Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Caracterización del significado institucional de referencia de las nociones básicas de la teoría de conjuntos

Tesis que presenta

Evaristo Trujillo Luque

Para obtener el Grado de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa

Directoras de Tesis:

M.C. Martha Cristina Villalva Gutiérrez

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Hermosillo, Sonora, México. Febrero de 2011

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está integrado por cinco capítulos en los que se desarrolla una investigación que se centra en la caracterización del significado institucional de referencia de las nociones de la teoría de conjuntos en el Colegio de Bachilleres en el Estado de Sonora.

En el Capítulo 1 se encuentra un apartado de antecedentes, el problema de investigación, justificación y los objetivos generales y particulares que marcarán la dirección de esta investigación. En los antecedentes podemos encontrar ideas alrededor del fenómeno denominado “matemática moderna” y los impactos de las decisiones tomadas en torno a los tópicos en los planes y programas de estudio.

En el Capítulo 2 se encuentran algunas nociones básicas del enfoque teórico que se ha elegido para realizar este trabajo además de la metodología que se sigue a través de éste. El enfoque se ha seleccionado por la potencia y eficacia de las herramientas que posee para realizar análisis a textos matemáticos diversos, tal y como encontramos en la literatura de la especialidad. Se brinda un breve descripción de los elementos teóricos que se utilizan en este trabajo sin ser exhaustivos en ello.

El Capítulo 3 contiene el análisis de un texto matemático que fue diseñado para ser utilizado por alumnos de 5to semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH) que se especializan en el área de Físico-Químico ó en el área de Ciencias Económicas-Administrativas.

Se analiza el texto íntegramente, iniciando con la distribución de sus contenidos en apartados que denominamos Unidades de Análisis. Una vez realizada dicha distribución, se lleva a cabo una distinción de elementos de significado para proceder posteriormente a construir la Configuración Epistémica asociada a cada Unidad de Análisis. Asimismo se identifican las prácticas promovidas alrededor de los objetos matemáticos de las nociones básicas de la teoría de conjuntos. Como parte final del capítulo se caracteriza el significado institucional de referencia a través de las configuraciones epistémicas logradas.

Finalmente, en el Capítulo 3, se presentan conclusiones y reflexiones sobre el resultado del trabajo de investigación. Éstas incluyen:

a) Nuestros puntos de vista acerca de las aportaciones que nuestra investigación hace.

b) La relación del significado institucional que este trabajo caracterizó, con respecto a las declaraciones hechas en los nuevos libros de texto del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora sobre las competencias que se desarrollan en el alumno.

c) La parte última del capítulo se centra en la presentación de una serie de conflictos semióticos potenciales que se identificaron como producto del análisis realizado al multicitado texto.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU JUSTIFICACIÓN

1.1. Antecedentes

Una de las características de la ciencia ha sido y será su constante cambio y evolución. Particularmente si nos referimos a la matemática, podemos situar momentos en la historia que han sido claves para esta ciencia con el descubrimiento y desarrollo de ideas que, de manera significativa, han permitido su concreción y su desarrollo. Muestra de ello es que su estructura y fundamentación fue motivo de diversos problemas y polémicas entre los matemáticos, tratando de encontrar la relación que existía entre la lógica y la matemática, y si una disciplina era suficiente para sustentar a la otra.

Consideremos un momento en la historia que ha sido de importante relevancia para la matemática. Nos referimos a la formulación de la teoría de conjuntos desde su gestación por el personaje que se considera su autor, George Cantor (Arrieche Alvarado, M. J. 2002 pág. 22-50), y el resto de los matemáticos que estuvieron involucrados en el desarrollo de dicha teoría intentando resolver los problemas y paradojas que de ella surgieron. Todos ellos tuvieron un impacto profundo en la matemática, contribuyendo fuertemente a su estructuración, su formalismo, axiomatización y al uso de un lenguaje unificador.

Este impacto de la teoría de conjuntos en el proceso de la formalización de la matemática tuvo a su vez un impacto profundo en la matemática escolar. Prueba de ello se puede encontrar en el fenómeno denominado “Matemáticas Modernas”.

Ante una evolución tan importante para la matemática, algunas personas involucradas con los sistemas educativos sugirieron que estos acontecimientos dentro de la matemática eran de tal relevancia que debían de incluirse en la matemática escolar, con el fin de que los alumnos tuvieran al alcance tal consolidación y claridad, como la que tuvo la matemática y los matemáticos que lograban percibirla, creyendo así que el alumno podía concretar en su vida cotidiana los conceptos matemáticos de una manera generalizada.

De textos como el de la Secretaría General de la Organización de los Estados Unidos Americanos. (1971) y el del Departamento de asuntos científicos de la Unión Panamericana. (1968), se puede rescatar que la decisión de incluir las "nuevas matemáticas" se tomó en lugares geográficos y sociales que resultaron ser claves en el mundo debido a la influencia e impacto que tuvieron en otras sociedades. Entre esos lugares podemos mencionar a países como Francia y EUA como los primeros y principales protagonistas en su intento por llevar la nueva matemática a sus educandos. El tomar estas decisiones y llevarlas a cabo condujo a un gran movimiento de personas intentando llevar este "saber sabio" al salón de clase, lo que derivó en cambios a los planes y programas de estudio, cambios en los libros de texto, intentos o declaraciones de necesidades de preparar a los maestros de matemáticas para enseñar las nuevas matemáticas, es decir, cambios que propiciaran un terreno llano para las intenciones pretendidas.

Pasó algún tiempo antes de que se percataran que el movimiento de la matemática moderna no cumplió los objetivos ni las expectativas con que se había implementado y decidieron hacer algunas reformas a los planes de estudio. Podemos mencionar que no sólo no se lograron los objetivos planteados, además, otros se vieron afectados, es decir, no lograron la consolidación de las matemáticas tradicionales en los alumnos al perderse en el rigor, el formalismo, y las ideas abstractas de la matemática, Kline, M. (1976).

Conviene mencionar que este movimiento que tomó por nombre "matemática moderna", tuvo influencia en la mayor parte de la cultura occidental, impactando en las decisiones que tomaba cada país como parte de su proyecto de educación. En México se decide adoptar la denominada matemática moderna en 1970 para la educación básica y unos años antes en diferentes sistemas de educación superior. Se tenía por consigna, sustituir algunos temas denominados tradicionales (tópicos anteriores a 1700), e incluir algunos más novedosos como álgebra abstracta, topología, lógica simbólica, teoría de conjuntos, etc. Inclusive en la educación básica se adopta el enfoque estructural de las matemáticas y, particularmente se adoptan términos y nociones de la teoría de conjuntos.

La presencia explícita de nociones y procedimientos de la teoría de conjuntos se mantuvo dentro del currículo mexicano hasta la reforma de 1992, donde se decidió entre otras cosas, no abordar las nociones básicas de la teoría de conjuntos en este nivel.

En algunos subsistemas del bachillerato la teoría de conjuntos es un tema explícito en el currículo actual -hasta el momento de iniciar este trabajo-, como es el caso del sistema de bachillerato abierto.

Sin embargo, dada la incidencia y uso de la teoría de conjuntos en la matemática disciplinar, y a pesar de la reforma del 92, este tópico se encuentra aún en la matemática escolar, es decir, aunque no se dedica un curso especial para su estudio, se encuentran algunas referencias puntuales, pues sigue siendo una herramienta de la cual se vale la matemática disciplinar para su estructuración, notación, lenguaje, representación, etc., y que está presente de manera implícita en la matemática escolar, ya sea en los libros de texto, en el lenguaje del maestro, en los ejercicios, en las definiciones, etc.

1.2 Preguntas de investigación

Nuestra inquietud en una primera fase fue investigar y documentar esta presencia de la teoría de conjuntos en el bachillerato en México (entiéndase en un sentido amplio). Delimitando el problema, hemos decidido escoger un sistema educativo del Estado de Sonora que tiene una presencia importante en la educación media superior, además de poseer características que son favorables a nuestro estudio. Otra delimitación fue la decisión de centrarnos en el significado institucional de referencia, por considerar que el trabajo que implicaba era suficiente para el desarrollo de una investigación individual como la presente.

En este contexto surge nuestra principal interrogante de investigación:

- **¿Cuál es el significado institucional de referencia del la teoría de conjuntos?**

De ella se desprenden otras, como son:

- **¿Cuáles son las prácticas de referencia promovidas por la institución escolar para la teoría de conjuntos?**
- **¿Cuáles son las configuraciones epistémicas asociadas al proceso de construcción del significado institucional de referencia para la teoría de conjuntos?**

1.3 Objetivos

Hemos centrado nuestra inquietud en investigar cuál es la presencia explícita de las nociones de la teoría de conjuntos (objeto matemático) en COBACH y hemos planteado las preguntas que brindarán el rumbo de este trabajo. A continuación hemos de enumerar una serie de objetivos que nos ayudarán a dar respuesta a las preguntas de investigación.

Objetivo general: *Caracterizar el significado institucional de referencia de las nociones básicas de la teoría de conjuntos.*

Para lograr este objetivo general se han trazado una serie de **objetivos particulares**. Entre ellos mencionamos los siguientes:

- *Identificar el contexto que propicia el estudio del objeto matemático.*
- *Identificar configuraciones epistémicas asociadas a los objetos matemáticos que conforman las nociones básicas de la teoría de conjuntos, de acuerdo a la postura de la institución escolar en estudio.*

El logro de los objetivos trazados nos permitirá tener una noción de la presencia de la teoría de conjuntos en un periodo que comprende agosto de 2003 a diciembre de 2009, es decir 6 generaciones de alumnos que habrán abordado el estudio de este tema, permeado por un cierto significado institucional de las nociones de la teoría de conjuntos. Y aunque nuestro trabajo no se enfoca a revisar los significados de los estudiantes, sino a los significados que se promueven por parte de la institución, nos brindará una perspectiva que pudiera ampliarse posteriormente siguiendo esa línea.

CAPÍTULO 2

CONSIDERACIONES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS

En este capítulo se describen las nociones teóricas en las que nos basamos para realizar esta investigación, además se brinda una breve descripción acerca del método y las acciones que se realizaron para concretarlo.

2.1 Consideraciones teóricas

Para realizar este trabajo se ha decidido utilizar el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), paradigma teórico en construcción de la matemática educativa.

Hemos escogido este paradigma pues consideramos que sus construcciones teóricas nos permiten interpretar, estudiar y explicar nuestro problema de investigación de manera precisa, dándonos la posibilidad de alcanzar los objetivos que nos hemos planteado. La teoría declara tener alguna influencia de Teoría Antropológica de lo Didáctico, así como de la Antropología Cognitiva, sobre todo en lo relativo a la distinción de las relaciones personales e institucionales. El EOS establece una diferencia entre objeto personal y objeto institucional, tomando como primitiva la *noción de situación problema* y construyendo nociones teóricas básicas como *práctica*, *objeto* (*personal* e *institucional*) y *significado*, centrales en este trabajo. (Godino; 2003)

Se considera que para una persona dada, una *situación-problema* es cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades de matematización Toda vez que un individuo o institución se enfrenta a una situación problema aparecen una serie de objetos intervinientes y emergentes.

“Una de las principales aportaciones del EOS es el constructo del sistema de prácticas personales (e institucionales) ante una clase de problemas, que permite que el análisis de la cognición matemática tenga una faceta individual y una faceta institucional”, (Godino 2003, pág. 10). En este artículo, el autor presenta la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS en adelante), siendo ésta la que utilizaremos en nuestro trabajo.

En la TFS se manifiesta que con el objetivo de sintetizar las características de las actividades de matematización, se introduce la noción de *práctica,* la cual se enuncia como sigue:

> "Toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas." (Ídem; pág. 91,92).

Sin embargo, el interés no se centra en un práctica particular dado un problema concreto, sino en lo que se define como tipos de prácticas, es decir, los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas. Esto induce también la idea de interesarse por un "*tipo de problemas*" como aquellos problemas concretos que han de resolverse mediante la intervención de un mismo objeto matemático.

Como parte de la caracterización de la noción de *práctica*, la teoría considera:

- *Prácticas prototípicas* como aquellas que se asocian a cada tipo de problemas. Además se considera como un *conjunto de prácticas prototípicas* aquel que asocia una serie de éstas con un objeto dado y una persona dada.
- *Prácticas significativas* como aquellos intentos que persisten en la resolución de problemas matemáticos. Independientemente de que estas prácticas lleven al éxito o a intentos fallidos y errores, se toman en cuenta, pues la persona cree que son correctos y no los descarta u olvida fácilmente.

Se caracteriza además una práctica *personal prototípica significativa* como aquella práctica que conlleva a la matematización del problema.

Tomando en cuenta que las situaciones problemas y sus situaciones son socialmente compartidas, se considera una *institución* como aquella constituida por personas involucradas en una misma clase de situaciones-problemas. Debido a su carácter social, estas prácticas tienen rasgos característicos inherentes al entorno en donde se suscitan. Podemos hablar entonces de distintas instituciones, por ejemplo la “institución matemática”, formada por personas comprometidas en la resolución de nuevos problemas matemáticos. Es importante mencionar también como ejemplo la “institución enseñanza de la matemática” en sus diversos niveles, como por ejemplo los investigadores en matemática educativa, diseñadores de currículo, maestros frente a grupo, etc.

En el seno de cada una de las instituciones se realizan prácticas distintas que responden de forma apropiada a determinados campos de problemas. Con el fin de comprender la naturaleza de la actividad matemática y de los objetos que de ella emergen, se considera el conjunto de prácticas desde una perspectiva sistémica, por tal motivo la teoría considera la noción de *sistema de prácticas institucionales*, asociadas a un campo de problemas, como el conjunto de prácticas significativas compartidas en el seno de la institución para resolver un campo de problemas.

Las prácticas sociales dependerán de la institución y del campo o tipo de problemas. Por ejemplo la institución a la que nos referimos nosotros es una institución de enseñanza matemática (COBACH), uno de los problemas que la institución aborda es la enseñanza de temas matemáticos y en torno a este problema emplea un sistema de prácticas prototípicas significativas para lograr el aprendizaje de los alumnos. Por ejemplo, en el empleo de libros de texto como referencia para el maestro y el alumno se promueven ciertas prácticas al momento de abordar las situaciones-problema propuestas en ellos.

El EOS considera y propone que un *objeto institucional es emergente* (Godino 2003) del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas.

La visión anterior permite y reconoce la definición de distintos objetos institucionales según la institución de referencia.

Paralelamente la teoría define *objeto personal*, sin embargo no es relevante para nuestro trabajo, debido a que éste no contempla el significado personal para el cual es necesario conocer el objeto personal.

Sin embargo, es en el apartado de objeto personal donde la teoría enfatiza que la emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje

La teoría menciona (Godino 2003), que el significado de un objeto matemático no se reduce a una definición. Es por esto que relaciona el significado de los objetos matemáticos con las prácticas (que pueden ser operativas y discursivas) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos, o las realizadas en el seno de las instituciones.

La teoría propone lo siguiente: *El significado de un objeto institucional es el sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado* (aunque la emergencia es progresiva).

Esto permite relacionar el significado de los objetos matemáticos básicos de la teoría de conjuntos no sólo a una simple definición, sino que da lugar a centrar nuestra atención en las prácticas operativas y discursivas que realiza la institución (COBACH) en torno a este objeto matemático.

Una vez que hemos introducido una "definición" de significado de un objeto, se propone descomponer el significado en entidades más elementales que permitan un estudio sistemático del mismo. Los elementos del significado que se proponen en la teoría, según Godino y Font (2006), son: *1) situaciones-problemas,2) lenguaje,3) procedimientos, técnicas,4) concepto, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc, y 6) argumentaciones.*

- **Situaciones-problemas aplicaciones, tareas que inducen actividades matemáticas.** El modelo teórico parte de la idea de situación problema como noción primitiva e interpreta esta noción en un sentido amplio incluyendo tanto problemas simples como situaciones complejas y tanto problemas puramente matemáticos como extra-matemáticos (Godino; 2003).

- **El lenguaje matemático.** Para resolver problemas matemáticos, para generalizar su solución o para describirlos a otra persona necesitamos usar elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos etc. La notación simbólica nos permite representar tanto objetos abstractos como situaciones concretas.

  El lenguaje matemático contempla utilizar disposiciones tabulares, gráficos, grafos, esquemas, ilustraciones, etc. que formarían parte del lenguaje gráfico.

- **Los procedimientos** del sujeto ante tareas matemáticas son las diversas operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos y estrategias que se pueden aplicar para resolver las situaciones-problemas.

- **Conceptos.** Al resolver un problema no sólo se realiza una acción sobre símbolos u objetos materiales con los que se opera, además, se necesita evocar diferentes conceptos o nociones matemáticas que previamente se conocen y sirven de apoyo para resolver el problema. A estos les asociamos el término de *intervinientes*.

  Cada definición-concepto proviene de un sistema de prácticas específicas

- **Propiedades o atributos.** Se refieren a condiciones de realización de los procedimientos, a características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos. Cada propiedad de un objeto matemático lo relaciona con otros diferentes y contribuye al crecimiento del significado del objeto en cuestión (Godino; 2003).
- **Argumentos**. Las acciones y objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de problemas, explicar y justificar la solución (Godino; 2003).

Aquellos objetos involucrados no intervinientes, sino más bien que resultan de las prácticas, son *emergentes.*

Para realizar análisis didáctico, se introduce la siguiente clasificación de los significados institucionales:

- **Implementado**, consistente en el sistema de prácticas efectivas del docente durante un proceso de estudio determinado.
- **Evaluado**, el cual, como su nombre indica, consiste en el subsistema de prácticas que el docente emplea para evaluar los aprendizajes de sus estudiantes.
- **Pretendido**, formado por el sistema de prácticas contenidas en la planeación de un proceso de estudio.
- **Referencial**, el cual consiste en el sistema de prácticas usadas como referencia para elaborar el significado pretendido.

La teoría contempla también un constructo teórico llamado *configuración epistémica* que no es otra cosa que la articulación de los objetos primarios o elementos del significado, que nos ayudará a caracterizar el significado institucional que nos hemos planteado encontrar.

Hemos utilizado una representación gráfica del constructo teórico configuración epistémica como la que se utiliza en Font y Godino (2006), la cual mostramos a continuación:

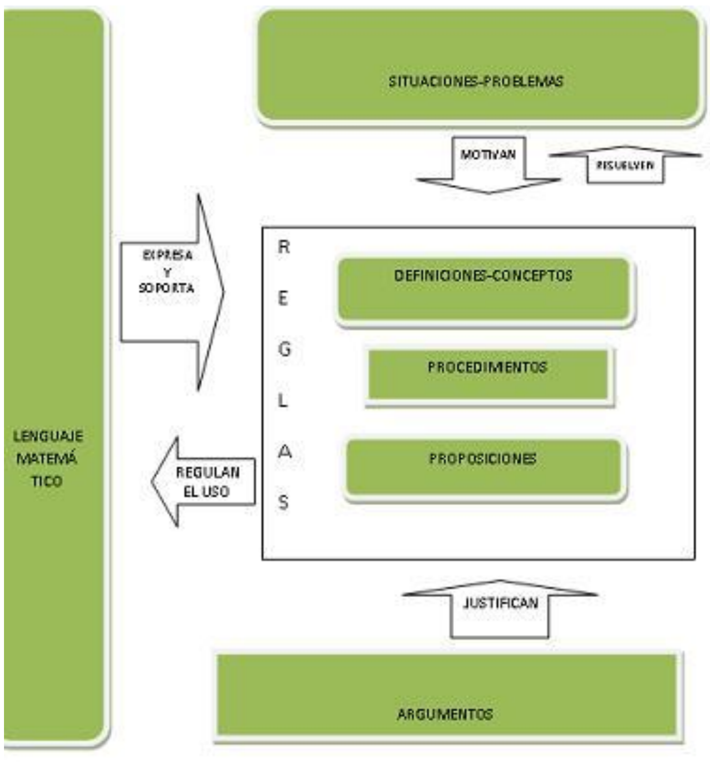


Figura 1. Configuración epistémica

La Figura 1 nos brinda una radiografía del significado del objeto matemático, es decir de las prácticas relacionadas con tal objeto y apoyadas en los objetos primarios antes descritos y que se aprecian en la figura.

Como se muestra en Font y Godino (2006), en un análisis de texto, las nociones teóricas descritas anteriormente son útiles para describir características de los textos matemáticos, además la Configuración Epistémica se utiliza como herramienta útil que nos permitirá realizar la caracterización del significado institucional.

Como se declara en la obra antes citada, las nociones teóricas utilizadas en nuestro análisis, tales como la distinción de los elementos constituyentes del significado y las relaciones que guardan estos elementos que se caracterizan como el constructo teórico Configuración Epistémica, sirven como base para describir las características del texto que se esté analizando. El EOS distingue tipos de configuraciones epistémicas, en nuestro trabajo utilizaremos dos tipos básicos de configuraciones epistémicas: las formales y las empíricas.

