Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Una Introducción Gráfica al Concepto de Transformación Lineal Usando GeoGebra

Tesis que presenta

César Fabián Romero Félix

Para obtener el Grado de

Maestría en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. José Luis Soto Munguía

Hermosillo, Sonora, México Octubre de 2010

AGRADECIMIENTOS

A Tere, por acompañarme en las buenas y en las malas.

Al Dr. José Luis Soto Munguía, que sin importar su complicada agenda siempre estuvo dispuesto a guiarme para la realización de este trabajo.

A los Doctores José Carlos Cortés Zavala, José Ramón Jiménez Rodríguez y Silvia Elena Ibarra Olmos, por los comentarios que me permitieron mejorar este escrito.

A todos mis Profesores de la maestría, por sus valiosas enseñanzas.

A todos mis compañeros, por facilitar mi trabajo con la sinergia generada en clase y las reuniones de estudio.

Un especial agradecimiento al Dr. José Ramón Jiménez por abrirme los ojos a una noble profesión y por facilitar mi comienzo en ella.

Contenido

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal es una de las principales disciplinas matemáticas enseñadas a nivel universitario aunque es común que se le considere difícil de aprender o enseñar. En la enseñanza de esta materia podemos identificar un tipo de enfoque como el más difundido, aquel que privilegia el formalismo y la estructura axiomática de la disciplina.

En general tal tendencia suele provocar confusión en los estudiantes de manera que no logran una comprensión profunda de los conceptos. Como lo relatan Uicab y Oktaç (2006) un grupo de investigación dirigido por Dorier, entre 1987 y 1994, encontró que varias de las dificultades de los estudiantes en Álgebra Lineal provienen de un mismo obstáculo, el cual aparece en todas las generaciones sucesivas y prácticamente en todos los métodos de enseñanza empleados en sus investigaciones, al cual llamaron *obstáculo del formalismo* (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000). En la misma publicación, Uicab y Oktaç explican la interpretación de Sierpinska sobre este obstáculo, en la que un estudiante que no puede *superar* el obstáculo del formalismo se comporta como si las representaciones simbólicas formales de los objetos del Álgebra Lineal fueran los objetos en sí mismos, no tiene suficiente aptitud para comprender la estructura de estas representaciones y, por lo tanto, las manipula de manera tal que no es compatible con su *gramática*; el estudiante no ve las relaciones entre distintas representaciones formales y recurre a un número inmanejable de objetos.

En el caso de las transformaciones lineales (TL), uno de los principales temas de un curso de Álgebra Lineal, los estudiantes tienen dificultades para reconocerlas en distintos registros de representación, para distinguir entre transformaciones lineales y no lineales o incluso para concebir la existencia de transformaciones no lineales. También sucede que al establecer la conexión con la geometría de los conceptos vistos previamente de manera abstracta, se usan ejemplos triviales, lo cual conduce a la identificación de las TL con movimientos geométricos simples (contracciones, expansiones, rotaciones, etc.) o combinaciones de estos, descartando como lineales algunas transformaciones como $T(x,y)=(2x-y,-x+y)$, que son difíciles de describir con movimientos geométricos; o lo que es peor: la inclusión entre las lineales de transformaciones que pueden describirse como traslaciones (Molina & Oktaç, 2007).

Esto, como se mencionó, tiene que ver con la forma en que se usan los lenguajes aritmético (de los espacios $\boldsymbol{R}^n$), algebraico (de la teoría general de espacios vectoriales) y geométrico (de los espacios de 2 y 3 dimensiones) en el aprendizaje del Álgebra Lineal, pues en estos enfoques se utiliza principalmente el lenguaje algebraico para introducir conceptos y resolver problemas, mientras el lenguaje aritmético y el geométrico se dejan para exponer ejemplos (Dreyfus, Hillel, & Sierpinska, 1999). Aquí se pueden observar los problemas de la operación cognitiva de conversión relacionados con el paso de un lenguaje a otro, o más precisamente de un sistema de representación semiótica a otro. Si tomamos en cuenta la teoría de representaciones semióticas de Duval (Duval, 1999) se suelen pasar por alto las complicaciones de realizar la operación de conversión dándole un carácter trivial, cuando de hecho se ha documentado que en el Álgebra Lineal la conversión entre registros juega un papel central en el aprendizaje y que las conversiones que involucran al registro de la escritura simbólica resultan de mayor complejidad (Pavlopoulou, 1993).

En vista de esta situación, se propone una secuencia de actividades didácticas diseñadas para favorecer la construcción de un significado de las transformaciones lineales, y con la intención de reducir algunas de las dificultades de aprendizaje mencionadas.

La propuesta se apoya en la idea de que un primer acercamiento gráfico al concepto de transformación lineal, permitiría reducir varias de las dificultades de aprendizaje relacionadas con el uso del registro algebraico. El diseño de las cuatro actividades de las que está compuesta la secuencia está basado en tres supuestos, que se pueden describir de la siguiente manera:

 Capítulo 1 Introducción

1. El registro de representación en el que se inicia el estudio de algún objeto matemático afecta el nivel de comprensión que se puede llegar a obtener de él.
2. El registro gráfico permite la creación de un ambiente enriquecedor, en el que se pueden caracterizar las transformaciones lineales por sus propiedades gráficas.
3. Los ambientes dinámicos diseñados con GeoGebra pueden facilitar a los estudiantes la observación y comprobación de las propiedades gráficas de una transformación lineal mediante la manipulación directa en pantalla, facilitando con ello la conversión gráfico-algebraica.

El primer supuesto relaciona la naturaleza de las representaciones utilizadas en el estudio de las TL y su relación con los procesos de aprendizaje y puede ser visto como la interpretación de resultados de investigaciones realizadas por varios autores (como Uicab & Oktaç, 2006; o Sierpinska, Dreyfus, & Hillel, 1999). Éste fue aplicado al enfocar la secuencia de actividades a la construcción de un significado gráfico de las TL antes de utilizar el registro algebraico. Los otros dos supuestos se basan en los resultados de propuestas similares como la de Soto (2002) o Dreyfus, Hillel & Sierpinska (1999).

Aunque el tipo de software usado y su forma de utilización se asemejan al de las propuestas mencionadas, las particularidades de los trabajos permiten diferenciar las propuestas mencionadas de la aquí presentada. Por ejemplo, la representación de funciones de $\boldsymbol{R}^2$ a $\boldsymbol{R}^2$ se realiza de manera poco común en la secuencia expuesta en este trabajo, graficando por separado el espacio *de salida* y el *de llegada.*

Tomando en cuenta resultados de las investigaciones mencionadas sobre la importancia del desarrollo de la habilidad de conversión durante al aprendizaje del Álgebra Lineal, las actividades propuestas fueron diseñadas para facilitar la operación de conversión, principalmente entre los registros gráfico y algebraico.

El presente trabajo se compone de cinco capítulos, a continuación se expone un resumen del contenido de estos.

El primer capítulo explica la situación general que da origen a esta tesis, se exponen algunos resultados de investigaciones relacionadas y se mencionan las características generales de la propuesta de actividades.

En el segundo capítulo se presentan algunos puntos de vista sobre representaciones, y se exponen las ideas principales de la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1999), la cual sirve de apoyo principal para el diseño de las actividades. Posteriormente se utiliza la misma teoría de R. Duval para analizar los tipos de representaciones utilizados en el estudio de las transformaciones lineales y las características de las conversiones gráfico-algebraicas. Además se exponen las características principales de GeoGebra, las cuales lo ubican más allá de las categorias de DGS o CAS; mismas que influyeron y facilitaron el diseño de las actividades propuestas.

El tercer capítulo describe propiamente la secuencia de cuatro actividades didácticas diseñadas para el aprendizaje de las TL. Detalla además las condiciones de una *prueba piloto,* con la cual se analizó la pertinencia de la propuesta y se observaron algunas dificultades de aprendizaje; y algunas opiniones de los estudiantes que participaron en el *pilotaje* acerca de la propuesta.

En el cuarto capítulo se muestran las conclusiones obtenidas después de analizar el pilotaje de la secuencia, el desempeño y las opiniones de los alumnos. Aunque este trabajo no se trata de una investigación sobre dificultades de aprendizaje, se señalan algunas que fueron observadas durante el diseño y puesta en escena de las actividades. Se señalan posibles modificaciones que podrían mejorar el diseño. En los comentarios finales se habla sobre la validez de la propuesta, el tipo de dificultades observadas y posibles líneas de investigación que se desprenden de este trabajo.

CAPÍTULO 2

REFERENCIAS TEÓRICAS

El uso de representaciones en matemáticas difiere del uso en otras ciencias por una característica esencial. Todo el conocimiento matemático necesita ser semióticamente mediado, es decir, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, o en una experiencia intuitiva inmediata, por lo que cualquier trabajo que se quiera realizar tiene que ser hecho a través de las representaciones. Es por ello que centramos nuestro diseño en una manera particular de trabajar con las representaciones y para analizar y describir lo sucedido utilizaremos principalmente una teoría que se encarga de estudiar las relaciones entre el uso de representaciones y el aprendizaje de las matemáticas.

2.1 ALGUNOS PUNTOS DE VISTA SOBRE REPRESENTACIONES

En el campo de la didáctica de las matemáticas se han realizado muchas investigaciones para precisar el término "representación" y para estudiar el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos . La mayoría están de acuerdo en que la naturaleza de las representaciones matemáticas influye en el tipo de comprensión que genera el alumno, y, recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene el alumno determina el tipo de representación que puede generar o utilizar. Entre los autores que tratan de esclarecer el termino "representación" destacan: Dörfler, Kaput, Brown y Duval. A continuación, se incluye una breve explicación de sus puntos de vista (según los describe Font, 2007).

El punto de vista de Dörfler

Dörfler explica los procesos de *abstracción, generalización y simbolización* que intervienen en la formación de los conceptos matemáticos de la manera siguiente. Se parte de una *acción* o *sistema de acciones*, que pueden ser *materiales* (hacer algo), *imaginadas* (imaginarse hacer algo) o *simbólicas* (describir, mentalmente, que hacemos algo). La atención que se le da a ciertas relaciones entre los elementos de las acciones determina el objetivo, el significado y el curso de estas acciones.

Dentro de las relaciones se observan regularidades, por medio de la repetición, que son llamadas "invariantes de las acciones". Los invariantes necesitan ser representados por un "sistema de símbolos". Estos representan los elementos de la acción y no tienen significado abstracto, eventualmente, los símbolos pueden ser sustituidos por *prototipos de acciones*. Después, se continua con los procesos de *abstracción constructiva* (a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, se llegan a encontrar relaciones invariantes y describirlas simbólicamente), *generalización extensiva* (sustituir elementos de la acción, o la acción misma, sin que afecte a los invariantes ni a su descripción simbólica, generando que los símbolos que se utilizan para representar los invariantes de la acción tengan, de manera gradual, un referente cada vez más amplio), *generalización intensiva* (los símbolos se tornan variables y la reflexión sobre el sistema de símbolos hace que se pueda actuar sobre ellos, dándoles el carácter de objetos). Se tiene entonces un sistema estructurado de signos que se pueden aplicar a otras situaciones diferentes de la inicial, con lo que su referente gana en extensión y volvemos a tener una *generalización extensiva.*

El punto de vista de Kaput

Kaput considera a la representación como: *la representación de una experiencia por otra*. Este autor considera que la capacidad que tienen las personas para trabajar con objetos y procesos muy elaborados se basa en la interacción entre dos fuentes de organización de su mundo de experiencias: 1) las estructuras mentales con las que organizan su mundo de experiencias, y 2) su habilidad para utilizar medios materiales en la organización de sus experiencias. Kaput considera el mundo de experiencias de las personas dividido en dos esferas: 1) las experiencias materiales, que son observables y 2) las experiencias mentales, que son hipotéticas. Las dos actúan conjuntamente en los procesos de representación, tal como se ve en el diagrama siguiente.

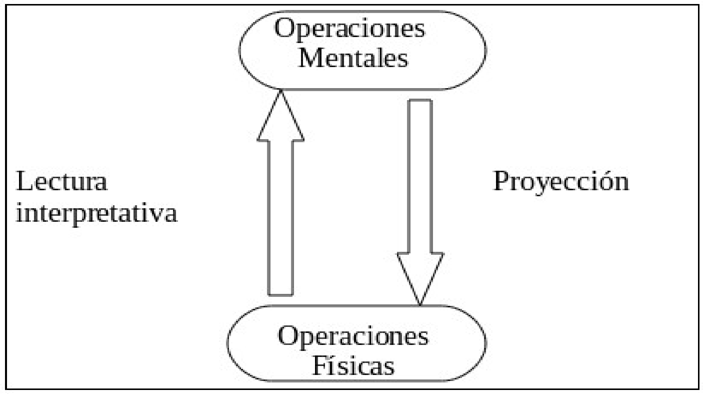


Figura 2.1: Interacción entre las operaciones físicas y mentales

Kaput considera que la parte inferior del diagrama es lo que normalmente se considera “significante” y el nivel superior “significado”. La flecha que apunta hacia arriba en esta figura corresponde a dos tipos de procesos: la lectura activa y la evocación de fenómenos mentales a través de los materiales físicos. Con esta flecha se indica el uso de objetos materiales como base de la cognición. La flecha que apunta hacia abajo corresponde a la proyección de las estructuras mentales en el medio material para comunicar, manipular, demostrar, etc. En la parte inferior del diagrama tenemos los sistemas de notación ostensivos que Kaput entiende como un sistema de reglas para 1) identificar o crear signos, 2) para operar con ellos y 3) para determinar relaciones entre ellos. Los ostensivos no tienen por qué ser cadenas de letras o dígitos, sino que pueden incluir gráficos y diagramas, o bien objetos físicos. Los tipos de acciones pueden variar según el tipo de sistema de notación considerado.

El punto de vista de Brown

Brown, que se basa en la fenomenología social de Schutz, trata a las representaciones como *relaciones entre dos fenómenos.* Y, siguiendo a Schutz, distingue entre aquello que se presenta a la consciencia (appresenting) y aquello con lo que se relaciona (appresented), que muchas veces sólo está presente simbólicamente. Considera cuatro tipos de esquemas para explicar cómo las personas relacionan acciones con sus resultados:

1. Apperceptual (siendo consciente de la percepción): Los objetos son objetos. La expresión: $x^2+y^2=1$ es solo un grupo de *letras.*
2. Appresentational (siendo consciente de las representaciones): El mundo como un mundo de signos. La expresión: $x^2+y^2=1$ es vista como una representación de un círculo.
3. Referential (de referencia): El conjunto de imágenes mentales relacionadas. Permite metáforas y analogías, por ejemplo: " $x^2+y^2=1$ es un círculo".
4. Interpretational (interpretacional): Relaciona el mundo de las apariencias superficiales y lo que el sujeto cree que existe, que puede ser diferente del de otra persona.

Ambos autores, Kaput y Brown, se centran tanto en la esfera de las experiencias materiales, como en la esfera de las experiencias mentales y enfatizan la relación que existe entre ambas. Consideran que las representaciones ostensivas (sistemas de notación en la terminología de Kaput y sistemas de signos en la de Brown) permiten: *expresar y comunicar* (estructuras y operaciones mentales), *manipular* (transformaciones de representaciones) y *objetivar.*

Aunque los puntos de vista recién mencionados explican, cada uno a su manera, la relación entre el las representaciones y el aprendizaje de las matemáticas, nos inclinamos por otra teoría por las declaraciones explícitas y contundentes sobre estas relaciones, principalmente la siguiente: si se llama *semiosis* la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y *noesis* los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia , Duval (1999) afirma que:

"no hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis "

Esta relación entre noesis y semiosis parece no ser considerada por los otros autores y pudiera ser que estén de acuerdo con lo contrario, de cualquier manera, la teoría de Representaciones Semióticas de R. Duval parte explícitamente de este supuesto, da argumentos para hacerlo y explica, entre otras cosas, varias consecuencias de ello.

2.2 TEORÍA DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Entre los varios autores que tratan de detallar el término comúnmente ambiguo "representación" se eligió como referencia principal a la teoría de representaciones semióticas, de R. Duval (1999), por la manera precisa y sistemática de analizar a las representaciones según distintas características como: las actividades que éstas permiten realizar, la manera en que se realizan ciertas funciones, las cualidades de distintos tipos de registros y por supuesto, la relación que existe en el uso de los registros de representación y el aprendizaje. Dentro de esta teoría, se enfoca el análisis a las *representaciones semióticas,* las cuales se caracterizan por ser representaciones externas y conscientes, a diferencia de las representaciones mentales o computacionales (véase Duval 1999, pp. 18-20). En lo siguiente, cuando hablemos de representaciones nos referiremos a representaciones semióticas, definidas por Duval (1998, p.175) como:

"producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema semiótico que tiene sus propias limitaciones de significancia y funcionamiento".

Del mismo modo que algunos conjuntos de símbolos matemáticos son considerados *sistemas semióticos,* también lo son otros como los símbolos utilizados para la elaboración de planos de construcción o el lenguaje morse. Una diferencia esencial entre ellos es la posibilidad, además de representar objetos, de transformar las representaciones de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Serán de nuestro interés solamente aquellos sistemas semióticos (conjuntos de símbolos) que permitan realizar las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis:

1. La *formación* de un signo o un conjunto de signos perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.

2. El *tratamiento* de una representación, que es la transformación de la representación en otra dentro del mismo sistema.

3. La *conversión* de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Los sistemas de signos que permiten realizar estas tres actividades son conocidos como *registros de representación semiótica* y son a los que nos referiremos de aquí en adelante.

Los registros de representación utilizados generalmente para representar los objetos definidos en el Álgebra Lineal (o en el estudio de espacios vectoriales) son: el registro gráfico, el matricial y el de la escritura simbólica (Pavlopoulou, 1993). Algunos ejemplos de cómo son *formadas* las representaciones en estos registros se muestran en la tabla siguiente:

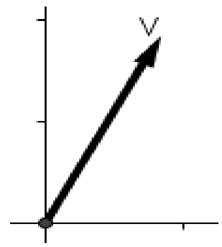
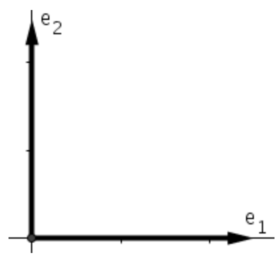
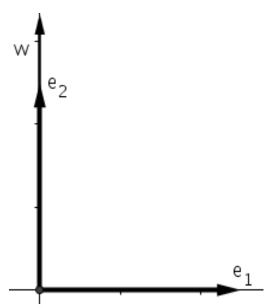
Objeto que puede ser representado	**Representaciones**		
	Registro gráfico	**Registro matricial**	**Registro Algebraico**
Vector o elemento de un espacio vectorial		$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$	*U, V, W*
Base		$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	e_1, e_2
Vector colineal a un vector de la base escogida		$\begin{pmatrix}0\\1.3\end{pmatrix}$	$W=1.3e_2$

Tabla 2.1: Ejemplos de representaciones de objetos del Álgebra Lineal.

Un registro de representaciones semióticas que es también utilizado en matemáticas y que comúnmente es pasado por alto es el de la lengua natural, en nuestro caso el español (o castellano). En este registro las representaciones tendrían la forma de *oraciones* o *enunciados,* propiamente formados siguiendo las reglas de gramática y ortografía. Entre los tratamientos podemos mencionar las *explicaciones, narraciones, descripciones, argumentaciones,* etc.

Los *tratamientos* que se pueden realizar a las representaciones varían según el registro en el que se esté trabajando y comúnmente pueden ser más o menos complejos dependiendo del registro. Aquí podemos retomar el caso de la multiplicación de vectores, los tratamientos en el registro gráfico y en el algebraico son de naturalezas distintas. Mientras que en el registro gráfico están involucradas dos operaciones, identificar la dirección y obtener el tamaño y el sentido de la flecha; en el matricial es una operación directa que se reduce a la multiplicación de números reales.

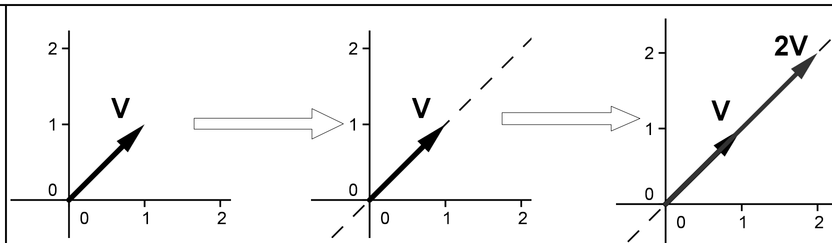
Registro gráfico			
	Vector inicial	identificar la dirección	establecer tamaño y sentido
Registro matricial	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}2\cdot 1\\2\cdot 1\end{pmatrix}$
	vector inicial		multiplicar cada componente

Tabla 2.2: El tratamiento de multiplicación por escalar en los registros gráfico y matricial

Comúnmente en matemáticas, la actividad de conversión se considera secundaria, ya que sólo se percibe como necesaria para seleccionar el registro que se va a utilizar para realizar los tratamientos a las representaciones y se cree que esta actividad tiene un carácter trivial, ya que al poder identificar un objeto en un registro el representarlo en otro no tiene por qué provocar dificultad alguna. Sin embargo, diversos autores (véase, por ejemplo Pavlopoulou, 1993), muestran evidencias de que la actividad de conversión en muchos casos está lejos de ser trivial, principalmente debido a dos razones:

1. La actividad de conversión no puede ser reducida a una traducción (o algoritmo).

2. Toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa y las representaciones de registros diferentes no necesariamente presentan los mismos aspectos de un mismo contenido conceptual.

Aunque podemos encontrar muchos ejemplos en los que se puede *traducir* de un registro a otro, como en el siguiente caso:

$$\underbrace{\text{Un par de vectores}}_{U,\ V}\ \underbrace{\text{en}}_{\in}\ \underbrace{\text{el plano}}_{\mathbb{R}}$$

La irreductibilidad de la actividad de conversión está relacionada con el hecho de que no se puede definir un algoritmo para *pasar* de un registro a otro. Si analizamos lo siguiente:

Un vector en el primer cuadrante del plano.

$$\underbrace{\text{Un vector en el plano}}_{(x,y)\in\mathbb{R}}\ \underbrace{\text{cuya abscisa y ordenada son mayores que cero.}}_{x>0\wedge y>0}$$

Ambas expresiones en el registro de la lengua natural tienen el mismo significado, pero no hay manera de pasar de la primera expresión a la del registro algebraico con una simple traducción.

Un ejemplo característico de las dificultades relacionadas con la parcialidad de los registros es la siguiente: al estudiar vectores en el plano, la expresión en el registro de la lengua natural "el vector V es múltiplo del vector W" puede ser convertida al registro algebraico, sin mayor dificultad, como "$V=kW$" pero su conversión al registro gráfico no es trivial. Lo que en los primeros dos registros corresponde a *una* relación entre los vectores V y W, en el registro gráfico tiene que ver con dos relaciones, la colinealidad y la proporcionalidad, y al pasar por alto esta *no congruencia* entre las representaciones se generan conversiones mal realizadas como las siguiente:

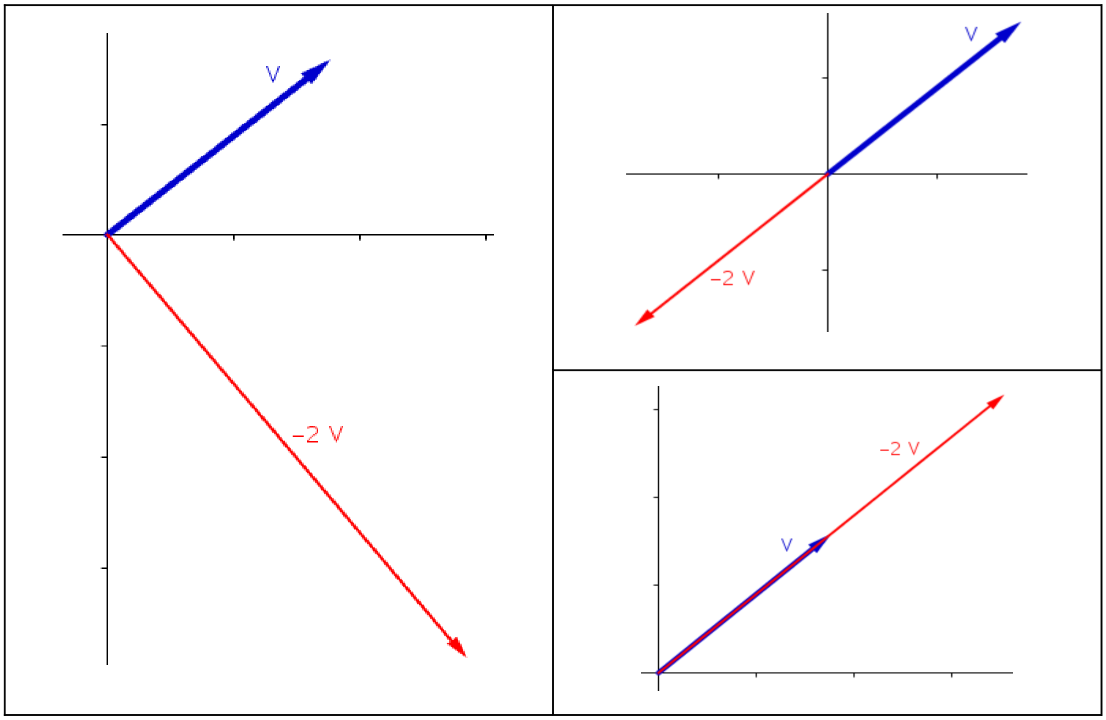


Figura 2.2: Diferentes formas de realizar la conversión de *W=-2V* al registro gráfico

Cualquiera de estas representaciones podría ser considerada como una buena *traducción* por un estudiante que no tome en cuenta todas las propiedades gráficas de la multiplicación de vectores.

Por esta *parcialidad* se puede concluir que los métodos de enseñanza que se enfocan en algún(os) registro(s) en particular, sin propiciar la *articulación* entre los diversos registros en los que se puede representar lo estudiado propician un aprendizaje limitado de los objetos.

Otro problema, comúnmente asociado a la ausencia de articulación entre registros, es la confusión entre el objeto de estudio y alguna de sus representaciones. Y como lo menciona Duval (1998):

> *"toda confusión* [entre objeto y representación] *desencadena, a mediano o a largo plazo, una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje; ya sea por no*

recordar o porque ellas quedan como representaciones «inertes» que no sugieren tratamiento alguno"

Como ya se había mencionado, en matemáticas los objetos no pueden ser percibidos directamente como en otras ciencias, solo podemos acceder a ellos a través de sus representaciones. Esto distingue radicalmente la forma en que se utilizan los registros de representación en matemáticas de la manera en que son utilizados en otras ciencias. Cualquier estudiante de matemáticas se enfrenta a las siguientes cuestiones contradictorias:

1. Para realizar cualquier actividad matemática, forzosamente se tienen que utilizar representaciones semióticas.

2. Los objetos matemáticos nunca deben ser confundidos con los signos usados para representarlos.

El problema crucial aquí, surge de un conflicto cognitivo entre estos dos requerimientos: ¿Cómo se puede distinguir entre un objeto y sus representaciones, si sólo se tiene acceso a éstas? Este problema es conocido dentro de la teoría de representaciones semióticas como la *paradoja cognitiva del conocimiento matemático* (Duval, 2006), y se manifiesta en diversas situaciones, como en el hecho de que la habilidad para cambiar de un sistema de representaciones a otro comúnmente resulta una tarea difícil de realizar. Otro ejemplo puede ser la situación reportada por Molina y Oktaç (2007): al estudiar transformaciones lineales éstas se *ejemplifican* en el registro gráfico por medio de movimientos geométricos *simples* (rotaciones, expansiones, contracciones) y combinaciones de ellos, y es común que los estudiantes identifiquen como TL únicamente a aquellas que describen aquellos efectos gráficos, dejando fuera del conjunto de TL a aquellas que tienen un efecto gráfico distinto, como el que se muestra en la figura siguiente:

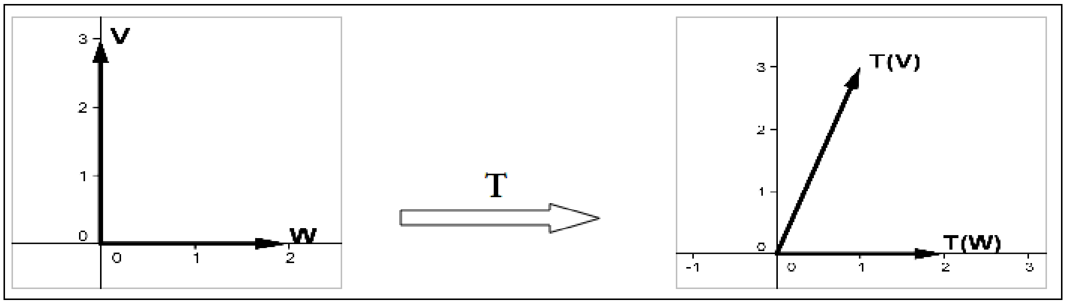


Figura 2.3: Transformación lineal que no tiene un efecto gráfico *simple*

2.3 ANÁLISIS DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN USADOS EN EL ESTUDIO DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Como ya se mencionó, en el estudio del Álgebra Lineal los registros comúnmente usados son el *gráfico,* el *matricial* y el registro de *la escritura simbólica* (que de aquí en adelante llamaremos algebraico). En la secuencia que se propone, se utilizan estos mismos registros, sin embargo, los registros no son utilizados con los mismos propósitos que en los enfoques tradicionales. A continuación se presenta una explicación de la manera en que se utilizan los registros gráfico y algebraico, las características de las representaciones dinámicas y algunas particularidades de las conversiones entre el registro gráfico y algebraico.

2.3.1 REGISTRO GRÁFICO

Debido a que planeamos facilitar la construcción de un significado gráfico del concepto de transformación lineal, el registro gráfico es el más usado en la secuencia. Este registro es utilizado para: representar objetos y relaciones, realizar tratamientos (principalmente el de *arrastrar* objetos) y realizar conversiones (mayormente como el registro *de partida).* Entre los objetos que se representan en este registro (ver Figura 2.4) encontramos:

- El plano $\mathbf{R}^2$. Representado una región rectangular de la pantalla cuya extensión es determinada por la de los ejes coordenados.

- Vectores. Flechas que *salen* de la intersección de los ejes, casi siempre acompañadas de una *etiqueta*. El vector cero, debido a las restricciones del registro gráfico para representar vectores, es representado por la intersección de los ejes y es acompañado por una etiqueta, como *V=(0,0)*.
- Figuras geométricas. Principalmente paralelogramos, *tratados* como el conjunto de vectores cuyos *extremos* describen la figura, usados para restringir los vectores a analizar.
- Números reales. Un fragmento de la recta real, donde los números reales están representados por puntos "dinámicos" que pueden ser arrastrados sobre la recta. Esta representación se construye en GeoGebra mediante la herramienta llamada "deslizador".
- Relaciones entre vectores:
  - Colinealidad. Flechas colineales.
  - Relaciones funcionales. Representadas por la *dependencia* del movimiento de dos objetos en planos distintos.

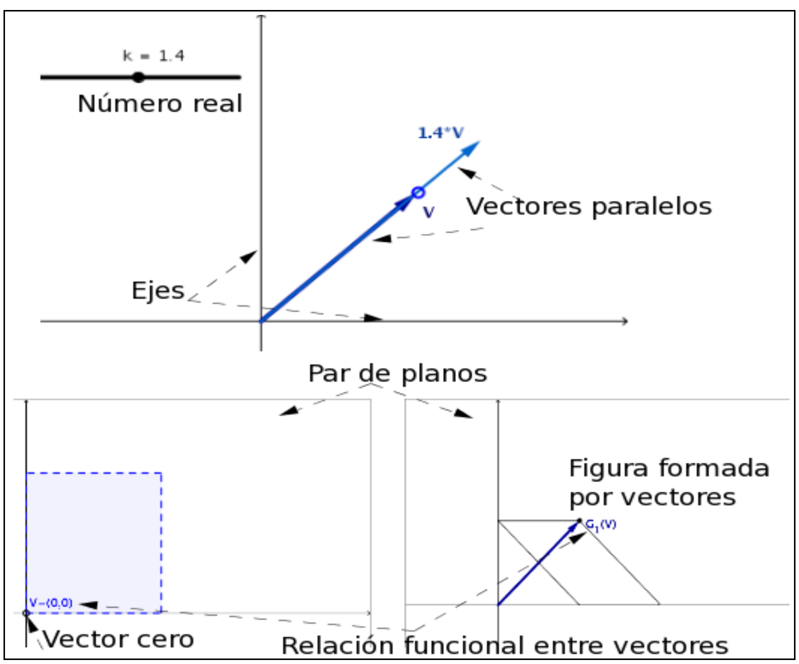


Figura 2.4: Ejemplos de representaciones gráficas usadas en la secuencia.

