Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

El Movimiento de Proyectiles. Un Contexto Físico para el Estudio de la Parábola como Objeto Matemático

Tesis que presenta

Alan Daniel Robles Aguilar

Para obtener el Grado de

Maestría en Ciencias

con especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Miembros del Comité Revisor y Jurado:

- **M.C. Natividad Nieto Saldaña**
- **M.C. José María Bravo Tapia**
- **M.C. Abel Baca Ramírez**
- **Dr. Ramiro Ávila Godoy**
- **Dr. Agustín Grijalva Monteverde**

Hermosillo, Sonora, México Enero de 2011

AGRADECIMIENTOS

A mi Director de Tesis:

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Al Comité Revisor y Jurado:

M.C. Natividad Nieto Saldaña

M.C. José María Bravo Tapia

M.C. Abel Baca Ramírez

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

A mi esposa y a mi hijita…

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se muestra una propuesta para el diseño de una secuencia de actividades didácticas para la enseñanza de la función cuadrática y la parábola, dirigida a estudiantes de bachillerato tecnológico.

El propósito principal es el de promover la construcción de significados de la función cuadrática y la parábola a través de la resolución de problemas de Movimiento de Proyectiles, en el contexto de la Física.

Para apoyar el diseño didáctico y hacerlo más atractivo y vistoso para los estudiantes, se incluyen animaciones multimedia de las diversas situaciones de contexto que se presentan, así como ambientes interactivos creados con el software de geometría dinámica *GeoGebra*, para hacer simulaciones y manipulaciones de las situaciones representadas.

El Cálculo Diferencial, la Geometría y la Física son asignaturas muy importantes en la formación de todo estudiante de bachillerato tecnológico, ya que los objetos matemáticos que involucran tienen un papel determinante en el estudio de diversos fenómenos de interés y trascendencia para las Ciencias y la Ingeniería, y que van a estar presentes a lo largo de la trayectoria escolar futura de los estudiantes.

Desde nuestra propia experiencia como estudiante y como docente de Matemáticas y Física, se percibe la existencia de muchas dificultades para dar significados o ampliar los significados existentes a los objetos matemáticos en estos campos, y que a su vez resulten útiles para la resolución de situaciones problémicas de estos contextos. Esta situación se ha podido constatar al revisar algunos trabajos de investigación en Matemática Educativa que así lo reportan.

En el primer capítulo de este trabajo se presentan los antecedentes y la justificación del diseño de actividades didácticas que son la base y principal objetivo de esta propuesta. También en este capítulo se incluyen como marco referencial diversas investigaciones y tesis de Matemática Educativa que abordan la temática y problemática similar a la aquí presentada.

Adicionalmente se dedica un espacio a la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* y se presenta un esbozo histórico del surgimiento y desarrollo de la ciencia relacionada con el lanzamiento de proyectiles; ciencia que surge durante el Renacimiento con los estudios hechos por Tartaglia y por Galileo.

En el segundo capítulo se menciona el marco teórico que sirvió de base y sustento para el diseño de la secuencia de actividades didácticas, que es la propuesta del presente trabajo. Nuestro trabajo se apoya en elementos teóricos y metodológicos del *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*, conocido como EOS.

En particular, se toma en cuenta la naturaleza antropológica y pragmática de los *objetos matemáticos*, asumida en este marco teórico como las entidades que *emergen gradualmente de los sistemas de prácticas*, operativas (*lo que se hace*) y discursivas (*lo que se dice*), realizadas durante la resolución de problemas de un mismo tipo (Godino, Batanero y Font, 2008). A dichos sistemas de prácticas se les considera como los *significados* de los objetos matemáticos.

Partiendo de esta naturaleza pragmática de los objetos matemáticos y de la importancia de considerar diferentes formas de lenguaje y representación, la siguiente propuesta didáctica está dirigida a estudiantes de bachillerato tecnológico como actividad formativa y propedéutica, dado que en ella se presentan actividades cuya realización requiere describir, analizar, explicar y modelar situaciones de movimiento, en el contexto de la Física y, con el apoyo del software *GeoGebra*, se promueve el desarrollo de sistemas de prácticas de modelación y experimentación que permiten a los estudiantes la construcción de significados de los objetos matemáticos.

