UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

LA FUNCIÓN DERIVADA A PARTIR DE UNA VISUALIZACIÓN DE LA LINEALIDAD LOCAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Presenta:

MARTHA GABRIELA ROBLES ARREDONDO

Directora de Tesis:

M.C. ANA GUADALUPE DEL CASTILLO BOJÓRQUEZ

Hermosillo, Sonora, México **Junio de 2010**

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON

Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

AGRADECIMIENTOS

A mi esposo, Eduardo, por el invaluable apoyo técnico que fue pieza clave para la realización de este trabajo; pero, sobre todo, por alentarme y embarcarse conmigo en esta gran aventura.

A mis hijos, Ana Gabriela y Luis Eduardo, porque, al hacerse cargo de sus responsabilidades, me brindaron la oportunidad de volver a ser estudiante de tiempo completo.

A Don Marcos, porque sé que sonríe orgulloso de su hija.

A mi madre y hermanos porque siempre están conmigo.

A mi directora de tesis, M.C. Ana Guadalupe Del Castillo, por creer en mí y contribuir con su gran capacidad y disposición permanente a la realización de este trabajo.

A los Doctores Ramiro Ávila Godoy, Vicenç Font Moll y José Ramón Jiménez Rodríguez, por sus muy valiosas aportaciones, producto de la cuidadosa y eficiente revisión de este material.

A todos mis profesores, porque con su apoyo y motivación orientaron mis esfuerzos hacia el cumplimiento de este compromiso.

CONTENIDO

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

I.1 ANTECEDENTES

Entender y controlar el mundo cambiante en que vivimos constituye una necesidad primordial. Por ello, dado que en nuestro entorno todo está cambiando, especialistas en ingeniería, biología, química, economía, etc., orientan sus esfuerzos hacia el estudio de los patrones de cambio, con objeto de prever y predecir nuevos estados que permitan tomar mejores decisiones respecto a una diversidad de problemas.

El papel del ingeniero, como especialista en el estudio y aplicación de las diversas ramas de la tecnología a la resolución y optimización de problemas asociados al cambio, supone la transformación de ideas en realidades mediante la aplicación de teorías y técnicas que permiten el aprovechamiento práctico del conocimiento científico.

Aunque actualmente las matemáticas discretas y la computación electrónica se utilizan también para identificar, analizar e interpretar los cambios que se observan en un evento, el Cálculo, asignatura básica en los programas de las carreras de ingeniería, constituye el componente esencial de lo que se conoce como *matemáticas del cambio* (Ávila, 2007).

Algunos de los procesos que interesan al ingeniero son modelables mediante funciones que presentan la característica de ser derivables, lo que, en términos geométricos, implica que si la gráfica correspondiente es una curva, ésta tiene la propiedad de ser localmente lineal. Sin embargo, más allá de su interpretación geométrica, la linealidad local es la condición que hace posible el estudio de situaciones variacionales, ya que permite considerar a un modelo matemático como si localmente describiera un comportamiento lineal, aunque la gráfica correspondiente diste mucho de ser una recta. Es aquí donde la derivada, como expresión de esa variación localmente lineal asociada con la derivabilidad del modelo, se vuelve esencial en el estudio de los sistemas cambiantes, y cobra relevancia como objeto de estudio del Cálculo en las carreras de ingeniería.

En los cursos de Cálculo Diferencial del nivel universitario, es tradicional que las nociones de derivada en un punto y de función derivada entrañen una dificultad especial, no sólo para los alumnos sino también para los propios profesores (Badillo, 2003). La forma clásica de introducir el concepto de derivada, con la noción de límite en el centro de sus acepciones puntual y funcional, conlleva un alto nivel de complejidad (Font, 2000), lo que pudiera explicar el origen de la dificultad mencionada.

Es frecuente también que en un curso de Cálculo se sobrevaloren los procedimientos analíticos y la algoritmia, desatendiendo la pertinencia de los recursos geométricos y visuales, entre otras razones, por considerarlos no rigurosos. Esto hace común encontrar estudiantes que desarrollan una gran habilidad para derivar, sin haber logrado construir un verdadero significado en torno a las nociones involucradas (límites, pendiente de la recta tangente, razón instantánea de variación, función derivada).

En virtud de lo anterior, se plantea la posibilidad de encontrar una alternativa que pudiera conducir al estudiante del primer semestre de ingeniería, a desarrollar una perspectiva diferente de la derivada como objeto esencial de estudio del Cálculo, a través de un proceso de construcción de la función derivada que tome como punto de partida la noción de derivada puntual generada desde la linealidad local, buscando que f' emerja de f sin involucrar de manera explícita el concepto de límite.

En este trabajo se presenta el diseño, la implementación y la valoración de una secuencia de actividades didácticas asistidas por computadora, que promueve la construcción de significado en torno a la función derivada, con alumnos del primer curso de Cálculo de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, buscando constituir una introducción alternativa al tratamiento a través de límites, desde la noción de linealidad local, como primer encuentro con la derivada.

Los fundamentos de la secuencia didáctica que aquí se presenta han sido abordados por una gran diversidad de trabajos. Destacan, primeramente, las aportaciones de David Tall (1986) en torno a la linealidad local y la utilización de la tecnología para visualizar a la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, recurriendo al *zoom* que constituye una herramienta muy potente de las calculadoras graficadoras y de diversos paquetes de software disponibles en la actualidad. Trabajos como los de Tall expresan, de una u otra forma, la necesidad de reconstruir la didáctica del Cálculo con base en aproximaciones no formales, que atiendan más al fenómeno a estudiar en su relación con el concepto de derivada, que al concepto por sí mismo. En este sentido, Tall (2003) declara la conveniencia de promover que el estudiante conceptualice los objetos *sensorialmente* dentro de su mente (*embodied objects*), en virtud de que los aspectos manipulativos y formales pueden ser abordados en una etapa posterior, cuando éstos puedan tener más sentido.

En los tiempos recientes, ha habido intentos por reorientar la enseñanza del Cálculo hacia un tratamiento de la derivada que no gire en torno a la noción de límite. En 1981 apareció por primera vez una definición de derivada sin límites, en el libro *Calculus Unlimited*, de Marsden y Weinstein. En este texto se presenta una definición de recta tangente, construida a partir de una relación de orden que formaliza la idea de que se trata de la única recta no transversal a la gráfica de una función; es decir, cualquier otra recta, con una menor o mayor pendiente, corta o atraviesa definitivamente a la gráfica de la función. En este tratamiento, los autores no consideran a los puntos de inflexión, sino hasta que la recta tangente es identificada como aquélla cuya pendiente es la derivada en el punto, y, finalmente, se refieren a ellos en la forma tradicional.

Desde el movimiento de reforma del Cálculo, otros textos y artículos han hecho planteamientos relacionados con la linealidad local, eje de la secuencia didáctica que se presenta en este trabajo. Tal es el caso de libros como *Calculus in Context I* (Callahan y Cox, 1993) y *Calculus* (Deborah Hughes-Hallet et al, 1994). Estos textos buscan reorientar la enseñanza del Cálculo, proponiendo una atención equilibrada hacia los conceptos y los procedimientos. Se hace énfasis en el significado de las nociones matemáticas, ya sea en términos prácticos, gráficos o numéricos, a partir de la interpretación de dichas nociones (fórmulas, gráficas, tablas, texto, etc.). La utilización de los recursos geométricos se promueve mediante el uso de la herramienta tecnológica (calculadora graficadora o computadora), considerada como mucho más que un instrumento de apoyo en la enseñanza tradicional del Cálculo, ya que permite diversificar tanto las preguntas que pueden surgir como la forma de responder a ellas.

Por otro lado, artículos como *Introduction to derivatives: A TI-81/TI-82 graphing calculator activity* (Shultz, 1995) y *A limit-free approach to derivatives: Report on a Classroom Project* (Invernizzi y Rinaldi, 2002) promueven la conveniencia de apoyarse en la tecnología para visualizar a la derivada como la pendiente del segmento de recta en que parece transformarse la gráfica de una función, cuando el acercamiento (zoom) alrededor de un punto es el suficiente.

Los acercamientos mencionados permiten apreciar el contexto en el cual queda enmarcado este trabajo y precisar que, aunque la idea que subyace a él no es novedosa, se pretende aportar elementos que pudieran contribuir, desde la noción de linealidad local, a la construcción de un significado más amplio de función derivada, mediante la realización de una tarea intramatemática apoyada en la utilización de recursos tecnológicos.

En este trabajo se percibe a la observación de la linealidad local como el argumento visual que justifica el papel de la función derivada como instrumento cuantificador de la rapidez instantánea de variación. En términos metafóricos, si se realizara un zoom a la noción funcional de derivada, se observaría que ésta se apoya en la posibilidad de concebir al segmento visualizado como la evidencia de una variación localmente lineal, y a su pendiente como la medida de la rapidez con que dicha variación se da.

Otro rasgo importante se refiere a la identificación de la recta tangente como la recta que mejor aproxima a la gráfica de una función en las cercanías del punto de tangencia. Dado que esta caracterización de la recta tangente no es algo trivial, en este trabajo se incluye el referente teórico proporcionado por dos trabajos de investigación que constituyen una justificación formal para tal identificación de la recta tangente. Esta justificación está sustentada por los planteamientos de Riestra y Ulin (2003) formulados en *Tangencia, Contacto y la Diferencial*, y los de Bivens (1986) en *What a Tangent Line Is When It Isn't a Limit.* En este mismo sentido, aunque orientado hacia el aspecto analítico del manejo de la recta tangente como la mejor aproximación lineal, existen otros acercamientos interesantes, como el de Teague (1996) con su artículo *A Local Linearity Approach to Calculus*, que aborda un acercamiento a la Regla de l'Hopital o la regla del producto, a partir de aproximaciones lineales.

I.2 JUSTIFICACIÓN

Como objeto matemático, la derivada presenta una complejidad propia, íntimamente ligada a sus acepciones local y global. Es por ello que, en la enseñanza del Cálculo, la problemática relacionada con esta dualidad puntual/funcional de la derivada reclama una atención especial, pues a la complejidad mencionada se suman dificultades de otra naturaleza, como la inherente al concepto de límite (Artigue, 2000), noción que se encuentra en el centro de la definición formal de derivada.

Sin embargo, tradicionalmente, los cursos de Cálculo desatienden la importancia de la articulación entre representaciones, al privilegiar el manejo analítico sobre el geométrico. Esto queda en evidencia cuando, aún en los casos más sencillos, la observación simultánea de las gráficas de f y f' frecuentemente no logra desencadenar en el estudiante ningún proceso reflexivo a partir de la definición de derivada vía límites.

Así, en un intento por ampliar el abanico de posibilidades para promover la emergencia de la función derivada, buscando no restringirla al tratamiento a través de límites, se trata de proponer al estudiante la realización de una tarea matemática menos compleja, que lo introduzca al proceso de construcción de la función derivada.

Por todo lo anterior, la secuencia didáctica presentada en este trabajo y dirigida a estudiantes de un primer curso de Cálculo del nivel universitario, surge de una reflexión que se orienta hacia los siguientes aspectos:

- La forma en que los procesos de instrucción desatienden el interés esencial del estudio de la derivada, como la herramienta clave en el estudio de la variación, promoviendo en el estudiante la construcción de un significado limitado, a través de prácticas que privilegian, finalmente, el uso de las técnicas de derivación.
- La importancia de promover una mayor riqueza en el lenguaje utilizado para abordar la tarea matemática, concretamente, en cuanto a la articulación de las diferentes representaciones asociadas a un objeto matemático.
- La conveniencia de incorporar los recursos que ofrece la herramienta tecnológica, como una forma de apoyar el quehacer en el aula.

La idea central es la siguiente: a partir de la gráfica de f, mediante una construcción visualmente convincente de la recta tangente desde la noción de linealidad local, el alumno pudiera partir de la interpretación geométrica de la derivada para llegar hasta la identificación de la expresión analítica de la función derivada, $f\,'$.

Una de las etapas de este trabajo ha consistido en la implementación de una secuencia de actividades didácticas, cuyo objetivo central es propiciar que el alumno ponga en juego las diferentes representaciones de la función derivada, de manera que, a partir de una tabla obtenida desde el trabajo dinámico desarrollado con un software, el estudiante construya la gráfica correspondiente y, finalmente, obtenga la expresión analítica respectiva. Además, la aplicación de la secuencia contempla el aprovechamiento de los recursos visuales aportados por el software para poner al estudiante en contacto con dos nociones esenciales: la recta tangente como la recta que más se parece a la curva en las cercanías del punto de tangencia, y la no derivabilidad puntual de una función.

Es importante mencionar que, más allá de lo que corresponde a la tarea intramatemática que se propone para promover la construcción de la función derivada, se busca incidir también sobre lo relativo a la cuantificación de la rapidez de la variación, que da sustento a la derivada como razón de cambio. Se pretende que el descubrimiento de la linealidad local, asociada con la derivabilidad de una función, favorezca, mediante el uso de la herramienta tecnológica, una visualización de la variación instantánea, cuya cuantificación es la razón de ser de la derivada como objeto de estudio. La idea es, pues, que el estudiante logre relacionar al segmento visualizado con una variación localmente lineal, y a su pendiente con la medida de la razón instantánea de variación correspondiente, buscando que la experiencia intuitiva proporcionada por este acercamiento favorezca la emergencia del significado variacional de la derivada.

El diseño e implementación de la secuencia de actividades didácticas se dirigió a estudiantes de un primer curso de Cálculo Diferencial de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora. Además de promover en estos estudiantes la construcción de un significado más amplio alrededor de la función derivada, la secuencia didáctica busca ofrecerles un primer contacto con la regla de la cadena y los criterios de máximos y mínimos, con el propósito de dar mayor sentido a las técnicas algorítmicas que usualmente se privilegian en los cursos tradicionales de Cálculo.

Es pertinente mencionar que, aunque el primer propósito es el de incidir positivamente sobre el significado de función derivada, se espera que, como consecuencia, los planteamientos aquí presentados contribuyan a enriquecer también el significado de derivada como objeto matemático, concebida ésta como la herramienta por excelencia asociada a la medición de la variación en los fenómenos del entorno y, por tanto, como elemento esencial en el estudio del Cálculo.

CAPÍTULO II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

II.1 ANTECEDENTES

En el primer curso de Cálculo del nivel universitario, es usual que se pierda de vista que la razón fundamental que justifica el estudio de la derivada, es su uso como herramienta básica en el análisis, interpretación y resolución de los problemas relacionados con el cambio, en especial, lo relativo a la rapidez de la variación. Con frecuencia, se privilegia el aprendizaje de las técnicas de derivación y se considera que un estudiante ha aprendido Cálculo si, al final del curso, éste logra dominar las fórmulas que le permiten encontrar la expresión analítica de la función derivada, independientemente del significado que de ella haya construido.

Los trabajos de Duval (1998), declaran que en la actividad matemática es esencial la movilización y coordinación de varios *registros de representación semiótica*, pues en ellos se considera que toda representación es cognitivamente parcial respecto a lo que ella representa. Duval postula la complementariedad de los diferentes registros, así como la imposibilidad de acceder al objeto matemático si no es a través de sus representaciones.

Estos planteamientos fueron los primeros en dar soporte a la idea que subyace a la propuesta que se presenta e investiga en este trabajo: una alternativa que pudiera conducir al estudiante del primer semestre de ingeniería a desarrollar una perspectiva diferente de la derivada como objeto esencial de estudio del Cálculo, propiciando que se pongan en juego las diferentes representaciones de la función derivada, de manera que, a partir de una tabla obtenida desde el trabajo dinámico desarrollado con un software, se construya la gráfica correspondiente y, finalmente, se obtenga la expresión analítica respectiva.

Sin embargo, conforme fue avanzándose en el diseño de actividades que hicieran posible el tránsito del estudiante a través del recorrido procedimental descrito, fueron requiriéndose otras herramientas teóricas, no contempladas por los planteamientos de

Duval, que pudieran explicar, por ejemplo, qué son los objetos matemáticos, buscando que la afirmación de Duval de que *no hay noesis sin semiosis* pudiera clarificarse, en cuanto a lo que significa *acceder al objeto matemático*.

Por otra parte, existen trabajos que priorizan el estudio de la derivada como la herramienta asociada a la resolución de los problemas del cambio, asumiendo como concepto fundamental, precisamente, la noción de *razón de cambio*. Tal es el caso de lo que se conoce como el *enfoque variacional*, proyecto que surge en México a partir de los trabajos desarrollados bajo la dirección del Dr. Ricardo Cantoral, con una propuesta de rediseño radical del discurso matemático escolar, cambiando el papel principal que los cursos de Cálculo confieren al concepto de límite, para poner en su lugar a la variación física. En este sentido, Cantoral (1991) expresa:

> ...en el terreno de la enseñanza, tendemos hacia la reconstrucción de una didáctica del cálculo basada más en las intuiciones y vivencias cotidianas de los sujetos, mediante acercamientos fenomenológicos, por lo que se atiende más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto *per se*.

Este enfoque parte de razones de cambio promedio obtenidas del estudio del fenómeno asociado a una situación variacional, y arriba a la derivada como razón de cambio instantánea, mediante un manejo intuitivo del límite, poniéndola en primer plano en su papel cuantificador de la rapidez de variación.

En concordancia con los planteamientos del enfoque variacional, la secuencia didáctica presentada en este trabajo pretende ofrecer una alternativa introductoria al encuentro con la función derivada, mediante un proceso de construcción que tome como punto de partida la noción de derivada puntual generada desde la linealidad local, y visualizada sólo con la ayuda de la herramienta tecnológica, buscando que $f\,'$ emerja de f sin involucrar de manera explícita el concepto de límite. Además, dado que la interpretación de la derivada como razón de cambio instantánea está íntimamente ligada con la posibilidad de considerar a la gráfica que modela a un fenómeno como si fuera localmente lineal, entonces, si se entiende la linealidad local como la característica que posibilita el estudio de fenómenos modelables por funciones derivables, puede afirmarse que con el enfoque planteado por este trabajo se intenta promover, finalmente, el rescate de la derivada como herramienta cuantificadora de la rapidez de variación.

II.2 OBJETIVO

En la estructura de este trabajo se identifican dos componentes esenciales:

- Una secuencia didáctica materializada en el diseño de un conjunto de actividades asistidas por computadora, cuyo propósito es el de promover una construcción significativa de la función derivada a partir de la visualización dinámica de la linealidad local.
- Una investigación orientada al análisis y valoración del proceso de instrucción surgido de la implementación de la secuencia de actividades propuesta.

De acuerdo al esquema anterior, el objetivo de este trabajo se resume como sigue:

El diseño de una secuencia de actividades didácticas asistidas por computadora, que tiene por objeto el desarrollo de una construcción significativa de la función derivada con alumnos del primer curso de Cálculo de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, y que pretende constituir una introducción alternativa a su posterior tratamiento a través de límites desde la noción de linealidad local. Se plantea además la investigación del proceso de instrucción promovido por la implementación de dicha secuencia, con el propósito de analizarlo en términos descriptivos, explicativos y valorativos.

II.3 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El propósito de la investigación encaminada a describir, explicar y valorar el proceso de instrucción desarrollado a partir de la implementación de la secuencia, se centra alrededor de la siguiente pregunta:

- ¿Qué papel juega la visualización dinámica de la linealidad local en la construcción de significado en torno a la función derivada?

Se espera que la investigación del proceso de instrucción efectuado a propósito de la implementación de la secuencia aporte elementos que permitan responder a la pregunta de investigación planteada. Como interrogantes más específicas que orientan la investigación, se plantean las siguientes:

- ¿Qué papel juega la visualización de la linealidad local mediante el uso de la computadora en la evolución de la noción de tangencia de los estudiantes?
- ¿Cómo se modifica el concepto de recta tangente de los estudiantes como resultado de la evolución de su noción de tangencia?
- ¿Cómo evoluciona lo que los estudiantes pueden decir o hacer para resolver una situación que involucra a la función derivada, como resultado de su participación en una organización didáctica que promueve la utilización de la computadora para construir y transitar por sus diferentes representaciones, a partir de la noción de linealidad local?
- ¿Cómo puede describirse, explicarse y valorarse el proceso de instrucción promovido por la implementación de una secuencia de actividades didácticas que utiliza la herramienta tecnológica para hacer emerger una construcción significativa de la función derivada a partir de la visualización dinámica de la linealidad local?

CAPÍTULO III. MARCO TEÓRICO

III.1 ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

El Enfoque Ontosemiótico (EOS), desarrollado por J. D. Godino y colaboradores (2002), es un modelo teórico sobre la cognición y la instrucción matemática que articula las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, atribuyendo un papel clave a la actividad de resolución de problemas, a los recursos expresivos y asumiendo coherentemente supuestos pragmáticos (los objetos emergen y evolucionan a partir de situaciones problémicas) y realistas (los objetos pueden ser referenciados, por lo que poseen una realidad cultural) sobre el significado de los objetos matemáticos. Este marco teórico concibe a la matemática como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente estructurado.

La noción de *práctica matemática*, definida como toda actuación o manifestación, lingüística o no, que un sujeto realiza para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas, se constituye como fundamental en esta teoría. Sin embargo, en el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los *sistemas de prácticas* (operativas y discursivas), que son las prácticas matemáticas que se refieren a un campo de problemas.

Un *objeto institucional* se considera como un ente que emerge progresivamente a lo largo del tiempo, del sistema de prácticas socialmente compartidas en una institución, en relación con la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Los *objetos personales* se consideran como emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas.

El sistema de prácticas personales que un sujeto realiza para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal, constituye su *significado personal*, mientras que el *significado institucional* está referido a un sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas del cual emerge un objeto institucional.

Entre los significados institucionales pueden distinguirse cuatro tipos: el significado de referencia, el pretendido, el implementado y el evaluado. El *significado institucional de referencia* es el relativo al sistema de prácticas de los expertos, el cual determina lo que es el objeto en cuestión para las instituciones matemáticas y didácticas. A partir de este significado de referencia, el profesor selecciona, ordena, y delimita la parte específica que va a proponer a sus estudiantes durante un proceso de enseñanza y aprendizaje, teniendo en cuenta los recursos disponibles como son el tiempo, conocimientos previos de los estudiantes, recursos tecnológicos, etc., constituyéndose éste como el *significado institucional pretendido*. El *significado institucional implementado* es el que efectivamente tiene lugar en el aula y el *significado institucional evaluado* es el constituido por las tareas o cuestiones seleccionadas por el profesor para ser incluídas en las evaluaciones.

En cuanto a los significados personales, podemos distinguir tres tipos: el *global*, que corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que el estudiante puede manifestar potencialmente, el *declarado*, que corresponde a las prácticas efectivamente expresadas, incluyendo las consideradas correctas y las incorrectas, y el *logrado*, que corresponde a las prácticas manifestadas que concuerdan con la pauta institucional establecida. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se considera como errores de aprendizaje.

De acuerdo con todo lo anterior, el EOS establece que la enseñanza debe promover la participación del estudiante en los sistemas de prácticas que constituyen los significados institucionales, mientras que el aprendizaje supone la construcción de dichos significados por parte del estudiante.

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Así, los componentes del conocimiento que el sujeto requiere para realizar y evaluar la práctica que permite resolver una determinada *situación problema*, harán uso de un determinado *lenguaje* verbal o simbólico. Este lenguaje es la parte ostensiva (perceptible por alguno de los sentidos) de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella, en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. Los seis objetos primarios mencionados pueden constituir los conocimientos previos a poner en juego en las prácticas matemáticas, o bien, surgir de ellas como nuevos objetos; de ahí la clasificación de *objetos intervinientes* y *objetos emergentes* de los sistemas de prácticas, respectivamente.

Otro constructo esencial en el Enfoque Ontosemiótico es el de *función semiótica*, entendida ésta como la relación entre un antecedente (expresión, representante) y un consecuente (contenido, representado), establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo a un cierto criterio o código de correspondencia. Las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de la manipulación de ostensivos matemáticos (representaciones perceptibles por los sentidos), y del pensamiento que la acompaña, característico de las prácticas matemáticas.

Las herramientas teóricas hasta aquí mencionadas han resultado clave para aportar claridad y soporte a los planteamientos presentados en este trabajo.

Por otra parte, el EOS propone un modelo teórico para el *análisis didáctico de procesos de instrucción*, que ha sido de suma utilidad para describir, explicar y valorar el proceso de instrucción promovido por la implementación de la secuencia de actividades didácticas presentada en este trabajo. El análisis se realiza de acuerdo a las cinco diferentes perspectivas o niveles planteados por este modelo. En un primer nivel de análisis, se identifican los problemas a abordar, así como el sistema de prácticas a promover, para tener una visión panorámica del quehacer matemático que se pretende realizar. El segundo nivel introduce un análisis más detallado, al promover la identificación de *configuraciones* o redes de objetos matemáticos puestos en juego en la realización de la tarea matemática propuesta. En el tercer nivel se analiza la distribución de los objetos identificados en el nivel anterior, en cuanto al orden en que aparecen a lo largo del proceso de estudio; en este nivel, la noción de *trayectoria* resulta clave, pues describe la interacción didáctica que se da a propósito del proceso de instrucción, con un grado de detalle que permite la detección de *conflictos semióticos* asociados, entendiéndose por conflicto semiótico cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Con base en el cuarto nivel, se identifican aquellos elementos que regulan la interacción didáctica en el aula, denominados *normas* y *metanormas*, con el propósito de aportar una descripción final de lo sucedido durante el ejercicio. Finalmente, con objeto de identificar potenciales cambios que promuevan mejores resultados del proceso de instrucción, se aplica el quinto nivel de análisis, el cual se orienta hacia la valoración de la *idoneidad didáctica*, a partir de los seis criterios de idoneidad planteados por este modelo teórico.

La utilidad de la herramienta de análisis didáctico aquí presentada se centra en la posibilidad de comprender, valorar y comparar procesos de instrucción efectivamente realizados, así como determinar las exigencias mínimas que deberán contemplarse en el diseño de los que estén por realizarse.

CAPÍTULO IV. METODOLGÍA

Las consideraciones metodológicas de este trabajo se orientan hacia cada uno de los componentes esenciales del mismo. Así, una primera metodología se refiere al diseño de la secuencia didáctica, y la otra a la investigación del proceso de instrucción promovido por su implementación. Aunque estas dos metodologías comparten algunos momentos y acciones, se describen a continuación de manera separada.

IV.1 METODOLOGÍA DEL DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En relación con el diseño e implementación de la secuencia didáctica presentada en este trabajo, se identificaron diferentes fases, las cuales se describen a continuación.

- Revisión bibliográfica. Esta etapa se orientó hacia los antecedentes más cercanos ligados a la enseñanza de la derivada, buscando contextualizar y justificar la secuencia didáctica propuesta. Además, gran parte del material revisado durante esta fase fue el relacionado con la identificación de las diferentes teorías de la Matemática Educativa, con objeto de recabar la información suficiente para seleccionar el marco teórico que sustentara más adecuadamente los planteamientos respectivos.
- Diseño de una secuencia de actividades didácticas. La secuencia se materializó en un conjunto de siete hojas de trabajo y ocho applets de Java. Cada hoja de trabajo contiene una colección de gráficas seleccionadas para su estudio, así como una serie de indicaciones y preguntas que orientan la actividad matemática del estudiante. Cada una de las actividades didácticas se auxilia de un applet linealizador, a excepción de la primera, que requiere de la activación de dos applets. Aprovechando las ventajas del Applet Descartes, los vínculos a los ocho applets linealizadores fueron colocados en una página web, para su acceso y utilización desde cualquier computadora.

- Elaboración de un instrumento de diagnóstico y otro de evaluación. El instrumento de diagnóstico, o Cuestionario I, se diseñó con el propósito de identificar en los estudiantes, principalmente, su nivel de dominio en cuanto a los elementos lingüísticos relacionados con funciones lineales y cuadráticas, mientras que el instrumento de evaluación, o Cuestionario 2, fue diseñado para detectar evidencias de una incorporación del sistema de prácticas promovido por la implementación de la secuencia, con base en los significados personales declarados por los estudiantes respecto a la función derivada.
- Pilotaje de prueba. Se puso a prueba una parte del material de trabajo, con un grupo de Cálculo Diferencial e Integral I de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, que no estaba a cargo de la profesora/investigadora, con objeto de identificar limitaciones o errores en el diseño en las actividades y tener oportunidad de modificarlas con anterioridad a su aplicación definitiva. Se aplicaron a este grupo de estudiantes únicamente el instrumento de diagnóstico y las tres primeras actividades didácticas, pues se decidió no afectar la programación del profesor titular, en vista de que el tiempo consumido durante el abordaje de los materiales estaba resultando excesivo. Además, se consideró que las primeras tres actividades eran suficientes, por ser las que constituyen el entrenamiento de los estudiantes en el manejo de la técnica de acercamiento, así como en el tipo de preguntas y reflexiones solicitadas.
- Incorporación de las modificaciones sugeridas por el pilotaje de prueba. El pilotaje de prueba sugirió ligeras modificaciones de redacción al instrumento de diagnóstico, así como a las hojas de trabajo correspondientes a las dos primeras actividades didácticas, las cuales fueron incorporadas para la implementación definitiva de la secuencia.
- Aplicación del instrumento diagnóstico, de la secuencia didáctica y del instrumento de evaluación a un grupo de Cálculo Diferencial e Integral I de primer semestre de Ingeniería Química, el cual estuvo a cargo de la profesora/investigadora. Para la aplicación de cada cuestionario y cada hoja de trabajo se destinó una clase de 50

minutos, aproximadamente. Cada clase inició con una sesión de discusión e institucionalización sobre lo abordado en la actividad anterior, con base en una recopilación de las respuestas más relevantes a las hojas de trabajo realizada por la profesora/investigadora al final de cada actividad.

- Organización de la información. A partir de las evidencias recabadas en las hojas de trabajo, se elaboró una base de datos con el registro de las actividades realizadas por los 41 estudiantes que conformaban el grupo piloto, con objeto de facilitar la selección de los alumnos que conformarían el estudio de casos.

IV.2 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La revisión bibliográfica también resultó esencial en relación con la investigación del proceso de instrucción promovido por la implementación de la secuencia didáctica presentada en este trabajo. Una vez seleccionado el Enfoque Ontosemiótico como marco teórico a utilizar, se procedió a profundizar en sus planteamientos con objeto de conocer mejor las herramientas teóricas que soportarían la investigación, mediante una cuidadosa revisión de artículos publicados en torno a la teoría del análisis didáctico.

De acuerdo al Enfoque Ontosemiótico, para el diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción es necesario atender a los sistemas de prácticas asociados. Por ello, dada la importancia de considerar la complejidad ontológica y semiótica de los objetos involucrados en la tarea matemática realizada, se vuelve esencial el estudio de casos, si se quiere observar la evolución de los significados personales de los alumnos, en relación con los objetos puestos en juego a partir de la aplicación de la secuencia didáctica.

La investigación del proceso de instrucción desarrollado en la fase empírica, se orienta hacia el análisis cualitativo de los resultados obtenidos mediante el estudio de casos, con una primera intención de describir y explicar lo sucedido en el aula, para después realizar un ejercicio de valoración al respecto. Se trata de una investigación exploratoria, ya que no se pretende generalizar los resultados a otros contextos o poblaciones.

Además, el nivel de análisis es puntual, ya que se investigan aspectos ligados al estudio de una cuestión matemática específica, en un contexto determinado.

Las evidencias obtenidas durante la fase experimental, así como los resultados desprendidos de ellas, fueron sometidos a la técnica de triangulación. Primeramente, se realizó una triangulación de datos, ya que, además de las respuestas a las hojas de trabajo, se consideraron como evidencias las grabaciones de audio realizadas por la profesora/investigadora durante la aplicación de la secuencia, así como sus anotaciones tras la revisión de las respuestas a las hojas de trabajo, y a propósito de las sesiones de discusión e institucionalización. Finalmente, los resultados obtenidos de la interpretación de las evidencias fueron objeto de una triangulación de expertos, pues el análisis inicial fue sometido a la opinión de especialistas en la materia.

Para el análisis del proceso de instrucción se utilizó como herramienta el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS, a partir de cinco niveles de análisis: 1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas, 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, 4) Identificación del sistema de normas y metanormas y 5) Valoración de la idoneidad didáctica. Los primeros cuatro niveles se orientan hacia la descripción y explicación del proceso de estudio investigado, mientras que el último se refiere a la valoración del mismo. Los niveles 1 y 2 abordan el aspecto matemático, mientras que los niveles 3 y 4 se orientan hacia lo relativo a la interacción didáctica.

La investigación se desarrolló de acuerdo a una sucesión de acciones que pueden describirse como sigue:

- Identificación del significado institucional de referencia, a partir de un análisis ontosemiótico del tratamiento presentado por algunos de los textos que forman parte de la bibliografía recomendada institucionalmente para el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, correspondiente a los programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, primero en cuanto a la noción de tangencia, y después en relación con la función derivada.

- Análisis de las actuaciones de los estudiantes desde una perspectiva grupal, con objeto de identificar patrones de comportamiento general.
- Selección de cinco estudiantes para un estudio de casos, con el propósito de caracterizar los significados personales logrados.
- Aplicación de una herramienta de análisis didáctico que favoreciera la descripción, explicación y valoración del proceso de instrucción efectuado.

IV.3 SELECCIÓN DE LOS CASOS

La implementación de la secuencia didáctica se realizó con un grupo de estudiantes del primer semestre de la carrera de Ingeniería Química, inscritos en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, Unidad Centro, durante el período 2009-2.

A manera de entrenamiento en el uso del software seleccionado para la puesta en marcha de la secuencia, el grupo tuvo previamente la oportunidad de trabajar con ambientes interactivos diseñados con el applet Descartes, lo que, de alguna manera, contribuyó a familiarizarlos con el escenario ofrecido por el applet Linealizador.

Dado el gran tamaño del grupo piloto (41 estudiantes inscritos), y para efectos de simplificar el análisis de resultados, se seleccionaron cinco alumnos, con base en los siguientes criterios:

- Realización de la secuencia completa: siete actividades y dos cuestionarios. El total de estudiantes que cumplió con este criterio fue de 21.
- Diversidad en los sistemas de prácticas mostrados, tanto en el Cuestionario 1 como en las siete hojas de trabajo, en cuanto al nivel de concordancia con los significados institucionales puestos en juego.
- Disposición a expresar por escrito, de manera amplia, sus justificaciones y argumentaciones, tanto en las siete hojas de trabajo, como en los dos cuestionarios.

IV.4 TOMA DE DATOS

La toma de datos se realizó a partir de las siguientes herramientas de investigación:

- Las hojas de trabajo que constituyeron la evidencia escrita de la tarea realizada por los estudiantes durante la aplicación de la secuencia didáctica.
- La observación sistemática del trabajo realizado en el aula.
- Las grabaciones de audio realizadas por la profesora/investigadora durante la aplicación de cada actividad, en relación con aspectos relevantes de la participación de los alumnos.
- Las observaciones y comentarios registrados por la profesora/investigadora tras la revisión de las respuestas plasmadas en las hojas de trabajo y a propósito de las sesiones de discusión e institucionalización.

CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y RESULTADOS

V.1 EL INSTRUMENTO DE DIAGNÓSTICO

El Cuestionario 1 constituye un instrumento de diagnóstico diseñado para recoger evidencias en relación con los conocimientos previos de los estudiantes. Este instrumento contiene ocho reactivos que conducen la actividad del alumno, solicitándole que responda una pregunta, que complete una afirmación, o bien, que realice una tarea.

Los reactivos fueron elaborados con el propósito de identificar aquellas dificultades relacionadas con los conocimientos previos de los estudiantes, que pudieran obstaculizar la construcción de significados durante la implementación de la secuencia didáctica. En otras palabras, el Cuestionario 1 fue elaborado para detectar, en el trabajo de los estudiantes, sistemas de prácticas consistentes con los objetos personales que, durante el diseño de las actividades didácticas, fueron considerados como *intervinientes*. El instrumento de diagnóstico se orientó hacia la identificación de conocimientos previos suficientes en relación con: a) la pendiente de una recta, b) las gráficas y expresiones analíticas de funciones lineales y cuadráticas, c) la visualización gráfica de una función positiva o negativa, en relación con el intervalo del dominio respectivo y d) la visualización gráfica de una función creciente o decreciente, en relación con el intervalo del dominio respectivo (Ver Anexo I).

V.2 LA SECUENCIA DIDÁCTICA

V.2.1 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA

V.2.1.2 LA FUNCIÓN DERIVADA

Con objeto de caracterizar el significado institucional de referencia de la función derivada, se revisaron algunos textos que forman parte de la bibliografía recomendada para el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, correspondiente a los programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

A continuación se presenta un análisis ontológico-semiótico de los textos seleccionados, identificando los objetos primarios que se ponen en juego en las propuestas bibliográficas respectivas.

- **Situaciones:** Identificación de la derivada como una función obtenida a partir de *f*.
- **Conceptos:** función, dominio de una función, punto, recta, recta tangente, pendiente, tabla, gráfica, expresión analítica, derivada en un punto, función derivada, rapidez de cambio, función constante, función lineal, función creciente, función decreciente, etc.
- **Procedimientos:** Se identifican tareas como las siguientes:
  - Con apoyo en la definición de derivada en un punto específico de abscisa *a*, cambio de perspectiva para considerar al punto (*a*,*f*(*a*)) como un punto cualquiera, (*x*,*f*(*x*)).
  - Acercamiento geométrico a un punto de la gráfica de *f*, hasta que ésta parezca una recta, para declarar que la pendiente de ésta es la derivada en ese punto.
  - Estimación de valores puntuales de la función derivada $f'(x)$, a partir de la gráfica de *f* presentada con una cuadrícula de respaldo que permite, mediante el trazo con regla de un pequeño segmento de la recta tangente en cada punto dado de *f*, determinar su pendiente y construir una tabla con los valores de $f'(x)$ estimados.
  - Graficación de los valores puntuales de $f'(x)$ obtenidos con la ayuda de la cuadrícula para una función *f* dada, para construir la gráfica de la función derivada.
  - Visualización de la relación entre el signo de la función f' y el sentido de la inclinación de la recta tangente a *f*.
  - Asociación del comportamiento constante de la función *f* con el valor nulo de f'.

- Relación entre el comportamiento creciente o decreciente de *f* y el signo positivo o negativo de $f^{'}$.

- Relación entre la magnitud de la derivada (o magnitud de la rapidez de cambio) con la magnitud de la inclinación de la curva.

- Determinación de la representación numérica aproximada de $f^{'}$ a partir de una tabla correspondiente a valores dados de la función *f*, mediante cocientes de diferencias.

- Determinación de la expresión analítica de $f^{'}$, dada la expresión analítica de *f*, vía límites.

- Identificación de la *diferenciabilidad* de *f*, a partir de la existencia del límite en cada elemento del dominio de *f*, es decir, del carácter localmente lineal de la gráfica de *f*.

➢ **Proposiciones:** Durante la tarea matemática intervienen o emergen propiedades de los objetos involucrados como las siguientes:

- La derivada de una función en un punto expresa la rapidez con la que el valor de la función cambia en ese punto.

- A medida que se da el acercamiento a un punto de la gráfica de *f*, la curva se parece cada vez más a una recta, y esta recta es la recta tangente a la gráfica de *f* en ese punto.

- El valor de $f^{'}$ en *x*, $f^{'}(x)$, puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(x, f(x))$.

- Como para cada valor de *x*, hay un correspondiente valor de la derivada, ésta es una función de *x*.

- Una función *f* es *diferenciable* (o tiene derivada) en *x*, si $f^{'}$ existe para dicho valor de *x*.

- Si f' existe para todos los valores del dominio de *f*, se dice que *f* es *diferenciable siempre.*
- El dominio de f' es un subconjunto del dominio de *f*.
- Si $f'>0$ en un intervalo, *f* es *creciente* en ese intervalo.

  Si $f'<0$ en un intervalo, *f* es *decreciente* en ese intervalo.
- Cuanto mayor es la magnitud de la derivada (o magnitud de la rapidez de cambio) mayor es la magnitud de la inclinación de la curva *f*.

➢ **Argumentos:**

- El paso al límite justifica que la rapidez promedio de cambio de *f* para un intervalo en $[x,x+h]$ se convierta en la rapidez instantánea de cambio de *f* en *x*, lo que define a la derivada en un punto.
- La noción de *linealidad local* permite observar que, a medida que se da el acercamiento a un punto de la gráfica de *f*, la curva y su recta tangente se vuelven cada vez más parecidas.
- La definición puntual de derivada tiene su interpretación geométrica en la pendiente de la recta tangente como límite de pendientes de rectas secantes.
- Una función se define como una regla de correspondencia que asocia a cada elemento del dominio un único elemento en el contradominio.
- Si el límite que define a la derivada existe en un punto de la gráfica de *f*, se dice que la función es derivable o diferenciable en dicho punto.
- Si el límite que define a la derivada existe para todo el dominio de *f*, se dice que la función es derivable o diferenciable siempre.
- El dominio de f' se define como el dominio de *f* menos aquellos valores de *x* para los cuales la recta tangente no exista (no haya un único segmento que aproxime a la curva en *x*) o tenga una pendiente cuyo valor no sea un número real (recta tangente vertical).

- Si $f'>0$, la recta tangente a *f* es creciente. Si $f'<0$, la recta tangente a *f* es decreciente. Si $f'=0$, la recta tangente es horizontal.
- Dado que la derivada se define como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, en virtud del parecido entre la curva y la recta tangente en las vecindades de dicho punto, el valor de la derivada puntual es una medida de la magnitud de la inclinación de la curva en el punto dado.

➢ **Lenguaje:**

- ***Verbal:*** Designaciones nominales de conceptos y proposiciones, así como de los argumentos que los explican o justifican.
- ***Gráfico:*** Gráfica de *f*, gráfica de la recta tangente en un punto dado de la gráfica de *f*, gráfica de la función derivada.
- ***Numérico:*** Tabla de la función *f*, tabla de la función f'.
- ***Analítico:*** Definición de la derivada puntual y de la función derivada vía límite, notación funcional asociada a la función derivada y a la derivada en un punto.

Para realizar la revisión bibliográfica que permitiera caracterizar el significado institucional de referencia de la función derivada, se eligieron cuatro textos.

1. *Cálculo.* Hughes, D., et al.
   Segunda Edición. CECSA, 2000.
2. *El Cálculo.* Leithold, D.
   Séptima Edición. Oxford University Press, 1998.
3. *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* Stewart, James.
   Cuarta Edición. Thomson Learning, 2001.
4. *Cálculo de una variable.* Thomas, G.
   Undécima Edición. Pearson Addison Wesley, 2005.

En esta selección se pretendió abarcar una variedad de propuestas, que resultara representativa de los diversos enfoques orientados hacia los cursos de Cálculo del nivel universitario, en relación con la enseñanza de la función derivada. Así, se eligieron los textos de Hughes y Leithold, no sólo porque forman parte de la bibliografía sugerida en el programa oficial de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I, sino, además, porque contienen el enfoque más innovador y el tradicionalmente más utilizado, respectivamente. Los libros de Stewart y Thomas, por otro lado, fueron seleccionados por haber sido calificados como recomendables por algunos profesores y alumnos de la materia, a quienes se consultó al respecto.