El principal tratamiento llevado a cabo en el registro gráfico es el de *arrastrar* objetos, llevado a cabo con la herramienta "elige y mueve" de GeoGebra, la cual permite *arrastrar* objetos *libres* conservando las reglas de construcción con las que se crearon. También se realizan otros tratamientos como:

- Suma de vectores, utilizando paralelogramos
- Multiplicación de vectores por escalares, arrastrando deslizadores que representan los escalares

Estos dos tratamientos del registro gráfico son de naturaleza distinta al de *arrastrar*, mientras que estos últimos se realizan con plena consciencia del resultado que se quiere obtener, el tratamiento de *arrastrar* es realizado con la intención de *explorar*, de manera sistemática, y para comparar los cambios entre objetos dependientes. Otra diferencia es que el software DGS realiza una parte importante del tratamiento, dejando tal parte como *transparente* para el *usuario*. Por ejemplo, al arrastrar un vector que esté definido sobre una recta que pase por el origen de coordenadas (ver Figura 2.5), el tratamiento puede ser interpretado simplemente como *hacer variar el objeto en un área determinada*, y no de una manera *más completa* como *obtener vectores colineales al vector inicial, multiplicando el vector inicial por constantes.*

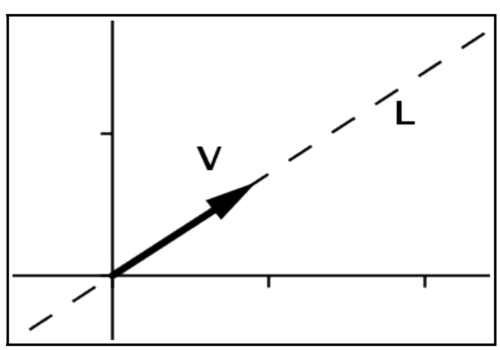


Figura 2.5: Vector V, definido sobre la recta L

El hecho de que una parte importante del tratamiento quede como *transparente* puede provocar dificultades en el desarrollo de actividades didácticas que traten de hacer referencia a tal parte del tratamiento.

Las conversiones que involucran a este registro, comúnmente como el registro de partida, son realizadas principalmente por dos razones

1. Puesto que el registro gráfico es *no discursivo,* es necesario hacer uso de otro registro para *decir cosas* acerca de representaciones del registro gráfico
2. Facilitar la articulación entre el registro gráfico y el algebraico.

De tal manera que nos encontramos con conversiones como las siguientes:

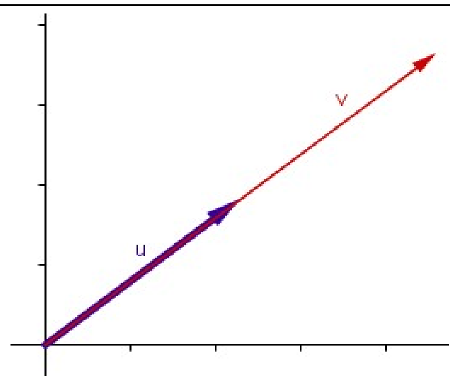
Registro gráfico	**Lengua natural**	**Registro algebraico**
	Dos vectores colineales V es colineal a U U es colineal a V	$U = kV$ $V=kU$

Tabla 2.4: Conversiones desde el registro gráfico.

2.3.2 REPRESENTACIONES DINÁMICAS

Algunas de las representaciones usadas en la secuencia no corresponden con las usadas habitualmente, las representaciones dinámicas obtenidas a través de GeoGebra tienen características distintas respecto a las representaciones *estáticas* normalmente construidas con lápiz y papel. La característica más importante para nosotros es que usando las representaciones dinámicas podemos representar objetos en el registro gráfico que no podrían representarse en un ambiente estático.

Al avanzar la tecnología, evolucionan también los ambientes educativos. Los tipos de representaciones que se han utilizado a lo largo de la historia de las matemáticas han evolucionado a lo largo de cinco etapas (Moreno, Hegedus & Kaput, 2008, pp. 102-103), según el tipo de interacción que tiene el *usuario* con el *medio* para representar.

Etapa 1. Estática inerte. Inscripciones *grabadas* o *fusionadas* con el medio en el que se presentan. Arte cuneiforme, marcas en huesos, caligrafía hecha con tinta sobre pergaminos

Etapa 2. Estática kinestética/a-estética. Etapa caracterizada por la capacidad de *borrar* y la *permanencia temporal* de lo representado, además del posible enriquecimiento de las representaciones utilizando colores distintos. Tiza (gis), marcadores, lápices (de colores).

Etapa 3. Estática computacional. Los actos intencionales de un humano son *refinados* computacionalmente. El sistema de notación es procesado dentro del medio y presentado por medio de representaciones estáticas obtenidas como respuesta a la interacción entre el usuario y el *dispositivo.* Calculadoras, graficadoras.

Etapa 4. Dinámica discreta. El proceso de presentación y examinación es discreto, a medida que las características computacionales hacen al medio menos estático y permiten interacciones más fluidas, con las que el medio en el que se expresan las representaciones se torna más plástico y maleable. Hojas de cálculo, o programas graficadores que permiten la manipulación de gráficas a través de parámetros con incrementos fijos.

Etapa 5. Dinámica continua. Interacción entre el medio y el usuario que se percibe como continua. Algunos tipos de software permiten utilizar dispositivos apuntadores (ratones, pizarrones electrónicos, dispositivos táctiles) para detectar movimiento en tiempo y espacio, y proveen de retro-alimentación a partir de las co-acciones del usuario. El usuario puede, por ejemplo, percibir el comportamiento límite de una curva al acercarse a un punto extremo, sin tener que *pedirle* al software que calcule tal valor.

De manera que al usar software DGS nos encontramos en la quinta etapa y esto nos permite representar objetos variables, que en el registro algebraico pueden ser representados por letras, como la "*c*" en la expresión "*3c+2*" o la "*V*" en $V \in \mathbb{R}^2$. Los cuales no pueden ser representados en registros estáticos pues, por las reglas de formación, al intentarlo acabamos representando a objetos *fijos*. Teniendo estas representaciones dinámicas continuas en el registro gráfico podemos, por ejemplo, construir un vector en pantalla primeramente como un vector fijo (representación estática) pero, al arrastrar el extremo de tal vector, se puede convertir en un vector variable, como la "*V*" del ejemplo anterior.

2.3.3 ALGUNAS LIMITACIONES DE LAS REPRESENTACIONES DINÁMICAS

Decimos que una representación dinámica *puede* representar a un objeto variable por que para algunos estudiantes, como lo documentan Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) en el caso de los vectores, un vector en el que se usa la herramienta *arrastrar* representaría a un vector variable, el cual no tiene valor fijo y sólo lo limitarían las condiciones de su construcción, pero en ocasiones es interpretado como un vector *elástico* para el cual, en todo momento, se pueden determinar sus coordenadas. Ambos objetos, el vector *elástico* y el variable, son de naturaleza distinta y no deberían confundirse.

Otro *efecto secundario* del uso de representaciones dinámicas es que al proveer a los estudiantes de evidencias muy directas de los hechos analizados, se inhibe la necesidad de demostraciones y argumentaciones. Es frecuente que los estudiantes, principiantes o avanzados, perciban muchas situaciones como *evidentes por sí mismas* y afirmen que éstas no necesitan demostración alguna ya que la proposición que se les pide demostrar *se ve en pantalla que es cierta.* En este sentido, *la potencia* de las representaciones dinámicas para representar objetos variables puede resultar contraproducente. Los estudiantes suelen tomar como suficiente una exploración, muchas veces no sistemática, para decidir si una proposición es verdadera o no. Además, lo que los estudiantes perciban como cierto o evidente puede deberse a errores técnicos que muestren evidencias falsas o *ilusiones visuales* producidas por limitaciones del software, por ejemplo representar objetos de tres dimensiones en ambientes planos.

2.3.4 EL SOFTWARE DE MATEMÁTICAS DINÁMICAS GEOGEBRA

Como ya se ha mencionado, nos servimos del software GeoGebra como apoyo tecnológico para el diseño de nuestras actividades. A continuación se presentan las razones por las que se eligió GeoGebra entre las vastas opciones de software similar.

Más allá de los numerosos premios y reconocimientos que este software ha recibido, entre los que destacan el *European Academic Software Award* y el *German Educational Software Award,* y de los beneficios que otorga al ser software libre (Abánades, Botana, Escribano, & Tabera, 2009), que son cualidades muy atractivas, se optó por utilizar GeoGebra principalmente por las siguientes razones.

GeoGebra es un DGS

Es común encontrar en abundantes reportes de investigación el término Software de Geometría Dinámica o DGS (iniciales de Dynamic Geometry System) para referirse a algún paquete de software y que no se especifique el por qué de esta etiqueta. Sin embargo, dentro de la comunidad de matemática educativa se toman las siguientes características como aquellas que otorgan el estatus de DGS (Kadunz, 2002):

- Es un modelo dinámico de la geometría euclidiana y de sus herramientas.
- Permite la manipulación directa de los objetos en pantalla mediante algún dispositivo señalador.
- Permite agrupar una secuencia de comandos o pasos de construcción dentro de una nueva herramienta o comando.
- Permite mostrar la traza o lugar geométrico de un punto (o algún otro objeto) que dependa del movimiento de otro punto.

De esta manera podemos decir que GeoGebra es un DGS, al igual que muchos otros como Cabrí, Cinderella o Sketchpad, los cuales permiten estudiar problemas de variación.

GeoGebra es más que un DGS

Como relata Markus Hohenwarter (Hohenwarter & Fuchs, 2005), el creador de este paquete, GeoGebra fue diseñado con la intención de ofrecer las características de un DGS y las del álgebra computacional.

Actualmente, existen dos tipos de software educativo en lo que corresponde a geometría y álgebra. Por un lado encontramos el DGS que se enfoca en permitir a los usuarios crear y modificar construcciones dinámicas de geometría euclidiana. Por otro lado, se encuentra el software que permite utilizar métodos de Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo (manipular y operar con expresiones simbólicas) los llamados CAS (siglas de Computer Algebra System). Algunos paquetes de este segundo tipo permiten graficar objetos geométricos o funciones, pero generalmente estas gráficas no pueden ser manipuladas directamente.

Contrario a esta tendencia, de tener paquetes separados para cada disciplina, GeoGebra intenta unir estas dos categorías. No solo permite la representación de objetos geométricos y algebraicos, sino que estas dos representaciones de los objetos están dinámicamente vinculadas, es decir, al modificar alguna representación de un objeto las otras son instantáneamente modificadas de manera acorde. Por ejemplo, se puede definir algebraicamente algún objeto y al modificar su representación gráfica la representación algebraica de éste sería cambiada.

Una nueva característica de GeoGebra, añadida en la versión 3.2, es la "Hoja de Cálculo". Ésta incluye el acomodo de datos en celdas, la capacidad de operar con los datos de las celdas y el pegado relativo para copiar fórmulas, como lo hacen Microsoft Excel y Openoffice Calc. Además, los datos en la hoja de cálculo no están aislados, pues se pueden relacionar dinámicamente con los objetos en las vistas gráfica y algebraica. Por ejemplo, al introducir en una celda el texto *"(1,2)"* obtendríamos el valor *"(1,2)"* para esa celda y también la representación gráfica de ese valor como un punto, que al ser arrastrado cambiaría el valor de la celda. También, al nombrar cualquier objeto del modo "*Xn*", con "*X*" una letra y "*n*" un número natural, éste será registrado en la hoja de cálculo. Con la inclusión de este nuevo registro de representación, también se añadió la herramienta *registrar cambios en la hoja de cálculo,* la cual, al seleccionar un objeto dependiente de otro, registra sus cambios en forma de tabla dentro de la hoja de cálculo.

Con esto queremos resaltar que GeoGebra nos permite trabajar en tres distintos registros de representación dinámicamente relacionados, por lo que sus autores se refieren a él como *Software de Matemáticas Dinámicas* (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009), en lugar de DGS o CAS.

Ambientes dinámicos.

Otra característica muy importante de GeoGebra es que permite crear archivos HTML interactivos, conocidos como *ambientes dinámicos (*o hojas dinámicas), que pueden ser usados con cualquier navegador de Internet que soporte Java, como Firefox, Chrome, Safari o Internet Explorer.

Los ambientes dinámicos son independientes de GeoGebra, es decir, no se necesita tener instalado GeoGebra para usar uno de estos ambientes. Algo que para nosotros es de lo más importante, es la cualidad de estos ambientes de comunicar dentro de un mismo archivo HTML dos o más archivos de GeoGebra, característica obtenida porque GeoGebra es compatible con el lenguaje de programación *JavaScript,* por lo que se puede programar dentro de un archivo HTML la interacción entre dos archivos de GeoGebra independientes. Por ejemplo: al cambiar el valor de un número en un archivo, inmediatamente cambiar la pendiente de una recta en el otro archivo (se puede ver una descripción más detallada de esto en el anexo II).

Por último, queremos resaltar que GeoGebra es un software multiplataforma, es decir, funciona en cualquier sistema operativo (Windows, Mac OS, Linux) al estar diseñado para funcionar utilizando el **JRE** (Java Runtime Environment, o Entorno en Tiempo de Ejecución de Java). Incluso puede utilizarse GeoGebra desde Internet, eliminando los procesos de instalación y actualización.

2.3.4 REGISTRO DE LA LENGUA NATURAL

El registro de la lengua natural se utilizó en la secuencia, principalmente, para realizar funciones discursivas: *designar los objetos*, *decir alguna cosa sobre los objetos que se designan* (bajo la forma de una proposición enunciada), *vincular la proposición enunciada con otras en un todo coherente* (descripción, inferencia...) y *señalar el valor* (el modo o el estatus) de una expresión. A diferencia del registro gráfico, no se busca desarrollar tratamientos específicos en este registro, aunque se pueden observar los habituales como, argumentaciones, paráfrasis, descripciones, etc.

La función de designación puede ser identificada con la *institucionalización* de algunos objetos, por ejemplo, la representación en la lengua natural "transformación lineal" es designada por el profesor para funciones que cumplen ciertas características e interviene como la denominación *formal* de tales funciones.

Las otras funciones discursivas son llevadas a cabo en este registro debido a que no pueden efectuarse en el registro gráfico y porque en el registro algebraico, en general en las lenguas formales, pueden llegar a ser demasiado complicadas (Duval, 1999, pp. 63-93). De tal manera que se forman expresiones que se refieren a representaciones de los otros registros, como:

- Al mover un vector verticalmente, su imagen bajo la transformación se mueve horizontalmente
- Bajo una transformación lineal, la imagen de la suma de dos vectores es igual a la suma de sus imágenes.

También, se les solicita a los estudiantes realizar descripciones de situaciones representadas en el registro gráfico, por ejemplo, describir relaciones entre vectores. Aunque se les permite usar el registro algebraico o una mezcla de ambos, sin darle preferencia a algún tipo de representaciones.

Las conversiones que involucran al registro de la lengua natural se presentan principalmente al interpretar las instrucciones de las hojas de trabajo, por ejemplo:

- Mueve el vector V sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función.
- Escribe una transformación lineal que mapee el cuadrado en un rectángulo de base r y altura s.

2.3.5 REGISTRO ALGEBRAICO

El registro algebraico asociado a la teoría de espacios vectoriales (de aquí en adelante referido como simplemente como "el registro algebraico"), al igual que otros registros formales, permite una organización muy eficiente del conocimiento matemático, ya que permite representar situaciones complejas de una manera más precisa y *compacta* que otro tipo de registro. Decimos compacta por que las expresiones en registros formales, comúnmente, hacen referencia a más objetos y relaciones entre los objetos que los otros registros. Un ejemplo de ello puede ser la representación algebraica de la cualidad de una transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de tener un *vector propio:*

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{R}: \ T(U) = k \cdot U$$

En la expresión encontramos diversos cuantificadores, conjunciones, objetos y relaciones entre los objetos. Mientras que la misma expresión podría ser representada, de manera menos precisa, en el registro de la lengua natural como: "*el vector U es un vector propio de la transformación T*", o con una gráfica que muestre a los vectores *U y T(U)* (ver Figura 2.7).

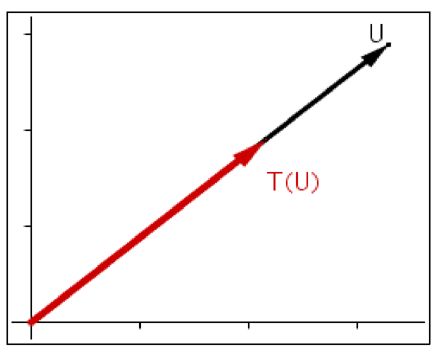


Figura 2.7: Representación gráfica de un vector propio

Debido a los beneficios de la eficiencia en los registros formales, es frecuente que se afirme que enfocándose en su uso, el aprendizaje de las matemáticas puede ser tan eficiente como su organización; para lo cual diversos autores tienen evidencias en contra (ver, por ejemplo, Uicab & Oktaç, 2006).

El registro algebraico es menos usado en la secuencia para las funciones discursivas que el de la lengua natural. Comúnmente, sólo se utiliza para designar objetos y para representar relaciones de igualdad. Algunos ejemplos de objetos representados en este registro son: vectores "*V, U, W*", funciones vectoriales "*T, G,* T_i", imagen de un vector arbitrario bajo una función "*T(V), T(x, y)*", imagen de un vector fijo bajo una función "*T(1,2), T(V)*". El significado de la expresión "*T(V)*" depende de la naturaleza del objeto que el símbolo "*V*" esté representando.

Aunque en ocasiones se les pidió a los estudiantes que *comentaran* acerca de algunas representaciones en el registro algebraico, se trató de no influir en la selección de un registro para realizar las funciones discursivas, pero es de esperarse que el registro algebraico se utilice menos debido a las complicaciones propias del registro para construir expresiones *bien formadas.*

Los tratamientos, por otra parte, suelen ser más fáciles de realizar en el registro algebraico debido a que las reglas para realizarlos pueden llegar a ser tan *simples* y *precisas* que no se necesita tener una idea clara de los objetos cuyas representaciones están siendo tratadas. Algunos de los tratamientos que se promueven en la secuencia son los relacionados con: *evaluar funciones* de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$, se obtiene el valor de la función en un vector fijo, por ejemplo, para la función $T(x, y) = (2x+y, 3y+2)$ y el vector $V = (1,2)$, evaluar la función T en el vector V consiste en obtener $T(V) = (2\cdot1+2, 3\cdot2+2) = (4, 8)$; *comprobar si una función es transformación lineal*, para esto se necesita comprobar que se cumplen estas igualdades:

$$T(kx, ky) = kT(x, y) \quad \text{y} \quad T(U+V) = T(U) + T(V)$$

para vectores *U, V* y escalares *k* arbitrarios.

Otros tratamientos utilizados son: suma de vectores, multiplicación de vectores por escalares, comparaciones.

2.3.6 CONVERSIONES ENTRE EL REGISTRO GRÁFICO Y EL ALGEBRAICO

La teoría de representaciones semióticas afirma, y nosotros estamos de acuerdo en, que la actividad cognitiva de conversión es esencial en los procesos de aprendizaje. Debido a la parcialidad cognitiva de los registros de representación, para tener un buen nivel de comprensión sobre algún objeto matemático es necesario poder identificarlo y representarlo en el mayor número de registros posibles.

En la secuencia de actividades propuesta para el estudio de las transformaciones lineales, se trata de fomentar la articulación de los registros gráfico y algebraico. La manera de promover las conversiones en las actividades es solicitar a los estudiantes que realicen tareas que no se pueden realizar, o resulta demasiado complicado hacerlo, en un sólo registro. La necesidad de utilizar el registro algebraico va aumentando al avanzar en las actividades y con ello aumenta también la necesidad de realizar conversiones.

Para realizar conversiones de un registro a otro es necesario identificar previamente, en el registro de partida, el objeto o relación cuya representación desea ser convertida, más aún, necesitamos identificar todos los elementos constitutivos de una representación en cada registro (Pavlopoulou, 1993). Por ejemplo, para convertir la representación de un vector en el plano hacia algún otro registro, primero se necesita identificarla como la representación de un vector y luego distinguir las partes que componen tal representación (unidades significativas): magnitud, dirección y sentido.

Las primeras tareas que se le presentan a los alumnos son identificar y describir relaciones entre vectores, más precisamente la colinealidad, proporcionalidad y aditividad. En estos casos, y en otros posteriores, se usan representaciones algebraicas al cuestionar a los estudiantes acerca de algunos objetos representados gráficamente. Este hecho por sí mismo implica una conversión, aunque sea considerada como de dificultad mínima.

La solución de las primeras tareas se puede empezar con conversiones casi triviales al utilizar las *etiquetas* de las representaciones gráficas como representaciones algebraicas. Por ejemplo, el par de vectores que aparecen en la gráfica del dominio en la Figura 2.8 se representarían algebraicamente como "V" y "$1.5V$" o "kV". Posteriormente, se podrían realizar conversiones de relaciones entre representaciones gráficas para tener expresiones como "$kT(V)\neq T(kV)$". Realizar tales conversiones no es necesario para contestar las preguntas de la actividad, aunque resulta conveniente hacerlo debido a la precisión de las representaciones en el registro algebraico.

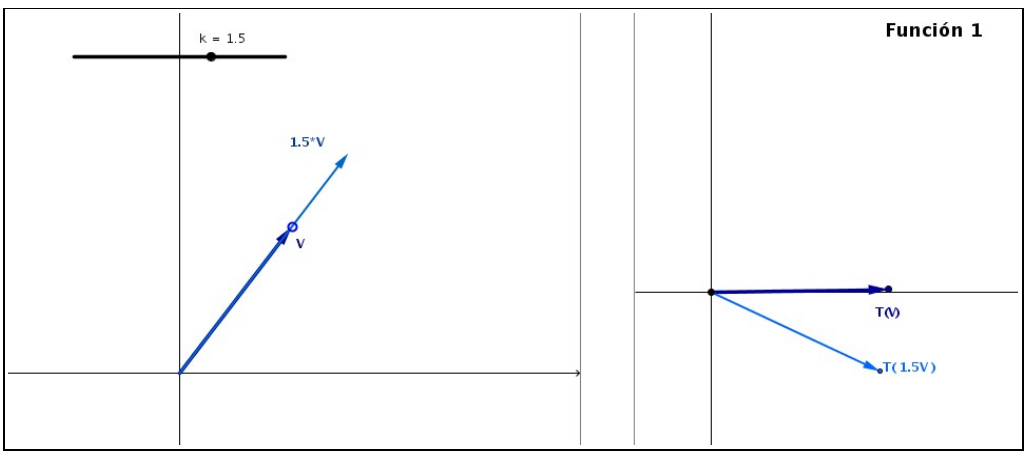


Figura 2.8: Primeras representaciones gráficas que se pueden convertir al registro algebraico.

Más adelante, se les presenta a los estudiantes la tarea de encontrar algunas relaciones entre los vectores *T(U), T(V)* y *T(U)+T(V)* (ver Figura 2.9).

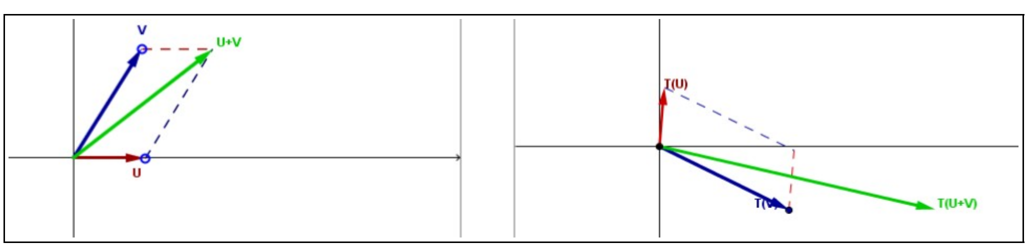


Figura 2.9: Propiedad aditiva de funciones.

Primero se necesita identificar al vector de la diagonal como la suma de los otros dos, y objetivarlo en el registro algebraico como *U+V*. Después, identificar al vector etiquetado con *T(U+V)* como la imagen de *U+V*, ademas de identificar en la gráfica el vector $T(U)+T(V)$.

Se puede llegar a expresiones algebraicas como $T(U)+T(V)\neq T(U+V)$, pero igual que en lo anterior, hacerlo no es estrictamente necesario pues se puede describir la relación entre los vectores usando el registro de la lengua natural.

Las tareas que contiene la Actividad 2 comparten la característica de que el estudiante puede escoger qué registro utilizar para realizarlas, el algebraico o el de la lengua natural. Estas tareas consisten en argumentar si un grupo de transformaciones son lineales o no. La información que se les presenta está en el registro gráfico, así que para realizar la argumentación (una función discursiva) tienen que realizar conversiones a otro registro.

Se pretende que el uso del registro algebraico se aprecie como *más ventajoso*, que se empiecen a usar conversiones por cuestiones de *economía* (sintetizar expresiones o ahorrar tiempo) o para ganar precisión, pero mayormente lo primero.

En algunas situaciones es necesario utilizar representaciones estáticas como auxiliares a las dinámicas porque en estas últimas puede resultar difícil aislar sólo algunas variables visuales. Tal es el caso del análisis de la función G_2 de la Actividad 2, para facilitar la observación de las características que la vuelven no lineal, se utilizan representaciones estáticas como la de la Figura 2.10, que es utilizada para analizar la relación entre los vectores *A, B , C* y sus respectivas imágenes bajo la función G_2.

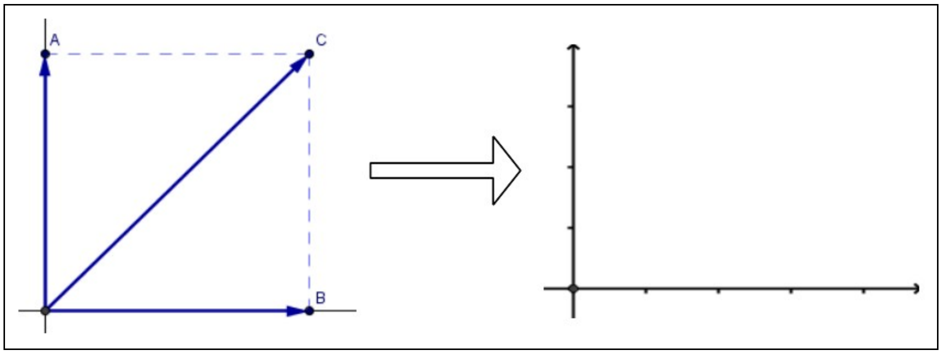


Figura 2.10: Ejemplo de representaciones estáticas auxiliares.

Se aprovecha la necesidad de etiquetas para las representaciones gráficas para utilizar las representaciones algebraicas usuales con el fin de facilitar la producción de expresiones en el registro algebraico. No se explicitan las reglas de formación de expresiones como *T(V)* al momento de etiquetar representaciones, pero por las características de las representaciones gráficas se deduce lo que *T(V)* significa.

En la tercera actividad el uso del registro algebraico se vuelve obligatorio, ya que se les pidió a los estudiantes que utilizaran *fórmulas algebraicas* para representar transformaciones con alguna característica gráfica y para argumentar acerca de su linealidad de dos maneras: primero, utilizando las propiedades gráficas de la transformación, lo que implica realizar tratamientos en la lengua natural; y segundo, utilizando la expresión algebraica (o fórmula) de la transformación, lo que lleva a realizar tratamientos algebraicos. La información que se les da a los estudiantes es principalmente gráfica, aunque en ocasiones se hacen descripciones en la lengua natural. De esta manera, los estudiantes tienen que realizar una conversión del registro gráfico al algebraico para obtener la representación algebraica solicitada. Aunque con un análisis detallado se puede encontrar la manera de *traducir* casi cualquier efecto gráfico a una expresión algebraica, para los efectos gráficos solicitados es suficiente utilizar la idea intuitiva de que la simplicidad algebraica implica simplicidad gráfica y una exploración sistemática al modificar las expresiones algebraicas.

El software GeoGebra facilita las conversiones, al permitir una interacción con la que el estudiante puede validar sus conjeturas con la información gráfica que el software *le regresa* cada vez que propone una expresión algebraica. Un ejemplo de este tipo de tareas dentro de la Actividad 3 es encontrar una transformación para la cual la imagen del cuadrado sea también un cuadrado y argumentar por qué se cumple tal propiedad. Los estudiantes "introducen" en el ambiente dinámico la expresión algebraica de la función que quieren analizar y éste les "regresa" la representación gráfica de la imagen de un cuadrado.

Al realizar argumentaciones sobre la linealidad usando la lengua natural para describir las propiedades gráficas y el registro algebraico para describir la situación previamente traducida al álgebra, se espera que los estudiantes aprecien el último como aquel que permite la formación de expresiones más precisas y facilita la realización de los tratamientos.

La Actividad 4 pretende facilitar la articulación de los registros gráfico y algebraico al proveer de un ambiente dinámico que muestra al mismo tiempo representaciones gráficas y algebraicas de las transformaciones lineales y con el que el estudiante puede interactuar. Las interacciones del estudiante pueden ser manipulando la imagen de la base canónica de $\mathbf{R}^2$, a lo que el software *respondería* con la modificación instantánea de la representación algebraica de la transformación lineal; omanipulando la *fórmula* de la representación, con lo que se modificaría simultáneamente la representación gráfica de la transformación.

La mayor parte de las tareas propuestas a los estudiantes en esta actividad privilegian el registro gráfico como registro de partida, lo cual se manifiesta específicamente al modificar las imágenes de los dos vectores que forman la base canónica de $\mathbf{R}^2$ y que definen completamente la transformación lineal, para obtener la fórmula de transformaciones que producen algunos efectos gráficos específicos.

En otras tareas incluidas en la actividad el registro de partida es el algebraico y el registro de llegada es el gráfico, en ellas el estudiante tiene que predecir y proponer la expresión algebraica de la transformación e interactuar con el software para comprobar si su predicción fue correcta.

De las dos últimas tareas que implican realizar conversiones, en una de ellas se promueve la articulación entre los elementos constitutivos de la representaciones gráfica y algebraica de las transformaciones lineales, haciendo una exploración sistemática de los efectos algebraicos producidos por modificaciones gráficas específicas. En la otra, se espera obtener la representación matricial de las transformaciones lineales al resolver ecuaciones matriciales que involucran a la imagen de una base bajo la transformación.
En todos los casos, las instrucciones que se le dan a los estudiantes están dadas únicamente en el registro de la lengua natural.

CAPÍTULO 3

PROPUESTA DE ENSEÑANZA

3.1 DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES Y LOS RESULTADOS DE UNA PRUEBA PILOTO

A continuación se reportan el diseño de una secuencia de cuatro actividades didácticas sobre transformaciones lineales (TL) de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$, basada en ambientes dinámicos creados con GeoGebra, y los resultados de una prueba piloto de éstas. La prueba se llevó a cabo con los estudiantes inscritos en el curso de Álgebra Lineal, un total de 20 alumnos, 17 de la licenciatura en física y 3 de la licenciatura en matemáticas de la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora, durante el período 2010-1.

En total hubo 12 sesiones de una hora en las que cada estudiante tenía a su disposición una computadora y podía acceder a los archivos necesarios directamente o a través de Internet, los ambientes dinámicos permanecerán disponibles en la dirección http://goo.gl/jmNh. Se le entregó a cada alumno una copia de las *hojas de trabajo* de cada actividad, las cuales contenían los problemas a resolver y la mayoría de las instrucciones necesarias (Anexo I).

El profesor encargado del curso dirigió el ritmo de trabajo de los estudiantes interviniendo cuando se detectaban o expresaban dudas conceptuales, operacionales o relacionadas con el uso del software. Además, se encargó de *institucionalizar* algunos conceptos, propiedades y definiciones al término de cada actividad, formalizando a los resultados de las exploraciones de los estudiantes. Un observador, presentado a los alumnos como asesor técnico, tomó notas sobre lo sucedido a lo largo de la prueba piloto.

Las actividades se refieren al significado gráfico de las transformaciones lineales del plano en el plano y su relación con el significado algebraico de las mismas. A lo largo de las actividades, las representaciones gráficas que se les mostraron a los alumnos consisten en una par de gráficas dinámicas generadas con GeoGebra, similares a las siguientes:

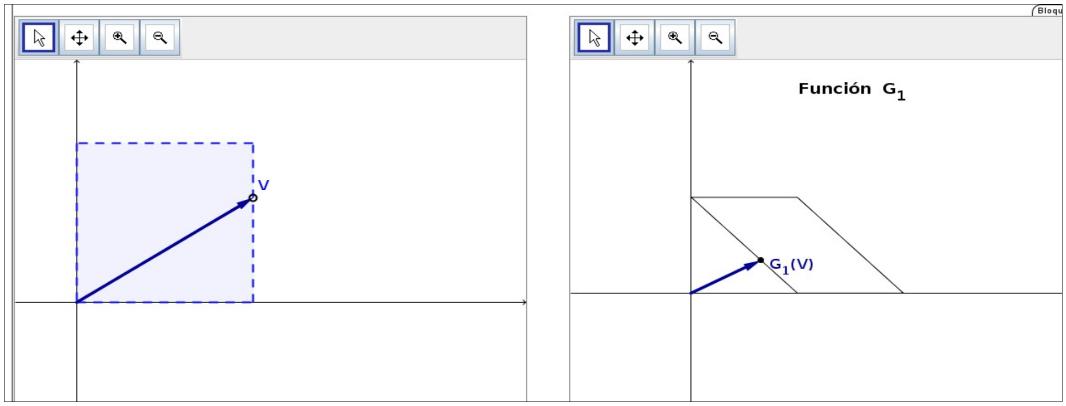


Figura 3.1: Representación gráfica de las transformaciones lineales

En este tipo de representación, se observa a la izquierda la gráfica del dominio de la función y a la derecha la gráfica de la imagen. La elección de este tipo de gráficas se debe en parte a las limitaciones para representar en una pantalla plana objetos de más de dos dimensiones, pero principalmente se escogió para separar el dominio y el contradominio de las funciones, para tratar de evitar confusiones en este de por sí conflictivo aspecto, ya que es el primer contacto que los alumnos tienen con funciones que no son de ***R*** en ***R***.

En general, las 4 actividades tuvieron como objetivo principal *construir un significado gráfico para el concepto de transformación lineal;* y se diseñaron bajo los siguientes supuestos:

1. El registro de representación en el que se inicia el estudio de algún objeto matemático afecta el nivel de comprensión que se puede llegar a obtener de él.
2. El registro gráfico permite la creación de un ambiente enriquecedor, en el que se pueden caracterizar las transformaciones lineales por sus propiedades gráficas.
3. Los ambientes dinámicos diseñados con GeoGebra pueden facilitar a los estudiantes la observación y comprobación de las propiedades gráficas de una transformación lineal mediante la manipulación directa en pantalla, facilitando con ello la conversión gráfico-algebraica.

