A**: Ajá [señala la diagonal del cuadrado de lado 1, que mide $\sqrt{2}$].

214. $\mathbf{E_1}$: Ese. Muy bien.

215. **A**: Ese, raíz de dos. Y también, éste [señala la diagonal del cuadrado de lado dos] pero en términos de, aah, en términos de r.

216. $\mathbf{E_1}$: En términos de r.

217. **A**: Mjm.

218. $\mathbf{E_1}$: Éste en términos de r.

219. **A**: De r.

220. $\mathbf{E_1}$: ¿No?

221. **A**: Mjm.

222. $\mathbf{E_1}$: Pero, y éste [señalando el diámetro de la circunferencia], ¿no lo conoce a éste?

223. **A**: Pues es el que quiero conocer.

224. $\mathbf{E_1}$: ¿Y cómo le llamó?

225. **A**: Diámetro. Es el diámetro.

226. $\mathbf{E_1}$: Muy bien. Entonces éste [el diámetro] es $2r$ ¿verdad?

227. **A**: Sí. Sí.

228. $\mathbf{E_1}$: Entonces, usted tiene, éste [la diagonal del cuadrado de lado 1], ¿podría ser no?

229. **A**: Raíz de dos.

230. $\mathbf{E_1}$: Y éste [el diámetro], y si conoce éste [el segmento que hemos encerrado dentro de la elipse en la Figura A.63] ¿ya que no? Ya tendría una manera de expresar raíz de 18 ¿que no? En pedacitos.

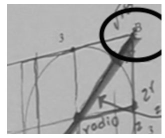

Figura A.63

231. **A**: Mjm, en pedacitos.

232. $\mathbf{E_1}$: Pero no se si salga ¿no?

233. **A**: Mmh. Okey. Entonces tendría, la raíz de 18 igual a [mientras escribe $\sqrt{18}$ =] …igual a …entonces dijimos que esto [el diámetro de la circunferencia] son $2r$ ¿no?

234. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

235. **A**: $2r$.

236. $\mathbf{E_1}$: Sí.

237. **A**: De aquí a aquí [señalando los puntos que unen el diámetro]. Pues si.

238. $\mathbf{E_1}$: Mjm. Está bien.

239. **A**: Si ¿verdad? Okey, sí, son $2r$, son $2r$. Entonces, raíz de todo completo [refiriéndose a la diagonal BD] va a ser igual a $2r$ [y escribe $2r$ enseguida de $\sqrt{18}$ =], $2r$, de aquí a aquí [refiriéndose al diámetro] …más la raíz de dos [la medida de la diagonal del cuadrado de lado 1].

240. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

241. **A**: Más la raíz de dos [escribe $+\sqrt{2}$ (ver Figura A.64)], que vendría siendo de aquí a acá [señalando la diagonal del cuadrado de lado 1].

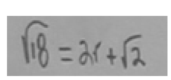

Figura A.64

242. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

243. **A**: Y entonces, este pedacito es igual a éste [refiriéndose a los segmentos que se observan dentro de las elipses en la Figura A.65, las cuales no forman parte de los trazos de **A**]. Y este pedacito es ... ¿cuánto? [busca en las hojas de registro la medida del segmento] ... era ... ay ... era, este pedacito era, era, $2r$ menos, no, era, ay, [el entrevistador $\mathbf{E_1}$ va a intervenir] ah, perdón.

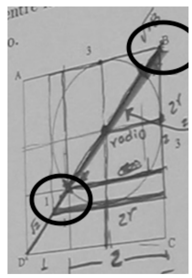

Figura A.65

244. $\mathbf{E_1}$: No, es que tenía, digamos, lo sacó de aquí ¿verdad?, de este cuadrado grande [el cuadrado circunscrito] y de este cuadrado chico [el cuadrado de lado dos] ¿no?

245. **A**: Sí, ajá. Ah, sí, era, ocho r cuadrada menos ... ocho r cuadrada, menos, $2r$ ... entonces aquí sería, más [continúa escribiendo enseguida de la expresión de la Figura A.64, escribe $+\sqrt{8r^2}$], ocho, la raíz ¿no?, de ocho r cuadrada ... menos, $2r$ [escribe $-2r$ (ver Figura A.66)].

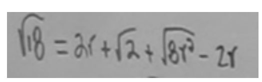

Figura A.66

246. $\mathbf{E_1}$: No, pues sería, éste [señalando la diagonal del cuadrado circunscrito] que mide ocho r cuadrada ¿verdad?, este pedazo, el más grande ¿no? [refiriéndose a que la diagonal del cuadrado circunscrito es más grande que la diagonal del cuadrado de lado 2].

247. **A**: El más grande. Ah si.

248. $\mathbf{E_1}$: Y a ese le quitó éste [mientras señala la diagonal del cuadrado de lado dos].

249. **A**: Ocho r.

250. $\mathbf{E_1}$: Ese, ajá. No, pero, éste [la diagonal del cuadrado circunscrito], mide.

251. **A**: Es que ya me revolví, jajaja.

252. $\mathbf{E_1}$: Éste, raíz de ocho r cuadrada, es que allá lo tiene mire [señalando la expresión que **A** escribió en el episodio 139 (ver Figura A.49)].

253. **A**: Sí.

254. $\mathbf{E_1}$: Es ese ¿verdad?

255. **A**: Sí, es este pedazo [encierra la expresión que tenía escrita en la hoja (ver Figura A.67)].

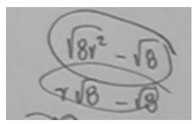

Figura A.67

256. $\mathbf{E_1}$: Así es.

257. **A**: Ah, okey.

258. $\mathbf{E_1}$: Menos esta diagonal [mientras señala la diagonal del cuadrado de lado dos]. Pero esta diagonal es la del cuadrado éste [el cuadrado de lado dos], ¿verdad?

259. **A**: Aah, es cierto.

260. $\mathbf{E_1}$: Que mide dos.

261. **A**: Aah, okey, okey.

262. $\mathbf{E_1}$: Okey, listo.

263. **A**: Okey. Entonces que es la raíz de ocho, menos la raíz de ocho perdón [corrige la expresión que tenía en la Figura A.67, y donde tenía $2r$ escribe $\sqrt{8}$ (ver Figura A.68)], ahí está.

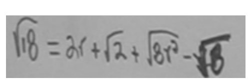

Figura A.68

264. **E_1**: Raíz de ocho r cuadrada menos la raíz de ocho.

265. **A**: Ahí está.

266. **E_1**: Ajá. Y la r, ¿cuánto valdrá?

267. **A**: A ver. Okey. Entonces tenemos raíz de 18 igual a $2r$ más la raíz de dos más r por raíz de ocho, bueno, raíz de ocho es, eh, cuatro dos, dos por raíz de dos, ósea $2r$ por raíz de dos, mmh, $2r$ por raíz de dos menos dos raíz de dos [mientras escribe $\sqrt{18} = 2r + \sqrt{2} + r2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$, que es una simplificación de la expresión que tenía arriba (ver Figura A.69)].

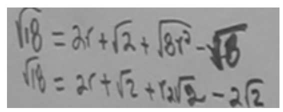

Figura A.69

268. **A**: Entonces tenemos que, el 18 ya lo había sacado por aquí ¿no? [el resultado que encontró en el episodio 19, Figura A.18], tres veces la raíz de dos, tres veces la raíz de dos va a ser igual a [escribe $3\sqrt{2} =$], $2r$ más dos [intenta reunir términos semejantes en la expresión $\sqrt{18} = 2r + \sqrt{2} + r2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$, pero se da cuenta de que el otro término $2r$ está acompañado de la raíz de dos], aah no , tendríamos raíz de dos raíz de dos y raíz de dos [señala en la expresión los términos $\sqrt{2}$, $r2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$] . . . okey, $2r$ más, la raíz de dos por uno, aay, menos $2r$, menos dos [mientras escribe, enseguida de $3\sqrt{2} =$, $2r + \sqrt{2}(1 - 2r - 2)$ (ver Figura A.70)], menos dos.

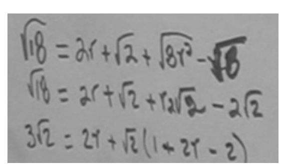

Figura A.70

269. **A**: Entonces . . . tres veces raíz de dos [mientras escribe $3\sqrt{2}$] . . . menos $2r$ [escribe $-2r$], es igual, a la raíz de dos, por uno más $2r$ menos dos [mientras escribe $= \sqrt{2}(1+2r-2)$ (ver Figura A.71)] . . . mmh, mmh, mejor voy a juntar las r's, éste no me va a llevar a nada [encierra entre paréntesis las ecuaciones de la Figura A.72].

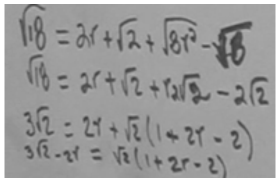

Figura A.71

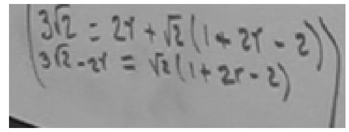

Figura A.72

270. **E_1**: O si quiere, plantéelo aquí [mientras señala un espacio vacío en la hoja de papel bond], la ecuación.