La revisión realizada sobre los textos seleccionados de la bibliografía sugerida para la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I, muestra que, en general, el abordaje de la función derivada parte de la definición puntual de derivada, bajo el supuesto de que, para que el estudiante logre *dar el salto* hacia la noción funcional de ésta, basta involucrarlo un juego de lenguaje como el que se muestra, de manera explícita, en uno de los textos analizados (Stewart): *hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante, durante el cálculo del límite.* Se considera, pues, que es en este punto donde los conflictos semióticos pudieran ser tan serios, que llegaran a dificultar (o incluso impedir) el arribo del alumno a la interpretación de la derivada como una función.

A continuación se señalan los rasgos principales que se identificaron entre los textos analizados:

- Thomas y Leithold hacen una presentación de la función derivada que parte de la definición de derivada en un punto, para que de ahí, una vez que al alumno considere a dicho punto como *un punto cualquiera* en el dominio de la función, surja la derivada como una función. Estos autores ni siquiera implementan un juego de lenguaje que acompañe al estudiante a establecer la conexión entre las nociones puntual y funcional de derivada.

- Stewart, por otro lado establece que, dado que a cada número x puede asignársele el número $f'(x)$, si para dicho x el límite aludido existe, puede considerarse el surgimiento de una nueva función, denotada por f', a la que se le denomina *función derivada de* f. El tratamiento que este texto hace de la derivada como función utiliza recursos que incorporan elementos geométricos que favorecen un acercamiento más intuitivo. Es decir, aunque no plantea propiamente un proceso de linealización, sí coloca un pequeño segmento de recta sobre un punto *P* de la gráfica de *f*, que representa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, con objeto de aproximar el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto *P*. Así, para construir la gráfica de la función derivada, ubica sobre el plano cartesiano los diversos puntos de coordenadas (*abscisa de P, pendiente de la recta tangente en el punto P)* que se obtienen a partir del procedimiento descrito.

- El texto de Hughes-Hallet se distingue por involucrar en sus planteamientos una gran riqueza de elementos lingüísticos; es decir, en él se echa mano de una cantidad importante de recursos gráficos, numéricos, analíticos y verbales (regla de cuatro), lo que se traduce en una propuesta que promueve, en el alumno, la incorporación de un sistema de prácticas que pudieran enriquecer su significado personal en torno al objeto función derivada. Concretamente, se propone un acercamiento geométrico a un punto de la gráfica de *f*, hasta que ésta parezca una línea recta, para declarar que la pendiente de esta línea recta es la derivada en ese punto. Se plantea, como argumento equivalente al anterior, la visualización de la derivada como la pendiente de la recta tangente en el punto, porque a medida que se da el acercamiento, la curva y su recta tangente se vuelven muy parecidas. Además, se propone la estimación de valores puntuales de la función derivada $f^{'}(x)$, a partir de la gráfica de *f*, que se presenta con una cuadrícula de respaldo; mediante el trazo con regla de un pequeño segmento de recta tangente en cada punto de la gráfica de *f*, se determina su pendiente y se construye una tabla con los valores de $f^{'}(x)$ estimados. Finalmente, se declara que, como para cada valor de *x*, hay un correspondiente valor de la derivada, ésta es una función de *x*, haciendo emerger así a la función derivada de *f*.

V.2.1.2 LA RECTA TANGENTE

Tradicionalmente, en los cursos de Cálculo Diferencial las nociones de derivada y de tangencia van asociadas, de manera que la definición de recta tangente en un punto de una curva se da como consecuencia de la definición puntual de derivada, obtenida ésta como el límite de un cociente incremental. Así, es frecuente utilizar el límite de las pendientes de las rectas secantes para introducir a la recta tangente y a la derivada, o bien, comenzar por definir a la derivada en un punto como el límite del cociente incremental, para después darle a éste una interpretación geométrica.

En general, los textos de Cálculo enfocan el tratamiento de la recta tangente ya sea de una forma breve y puramente intuitiva, o bien, a partir de una extensa discusión que comienza con una noción intuitiva y termina con una definición formal en términos de la derivada.

Como se hizo en la sección anterior en torno a la función derivada, aunque no con tanto detalle, se presenta a continuación un análisis ontológico-semiótico de los textos seleccionados, identificando los objetos primarios que se ponen en juego en las propuestas bibliográficas respectivas, en general, respecto a la recta tangente.

Los acercamientos analizados parecen estar de acuerdo en proponer como ***situación problema*** la identificación de la expresión analítica de la recta tangente a la gráfica de una función *f* en un punto $P=(a, f(a))$. Entonces, para resolver la situación planteada, parten de una definición de recta tangente, en términos del límite que define a la derivada; es decir, la caracterizan, más o menos, como se presenta en el siguiente recuadro:

> *Definición:* La recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P=(a, f(a))$ es la recta que pasa por P y tiene por pendiente
>
> $$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{o bien} \quad m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> siempre que el límite exista.

Se hace la advertencia al lector de que la definición anterior equivale a identificar a la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes que pasan por *P* y por un punto auxiliar, a medida que éste se acerca a *P*.

Como ***conceptos*** asociados al de recta tangente, pueden identificarse otros como los de función, punto, recta, recta secante, pendiente, gráfica, límite, derivada en un punto, punto de tangencia, ecuación de la recta tangente.

Así, los ***procedimientos*** se reducen a la determinación de la pendiente de la recta tangente en el punto P, a partir del cálculo del límite correspondiente para una función f dada, para después determinar la ecuación respectiva, con base en la técnica punto-pendiente.

A excepción de Thomas, los autores atribuyen a la recta tangente la propiedad de tener la misma pendiente que la curva en el punto P, ***proposición*** que tiene como ***argumento*** asociado el hecho de que, si se realiza un acercamiento suficiente a la curva, alrededor del punto P, ésta parece una recta, indistinguible de su recta tangente.

Los elementos de ***lenguaje*** presentados en estos textos no van más allá de los siguientes:

- *Verbal:* Designaciones nominales de conceptos y proposiciones, así como de los argumentos que los explican o justifican.
- *Gráfico:* La clásica representación de la recta secante que pasa por P y Q que, a medida que Q se acerca a P, se aproxima a la recta tangente en el punto P. Además, Stewart y Hughes presentan recuadros que muestran acercamientos sucesivos a la curva en torno a P, para observarla como un segmento de recta.
- *Numérico:* El libro de Hughes es el único que utiliza representaciones tabulares para ilustrar el comportamiento numérico del cociente incremental, conforme el incremento en las abscisas tiende a cero, alrededor del punto P.
- *Analítico:* Se calcula de forma analítica la pendiente de la recta tangente mediante el límite correspondiente y se obtiene, a partir de las coordenadas de P, la expresión analítica de la recta tangente respectiva.

Aún en el caso del libro de Hughes-Hallet, considerado como de los más innovadores en torno a la derivada, por identificar a la variación como el eje rector de la práctica matemática desarrollada y propuesta, los textos revisados permiten apreciar cuál es el tratamiento tradicional que se hace de la recta tangente en la bibliografía sugerida en los cursos de Cálculo.

La actividad matemática que se propone en este trabajo no implica un trato directo con la recta tangente, sino con la curva visualizada como recta en las cercanías de un punto. Sin embargo, se identifica a la noción de tangencia como de naturaleza no trivial, fuertemente amarrada a una idea intuitiva en relación con la circunferencia, que, frecuentemente, dificulta su evolución en cuanto a los propósitos del Cálculo.

Por lo anterior, se consideró importante investigar, en la literatura disponible, sobre alguna visión diferente que promoviera la caracterización de la recta tangente, un tanto al margen de la derivada. Las propuestas presentadas por los trabajos de Bivens (1986) y Riestra (2003) constituyen el resultado de tal investigación bibliográfica, ya que, sin descuidar la formalidad matemática, proponen acercamientos intuitivos fuertemente apoyados en recursos visuales asociados a las representaciones gráficas de las funciones.

Respecto a los trabajos mencionados, la idea subyacente a cada uno de ellos pudiera resumirse como sigue:

En su artículo, Bivens caracteriza a la recta tangente como *la mejor aproximación lineal de una función en las cercanías de un punto P*, desde la perspectiva de que ninguna otra recta que pase por P cumpliría dicha condición, para, finalmente, demostrar, desde la caracterización anterior y a partir de consideraciones tanto geométricas como analíticas, que si la gráfica de una función f tiene una recta tangente en $P=(a, f(a))$, entonces su pendiente será $f'(a)$.

El enfoque de Riestra, por su parte, define *el tipo de parecido que debe existir entre una curva y su recta tangente en un punto dado*, como condición indispensable para que ésta pueda confundirse con aquélla en las cercanías del punto, identificado dicho parecido con lo que se denomina *contacto de primer orden*.

Desde la perspectiva de la actividad matemática propuesta por la secuencia didáctica que nos ocupa, estos dos planteamientos son consistentes con la intención de promover que el estudiante relacione la pendiente del segmento visualizado con la de la recta tangente y, sobre todo, que, dada la visualización de la recta que mejor aproxima a la curva en las cercanías de un punto dado, el alumno identifique a su pendiente como la derivada en dicho punto.

Los rasgos esenciales de los planteamientos de Bivens y Riestra, cuya formalidad matemática se orienta hacia la articulación entre la geometría de la recta tangente y la definición de derivada a través de límites, se presentan con detalle en el Anexo VII.

V.2.2 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO

Del significado institucional de referencia, se seleccionó un subsistema de prácticas, con la intención de identificar nuestro significado institucional pretendido. La idea es que la implementación de dicha selección en el aula mediante la secuencia didáctica propuesta, contribuya a impactar el significado personal logrado, al aplicarla a un grupo de estudiantes de primer semestre de ingeniería, de la Universidad de Sonora.

El significado institucional pretendido se describe como sigue:

- **Situaciones:**
  - Visualización de la *recta tangente* a una curva en un punto dado como la mejor aproximación lineal de la gráfica correspondiente en las cercanías de dicho punto.
  - Construcción de la función derivada a partir de la visualización dinámica de la linealidad local de la función *f*.
  - Visualización de algunas condiciones de no derivabilidad puntual de la gráfica de una función, mediante acercamientos sucesivos asistidos por la herramienta tecnológica.
- **Conceptos:** función, dominio de una función, punto, recta, recta tangente, pendiente, tabla, gráfica, expresión analítica, derivada en un punto, función derivada, funciones algebraicas, polinomios, funciones trascendentes, función derivable, función no derivable en un punto, función creciente, función decreciente, etc.
- **Procedimientos:** Se identifican tareas como las siguientes:

- Con la ayuda de un software linealizador, realizar acercamientos sucesivos a un punto de la gráfica de una función, hasta visualizar cómo la curva y su recta tangente se confunden en las cercanías del punto de tangencia.
- Construir la tabla de la función derivada, a partir del cálculo de la pendiente del segmento visualizado para cada punto de abscisa dada, a partir de una cuadrícula de referencia.
- Graficar la función derivada con base en las parejas ordenadas dadas por la tabulación anterior.
- Identificar la expresión analítica de la función estudiada y de su función derivada, con base en conocimientos previos sobre las principales funciones del Cálculo.
- Relacionar el comportamiento de una función (creciente o decreciente) con el signo de la función derivada.

➢ **Proposiciones:** Durante la tarea matemática intervienen o emergen propiedades de los objetos involucrados como las siguientes:

- El segmento visualizado coincide con la recta tangente a la curva en el punto de tangencia.
- La recta tangente es la recta que mejor aproxima a la gráfica de una función f en las cercanías del punto de tangencia.
- La función derivada es la que permite medir la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de una función f en cualquier punto de abscisa x.

➢ **Argumentos:**

- El software linealizador permite justificar visualmente que el segmento observado al aplicar el zoom está sobre la recta tangente.
- La noción de linealidad local permite observar que, a medida que se da el acercamiento a un punto de la gráfica de f, la curva y su recta tangente se vuelven cada vez más parecidas.

- La función derivada $f^{'}(x)$ está constituida por todos los puntos de coordenadas $(x,m_t(x))$, donde $m_t(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x.

➢ **Lenguaje:**

- ***Verbal:*** Designaciones nominales de conceptos y proposiciones, así como de los argumentos que los explican o justifican.
- ***Gráfico:*** Gráfica de *f*, gráfica del segmento visualizado, gráfica de la recta tangente en un punto dado de la gráfica de *f*, gráfica de la función derivada.
- ***Numérico:*** Tabla de la función derivada.
- ***Analítico:*** Expresiones analíticas de f y $f^{'}$.

V.2.3 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL IMPLEMENTADO

V.2.3.1 ASPECTOS GENERALES

Una vez incorporados los elementos arrojados por el pilotaje de prueba, y como resultado de la aplicación de la secuencia didáctica al Grupo 6 de Cálculo Diferencial e Integral I, del primer semestre de la carrera de Ingeniería Química, se evidenciaron situaciones interesantes en relación con las funciones docentes, que se comentan a continuación.

El pilotaje de prueba mostró la necesidad de efectuar algunas modificaciones de redacción al instrumento de diagnóstico y a las hojas de trabajo, las cuales fueron consideradas suficientes, ya que en la aplicación definitiva no se sugirieron cambios adicionales.

Aunque se tenía plena conciencia de la importancia de la intervención oportuna del profesor durante la implementación de la secuencia, sobre la marcha se hizo evidente la necesidad de incorporar, al inicio de cada sesión de trabajo, un espacio de retroalimentación en relación con la actividad anterior, buscando promover la discusión e institucionalización respecto a los resultados observados en las respuestas a las hojas de trabajo. Así, las funciones docentes de *regulación*, *evaluación* e *investigación* tuvieron que ser realizadas con un mayor nivel de profundidad y cuidado, tanto al inicio como al final, pero sobre todo durante el proceso de aplicación de la secuencia.

Por otra parte, las funciones de *motivación* y *asignación* tuvieron que intensificarse, debido a que un número importante de alumnos disponía de más información que la deseable, lo que amenazaba con perjudicar el desarrollo de la aplicación. Fue necesario intervenir estratégicamente, buscando reorientar o neutralizar, en la medida de lo posible, las participaciones impulsivas de algunos estudiantes que pretendían ahorrar tiempo de manipulación del software, apoyados en nociones previas que los movían a anticipar resultados, sobre todo en el desarrollo de las primeras actividades. Es importante destacar la presencia de estudiantes cuyos conocimientos previos se observaron muy por debajo de lo esperado, a pesar del trabajo de regulación que se realizó en torno a la construcción de significados personales suficientes para la realización de la actividad didáctica.

En lo que respecta a la *planificación*, a partir de los resultados esperados en contraste con los observados, en principio pudiera concluirse la necesidad de reducir estratégicamente el número de actividades, buscando optimizar el interés y la concentración a lo largo de la aplicación, lo que implicaría menos sesiones aunque de una mayor extensión cada una.

V.2.3.2 LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Cada actividad didáctica da inicio con la asignación del equipo de cómputo a los estudiantes, a razón de una computadora por cada dos alumnos. Se proporciona al grupo la dirección web que contiene las ligas a los applets a utilizar y, posteriormente, se procede a la entrega de la hoja de trabajo correspondiente. Se espera que las indicaciones impresas constituyan la guía suficiente para la realización de la actividad didáctica respectiva, lo que implica para el profesor, en su papel conductor del proceso de instrucción, cuidar su intervención durante el desarrollo de cada actividad, buscando promover en el estudiante el mayor grado de reflexión posible.

La tarea intramatemática esencial en la secuencia didáctica presentada en este trabajo tiene como punto de partida la observación de la linealidad local de una función *f*, cuya expresión analítica se desconoce. Así, mediante la aplicación de una técnica de acercamiento asistida por computadora, el alumno puede visualizar la gráfica de f localmente como un segmento de recta que coincide con la recta tangente a la curva en el punto dado. En este sentido, es importante precisar que la secuencia didáctica no involucra directamente a la recta tangente en un punto dado, sino que ésta es percibida por el estudiante cuando la identifica como la recta que, pasando por dicho punto, tiene la misma pendiente que el segmento visualizado.

La secuencia didáctica está constituida por siete actividades didácticas, a implementarse en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, correspondiente al primer semestre de los programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora. Cada una de las actividades está conformada por los siguientes elementos:

- *Applet Linealizador*. Escenario interactivo configurado con el Applet Descartes, que constituye el recurso indispensable para la realización del ejercicio (ver Anexo V). Descartes es un programa realizado en lenguaje Java, lo que se denomina un *applet*. Por su característica de ser configurable, Descartes permite diseñar escenas interactivas a modo de pizarras electrónicas que pueden insertarse en las páginas web. Cada una de estas escenas es, a su vez, un pequeño applet, que ofrece al usuario la posibilidad de interactuar con él y observar en pantalla los efectos de dicha interacción. El programa puede descargarse gratuitamente en el sitio http://descartes.cnice.mec.es/
- *Hoja de Trabajo.* Material impreso y diseñado ex profeso que pretende ser suficiente para conducir al estudiante durante el desarrollo de cada actividad. Este documento contiene una colección de gráficas de funciones, analíticamente no identificadas, seleccionadas cuidadosamente con objeto de simplificar la tarea esencial, así como una serie de indicaciones y preguntas que constituyen la guía de trabajo (ver Anexo VI).

La articulación de los elementos anteriores busca facilitar que el profesor, con un mínimo de intervención que propicie en el alumno el mayor grado de reflexión posible, juegue el papel de *conductor* de la actividad didáctica, promoviendo así que el estudiante se vuelva el sujeto *ejecutor* de la práctica, de la manera más autónoma posible.

V.2.3.3 EL APPLET LINEALIZADOR

La viabilidad de implementar una secuencia didáctica como ésta se apoya en los recursos visuales que la herramienta informática, particularmente el Applet Descartes, pone a disposición de los profesores, entre otras cosas, para mejorar sus prácticas docentes. Descartes es un programa realizado en lenguaje Java, lo que se denomina un applet. Por su característica de ser configurable, Descartes permite diseñar escenas interactivas a modo de pizarras electrónicas que pueden insertarse en las páginas web. Cada una de estas escenas es, a su vez, un pequeño applet, que ofrece al usuario la posibilidad de interactuar con él y observar en pantalla los efectos de dicha interacción. El programa puede descargarse gratuitamente en el sitio http://descartes.cnice.mec.es/

En el caso particular de este trabajo, la configurabilidad de Descartes permitió el diseño de una escena interactiva o applet denominado *Linealizador* que, como su nombre lo sugiere, posibilita la visualización de la linealidad local, así como la interacción dinámica de los estudiantes con las diferentes representaciones de la función derivada, lo que permite ofrecer al estudiante una experiencia mucho más ágil y eficaz que el acercamiento tradicional a dicho objeto matemático.

Los applets linealizadores, que constituyen la herramienta principal de trabajo de la secuencia didáctica, fueron diseñados, mas no configurados, por la profesora/investigadora. La configuración de los applets corrió a cargo del M.C. Eduardo Tellechea Armenta, cuya amplia experiencia en el diseño de ambientes interactivos con Descartes hizo posible la materialización de las capacidades de visualización y acercamiento requeridas (Tellechea, 2004, 2005, 2006, 2007).

La correspondencia entre los applets de trabajo y cada una de las actividades didácticas (ver Anexo V) se presenta a continuación.

Actividad 1: En esta primera actividad se utilizan dos applets. El applet denominado rectatangente1.htm se utiliza para aplicar la técnica de acercamiento, facilitada por el software, al reconocimiento de la recta tangente a la circunferencia y a la determinación de su pendiente. El applet rectatangente2.htm se utiliza posteriormente para promover la evolución de una noción primaria de recta tangente, que tiene su origen en el caso de la circunferencia, hacia otro tipo de curvas, como las correspondientes a una función cuadrática y a una función cúbica.

Actividad 2: En esta actividad se emplea el applet inclinacurva2.htm, para observar la linealidad local de un conjunto de rectas. Pudiera parecer que esta actividad resultaría trivial para los estudiantes, pero, por experiencias anteriores con este tipo de acercamientos, se vio la necesidad de considerar a éste como el primer ejercicio de construcción de la función derivada. Se asume que propiciar que el estudiante desarrolle la actividad, para concluir después que no era necesario activar el applet, contribuye a ampliar su sistema de prácticas y promueve, por lo tanto, la construcción de significado en torno a la función derivada de una función lineal.

Actividad 3: La tercera actividad de la secuencia utiliza el applet inclinacurva3.htm para estudiar la linealidad local de un conjunto de parábolas.

Actividad 4: En esta cuarta actividad se utiliza el applet inclinacurva4.htm para aplicar la técnica de acercamiento a dos polinomios de grados 3 y 4. Dado que la determinación de la expresión analítica de la función *f* no resulta muy accesible para la mayoría de los estudiantes, este applet, a diferencia de los demás, incluye una herramienta de identificación que permite al alumno ratificar o rectificar su respuesta.

Actividad 5: Esta quinta actividad de la secuencia hace uso del applet inclinacurva5.htm para estudiar las gráficas de cuatro funciones trascendentes, cuidadosamente seleccionadas. Esta selección incluye a las funciones $f(x) = senx$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = sen2x$ y $f(x) = \ln x$, cuyas gráficas se consideran familiares para los estudiantes.

Actividad 6: Esta actividad utiliza el applet inclinacurva6.htm para facilitar que el estudiante construya la gráfica de la función derivada de una sola función: la exponencial natural. El estudio de esta función se postergó para la sexta actividad de la secuencia, debido a su importancia como la única función cuya derivada es igual a ella misma, y porque, dada su naturaleza, enfrenta al estudiante con la necesidad de aproximar la pendiente del segmento visualizado, ante la imposibilidad de identificar un triángulo rectángulo cuyos catetos resulten enteros, como ocurre en los casos anteriores. Se espera, pues, que el estudiante, al observar que los valores de las pendientes caen sobre la curva de la función *f*, reconozca a aquella función especial que se estudió en la fase de pre-cálculo.

Actividad 7: La última actividad de la secuencia utiliza el applet inclinacurva7.htm para observar la no derivabilidad puntual de tres funciones seleccionadas. Las funciones elegidas favorecen la visualización de la no linealidad local de sus gráficas en ciertos puntos, con objeto de que el estudiante concluya que la no derivabilidad puntual de una función continua se asocia con cambios bruscos de la curva, o bien, con la existencia de una recta tangente vertical. Las funciones seleccionadas fueron las siguientes: $f(x) = \begin{cases} x^2 & para \;\; x \leq 1 \\ x^3 & para \;\; x > 1 \end{cases}$, $f(x) = \left| x^2 - 1 \right|$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

En el Anexo V, además de los vínculos a los applets correspondientes, se presentan las carátulas de las ocho escenas interactivas.

V.2.3.4 LAS HOJAS DE TRABAJO

El material impreso diseñado para conducir el proceso de instrucción y recabar las respuestas de los alumnos se compone de siete hojas de trabajo. Cada una de las hojas de trabajo contiene, además del conjunto de gráficas correspondientes a las funciones cuya linealidad local se pretende visualizar, una serie de indicaciones y preguntas que pretenden constituir una guía suficiente para la realización de la tarea (ver Anexo VI).

Las actividades didácticas que se desarrollan mediante las siete hojas de trabajo pueden describirse brevemente como sigue:

- *Actividad 1*

  Esta primera actividad tiene como propósito hacer evolucionar en el estudiante su noción primaria de recta tangente, como la recta que toca a la curva en un único punto, noción que proviene del estudio de la circunferencia en el nivel básico. Se trata de lograr esa evolución a partir de una justificación visual de la proposición matemática que es el eje de la tarea promovida por la secuencia didáctica propuesta: *la recta tangente es la recta que mejor aproxima a una curva en las cercanías del punto de tangencia.*

La argumentación planteada por esta primera actividad constituye lo que se denomina *un razonamiento plausible* (Polya,1954), ya que se trata de una demostración verosímil o convincente de que la recta tangente coincide con el segmento visualizado. Así, el proceso de acercamiento (zoom), posible gracias a los recursos visuales del applet Linealizador, permite mostrar al estudiante que, de todas las rectas que pasan por un punto dado de la curva, la que mejor aproxima a ésta en las cercanías del punto es la que tiene como pendiente la misma que el segmento visualizado y, tras un proceso de discusión e institucionalización, que dicha recta se identifica como la recta tangente. De aquí en adelante, se espera que el estudiante relacione sin dificultad la pendiente del segmento visualizado con la de la recta tangente en el punto dado.

- *Actividad 2*

Dada una terna de rectas, se plantea la construcción de la función pendiente de la recta tangente, $m_t(x)$, considerando las tres posibilidades: una recta creciente ($m>0$), una recta decreciente ($m<0$) y una recta horizontal ($m=0$).

Con esta actividad se pretende propiciar que el estudiante concluya que, cuando f es lineal, la determinación de la función $m_t(x)$ no requiere de la ayuda del software. Además, se busca que el alumno reflexione sobre el hecho de que la función $m_t(x)$ resulta ser constante en todos los casos, así como sobre la relación entre el signo de la pendiente y el comportamiento de la recta como creciente o decreciente.

- *Actividad 3*

En este caso el proceso linealizador se aplica a un conjunto de gráficas de funciones cuadráticas. Se presenta un conjunto de parábolas que permite al estudiante observar diversas situaciones en cuanto a concavidad y traslaciones (vertical y horizontal).

El propósito de esta actividad es que el alumno deduzca que, cuando las funciones analizadas son cuadráticas, la función $m_t(x)$ resulta lineal, y que ésta es creciente o decreciente como resultado de la concavidad de la parábola correspondiente. También se espera que deduzca los efectos de las traslaciones vertical y horizontal sobre la expresión analítica de la función $m_t(x)$.

Tanto en la actividad 2 como en la 3, se espera que el estudiante sea capaz de realizar por sí mismo la identificación analítica de la función f en cada caso.

- *Actividad 4*

Esta actividad propone al estudiante un proceso linealizador aplicado a las gráficas de dos polinomios: uno de grado 3 y otro de grado 4. Ambos polinomios se han seleccionado cuidadosamente para facilitar la identificación analítica de la función $m_t(x)$ correspondiente.

Lo que se persigue con esta actividad es que el estudiante concluya, a partir de lo observado en las actividades anteriores, que, para un polinomio de grado 3 o 4, la función $m_t(x)$ resultante es un polinomio de grado 2 o 3, respectivamente.

- *Actividad 5*

Para esta actividad didáctica se presenta una selección de gráficas de funciones trascendentes que se consideran esenciales en el estudio del Cálculo. Cabe hacer la aclaración de que entre las gráficas seleccionadas no se incluye la de la función exponencial natural, pues, dada su importancia, se le considera como única función a analizar en la actividad siguiente.

El objetivo de la actividad 5 es que el alumno, además de identificar la función derivada de cada una de las funciones trascendentes seleccionadas, tenga un primer acercamiento, aunque mínimo, a la Regla de la Cadena y que éste, en su momento, pueda ser retomado como apoyo.

- *Actividad 6*

La observación de la linealidad local de la función exponencial natural se ha postergado para esta sexta actividad. De las gráficas seleccionadas para su análisis a lo largo de la secuencia, la de la función exponencial natural es la única que no se presta a que el estudiante lea, de manera precisa, la pendiente del segmento visualizado a partir de la cuadrícula de respaldo. Así, se pide al alumno que aproxime, lo mejor posible, el valor de la pendiente en cada caso, con la intención de que, al colocar los puntos determinados por la tabla sobre el plano cartesiano, observe cómo éstos se ubican sobre la gráfica de *f*, a diferencia de lo que ocurre en las actividades anteriores.

Un aspecto importante sobre el cual se pretende incidir a lo largo de las actividades de la 2 a la 6, es la identificación de los intervalos donde la gráfica de la función *f* es creciente o decreciente, y su relación con el signo de la pendiente de la recta tangente, lo que constituiría un primer contacto con los criterios de máximos y mínimos relativos.

- *Actividad 7*

  Esta actividad es la última de la secuencia y en ella se analizan las gráficas de tres funciones no derivables en uno o más puntos. Para estas funciones la causa de la no derivabilidad puntual puede referirse a cambios abruptos en la curva o a la existencia de una recta tangente vertical.

  Como puede apreciarse, el objetivo de esta actividad es esencialmente distinto al de las demás, pues se pretende poner al estudiante en contacto con la noción visual de *no derivabilidad en un punto*. Así, en dos de los casos se pretende llevar al estudiante a concluir que la diferencia entre una curva suave y otra que presenta algún cambio abrupto, radica en que sea posible o no visualizarla localmente como un segmento de recta único, mientras que, en el tercero, se busca que el alumno identifique que la derivabilidad en un punto está relacionada con un valor real de la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Se espera que este acercamiento introductorio alternativo orientado a la construcción de la función derivada, que involucra una menor complejidad semiótica que el tratamiento vía límites, constituya una experiencia intuitiva que dé sentido y agilidad al acercamiento formal, que se presentará en un momento posterior del curso.

Es importante mencionar que no se sugiere que la gráfica de cualquier función pueda hacer emerger su función derivada a partir de la linealidad local, dado que este acercamiento presenta restricciones en cuanto su ámbito de operatividad, las cuales se refieren esencialmente a dos supuestos:

- Salvo en el caso de la función exponencial natural (Actividad 6), la gráfica de f permite determinar con precisión el valor numérico de la pendiente del segmento visualizado, mediante el cociente de dos magnitudes enteras que corresponden a los catetos de algún triángulo rectángulo, las cuales se obtienen con la ayuda de la cuadrícula de respaldo.
- La identificación de la expresión analítica de la función derivada, en cada caso, es relativamente sencilla, una vez que se asegura un cierto grado de familiaridad del estudiante con las gráficas de las funciones principales del Cálculo.

Así, hay funciones, como las radicales o las trigonométricas, cuyas gráficas no son analizables de manera práctica desde la linealidad local, pero sí mediante otros acercamientos también alternativos al tratamiento a través de límites (Font, 2000).

De acuerdo a los planteamientos del Enfoque Ontosemiótico (Font, 2007), la técnica de acercamiento a la observación de la linealidad local, en el proceso de construcción de la función derivada, relaciona los siguientes ostensivos:

Gráfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ zoom Gráfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Tabla de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gráfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Expresión analítica de $f'(x)$

Así, para promover la emergencia de este objeto matemático a partir de las actividades didácticas que conforman la secuencia propuesta en este trabajo, dada la gráfica de una función f analíticamente desconocida, el alumno debe activar una trama de funciones semióticas, que puede describirse como sigue:

1. El objeto x se relaciona con el objeto *pendiente del segmento visualizado en el punto de abscisa x.*

2. El objeto *pendiente del segmento visualizado en el punto de abscisa x* se relaciona con el objeto *pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x*.
3. El objeto *pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x* se relaciona con el objeto $m_t(x)$.
4. El objeto x se relaciona con el objeto $m_t(x)$.
5. El objeto x se relaciona con el objeto $(x, m_t(x))$.
6. El objeto $(x, m_t(x))$ se relaciona con el objeto *gráfica de* $m_t(x)$; es decir, el objeto $(x, m_t(x))$ se relaciona con la clase a la cual pertenece.
7. El objeto *gráfica de* $m_t(x)$ se relaciona con el objeto *expresión analítica de* $m_t(x)$.
8. El objeto $m_t(x)$ se relaciona con el objeto $f'(x)$; es decir, una notación con otra diferente pero equivalente.
9. El objeto x se relaciona con la clase a la cual pertenece, al considerarla como la variable de la *función derivada* obtenida.
10. El objeto *función derivada* se relaciona con la clase a la cual pertenece.

Esta trama de funciones semióticas permite delinear la ruta a recorrer por el estudiante mediante la activación de los ostensivos correspondientes, recorrido que determina la efectividad de la práctica matemática propuesta.

V.2.4 ELEMENTOS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO

La base para la realización de este análisis es un modelo teórico presentado por el EOS, cuyo propósito es constituir una guía para describir, explicar y valorar procesos de instrucción en el aula de matemáticas. Este modelo teórico, en general, considera los siguientes cinco niveles:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Se presenta a continuación un ejercicio de descripción, explicación y valoración de la secuencia didáctica propuesta, con base en los cinco niveles mencionados.

V.2.4.1 ANÁLISIS DE LOS TIPOS DE PROBLEMAS Y SISTEMAS DE PRÁCTICAS

En este primer nivel de análisis, se pretende hacer una identificación de las prácticas matemáticas propuestas por la secuencia didáctica, entendidas como aquellas acciones o manifestaciones (lingüísticas o de otro tipo) realizadas a lo largo del proceso de instrucción, en cuanto a los problemas matemáticos involucrados, su resolución, comunicación o generalización a otros contextos y problemas.

Actividad 1

Las situaciones problema propuestas para cada una de las actividades de la secuencia son de naturaleza intramatemática, pues, en todos los casos, la tarea consiste en aplicar una técnica de acercamiento mediante el software, con objeto de visualizar la linealidad local de una curva en un punto.

En el caso particular de la Actividad 1, el propósito es el de conducir al alumno desde su noción de recta tangente como la que toca un solo punto de la circunferencia, hasta la conjetura de que la recta tangente puede tocar a la curva en más de un punto o cortarla y seguir siendo tangente en la zona de corte.

Como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Lectura y comprensión del texto impreso en la Hoja de Trabajo de la Actividad 1.
- Manipulación del applet Linealizador con objeto de observar la linealidad local de la curva en un punto dado, mediante acercamientos sucesivos.
- Determinación visual del valor numérico de la pendiente del segmento visualizado.
- Identificación de la pendiente del segmento visualizado con el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado.

- Manipulación del applet Linealizador con objeto de observar la construcción de la recta tangente sobre la curva en el punto dado, mediante alejamientos sucesivos.
- Identificación analítica de la ecuación de la recta tangente encontrada.
- Verificación visual de la validez de la definición de recta tangente como la que toca un solo punto de una curva, y tiene en dicho punto la misma pendiente que la curva.
- Redefinición de la recta tangente como aquélla que tiene en las cercanías del punto de tangencia la misma pendiente que la curva, lo que la hace localmente indistinguible de ésta.

Actividad 2

Las situaciones problema propuestas por esta actividad, se orientan hacia la aplicación de la técnica de acercamiento, con objeto de visualizar la linealidad local de una curva en un punto, y lo mismo sucede con las actividades 3, 4, 5 y 6 de la secuencia. El propósito general de estas cinco actividades es que, a partir de la gráfica de f y desde la noción de linealidad local, el alumno se apoye en la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente, para llegar a la identificación de la expresión analítica de la función derivada, $f\,'$.

Para esta Actividad 2, podemos identificar el siguiente sistema de prácticas:

- Lectura y comprensión del texto impreso en la Hoja de Trabajo de la Actividad 2.
- Manipulación del applet Linealizador con objeto de observar la linealidad local de una terna de rectas, mediante acercamientos sucesivos.
- Determinación visual del valor numérico de la pendiente del segmento visualizado para cada punto propuesto.
- Identificación de la pendiente del segmento visualizado con el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado.
- Tabulación de los valores de la pendiente de la recta tangente correspondientes a las abscisas de los puntos de tangencia dados.

- Construcción de la gráfica de la función que expresa la pendiente de la recta tangente para cada punto de abscisa *x*.
- Identificación de la expresión analítica de la función que expresa la pendiente de la recta tangente para cada punto de abscisa *x*, con base en conocimientos previos sobre gráficas de funciones.
- Identificación de la expresión analítica correspondiente a la curva original, con base en conocimientos previos sobre gráficas de funciones.
- Relación entre el comportamiento creciente o decreciente de una función lineal y el signo de la pendiente de su recta tangente.

Actividad 3

Como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Lectura y comprensión del texto impreso en la Hoja de Trabajo de la Actividad 3.
- Manipulación del applet Linealizador con objeto de observar la linealidad local de una selección de seis parábolas, mediante acercamientos sucesivos.
- Determinación visual del valor numérico de la pendiente del segmento visualizado para cada punto propuesto.
- Identificación de la pendiente del segmento visualizado con el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado.
- Tabulación de los valores de la pendiente de la recta tangente correspondientes a las abscisas de los puntos de tangencia dados.
- Construcción de la gráfica de la función que expresa la pendiente de la recta tangente para cada punto de abscisa *x*.
- Identificación de la expresión analítica de la función que expresa la pendiente de la recta tangente para cada punto de abscisa *x*, con base en conocimientos previos sobre gráficas de funciones.
- Identificación de la expresión analítica correspondiente a la curva original, con base en conocimientos previos sobre gráficas de funciones.

- Relación entre el comportamiento creciente o decreciente de una función cuadrática y el signo de la pendiente de su recta tangente.
- Identificación de los efectos de la traslación vertical u horizontal de una parábola, sobre la gráfica de la función que expresa la pendiente de la recta tangente.

Actividades 4, 5 y 6

En estas tres actividades didácticas se identifica un sistema de prácticas similar al de la Actividad 3, sólo que el enfoque se orienta hacia funciones polinomiales de grados 3 y 4 en la Actividad 4, hacia una selección de funciones trascendentes en la Actividad 5, y hacia la función exponencial natural en la Actividad 6. Con la intención de no complicar demasiado la tarea esencial, en estas actividades no se atiende a los efectos de trasladar vertical u horizontalmente la curva, pues, al respecto, las nociones abordadas en la Actividad 3 se consideran suficientes para un tratamiento posterior más profundo.

La Actividad 6 presenta una variante que es importante destacar: los valores de la pendiente del segmento visualizado para cada abscisa estudiada, no pueden ser determinados de manera exacta, dada la naturaleza de la función exponencial natural. En este caso, se pide al estudiante que aproxime, lo mejor posible, cada valor, y se espera que, al construir la gráfica de la función pendiente de la recta tangente, observe que, a diferencia de las otras actividades, la curva resultante *cae* sobre la correspondiente a la función *f*.

Actividad 7

El objetivo de esta actividad es esencialmente distinto al de las actividades precedentes, ya que busca poner al estudiante en contacto con la noción visual de *no derivabilidad en un punto*. Así, en dos de los casos, el propósito es llevar al estudiante a concluir que la diferencia entre una curva suave y otra que presenta algún cambio abrupto en su comportamiento gráfico, radica en que sea posible o no reemplazarla localmente por un segmento de recta único, mientras que, en un tercer caso, se busca que el alumno identifique que la derivabilidad en un punto está relacionada con un valor real de la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

En esta séptima actividad, como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Lectura y comprensión del texto impreso en la Hoja de Trabajo de la Actividad 7.
- Manipulación del applet Linealizador con objeto de observar la linealidad local de una curva en un punto dado, mediante acercamientos sucesivos.
- Utilización del lenguaje, verbal y/o gráfico, para explicar la imposibilidad de visualizar un comportamiento localmente lineal de la curva en el punto dado.

La identificación de estos elementos que conforman el sistema de prácticas identificado para cada actividad didáctica, permite observar el papel *ejecutor* del estudiante en el desarrollo de la tarea matemática, con apoyo en las indicaciones de la Hoja de Trabajo y en la eventual intervención del profesor, como *conductor* del proceso de instrucción.

V.2.4.2 CONFIGURACIONES

En este segundo nivel de análisis, la atención se centra sobre los objetos primarios puestos en juego en la realización de las prácticas matemáticas asociadas. El análisis se orienta, pues, hacia la identificación de las redes de objetos involucrados, a partir de la elaboración de *configuraciones*. Se seleccionó la Actividad 3 para presentar, a manera de ejemplo, la descripción de la trama de objetos asociada. Las configuraciones correspondientes al resto de las actividades didácticas se incluyen en el Anexo II.

Actividad 3

- **Lenguaje:**

  Intervinientes:

  - ***Verbal***: Función, gráfica, segmento visualizado, pendiente, recta tangente, punto de tangencia.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de una función *f*.

  Emergentes:

  - ***Verbal:*** Función, gráfica, función cuadrática, parábola, apertura de la parábola, concavidad, parábola cóncava hacia arriba, parábola cóncava hacia abajo, función creciente, función decreciente, segmento visualizado, pendiente, recta tangente, punto de tangencia, función pendiente de la recta tangente, tabla de la función pendiente de la recta tangente, gráfica de la función pendiente de la recta tangente, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.

- ***Gráfico:*** Gráfica de $m_t(x)$, gráfica de la función pendiente de la recta tangente.
- ***Tabular:*** Tabla de $m_t(x)$, tabla de la función pendiente de la recta tangente.
- ***Analítico:*** Expresión analítica de $m_t(x)$, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.

➢ **Situaciones:**

- Construcción de la *función derivada* a partir de la visualización dinámica de la linealidad local de la función *f*.

➢ **Conceptos:**

Intervinientes:

- Función, gráfica de una función cuadrática *f*, función cuadrática, parábola, abscisa, ordenada, recta, segmento, pendiente, recta tangente, linealidad local, tabla de una función cuadrática *f*, expresión analítica de una función cuadrática *f*.

Emergentes:

- Función derivada de una función cuadrática.

➢ **Procedimientos:**

Intervinientes:

- Con la ayuda del software (applet Linealizador), realizar acercamientos sucesivos a la gráfica de *f*, hasta observar a la curva como un segmento de recta alrededor de un punto de abscisa dada.

- Calcular el valor de la pendiente del segmento visualizado para cada punto de abscisa dada, a partir de la cuadrícula de referencia aportada por el applet.

Emergentes:

- Determinar la expresión analítica de *f* en cada caso, con base en conocimientos previos sobre gráficas.
- Tabular los valores de las pendientes obtenidos para cada segmento visualizado en el punto de abscisa dada, hasta obtener la tabla de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Graficar las parejas ordenadas $(a, m_t(a))$ obtenidas de la tabulación anterior y unir los puntos correspondientes para encontrar la gráfica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Con apoyo en los dos procedimientos anteriores, determinar la expresión analítica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*, identificándola finalmente como $f'(x)$.

- **Proposiciones:**

Intervinientes:

- El segmento visualizado coincide con la recta tangente a la curva en el punto de tangencia.
- La recta tangente es la recta que mejor aproxima a la gráfica de una función *f* en las cercanías del punto de tangencia.

Emergentes:

- La función $f'(x)$ es la que permite medir la pendiente de la recta que es tangente a la curva *f* en cualquier punto de abscisa *x*.
- La derivada de una función cuadrática es una función lineal.
- La derivada de una función cuadrática cóncava hacia arriba es una función lineal creciente.

- La derivada de una función cuadrática cóncava hacia abajo es una función lineal decreciente.
- Si la función es creciente en un intervalo, la derivada es positiva en ese intervalo.
- Si la función es decreciente en un intervalo, la derivada es negativa en ese intervalo.
- Cuando la gráfica de f se traslada horizontalmente, la gráfica de su derivada resulta igualmente trasladada.
- Cuando la gráfica de f se traslada verticalmente, la gráfica de su derivada no se modifica.

➢ **Argumentos:**

Intervinientes:

- El applet Linealizador permite justificar visualmente que el segmento observado al aplicar el zoom está sobre la recta tangente, cuya ecuación es determinable de manera analítica por punto-pendiente.

Emergentes:

- La función *pendiente de la recta tangente*, $m_t(x)$, está constituida por todos los puntos de coordenadas $(a, m_t(a))$, donde $m_t(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa a.
- Lo que sucede para el punto $(a, m_t(a))$ es válido para cualquier punto.
- La función $m_t(x)$ es la función derivada de f, pues asocia a cada punto de abscisa x la pendiente de la recta tangente a la curva f en dicho punto, por lo que se le denotará por $f'(x)$.
- El applet linealizador permite justificar visualmente las proposiciones emergentes relacionadas con: a) los grados de f y su función derivada, b) la relación entre la concavidad de una parábola y el comportamiento creciente o

decreciente de su función derivada y c) la relación entre el signo de la derivada y el comportamiento creciente o decreciente de *f*.