3.1.1 ACTIVIDAD 1

El objetivo de esta primera actividad es que los alumnos *discriminen las funciones (transformaciones) del plano en el plano basándose en las relaciones entre vectores colineales, vectores que forman un paralelogramo y su diagonal y sus respectivas imágenes*. Para esto, se diseñó un ambiente dinámico en el que se pudiera observar el comportamiento de cuatro transformaciones. Tales transformaciones fueron seleccionadas de modo que sólo una de ellas fuera una transformación lineal y que las demás no lo fueran por distintas razones, es decir, que no cumplieran distintas partes de la definición de TL.

Esta actividad necesitó de 4 sesiones, al final del trabajo de los estudiantes le correspondió al profesor destacar que dentro del Álgebra Lineal las funciones que se estudian son aquellas que cumplen las características siguientes:

1. Las imágenes de vectores colineales son también vectores colineales.

2. La proporción entre las normas de dos vectores colineales es la misma que la de sus imágenes.

3. La imagen de vectores que forman un paralelogramo y su diagonal también forman un paralelogramo y su diagonal.

También se le deja al profesor el señalar la relación entre estas propiedades gráficas y las siguientes propiedades algebraicas de una transformación lineal T:
Para cualesquiera vectores $U, V \in \mathbb{R}^2$ y escalares $a, b \in \mathbb{R}$

1. $T(a \cdot V) = a \cdot T(V)$
2. $T(U+V) = T(U) + T(V)$

Poniendo especial interés en el hecho de que las propiedades gráficas 1 y 2 en conjunto se corresponden con la propiedad algebraica 1 y que la propiedad gráfica 3 es equivalente a la propiedad algebraica 2.

Apertura de la actividad

Antes de entregar las hojas de trabajo a los alumnos y que empezaran su interacción con el ambiente dinámico, el profesor realizó un discurso de introducción que tenía como objetivo familiarizar a los estudiantes con un nuevo objeto matemático, las funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$. Esta introducción se considera importante debido a las notorias diferencias entre estas funciones y las definidas de $\boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{R}$, en particular las relativas a las representaciones gráficas y algebraicas. En concreto, el profesor empezó argumentando que así como las funciones de $\boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{R}$ relacionan números, se pueden definir funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$ que relacionen vectores y que sus representaciones algebraicas serían de la forma:

$$f(V)=f(x,y)=(g(x,y),h(x,y))$$

en donde g y h son funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}$, es decir, relacionan vectores con números. Después les comentó que iban a trabajar manipulando archivos hechos con el DGS GeoGebra y que el objetivo era analizar gráficamente a las funciones y discriminarlas según su comportamiento gráfico. Este grupo de estudiantes ya había trabajado con Cabrí así que no hubo necesidad de explicar cómo manipular los objetos en pantalla.

El ambiente dinámico

En el interior del archivo html se observan dos gráficas (ver Figura 3.2), en la gráfica izquierda el vector V y el número k pueden ser modificados directamente, el último mediante el *deslizador*, y al hacerlo cambia inmediatamente la gráfica de las imágenes de manera acorde a la modificación. Dentro del mismo archivo se pueden analizar las cuatro funciones mencionadas, la definición algebraica de éstas es inaccesible para los alumnos, para evitar que intenten trabajar en el registro algebraico en este momento.

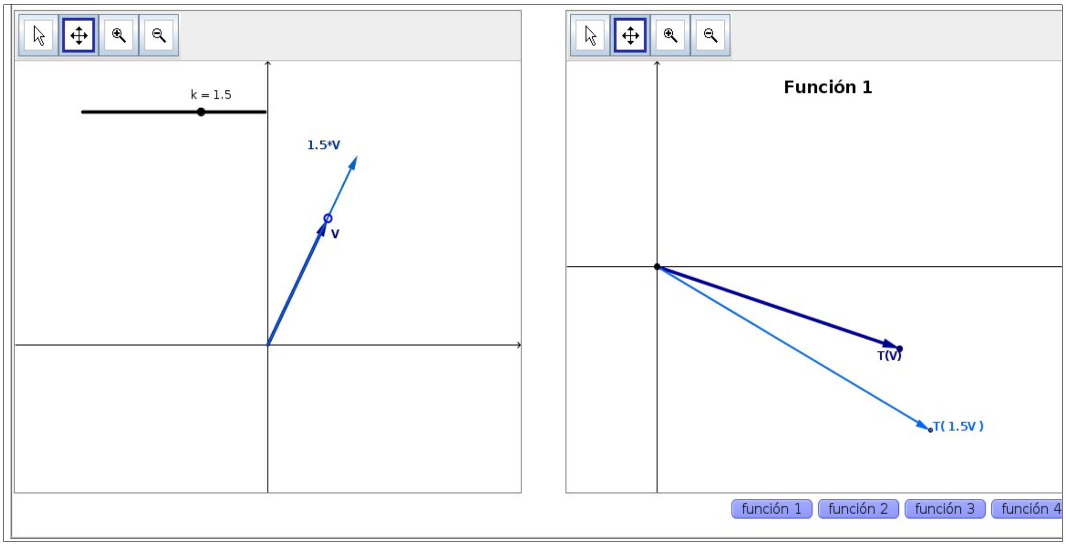


Figura 3.2: Vista gráfica del archivo Actividad 1.html

Las funciones están definidas de la siguiente manera:

- Función 1 $T_1(x, y)=([1-x]^2+y, 1-y)$
- Función 2 $T_2(x, y)=(0.7\mathrm{x}-0.8\mathrm{y}, 0.8\mathrm{x}+1.3\mathrm{y})$
- Función 3 $T_3(x, y)=\left(\frac{|x|\cdot y}{\|(x, y)\|}, \frac{|y|\cdot x}{\|(x, y)\|}\right)$, con *T(0,0)=(0,0)*
- Función 4 $T_4(x, y)=\left(\frac{x\cdot y}{\|(x, y)\|}, \frac{x^2}{\|(x, y)\|}\right)$, con *T(0,0)=(0,0)*

Se ocultó tal representación o fórmula de las funciones para evitar que la atención de los estudiantes se enfocara en ellas, para que se concentraran en las propiedades gráficas de los objetos, se decidió también ocultar las coordenadas de los vectores y la graduación de los ejes. Sin embargo, se observó que varios estudiantes encontraban esto demasiado incómodo ya que pasaron mucho tiempo tratando de descifrar las fórmulas de las funciones en vez de resolver los problemas que se les indicaron.

Las hojas de trabajo

Al inicio de las hojas de trabajo se explica el contenido del archivo html y la forma de utilizarlo. Las hojas de trabajo de la Actividad 1, y la actividad misma, están divididas en dos secciones. En la primera sección, se busca analizar el comportamiento de las funciones en cuanto a la imagen de un vector y un múltiplo de éste, la segunda sección corresponde al análisis de vectores que forman un paralelogramo y su diagonal, y las imágenes de estos.

Para iniciar la primera sección, se les pidió a los estudiantes que, para cada función, llenen una tabla como la siguiente:

Para estos valores de k:	Anote aquí cómo cambian las gráficas
0	
1	
-1	
2	
-2	
Escoge algún otro número entre 5 y -5. Anótalo aquí ___	

Tabla 3.1: Ejemplo de tabla de la primera sección de la Actividad 1.

y que después describan la relación entre *T(V)* y *T(kV)*, si es que encontraron alguna. Se decidió hacer el análisis de esta manera para que al llenar la tabla se vayan observando los cambios en ambas gráficas, se escogieron los valores de k para que no fuera demasiado difícil identificar cuándo se mantiene la proporcionalidad entre los vectores y la opción de escoger un valor entre -5 y 5 para dar una forma de comprobar esta relación.

Función 1 $T_1(x, y)=([1-x]^2+y, 1-y)$

En el caso de la Función 1, al ser ésta una transformación no lineal, el comportamiento de la imagen de vectores colineales era poco predecible, lo que provocó confusión en la mayoría de los alumnos, lo cual se vio reflejado en el tipo de descripciones que hicieron. La mayoría de éstas sólo hacía referencia al cuadrante en el que se encontraba el vector *T(kV)* y al responder la pregunta sobre la relación entre *T(V)* y *T(kV)*, que por la situación recién señalada fue redactada de la siguiente manera:

Cuando varía el número k, V y kV se mantienen colineales. ¿También lo hacen T(V) y T(kV)? Usa los resultados de la tabla anterior para justificar tu respuesta.

Todos respondieron de manera aceptable, y aunque estrictamente hablando se trata de una pregunta de si o no, alrededor de la mitad de los estudiantes usaron un argumento basado en la ubicación, por cuadrantes, del vector *T(kV)*. Una respuesta discutible fue la de un alumno que dijo que se conservaba la colinealidad cuando *k=5* para algunos vectores, lo cual parece cierto. Otro caso interesante fue el de un par de alumnos que observaron que mientras que el vector *kV* describe un segmento de recta al variar *k*, el vector *T(kV)* parece describir una parábola.

Algunas complicaciones que no parecen deberse al diseño de la actividad fueron las siguientes. Para el caso en el que *k=0* una alumna dijo que no hay vector *kV*, pues éste no aparece en pantalla dado que los vectores se grafican como flechas que salen del origen. Esta interpretación del vector nulo ya había sido reportada por varios investigadores y para tratar de evitarla, lo que se hizo fue añadir un texto dinámico que aparece cuando algún vector es igual al *(0,0)*, como en la siguiente imagen:

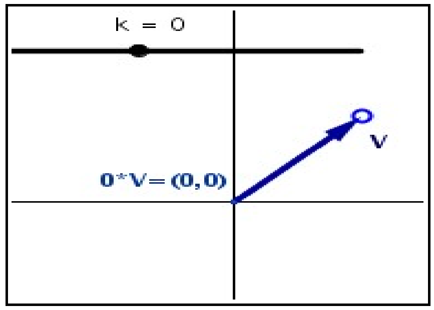


Figura 3.3: Etiqueta para vectores iguales a (0,0)

Esta idea en general funcionó, ya que de dos estudiantes que parecen tener la percepción de que el vector cero no existe, debido a que no aparece en la gráfica, para uno de ellos ésta fue evolucionando a lo largo de la actividad y se pudo observar en sus comentarios sobre como cambia kV cuando $k=0$, como se mencionó los estudiantes llenaron una tabla igual a la tabla 1 para cada función, las respuestas de este estudiante para $k=0$ fueron las siguientes:

1. No hay vector.
2. No hay vector, es el vector cero.
3. El vector es cero.
4. Vector cero.

Se puede suponer por el cambio de la respuesta 1 a la 2 que al decir *vector* en algunas ocasiones se refiere a la flecha que representa al vector en la gráfica y en otras al objeto vector, por lo que en la segunda respuesta se podría leer *No hay flecha, es el vector cero.* Esto parece estar relacionado con el problema de confundir a un objeto con alguna de sus representaciones, el vector con la flecha.

Otro caso interesante es el de un alumno que habla de vectores positivos y negativos. Este alumno parece querer utilizar una característica de las funciones de **R** en **R**, con la que una función tiene valor positivo, o es positiva en algún punto o región, si la gráfica está por encima del eje de las abscisas. En este caso le llama vectores positivos a los que están en el primer y segundo cuadrante, y negativos a los del tercer y cuarto. La confusión se vuelve más significativa dado que en el curso de Álgebra Superior estos alumnos estudiaron previamente los números complejos y se estableció que no tienen un orden cómo los números reales que permita hablar de números complejos positivos y negativos.

Función 2 $T_2(x, y)=(0.7x-0.8y, 0.8x+1.3y)$

Para la función 2, que es la única transformación lineal, la mayoría de los estudiantes detectaron que el efecto de la multiplicación es el mismo para los pares V, *kV y T(V), T(kV)*; varios describieron que cuando *k* es negativo *T(V)* y *T(kV)* tienen sentidos opuestos. Con la pregunta siguiente se pretendió verificar si ellos podrían establecer la relación entre *T(V)* y *T(kV).*

¿Puedes encontrar alguna relación entre T(V) y T(kV)? Si es así descríbela aquí.

La relación fue descrita en su mayoría como era esperado, en términos de colinealidad y proporcionalidad, algunos alumnos incluso mencionaron que se trataba de la conservación de las propiedades de *V* y *kV*. Sin embargo, parece ser que la manera en que se escribieron las instrucciones no permite distinguir entre los alumnos que consideran que no hay relación entre los vectores y los que no comprenden las instrucciones, pues ambos podrían no contestar la pregunta sin dar información de por qué lo hicieron. Probablemente cambiar la redacción para que los estudiantes que consideren que no hay relación entre los vectores lo expliciten podría facilitar la interpretación de las respuestas.

Analizando las respuestas a esta parte de la actividad, nos encontramos con que algunos estudiantes tenían problemas de escritura en el registro algebraico, en particular, para referirse a imágenes de vectores bajo la transformación T escribieron cosas como:

- *TV*
- *TkV*
- *2TV=TkV*

Aunque el estudiante que escribió esto parecía comprender los conceptos, este tipo de expresiones pueden causar conflictos pues se pueden leer como el producto de *T* con *V,* lo cual no tiene sentido.

Otra situación posiblemente más significativa, es la del comentario de una alumna:

"La relación entre T(V) y T(kV) parece ser la misma que hay entre V y kV (aunque V sea un vector y T(V) una función)"

Observando el texto entre paréntesis, se menciona que *T(V)* es una función, aunque al referirse a ella al principio la toma como la imagen de un vector, es decir, parece confundir a la función *T* con la imagen del vector *V* bajo tal función. Esto se puede deber a que es común que en los cursos de cálculo se usen frases como: "la función *f(x)*", dándole la etiqueta *f(x)* a la función *f*, aunque en realidad le corresponda a la imagen de un punto arbitrario x bajo la función *f*. Lo que podría llevar a querer extender esa costumbre ahora que se trata con nuevas funciones, querer hablar de la función *T(V)* en lugar de la función *T*, el problema está en que en la misma frase se quiere referir a ambos objetos, la función y la imagen del vector arbitrario.

Función 3 $T_3(x,y)=\left(\frac{|x|\cdot y}{\|(x,y)\|},\frac{|y|\cdot x}{\|(x,y)\|}\right)$

Cuando se abordó la función 3, la cual no es lineal pero conserva la colinealidad y proporcionalidad de los vectores, la mayoría de los estudiantes contestaron acertadamente, de la misma forma que para la función 2, excepto 3 alumnos que contestaron la pregunta sobre la relación entre *T(V)* y *T(kV)* de la siguiente manera:

1. *Parece ser una función exponencial.*
2. *Los vectores son múltiplos.*
3. *Para k<0 están en el 3^er^ cuadrante y para k>0 en el 1^er^ cuadrante.*

aunque el contenido de las tablas es prácticamente el mismo que las de la función 2 para los tres estudiantes. El estudiante que contestó lo segundo, para la función 2 sólo dijo que los vectores eran colineales, aunque ambas funciones conservan colinealidad y proporcionalidad, él describió una característica diferente en cada función. El caso de la tercer respuesta sorprende pues para la función 2 describió la relación diciendo que los vectores eran colineales y múltiplos por la constante *k*.

Función 4 $T_4(x,y)=\left(\frac{x\cdot y}{\|(x,y)\|},\frac{x^2}{\|(x,y)\|}\right)$

La última parte de esta sección de la actividad consistió en analizar la función 4, ésta tampoco es transformación lineal pero conserva la colinealidad y el cociente de las normas de vectores colineales, pero no respeta los cambios de sentido. Lo cual es una diferencia sutil con respecto a las funciones 2 y 3 y esperábamos que no les fuera tan fácil de notar a los alumnos. Sin embargo, la mayoría de los alumnos notó esta cualidad y fue sólo uno el que dijo que la función 4 hacía exactamente lo mismo que la función 3. El tipo de respuestas a la tabla fue el mismo que en las dos anteriores (magnitudes, sentido, dirección, colinealidad) y sobre la relación entre *T(V)* y *T(kV)* la mayoría respondió que había un valor absoluto involucrado, queriendo explicar por qué no hay cambios en el sentido de los vectores al multiplicar por escalares negativos. Algo que se puede resaltar es lo que un estudiante, al hablar sobre la relación entre *T(V)* y *T(kV)* dijo:

"Al multiplicarlo por una constante mantiene el mismo sentido, siempre:
$T(kV)=-kT(V)$ "

La ecuación que escribió llama la atención, por que es una mejor forma de describir lo que sus compañeros llamaron valor absoluto de un vector.

Tarea 1

En este punto del avance de la actividad, eran notables entre los estudiantes varias dudas en cuanto a las representaciones algebraicas de las funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$. Con eso en mente y con el objetivo de empezar a dar significado dentro del registro algebraico de lo que se había estado haciendo, el profesor les dejó como tarea fuera de clase a los estudiantes que encontraran una función que cumpliera $T(kV)=kT(V)$, para lograr predecir la forma algebraica de las transformaciones que preservan la colinealidad y la proporcionalidad. Esto después de haber dado un argumento de por qué esta propiedad corresponde a las dos propiedades gráficas de la conservación de la colinealidad y de la proporcionalidad.

De las respuestas que los estudiantes dieron a la tarea podemos observar que prácticamente todos los estudiantes escogieron funciones *simples*, con las siguientes formas

1. (ax,by)
2. $(ax+b,cx+d)$
3. $(x+ay,x+by)$
4. aV

Con los dos estudiantes que escribieron una función de la forma 2 pudimos comprobar que no todos tenían claro cómo se manipulan las representaciones algebraicas de las funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$. De hecho, ambos llegaron a la conclusión de que ese tipo de funciones sí cumplen con la propiedad requerida, ya que al evaluarla en $k(x,y)$ obtuvieron el valor $(k(ax+b), k(cx+d))$ lo que nos dice que para ellos, los ejemplos de funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$ que se vieron en la introducción de la actividad no fueron suficientes para entender el *tratamiento* algebraico de *evaluación.*

Algo imprevisto con esta tarea fue que un estudiante creyó que tenía que encontrar una función que no cumpliera la propiedad $T(kV)=kT(V)$ y escribió la función $T(x,y)=(x^2,arctan(y))$ lo que refuerza la impresión que tenemos de que los alumnos relacionaron la propiedad $T(kV)=kT(V)$ con funciones *simples.*

Después de analizar las imágenes de vectores colineales se continuó con la segunda parte de la actividad, analizar con las mismas cuatro funciones las imágenes de vectores que forman un paralelogramo con su diagonal, aquellos que se ven como en la siguiente figura:

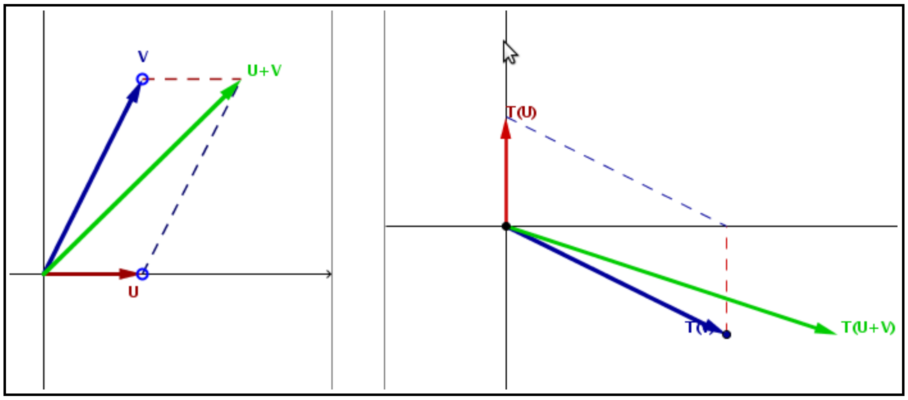


Figura 3.4: Imágenes de vectores que forman un paralelogramo con su diagonal

La figura se creó utilizando distintos colores para los vectores, manteniéndolos bajo la transformación, para facilitar la identificación de un vector con su imagen. Se construyó el paralelogramo formado por U y V para evocar la forma gráfica de la suma de vectores en el plano, así mismo se mostró en la gráfica de las imágenes el paralelogramo formado por $T(U)$ y $T(V)$; en esa gráfica no se representó explícitamente al vector $T(U)+T(V)$, que correspondería con la diagonal, para averiguar si los estudiantes utilizan la relación entre paralelogramos y sumas de vectores.

En esta parte de la actividad, se les pidió a los alumnos que contestaran la siguiente pregunta para cada una de las funciones:

Compara los vectores $T(U+V)$ y $T(U)+T(V)$. Si consideras que hay alguna relación entre ellos descríbela.

Lo que se esperaba que observaran es que la función 2 es la única que conserva la imagen de la diagonal como la diagonal del paralelogramo imagen y que para las demás funciones los estudiantes dijeran que no existe alguna relación entre los vectores o que simplemente son diferentes. En general, se tuvo el resultado deseado, los tipos de respuestas de los estudiantes fueron los siguientes.

Función 1. $T_1(x,y)=((1 - x)^2 + y, 1 - y)$

La mayoría de los estudiantes la describieron como que no hay relación entre los vectores *T(U+V)* y *T(U)+T(V)*, o que simplemente eran diferentes. Mientras que un par de estudiantes, al no encontrar una relación entre los vectores, se dedicó a describir el comportamiento del vector *T(U+V)*, estimando sus coordenadas o señalando en qué región del plano se encontraba.

Función 2. $T_2(x,y) = (0.7x - 0.8y, 0.8x + 1.3y)$

Para esta función, todos excepto uno de los estudiantes detectaron la propiedad de que *T(U+V) = T(U)+T(V)*. La respuesta de este alumno fue la siguiente:

"El vector verde [*T(U+V)*] *no se sale del paralelogramo."*

El estudiante que dio esta respuesta fue uno de los que proporcionó una descripción del vector *T(U+V)* para la función 1, continuó haciéndolo con las demás funciones.

Función 3. $T_3(x,y)=\left(\frac{|x|\cdot y}{\|(x,y)\|}, \frac{|y|\cdot x}{\|(x,y)\|}\right)$

En este caso, alrededor de la mitad de los estudiantes coincidieron en que no había una relación entre *T(U+V)* y *T(U)+T(V)*, el resto describieron de distintas formas el comportamiento del vector *T(U+V)*, como por ejemplo:

1. *T(U+V)* está siempre dentro del área formada por el ángulo entre *T(U)* y *T(V)*.
2. La imagen de la resultante tiene la mitad de la magnitud de la original.
3. *T(U+V)* y *T(U)+T(V)* coinciden en algunos casos.

Función 4 $T_4(x,y)=\left(\frac{x\cdot y}{\|(x,y)\|},\frac{x^2}{\|(x,y)\|}\right)$

Con esta última función, esencialmente las respuestas fueron las mismas por la similitud del comportamiento de ambas funciones.

Algo que se observó en esta parte de la actividad es que varios de los estudiantes no reconocieron en la gráfica al vector *T(U)+T(V)*, esto puede significar que no tuvieron presente la relación entre paralelogramos y sumas de vectores en el plano mas que como un discurso, ya que se dedicaron a describir el vector *T(U+V)* en alguna de las tres formas ya mencionadas para el caso de la función 3. Incluso cuando se les preguntó a algunos estudiantes en dónde tendría que estar el vector *T(U)+T(V)* y ellos respondieron que en la diagonal del paralelogramo, no lo compararon con el vector *T(U+V)* para buscar una relación. Esta situación era algo no esperado, pues se creía que lo que se conoce como "ley del paralelogramo" era un concepto familiar para todos los estudiantes. Otra posibilidad es que no se identifique a *T(U)* y *T(V)* como vectores, que se vean solo como las imágenes de *U* y *V*, o como otro tipo de objetos no-vectores y por lo tanto no se les pueda aplicar la ley del paralelogramo.

Al final de las hojas de trabajo se incluyó la siguiente tabla, en la cual se solicitó a los estudiantes que describieran a la función con más propiedades.

Relaciones que observaste en la gráfica de la derecha	Funciones en las que observaste estas relaciones
Ejemplo: La función está definida en todo el plano, todos los vectores tienen imagen.	1, 2, 3 y 4

Tabla 3.2: Propiedades de las funciones

Esta tabla se incluyó porque se quería que al final de la actividad los estudiantes hicieran una especie de resumen de propiedades gráficas identificadas para después destacar las propiedades que cumple la función dos, y basados en eso definir las transformaciones lineales. En general, la tabla no dio los resultados esperados por varias razones, entre las que encontramos las siguientes:

1. El encabezado de la primer columna resultó confuso para los alumnos y no refleja lo que se quería expresar. Lo que produjo que varios alumnos no entendieran qué se tenía que hacer y que tres estudiantes decidieran dejar la tabla en blanco.

2. Los alumnos describieron propiedades distintas a las detectadas a lo largo de la actividad. No hubo continuidad con lo que ya habían hecho.

3. Algunos estudiantes describieron propiedades de la forma: “no sucede que...” de esta manera la función con más propiedades no es la transformación lineal, sino una de las no lineales.

La tabla otorga demasiada libertad a los alumnos para el tipo de respuestas aceptables, para tratar de corregir esta situación se planea sustituir esta tabla por una en la que ya vengan descritas propiedades gráficas y algebraicas de las funciones y que los alumnos anoten cuáles de las funciones las cumplen, algo semejante a lo siguiente:

Propiedades	**Funciones que tienen esta propiedad**
Las imágenes de vectores colineales son colineales	T_2 *y* T_3
Se conserva la proporcionalidad	
...	

Tabla 3.3: Posible modificación a la Tabla 3.2

Con esto se pretende evitar las respuestas no relacionadas con la intención inicial de la tabla, puesto que, al únicamente tener que señalar qué funciones cumplen las propiedades enlistadas, sería más notable cuál de las funciones cumple las propiedades deseadas.

Tarea 2

De la misma manera que al finalizar la primera parte de la actividad, se les dejó como tarea fuera de clase a los estudiantes que encontraran una función de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$ que cumpliera con la propiedad algebraica que ellos detectaron, $T(U+V)=T(U)+T(V)$. Esta tarea tenía como primer objetivo analizar las predicciones que los estudiante pudieran hacer sobre la forma algebraica de estas funciones y como segundo objetivo, que los estudiantes se percataran que existen funciones que cumplen con ambas propiedades.

Sólo ocho estudiantes entregaron la tarea y la mitad de ellos propusieron funciones similares a las de la tarea anterior, del tipo $T(x,y)=(ax,by)$. El resto de las tareas dejaron claro que varios de los estudiantes aún no podían manejar las representaciones algebraicas de las funciones, es decir, tenían errores en las fórmulas que propusieron, las evaluaciones de las transformaciones y al realizar operaciones con ellas. Se cree que esta poca familiaridad y manejo de las expresiones algebraicas, que se presenta en dos niveles, definir y no poder evaluar o no poder definir, es la razón por la que los demás estudiantes no realizaron la tarea.

Cierre de la actividad

Después de recibida la segunda tarea y de que el profesor explicó por qué algunas de ellas no cumplían con lo solicitado, el mismo se encargó de realizar un discurso de cierre con el objetivo de definir el concepto de transformación lineal a partir de las propiedades gráficas y algebraicas que se detectaron a lo largo de la Actividad 1. Los puntos más importantes del cierre fueron los siguientes.

De todas las funciones que se pueden definir de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$ nos interesan sólo algunas, aquellas que cumplen con las propiedades:

1. $T(k\cdot V)=k\cdot T(V)$
2. $T(U+V)=T(U)+T(V)$

3.1.2 ACTIVIDAD 2

Después de haber analizado el comportamiento de las transformaciones en el plano con vectores colineales y paralelogramos en la Actividad 1 se continuó con la Actividad 2, la cual tuvo como objetivo que los alumnos *distingan las transformaciones lineales de las no lineales basados en el comportamiento de la imagen de un cuadrado unitario.*

Para esto, se analizó el comportamiento de las funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$ al evaluarlas en vectores que describen el contorno de un cuadrado, para tener así más criterios para discriminar entre las transformaciones lineales y no lineales. La actividad se centró en detectar las características de la imagen del cuadrado necesarias para que la función sea una transformación lineal y las suficientes para descartarla.

Para lograr tal objetivo, se diseñaron un ambiente dinámico y las correspondientes hojas de trabajo, los estudiantes ocuparon tres de las doce sesiones del pilotaje para realizar esta actividad.

Ambiente dinámico

Este archivo es similar al de la Actividad 1, y permite analizar cinco funciones, G_1, G_2, G_3, G_4 y G_5, cuyas expresiones algebraicas permanecen ocultas del mismo modo que en la actividad anterior. Fueron elegidas por tener diferentes efectos al ser evaluadas sobre el cuadrado de lado uno, que se muestra en la siguiente imagen:

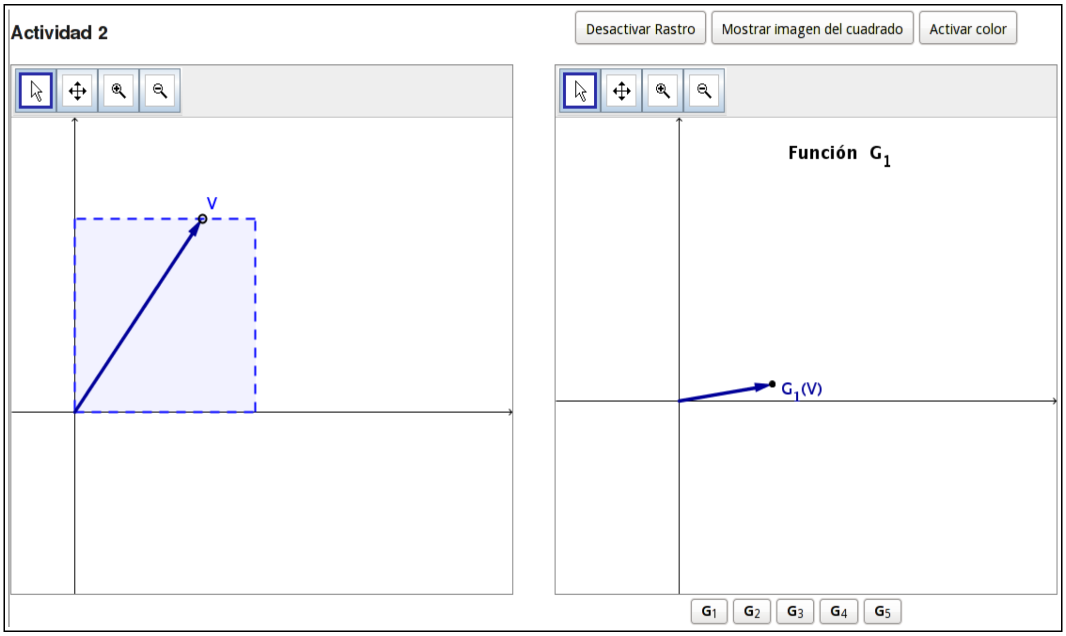


Figura 3.5: Vista inicial del archivo Actividad2.html

A diferencia de la Actividad 1, en este archivo el vector *V* está limitado a variar sólo sobre el cuadrado, al tener esta limitante, el vector $G_i(V)$ describe diferentes tipos de figuras cuando *V* recorre al cuadrado. Para observar la figura que se describe con cada función se puede dibujar usando el *rastro* del vector $G_i(V)$, que viene activado por defecto, o presionar el botón *mostrar imagen del cuadrado.*

A continuación se muestran las imágenes generadas por cada función:

1. La función G_1 está definida algebraicamente como $G_1(x,y)=((1 - x)^2 + y,\ 1 - y)$ y produce la siguiente figura como imagen del cuadrado:

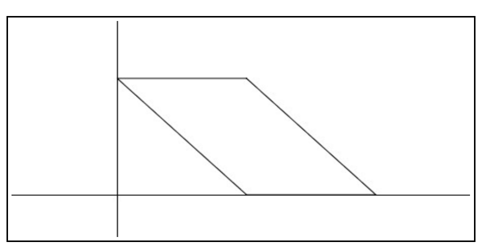


Figura 3.6: Imagen del cuadrado bajo la función G1

Para esta función no lineal se esperaba que se observara la característica gráfica de que la figura no pasa por el origen, lo que implica que la imagen del vector cero es distinta de cero.

2. La función G_2 está definida algebraicamente como: $G_2(x,y)=(\frac{|x|y}{\|V\|}+0.8y, \frac{|x|x}{\|V\|})$ y produce la siguiente figura como imagen del cuadrado:

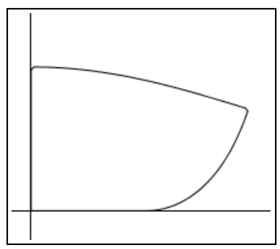


Figura 3.7: Imagen del cuadrado bajo la función G_2

Con esta función se pretendía examinar la propiedad de la suma para las transformaciones lineales. Para esto, se analizaron las imágenes de los vértices del cuadrado y la suma de estos. También se utilizó esta función para establecer el criterio gráfico de que las transformaciones lineales transforman rectas en rectas.

3. La función G_3 está definida algebraicamente como $G_3(x,y)=(0.5\ x + 3^y - 1,\ y)$ y produce la siguiente figura como imagen del cuadrado:

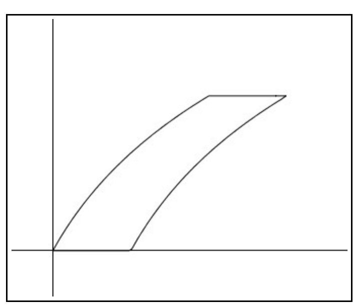


Figura 3.8: Imagen del cuadrado bajo la función G3

En esta función, el análisis se concentró en los vectores sobre los ejes y sus imágenes, se esperaba que se observara que no se conserva la colinealidad para algunos de ellos, con lo que se tendría otro argumento para el criterio que se mencionó para la Función 3 sobre la imagen de segmentos de recta.