También en este capítulo se presenta la metodología utilizada para la realización del diseño de la secuencia de actividades didácticas, desde sus etapas iniciales, hasta llegar a tener el producto terminado y listo para su posterior implementación en los procesos de instrucción.

En el tercer capítulo se aborda la secuencia de actividades didácticas, propuesta del presente trabajo. También se realiza un análisis detallado de los significados institucionales (referencial, pretendido e implementado) que se incluyen y tratan de promover en la secuencia. Adicionalmente se presentan las situaciones problémicas de contexto que deberán resolverse para construir los significados de los objetos matemáticos.

En el cuarto y último capítulo se presenta el análisis didáctico de toda la secuencia, de acuerdo a los planteamientos del EOS, y esto incluye: los sistemas de prácticas, las configuraciones, las trayectorias, las normas y metanormas y la valoración de la idoneidad didáctica del diseño en su conjunto.

CAPÍTULO 1.- MARCO REFERENCIAL Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

Las Matemáticas en el bachillerato tecnológico se consideran materias básicas, ya que en la formación de los estudiantes se utilizan como herramientas poderosas para el modelado y la resolución de una gran variedad de situaciones problémicas en diversos contextos y disciplinas. Uno de los fines que se buscan en el bachillerato es dotar a los estudiantes de una cultura matemática que les permita un buen desenvolvimiento en su entorno así como la capacidad de comprender, analizar e interpretar una gran diversidad de fenómenos sociales, económicos y políticos, lo mismo que de ciencia y tecnología. Otros de los fines de las Matemáticas en el bachillerato es su carácter propedéutico, es decir, son un conjunto de conocimientos, habilidades y competencias que les permiten a los estudiantes continuar con su formación a nivel universitario.

Otra función del estudio de las Matemáticas es su carácter formativo, pues su estudio desarrolla y potencia una diversidad de habilidades intelectuales, tales como la capacidad de razonamiento lógico, de simbolización, de abstracción, de rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal, además de permitir la codificación, interpretación y procesamiento de la información.

La Física también es una materia clave en la formación de los estudiantes, la cual se aborda desde la secundaria y en muchos casos hasta el nivel profesional, también está presente en todos los fenómenos naturales de nuestro entorno. Es frecuente que los cursos de Matemáticas no incluyan suficientes aplicaciones prácticas o los problemas que se resuelven carecen muchas veces de un contexto adecuado. La Física resulta muy útil para dar contexto y significación a algunos objetos matemáticos más importantes.

De acuerdo al currículo actual del bachillerato tecnológico, la materia de Física se ubica en el 4° semestre, pero para su mejor aprovechamiento se tiene como prerrequisito los cursos de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial; dichas materias constituyen las herramientas fundamentales para hacer frente a los problemas planteados, para lograr la mejor comprensión de sus significados y posibles aplicaciones de estos conocimientos en un contexto determinado.

En los temas de la *parábola* en la asignatura de Geometría Analítica, o de la *función cuadrática* en la asignatura de Cálculo Diferencial, los significados que se promueven con mayor frecuencia, en contadas ocasiones consideran aplicaciones en el contexto de la Física y específicamente en temas de Movimiento de Proyectiles o problemas de Tiro Parabólico.

En los cursos de Cálculo Diferencial y Geometría Analítica del bachillerato es difícil encontrar que se promueva la construcción de nuevos significados para los objetos matemáticos de la función cuadrática y la parábola, orientados a situaciones problémicas de contextos de Movimiento de Proyectiles de la Física, a través de la resolución de problemas de aplicación en dichos contextos.

En muchas ocasiones los estudiantes se preguntan: *"¿y eso a mí para qué me va a servir?"*, en este caso con la resolución de problemas en contextos específicos queda respondido este cuestionamiento, ya que se puede apreciar claramente lo poderoso que resulta la herramienta matemática al momento de enfrentar este tipo de situaciones problémicas.

También en las escuelas ocurre frecuentemente que las academias de las asignaturas de Física y de Matemáticas están desvinculadas y actúan casi sin coordinación, lo que limita bastante la construcción de significados de los objetos matemáticos en contextos físicos, lo que priva a los estudiantes de la riqueza de significaciones que estos contextos pueden aportar.