271. **A**: Mjm, si. Raíz de 18, que me alcance ¿verdad? [refiriéndose al espacio de la hoja de papel bond]. Raíz de 18 [escribe $\sqrt{18}$], bueno, tres veces la raíz de dos [escribe $3\sqrt{2} =$], tres veces la raíz de dos, va a ser igual a [mientras señala las ecuaciones de la Figura A.69], $2r$ más $2r$ raíz de dos [señala en la ecuación los términos de r ($2r$ y $r2\sqrt{2}$)], $2r$ más $2r$ raíz de dos [escribe $2r + 2r\sqrt{2}$ (ver Figura A.73)].

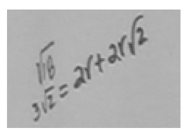

Figura A.73

272. **E_1**: Mjm.

273. **A**: Okey. $2r$ más $2r$ [señalando los términos $2r$ y $r2\sqrt{2}$ en la ecuación de la Figura A.69], más raíz de dos [mientras escribe $+\sqrt{2}$], menos, dos veces la raíz de dos [escribe $-2\sqrt{2}$ (ver Figura A.74)].

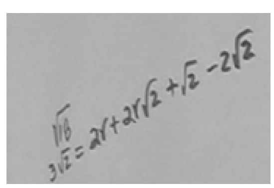

Figura A.74

274. **A**: Entonces ... aquí queda [refiriéndose a la expresión $\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$], uno menos dos, menos la raíz de dos [**A** se refiere al resultado de la operación $\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$] ... menos la raíz de dos ... es tres veces la raíz de dos y va a ser igual [escribe $3\sqrt{2} =$], a $2r$

más tres veces la raíz de $2r$, menos la raíz de dos [escribe $2r - 2\sqrt{2}r - \sqrt{2}$ (ver Figura A.75)], menos la raíz de dos.

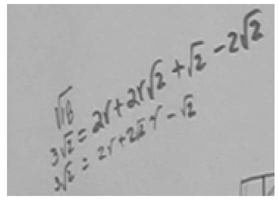

Figura A.75

275. **A**: Okey, éste pasa sumando [refiriéndose a que $\sqrt{2}$ pasa sumando al otro lado de la igualdad, junto a $3\sqrt{2}$], y entonces tenemos cuatro veces la raíz de dos [escribe $4\sqrt{2} =$] es igual a, a r que multiplica a dos más dos veces la raíz de dos [escribe $r(2 + 2\sqrt{2}$ (ver Figura A.76)].

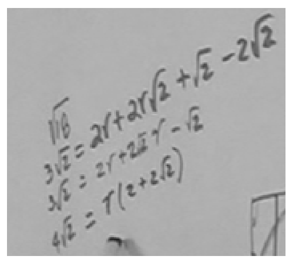

Figura A.76

276. **A**: r, entonces va a ser igual a [escribe $= r$] ...cuatro veces la raíz de dos, sobre dos más dos veces la raíz de dos [escribe $\frac{4\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$ (ver Figura A.77)] ...[diez segundos después] aah, ¿y será consistente?, como dice $\mathbf{E_2}$ [consistente con los datos, tal como preguntó el entrevistador $\mathbf{E_2}$ en el episodio 167].

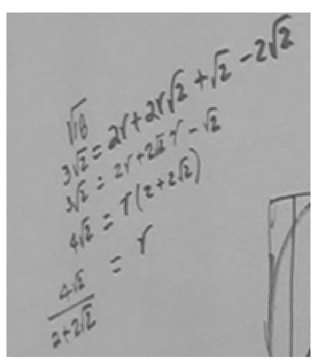

Figura A.77

277. $\mathbf{E_1}$: Aver. Esto [la expresión para r (Figura A.77)] lo puede simplificar, digamos ¿no?

278. **A**: Mmh. Okey ... [hace un silencio de 10 segundos] ... mmh, lo, ¿lo racionalizo o qué hago?

279. $\mathbf{E_1}$: No, nomas saque mitad arriba y abajo [refiriéndose a que dividía, $4\sqrt{2}$ y $2+2\sqrt{2}$, entre dos].

280. **A**: Aah, okey, okey, okey, okey.

281. $\mathbf{E_1}$: Mjm.

282. **A**: Está bien. Dos raíz de dos, sobre uno más raíz de dos, igual a r [escribe $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = r$ (ver Figura A.78)].

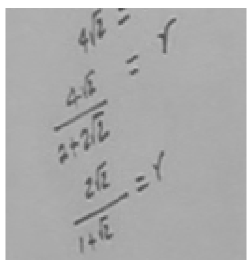

Figura A.78

283. $\mathbf{E_1}$: Entonces, el diámetro de ese círculo mide más de dos ¿verdad? [señala la circunferencia].

284. **A**: Sí.

285. $\mathbf{E_1}$: Un poco más de dos.

286. **A**: Mjm.

287. $\mathbf{E_1}$: Esto quiere decir, que esto [señalando la expresión de la Figura A.78] debiera medir más o menos, ¿un poco más de uno?

288. **A**: Mjm.

289. $\mathbf{E_1}$: Dos raíz de dos, más o menos ¿cuánto es?

290. **A**: Mmh, como dos punto ocho [2.8].

291. $\mathbf{E_1}$: ¿Y uno más raíz de dos?

292. **A**: Mmh. Dos punto ocho, más, uno más raíz de dos también, es dos punto cuatro [2.4]; dos punto ocho menos dos punto cuatro, pues más o menos uno punto y feria.

293. $\mathbf{E_1}$: Un poco más de uno.

294. **A**: Mjm. Más de uno.

295. $\mathbf{E_1}$: Pues, digo, más o menos ¿no?

296. **A**: Más o menos. Sí. Entonces esto, no era [mientras tacha, en la hoja de registro 2, lo que escribió anteriormente donde supone que el diámetro es menor que $2\sqrt{2}$ y el radio es menor que $\sqrt{2}$ (ver Figura A.79)]. Jajaja.

Figura A.79

297. $\mathbf{E_1}$: Mire. A ver, esteee, no sé si tengas preguntas $\mathbf{E_2}$, pero bueno, pero ahí salió el problema [refiriéndose a que ya se resolvió el problema]. A ver, yo tengo algunas preguntas maestra.

298. **A**: Sí, está bien maestro.

299. $\mathbf{E_1}$: Por ejemplo, mire, cuando, digamos, en la primer estrategia que usted usó, eh, como que ya tenía un avance ¿verdad?, que decía, uno [refiriéndose a que ya conocía la medida de la diagonal del cuadrado de lado 1, $\sqrt{2}$, y la señala] y luego éste [la diagonal del cuadrado de lado dos], puedo sacar cuánto vale porque, porque su lado mide dos.

300. **A**: Sí.

301. $\mathbf{E_1}$: ¿Verdad? Entonces, eh, si puedo saber cuánto vale esto ¿verdad? [señalando nuevamente la diagonal del cuadrado de lado dos].

302. **A**: Ajá.

303. $\mathbf{E_1}$: Si pudiera saber cuánto vale esto ya estaría [refiriéndose a que si conociera la medida del segmento que **A** buscaba en el episodio 19 (ver el segmento dentro de la elipse, en la Figura A.16), el problema sería resuelto].

304. **A**: Sí.

305. $\mathbf{E_1}$: ¿No?

306. **A**: Sí.

307. $\mathbf{E_1}$: Pero, entonces la partición que está haciendo, es, el cuadrado de lado 1 más este cuadrado [señala el cuadrado de lado dos]. Así le estaba haciendo ¿verdad?

308. **A**: Sí.

309. $\mathbf{E_1}$: Y luego, como que esto [señalando el segmento que está dentro la elipse en la Figura A.16], como que no encon... como que no veía la manera de calcularlo, entonces hizo otra partición, digamos, como ésta [mientras señala la hoja de registro 2].

310. **A**: Sí, como ésta.

311. $\mathbf{E_1}$: ¿Verdad?

312. **A**: Sí.

313. $\mathbf{E_1}$: Entonces, ¿por qué abandonó esta estrategia? [refiriéndose a la estrategia que empleó en la hoja de registro 1].

314. **A**: Mjm. Mmh, bueno, la abandoné porque ya, aritméticamente, o sea, mi pensamiento aritmético, ya no me permitió avanzar pues, de esta manera. Entonces, ya cuando yo recibo la ayuda de, expréselo pues, si esto es el radio, pues es r, o sea, ya, al momento de, de brincar ¿verdad?, a la expresión, a expresarlo, esteee, de una manera algebraica, entonces, ya un poquito pues ... pero éste es el problema pues, que todavía no desarrolla uno muy bien el pensamiento algebraico.

315. $\mathbf{E_1}$: Ah okey. Okey, entonces ... [interviene el profesor **A**].

316. **A**: Bueno, digo yo.

317. $\mathbf{E_1}$: Como que llegó un ... [vuelve a intervenir **A**].

318. **A**: Yo, es mi dificultad.

319. $\mathbf{E_1}$: Sí. Como que llegó un momento en que dijo, [interviene el profesor **A**: "ajá, si"] pues esto, ya no sé cómo calcular este pedacito [el segmento dentro de la elipse en la Figura A.16], entonces, voy a cambiar la idea [a la estrategia que empleó en la hoja de registró 2].

320. **A**: Sí, voy a cambiar. Ajá.

321. $\mathbf{E_1}$: Bueno. Pero finalmente, el problema se resolvió así, algo así como, este pedazo [la diagonal del cuadrado $ABCD$] lo descompuse en pedazos adecuados, digamos ¿no?

322. **A**: Mjm.