4. La función G_4 está definida algebraicamente como:

$$G_4(x,y)=(1-2.172(\cos(x)-0.54),\ 1.188\sin(y))$$

y produce la siguiente figura como imagen del cuadrado:

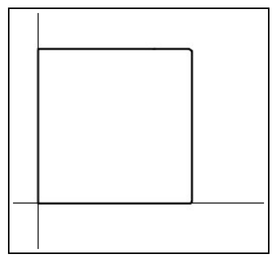


Figura 3.9: Imagen del cuadrado bajo la función G_4

Esta función se escogió para evitar que se cayera en el error de creer que cualquier función que tenga como imagen del cuadrado a otro paralelogramo es una transformación lineal. El análisis de los vectores sobre los ejes debería arrojar que la función no conserva la proporcionalidad de los vectores con abscisa cero.

5. La función G_5 está definida algebraicamente como $G_5(x,y)=(1.7x - 0.8y,\ 0.2x + 0.9y)$ y produce la siguiente figura como imagen del cuadrado:

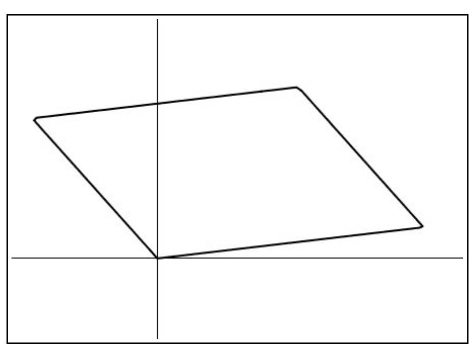


Figura 3.10: Imagen del cuadrado bajo la función G_5

Ésta es la única transformación lineal de la actividad, se decidió ponerla al final para que al analizarla ya se tuvieran los criterios para descartar a las transformaciones no lineales y que los estudiantes los utilizaran para tratar de descartarla y al no poder hacerlo probar las propiedades definitorias de las transformaciones lineales.

Hojas de trabajo

Para empezar la actividad, se les pidió a los estudiantes que dibujaran a mano, o lápiz y papel, la que ellos creían que sería la imagen del cuadrado bajo una transformación lineal antes de empezar a utilizar el archivo html. Esto con fines diagnósticos, para averiguar si en este momento ya tenían una idea de cómo sería tal figura. En la prueba piloto se observó que la mayoría supuso que la imagen del cuadrado sería el mismo cuadrado, aquellos que no lo hicieron dibujaron figuras como las siguientes:

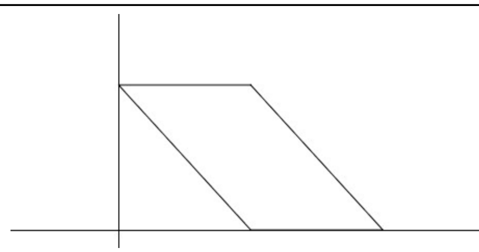
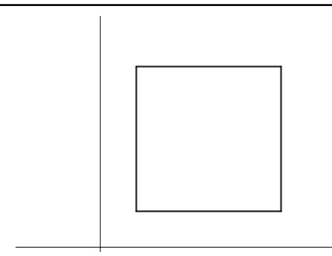
Tipo 1	**Tipo 2**
	

Tabla 3.4: Respuestas a la primer tarea de la Actividad 2

Suponemos que los estudiantes que graficaron una figura como la del tipo 1 fue por que abrieron el archivo html antes de tiempo y copiaron la forma de la imagen del cuadrado bajo la función G_1, por ese motivo nos interesa más el estudiante que dibujó la figura del tipo 2 ya que parece no haber tomado en cuenta la imagen del vector cero para su predicción.

Función $G_1(x,y)=((1 - x)^2 + y, 1 - y)$

Después de hacer la predicción sobre la imagen del cuadrado se procedió a analizar las funciones G_i, como se puede notar en la descripción de las funciones, cada una es analizada de distinta manera, comenzando con la función G_1, para la cual se le dan las siguientes instrucciones:

1. Mueve el vector *V* sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función. 2. Mueve el vector *V* hasta hacerlo coincidir con el vector cero. ¿Cuál es el vector imagen del vector cero bajo esta función? 3. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? ______ Justifica tu respuesta

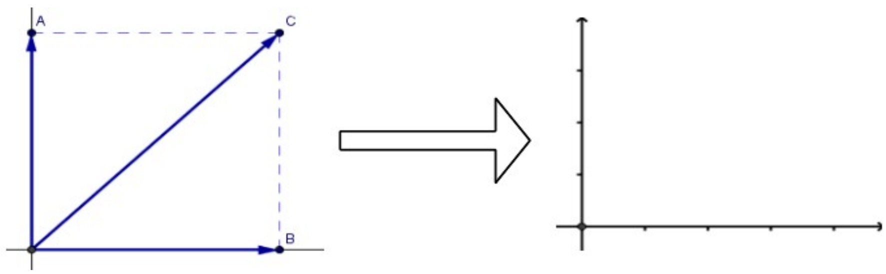
Tabla 3.5: Instrucciones 1-3 de la Actividad 2

Se esperaba que al observar que la imagen del vector cero era distinta de cero se concluyera que no se trataba de una transformación lineal. Mientras que todos respondieron que no se trataba de una transformación lineal, como era esperado, la mayoría usó el argumento de que $G_1(0,0)\neq(0,0)$ y unos cuantos trataron de *reforzar* ese argumento diciendo que tampoco cumplía alguna de las otras propiedades, dándose el caso de una alumna que dijo que la función no cumplía ninguna de las propiedades necesarias para ser una transformación lineal.

Función $G_2(x,y)=(\frac{|x|y}{\|V\|}+0.8y,\frac{|x|x}{\|V\|})$

Para esta función se les pidió a los estudiantes que usaran el software para contestar lo siguiente:

4. Dibuja en el espacio de abajo **G**$_2$(A), **G**$_2$(B) y **G**$_2$(C).



5. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? ______
   Justifica tu respuesta.

Tabla 3.6: Instrucciones 4-5 de la Actividad 2

El objetivo era que observaran que la imagen del vector *C* no corresponde con la suma de las imágenes de *A* y *B,* lo que significaría que la función no cumple la propiedad de la suma para transformaciones lineales y por lo tanto no puede ser una transformación lineal. Casi tres cuartas partes del grupo dio la respuesta esperada en el pilotaje, sin embargo, recibimos también respuestas no esperadas que tenían las siguientes formas:

1. La función es lineal porque cumple que $G_2(0,0)=(0,0)$
2. La función no es lineal porque $G_2(kV)\neq kG_2(V)$
3. La función no es lineal porque no conserva la *rectitud* de los segmentos

El estudiante que dio la respuesta 1 usó sólo el argumento con el que descartó a la función anterior, aparentemente por falta de otro tipo de pruebas para comprobar la linealidad o por negar de manera equivocada una proposición.

Las respuestas dos y tres resultan más interesantes, seis estudiantes dieron la respuesta 2 y tres usaron el argumento 3 aunque estos grupos no fueron disjuntos, es decir, dos estudiantes dieron una respuesta que incluía a la 2 y la 3. Suponemos que se dieron estas respuestas ya que se estableció una relación errónea entre vectores colineales y vectores que describen una recta, como en la siguiente imagen:

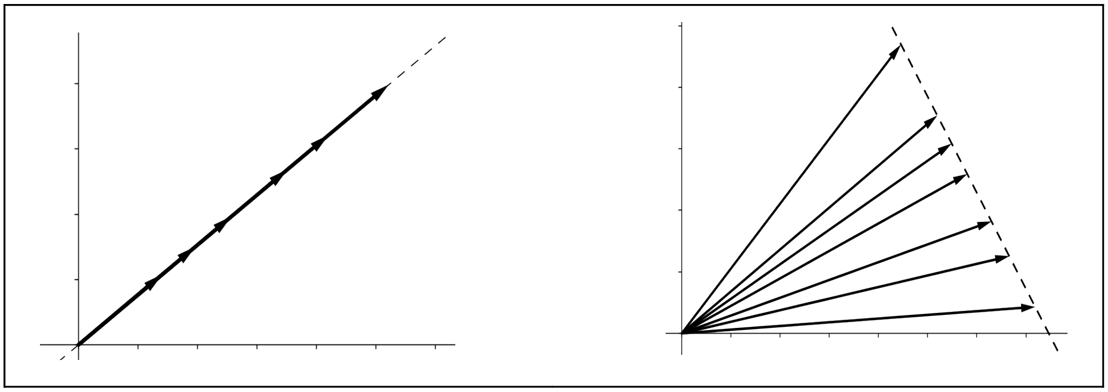


Figura 3.11: Vectores colineales y vectores que describen una recta

Cuando los estudiantes confunden un tipo de vectores con el otro, están verificando una propiedad que no existe, y creen que con eso están verificando que *T(kV)=kT(V)*.

Función $G_3(x, y)=(0.5x+3^y-1, y)$

Para analizar esta función se formularon las siguientes instrucciones:

7. Mueve el vector *V* sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función.
8. Ahora mueve el vector *V* solamente sobre el lado inferior del cuadrado. ¿Qué características tienen estos vectores V?
9. ¿Comparten esas características con sus imágenes?______
10. Ahora mueve el vector *V* solamente sobre el lado izquierdo del cuadrado. ¿Qué características tienen estos vectores V?
11. ¿Comparten esas características con sus imágenes?______
12. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? ______ Justifica tu respuesta

Tabla 3.7: Instrucciones 7-12 de la Actividad 2

Se esperaba que al comparar las imágenes de los lados del cuadrado se observara que existen funciones que conservan la colinealidad de algunos vectores pero no de todos. En concreto, se intenta que los estudiantes se percataron que los vectores sobre esos lados del cuadrado son colineales pero que las imágenes de los vectores sobre el lado izquierdo no lo son, la función no cumple una propiedad necesaria, no en general, y por lo tanto no es una transformación lineal.

En las respuestas a esta sección, observamos que 13 de los estudiantes notaron la colinealidad de los vectores sobre dos lados del cuadrado, es posible que otros tres también lo hayan hecho pues describieron a los vectores como que cumplían que $T(kV)=kT(V)$. Casi todos clasificaron a la transformación como no lineal proporcionando argumentos variados, de los cuales, los siguientes resultan más interesantes:

1. La función no mantiene la colinealidad.
2. La función no cumple que $T(kV)=kT(V)$.
3. La función no cumple que $T(A+B)=T(A)+T(B)$.
4. La función no mantiene la *rectitud* de los segmentos.

Las primeras dos respuestas fueron dadas, en igual proporción, por diez estudiantes y eran las respuestas esperadas.

La respuesta 3, dada por cuatro estudiantes pudiera deberse a un inadecuado análisis gráfico ya que, al menos con los vectores que están sobre los lados del cuadrado paralelos a los ejes, la función si cumple con esta condición.

La respuesta 4 parece tener distintas razones que cuando apareció en la sección anterior, se tienen evidencias de que varios de los estudiantes consultaron libros para averiguar sobre el tema de transformaciones lineales, en particular, una alumna admitió que el argumento venía de un libro[1], textualmente el libro decía lo siguiente:

> *"En términos geométricos, una transformación lineal es una transformación que conserva la <<rectitud>> de las líneas y la noción de líneas <<paralelas>>, manteniendo fijo el origen O. Pero no tiene por qué conservar los ángulos rectos u otros ángulos, de modo que las formas pueden resultar aplastadas o estiradas de una forma uniforme pero anisótropa."*

Es posible que debido a esta consulta de libros fuera de clase, los demás estudiantes estuvieran usando el argumento sobre la rectitud de las líneas, el cual no se había discutido y se planeaba introducirlo después; siendo esto ajeno al problema de los vectores colineales.

Función $G_4(x,y)=(1-2.172[\cos(x)-0.54],1.188\text{sen}[y])$

Al agregar esta función a la actividad, se esperaba que fuera la más difícil de analizar ya que la imagen del cuadrado parece ser el mismo cuadrado, con lo que aparenta conservar la colinealidad de los vectores y cumplir con la propiedad de la suma. Para aminorar la dificultad del análisis de la conservación de la proporcionalidad se añadió una herramienta al archivo con la que el vector V cambia de color dependiendo de su posición y su imagen tiene el mismo color que él, como en la siguiente figura:

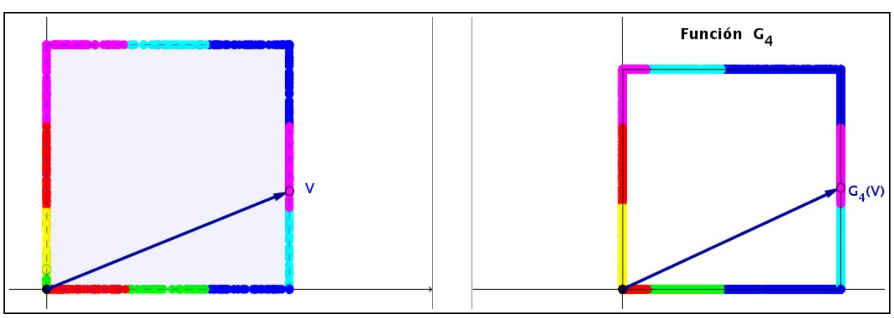


Figura 3.12: Uso de colores para analizar la proporcionalidad.

1 **Penrose, Roger. *El camino a la realidad: Una guía completa de las leyes del universo.* Editorial Debate**

Fue al llegar a esta parte de la actividad cuando se les informó de esta característica junto con las instrucciones para la función G_4:

13. Presiona el botón [**G_4**]. Puedes hacer que ***G_4** (V)* cambie de color igual que *V* presionando el botón [Activar color], para desactivar el efecto vuelve a presionar el botón. 14. Mueve el vector *V* sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función. 15. Mueve el vector *V* sobre el lado inferior del cuadrado y compara cómo cambia su tamaño y el de su imagen. 16. Mueve el vector *V* sobre el lado izquierdo del cuadrado y compara cómo cambia su tamaño y el de su imagen. 17. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? ______ Justifica tu respuesta

Tabla 3.8: Instrucciones 13-17 de la Actividad 2

Usando esta herramienta se esperaba que los alumnos notaran que las regiones de colores rojo, verde y azul del lado inferior del cuadrado no son proporcionales a las del lado correspondiente en el cuadrado imagen. En el cuadrado del dominio los tres segmentos de distinto color miden lo mismo, lo cual no sucede con sus correspondientes en la imagen, y se esperaba que de aquí tomaran argumentos para afirmar que no se conserva la proporcionalidad.

Al contestar esta parte los estudiantes dieron los siguientes tipos de respuestas:

1. No es lineal porque no conserva la proporcionalidad.
2. No es lineal porque $T(0,0)\neq(0,0)$.
3. Sí es una transformación lineal.

La primer respuesta era la esperada y fue dada por la mitad del grupo, por otro lado la segunda respuesta parece haber sido inducida por un error en el archivo html. Esta respuesta inesperada se debió a que la función no fue adecuadamente seleccionada, por las características de los cálculos realizados por GeoGebra, en especial el redondeo de números, la expresión algebraica utilizada para definir a la función G_3 genera un valor *cercano* pero distinto a *(0,0)* al evaluar en el vector nulo.

Por último, se puede suponer que los cinco estudiantes que contestaron que la función era una transformación lineal no analizaron la proporcionalidad pues sus argumentos sólo incluyen la conservación de la colinealidad, la imagen del vector cero y el comportamiento de las sumas. Probablemente la manera en que se explica la posibilidad de utilizar la herramienta de color, llevó a los estudiantes a considerar que se trataba de una mera sugerencia, cuando de hecho el diseño se basa en que los estudiantes la utilicen. Cambiar la redacción de las instrucciones para que el uso de la herramienta se vea como *obligatorio* podría disminuir el número de estudiantes que no analizan la conservación de la proporcionalidad para esta función.

También fue notorio que la mayoría de los estudiantes no utilizaron la variación de los colores como argumento al analizar la proporcionalidad.

Función $G_5(x, y) = (1.7\mathrm{x} - 0.8\mathrm{y}, 0.2\mathrm{x} + 0.9\mathrm{y})$

Esta última función fue la única transformación lineal de la actividad, debido a esto se necesitan argumentos esencialmente distintos a los de las demás funciones con las que se buscaban criterios para descartarlas como TL que consistían en la violación de alguna característica necesaria para ser TL. Por ese motivo y para no imponer un método particular de análisis o demostración de que G_5 es TL se formularon las siguientes instrucciones:

19. Mueve el vector V sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función.
20. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? ______ Justifica tu respuesta

Tabla 3.9: Instrucciones 19-20 de la Actividad 2

En las respuestas de esta sección la mayoría contestó como era esperado, clasificando a la función G_5 como TL argumentando ya sea que se cumplen las tres propiedades algebraicas o las cuatro propiedades gráficas, aunque no se apreció una preferencia por los argumentos gráficos o algebraicos ya que ambos aparecen en igual proporción.

Entre los pocos que no contestaron de la forma anterior, destaca una alumna que afirmó que la función no es lineal ya que:

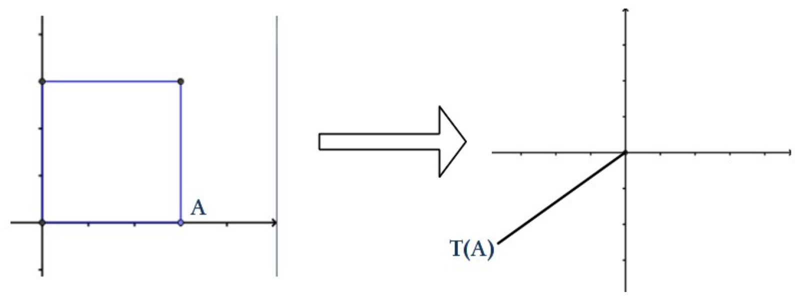
"...el vector $G_5(V)$ no siempre crece cuando V *lo hace"*

Tras cuestionarla acerca de su respuesta observamos que ésta se produjo cuando ella estaba intentando comprobar una propiedad que no existe. La alumna creía que las transformaciones lineales deben conservar la proporcionalidad para cualesquier vectores; Su interpretación gráfica de la propiedad $T(kV)=kT(V)$ era incorrecta, ella pensaba que esta propiedad se traduce en dos: una sobre colinealidad y otra sobre proporcionalidad.

Ejercicio final

Para terminar la actividad, se les pidió a los estudiantes que graficaran de nueva cuenta la forma que suponían que tendría la imagen de un cuadrado bajo una transformación lineal, salvo que esta vez se incluyó una condición extra para evitar que escogieran alguna de las funciones G_i.

Concluida la Actividad 2, resuelve el problema siguiente sin usar la computadora: En la gráfica siguiente se muestra un cuadrado y su imagen incompleta, bajo una transformación lineal T. Dibuja el resto de la imagen del cuadrado tomando en cuenta que la transformación T es lineal.



Compara la gráfica de la imagen que acabas de hacer con la que trazaste al principio de esta actividad. Explica a qué se deben las diferencias.

Tabla 3.10: Instrucciones del ejercicio final de la Actividad 2

Con esto se pretendía observar si los estudiantes cambiaban de opinión con respecto a la primer gráfica de la actividad, se esperaba que fuera así ya que la mayoría había escogido un cuadrado al principio y más de la mitad del grupo observó que la función G_4 no era TL a pesar de tener una imagen tan *simple.*

Se observó en las respuestas que sólo 7 estudiantes continuaron dibujando un cuadrado y los demás escogieron un paralelogramo, siendo cuatro los que hicieron explícito que quisieron dibujar un paralelogramo. En cuanto a las razones que dieron sobre por qué las gráficas eran diferentes, se presentaron en igual proporción los siguientes argumentos:

1. Por las condiciones iniciales.
2. Por que la imagen debe ser un paralelogramo [o romboide].
3. Por que ahora tengo mayor claridad sobre la definición.

La respuesta dos era la deseada, aunque no se consiguió en tantos alumnos como se deseaba.

Cierre de la actividad

Como en la actividad anterior, el profesor intervino para aclarar algunas cosas cuando la mayoría de los estudiantes entregaron sus respuestas. Este cierre se enfocó en aclarar algunas de las confusiones de los estudiantes detectadas en sus respuestas, principalmente las siguientes:

1. La propiedad algebraica $T(kV)=kT(V)$ implica que los vectores colineales tienen como imagen vectores también colineales y con la misma proporción.
2. Las transformaciones lineales no *curvan* a los segmentos de recta debido a que estos pueden ser descritos como la región formada por la sumas de un vector fijo con múltiplos de otro, como en la figura siguiente:

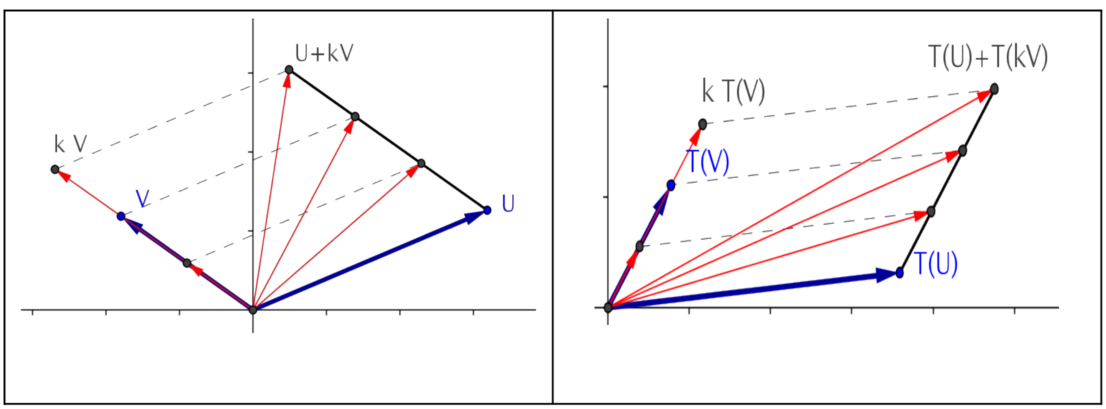


Figura 3.13: Segmentos de recta vistos como sumas de vectores

De tal manera, los vectores que forman el segmento pueden ser escritos de la forma $U+aV$ y por las propiedades de las TL las imágenes de estos vectores bajo una transformación lineal T tendrían la forma $T(U)+aT(V)$ por lo que estos formarían otro segmento de recta.

3. Para decidir si una función es TL hay que analizar sus características gráficas globales (forma de la imagen de un cuadrado) y locales (conservación de

proporcionalidad).

4. La imagen de un cuadrado bajo una transformación lineal tiene que ser un paralelogramo.

3.1.3 ACTIVIDAD 3

La tercera actividad de la secuencia tiene como objetivo que los alumnos *conviertan al registro algebraico las propiedades gráficas encontradas en las actividades anteriores*. En el pilotaje, se consumieron dos sesiones para llevar a cabo las tareas de esta actividad.

En el transcurso de la actividad los estudiantes tuvieron que determinar el tipo de gráficas que una TL puede generar a partir de un cuadrado, establecer que ciertas características gráficas *globales* son necesarias mas no suficientes para que se trate de una TL a partir del análisis algebraico y obtener la expresión algebraica general de éstas. Para ello, a diferencia de las actividades anteriores, los alumnos tuvieron el control de las representaciones algebraicas de las funciones que analizaron y los ocho problemas que resolvieron tienen que ver con encontrar alguna función que cumpla cierta característica gráfica.

A continuación se detallan el archivo html, las respectivas hojas de trabajo diseñadas para esta actividad y el discurso de cierre.

Ambiente dinámico

Este ambiente dinámico comparte algunas características con los anteriores, por ejemplo, las gráficas del dominio y el contradominio de la función se encuentran separadas, pero en lo que se refiere a la representación de las funciones son esencialmente distintos. En este archivo, los alumnos tuvieron la oportunidad de escribir la función que querían analizar y al presionar el botón *evaluar* se le mostró la gráfica de la imagen de los vectores que forman un cuadrado, como en la siguiente figura:

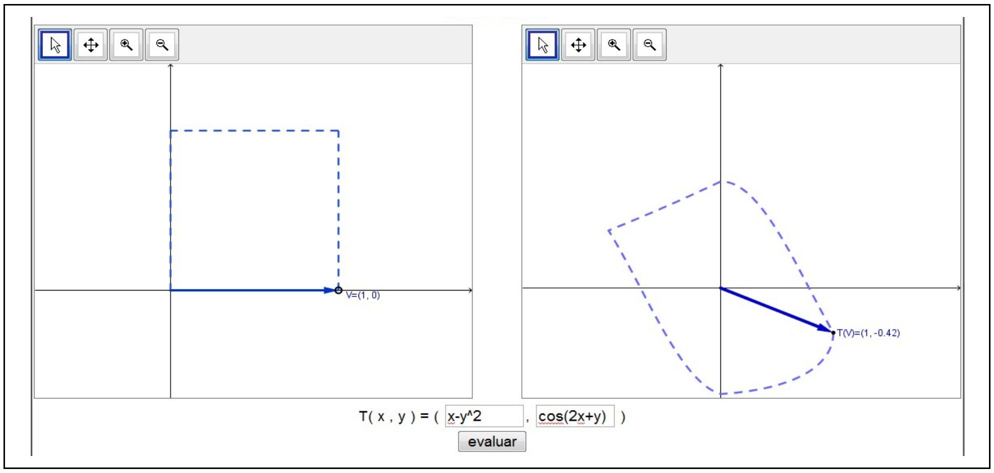


Figura 3.14: Archivo actividad3.html

Este archivo presentó algunas complicaciones técnicas, que causaban que la función introducida no se evaluara correctamente, aunque no generó dificultades mayores ya que *refrescar* la página permitía evaluar la función correctamente.

Hojas de trabajo

Como se mencionó, en esta actividad se les pidió a los alumnos resolver problemas gráficos proponiendo una función que satisfaga ciertas propiedades, también se les solicitó que trataran de explicar si la función que escogieron es una TL.

Problema 1

Con el primer problema se trataba de recalcar que el hecho de que la función produzca un cambio *simple* en el cuadrado, o que tenga una expresión algebraica *sencilla,* no es suficiente para que se trate de una TL.

1. Encuentra una transformación para la cual la imagen del cuadrado, sea también un cuadrado. Anota aquí la fórmula ______________________________ a. ¿La transformación que escogiste es lineal?________ b. Explica por qué, usando: i. El archivo con las gráficas. ii. La fórmula de la transformación.

Tabla 3.11: Problema 1 de la Actividad 3

Como era esperado, las funciones que escogieron los alumnos fueron de la forma *T(x,y)=(ax,ay)* o *T(x,y)=(ax+b, ay+b)*, siendo la primera la más común al ser escogida por 15 alumnos. La mitad del grupo dio argumentos suficientes de por qué la función que escogieron era o no TL. Los que no lo hicieron fue porque no intentaron comprobar todas las propiedades, gráficas o algebraicas, o porque comprobaron la propiedad de la suma de vectores sólo para un caso particular.

El caso de un estudiante resultó interesante ya que afirmó que la función que escogió, *T(x,y)=(2x+1,2y+3)*, es lineal pues *"..es una función lineal de primer grado"*. Este alumno presentó una confusión que era de esperarse ya que en otros cursos, por ejemplo en cálculo diferencial, les llaman funciones lineales a los polinomios de grado uno. Tal semejanza de nombres, función lineal y transformación lineal, junto con la semejanza entre las representaciones algebraicas, ya que las primeras serían de la forma *(ax+by+c, dx+ey+f)* en el caso de dos variables, facilita que se confundan estos dos objetos.

Problema 2

El segundo problema que tuvieron que resolver los estudiantes fue el siguiente:

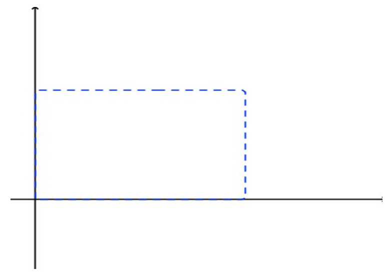
2. Encuentra una transformación para la cual la imagen del cuadrado sea un rectángulo similar al siguiente:  Anota aquí la fórmula ______________________________ a. ¿La transformación que escogiste es lineal?________ b. Explica por qué, usando: i. El archivo con las gráficas. ii. La fórmula de la transformación.

Tabla 3.12: Problema 2 de la Actividad 3

Con este problema se quiso mostrar que no es necesario que las variables x y y de una función *T(x,y)* sean multiplicadas por las mismas constantes para ser TL, lo que se traduce a que gráficamente la imagen de un cuadrado no necesita tener lados de la misma longitud.

Al resolver este problema, todos los estudiantes escogieron una función del tipo *T(x,y)=(ax,by)* y la clasificaron como TL. En cuanto a sus explicaciones de por qué la clasificaron de esta manera observamos lo siguiente:

- En los argumentos gráficos, 12 alumnos hablaron sobre la colinealidad, la proporcionalidad y la imagen del vector cero, pero sólo 8 incluyeron a la imagen de la suma de vectores en sus argumentos. Mientras que dos estudiantes se basaron en que la función conserva la *rectitud.*

- En los argumentos algebraicos se observa que 7 alumnos probaron que la función cumple las propiedades *T(kV)=kT(V)* y *T(U+V)=T(U)+T(V)* de manera aceptable, mientras que 5 sólo lo hicieron lo mismo para la primera propiedad. Otros cuatro estudiantes hicieron un intento de demostrar alguna de las propiedades, pero lo que escribieron demuestra que no toman en cuenta la generalidad de éstas o que aún no pueden *evaluar* correctamente funciones de dos variables.

Problema 3

Este problema se escogió para que los estudiantes encontraran argumentos para discriminar entre las funciones que conocen como *lineales,* de cursos previos como el de Cálculo, y las transformaciones lineales del Álgebra Lineal.

3. Modifica la función que escogiste para que la imagen sea un rectángulo que no contenga al origen de coordenadas. Similar al siguiente:

Anota aquí la fórmula ________________________________

a. ¿Es una transformación lineal?_________
b. Explica por qué, usando:
    i. El archivo con las gráficas.
    ii. La fórmula de la transformación.

Tabla 3.13: Problema 3 de la Actividad 3

Se esperaba que los alumnos modificaran la función del problema anterior para llegar a una que fuese de la forma $T(x,y)=(ax+b, cy)$ o $T(x,y)=(ax, by+c)$

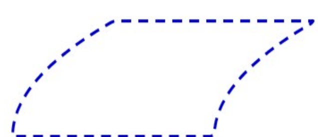
Todos los alumnos del pilotaje escogieron funciones del tipo $T(x,y)=(ax+b, cy)$ y 15 de ellos usaron como argumento que la imagen del vector cero era distinta del vector $(0,0)$ para afirmar que la transformación no es lineal, mientras que otros tres se basaron en las propiedades de colinealidad o imágenes de sumas.

En esta sección sobresalieron dos alumnos, ambos dijeron que la función era una TL porque conservaba la rectitud de los segmentos y otro añadió que se trataba de una *función lineal de primer grado.* En lo que se refiere a la rectitud de los segmentos, ambos parecían tomar como suficiente un criterio que es únicamente necesario para la demostración de linealidad, pues no intentaron comprobar alguna de las otras propiedades. El estudiante que tomó como lineales a las funciones de la forma $T(x,y)=(bx+c,by+c)$, confundió el concepto de linealidad en Álgebra Lineal con el de cursos previos, lo hizo a lo largo de toda la actividad, posiblemente influido por su curso de cálculo, llegando a describir la representación algebraica general de las TL como $T(x,y)=(bx+c,by+c)$.

Problema 4

Con este problema se buscó que los estudiantes encontraran un equivalente algebraico para el criterio gráfico sobre la conservación de la *rectitud* de los segmentos, el cual habían venido usando desde la Actividad 2. El problema planteaba lo siguiente:

4. Encuentra una transformación con la que la imagen del cuadrado sea una figura parecida a la siguiente:



Anota aquí la fórmula ______________________________

   a. ¿Es una transformación lineal?________
   b. Explica por qué, usando:
      i. El archivo con las gráficas.
      ii. La fórmula de la transformación.

Tabla 3.14: Problema 4 de la Actividad 3

Como los estudiantes habían mostrado tener una idea de *simplicidad* para las TL, se esperaba que para obtener el efecto gráfico solicitado intentaran *complicar* la expresión algebraica de las funciones que habían estado manejando.

El tipo de *complicaciones algebraicas* que los estudiantes añadieron a las funciones fue incluir exponentes distintos a 1, por ejemplo:

- (ax^2+y,y)
- $(ax+by,\sqrt{y})$
- $(x+y^3,x+y)$

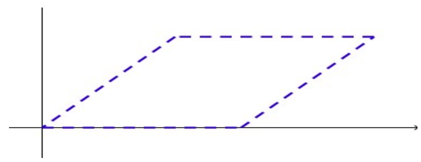
Todos clasificaron a estas funciones como no lineales, gráficamente utilizaron de igual manera argumentos sobre la rectitud de las imágenes de segmentos y la conservación de la colinealidad. Tres cuartas partes del grupo dieron explicaciones algebraicas, siendo la propiedad $T(kV)=kT(V)$ la que más se utilizó. Se presentaron dos casos de estudiantes que dijeron que la transformación no es lineal ya que *tiene términos no lineales*, refiriéndose posiblemente a la noción de linealidad que conservan de sus cursos anteriores.

Algunos estudiantes intentaron, sin éxito, utilizar funciones del tipo (x^2, y^3), para *curvar* la imagen del cuadrado. Ellos parecieron perder de vista las demás características que intervienen en la relación funcional, consideraron sólo el tipo de la expresión algebraica e ignoraron otras relaciones entre las componentes de la función.

Problema 5

Con este problema se esperaba ampliar el tipo de funciones que se consideraban transformaciones lineales ya que hasta ese momento sólo se había intentado que se propusieran funciones del tipo $T(x,y)=(ax,by)$, las cuales no podrían cumplir lo siguiente:

5. Encuentra una transformación con la que la imagen del cuadrado sea una figura parecida a la siguiente:



Anota aquí la fórmula ________________________________

a. ¿Es una transformación lineal?________
b. Explica por qué, usando:
    i. El archivo con las gráficas
    ii. La fórmula de la transformación.