A continuación presentamos una breve descripción de ellas, la cual fue retomada de la hecha por Font y Godino (2006):

- Las *configuraciones epistémicas axiomáticas* son las asociadas a los textos que muestran un método axiomático en el desarrollo de sus contenidos, es decir se eligen ciertos enunciados de la teoría como axiomas y se exige que todos los demás sean probados a partir de ellos. En este tipo de configuraciones epistémicas los conceptos que se definen y las proposiciones que se introducen no tienen una justificación con una realidad extra-matemática. Por consiguiente, en este modelo las situaciones-problemas y los procedimientos no se encuentran presentes de manera explícita.
- Las *configuraciones epistémicas formalistas* se puede decir que interpretan el modelo de las configuraciones epistémicas axiomáticas de una manera laxa. En general puede decirse que hay conceptos que se suponen conocidos y otros que se introducen mediante definiciones. Los ejemplos y ejercicios tienen por objetivo facilitar la comprensión de las definiciones, los problemas son descontextualizados y su objetivo principal es la aplicación de los objetos matemáticos introducidos.

2.2 Consideraciones metodológicas

Como hemos mencionado, se ha realizado un análisis ontosemiótico del texto de Probabilidad y Estadística I del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Para esto se han utilizado nociones del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. En este apartado se describe la metodología seguida en dicho análisis.

Del texto contenido en el libro se ha escogido la parte esencial que a nuestra investigación compete, la cual se refiere apartado en donde de forma explícita se aborda la teoría de conjuntos.

El apartado se ha dividido de manera tal que han quedado unidades de análisis que involucran diferentes elementos, como una nueva definición, caracterización, operación, representación, etc. Estas unidades de análisis se han organizado en tablas con la enumeración correspondiente que nos permite ser claros al momento de referir el texto que se está analizando.

Seguido de la tabla se ha procedido a elaborar la Configuración Epistémica referente a cada unidad de análisis. En primera instancia se organiza la información por medio de tablas en donde se explicitan los elementos primarios (situaciones-problemas, lenguaje, conceptos, etc.) que se distinguen en la unidad de análisis del texto.

Una vez que se hace una distinción de los objetos o elementos primarios se hace una descripción verbal escrita de las relaciones que guardan estos elementos conforme a las prácticas que se distinguen en la unidad de análisis correspondiente.

Con el objetivo de tener además una representación gráfica de la Configuración Epistémica se ha incluido en cada unidad de análisis un diagrama, seguido de una breve descripción del mismo.

Una vez realizado el análisis se favorece un resumen de las prácticas realizadas en el texto alrededor de los objetos matemáticos y sus interrelaciones.

CAPÍTULO 3

EL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA

Este capítulo contiene un análisis referente al contenido de la Unidad 4 del libro de texto Probabilidad y estadística 1, que se utiliza en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Este libro se incorpora como respuesta a la reforma curricular que se implementó en esta institución educativa en el año 2003 y que actualmente se encuentra de salida al incorporarse una nueva reforma en el 2009 basada en competencias. Este libro se utilizó hasta diciembre de 2010.

Para el análisis se ha considerado seccionar el texto en unidades enumeradas, distinguiendo entre una y otra los conceptos promovidos y los ejemplos resueltos. Se ha dispuesto el acomodo en tablas para una mejor organización y una referencia sistemática. A cada unidad de análisis se le asocia una configuración epistémica caracterizada por tres componentes, una tabla que distingue los elementos constitutivos del significado (llamados también elementos primarios), una descripción de las relaciones entre los elementos mencionados y, un diagrama que tiene el propósito de sintetizar la configuración epistémica.

3.1 Unidad de análisis 1

Tabla 1. Unidad de análisis 1.

1.1	“El concepto de Conjunto aparece en todas las ramas de las Matemáticas. De manera intuitiva, un conjunto (1) es cualquier lista bien definida o cualquier colección de objetos, y será representado por las letras mayúsculas A, B, Y, X, etcétera. Los objetos que componen al conjunto se llaman sus elementos (2) o miembros, y se escriben con letras minúsculas a, b, y, x,, etcétera.
1.2	Algunos conjuntos básicos de la matemática, llamados también Campos

	Numéricos: Ejemplos de conjuntos son: Φ: Conjunto vacío, que carece de elementos. N: Conjunto de los números naturales. Z: Conjunto de los números enteros. Q: Conjunto de los números racionales. R: Conjunto de los números reales. C: Conjunto de los números complejos.
1.3	Un conjunto es la reunión en un todo de objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que se llaman elementos del mismo. O también puede ser una colección de objetos.

En correspondencia con la Unidad de Análisis I, construimos la:

3.1.1 Configuración epistémica 1

Tabla 2. Elementos primarios.

Situaciones-problemas	Ejemplos de conjuntos en 1.2	
Elementos lingüísticos	Términos	Conjunto, elementos o miembros, colección, objetos, conjuntos básicos, Campos numéricos, conjunto vacio, Conjunto de los números naturales, Conjunto de números enteros, Conjunto de los números racionales, Conjunto de los números reales, Conjunto de los números complejos, reunión en un todo, objetos bien definidos, colección
	Notaciones	$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{Y}, \mathrm{X}, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \emptyset, \mathrm{N}, \mathrm{Z}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{C}$.
	Gráficos	No se encuentran explícitamente

Conceptos	Conjunto, elementos o miembros, colección de objetos, conjunto vacío, números naturales, números enteros, números racionales, números racionales, números reales, números complejos.
Procedimientos	No se encuentran explícitamente
Proposiciones	No aparecen explícitamente
Argumentos	No aparecen explícitamente

Una vez distinguidos los elementos describiremos el papel que juegan éstos y las relaciones que guardan.

En esta unidad de análisis se distingue como **situación problema** la presentación de los ejemplos exhibidos en 1.2, debido a que éstos ilustran la definición y tienen como función concretar el concepto de conjunto.

Se utilizan **elementos lingüísticos de tipo discursivo** para los términos y notaciones que han de utilizarse para introducir y caracterizar algunos **conceptos**. Dentro de éstos, distinguimos dos tipos: emergentes e intervinientes. Como *emergentes*: conjunto (también llamado colección de objetos), elementos (miembros, objetos bien definidos y diferenciables entre sí), además, un concepto que caracteriza al conjunto vacio. Como *intervinientes*: números naturales, enteros, racionales, reales, complejos, reunión en un todo, objetos bien definidos, colección. Se ha considerado a estos conceptos como intervinientes ya que se hace uso de ellos para caracterizar los conceptos conjunto y elementos.

Como parte de los **elementos lingüísticos** se utilizan **símbolos** que representan a los conceptos descritos, los conjuntos se representan con letras mayúsculas $A, B, Y, X,$ mientras que los elementos con letras minúsculas. Además, se enlistan y denominan conjuntos básicos de la matemática los cuales son representados con los símbolos $\emptyset, N, Z, Q, R, C$ para denotar correspondientemente el conjunto vacío, los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales, y complejos respectivamente.

No se distinguen de forma explícita **procedimientos**, **proposiciones** o **argumentos**, se distingue como situación problema los ejemplos, y se aprecia que estos son “estáticos” es decir no incluyen procedimientos, proposiciones, argumentos, algoritmos, etc.

A continuación una representación diagramática de la configuración epistémica asociada a la Unidad de Análisis 1.

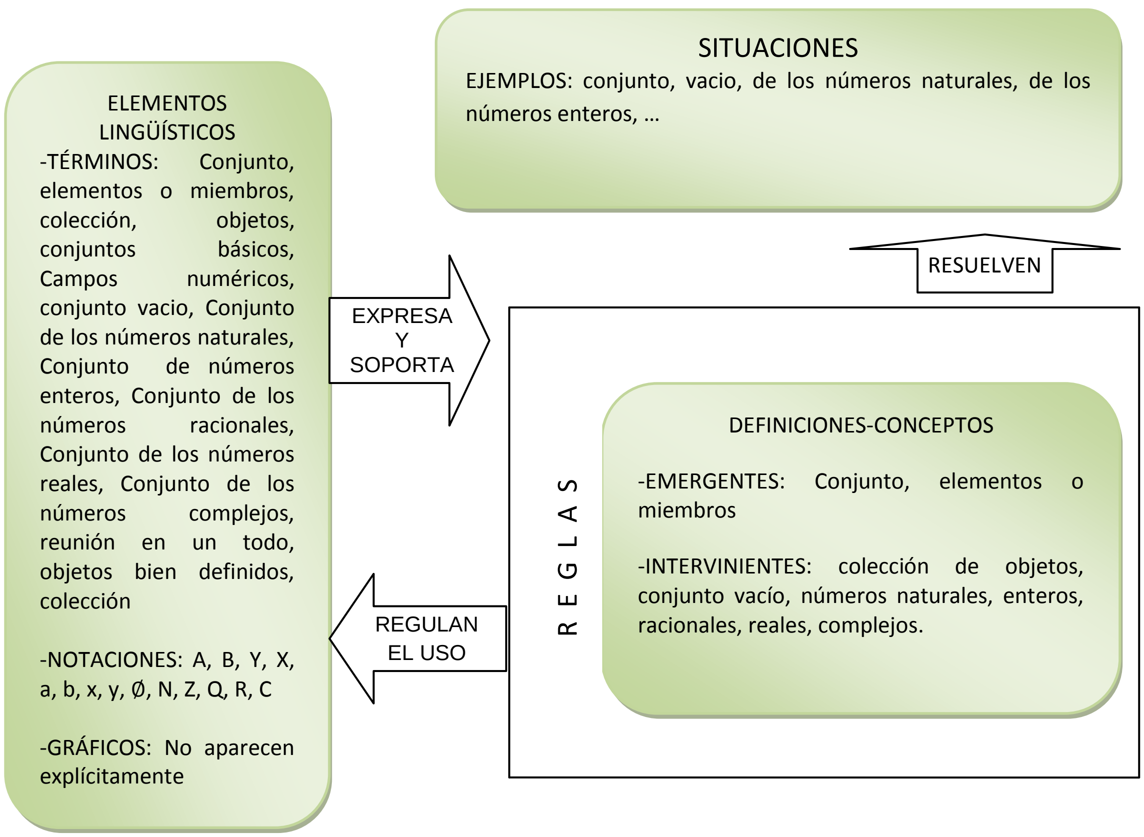


Figura 1. Configuración epistémica 1

Se puede observar que se privilegia el objeto definición-concepto expresado en un lenguaje discursivo y simbólico, además, el uso de conceptos intervinientes al momento de ejemplificar los conceptos emergentes en esta unidad de análisis.

3.2 Unidad de análisis 2

2.1 Si a es un elemento del conjunto A se denota con la relación de pertenencia $a \in A$. En caso contrario, si “a no es un elemento de” A se denota $a \notin A$.

2.2 Algunos ejemplos de pertenencia son

CONJUNTOS	ELEMENTOS	PERTENENCIA
D= UN DIA DE LA SEMANA	$m =$ Mayo	$\notin D$
M=UN MES DEL AÑO	$l =$ lunes	$m \in M$
Z= NUMERO ENTERO	$n = 2$	$n \in Z$

2.3 Entonces se puede decir que el símbolo $\in$ se utiliza para comparar o relacionar un conjunto respecto de un elemento y nos permite relacionar la pertenencia o no, de un elemento en un conjunto. No es correcto utilizar este símbolo para comparar dos conjuntos si no que exclusivamente para relacionar elementos respecto de un conjunto. Ejemplo:

2.4

CONJUNTOS	ELEMENTOS	PERTENENCIA	
D= UN DIA DE LA SEMANA	$m =$ Mayo	$l \notin D$	
M=UN MES DEL AÑO	$l =$ lunes	$m \in M$	
Z= NUMERO ENTERO	$n = 2$	$n \in Z$	

3.2.1 Configuración epistémica 2

Tabla 4. Elementos primarios

Situaciones	Ejemplos de pertenencia que aparecen en tabla en 2.2 y 2.4.	
Elementos lingüísticos	Términos	Elemento, conjunto, relación de pertenencia, *a no es un elemento de, pertenencia.*

<table>
<tr><td></td><td><table><tr><td>Notaciones</td><td>$a, A, a \in A$, “a no es un elemento de”, $a \notin A, D, M, Z, m, l, n, \in D, m \in M, n \in Z, \in, I \notin D$</td></tr><tr><td>Gráficos</td><td>Tabla en 2.2, tabla en 2.4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Conceptos-definición</td><td>Pertenencia, no pertenencia, elemento, conjunto, relación de pertenencia.</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td>No aparecen explícitamente</td></tr>
<tr><td>Proposiciones</td><td>No aparecen explícitamente</td></tr>
<tr><td>Argumentos (Tipo explicativo: pretende facilitar la comprensión)</td><td>El símbolo $\in$ se utiliza para comparar o relacionar un conjunto respecto de un elemento y nos permite relacionar la pertenencia o no, de un elemento en un conjunto. No es correcto utilizar este símbolo para comparar dos conjuntos si no que exclusivamente para relacionar elementos respecto de un conjunto.</td></tr>
</table>

Se distingue como **situación problema** la presentación de los ejemplos de la tabla que aparece en 2.2 y 2.4, éstos tienen como objetivo concretar el concepto de pertenencia.

Se distinguen como **conceptos** *emergentes*: pertenencia, no pertenencia. Éstos dos obedecen al principio del tercero excluido, debido a esto, pertenencia y no pertenencia tienen una estrecha relación. Como *Intervinientes* se utilizan: conjunto, y elemento.

Los **elementos lingüísticos** se distinguen en los términos utilizados tanto en su forma discursiva, como en el uso de símbolos $\in, \notin$ para pertenencia o no pertenencia respectivamente, apareciendo además una caracterización del concepto. Junto con ellos, se utiliza una tabla que ilustra la relación que guardan los conceptos involucrados y sus símbolos asociados en ejemplos. Sin embargo, la tabla presentada tiene ciertos errores al momento de relacionar las columnas al menos en las dos primeras filas. Es importante señalar que la tabla es exhibida en dos ocasiones para situaciones distintas, es decir, se utiliza para representar los ejemplos de pertenencia en 2.2 y se utiliza como representación, a través de ejemplos, de la restricción del uso del símbolo de pertenencia $(\in, \notin)$ para relacionar o comparar conjuntos.

No se distinguen **procedimientos o proposiciones**, sin embargo, con el fin de facilitar la comprensión y el uso de los símbolos $\in, \notin$, se utiliza un **argumento** tipo explicativo, que restringe el uso del símbolo $(\in)$ entre conjuntos reservándolo para elementos respecto de un conjunto.

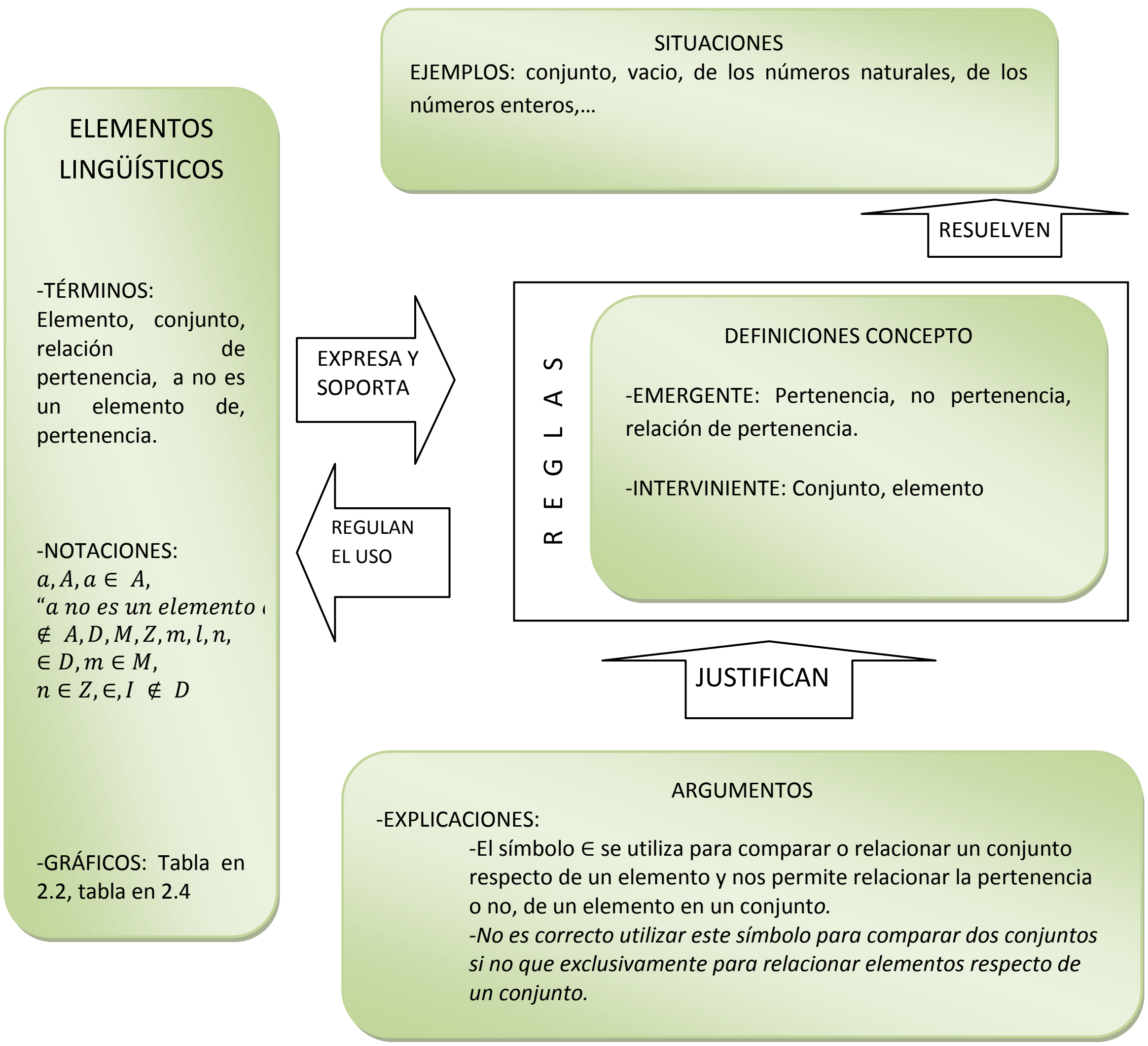


Figura 2. Configuración epistémica 2

3.3 Unidad de análisis 3

Tabla 5. Unidad de Análisis 3

3.1	Formas de definir un conjunto 1. Enumerando todos los elementos del conjunto (sólo se puede enumerar si es finito) 2. Por medio de una propiedad característica de los elementos que forman a ese conjunto, esta propiedad puede expresarse de forma ordinaria o utilizando alguna simbología lógica. 3. Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas latinas, los elementos se colocan entre llaves, por ejemplo:
3.2	$\mathrm{A} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\mathrm{B} = \{\mathrm{a}, \mathrm{v}, \mathrm{e}, \mathrm{s}\}$ $\mathrm{C} = \{\text{Las soluciones de la ecuación } ax^2 + bx + c = 0\}$ $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = \{\text{los números naturales}\}$ $L = \{ x = \frac{n(n+1)}{2} \; donde \; n = 1, 2, 3,4, \ldots\}$
3.3	Sin embargo, existen formas más formales para describir el contenido de un conjunto como son los siguientes: Formas de determinar un conjunto Para determinar la forma de describir cómo han de agruparse los conjuntos comúnmente se utilizan dos formas: La Forma Tabular o extensiva y la forma Constructiva o por extensión
3.4	Forma tabular o extensiva Es cuando el conjunto es determinado por extensión (o enumeración), cuando se da una lista que comprende a todos los elementos del conjunto y sólo a esos elementos. Ejemplos: $A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $C = \{c, o, n, j, u, t, s\}$ $D = \{A, B, E, C, D, R, I, O\}$
3.5	Forma Constructiva o por comprensión Es cuando un conjunto es determinado por comprensión, o sea cuando se

	da una propiedad que la cumpla para todos los elementos del conjunto. Ejemplos: $A = \{ x \, l \, x \text{ es número entero}\}$ $B = \{ x \, I \, x \text{ es un número par menor que } 10\}$ $C = \{ x \, I \, x \text{ es una letra de la palabra conjuntos}\}$ $D = \{x \, I \, x \text{ es una mujer de nacionalidad mexicana}\}$ $E = \{x \, I \, x \text{ es color básico}\}$
3.6	A continuación se muestra un cuadro comparativo de cómo describir dos conjuntos mediante la forma tabular o extensión y la forma constructiva o por comprensión. CUADRO COMPARATIVO

POR EXTENSIÓN	POR COMPRENSIÓN
$A = \{a, e, i, o, u\}$	$A = \{x/x \text{ es una vocal}\}$
$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$	$B = \{x/x \text{ es un numero par menor que } 10\}$
$C = \{c, o, n, j, u, n, t, s\}$	$C = \{x/x \text{ son las letras de la palabra conjuntos}\}$
$D = \{mercurio\}$	$D = \{x/x \text{ es un metal liquido}\}$

3.3.1 Configuración epistémica 3

Tabla 6. Elementos primarios

Situaciones	Ejemplos en 3.2 de formas de definir un conjunto (enumerando si es finito, con propiedad característica), ejemplos de conjuntos expresados extensivamente en 3.4, ejemplos de un conjunto expresado por comprensión en 3.5, cuadro comparativo en 3.6	
Elementos lingüísticos	Términos	Conjunto, enumerando, elementos, finito, propiedad característica, forma ordinaria, simbología lógica, llaves, formas más formales, formas de determinar un conjunto, forma de describir cómo han de agruparse los conjuntos, forma tabular o extensiva, forma constructiva o

		por extensión, enumeración, lista, comprensión, propiedad, forma tabular o extensión, forma constructiva o por comprensión.
	Notaciones	$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, B = \{a, v, e, s\}$, $C = \{Las\ soluciones\ de\ la\ ecuación\ ax^2 + bx + c = 0\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \{los\ números\ naturales\}$, $L = \left\{x = \frac{n(n+1)}{2}\ donde\ n = 1, 2, 3,4, \dots\right\}$, $A = \{a, e, i, o, u\}, B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{c, o, n, j, u, t, s\}, D = \{A, B, E, C, D, R, I, O\}$, $A = \{\ x\ l\ x\ es\ número\ entero\}$, $B = \{\ x\ I\ x\ es\ un\ número\ par\ menor\ que\ 10\}$, $C = \{\ x\ I\ x\ es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ conjuntos\}$, $D = \{x\ I\ x\ es\ una\ mujer\ de\ nacionalidad\ mexicana\}$, $E = \{x\ I\ x\ es\ color\ básico\}, D = \{mercurio\}$, $D = \{x/x\ es\ un\ metal\ liquido\}$
	Gráficos	Cuadro comparativo en 3.6
Conceptos-definición	Formas de definir un conjunto, forma tabular o extensiva – forma tabular o extensión – por extensión, forma constructiva o por extensión – forma constructiva o por comprensión, conjunto, enumerar, elementos, finito, propiedad característica.	
Proposiciones	“(Los elementos de un conjunto) solo se pueden enumerar si es finito”, “$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \{los\ números\ naturales\}$”	
Procedimientos	No se encuentran explícitamente	
Argumentos	No se encuentran explícitamente	

Se distingue como **situación** la presentación de los ejemplos utilizados en la unidad de análisis que pretenden concretar la definición del texto: formas de escribir un conjunto.