323. $\mathbf{E_1}$: Y logré, como, tener dos expresiones de la diagonal [de la diagonal BD] ¿verdad?

324. **A**: Ajá, si.

325. $\mathbf{E_1}$: Una que es raíz de 18, que es directa, y otra con los fragmentos que pude ¿no? [los fragmentos en los que pudo descomponer la diagonal BD].

326. **A**: Ajá.

327. $\mathbf{E_1}$: Okey.

328. **A**: Sí. Ya relacionándolos con las r's.

329. $\mathbf{E_1}$: Entonces, toda su estrategia está, digamos, centrada en tomar, éste [la diagonal BD] como raíz de 18, y luego tratar de encontrar una descomposición apropiada de segmentos ¿verdad?

330. **A**: De segmentos. Sí. Mjm. Sí, esa es la estrategia.

331. $\mathbf{E_1}$: Y ... pues se ve como natural, digamos. Y, y ¿usted cree, digamos, habrá alguna otra estrategia diferente de esa?

332. **A**: Pues sí, debe de haber. Jajaja.

333. $\mathbf{E_1}$: ¿A usted no se le ocurre ninguna otra?, digo, aunque ya no lo resuelva con otra, digamos, pero.

334. **A**: Pues déjenme pensarlo y lo puedo hacer. Jajaja.

335. $\mathbf{E_1}$: Okey

336. **A**: Sí. Claro que por supuesto.

337. $\mathbf{E_1}$: Okey.

338. **A**: Ahí voy a andar hasta que lo resuelva. Jajaja. Sí. Jajaja.

A continuación, se presentan las hojas en las que se registró el proceso de resolución del problema.

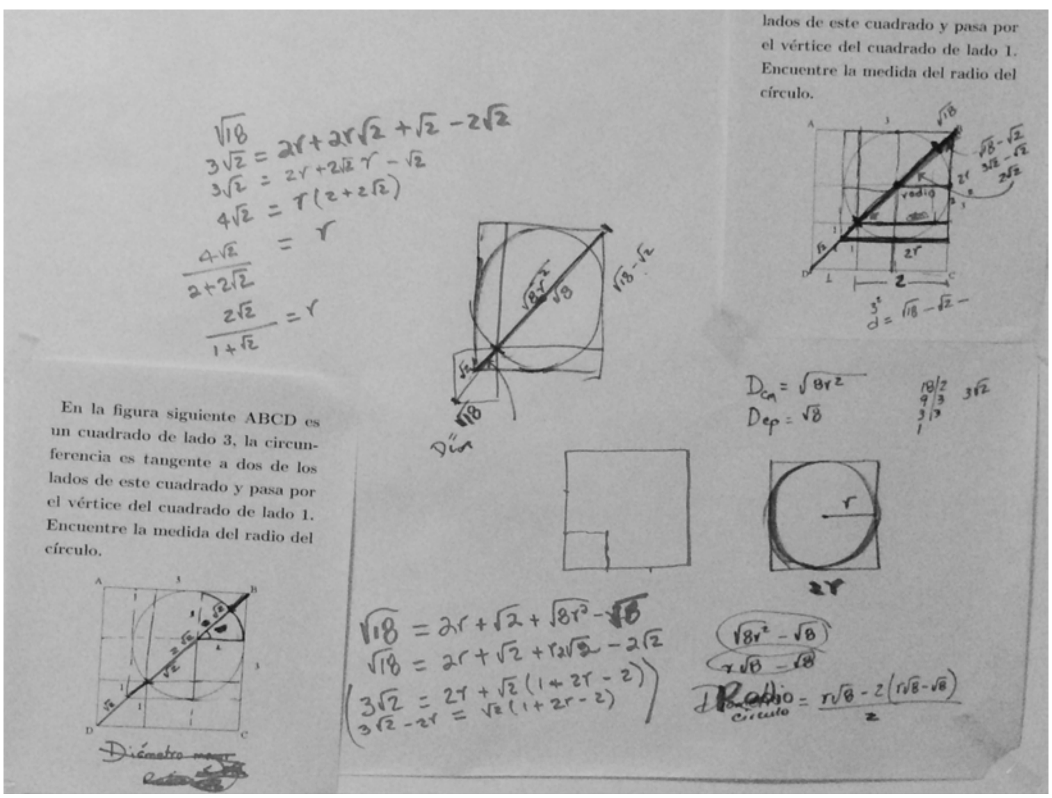

Figura A.80

Anexo B

Transcripción de entrevista del profesor B

El problema que se le planteó fue el siguiente:

Problema. *En la figura siguiente $ABCD$ es un cuadrado de lado 3, la circunferencia es tangente a dos de los lados de este cuadrado y pasa por el vértice del cuadrado de lado 1. Encuentre la medida del radio del círculo.*

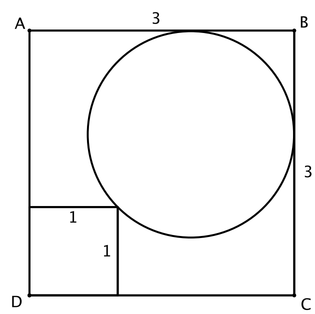

Figura B.1

A continuación se presenta la transcripción de la entrevista, donde se identifica al profesor como **B** y al entrevistador como **E**.

Episodios:

1. **B**: [**B** lee el enunciado del problema] Entonces, dice, la figura $ABCD$ es un cuadrado de lado tres. Es un cuadrado, y la circunferencia es tangente a dos de los lados [mientras señala los puntos de tangencia en la figura], los lados de este cuadrado y pasa por el vértice del cuadrado de lado uno [señala en el dibujo el punto de intersección de la circunferencia y el cuadrado de lado uno]. Encuentre la medida del radio, del círculo ¿no? Entonces, éste es uno, éste es uno [refiriéndose a los lados del cuadrado de lado uno, mientras indica en el dibujo los segmentos con el número 1], éste es dos [se refiere al segmento que se forma al restarle el lado del cuadrado de lado uno al lado AD, y

escribe el número dos en en el dibujo]. Éste sería dos [señala el segmento formado por CD menos el lado del cuadrado de lado uno, e indica su valor con el número dos (ver Figura B.2) . . . el profesor dibuja el centro de la circunferencia. Posteriormente prolonga el trazo paralelo a AD del lado del cuadrado de lado uno (véase la Figura B.3)].

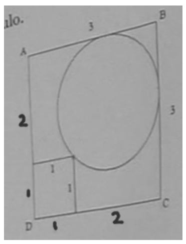

Figura B.2

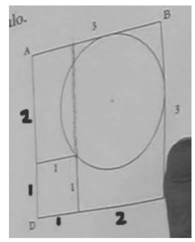

Figura B.3

2. **B**: Éste valdría uno [el segmento sobre el lado AB, que se formó con la intersección de la recta que trazó y AB, e indica en la figura la medida del segmento] éste valdría dos [el otro segmento sobre el AB, que se formó con la intersección y denota en el dibujo la medida del segmento . . . prolonga el trazo paralelo a AB de un lado del cuadrado de lado uno (véase la Figura B.4)].

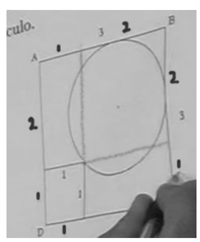

Figura B.4

3. **B**: Éste valdría uno, éste valdría dos [nuevamente, señala en el dibujo las medidas de los segmentos sobre el lado BC que determinó prolongando los lados del otro cuadrado . . . traza el radio de la circunferencia desde el centro hacia el vértice del cuadrado de lado uno (véase la Figura B.5). Luego, dibuja los radios hacia los puntos de tangencia (ver Figura B.6)]. Pues no logro visualizar bien si éste sería, el, la mitad de aquí ¿no?, que valiera uno y uno [**B** se refería a que no estaba seguro de sí, el radio que va hacia el punto de tangencia en AB, dividía en dos partes iguales al segmento que mide dos].

4. **E**: Okay, eso no se, no sabe bien, digamos.

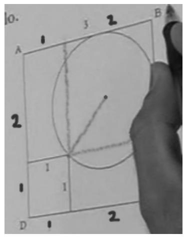

Figura B.5

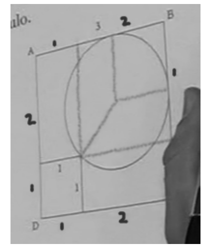

Figura B.6

5. **B**: No se ve bien ¿no? Pero . . . éste es de 90 [mientras dibuja la marca del ángulo formado por los radios que van a los puntos de tangencia (ver Figura B.7)]. Me piden el radio del círculo ¿no?

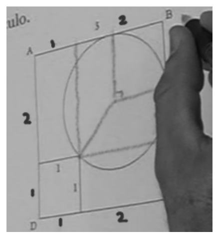

Figura B.7

6. **E**: Mjm. Dice usted que no sabemos cuánto vale ¿no?

7. **B**: Mjm . . . a ver.

8. **E**: ¿Ahí en la figura en dónde estaría el radio?

9. **B**: Pues sería, aquí estaría el centro ¿no? [mientras señala el centro de la circunferencia].

10. **E**: Mjm.

11. **B**: Éste sería el radio, y para acá también el radio y el radio ¿no? [**B** señala los tres radios de la circunferencia y los denota en el dibujo como "r" (ver Figura B.8)].

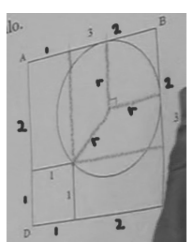

Figura B.8

12. **E**: Okey.