Tabla 3.15: Problema 5 de la Actividad 3

La forma algebraica que se quería obtener es *T(x,y)=(ax+by,cy)* o *T(x,y)=(ax+by,cx)*, la cual esta más cerca de la expresión general de las TL.

En el pilotaje, casi la totalidad de los alumnos escogió las funciones del tipo *T(x,y)=(ax+by,cy)* y solamente dos estudiantes escogieron una transformación de la forma *T(x,y)=(ax+by,cx)*. Alrededor de la mitad de los estudiantes pudo demostrar algebraicamente que la expresión que propuso corresponde a una TL, en la otra mitad del grupo destacaron 4 alumnos que sólo intentaron demostrar una de las propiedades algebraicas, y otros dos hicieron sus demostraciones analizando casos particulares en los que se cumplían las propiedades.

Nos ha parecido interesante la respuesta de uno de los estudiantes que propuso la función *T(x,y)=(4x+4y,2x)*, para concluir luego que no se trata de una TL porque:

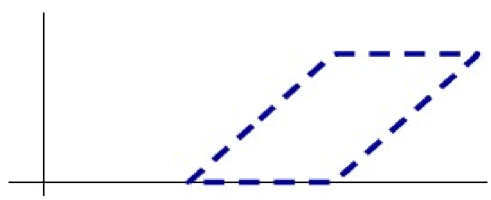
"...la proporción con que aumentan los vectores imagen no es la misma"

Esta dificultad ya se había presentado en el reporte de una alumna durante la ejecución de la Actividad 2, donde la propiedad *T(kV)=kT(V)* parecía estarse interpretando gráficamente de manera incorrecta, como si consistiera de dos propiedades independientes: una sobre colinealidad y otra sobre proporcionalidad.

Problema 6

Con este problema se trató de hacer notar de nueva cuenta la diferencia entre la noción de linealidad que se estaba discutiendo y la que proviene cursos anteriores, esperando que los alumnos notaran que algunas funciones de aquel tipo no son lineales por no cumplir la igualdad *T(0,0)=(0,0).*

6. Modifica la función que escogiste para que la imagen sea un paralelogramo que no contenga al origen de coordenadas.



Anota aquí la fórmula ______________________________

a) ¿Es una transformación lineal?________
b) Explica por qué, usando:
    i. El archivo con las gráficas.
    ii. La fórmula de la transformación.

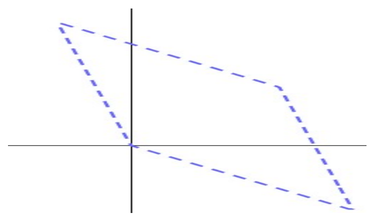
Tabla 3.16: Problema 6 de la Actividad 3

En el pilotaje, la mayoría de los estudiantes utilizó el criterio de la imagen del cero para descartar a la función como TL, un par de alumnos utilizaron la colinealidad. Se redujo a uno la cantidad de alumnos que incluyó a las funciones de la forma *(ax+by,cx+dy)+(e,f)* como transformaciones lineales.

Problema 7

Con este problema se pretendía que los estudiantes pudieran identificar tal efecto gráfico con una función del tipo *T(x,y)=(ax+by,cx+dy).*

7. Encuentra una transformación con la que la imagen del cuadrado sea una figura parecida a la siguiente:



Anota aquí la fórmula ________________

a) ¿Es una transformación lineal?________

b) Explica por qué, usando:

   i. El archivo con las gráficas.

   ii. La fórmula de la transformación.

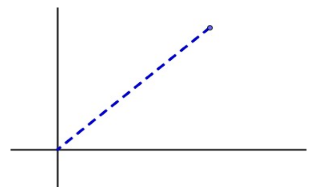
Tabla 3.17: Problema 7 de la Actividad 3

Excepto por un alumno que encontró una transformación no lineal que cumple con la condición gráfica solicitada, todos los estudiantes escogieron funciones del tipo *T(x,y)=(ax+by,cx+dy)* y las clasificaron como TL. Se presentaron las mismas complicaciones que con el problema 5, de nueva cuenta se observó una confusión entre propiedades necesarias y suficientes para que una transformación sea lineal, algunos alumnos no intentaron probar las propiedades suficientes y otros sólo buscaron casos particulares. Alrededor de la mitad del grupo dio demostraciones algebraicas aceptables.

Problema 8

El último problema gráfico de esta actividad consistió en analizar la linealidad de un tipo especial de funciones, las que no son sobreyectivas.

8. Encuentra una transformación para la cual la imagen del cuadrado sea una figura parecida a la siguiente



Anota aquí la fórmula ______________________________

a. ¿Es una transformación lineal?________
b. Explica por qué, usando:
    i. El archivo con las gráficas.
    ii. La fórmula de la transformación.

Tabla 3.18: Problema 8 de la Actividad 3

Se esperaba que se pudiera incluir este tipo de funciones dentro de las *candidatas* a ser TL ubicándolas como un tipo *especial* de paralelogramo y que las propiedades algebraicas no fueran difíciles de comprobar.

Se observó que todos los alumnos escogieron transformaciones lineales de las siguientes formas:

- *T(x,y)=(x,x)*
- *T(x,y)=(ax,ax)*
- *T(x,y)=(ax+by,ax+by)*

siendo la primera la más utilizada. Hubo más intentos de demostrar las propiedades algebraicas que con los problemas anteriores, 14 alumnos dieron demostraciones aceptables, probablemente por la *simplicidad* de las funciones que escogieron.

Se esperaba, como una posibilidad, que algún estudiante descartara a este tipo de funciones como TL, por el efecto gráfico que ocasionan, sin intentar comprobar las propiedades algebraicas, pero esto no sucedió.

Para finalizar la actividad, se les pidió a los estudiantes que encontraran la expresión algebraica general de las transformaciones lineales de la siguiente manera:

9. Si la fórmula general de las funciones cuadráticas es
F(x) = a x² + b x + c
siendo *a, b* y *c* los parámetros que determinan la forma de la parábola. Escribe cuál consideras que es la fórmula general de las transformaciones lineales.
T(x , y) = (________________ , ________________)

Tabla 3.19: Problema final de la Actividad 3

La mayoría de los estudiantes dio la respuesta esperada $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$, pero también se produjeron respuestas como las siguientes:

1. $T(x,y)=(ax+c,by+d)$
2. $T(x,y)=(ax^m+by^n,ax^m+by^n)$

La primera respuesta la dieron dos estudiantes que parecen no haber podido separar el concepto de linealidad en Álgebra Lineal con el que se revisa en cursos anteriores, aunque uno de ellos descartó en el problema 6 una función de ese tipo porque no cumple con la condición de que $T(0,0)=(0,0)$.

La segunda respuesta fue dada por un estudiante que para el problema 4 propuso la función $T(x,y)=(x^2+3y^2, 2x)$, que incluye exponentes distintos de 1; al intentar descartarla como una función lineal llegó a la conclusión de que la no linealidad surge de que los exponentes no sean iguales en las expresiones algebraicas mostradas como componentes de T. Esto es, no pudo llegar a la interpretación de que el exponente 2 de una de las expresiones es lo que *le quita* la linealidad a la función.

Cierre de la actividad

Al final de la actividad el profesor se encargó de resumir, a partir de las intervenciones de los estudiantes, las posibles formas o efectos gráficos que una transformación lineal puede causar, resaltando que cualquier función que no cause un efecto como aquellos puede ser inmediatamente descartada como TL, y que el hecho de cumplir con las propiedades gráficas *globales* es sólo una condición necesaria para la comprobación de la linealidad, que la demostración está completa cuando se han analizado las propiedades definitorias ya sea algebraicamente o gráficamente.

Después de esto, se les pidió a los alumnos que dieran ejemplos algebraicos de TL para, a partir del análisis de las operaciones algebraicas que aparecen en los casos particulares, obtener entre todos la expresión general $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ y que ésta quedara establecida como la expresión general de una TL.

3.1.4 ACTIVIDAD 4

El objetivo de esta actividad es que los alumnos puedan *relacionar algunos efectos gráficos de las transformaciones lineales particulares con sus respectivas expresiones algebraicas*, para facilitar a los alumnos el realizar conversiones entre ambos registros, y que después de esta experiencia pudieran obtener la expresión matricial de las transformaciones lineales. Las últimas tres sesiones del pilotaje fueron utilizadas para esta actividad.

En la primera parte de la actividad, los estudiantes debieran manipular gráficamente los vectores del ambiente dinámico para encontrar la expresión algebraica de transformaciones lineales que cumplan ciertas características gráficas, y explicar por qué las cumplen utilizando las expresiones algebraicas.

En la segunda parte, se incluyeron problemas en donde la manipulación gráfica de los vectores imagen permitió observar los patrones algebraicos de ciertos tipos de TL, particularmente los que generan expansiones o rotaciones.

En la tercera parte, se planteó estudiar el efecto algebraico que se produce en la fórmula general de las TL, al manipular gráficamente los vectores imagen uno por uno. Con lo anterior se pretendió que los estudiantes pudieran llegar a establecer la representación matricial de la forma general de las transformaciones lineales.

A continuación se detallan el ambiente dinámico, las hojas de trabajo diseñadas para esta actividad y el discurso de cierre.

Ambiente dinámico

Como ya se mencionó, en esta actividad los alumnos pudieron manipular las imágenes de la base canónica de $\boldsymbol{R}^2$, cada vez que arrastraban uno de los vectores imagen definían una TL, misma que se mostraba algebraicamente en pantalla. El archivo permitió también modificar directamente la expresión algebraica utilizando *deslizadores* que representaban los parámetros en la expresión general de las TL. Al igual que en los archivos anteriores, el estudiante pudo ver en pantalla dos planos cartesianos: el de la izquierda que corresponde al dominio de la TL y el de la derecha al contradominio (Figura 3.15).

El archivo tiene la opción de mostrar deslizadores en pantalla cuando se presiona el botón *modificar fórmula* (ver Figura 3.16).

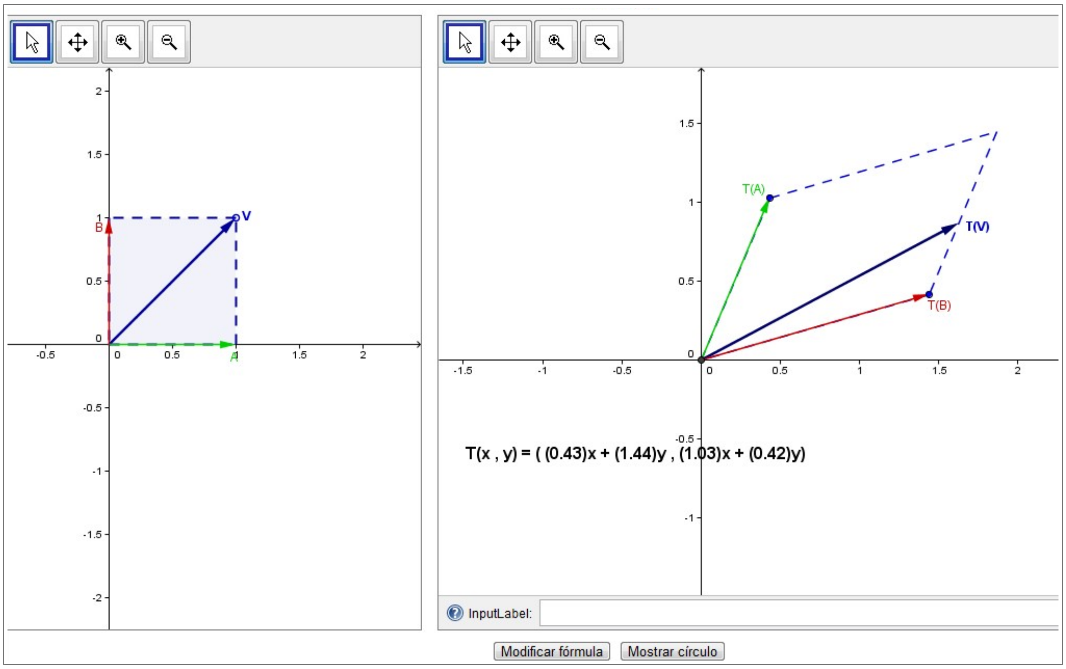


Figura 3.15: Vista inicial del archivo *actividad4.html.*

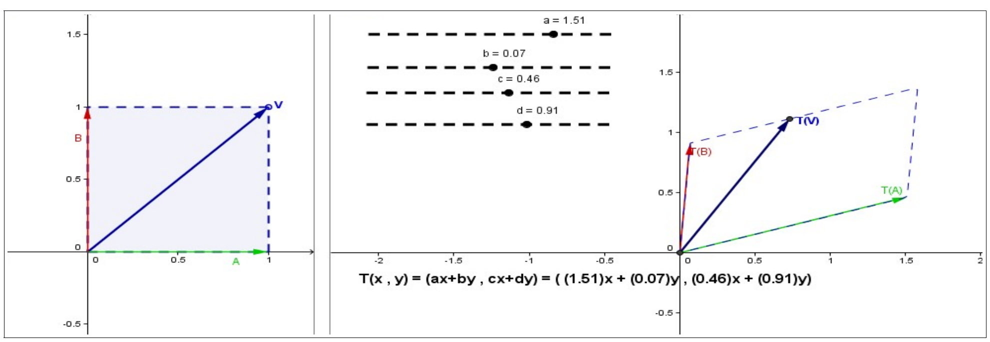


Figura 3.16: El modo *modificar fórmula* del archivo actividad4.html

Para facilitar la búsqueda de una TL cuyo efecto gráfico sea la rotación del cuadrado construido sobre la base canónica, se incluyó una *herramienta* que al activarla mostrara un círculo unitario centrado en el origen y la medida del ángulo entre los vectores *T(A)* y *T(B),* como se muestra en la siguiente figura:

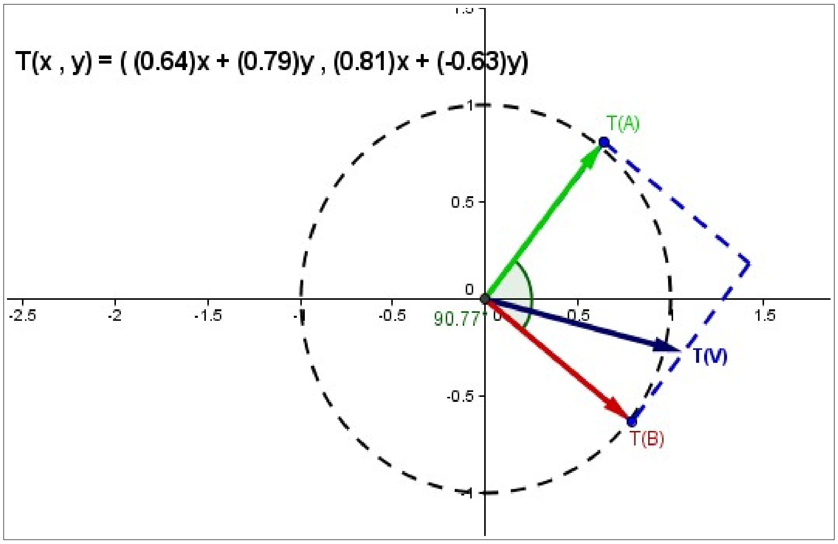


Figura 3.17: *Herramienta* mostrar círculo

Hojas de trabajo

Como se mencionó, la actividad se dividió en 3 partes por el tipo de problemas que se planteó resolver. A continuación se detallan los problemas incluidos en cada parte de la actividad, así como lo sucedido en el pilotaje.

Parte 1

La primera parte corresponde a los problemas en los que se tenía que manipular gráficamente las imágenes de los vectores A y B para encontrar la expresión algebraica de una TL que cumpliera ciertas características, y luego explicar dichas características usando la expresión algebraica.

Problema 1

Se empezó la actividad con el siguiente problema:

1. Modifica T(A) y T(B) para encontrar dos transformaciones en las que la imagen del cuadrado sea el mismo cuadrado. Anótalas aquí: a. __________________________ b. __________________________ 2. Utiliza las fórmulas de esas transformaciones para explicar por qué tienen al mismo cuadrado como imagen

Tabla 3.20: Problema 1, primera parte de la Actividad 4

Se esperaba que los estudiantes escogieran las funciones *T(x,y)=(x,y)* y *T(x,y)=(y,x)* y argumentara que tales funciones tienen la misma imagen por que las imágenes de una son la reflexión de las imágenes de la otra sobre la recta *y=x,* o que las gráficas coinciden porque para ambas funciones las imágenes de los vectores *A* y *B* son el mismo par de vectores por lo que no cambia el paralelogramo que forman.

En las respuestas de los estudiantes observamos que dos alumnos no interpretaron el problema como esperábamos pues propusieron las siguientes funciones:

1. *(2y,-2x) y (-2x.-2y)*
2. *(y,x) y (.75y,.75x)*

El primer par de funciones genera dos cuadrados de lado dos pero en diferentes cuadrantes, y el segundo par, cuadrados ubicados en el mismo cuadrante pero de distintas medidas. Parece que estos dos estudiantes sólo buscaron TL que tuvieran cuadrados como imágenes o que no pudieron generar una reflexión a partir de una TL, pues en el primer par una función representa una rotación de la otra y en la segunda una contracción o expansión. Parece que el primero buscó transformaciones que tuvieran el mismo cuadrado como imagen, pero no el mismo que la preimagen.

Los demás alumnos propusieron las funciones esperadas y usaron uno o dos de los argumentos esperados, siendo la conservación de las magnitudes el más usado. Este argumento, que por si mismo es insuficiente, fue dado por 9 estudiantes y revela en general las dificultades que encontraron para dar una explicación algebraica.

Problema 2

Este problema es similar al anterior y consistió en lo siguiente:

3. Modifica T(A) y T(B) para que la imagen de la transformación lineal sea un segmento de recta y anota aquí la expresión algebraica. ______________________________
4. Utiliza la expresión algebraica de la transformación para explicar por qué el cuadrado tiene un segmento de recta como imagen.

Tabla 3.21: Problema 2, primera parte de la Actividad 4

Para este problema se esperaba que se escogieran TL en las que una de las componentes fuera un múltiplo de la otra, como *(ax+by, k(ax+by))* y que los alumnos notaran que la relación de dependencia lineal entre las componentes es lo que genera el efecto gráfico. Se esperaba que los estudiantes pudieran resolver este problema ya que tenían cierta experiencia con las interpretaciones gráficas, relaciones de dependencia lineal y de subespacios generados.

Las respuestas fueron variadas, pero se pueden resumir en los siguientes siguientes funciones:

1. *(x, x), (y,y) y (ax, bx),* tres estudiantes
2. *k(x+y, x+y),* ocho estudiantes
3. *(a(x+y), b(x+y)),* cinco estudiantes
4. *(ax+by, 0),* tres estudiantes

Los cuatro tipos de funciones parecen mostrar que todos intentaron *colapsar* el cuadrado a un segmento cercano a la recta *y=x*, resolvieron el problema haciendo que los vectores fueran colineales. Las explicaciones que dieron los estudiantes sobre el efecto gráfico que causan estas funciones fueron las siguientes:

a) Es un segmento porque sólo interviene una variable.
b) Es un segmento porque las componentes son iguales (o múltiplos), lo que genera que todos los vectores imagen sean colineales.
c) Todos los vectores son colineales por que *T(A)* y *T(B)* son colineales.
d) Si una componente es cero entonces la imagen es la proyección sobre el eje *X.*
e) Si una componente es cero, la imagen tiene sólo una dimensión.

El argumento *a* corresponde únicamente a las funciones del tipo 1 y parece relacionar la dimensión del espacio imagen con las variables que aparecen en la expresión algebraica. Esta respuesta fue dada por cuatro estudiantes.

El argumento *b* fue dado para las funciones de tipo 2 y 3 por un total de 7 estudiantes, involucra los registros gráfico y algebraico para expresar que todos los vectores imagen están sobre la misma recta debido a la relación entre sus componentes, aunque la explicación algebraica no se corresponde con lo que hicieron para obtenerla.

El argumento *c,* dado por un estudiante, parece implicar un análisis únicamente gráfico y se vale del hecho de que la suma de dos vectores colineales es colineal a estos. La respuesta pareciera revelar un intento por tomar a los vectores *T(A)* y *T(B)* como una base para el espacio imagen.

Los argumentos *d* y *e* fueron dados para las funciones del tipo 4 aunque parecen de naturaleza distinta, el *d* es una interpretación gráfica del efecto de la TL sobre el cuadrado, mientras que el *e* parece ser de tipo *teórico/abstracto* pues utiliza el concepto de *dimensión* de una manera similar al *a.*

Los procedimientos gráficos y los argumentos que presentaron los estudiantes se basan en la comparación entre las componentes del vector imagen, no parece necesario para ellos describir la relación entre *T(A)* y *T(B)*; no se explicaron cómo llegaron a la expresión algebraica, solo la describieron.

Parte 2

La segunda parte también abordó problemas en donde se requirió la manipulación gráfica de los vectores imagen pero ahora para observar los patrones algebraicos de ciertos tipos de TL, particularmente las que producen rectángulos como imagen del cuadrado, las que generan una expansión o contracción de éste o que causan una rotación.

Problema 3

Se empezó por las funciones que producen rectángulos como imágenes del cuadrado.

5. Modifica T(A) y T(B) para encontrar dos transformaciones diferentes en las que la imagen del cuadrado sea un rectángulo con 2 lados sobre los ejes. Anótalas aquí: a. ________________________ b. ________________________ 6. Escribe una transformación lineal que mande al cuadrado en un rectángulo de base 1.1 y altura 2.4. ________________________________ 7. Escribe una transformación lineal que mande el cuadrado en un rectángulo de base *r* y altura *s*. ________________________________

Tabla 3.22: Problema 3, segunda parte de la Actividad 4

Se empezó por una exploración gráfica para encontrar casos particulares en los que la TL tenía el efecto gráfico deseado y se esperaba que los alumnos notaran un patrón en las expresiones algebraicas, para facilitar el paso de los casos particulares a la expresión general, se les pidió que dedujeran, sin ayuda del software, la expresión de una TL que produce un rectángulo en especifico. Se esperaba que los estudiantes llegaran a la expresión $T(x,y)=(rx, sy)$ o $T(x,y)=(ry, sx)$.

Las respuestas estuvieron divididas igualmente entre las dos esperadas y los estudiantes no parecen haber tenido dificultades para resolver este problema. De esto se aprecia que la experiencia acumulada a lo largo de su trabajo, ha convertido a estos problemas en tareas rutinarias, lo que reduce ampliamente las complicaciones.

Problema 4

Con este problema se buscó que los estudiantes encontraran un tratamiento (método) algebraico que les permitiera modificar la representación algebraica de una TL de modo que ésta hiciera variar proporcionalmente la imagen del cuadrado de una manera específica.

10. Modifica T(A) y T(B) para que la imagen de la transformación lineal sea un cuadrado de lado dos. Encuentra otras dos transformaciones que manden el cuadrado de lado 1 a un cuadrado de lado 2. Escribe las 3 transformaciones encontradas.
    a)______________________
    b)______________________
    c)______________________
11. La siguiente transformación manda al cuadrado en otro cuadrado de lado 1.

$$T(x, y) = (0.15x + 0.99y\ ,\ -0.99x + 0.15y)$$

Modifica la expresión algebraica para que la imagen sea un cuadrado de lado 2 y verifica en el archivo que tu predicción se cumple. Anota aquí la transformación ______________________________   12. Al duplicar el tamaño del cuadrado imagen, la expresión algebraica se modifica. Explica la manera como se está modificando.

Tabla 3.23: Problema 4, segunda parte de la Actividad 4

Se les pidió a los estudiantes que describieran cómo es que se modificó la expresión algebraica para estar seguros de que obtuvieron el tratamiento deseado y no otro. Se esperaba que se encontrara una relación entre los valores de los parámetros en las transformaciones *a), b)* y *c)* y que se obtuviera el tratamiento deseado a partir de que un efecto gráfico similar para vectores se obtiene de la misma manera, la multiplicación por escalares. Aparte de eso, identificar el patrón algebraico al obligar a la TL a que la imagen del cuadrado aumente su área.

El desempeño de los estudiantes no fue tan regular como en el problema anterior, la mitad del grupo obtuvo/dedujo el tratamiento deseado pero los demás dieron respuestas no esperadas, entre las que destacan las siguientes:

1. $T(x,y) = (0.15x + 2(0.99)y, 2(-0.99)x + 0.15y)$
2. $T(x,y) = (0.15x + (1+0.99)y, -(1+0.99)x + 0.15y)$
3. $T(x,y) = (2x+2y,2x+2y)$
4. $T(x,y) = (1.73x + y, -x+1.73y)$
5. $T(x,y) = (2y,2x)$

Los tres alumnos que dieron las respuestas 1 y 2 parecen atribuirle el tamaño del cuadrado imagen a los coeficientes que están *más cercanos* a 1, ya que sólo modificaron ésos. Uno de los dos alumnos que dieron la respuesta 1 dijo:

"para alterar la magnitud sin cambiar la dirección solamente se modifican el coeficiente de la "y" en la primer componente y el coeficiente de la "x" en la segunda."

Parece que usó el archivo para obtener la fórmula, realizando movimientos horizontales y verticales.

Dos alumnos dieron la respuesta tres y uno de ellos dio el siguiente argumento:

"La magnitud de x y y antes de modificarla era uno ya que el cuadrado era de lado 1, ahora después de la transformación la magnitud de x y de y cambió a 2 según los lados"

Parece que realizaron una mala conversión al registro algebraico, lo que los llevó a deducir que todos los coeficientes de la expresión algebraica debían ser iguales a 2, ya que en la transformación que tenía un cuadrado de lado uno como imagen, los coeficientes que aparecían eran iguales a 1.

La alumna que dio la respuesta 4 parece haber utilizado el teorema de Pitágoras, aunque no incluyó algunos detalles en su explicación, utilizó el hecho de que los parámetros de la expresión $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ pasan de cumplir $\sqrt{a^2+c^2}=1$ y $\sqrt{b^2+d^2}=1$ a cumplir $\sqrt{a^2+c^2}=2$ y $\sqrt{b^2+d^2}=2$, por lo que escogió los valores $\sqrt{3}$ 1 y -1 para los parámetros. Posiblemente intentó plantearse el problema gráfico y resolverlo algebraicamente, y que la forma de T le ayudó a encontrar las propiedades que señaló pero no a indagar patrones.

La respuesta 5, y posiblemente otras, parecen deberse a un detalle de la redacción. Ya que estrictamente hablando, no se les pidió que el cuadrado imagen tuviera alguna otra característica más que tener lados de longitud dos. Parece que se necesita una mayor experiencia para que pongan en juego los conceptos y relaciones gráfico-algebricas que están involucradas en este problema.

Problema 5

Este problema fue diseñado para que los estudiantes identificaran un patrón algebraico en las funciones que producen rotaciones a un cuadrado, pasando del registro gráfico al algebraico, tarea poco común en la enseñanza habitual.

8. Modifica T(A) y T(B) para encontrar dos transformaciones en las que la imagen del cuadrado sea una rotación del mismo cuadrado. Puedes presionar el botón [Mostrar círculo] para que aparezca en la gráfica un círculo unitario y la medida de un ángulo que te pueden ayudar. Anota aquí las transformaciones: a)________________________ b)________________________ 9. Propón una transformación que a tu juicio sea una rotación del cuadrado. __________________________ 10. Presiona el botón [Modificar fórmula] y reproduce en el archivo la transformación, arrastrando los deslizadores, para verificar si rotó el cuadrado. 11. ¿Cómo supones que deba ser la fórmula de una transformación que rota al cuadrado?

Tabla 3.24: Problema 5, segunda parte de la Actividad 4

Se esperaba que los alumnos propusieran funciones que fueran rotaciones o combinaciones de rotaciones y expansiones o contracciones y que observaran la siguientes relaciones entre los coeficientes de la expresión algebraica $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$.

1. *a = d*
2. *b = -c*

En las respuestas observamos que poco más de la mitad del grupo, 12 estudiantes, describieron estas propiedades y tres de ellos encontraron una de las siguientes características:

1. $\sqrt{a^2+b^2}=1$ y $\sqrt{c^2+d^2}=1$
2. $a = \cos\theta$ y $b = \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo de rotación.
3. $a<1$ y $b<1$

Sin embargo, se confundieron las rotaciones con otras cosas y las simetrías del cuadrado favorecieron la confusión. Aunque había colores que permitirían distinguir entre las diferentes transformaciones, la simetría parecía ser más importante; los aspectos gráficos globales se impusieron sobre los más específicos. Se observó en las respuestas que la mitad del grupo incluyó a las reflexiones o combinaciones de rotaciones y reflexiones en las TL que describieron como rotaciones. Esto se manifestó en las TL particulares que propusieron para la primer pregunta y en el hecho de que varios de ellos describieron la expresión algebraica de una rotación como $T(x,y) = (ax+by,\ bx - ay)$ y que tal expresión implica una reflexión sobre una recta que pasa por el origen. Esta situación pudo deberse, en parte, a que en la *vista inicial* del archivo los vectores *T(A)* y *T(B)* estaban ubicados de tal forma que era *más fácil* obtener una reflexión que una rotación al arrastrarlos hacia los ejes, como se muestra en la siguiente figura.

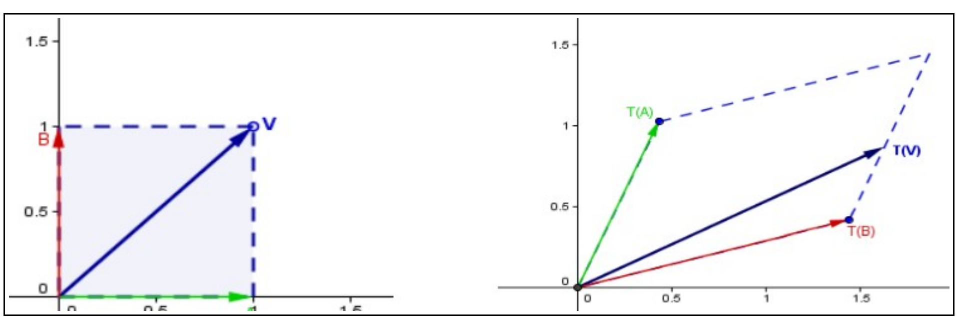


Figura 3.18: Ubicación inicial de los vectores T(A) y T(B)

Parte 3

Como ya se mencionó, esta parte no tuvo que ver con los efectos gráficos particulares de algunas transformaciones.

Problema 6

El ultimo problema de la actividad consistió en lo siguiente:

1. Arrastra solamente el vector T(A) y explica cómo cambian los parámetros *a*, *b*, *c* y *d*, en la expresión T(x,y)=(*a*x+*b*y, *c*x+*d*y), calcula además la imagen del vector (1,0) bajo esta transformación.
2. Arrastra solamente el vector T(B) y explica cómo cambian los parámetros *a*, *b*, *c* y *d*, en la expresión T(x,y)=(*a*x+*b*y, *c*x+*d*y). Calcula además la imagen del vector (0,1) bajo esta transformación.
3. Encuentre una matriz T de 2×2 tal que $T\cdot A=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $T\cdot B=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.
4. Encuentre una matriz T de 2×2 tal que $T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ dx+dy \end{pmatrix}$.

Tabla 3.25: Problema final de la Actividad 4

Con este problema se esperaba obtener la representación matricial de las TL y establecer una relación entre la imagen de una base bajo una TL y la representación algebraica y matricial de ésta. Para los primeros dos puntos se esperaba que los estudiantes contestaran que la manipulación de *T(A)* solo genera cambios en *a* y *c* y al arrastrar *T(B)* solo cambia *b* y *d*.

En la segunda parte se quería escribir de forma matricial las propiedades que se esperaba fueran observadas en lo anterior, para después tratar de obtener la expresión matricial de las TL.

Todos los alumnos encontraron las relaciones de dependencia entre las imágenes de los vectores *A* y *B* y los parámetros de la expresión general de la TL, excepto uno que sólo encontró que *a* depende de *T(A)* y *b* de *T(B)*. Así mismo, todos los estudiantes encontraron la matriz *T* que define a la transformación *T(x,y)=(ax+by, cx+dy)*, $T=\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$, de modo que no hubo complicaciones mayores en esta parte de la actividad.

Cierre de la actividad

El cierre de la actividad tuvo que ver con la suficiencia del conocimiento de la imagen de la base para conocer la transformación. Se analizó el hecho de que conocidos los vectores *T(A)* y *T(B)* se puede obtener la imagen de cualquier vector *V* sin tener la expresión de *T*, ya que el vector *V* se puede escribir como combinación lineal de los vectores *A* y *B*, digamos $V=\alpha A+\beta B$, y por las propiedades definitorias de las TL se tiene que $T(V) = \alpha T(A) + \beta T(B)$, lo que permite obtener la imagen del vector arbitrario *(x,y)*.

También se hizo notar que las imágenes de los vectores *A* y *B* definen una matriz que también representa a la transformación *T* y que esta representación da información diferente a las representaciones en otros registros.

3.2 OBSERVACIONES GENERALES SOBRE EL PILOTAJE

Se puede decir que el pilotaje se llevó a cabo como era deseado, la actitud de los estudiantes hacia las actividades fue positiva. Al finalizar la secuencia se les pidió a los estudiantes que anónimamente dieran sus opiniones acerca de la secuencia y señalaron varios aspectos positivos.