Se definen los **conceptos** emergentes: formas de definir un conjunto, forma tabular o extensiva, forma constructiva o por comprensión. Como intervinientes distinguimos, conjunto, enumerar, elementos, finito, propiedad característica.

En particular en esta unidad de análisis los **elementos lingüísticos** juegan un papel muy importante, ya que el alumno tendrá que conectar el lenguaje discursivo en lengua materna con el lenguaje simbólico para apropiarse y entender el lenguaje con el que se identifica a los conjuntos.

Consideramos pertinente la siguiente distinción: existen momentos dentro de esta unidad de análisis en los cuales a la forma tabular o extensiva también se le nombra forma tabular o extensión, además, a la forma constructiva o por comprensión se le llama forma constructiva o por extensión.

Llama la atención la declaración en lenguaje discursivo que afirma que los elementos se colocan entre llaves; sin embargo, en los ejemplos de los conjuntos denotados C, N, L, que aparecen en la sección la sección 3.2, se distingue que dentro de las llaves se han colocado palabras que ayudan a distinguir a los elementos del conjunto.

En el mismo apartado 3.2 notamos que se utilizan puntos suspensivos después de una coma, siendo que en el texto no se ha mencionado hasta el momento el papel que ellos juegan en los conjuntos expresados simbólicamente. Asimismo, se enumera un conjunto infinito, (los naturales), contradiciendo lo que había aparecido en 3.1 respecto al número 1.

Otro detalle importante que involucra los elementos lingüísticos es el siguiente: se utiliza la igualdad para relacionar dos conjuntos solo en lenguaje simbólico, sin lenguaje discursivo, es decir, explícitamente no se da una interpretación de igualdad de conjuntos de forma discursiva.

En 3.3 los elementos lingüísticos y la redacción sugieren que “formas para describir el contenido de un conjunto”, “formas de determinar un conjunto” y, “forma de describir cómo han de agruparse los conjuntos”, son similares.

En 3.5 se hace uso de un elemento lingüístico”$x|x$” sin definirlo y sin explicitar cómo se usa o cuál es su significado.

A pesar de no distinguir de forma explícita **procedimientos** y **argumentos**, podemos identificar dos **proposiciones** (implícitamente): “los elementos de un conjunto se pueden enumerar solo si el conjunto es finito” (en 3.1), y “la igualdad de dos conjuntos” (en 3.2 el conjunto N).

A continuación un diagrama que resume la configuración epistémica asociada.

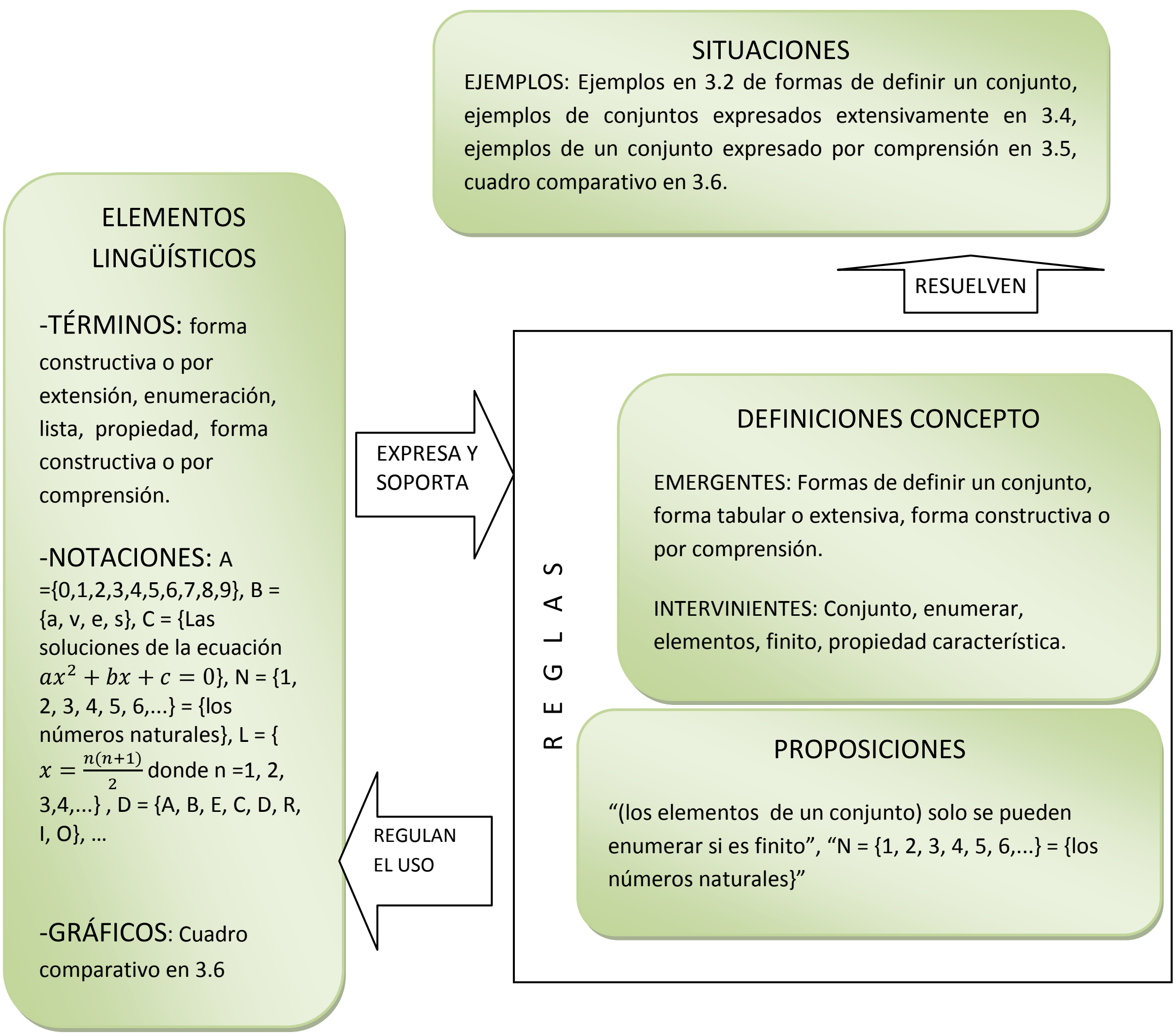


Figura 3. Configuración epistémica 3

Se utiliza el lenguaje discursivo y simbólico para introducir la definición de los conceptos. Se distinguen dos proposiciones de forma implícita, sin embargo no hay procedimientos y argumentos que sustenten a éstas o a los ejemplos.

3.4 Unidad de análisis 4

Tabla 7. Unidad de análisis 4

<table>
<tr><td>4.1</td><td>Conjuntos finitos e infinitos
Un conjunto se dice finito si existe una biyección de los elementos del conjunto con los números naturales, en caso contrario se dice que el conjunto se define como infinito.
Se dice que existe una asociación es biyectiva de A a B si existe una función de A en B que asocia uno y solo uno de los elementos. Ejemplos:</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td><table>
<tr><td>$A = \{x/x\ es\ la\ solución\ de\ x^2 + 2x + 1 = 0\}$</td><td>Finito</td></tr>
<tr><td>$B = \{x/x\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$</td><td>Infinito</td></tr>
<tr><td>$C = \{x/x\ es\ un\ número\ par\}$</td><td>Infinito</td></tr>
<tr><td>$W = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$</td><td>Finito</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Ejercicio 1
Instrucciones: determinar cuáles de los siguientes conjuntos son finitos e infinitos
a) $Los\ meses\ del\ año$
b) $\{1,2,3, \dots \dots .. 99,100\}$
c) $Los\ habitantes\ de\ la\ tierra$
d) $\{X/X\ es\ un\ número\ par\}$
e) $\{1, 2,3 \dots \dots \dots\}$</td></tr>
</table>

3.4.1 Configuración epistémica 4

Tabla 8. Elementos primarios

Situaciones	Ejemplos de conjuntos finitos e infinitos en 4.2, Ejercicio 1 en 4.3	
Elementos lingüísticos	Términos	Conjuntos finitos, conjuntos infinito, finito, biyección, elementos del conjunto, números naturales, asociación, función, solución
	Notaciones	$A, B, A = \left\{\frac{x}{x} es\ la\ solución\ de\ x^2 + 2x + 1 = 0\right\}$, $B = \left\{\frac{x}{x} 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\right\}$, $C = \left\{\frac{x}{x} es\ un\ número\ par\right\}$, $W = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$, $\{1,2,3, \ldots \ldots . . 99,100\}$, $\left\{\frac{X}{X} es\ un\ número\ par\right\}$, $\{1, 2,3 \ldots \ldots \ldots\}$
	Gráficos	No aparecen explícitamente
Conceptos-definición	**Conjunto finito e infinito**, biyección, conjunto, números naturales, función, elementos, forma constructiva o por construcción de un conjunto.	
Procedimientos	No aparecen explícitamente	
Proposiciones	No aparecen explícitamente	
Argumentos	No aparecen explícitamente	

En esta unidad de análisis al igual que en las anteriores como parte de la **situación** clasificamos la presentación de los ejemplos expuestos, que tienen como objetivo darle forma a los conceptos propuestos. Además en esta ocasión se introduce en el texto un apartado de ejercicios, en el cual, el Ejercicio 1, que solicita al alumno que haga uso del concepto referente a esta unidad de análisis, (determinar si un conjunto es finito o infinito) es un ejemplo de situación.

Se distingue el uso de **elementos lingüísticos** para describir y caracterizar verbalmente con notaciones y términos los **conceptos** emergentes, conjunto finito e infinito. En el uso de términos llama la atención el uso de un concepto interviniente que no corresponde a este texto, nos referimos al de biyección. En los ejercicios, incisos a y c no se cumplen con las notaciones antes establecidos para la notación de conjuntos.

A continuación un diagrama que sintetiza la configuración epistémica.

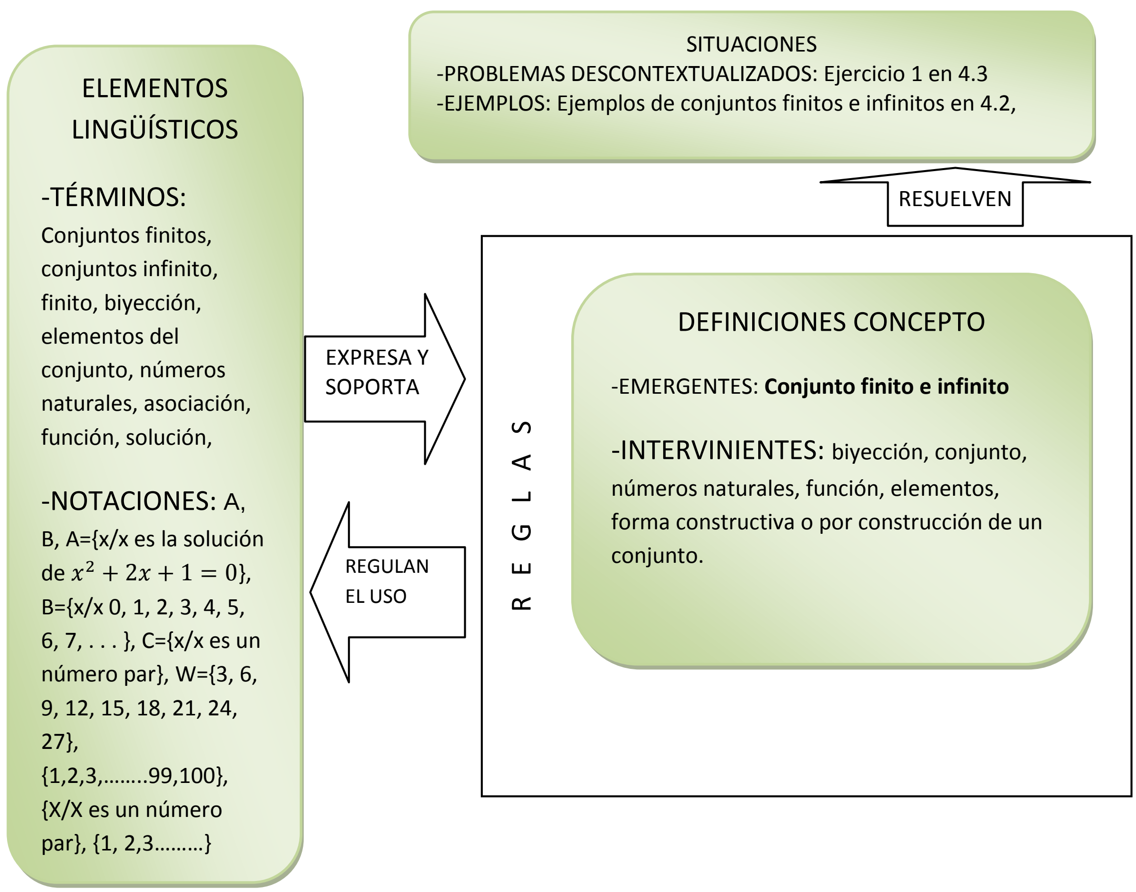


Figura 4. Configuración epistémica 4

3.5 Unidad de análisis 5

Tabla 9. Unidad de análisis

5.1	**Igualdad de conjuntos** Se dice que 2 conjuntos A y B son iguales cuando ambos tienen los mismos elementos; es decir, si cada elemento de A pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. La igualdad se denota $A = B$.
5.2	Dados dos conjuntos A y B (que pueden ser iguales o distintos), podemos preguntarnos sobre las formas cómo podemos "relacionar" los elementos de A con los de B conjunto. Por ejemplo, los elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ se pueden relacionar o hacer corresponder mediante una correspondencia f con los del conjunto $B = \{x, y, z\}$ de modo que a todo elemento de A le corresponda uno, ninguno o varios elementos de B. Esto se puede expresar también así: $f(1) = \{x, z\}$, $f(2) = \{\}$, $f(3) = \{z\}$. También se puede decir que $f = \{(1, x), (1, z), (3, z)\}$. Por tanto, una relación o correspondencia entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. En general, una relación o correspondencia entre un conjunto A y otro B es cualquier subconjunto de $A \times B$. Nótese que este incluye el caso del conjunto vacío. NO es camisa de fuerza que TODO elemento de A esté relacionado con alguno de B para decir que ese subconjunto de $A \times B$ es una relación o correspondencia de A en B.
5.3	Cuando una correspondencia es tal que a CADA elemento del primer conjunto le corresponde UNO Y SÓLO UNO del segundo conjunto, entonces se llama aplicación o función (este último nombre es tal vez el más común en Latinoamérica, en las traducciones mexicanas prefieren llamarlas aplicaciones o mapeos).

5.4	Ejemplo: El conjunto $\{\ a, b, c\ \}$ también puede escribirse:$\{\ a, c, b\ \}$,$\{\ b, a, c\ \}$,$\{\ b, c, a\}$,$\{\ c, a, b\ \}$,$\{\ c, b, a\ \}$. En teoría de conjuntos se acostumbra no repetir los elementos, por ejemplo: El conjunto $\{b, b, b, d, d\}$ simplemente será $\{b, d\}$.
5.5	**Ejercicio 2** 1. El conjunto $A =\ \{X/X\ 3X = 6\}$. ¿Es $A = 2$? 2. ¿Cuál de los siguientes conjuntos son iguales? $\{s, t, r, s\}$,$\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$

3.5.1 Configuración epistémica 5

Tabla 10. Elementos primarios

Situaciones	Ejemplo en 5.2, ejemplos en 5.4, ejercicio en 5.5	
Elementos lingüísticos	Términos	Igualdad de conjuntos, conjuntos, elementos; correspondencia entre conjuntos; subconjunto; producto cartesiano; conjunto vacío; relación de correspondencia; aplicación o función; teoría de conjuntos.
	Notaciones	$f(1)\ =\ \{x, z\}$, $f(2)\ =\ \{\}$, $f(3)\ =\ \{z\}$; $f\ =\ \{(1, x), (1, z), (3, z)\}$; $A\ \times\ B$; $A =\ \{X/X\ 3X = 6\}$; $A = 2$
	Gráficos	No aparecen explícitamente.
Conceptos-definición	Igualdad de conjuntos; relación o correspondencia entre conjuntos; aplicación o función**,** conjunto; elemento; pertenencia; subconjunto; producto cartesiano; conjunto vacio; teoría de conjuntos.	
Proposiciones	El conjunto $\{a, b, c\}$ también puede escribirse $\{\ a, c, b\ \}$,$\{\ b, a, c\ \}$,$\{\ b, c, a\}$,$\{\ c, a, b\ \}$,$\{\ c, b, a\ \}$;	

	El conjunto {b, b, b, d, d} simplemente será {b, d}.
Procedimientos	No se distinguen explícitamente.
Argumentos	En teoría de conjuntos se acostumbra no repetir los elementos. Nótese que esto incluye el caso del conjunto vacío. NO es camisa de fuerza que TODO elemento de A esté relacionado con alguno de B para decir que ese subconjunto de $A \times B$ es una relación o correspondencia de A en B.

Al igual que en las unidades de análisis anterior, identificamos como **situación** la presentación de los ejemplos que se exhiben en la unidad de análisis, los cuales tienen como papel consolidar a través de ellos el concepto definido. En este mismo tenor, en 5.5 Ejercicio 2, se proponen a los alumnos 2 ejercicios que implican el uso de conceptos emergentes para resolverlos. Los elementos lingüísticos que entran en juego son los términos y las notaciones utilizadas anteriormente en el texto, con novedades referentes a los conceptos a promover, tales como igualdad de conjuntos, correspondencia entre conjuntos, función, etc.

Como concepto emergente se distingue la igualdad entre conjuntos, además la forma en que se puede relacionar o corresponder un conjunto con otro. Para esto se exhibe un ejemplo que se expresa en dos formas distintas dentro del registro algebraico. Además, aparecen dos **argumentos** en un lenguaje discursivo que justifica y ejemplifica, junto con el ejemplo antes mencionado, la definición implícita de que una relación o correspondencia entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano AxB.

La notación utilizada para relacionar dos conjuntos no es consistente en esta unidad de análisis, puesto que en un primer momento al elemento 1 del conjunto A le corresponde el conjunto que tiene por elementos “x”, y “z”, y después como si se estuviese hablando de lo mismo, se presenta el conjunto de pares ordenados; sin embargo ahora al número 1 le corresponden dos elementos del conjunto B.

Se define una relación o correspondencia entre dos conjuntos como un subconjunto del producto cartesiano, siendo estos dos objetos intervinientes pero no promovidos hasta el momento.

Existe una definición explícita del concepto relación o correspondencia, particularizando luego la definición de aplicación o función. A pesar de ello no se distingue la conexión con el concepto igualdad de conjuntos. Además, el texto muestra dos conceptos (mostradas en 5.3 y 5.4 de la Unidad de que son la relación o correspondencia y la aplicación o función con sustento en argumentos que incluyen una idea y notación de subconjunto del producto cartesiano, sin embargo en 5.4 se observan ausentes su notación y su uso.