13. **B**: Mjm. Esta recta sería tangente al radio ¿no? [señala el lado AB, y posiblemente quiso decir perpendicular en lugar de tangente]. Noventa, noventa [dibuja las marcas de ángulo del cuadrado formado por los radios]. Éste sería r, éste sería r [identifica en el dibujo como "r" a los lados del cuadrado formado por los radios (ver Figura B.9)].

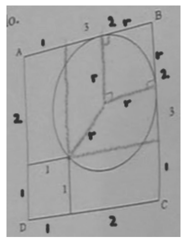

Figura B.9

14. **B**: Esto sería $2 - r$, aquí también sería $2 - r$ [le restó a los lados del cuadrado de 2×2 el segmento que mide r, e indicó en la figura $2 - r$. Luego borra la medida del lado del cuadrado de 2×2 e indica, usando el signo de llave, que dicho lado mide dos (véase la Figura B.10)].

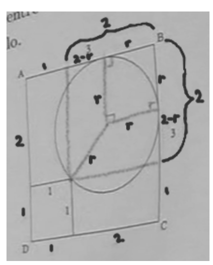

Figura B.10

15. **B**: Y esto, más esto, más esto [señala los tres segmentos en que está dividido el lado AB, que miden uno, $2 - r$ y r]. Uno, más $2 - r$, más r es igual a tres ¿no? [mientras escribe $1 + 2 - r + r = 3$]. Pero vendría cayendo en lo mismo ¿no? [ya que el lado del cuadrado $ABCD$ mide tres. Se le hace la sugerencia al profesor de que escriba con marcador para que se registre en el vídeo, por lo que vuelve a repetir lo que dijo].

16. **B**: Si sumo esto pues debe quedar tres ¿no? [refiriéndose a sumar las medidas de los tres segmentos en que está dividido el lado AB]. Uno, más $2 - r$, más r igual a tres [escribe

$1 + 2 - r + r = 3$]; esto serían tres [refiriéndose a uno más dos, y tacha $-r + r$ ya que es igual a cero]. Caigo en el círculo vicioso, tres igual a tres [escribe $3 = 3$ (ver Figura B.11)].

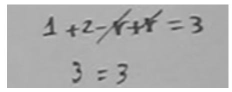

Figura B.11

17. **B**: A ver ... a ver aquí, éste es un cuadrado [el cuadrado de 2×2], entonces hay una línea aquí [refiriéndose a la diagonal de dicho cuadrado y la traza en la figura (véase la Figura B.12)]. Si pues, y éste es r, éste es r [el lado del cuadrado que está en AB y que es formado por los radios], y entonces ... y, pues éste también es r ¿no? [señala el radio de la circunferencia que forma parte de la diagonal del cuadrado de lado r, e indica como k a la diagonal del cuadrado de lado r (ver Figura B.13)].

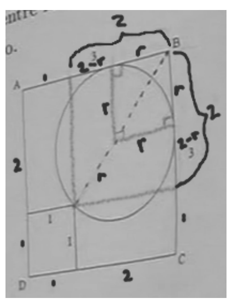

Figura B.12

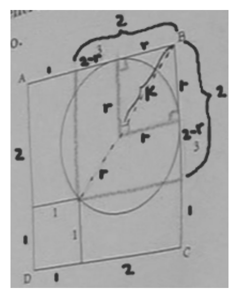

Figura B.13

18. **B**: r cuadrada más r cuadrada, va a ser igual a k cuadrada [mientras escribe $r^2 + r^2 = k^2$]. Dos r al cuadrado va a ser igual a k cuadrada [escribe $2r^2 = k^2$ y traza la diagonal del cuadrado de lado uno], y aquí pues sería el teorema de Pitágoras ¿no? [para calcular la medida de la diagonal del cuadrado de lado uno. El profesor dibuja la marca de ángulo de dicho cuadrado (véase la Figura B.14)]. Sería uno al cuadrado más uno al cuadrado es igual a [mientras escribe $1^2 + 1^2 =$], le voy a poner m [a la diagonal del cuadrado de lado uno (véase la Figura B.15), y completa la ecuación que tenía como $1^2 + 1^2 = m^2$. Luego, escribe $2 = m^2$ y despeja m, para encontrar que $m = \sqrt{2}$ (véase la Figura B.16)].

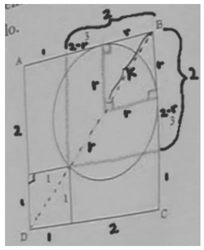

Figura B.14

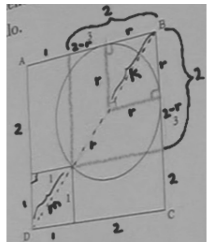

Figura B.15

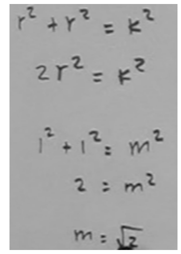

Figura B.16

19. **B**: Sería esto ¿no? [indica en el dibujo que la diagonal del cuadrado de lado uno es $m = \sqrt{2}$]. Y … [encierra la expresión $2r^2$ de la Figura B.17 y escribe $\Rightarrow k = \sqrt{2r^2}$], es igual a la raíz de dos r cuadrada; la k sería igual a r por raíz de dos, este pedacito [la diagonal del cuadrado de lado r].

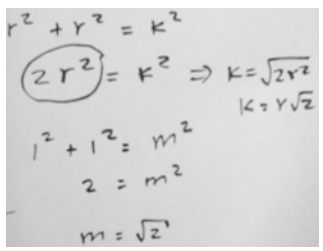

Figura B.17

20. **B**: Éste sería, r por raíz de dos [indica en la figura que k es igual a $r\sqrt{2}$ (ver Figura B.18)]. Y, puedo sumar esta diagonal ¿no? [refiriéndose a que puede sumar los tres segmentos que forman la diagonal BD, que son la diagonal del cuadrado de lado uno (m), el radio de la circunferencia y el segmento que llamó k]. Sería esto [señala el valor de la diagonal del cuadrado de lado uno, que es $\sqrt{2}$], más la r, más esto [encierra el valor de $k = r\sqrt{2}$ (ver Figura B.19)].

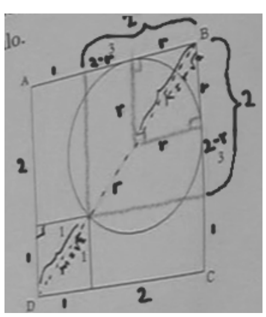

Figura B.18

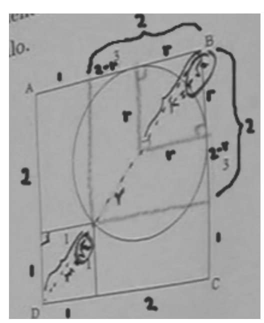

Figura B.19

21. **B**: Entonces, sería [hace un nuevo dibujo del cuadrado de lado tres y traza una de sus diagonales, que corresponde a BD] r, más r raíz de dos, más la raíz de dos [escribe en el dibujo $r + r\sqrt{2} + \sqrt{2}$. También dibuja la marca de un ángulo del cuadrado (véase la Figura B.20) …escribe $3^2 + 3^2 = (r + r\sqrt{2} + \sqrt{2})$. Luego reescribe la ecuación como puede verse en la Figura B.21].

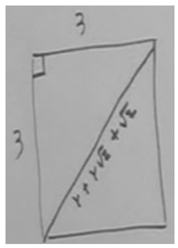

Figura B.20

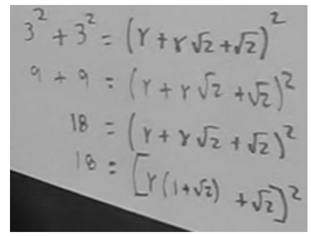

Figura B.21

22. **B**: Entonces, sería [mientras escribe $18 = [r(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}]^2$, y después eleva a la raíz cuadrada a la ecuación para simplificar ésta (ver Figuras B.22 y B.23). Llega al resultado de que $r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$].

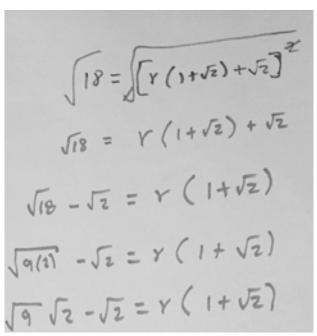

Figura B.22

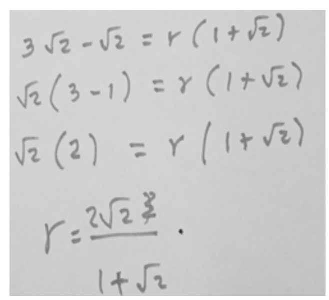

Figura B.23

23. **E**: Esa es la respuesta que obtuvo ¿no? [refiriéndose al valor de r que encontró el profesor].

24. **B**: Sí, aquí mi duda era sí, para mí hubiera sido muy fácil si hubiese sabido que esto a lo mejor valía uno [refiriéndose al segmento del lado AB que mide r], pero no podía haberlo supuesto ¿no?

25. **E**: Mjm. ¿Por qué cree que no valga uno?

26. **B**: Por qué creo que no valga uno ... por estos pedazos ¿no? [mientras señala una parte de la circunferencia que corta la prolongación paralela a AD del lado del cuadrado de lado uno].