En este orden de ideas Oviedo (2004) señala que actualmente, aunque se reconoce el papel fundamental de la elaboración puramente teórica de las Matemáticas, se presenta un esfuerzo didáctico que se desplaza hacia la aplicación de los métodos matemáticos para la solución de los problemas de las ciencias naturales y la tecnología, de este modo propone trabajar simultáneamente un mismo problema en Matemáticas y en Física, es decir, a partir de un problema físico concreto se plantea modelarlo matemáticamente para estudiar algún tema y en la medida que vayan surgiendo más nociones físicas, irlas incorporando al modelo matemático. Además menciona al modelado como una cuestión fundamental en Física ya que es una herramienta básica para resolver problemas y dar argumentaciones científicas. También afirma que cuando describimos un fenómeno físico a través de un modelo matemático, se pueden inferir conclusiones lógicas, se pueden hacer predicciones sobre el comportamiento futuro del fenómeno y conjeturar regularidades o cambios que pudieran llegar a presentarse.

Por su parte Dolores *et al.*(2002) señalan que en el bachillerato es donde se estudian de manera formal las Matemáticas de las variables con Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral, en estas materias se incluyen: el estudio de las secciones cónicas, la graficación de funciones y el análisis de sus gráficas. También señalan que prácticamente en todos los bachilleratos de México, con orientación hacia Ciencias o Ingeniería, se estudia al menos un curso de Física, donde se estudia el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento uniformemente variado. Presuponen que existe correlación entre las materias de Física y de Matemáticas, tanto en estudiantes como en profesores, ya que los programas de estudio así lo indican, en la medida que puedan interpretar aceptablemente representaciones cartesianas del movimiento en los contextos físico y matemático.

Dolores *et al.,* también mencionan que históricamente la *Teoría de las Secciones Cónicas* se encontraba desvinculada de los fenómenos físicos y que su estudio era de naturaleza puramente geométrica, luego con la aparición de la Geometría Analítica, muchos fenómenos naturales pudieron ser modelados y estudiados matemáticamente con fórmulas algebraicas y representaciones geométricas en el plano, con esto, la elipse y la parábola fueron de mucha utilidad para la modelación de las trayectorias de los planetas y el lanzamiento de proyectiles.

1.2. ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN RELACIONADOS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

El trabajo de investigación "*Un problema motivador para un trabajo interdisciplinario en Matemática y Física*", (Oviedo, 2004), es una propuesta de trabajo interdisciplinario entre la Matemática y la Física, tomando en consideración que los principales avances de la Matemática surgieron a partir de problemas relacionados con la Física. El proyecto de investigación busca adoptar estrategias para evaluar actividades de los estudiantes en la clase de Física, al momento de utilizar herramientas matemáticas para resolver los problemas. Se desea observar el uso que los estudiantes hacen de la Matemática y la Física, al resolver problemas de Mecánica con apoyo de la computadora, así como también poder obtener la expresión de la ecuación diferencial, partiendo de un problema físico de movimiento oscilatorio y resonancia armónica. Se propone trabajar en Física y Matemáticas simultáneamente en un mismo problema, es decir, a partir de una situación problémica concreta de Física se modela la situación matemática para estudiar el tema de las ecuaciones diferenciales, y en la medida que se presenten nuevas nociones de Física, poder ampliar el modelo matemático.

En otro trabajo titulado "*El tratamiento de fenómenos físicos para aprender Matemáticas*", (Ramírez y Cortés, 2005), los autores señalan que históricamente ha habido una estrecha relación entre la Física y la Matemática, que en la actualidad se ha ido perdiendo, para lo cual su planteamiento intenta recuperar el papel de la experimentación en el aula. Proponen diseños didácticos con base en prácticas de modelación de fenómenos físicos, esperando que los estudiantes construyan conocimiento significativo. Consideran que las actividades de modelación de fenómenos duales (Física y Matemática), tiene como intención manifiesta el desarrollo de procesos de matematización en el laboratorio para generar conocimiento matemático y al mismo tiempo aprender Física en el aula. Se adopta la perspectiva teórica de la Socioepistemología con una metodología sustentada en la Ingeniería Didáctica. Las actividades didácticas incluyen problemas de Física para tratar de confrontar el aprendizaje de los estudiantes.