- El applet linealizador permite justificar visualmente que el efecto de trasladar horizontalmente la gráfica de una función no modifica la pendiente del segmento visualizado en el punto trasladado correspondiente, y que, globalmente, la función $m_t(x)$ resulta igualmente trasladada.

- El applet linealizador permite justificar visualmente que el efecto de trasladar verticalmente la gráfica de una función no modifica la pendiente del segmento visualizado en el punto trasladado correspondiente, y que, globalmente, la función $m_t(x)$ no se modifica.

V.2.4.3 ANÁLISIS DE TRAYECTORIAS

El tercer nivel de análisis para procesos de instrucción planteado por el Enfoque Ontosemiótico corresponde al análisis de trayectorias e interacciones didácticas.

De acuerdo a los planteamientos de Godino (2006), un proceso de instrucción comprende distintas dimensiones interconectadas: epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales y temporales), cognitiva (significados personales) y emocional (sentimientos y afectos). Cada una de estas dimensiones puede considerarse como un proceso estocástico, de manera que, en cada realización del proceso de instrucción, se produce una serie de estados posibles y no otra. Es decir, se produce una trayectoria muestral del proceso, que describe la secuencia particular de funciones o componentes que ha tenido lugar a lo largo del tiempo.

Este tercer nivel de análisis se desarrolla a partir de las hojas de trabajo, con el fin de describir la secuencia de interacciones didácticas que se espera tengan lugar a lo largo del proceso de instrucción; es decir, se trata de un análisis a priori del sistema de prácticas que se pretende implementar.

Se elaboraron las trayectorias epistémica, docente y discente, cada una de las cuales presenta la distribución en el tiempo que se espera tengan los objetos matemáticos involucrados, desde la perspectiva de los significados institucionales, de las funciones del profesor y de las acciones de los estudiantes, respectivamente. Estas trayectorias teóricas, contrastadas con la información empíricamente obtenida del estudio de casos, aportan información muy valiosa sobre las interacciones dadas en el aula a propósito de la implementación de la secuencia. Así, la articulación de la información contenida en las tres tablas del Anexo III sirve de base para analizar la interacción didáctica observada en el aula, poniendo especial atención a la identificación de posibles conflictos semióticos que pudieran ser la explicación de un significado personal limitado en el estudiante respecto a la función derivada. A continuación, se presentan brevemente algunos comentarios al respecto.

Cada vez que se implementa un proceso de instrucción, es decir una experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático, se produce una serie de estados posibles y no otra. Así, una vez realizado y observado el proceso de instrucción, la distribución en el tiempo de los estados posibles constituye las trayectorias muestrales empíricas (a posteriori), que son de gran utilidad para describir la generación en el tiempo de los significados institucionales implementados, como resultado de la interacción didáctica, así como la distribución de la responsabilidad principal a lo largo de ésta, entre el profesor y el alumno.

Al analizar las respuestas de los cinco estudiantes seleccionados para el estudio de casos, es decir, en un estudio a posteriori, pudieron observarse algunas diferencias respecto a lo esperado. La configuración didáctica empírica (a posteriori), entendida ésta como la secuencia interactiva de estados de las trayectorias que, efectivamente, tuvieron lugar a propósito de una situación problema específica, presentó algunas desviaciones en relación con la configuración didáctica teórica (a priori). En otras palabras, aunque las trayectorias epistémica, docente y discente presentadas permitieron explicar y describir las interacciones didácticas esperadas durante el proceso de instrucción, el análisis de las respuestas registradas por los estudiantes en las hojas de trabajo aportó elementos para identificar los conflictos semióticos que limitaron o impidieron el aprendizaje pretendido.

Los conflictos semióticos más claramente identificados están asociados con dificultades para:

- asociar el signo de la función derivada, a partir de la posición relativa de su gráfica respecto al eje x, con el comportamiento creciente o decreciente de la función f,
- realizar una comparación entre f y f', a partir de argumentos gráficos, y
- pasar del lenguaje gráfico al lenguaje analítico.

En el Anexo III se detallan los conflictos semióticos presentados, haciendo referencia explícita a las trayectorias teóricas elaboradas.

V.2.4.4 ANÁLISIS DE NORMAS Y METANORMAS

La actividad matemática en el aula tiene una dimensión social, pues la clase puede concebirse como una micro-sociedad en la que se construye y difunde el conocimiento matemático, a través de la interacción social entre los alumnos y el profesor. Por tanto, el aprendizaje matemático está condicionado por la puesta en juego de ciertas "obligaciones" o normas no explícitas, a lo largo del proceso de instrucción. Las normas sociales en el seno de la clase son convenciones que describen cómo debe ser la comunicación entre los participantes, así como la forma de reaccionar socialmente ante un error o una indicación. Estas normas regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes, independientemente de la asignatura de que se trate.

Sin embargo, si se trata de analizar un proceso de instrucción de un contenido matemático, lo que interesa son los aspectos normativos del discurso que es específico de la actividad matemática escolar y se genera en el salón de clase. En este sentido, las normas se clasifican de acuerdo al momento en el que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), según el aspecto del proceso instruccional a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional, ecológica), según su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad…), según el tipo y grado de coerción (social y disciplinar), etc.

Partiendo de que en la clase de matemáticas se establece un compromiso básico que es el de enseñar y aprender matemáticas, resulta natural orientar el interés hacia el conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en una institución. Estas normas, conocidas en el EOS como *normas epistémicas*, regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje, las representaciones (lenguaje) que se utilizan, las definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Así, en la terminología del marco teórico que nos ocupa, las normas epistémicas determinan las configuraciones epistémicas y las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan.

Las normas epistémicas se refieren a las configuraciones epistémicas que regulan la práctica matemática en un marco institucional específico. Por otro lado, cada componente de la configuración epistémica se relaciona con las denominadas *normas metaepistémicas,* que son las que orientan al alumno sobre consideraciones que se generan y se mantienen durante un largo período de tiempo, y coexisten con otras configuraciones epistémicas que van sucediéndose. A este tipo de normas pertenecen aquéllas que se refieren, por ejemplo, a lo que es un problema, cuándo ha quedado resuelto, qué reglas conviene seguir para resolverlo, qué es un argumento en matemáticas, cuándo se considera válido, etc., cuestiones que conservan su vigencia a lo largo de todo un curso o una etapa educativa.

Para analizar el aspecto normativo del proceso de instrucción investigado, se consideran las respuestas registradas por los cinco estudiantes en las hojas de trabajo, en relación con las configuraciones epistémicas mostradas en la trayectoria correspondiente (Tabla 1 del Anexo III). Además, se incluyen las normas que intervinieron durante las sesiones de retroalimentación e institucionalización, realizadas al inicio de cada nueva actividad con respecto a la inmediata anterior. A este respecto, cabe aclarar que las normas observadas se refieren al grupo en lo general, y no solamente a los cinco alumnos estudiados.

Para la identificación de las normas y metanormas presentes durante la implementación de la secuencia didáctica, se puso especial cuidado en detectar tanto situaciones presentadas con regularidad, como aquellos momentos de la interacción didáctica asociados a algún tipo de ruptura con respecto al patrón esperado. Es decir, la atención se orientó hacia la observación de regularidades, o bien, discrepancias entre las normas que se esperaba fueran observadas y las que finalmente se pusieron en juego.

En cuanto a la identificación de las normas relativas al papel del profesor, se buscaron aquéllas que reflejaran expectativas de actuación; es decir, aquellas normas que, a juicio del docente conductor del proceso de instrucción, habrían resultado suficientes para garantizar el aprendizaje esperado, de haberlas acatado los alumnos.

Por lo que respecta a las normas de los estudiantes, el foco se colocó sobre aquellos supuestos que condicionaron su forma de responder a las indicaciones del profesor; es decir, la atención se orientó hacia aquellas ideas preconcebidas que hubieran podido llevar a los estudiantes a desacatar o a malinterpretar las normas del docente.

Las normas identificadas como las más relevantes durante la implementación de la secuencia didáctica se muestran en la Tabla 1.

Profesor: N1. Hay que tratar de ser lo más claro posible en las respuestas amplias que se piden, tanto en escritura como en redacción. N2. No basta responder, sino que hay que explicar ampliamente cuando así se solicite. N3. Si un alumno entiende bien algo, debe ser capaz de expresarlo por escrito. N4. Es importante la puntualidad de los alumnos para que todos puedan participar en el análisis y discusión de los resultados de la actividad anterior. N5. Para dar las respuestas solicitadas se suponen suficientes los contenidos abordados en este curso, por lo que los alumnos no tienen por qué recurrir a conceptos estudiados en el curso de Cálculo de preparatoria. N6. El profesor intervendrá sólo cuando las indicaciones dadas por la hoja de trabajo, después de varias lecturas, hayan resultado insuficientes. N7. Los alumnos deben poner atención a cualquier duda expresada por un compañero, para que no haya necesidad de repetir la aclaración. N8 Cuando los alumnos observen alguna contradicción con su noción inicial de recta tangente, se verán en la necesidad de rectificar su definición. N9. Para los alumnos, la notación $m_t(x)$ debiera resultar consistente con el hecho de que la función a construir expresa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en un punto de abscisa *x* dada. N10. La hoja de trabajo debería resultar suficiente para el desarrollo de la práctica. N11. La interacción con la computadora durante la clase tiene como único propósito la manipulación del applet, por lo que los alumnos no deben distraerse con otras actividades como el msn. N12. Los estudiantes deberían interesarse en explorar al máximo las potencialidades del applet. N13. Los alumnos deberían maravillarse ante la posibilidad de observar la linealidad o no linealidad local de una curva.
Estudiantes: N14.Una cosa es entender algo y otra poder expresarlo por escrito. N15. Lo importante es que quede registro de que realicé la práctica de cada día. N16. Si no entiendo una instrucción a la primera, puedo pedirle al profesor que me explique lo que quiere que yo haga. N17. El profesor debe aclarar mi duda, sin importar que la haya aclarado ya para otro compañero. N18. La interacción con los compañeros puede obviarse. N19. No es necesario hacer todo este trabajo si ya sabemos que $m_t(x)$ es la derivada. N20. Para identificar a la función pendiente de la recta tangente puede utilizarse la notación acostumbrada para cualquier función; es decir, en términos de *f(x)* o de *y*.

N21. Si la recta observada toca más de un punto de la curva o la corta, no debe tratarse de la recta tangente. N22. El applet puede dar información falsa pues, cuando se aplica el zoom, parece que la recta tocara a la curva en todo un segmento. Es al alejar cuando se aprecia que hay un solo punto de contacto.

Tabla 1. Identificación de normas y metanormas

En la Tabla 1 pueden observarse diferentes tipos de normas:

- Las normas N1 a N5, N14 y N15 se clasifican como *metaepistémicas* pues prevalecen durante el proceso de implementación de la secuencia, regulando las sucesivas configuraciones epistémicas identificadas en la trayectoria.
- Las normas N6, N7 y N16 a N18, se refieren al aspecto *interaccional*, pues modulan las relaciones profesor – alumnos y alumno- alumno.
- Las normas N8, N9 y N19 a N21, son de corte *epistémico*, ya que se refieren a los significados institucionales involucrados en el proceso de instrucción.
- Las normas N10 a N13 y N22, tienen que ver con el aspecto *mediacional*, por ser relativas al uso de los recursos materiales en el aula.

A partir de un análisis como el anterior, puede apreciarse más claramente la complejidad de la interacción didáctica efectivamente observada a lo largo del proceso de instrucción propuesto, así como aquellos elementos discursivos y normativos que hayan podido condicionar la situación de aprendizaje.

Estos cuatro primeros niveles de análisis permiten descomponer un proceso de instrucción en una trayectoria de configuraciones didácticas, y, para cada una, estudiar diferentes aspectos. Una configuración epistémica es la red de objetos primarios que activa las prácticas matemáticas realizadas (situaciones, elementos de lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). Asociadas a la configuración epistémica, se consideran la configuración docente y la configuración discente, de manera que la articulación de las tres conforma lo que se identifica como *configuración didáctica* (CD), la cual, según el EOS, puede clasificarse como adidáctica, magistral, dialógica o personal (Godino, 2006).

Una configuración didáctica de tipo ***adidáctico*** se caracteriza por la secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización, situaciones que especifican las funciones del estudiante en interacción con el medio (en el que se incluye el profesor, unos conocimientos pretendidos y unos recursos materiales y cognitivos específicos).

La configuración didáctica ***magistral*** se refiere a la manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas; es decir, se basa en una presentación magistral, seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos y saberes presentados. Primero se presenta el componente discursivo del significado de los objetos matemáticos (definiciones, enunciados, demostraciones), y se deja la responsabilidad de dar sentido al discurso a los propios estudiantes por medio de los ejemplos, ejercicios y aplicaciones que se proponen. En realidad, en este tipo de configuración didáctica no se suprimen los momentos de exploración, de formulación y validación, sino que quedan bajo la responsabilidad del estudiante, o bien se ponen en juego en momentos aislados de evaluación.

Una variante intermedia entre los tipos de configuraciones descritos (que hemos designado como adidáctica y magistral, respectivamente) constituye el tipo ***dialógico***, que concede al estudiante el momento de exploración, pero supone a cargo del profesor los momentos de formulación y validación. La institucionalización (regulación) tiene lugar mediante un diálogo contextualizado entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente esbozar alguna técnica de solución.

Por último, cuando la resolución de la situación-problema (o la realización de una tarea) se realiza por el estudiante sin una intervención directa del docente, de forma tal que los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor, o están incluidos en el libro de texto, pues están capacitados para resolverlos, se trata de un tipo de configuración didáctica de tipo ***personal.***

Con objeto de integrar los elementos arrojados por los cuatro niveles de análisis abordados hasta el momento, se presenta la Tabla 2 que condensa los aspectos más relevantes del proceso de instrucción investigado, aportando una panorámica de la interacción didáctica generada que brinda información por renglón o por columna, según sea el interés.

Un análisis de la trayectoria discente presentada en la Tabla 3 del Anexo III, permite asociar las acciones de los estudiantes con los procesos matemáticos realizados durante el proceso de instrucción. Dicha asociación permite identificar procesos matemáticos como los de significación, materialización, generalización, algoritmización, comunicación, enunciación, argumentación e institucionalización, entre los más relevantes, como se muestra en la columna correspondiente de la Tabla 2.

Por otro lado, dado que en este trabajo se considera que cada configuración didáctica presenta características combinadas de los cuatro tipos mencionados anteriormente, en la Tabla 2 no se propone una clasificación particular.

Configuración didáctica	Prácticas	Objetos	Procesos	Funciones del docente	Funciones del alumno	Conflictos	Normas del docente	Normas del alumno
CD1:	Observación de la linealidad local de f. Construcción de la tabla de $m_t(x)$. Construcción de la gráfica de $m_t(x)$.	Tabla de $f'(x)$ Gráfica de $f'(x)$	Materialización Significación Particularización Algoritmización Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Explora, interpreta y formula.		La hoja de trabajo debería resultar suficiente para el desarrollo de la práctica	Si no entiendo una instrucción a la primera, puedo pedirle al profesor que me explique lo que quiere que yo haga.
CD2:	Identificación analítica de $m_t(x)$	Expresión analítica de $f'(x)$	Significación Generalización Materialización. Comunicación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, socializa y argumenta.	Dificultad en el paso del lenguaje gráfico al analítico	La notación $m_t(x)$ debiera resultar consistente con el hecho de que la función a construir expresa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de abscisa x dada.	Para identificar a la función pendiente de la recta tangente puede utilizarse la notación acostumbrada para cualquier función; es decir, en términos de $f(x)$ o de y.
CD3:	Identificación analítica de f	Expresión analítica de $f(x)$	Significación Materialización. Comunicación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, socializa y argumenta.	Dificultad en el paso del lenguaje gráfico al analítico	Si un alumno entiende bien algo, debe ser capaz de expresarlo por escrito.	Una cosa es entender algo y otra poder expresarlo por escrito.
CD4:	Comparación gráfica de f y $m_t(x)$	Complejidad relativa entre las gráficas de f y $m_t(x)$	Significación Enunciación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, formula y argumenta.	Dificultad para argumentar en el contexto gráfico.	Se suponen suficientes los contenidos abordados en este curso, por lo que los alumnos no tienen por qué recurrir a conceptos estudiados en el curso de Cálculo de preparatoria.	No es necesario hacer todo este trabajo si ya sabemos que $m_t(x)$ es la derivada.
CD5:	Relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de f.	Nociones elementales del criterio de la primera derivada para máximos y mínimos relativos.	Significación Enunciación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Explora, interpreta, formula y argumenta.	Dificultad para comprender la indicación.		
CD6:	Comparación analítica de f y $m_t(x)$	Complejidad relativa entre las expresiones analíticas de f y $m_t(x)$.	Significación Enunciación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, formula y argumenta.			

Tabla 2. Resumen de los niveles de análisis 1-4

V.2.4.5 VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

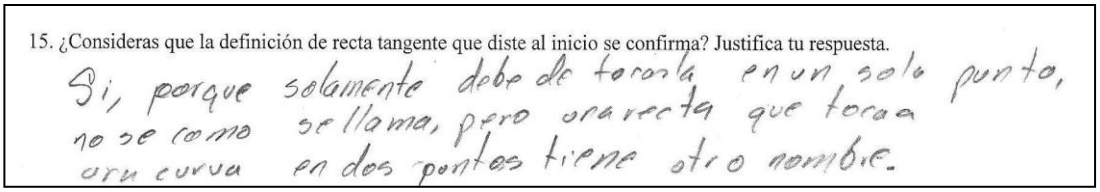
El propósito del análisis didáctico de un proceso de instrucción es el de obtener elementos para identificar los aspectos que, desde la óptica del que analiza, pudieran calificarse como fortalezas o debilidades, en términos didácticos. Así, este quinto ejercicio de análisis se refiere no sólo a la valoración del proceso de instrucción correspondiente a una propuesta ya planteada, con objeto de identificar todo aquello que pudiera ser mejorado, sino a la clarificación de los aspectos a atender, cuando se trata de un nuevo diseño didáctico.

En relación con el proceso de instrucción investigado, y de acuerdo a lo señalado por el EOS, el quinto nivel de análisis corresponde a la valoración de la idoneidad didáctica. Tomando como base la información recabada por los cuatro primeros niveles de análisis, la valoración de la idoneidad didáctica se desarrolla a partir de sus seis criterios de idoneidad, realizando, para cada uno de ellos, una comparación entre lo esperado a propósito del diseño de la secuencia, y lo observado como resultado de su implementación.

1. *Idoneidad epistémica*. Este criterio permite valorar la calidad del contenido matemático a enseñar, en términos de su grado de consistencia con los significados institucionales de referencia.

   A priori: Desde el diseño de las actividades didácticas, la atención se orientó hacia la implementación de un sistema de prácticas que promoviera la construcción significativa de la función derivada, buscando que, más allá de las técnicas de derivación, la ruta procedimental planteada permitiera al alumno acercarse intuitivamente a la perspectiva puntual de la derivada y, desde ahí, acceder a la noción funcional. Por lo que respecta al concepto de tangencia, el sistema de prácticas promovido por la primera actividad de la secuencia se orientó, en todo momento, hacia la rectificación de una noción primaria que se asocia al caso de la circunferencia, con la intención de favorecer así la emergencia de otra, que fuera más consistente con el significado institucional de referencia. En concordancia con lo anterior, desde la perspectiva a priori, la idoneidad epistémica se considera alta.

A posteriori: Tomando como base el estudio de casos, aunque las respuestas aportadas por los estudiantes a las hojas de trabajo evidenciaron una clara resistencia y hasta negación a modificar su concepción de recta tangente, conforme se avanzó en las actividades durante el proceso de construcción de la función derivada, fueron incorporándose los nuevos elementos pretendidos, como se muestra en la Figura 1.


15. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma? Justifica tu respuesta.

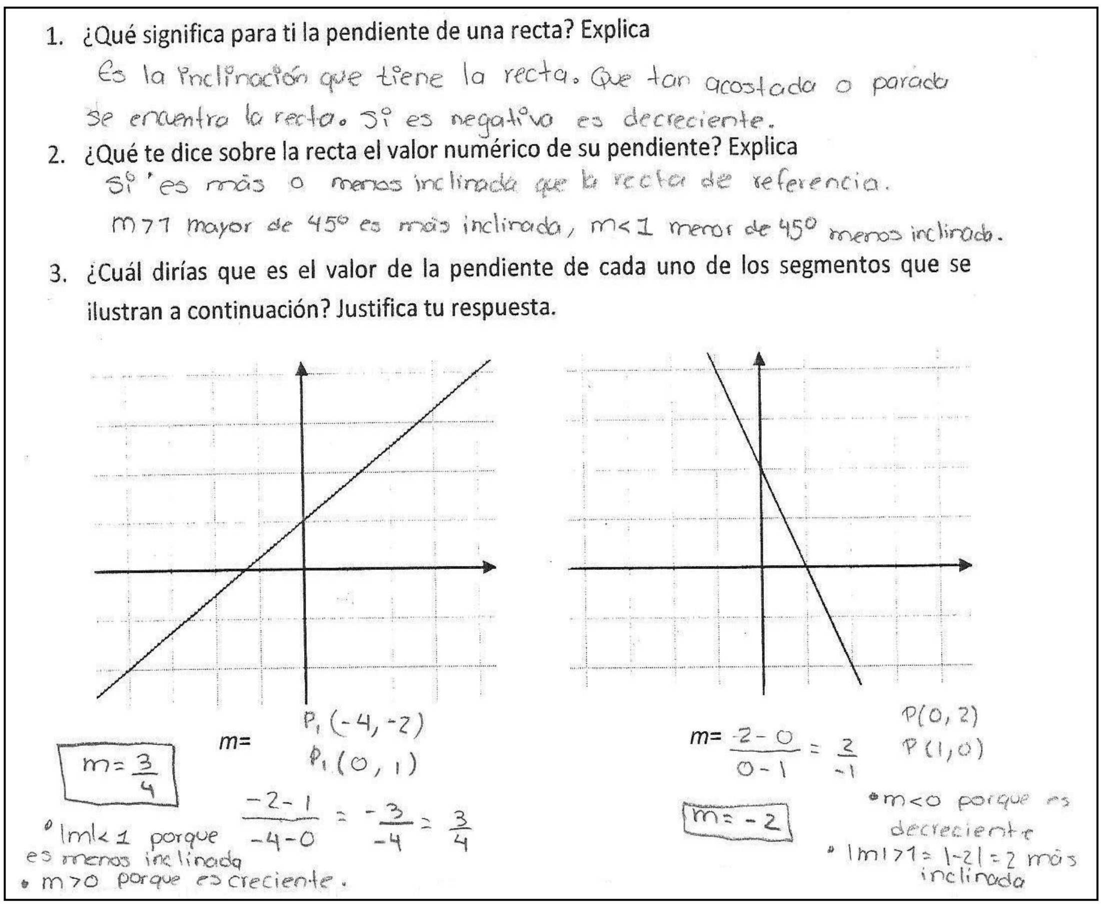
Si, porque solamente debe de tocarla en un solo punto, no se como se llama, pero una recta que toca a una curva en dos puntos tiene otro nombre.

Fig. 1. Estudiante #29, Actividad 1, reactivo 15

Las sesiones de retroalimentación e institucionalización permitieron aprovechar algunas respuestas no esperadas para generar discusiones productivas en torno a la función derivada, que contribuyeron al logro de los objetivos, por lo menos en un grado aceptable, lo que justifica calificar a la idoneidad epistémica como alta, desde una perspectiva a posteriori.

2. *Idoneidad cognitiva*. Con este criterio se busca valorar, a priori, si lo que se pretende enseñar se considera como razonablemente cercano a lo que saben los alumnos y, a posteriori, si el aprendizaje efectivamente logrado es consistente con el pretendido.

   A priori: Con objeto de favorecer, lo más posible, que los objetos personales de los estudiantes fueran suficientes para abordar la tarea matemática propuesta, la primera parte del curso, considerada como de pre-Cálculo, se dedicó, incluso por encima de los tiempos marcados por el programa, a establecer un sistema de prácticas que garantizara cierto grado de familiaridad de los alumnos con las distintas representaciones asociadas a las funciones principales del Cálculo. Este sistema de prácticas se orientó, principalmente, hacia el establecimiento de una trama de funciones semióticas, por parte de los estudiantes, que promoviera la identificación de una función partiendo de su gráfica, y no sólo desde su expresión analítica. De este modo, la tabla construida a partir de la interacción con el software propone la localización de puntos en el plano que, dada la familiaridad con las curvas estudiadas, sugieren la construcción de una gráfica ya conocida, cuya expresión analítica también resulta familiar. En la Figura 2, se muestran las respuestas dadas por algunos estudiantes al instrumento de diagnóstico, como evidencia que justifica el considerar como alta la idoneidad cognitiva a priori. En otras palabras, la Figura 2 aporta elementos que sugieren un buen grado de proximidad entre los significados personales de los alumnos y los significados institucionales pretendidos, confirmando la idea de que éstos se encuentran en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes.



1. ¿Qué significa para ti la pendiente de una recta? Explica

Es la inclinación que tiene la recta. Que tan acostada o parada se encuentra la recta. Si es negativa es decreciente.

2. ¿Qué te dice sobre la recta el valor numérico de su pendiente? Explica

Si es más o menos inclinada que la recta de referencia.

$m > 1$ mayor de 45° es más inclinada, $m < 1$ menor de 45° menos inclinada.

3. ¿Cuál dirías que es el valor de la pendiente de cada uno de los segmentos que se ilustran a continuación? Justifica tu respuesta.

$\boxed{m = \frac{3}{4}}$ m= $P_1(-4,-2)$ $P_1(0,1)$

$\frac{-2-1}{-4-0} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

• $|m| < 1$ porque es menos inclinada

• $m > 0$ porque es creciente.

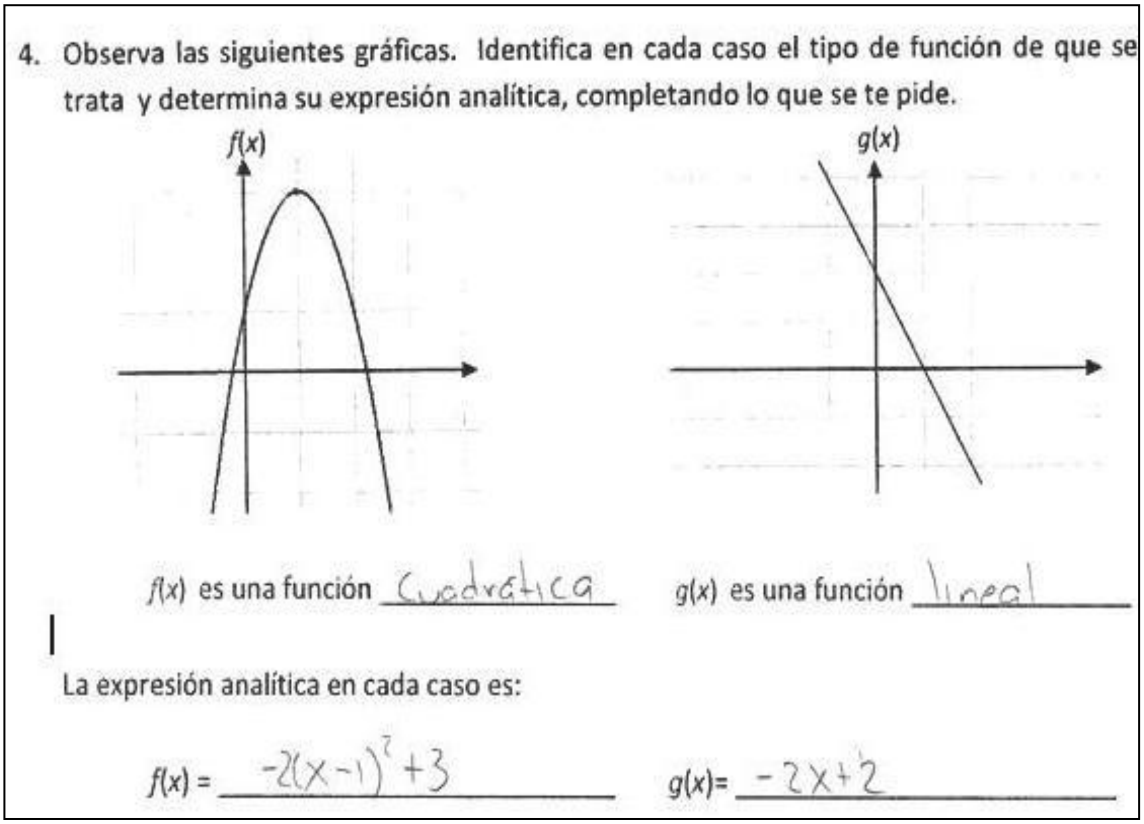
m= $\frac{2-0}{0-1} = \frac{2}{-1}$ $P(0,2)$ $P(1,0)$

$\boxed{m = -2}$

• $m < 0$ porque es decreciente

• $|m| > 1 = |-2| = 2$ más inclinada

Figura 2a. Estudiante #16, Cuestionario 1, reactivos 1,2 y 3



4. Observa las siguientes gráficas. Identifica en cada caso el tipo de función de que se trata y determina su expresión analítica, completando lo que se te pide.

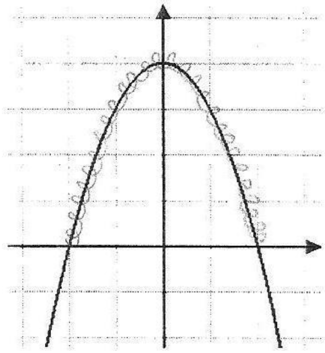
$f(x)$ es una función Cuadrática $g(x)$ es una función lineal

La expresión analítica en cada caso es:

$f(x) = -2(x-1)^2+3$ $g(x) = -2x+2$

Figura 2b. Estudiante #26, Cuestionario 1, reactivo 4

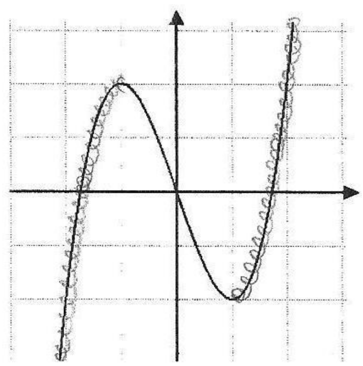
5. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es positiva.



6. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 5.

$[-2, 2]$

7. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es creciente.



8. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 7.

$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Figura 2c. Estudiante #6, Cuestionario 1, reactivos 1,2 y 3

Con respecto a la noción de tangencia, se considera que la idea primaria, surgida desde el estudio de la circunferencia en el nivel básico, es suficiente como punto de partida para construir un significado más rico en torno a dicho objeto matemático. Lo anterior permite decir que, desde la perspectiva a priori, la idoneidad cognitiva se considera alta.

A posteriori: Las respuestas al Cuestionario I dadas por los alumnos seleccionados para el estudio de casos, permitieron apreciar un manejo suficiente de los elementos lingüísticos, por lo menos en relación con las funciones lineales y cuadráticas. La identificación argumentada de la expresión analítica a partir de la gráfica de una recta o de una parábola fue realizada por los estudiantes de manera satisfactoria. Además, a lo largo de las actividades de la secuencia, no sólo en relación con las hojas de trabajo sino también en lo relativo a su participación discursiva en las sesiones de retroalimentación e institucionalización, pudo apreciarse también una aceptable familiaridad de los alumnos con otras funciones, como algunas polinomiales de grado mayor que dos, funciones trascendentes como el seno, el coseno, el coseno de un ángulo doble, el logaritmo natural y la exponencial natural. Finalmente, las respuestas al instrumento de evaluación o Cuestionario 2 permiten apreciar que el sistema de prácticas promovido por la secuencia sí alcanza a impactar los significados personales de los alumnos que constituyeron el estudio de casos, como se muestra en la Figura 3.

Por todo lo anterior, en relación con el proceso de construcción de la función derivada, puede decirse que los significados construidos respondieron a lo esperado, por lo menos en un nivel aceptable, por lo que la idoneidad cognitiva empírica se considera alta.

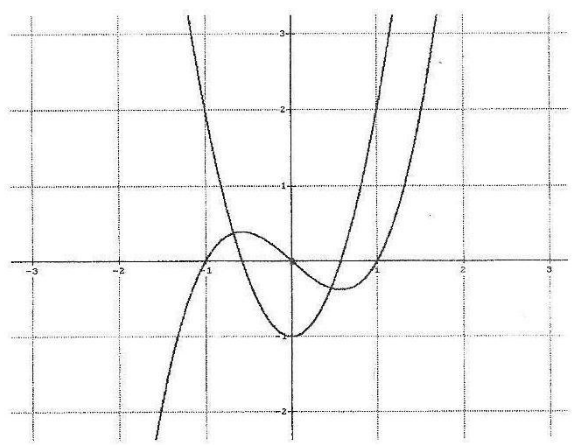
3. *Idoneidad interaccional*. Este criterio busca valorar si la interacción permite identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los que, efectivamente, se produzcan durante el proceso de instrucción.

   A priori: El diseño de la secuencia giró principalmente alrededor de una idea: el material impreso y los applets de apoyo debían resultar suficientes para hacer emerger los objetos institucionales pretendidos, y que el alumno se apropiara de ellos. En otras palabras, se partió del supuesto de que las hojas de trabajo y los applets, por sí solos, debían ser capaces de llevar de la mano al alumno a lo largo del proceso de construcción de la función derivada, con apoyo en el trabajo colaborativo que se esperaba promover y con una mínima participación del profesor. Desde esta premisa, la elaboración del material impreso se realizó en función de los conflictos semióticos observados durante el pilotaje de prueba, identificándolos como potenciales y, por tanto, poniendo especial cuidado en cuanto a redacción, brevedad de texto, sencillez de lenguaje, simplificación de la tarea esencial, orientación de las preguntas hacia la respuesta esperada, etc. La consideración de todos estos elementos en el trabajo de diseño contribuyó también a incrementar las posibilidades de resolver los conflictos semióticos que, efectivamente, se presentaran durante el desarrollo del proceso de instrucción. Por todo lo anterior, la idoneidad interaccional, desde la perspectiva a priori, fue calificada como alta.

1. ¿Por qué, si la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$, cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica

   Porque la derivada no es la recta tangente de la curva, si no mide las Pendientes de las rectas tangentes en absisa x_0.

2. A continuación encontrarás las gráficas que corresponden a f y f'.



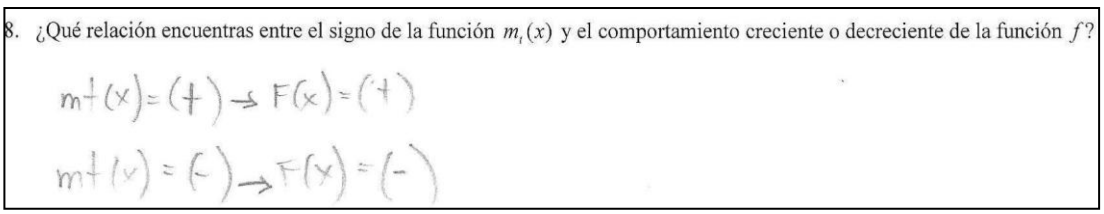
$R_T = 2x+b$
$0 = 2(1)+b$
$-2 = b$
$y = mx+b$
$R_T = 2x-2$

Sin realizar ningún trazo y explicando ampliamente tu respuesta en cada caso, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa 1? Porque $f'(x)$ mide las m de $f(x)$ entonces observando las gráficas veo que cuando $x=1$ en $f(x)$, $f'(x)$ vale 2, por lo tan- esa es la m de la R_T, después solamente sustituyo el punto par encontrar la ordenada en el origen que es -2.

Figura 3. Estudiante #16, Cuestionario 2, reactivos 1 y 2a)

A posteriori: Las respuestas a cada una de las hojas de trabajo fueron estudiadas justo al terminar la aplicación de la actividad respectiva y, desde los primeros resultados observados, se evidenciaron las limitaciones del material impreso y los applets para conducir, de manera suficiente, al estudiante a lo largo de la ruta procedimental propuesta. Esto permitió hacer conciencia de la necesidad de implementar una sesión de retroalimentación, previa a la aplicación de la siguiente actividad, como condición indispensable para lograr el avance en la secuencia, y dejó clara la equivocación de haber programado la etapa de institucionalización como un momento posterior a la aplicación del total de actividades. La Figura 4 muestra el conflicto semiótico más recurrente en el estudio de casos, y permite observar un ejemplo de discordancia entre los significados personales del alumno y los significados institucionales pretendidos.


8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

$m^t(x)=(+) \to F(x)=(+)$

$m^t(x)=(-) \to F(x)=(-)$

Figura 4. Estudiante #39, Actividad 3, reactivo 8

Desde la primera actividad hasta la última, fue patente la necesidad de discutir y reflexionar de manera grupal acerca de los significados construidos en el aula, con objeto de institucionalizar consensos, lo que dejó al descubierto la importancia del trabajo colaborativo de los estudiantes, así como lo imprescindible de la participación del profesor en sus funciones de investigación, regulación, motivación, asignación y evaluación.

Lo anterior permite afirmar que la interacción didáctica generada por la implementación de la secuencia, bajo la cuidadosa conducción del profesor, constituyó un ambiente propicio para anticipar y resolver conflictos semióticos con resultados satisfactorios. En este sentido, se considera que la idoneidad interaccional empírica, puede calificarse, al menos, como media-alta.

4. *Idoneidad mediacional*. Este criterio se encarga de la valoración del grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales involucrados en el proceso de instrucción.

   A priori: Desde el diseño de la secuencia, se tenía conciencia de las limitaciones asociadas a la disponibilidad de equipo de cómputo individual; es decir, se sabía de antemano que, en el mejor de los casos, sería posible asignar una computadora por cada dos alumnos. Por eso, en relación con el equipo de cómputo, la idoneidad mediacional pudiera calificarse como media. En lo que toca al software, al material impreso y al tiempo destinado para cada actividad, la idoneidad mediacional se percibió teóricamente como alta.

   A posteriori: Una vez concluida la implementación de la secuencia, aunque se confirmó lo relativo a la disponibilidad del equipo y a lo adecuado del software, en relación con el resto de los recursos se hicieron evidentes algunas diferencias respecto a lo esperado. Como se comentó en el apartado de la idoneidad interaccional, las hojas de trabajo y los applets se vieron limitados en cuanto a suficiencia para conducir el proceso de instrucción con la mínima participación del profesor. En relación con el tiempo invertido en la aplicación de la secuencia, y tomando en cuenta las indispensables sesiones de discusión, pudo observarse la conveniencia de que el número total de horas consumidas hubiera sido menor, por ejemplo, compactando las actividades 4 y 5 en una sola. Estos elementos permiten considerar a la idoneidad mediacional, desde la perspectiva a posteriori, como media.

5. *Idoneidad emocional*. Con este criterio se pretende valorar la situación afectiva de los estudiantes, la cual determina su grado de interés o motivación hacia el proceso de estudio.

   A priori: La certeza de una alta idoneidad emocional estuvo siempre presente durante la etapa de diseño de la secuencia. Se daba por descontado que el estudiante debía maravillarse ante la posibilidad de observar la linealidad de una curva, y no tener que sólo suponerla como cierta. Además, se supuso que, para el estudiante, la interacción con el applet Linealizador, con las hojas de trabajo y con sus compañeros sería suficiente motivación para garantizar su involucramiento entusiasta en la tarea a realizar. Esto determinó que la idoneidad emocional se considerara alta, desde la perspectiva a priori.

A posteriori: A partir de las respuestas a las hojas de trabajo y de las discusiones que se dieron durante las sesiones de retroalimentación, se observó que no se confirmó ninguna de las expectativas relacionadas con el aspecto afectivo de los alumnos. La observación de la linealidad local ni siquiera fue motivo de asombro. Por otro lado, la solicitud expresada frecuentemente en las hojas de trabajo, respecto a explicar ampliamente sus respuestas, generó inconformidad en un buen número de estudiantes. Sin embargo, cabe mencionar que algunos alumnos comentaron que, aunque al principio se les dificultaba expresarse por escrito, conforme avanzaban en las actividades sentían hacerlo cada vez mejor. En lo relativo a la interacción con sus compañeros de trabajo, realmente no se observaron discusiones constructivas en torno a conceptos o posibles respuestas a las hojas de trabajo, sino sólo la intención de concretar una respuesta que permitiera cumplir con el compromiso. Los elementos anteriores permiten explicar que la idoneidad emocional a posteriori se considere baja.

6. *Idoneidad ecológica.* Este último criterio pretende valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo escolar, su consistencia con el currículum, su pertinencia en relación con el entorno, etc.

   A priori: Durante el diseño de la secuencia, una de las más fuertes motivaciones fue la relativa a la idoneidad ecológica: se tenía la certeza de que la implementación de la secuencia se traduciría, posteriormente, en una mayor eficiencia en el tratamiento formal de la función derivada vía límites, en términos de un mayor sentido y más agilidad para desarrollar los contenidos subsiguientes. En este sentido, la idoneidad ecológica teórica se consideró alta.

   A posteriori: Los resultados obtenidos confirmaron las expectativas en relación con la idoneidad ecológica. El poder hacer referencia a la experiencia intuitiva aportada por la secuencia de actividades didácticas, se tradujo, efectivamente, en una mayor eficiencia en el momento del acercamiento formal a la función derivada, lo que redundó a su vez en una mayor rapidez de avance en los temas finales del programa. Por todo esto, desde la perspectiva a posteriori, la idoneidad ecológica se considera alta.

Tomando en cuenta que la profesora/investigadora supuso haber incorporado en el diseño de la secuencia didáctica todos los elementos que pudieran garantizar el resultado deseado, se explica la puntuación máxima asignada a cada uno de los criterios de idoneidad a priori y, por tanto, el que la idoneidad didáctica esperada fuera considerada como la óptima. Sin embargo, la realidad mostrada por las evidencias recabadas durante la implementación de la secuencia, reveló diferencias notables entre lo esperado y lo observado, las cuales serán descritas con más detalle en la sección V.4.

Para efectos de apreciar visualmente el resultado del análisis valorativo realizado, en la Figura 5 se representa la idoneidad didáctica empírica del proceso de instrucción investigado, con referencia a la perspectiva a priori que, por considerarse óptima, se ha simbolizada mediante un hexágono regular. Así, la distancia que va del centro a cada uno de los vértices del polígono regular representa la máxima puntuación respecto a la idoneidad correspondiente.

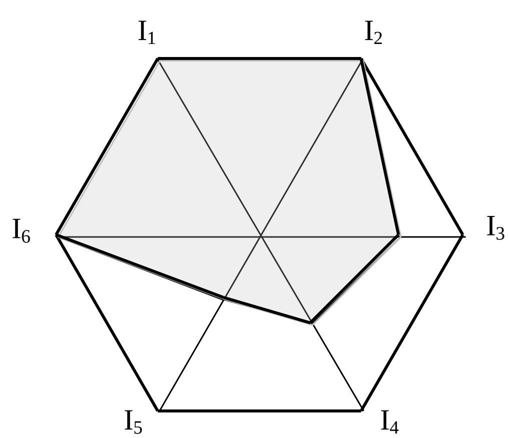


Figura 5. Idoneidad didáctica del proceso de instrucción

El hexágono gris inscrito de la Figura 5 representa la idoneidad didáctica a posteriori, y su forma irregular refleja la mayor o menor puntuación estimada, en relación con cada uno de los criterios evaluados. Las distintas idoneidades se identifican conforme a la siguiente nomenclatura, desde la perspectiva a posteriori: I_1: Idoneidad epistémica (*alta*), I_2: Idoneidad cognitiva (*alta*), I_3: Idoneidad interaccional (*media-alta*), I_4: Idoneidad mediacional (*media*), I_5: Idoneidad emocional (*baja*) e I_6: Idoneidad ecológica (*alta*).