En 5.5 se deja como ejercicio decidir si el conjunto A (expresado inconsistentemente con las notaciones descritas anteriormente) es igual a 2. Se promueve la idea de que un conjunto es igual a un número, sin embargo no se emplea la notación de las llaves para distinguir a los elementos del conjunto.

Como una especie de **proposición** o propiedad en los ejemplos que mostramos en 5.4, se dice lo siguiente: el conjunto $\{a,b,c\}$ también puede escribirse $\{a,c,b\},\{b,a,c\},\{b,c,a\}$,$\{c,a,b\},\{c,b,a\}$; el conjunto $\{b,b,b,d,d\}$ simplemente será $\{b,d\}$. Estas proposiciones definen una especie de regla. Existe un **argumento** en esta propiedad, “en teoría de conjuntos se acostumbra no repetir los elementos”

A continuación una representación de la configuración epistémica.

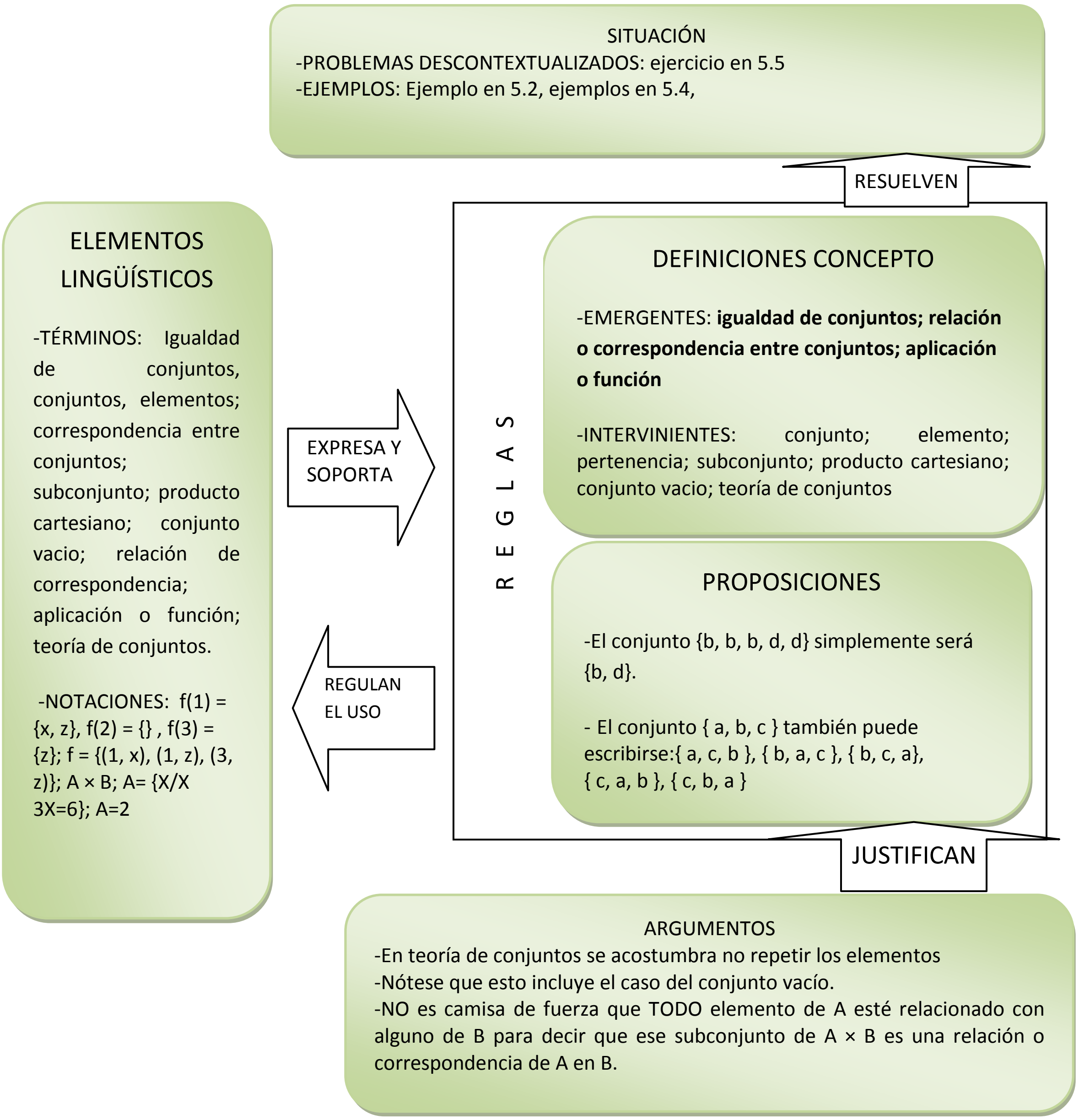


Figura 5. Configuración epistémica 5

3.6 Unidad de análisis 6

Tabla 11. Unidad de análisis

6.1	CONJUNTO VACÍO (∅) El conjunto vacío es el único conjunto que no tiene ningún elemento. La notación que se utiliza para representarlo es ∅.
6.2	EJERCICIO 3 1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son iguales: $\emptyset\,, \{0\}, \{\ \emptyset\ \}$ 2. Determinar si alguno de los siguientes conjuntos es vacío i) $X\ = \{X/X\ \ x^2 = 9\ y\ 2x\ =\ 4\}$ ii) $Z\ =\ \{\ X/X\ X + 8\ =\ 8\ \}$

3.6.1 Configuración epistémica 6

Tabla 12. Elementos primarios

Situaciones	Ejercicio 3 en 6.2	
Elementos lingüísticos	Términos	Conjunto, conjunto vacio, elemento.
	Notaciones	$\emptyset; \{\emptyset\}, \{0\}$
	Gráficos	No aparecen explícitamente
Conceptos-definición	Conjunto vacio, conjunto, elemento, solución a una ecuación cuadrática, solución a una ecuación lineal	
Procedimientos	No aparecen explícitamente	

Proposiciones	El conjunto vacío es único
Argumentos	No aparecen explícitamente

Como **situación** distinguimos los ejercicios en 6.2 que ayudan al alumno a aproximarse al concepto recién definido.

El **concepto** que se promueve es el conjunto vacío, para esto se utiliza de forma discursiva una definición (en 6.1):"el único conjunto que no tiene ningún elemento"; en lenguaje coloquial esta frase significa que el conjunto vacío carece de elementos (como se enuncia en la unidad de análisis), sin embargo en matemáticas significa que el conjunto vacío tiene elementos, y esto conlleva a una contradicción pues no sería único.

Respecto a la notación utilizada para representarlo, $\emptyset$, en 6.2 en el primer ejercicio, se presenta una situación interesante, el conjunto que tiene por elemento al conjunto vacío, aún mas, se le pide comparar una terna de conjuntos para encontrar igualdades.

En el ejercicio 2, en la notación utilizada, después de los símbolos X/X, no existe conexión explicita con los símbolos que le siguen, además en i) la letra "y" no tiene un significado previo promovido.

Podemos clasificar la frase "el conjunto vacío es único" como proposición, sin embargo no hay ejemplificaciones o argumentos que sustenten o validen esta afirmación.

No identificamos de forma explícita situación problema, gráficos, procedimientos, o argumentos.

Finalmente, mostramos el diagrama que corresponde a lo que hicimos en la Unidad de Análisis 6.

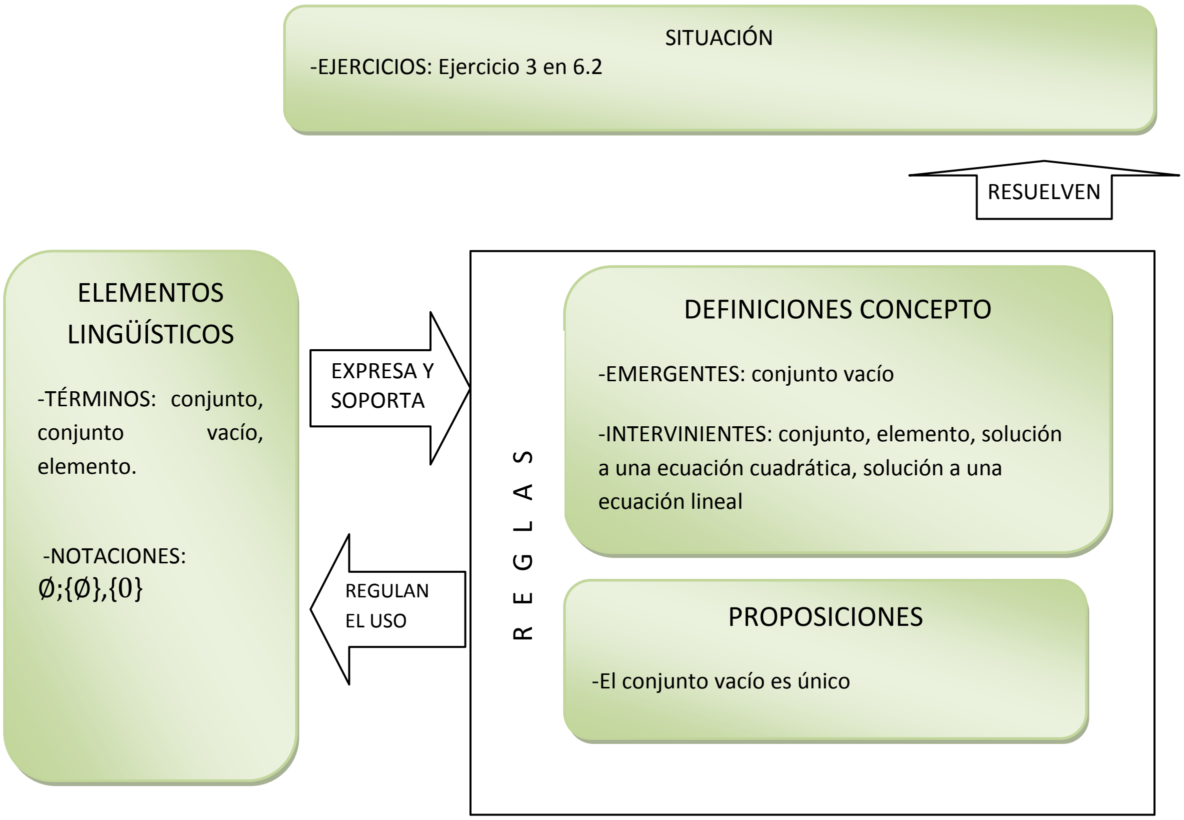


Figura 6. Configuración epistémica 6

3.7 Unidad de análisis 7

Tabla 13. Unidad de análisis

7.0	**4.1.1 Definición de conjunto, subconjunto y conjunto universal**
7.1	**Definición de conjunto** Un conjunto es una colección de elementos, donde todos los elementos Son diferentes entre sí. Si el conjunto A está formado por los elementos $1, 2{,}3$ Escribiremos: $A = \{1, 2, 3\}$. Pondremos $3 \in A$ y lo leeremos pertenece a “A”
7.2	**Definición de subconjunto**

	Se dice que un subconjunto B es un Subconjunto de A si todo elemento de B es elemento de A. También puede decirse que B esta incluido en A. La notación que se utiliza es $B \subseteq A$ o $B \subset A$ Ejemplo 1 $B = \{1, 3,5\}$ es subconjunto de $A = \{1, 2, 3, 4,5\}$, formalmente se definirá así: $B \subseteq A \; si \; \forall \; X$ $X \in A \; y \; X \in B$
7.3	**Conjunto potencia** La familia de todos los subconjuntos de un conjunto N se llama Conjunto Potencia de N. Se le denota como 2^N ó P (s) EJEMPLOS a).- Si $N = \{1, 2\}$ como podemos ver el conjunto tiene dos elementos y el conjunto potencia tendrá $2^N = 4$ elementos y son: $2^N = \left\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\right\}$ b).- Si ahorra el conjunto N consta de tres elementos el, $N = \{1, 2, 3\}$, el conjunto potencia tendrá 8 elementos y son: $$2^N = \left\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\right\}$$ Teorema. Si un conjunto N es finito con "n" elementos, entonces su conjunto potencia 2^N tendrá 2^nelementos. EJERCICIO 4.1. Encontrar el conjunto potencia P (s) del conjunto $S = \{1,2,3\}$
7.4	**Conjunto universal**

	Es el conjunto que contiene a todos los elementos del Universo, se le denota por la letra U. El universo lo forman el conjunto de conjuntos que intervienen. Ejemplos: Sean los conjuntos: $A = \{aves\}$ $B = \{peces\}$ C = {anfibios} $D = \{tigres\}$ Existe otro conjunto que incluye a los conjuntos A, B, C y D, el conjunto de todos los animales $U = \{animales\}$, Que es el conjunto universal de todos los anteriores.
7.5	**Conjuntos disjuntos** Si dos conjuntos A y B no tienen ningún elemento común entonces A y B son disjuntos. Ejemplos de conjuntos disjuntos y no disjuntos: 1.- Si $A = \{x\ I\ x\ es\ par\}$ y $B = \{x\ I\ x\ es\ impar\}$. Entonces A y B son disjuntos pues no tienen ningún elemento en común. 2.- Sea $A = \{x\ I\ x\ es\ una\ vocal\}$ y $B = \{x\ I\ x\ es\ una\ letra\ del\ abecedario\}$ Estos dos conjuntos tienen a las vocales en común por lo tanto no son disjuntos.

3.7.1 Configuración epistémica 7

Tabla 14. Elementos primarios

Situaciones	Ejemplo 1 en 7.2 (subconjunto), ejemplos en 7.3 (conjunto potencia), ejemplo en 7.4 (conjunto universal), ejemplo en 7.5 (conjuntos disjuntos).	
Elementos lingüísticos	Términos	Conjunto, colección, elementos, pertenece,

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td>subconjunto, incluido, familia, conjunto potencia, teorema, finito, conjunto universal, elementos del universo, conjunto de conjuntos, conjuntos disjuntos, no disjuntos,</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td>$A = \{1, 2, 3\}$, $3 \in A$, $B \subseteq A$ o $B \subset A$, $B \subseteq A$ si $\forall X$, $X \in A$ y $X \in B$, 2^N ó P (s), $2^N = 4$,

$2^N = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$, 2^n, U, $U = \{animales\}$</td></tr>
<tr><td>Gráficos</td><td>No aparecen explícitamente</td></tr>
<tr><td>Conceptos-definición</td><td colspan="2">Conjunto, subconjunto, conjunto potencia, conjunto universal, conjuntos disjuntos; elementos, pertenencia, conjunto finito, conjunto de conjuntos.

FORMALES. $B \subseteq A$ si $\forall X, X \in A$ y $X \in B$</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td colspan="2">No aparecen explícitamente</td></tr>
<tr><td>Proposiciones</td><td colspan="2">Teorema. Si un conjunto N es finito con "n" elementos, entonces su conjunto potencia 2^N tendrá 2^nelementos.</td></tr>
<tr><td>Argumentos</td><td colspan="2">Ejemplificaciones: Ejemplos en 7.3, a),b)</td></tr>
</table>

Identificamos como **situaciones**, la presentación de los ejemplos a los que se atribuye la finalidad de clarificar los la definición de los conceptos y distinguimos la búsqueda de que los ejemplos en 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, activen la intervención de los elementos primarios.

En cada caso se nota claramente el uso de **elementos lingüísticos** como términos y notaciones para expresar y ejemplificar los conceptos emergentes. No se utiliza el recurso gráfico.

En 7.3 encontramos una **proposición**-teorema que tiene relación con el conjunto potencia y el número de sus elementos.

Como **argumentos** relacionados con el teorema, ubicamos el ejemplo a) y b) en 7.3, debido a que se ejemplifica en dos ocasiones la técnica a seguir para encontrar el número de elementos del conjunto potencia.

Resulta conveniente para el análisis y los objetivos que nos hemos propuesto resaltar las siguientes inconsistencias en el texto.

En 7.1 se define nuevamente los que es un conjunto, ahí, además de utilizar el término colección de objetos, se utiliza una proposición enunciada en la unidad de análisis 5, “son diferentes entre sí” refiriéndose a los elementos de un conjunto. En la frase “Pondremos $3 \in A$ y lo leeremos pertenece a “A”, se promueve una idea distinta a la promovida en la Unidad de Análisis 2 , sección 2.2, en donde el uso de las comillas distingue una asociación distinta para el símbolo $\in$.

En 7.2 se induce a utilizar indistintamente los símbolos “$\subseteq$”, “$\subset$”, cuando cada uno de ellos se utiliza en situaciones distintas en la teoría de conjuntos. En el ejemplo 1, llama la atención la mención de una definición formal de subconjunto con notación simbólica: $B \subseteq A$ si $\forall X, X \in A$ y $X \in B$. Desde el punto de vista de la matemática o la lógica matemática, esta notación no corresponde con la definición de subconjunto. Se introduce en el texto el símbolo “$\forall$” sin prácticas promovidas asociadas al uso de éste. Se utiliza la letra “y” en esta notación con el sentido amplio que tiene en la teoría de conjuntos y en la lógica matemática, pero no promovido en este texto hasta el momento. Es de cuestionar la introducción de este apartado en este momento del texto y en esta unidad de análisis, es decir nos preguntamos: ¿Cuál es su pertinencia y su seguimiento?

En 7.3 la palabra “familia” es utilizada de manera que pareciera equivalente a un conjunto. En los ejemplos, en momentos distintos, lo que se denota como el conjunto potencia 2^N, es igual a un número y también a un conjunto que tiene por elementos a conjuntos. Se exhibe al símbolo $\emptyset$ como elemento del conjunto potencia. En el ejemplo a), $\{3\}$ no es subconjunto de N, debido a esto la igualdad no es correcta. No se argumenta que el símbolo del conjunto vacío se encuentre presente como un elemento del conjunto potencia. Con los argumentos expuestos uno podría expresar $\{1\} \epsilon$ P(s) lo cual contradice 2.3 de la tabla 3. El ejercicio 4.1 no brinda novedad alguna pues es el mismo conjunto que se exhibe en el ejemplo b), solo se ha cambiado la letra mayúscula.

En 7.4 al definir el conjunto universal se hace referencia a los elementos del Universo y a éste formado por el conjunto de conjuntos que intervienen, pero no se explicita en dónde intervienen. Además, la idea que se promueve al decir conjunto de conjuntos es que el universo será una familia de conjuntos. El ejemplo no es consistente con lo expuesto debido a que el conjunto de los mamíferos interviene en el conjunto de los animales. Se enuncia la definición de conjuntos disjuntos y en los ejemplos se exhibe además la recíproca.

Presentaremos el diagrama que representa la configuración epistémica descrita con anterioridad.

.