En el artículo titulado "*La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*", (Torres y Suárez, 2005), se reporta el aprendizaje que logran los estudiantes de bachillerato tecnológico cuando se trabaja con un problema en una situación real de movimiento, al emplear sensores y calculadora graficadora. Mediante la aproximación socioepistemológica se identificaron tres usos de las gráficas: su construcción como regla de correspondencia entre dos variables, gráficas por operaciones y graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología. El trabajo permitió caracterizar el uso de las gráficas a través de las actividades de modelación.

Se revisó también el artículo "*Un acercamiento a la variación por estudiantes del nivel medio superior y superior, basado en la modelación del movimiento*", (García y Rivera, 2009), donde se toma al movimiento como fenómeno a modelar por los estudiantes y se construye la variación como herramienta por medio de una serie de actividades que van desde la comprensión del movimiento, de lo lineal a lo cuadrático, hasta construir lo cúbico. Se utilizan sensores de movimiento y calculadora graficadora. Se asume a la Socioepistemología como perspectiva teórica y línea de investigación de prácticas sociales y construcción social del conocimiento. Se considera a la modelación como práctica social base del diseño didáctico, donde se combinan el trabajo, la naturaleza y la especulación matemática. Menciona que los fenómenos naturales, físicos, químicos o económicos, de algún modo están relacionados con la variación, la cual es una herramienta fundamental para la modelación de esta clase de fenómenos.

Otro trabajo revisado fue "*Una epistemología de la matematización del movimiento: caso de predicción y variación con la serie de Taylor y diferencias finitas*", (Hernández, 2003), donde el autor, por medio de la revisión de textos antiguos, artículos de investigación y textos escolares vigentes, proporciona la base epistemológica de la matematización del movimiento. Con esto se dan referentes para el análisis de la construcción de significados en los estudiantes y se logra la incorporación de los contextos físicos, con la característica de que las estrategias de los estudiantes para resolver los problemas de la Física, incluyen ideas propias de cambio y variación. Se busca reorganizar el discurso matemático escolar al matematizar el movimiento y considerar la noción de predicción como eje organizador. También se señala que en los cursos de Matemáticas y Física a nivel superior hay una desvinculación entre un método matemático y otro, y del contexto físico. Se menciona la relación que debería existir entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático para obtener elementos que no están presentes en la matemática escolar contemporánea. Muestra evidencias de que los mecanismos de la epistemología de Newton-Taylor pueden utilizarse para construir acercamientos didácticos.

En el artículo "*Movimiento uniformemente acelerado. Construcción de la expresión* $\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{v_o} + \boldsymbol{v})$ *utilizando progresiones aritméticas*", (Moreno y Maldonado, 1998), se presenta una sugerencia de enseñanza alternativa del movimiento uniformemente acelerado con base en progresiones aritméticas. Se menciona la existencia de una relación dialéctica entre lo analítico en la matemática del movimiento y las nociones de predicción de los fenómenos físicos. Se comenta además que las progresiones aritméticas y la aceleración constante corresponden a los terrenos de la Matemática y la Física respectivamente y que a partir de Galileo estas dos ciencias constituyeron la llamada Física-Matemática.

En el trabajo "*El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas*", (Fernández y Rondero, 2004), se estudia la exposición y fundamentación que Galileo hizo de *Ley del Movimiento Natural de Caída*, resaltando su ruptura con la tradición aristotélico-escolástica al suponer un nuevo concepto de ciencia y la visión matemática del mundo natural. También se analizan los actuales libros de texto de educación media en España, donde la exposición de dicha Ley utiliza recursos matemáticos y secuencia parecidos a los de Galileo. Se señalan las dificultades para desarrollar el movimiento uniformemente acelerado en la educación media a causa de limitaciones en el Cálculo Matemático. Proponen retomar la proporcionalidad y el uso e interpretación de gráficas para combatir el formulismo operativo en la Física, es decir, la memorización de fórmulas sin tener conciencia de los significados que conllevan.