V.3 EL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

El Cuestionario 2 constituye un instrumento de evaluación diseñado para recoger evidencias en relación con los significados construidos por los estudiantes. Este instrumento contiene sólo dos reactivos en formato de pregunta, uno de los cuales presenta dos incisos. Para dar respuesta a las preguntas, el alumno tendrá que poner en juego un sistema de prácticas consistente con los significados personales que se espera haya logrado como resultado de la implementación de la secuencia didáctica.

Los reactivos del instrumento de evaluación fueron elaborados con el propósito de identificar evidencias de una construcción significativa, en relación con los objetos, considerados como *emergentes* del sistema de prácticas implementado mediante la secuencia didáctica. Se espera que el primer reactivo permita percibir una articulación de significados entre la naturaleza local de la noción de tangencia y el carácter global de la gráfica la función derivada. En cuanto al segundo reactivo, la expectativa es que ayude a verificar que el estudiante, una vez identificada la curva correspondiente a f y f', pueda extraer, a partir de la información global aportada por la gráfica de la función derivada, el dato local que se refiere a la pendiente de la recta tangente en un punto dado de la gráfica de f, indispensable para encontrar la expresión analítica de la recta tangente buscada (Ver Anexo IV).

V.4 SIGNIFICADOS PERSONALES: ESTUDIO DE CASOS

El gran tamaño del Grupo 6 de Cálculo Diferencial e Integral I, del primer semestre de la carrera de Ingeniería Química (41 alumnos inscritos), evidenció la necesidad de realizar la investigación a través de un estudio de casos. Con anterioridad a la selección de los estudiantes que integrarían el estudio de casos, la profesora/investigadora identificó comportamientos grupales que, en general, fueron confirmados en la investigación correspondiente. En el comportamiento del grupo se observaron rasgos como los que se destacan a continuación.

- Notable destreza en la interacción con los applets de trabajo.
- Resistencia a expresar por escrito y de manera amplia las respuestas y argumentaciones solicitadas.
- Tendencia a ignorar las indicaciones dadas por escrito en las hojas de trabajo, prefiriendo preguntar verbalmente al profesor lo que había que hacer.
- Escasa participación en la discusión con el compañero de trabajo, aunque bastante mejor cuando la discusión se dio a nivel de grupo.

En relación con los resultados obtenidos de la implementación del instrumento de diagnóstico, el desempeño del grupo fue superior al esperado, ya que las respuestas al Cuestionario 1 evidenciaron, en general, una incorporación suficiente del sistema de prácticas promovido por la fase de pre-Cálculo.

El estudio de casos fue conformado por cinco alumnos seleccionados conforme a los criterios presentados en el capítulo de aspectos metodológicos e identificados conforme al orden alfabético reportado en el acta oficial del grupo. Así, el estudio de casos se refiere a los estudiantes identificados con los números 6, 16, 26, 29 y 39 en la lista oficial.

Estudiante #6.

El sistema de prácticas mostrado por este estudiante a lo largo de las siete actividades y los dos cuestionarios fue, en general, adecuado. A continuación, se comentan algunos aspectos relevantes de su desempeño en la secuencia, a partir de los significados personales declarados.

Cuestionario 1:

El estudiante invirtió el cociente de diferencias en el cálculo de la pendiente del segmento de recta propuesto; además, la lectura de los catetos, a partir de la cuadrícula, sobre el triángulo rectángulo identificado, no se realizó de manera adecuada (Ver Figura 6).

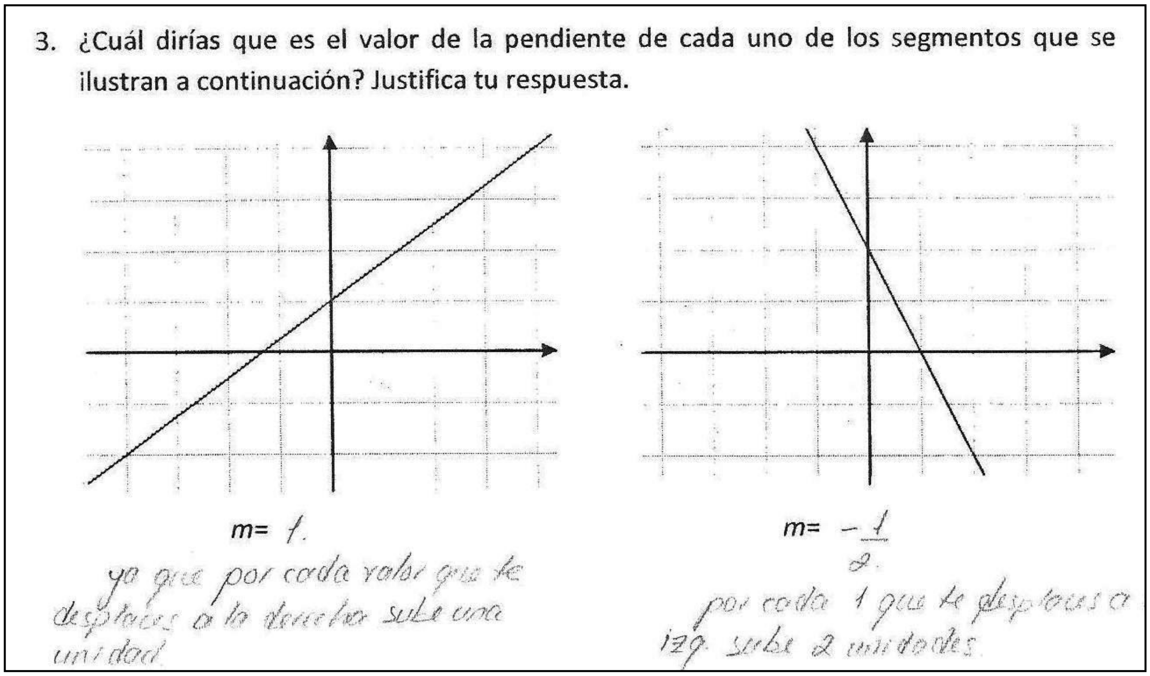
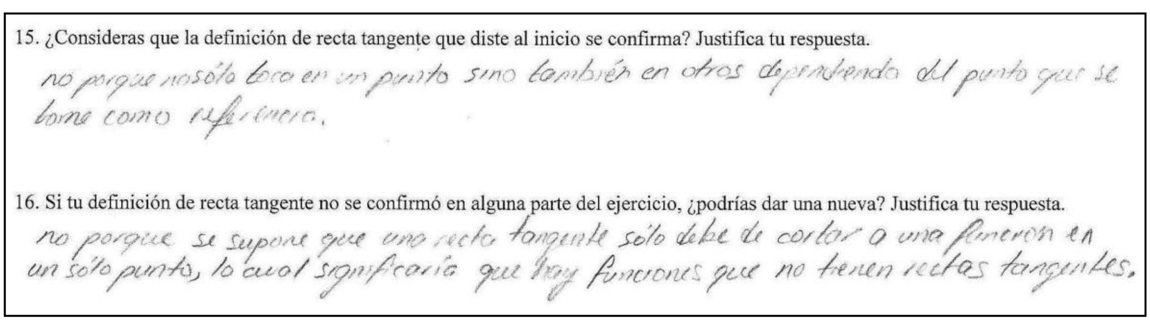


Figura 6. Cuestionario 1, reactivo 3

Actividad 1:

Llama la atención la resistencia que presenta el estudiante a modificar su noción primaria de recta tangente (Ver Figura 7)



15. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma? Justifica tu respuesta.

no porque no sólo toca en un punto sino también en otros dependiendo del punto que se tome como referencia.

16. Si tu definición de recta tangente no se confirmó en alguna parte del ejercicio, ¿podrías dar una nueva? Justifica tu respuesta.

no porque se supone que una recta tangente sólo debe de cortar a una función en un sólo punto, lo cual significaría que hay funciones que no tienen rectas tangentes.

Figura 7. Actividad 1, reactivos 15 y 16

Actividad 2:

La respuesta a la pregunta 6 muestra lo adecuado de los argumentos que el estudiante utiliza para declarar innecesaria la participación del applet Linealizador en la observación de la linealidad local de una recta (Ver Figura 8).

> 6. ¿Crees que era necesario utilizar el applet para construir $m_t(x)$? Justifica tu respuesta.
>
> No porque sabemos que es una recta y que su pendiente es constante, entonces si sabemos exactamente por qué puntos pasa, podemos determinarla con facilidad

Figura 8. Actividad 2, reactivo 6

La respuesta a la pregunta 7 evidencia que este estudiante no tuvo dificultad para comparar las gráficas de f y $m_t(x)$; es decir, pudo realizar la comparación entre f y f', a partir de argumentos gráficos (Ver Figura 9).

> 7. Si para cada caso comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.
>
> La gráfica f es una recta que es ascendiente o descendiente tiene en todo momento la misma pendiente, es por eso que la gráfica $m_t(X)$ es una recta con pendiente 0 (y siempre vale el valor de la pendiente para todo valor de x)

Figura 9. Actividad 2, reactivo 7

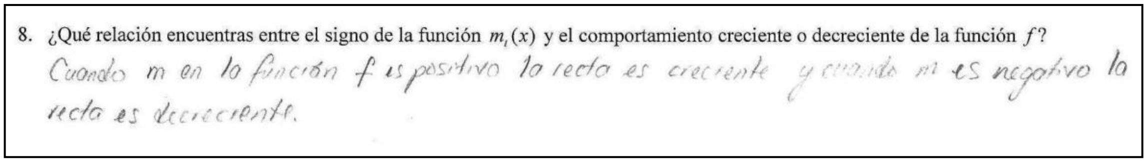
Aunque la respuesta a la pregunta 8 se considera adecuada, se asume una confusión del estudiante al calificar como creciente o decreciente a la pendiente y no a la función f (Ver Figura 10).

> 8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?
>
> Si la pendiente de la función f es decreciente la gráfica de $m_t(x)$ se encuentra debajo del eje x. Si la pendiente de f es creciente, la otra función se encuentra sobre el eje x.

Figura 10. Actividad 2, reactivo 8

Actividad 3:

Aunque en la actividad anterior se puede apreciar una respuesta adecuada a la pregunta que se refiere a la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de *f* (Figura 9), en ésta se ofrece a este respecto una respuesta que sugiere la no comprensión de la pregunta correspondiente (Ver Figura 11).

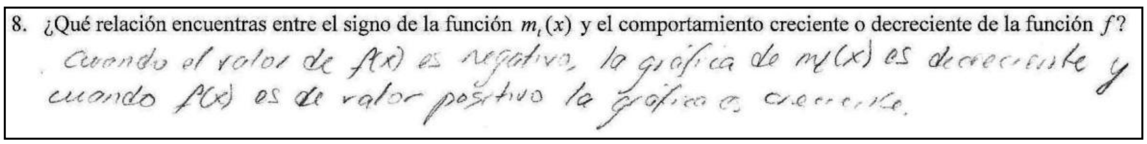

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

Cuando m en la función f es positivo la recta es creciente y cuando m es negativo la recta es decreciente.

Figura 11. Actividad 3, reactivo 8

Actividad 4:

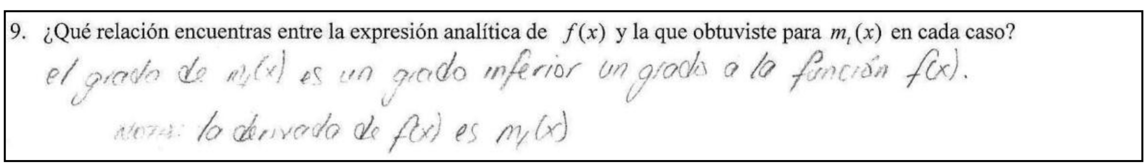
Puede apreciarse de nuevo una respuesta inadecuada en cuanto a la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de *f* (Ver Figura 12).


8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

Cuando el valor de f(x) es negativo, la gráfica de $m_t(x)$ es decreciente y cuando f(x) es de valor positivo la gráfica es creciente.

Figura 12. Actividad 4, reactivo 8

Por otro lado, la respuesta a la pregunta 9 sugiere que el sistema de prácticas promovido hasta este punto hizo evocar al estudiante la noción de derivada (Ver Figura 13).


9. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$ en cada caso?

el grado de $m_t(x)$ es un grado inferior un grado a la función f(x).

NOTA: la derivada de f(x) es $m_t(x)$

Figura 13. Actividad 4, reactivo 9

Actividad 5:

Se observa una respuesta inadecuada a la solicitud de determinar la expresión analítica de *f* a partir de la gráfica correspondiente a la última función propuesta (Ver Figura 14).

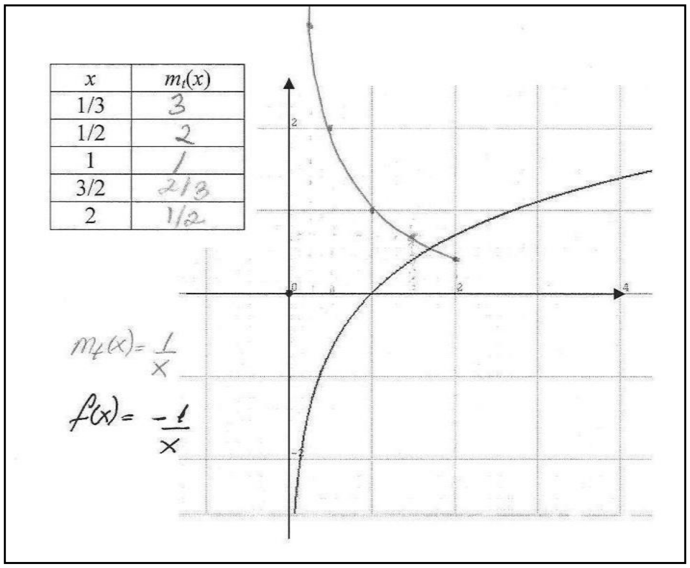
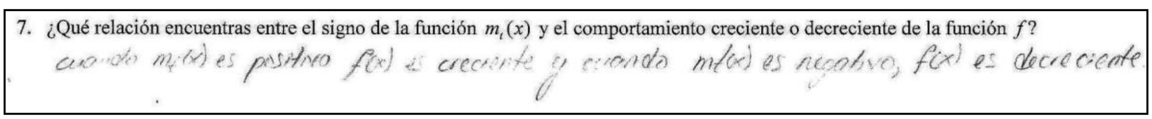


Figura 14. Actividad 5, reactivo 2, cuarta gráfica

En cuanto a la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de f, se observa ya una respuesta adecuada, aunque, por la redacción, no se aprecia la idea de que el signo de $m_t(x)$ sea una consecuencia del comportamiento de *f*, sino, posiblemente, al contrario (Ver Figura 15).

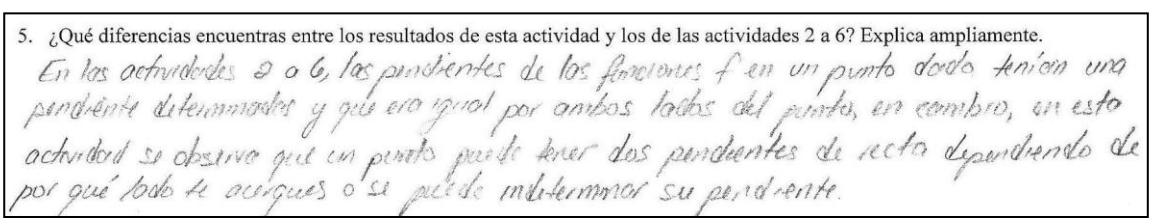

7. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

cuando $m_t(x)$ es positivo $f(x)$ es creciente y cuando $m(x)$ es negativo, $f(x)$ es decreciente.

Figura 15. Actividad 5, reactivo 7

Actividad 7:

La respuesta a la pregunta 5 sugiere que el propósito de esta última actividad se logró, en cuanto a propiciar que el estudiante advirtiera la diferencia entre la derivabilidad y la no derivabilidad puntual de una función (Ver Figura 16).


5. ¿Qué diferencias encuentras entre los resultados de esta actividad y los de las actividades 2 a 6? Explica ampliamente.

En las actividades 2 a 6, las pendientes de las funciones f en un punto dado tenían una pendiente determinada y que era igual por ambos lados del punto, en cambio, en esta actividad se observa que un punto puede tener dos pendientes de recta dependiendo de por qué lado te acerques o se puede indeterminar su pendiente.

Figura 16. Actividad 7, reactivo 5.

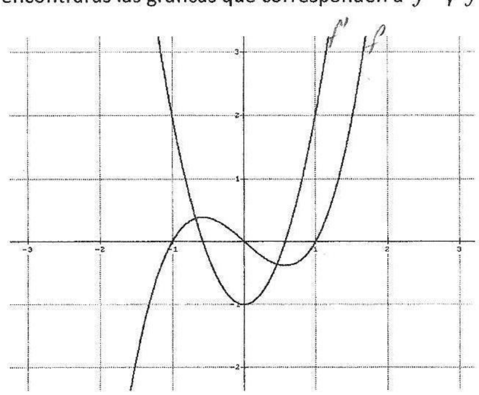
Cuestionario 2:

A partir de las respuestas dadas por este estudiante al instrumento de evaluación, pudiera concluirse que el sistema de prácticas promovido por la implementación de la secuencia didáctica sí logró impactar sus significados personales de tangencia y de función derivada (Ver Figura 17)

1. ¿Por qué, si la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$, cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica

porque la derivada no representa la recta tangente a la parábola sino las pendientes, para cada valor de x, de la función f(x), y a partir de esta información, podemos calcular la recta tangente a un punto.

2. A continuación encontrarás las gráficas que corresponden a f y f'.



Sin realizar ningún trazo y explicando ampliamente tu respuesta en cada caso, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa 1?

Conociendo que la derivada representa los pendientes de f(x) para cada valor de x, sabemos que la pendiente de f(x) en el punto (1,0) es de 2 [porque f'(x) pasa por (1,2)]. y como conocemos que la recta tangente toma el valor de la pendiente para ese segmento y va a pasar por ~~ese~~ el punto (1,0) ← al que es tangente. m=2 (1,0)

y=mx+b. 0=2(1)+b 0=3+b. b=-3 $f_{RT}(x)=2x-3$.

Figura 17. Cuestionario 2, reactivos 1 y 2.a

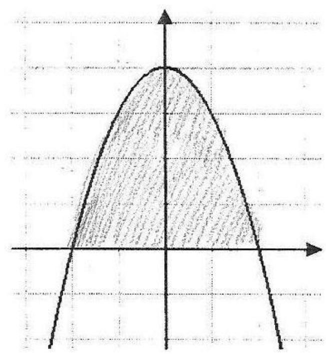
Estudiante #16.

El sistema de prácticas mostrado por este estudiante a lo largo de las siete actividades y los dos cuestionarios fue, en general, adecuado, al igual que en el caso anterior. A continuación, algunos comentarios sobre su desempeño.

Cuestionario 1:

En el reactivo 5, que pide identificar la porción de la curva que corresponde a una función positiva, este estudiante utiliza elementos lingüísticos que evidencian un conflicto semiótico, pues en lugar de señalar una porción de la curva, sombrea el área bajo la curva (Ver Figura 18).

5. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es positiva.

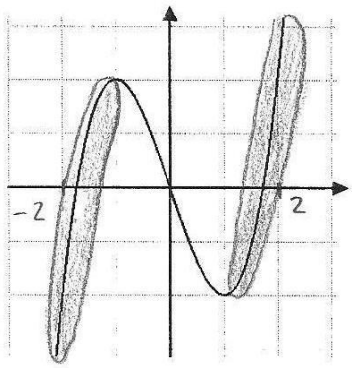


6. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 5. $D_{f(x)} = (-2, 2)$

Figura 18. Cuestionario 1, reactivos 5 y 6

A pesar del conflicto manifestado en el reactivo 5, en el reactivo 7 que pide identificar la porción de la curva que corresponde a una función creciente, este estudiante señaló sobre la curva la porción respectiva (Ver Figura 19).

7. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es creciente.



8. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 7.

$D_{f(x)} = (-2, -1) \cup (1, 2)$

Figura 19. Cuestionario 1, reactivos 7 y 8

Actividad 1:

Las respuestas a los reactivos 15 y 16 evidencian que este estudiante encontró, a lo largo de esta actividad, elementos que hicieron evolucionar su significado personal de recta tangente más allá de la noción asociada con la circunferencia (Ver Figura 20).

15. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma? Justifica tu respuesta.

NO, porque la recta en la última curva lacorta varias veces

16. Si tu definición de recta tangente no se confirmó en alguna parte del ejercicio, ¿podrías dar una nueva? Justifica tu respuesta.

La recta tangente es aquella que tiene la pendiente del punto de la curva de donde se va a trazar.

Figura 20. Actividad 1, reactivos 15 y 16

Actividad 2:

En cuanto a la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de *f*, este estudiante parece establecer, adecuadamente, una función semiótica entre el comportamiento de f y el signo de su pendiente. Sin embargo, al tratar de relacionar el contenido de dicha función semiótica con la función $m_t(x)$, no hace alusión al signo de ésta, sino a la posición de la recta horizontal correspondiente respecto a los cuadrantes del plano cartesiano (Ver Figura 21)

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?
que si la m de f(x) en mayor que 0, $m_t(x)$ se encuentra en el 1 y 2 cuadrante,
si m de f(x) es menor que 0, $m_t(x)$ se encuentra en el 3 y 4 cuadrante
y si m de f(x) = 0, $m_t(x)$ se encuentra en el eje x.

Figura 21. Actividad 2, reactivo 8

En la respuesta al reactivo 10, a pesar de declarar un significado personal adecuado en relación con la recta tangente a una función lineal, este estudiante parece considerar que para que dos rectas sean iguales basta que sus pendientes lo sean (Ver Figura 22)

10. A partir de la noción de *recta tangente* construida en la Actividad 1, ¿qué puedes decir de la recta tangente en un punto dado a cada una de las gráficas de esta actividad? Explica ampliamente.
que si queremos la recta tangente de una recta, la recta tangente sería la misma
de la recta, pues sus pendientes serían iguales.

Figura 22. Actividad 2, reactivo 10

Actividad 3:

Cuando se pide relacionar el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de *f*, este estudiante parece no comprender la solicitud, pues se refiere al signo de *f* y no de $m_t(x)$, y confunde a $m_t(x)$ con su pendiente (Ver Figura 23).

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?
si f(x) es positiva, $m_t(x)$ es también con signo positivo por lo cual es creciente
y si f(x) es negativa $m_t(x)$ es también de signo negativo y es decreciente

Figura 23. Actividad 3, reactivo 8

En cuanto al reactivo 9, este estudiante realiza la comparación analítica de f y $m_t(x)$ en términos del signo de los parámetros p y m de la ecuación de la parábola y de la recta, respectivamente; es decir, relaciona el signo de p en la ecuación $f(x)=p(x-h)^2+k$ de la parábola, con el de m en la ecuación $m_t(x)=mx+b$ de la recta (Ver Figura 24).

9. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$ en cada caso?
son de signos Iguales
En $m_t(x)$ el valor absoluto de la pendiente es el doble del valor de p de f(x).

Figura 24. Actividad 3, reactivo 9

Actividad 4:

Aunque en la comparación gráfica solicitada por el reactivo 7 el estudiante se refiere de manera expresa a las gráficas de f y $m_t(x)$, sus conclusiones están dadas en términos analíticos (Ver Figura 25)

7. Si para cada caso comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.
que la gráfica $m_t(x)$ es de un grado menor que f(x) por ejemplo en el primer caso f(x) es cúbica y $m_t(x)$ es cuarta.

Figura 25. Actividad 4, reactivo 7

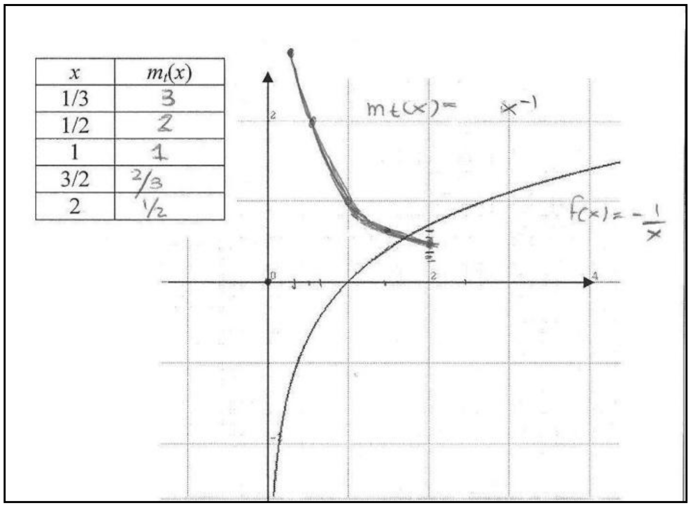
La respuesta a la pregunta 8 parece evidenciar la comprensión del cuestionamiento, aunque, como en el caso del alumno #6, pudiera pensarse que para este estudiante el comportamiento de *f* es una consecuencia del signo de $m_t(x)$ (Ver Figura 26).

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?
Cuando $m_t(x)$ es positiva f(x) es creciente y cuando $m_t(x)$ es negativa es decreciente f(x)

Figura 26. Actividad 4, reactivo 8

Actividad 5:

Como sucedió con el alumno #6, se observa una respuesta inadecuada a la solicitud de determinar la expresión analítica de *f* a partir de la gráfica correspondiente a la última función propuesta (Ver Figura 27).

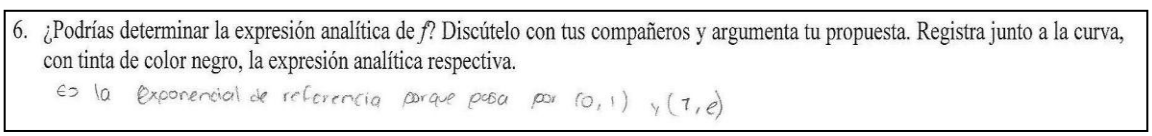


x	$m_t(x)$
1/3	3
1/2	2
1	1
3/2	2/3
2	1/2

Figura 27. Actividad 5, reactivo 2, cuarta gráfica

Actividad 6:

En la identificación de la expresión analítica de la función exponencial natural, este estudiante esgrime argumentos que cabe destacar (Ver Figura 28).



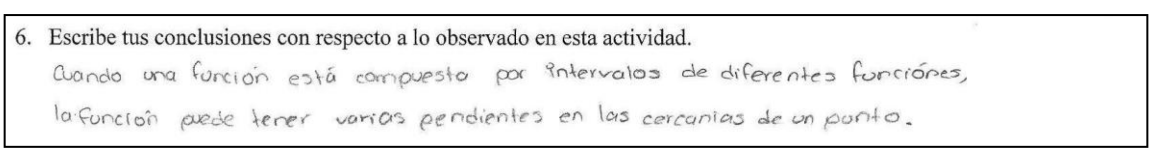
6. ¿Podrías determinar la expresión analítica de *f*? Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a la curva, con tinta de color negro, la expresión analítica respectiva.

Es la exponencial de referencia porque pasa por (0, 1) y (1, e)

Figura 28. Actividad 6, reactivo 6

Actividad 7:

En el reactivo 6 que aborda la observación de la no derivabilidad puntual de una función, este estudiante expresa sus conjeturas, en relación con las curvas que presentan cambios abruptos (Ver Figura 29).



6. Escribe tus conclusiones con respecto a lo observado en esta actividad.

Cuando una función está compuesto por intervalos de diferentes funciónes, la función puede tener varias pendientes en las cercanias de un punto.

Figura 29. Actividad 7, reactivo 6

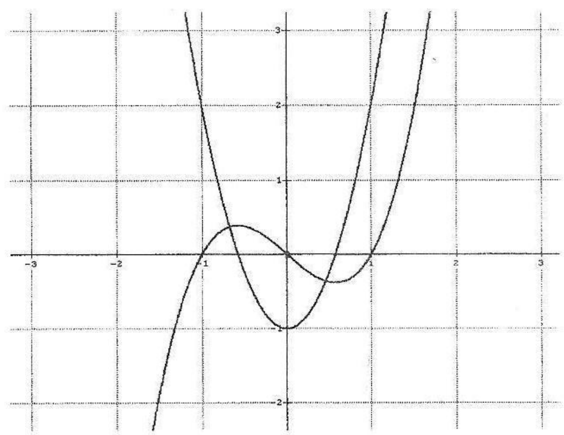
Cuestionario 2:

Las respuestas de este estudiante al instrumento de evaluación se muestran en la Figura 3 del apartado V.2.4.5, en el punto referente a la idoneidad cognitiva a posteriori. Como puede apreciarse, el alumno parece evidenciar el impacto del proceso de instrucción en sus significados personales de tangencia y de función derivada (Ver Figura 30)

1. ¿Por qué, si la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$, cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica

   Porque la derivada no es la recta tangente de la curva, si no mide las Pendientes de las rectas tangentes en absisa x_0.

2. A continuación encontrarás las gráficas que corresponden a f y f'.



$R_T = 2x+b$
$0 = 2(1)+b$
$-2 = b$
$y = mx+b$
$R_T = 2x-2$

Sin realizar ningún trazo y explicando ampliamente tu respuesta en cada caso, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa 1? Porque $f'(x)$ mide las m de $f(x)$ entonces observando las gráficas veo que cuando $x=1$ en $f(x)$, $f'(x)$ vale 2, por lo tanto esa es la m de la R_T, después solamente sustituyo el punto para encontrar la ordenada en el origen que es -2.

Figura 30. Cuestionario 2, reactivos 1 y 2.a)

Estudiante #26.

El sistema de prácticas mostrado por este estudiante a lo largo de las siete actividades y los dos cuestionarios fue, en general, adecuado, aunque menos que en los dos casos anteriores. A continuación, algunos comentarios sobre su desempeño.

Cuestionario 1:

La respuesta al reactivo 5 evidencia un conflicto semiótico en la determinación de la porción positiva de la curva (Ver Figura 31)

5. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es positiva.

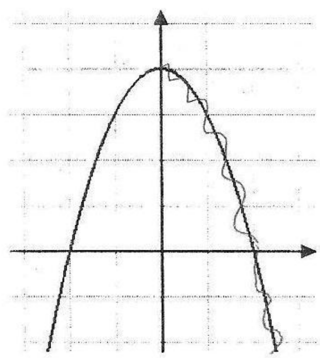
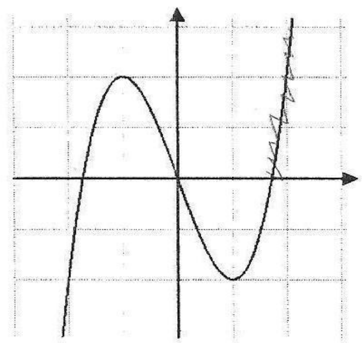


Figura 31. Cuestionario 1, reactivo 5.

En cuanto al reactivo 8 en que se pide señalar la porción de la curva que corresponde a una función creciente, el estudiante vuelve a manifestar un conflicto semiótico, pues de las dos regiones a identificar, sólo señala la parte positiva de una de ellas. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, la relación entre la porción señalada y el intervalo correspondiente se hizo de forma inadecuada (Ver Figura 32).

7. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es creciente.



8. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 7.

[0, ∞)

Figura 32. Cuestionario 1, reactivos 7 y 8

Actividad 1:

En una de las grabaciones de audio, se evidenció que este estudiante tuvo problemas con la manipulación del applet, y, en lugar de la recta tangente a la circunferencia en el punto dado, construyó una recta secante, debido a un error en la determinación de la pendiente del segmento visualizado. Las respuestas a los reactivos 8, 13 y 16 muestran, además del error comentado en relación con el reactivo 8, una observación incompleta en el caso de la recta tangente que toca a la parábola en más de un punto, y nula en el caso de la cúbica que es cortada por su recta tangente. Esto último parece ser la explicación de que el estudiante no haya encontrado razones para modificar la noción primaria de recta tangente, a pesar de haberse enfrentado a una inconsistencia en el caso de la circunferencia (Ver Figura 33).

8. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma con este ejercicio de visualización? Explica ampliamente. No, al parecer en el applet la recta toca dos veces, pero yo sé que la recta tangente toca solo una vez la circunferencia.

Figura 33a. Actividad 1, reactivo 8

13. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma? Justifica tu respuesta.
Si porque aunque parece que las rectas están encimadas, yo lo se que no es así y que sólo toca un punto.

Figura 33b. Actividad 1, reactivo 13

16. Si tu definición de recta tangente no se confirmó en alguna parte del ejercicio, ¿podrías dar una nueva? Justifica tu respuesta.

En la circunferencia me confundió, pero ya caí en cuenta que una recta tangente nunca toca 2 puntos.

Figura 33c. Actividad 1, reactivo 16

Actividad 2:

En su respuesta al reactivo 10, en principio, este estudiante manifiesta su resistencia a abandonar la noción primaria de recta tangente, según la cual ésta debiera tocar sólo un punto de la curva, y, ante la evidencia de que la toca en muchos más, prefiere declarar que no existe una recta tangente. Sin embargo, en la parte final, llama la atención cómo muestra su disposición a evolucionar en su conceptualización, considerando la posibilidad de que la recta tangente a la recta sea ella misma (Ver Figura 34).

10. A partir de la noción de *recta tangente* construida en la Actividad 1, ¿qué puedes decir de la recta tangente en un punto dado a cada una de las gráficas de esta actividad? Explica ampliamente.

Que no tiene recta tangente porque es una recta, o en todo caso. Cada punto de la recta seria su misma recta tangente

Figura 34. Actividad 2 reactivo 10

Actividad 4:

Este estudiante manifiesta conflictos semióticos en la determinación de la expresión analítica de $m_t(x)$ a partir de la gráfica construida, en ambos casos (Ver Figura 35).

x	$m_t(x)$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

x	$m_t(x)$
-1	-4
-1/2	$-\frac{1}{2}$
0	0
1/2	1/2
1	4

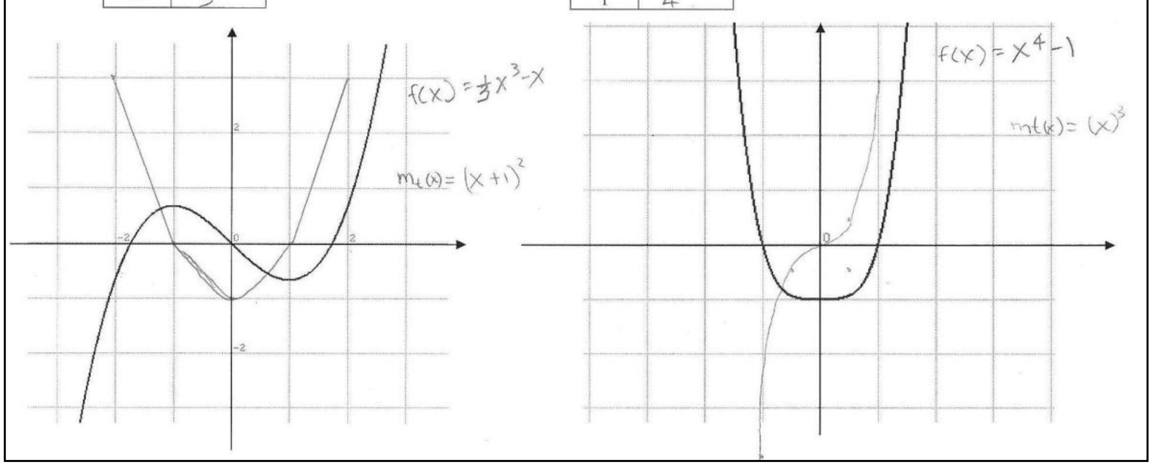


Figura 35. Actividad 4 reactivo 6

Actividad 5:

El estudiante presenta conflictos semióticos al responder a la identificación analítica de las funciones $m_t(x)$ y f (Ver Figura 36).

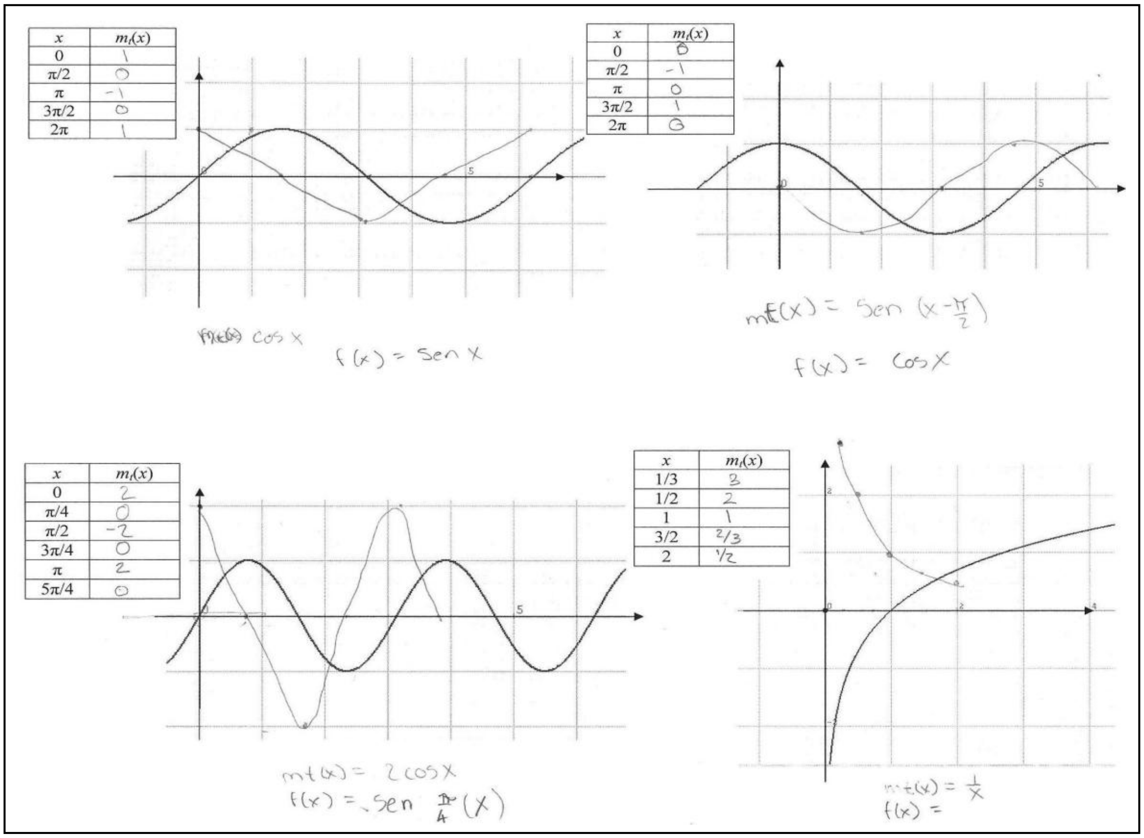
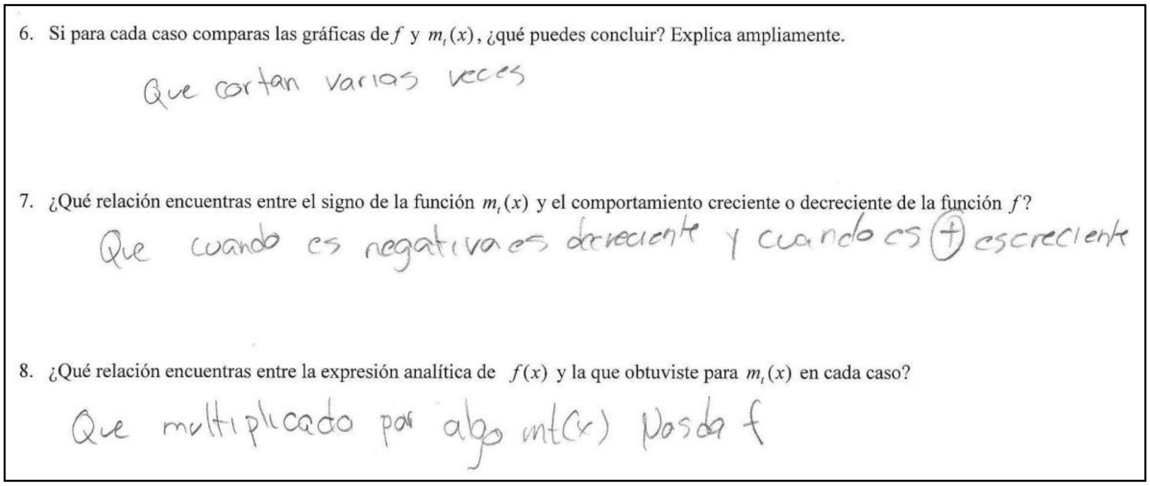


Figura 36. Actividad 5 reactivo 4

En esta actividad, este alumno acusa un comportamiento que, en general, mostró el grupo de alumnos inscritos: una escasa disposición a reflexionar y esforzarse por dar una respuesta pensada (Ver Figura 37).



6. Si para cada caso comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

Que cortan varias veces

7. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

Que cuando es negativa es decreciente y cuando es (+) es creciente

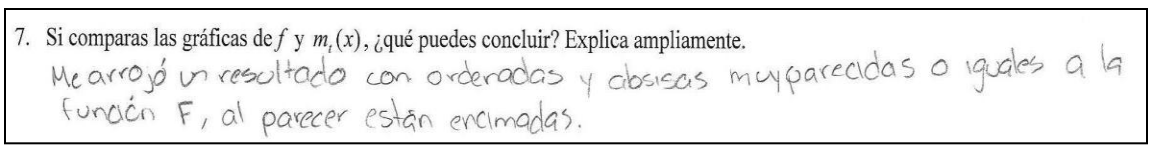
8. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$ en cada caso?

Que multiplicado por algo mt(x) Nos da f

Figura 37. Actividad 5 reactivos 6, 7 y 8

Actividad 6:

La comparación entre las funciones f y $m_t(x)$ se hizo utilizando argumentos gráficos, como se pedía, y además con mucha sencillez y claridad (Ver Figura 38).



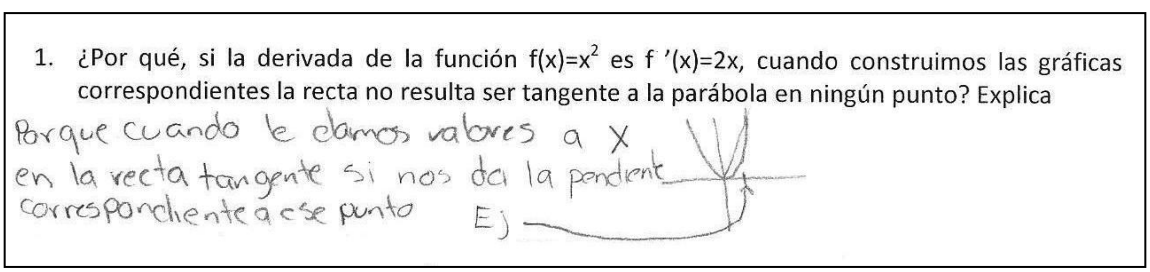
7. Si comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

Me arrojó un resultado con orderadas y absisas muy parecidas o iguales a la función F, al parecer están encimadas.