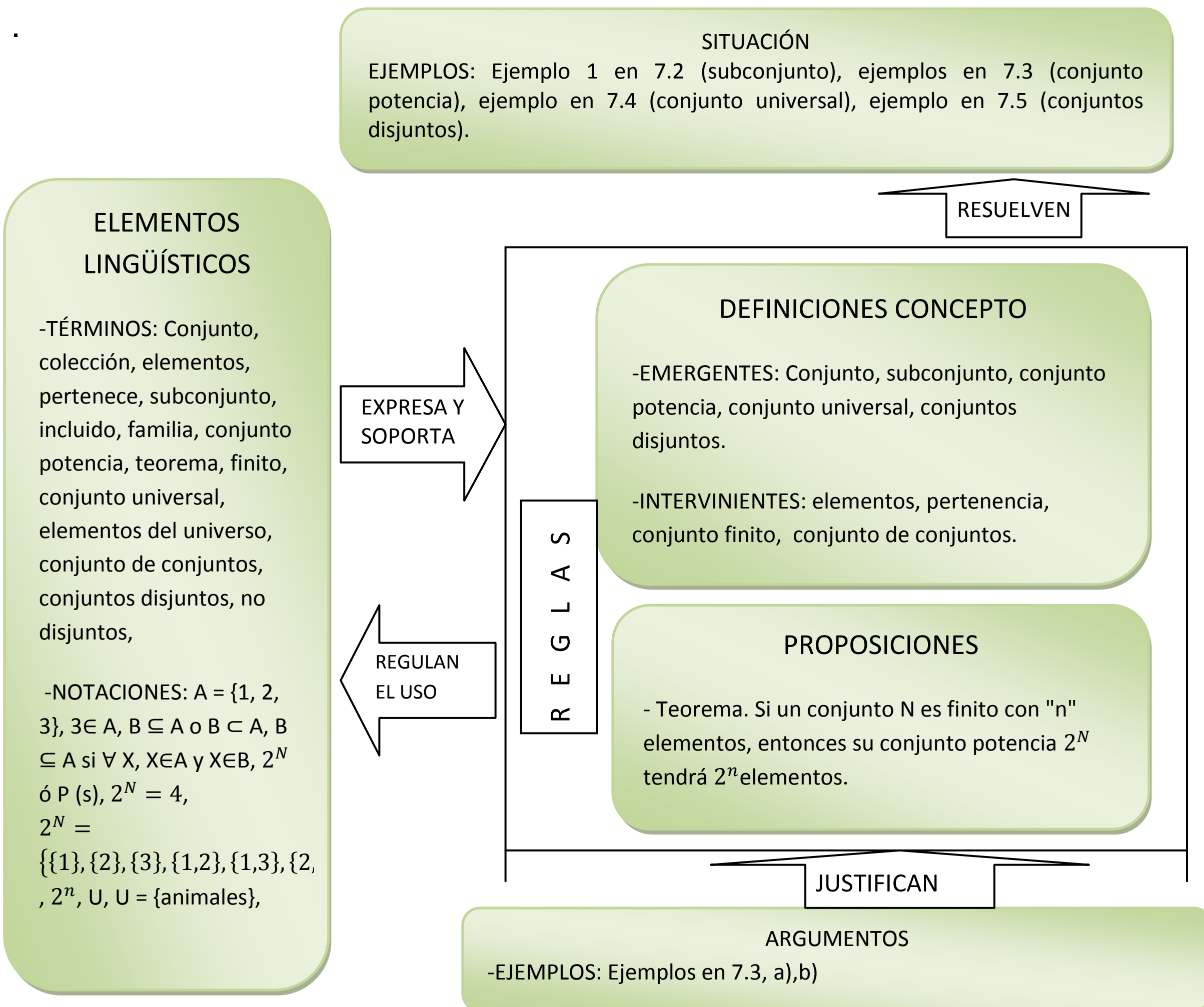


Figura 7. Configuración epistémica 7

3.8 Unidad de análisis 8

Tabla 15. Unidad de análisis 8

8.1	**4.1.2 Unión de dos conjuntos** La unión de dos conjuntos, se denota con el símbolo (U), por ejemplo en la

	unión de los conjuntos A y B es el conjunto $A \in B$, que tiene por elementos todos los elementos de A y todos los de B. Formalmente se expresa de la siguiente forma: $\forall X\ ;\ X \in A \cup B \Leftrightarrow X \in A Ó X \in B$ Ejemplo: Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ entonces: $A\ U\ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ , 10\}$
8.2	**Las propiedades principales de la unión de conjuntos son las tres siguientes:** **PROPIEDAD ASOCIATIVA:** $A \cup (B \cup C)$ **PROPIEDAD CONMUTATIVA**: $(A \cup B\ ) = (B \cup A)$ **PROPIEDAD DE IDEMPOTENCIA:** $\boldsymbol{AU\ A = A}$ ·Si combinamos la unión con la inclusión tendremos: $\boldsymbol{A \subseteq A \cup B\ y}$ $\boldsymbol{B \subseteq A \cup B.}$
8.3	**INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS** La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$, que tiene por elementos aquellos que pertenecen simultáneamente a A y a B; *O que se repiten en ambos conjunto,* formalmente lo indicamos así: $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}.$ Ejemplo Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9,10\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8,10\}$ entonces $A \cap B = \{10\}$ Las propiedades principales de la intersección de conjuntos son las siguientes:

	PROPIEDAD ASOCIATIVA: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ PROPIEDAD CONMUTATIVA: $(A \cap B\ ) = (B \cap A)$ PROPIEDAD DE IDEMPOTENCIA: $A \cap A = A$ Si combinamos la intersección con la inclusión obtendremos: $\boldsymbol{A \cap B \subseteq A}$ ***y*** $\boldsymbol{A \cap B \subseteq B.}$
8.4	Combinando la intersección con la reunión obtendremos las propiedades Distributivas: ***a)*** $\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$ ***b)*** $\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ Y las propiedades de absorción: **a)** $\boldsymbol{A \cap (A \cup B) = A}$ ***b)*** $\boldsymbol{A \cup (A \cap B) = A.}$ Si la intersección de dos conjuntos es vacía es decir no hay ningún elemento en común entonces se dice que A y B son disjuntos; es decir $A \cap B = \emptyset$
8.5	**Complemento relativo o diferencia de conjuntos** El complemento relativo de un conjunto B con respecto a un conjunto A o, simplemente la diferencia de A y B denotada por (\ ) y expresada como $A \setminus B$ es el conjunto de elementos que pertenecen a “A” pero no pertenecen a “B” . Y formalmente lo indicamos así: $\forall X\ , A \setminus B\ A \setminus B \Leftrightarrow X \in A, X \notin B$ Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3,4\}$ y $B = \{3, 4, 5,6\}$, entonces $A \setminus B = \{1,2\}$
8.6	**Complemento absoluto.**

<table>
<tr><td></td><td>El complemento absoluto o simplemente complemento de un conjunto A, expresado por (A’) es el conjunto de elementos que no pertenecen a A. Y formalmente lo indicamos así:

$$\forall X\, A' \Leftrightarrow X \in U , X \notin A$$
Ejemplo: $U = \{1, 2,3, \ldots \ldots\}$ y $A = \{1,2, 3,4, \}$. Entonces $A' = \{5, 6,7, \ldots \ldots\}$</td></tr>
<tr><td>8.7</td><td>EJERCICIO 5

Instrucciones. Determina las siguientes operaciones entre conjuntos

$$U = \{ 1,2, \ldots \ldots .8, 9 \} , A = \{1,2,3,4 \} , B = \{ 2, 4, 6, 8\}\ y\ C = \{ 3, 4, 5, 6\}$$
Determinar:

a) A'

b) $A \cap C$

c)$(A \cap C)'$

d) $A \cup B$

e) $B \setminus C$</td></tr>
<tr><td>8.8</td><td>Los conjuntos bajo las operaciones descritas anteriormente satisfacen varias leyes o identidades que se enumeran en la siguiente tabla.

<table><tr><td>LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS</td></tr><tr><td>Leyes de idempotencia

1. AUA $\qquad\qquad\qquad$ $A \cap A$</td></tr><tr><td>Leyes asociativas</td></tr></table></td></tr>
</table>

	2. $(A \: U \: B) U \: C \; = \; A \: U \: (B \: U \: C)$ $\quad$ $(A \cap B) \; \cap \; C \; = \; A \; \cap \; (B \; \cap \; C)$ Leyes Conmutativas 3. $A \: U \: B \; = \; B \: U \: A$ $\quad$ $A \cap B \; = \; B \; \cap \; A$ Leyes distributivas 4. $A \: U \: (B \; \cap C) = (AUB) \cap (A \: U \: C)$ $\quad$ $A \cap (B \: U \: C) \; = (A \; \cap \; B) U \: (A \cap C)$ Leyes de Identidad 5. $A \: U \: \Phi \; = \; A$ $\quad$ $A \; \cap \; \emptyset \; = \emptyset$ $A \: U \: U = \; U$ $\quad$ $A \; \cap \; U = \; A$ Leyes de Complemento 6. $A \: U \: A' \; = \; U$ $\quad$ $A \; \cap \; A' \; = \; \emptyset$ $(A^c)^c = A$ $\quad$ $U^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = U$ Leyes de De Morgan 7 $(A \: \mathrm{U} \: B \:)^c = A^c \cap B^c$ $\quad$ $(A \cap B)^c = A^c U B^c$ Tabla 4.1

3.8.1 Configuración epistémica 8

Elementos primarios:

Situaciones	Problemas descontextualizados: ejemplo en 8.1, ejemplo en 8.3, ejemplo en 8.5, ejemplo en 8.6 Ejercicios: ejercicio 5.
Elementos lingüísticos	Términos: Unión, conjuntos, elementos, propiedad

		asociativa, propiedad conmutativa, propiedad de idempotencia, inclusión, intersección, reunión, propiedades de absorción, disjuntos, complemento relativo o diferencia de conjuntos, complemento absoluto, complemento de un conjunto, leyes de algebra de conjuntos, leyes de idempotencia, leyes asociativas, leyes conmutativas, leyes distributivas, leyes de identidad, leyes de complemento, leyes de De Morgan.
	Notaciones	U, A,B, $A \in B$,$\forall X$;$X \in A \cup B \Leftrightarrow X \in A$Ó$X \in B$, $A \cup (B \cup C)$, $(A \cup B) = (B \cup A)$, $\boldsymbol{AUA = A}$**,** $\boldsymbol{A \subseteq A \cup B}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B \subseteq A \cup B}$**,** $A \cap B$, $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A \cap B} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{x} \in B$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $(A \cap B) = (B \cap A)$, $A \cap A = A$, $\boldsymbol{A \cap B \subseteq A}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{A \cap B \subseteq B}$**,** $\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$**,** $\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$**,**$\boldsymbol{A \cap (A \cup B) = A}$ $\boldsymbol{A \cup (A \cap B) = A}$**,** $A \cap B = \emptyset$, (\), $A \backslash B$, $\forall X$,$A \backslash B$ $A \backslash B \Leftrightarrow X \in A$,$X \notin B$, ($A$’), $\forall X A' \Leftrightarrow X \in U$, $X \notin A$, A', $A \cap C$, $(A \cap C)'$, $A \cup B$, $B \backslash C$, tabla 4.1
	Gráfico	No aparecen explícitamente.
Conceptos-definición	Unión de dos conjuntos, propiedades principales de la unión de conjuntos, intersección de conjuntos, propiedades principales de la intersección de conjuntos, propiedades distributivas, propiedades de absorción, complemento relativo o diferencia de conjuntos, complemento absoluto, leyes de álgebra de conjuntos (idempotencia, asociativas, conmutativas, etc.). Conjunto, elementos, inclusión (subconjunto), pertenencia,	

	conjunto vacío, conjuntos disjuntos, igualdad de conjuntos.
Procedimientos	No aparecen explicitamente
Proposiciones	Propiedades principales de la unión de conjuntos (asociativa, conmutativa, idempotencia), propiedades principales de la intersección (asociativa, conmutativa, idempotencia), propiedades distributivas, propiedades de absorción, leyes de álgebra de conjuntos (idempotencia, asociativas, conmutativas, distributivas, de identidad, de complemento, de De Morgan).
Argumentos	

Identificamos las interrelaciones que guardan los elementos primarios de la siguiente manera:

La unidad de análisis presenta un esquema de definición, ejemplos y ejercicios, privilegiando los dos primeros y activando el empleo de los conceptos a través de los ejercicios. Identificamos la presentación de los ejemplos resueltos y los ejercicios como **situación** (problemas descontextualizados).

Los **elementos lingüísticos** que se identifican son los términos utilizados y los símbolos referentes a éstos, además de lo discursivo y las expresiones llamadas formales que asociamos con el lenguaje de la lógica matemática.

Como **conceptos** identificamos como emergentes a: unión, intersección de conjuntos y el complemento relativo y absoluto de un conjunto, además de las leyes del álgebra de conjuntos. Como intervinientes: conjunto, elementos, inclusión (subconjunto), pertenencia, conjunto vacío, conjuntos disjuntos, igualdad de conjuntos.

En 8.1 se utiliza el símbolo "$\in$ (de pertenencia) ", en lugar del símbolo "U (de unión)". Se declara la expresión formal de la unión de dos conjuntos utilizando símbolos "nuevos" en el texto con una sintaxis propia de la lógica matemática:

$\forall X\ ; X \in A \cup B \Leftrightarrow X \in A \acute{O} X \in B$. Esta situación se repite en 8.3, 8.5, y 8.6. En 8.2 la propiedad asociativa se muestra incompleta al faltar la igualdad del conjunto citado.

Se utiliza la palabra inclusión para referirse a un subconjunto (definido en 7.2).

En 8.4 se utiliza la palabra reunión para referirse a la unión.

En 8.6 el lenguaje discursivo no contempla el uso de ideas y símbolos utilizados en el lenguaje algebraico, pues en la indicación formal aparece el símbolo que representa al conjunto universal.

En 8.7 (ejercicio 5 inciso c), se requiere utilizar dos conceptos para resolver la intersección y el complemento. No existe un ejemplo previo que sea similar a este tipo de ejercicio.

En 8.8 se hace alusión a “las operaciones descritas anteriormente”, sin embargo no se dice de forma explícita cuáles son esas operaciones, pues pareciera que unión, intersección complemento relativo, complemento absoluto, son operaciones entre conjuntos, lo cual en el caso del complemento no es verdad.

Las leyes de idempotencia escritas en la tabla 4.1 del texto son incompletas, pues falta el signo de igualdad.

Vamos a presentar a continuación el diagrama que sintetiza lo que se ha explicado en la configuración epistémica 8.

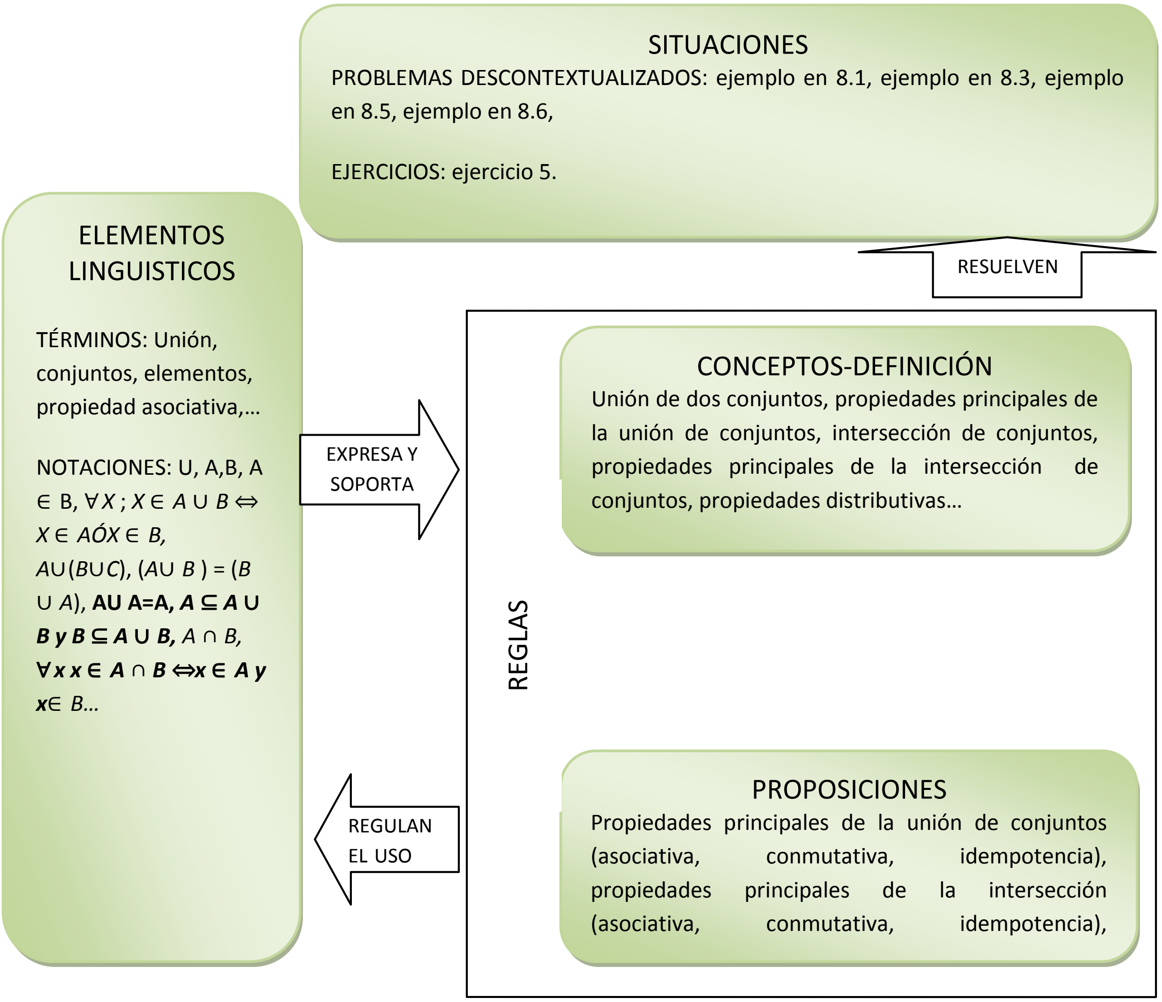


Figura 8. Configuración epistémica 8

3.9 Unidad de análisis 9

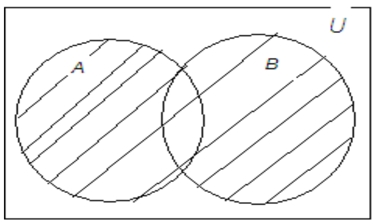
Tabla 17. Unidad de análisis 9

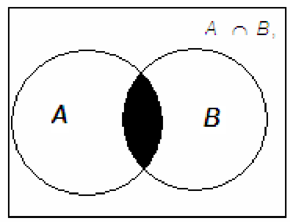
9.1	Diagramas de Venn Son ilustraciones usadas en la rama de la matemática conocida como teoría de conjuntos. Estos diagramas se usan para mostrar gráficamente la relación matemática o lógica entre diferentes grupos de cosas (conjuntos), representando cada conjunto mediante un óvalo o círculo. La forma en que esos círculos se sobreponen entre sí muestra todas las

posibles relaciones lógicas entre los conjuntos que representan. Por ejemplo, cuando los círculos se superponen, indican la existencia de subconjuntos con algunas características comunes.

9.2 Operaciones entre conjuntos

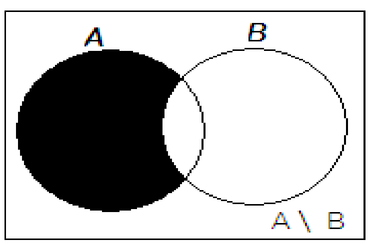
La parte sombreada que se muestra en la gráfica a continuación representa las distintas operaciones entre conjuntos

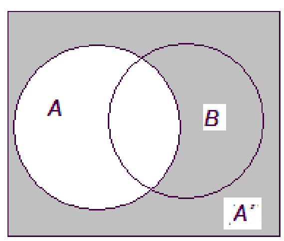




AUB

A) UNIÓN B) INTERSECCIÓN





C)DIFERENCIA D)COMPLEMENTO

9.3 EJEMPLOS 1:

1.- Dados los siguientes conjuntos: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{-1, -2, 0, 3\}$ construye los diagramas de Venn–Euler de:

a) $A \cap B$,

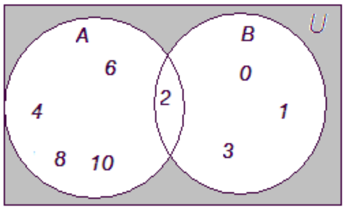
b) $A \cap C$

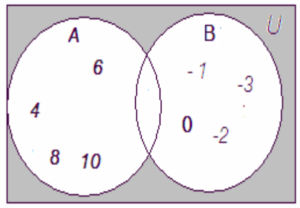
c) $B \cap C$

d) $A \backslash B$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

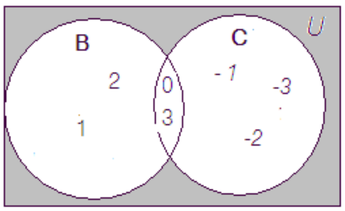
e) $A\setminus C$

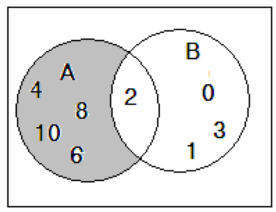




$A \cap B = \{2\}$

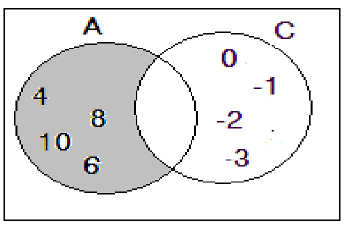
b) $A \cap B = \{\ \}$





$B \cap C = \{0,3\}$

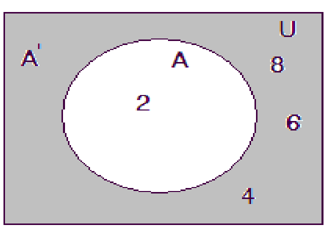
d)$A\setminus B = A - B = \{4, 6, 8, 10\}$



e) $A\setminus C = A - C = A = \{4, 6, 8\ 10\}$

Ejemplo para complemento

Si el universo es $U = \{2, 4, 6,8\}$ y $A = \{2\}$



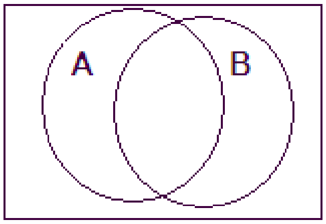
$A^c = \{4, 6, 8\}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>9.4</td>
<td>

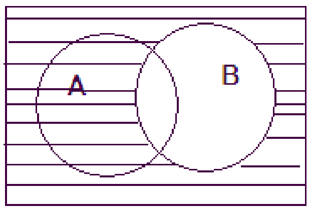
EJEMPLO 2. En el diagrama de Venn que sigue, sombrea:

B^c , b) $(A \cup B)^c$, c) $(B\setminus A)^c$, d) $A^c \cap B^c$

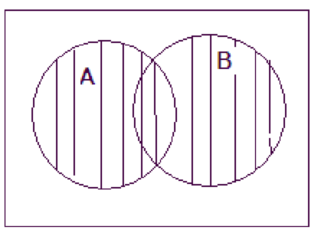
</td>
</tr>
</table>

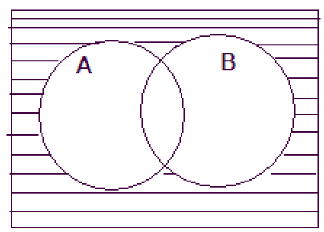


a) B^c consta de los elementos que no pertenecen a B; por lo tanto, se sombrea el área por fuera de B, como sigue:



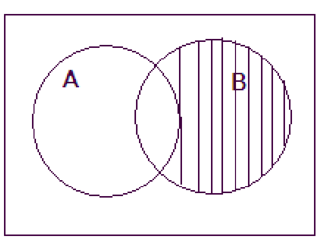
Primero se sombrea $A \cup B$, entonces $(A \cup B)^c$ es el área por fuera de $A \cup B$

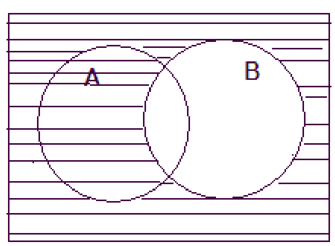




$A \cup B$ $(A \cup B)^c$

Primero Se sombrea $(B\backslash A)$, el área de B que no está en A, entonces, $(B\backslash A)^c$ es el área por fuera de $(B\backslash A)$

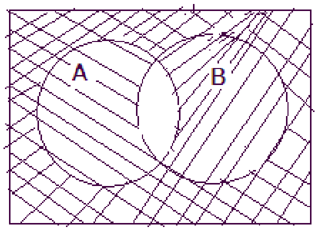


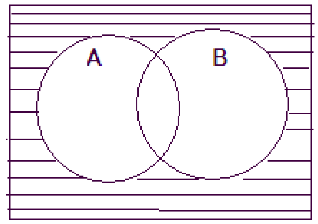


(B\ A) , $(B\backslash A)^c$

d) Primero se sombrea A^c el área por fuera de A, con rayas inclinadas hacia la derecha (////), y luego a B^c con rayas inclinadas hacia la izquierda

(\\\\\\); entonces $A^c \cap B^c$ es el área donde se cortan las líneas.