En la investigación “*El laboratorio de matemáticas un lugar para vincular la Matemática, la Física y la Ingeniería*”, (Cruz, sin fecha), se propone una estrategia didáctica con la finalidad de integrar conocimientos de Matemáticas, Física e Ingeniería, con la aplicación de nuevas tecnologías, para lo cual se creó un *Laboratorio de Matemáticas*, donde a partir de prácticas diseñadas, los estudiantes pueden ir integrando conocimientos que adquirieron a lo largo de su carrera. Se parte del desarrollo de algunos problemas y situaciones de la Ingeniería, desde un contexto general con el uso de nuevas tecnologías para analizar soluciones, se presentan aplicaciones propias de sus diferentes carreras, que favorecen y motivan a los estudiantes, quienes dan sentido a los cursos de Matemáticas que han estudiado.

En el artículo de investigación “*Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas de movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria*”, (Dolores *et al*., 2002), se presenta un trabajo exploratorio, con estudiantes y profesores de secundaria y bachillerato, el cual busca conocer las concepciones alternativas de las gráficas cartesianas con las que se representa el movimiento en la Física, en particular las relacionadas con la velocidad media, velocidad instantánea y la trayectoria de los cuerpos en movimiento. El trabajo muestra evidencia de que las interpretaciones que hacen los estudiantes de las gráficas no son las mismas que las de los expertos y los libros de texto escolares. También encuentra que hay deficiencias al respecto con los mismos profesores.

Por otra parte, en el artículo “*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*”, (Martínez, 2002a), se muestran evidencias de lo correlacionadas que están la motivación de los estudiantes y la presentación del profesor de ejemplos y aplicaciones donde se vincula a la Matemática con otras asignaturas. Se menciona el papel fundamental que tiene la resolución de problemas de la vida real y profesional, donde las ecuaciones diferenciales juegan un rol fundamental como objetos de mayor aplicación en la modelación de problemas reales en las más diversas disciplinas.

También el mismo autor presenta el artículo "*Ecuaciones diferenciales y cinética química*", (Martínez, 2002b), donde aborda los contenidos matemáticos a través de la modelación de problemas relacionados con las diferentes asignaturas del currículo en el área de Ingeniería Química. Además muestra cómo es que se decidió dar al curso de ecuaciones diferenciales un enfoque aplicado, haciendo énfasis en la resolución de problemas reales, particularmente los problemas de Cinética Química. El objetivo del curso era desarrollar los temas matemáticos a partir de la modelación de los problemas, donde para su obtención, se recurría a diversas fuentes o adaptaciones de problemas previamente utilizados.

Otro trabajo titulado "*Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales*", (Buendía, 2002), presenta un estudio de los nuevos significados de las ecuaciones diferenciales, sustentado en argumentos gráficos donde se relacionan la familia de soluciones con las condiciones iniciales. El proyecto considera dos aspectos fundamentales: uno es analizar textos de ecuaciones diferenciales y Física, mientras que el otro considera un estudio gráfico y analítico cuya finalidad es la de identificar cualidades visuales que caracterizan a las condiciones iniciales de una ecuación diferencial. El análisis gráfico acerca de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales, se realizó para generar significados y ampliar los propuestos por los textos de Física y de Matemáticas.

Relacionado con el trabajo anterior se presenta "*Elementos socioepistemológicos de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales*", (Velasco y Buendía, 2006), donde se realiza un análisis socioepistemológico de las ecuaciones diferenciales, desde los contextos gráfico, analítico y físico. Se señala en la investigación el tratamiento hasta el segundo orden de la ecuación diferencial, debido a que para la modelación de un fenómeno físico de orden mayor sería muy complejo de realizar. Las prácticas que se promueven son las de modelación de un fenómeno, la relación de linealidad, la graficación y la predicción en el comportamiento de la gráfica.

En el trabajo "*Utilización de un modelo de crecimiento económico para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales*", (Fascella, 2006), se presenta la utilización de un modelo de crecimiento económico que sirve de motivación para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales en los cursos de Economía. Para lo cual se vale de problemas relacionados con la Economía, lo que hace posible su interacción con las Matemáticas. El trabajo propone una alternativa a los métodos tradicionales de enseñanza de la Matemática, aunque haya sido pensado para estudiantes de las áreas económico-administrativas, tiene validez para aplicarse en otras disciplinas, ya que el tema matemático y el problema que plantea son ejemplos para el desarrollo de su metodología.