Figura 38. Actividad 6, reactivo 7

Cuestionario 2:

La respuesta a la pregunta 1 del instrumento de evaluación deja traslucir, aunque débilmente, la construcción de significado en torno a la tangencia, como una noción local y no global (Ver Figura 39).



1. ¿Por qué, si la derivada de la función f(x)=x^2 es f ’(x)=2x, cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica

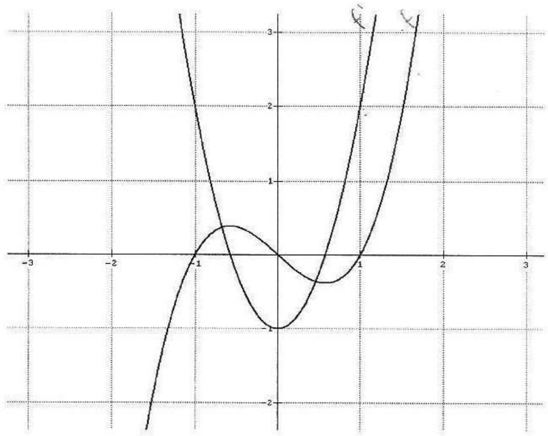
Porque cuando le damos valores a X en la recta tangente si nos da la pendiente correspondiente a ese punto

Ej

Figura 39: Cuestionario 2, reactivo 1.

Sin embargo, en cuanto al significado de la gráfica de la función derivada, este estudiante muestra un sistema de prácticas no adecuado (Ver Figura 40).

2. A continuación encontrarás las gráficas que corresponden a f y f .



Sin realizar ningún trazo y explicando ampliamente tu respuesta en cada caso, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f , en el punto de abscisa 1?

$f'(x) = 3(x, -1$ * Esta es la ecuación de la gráfica (Parábola), está mas cerrada que la referencia y 1 abajo del eje X

$f'(x) = 6X$

b) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f , en el punto donde ésta intersecta al eje de las ordenadas?

$Y = -1$

es Y=-1 porque la ~~Ecuacion~~ recta tangen como no tiene inclinación en ese punto, por eso es -1 por ser el vertice

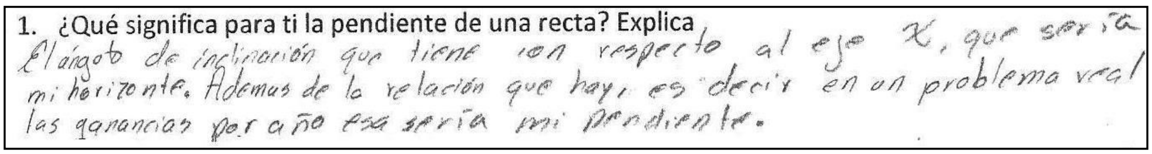
Figura 40. Cuestionario 2, reactivo 2

Estudiante #29.

El sistema de prácticas mostrado por este estudiante a lo largo de las siete actividades y los dos cuestionarios fue, en general, tan adecuado como en el caso anterior. A continuación, algunos comentarios sobre su desempeño.

Cuestionario 1:

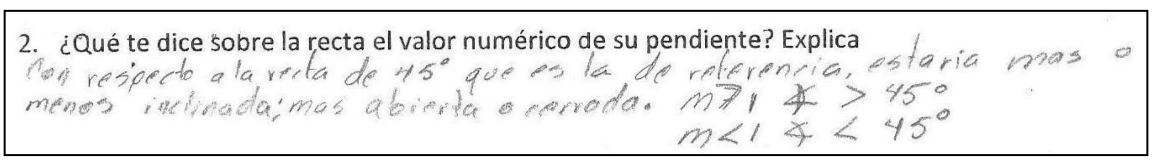
Este estudiante muestra un sistema de prácticas que relaciona a la pendiente con las magnitudes involucradas en un problema real, en términos del cociente de las unidades correspondientes, rasgo que no evidenció ningún otro estudiante (Ver Figura 41).


1. ¿Qué significa para ti la pendiente de una recta? Explica

El ángulo de inclinación que tiene con respecto al eje X, que sería mi horizonte. Además de la relación que hay, es decir en un problema real las ganancias por año esa sería mi pendiente.

Figura 41. Cuestionario 1, reactivo 1

Este estudiante, a diferencia de los demás y como se pretendía que se hiciera, calcula la pendiente de los segmentos propuestos en el reactivo 2 a partir de la lectura de la cuadrícula, y no de un cociente de incrementos determinados a partir de la ubicación de dos puntos. Sin embargo, en el primero de los casos dicha lectura no se realiza con precisión, por lo que el estudiante responde inadecuadamente (Ver Figura 42).

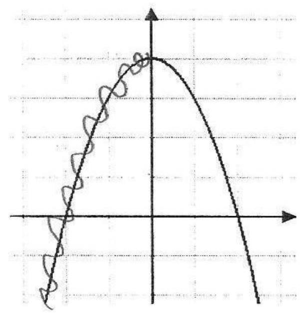

2. ¿Qué te dice sobre la recta el valor numérico de su pendiente? Explica

Con respecto a la recta de 45° que es la de referencia, estaría más o menos inclinada; más abierta o cerrada. $m>1$ $\measuredangle > 45°$
$m<1$ $\measuredangle < 45°$

Figura 42. Cuestionario 1, reactivo 2

Al igual que el estudiante #26, la identificación de la porción de la curva que corresponde a un comportamiento positivo de la función se realizó inadecuadamente, lo mismo que la referencia al intervalo respectivo (Ver Figura 43).

5. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es positiva.

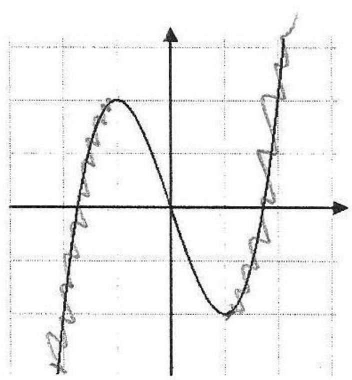


6. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 5. $(-\infty, 4)$ lo deje abierto por ambos lados ya que en 4 es donde comienza a hacerse negativa

Figura 43. Cuestionario 1, reactivos 5 y 6

La señalización de la porción de la curva que corresponde a un comportamiento creciente de la función, así como la referencia al intervalo respectivo, se realizó de manera adecuada, a pesar de lo ocurrido en relación con los reactivos 5 y 6 (Ver Figura 44).

7. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es creciente.



8. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 7.

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Figura 44. Cuestionario 1, reactivos 7 y 8

Actividad 1:

La evidencia mostrada en la Figura 1 corresponde a este estudiante, quien mostró una franca negación a modificar su noción primaria de recta tangente. Se presentan otras pruebas de ello (Ver Figura 45)

14. Pulsa el control ***Inicio*** para restablecer las condiciones iniciales del applet. Con el valor del control ***Paso*** en 2, asigna al control ***x*** los valores -4, -3, -2, 1 y 0, y aplica a la curva la técnica de acercamiento y trazo ya conocida. Explica lo que observas.

No podemos hallar una recta tangente ya que a la curva la toca mas de una vez al tratar de trazarlo.

16. Si tu definición de recta tangente no se confirmó en alguna parte del ejercicio, ¿podrías dar una nueva? Justifica tu respuesta.

"Una recta tangente es aquella que toca a una curva en un solo y único punto al trazarla."

Figura 45. Actividad 1, reactivos 14 y 16

Actividad 2:

En el reactivo 8, puede apreciarse una respuesta adecuada en cuanto a la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de *f*, a pesar de ser ésta la segunda actividad. Además, parece que el estudiante sí percibe al signo de $m_t(x)$ como un resultado del comportamiento de *f*, y no al contrario, como el resto de los estudiantes que conforman este estudio de casos (Ver Figura 46).

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

Cuando es creciente, el signo de $m_t(x)$ es positivo y la corta a $f(x)$ arriba del eje de los abscisas; si es decreciente, el signo de $m_t(x)$ es negativo y corta a $f(x)$ por debajo del eje de las abscisas.

Figura 46. Actividad 2, reactivo 8

Aunque el trabajo propuesto por la Actividad 1 no fue suficiente para hacer evolucionar la noción primaria de recta tangente de este estudiante, dada la respuesta al reactivo 10, pudiera pensarse que la sesión de discusión respectiva sí lo fue (Ver Figura 47).

10. A partir de la noción de *recta tangente* construida en la Actividad 1, ¿qué puedes decir de la recta tangente en un punto dado a cada una de las gráficas de esta actividad? Explica ampliamente.

Aquella definición, me hace llegar a la conclusión de que una recta tangente en cualquier punto de una de estos funciones, sería una recta con la misma pendiente, ya que la recta mas parecida a la curva en el punto de tangencia es la recta misma.

Figura 47. Actividad 2, reactivo 10

Actividad 3:

A pesar de lo mostrado en la Figura 46, en esta actividad la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento de *f* fue expresada de manera inadecuada (Ver Figura 48).

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

Que ambos tienen el mismo signo, cuando $f(x)$ tiene signo positivo $m_t(x)$, y cuando es negativo $f(x)$, $m_t(x)$ lo es tambien

Figura 48. Actividad 3, reactivo 8

Actividad 5:

Se observa una respuesta inadecuada a la solicitud de determinar la expresión analítica de *f* a partir de la gráfica correspondiente a la última función propuesta. El estudiante parece identificar en la gráfica de *f* un comportamiento simétrico respecto a la curva de la función exponencial natural. Sin embargo, analíticamente atribuye dicha simetría a un comportamiento recíproco entre ambas funciones, y no a que una sea la inversa de la otra (Ver Figuras 49 y 50).

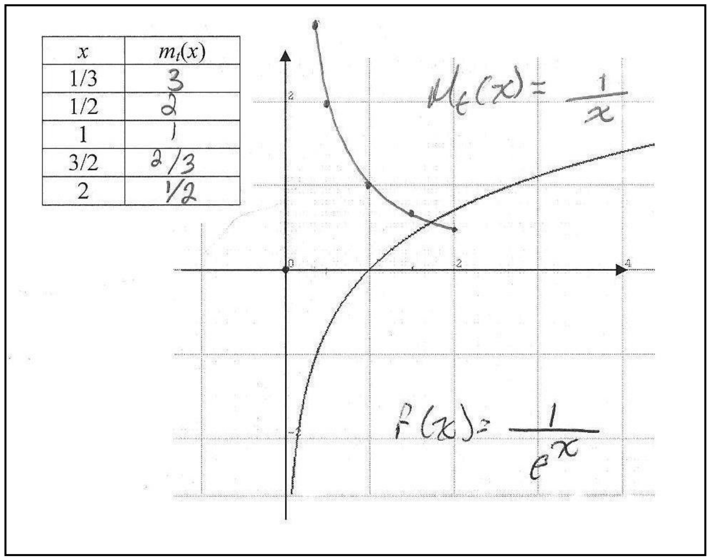


Figura 49. Actividad 5, reactivo 5, cuarta gráfica

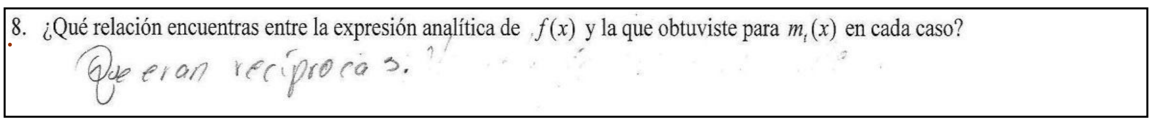


Figura 50. Actividad 5, reactivo 8

Actividad 6:

El estudiante no logra asociar la similitud entre las gráficas de *f* y $m_t(x)$ con el hecho de que pudiera tratarse de la función exponencial natural (Ver Figura 51).

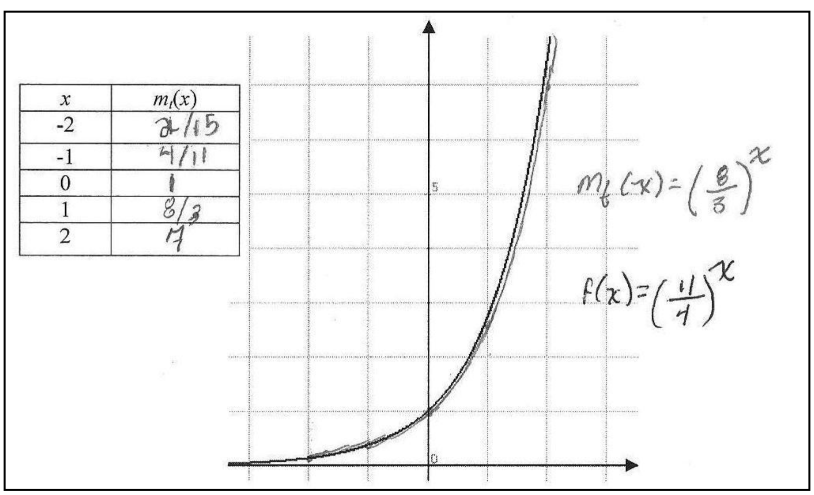


Figura 51. Actividad 6, reactivos 5 y 6

Cuestionario 2:

Al igual que en el caso del estudiante #26, la respuesta a la pregunta 1 del instrumento de evaluación pone en evidencia la construcción de significado en torno a la tangencia, como una noción local y no global (Ver Figura 52).

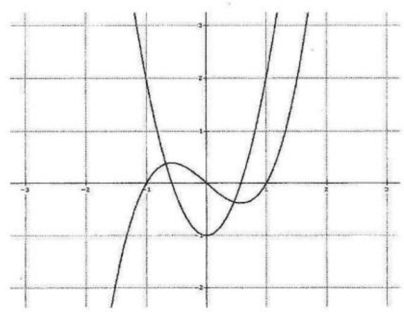
1. ¿Por qué, si la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$, cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica

Habíamos dicho que para hablar de una recta tangente, teníamos que hablar de un punto en particular, entonces aunque sea la derivada de f(x), no tomamos ningún punto a considerar. y por ello f'(x) no presenta tangencia con ningún punto de f(x)

Figura 52. Cuestionario 2, reactivo 1

Sin embargo, también al igual que con el estudiante #26, y aunque el significado de la gráfica de la función derivada es adecuado, este alumno no llega a la expresión analítica correcta de la recta tangente solicitada (Ver Figura 53).

2. A continuación encontrarás las gráficas que corresponden a f y f':



Sin realizar ningún trazo y explicando ampliamente tu respuesta en cada caso, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa 1? y=2x Porque aunque aquí no tengo la certeza de que será así al acercarme, tengo f'(x) y si yo sustituyo el valor de la abscisa allí, obtendré la pendiente para f(x) en ese punto.

b) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f, en el punto donde ésta intersecta al eje de las ordenadas? y=-x Porque si visualizamos ese punto, en las cercanías al punto con abscisa 1 para f(x) la recta que mas se parece en ese punto a la grafica es la identidad con pendiente negativa, donde si me desplazo una unidad hacia la derecha o a la izquierda y me muevo hacia arriba o hacia abajo según sea el caso avanzaré una unidad.

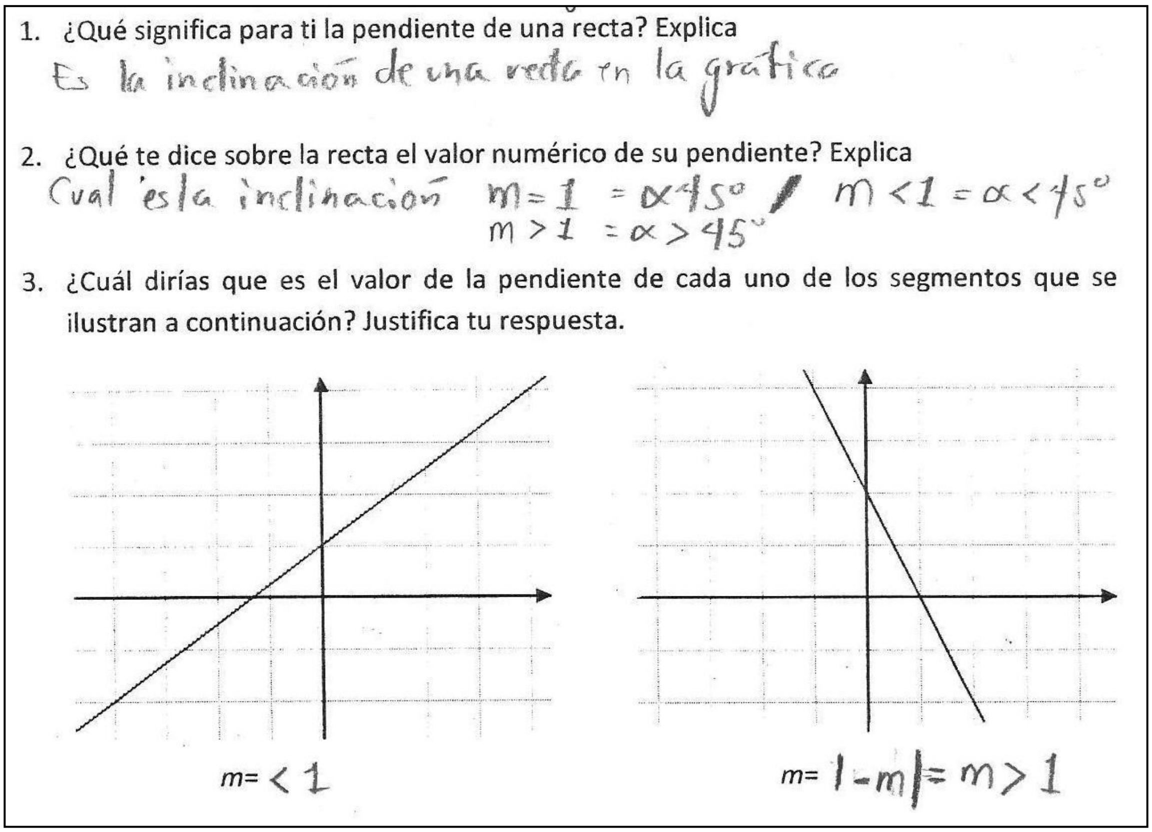
Figura 53. Cuestionario 2, reactivo 2

Estudiante #39.

Desde la percepción de la profesora/investigadora, este estudiante fue quien exhibió un sistema de prácticas menos adecuado, en relación con los significados institucionales pretendidos, de entre los cinco alumnos que conformaron el estudio de casos. A continuación, algunos comentarios generales de su desempeño.

Cuestionario 1:

En relación con la noción de pendiente, las respuestas dadas por este estudiante fueron las menos adecuadas del estudio de casos (Ver Figura 54).


1. ¿Qué significa para ti la pendiente de una recta? Explica

Es la inclinación de una recta en la gráfica

2. ¿Qué te dice sobre la recta el valor numérico de su pendiente? Explica

Cual es la inclinación $m=1 = \alpha 45°$ / $m<1 = \alpha<45°$

$m>1 = \alpha>45°$

3. ¿Cuál dirías que es el valor de la pendiente de cada uno de los segmentos que se ilustran a continuación? Justifica tu respuesta.

$m= <1$

$m= |-m| = m>1$

Figura 54. Cuestionario 1, reactivo 1, 2 y 3

También en la determinación de la expresión analítica de la recta y la parábola propuestas, se observaron inconsistencias con los sistemas de prácticas promovidos al respecto en la fase de pre-cálculo (Ver Figura 55).

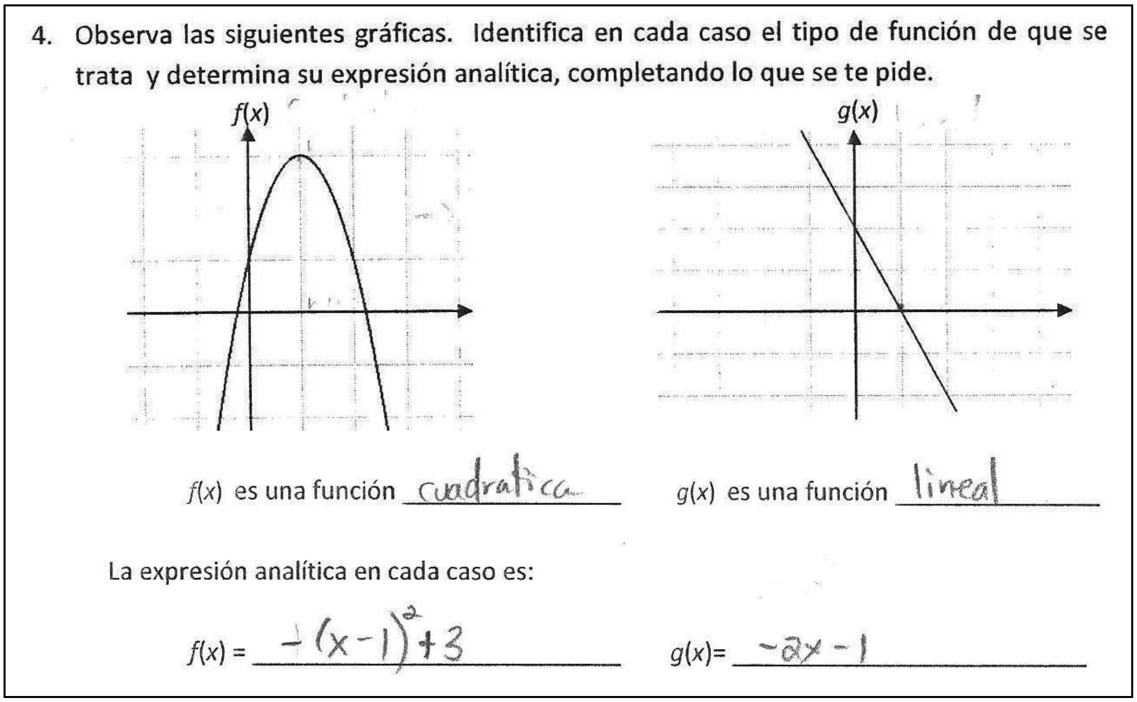


Figura 55. Cuestionario 1, reactivo 4

La identificación de la porción de una curva que corresponde a una función positiva, igualmente fue realizada de manera inadecuada, aunque relacionó correctamente su respuesta con el intervalo correspondiente (Ver Figura 56).

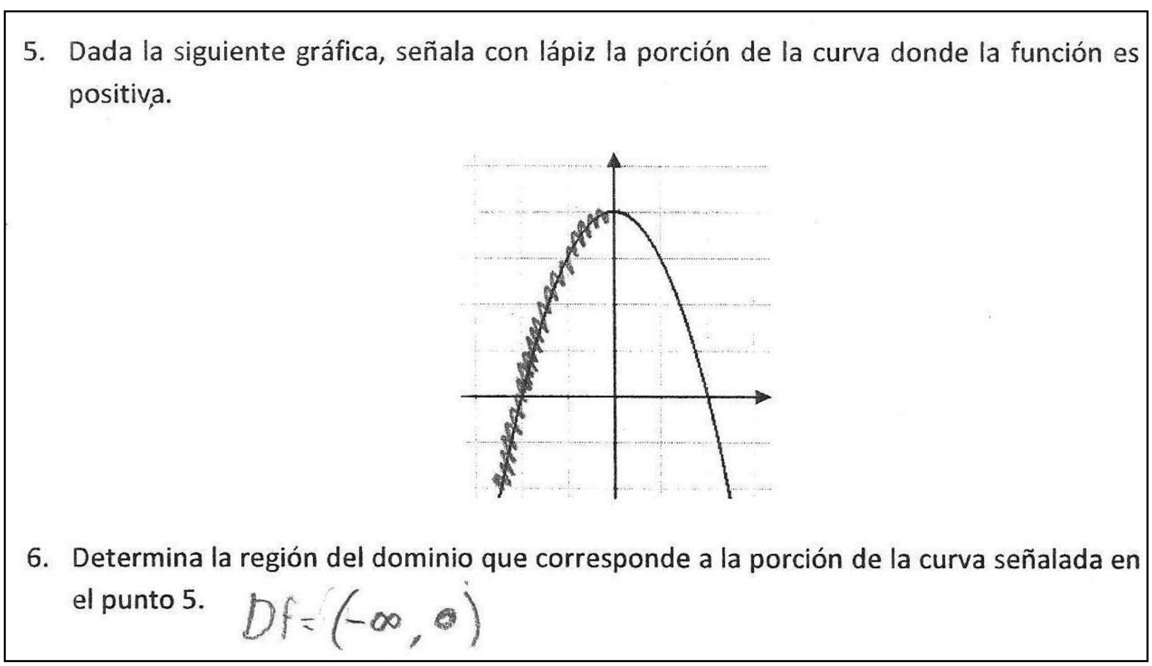
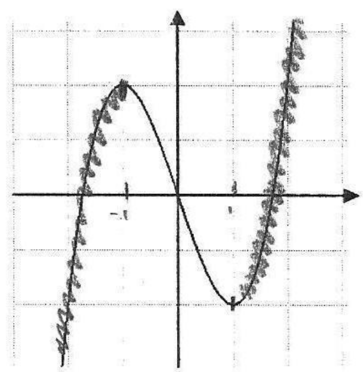


Figura 56. Cuestionario 1, reactivo 5 y 6

Respecto a la identificación de la porción de curva correspondiente a una función creciente, así como la relación con el intervalo respectivo, el estudiante respondió adecuadamente (Ver Figura 57).

7. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es creciente.



8. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 7.

$Df = (-\infty, -1]\ [1, +\infty)$

Figura 57. Cuestionario 1, reactivo 7 y 8

Actividad 1:

Al parecer, este estudiante no realizó una exploración adecuada en relación con la parábola ni con la gráfica de una función cúbica, por lo que no encontró en la actividad ningún motivo para rectificar su definición inicial de recta tangente (Ver Figura 58).

14. Pulsa el control ***Inicio*** para restablecer las condiciones iniciales del applet. Con el valor del control ***Paso*** en 2, asigna al control x los valores -4, -3, -2,-1 y 0, y aplica a la curva la técnica de acercamiento y trazo ya conocida. Explica lo que observas.

En todas toco solo un punto, osea es una recta tangente,

15. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma? Justifica tu respuesta.

Si, ya que dije que tocaba un punto de la figura.

16. Si tu definición de recta tangente no se confirmó en alguna parte del ejercicio, ¿podrías dar una nueva? Justifica tu respuesta.

17. Comenta con tus compañeros las conclusiones a las que hayas llegado.

Una tangente no es solo para una circunferencia, si no tambien para las parabol las cubicas, etc, siempre y cuando toque un solo punto.

Figura 58. Actividad 1, reactivos 14 - 17

Actividad 2:

Al igual que en el caso del estudiante #29, este alumno parece haber reflexionado lo suficiente en la sesión de discusión en torno a la recta tangente (Ver Figura 59).

10. A partir de la noción de *recta tangente* construida en la Actividad 1, ¿qué puedes decir de la recta tangente en un punto dado a cada una de las gráficas de esta actividad? Explica ampliamente.

Que la recta tangente de una recta siempre va ser igual.

Figura 59. Actividad 2, reactivo 10

Actividad 3:

El estudiante parece apreciar adecuadamente la relación entre la concavidad de una parábola y el comportamiento de la gráfica de $m_t(x)$ (Ver Figura 60).

7. ¿Qué relación encuentras entre la concavidad de la parábola y la gráfica de $m_t(x)$, en cada caso?

Que cuando es concava ↑ = Creciente
concava ↓ = decreciente.

Figura 60. Actividad 3, reactivo 7

Como se muestra en la Figura 4, este alumno tuvo problemas para encontrar una relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento de *f*.

Actividad 5:

La identificación analítica de f y $m_t(x)$ no pudo realizarse por este estudiante (Ver Figura 61)

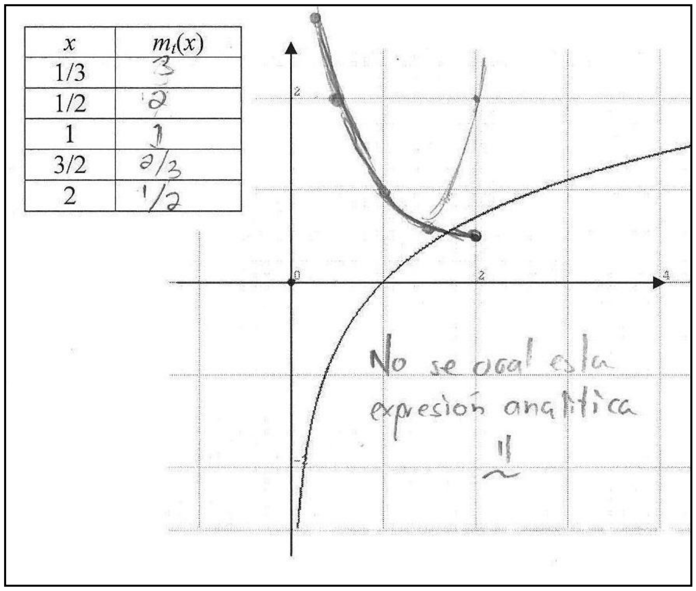


Figura 61. Actividad 5, reactivos 4 y 5

Este alumno califica de "inversa" la relación entre f y $m_t(x)$, tanto gráfica como analíticamente, aunque no logra identificar analíticamente a ninguna de las dos funciones (Ver Figura 62).

6. Si para cada caso comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

   Son graficas inversas

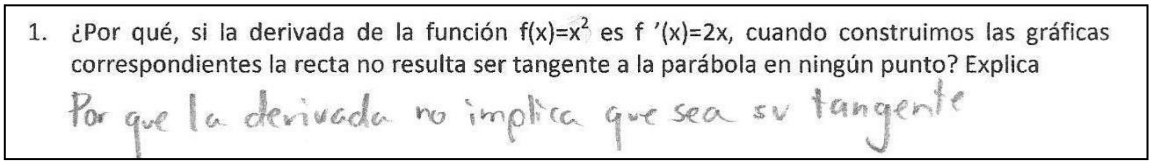
8. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$ en cada caso?

   Que son funciones inversas

Figura 62. Actividad 5, reactivos 6 y 8

Cuestionario 2:

Este alumno fue quien presentó la evidencia menos clara de una construcción significativa respecto al carácter local de la noción de tangencia (Ver Figura 63).


1. ¿Por qué, si la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$, cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica

Por que la derivada no implica que sea su tangente

Figura 63. Cuestionario 2, reactivo 1

No se obtuvieron respuestas por parte de este estudiante al resto de los reactivos del instrumento de evaluación.

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES

Con base en los resultados observados a partir del estudio de casos, puede afirmarse que la visualización dinámica de la linealidad local se constituyó en un valioso recurso para propiciar la evolución de los significados de tangencia y de recta tangente, pues, más allá de argumentos analíticos que pudieran probar formalmente que la recta tangente es la mejor aproximación lineal de una función en las cercanías de un punto, la posibilidad de *manipular* y *ver* cómo una curva se vuelve indistinguible de su recta tangente, cuando se aplica el zoom suficiente alrededor del punto, representa, desde nuestro punto de vista, una experiencia introductoria que resulta significativa para el estudiante, en relación con la identificación del carácter local de la noción de tangencia.

Asimismo, el acercamiento intuitivo promovido por la visualización de la linealidad local, que permite al estudiante asomarse a las cercanías de un punto de una curva, observar cómo ésta parece transformarse en un segmento de recta conforme aumenta el acercamiento, y, finalmente, relacionar la pendiente del segmento visualizado con la de la recta tangente en el punto dado, contribuyó a dar sentido al tránsito del alumno por las diferentes representaciones de la función derivada, que inicia con la tabla construida con la ayuda del software, pasa por la gráfica respectiva, y, finaliza con el arribo a la expresión analítica correspondiente.

Por lo anterior, es posible afirmar que el sistema de prácticas promovido por la secuencia didáctica presentada en este trabajo incide positivamente en la construcción de significado en torno a la función derivada, aclarando que tal afirmación se refiere, exclusivamente, al desempeño de los cinco estudiantes que conformaron el estudio de casos.

En relación con el proceso de instrucción promovido por la implementación de la secuencia didáctica, el cual es objeto de la investigación presentada en este trabajo, con base en los resultados observados en el estudio de casos exclusivamente, pudo apreciarse un nivel de *idoneidad didáctica* satisfactorio, desde la perspectiva del modelo de Análisis Didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico. La determinación de realizar el análisis de cada una de las idoneidades propuestas por el modelo teórico adoptado, desde las perspectivas a priori y a posteriori, permitió observar panorámicamente el proceso de instrucción investigado, lo que, finalmente, resultó de suma utilidad. Esta panorámica puso al descubierto que, aunque los conflictos semióticos potenciales sean identificados y, en función de ello, el proceso de instrucción pudiera calificarse teóricamente como óptimo, la aparición de conflictos semióticos efectivos resulta inevitable, y constituye la explicación de la falta de consistencia de los significados personales de los estudiantes respecto a las pautas institucionales.

A partir de la valoración a posteriori del proceso de instrucción investigado, se evidenciaron las fortalezas y limitaciones asociadas a los distintos aspectos evaluados. Así, aunque las idoneidades epistémica, cognitiva, ecológica e incluso la interaccional se perciben como altas, las idoneidades mediacional y emocional no resultaron tan bien evaluadas como se esperaba. En este sentido, las limitaciones identificadas sugieren posibles modificaciones, adaptaciones o reorganizaciones que conducirían a un proceso en espiral hacia diseños cada vez más finos, pero siempre perfectibles.

Consideramos, por todo lo anterior, que el análisis ontosemiótico constituye una poderosa herramienta de estudio de procesos de instrucción ya diseñados, que, además, aporta los elementos esenciales a considerar para diseños futuros.

A continuación se presentan algunas reflexiones que pudieran servir de orientación para posteriores trabajos.

Los resultados arrojados por el estudio de casos aquí presentado muestran una clara contribución de la secuencia didáctica al logro de los objetivos planteados. En términos del EOS, la secuencia didáctica promovió un sistema de prácticas que ayudó a construir significado, concretamente, en relación con dos aspectos: la noción de tangencia en su carácter local y la función derivada como instrumento que permite medir la inclinación de una curva.

La versión original de la secuencia didáctica presentada en este trabajo contemplaba, además de los dos aspectos mencionados, la posibilidad de incidir sobre el significado de derivada asociado a la medición de la rapidez de la variación. Con ese propósito, se concibió la posibilidad de aprovechar algunas situaciones en contexto sencillas, para implementar un sistema de prácticas que promoviera un encuentro con la derivada como razón instantánea de variación, a través de su perspectiva dimensional (referida a las unidades involucradas en un problema real). Sin embargo, las pretensiones tuvieron que acotarse para efectos de elaboración de una tesis de maestría, de acuerdo a los tiempos establecidos para la obtención del grado.

Más allá de lo que es posible documentar a partir de las evidencias recabadas en la presente investigación, puede afirmarse que los significados personales logrados por los estudiantes alcanzaron a impactar el aspecto relativo a la rapidez de variación. Esta afirmación se basa en la percepción de una idoneidad ecológica alta para el proceso de instrucción investigado, no sólo en cuanto a una mayor eficiencia en el tratamiento formal de la función derivada en el curso de Cálculo, sino también respecto al desarrollo de contenidos relacionados con la derivada como razón de cambio.

Con base en lo anterior, se considera que el papel de la visualización de la linealidad local en la concepción de la derivada como el instrumento asociado a la medición de la rapidez instantánea de variación queda como una cuestión abierta para futuros trabajos de investigación.

Por último, se presenta a continuación un breve recuento de las distintas etapas que tuvieron lugar en el desarrollo del presente trabajo, como resultado de un natural proceso de evolución de casi dos años.

- Se presenta la primera versión del presente trabajo, en el Primer Coloquio Intersemestral del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa (PMME), del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, evento instituido para mostrar los productos de las actividades correspondientes al período escolar recién concluido; en este caso, el semestre 2008-2. El trabajo fue presentado y sometido a réplica ante la comunidad del PMME el 16 de Enero de 2009.
- Una vez incorporadas las observaciones a la presentación del Primer Coloquio, el trabajo fue aceptado para el Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa,

evento enmarcado en el XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, y presentado el 19 de Enero de 2009 en la ciudad de Toluca, Estado de México.

- Con el Enfoque Ontosemiótico como marco teórico y ya en su calidad de Anteproyecto de Tesis, el 14 de Agosto de 2009 se presentan los avances del trabajo, bajo la forma de propuesta de desarrollo docente, como producto de las actividades académicas correspondientes al semestre 2009-1, en el Segundo Coloquio Intersemestral del PMME.
- Los avances correspondientes a los primeros tres meses de actividades del semestre 2009-2, fueron incorporados al trabajo presentado en el Segundo Coloquio, resultando de ello una propuesta de participación en el Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo. La propuesta fue aceptada, y presentada el 12 de Noviembre de 2009 en la ciudad de Saltillo, Coahuila. A la fecha, se está a la espera de la notificación de aceptación para su publicación en la Revista *El Cálculo y su Enseñanza*, editada por la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.
- Al finalizar el semestre 2009-2, se presentaron los avances del trabajo, como Proyecto de Tesis, en el Tercer Coloquio Intersemestral del PMME, el 16 de Enero de 2010, ante la comunidad de Matemática Educativa del Departamento de Matemáticas.
- Las actividades encaminadas a aplicar con profundidad el modelo de Análisis Didáctico del EOS a las evidencias recabadas como resultado de la implementación de la secuencia didáctica, imprimieron al proyecto rasgos característicos de un trabajo de investigación. En estas condiciones, con motivo de la vigésima edición de la Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, que coincidió con el vigésimo aniversario del PMME, se presentaron los avances del proyecto de tesis, el 01 de Marzo de 2010.

REFERENCIAS

Artigue,M. (2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.*

Ávila, R. (2007). *Las nuevas tecnologías y las matemáticas del cambio*. XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas. Toluca, Estado de México.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Bivens, I. (1986) What a Tangent Line Is When It Isn't a Limit. *The College Mathematics Journal*, Vol. 17, No. 2 (Mar., 1986), pp. 133-143. Mathematical Association of America Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2686832.

Callahan, J. (1994) Calculus in Context. *The Five College Calculus Project*. Worth Publishers, Incorporated. ISBN: 0716726300.

Cantoral R. 1991; Proyecto de investigación: formación de la noción de función analítica; Mathesis Vol. 7, núm. 2, pp. 224.

Del Castillo, A. (2003) La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural. *Mosaicos Matemáticos* No. 13, (pp. 75-80), Universidad de Sonora.

Del Castillo, (2004). *Obtención de expresiones analíticas a partir de gráficas: el caso de las funciones senoidales*. Tesis de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. Universidad de Sonora, México.

Del Castillo, A. (2006), Obtención de expresiones analíticas a partir de gráficas: el caso de las funciones senoidales. En A. Contreras y L. Ordoñez (Eds.), *Actas del Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas,* (pp. 309-344), Universidad de Jaén.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba. Disponible en Internet: http://www.webpersonal.net/vfont/SEIEM2005defVFont.pdf

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, México, Distrito Federal. Santillana. Vol.19, (2), 95-128.

Font, V. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (1), 89-105.

Godino, J. D.(2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3), 237-284.

Godino, J.D. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el Enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 26 (1) : 39-88.

Hughes, D. (2000). *Calculus*. Editorial CECSA. Segunda Edición. ISBN 0-471-16443-7.

Invernizzi, S. (2002) *A limit-free approach to derivatives: Report on a Classroom Project*. ICTM2, 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Hersonissos, Crete , Greece, July 1-6, 2002, John Wiley & Sons Inc., ISBN 0-471-46332-9.

Jiménez, J. (2008). *Fundamentos teóricos para el diseño de actividades de enseñanza de conceptos matemáticos con calculadora algebraica*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Instituto de Ciencias de la Educación. Unidad de Matemática Educativa.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. Oxford University Press-Harla México, S. A. de C. V. Séptima Edición. ISBN 970-613-182-5.

Marsden, J. (1981) *Calculus Unlimited*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. ISBN 0-8053-6932-5.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. New Jersey: Princeton University Press.

Riestra, A. (2003). Tangencia, Contacto y la Diferencial. *Matemática Educativa*. Aspectos de la investigación actual. Sección de Obras de Ciencia y Tecnología. Fondo de Cultura Económica. México, pp. 218-241.

Shultz, H. (1995) Introduction to derivatives: A TI-81/TI-82 graphing calculator activity. *Mathematics and Computer Education*, Vol 29, No.2.

Steen, L. (2008). *La Enseñanza Agradable de las Matemáticas*. Editorial Limusa México, S. A. de C.V. ISBN-13: 978-968-18-4570-4.

Stewart, J. (2001) *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Thomson Learning. Cuarta Edición. ISBN 970-686-069-X.

Tall, D. (1986) Graphic insight into calculus and differential equations, in *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching* (ed. Howson G. & Kahane J-P), C.U.P., 107-119.

Tall, D. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil.

Teague, D. (1996) A Local Linearity Approach to Calculus. The North Carolina School of Science and Mathematics. Presentado en ICME-8, Sevilla, España.

Tellechea, E. (2004). *El Applet Descartes en el diseño de actividades interactivas de Matemáticas*. Curso para Profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora Hermosillo, Sonora. [URL:http://www.mat.uson.mx/eduardo/CursoDCEN2.pdf].

Tellechea, E. (2005). *De la Integral de Riemann al Teorema Fundamental del Cálculo: Un acercamiento con el Applet Descartes*. XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. [URL:http://www.mat.uson.mx/eduardo/Tellechea2005.pdf].

Tellechea, E. (2006). *From the Riemann Integral to the Fundamental Theorem of Calculus: An approach with Applet Descartes*. International Congress of Mathematicians. Madrid, España. [URL:http://www.mat.uson.mx/eduardo/icm2006web/icm2006.pps].

Tellechea, E. (2007). *Diseño de herramientas interactivas en línea como apoyo a los cursos de Cálculo*. XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. [URL:http://www.mat.uson.mx/eduardo/Tellechea2007.pdf].

Thomas, G. (2005). *Cálculo. Una variable.* Pearson Addison Wesley. Undécima Edición. ISBN 0-321-185587.

A N E X O S

ANEXO I. INSTRUMENTO DE DIAGNÓSTICO

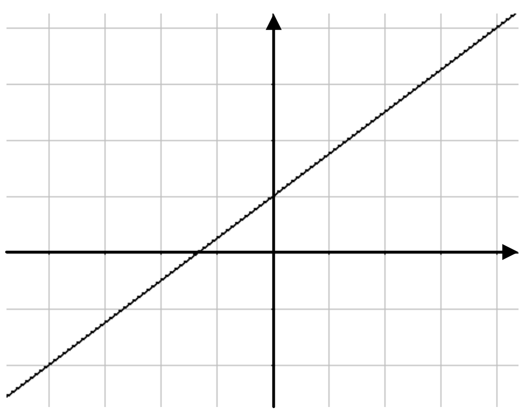
Cuestionario 1
(Instrumento de Diagnóstico)

Nombre:___________________________________ Fecha:______________

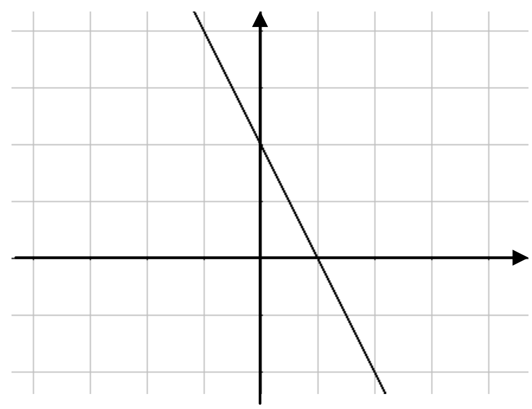
1. ¿Qué significa para ti la pendiente de una recta? Explica

2. ¿Qué te dice sobre la recta el valor numérico de su pendiente? Explica

3. ¿Cuál dirías que es el valor de la pendiente de cada uno de los segmentos que se ilustran a continuación? Justifica tu respuesta.