La selección de problemas pareció ser adecuada, durante todas las sesiones los alumnos mantuvieron su atención en la resolución de los problemas y ellos mismo describieron a las actividades como *interesantes.*

Dejando de lado los detalles técnicos, los ambientes dinámicos creados con GeoGebra también parecen haber funcionado como era esperado, los estudiantes no tuvieron dificultades mayores para manejar el software, algunos mencionaron que les pareció *muy intuitivo* y *fácil de usar* y la mayoría expresó su agrado porque las clases fueron *más visuales* que las clases *normales.*

Nos parece importante destacar que estos ambientes se utilizaron conforme al propósito para el cual fueron creados, los estudiantes basaron muchos de sus argumentos en su interacción con el software, algunos expresaron su agrado por *tener una forma de comprobar visualmente la teoría vista en clase.* Mientras que un par de estudiantes señalaron que tener las representaciones gráficas y algebraicas les facilitó la comprensión de las transformaciones lineales y que sintieron aprender más al poder analizar más cosas que en una *clase con pizarrón.*

Creemos que la estructura de las actividades también fue del agrado de los estudiantes, aunque era algo notorio que no estaban acostumbrados a obtener teoría a partir de la resolución de problemas, mantuvieron un buen ritmo de trabajo sin expresar quejas al respecto, incluso un estudiante comentó que le agradó esta manera de *aprender al revés.*

Aunque no hubo casos de estudiantes que sólo señalaran aspectos negativos sobre las actividades, sí realizaron algunas críticas al respecto.

Algunos alumnos hablaron sobre la dificultad de las primeras dos actividades, se esperaba que éstas no resultaran fáciles, debido a las razones que ya se han comentado: la naturaleza de las funciones a analizar, el enfoque de las actividades que prioriza el significado gráfico de los conceptos y la poca familiaridad de los estudiantes con este tipo de propuestas. También esperábamos que la sensación de dificultad disminuyera al ir avanzando en la secuencia, creemos que esto se cumplió y que se se reflejó en las opiniones de algunos alumnos y en el hecho de que el tipo de problemas de las primeras actividades, decidir si una función es una TL o no a partir de sus características gráficas, parece volverse rutinario y casi trivial dentro la Actividad 3.

Hubo algunas quejas acerca del desempeño del software. Para un par de estudiantes, debido al estado de las computadoras con las que trabajaron, la velocidad de respuesta del programa era demasiado lenta y esto les provocaba frustración. Un estudiante comentó que le resultaba muy difícil manejar los *deslizadores* con precisión. Aunque todos experimentaron fallos del archivo html de la Actividad 3, sólo una alumna se refirió a ellos al escribir su opinión y añadió que no fueron de mucha importancia ya que no se borraba la función que querían evaluar.

Creemos que la redacción de las hojas de trabajo puede mejorarse en algunas partes, esto se refleja en las opiniones de los estudiantes ya que a algunos alumnos les resultó difícil comprender lo que tenían que hacer en las actividades y creen que esto se debió a una deficiente redacción de las hojas de trabajo y falta de explicaciones en el transcurso de la secuencia.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

4.1 DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

La sección está dedicada a describir y analizar las dificultades de aprendizaje detectadas durante el diseño y la exploración de las actividades. Éstas han sido clasificadas en varios grupos según su naturaleza. Las primeras se relacionan con procesos cognitivos, como representación, objetivación, interpretación, etc. las segundas, son inherentes al concepto de transformación lineal y las terceras son "heredadas" de conceptos que se involucran en el aprendizaje de las TL.

4.1.1 LIMITACIONES DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Registro gráfico

Entre las dificultades relacionadas con la representación de objetos podemos analizar las siguientes, empezando por las que tienen que ver con las limitaciones del registro gráfico para representar objetos.

Por las reglas de formación para representar objetos en el registro gráfico, resulta conflictivo tratar de representar al vector cero, no se puede *graficar* una flecha de longitud nula. Esta situación podría suponer dificultades mayores al tratar de centrar el aprendizaje en el registro gráfico, como en nuestro caso, que podrían llevar a los estudiantes a negar la existencia de tal vector, o al menos dudar de ella. Para tratar de evitarlo, desarrollamos una representación para el vector cero, que mezcla el registro gráfico con el algebraico, se muestra en la gráfica el punto *(0,0)* acompañado por una *etiqueta* del registro algebraico, como *V=(0,0)*. En general, éste es el método utilizado para reducir las dificultades relacionadas con tal situación, aunque las respuestas de un par de estudiantes podrían reflejar que no se trata de una solución *infalible*. Es notorio cómo uno de estos estudiantes fue modificando su manera de referirse al vector cero a lo largo de la Actividad 1. En la primera parte de la Actividad 1, los estudiantes deben comparar las gráficas de un vector, un múltiplo de ese vector y de sus imágenes; al referirse a las gráficas obtenidas cuando se multiplica por cero, el alumno en cuestión produjo las siguientes expresiones:

1. No hay vector.
2. No hay vector, es el vector cero.
3. El vector es cero.
4. El vector cero.

Obsérvese cómo la descripción hecha del vector visto gráficamente, pasa de una situación inicial en la que aparenta afirmar que el vector cero no existe, a otra en la que identifica plenamente al vector cero como tal en la representación gráfica. En este caso, parece que la repetición de la tarea ayudó a mejorar la identificación del objeto, pero no fue el caso del segundo estudiante al que nos hemos referido. Este último se refirió a la representación obtenida al multiplicar un vector por el escalar cero, con expresiones como *"el vector se vuelve un punto en 0"*, y esta descripción no tuvo cambios a lo largo de toda la actividad.

Otro aspecto conflictivo atribuible a las limitaciones del registro gráfico, se observa al representar la igualdad de (al menos) dos vectores. Lo que en el registro algebraico se logra al escribir algo como $V=U$ en el gráfico se vuelve complicado al no poder *graficar* dos flechas de la misma longitud y con la misma dirección que sean fácilmente distinguibles, debido a que una coincide con la otra. Para tratar de reducir estas dificultades se recurre, tanto en los ambientes dinámicos como estáticos, al *artificio* de utilizar colores o grosores de línea distintos para las flechas; mientras que con representaciones dinámicas, como las usadas en este trabajo, se cuenta con herramientas adicionales de representación. Con las representaciones dinámicas se puede realizar una exploración gráfica en la que se observe un vector en las proximidades del otro; esto resulta similar a lo que se hace al intentar visualizar el cálculo de límites de funciones que no pueden ser evaluadas en el punto deseado. Así, la igualdad entre vectores podrá tener una representación previa en la cual los vectores son "casi iguales", el movimiento de un vector en las cercanías del otro permite deducir que al final, los dos vectores coinciden y por tanto son iguales. En las actividades exploradas, cuando aparecen vectores iguales representados gráficamente se han utilizado colores y grosores de línea distintos para representarlos, así como también se han aprovechado las ventajas ya mencionadas de las representaciones dinámicas (ver Figura 4.1). Posiblemente debido a lo anterior, los estudiantes no mostraron dificultades notorias para identificar igualdades entre vectores.

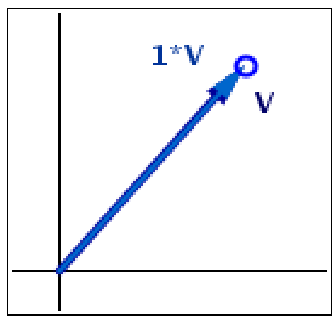


Figura 4.1: Representación gráfica de vectores iguales

Registro algebraico

De las dificultades de aprendizaje relacionadas con el uso del registro algebraico, las más fáciles de detectar son posiblemente las que tienen que ver con formar expresiones *coherentes* y la *lectura* de expresiones algebraicas. Durante la exploración de la secuencia, se observaron manifestaciones de ambas situaciones, principalmente al inicio del montaje, los estudiantes mostraron dificultades para utilizar las reglas de formación, produciendo expresiones como "*FV*". para referirse a la imagen del vector *V* bajo la función *F*. Tales expresiones pueden ser consideradas como poco problemáticas, mientras su significación sea "la imagen de *V* bajo *F*", el uso de representaciones mal formadas puede ocasionar problemas cuando su aparición implique una significación errónea, por ejemplo, cuando *FV* se confunde con la multiplicación de dos objetos.

En el pilotaje también hubo manifestaciones, muy ligadas a las anteriores, de dificultades asociadas a la lectura de las representaciones algebraicas. Sobresale un alumno, que en repetidas ocasiones mostró la necesidad de que alguien leyera por él las representaciones algebraicas, para después utilizar el resultado de esta conversión hacia la lengua natural. Por ejemplo, para la propiedad definitoria de las transformaciones lineales, escrita en el registro algebraico, "$T(kV)=kT(V)$" necesitó la conversión hacia la lengua natural: *"Si se multiplica un vector por un numero, su imagen es el múltiplo de la imagen del primero".* Aunque se trata de una expresión algebraica poco complicada, para su interpretación es necesaria la identificación de varias relaciones entre seis objetos: V, k, kV, $T(V)$, $T(kV)$, $kT(V)$.

Algunos problemas de formación o tratamiento probablemente surgen de una significación deficiente de los conceptos nuevos. En el estudio de las TL se pueden generar dificultades cuando no se ha identificado la naturaleza de éstas. En la secuencia se hace referencia a la imagen de un cuadrado bajo algunas funciones, este *abuso de notación* puede nublar la comprensión que se tenga de las TL como funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$. Se puede llegar a confundir qué tipo de objetos forman parte del dominio y el contradominio de las funciones, lo que genera expresiones como $T(V)+k$.

4.1.2 DIFICULTADES RELACIONADAS CON LA OPERACIÓN DE CONVERSIÓN

Como ya se ha mencionado, la representación de un objeto matemático en un registro particular no puede expresar todas las características de éste. Este hecho, que ha sido llamado "parcialidad de los registros", es una de las razones que vuelven a la actividad de conversión irreducible a un algoritmo, ya que genera una correspondencia no-biunívoca entre las representaciones de los objetos en varios registros. Esta situación puede provocar algunas dificultades de aprendizaje cuando se realiza el estudio de algún objeto matemático en diferentes registros, al realizar conversiones de un registro a otro, es probable que el significado de la representación a convertir no pueda ser expresado de manera similar y que la representación tenga que ser tratada antes de realizar la conversión.

Durante la exploración de la secuencia de actividades, se manifestaron algunas dificultades relacionadas con esto. La expresión del registro algebraico $T(kV)=kT(V)$ representa la igualdad de dos vectores, es decir, *una* relación entre dos objetos, objetos variables con sus propias formas de variación. Pero la conversión al registro gráfico de tal expresión no es congruente, no se pueden tener reglas precisas para realizar las conversiones. La representación de la relación de igualdad de dos vectores se necesita interpretar como dos relaciones antes de ser convertida al registro gráfico, igualdad de magnitud y dirección.

Algunos estudiantes que no realizaron la identificación de la propiedad algebraica con las dos propiedades gráficas, que representan la misma relación entre los dos objetos, tuvieron dificultades al discriminar las transformaciones lineales de las no lineales. Mientras que la mayoría de los alumnos que participaron en el pilotaje, pudieron establecer criterios de suficiencia para clasificar funciones como no lineales, los alumnos que no pudieron realizar la conversión correcta de la expresión $T(kV)=kT(V)$, tendieron a utilizar los criterios de conservación de la colinealidad o proporcionalidad en vectores que el concepto no considera.

Más precisamente, los estudiantes aislaron las propiedades gráficas de colinealidad y proporcionalidad, y tomaron sólo una de ellas como la necesaria para las transformaciones lineales. Así, un grupo de cinco alumnos analizó únicamente la conservación de la colinealidad para la función G_4 de la Actividad 2, por lo que afirmaron que la función era una TL, lo cual es evidentemente falso al analizar la conservación de la proporcionalidad. Por otro lado, una alumna descartó una función que en efecto era TL, debido a que ella interpretó de manera errónea la conservación de la proporcionalidad, buscando que se cumpliera para cualesquiera dos vectores y sus imágenes, lo que se aprecia en sus argumentos, como:

"...el vector $G_5(V)$ no siempre crece cuando V lo hace"

Por otro lado, durante la Actividad 4 se observaron cuatro estudiantes con dificultades para realizar las actividades de conversión del registro gráfico al algebraico. En el resto de este párrafo se hará referencia solamente a las respuestas de dos de ellos. En la parte de la actividad en la que se solicitó un tratamiento algebraico que permita aumentar la longitud de los lados de un cuadrado al doble, se encuentra implícita la tarea de realizar la conversión del efecto gráfico deseado al registro algebraico. Los estudiantes debieron proponer una expresión algebraica, primero, y después verificar si la expresión propuesta en efecto duplica la longitud de los lados del cuadrado. Los estudiantes aquí mencionados no encontraron una regla de conversión que los condujera a la expresión algebraica y entonces recurrieron a la manipulación gráfica tratando de aproximarse en el contradominio a un cuadrado de lado dos, estos intentos revelan que ante la imposibilidad de encontrar la expresión algebraica solicitada, los estudiantes han transferido al software la responsabilidad de la conversión gráfico-algebraica; pero sus dificultades para convertir la situación gráfica a la algebraica permanecen.

4.1.3 DIFICULTADES HEREDADAS

Si tenemos una concepción constructivista del aprendizaje y tomamos en cuenta los procesos de *acomodación* que se llevan a cabo al construir conocimientos nuevos, es natural que los obstáculos de aprendizaje que aparecen en el estudio de algún concepto matemático se puedan manifestar al utilizarlo en el aprendizaje de un segundo concepto. En la exploración de la secuencia observamos varias manifestaciones de dificultades de aprendizaje relacionadas con conceptos que se consideran previos al estudio de las TL.

Función

El primer concepto que identificamos como conflictivo es el de *función,* como era de esperarse. Las dificultades relacionadas con el concepto de función que se observaron fueron las siguientes.

En las tareas realizadas por los estudiantes hay evidencias de las dificultades que tienen para tratar con funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$. Se confunde la naturaleza de lo representado por "*T(V)*", en algunas ocasiones se interpreta como la función *T* y en otros como la imagen del vector *V*. Algunas manifestaciones aisladas de tal confusión pueden pasar desapercibidas, pero en otros casos llevan a contradicciones notorias como el siguiente:

"La relación entre *T(V)* y *T(kV)* parece ser la misma que hay entre *V* y *kV*
(aunque *V* sea un vector y *T(V)* una función)"

En la expresión anterior, al comparar los pares *T(V)|T(kV)* y *V|kV*, el estudiante implícitamente les considera de la misma naturaleza, para después decir de manera explícita que son distintos.

Otra situación relacionada es que algunos estudiantes al interpretar la representación de la imagen de un vector no le asocian la misma naturaleza de vector, es decir, para ellos la imagen de un vector es *algo*, pero no es un vector. Esta significación deficiente de la imagen de un vector dificulta, al menos, las comparaciones entre vectores y sus imágenes, pues los estudiantes no pueden comparar objetos de distinta naturaleza.

Linealidad

El concepto de linealidad no es nuevo para los alumnos de un curso donde se estudien las transformaciones lineales, han tenido contacto previamente con él, al estudiar la ecuación de una recta y sus representaciones gráficas, sistemas de ecuaciones lineales y algunos temas de lo que se conoce como pre-cálculo. Aunque los significados comparten algunas características, no son exactamente los mismos cuando esta noción se usa en el contexto del Álgebra Lineal. Por lo tanto, los conocimientos que los alumnos adquieren previamente del concepto de linealidad no pueden ser usados mecánicamente en el contexto de las TL.

La linealidad estudiada en los cursos previos al Álgebra Lineal, en las carreras de ciencias e ingeniería, incluye a las funciones del tipo $f(x)=ax+c$, las cuales no son transformaciones lineales, pero los estudiantes las identifican como "funciones lineales" lo que genera un conflicto al tener una expresión que a su juicio, al mismo tiempo es y no es lineal. La dificultad aquí referida se manifestó de diferentes maneras durante el montaje de la secuencia, se ilustran estas manifestaciones en los siguientes casos:

1. Cuando se solicitó (tarea sobre la Actividad 1) una función T que cumpliera con la condición $T(kV)=kT(V)$; un par de estudiantes propusieron funciones de la forma $T(x,y)=(x+a, y+b)$ y basados en tratamientos algebraicos incorrectos concluyeron que se cumplía con la propiedad solicitada. Uno de ellos, por ejemplo, ofreció como respuesta la función $T(x, y)=(x+2, y-3)$ y presentó como argumento que la condición se cumplía para $k=2$, puesto que: $T(2(x,y))=(2(x+2), 2(y-3))$. Lo más significativo de este caso no son las deficiencias en el tratamiento algebraico, sino la suposición de que la función elegida cumpliría con la condición deseada porque se trata de una *función lineal* ya que sus componentes tienen la forma $f(x)=ax+b$.

2. En la Actividad 3, al solicitar a los alumnos la expresión algebraica de una función para la cual un cuadrado tuviera como imagen a un rectángulo que no pasa por el origen (ver Figura 4.2), un estudiante propuso la función "$(2x+3, y)$". Esta función cumple la propiedad solicitada, pero al cuestionar al estudiante sobre la linealidad de la función, éste afirmó incorrectamente que se trataba de una TL y en su argumento algebraico se contradijo al demostrar que la imagen del vector cero es distinta de cero, sin embargo, no cambió su respuesta ni dio explicaciones al respecto. Parece que el estudiante está convencido de que la función es una TL desde el principio, y las contradicciones pasan desapercibida por él.

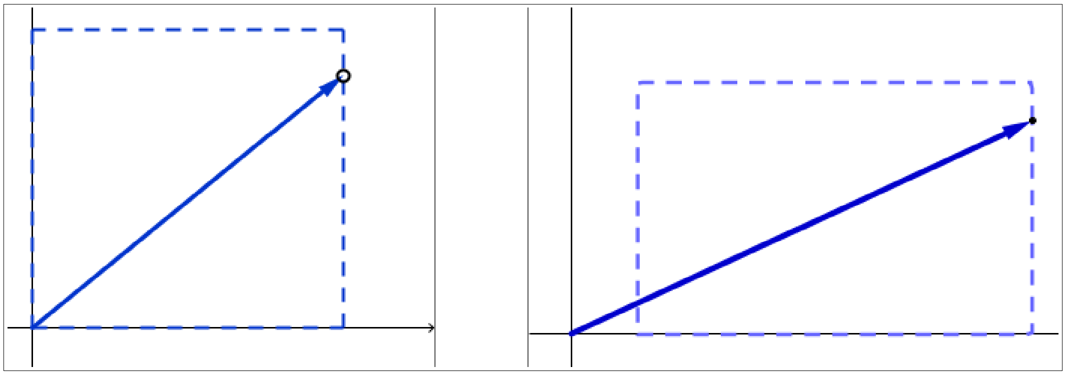


Figura 4.2: Rectángulo como imagen del cuadrado

3. En la misma situación del caso anterior, otro estudiante propuso la función "*(4x+2,2y)*" y también afirmó que se trataba de una transformación lineal. En este caso la confusión entre las diferentes definiciones de linealidad se hace notable en el argumento ofrecido para justificar que se trataba de una TL: "[la expresión algebraica] es lineal de primer grado". El argumento que parece tautológico (*es lineal porque es lineal*), es el ejemplo más ilustrativo de la confusión entre los distintos significados de linealidad y los conflictos que produce su utilización mecánica.

4. Todavía en la Actividad 3 pueden observarse manifestaciones de esta dificultad, éste fue el caso de un estudiante que propuso la función $T(x,y)=(2x+1,2y+3)$ afirmando que se trataba de una TL debido a que "*la función es lineal de primer grado".* Otro caso fue el de un estudiante que, en la última tarea de la Actividad 3, propuso como fórmula general para las transformaciones lineales la expresión $T(x,y)=(ax+b,cx+d)$; mostrando que a estas alturas de la secuencia no ha logrado separar los distintos significados de linealidad. Es probable que esta dificultad persista hasta el final de la secuencia, pero en la Actividad 4 no se ha podido detectar porque el formato no les permite introducir traslaciones.

Cabe mencionar que las dificultades relacionadas con la linealidad favorecen la inclusión de las traslaciones como transformaciones lineales, al proveer a los estudiantes de argumentos algebraicos que sin importar que sean incorrectos se pueden añadir a las propiedades gráficas de tales funciones como ser parte de las transformaciones geométricas simples.

Propiedades gráficas de vectores

Al ser poco comunes los estudios gráficos de objetos matemáticos, es natural que los alumnos traten de relacionar las nuevas representaciones gráficas con las que ya conocían, de sus cursos de geometría o física. En algunos casos tales practicas pueden llegar a generar conflictos al aplicar esas nociones a los nuevos conceptos, como en los siguientes dos ejemplos.

En geometría euclidiana se estudia la *colinealidad*, y en ese contexto tres puntos son colineales si están contenidos por una misma recta, esta caracterización puede provocar que los estudiantes identifiquen erróneamente como colineales a ciertas configuraciones de vectores. Específicamente, pueden confundir vectores colineales con vectores cuyos extremos son puntos colineales, pero de esta configuración sólo puede inferirse que las diferencias de los vectores son colineales (ver Figura 4.3).

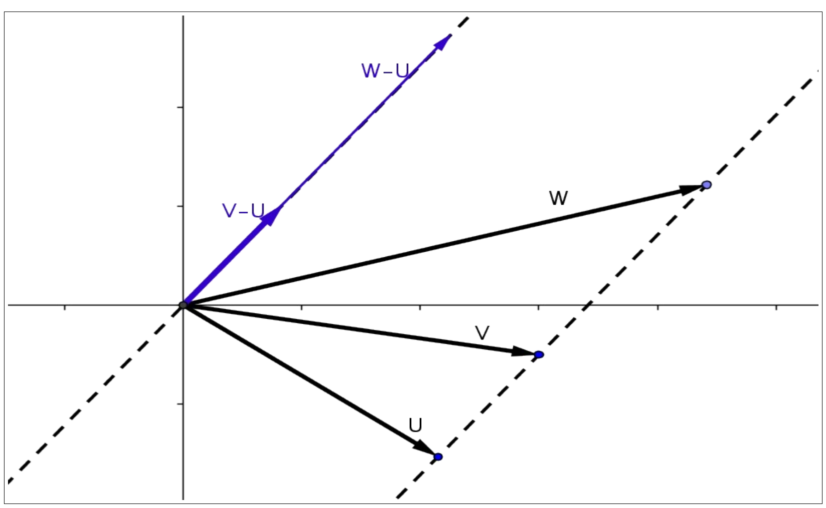


Figura 4.3: Tres vectores cuyos extremos son puntos colineales.

En la exploración de la secuencia se detectaron dificultades para identificar vectores colineales. En varias ocasiones los estudiantes utilizaron de manera equivocada criterios de linealidad que sólo son validos con vectores colineales, como en los siguientes ejemplos:

1. En la Actividad 2, los estudiantes tienen que determinar si una función que produce el siguiente efecto gráfico es una transformación lineal:

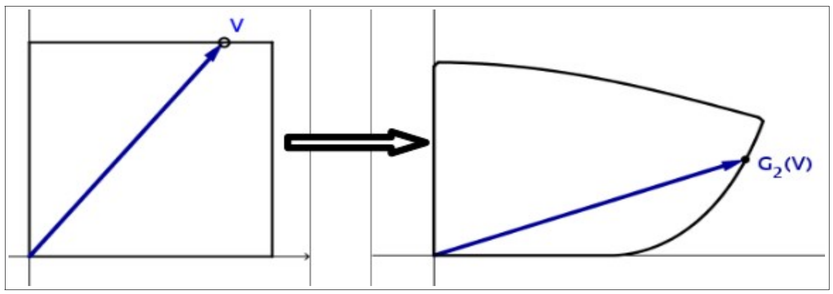


Figura 4.4: Función G_2 de la Actividad 2

Varios estudiantes llegaron a la conclusión correcta de que la función no es una TL, a partir de un razonamiento incorrecto. Su argumento se basó en que la función no cumple la propiedad "$G_2(kV)=kG_2(V)$" debido a que las imágenes de vectores colineales no son colineales, refiriéndose a los vectores del cuadrado de la forma *(t,1),* pero evidentemente estos vectores no son colineales.

2. Por otro lado, al analizar la única transformación lineal de la Actividad 2 (denotada como G_5), una de las alumnas llego a la conclusión de que la transformación no era lineal ya que: *"...el vector $G_5(V)$ no siempre crece cuando V lo hace"*. Ella aplica el criterio de que las transformaciones lineales deben preservar la colinealidad y la "proporcionalidad" entre vectores colineales, que es un criterio correcto pero lo aplica a vectores de la forma *(1,t)* que evidentemente no son colineales (ver Figura 4.5).

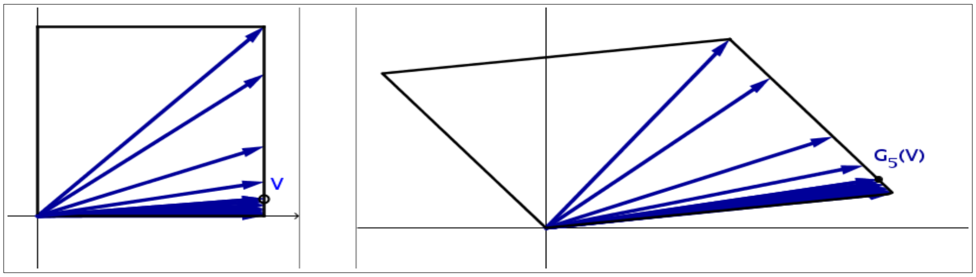


Figura 4.5: Función G_5 de la Actividad 2

3. De manera semejante al caso anterior, en la Actividad 3 un estudiante afirmó que la función *T(x,y)=(4x+4y, 2x)* no es una transformación lineal, debido a que "*la proporción con que aumentan los vectores imagen no es la misma".* El argumento es similar al del caso anterior y ambos estudiantes parecen haberlo utilizado solamente una vez, según sus respuestas.

Otra dificultad que está relacionada con las representaciones gráficas es la adaptación forzada de la relación de orden de los números reales a los vectores de $\boldsymbol{R}^2$. Más precisamente la caracterización gráfica de tal relación, en la cual, los números reales son representados por una recta y los puntos que se encuentren a la derecha o izquierda del cero son positivos o negativos, respectivamente. La adaptación incorrecta consiste en dividir el plano con una recta (o eje) y llamar a los vectores positivos o negativos según el semiplano en el que se encuentren. A pesar de que esto fue discutido en el transcurso de la actividad, se mantuvieron algunas manifestaciones en las expresiones que uno de los estudiantes utilizó para describir el comportamiento de vectores, por ejemplo las siguientes:

- "El vector *T(0·V)* se vuelve positivo". Refiriéndose a que se encuentra en el semiplano superior.
- "T*(1·V)* es negativo". Refiriéndose a que se encuentra en el semiplano inferior.
- "El vector tiene la misma magnitud pero signo contrario". Refiriéndose a que se encuentra en el semiplano opuesto.

Aunque se pueden definir relaciones de orden, como $(x,y)<(r,s)$ si $(x<r)$ o $(x=r \wedge y<s)$, evidentemente no se está utilizando una relación de orden de este tipo, solo una adaptación deficiente de la relación definida en los números reales, que únicamente permite comparar algunos vectores.

4.1.4 DIFICULTADES RELACIONADAS CON EL SOFTWARE

En la secuencia diseñada, GeoGebra realiza la mayoría de los procesos de representación y algunas conversiones, además de establecer relaciones entre los objetos que se representan, en particular las relaciones funcionales. Al observar la potencia y precisión que el software puede alcanzar, es natural que el usuario confíe en la certeza de la información que el software le ofrece y subestime las limitaciones técnicas que pueden generar información falsa o incompleta. De los resultados del pilotaje se puede observar que los estudiantes pueden llegar a confiar demasiado en el software, lo que genera dificultades como las siguientes.

Cuando las propiedades gráficas se vuelven evidentes para el estudiante, las argumentaciones se vuelven innecesarias para él. En el pilotaje, es notorio un cambio en la forma de los argumentos dados para comprobar si una función es TL, pasando de argumentaciones más o menos elaboradas sobre cada una de las propiedades definitorias, observables en las tareas de la Actividad 1, hasta llegar a expresiones simples como "cumple las tres propiedades", manifestadas en las respuestas de la Actividad 2 y las subsiguientes. La mayor familiaridad con los objetos y sus representaciones, lograda conforme avanzan las actividades, parecieran conducir a una identificación más fácil de las propiedades hasta el punto en que se tornan evidentes e inhiben cada vez más las justificaciones. Sin embargo, un análisis poco detallado de las representaciones puede llevar a malinterpretaciones o a pasar por alto algunos errores técnicos.

Por ejemplo, en el ambiente dinámico de la Actividad 2, se presentó un error técnico que produjo que no apareciera la etiqueta del vector cero y se graficara una punta de flecha (ver Figura 4.6) debido al redondeo de cifras que el software realiza en los cálculos. Debido a esto, algunos estudiantes usaron como argumento que la imagen del vector cero era distinta de cero para descartar a la función G_4 como TL. Aunque en efecto no se trataba de una TL, los estudiantes usaron un argumento incorrecto para descartarla y no tuvieron la necesidad de analizar el incumplimiento de otras propiedades, en este caso el hecho general de que *T(kV)* es distinto de *kT(V)*.

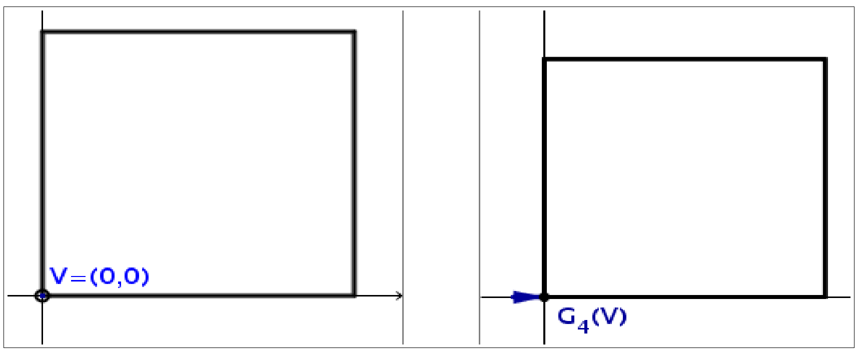


Figura 4.6: Error que provoca que no aparezca la etiqueta del vector cero

Otra dificultad relacionada con la potencia de las representaciones dinámicas es la que se manifestó cuando varios de los estudiantes utilizaron las propiedades que tienen las TL de *transformar* segmentos de recta a segmentos de recta, antes de haber sido mencionado por el profesor o en alguna de las actividades. Parecen estar convencidos de la propiedad al realizar una especie de *inducción empírica*, al observar la forma de las imágenes del cuadrado bajo las transformaciones lineales que habían estudiado hasta entonces. Aunque están convencidos de que la propiedad es cierta, la certeza no proviene de un análisis formal ni riguroso sino de la manipulación del software. Cuando en uno de los discursos de cierre, el profesor intentó mostrar la validez de esta propiedad, algunos estudiantes mostraron poco interés, posiblemente debido a que su interacción con el software los había convencido de que la propiedad era indiscutiblemente cierta.

4.2 POSIBLES MODIFICACIONES AL DISEÑO

Tomando en cuenta el desempeño de los estudiantes en el pilotaje y las dificultades de aprendizaje detectadas, consideramos que el diseño de la secuencia se puede mejorar en varios aspectos, por ejemplo: modificar preguntas, corregir errores técnicos o añadir complementos para las actividades.

4.2.1 MODIFICACIONES PUNTUALES

Se observó que el inicio de la Actividad 1 resultó problemático para la mayoría de los estudiantes del pilotaje, consideramos que esto se debió a que la primer función a analizar no es una TL y por lo tanto no es *fácil* analizar su comportamiento. Creemos que se pueden reducir las dificultades cambiando la función por otra que tenga un comportamiento gráfico más *predecible*, posiblemente una TL, o remover la tabla que se utiliza para comparar los vectores $T(V)$ y $T(kV)$ y preguntar directamente sobre el cumplimiento de la igualdad $T(kV)=kT(V)$.

De manera similar, la última tabla de la Actividad 1 no dio los resultados esperados. Se esperaba que la tabla sirviera para distinguir entre la única TL de la actividad y las demás funciones, al enlistar las propiedades que cada una cumple, pero esto no sucedió. Para obtener el resultado deseado podría utilizarse una tabla con una lista de propiedades ya escritas, en donde los estudiantes puedan anotar las funciones que cumplen cada propiedad. La nueva versión de la tabla se vería como en la figura siguiente, en la que se han incluido las respuestas esperadas.

Propiedades	Funciones que cumplen cada propiedad
Las imágenes de vectores colineales son colineales.	F_2, F_3 y F_4
La proporción entre dos vectores colineales es la misma que la de sus imágenes.	F_2 y F_3
La imagen de la suma de dos vectores es igual a la suma de las imágenes de estos.	F_2
La imagen del vector cero es el vector cero	F_2, F_3 y F_4

Tabla 4.1: Nueva versión de la tabla final de la Actividad 1.

Como puede verse en las respuestas esperadas, la única función que cumple con todas las propiedades es la transformación lineal F_2. Se esperaba que las propiedades identificadas en F_2 facilitaran la definición de TL al final de la actividad.

Errores técnicos en los ambientes dinámicos

Aunque estos errores técnicos no generaron dificultades mayores, algunos de ellos demoraron la realización de la actividades. El más visible está relacionado con la definición de la función G_4 de la Actividad 2, que provoca un error al graficar la imagen del vector cero. Este problema puede ser resuelto redefiniendo la función *por partes,* de manera que la imagen del vector cero sea en efecto el vector cero, o cambiando la función por otra cuyo comportamiento gráfico responda a los mismos propósitos y que al ser evaluada en cero dé exactamente cero, por ejemplo:

$$G_4(x, y)=(x^2, y^3).$$

Para el ambiente de la Actividad 3, el problema que provoca que en ocasiones no se evalúe correctamente la función introducida tuvo consecuencias menores, sin embargo, resolverlo podría requerir conocimientos de programación avanzados por lo que de momento no se puede corregir. Cabe mencionar que la falla pudo haber empeorado con la inclusión de la herramienta que colorea trayectorias (ver Figura 4.7), esta herramienta se encuentra disponible en el ambiente de la Actividad 2 y fue solicitada por algunos estudiantes durante el desarrollo de la Actividad 3.