1.3. TESIS RELACIONADAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

En la tesis "*Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme*", (Hernández, 2009), se señala que las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales que se presentan en los cursos tradicionales son pocas y muy limitadas, de aquí que presente su propuesta de diseño de una serie de actividades didácticas de aprendizaje de ecuaciones diferenciales en el contexto de la Física y del movimiento uniforme, donde se tomen en cuenta las representaciones, los conocimientos previos y las creencias de los estudiantes. En el diseño de actividades se consideran tres de los fenómenos más conocidos en Física que son: desplazamiento, velocidad y aceleración; además se toman en cuenta los tres componentes básicos en Matemática Educativa que son: el epistemológico, el cognitivo y el didáctico. El sustento teórico-metodológico de esta investigación es el de la teoría de "*La Matemática en el Contexto de las Ciencias*", desarrollado por la Dra. Patricia Camarena.

En el trabajo de tesis "*La interpretación física como una alternativa didáctica de las ecuaciones diferenciales*", (Filio, 1992), se construyen modelos matemáticos a través de una problemática definida en el contexto de la Física, entre los fenómenos físicos que presenta se encuentran los del movimiento de una partícula y la caída libre de un cuerpo en el plano.

En la tesis "*Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso matemático escolar: la transposición didáctica del diferencial en la Física y la Matemática escolar*", (Pulido, 1998), el autor recurre a una visión epistemológica de los diferenciales en el contexto de la Física, también plantea algunos aspectos de ecuaciones diferenciales en los contexto de donde surgieron históricamente. Se presentan varios aspectos en la descripción de los fenómenos estudiados, se presenta un estudio de la integral de línea, la de superficie y volumen.

En la tesis titulada "*Análisis de textos para Ingeniería (un breve estudio sobre las cantidades en movimiento)*", (Camacho, 1992), el autor realiza un estudio detallado de la variabilidad de los fenómenos físicos y el planteamiento de su descripción mediante una ecuación diferencial, se resaltan los aspectos geométricos de la utilización de la serie de Taylor.

En la tesis "*Desarrollo de la noción derivada a través de un enfoque integrador entre la Física y la Matemática*", (Trujillo, 2007), se hace notar la desvinculación que existe entre los conocimientos adquiridos por los estudiantes en las diferentes asignaturas del bachillerato, esto es, no se apoya en lo aprendido de otras asignaturas para hacer aplicaciones, vincularse o relacionarse con la Matemática. El autor sostiene que la vinculación entre asignaturas permite relacionar sus diferentes temas, con lo que se responde a necesidades de la Física con Matemáticas o de la Matemática con sus múltiples aplicaciones en la Física.

La tesis "*La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*", (Torres, 2004), tiene como objetivo hacer evidentes los aprendizajes que logran los estudiantes de bachillerato al trabajar con un problema de una situación real de movimiento, empleando tecnología como son: los sensores de movimiento y la calculadora graficadora. La hipótesis planteada es que la tecnología genera un nuevo uso de las gráficas. El marco teórico con el que se abordó este proyecto contempla cuatro aspectos que guardan una estrecha relación entre ellos: 1) la aproximación socioepistemológica, que sostiene que la construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la Matemática, 2) la problemática enfocada en el uso de las gráficas, 3) el estado del arte sobre aspectos de graficación, y 4) el marco que sirvió de referencia para describir un nuevo uso de las gráficas: el comportamiento tendencial de las funciones.

En la tesis "*La evaluación en actividades de aprendizaje con uso de tecnología*", (Gómez, 2007), se aborda la evaluación del aprendizaje en escenarios tecnológicos donde se modelan situaciones de movimiento. Se revisa cómo se considera la tecnología en las competencias básicas del bachillerato tecnológico, de acuerdo a los lineamientos de la SEP. Su marco teórico se forma con diversos estudios sobre evaluación. Se analiza una actividad desarrollada por Torres (2004) y las fuentes de información con que contó durante su investigación. Muestra además el funcionamiento con una actividad de modelación con tecnología en una situación de movimiento.