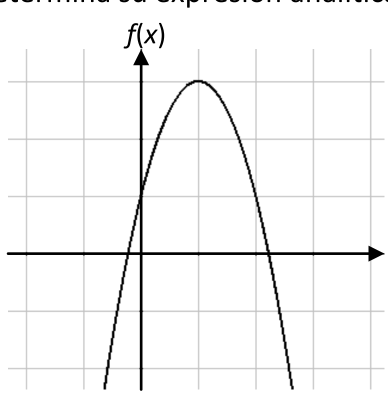


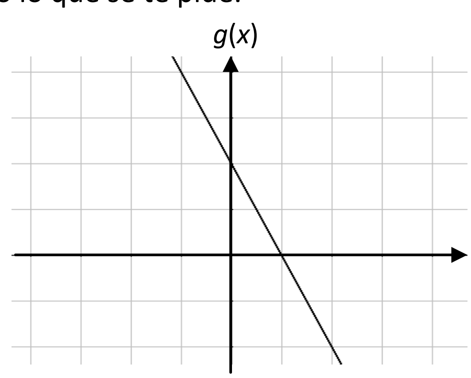
m=



m=

4. Observa las siguientes gráficas. Identifica en cada caso el tipo de función de que se trata y determina su expresión analítica, completando lo que se te pide.



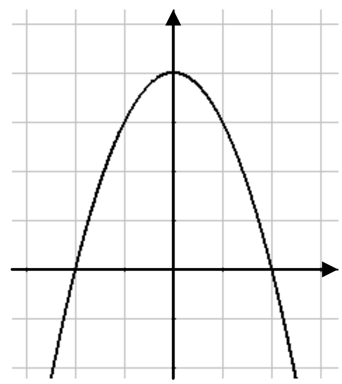


$f(x)$ es una función _________________ $g(x)$ es una función ________________

La expresión analítica en cada caso es:

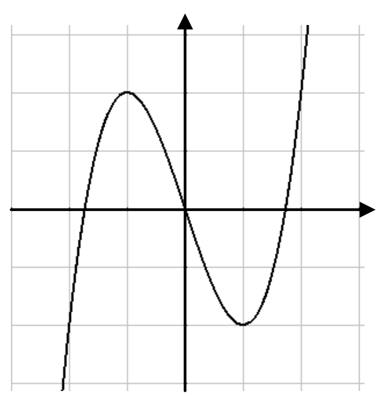
$f(x)$ = _____________________________ $g(x)$= ____________________________

5. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es positiva.



6. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 5.

7. Dada la siguiente gráfica, señala con lápiz la porción de la curva donde la función es creciente.



8. Determina la región del dominio que corresponde a la porción de la curva señalada en el punto 7.

ANEXO II. CONFIGURACIONES

ANEXO II. CONFIGURACIONES

En el segundo nivel de análisis, la atención se centra sobre los objetos primarios puestos en juego en la realización de las prácticas matemáticas asociadas. Las redes de objetos identificadas en cada una de las actividades que conforman la secuencia son las siguientes:

Actividad 1

- **Lenguaje:**
  Intervinientes:
  - ***Verbal***: Gráfica, circunferencia, zoom, parábola, función cúbica.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de una circunferencia, gráfica de una parábola, gráfica de una función cúbica.

  Emergentes:
  - ***Verbal:*** Segmento visualizado, recta tangente, pendiente, punto de tangencia.
  - ***Gráfico:*** Pendiente del segmento visualizado, pendiente de la recta tangente, gráfica de la curva con la recta tangente en un punto.
  - ***Analítico:*** Expresión analítica de la recta tangente.

- **Situaciones:**
  - Visualización de la recta tangente a una circunferencia, a una parábola y a la gráfica de una función cúbica, con objeto de verificar la validez de la noción primaria de *recta tangente* como *aquélla que toca un solo punto de la curva.*

- **Conceptos:**
  Intervinientes:
  - Función, punto, abscisa, ordenada, circunferencia, parábola, función cúbica, recta tangente como la que toca a una curva en un solo punto.

  Emergentes:
  - Segmento, pendiente de una recta, recta tangente como la recta que mejor aproxima a una curva en las cercanías del punto de tangencia.

- **Procedimientos:**
  Intervinientes:
  - Con la ayuda del software (applet Linealizador), realizar acercamientos sucesivos a las gráficas de una circunferencia, una parábola y una función cúbica, hasta observar a la curva como un segmento de recta alrededor de un punto de abscisa dada.

  Emergentes:
  - Determinación del valor numérico de la pendiente del segmento visualizado para cada punto de abscisa dada, a partir de la cuadrícula de referencia aportada por el applet.

- Con base en la identificación de la pendiente del segmento como la pendiente de la recta tangente en el punto dado, manipulación del applet Linealizador, mediante alejamientos sucesivos o de un solo paso, con objeto de observar a la recta tangente construida sobre la curva en el punto dado.
- Determinación de la expresión analítica de la recta tangente, a partir de la información gráfica proporcionada por el software.

➢ **Proposiciones:**

Intervinientes:

- En una vecindad suficientemente pequeña de un punto sobre una curva, ésta puede observarse como localmente lineal.

Emergentes:

- La pendiente del segmento visualizado, cuando el acercamiento es suficiente, coincide con la pendiente de una recta.
- De todas las rectas que pasan por un punto de una curva, la que mejor aproxima a la curva en las cercanías de dicho punto es la que tiene la misma pendiente que el segmento visualizado, y se le conoce como *recta tangente*.
- La ecuación de la recta tangente puede determinarse por punto-pendiente.
- La recta tangente es la que mejor aproxima a la curva en las cercanías del punto de tangencia.

➢ **Argumentos:**

Intervinientes:

- El applet Linealizador permite justificar visualmente que, cuando el acercamiento sobre un punto de la curva es suficientemente fino, ésta parece comportarse como recta, por lo que se observa como un segmento con una pendiente asociada.

Emergentes:

- El applet Linealizador permite justificar visualmente que existe una recta cuya pendiente coincide con la del segmento visualizado.
- El applet Linealizador permite observar el gran número de rectas que tocan a la curva en el punto de máximo acercamiento, mediante la manipulación dinámica de la pendiente. Así, resulta visualmente convincente que la recta que se superpone al segmento visualizado es la que coincide con él en el valor de la pendiente.
- El applet Linealizador permite observar, mediante el proceso de alejamiento, a la recta tangente construida sobre un punto de la curva. El applet permite también la identificación del valor de la pendiente y las coordenadas del punto de tangencia, para la determinación de la expresión analítica correspondiente.
- Aunque el estudio de la recta tangente a la circunferencia y a la parábola permanece consistente con la noción primaria, en el análisis de la gráfica de la función cúbica, el applet Linealizador permite al estudiante corregir su concepción de recta tangente. Así, el alumno observa que la recta tangente

puede tocar a la curva en más de un punto o cortarla y seguir siendo tangente en la zona de corte.

Actividad 2

- **Lenguaje:**

  Intervinientes:
  - ***Verbal***: Función, gráfica, función lineal, recta, recta creciente, recta decreciente, recta horizontal, segmento visualizado, inclinación, pendiente, recta tangente, punto de tangencia.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de una función lineal *f* (recta).

  Emergentes:
  - ***Verbal:*** Función pendiente de la recta tangente, tabla de la función pendiente de la recta tangente, gráfica de la función pendiente de la recta tangente, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de $m_t(x)$, gráfica de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Tabular:*** Tabla de $m_t(x)$, tabla de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Analítico:*** Expresión analítica de $m_t(x)$, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.

- **Situaciones:**
  - Construcción de la *función derivada* a partir de la visualización dinámica de la linealidad local de la función *f*.

- **Conceptos:**

  Intervinientes:
  - Función, gráfica de una función lineal *f*, función lineal, abscisa, ordenada, recta, segmento, pendiente, recta tangente, linealidad local, tabla de una función lineal *f*, expresión analítica de una función lineal *f*.

  Emergentes:
  - Función derivada de una función de una función lineal.

- **Procedimientos:**

  Intervinientes:
  - Con la ayuda del software (applet Linealizador), realizar acercamientos sucesivos a la gráfica de *f*, hasta observar a la curva como un segmento de recta alrededor de un punto de abscisa dada.
  - Calcular el valor de la pendiente del segmento visualizado para cada punto de abscisa dada, a partir de la cuadrícula de referencia aportada por el applet.

  Emergentes:
  - Determinar la expresión analítica de *f* en cada caso, con base en conocimientos previos sobre gráficas.

- Tabular los valores de las pendientes obtenidos para cada segmento visualizado en el punto de abscisa dada, hasta obtener la tabla de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Graficar las parejas ordenadas $(a,m_t(a))$ obtenidas de la tabulación anterior y unir los puntos correspondientes para encontrar la gráfica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Con apoyo en los dos procedimientos anteriores, determinar la expresión analítica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*, identificándola finalmente como *f'(x)*.

➢ **Proposiciones:**

Intervinientes:

- El segmento visualizado coincide con la recta tangente a la curva en el punto de tangencia.
- La recta tangente es la recta que mejor aproxima a una función *f* en las cercanías del punto de tangencia.

Emergentes:

- La función *f'(x)* es la que permite medir la pendiente de la recta que es tangente a la curva *f* en cualquier punto de abscisa *x*.
- La derivada de una función lineal es una función constante.
- La derivada de una función constante es la función $y=0$.
- Si la función lineal es creciente en un intervalo, la derivada es positiva en ese intervalo.
- Si la función lineal es decreciente en un intervalo, la derivada es negativa en ese intervalo.

➢ **Argumentos:**

Intervinientes:

- El applet Linealizador permite justificar visualmente que el segmento observado al aplicar el zoom está sobre la recta tangente, cuya ecuación es determinable de manera analítica por punto-pendiente.

Emergentes:

- La función *pendiente de la recta tangente*, $m_t(x)$, está constituida por todos los puntos de coordenadas $(a,m_t(a))$, donde $m_t(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa *a*.
- Lo que sucede para el punto $(a,m_t(a))$ es válido para cualquier punto.
- La función $m_t(x)$ es la función derivada de *f*, pues asocia a cada punto de abscisa *x* la pendiente de la recta tangente a la curva *f* en dicho punto, por lo que se le denotará por *f'(x)*.

Actividad 3

➢ **Lenguaje:**

Intervinientes:

- ***Verbal***: Función, gráfica, función cuadrática, parábola, apertura de la parábola, concavidad, parábola cóncava hacia arriba, parábola cóncava hacia abajo, función creciente, función decreciente, segmento visualizado, pendiente, recta tangente, punto de tangencia.
- ***Gráfico:*** Gráfica de una función cuadrática *f* (parábola).

Emergentes:

- ***Verbal:*** Función pendiente de la recta tangente, tabla de la función pendiente de la recta tangente, gráfica de la función pendiente de la recta tangente, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.
- ***Gráfico:*** Gráfica de $m_t(x)$, gráfica de la función pendiente de la recta tangente.
- ***Tabular:*** Tabla de $m_t(x)$, tabla de la función pendiente de la recta tangente **.**
- ***Analítico:*** Expresión analítica de $m_t(x)$, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente**.**

➢ **Situaciones:**

- Construcción de la *función derivada* a partir de la visualización dinámica de la linealidad local de la función *f*.

➢ **Conceptos:**

Intervinientes:

- Función, gráfica de una función cuadrática *f*, función cuadrática, parábola, abscisa, ordenada, recta, segmento, pendiente, recta tangente, linealidad local, tabla de una función cuadrática *f*, expresión analítica de una función cuadrática *f*.

Emergentes:

- Función derivada de una función cuadrática.

➢ **Procedimientos:**

Intervinientes:

- Con la ayuda del software (applet Linealizador), realizar acercamientos sucesivos a la gráfica de *f*, hasta observar a la curva como un segmento de recta alrededor de un punto de abscisa dada.
- Calcular el valor de la pendiente del segmento visualizado para cada punto de abscisa dada, a partir de la cuadrícula de referencia aportada por el applet.

Emergentes:

- Determinar la expresión analítica de *f* en cada caso, con base en conocimientos previos sobre gráficas.
- Tabular los valores de las pendientes obtenidos para cada segmento visualizado en el punto de abscisa dada, hasta obtener la tabla de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Graficar las parejas ordenadas $(a, m_t(a))$ obtenidas de la tabulación anterior y unir los puntos correspondientes para encontrar la gráfica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.

- Con apoyo en los dos procedimientos anteriores, determinar la expresión analítica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función f, identificándola finalmente como *f'(x)*.

➢ **Proposiciones:**

Intervinientes:

- El segmento visualizado coincide con la recta tangente a la curva en el punto de tangencia.
- La recta tangente es la recta que mejor aproxima a la gráfica de una función *f* en las cercanías del punto de tangencia.

Emergentes:

- La función *f'(x)* es la que permite medir la pendiente de la recta que es tangente a la curva *f* en cualquier punto de abscisa *x*.
- La derivada de una función cuadrática es una función lineal.
- La derivada de una función cuadrática cóncava hacia arriba es una función lineal creciente.
- La derivada de una función cuadrática cóncava hacia abajo es una función lineal decreciente.
- Si la función es creciente en un intervalo, la derivada es positiva en ese intervalo.
- Si la función es decreciente en un intervalo, la derivada es negativa en ese intervalo.
- La derivada de *f* trasladada horizontalmente es igual a la trasladada de la derivada de *f*.
- La derivada de *f* trasladada verticalmente es igual a la derivada de *f*.

➢ **Argumentos:**

Intervinientes:

- El applet Linealizador permite justificar visualmente que el segmento observado al aplicar el zoom está sobre la recta tangente, cuya ecuación es determinable de manera analítica por punto-pendiente.

Emergentes:

- La función *pendiente de la recta tangente*, $m_t(x)$, está constituida por todos los puntos de coordenadas $(a,m_t(a))$, donde $m_t(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa *a*.
- Lo que sucede para el punto $(a,m_t(a))$ es válido para cualquier punto.
- La función $m_t(x)$ es la función derivada de *f*, pues asocia a cada punto de abscisa *x* la pendiente de la recta tangente a la curva *f* en dicho punto, por lo que se le denotará por *f'(x)*.
- El applet linealizador permite justificar visualmente las proposiciones emergentes relacionadas con: a) los grados de *f* y su función derivada, b) la relación entre la concavidad de una parábola y el comportamiento creciente o decreciente de su función derivada y c) la relación entre el signo de la derivada y el comportamiento creciente o decreciente de *f*.

- El applet linealizador permite justificar visualmente que el efecto de trasladar horizontalmente la gráfica de una función no modifica la pendiente del segmento visualizado en el punto trasladado correspondiente, y que, globalmente, la función $m_t(x)$ resulta igualmente trasladada.
- El applet linealizador permite justificar visualmente que el efecto de trasladar verticalmente la gráfica de una función no modifica la pendiente del segmento visualizado en el punto trasladado correspondiente, y que, globalmente, la función $m_t(x)$ no se modifica.

Actividad 4

- **Lenguaje:**

  Intervinientes:
  - ***Verbal***: Función, gráfica, función cúbica, polinomio de grado tres, polinomio de grado cuatro, concavidad hacia arriba, concavidad hacia abajo, función creciente, función decreciente, segmento visualizado, pendiente, recta tangente, punto de tangencia.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de una función cúbica *f* o polinomio de grado tres, gráfica de un polinomio de grado cuatro *f*.

  Emergentes:
  - ***Verbal:*** Función pendiente de la recta tangente, tabla de la función pendiente de la recta tangente, gráfica de la función pendiente de la recta tangente, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de $m_t(x)$, gráfica de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Tabular:*** Tabla de $m_t(x)$, tabla de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Analítico:*** Expresión analítica de $m_t(x)$, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.

- **Situaciones:**
  - Construcción de la *función derivada* a partir de la visualización dinámica de la linealidad local de la función *f*.

- **Conceptos:**

  Intervinientes:
  - Función, gráfica de una función *f*, función cúbica, polinomio de grado tres, polinomio de grado cuatro, abscisa, ordenada, recta, pendiente, recta tangente, linealidad local, tabla de una función *f*, expresión analítica de una función *f*.

  Emergentes:
  - Función derivada de la función *f*.

- **Procedimientos:**

  Intervinientes:

- Con la ayuda del software (applet Linealizador), realizar acercamientos sucesivos a la gráfica de *f*, hasta observar a la curva como un segmento de recta alrededor de un punto de abscisa dada.
- Calcular el valor de la pendiente del segmento visualizado para cada punto de abscisa dada, a partir de la cuadrícula de referencia aportada por el applet.

Emergentes:

- Tabular los valores de las pendientes obtenidos para cada segmento visualizado en el punto de abscisa dada, hasta obtener la tabla de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Graficar las parejas ordenadas $(a,m_t(a))$ obtenidas de la tabulación anterior y unir los puntos correspondientes para encontrar la gráfica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.

- **Proposiciones:**

  Intervinientes:

  - El segmento visualizado coincide con la recta tangente a la curva en el punto de tangencia.
  - La recta tangente es la recta que mejor aproxima a una función *f* en las cercanías del punto de tangencia.

  Emergentes:

  - La función *f'(x)* es la que permite medir la pendiente de la recta que es tangente a la curva *f* en cualquier punto de abscisa *x*.
  - La derivada de una función cúbica es una función cuadrática.
  - La derivada de un polinomio de grado cuatro es una función cúbica.
  - Si la función es creciente en un intervalo, la derivada es positiva en ese intervalo.
  - Si la función es decreciente en un intervalo, la derivada es negativa en ese intervalo.

- **Argumentos:**

  Intervinientes:

  - El applet Linealizador permite justificar visualmente que el segmento observado al aplicar el zoom está sobre la recta tangente, cuya ecuación es determinable de manera analítica por punto-pendiente.

  Emergentes:

  - La función *pendiente de la recta tangente*, $m_t(x)$, está constituida por todos los puntos de coordenadas $(a,m_t(a))$, donde $m_t(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa *a*.
  - Lo que sucede para el punto $(a,m_t(a))$ es válido para cualquier punto.
  - La función $m_t(x)$ es la función derivada de *f*, pues asocia a cada punto de abscisa *x* la pendiente de la recta tangente a la curva *f* en dicho punto, por lo que se le denotará por *f'(x)*.
  - El applet linealizador permite justificar visualmente las proposiciones emergentes relacionadas con: a) los grados de *f* y su función derivada y b) la

relación entre el signo de la derivada y el comportamiento creciente o decreciente de *f*.

Actividad 5

- **Lenguaje:**
  Intervinientes:
  - ***Verbal***: Función, gráfica, segmento visualizado, pendiente, recta tangente, punto de tangencia.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de una función *f*.

  Emergentes:
  - ***Verbal:*** Función seno, función coseno, función logaritmo natural, función pendiente de la recta tangente, tabla de la función pendiente de la recta tangente, gráfica de la función pendiente de la recta tangente, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de $m_t(x)$, gráfica de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Tabular:*** Tabla de $m_t(x)$, tabla de la función pendiente de la recta tangente.
  - ***Analítico:*** Expresión analítica de $m_t(x)$, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.

- **Situaciones:**
  - Construcción de la *función derivada* a partir de la visualización dinámica de la linealidad local de la función *f*.

- **Conceptos:**
  Intervinientes:
  - Función, gráfica de una función *f*, abscisa, ordenada, recta, pendiente, recta tangente, linealidad local, tabla de una función, expresión analítica de una función.

  Emergentes:
  - Función derivada de una función *f*.

- **Procedimientos:**
  Intervinientes:
  - Con la ayuda del software (applet Linealizador), realizar acercamientos sucesivos a la gráfica de *f*, hasta observar a la curva como un segmento de recta alrededor de un punto de abscisa dada.
  - Calcular el valor de la pendiente del segmento visualizado para cada punto de abscisa dada, a partir de la cuadrícula de referencia aportada por el applet.

  Emergentes:
  - Tabular los valores de las pendientes obtenidos para cada segmento visualizado en el punto de abscisa dada, hasta obtener la tabla de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.

- Graficar las parejas ordenadas $(a,m_t(a))$ obtenidas de la tabulación anterior y unir los puntos correspondientes para encontrar la gráfica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Con apoyo en los dos procedimientos anteriores, determinar la expresión analítica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*, identificándola finalmente como *f'(x)*.

- **Proposiciones:**

  Intervinientes:
  - La recta tangente es la recta que mejor aproxima a una función *f* en las cercanías del punto de tangencia.

  Emergentes:
  - La función *f'(x)* es la que permite medir la pendiente de la recta que es tangente a la curva *f* en cualquier punto de abscisa *x*.
  - La derivada de la función seno es la función coseno.
  - La derivada de la función coseno es la función seno negativo.
  - La derivada de la función seno de un ángulo doble es el doble de la función coseno del ángulo doble.
  - La derivada de la función logaritmo natural es la función $f(x)=\frac{1}{x}$, para $x>0$.
  - Si la función es creciente en un intervalo, la derivada es positiva en ese intervalo.
  - Si la función es decreciente en un intervalo, la derivada es negativa en ese intervalo.

- **Argumentos:**

  Intervinientes:
  - El applet Linealizador permite justificar visualmente que el segmento observado al aplicar el zoom está sobre la recta tangente, cuya ecuación es determinable de manera analítica por punto-pendiente.

  Emergentes:
  - La función *pendiente de la recta tangente*, $m_t(x)$, está constituida por todos los puntos de coordenadas $(a,m_t(a))$, donde $m_t(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa a.
  - Lo que sucede para el punto $(a,m_t(a))$ es válido para cualquier punto.
  - La función $m_t(x)$ es la función derivada de *f*, pues asocia a cada punto de abscisa *x* la pendiente de la recta tangente a la curva *f* en dicho punto, por lo que se le denotará por *f'(x)*.

Actividad 6

- **Lenguaje:**

  Intervinientes:

- ***Verbal***: Función, gráfica, segmento visualizado, pendiente, recta tangente, punto de tangencia.
- ***Gráfico:*** Gráfica de una función *f*.

Emergentes:

- ***Verbal:*** Función exponencial natural, función pendiente de la recta tangente, tabla de la función pendiente de la recta tangente, gráfica de la función pendiente de la recta tangente, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.
- ***Gráfico:*** Gráfica de $m_t(x)$, gráfica de la función pendiente de la recta tangente.
- ***Tabular:*** Tabla de $m_t(x)$, tabla de la función pendiente de la recta tangente.
- ***Analítico:*** Expresión analítica de $m_t(x)$, expresión analítica de la función pendiente de la recta tangente.

➢ **Situaciones:**

- Construcción de la *función derivada* a partir de la visualización dinámica de la linealidad local de la función *f*.

➢ **Conceptos:**

Intervinientes:

- Función exponencial natural, gráfica de la función exponencial natural *f*, abscisa, ordenada, recta, pendiente, recta tangente, linealidad local, tabla de la función exponencial natural *f*, expresión analítica de la función exponencial natural *f*.

Emergentes:

- Función derivada de la función exponencial natural *f*.

➢ **Procedimientos:**

Intervinientes:

- Con la ayuda del software (applet Linealizador), realizar acercamientos sucesivos a la gráfica de *f*, hasta observar a la curva como un segmento de recta alrededor de un punto de abscisa dada.
- Estimar el valor de la pendiente del segmento visualizado para cada punto de abscisa dada, a partir de la cuadrícula de referencia aportada por el applet.

Emergentes:

- Tabular los valores estimados de las pendientes obtenidas para cada segmento visualizado en el punto de abscisa dada, hasta obtener la tabla de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Graficar las parejas ordenadas $(a,m_t(a))$ obtenidas de la tabulación anterior y unir los puntos correspondientes para encontrar la gráfica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*.
- Con apoyo en los dos procedimientos anteriores, determinar la expresión analítica de la función $m_t(x)$ o función derivada de la función *f*, identificándola finalmente como $f'(x)$.

- **Proposiciones:**

  Intervinientes:
  - La recta tangente es la recta que mejor aproxima a una función *f* en las cercanías del punto de tangencia.

  Emergentes:
  - La función *f'(x)* es la que permite medir la pendiente de la recta que es tangente a la curva *f* en cualquier punto de abscisa *x*.
  - La derivada de la función exponencial natural es la función exponencial natural.
  - Si la función es creciente en un intervalo, la derivada es positiva en ese intervalo.

- **Argumentos:**

  Intervinientes:
  - El applet Linealizador permite justificar visualmente que el segmento observado al aplicar el zoom está sobre la recta tangente, cuya ecuación es determinable de manera analítica por punto-pendiente.

  Emergentes:
  - La función *pendiente de la recta tangente*, $m_t(x)$, está constituida por todos los puntos de coordenadas $(a,m_t(a))$, donde $m_t(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa *a*.
  - Lo que sucede para el punto $(a,m_t(a))$ es válido para cualquier punto.
  - La función $m_t(x)$ es la función derivada de *f*, pues asocia a cada punto de abscisa *x* la pendiente de la recta tangente a la curva *f* en dicho punto, por lo que se le denotará por *f'(x)*.

Actividad 7

- **Lenguaje:**

  Intervinientes:
  - ***Verbal***: Función, gráfica, segmento visualizado, pendiente, recta tangente, punto de tangencia.
  - ***Gráfico:*** Función *f*, gráfica de una función *f*.

  Emergentes:
  - ***Verbal:*** Cambio abrupto, pico, recta tangente vertical. Por más fino que sea el acercamiento a las abscisas propuestas, la curva nunca aparece como un único segmento de recta. Aunque el acercamiento permite observar a la curva localmente como un segmento de recta, el valor de su pendiente no es un número real.
  - ***Gráfico:*** Gráfica de una función con uno o más puntos de no derivabilidad.

- **Situaciones:**
  - Visualización de algunas condiciones de *no derivabilidad puntual* de la gráfica de una función, mediante acercamientos sucesivos.

- **Conceptos:**

  Intervinientes:
  - Función, gráfica de una función *f*, abscisa, ordenada, recta, segmento, pendiente, recta tangente, linealidad local.

  Emergentes:
  - Función no derivable en un punto.

- **Procedimientos:**

  Intervinientes:
  - Con la ayuda del software (applet Linealizador), realizar acercamientos sucesivos a la gráfica de *f*, buscando observar a la curva como un segmento de recta alrededor de un punto de abscisa dada.

- **Proposiciones:**

  Intervinientes:
  - La recta tangente es la recta que mejor aproxima a una función *f* en las cercanías del punto de tangencia.

  Emergentes:
  - Si la gráfica de una función no puede observarse como una recta no vertical en las cercanías de un punto dado, la función no es derivable en el punto.

- **Argumentos:**

  Intervinientes:
  - El applet Linealizador permite justificar visualmente que el segmento observado al aplicar el zoom está sobre la recta tangente, cuya ecuación es determinable de manera analítica por punto-pendiente.

  Emergentes:
  - El applet Linealizador permite observar que las derivadas laterales no coinciden, por lo que no existe derivada para la función en el punto dado.
  - El applet Linealizador permite observar que el segmento visualizado corresponde a una recta vertical, por lo que no existe derivada para la función en el punto dado.

ANEXO III. TRAYECTORIAS

ANEXO III. TRAYECTORIAS

1. Trayectoria Epistémica.

Respecto a la secuencia didáctica diseñada para su implementación en el contexto del presente estudio, se desarrolla un análisis epistémico del proceso de instrucción, previo a la realización de éste, mediante la descomposición en unidades de análisis de cada uno de los apartados de las hojas de trabajo. Para ello, se identifican los objetos primarios involucrados con un mayor nivel de detalle que el presentado en el segundo nivel de análisis.

En este tercer nivel de análisis, lo que interesa es describir la forma en que los objetos puestos en juego durante el desarrollo de la tarea se conectan entre sí en un orden específico, buscando tener una mayor claridad sobre lo que está sucediendo durante el proceso de instrucción, y así estar en posibilidades de incidir en él para mejorarlo.

El análisis epistémico inicia con la elaboración de una tabla que resume la tarea esencial planteada por el diseño didáctico. La conformación de la tabla hace alusión a las nociones de configuración epistémica, trayectoria epistémica y estados potenciales. Se entiende por *configuración epistémica*, el sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos, en relación con la resolución de una situación-problema. La *trayectoria epistémica*, por otro lado, se refiere a la distribución en el tiempo de dichos objetos y funciones semióticas, cuyo análisis permite caracterizar el significado institucional pretendido, y que se espera vayan sucediéndose en un cierto orden durante el proceso de instrucción. Esta diferencia permite identificar a la configuración epistémica como un segmento de la trayectoria epistémica, por lo que el análisis epistémico se refiere a la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación.

En la tabla mencionada se hace también referencia a las *unidades naturales* de análisis que, en este caso, se identifican con cada una de las situaciones problema que se consideran esenciales a lo largo de la ruta procedimental descrita. Del mismo modo, se hace mención de las *unidades epistémicas*, que se refieren a aquellas unidades más elementales que se presentan de manera ordenada a lo largo de la trayectoria. La última columna de cada tabla, corresponde a la identificación de los estados potenciales sucesivos de la trayectoria, cada uno de los cuales se relaciona con alguno de los seis objetos primarios constituyentes del sistema de prácticas: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, proposiciones y argumentos. Entonces, de acuerdo al objeto que se pone en juego en cada momento de la trayectoria, se distinguen seis estados potenciales:

E1: *Situacional:* se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: *Actuativo:* se aborda el desarrollo o estudio de una cierta manera de resolver los problemas.

E3: *Lingüístico:* se introducen notaciones, representaciones gráficas, tablas, expresiones verbales, etc.

E4: *Conceptual:* se formulan o interpretan definiciones de los objetos matemáticos puestos en juego.

E5: *Proposicional:* se enuncian e interpretan propiedades o atributos de los objetos matemáticos puestos en juego.

E6: *Argumentativo:* se justifican o explican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

De acuerdo a lo expresado por Godino (2006), aunque la identificación de los estados de las trayectorias es algo subjetivo, el compartir un mismo juego de lenguaje y, por tanto, un mismo punto de vista, permitirá que se llegue, progresivamente, a un acuerdo en la categorización de una unidad de análisis específica.

La trayectoria epistémica elaborada identifica al proceso de instrucción planteado por esta propuesta como uno de naturaleza no determinista, por lo que se asume que, una vez implementada la secuencia y realizado un análisis a posteriori, seguramente habrán de evidenciarse algunas diferencias en relación con la sucesión de estados esperados, debido a elementos de tipo aleatorio que responden a las características y requerimientos particulares de los alumnos. Con el análisis aquí presentado se describe aquello que, en teoría, se espera que ocurra en términos de interacciones didácticas, pero sólo las respuestas registradas efectivamente por los alumnos sobre las hojas de trabajo permitirán saber, de acuerdo a los significados personales logrados, si el significado institucional implementado fue consistente con el pretendido.

A continuación, se presenta la trayectoria epistémica elaborada a partir de las cinco actividades consideradas como centrales en el desarrollo de la secuencia; es decir, se analizan las actividades 2 a 6, por constituir éstas el eje del recorrido procedimental propuesto.

Trayectoria Epistémica
Actividades 2-6

Unidad Natural	Conf. Epistémica	Unidad Epistémica	Descripción	Estado
1	CE1	1	Se propone la activación del applet linealizador, con objeto de observar y estudiar la linealidad local de un conjunto de gráficas, cada una de las cuales corresponde a una función *f* analíticamente no identificada.	E1:Situacional
		2	Manipulación del software y activación de la técnica de acercamiento.	E2:Actuativo
		3	Observación del segmento de recta respectivo.	E3:Lingüístico
		4	Identificación visual de los elementos que definen a la pendiente del segmento a partir de la cuadrícula.	E3:Lingüístico
		5	Reconocimiento de posibles triángulos rectángulos semejantes.	E5:Proposicional
		6	Determinación del valor numérico de la pendiente a partir de los catetos del triángulo rectángulo seleccionado.	E2:Actuativo
		7	Identificación de la pendiente del segmento visualizado con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto analizado.	E4: Conceptual

		8	Activación de la notación $m_t(a)$ para identificar a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa *a*.	E3:Lingüístico
		9	Construcción de la tabla correspondiente a la función $m_t(x)$.	E3:Lingüístico
		10	Construcción de la gráfica correspondiente a la función $m_t(x)$.	E3:Lingüístico
2	CE2	11	Se propone la identificación de la expresión analítica de $m_t(x)$.	E1:Situacional
		12	Identificación de la categoría a la que pertenece la función cuya gráfica se construyó.	E5:Proposicional
		13	Activación de la notación $m_t(x)$ para identificar a la función que expresa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en un punto de abscisa *x*.	E3:Lingüístico
		14	Determinación de la expresión analítica de $m_t(x)$.	E3: Lingüístico
		15	Interacción con pares en torno a la expresión analítica propuesta para $m_t(x)$.	E3: Lingüístico
		16	Justificación de la expresión analítica propuesta para $m_t(x)$	E6:Argumentativo
		17	Registro de la expresión analítica encontrada con tinta de color rojo sobre la hoja de trabajo.	E2:Actuativo
3	CE3	18	Se propone la identificación de la expresión analítica de *f*.	E1:Situacional
		19	Identificación de la categoría a la que pertenece la función *f* cuya gráfica se propone para su análisis en la hoja de trabajo.	E5:Proposicional
		20	Activación de la notación $f(x)$ para identificar a la función cuya gráfica se da para el análisis de su linealidad local.	E3:Lingüístico
		21	Determinación de la expresión analítica de *f*.	E3: Lingüístico
		22	Interacción con pares en torno a la expresión analítica propuesta para *f*.	E3: Lingüístico

		23	Justificación de la expresión analítica propuesta para *f*.	E6:Argumentativo
		24	Registro de la expresión analítica encontrada con tinta de color negro sobre la hoja de trabajo.	E2:Actuativo
4	CE4	25	Se propone una comparación de las gráficas *de f* y $m_t(x)$.	E1:Situacional
		26	Comparación de las gráficas de f y $m_t(x)$.	E3: Lingüístico
		27	Identificación e interpretación de las propiedades de las gráficas de f y $m_t(x)$.	E5:Proposicional
		28	Justificación de la comparación realizada entre las gráficas de f y $m_t(x)$.	E6:Argumentativo
5	CE5	29	Se propone establecer la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de *f*.	E1:Situacional
		30	Relación entre las porciones de la curva f que y el comportamiento creciente o decreciente de la función respectiva.	E4: Conceptual
		31	Relación entre el comportamiento creciente o decreciente de la curva y los intervalos del dominio de f asociados.	E4: Conceptual
		32	Relación entre la posición relativa de la gráfica de $m_t(x)$ respecto al eje de las abscisas y el signo de la función correspondiente.	E4: Conceptual
		33	Relación entre el signo de la función $m_t(x)$ y los intervalos de comportamiento creciente o decreciente de *f*.	E4: Conceptual
		34	Relación entre la posición relativa de $m_t(x)$ respecto al eje de las abscisas y el comportamiento creciente o decreciente de la gráfica de *f*.	E3: Lingüístico
6	CE6	35	Se propone establecer una relación entre las expresiones analíticas de f y $m_t(x)$.	E1:Situacional
		36	Comparación de las expresiones	E3: Lingüístico

			analíticas de f y $m_t(x)$.	
		37	Identificación e interpretación de las propiedades de las expresiones analíticas de f y $m_t(x)$.	E5:Proposicional
		38	Justificación de la comparación realizada entre las expresiones analíticas de f y $m_t(x)$.	E6:Argumentativo

Tabla 1. Trayectoria Epistémica

A lo largo de esta trayectoria, se identifican seis configuraciones epistémicas, cada una de las cuales inicia con un estado situacional planteado en las hojas de trabajo. Así, las unidades naturales correspondientes a las filas sombreadas de gris, se refieren a instrucciones o indicaciones concretas que plantean las seis diferentes situaciones problema, mientras que la identificación de las unidades epistémicas corresponde a los sucesivos estados potenciales del estudiante, como resultado la interacción didáctica. Cabe aclarar que el estado lingüístico está presente en prácticamente todas las unidades epistémicas de la trayectoria. Sin embargo, sólo se hace explícito en la última columna de la tabla cuando la tarea matemática así lo sugiere.

A continuación se hace un breve análisis de las configuraciones epistémicas identificadas.

Configuración epistémica 1 (CE1):

Esta primera configuración epistémica inicia con una situación que solicita activar el applet, con objeto de observar y estudiar la linealidad local de un conjunto curvas. Se pretende promover la emergencia de una función $m_t(x)$, que determine la relación entre la pendiente del segmento visualizado alrededor de un punto de la gráfica de f y el valor de la abscisa en dicho punto.

Configuración epistémica 2 (CE2):

En esta configuración epistémica se propone al estudiante la puesta en juego de sus nociones sobre gráficas de funciones, esperando que identifique la expresión analítica que corresponde a la tabla y/o a la gráfica de la función $m_t(x)$ construida desde la linealidad local de la gráfica de cada función *f*.

Configuración epistémica 3 (CE3):

Aquí se plantea al estudiante la situación de utilizar sus conocimientos aplicados en la CE2, pero ahora orientado hacia la gráfica de cada una de las funciones presentadas en las hojas de trabajo. Se espera que el alumno determine la expresión analítica de la gráfica de *f* en cada caso.

Configuración epistémica 4 (CE4):

La situación que inicia esta configuración epistémica propone la comparación entre las gráficas de *f* y de $m_t(x)$, en cada caso. Se pretende que el estudiante observe las diferencias gráficas entre ambas funciones. Así, particularmente en el caso de las funciones polinomiales, se busca que el alumno observe la complejidad relativa entre las curvas respectivas, mientras que en el caso de las funciones trascendentes, conjeture sobre otro tipo de comportamientos.

Configuración epistémica 5 (CE5):

En esta configuración epistémica, se plantea una situación que propone al estudiante establecer una relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento, creciente o decreciente, de la función *f*. Se espera que el alumno identifique un comportamiento creciente de *f* con una porción de la gráfica de $m_t(x)$ que se encuentra por encima del eje *x*, y un comportamiento decreciente de *f* con una porción de la gráfica de $m_t(x)$ que se encuentra por debajo del eje *x*. Finalmente, se pretende familiarizar al estudiante con las nociones básicas del criterio de la primera derivada para máximos y mínimos relativos.

Configuración epistémica 6 (CE6):

Esta configuración epistémica busca reforzar el sistema de prácticas asociado a la CE4, proponiendo la comparación entre *f* y $m_t(x)$, pero desde el punto de vista de sus expresiones analíticas.

Una vez identificada la secuencia de significados institucionales pretendidos mediante la trayectoria epistémica mostrada, se aborda lo relativo al papel del profesor, en lo que se conoce como *trayectoria docente*.

2. Trayectoria Docente.

Se denomina *trayectoria docente* a la secuencia de actividades que realiza el profesor durante el proceso de estudio de un contenido matemático. Estas actividades o acciones del profesor, que constituyen su respuesta o manera de afrontar las tareas o funciones docentes, se categorizan como sigue:

P1: *Planificación*: diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).

P2: *Motivación*: creación de un clima de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que el alumno se involucre en el proceso de instrucción.

P3: *Asignación*: dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

P4: *Regulación*: fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.

P5: *Evaluación*: observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos (inicial, final y durante el proceso) y resolución de las dificultades observadas.

P6: *Investigación*: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

Para la descripción de la trayectoria docente, a continuación se presenta la tabla correspondiente. Las unidades naturales se refieren a cada una de las situaciones que marcan el inicio de una configuración epistémica en la trayectoria correspondiente, y que, con referencia a las funciones del profesor, marcan el comienzo de cada configuración docente. En otras palabras, cada unidad natural se relaciona con una configuración didáctica particular (CD), determinada por la articulación de las respectivas trayectorias epistémica y docente.

Trayectoria Docente
Actividades 2-6

Unidad Natural	**Conf. Didáctica**	**Unidad Docente**	**Descripción**	**Estado**
1	CD1	1	Verifica el seguimiento de instrucciones para la activación del applet linealizador.	P4:Regulación
		2	Establece las reglas para la adecuada interacción con el software.	P4:Regulación
		3	Verifica la comprensión del grupo en relación con la técnica de acercamiento a implementar.	P5: Evaluación
		4	Promueve el trabajo individual y colaborativo.	P2: Motivación
		5	Recuerda el proceso de construcción de una tabla.	P4: Regulación
		6	Recuerda el proceso de construcción de una gráfica a partir de una tabla.	P4: Regulación
		7	Resuelve prudentemente las dificultades individuales respecto a la interacción con el software.	P5: Evaluación
		8	Indica obedecer las instrucciones de la hoja de trabajo (utilizar tinta roja).	P3: Asignación
		9	Control de tiempos.	P3: Asignación
2	CD2	10	Explica/justifica la indicación de identificar la expresión analítica de $m_t(x)$.	P4:Regulación
		11	Promueve la claridad en la argumentación individual, así como la interacción con otros compañeros.	P2: Motivación
		12	Insiste en la realización del trabajo colaborativo.	P3: Asignación
		13	Indica obedecer las instrucciones de la hoja de trabajo (utilizar tinta roja).	P3: Asignación
		14	Control de tiempos.	P3: Asignación

3	CD3	15	Explica/justifica la indicación de identificar la expresión analítica de *f*.	P4:Regulación
		16	Promueve la claridad en la argumentación individual, así como la interacción con otros compañeros.	P2: Motivación
		17	Insiste en la realización del trabajo colaborativo.	P3: Asignación
		18	Indica obedecer las instrucciones de la hoja de trabajo (utilizar tinta negra).	P3: Asignación
		19	Control de tiempos.	P3: Asignación
4	CD4	20	Explica/justifica la indicación de comparar las gráficas de *f* y $m_t(x)$.	P4:Regulación
		21	Promueve la claridad en la argumentación individual y en lenguaje escrito a utilizar.	P2: Motivación
		22	Insiste en una explicación individual amplia y clara, en términos de ideas y de escritura.	P3: Asignación
		23	Control de tiempos.	P3: Asignación
5	CD5	24	Explica/justifica la indicación de establecer la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de *f*.	P3:Asignación
		25	Verifica la comprensión del grupo en cuanto a la relación signo/comportamiento a encontrar.	P5: Evaluación
		26	Promueve la claridad en la argumentación individual y en lenguaje escrito a utilizar.	P2: Motivación
		27	Insiste en una explicación individual amplia y clara, en términos de ideas y de escritura.	P3: Asignación
		28	Control de tiempos.	P3: Asignación
6	CD6	29	Explica/justifica la indicación de establecer una relación entre las expresiones analíticas de f y $m_t(x)$.	P3:Asignación
		30	Verifica la comprensión del grupo en cuanto a la relación entre expresiones analíticas.	P5: Evaluación
		31	Promueve la claridad en la argumentación individual y en	P2: Motivación

			lenguaje escrito a utilizar.	
		32	Insiste en una explicación individual amplia y clara, en términos de ideas y de escritura.	P3: Asignación
		33	Control de tiempos.	P3: Asignación
		34	Reflexión y análisis en torno al desarrollo de la actividad realizada.	P6: Investigación
		35	Valoración de los significados logrados y aclaraciones pertinentes.	P5: Evaluación
		36	Institucionalización.	P3: Regulación

Tabla 2. Trayectoria Docente

A continuación, se hace un breve análisis de las configuraciones docentes identificadas.