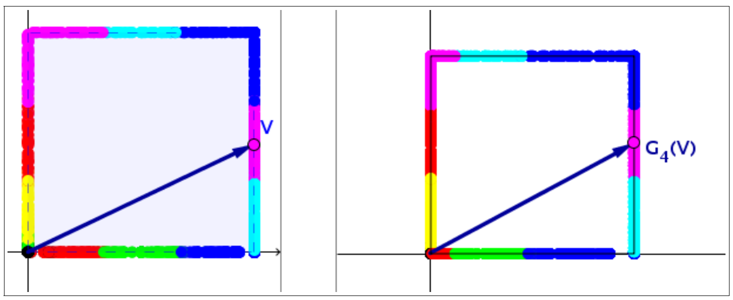


Figura 4.7:Imagen de un vector del mismo color que su pre-imagen.

A pesar de que el error descrito aquí parece técnicamente complicado, fue posible mantenerlo controlado durante el desarrollo de la actividad. La solución técnica definitiva estaría fuera del alcance de este trabajo pero se esperaría que los programadores de GeoGebra y Java pudieran resolverlo en breve y que la solución encontrada pueda corregir el ambiente dinámico de la Actividad 3.

4.2.2 AGREGADOS PARA LAS ACTIVIDADES

En vista de que algunas dificultades de aprendizaje observadas en el pilotaje tienen manifestaciones más problemáticas que otras, sería conveniente incluir algunas tareas adicionales con el fin de que las dificultades tengan menores consecuencias.

Actividad 0

Como se ha visto, los estudiantes han tenido dificultades relacionadas con la representación gráfica de algunos conceptos que son prerrequisitos para la presente aproximación al estudio de las transformaciones lineales; tal es el caso de la colinealidad y de de las operaciones básicas entre vectores, o de la representación vectorial de un segmento de recta. Como una estrategia para atenuar estas dificultades, se propone una actividad preliminar a la secuencia, llamada aquí Actividad 0, en donde se discuten los conceptos mencionados.

Esta actividad preliminar tendría como propósito, además de reducir las dificultades observadas, la familiarización con el software de los estudiantes con menor experiencia en el uso de este tipo de herramientas. Se describen aquí las tareas y algunos elementos del diseño de esta Actividad 0, pero no se incluye su diseño completo.

La actividad podría empezar por analizar las diferencias entre vectores colineales y puntos colineales a partir de construcciones como la que se muestra en la Figura 4.8.

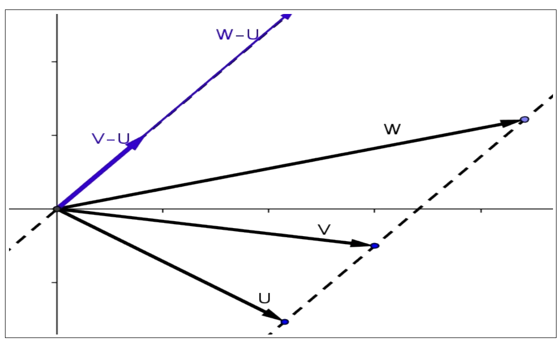


Figura 4.8: Diferencia entre vectores y puntos colineales.

Se podría continuar analizando los tratamientos gráficos de las operaciones de producto por un escalar y suma de vectores. El análisis del producto facilitaría la observación de las propiedades gráficas de colinealidad y proporcionalidad de vectores múltiplos; mientras que la suma de vectores podría facilitar la identificación de un vector como suma de otros, que es necesaria para la Actividad 1.

También sería conveniente añadir el análisis de la expresión algebraica de los vectores que describen un segmento de recta (ver Figura 4.9).

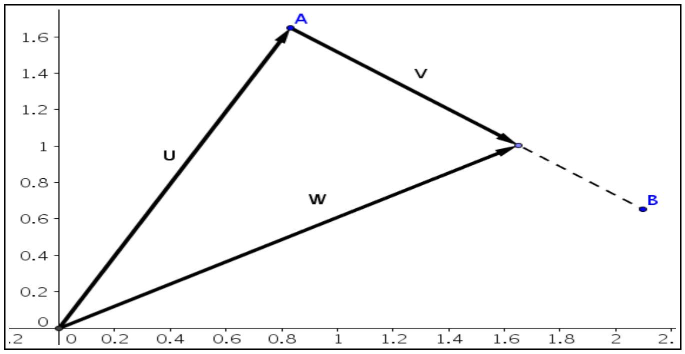


Figura 4.9: Vectores que describen un segmento de recta

El estudio de la expresión algebraica podría basarse en la construcción del vector W como la suma de los vectores U y V. Esto facilitaría el estudio de la propiedad que tienen las TL de *conservar* los segmentos de recta, que se aborda en el transcurso de la Actividad 2.

Como es de esperarse, la inclusión de una nueva actividad implicaría modificar los discursos de cierre de algunas de las actividades ya diseñadas, para que se realicen en mejores condiciones; por ejemplo, en la Actividad 2 no se necesitaría deducir la expresión vectorial de un segmento, ya que esto sería parte de la Actividad 0.

4.2.3 EXTENSIÓN DE LOS DISCURSOS DE CIERRE

Las dificultades de aprendizaje relacionadas más estrechamente con el concepto de TL podrían no ser suficientemente aminoradas con la inclusión de la Actividad 0, por esta razón, podría ser necesario añadir algunas tareas o modificar los cierres de las actividades ya diseñadas. Por ejemplo, para las dificultades que se manifiestan con la separación de las dos propiedades gráficas en las que se *traduce* la propiedad algebraica $T(kV)=kT(V)$, se pueden agregar tareas centradas en evidenciar por qué estas propiedades gráficas no pueden ser utilizadas por separado.

Adicionalmente, se podría modificar el cierre de la Actividad 1 o el inicio de la Actividad 2, con el propósito de enfatizar las diferencias entre las transformaciones lineales y las funciones lineales que se estudian en cursos anteriores. Por ejemplo, retomar las características de las funciones lineales para contrastarlas con las que poseen las TL, intentando establecer las similitudes y diferencias entre estas dos versiones de "funciones lineales".

4.3 CONCLUSIONES GENERALES

Para finalizar este trabajo, se presentan en este apartado las conclusiones que se tienen sobre el mismo. Se pretende que las conclusiones permitan al lector tener una visión general del trabajo realizado, el alcance de los objetivos, pertinencia y aplicabilidad de la secuencia diseñada, problemas abiertos y posibles líneas de investigación.

1. La motivación principal del trabajo era diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza de transformaciones lineales, se propuso un enfoque diferente para la enseñanza de TL debido a que el enfoque más usado, el formalista, privilegia el uso de lenguajes formales y eso puede provocar, entre otras cosas, que se acabe manipulando expresiones algebraicas vacías (símbolos que representan de manera confusa a los objetos). Pudimos observar manifestaciones de esto en el pilotaje de la secuencia, cuando los alumnos tuvieron dificultades para formar *correctamente* expresiones algebraicas de vectores, funciones entre vectores y relaciones entre ellos.

   Sin embargo, estas manifestaciones evidentes al inicio del desarrollo de la secuencia no se mostraron persistentes al finalizar el pilotaje. Esto confirma uno de los supuestos que guiaron el diseño de la secuencia: *"El registro de representación en el que se inicia el estudio de algún objeto matemático afecta el nivel de comprensión que se puede llegar a obtener de él".*

   Se observó, en el transcurso de la exploración que para cuando los estudiantes tuvieron necesidad de representar TL algebraicamente, ya contaban con un significado gráfico de los objetos, tal vez reducido pero igualmente útil, que evitó que las representaciones algebraicas fueran *vacías*.

Puede decirse que la mayoría de las dificultades relacionadas con la representación en el registro algebraico, fueron provocadas principalmente por la poca familiaridad con las reglas de formación de los *nuevos* objetos matemáticos que van apareciendo a lo largo de la secuencia. Al final del pilotaje, la mayoría de los estudiantes podían identificar a las TL y no lineales, distinguir entre ellas gráfica y algebraicamente, además de *convertir* propiedades y características de las TL de un registro a otro, en el contexto de las actividades planteadas.

2. En el diseño de la secuencia se trató de dar un papel importante a la conversión entre los registros algebraico y gráfico, considerando que ya se han hecho investigaciones que relacionan la capacidad de realizar conversiones entre ambos registros y el nivel de comprensión que se puede llegar a obtener en el estudio del Álgebra Lineal (Pavlopoulou, 1993). Por este motivo se decidió que la mayoría de las propiedades y características de las TL tuvieran *versiones* gráficas y algebraicas, y que los estudiantes resolvieran problemas que involucran a ambos registros, teniendo que realizar conversiones entre ellos. En general, los alumnos que participaron en el pilotaje parecen haber obtenido habilidades suficientes para realizar conversiones, aunque hubo casos en los que resultó más difícil de los esperado, como se puede observar en la sección de dificultades relacionadas con la conversión.

3. Considerando el desempeño de los estudiantes durante el pilotaje, se puede decir que en general los supuestos segundo y tercero en los que se basó el diseño de la secuencia son válidos, aunque las condiciones del pilotaje no permiten hacer afirmaciones concluyentes.

    - El registro gráfico permite la creación de un ambiente enriquecedor, en el que se pueden caracterizar las transformaciones lineales por sus propiedades gráficas.

- Los ambientes dinámicos diseñados con GeoGebra pueden facilitar a los estudiantes la observación y comprobación de las propiedades gráficas de una transformación lineal mediante la manipulación directa en pantalla, facilitando con ello la conversión gráfico-algebraica.

La potencia de GeoGebra permite representar de manera adecuada a los vectores y funciones entre vectores de $\boldsymbol{R}^2$. Aunque no se pudieron evitar algunas dificultades relacionadas con los significado de "función" y "linealidad", los estudiantes pudieron, en su mayoría, identificar relaciones funcionales entre los vectores representados con GeoGebra y realizar tratamientos gráficos y algebraicos a los vectores y funciones vectoriales a partir de las representaciones observadas en pantalla.

Al mismo tiempo, no se observaron manifestaciones claras de la "*paradoja cognitiva del conocimiento matemático*"; por lo menos en el sentido de asociar algún objeto con sólo una de sus representaciones, los estudiantes pudieron realizar tareas que involucraron la representación simultánea de objetos en el registro gráfico y algebraico sin complicaciones mayores.

4. Si bien se esperaba observar algunas dificultades de aprendizaje al llevar a cabo la prueba piloto de la secuencia, se presentaron algunas otras que no estaban previstas al realizar el diseño de la misma. Al revisar trabajos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las TL (ver por ejemplo, Uicab & Oktaç, 2006; Molina & Oktaç, 2007; Dreyfus, Hillel, & Sierpinska, 1999), es común encontrarse con la idea de que un enfoque gráfico para el aprendizaje de las TL resultaría menos problemático que el habitual enfoque formalista.

Después de poner en práctica la secuencia diseñada, es notable que la propuesta contenida en ella favorece la construcción de significados gráficos, mejorando las condiciones para el desarrollo del tema en el registro algebraico. Si bien es cierto que este ambiente permite mejorar las condiciones en las que los estudiantes enfrentan algunas dificultades de aprendizaje, también es cierto que otras dificultades aparecen; estas últimas están menos documentadas en virtud de que los diseños de enseñanza que usan el registro gráfico como registro de partida están menos difundidos.

5. Se observaron dificultades de distinta naturaleza y atribuibles a diferentes causas, las más notables fueron las relacionadas con: las limitaciones de los registros para realizar las tareas de representación y conversión, principalmente con el uso de las reglas de formación en el registro algebraico y las conversiones entre los registros gráfico y algebraico; dificultades *heredadas* de conceptos previos al estudio de las TL, siendo notorios los conceptos de función, linealidad y las propiedades gráficas de los vectores de $\boldsymbol{R}^2$. Otras dificultades han tenido que ver con el software utilizado, principalmente la que se refiere a la inhibición de las demostraciones por parte de los alumnos, y también aunque en menor medida las provocadas por errores técnicos.

   Para reducir el impacto que estas dificultades pudieran tener en futuras aplicaciones de la secuencia, se propusieron algunos cambios puntuales al diseño y a los ambientes dinámicos, pero lo más relevante es la sugerencia de una actividad preliminar, llamada aquí Actividad 0, que sirva para preparar a los estudiantes antes de realizar la secuencia de actividades y para aminorar las dificultades observadas en el pilotaje.

6. Sin subestimar las dificultades de aprendizaje observadas durante el montaje, es posible afirmar que la secuencia diseñada facilita la creación de significados gráficos y algebraicos de las transformaciones lineales y sus propiedades, favorece la realización de conversiones entre ambos registros y reduce las manifestaciones de dificultades de aprendizaje relacionadas con las TL. Por estos motivos, se concluye

que es pertinente utilizar la secuencia, en condiciones semejantes a las del pilotaje, con estudiantes de licenciatura o ingeniería que tengan a su disposición computadoras para trabajar individualmente o en equipos de 2 o 3 personas, coordinados por un profesor que se encargue de los procesos de institucionalización y en general de la presentación y cierre de las actividades.

7. Después de concluido este trabajo, quedan abiertos algunos problemas o líneas de investigación relacionadas. Por ejemplo: la continuación del diseño para abarcar otras propiedades y características de las TL (valores y vectores propios, puntos fijos, transformaciones de otras regiones del plano, uso del registro matricial y su articulación con los otros registros); y la detección de dificultades de aprendizaje, aunque aquí se señalan algunas, no se realizó una investigación formal de ellas debido a que esto sobrepasa los alcances del trabajo de tesis.

REFERENCIAS

Abánades, M., Botana, F., Escribano, J. & Tabera, L. (2009). Software matemático libre. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática E*spañola*, 12 (2), pp. 3-24.

Arcavi, A., & Hadas, N. (2004). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, pp. 25-45.

De Villiers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software. *Teaching & Learning Mathematics*, 4, pp. 46-52.

Dorier, J.-L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. *International Conference of Mathematicians.* Beijing: Higher Education Press.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. A Variety of Studies From 1987 Until 1995. En Dorier, J.-L. (Ed.) *On the Teaching of Linear Algebra.*

Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1999). Cabri based linear algebra: Transformations. *First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* pp. 209-221.

Duval, R. (1997). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pesnamiento. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, pp. 37-65.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.)*, Investigaciones en matemática educativa II*, pp. 173-201.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano : registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del valle. (Translated by Myriam Vega Restrepo).

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Recuperado de www.math.uncc.edu/~sae/dg3/duval.pdf

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), pp. 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Font. V (2001). Representation in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Educational Journal,* 14, pp. 1-35.

Healy, L., & Hoyles, C (2001). Software tools for geometrical problem solving potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235–256.

Hillel, J., & Sierpinska, A. (1994). On one persisten mistake in linear algebra. *18th International conference for the psychology of mathematics education,* pp. 65-72.

Hohenwarter, M. & Fuchs, K. (2005). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra . *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference.* Pecs, Hungaria.

Hohenwarter, M., & Hohenwarter, J. (2009). Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28* (2), pp. 135-146.

Kandunz, G. (2002). Macros and Modules in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 34(3), pp. 73-77.

Losada, R. (2007). GEOGEBRA: La eficiencia de la intuición. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 10 (1), pp. 223-239.

Molina, J. G., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, pp. 241-273.

Moreno, L., Hegedus, J. & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives . *Educational Studies in Mathematics*, 68 (2), pp. 99-111.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problema decisivo para el aprendizaje del Álgebra Lineal: la coordinación de registros de representación. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, pp. 67-93.

Preiner, J. (2008). Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra. Tesis de doctorado, University of Salzburg. Salzburgo, Austria.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 7-40.

Soto Munguía, J. L. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors. *2nd International Conference on theTeaching of Mathematics.* Creta, Grecia.

Soto Munguía, J. L. (s.f.). Explorando transformaciones lineales en el plano con Cabrí. Recuperado julio 28, 2009, de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/

Uicab, R., & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, pp. 459-490.

Von Glasersfeld, E. (2006). Radical Constructivism and Teaching. Recuperado de http://www.vonglasersfeld.com/

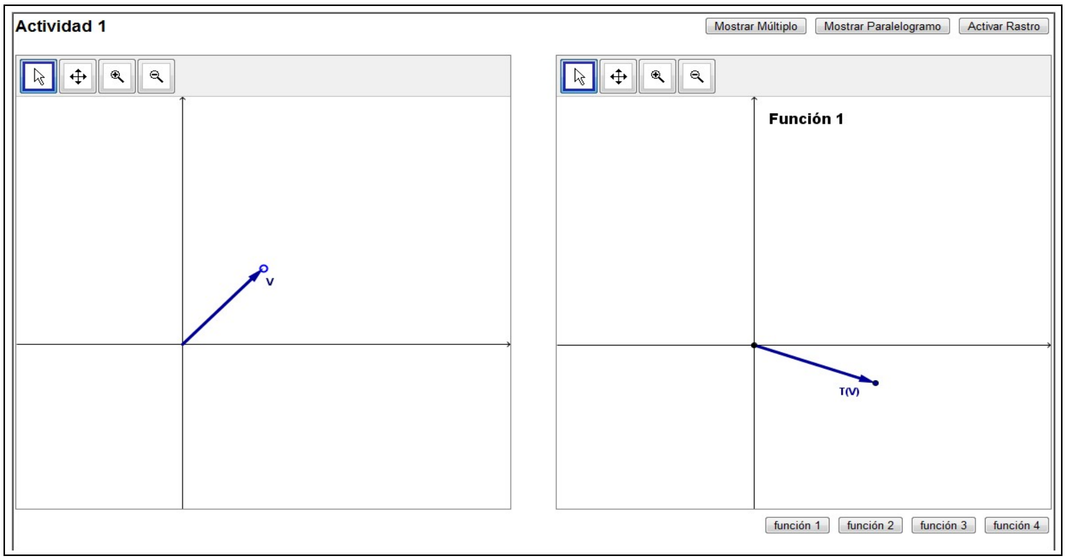
ANEXOS

ANEXO I. HOJAS DE TRABAJO

ACTIVIDAD 1

Sigue las instrucciones que se te dan y contesta con pluma las preguntas aquí enlistadas.

1. Abre el archivo actividad1.html. Verás en pantalla dos gráficas y algunos botones en la parte derecha.



2. Presiona el botón **[Mostrar Múltiplo]**, aparecerán un deslizador y el vector **k***V* en la gráfica de la izquierda y el vector **T(kV)** en la gráfica de la derecha.
3. Cambia el valor de **k** arrastrando el deslizador en la gráfica de la izquierda y llena la siguiente tabla.

Para estos valores de k:	Anota aquí cómo cambian las gráficas
0	
1	
-1	
2	
-2	
Escoge un número entre 5 y -5 Anótalo aquí:______	

4. Cuando varía el número *k*, *V* y k*V* se mantienen colineales. ¿También lo hacen *T(V)* y *T(kV)*?_______Usa los resultados de la tabla anterior para justificar tu respuesta.

5. Presiona el botón **[Función 2]**. Cambia el valor de **k** arrastrando el deslizador en la gráfica de la izquierda y llena la siguiente tabla.

Para estos valores de k:	Anota aquí cómo cambian las gráficas
0	
1	
-1	
2	
-2	
Escoge un número entre 5 y -5 Anótalo aquí:_____	

6. ¿Puedes encontrar alguna relación entre T(V) y T(kV)? Si es así descríbela aquí.

7. Presiona el botón **[Función 3]**. Cambia el valor de **k** arrastrando el deslizador en la gráfica de la derecha y llena la siguiente tabla.

Para estos valores de k:	Anota aquí cómo cambian las gráficas
0	
1	
-1	
2	
-2	
Escoge un número entre 5 y -5 Anótalo aquí:_____	

8. ¿Puedes encontrar alguna relación entre T(V) y T(kV)? Si es así descríbela aquí.

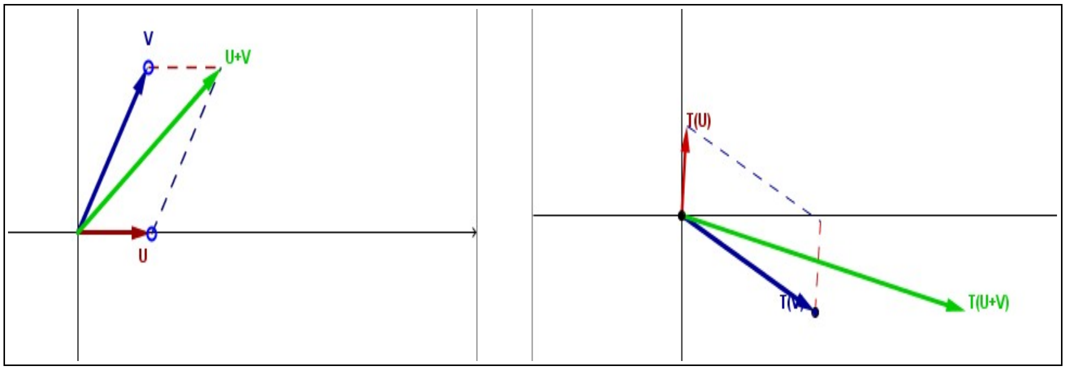
9. Presiona el botón **[Función 4]**. Cambia el valor de **k** arrastrando el deslizador en la gráfica de la derecha y llena la siguiente tabla.

Para estos valores de k:	Anota aquí cómo cambian las gráficas
0	
1	
-1	
2	
-2	
Escoge un número entre 5 y -5 Anótalo aquí:_____	

10. ¿Puedes encontrar alguna relación entre T(V) y T(kV)? Si es así descríbela aquí.

Ahora vamos a trabajar con dos vectores U y *V* simultáneamente, que se muestran al oprimir el botón **[Mostrar Paralelogramo]**.

11. Al presionar los botones **[Función1]** y **[Mostrar Paralelogramo]**, en la gráfica izquierda podrás ver los vectores U, *V* y el vector suma U+V, mientras en la gráfica derecha se mostrarán los vectores T(U), T(V) y T(U+V) como en la figura siguiente:



12. Haz variar la posición de los vectores U y *V* en la gráfica de la izquierda, y observa cómo cambia el vector T(U+V) en la gráfica de la derecha.
13. Compara los vectores T(U+V) y T(U)+T(V). Si consideras que hay alguna relación entre ellos descríbela.

14. Presiona el botón **[Función 2]**. Compara los vectores T(U+V) y T(U)+T(V). Si consideras que hay alguna relación entre ellos descríbela.

15. Presiona el botón **[Función 3]**. Compara los vectores T(U+V) y T(U)+T(V). Si consideras que hay alguna relación entre ellos descríbela.

16. Presiona el botón **[Función 4]**. Compara los vectores T(U+V) y T(U)+T(V). Si consideras que hay alguna relación entre ellos descríbela.

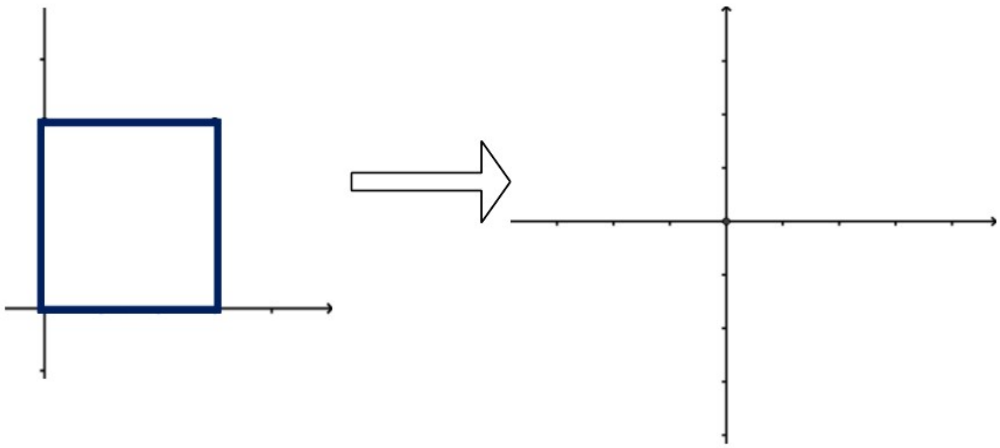
17. Llena la siguiente tabla

Relaciones que observaste en la gráfica de la derecha	Funciones en los que observaste estas relaciones
Ejemplo: La función está definida en todo el plano, todos los vectores tienen imagen.	1, 2, 3 y 4

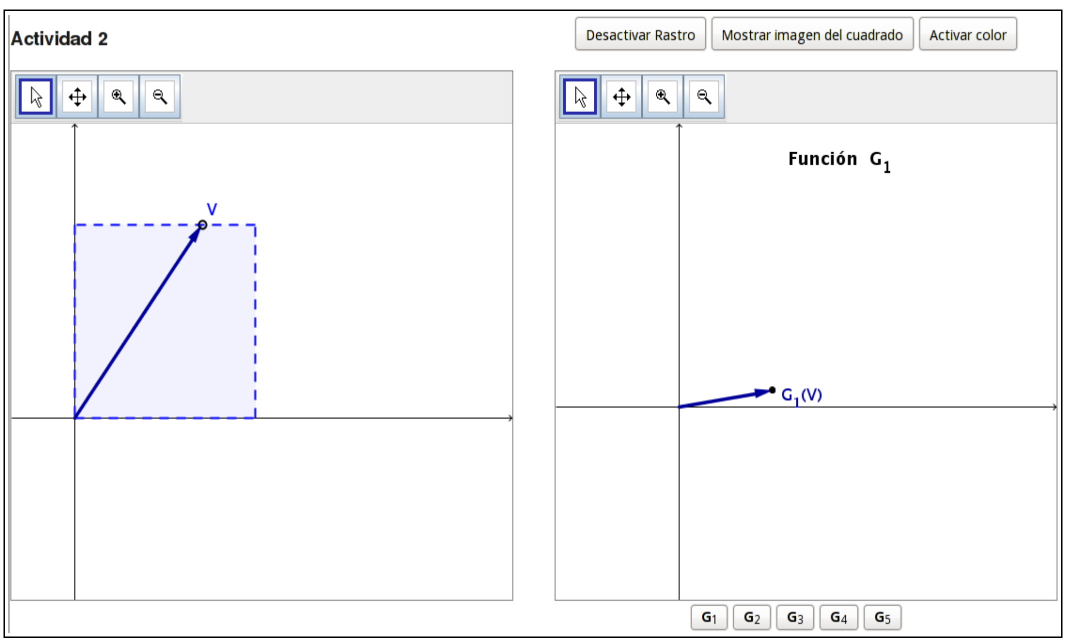
18. Describe la función que cumple más propiedades.

ACTIVIDAD 2

Dibuja en la parte derecha cómo consideras que sería la imagen de un cuadrado bajo una transformación lineal



El archivo *actividad2.html* muestra la gráfica de un vector que puedes mover sobre un cuadrado y la gráfica de su imagen bajo una cierta función. Los 5 botones de la parte inferior derecha sirven para cambiar de función.



Función G_1

1. Mueve el vector *V* sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función.
2. Mueve el vector V hasta hacerlo coincidir con el vector cero. ¿Cuál es el vector imagen del vector cero bajo esta función?

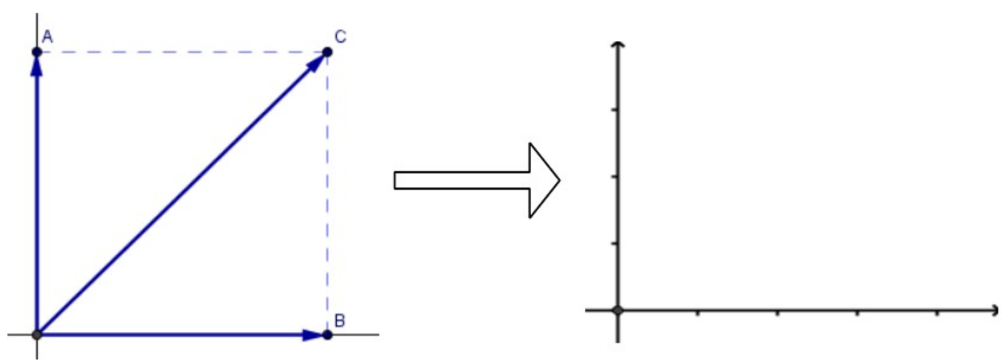
3. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? ______

Justifica tu respuesta

Función G_2

Presiona el botón [$\mathbf{G_2}$]

4. Dibuja en el espacio de abajo $\mathbf{G_2}$(A), $\mathbf{G_2}$(B) y $\mathbf{G_2}$(C).



5. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? ______

Justifica tu respuesta

Función G_3

6. Presiona el botón [$\mathbf{G_3}$]
7. Mueve el vector *V* sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función.

8. Ahora mueve el vector *V* solamente sobre el lado inferior del cuadrado. ¿Qué características tienen estos vectores V?

9. ¿Comparten esas características con sus imágenes?______
10. Ahora mueve el vector *V* solamente sobre el lado izquierdo del cuadrado. ¿Qué características tienen estos vectores V?

11. ¿Comparten esas características con sus imágenes?______
12. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? ______

Justifica tu respuesta

Función G_4

13. Presiona el botón [$\mathbf{G_4}$]. Puedes hacer que $\mathbf{G_4}$ (V) cambie de color igual que *V* presionando el botón [Activar color], para desactivar el efecto vuelve a presionar el botón.
14. Mueve el vector *V* sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función.

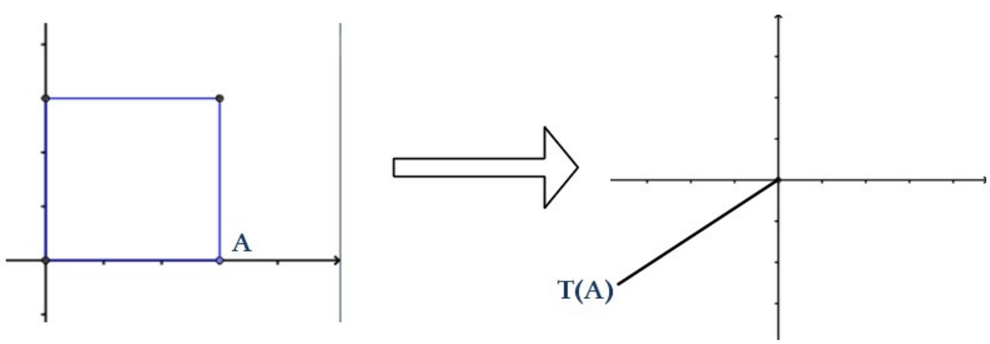
15. Mueve el vector V sobre el lado inferior del cuadrado y compara cómo cambia su tamaño y el de su imagen.
16. Mueve el vector V sobre el lado izquierdo del cuadrado y compara cómo cambia su tamaño y el de su imagen.
17. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? _____ Justifica tu respuesta

Función G_5

18. Presiona el botón [$\mathbf{G_5}$]
19. Mueve el vector V sobre el cuadrado de la izquierda y observa en la parte derecha la gráfica de su imagen bajo la función.
20. ¿Puedes decir si la función es una transformación lineal? _____ Justifica tu respuesta

Ejercicio final de la Actividad 2

Concluida la Actividad 2, resuelve el problema siguiente sin usar la computadora: En la gráfica siguiente se muestra un cuadrado y su imagen incompleta, bajo una transformación lineal T. Dibuja el resto de la imagen del cuadrado tomando en cuenta que la transformación T es lineal.

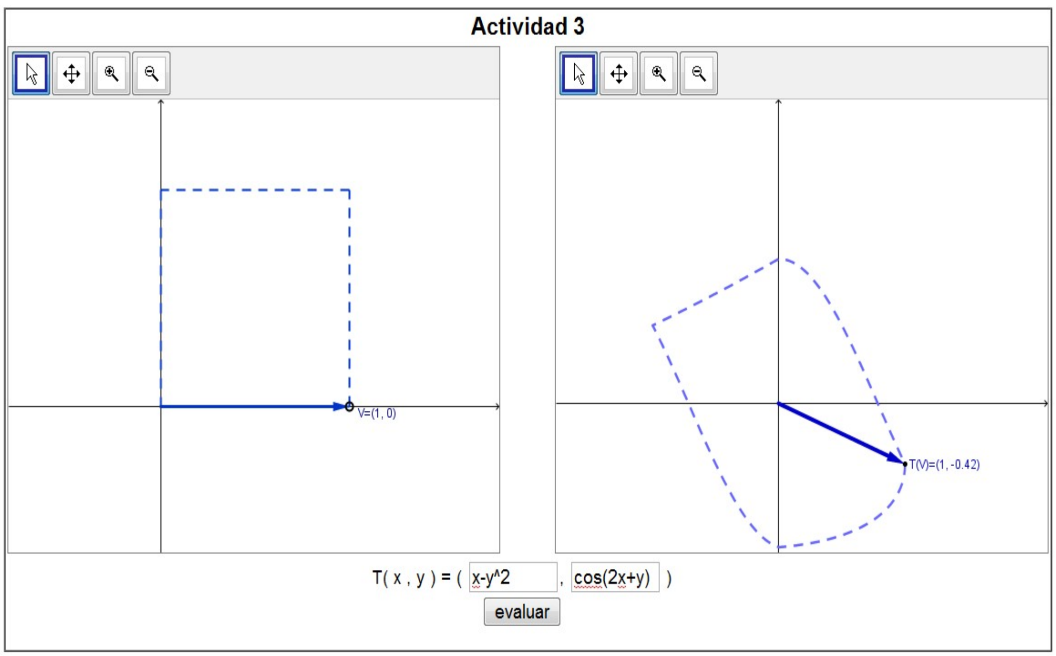


Compara la gráfica de la imagen que acabas de hacer con la que trazaste al principio de esta actividad. Explica a qué se deben las diferencias.