27. **E**: Le sobra ¿no? [se refiere a que una parte de la circunferencia queda fuera del cuadrado de 2×2].

28. **B**: Sí, le sobra. Pero, si hubiera estado por acá [si la prolongación del lado fuera tangente a la circunferencia, y traza una línea paralela a AD tangente a la circunferencia (ver Figura B.24)], aquí, pues a lo mejor si vale diferente esto ¿no? [las medidas de los lados del cuadrado de lado uno serían diferentes], pues aquí ya podría suponer que, que sí, esto es igual a esto [el segmento que mide $2 - r$ mediría igual al que mide r].

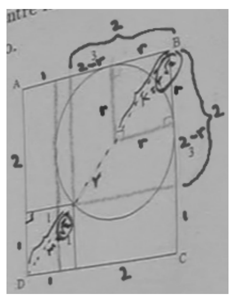

Figura B.24

29. **E**: Porque si valiera uno hasta aquí [el radio de la circunferencia], más éste son dos [el segmento del centro hacia la nueva línea paralela a AD tangente a la circunferencia] y ya no quedaría para el otro uno ¿verdad?

30. **B**: No, ya no.

31. **E**: Okay. Ese resultado que tiene, ¿cómo podríamos verificar?, digamos, que está bien el resultado, en el problema.

32. **B**: Pues podemos, pues con calculadora; podemos racionalizarlo también.

33. **E**: Sí, pero ¿con qué lo compararíamos? Ahí está el problema ¿no? La idea de cómo verificaríamos ¿cuál sería?

34. **B**: A lo mejor sumando esto con esto y con esto y que me de tres ¿no? [sumar los valores uno, $2-r$ y r]. O, pues éste es el centro, entonces sustituyendo aquí a lo mejor, la r, la r [señala los lados del cuadrado formado por los radios], y aplicando la regla de Pitágoras y si se cumple ¿no?

35. **E**: Entonces, ¿verificaríamos cuánto vale esto? [el valor de k].

36. **B**: Ajá.

37. **E**: Pero ¿esto cuánto vale?, ¿k igual a qué dice?

38. **B**: r raíz de dos.

39. **E**: Okay. Pero ese ya lo tengo aquí ¿no? [mientras señala el valor de $r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ en la figura]. O sea, éste grande digamos [la diagonal BD], mide raíz de 18 ¿verdad?

40. **B**: Ajá.

41. **E**: Y la r que nos dio es dos raíz de dos sobre uno más raíz de dos. Entonces, porque el número está medio raro ¿no?, uno podría confundirse. O sea, cómo nos convenceríamos de que andamos bien con la respuesta, o más o menos bien.

42. **B**: A no ser que cometiera un error por acá ¿no? [en las operaciones que realizó], para corroborar. Entonces, sería [escribe el valor de $r = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$]. Pues, por ejemplo, podría sustituir aquí el radio y acá también, a ver si me da esto [sustituir el valor de r en dos lados del cuadrado de lado r y verificar que es correcto el valor de k]. Podría ser una forma. Checar con el teorema de Pitágoras ¿no?, a ver si me da este resultado.

43. **E**: Bueno, okay.

44. **B**: Ya se me complicó más [mientras sustituye los valores de r y k en la ecuación $r^2 + r^2 = k^2$. Después realiza una serie de operaciones para simplificar la ecuación que obtuvo y encontrar el valor de r (ver Figuras B.25, B.26 y B.27)]. Es lo mismo que tengo acá [el valor de r que encontró previamente en el episodio 22].

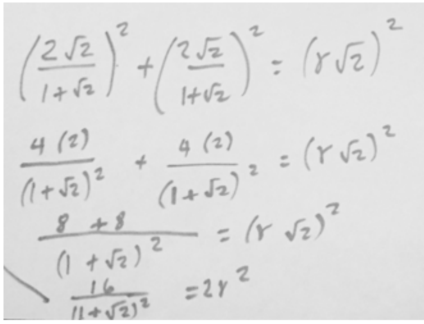

Figura B.25

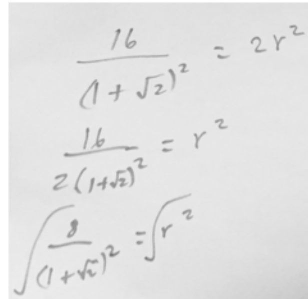

Figura B.26

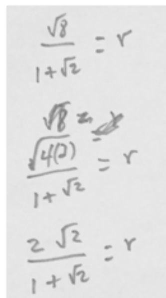

Figura B.27

45. **E**: Mjm. Es decir, usted construyó una igualdad con estos catetos y la hipotenusa, y llegó a que para esa r se cumple, digamos ¿no?.

46. **B**: Sí.

47. **E**: Okay. Bien. Le voy hacer otra pregunta. Mire, como que la idea, usted me dice si estoy bien o mal ¿no?. Digamos, como yo conocía éste, raíz de dos [señala la diagonal del cuadrado de lado uno], éste no pero es el que ando buscando ¿no? [el radio], y luego éste lo puedo escribir en términos de el radio [la diagonal k del cuadrado de lado r]. Entonces, parece como que la idea es que la hipotenusa grande [la diagonal AD] la logró descomponer en pedazos ¿no?

48. **B**: Mjm.

49. **E**: Y luego, bueno, pues trató de encontrar, bueno ya tiene una expresión para la hipotenusa que es raíz de 18, de encontrar otra algo así ¿verdad?, pero en términos de r. ¿Así más o menos le pensó?

50. **B**: Mjm.

51. **E**: ¿Eso lo pensó desde un principio o se le fue ocurriendo?

52. **B**: Se me fue ocurriendo.

53. **E**: Okay. En este mismo esquema, digamos, ¿a usted se le ocurren como otras posibilidades de abordar el problema, aparte de esa?

54. **B**: ¿Posibilidades?

55. **E**: Ajá.

56. **B**: Pues, partiendo de aquí ¿no? [mientras señala el dibujo].

57. **E**: Mjm.

58. **B**: Trazo esto aquí [remarca la línea paralela a AD tangente a la circunferencia y la prolongación paralela a AB de un lado del cuadrado de lado uno (ver Figura B.28)].

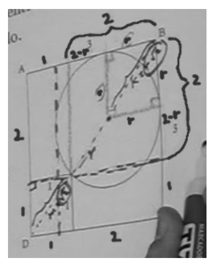

Figura B.28

59. **E**: ¿Eso le daría otra descomposición de la hipotenusa grande?

60. **B**: Si. No, pues. Bueno, aquí le puse la otra [traza una línea paralela a AB tangente a la circunferencia (véase la Figura B.29)], trataría de.

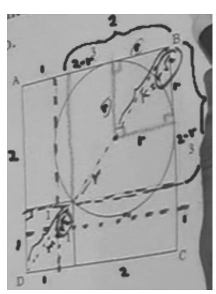

Figura B.29

61. **E**: Ah, okay, okay. Trabajando con otro cuadrado [con la diagonal del cuadrado de lado $2r$ y ya no con el cuadrado de lado dos].

62. **B**: Este cuadrado [señala el cuadrado circunscrito], mmh, al revés ¿no? y comprendo el radio.

63. **E**: Ah okay, ¿eso le daría otras posibilidades?

64. **B**: Si.

65. **E**: A ver. O sea, usted está comparando con la hipotenusa grande con los pedazos, entonces ¿ésta podría ser otra manera de compararlos?

66. **B**: Si.

67. **E**: Bien. En esta descomposición [cuando descompone el lado AB en tres segmentos de medidas uno, $2-r$ y r (ver episodio)], usted lo primero que hizo fue descomponerlo en pedazos ¿no?

68. **B**: Mjm.

69. **E**: Y bueno, pues luego luego la descomposición se vio como que no llevaba a ningún lado ¿no? Pero este pedazo de aquí, este segmento le quedó de longitud ¿qué dice?, $2-r$ [señala el segmento en AB que mide $2-r$].

70. **B**: De aquí ¿no?, de aquí hasta acá [señala el segmento de medida $2-r$].

71. **E**: Okay. Y ese ¿qué relación tendrá con éste? [que relación tendrá el segmento que mide $2-r$ con el radio de la circunferencia que va desde el centro hacia el vértice del cuadrado de lado uno].

72. **B**: 2 menos r, con éste [refiriéndose al radio. Traslada ahora el segmento que mide $2-r$ hasta el centro del círculo (ver Figura B.30)]... 2 menos r ... ¿este pedacito dice? [refiriéndose al segmento que mide $2-r$].

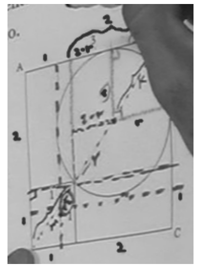

Figura B.30

73. **E**: Sí.

74. **B**: ¿Este pedacito que relación tiene con el radio?

75. **E**: Sí, pero con este radio ¿no?, que está ahí dibujado [se refiere al radio que va desde el centro hacia el vértice del cuadrado de lado uno].

76. **B**: [Repasa el trazo del segmento de medida $2 - r$ y el radio que va hacia el vértice del cuadrado de lado 1]. Éste es igual que éste [refiriéndose a que el segmento trasladado no altera su medida $2 - r$ al trasladarse (ver Figura B.31). Segundos extiende hacia su izquierda el segmento trasladado, hasta dejarlo de medida r (véase la Figura B.32). Transcurrido aproximadamente un minuto, el profesor traza un nuevo radio hacia el extremo de unas de las cuerdas de la circunferencia y lo denota también con r (ver Figura B.33)].