Configuración docente 1:

Esta primera configuración docente se inicia con una situación que propone la activación del applet linealizador, con objeto de observar y estudiar la linealidad local de un conjunto de gráficas, cada una de las cuales corresponde a una función *f* analíticamente no identificada. El profesor realiza funciones de *asignación* al indicar a los estudiantes que activen el applet Linealizador. El profesor participa orientando la actividad de manipulación del applet, a partir de recordar e interpretar nociones relacionadas con el segmento visualizado y el cálculo de su pendiente (*regulación*). Además, el profesor valora la pertinencia de su intervención (*evaluación*) para resolver dificultades técnicas, o de otra índole, que se presenten durante el proceso de construcción de la tabla y la gráfica de la función $m_t(x)$. La *motivación* es una de las funciones que el profesor deberá ejercer a lo largo de ésta y todas las configuraciones epistémicas identificadas en la trayectoria.

Configuración docente 2 y 3:

En la configuración docente 2 se asigna la tarea de identificar analíticamente a la función $m_t(x)$ construida tabular y gráficamente, mientras que en la configuración docente 3 se propone la identificación analítica de la función *f* correspondiente a cada gráfica propuesta (*asignación*). El profesor, en su papel de conductor del proceso de instrucción, permanece atento para reconocer el momento de intervenir para orientar el desarrollo del ejercicio, en relación con los conocimientos previos involucrados (*regulación*) o con dificultades potenciales en la interpretación de tablas o gráficas (*evaluación*). Se supone una familiaridad con las gráficas de las funciones clásicas como objeto de estudio del cálculo, por lo que se espera que esta actividad constituya un reto razonable para el alumno.

Configuraciones docentes 4 y 6:

La función de *asignación* se orienta hacia la de comparación de $m_t(x)$ y *f*, a partir de las gráficas correspondientes en la configuración docente 4, y de sus representaciones analíticas respectivas en la configuración docente 6. Es importante hacer notar que las funciones de *regulación* y *evaluación* siguen presentes en el desarrollo de la actividad didáctica, en torno a la recuperación de conocimientos previos por parte de los estudiantes, así como en cuanto a la posible presencia de conflictos semióticos a lo largo del ejercicio.

Configuración docente 5:

En esta configuración, la *asignación* se dirige hacia la búsqueda de una relación entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función *f*, como un primer contacto con los fundamentos de la teoría de máximos y mínimos. Aquí se espera que las funciones de *regulación* y *evaluación* se intensifiquen, dado el mayor número de funciones semióticas que, respecto a las demás configuraciones docentes, el alumno tendrá que establecer en el análisis de cada pareja de gráficas. Así, el estudiante buscará referir a cada uno de los distintos intervalos sobre el dominio de *f*, la relación entre las características de la gráfica de *f* (creciente o decreciente) y la ubicación de la gráfica de $m_t(x)$ con respecto al eje de las abscisas.

Las unidades docentes 34 a 36 corresponden a la etapa de institucionalización que desarrolla el profesor al final de cada una de las actividades didácticas de la secuencia.

Es importante mencionar que, para efectos de lograr el aprendizaje esperado en torno al objeto *función derivada*, se supone necesaria la puesta en juego de una gran diversidad de funciones docentes, de acuerdo a las siguientes consideraciones a priori.

Planificación: En el diseño del total de actividades que componen la secuencia, se conformó una ruta de trabajo a partir de una colección de gráficas, cuidadosamente seleccionadas, que ofrecieran al estudiante la posibilidad de observar la linealidad local de una curva, sin complicaciones excesivas que desviaran su atención de lo esencial; es decir, de acuerdo al *principio de ergonomía* (Jiménez, 2009), se consideró esencial el evitar tareas ruidosas. Se distribuyó el material de trabajo en una secuencia de siete actividades didácticas, ordenadas de manera consistente con los objetivos de la propuesta, así como el diseño de las hojas de trabajo, con las indicaciones y cuestionamientos integrados a las gráficas propuestas para su estudio. Además, el diseño del applet Linealizador, herramienta indispensable en la realización de la tarea matemática propuesta, requirió de muchas horas de planificación.

Motivación: La configurabilidad del applet Descartes hizo posible la materialización de un ambiente interactivo que resultara interesante y amigable para los estudiantes, y que contribuyera a involucrarlos en el proceso de instrucción. Además, la secuencia supone la interacción del estudiante con el resto de sus compañeros, lo que contribuye a promover la socialización de la actividad matemática.

Asignación: Aunque se espera que el estudiante disfrute de un ambiente de libertad durante la realización de su trabajo, se considera necesario que, en todo momento, el proceso de estudio sea guiado y controlado por el profesor, ya que la propuesta está dirigida a grupos de muchos alumnos, además de que el número de computadoras, generalmente, es limitado.

Regulación: Además de la función regulativa que estará presente durante la puesta en marcha de la secuencia, el profesor tiene que hacer un gran trabajo anterior, en relación con la construcción de los significados personales previos que colocarán al estudiante en posibilidad de abordar la tarea propuesta.

Evaluación: Durante la aplicación de la secuencia, el profesor tendrá que estar atento, en todo momento, al estado del aprendizaje, y permanecer preparado para resolver las dificultades que vayan observándose en los alumnos, tanto en el trabajo individual como en el colectivo.

Investigación: Antes de la puesta en marcha de la secuencia, se realizó un pilotaje de prueba, lo que constituyó una fuente de reflexión y análisis en relación con las variables que intervienen en el proceso de instrucción. Este primer pilotaje se realizó con un grupo de Cálculo I de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, y permitió rediseñar las actividades didácticas, así como ajustar la organización de los diferentes elementos observados durante el ejercicio.

3. Trayectoria Discente.

Al igual que en el caso de la trayectorias docente, como parte del análisis didáctico del que es objeto esta secuencia didáctica, interesa identificar el sistema de funciones/acciones que se espera desempeñe el alumno, en relación a la trayectoria epistémica identificada. Es aquí donde la noción de *trayectoria discente* se vuelve útil.

A continuación se presenta una relación de los estados potenciales o funciones discentes que pueden ponerse en juego a lo largo de un proceso instruccional:

A1: *Aceptación* del compromiso educativo, adopción de una actitud positiva al estudio y de cooperación con los compañeros.

A2: *Exploración*, indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas.

A3: *Recuerdo*, interpretación y seguimiento de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los elementos lingüísticos en cada situación.

A4: *Formulación* de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.

A5: *Argumentación* y justificación de conjeturas (al profesor o los compañeros).

A6: *Recepción* de información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar.

A7: *Demanda* de información: estados en los que los alumnos piden información al profesor o a otros compañeros (por ejemplo, cuando no entienden el significado del lenguaje utilizado o no recuerdan conocimientos previos necesarios).

A8: *Ejercitación*: Realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas.

A9: *Evaluación*: Estados en los cuales el alumno realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor, o de autoevaluación.

Al igual que en el caso de la trayectoria docente, a continuación se presenta la tabla correspondiente a la trayectoria discente, en la cual las unidades naturales se refieren a cada una de las situaciones que da inicio a una configuración epistémica en la trayectoria correspondiente, y que, con referencia a las funciones del estudiante, marcan el comienzo de cada configuración discente. De nuevo, cada unidad natural se relaciona con una configuración didáctica particular (CD), determinada por la articulación de las respectivas trayectorias epistémica y discente.

Trayectoria Discente
Actividades 2-6

Unidad Natural	**Conf. Didáctica**	**Unidad Discente**	**Descripción**	**Estado**
1	CD1	1	Asume la tarea propuesta.	A1: Aceptación
			Recibe la información sobre las reglas de interacción con el software.	A6: Recepción
		2	Manipula el applet linealizador y activa la técnica de acercamiento.	A2: Exploración
		3	Relaciona al segmento visualizado con la recta tangente a la curva en el punto de abscisa dada.	A3: Recuerdo
		4	Identifica la semejanza entre los diferentes triángulos rectángulos asociados al segmento visualizado.	A3: Exploración

		5	Calcula el valor de la pendiente del segmento visualizado.	A4: Formulación
		6	Construye la tabla a partir de los valores de las pendientes obtenidos.	A4: Formulación
		7	Solicita ayuda para interpretar la tabla que acaba de construir.	A7: Demanda de información
		8	Construye la gráfica de la función $m_t(x)$ a partir de la tabla anterior.	A4: Formulación
2	CD2	9	Asume la tarea propuesta.	A1: Aceptación
		10	Identifica la expresión analítica que corresponde a la gráfica obtenida para la función $m_t(x)$.	A3: Recuerdo
		11	Recibe la indicación de socializar su aprendizaje.	A6: Recepción
		12	Discute su propuesta con sus compañeros y la registra sobre la hoja de trabajo con tinta de color rojo.	A5: Argumentación
3	CD3	13	Asume la tarea propuesta.	A1: Aceptación
		14	Identifica la expresión analítica que corresponde a la gráfica obtenida para la función f.	A3: Exploración
		15	Recibe la indicación de socializar su aprendizaje.	A6: Recepción
		16	Discute su propuesta con sus compañeros y la registra sobre la hoja de trabajo con tinta de color negro.	A5: Argumentación
4	CD4	17	Asume la tarea propuesta.	A1: Aceptación
		18	Realiza una comparación a partir del comportamiento gráfico de f y $m_t(x)$.	A3: Recuerdo
		19	Recibe la indicación de explicar ampliamente lo que observa como producto de la comparación realizada.	A6: Recepción
		20	Justifica sus conjeturas.	A5: Argumentación
5	CD5	21	Asume la tarea propuesta.	A1: Aceptación
		22	Recibe la explicación sobre la relación signo/comportamiento a encontrar.	A6: Recepción
		23	Establece relaciones entre el signo, el comportamiento creciente o decreciente y la	A3: Exploración

			posición relativa de la curva respecto al eje *x*, en función de los intervalos respectivos.	
		24	Recibe la indicación de explicar ampliamente lo observado.	A6: Recepción
		25	Justifica sus conjeturas.	A5: Argumentación
6	CD6	26	Asume la tarea propuesta.	A1: Aceptación
		27	Recibe la explicación sobre la relación entre expresiones analíticas que se busca.	A6: Recepción
		28	Realiza una comparación entre las expresiones analíticas de *f* y $m_t(x)$.	A3: Recuerdo
		29	Recibe la indicación de explicar ampliamente lo que observa como producto de la comparación realizada.	A6: Recepción
		30	Justifica sus conjeturas.	A5: Argumentación
		31	Participa de manera activa en el proceso de evaluación y asignación que realiza el docente cuando, al final de la actividad, se valoran los significados logrados y se realiza el proceso de institucionalización.	A1: Aceptación

Tabla 3. Trayectoria Discente

A continuación se hace un breve análisis de las configuraciones discentes identificadas.

Configuración discente 1:

La situación que da inicio a esta configuración discente pone en juego la habilidad de manipulación de la herramienta tecnológica, característica de la generación a la cual pertenecen los jóvenes estudiantes a quienes va dirigido este trabajo, promoviendo principalmente la exploración reflexiva del alumno en torno a la construcción de la tabla y la gráfica de la función derivada.

Configuraciones discentes 2 y 3:

El estudiante recuerda, interpreta y argumenta con base en sus conocimientos previos relacionados con gráficas y expresiones analíticas de funciones.

Configuraciones discentes 4 y 6:

En esta configuración, el recuerdo, la interpretación y la argumentación son funciones discentes que se orientan hacia la función $m_t(x)$, en el caso de la configuración discente 4, y hacia la función *f*, en lo que respecta a la configuración discente 6.

Configuración discente 5:

Esta configuración discente reclama que el estudiante redoble sus acciones de exploración reflexiva, pues se busca que sea capaz de identificar los elementos que conforman los criterios de optimización; es decir, se trata de poner al alumno en contacto con el criterio de la primera derivada para máximos y mínimos.

La unidad discente 31 corresponde a la etapa de institucionalización que desarrolla el profesor al final de cada una de las actividades didácticas de la secuencia.

4. Identificación de conflictos semióticos.

Para efectos de simplicidad en el análisis de los resultados, a partir de la trayectoria discente teórica presentada en la Tabla No. 3, se localizaron las unidades discentes que corresponden a las dificultades más frecuentemente evidenciadas en las hojas de trabajo de la muestra de cinco estudiantes. Los conflictos semióticos que se consideraron más relevantes se describen brevemente a continuación, haciendo referencia a las unidades discentes (Tabla 3) que los identifican, en orden decreciente de repetición:

UD23: Esta unidad discente corresponde a la CE5 que propone establecer la relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de *f*. La situación asociada con esta configuración epistémica tiene por objeto promover un primer acercamiento a la teoría de máximos y mínimos, y, aunque estrictamente no forma parte del proceso de construcción de la función derivada, se considera que contribuye a enriquecer el significado en torno a dicho objeto matemático. En general, se observó que los estudiantes tuvieron dificultades para responder la pregunta *¿qué relación encuentras entre el signo de la función* $m_t(x)$ *y el comportamiento creciente o decreciente de la función f ?* A pesar de que en el Cuestionario I se incluyó un reactivo exploratorio en el que se pedía señalar la porción de la curva correspondiente a una característica dada de la función, para relacionar después dicha porción de la curva con la región del dominio correspondiente, lo observado en las hojas de trabajo, principalmente de las actividades 2 y 3, no respondió a los resultados satisfactorios que arrojó el instrumento de diagnóstico.

UD20: La situación que da inicio a la CE4 plantea realizar una comparación entre las gráficas de las funciones *f* y $m_t(x)$. El propósito específico de la unidad discente 20, es que los alumnos justifiquen el resultado de su comparación mediante argumentos gráficos, y no analíticos, como sucedió en la mayoría de los casos.

UD10: En esta configuración epistémica, CE2, la situación planteada propone la identificación analítica de la función $m_t(x)$, construida desde de la gráfica de *f*. En concordancia con los resultados de múltiples trabajos de investigación, en torno a las dificultades observadas en la obtención de expresiones analíticas a partir de gráficas (Artigue, 2000; Del Castillo, 2003, 2004, 2006) los estudiantes frecuentemente mostraron problemas para interpretar el comportamiento gráfico de la función en términos de los parámetros de la expresión analítica respectiva. En otras palabras, con relativa frecuencia se observaron dificultades en el paso del lenguaje gráfico al analítico. En virtud de que la UD10 identifica a una función discente que el alumno debe socializar posteriormente en la UD12, participando en una discusión con sus compañeros sobre la expresión analítica encontrada para $m_t(x)$, puede percibirse como más generalizada la dificultad observada.

UD14: La situación que inicia la CE3 propone la identificación de la expresión analítica de la función f a partir de su gráfica, por lo que la función a realizar por el estudiante en este punto también reclama el paso del lenguaje gráfico al analítico. De nuevo, el que la UD16 implique la interacción con sus compañeros en torno a la identificación analítica realizada en la UD14, permite observar la persistencia del conflicto semiótico asociado.

Por todo lo anterior, puede decirse que el pilotaje de prueba sirvió de base para incorporar las modificaciones pertinentes, con objeto de incidir sobre los conflictos semióticos potenciales, mientras que las respuestas a las hojas de trabajo permitieron observar los conflictos semióticos que persistieron a la incorporación de correcciones sugeridas por el pilotaje de prueba, y que pudieran explicar las dificultades y limitaciones del aprendizaje logrado respecto al pretendido.

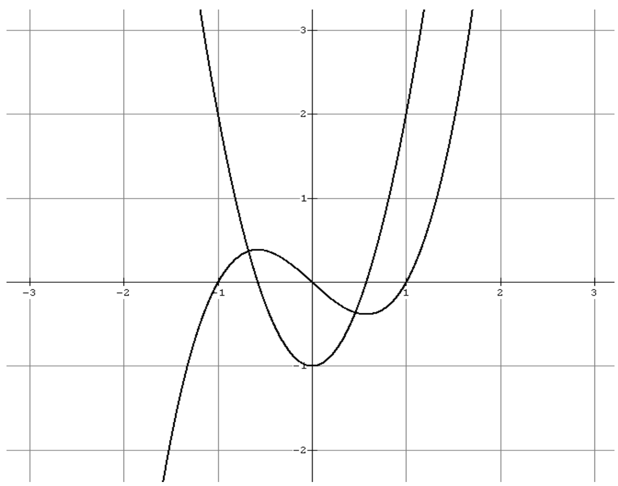
ANEXO IV. INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Cuestionario 2
(Instrumento de Evaluación)

Nombre:___________________________________ Fecha:______________

1. ¿Por qué, si la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$, cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.

2. A continuación encontrarás las gráficas que corresponden a f y f'.



Sin realizar ningún trazo y explicando ampliamente tu respuesta en cada caso, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa 1?

b) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f, en el punto donde ésta intersecta al eje de las ordenadas?

ANEXO V. APPLETS DE JAVA CONFIGURADOS CON DESCARTES

ANEXO V. APPLETS DE JAVA CONFIGURADOS CON DESCARTES

El Applet Descartes es un programa realizado en lenguaje Java y, por su característica de ser configurable, ofrece la posibilidad de diseñar escenarios interactivos en forma de pizarra electrónica, denominados también *applets*, que pueden insertarse en las páginas web. Estos applets ofrecen al usuario la posibilidad de una interacción libre y dinámica que permite explorar, detectar patrones de comportamiento y conjeturar sobre los objetos representados y sus características. Por todo esto, el conjunto de applets constituye el recurso indispensable para la realización de la tarea matemática propuesta por la secuencia didáctica presentada en este trabajo.

En el sitio http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Secuencia_Gaby/secuencia.htm

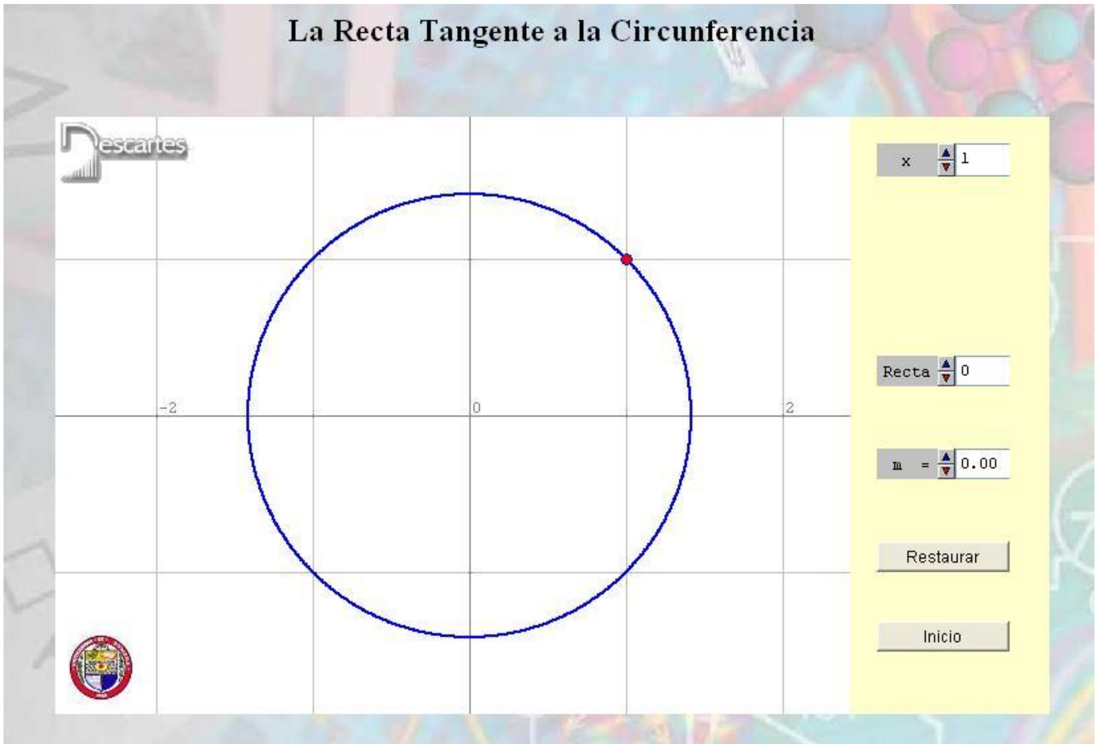
pueden encontrarse los vínculos a los ocho applets de Java utilizados, de manera que la activación de cualquiera de ellos hace posible la interacción con el applet Linealizador correspondiente, desde cualquier computadora.

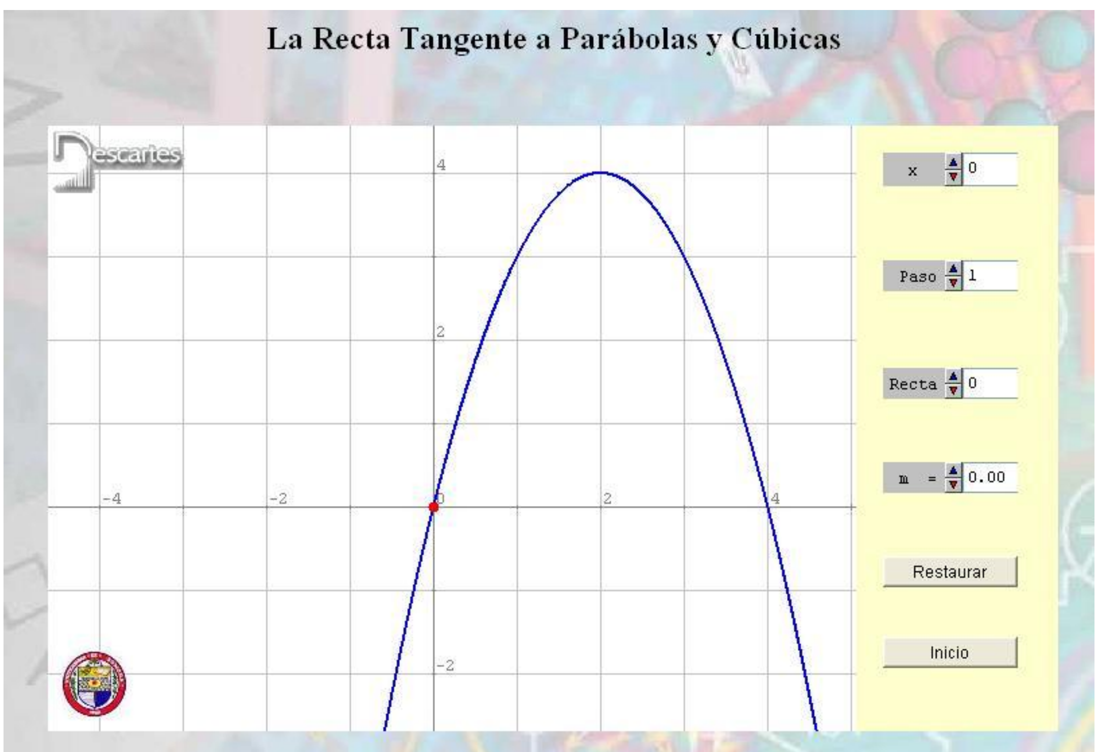
La técnica que posibilita la visualización dinámica de la linealidad local consta de dos procedimientos básicos:

1. Para aplicar el zoom en torno a un punto dado de la gráfica de *f*, señalar con el botón derecho del Mouse la región correspondiente a la cuadrícula en que se presenta la curva respectiva, arrastrando hacia arriba para acercar la imagen, o hacia abajo para alejarla.
2. Para desplazar la gráfica en cualquier dirección, señalar cualquier parte de la cuadrícula con el botón izquierdo del Mouse y arrastrarlo hasta ubicar la imagen en la posición deseada.

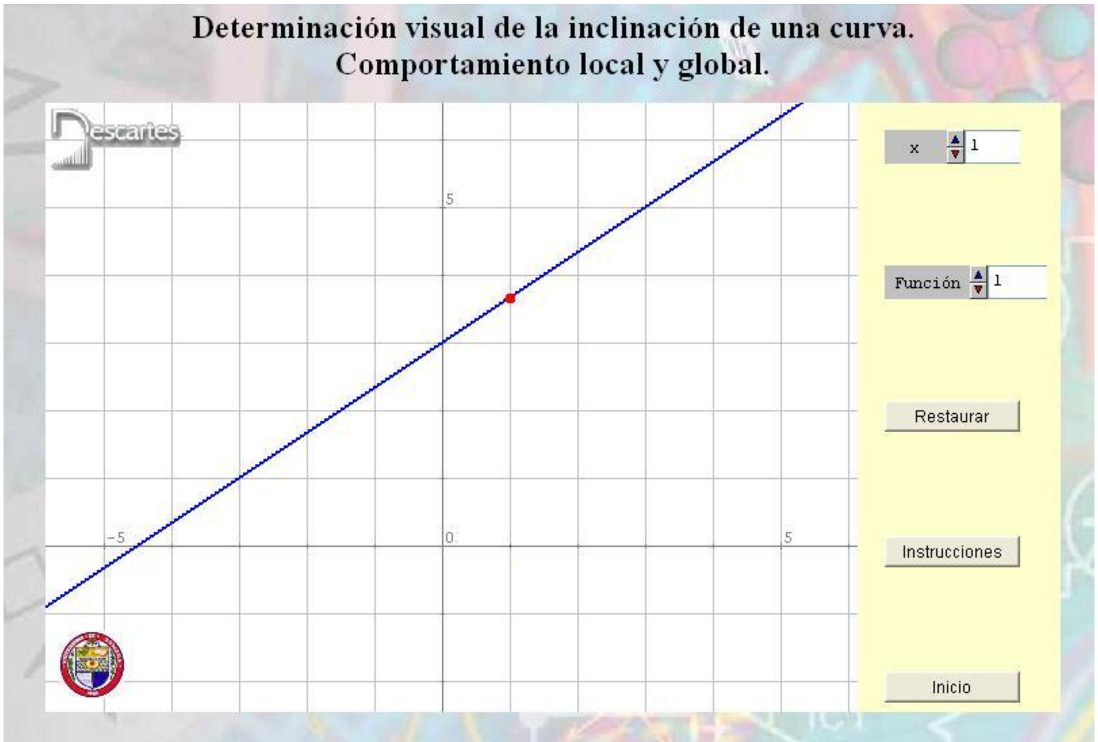
A continuación, se incluye la imagen de la carátula correspondiente a cada uno de los ocho applets.

Actividad 1

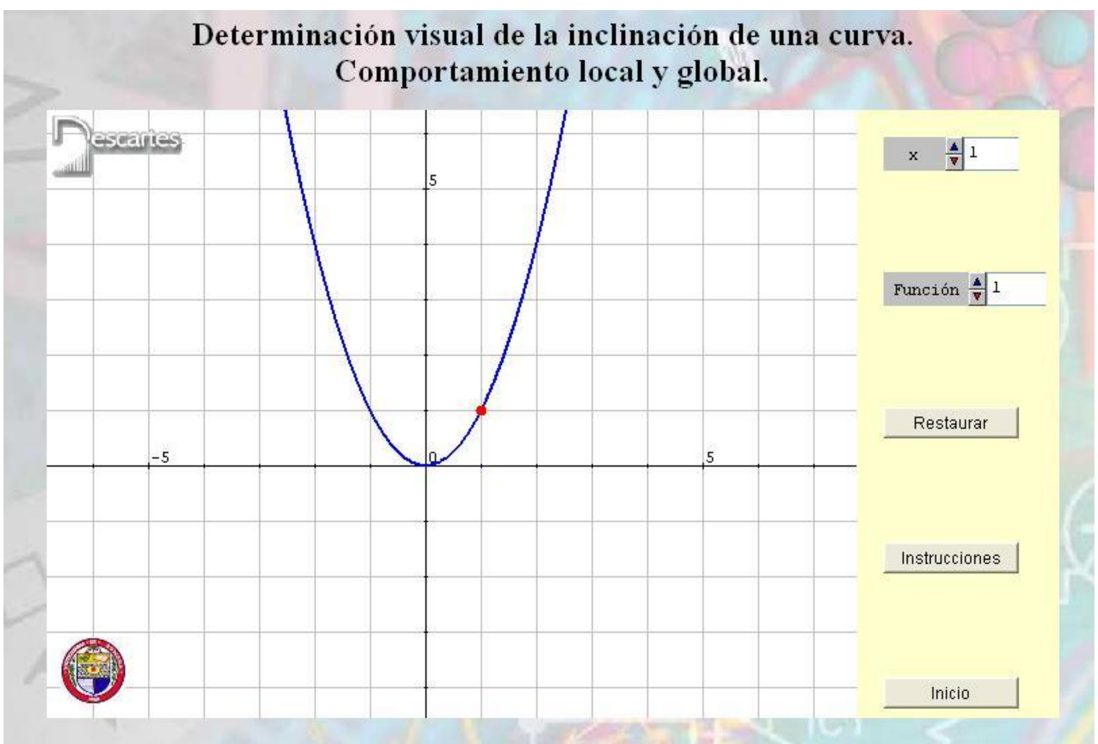

La Recta Tangente a la Circunferencia
Descartes
x 1
Recta 0
m = 0.00
Restaurar
Inicio
-2
0
2


La Recta Tangente a Parábolas y Cúbicas
Descartes
x 0
Paso 1
Recta 0
m = 0.00
Restaurar
Inicio
4
2
-4
-2
0
2
4
-2

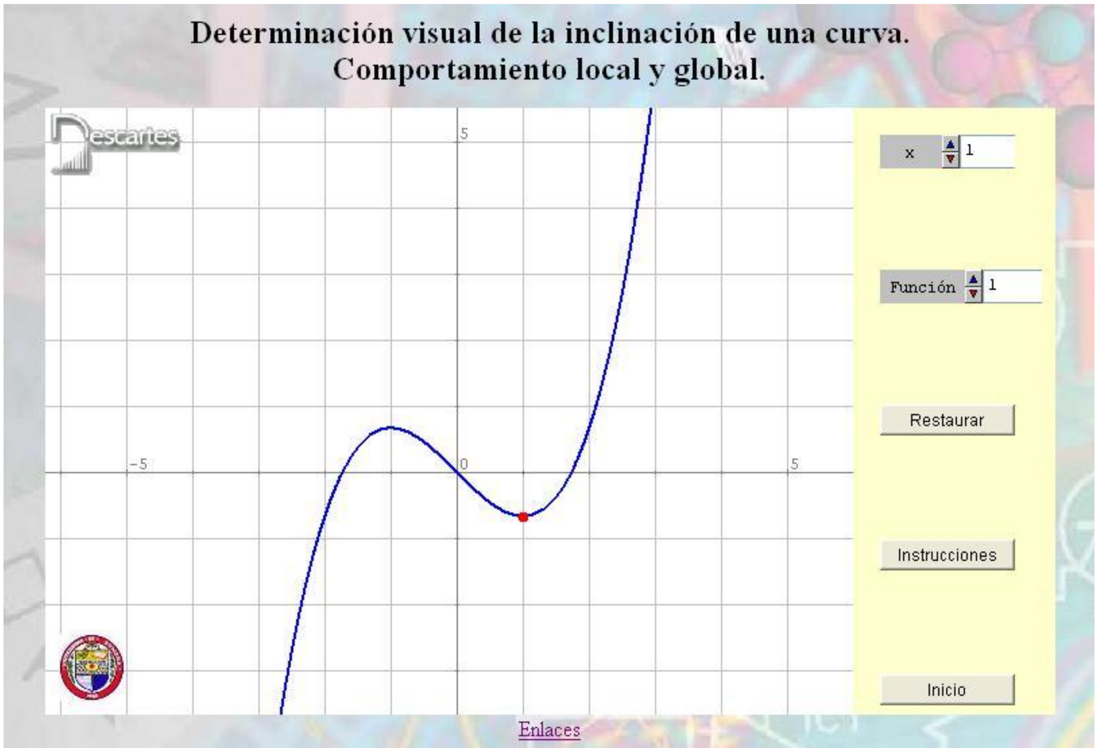
Actividad 2



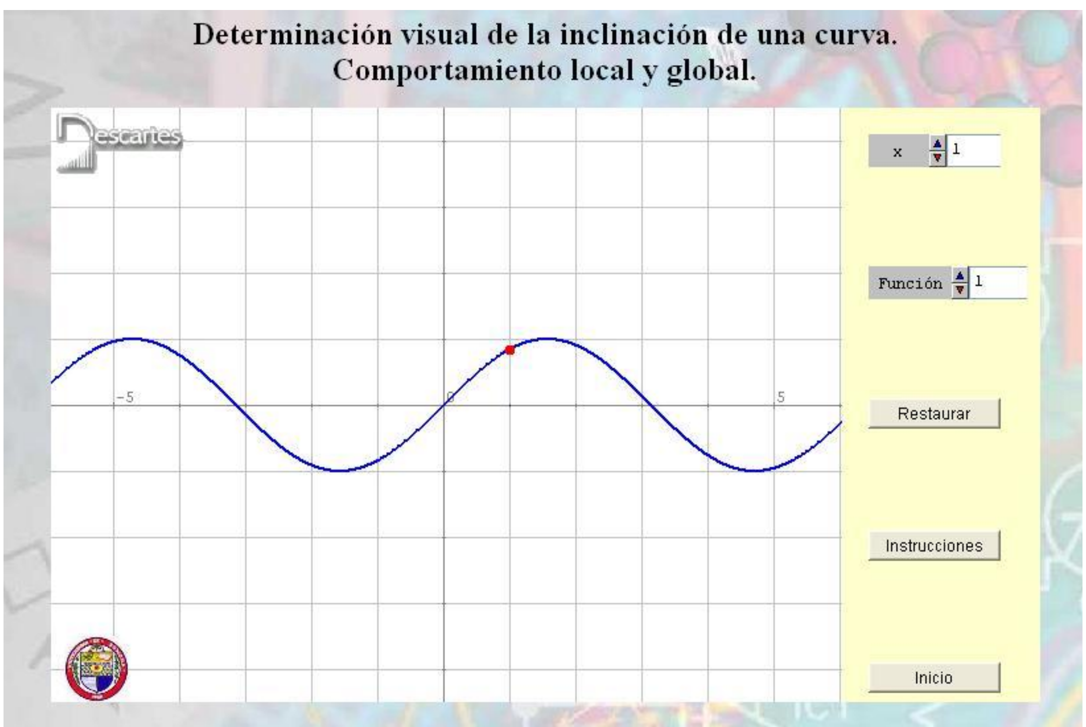
Actividad 3



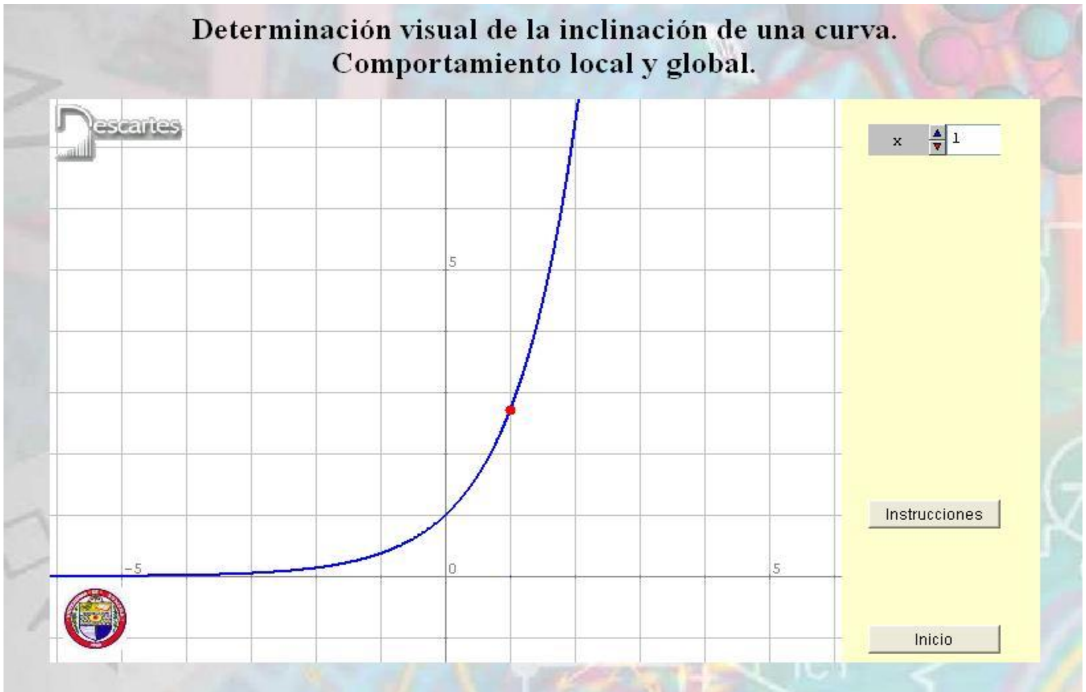
Actividad 4



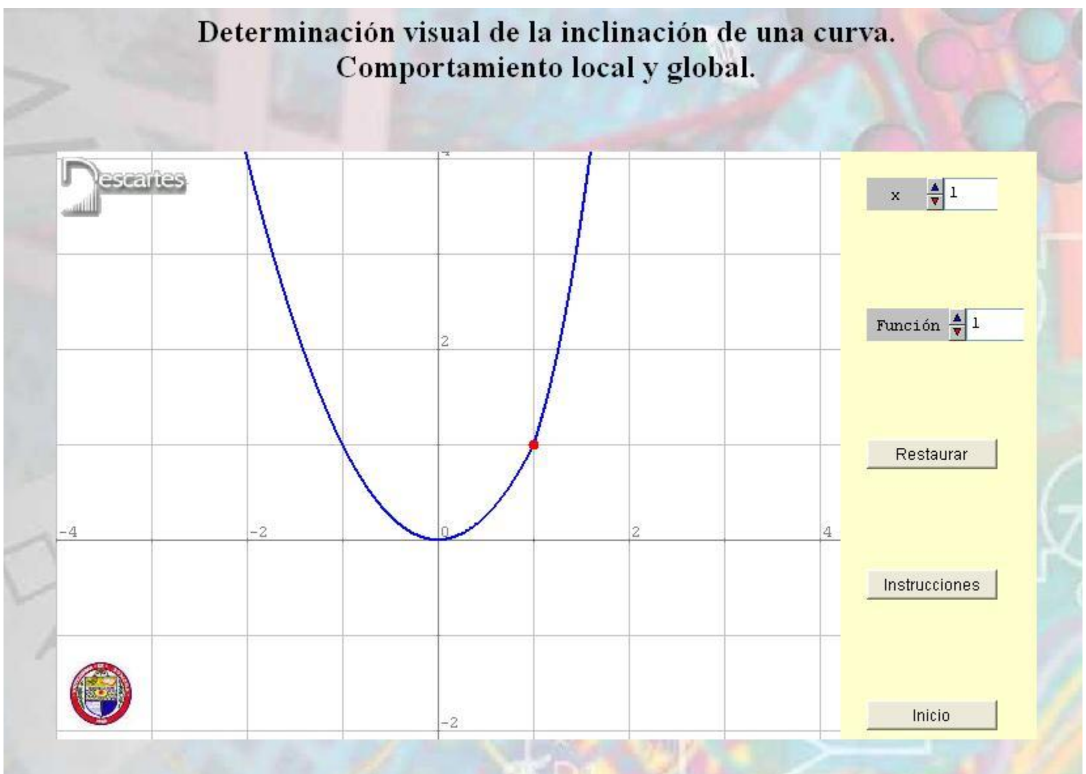
Actividad 5



Actividad 6



Actividad 7



ANEXO VI. HOJAS DE TRABAJO

HOJA DE TRABAJO

Actividad 1

Alumno: ____ **Tiempo estimado: 50 min**

1. ¿Qué entiendes por *recta tangente*?

2. Abre el archivo rectatangente1.htm

3. El applet te muestra la gráfica de una circunferencia de color azul. Sin tocar los controles, ¿puedes determinar con precisión el valor del radio? Explica ampliamente.

4. Activa el applet, arrastrando el punto rojo sobre la circunferencia, hasta ubicarlo en (1,1). Para asegurarte de que la abscisa del punto sea 1, cuida que el control ***x*** indique exactamente 1. Aplica la técnica de acercamiento alrededor del punto, utilizando el botón derecho del Mouse con arrastre hacia arriba (si arrastras hacia abajo, la imagen se alejará). El botón izquierdo sirve para centrar la imagen. Repite esta operación hasta que veas el arco de la circunferencia alrededor del punto (1,1) como si fuera un segmento de recta. ¿Cuál es la pendiente del segmento visualizado? Explica.

5. Asigna al control ***m*** del applet la pendiente encontrada, tecleando el valor en el recuadro y después pulsando ***Enter***, o utilizando las flechitas. Ahora, con la flechita azul asigna el valor 1 al control ***Recta***, para observar la gráfica de la recta que pasa por el punto y tiene la pendiente dada.

6. Con el botón ***Restaurar***, regresa al tamaño original de la pantalla y explica lo que observas.

7. Pulsa el botón ***Inicio*** y repite los pasos 4 a 6 para acercarte al punto (-1,1), luego al punto (-1,-1) y, finalmente, al punto (1,-1). No olvides restablecer las condiciones iniciales cada vez que vayas a analizar un punto nuevo

8. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma con este ejercicio de visualización? Explica ampliamente.

9. Ahora, abre el archivo rectatangente2.htm

10. El applet te muestra la gráfica de una parábola de color azul. Con el valor del control ***Paso*** en 1, y el control ***x*** en 0, para indicar la abscisa del punto de la curva sobre el cual interesa trabajar, aplica la técnica de acercamiento y sigue las instrucciones del punto 5, para observar la gráfica de la recta que pasa por el punto y tiene la pendiente dada.

11. Con el botón ***Restaurar***, regresa al tamaño original de la pantalla y explica lo que observas.

12. Pulsa el botón ***Inicio*** y repite los pasos 9 y 10, asignando al control ***x*** sucesivamente los valores 1,2, 3 y 4. No olvides restablecer las condiciones iniciales cada vez que vayas a analizar un punto nuevo.

13. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma? Justifica tu respuesta.

14. Pulsa el control ***Inicio*** para restablecer las condiciones iniciales del applet. Con el valor del control ***Paso*** en 2, asigna al control ***x*** los valores -4, -3, -2, 1 y 0, y aplica a la curva la técnica de acercamiento y trazo ya conocida. Explica lo que observas.

15. ¿Consideras que la definición de recta tangente que diste al inicio se confirma? Justifica tu respuesta.

16. Si tu definición de recta tangente no se confirmó en alguna parte del ejercicio, ¿podrías dar una nueva? Justifica tu respuesta.