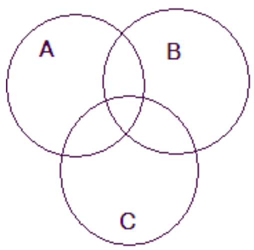


$A^c y\ B^c$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $A^c \cap B^c$

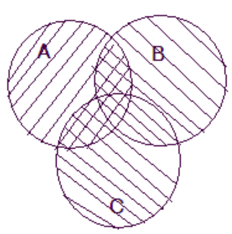
De acuerdo con la ley de De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

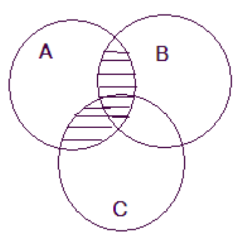
9.5 En el siguiente diagrama de Venn sombrear:

$A \cap (B \cup C)$ $\qquad\qquad\qquad$ b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



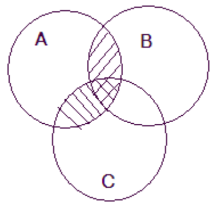
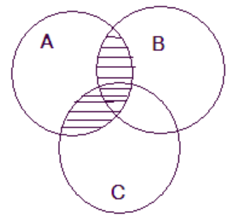
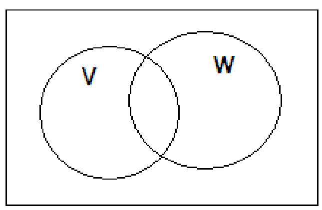
a) Primero se sombrea a A con rayas inclinadas hacia la derecha arriba, y luego a $B \cup C$ con rayas inclinadas hacia la izquierda; Ahora, $A \cap (B \cup C)$ es el área donde se cruzan las rayas.





A Y $B \cup C$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $A \cap (B \cup C)$

b) Primero se sombrea $A \cap B$ con rayas inclinadas hacia la derecha arriba y luego a A∪C con rayas inclinadas hacia la izquierda arriba. Ahora (A∩B)∪(A∩C) es el área total sombreada

<table>
<tr><td></td><td> 
$A \cap B \; y \; A \cap C$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
Se observa que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ de acuerdo con la ley distributiva.</td></tr>
<tr><td>9.6</td><td>EJERCICIO 6
Instrucciones: en los siguientes diagramas de Venn, sombrear
I. a) $W \backslash V$ b) $V^c \cup W$

II. Probar mediante diagramas de Venn: $A \cup (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$</td></tr>
</table>

3.9.1 Configuración epistémica 9

Elementos primarios:

<table>
<tr><td>Situaciones</td><td colspan="2">Ejemplos 1, Ejemplo 2, Ejercicio 6.</td></tr>
<tr><td>Elementos lingüísticos</td><td>Términos</td><td>Diagramas de Venn, ilustraciones, teoría de conjuntos, relación matemática o lógica, subconjuntos, operaciones entre conjuntos, la parte sombreada, gráfica, unión, intersección, diferencia, complemento, diagramas de Venn-Euler, universo, elementos, pertenecen, rayas</td></tr>
</table>

		inclinadas, área donde se cortan las líneas, ley de De Morgan, sombrear, ley distributiva, probar.
	Notaciones	AUB, $A \cap B$, $A \backslash B$, A', $A = \{2,4,6,8,10\}$, $A \backslash B = A - B = \{4,6,8,10\}$, A^c, $\{\ \}$, B^c, $(A \cup B)^c$, $(B \backslash A)^c$, $A^c \cap B^c$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $V^c \cup W$, $A \cup (B \backslash C)$,$(A \cap B) \backslash (A \cap C)$
	Gráfico	Diagramas de Venn
Conceptos-definición	Diagramas de Venn	
Procedimientos	Sombrear áreas en diagramas de Venn que corresponden a operaciones entre conjuntos (por ejemplo, B^c, $(A \cup B)^c$, $(B \backslash A)^c$, $A^c \cap B^c$)	
Proposiciones	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$(Ley de De Morgan), $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, Ley Distributiva.	
Argumentos	"B^c *consta de los elementos que no pertenecen a* B*; por lo tanto, se* sombrea el área por fuera de B" "Primero se sombrea A^c el área por fuera de A, con rayas inclinadas hacia la derecha (////), y luego a B^c con rayas inclinadas hacia la izquierda (\\\\\\\\\\\\); entonces $A^c \cap B^c$ es el área donde se cortan las líneas" "Primero se sombrea a A con rayas inclinadas hacia la derecha arriba, y luego a $B \cup C$ con rayas inclinadas hacia la izquierda; Ahora, $A \cap (B \cup C)$ es el área donde se cruzan las rayas." "Se observa que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ de acuerdo con la ley distributiva." Ejemplo en 9.5	

Se identifican la presentación de los ejemplos 1 y 2 y el ejercicio 6 como **situaciones** de esta configuración epistémica, puesto que en estos casos los ejemplos ayudan a mostrar el uso de los conceptos definidos y los ejercicios juegan el papel de problemas descontextualizados, que permitirán articular los elementos primarios de la configuración epistémica, como los procedimientos, utilizando el lenguaje y los argumentos correspondientes.

Con respecto a los **elementos lingüísticos** cabe mencionar que en esta parte de la unidad se han utilizado lenguaje y símbolos alrededor del objeto conjunto.

En esta unidad de análisis se muestran gráficamente las ideas expuestas anteriormente, resaltamos que los términos que son claves aquí son expresiones como "la parte sombreada", "rayas inclinadas", "área donde se cortan las rayas", etc. Consideramos que juegan un papel importante debido a que no solo son el lenguaje verbal y coloquial que conectan las prácticas promovidas con los diagramas asociados a los conceptos, sino que además, el uso de dichas expresiones están presentes en los **procedimientos** y técnicas que se sugieren en la resolución del ejemplo 9.4, que se identifica como "representante" de un campo de problemas.

Los **conceptos** que distinguimos como emergentes son Diagramas de Venn (asociados a un conjunto), y como intervinientes todos los conceptos abordados anteriormente.

Como una novedad en nuestro análisis se observa la presencia de gráficos. Los argumentos que se presentan en el texto al respecto del estudio de los gráficos asociados a los conceptos vistos, son básicamente para ilustrar las relaciones que guardan los conjuntos.

Hemos identificado también **procedimientos** que aparecen de manera explícita en los ejemplos resueltos en 9.4 y 9.5, y que se usan para asociar áreas del diagrama de Venn con operaciones entre conjuntos.

Distinguimos como proposiciones $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, una de las Leyes de De Morgan) y a una de las leyes distributivas $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dichas proposiciones aparecieron anteriormente; sin embargo en este apartado los diagramas de Venn dan la oportunidad de advertir visualmente la igualdad de áreas sombreadas resultantes de las operaciones correspondientes en la igualdad que se plantea.

Como **argumentos** se distingue la ejemplificación de la técnica a seguir en el ejemplo en 9.4 y 9.5, además algunas afirmaciones con términos coloquiales que pretenden conectar con las ideas del lector. Asimismo, un argumento gráfico para verificar que se cumple la ley distributiva y una de las Leyes de De Morgan. Es importante señalar el último ejemplo resuelto en 9.4 y el ejemplo resuelto en 9.5, pues al ser "genéricos" son argumentos "visibles" dada la naturaleza de los diagramas de Venn, para las leyes distributivas; de hecho en 9.6 se solicita como ejercicio probar una igualdad de conjuntos con el apoyo de la representación usando los diagramas de Venn.

Se declara en 9.1 que cada conjunto está representado por un óvalo o círculo, sin embargo el universo es representado por un rectángulo en 9.3.

Por otro lado, también se dice que la parte sombreada en las figuras representa a las operaciones entre conjuntos, sin embargo en la que representa a la unión lo que observamos es una parte del diagrama "rayado" con líneas inclinadas.

En 9.2 los dos diagramas que aparecen al principio en la esquina superior derecha tienen símbolos. Por ejemplo en la primera figura, la que representa la unión, el símbolo asociado es el que aparece justo debajo del diagrama y en la esquina superior derecha el símbolo U, sin especificar si es el símbolo utilizado para la unión o el de universo. En la segunda figura, la que representa a la intersección, se observa que no existe un indicador con símbolo justo debajo de ésta y, en la esquina superior derecha aparece el símbolo que representa la intersección. Además, también aparecen las palabras "UNIÓN" e "INTERSECCIÓN".

En las dos figuras que aparecen debajo de las mencionadas, las que corresponden a la diferencia y al complemento, se puede leer debajo de cada figura que se muestran los símbolos para la diferencia de conjuntos y para el complemento de un conjunto respectivamente, lo curioso es que ahora aparecen en la esquina inferior derecha. Podemos observar que a pesar de que no se es sistemático con el uso de símbolos, se manejan los registros gráficos, verbales y simbólicos.

En 9.3 se proponen tres conjuntos, la construcción de los diagramas de Venn-Euler para unas operaciones indicadas, y enseguida se presentan los diagramas (ahora de Venn-Euler) con números y letras mayúsculas dentro de los círculos que representan a los conjuntos propuestos en el ejercicio. Los primeros tres diagramas tienen en la esquina superior derecha el símbolo utilizado para unión o para universo, sin embargo los dos siguientes diagramas no lo tienen. Justo debajo de cada diagrama se pueden observar los símbolos empleados como operaciones entre conjuntos seguidos de la igualdad y un conjunto escrito de forma extensiva, usándose en los dos últimos casos símbolos equivalentes para la diferencia de dos conjuntos.

Llama la atención que en estos diagramas se observen partes "sombreadas", pero éstas no representan en todos los casos la operación indicada. Por ejemplo en el primer diagrama la parte sombreada es lo que se encuentra fuera de los dos círculos y la operación que se solicitó representar es la intersección de los conjuntos A y B. Sucede lo mismo para el segundo diagrama, aunque éste además tiene como letra mayúscula en su segundo círculo la letra "B", sin embargo los números (elementos) que se encuentran en este círculo parecen ser los correspondientes con el conjunto "C" (con la diferencia de un elemento, aparece como 3, en el conjunto escrito de forma extensiva y como -3 dentro del círculo que tiene por nombre "B"). En el tercer diagrama el conjunto "C" no tiene por elementos los mismos que se asignaron en un principio, y se sigue presentado la inconsistencia de partes sombreadas que no corresponden con las representaciones en diagrama de las operaciones planteadas como ejercicio. En el cuarto y quinto diagrama podemos observar la consistencia del área sombreada en el diagrama con la operación, sin embargo en la quinta representación el conjunto “C” no es el mismo que el propuesto en el ejercicio, además el elemento “2” que debería de estar en el círculo “A” no es visible.

En 9.3 puede además observarse un ejemplo para complemento (llamado así en el texto), en el diagrama podemos observar que no se es consistente con la declaración anterior que promueve la idea que un conjunto será representado en un óvalo o círculo ya que le complemento de A (A^c), no se utiliza alguno de los dos, lo mismo ocurre para el conjunto Universo representado por el símbolo “U” en la esquina superior derecha, representado en diagrama de Venn como un rectángulo.

La instrucción del Ejemplo 1 pide construir los diagramas de Venn a partir de tres conjuntos propuestos y escritos de forma extensiva, acto seguido se presentan los diagramas con los elementos y debajo de éstos los símbolos y los conjuntos en forma extensiva, podemos decir que se exhibe el ejemplo y sus solución sin explicación alguna que conecte la situación (ejemplo) con la solución ya presentada y acabada.

En 9.4 se exhibe el Ejemplo 2 que tiene 4 incisos, en éste se pide sombrear algunas operaciones expresadas con símbolos. Es importante mencionar que en este ejercicio no se sabe explícitamente cuál es la naturaleza de los elementos de los conjunto A y B. Esta característica es sumamente importante debido a que permite ejemplificar una técnica a seguir, independientemente de la particularidad de los ejercicios ya que el ejercicio resuelto “representa” un campo de problemas.

En los ejemplos resueltos en 9.4 no se distingue explícitamente el momento en que empieza y termina un ejemplo resuelto, es decir no hay un indicador para la solución de cada ejemplo que permita identificar plenamente que ejemplo se está abordando.

A continuación un diagrama de la configuración epistémica.

SITUACIÓN

-EJEMPLOS: Ejemplos 1, ejemplo 2

-PROBLEMAS DESCONTEXTUALIZADOS: Ejercicio 6

RESUELVEN

ELEMENTOS LINGUISTICOS

-TÉRMINOS: Diagramas de Venn, ilustraciones, operaciones entre conjuntos, la parte sombreada, gráfica, diagramas de Venn-Euler, universo, elementos, pertenecen, rayas inclinadas, área donde se cortan las líneas, sombrear, ley distributiva, probar. etc

-NOTACIONES: AUB, A∩B, A\B, A´, A\B=A-B= {4, 6, 8, 10 }, A^c, { }, B^c, $(A \cup B)^c$, $(B \setminus A)^c$, $A^c \cap B^c$, A ∩ (B ∪ C), (A ∩ B) ∪ (A ∩ C),) $V^c \cup W$, A ∪ (B \ C), (A∩ B)\ (A ∩ C),

-GRÁFICOS: diagramas de Venn

EXPRESA Y SOPORTA

REGULAN EL USO

R E G L A S

CONCEPTOS

-EMERGENTES: Diagramas de Venn,

-INTERVINIENTES: todos los anteriores.

PROCEDIMIENTOS

- Sombreado áreas en diagramas de Venn que corresponden a operaciones entre conjuntos (por ejemplo, B^c, $(A \cup B)^c$, $(B \setminus A)^c$, $A^c \cap B^c$)

PROPOSICIONES

-$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$(Ley de De Morgan), $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, Ley Distributiva.

JUSTIFICAN

ARGUMENTOS

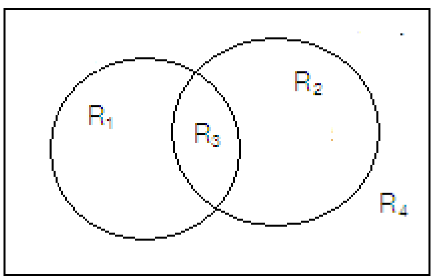
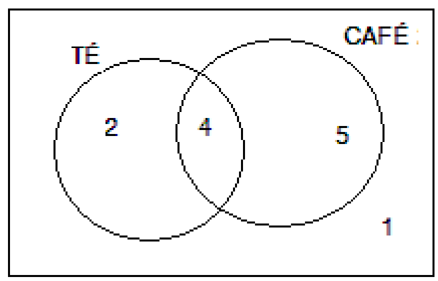
-"B^c *consta de los elementos que no pertenecen a B; por lo tanto, se* sombrea el área por fuera de B"

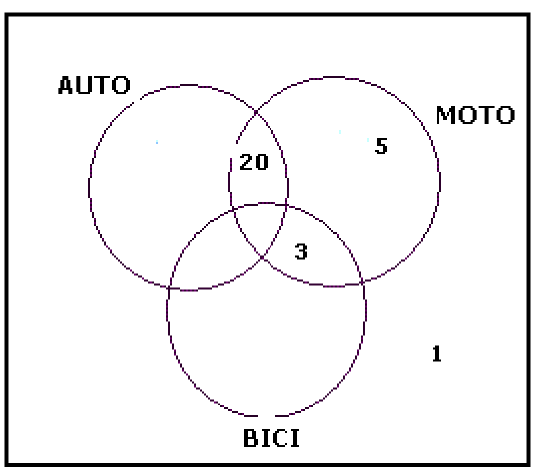
"Primero se sombrea a A con rayas inclinadas hacia la derecha arriba, y luego a B ∪ C con rayas inclinadas hacia la izquierda; Ahora, A ∩ (B ∪ C) es el área donde se cruzan las rayas", etc

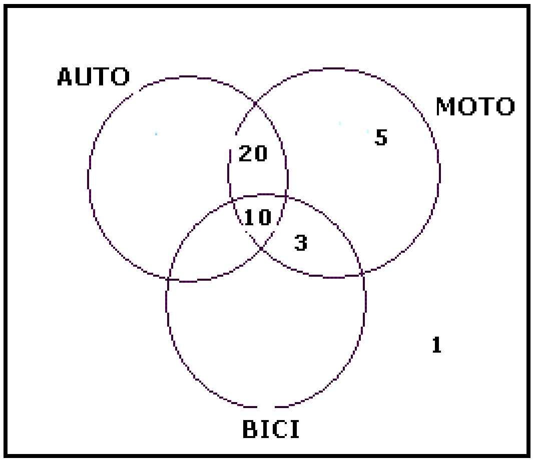
"Se observa que A ∩ (B ∪ C)=(A ∩ B) ∪ (A ∩ C) de acuerdo con la ley distributiva"

Figura 9. Configuración Epistémica 9

3.10 Unidad de análisis 10

10.1	PROBLEMAS DE APLICACIÓN. 1. En el diagrama que colocamos a continuación, se han volcado los datos obtenidos en una encuesta, realizada a personas, donde se les preguntó si tomaban té o café. Los números que aparecen se refieren a las cantidades de personas que respondieron a la pregunta en las diversas formas posibles: solamente té, té y café, ninguna de las dos bebidas, etcétera. El diagrama de Venn lo dividiremos por regiones; como sigue:
10.2	  Con base en estos datos responderemos a las siguientes preguntas 1. ¿Cuántas personas tomaban té? R1 +R3=6 2. ¿Cuántas personas tomaban té y café? Solo R3= 5 personas 3 ¿Cuántas personas no tomaban ninguna de las dos bebidas? Solo R4 = 1 persona 4. ¿Cuántas personas tomaban por lo menos una de esas dos bebidas? R1+R2+R3= 11 personas 5. ¿Cuántas personas tomaban sólo una de esas dos bebidas R1+R2 = 7 personas 6. ¿Cuántas personas tomaban sólo café? Solo R2= 5 personas

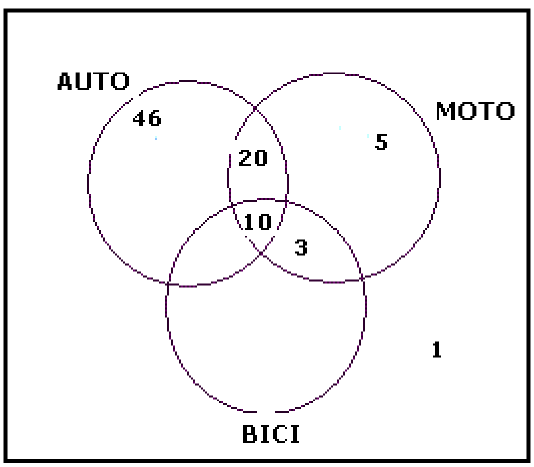
10.3	2. Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de la encuesta fueron los siguientes: I) Motocicleta solamente: 5 II) Motocicleta: 38 III) No gustan del automóvil: 9 IV) Motocicleta y bicicleta, pero no automóvil: 3 V) Motocicleta y automóvil pero no bicicleta: 20 VI) No gustan de la bicicleta: 72 VII) Ninguna de las tres cosas: 1 VIII) No gustan de la motocicleta: 61 1. ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas? 2. ¿A cuántos le gustaba la bicicleta solamente? 3. ¿A cuántos le gustaba el automóvil solamente? 4. ¿A cuántos le gustaban las tres cosas? 5. ¿A cuántos le gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta? Trataremos de poner en un diagrama de ven, para tres conjuntos los datos de la encuesta:  Nos encontraremos con que sólo cuatro de ellos, los números I), IV), V) y VII) se pueden poner directamente:



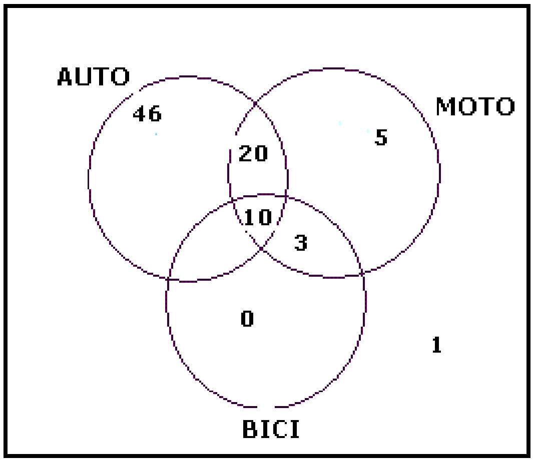
Ahora con el dato II) se puede completar la única zona que falta en el conjunto MOTO, haciendo la diferencia 38 - (20+5+3) = 10

Luego utilizaremos el dato VI), si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto BICI, deberán sumar 72

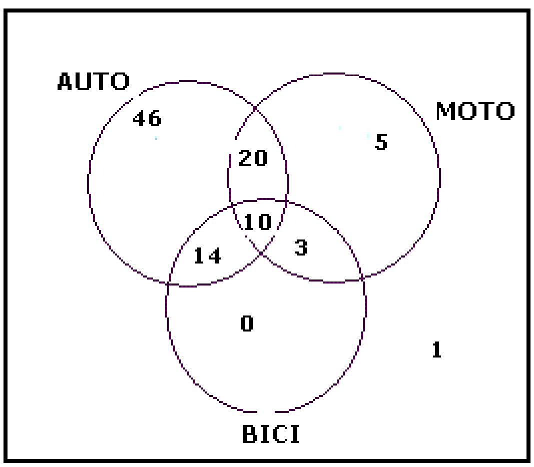
Luego 72 - (20+5+1) = 46:



Después de ello, podremos usar el dato III), si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto AUTO, deberán sumar 9, luego 9 - (5+3+1) = 0:

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Por último utilizaremos el dato VIII) si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto MOTO, deberán sumar 61, luego 61 -(46+0+1) = 14:



Con lo que estamos en condiciones de responder a todas las preguntas:

a) A 99 personas

b) A ninguna

c) A 46 personas.

d) A 10 personas.

e) A 14 personas
</td>
</tr>
<tr>
<td>10.4</td>
<td>
EJERCICIO 8

Instrucciones. En los siguientes problemas determina mediante conjuntos de Venn lo que se te pide:
</td>
</tr>
</table>

	1) Una encuesta sobre 500 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de dos productos A y B: 138 personas consumían A pero no B. 206 personas consumían A y B. 44 personas no consumían ni A ni B. a) ¿Cuántas personas consumían A? b) ¿Cuántas personas consumían B? c) ¿Cuántas personas consumían B pero no A? d) ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los dos productos? 2. En un grupo de 90 alimentos, 36 productos contienen azúcar, 32 tienen acido cítrico y 32 conservador; 6 productos contienen a la vez, azúcar, acido cítrico y conservador; 12 contienen acido cítrico y azúcar, 10 contienen conservador y azúcar, y finalmente 8 contienen acido cítrico y conservador. a) ¿Cuántos productos contienen exclusivamente acido cítrico? b) ¿Cuántos sólo azúcar? c) ¿Cuántos contienen sólo conservador?

3.10.1 Configuración epistémica 10

Elementos primarios:

Situaciones	Problema en 10.1, problema en 10.3, ejercicio 8 en 10.4.	
Elementos lingüísticos	Términos	Diagrama, diagrama de Venn, regiones, ninguna, por lo menos, sólo, solamente, zona, conjuntos de Venn, exclusivamente.
	Notaciones	R1 +R3=6, R3= 5 personas, R1+R2+R3= 11

		personas, etc.
	Gráfico	Diagramas de Venn
Conceptos-definición	**Diagramas de Venn**	
Procedimientos	Construcción del diagrama de Venn correspondiente al ejemplo 2 en 10.3	
Proposiciones		
Argumentos	Ejemplo 2 en 10.3	

La unidad de análisis 10 se titula “Problemas de aplicación”, en ella se encuentran 2 ejemplos resueltos y un problema propuesto. Los ejemplos resueltos tienen un contexto social referente a las respuestas de encuestas aplicadas a un grupo de personas y se apoyan en los diagramas de Venn para resolver los ejemplos.

Hemos encontrado que en estos ejemplos las prácticas utilizadas para resolver los ejemplos promueven un significado distinto a las prácticas anteriores. Las áreas en los diagramas de Venn se asocian con conjuntos (incluyen las operaciones con conjuntos, que son a su vez conjuntos) y, anteriormente los símbolos que se encontraban dentro de las áreas referidas representaban los elementos que pertenecen a cada conjunto, sin embargo, en este caso dentro de las áreas se ha asignado la cardinalidad de cada conjunto asociado. El texto no hace una distinción clara para esta situación. Además de asociar a cada área con el conjunto en cuestión, se asocia su cardinalidad en lugar de los elementos y se realizan operaciones de regiones (cardinalidades). Sin embargo la palabra cardinalidad o alguna aclaración al respecto, no se muestra explícitamente en el texto.

El problema de aplicación 1 tiene la particularidad que los datos obtenidos en la encuesta realizada se presentan en un diagrama de Venn. Se muestran dos diagramas de Venn asociados al ejemplo 1, en uno de ellos se asigna un símbolo a cada área y en el otro se asignan números a estas regiones. Éstos representan el número de personas (cardinalidad de conjuntos) que respondieron a una pregunta, (que no se expresa), mencionándose que se respondió en formas diversas. Las formas posibles que ahí se exhiben corresponden a los símbolos asignados a cada región, excepto los que toman solo café. Las preguntas que se tienen que contestar como parte del ejemplo tienen relación con la idea de discriminar las distintas áreas del diagrama de Venn, con ayuda del lenguaje verbal, con frases como “personas que toman solo café”, “Personas que toman té y café”.

En la respuesta a la pregunta 2, en 10.2, se asigna el símbolo R3 en el diagrama de Venn) como respuesta, sin embargo el número asociado a esta región (en diagrama de Venn) no corresponde con el exhibido en la respuesta.

Llama la atención que en el diagrama en el que se incluyen números asociados en cada región, los círculos tienen una nomenclatura que no corresponde con la promovida hasta este momento en el texto, pues en un momento se estableció el uso de letras mayúsculas para denotar un conjunto, sin embargo en este ejemplo se asigna un nombre de acuerdo a la característica de cada conjunto.

En el ejemplo 2 en 10.3, a diferencia del ejemplo anterior, los datos obtenidos en la encuesta realizada no se presentan en un diagrama, más aún, los diagramas se tienen que ir construyendo de acuerdo a la información obtenida, este proceso se desarrolla en ciertos pasos al resolver el ejemplo. Estos pasos incluyen la articulación de los registros verbal y gráfico a través de la conversión entre ellos para pasar del registro verbal al gráfico y viceversa, para ir asignando números a cada área del diagrama con el fin de responder las preguntas planteadas. Una vez asignado un número a cada área, se hace uso del diagrama como la única herramienta explicita para responder a las preguntas valiéndose de la discriminación de áreas asociado al lenguaje verbal.

En 10.4, en el ejercicio 8 se propone resolver un problema del estilo de los que se han resuelto en esta unidad de análisis, utilizando como herramienta principal los diagramas de Venn. Llama la atención que se utilice el término “conjuntos de Venn”. Este problema es muy parecido al resuelto anteriormente debido a que se tienen que construir el diagrama de Venn con la información proporcionada y con ésta misma ir completándolo, y una vez que se tiene el diagrama completo, discriminar las áreas que ayudan a responder las preguntas planteadas.

Esta unidad de análisis presenta una diferencia respecto a las anteriores: contiene como situaciones algunos problemas contextualizados que muestran resultados de encuestas realizadas a determinado grupo de personas. Estos problemas resueltos y propuestos pretenden poner en práctica los diagramas de Venn.

Los **elementos lingüísticos** y sus relaciones juegan un papel muy importante, ya que a través de los términos utilizados en lenguaje verbal se asocian a los diagramas de Venn y con las notaciones asociados. Las notaciones estudiadas anteriormente toman un significado más rico al poder conectar los conceptos con ayuda de gráficos.

El **concepto** que identificamos como emergente es Diagramas de Venn y como conceptos intervinientes los promovidos anteriormente.

Como **procedimientos** identificamos la resolución del ejemplo 2 en 10.3, debido a la construcción del diagrama de Venn con apoyo de la articulación del lenguaje verbal, gráfico y simbólico y las nociones de las operaciones con conjuntos. Asimismo, en este ejemplo identificamos como **argumentos** la ejemplificación de la técnica a seguir para resolver problemas de este estilo.

Tal y como hemos venido procediendo hasta el momento, presentamos ahora la diagramación correspondiente a la Configuración epistémica 10.

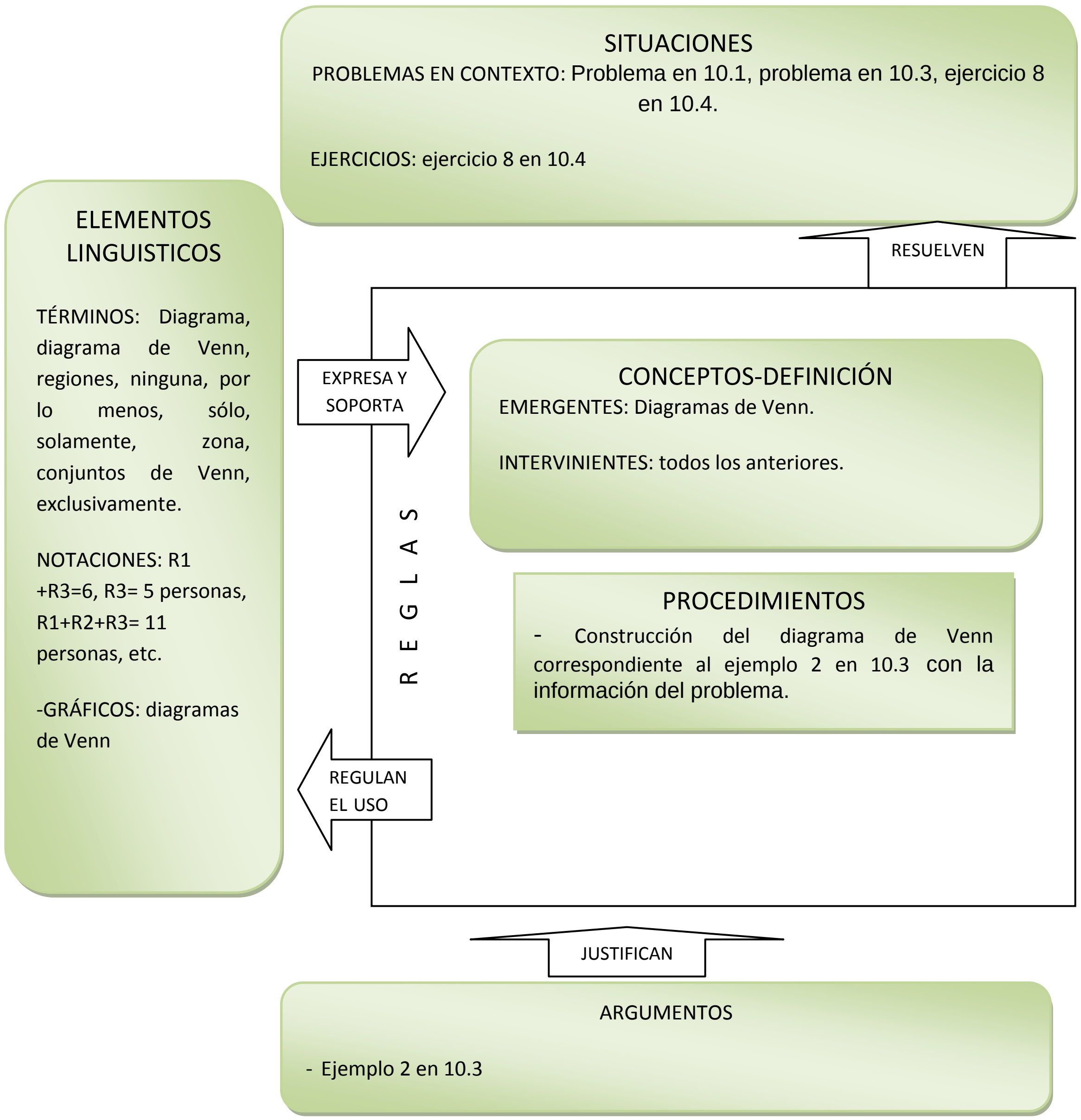


Figura 10. Configuración Epistémica 10

3.11 El Sistema de prácticas que se desprende del análisis

A continuación se presenta un resumen de las prácticas asociadas que hemos podido distinguir en el análisis que hemos realizado.

En la Unidad de Análisis I se observa que se hace alusión a la intuición para introducir el objeto “conjunto”, haciendo uso de un tipo de lenguaje para su representación. Asimismo, alrededor de dicho objeto empiezan a definirse otros, que propician su emergencia progresiva y de una gama asociada de objetos que serán emergentes e intervinientes (conforme a distintos momentos en el texto), todo lo cual permitirá enriquecer su significado. Se muestran algunos ejemplos de conjuntos y se introduce la noción de un conjunto peculiar, el conjunto vacío.

La unidad cierra con un concepto que añade el recién definido concepto de elemento. Esto nos permite sostener que esta unidad de análisis no tiene una situación problema explícita y se observa un intento de caracterizar el concepto conjunto de una forma intuitiva seguido de un nuevo concepto (elemento) que pretende ser incidente en el significado a promover.

Al analizar la configuración epistémica, se observa que esta unidad de análisis está muy cargada de términos que jugarán parte esencial en el transcurso de la emergencia de los objetos que entrarán en juego.

A pesar de que la introducción en los ejemplos del conjunto vacio no tiene una incidencia en esta unidad de análisis, jugará un papel importante más adelante.

En la Unidad de Análisis 2, se observa la introducción de un objeto denominado “pertenencia”, el símbolo que lo representa, ejemplos y su correcto uso para relacionar elementos con conjuntos, además de los símbolos correspondientes tanto a la pertenencia, como a la no pertenencia.

Hasta esta unidad de análisis se distingue que las prácticas que se promueven en el texto se enfocan hacia formar un significado de conjunto, para lo cual se emplean objetos matemáticos que intervendrán en la emergencia del significado. En esta temprana etapa del texto se promueven las definiciones correspondientes y algunos ejemplos para empezar a relacionarse con el lenguaje a seguir, términos, símbolos y las relaciones que guardan los conceptos de conjunto y de pertenencia.

La Unidad de Análisis 3, nos muestra características de dos tipos de representación de los conjuntos que se definen como Forma extensiva y Forma Constructiva o por comprensión. Esto permitirá al estudiante distinguir un conjunto no solo identificando sus elementos como se ha promovido hasta el momento, además se muestra otra caracterización de un conjunto aún cuando los elementos no se aprecien expresamente, sino a través de una frase descriptiva que caracteriza a sus elementos.

Se muestran además unos ejemplos de conjuntos escritos de las dos formas introducidas y se incluye un cuadro comparativo en el que se observan algunos conjuntos en sus dos modalidades, por Extensión o por Comprensión.

Hasta este momento los ejemplos juegan un papel importante en la elaboración de un significado, ya que en ellos se muestran los conceptos y su relación con el uso de símbolos y caracterizaciones descritas en tales definiciones.

Es importante señalar que en esta unidad de análisis se expresa algo que se ha distinguido como propiedad, referente a la posibilidad de expresar un conjunto en forma Extensiva con relación al número de elementos que el conjunto tiene. Esta noción se intensifica en la siguiente unidad de análisis.

En la Unidad de Análisis 4 se promueve el Concepto de conjuntos finitos e infinitos, para esto se observa en la definición el uso de un objeto matemático llamado biyección, sin embargo en los ejemplos que se identifican como finito o infinito no se hace uso de tal concepto. Además, en los ejemplos no se muestra las prácticas que permiten clasificar correctamente a un conjunto como Finito o Infinito.

La unidad de análisis concluye con ejercicios que esperan que el lector etiquete una lista de conjuntos.

En las prácticas que se realizan en esta unidad de análisis, es importante resaltar que los objetos matemáticos definidos anteriormente intervienen en la mayoría de los casos. Este hecho se aprecia, por ejemplo, haciendo uso de las formas de expresión de un conjunto al momento de utilizar tanto en los ejemplos como en los ejercicios, conjuntos en su Forma Extensiva o por Comprensión. Además de las notaciones y símbolos que en ejemplos anteriores han quedado establecidos, es notable un uso y un significado que sigue creciendo a medida que se utiliza en los nuevos conceptos, ejemplos y ejercicios.

En la Unidad de Análisis 5 se aprecia que mediante la definición de conceptos se brindan ciertas nociones de la igualdad de conjuntos, relación o correspondencia entre dos conjuntos y, aplicación o función. El ejemplo que se utiliza se presenta “resuelto” con relación a la igualdad de conjuntos, es decir, se afirma que un conjunto dado puede escribirse de cinco maneras que parecieran ser distintas, pero al utilizar el enunciado “el conjunto… también puede escribirse…” denota la igualdad de conjuntos. El segundo ejemplo hace alusión a una “costumbre” (propiedad) de los conjuntos que se menciona justo antes del ejemplo que alude a no repetir elementos.

Sin embargo llama nuestra atención que los conceptos definidos no se utilizan de manera directa o explícita al exponer los ejemplos, más aún ni siquiera se utilizan los términos o notaciones que se utilizan en las conceptos

El ejercicio que se propone en esta Unidad de Análisis tiene inconsistencias con las prácticas promovidas alrededor de la simbología, las cuales fueron establecidas anteriormente respecto a la notación de los conjuntos.

En la Unidad de Análisis 6 se aprecia que las prácticas se realizan alrededor de un tipo específico de conjuntos, el conjunto vacio. Se utiliza un concepto y un símbolo para representarlo, además dos ejercicios que involucran para su resolución el recurso de prácticas promovida anteriormente como expresar un conjunto de Forma por comprensión a Forma por Extensión, igualdad de conjuntos, etc.

A partir de la Unidad de Análisis 7 se empiezan a definir una serie de conjuntos importantes, propiedades, operaciones, representaciones, etc. Se suponen algunas nociones básicas previas, mismas que se han practicado en las Unidades de Análisis anteriores.

En la Unidad de Análisis 7 se practica alrededor de los conceptos de conjunto, subconjunto, conjunto potencia, conjunto universal y conjuntos disjuntos.

Para la definición de conjuntos de utilizan los conceptos básicos declarados anteriormente (nociones de conjuntos). De este modo, al introducir este concepto, además de definirlo y caracterizarlo, se practica en los ejercicios propuestos la intervención de objetos trabajados anteriormente. Esto hace que dichos objetos funjan en momentos como objetos “emergentes” (al momento de definirlos) y como “intervinientes” al momento de utilizarlos en la emergencia de nuevos objetos. Cabe resaltar que la emergencia es gradual, a pesar de que en algunos momentos los objetos se utilizan como intervinientes, al momento de relacionarlos con otro tipo de objetos se fortalece su emergencia progresiva y su significado se amplía con tales prácticas.

Un ejemplo de esto lo encontramos en la definición de conjunto, en la cual se presentan de forma “compacta” las nociones alrededor de los términos y signos utilizados en este nuevo concepto, por ejemplo el uso de los términos, selección, elementos, además de las notaciones y los ejemplos utilizados.

Se define subconjunto y se menciona la notación que se utiliza para este concepto, se ejemplifica sin hacer uso explícito de la definición y se concluye con una “formalidad” que hace uso de un símbolo ($\forall$) que hasta el momento no tiene prácticas asociadas a ningún concepto previo.

En la definición de conjunto potencia se utiliza la idea de “familia de todos los subconjuntos de un conjunto” (una familia es un conjunto de conjuntos), además de las notaciones más comunes. En los ejemplos se emplea un algoritmo para determinar cuántos elementos (que a su vez son conjuntos) tiene el conjunto potencia, además en momentos distintos de los ejemplos la misma notación que se utiliza para el conjunto potencia en ocasiones se utiliza para igualarlo al número de elementos además de igualarlo a una familia de conjuntos.

En la parte correspondiente del Conjunto Universal se desprenden algunas características del concepto, además se muestra un ejemplo.