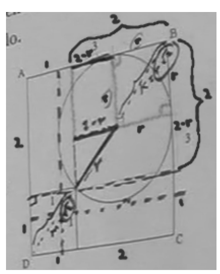

Figura B.31

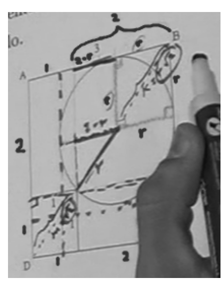

Figura B.32

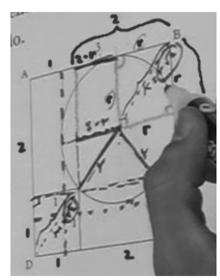

Figura B.33

77. **E**: Ese también es r ¿no? [refiriéndose al radio que acaba de dibujar **B**].

78. **B**: Sí, también es r. Y este pedacito también sería 2 menos r [mientras traza la altura del triángulo que se formó con los dos radios recientemente trazados y la cuerda, denotando esta altura como $2 - r$ (véase la Figura B.34)].

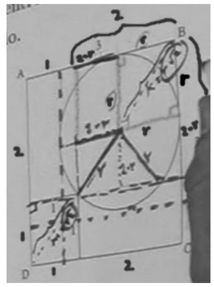

Figura B.34

79. **E**: ¿O sea es igual que éste? [señala el segmento trasladado y denotado como $2 - r$].

80. **B**: Ajá. Sería la diagonal de éste [refiriéndose al cuadrado de lado $2 - r$], entonces éste valdría $2 - r$ [indica en la figura que el otro lado del cuadrado que se forma mide $2 - r$ (véase la Figura B.35)], y entonces aquí también se tendría que cumplir el teorema de Pitágoras ¿no?

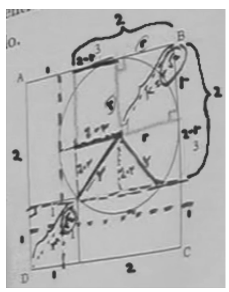

Figura B.35

81. **E**: Ajá. ¿Podríamos sacar algo de ahí? [de la información que tiene el profesor].

82. **B**: Sí. Entonces [escribe $(2 - r)^2 + (2 - r)^2 = r$ (ver Figura B.36)].

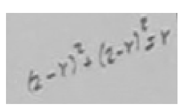

Figura B.36

83. **E**: Cuadrada sería ¿no? [el entrevistador le dice a **B** que sería r^2 y no r, como él lo escribió, y el profesor escribe r^2 (ver Figura B.37)].

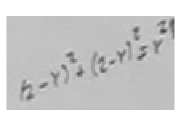

Figura B.37

84. **B**: Que sería dos veces $2-r$ al cuadrado, igual a r cuadrada [mientras escribe $2(2-r)^2 = r^2$ ...obtiene una nueva ecuación: $r^2 - 8r + 8 = 0$ (ver Figura B.38)]. Podemos aplicar la fórmula general aquí ¿no?

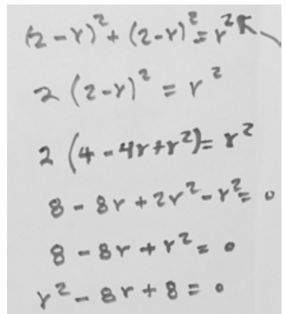

Figura B.38

85. **E**: Pues sí. Si tenemos esa cuadrática, más o menos ¿irá a parecerse a la solución o no?, o ¿cómo llegaríamos hasta ahí? [al no obtener respuesta por parte del profesor el entrevistador comenta] No sabemos bien, pues lo intentamos entonces ¿no?, intentamos resolverla.

86. **B**: Tengo la factorización de ésta ¿no? [de la ecuación $r^2 - 8r + 8 = 0$ (ver Figuras B.39, B.40). Afirma que el valor correcto para r es el de r_1, que resolverá enseguida (véase la palomita en la Figura B.40). Luego, trabaja con la expresión de la Figura B.41, y se retracta de su afirmación, para decir que r_2 es la solución para el problema y la encierra en una elipse].

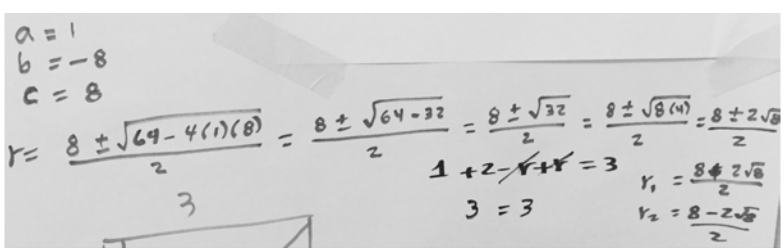

Figura B.39

87. **E**: Mjm. Pero bueno, usted digamos, lo resolvió así [descomponiendo la diagonal BD en los segmentos r, k y m] , y luego se le sugirió esto [señala el segmento $2-r$, refiriéndose a la relación entre éste y del radio] y dio con otra. Y usted dice “y si hacemos esto, sí” [a

trazar las líneas tangentes a la circunferencia], pero ésta la estamos planteando una vez que vimos una ¿no? [una estrategia]; o sea, como que de una se pueden desprender otras ¿verdad? Digamos, usted tendría ahora esta idea [considerar el cuadrado circunscrito], dice "bueno, pues a lo mejor por aquí también" ¿verdad?

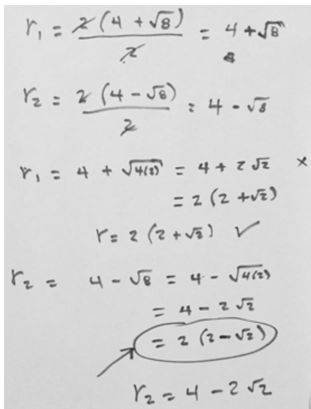

Figura B.40

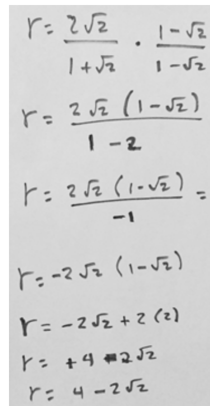

Figura B.41

88. **B**: Sí.

89. **E**: Entonces, por ahí ¿cómo sería? [considerando el cuadrado circunscrito de lado $2r$].

90. **B**: A ver. Voy a hacerlo acá el dibujo ¿no? [refiriéndose a que hará el dibujo del problema en otra hoja, mientras dibuja]. Entonces, esto valdría dos [refiriéndose al segmento en DC que mide dos, e indica en el dibujo las medidas de los lados del cuadrado, así como del segmento de medida dos en lado AD (véase la Figura B.42)]. Entonces, le decía que era por aquí ¿no? [mientras traza las líneas tangentes a la circunferencia (ver Figura B.43)].

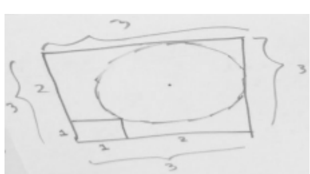

Figura B.42

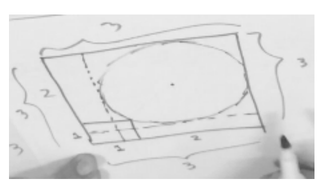

Figura B.43

91. **B**: [Luego, dibuja cuatro radios de la circunferencia y los identifica como r (ver Figuras B.44, B.45, B.46 y B.47)].

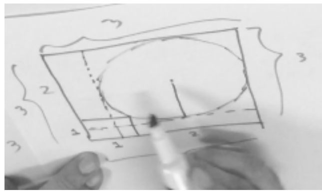

Figura B.44

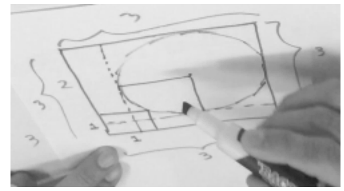

Figura B.45

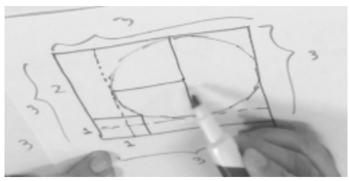

Figura B.46

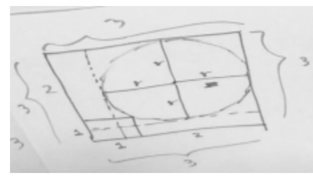

Figura B.47

92. **B**: Entonces, aquí, éste es r [indica en el dibujo que r también es la mitad de los lados del cuadrado circunscrito (véase la Figura B.48)]. Ya se me acaba de ocurrir otra aquí [otra estrategia], no, mejor le voy a dar primero por ésta [considerando el cuadrado circunscrito]. A lo mejor agarrando un cuarto de circunferencia o este cuadradito ¿no? [uno de los cuadrados de lado r (ver Figura B.49)], y con eso sacar el radio.

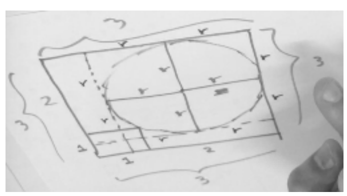

Figura B.48

Figura B.49

93. **E**: Podría ser.