ACTIVIDAD 3

Una transformación del plano en el plano se puede escribir como una fórmula del tipo T(x , y) = (g(x,y) , h(x,y)) Un ejemplo de transformación podría ser: **$T(x , y) = (x-y^2 , \cos(2x+y))$**

El archivo *actividad3.html* te puede ayudar a graficar la imagen de un cuadrado bajo la transformación que elijas. Al abrirlo podrás observar en pantalla la gráfica de un vector que puedes mover sobre un cuadrado de lado 1, unos campos de entrada para escribir la fórmula de la transformación que desees y la gráfica de las imágenes del vector y el cuadrado bajo tal transformación, como se muestra a continuación.

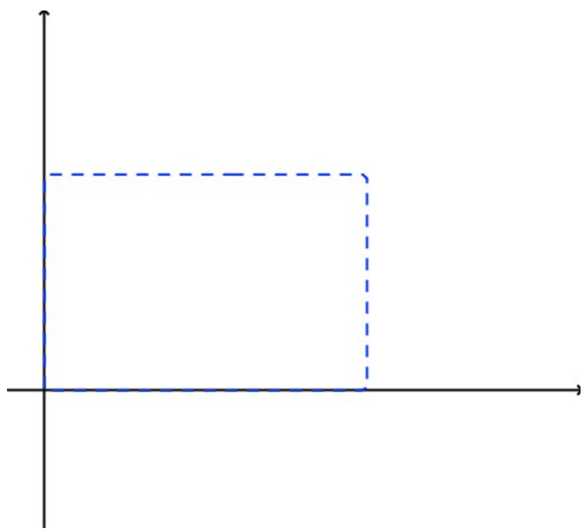


Usa el archivo para contestar lo siguiente

1. Encuentra una transformación para la cual la imagen del cuadrado, sea también un cuadrado. Anota aquí la fórmula ________________________________
   a. ¿La transformación que escogiste es lineal?_________
   b. Explica por qué, usando:
      i. El archivo con las gráficas

ii. La fórmula de la transformación.

2. Encuentra una transformación para la cual la imagen del cuadrado sea un rectángulo similar al siguiente

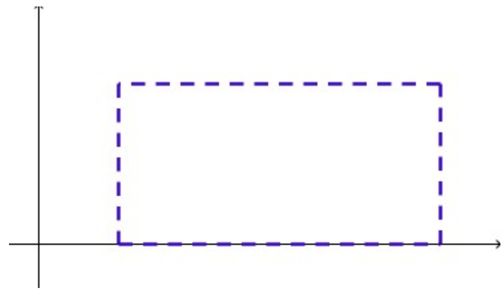


Anota aquí la fórmula ________________________________

a. ¿La transformación que escogiste es lineal?________
b. Explica por qué, usando:
    i. El archivo con las gráficas

    ii. La fórmula de la transformación.

3. Modifica la función que escogiste para que la imagen sea un rectángulo que no contenga al origen de coordenadas. Similar al siguiente



Anota aquí la fórmula ______________________________

a. ¿Es una transformación lineal?________
b. Explica por qué, usando:
    i. El archivo con las gráficas
    ii. La fórmula de la transformación.

4. Encuentra una transformación para la cual la imagen del cuadrado sea una figura parecida a la siguiente

Anota aquí la fórmula ______________________________

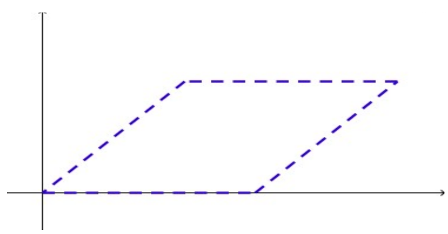
a. ¿Es una transformación lineal?________

b. Explica por qué, usando:

    i. El archivo con las gráficas

    ii. La fórmula de la transformación.

5. Encuentra una transformación con la que la imagen del cuadrado sea una figura parecida a la siguiente:



Anota aquí la fórmula ________________________________

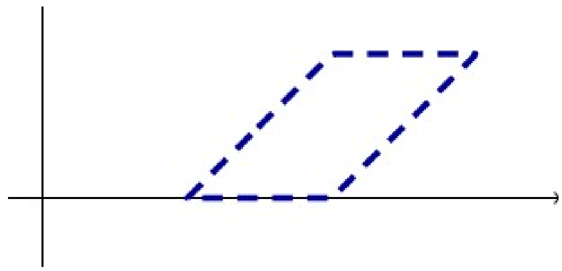
a. ¿Es una transformación lineal?________

b. Explica por qué, usando:

    i. El archivo con las gráficas

    ii. La fórmula de la transformación.

6. Modifica la función que escogiste para que la imagen sea un paralelogramo que no contenga al origen de coordenadas.

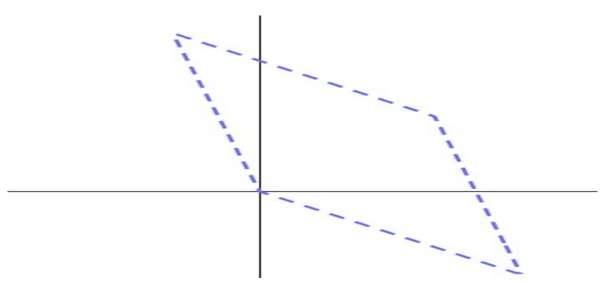


Anota aquí la fórmula ______________________________

a. ¿Es una transformación lineal?________
b. Explica por qué, usando:
    i. El archivo con las gráficas

    ii. La fórmula de la transformación.

7. Encuentra una transformación con la que la imagen del cuadrado sea una figura parecida a la siguiente:

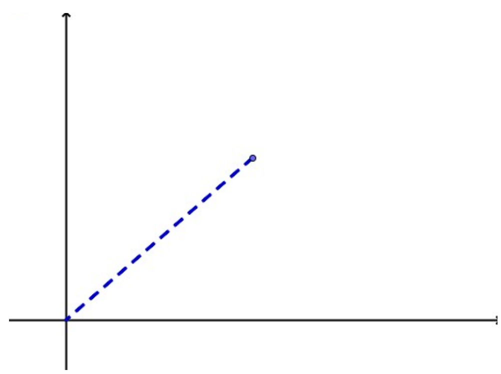


Anota aquí la fórmula ______________________________

a. ¿Es una transformación lineal?________
b. Explica por qué, usando:
   i. El archivo con las gráficas

   ii. La fórmula de la transformación.

8. Encuentra una transformación con la que la imagen del cuadrado sea una figura parecida a la siguiente



Anota aquí la fórmula ________________________________

a. ¿Es una transformación lineal?________
b. Explica por qué, usando:
   i. El archivo con las gráficas

ii. La fórmula de la transformación.

9. Si la fórmula general de las funciones cuadráticas es

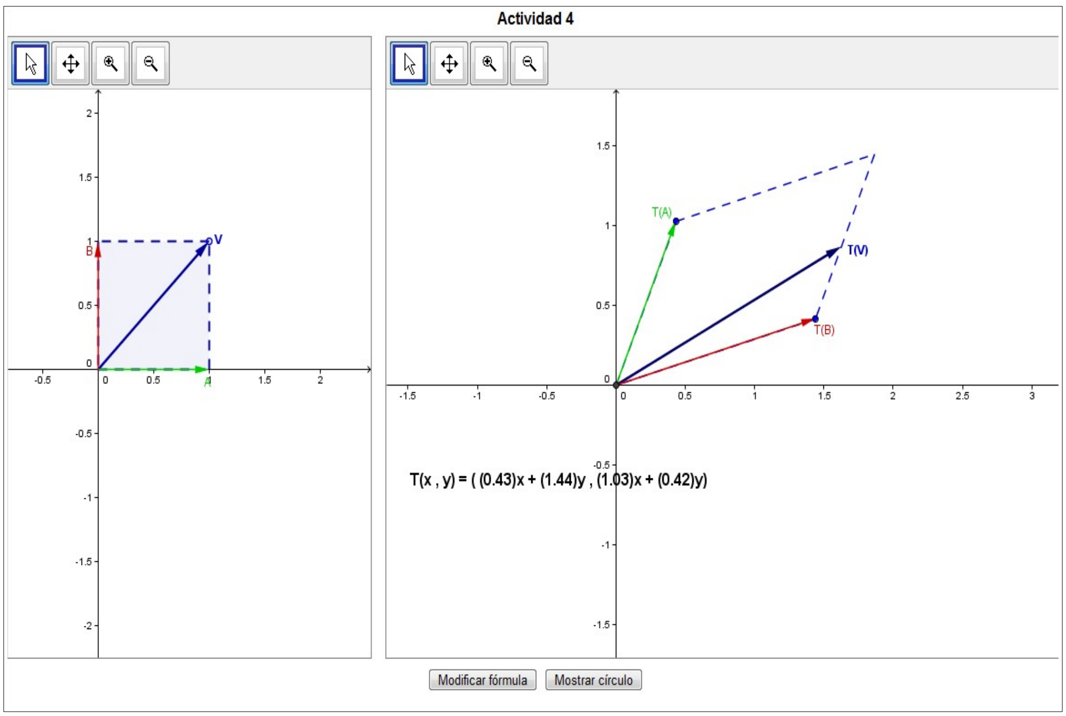
$$\mathbf{F(x) = a\, x^2 + b\, x + c}$$

siendo a, b y c los parámetros que determinan la forma de la parábola. Escribe cual consideras que es la fórmula general de las transformaciones lineales.

T(x , y) = (_________________ , _________________)

ACTIVIDAD 4

El archivo *actividad4.html* te permite analizar la transformación lineal que desees, en pantalla puedes observar la gráfica de un vector que puedes mover sobre un cuadrado y la gráfica de su imagen bajo la transformación que elijas. En la parte inferior se encuentra un botón para cambiar la forma en que se modifica la transformación lineal.



I. En las tareas siguientes puedes requerir de arrastrar T(A) y T(B) directamente en pantalla:

12. Modifica T(A) y T(B) para encontrar dos transformaciones en las que la imagen del cuadrado sea el mismo cuadrado. Anótalas aquí:
    a. ___________________________
    b. ___________________________
13. Utiliza las fórmulas de esas transformaciones para explicar porqué tienen al mismo cuadrado como imagen

14. Modifica T(A) y T(B) para encontrar dos transformaciones diferentes en las que la imagen del cuadrado sea un rectángulo con 2 lados sobre los ejes. Anótalas aquí:
    a. ___________________________
    b. ___________________________

15. Escribe una transformación lineal que mande al cuadrado en un rectángulo de base 1.1 y altura 2.4.

    ____

16. Escribe una transformación lineal que mande el cuadrado en un rectángulo de base r y altura s.

    ____

17. Modifica T(A) y T(B) para encontrar dos transformaciones en las que la imagen del cuadrado sea una rotación del mismo cuadrado. Puedes presionar el botón [Mostrar circulo] para que aparezca en la gráfica un círculo unitario y la medida de un ángulo que te pueden ayudar. Anota aquí las transformaciones:
    a. ___________________________
    b. ___________________________

18. Propón una transformación que a tu juicio sea una rotación del cuadrado.

    ____

19. Presiona el botón [Modificar fórmula] y reproduce en el archivo la transformación, arrastrando los deslizadores, para verificar si rotó el cuadrado.

20. ¿Cómo supones que deba ser la fórmula de una transformación que rota al cuadrado?

____

21. Modifica T(A) y T(B) para que la imagen de la transformación lineal sea un cuadrado de lado dos. Encuentra otras dos transformaciones que manden el cuadrado de lado 1 a un cuadrado de lado 2. Escribe las 3 transformaciones encontradas.
    a. _________________________
    b. _________________________
    c. _________________________

22. La siguiente transformación manda al cuadrado en otro cuadrado de lado 1.

$$T(x, y) = (0.15x + 0.99y , -0.99x + 0.15y)$$

Modifica la expresión algebraica para que la imagen sea un cuadrado de lado 2 y verifica en el archivo que tu predicción se cumple.

Anota aquí la transformación:________________________

23. Al duplicar el tamaño del cuadrado imagen, la expresión algebraica se modifica. Explica la manera como se está modificando.

24. Modifica T(A) y T(B) para que la imagen de la transformación lineal sea un segmento de recta y anota aquí la expresión algebraica. ___________________________

25. Utiliza la expresión algebraica de la transformación para explicar porqué el cuadrado tiene un segmento de recta como imagen.

II. En las tareas siguientes, observa los cambios que sufre la fórmula de la transformación al arrastrar T(A) o T(B).

5. Arrastra solamente el vector T(A) y explica cómo cambian los parámetros *a*, *b*, *c* y *d*, en la expresión T(x,y)=(*a*x+*b*y, *c*x+*d*y), calcula además la imagen del vector (1,0) bajo esta transformación.

6. Arrastra solamente el vector T(B) y explica cómo cambian los parámetros *a*, *b*, *c* y *d*, en la expresión T(x,y)=(*a*x+*b*y, *c*x+*d*y). calcula además la imagen del vector (0,1) bajo esta transformación.

7. Encuentre una matriz T de 2×2 tal que $TA=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $TB=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

8. Encuentre una matriz T de 2×2 tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ dx+dy \end{pmatrix}$.

ANEXO II. CONSTRUCCIÓN DE LOS AMBIENTES DINÁMICOS

Para crear los ambientes dinámicos utilizados en la secuencia de actividades, se utilizaron algunas características especiales de GeoGebra, principalmente, la "exportación" a formato HTML y la interfaz JavaScript de los *applets* hechos con GeoGebra. Usuarios con algunos conocimientos de programación, especialmente los lenguajes mencionados javascript y html, pueden hacer uso de las características de GeoGebra que permiten crear archivos como los mostrados en este trabajo, añadir elementos interactivos como campos de texto o botones a sus ambientes dinámicos. Aquellos usuarios sin conocimientos previos de programación, sólo necesitan aprender la sintaxis y funciones básicas de los lenguajes.

La interfaz JavaScript de GeoGebra se utiliza desde un navegador web, por lo que se requiere exportar las construcciones hechas con GeoGebra a formato HTML, y provee de métodos para modificar y obtener información de objetos en una construcción. Los métodos permiten realizar tareas simples como ocultar o mostrar un objeto al presionar un botón, o cosas más complicadas como crear una construcción completa, generar animaciones, comprobaciones, etc.

A continuación se detalla la manera de crear un archivo similar a los utilizados en esta propuesta (dos construcciones vinculadas por la interfaz javascript), para facilitar la comprensión de los pasos a seguir se utilizan construcciones simples, se espera que el lector pueda basarse en esta descripción para poder crear los ambientes dinámicos que necesite. El archivo cuya creación se describe funcionará de la manera siguiente: al modificar el punto $A=(a,b)$, en el applet izquierdo, cambia la función $f(x)=ax^2+bx$ en el applet de la derecha

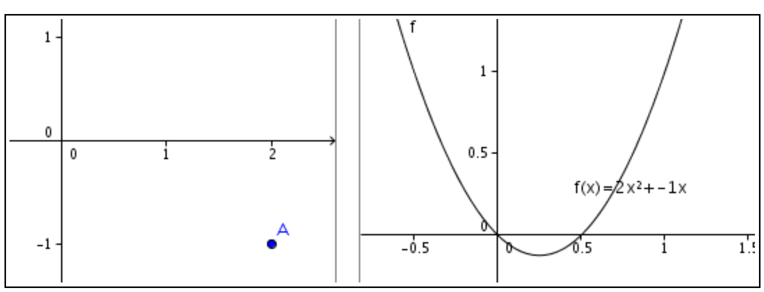


Figura II.1: Vista gráfica que se desea obtener

El primer paso es crear las construcciones que se desean vincular. Para este ejemplo se utilizarán las siguientes:

Utilizando GeoGebra se crea el archivo izquierda.ggb de la siguiente manera

1. Se define el punto "*A*" como un punto libre en el plano, utilizando la herramienta *nuevo punto.*

2. Se oculta la vista algebraica, desde el menú "vista->vista algebraica" y se guarda el archivo desde la barra de herramientas "archivo->guardar como -> izquierda.ggb"

Ahora creamos el archivo derecha.ggb

1. Se definen dos números "*a*" y "*b*" desde la entrada algebraica con los comandos

   $a=1$

   $b=1$
2. Los valores van a poder ser cambiados aunque sean definidos como números fijos y no como *deslizadores.*

3. Definir la función "*f*" desde la entrada algebraica con el comando:

   $$f(x)=a\ x^2 + b\ x$$

   Se necesita dejar espacios entre las literales para indicar una multiplicación.
4. Se crea el texto dinámico, con la herramienta "insertar texto" conteniendo lo siguiente (incluir las comillas):

   $$"f(x)=" + a + "x^2+" + b + "x"$$
5. Se oculta la vista algebraica, desde el menú "vista->vista algebraica" y se guarda el archivo desde la barra de herramientas "archivo->guardar como-> derecha.ggb"

El siguiente paso es crear el archivo HTML en el que serán *incrustadas* las construcciones hechas. Esto se realiza en dos pasos:, primero obtener un archivo que sirva de plantilla y después modificarlo para obtener el archivo deseado.

Paso 1. Desde la barra de herramientas de GeoGebra, con el archivo izquierda.ggb abierto, seleccionamos "Archivo->exporta->hoja dinámica", aparecerá la siguiente ventana:

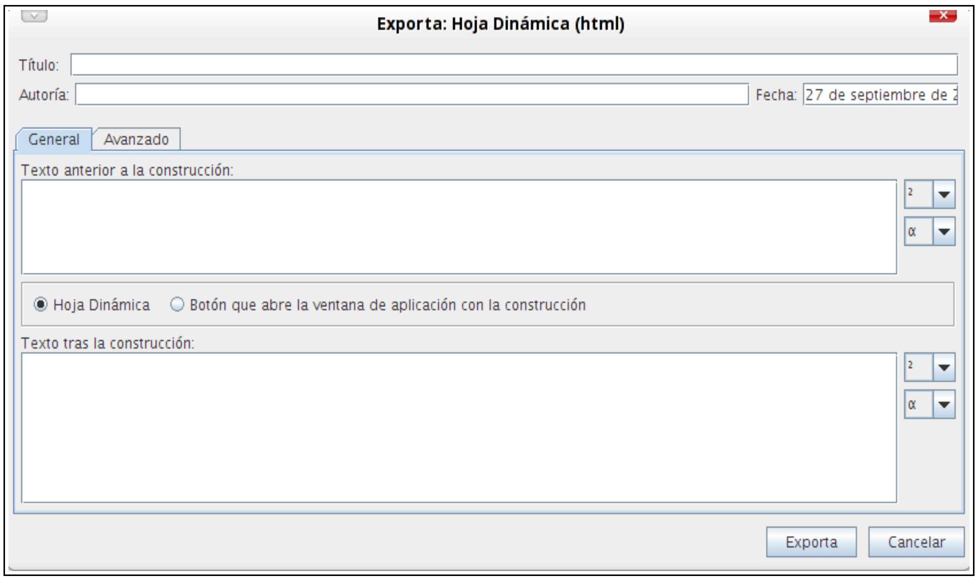


Figura II.2 Pestaña "General" de la ventana "Exportar"

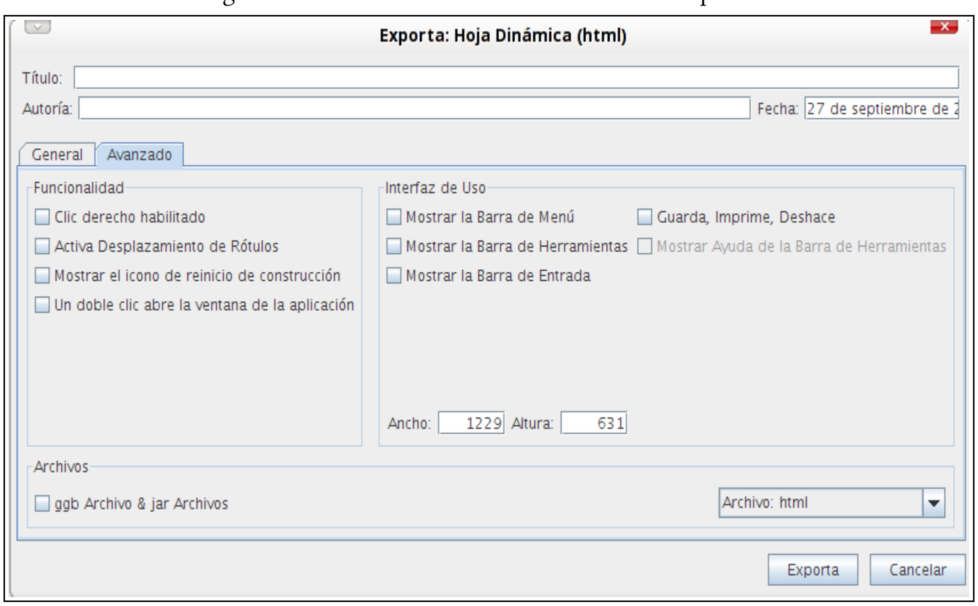


Figura II.2 Pestaña "Avanzado" de la ventana "Exportar"

Las opciones de esta ventana se explican por si mismas, los siguientes pasos permiten una mayor personalización. Sólo es necesario hacer *click* en el botón exportar, para obtener el archivo html, lo nombraremos “*prueba.html*”.

Este archivo se puede editar como archivo de texto, se recomienda usar un editor simple como *bloc de notas* o *Wordpad.* En la siguiente tabla se explica el contenido del archivo *prueba.html* (Un * indica que no es necesario comprender esa parte del archivo para crear los ambientes dinámicos):

Contenido del archivo html	Notas
<!DOCTYPE html PUBLIC "-//W3C//DTD XHTML 1.0 Transitional//EN" "http://www.w3.org/TR/xhtml1/DTD/xhtml1-transitional.dtd"> <html xmlns="http://www.w3.org/1999/xhtml">	*Indica el formato específico del archivo.
<head>	Indica el inicio del encabezado, meta-datos
<title>GeoGebra Hoja Dinámica</title>	Título de la ventana, aparecerá abrir el archivo en un navegador.
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=utf-8" />	*Tipo de codificación de caracteres utilizada
<meta name="generator" content="GeoGebra" />	*Indica el tipo de contenido del archivo
<style type="text/css"><!--body { font-family:Arial,Helvetica,sans-serif; margin-left:40px }--></style>	*Tipo de fuentes usadas
</head>	Termina el encabezado
<body>	Inicia el contenido del documento/ archivo
<table border="0" width="1200">	*Inicia una tabla con borde 0 y ancho de 1200 pixeles
<tr>	*Inicia una fila de la tabla
<td>	*Inicia una celda de la tabla
<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"	*Inicia la sección del applet de GeoGebra

codebase="http://www.geogebra.org/webstart/3.2/unsigned/"	Se busca el programa GeoGebra en Internet
width="1100" height="600"mayscript="true">	Se establecen las dimensiones del applet
<param name="ggbBase64" value="UEsDBBQACAAIACqvOz0AAAAAAAAAAAAAAAM AAAAZ2"/>	Este código representa la construcción que fue exportada (no se muestra completo aquí)
<param name="image" value="http://www.geogebra.org/webstart/loading.gif" />	*Imagen que se muestra mientras carga el applet
<param name="boxborder" value="false" />	
<param name="centerimage" value="true" />	*Centrar el applet
<param name="java_arguments" value="-Xmx512m -Djnlp.packEnabled=true" />	*Memoria asignada al applet
<param name="cache_archive" value="geogebra.jar, geogebra_main.jar, geogebra_gui.jar, geogebra_cas.jar, geogebra_export.jar, geogebra_properties.jar" />	*Archivos que el interprete de Java debe cargar
<param name="cache_version" value="3.2.45.0, 3.2.45.0, 3.2.45.0, 3.2.45.0, 3.2.45.0, 3.2.45.0" />	*Versión de GeoGebra a utilizar
<param name="framePossible" value="false" />	*Borde para el applet
<param name="showResetIcon" value="false" />	Mostrar el botón que reinicia el applet
<param name="showAnimationButton" value="true" />	Mostrar el botón que controla las animaciones
<param name="enableRightClick" value="false" />	Habilitar el click derecho
<param name="errorDialogsActive" value="true" />	Mostrar mensajes de error
<param name="enableLabelDrags" value="false" />	Permitir mover las etiquetas
<param name="showMenuBar" value="false" />	Mostrar la barra de menús
<param name="showToolBar" value="false" />	Mostrar la barra de herramientas
<param name="showToolBarHelp" value="false" />	Mostrar la ayuda en la barra de herramientas
<param name="showAlgebraInput" value="false" />	Mostrar la entrada algebraica
<param name="allowRescaling" value="true" />	Permitir modificar la escala de la construcción
Sorry, the GeoGebra Applet could not be started.	Mensaje que se muestra si no se puede cargar el applet

</applet>	Termina la sección del applet
</table>	Termina la tabla
</body>	Termina el contenido del archivo
</html>	Termina el archivo

Tabla II.1: Contenido inicial de prueba.html

Paso 2. El archivo recién creado será usado como *plantilla* para crear el archivo final, el cual contendrá dos applets de GeoGebra vinculados dinámicamente. Lo siguiente es identificar la estructura general del archivo, para ubicar las partes que serán modificadas. Las expresiones <X> y </X> indican respectivamente el inicio y el fin de la sección X.

Sección	Notas
<html>	Inicio del archivo
<head>	Inicio del encabezado
</head>	Fin del encabezado
<body>	Inicio del contenido
<table>	Inicio de la tabla
<applet>	Inicio del applet
</applet>	Fin del applet
</table>	Fin de la tabla
</body>	Fin del contenido
</html>	Fin del archivo

Tabla II.2: Secciones de l archivo prueba.html

Las secciones que serán modificadas son el encabezado, la tabla y los applets, se añadirán funciones y variables en el encabezado, se añadirá el segundo applet dentro de la tabla y se incluirá una opción extra en los applets.

Los métodos JavaScript que serán utilizados son los siguientes:

Método	Notas
document.A.getXcoord('P')	Obtiene el valor de la coordenada "*x*" del punto "P" en el applet "A"

document.A.getYcoord('P')	Obtiene el valor de la coordenada "*y*" del punto "P" en el applet "A"
document.B.setCoords('P', x, y)	Asigna las coordenadas (x,y) al punto "P" en el applet B
function ggbOnInit(param)	Permite la utilización de *listeners*
document.A.registerObjectUpdateListener('O', 'f');	Crea un *listener*, que realiza la función "f" cuando el objeto "O" en el applet "A" cambia.

Tabla II.3: Métodos JavaScript utilizados

La lista completa de los métodos JavaScript aceptados por GeoGebra se encuentra en la dirección:

http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/GeoGebra_Applet_Methods

Las funciones, escritas en lenguaje JavaScript, se muestran en la siguiente tabla y deben ser incluidas entre las expresiones <head> y </head> del archivo *prueba.html*:

Contenido	Notas
<script type="text/javascript">	*Inicia un script en lenguaje JavaScript
function f1(ObjName) {	Inicia la función f1
var v1= document.izquierda.getXcoord('A');	Se define la variable "v1" como la coordenada "x" del punto A en el applet "izquierda"
var v2 = document.izquierda.getYcoord('A');	Se define la variable "v2" como la coordenada "y" del punto A en el applet "izquierda"
document.derecha.setValue('a', v1);	Se cambia el valor de "a" a "v1"
document.derecha.setValue('b', v2);	Se cambia el valor de "b" a "v2"
}	Termina la función "f1"

function ggbOnInit(param) {	Empieza la función ggbOnInit
if (param == "applet1") {	Los *listeners* se activan en el applet etiquetado "applet1"
document.izquierda.registerObjectUpdateListener('A', 'f1');	Se activa la función "f1" cuando se modifica el punto "A" en el applet "izquierda"
}	Terminan los *listeners* del applet1
}	Termina la función ggbOnInit
</script>	*Terminan el script

Tabla II.4: Funciones Javascript utilizadas

Se modifica la sección *table*, añadiendo una segunda celda en la primer fila y cambiando las dimensiones de la tabla para que puedan ser contenidos ambos applets. La estructura de la tabla queda como sigue:

Sección	**Notas**
<table width=95% height=95% align="center">	*Inicia la tabla, las dimensiones son relativas al ancho y alto de la ventana
<tr>	Inicia la fila
<td width=50% height=95%>	Inicia la celda que contiene al primer applet
<applet>	Inicia el primer applet
</applet>	Termina el primer applet
</td>	Termina la celda del primer applet
<td width=50% height=95%>	Inicia la celda que contiene al segundo applet
<applet>	Inicia el segundo applet
</applet>	Termina el segundo applet
</td>	Termina la celda del segundo applet
</tr>	Termina la fila
</table>	Termina la tabla

Tabla II.5. Modificaciones a la *tabla* del archivo prueba.html

Para obtener el segundo applet, se utiliza la opción Archivo->exporta->hoja dinámica en el archivo derecha.ggb, pero se cambia la opción "Archivo: html" a "Portapapeles: html" en la pestaña "avanzado". Esta acción copia el contenido del archivo html que GeoGebra genera, al portapapeles. Se *pega* lo generado en el documento prueba.html en la sección señalada para el segundo applet, de modo que se obtiene lo siguiente como el contenido del archivo prueba.html:

Contenido	Notas
<!DOCTYPE html PUBLIC "-//W3C//DTD XHTML 1.0 Transitional//EN" "http://www.w3.org/TR/xhtml1/DTD/xhtml1-transitional.dtd">	*se puede eliminar esta línea para evitar problemas de compatibilidad con las dimensiones relativas en las tablas
<html xmlns="http://www.w3.org/1999/xhtml">	
<head>	
<title>GeoGebra Hoja Dinámica</title>	
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=utf-8" />	
<meta name="generator" content="GeoGebra" />	
<style type="text/css"><!--body { font-family:Arial,Helvetica,sans-serif; margin-left:40px }--></style>	

<script type="text/javascript">
function f1(ObjName) {
var v1= document.izquierda.getXcoord('A');
var v2 = document.izquierda.getYcoord('A');
document.derecha.setValue('a', v1);
document.derecha.setValue('b', v2);
}
 	
function ggbOnInit(param) {
if (param == "applet1") {
document.izquierda.registerObjectUpdateListener('A', 'f1');
}
	Se añadieron las funciones

} </script>	
</head>	
<body>	
<table border=0 width=95% height=95% align="center">	*Se cambiaron las dimensiones de la tabla, por dimensiones relativas, para facilitar la visualización en cualquier resolución
<tr>	
<td width=50% height=98%>	Se cambiaron las dimensiones de la celda
<applet name="**izquierda**" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"	Se cambió el valor de "applet name"
codebase="http://www.geogebra.org/webstart/3.2/unsigned/"	
width=98% height=98% mayscript="true">	Se cambiaron las dimensiones del applet
<param name="ggbBase64" value="UEsDBBQACAAIAGuvOz0AAAAAAAAMAAAAZ2="/>	*(no fue modificado, no se muestra el valor completo en esta tabla)
<param name="image" value="http://www.geogebra.org/webstart/loading.gif" /> . . . <param name="allowRescaling" value="true" />	*(no fue modificado, no se muestran todas los parámetros)
<param name="ggbOnInitParam" value="applet1" />	Se añadió esta linea, etiqueta al applet como "applet1"
Sorry, the GeoGebra Applet could not be started.	*Puede ser modificado o eliminado sin consecuencias mayores
</applet>	
</td>	

<td>	Se añadió la celda
De aquí en adelante es lo que se obtiene al exportar el archivo derecha.ggb al portapapeles	
<!DOCTYPE html PUBLIC "-//W3C//DTD XHTML 1.0 Transitional//EN" "http://www.w3.org/TR/xhtml1/DTD/xhtml1-transitional.dtd"> <html xmlns="http://www.w3.org/1999/xhtml"> <head> <title>GeoGebra Hoja Dinámica</title> <meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=utf-8" /> <meta name="generator" content="GeoGebra" /> <style type="text/css"><!--body { font-family:Arial,Helvetica,sans-serif; margin-left:40px }--></style> </head> <body> <table border="0" width="1229"> <tr><td> 	Se elimina toda esta sección
<applet name="**derecha**" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"	Se cambió el valor de "applet name"
codebase="http://www.geogebra.org/webstart/3.2/unsigned/"	
width=98% height=98% mayscript="true">	Se cambiaron las dimensiones del applet
<param name="ggbBase64" value="UEsDBBQACAAIAIcAPD0AAAAAAAAAAAAAAAAAMAA />	*(no fue modificado, no se muestra el valor completo en esta tabla)
<param name="image" value="http://www.geogebra.org/webstart/loading.gif" /> <param name="boxborder" value="false" /> . . . <param name="allowRescaling" value="true" />	*(no fue modificado, no se muestran todas los parámetros)

<param name="ggbOnInitParam" value="applet2" />	Se añadió esta linea, etiqueta al applet como “applet2”
Sorry, the GeoGebra Applet could not be started.	*Puede ser modificado o eliminado sin consecuencias mayores
</applet>	
    Creación realizada con GeoGebra </td></tr> </table></body> </html>	Se elimina toda esta sección
</td>	
</tr>	
</table></body>	
</html>	

Tabla II.4: Modificaciones al archivo prueba.html

Después de realizar los cambios señalados en la tabla anterior, se guarda el archivo y se abre con un navegador web que soporte java (Firefox, Chrome, Safari, Internet Explorer). El resultado debe ser similar al archivo disponible en la dirección: http://goo.gl/HSRy. De haber diferencias notables entre el archivo obtenido y el que se muestra en linea, se puede revisar el contenido del archivo en línea para compararlo con el obtenido, accediendo desde un navegador web a la dirección señalada y utilizar la opción “ver código fuente” del navegador, o accediendo a la dirección: view-source:http://goo.gl/HSRy.