17. Comenta con tus compañeros las conclusiones a las que hayas llegado.

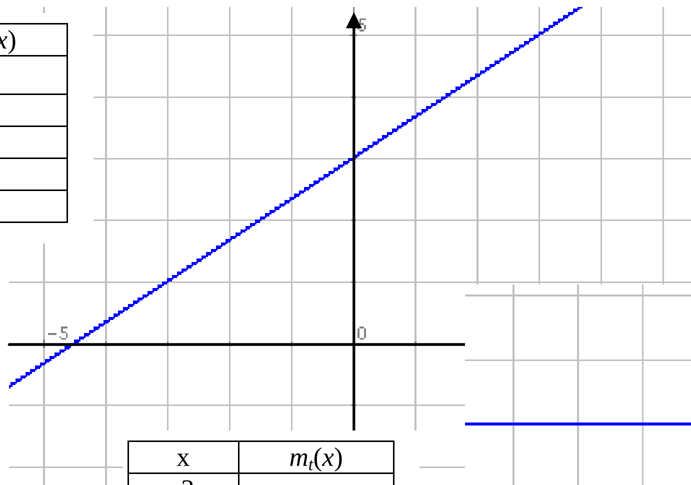
HOJA DE TRABAJO
Actividad 2

Alumno: ____ **Tiempo estimado:50 min**

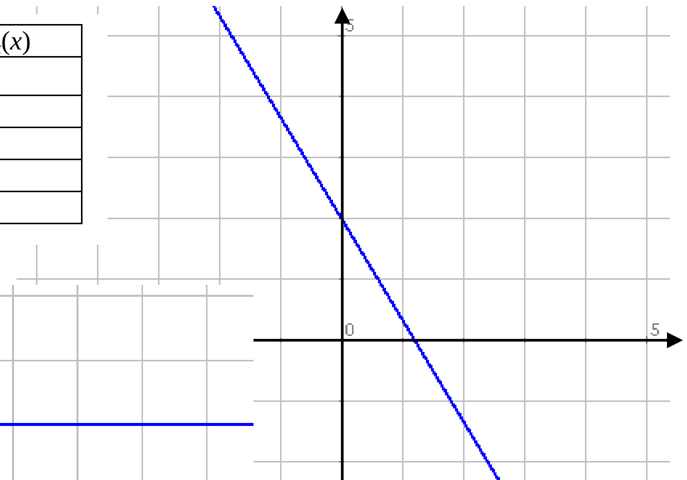
1. Abre el archivo [inclinacurva2.htm]

2. Con la ayuda del applet y aplicando la técnica de acercamiento aprendida, completa la tabla correspondiente a cada uno de los problemas que siguen. En cada caso, utiliza la cuadrícula de referencia que te ofrece el software, para determinar la pendiente del segmento visualizado para cada valor dado de x, (m_t), en el punto respectivo. Recuerda dar ***Enter*** después de asignar al control ***x*** el valor deseado. El control ***Función*** te lleva a una gráfica específica, ***Restaurar*** restablece las condiciones iniciales de esa gráfica y el botón ***Inicio*** restablece las condiciones iniciales del applet. Registra tus resultados.

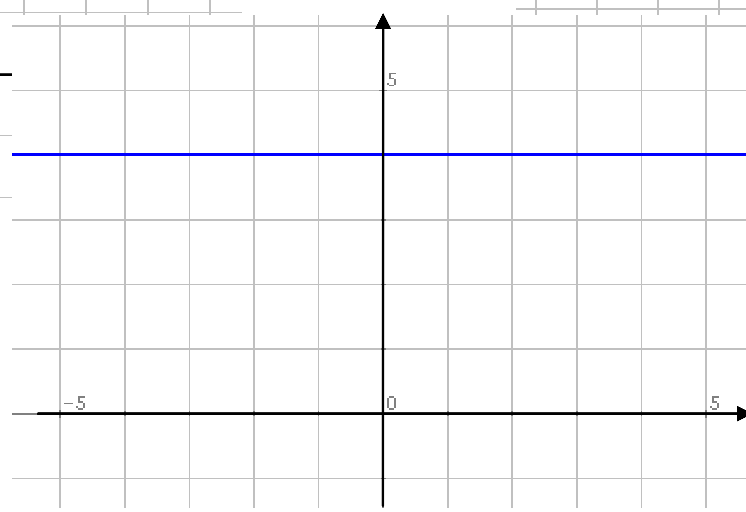
x	$m_t(x)$
-3	
-1	
0	
3/2	
2	



x	$m_t(x)$
-2	
-1/2	
0	
3/2	
2	



x	$m_t(x)$
-3	
-1	
0	
1/2	
2	



3. Una vez llenas las tres tablas, grafica los puntos que corresponden a las parejas ordenadas de cada tabla, en el mismo plano cartesiano en que aparece la gráfica de *f*. Uniendo los puntos encontrados con tinta de color rojo, obtendrás la gráfica de una función que, por asociar a cada valor dado de x **la pendiente del segmento visualizado que coincide con la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiente**, en lo sucesivo será denotada por $m_t(x)$, para indicar analíticamente que esa pendiente (m_t) depende de la abscisa x del punto analizado.

4. Para cada uno de los problemas propuestos, a partir de la información tabular y/o gráfica obtenida, identifica la fórmula o expresión analítica que corresponde a la función $m_t(x)$. Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a cada curva, con tinta de color rojo, la expresión analítica encontrada en cada caso.

5. ¿Podrías determinar la expresión analítica de *f* en cada caso? Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a cada curva, con tinta de color negro, la expresión analítica encontrada en cada caso.

6. ¿Crees que era necesario utilizar el applet para construir $m_t(x)$? Justifica tu respuesta.

7. Si para cada caso comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

9. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$ en cada caso?

10. A partir de la noción de *recta tangente* construida en la Actividad 1, ¿qué puedes decir de la recta tangente en un punto dado a cada una de las gráficas de esta actividad? Explica ampliamente.

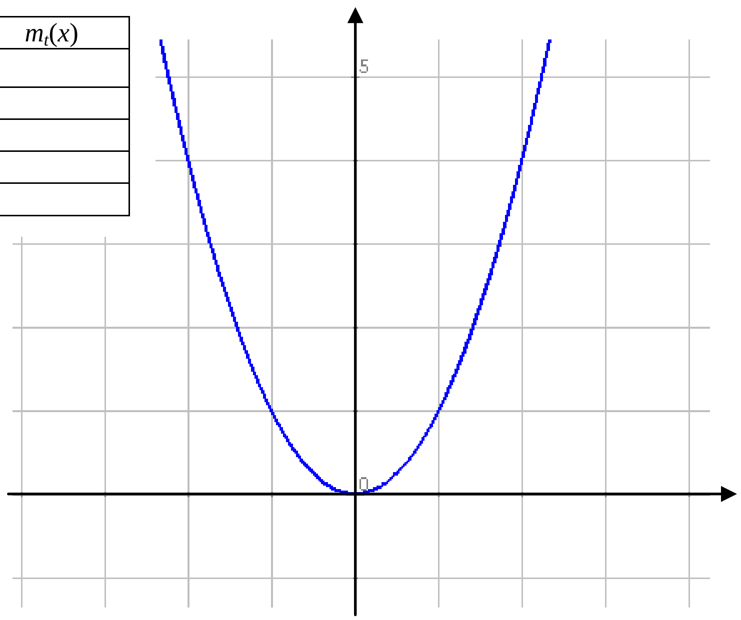
HOJA DE TRABAJO
Actividad 3

Alumno: ____ **Tiempo estimado: 50 min**

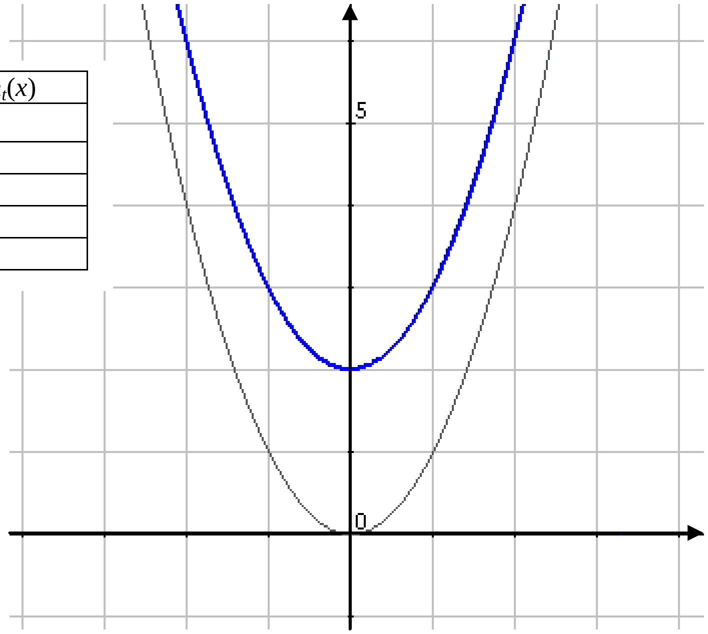
1. Abre el archivo inclinacurva3.htm

2. Con la ayuda del applet y aplicando la técnica de acercamiento aprendida, completa la tabla correspondiente a cada uno de los problemas que siguen. En cada caso, utiliza la cuadrícula de referencia que te ofrece el software, para determinar la pendiente del segmento visualizado, (m_t) que, como ya sabes, corresponde a *la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cada punto de abscisa x*. Registra tus resultados.

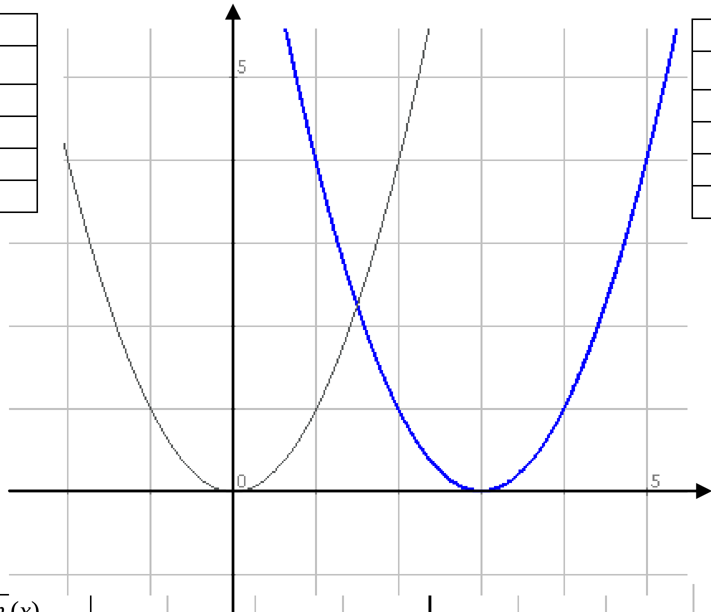
x	$m_t(x)$
-1/2	
0	
1/2	
1	
2	



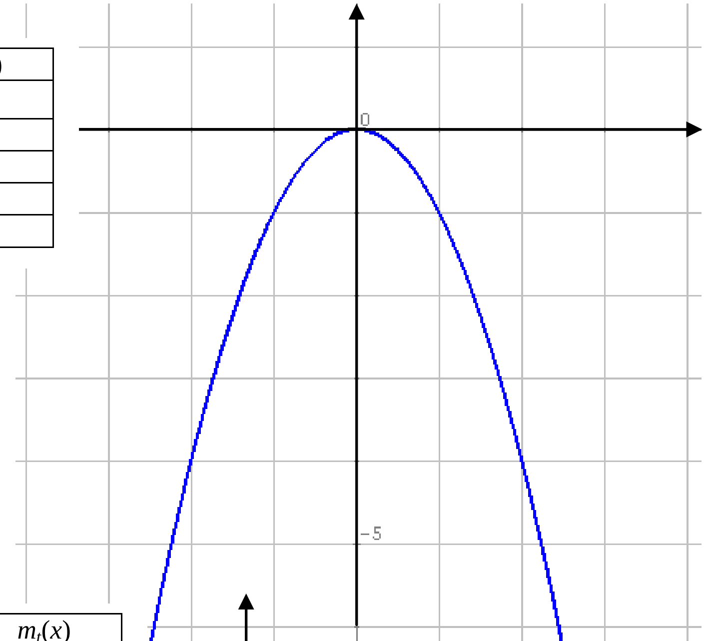
x	$m_t(x)$
-1/2	
0	
1/2	
1	
2	



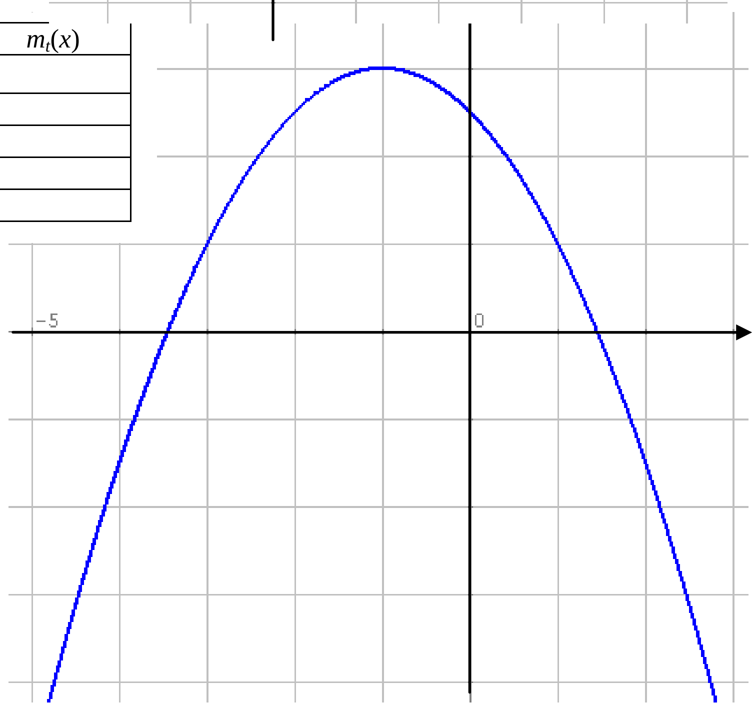
x	$m_t(x)$
5/2	
3	
7/2	
4	
5	



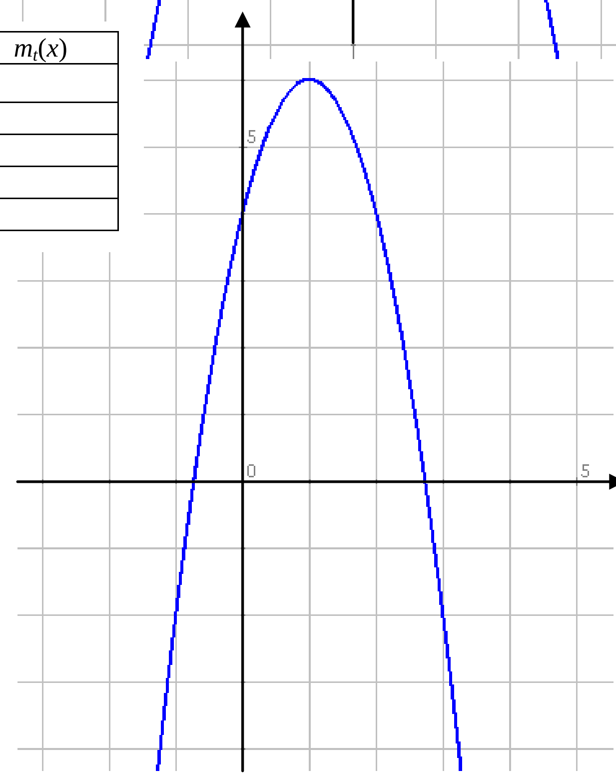
x	$m_t(x)$
-1/2	
0	
1/2	
1	
2	



x	$m_t(x)$
-4	
-5/2	
-1	
1/2	
2	



x	$m_t(x)$
0	
1/2	
1	
3/2	
2	



3. Una vez llenas las seis tablas, grafica los puntos que corresponden a las parejas ordenadas de cada tabla, en el mismo plano cartesiano en que aparece la gráfica de *f*. Uniendo con tinta de color rojo los puntos encontrados, construye la gráfica de $m_t(x)$.

4. Para cada uno de los problemas propuestos, a partir de la información tabular y/o gráfica obtenida, identifica la fórmula o expresión analítica que corresponde a la función $m_t(x)$. Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a cada curva, con tinta de color rojo, la expresión analítica encontrada en cada caso.

5. ¿Podrías determinar la expresión analítica de *f* en cada caso? Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a cada curva, con tinta de color negro, la expresión analítica encontrada en cada caso.

6. Si para cada caso comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

7. ¿Qué relación encuentras entre la concavidad de la parábola y la gráfica de $m_t(x)$, en cada caso?

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

9. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$ en cada caso?

10. Considera los resultados que obtuviste para f y para $m_t(x)$ en los casos 1 y 2. Compara las respectivas gráficas de f y luego las correspondientes gráficas de $m_t(x)$. Anota tus observaciones.

11. Considera los resultados que obtuviste para f y para $m_t(x)$ en los casos 1 y 3. Compara las respectivas gráficas de f y luego las correspondientes gráficas de $m_t(x)$. Anota tus observaciones.

HOJA DE TRABAJO
Actividad 4

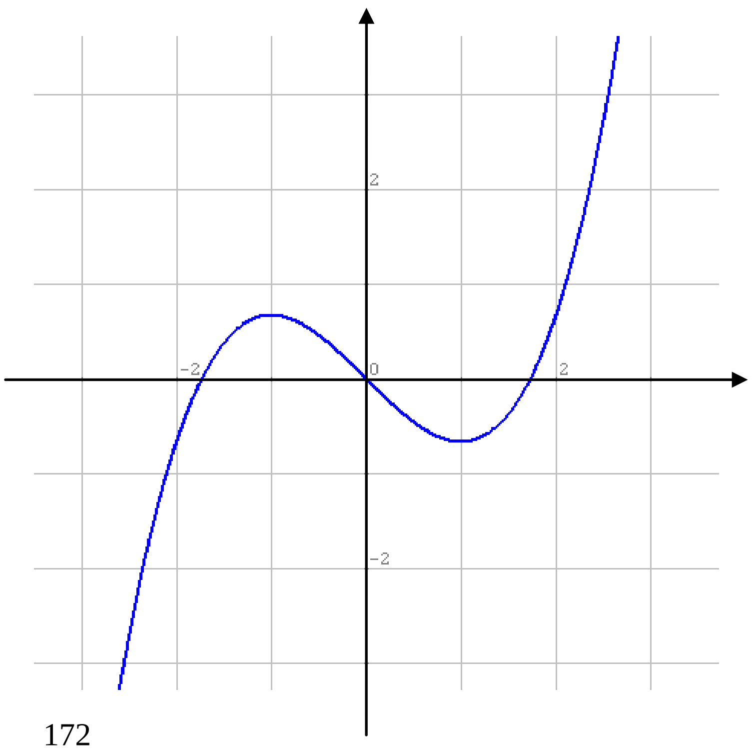
Alumno: ____ **Tiempo estimado: 30 min**

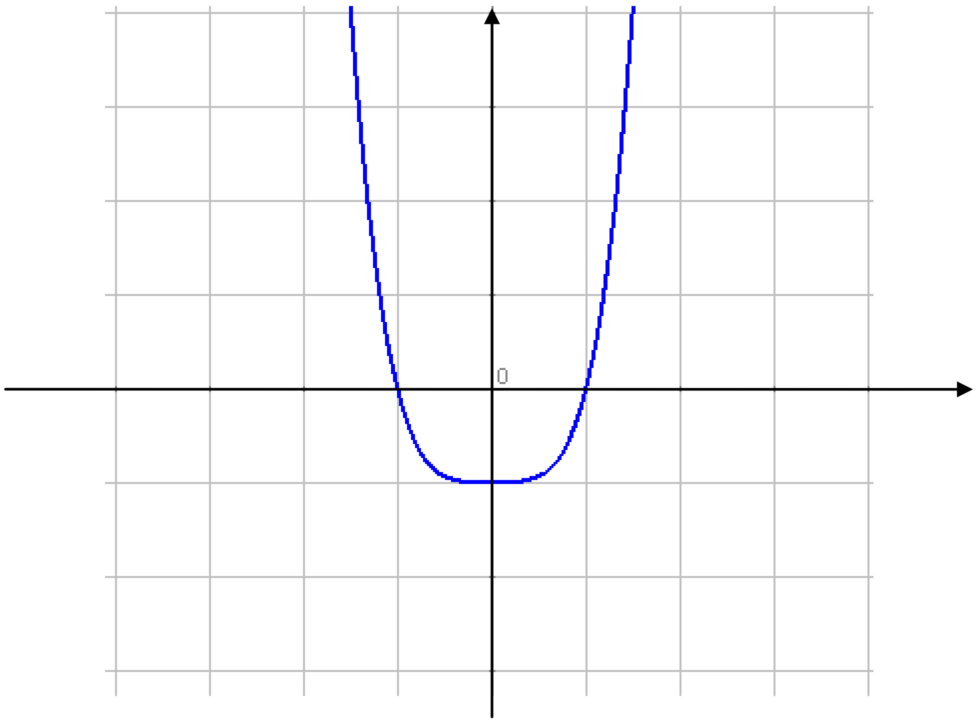
1. Abre el archivo inclinacurva4.htm

2. Con la ayuda del applet Linealizador y aplicando la técnica aprendida, completa la tabla correspondiente a cada uno de los problemas que siguen. En cada caso, utiliza la cuadrícula de referencia que te ofrece el software, para determinar *la pendiente de la recta tangente para cada punto de abscisa x.* Registra tus resultados.

x	$m_t(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	$m_t(x)$
-1	
-1/2	
0	
1/2	
1	





3. Una vez llenas las dos tablas, grafica los puntos que corresponden a las parejas ordenadas de cada tabla, en el mismo plano cartesiano en que aparece la gráfica de *f*. Uniendo con tinta de color rojo los puntos encontrados, construye la gráfica de $m_t(x)$.

4. Para cada uno de los problemas propuestos, a partir de la información tabular y/o gráfica obtenidas, identifica la fórmula o expresión analítica que corresponde a la función $m_t(x)$. Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a cada curva, con tinta de color rojo, la expresión analítica encontrada en cada caso.

5. ¿Cuál es el grado del polinomio correspondiente a *f* en cada caso? Justifica tu respuesta.

6. Pulsa el vínculo ***Enlaces*** que aparece en la parte inferior del applet, para que se abra un nuevo applet que te permitirá confirmar la respuesta anterior; es decir, si en el nuevo applet pulsas el botón ***Identificar***, se te mostrará la expresión analítica correspondiente a la función *f* en cada caso. Registra junto a cada curva, con tinta de color negro, la expresión analítica respectiva.

7. Si para cada caso comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

9. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$ en cada caso?

HOJA DE TRABAJO

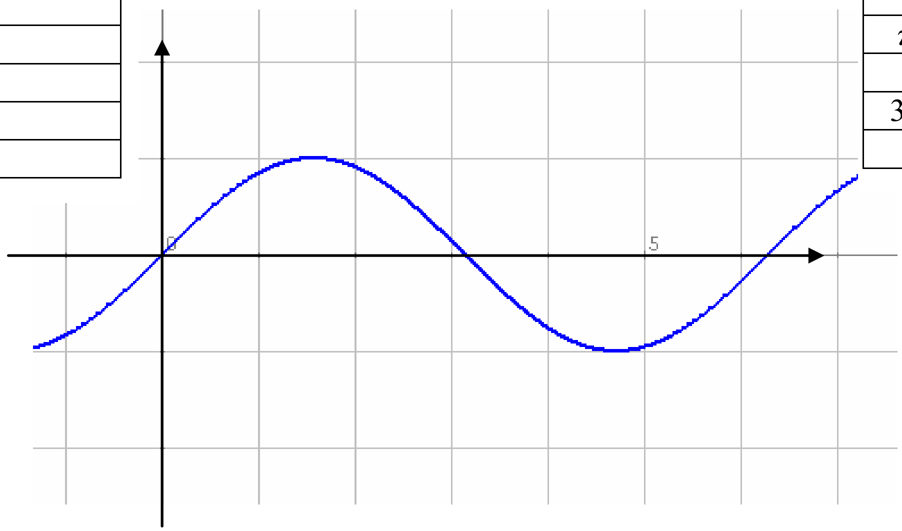
Actividad 5

Alumno: ____ **Tiempo estimado: 50 min**

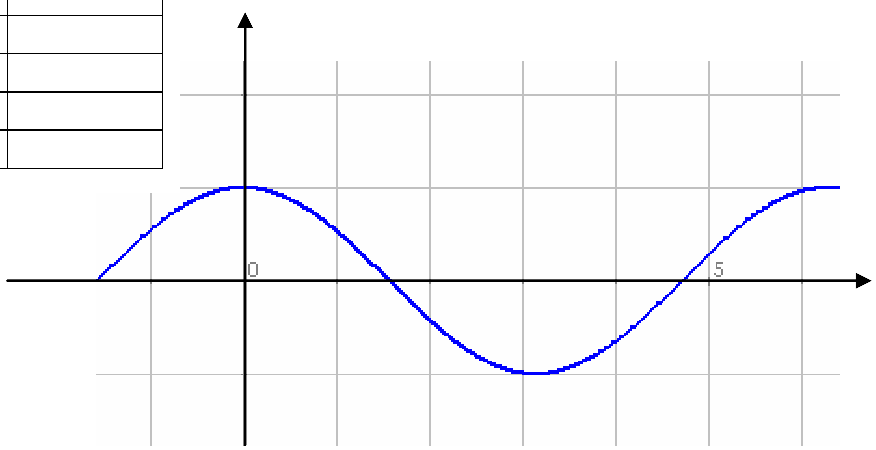
1. Abre el archivo inclinacurva5.htm

2. Con la ayuda del applet Linealizador y aplicando la técnica aprendida, completa la tabla correspondiente a cada uno de los problemas que siguen. En cada caso, utiliza la cuadrícula de referencia que te ofrece el software, para determinar *la pendiente de la recta tangente para cada punto de abscisa x.* Registra tus resultados.

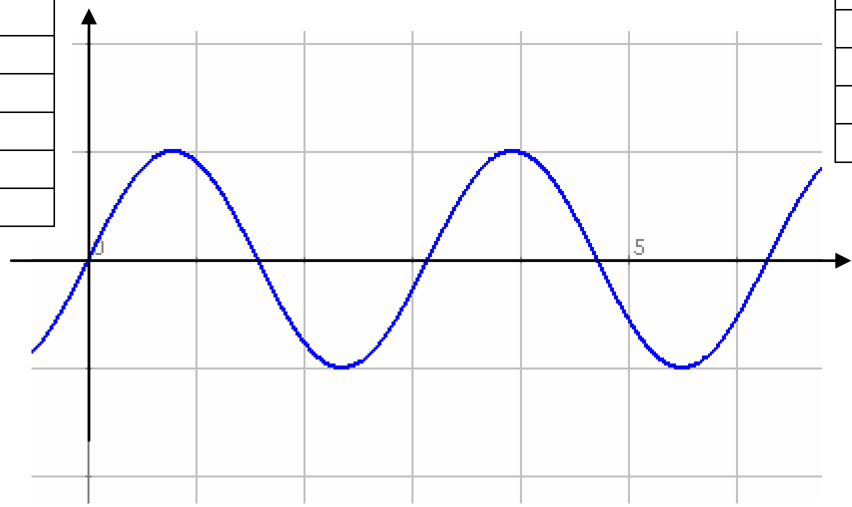
x	$m_t(x)$
0	
$\pi/2$	
π	
$3\pi/2$	
2π	



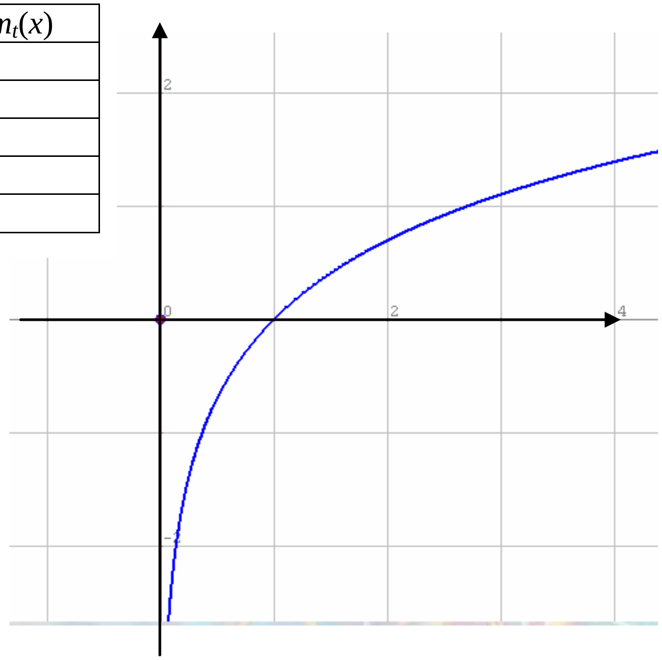
x	$m_t(x)$
0	
$\pi/2$	
π	
$3\pi/2$	
2π	



x	$m_t(x)$
0	
$\pi/4$	
$\pi/2$	
$3\pi/4$	
π	
$5\pi/4$	



x	$m_t(x)$
1/3	
1/2	
1	
3/2	
2	



3. Una vez llenas las cuatro tablas, grafica los puntos que corresponden a las parejas ordenadas de cada tabla, en el mismo plano cartesiano en que aparece la gráfica de *f*. Uniendo con tinta de color rojo los puntos encontrados, construye la gráfica de $m_t(x)$.

4. Para cada uno de los problemas propuestos, a partir de la información tabular y/o gráfica obtenida, identifica la fórmula o expresión analítica que corresponde a la función $m_t(x)$. Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a cada curva, con tinta de color rojo, la expresión analítica encontrada en cada caso.

5. ¿Podrías determinar la expresión analítica de *f* en cada caso? Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a cada curva, con tinta de color negro, la expresión analítica encontrada en cada caso.

6. Si para cada caso comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

7. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

8. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$ en cada caso?

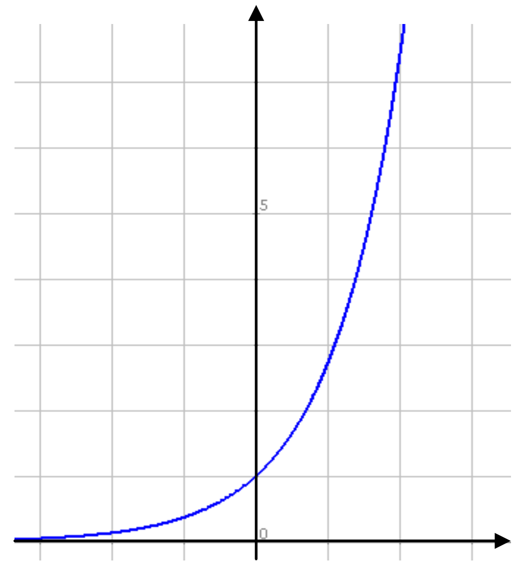
HOJA DE TRABAJO
Actividad 6

Alumno: ____ **Tiempo estimado: 30 min**

1. Abre el archivo inclinacurva6.htm

2. Con la ayuda del applet Linealizador y aplicando la técnica aprendida, completa la tabla correspondiente a la gráfica de la función *f* que se te da a continuación. Utiliza la cuadrícula de referencia que te ofrece el software, para determinar *la pendiente de la recta tangente para cada punto de abscisa x.* Registra tus resultados.

x	$m_t(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	



3. ¿Tuviste alguna dificultad para leer la pendiente de la recta tangente correspondiente a cada abscisa? Si así fue, ¿en qué consistió la dificultad? Explica ampliamente.

4. Una vez llena la tabla con los valores estimados de las pendientes, grafica los puntos que corresponden a las parejas ordenadas de cada tabla, en el mismo plano cartesiano en que aparece la gráfica de *f*. Uniendo con tinta de color rojo los puntos encontrados, construye la gráfica de $m_t(x)$.

5. A partir de la información tabular y/o gráfica obtenida, identifica la fórmula o expresión analítica que corresponde a la función $m_t(x)$. Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a la curva, con tinta de color rojo, la expresión analítica encontrada.

6. ¿Podrías determinar la expresión analítica de *f*? Discútelo con tus compañeros y argumenta tu propuesta. Registra junto a la curva, con tinta de color negro, la expresión analítica respectiva.

7. Si comparas las gráficas de f y $m_t(x)$, ¿qué puedes concluir? Explica ampliamente.

8. ¿Qué relación encuentras entre el signo de la función $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de la función f?

9. ¿Qué relación encuentras entre la expresión analítica de $f(x)$ y la que obtuviste para $m_t(x)$?

HOJA DE TRABAJO

Actividad 7

Alumno: ____ **Tiempo estimado: 45 min**

1. Abre el archivo inclinacurva7.htm

2. Con los controles *Función* y *x* en valor 1, aplica la técnica de acercamiento al punto correspondiente. ¿Qué es lo que observas? ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto (1, *f*(1))? Explica ampliamente.

3. Con el control *Función* en valor 2 y el control *x* en valor 1, aplica la técnica de acercamiento al punto correspondiente. Ahora asigna al control *x* el valor -1, y aplica de nuevo el zoom. ¿Qué es lo que observas? ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto (1, *f*(1))? ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto (-1, *f*(-1))? Explica ampliamente.

4. Con el control *Función* en valor 3 y el control *x* en valor 0, aplica la técnica de acercamiento al punto correspondiente. ¿Qué es lo que observas? ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto (0, *f*(0))? Explica ampliamente.

5. ¿Qué diferencias encuentras entre los resultados de esta actividad y los de las actividades 2 a 6? Explica ampliamente.

6. Escribe tus conclusiones con respecto a lo observado en esta actividad.

ANEXO VII. LA RECTA TANGENTE

ANEXO VII. LA RECTA TANGENTE.

En este anexo se presenta la parte del trabajo de Bivens que, desde la perspectiva de la actividad matemática propuesta por la secuencia didáctica que nos ocupa, se considera consistente con la idea de identificar a la pendiente del segmento visualizado con la de la recta tangente y, finalmente, según Bivens, dada la visualización de la recta que mejor aproxima a la curva en las cercanías de un punto dado, identificar a su pendiente como la derivada en dicho punto.

Definición. Una recta L que pasa por $P=(a, f(a))$ será llamada la *recta tangente* a la gráfica de *f* en *P*, si *L* es la mejor aproximación *lineal* de *f* cerca de *P*. Más precisamente, una recta $L = L(x)$ que pasa por *P* es una recta tangente a la gráfica de *f* en *P*, si para cualquier otra recta $K = K(x)$ que pasa por *P*, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-L(x)| \leq |f(x)-K(x)| \quad \forall x \in (a-\delta,\, a+\delta)$$

Ejemplo: Probar, a partir de la definición anterior, que el eje *x* es tangente a la gráfica de $y = x^2$ en el origen.

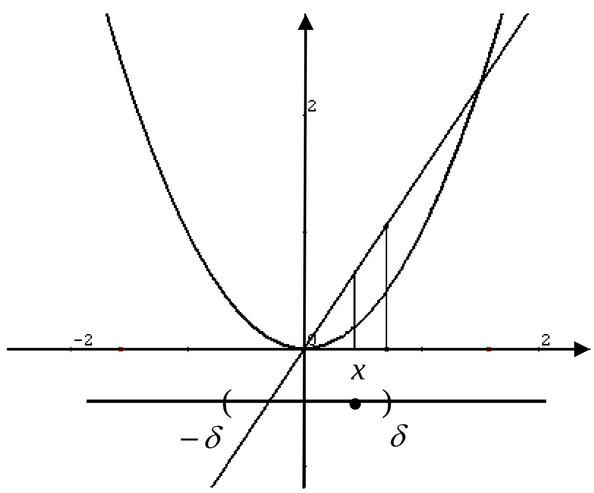


Figura 1

Sea $K(x)=mx$ ($m > 0$). Localicemos $\delta > 0$ tal que $\delta^2 = m\delta - \delta^2$, es decir, $\delta = \frac{m}{2}$.

Si $0 < x < \delta = \frac{m}{2}$, $\Rightarrow x^2 < \frac{mx}{2} \;\Rightarrow\; 2x^2 < mx \Rightarrow x^2 < mx - x^2$, de donde

$$|x^2-0| \leq |x^2-K(x)| \quad \text{si} \quad 0<x<\delta$$

Evidentemente esto también se cumple para $-\delta<x<0$

El caso $K(x)=mx$ con m < 0 es completamente análogo.

Por tanto, $L(x)$ = 0 es la recta tangente a la gráfica de $y=x^2$ en el origen.

Teorema. La gráfica de una función $y=f(x)$ tiene una recta tangente L en $P=(a, f(a))$ si y sólo si $f'(a)$ existe y es igual a la pendiente de L.

Demostración. $(\Rightarrow)$

Supongamos que la recta $L(x)=f(a)+m(x-a)$ es tangente a la gráfica en $(a, f(a))$. Tenemos que probar que

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Dado $\varepsilon>0$, sean $L_1(x)=f(a)+(m+\varepsilon)(x-a)$ y $L_2(x)=f(a)+(m-\varepsilon)(x-a)$.

Por nuestra definición de recta tangente, existe $\delta>0$ tal que

$$|f(x)-L(x)| \leq |f(x)-L_1(x)| \quad \text{y} \quad |f(x)-L(x)| \leq |f(x)-L_1(x)| \qquad \forall x\in(a-\delta,\, a+\delta).$$

Si $a<x<a+\delta$, entonces $L_2(x)<L(x)<L_1(x)$ y por definición, se cumplirá que $L_2(x)<f(x)<L_1(x)$.

Desarrollando, se tiene que

$L_2(x)-f(a)<f(x)-f(a)<L_1(x)-f(a)$, es decir

$(m-\varepsilon)(x-a)<f(x)-f(a)<(m+\varepsilon)(x-a)$. Dividiendo entre $x-a>0$, tenemos

$$m-\varepsilon<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<m+\varepsilon \text{ , de donde}$$

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad a < x < a+\delta .$$

Esta desigualdad también se cumple para $a-\delta < x < a$ y por lo tanto $f'(a)$ existe y es igual a *m*.

Los planteamientos de Riestra, por otro lado, se enfocan hacia la idea de que no basta afirmar que la recta tangente es la que se parece cada vez más a la curva al acercarse a un punto, digamos, de abscisa *a*, pues las rectas $T(x)$ y $L(x)$ de la Figura 2 cumplirían tal condición.

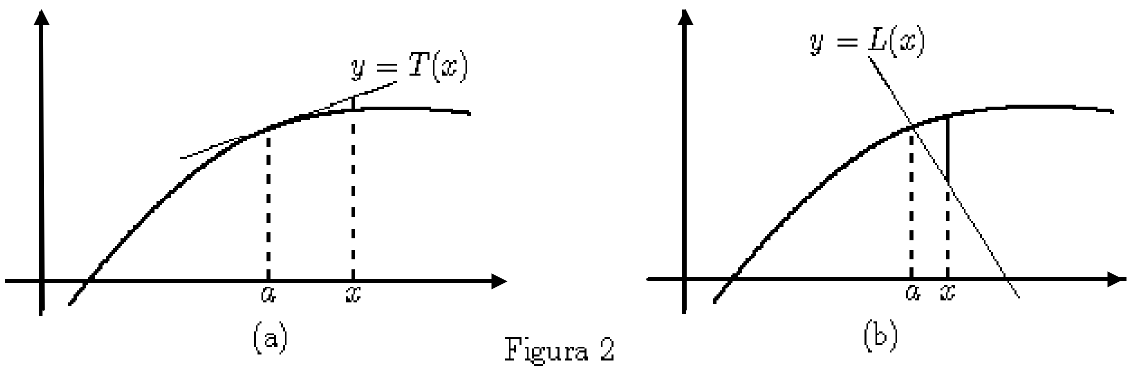


Figura 2

Es decir, en general, el pedir que $T(x) - f(x) \to 0$ cuando $x \to a$ equivale a pedir que las gráficas (consideradas continuas) de $f(x)$ y $T(x)$ coincidan en el punto $(a, f(a))$, lo que no es suficiente para asegurar la tangencia, ya que cualquier recta no vertical que pase por el punto cumplirá tal condición.

Para determinar el parecido que existe entre la recta tangente $T(x)$ y la curva $f(x)$ en torno al punto de tangencia, Riestra hace uso del tipo de contacto que garantiza que, a medida que aumenta el grado de acercamiento alrededor del punto dado, la curva y su recta tangente tiendan a confundirse. Consideremos la Figura 3 que presenta cuatro acercamientos sucesivos de la gráfica de $f(x) = x^2$ alrededor del punto de tangencia, el origen, donde la tangente, como se vio con Bivens, es el eje *x*.

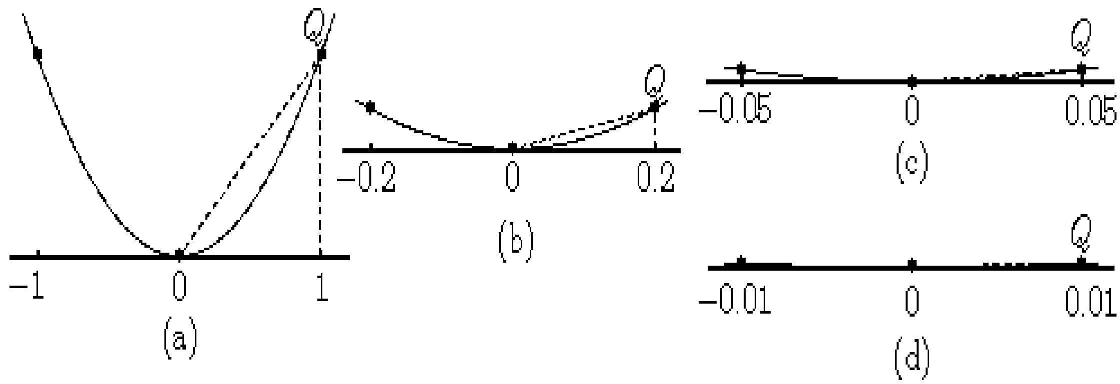


Figura 3

En términos del error $E(x)$ definido como la diferencia de ordenadas entre $T(x)$ y $f(x)$, puede observarse que el ángulo que forma *OQ* con la horizontal, es decir el ángulo que forma la recta secante con la recta tangente, va cerrándose tanto como se quiera a medida que *Q* se acerca arbitrariamente a *O*. Entonces, la tangente de dicho ángulo $\frac{f(x)}{x} \to 0$, de donde $\frac{E(x)}{x-a} \to 0$ cuando $x \to a$. Así, el error absoluto $E(x)$ no sólo se acerca arbitrariamente a cero, sino que lo hace arbitrariamente más rápido que el acercamiento de *x* a *a*, dado que la proporción de ese error con respecto a la diferencia $x-a$ todavía tiende a cero. El comportamiento descrito caracteriza lo que Riestra denomina *contacto de primer orden*, lo que traduce la evidencia geométrica de que la curva y su recta tangente se confunden en las cercanías del punto de tangencia, a la afirmación analítica de que el límite del error relativo $\frac{E(x)}{x-a}$ es igual a cero. De acuerdo con lo anterior, se deduce lo siguiente:

Llamemos α al ángulo que forman la recta secante y la recta tangente en el esquema de la Figura 3. Entonces

$\tan\alpha = \dfrac{f(x)}{x} \to 0$ cuando $x \to a$, por lo que $\dfrac{E(x)}{x-a} \to 0$ cuando $x \to a$, lo que implica que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{E(x)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{T(x) - f(x)}{x-a} = 0$.

Sustituyendo a $T(x) = f(a) + m(x-a)$, tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) + m(x-a) - f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[-\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right] + \lim_{x\to a} m = -f'(a) + m = 0 \Rightarrow m = f'(a)$$

De lo anterior se desprende que $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ es la recta que guarda contacto de primer orden con la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa *a*. Esta condición sí garantiza que la recta tangente sea la mejor aproximación lineal de *f* en las cercanías del punto de tangencia.