94. **B**: Pero aquí sería, todo esto valdría [mientras señala el cuadrado circunscrito a la circunferencia], entonces serían dos r aquí ¿verdad? [refiriéndose a un lado del cuadrado circunscrito, e indica en la figura que dos lados de dicho cuadrado miden $2r$]. Entonces sería tres menos dos r [mientras escribe en la hoja $3 - 2r$ (ver Figura B.50)] ¿no?, considerando el cuadrado [refiriéndose al cuadrado de lado $2r$].

95. **E**: Tres menos dos r ¿cuál sería?

96. **B**: Sería, bueno, esto es dos r [un lado del cuadrado circunscrito], y si considero todo esto [el lado AB], eso sería el tres menos dos r [el lado del cuadrado circunscrito].

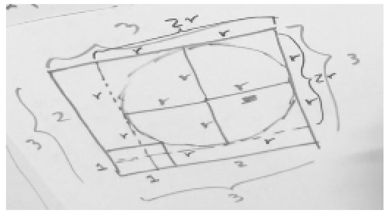

Figura B.50

97. **E**: Y ese ¿cuánto sería?, ¿$3 - r$?.

98. **B**: Igual a esto ¿no? [encierra juntos a $3 - 2r$ y $2r$ (véase la Figura B.51)].

Figura B.51

99. **E**: Éste sería dos r ¿no?, de aquí hasta aquí dos r [señala un lado del cuadrado circunscrito]. Y tres menos dos r ¿qué sería?

100. **B**: Sería [se queda analizando la figura para ver que segmento es].

101. **E**: Éste ¿no? [señala el segmento del lado AB que se muestra dentro de la línea punteada en la Figura B.52].

Figura B.52

102. **B**: Perdón, este pedacito [desecha la expresión $3 - 2r$ que había escrito y escribe $3 - 2r$ arriba del segmento que le indica el entrevistador], tres menos dos r. Entonces, acá también valdría lo mismo ¿no? [señala un lado del cuadrado de lados iguales a $3 - 2r$,

que se forma al trazar la líneas tangentes a la circunferencia, e indica en el dibujo $3-2r$]. Aquí, y acá, pues esto vale también dos r [refiriéndose al segmento de AD equivalente a un lado del cuadrado circunscrito. El profesor delinea el cuadrado de lado $3-2r$, con vértice en D]. Tres menos dos r, acá también sería tres menos dos r [indica en el dibujo el segmento que mide $3-2r$, y que forma parte del lado BD (véase la Figura B.53)].

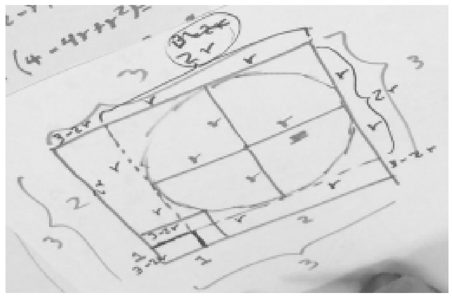

Figura B.53

103. **B**: [Pasados aproximadamente 40 segundos, el profesor escribe 1+ ... luego deshecha lo que acaba de escribir y escribe: $(2r)(2r)$ ... escribe $A_\square = (2r)(2r) = 4r^2$ (ver Figura B.54)].

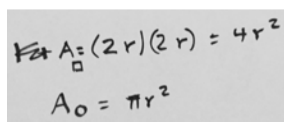

Figura B.54

104. **E**: Y, eso que está calculando ¿qué es?

105. **B**: Es el área del cuadrado éste [señala el cuadrado de circunscrito].

106. **E**: Aah, muy bien.

107. **B**: El área de la circunferencia igual a π por radio al cuadrado [mientras escribe $A_\circ = \pi r^2$ (véase la Figura B.55)]. ¿Para qué podríamos usarlo?, estoy viendo a ver si me sirve ¿no? [pareciera que dice algo sobre el cuadrado, mientras señala el cuadrado circunscrito ... dibuja la marca del ángulo de 90°, que se forma por dos radios de la circunferencia ... transcurridos aproximadamente 20 segundos interviene el entrevistador].

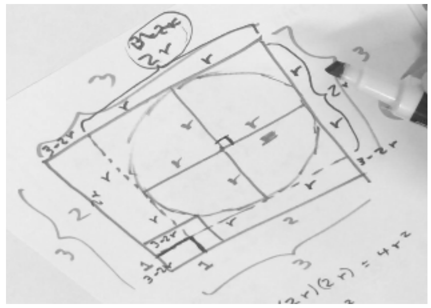

Figura B.55

108. **E**: Pero la idea, digamos, ¿es ver si puede aprovechar las áreas o algo así?

109. **B**: O alguna relación con las áreas y el radio.

110. **E**: Ajá, que puedan aclararnos algo sobre el radio ¿no?

111. **B**: Mjm, sobre el radio ¿no? ... [indica en el dibujo que el área de un cuadrado de lado r es $A = r^2$].

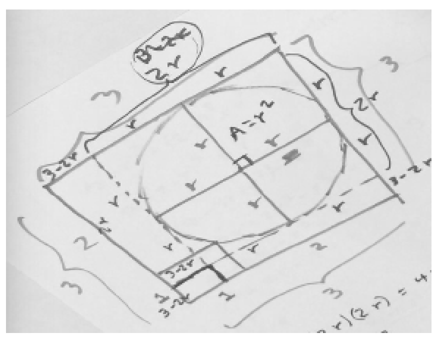

Figura B.56

112. **E**: Pues, no sabríamos muy bien ¿no?, digamos, bueno pues hay que buscarle ¿no?, por el lado de las áreas. Pero, aquí tendríamos una situación como la anterior ¿verdad? [de descomposición]. Tres menos dos r, tres menos dos r, y éste [refiriéndose a la diagonal del cuadrado de lado $3 - 2r$] quien sabe cuánto será ¿no?, pero ya sabemos que éste mide tres por tres ¿no? [el cuadrado $ABCD$], entonces éste mide dos r ¿no? [señala el cuadrado circunscrito], de lado ¿verdad?

113. **B**: Sí.

114. **E**: Entonces, podríamos ver cuánto mide éste ¿verdad? [señala la diagonal del cuadrado de lado $3 - 2r$], puesto que sabemos, podríamos saber cuánto mide éste ¿verdad?, ¿que no? [refiriéndose a la diagonal del cuadrado circunscrito].

115. **B**: Sí, pues vale dos éste y acá también dos ¿no? [señala el lado que mide $2r$].

116. **E**: Bueno, de aquí para acá ¿verdad?

117. **B**: Aah okay, sí, sí.

118. **E**: Pero en el cuadrado que está trabajando, es un cuadrado de lado dos r ¿no?

119. **B**: Dos r, dos r, y a lo mejor podemos sacar esto [señala la diagonal del cuadrado circunscrito].

120. **E**: Sí, sí, podríamos; en términos de r ¿verdad?

121. **B**: Sí.

122. **E**: Cosas así. Bueno, habría esas posibilidades.

123. **B**: Hay que buscarle ¿no?

124. **E**: Sí.

125. **B**: [El profesor traza la diagonal del cuadrado de lado 3 (ver Figura B.57)].

126. **E**: Sí, pues esa ¿verdad? Entonces, si pudiéramos escribir esta diagonal en términos de r, digamos, pues no sé, alguna relación a lo mejor sale de ahí ¿no? Bueno, entonces hay muchas posibilidades ¿verdad?

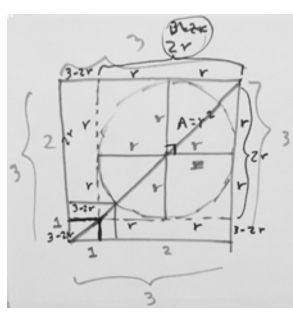

Figura B.57

127. **B**: Sería cuestión de irle buscando ¿no?

A continuación, se presentan las hojas en las que se registró el proceso de resolución del problema.