Alrededor del concepto de Conjuntos disjuntos se aprecia una propiedad que permite distinguir si dos conjuntos son disjuntos, empleando para ello los elementos que componen a cada conjunto. Se muestran dos ejemplos, uno de conjuntos disjunto y otro de conjuntos no disjuntos.

A través de la Unidad de Análisis 8 podemos rescatar el surgimiento de la primera operación entre conjuntos, la unión. Se establece el uso del símbolo que representa la unión y una expresión formal de la unión seguido de un ejemplo. Enseguida se enuncian tres propiedades que en el texto se denominan principales, incluso se muestra la combinación de la unión con la inclusión.

Del mismo modo se define la Intersección de conjuntos, estableciendo el símbolo que se utiliza, una breve descripción verbal y una expresión formal seguida de un ejemplo. Asimismo, se enuncian tres propiedades principales y una tercera que involucra la inclusión (subconjuntos). Una vez introducidos la Unión y la Intersección y sus correspondientes propiedades, se presentan nuevas propiedades, distributiva y de absorción, que involucran las anteriores Cabe resaltar que la intersección se liga de manera oportuna con la noción de conjuntos disjunto y con la de conjunto vacio. Esto propicia que el significado de conjuntos disjuntos, conjunto vacio e intersección de conjuntos se enriquezca debido a la interrelación que guardan las definiciones correspondientes además de los ejemplos trabajados al momento, esto permite una unificación en las prácticas asociadas a dichos conceptos.

Es pertinente señalar que las prácticas asociadas a las propiedades de la unión, intersección y las que se desprenden de ellas, quedan un poco desdibujadas ante los demás constructos teóricos planteados hasta ese momento en texto, debido a la ausencia de ejemplos, o expresiones verbales que brinden una perspectiva más amplia.

Alrededor del complemento relativo o diferencia de conjuntos, notamos que se brinda una descripción verbal del concepto, acompañada de la notación correspondiente y una expresión formal del mismo. En este apartado, a través de un ejemplo se emplea la diferencia de conjuntos.

Se incluye una serie de ejercicios que involucran operaciones entre conjuntos. La instrucción pide determinar operaciones entre conjuntos, se brindan cuatro conjuntos y una lista de símbolos asociados a las definiciones anteriores de Unión, Intersección, complementos, etc.

Es de notar que en las instrucciones de los ejercicios se utilice la frase "operaciones entre conjuntos", ya que es el primer momento en que se asocian las prácticas realizadas sobre los objetos matemáticos Unión, Intersección, Complemento etc., con su caracterización como operaciones entre conjuntos.

Por último, en la sección del texto que sirvió como base para construir la Unidad de Análisis 8, se enumeran en una tabla leyes o identidades sobre las operaciones descritas anteriormente (Unión, complemento, etc.), se asocia un nombre y el uso de símbolos. Esta notación utilizada enriquece el significado de la igualdad de conjuntos, las operaciones entre conjuntos, el conjunto vacío y el concepto mismo de conjunto.

En el apartado del texto asociado a la Unidad de Análisis 9, se involucran las representaciones gráficas de los objetos matemáticos de la teoría de conjuntos con los cuales se ha tenido contacto.

En una primera etapa se brinda una descripción verbal de lo que se distinguirá como Diagrama de Venn. Esta descripción incluye términos como relación matemática o lógica, círculos sobrepuestos o superpuestos, parte sombreada, gráfica y las operaciones entre conjuntos.

Además se muestra una relación no explícita entre los objetos matemáticos de la teoría de conjuntos con los diagramas de Venn. Estas relaciones son solamente visuales y no involucran en un primer acercamiento elementos colocados explícitamente dentro de los óvalos que representan conjuntos. Los ejemplos pueden resolverse con las prácticas promovidas hasta el momento, sin embargo se solicita la construcción de los diagramas de Venn-Euler. En la solución del ejemplo se presenta un diagrama de Venn-Euler que da respuesta a la lista de operaciones, con la diferencia de cambiar la parte sombreada y los conjuntos que intervienen en cada operación.

La solución se presenta en una forma acabada, sin algún paso intermedio entre la instrucción y su solución, se privilegia entonces la práctica visual pues hay que distinguir una serie de gráficos y sombras asociados a los resultados de las operaciones propuestas, además de una notación algebraica que involucra las prácticas involucradas al momento, el uso de los conjuntos en forma enumerativa.

La introducción de los Diagramas de Venn brinda la posibilidad de tener otra representación para un objeto matemático que hasta el momento había sido introducido solamente mediante los lenguajes verbal y algebraico, acompañado en la mayoría de los casos de algunos ejemplos. De ahí que el significado del objeto se enriquece significativamente, pues además de asociar un nuevo registro se introducen más prácticas alrededor de dicho objeto.

Paulatinamente se van presentando algunas de las operaciones practicadas al momento, además de asociar combinaciones de operaciones con áreas sombreadas en un diagrama.

Aparece un ejemplo en el cual se maneja una operación verbalmente, asociándola a su representación gráfica y con apoyo de su representación algebraica. Esto pudiera, en un momento dado, catalogarse como una especie de algoritmo, puesto que se van sugiriendo una serie de pasos a seguir para encontrar por ejemplo, complementos. Inclusive se propicia que se tracen líneas en un sentido o en otro con el fin de distinguir que representa cada cual.

Es importante distinguir que los llamados Diagramas de Venn en un primer momento solo manejan dos óvalos dentro de un rectángulo y en otro momento intervienen tres círculos simultáneamente, sin embargo no se encuentran delimitados por un rectángulo. En este momento del texto se intensifica el discurso que se apoya en lenguaje algebraico y en lo visual, para brindar pasos a seguir para sombrear adecuadamente las operaciones que se involucran. Además el registro gráfico se utiliza para evidenciar la propiedad distributiva.

Por último se dejan ejercicios que para su solución involucran poner en práctica lo expuesto.

De la Unidad de Análisis 10 hemos de rescatar los siguientes aspectos:

Se titula “Problemas de aplicación” y se involucran los Diagramas de Venn en cada uno de ellos. El primer ejemplo resuelto brinda una descripción de una situación que involucra una encuesta y se apoya en un diagrama de Venn que se presenta en el texto con símbolos y números asociados al problema, de donde se empiezan a responder las preguntas que se plantean realizando suma de regiones e igualando a números naturales.

En el segundo ejemplo se presenta un problema con una serie de interrogantes y un Diagrama de Venn, al que se le irán asociando en cada una de sus áreas el número de elementos que pertenecen a cada conjunto representado en dichas áreas. Para lograr esto se realizan una serie de razonamientos asociados a la información que se presenta al inicio del ejemplo. Estos razonamientos se presentan de forma ordenada y forman una especie de guía para lograr completar un Diagrama de Venn que tenga asociada la información que se desea saber y así utilizar el diagrama para dar respuesta a todas las preguntas enunciadas en el principio del problema. Con la asociación descrita en el diagrama de Venn, en donde se asocia a las áreas con el número de elementos que tiene cada conjunto, responder a las preguntas se ha reducido a una simple suma de naturales; esto siempre y cuando se pueda distinguir la relación que guardan las áreas en el diagrama de Venn con el lenguaje común utilizado en las preguntas.

Se concluye el texto asociado a la Unidad de Análisis 10 con dos ejercicios que proponen utilizar los recursos gráficos asociados a los conjuntos para resolverlos.

3.12 Caracterización del significado institucional de referencia

Hemos resumido las prácticas que se llevan a cabo alrededor de algunos objetos matemáticos que distinguimos como pertenecientes a las nociones básicas de la teoría de conjuntos, para esto nos hemos basado en los resultados del análisis que se han realizado del texto con las herramientas y el lenguaje que nos proporciona la teoría.

Con base en el trabajo previo, la selección de los fragmentos del texto a analizar, la distinción de los elementos del significado (también llamados elementos primarios), las interrelaciones que guardan los elementos con ayuda del constructo teórico llamado Configuración Epistémica y la descripción de las prácticas realizadas en el texto, tenemos los componentes necesarios para caracterizar el significado institucional de referencia de las nociones de la teoría de conjuntos.

El texto alude a la intuición para introducir un concepto clave: Conjunto. Alrededor de este concepto se realizan una serie de prácticas que enriquecerán su significado, a través de la emergencia e intervención de otros objetos matemáticos relacionados con el concepto de conjuntos y que formarán las nociones básicas de la teoría de conjuntos.

Como parte de las prácticas prototípicas significativas ligadas al significado del objeto matemático conjunto, se encuentra la asignación de ciertos símbolos y notaciones, además de los componentes de un conjunto, a lo que se le denomina elementos. Estos elementos tienen su notación y se utiliza un símbolo para identificar plenamente la pertenencia de un elemento a un conjunto. Al mismo tiempo se identifica el símbolo que ayudará a distinguir cuando un objeto no pertenece a un conjunto determinado. Como parte de las prácticas que se realizan alrededor de la pertenencia, se realizan algunas declaraciones a la pertinencia en el uso del símbolo en situaciones distintas a la de relacionar a un elemento con un conjunto.

Se exponen tres prácticas distintas al momento de representar a un conjunto:

- La forma tabular o extensiva, que consiste en una notación que incluye una letra mayúscula, un signo de igual y dentro de los signos de agrupación "llaves" la lista de todos y cada unos de los elementos del conjuntos, de tal forma que es apreciable a la vista cada uno de ellos.
- La forma constructiva o por comprensión, que consiste en una letra mayúscula acompañada de un signo de igual, y dentro de los signos de agrupación { } a la letra "x". Ésta viene acompañada del símbolo "|" que se lee "tal que" y una propiedad que debe cumplir cada uno de los elementos que pertenezcan al conjunto.
- La representación en Diagramas de Venn, usando áreas. Ellas pueden ser representadas mediante un círculo, un óvalo o un rectángulo, en el caso del conjunto universo.

Se deja entrever mediante una tabla, que un conjunto puede representarse tanto en forma extensiva como en forma comprensiva sin mostrar explícitamente una descripción de cómo transitar entre una representación y otra.

Se pone en práctica, a través de una definición, la separación de dos tipos de conjuntos, los finitos y los infinitos; sin embargo en los ejemplos no se asocia la definición con la solución de los ejemplos.

Se realizan también una serie de prácticas discursivas y operativas alrededor de la igualdad de conjuntos para lo cual se mencionan relaciones entre conjuntos mediante los elementos de cada conjunto, el producto cartesiano, el conjunto vacio (del cual se ha dado un muy breve caracterización), de la noción de función y se apoya en ejemplos que solamente incluyen conjuntos en forma extensiva. A pesar de esto en los ejercicios se incluye un conjunto en forma comprensiva, que obliga en su resolución a representarlo en forma extensiva. Para distinguir si un conjunto es igual a otro, también se hace uso de dos propiedades: los elementos repetidos no son significativos y el orden en el acomodo no es significativo.

Se realizan prácticas alrededor de la idea de conjunto vacío, para esto se deja como ejercicio determinar si un conjunto en forma comprensiva es vacío, esto implica la representación del mismo conjunto en forma extensiva.

Se distingue que se realizan prácticas particulares que determinan mediante definiciones o enunciando sus propiedades que en algunos momentos describen un procedimiento constructivo del objeto matemático.

Se realizan prácticas discursivas y operativas en torno a los siguientes objetos matemáticos, a los cuales hemos distinguido en el contexto del libro los elementos del significado. Estos objetos matemáticos se encuentran relacionados alrededor del concepto conjunto tales como son: conjunto, elementos o miembros, pertenencia, forma extensiva y forma por comprensión de un conjunto, conjunto finito, conjunto infinito, igualdad de conjuntos, relación entre conjuntos, aplicación o función entre conjuntos, conjunto vacío, subconjunto, conjunto potencia, conjunto universal, conjuntos disjuntos, unión de conjuntos, intersección de conjuntos, diferencia de conjuntos, complemento absoluto de un conjunto y los Diagramas de Venn.

La forma en que estos objetos matemáticos se relacionan e interactúan en las prácticas que se promueven en el texto, y que hemos podido distinguir y analizar, forman el significado institucional de referencia de las nociones de la teoría de conjuntos.

Sin embargo haremos un último esfuerzo de síntesis para lograr una caracterización final del significado institucional de referencia del objeto nociones básicas de la teoría de conjuntos.

La mayoría de las configuraciones epistémicas que se han logrado como producto del análisis del texto, las ubicamos como de corte “formalista” (configuraciones epistémicas formalistas), es decir, hay conceptos que ya se suponen conocidos y otros que se introducen en la unidad mediante definiciones, ligados a estas definiciones aparece, en el mejor de los casos, un ejemplo que tiene por objetivo facilitar al lector la comprensión de las definiciones. De manera intermitente se proponen algunos ejercicios descontextualizados cuyo objetivo es la aplicación de los objetos matemáticos introducidos. Sin embargo no existe un enlace entre los conceptos definiciones y los ejemplos, pues la solución es presentada sin una breve explicación o uso de tales definiciones. Se observa también que los procedimientos en el texto se reducen básicamente a resolver los ejemplos propuestos.

Desde que se introducen los Diagramas de Venn se intenta conectar los conceptos abordados con problemas que intentan ser contextualizados y extra matemáticos. En este momento se brindan algunos procedimientos en la resolución de ejemplos que podrían enriquecer los significados promovidos hasta el momento. Es hasta entonces que los procedimientos aparecen de forma explícita.

Las proposiciones en la mayoría de los casos son propiedades que se presentan de forma verbal de los conceptos que se definen. Las proposiciones que se presentan cargadas en el aspecto algebraico se presentan de manera aislada, sólo en los Diagramas de Venn se brinda un argumento visual en la igualdad que se presenta en dichas propiedades.

Los argumentos son explicaciones que justifican el uso correcto de símbolos y términos empleados en las definiciones de los conceptos, o en los ejemplos resueltos. En ocasiones se utilizan con fines explicativos en la solución de ejemplos que involucra diagramas de Venn.

Podemos decir entonces que el texto tiene una marcada tendencia a presentar las definiciones y muy pocos ejemplos en los que interviene el uso de los conceptos definidos.

A pesar de no contar con información y análisis de las prácticas que realizan los alumnos podemos suponer que si un estudiante se restringiera solo al uso del libro de texto, sus prácticas relacionadas con los objetos matemáticos de las nociones básicas de la teoría de conjuntos estarán reducidas a repetir las definiciones presentadas, y a representar mediante un Diagrama de Venn la información de un problema que involucre operaciones de conjuntos. Sin embargo se ha observado en el texto que se presentan un buen número de situaciones que podrían suscitar conflictos en estudiante, lo cual limita sus prácticas prototípicas significativas, es decir, aquellas que lo lleven a la solución de situaciones-problemas, aunque éstas estén en la dirección que el texto se propone.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

En este capítulo recapitularemos lo realizado en esta investigación, con la intención de establecer la plataforma en la que nos basamos para enunciar las conclusiones de nuestro trabajo.

Iniciamos reconociendo la existencia de un fenómeno de transposición didáctica (Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. 1997) para las nociones básicas de la teoría de conjuntos, esto es, cómo, desde la matemática experta, se transpusieron una serie de conocimientos hacia la matemática escolar. Este hecho, que podemos catalogar de universal, lo particularizamos en la institución Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Una vez ubicados en esta institución escolar, nuestra investigación consistió en la búsqueda de una caracterización del significado institucional de referencia de las nociones de la teoría de conjuntos, propósito que declaramos como el objetivo general de la misma. Como estudiosos de Matemática Educativa, afirmamos que una investigación en este campo debe hacer uso de las herramientas teóricas que la misma disciplina provee.

En ese sentido, compartiendo la fundamentación del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática, utilizamos algunos de sus constructos teóricos básicos como las herramientas que marcaron el rumbo del trabajo en los aspectos metodológicos, de análisis y posterior síntesis.

Fue la teoría la que nos indicó qué acciones tendríamos que realizar para alcanzar el objetivo declarado: la selección de un texto utilizado en la institución escolar ya mencionada, el análisis de dicho texto como fuente primaria para conocer el sistema de prácticas impulsado mediante las unidades de análisis seleccionadas, la identificación de las configuraciones epistémicas presentes, y finalmente, la síntesis de los productos del análisis. Esta síntesis es la que constituye la caracterización que nos planteamos como objetivo.

Desde nuestro punto de vista, lo que se ha mostrado hasta el momento pone de manifiesto la potencia, pertinencia y efectividad de la teoría utilizada en el análisis de textos, con el fin de caracterizar el significado institucional de referencia de los objetos matemáticos seleccionados.

Otro asunto que comentaremos es que actualmente en la página electrónica de COBACH, http://www.cobachsonora.net, se tiene acceso a una serie de documentos de apoyo al docente en el que se manifiestan los objetivos de las materias que conforman el bachillerato. En uno de ellos se manifiesta como parte de las competencias a desarrollar en el estudiante, a la formulación y la resolución de problemas matemáticos, argumentar la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de tecnologías de la información y la comunicación. Es importante mencionar que los resultados que hemos logrado en este trabajo de investigación dejan ver una distancia significativa entre las competencias ahí declaradas y las que se busca promover con el uso del libro de texto que hemos analizado y con el que trabajaron seis generaciones de estudiantes en todos los planteles de COBACH en el Estado de Sonora.

Reiteramos que esta investigación estuvo restringida a la caracterización del significado institucional de referencia en el Colegio de Bachilleres en el marco del libro de texto. A pesar de que esto pudiera considerarse algo limitado, pensamos que puede servir de base para futuras investigaciones, como por ejemplo la caracterización de los significados institucionales pretendido, implementado y evaluado, con lo cual podría tenerse una reconstrucción completa del significado de referencia.

En otro orden de ideas, el análisis que hemos realizado del texto nos ha permitido identificar ciertas situaciones que podrían propiciar conflictos semióticos. La siguiente es una relación de ellos:

- El uso de términos que no tienen asociado un significado previo para definiciones o en ejemplos. Por ejemplo el uso de los términos Campos

Numéricos, números complejos, simbología lógica, biyección, producto cartesiano ($A \times B$).

- El uso de "simbología lógica" en ejemplos de conjuntos en forma constructiva, específicamente $x|x$, sin una asociar previamente una práctica a este símbolo. El uso de cuantificadores lógicos en las llamadas "formalidades" del texto al definir subconjunto, unión de dos conjuntos, la intersección de conjuntos, diferencia de conjuntos, complemento absoluto.
- El texto manifiesta que un conjunto sólo se puede enumerar si es finito, esto implica que un conjunto no puede expresarse en forma extensiva si es infinito, sin embargo en los ejemplos utilizados se encuentra $N = \{1,2,3,4,5,6 \dots\} = \{los\ números\ naturales\}$. Esto es una contradicción pues el conjunto de los números naturales no es un conjunto finito y se encuentra en forma extensiva.
- Inconsistencias con el uso de algunas "reglas" establecidas en el texto, por ejemplo, expresiones que no hacen uso de los símbolos asociados a conjuntos como letras mayúsculas, llaves, etc. Ejemplos: "los meses del año", "los habitantes de la tierra" se distinguen como un conjuntos. Al presentar un conjunto con diagramas de Venn, no se sigue un orden sostenido en los símbolos (en forma de letras mayúsculas) que se asocian a cada conjunto, por ejemplo que la letra "U" asociada con el conjunto universo no siempre está presente, las letras "A", "B", utilizadas en ocasiones dentro o fuera de las áreas que representan el conjunto, etc.
- Se brindan definiciones de objetos matemáticos, se exhiben ejemplos, sin embargo las prácticas realizadas alrededor de estos objetos, no van más allá de eso.
- En ocasiones se presentan definiciones y ningún ejemplo resuelto asociado a una forma de emplear la definición para resolver un ejercicio, en el mejor de los casos, los ejemplos se presentan ya resueltos, "estáticos" no se aprecia la relación de las definiciones y los ejemplos resueltos.

Así, damos por concluido este reporte.

5. BIBLIOGRAFÍA

Arrieche Alvarado, M. J. (2002). La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática.Tesis doctoral, departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.

Arrieche Alvarado, M. J., & Godino D., J. (Abril de 2002). *Conjuntos, números y maestros: Factores condicionantes del estudio de una teoría matemática* . Castellón, XVIII Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM, Grupo DMDC-SEIEM). Castellón, 19-21 Abril 2002.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje* (1998 ed.). España: Dirección General de Materiales y Métodos Educativos y de Normatividad de la Subsecretaria de Educación Básica y Normal.

Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. (2009). *Probabilidad y Estadística I*. Hermosillo, Sonora, México. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Departamento de asuntos científicos de la Unión Panamericana. (1968). *La revolución en las matemáticas escolares* (2da edición ed.). (E. V. Chesneau, Ed., & G. Ramos, Trad.) Lima, Perú: Departamento de asuntos científicos.

Font, V y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educaço Matematica Pesquisa, 8 (1), 67-98.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontólogico semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada, España.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna* (vigesimoprimera ed.). (S. Garma, Trad.) Madrid, España: Siglo XXI editores.

Secretaría General de la Organización de los Estados Unidos Americanos. (1971). En J. C. Howard F. Fehr, *La revolución en las matemáticas escolares (segunda fase)* (págs. 1-47). Washington DC: Eva V. Chesneau.