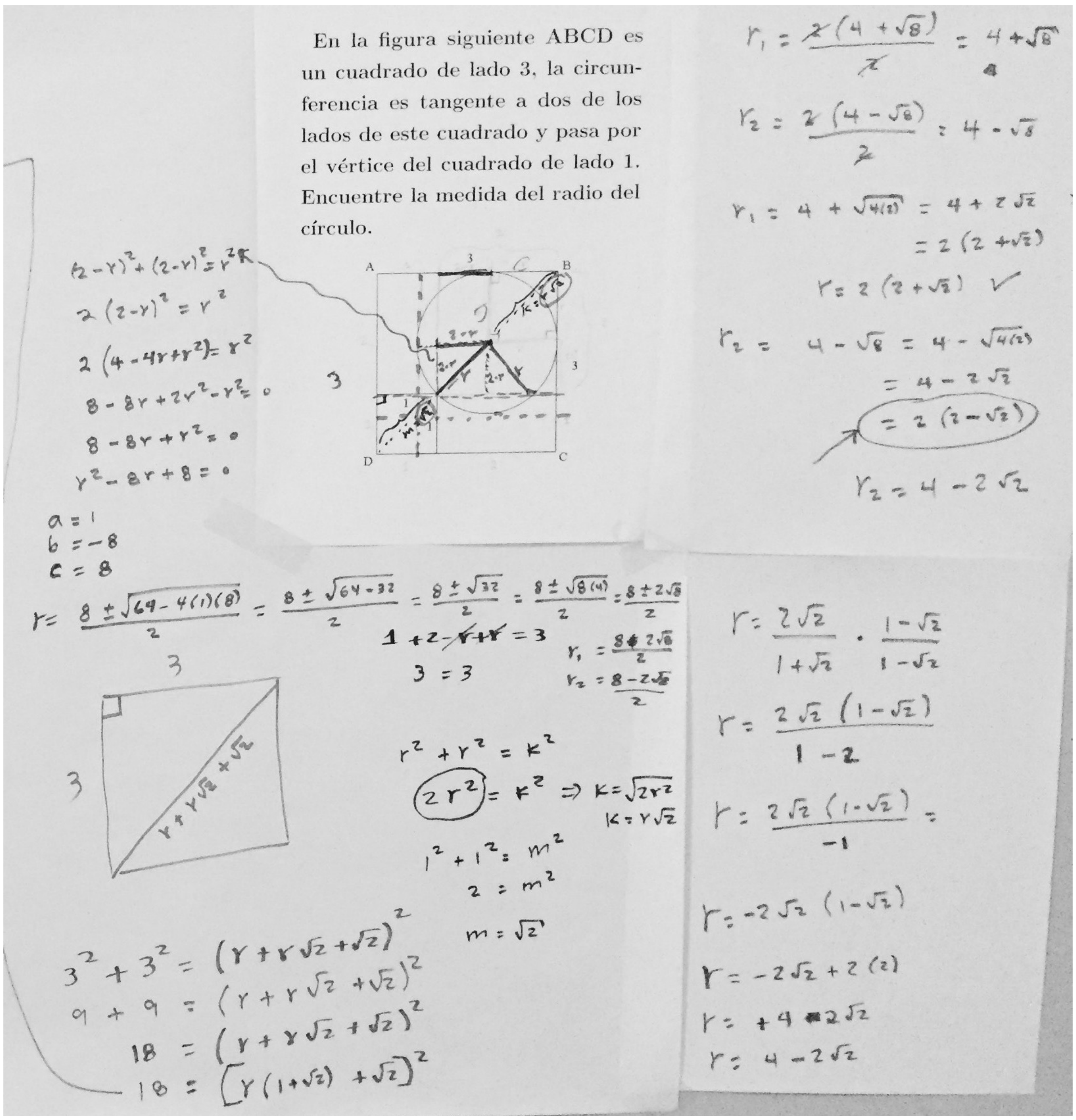

Figura B.58

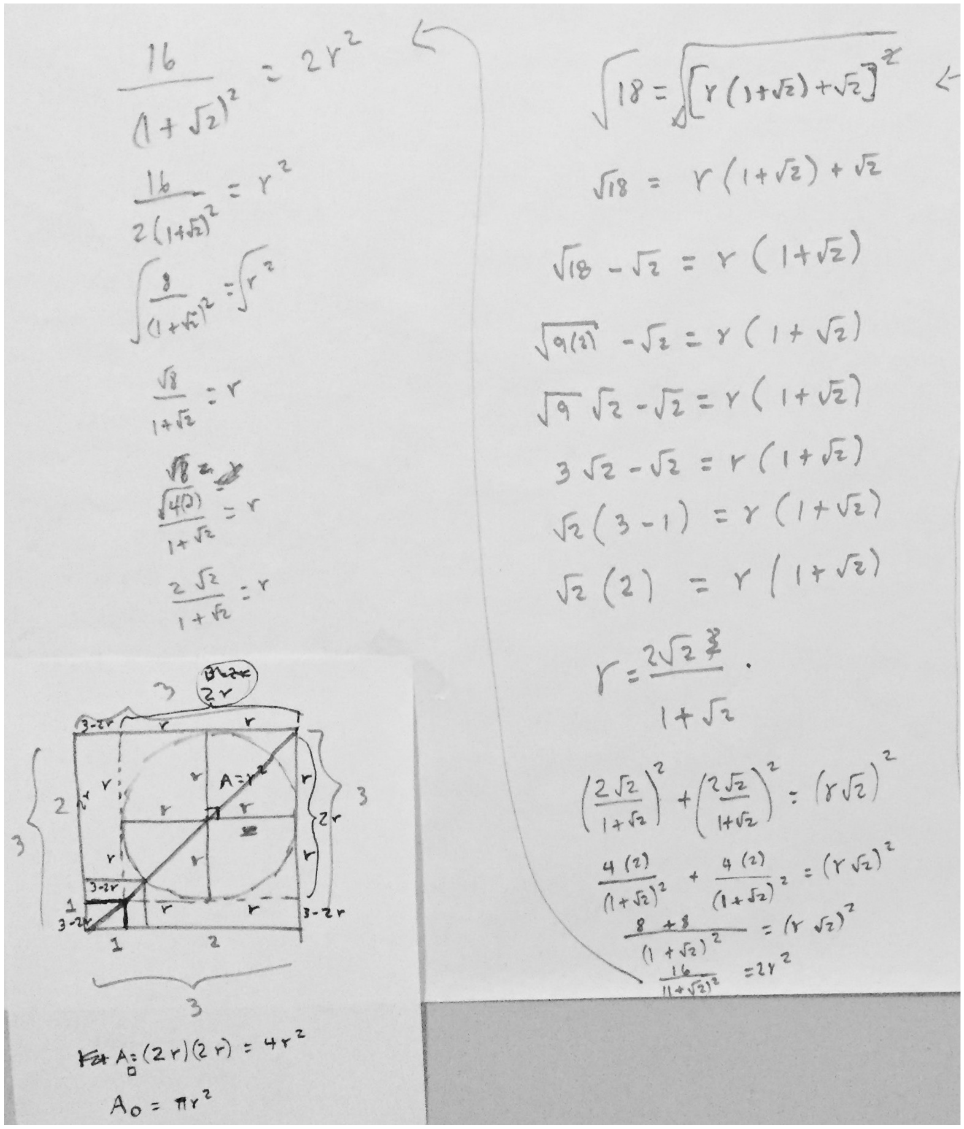
16/(1 + √2)² = 2r²
16/2(1+√2)² = r²
√(8/(1+√2)²) = √r²
√8/(1+√2) = r
√(4(2))/(1+√2) = r
2√2/(1+√2) = r
√18 = √[r(1+√2)+√2]²
√18 = r(1+√2) + √2
√18 − √2 = r(1+√2)
√9(2) − √2 = r(1+√2)
√9 √2 − √2 = r(1+√2)
3√2 − √2 = r(1+√2)
√2(3 − 1) = r(1+√2)
√2(2) = r(1+√2)
r = 2√2/(1+√2)
(2√2/(1+√2))² + (2√2/(1+√2))² = (r√2)²
4(2)/(1+√2)² + 4(2)/(1+√2)² = (r√2)²
(8 + 8)/(1+√2)² = (r√2)²
16/(1+√2)² = 2r²
A = r²
2r
3-2r
3
1
2
A□ = (2r)(2r) = 4r²
A○ = πr²

Figura B.59

Bibliografía

Arcavi, A., y Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of israeli elementary school projects. *Springer*, (39), pp. 355–364.

Brown, A. (1978). Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional Psychology* (Vol. 1). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Charles, R. I., y Lester, F. K., Jr. (1984). An evaluation of a process-oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 15–34.

Freudenthal, H. (1980). Problemas mayores de la educación matemáticas. Conferencia dada en la Sesión Plenaria del ICME4 en Berkeley 10 de agosto de 1980.

Grijalva, A., Soto, J. L., Bravo, J. M., Urrea, M., Rodríguez, M. A., Ávila, R., y Ibarra, S. (2012). *Diplomado: Enseñanza de las matemáticas. Descripción general*. Hermosillo: Universidad de Sonora.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, *87*, 519–524.

Hinsley, D., Hayes, J., y Simon, H. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In P. A. Carpenter & M. A. Just (Eds.), *Cognitive Processes in Comprehension.* Hillsdale, NJ: Eribaum.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*, 163–180.

Lester, F. K., Jr. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: The first 25 years in jrme. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*, 660–675.

Polya, G. (1945). *How To Solve It* (Anchor Books, 1957 ed.). Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.

Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa (2009). Examen de admisión. Junio de 2009. Consultado el 16 de Diciembre de 2015 en: `http://pmme.mat.uson.mx/Ingreso2010/Examen%20de%20admision%202009.pdf`.

Resnick, L. B. (1988). Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 32-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sampieri, R., Fernández-Collado, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos, L. M., y Mancera, E. (2001). ¿qué piensan los maestros sobre la enseñanza relacionada con resolución de problemas. *Educación Matemática,* Vol. 13, Número 1, pp. 31-50.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (2007). *Problem solving, teaching, and more: Toward a theory of goal-directed behavior*. CIEAEM 59, 48-52, Dobogoko-Hungary.

Schoenfeld, A. (2011). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. New York: Routledge.

SEMS (2008). *Reforma Integral de la Educación Media Superior en México: La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. México.

Tarazón, I. (2012). *Una metodología para abordar problemas algebraicos de enunciado verbal*. Hermosillo: Universidad de Sonora.

Thompson, A. G. (1985). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In E. A. Silver, *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 281-294). Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M., y Alvarez, E. (2008). La educación matemática. el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *OEI Revista Iberoamericana de Educación*.

Xenofontos, C. (2007). Teachers'beliefs about mathematical problem solving, their problem solving competence and the impact on instruction: The case of ms. electra a cypriot primary teacher.

Xenofontos, C., y Andrews, P. (2008). Teachers'beliefs about mathematical problem solving, their problem solving competence and the impact on instruction: A case study of three cypriot primary teachers.