En la tesis "*Variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en una situación de graficación y modelación de movimiento*", (Flores, 2007), se reportan los resultados de una investigación con el fin de analizar la construcción del conocimiento matemático que logran los estudiantes del bachillerato tecnológico cuando realizan la graficación en la resolución de un problema que involucra a una situación real de movimiento. Su marco teórico es la Socioepistemología y su principal referencia es la tesis de Torres (2004). Además se hace énfasis en el tratamiento simultáneo de las variaciones de una función en cuanto a posición y velocidad. Este trabajo contribuye al entendimiento de la construcción de gráficas que hacen los estudiantes de bachillerato, usando tecnología, como son las calculadoras graficadoras y los sensores para modelar situaciones de movimiento.

1.4. LA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

Introducción

Conscientes del papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos y del papel que la resolución de problemas de Movimiento de Proyectiles tuvo en el surgimiento y desarrollo de aplicaciones de la Matemática y de la Física, históricamente dichos problemas significaron grandes retos para los físicos y los matemáticos de la antigüedad, ya que a través de la modelación matemática de esas situaciones se lograron importantes avances para la ciencia y la tecnología, mismos que derivaron en el surgimiento de la ciencia de la Balística. Este ha sido un ejemplo más de cómo, al intentar resolver problemas de las ciencias a través de su matematización, se logran importantes y significativos desarrollos en la ciencia aplicada y en la Matemática misma. Es por ello que la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*, en particular de la Física, cobra relevancia debido a la gran utilidad que ha representado para el hombre resolver una gran diversidad de problemas y aplicaciones prácticas, muchas de las cuales requieren ser matematizadas al momento de intentar resolverlas.

Desarrollo

Los altos índices de reprobación que se presentan en los diferentes cursos de Matemáticas en el bachillerato tecnológico y en las diferentes escuelas de Ingeniería, son el reflejo del rechazo que la Matemática causa y síntoma inequívoco de la problemática que representa para muchos estudiantes, debido al poco interés que les despierta. Las razones de esto pueden ser el hecho de no ver aplicaciones concretas y de manera inmediata, así como desconocer el sentido que tiene aprender Matemáticas para el trabajo y para la vida. Un elemento a tomar en cuenta es la desvinculación que existe entre los cursos de Matemáticas y las demás asignaturas de los programas de estudio.

Las Matemáticas que se requieren en las escuelas son producto del contexto del área de conocimiento donde se utilizan, pero con el paso del tiempo han perdido la contextualización de su origen y se dan como un conocimiento acabado que presenta una formalidad matemática y una estructura que las hace demasiado abstractas para los estudiantes que tratan de utilizarlas en su formación.

La *Matemática en el Contexto de las Ciencias* es un programa de investigación propuesto por la Dra. Patricia Camarena, quien lo considera como un marco teórico-metodológico. Esta propuesta reflexiona acerca de la vinculación que debería presentarse entre la Matemática y las ciencias que la requieren en diversos niveles de articulación, como es el caso de la Física. Esta metodología nace en 1982 en el Instituto Politécnico Nacional y se inició con investigaciones sobre el currículo, donde se buscaba abordar la problemática del proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática en las carreras de Ingeniería.

La *Matemática en el Contexto de las Ciencias* reflexiona sobre los procesos de formación matemática de los estudiantes y se fundamenta en la función específica que tiene la Matemática en el nivel superior en carreras en donde no se van a formar matemáticos, además de considerar los siguientes paradigmas educativos:

- Las asignaturas del área de Matemáticas no son una meta por sí mismas.
- Las Matemáticas son herramientas de apoyo a la carrera en estudio.
- Las Matemáticas deben ser formativas para los estudiantes.
- A través de la integración de conocimientos se observan los fenómenos de la naturaleza y se despierta el interés en las ciencias.

El supuesto filosófico educativo es que el estudiante tenga la capacidad para hacer transferencias de conocimiento de la Matemática a las áreas que la requieran, esto con el fin de favorecer sus competencias profesionales y laborales.

Tomando en cuenta que en el salón de clases están presentes tres elementos básicos: el estudiante, el profesor y el contenido a ser aprendido, los cuales interactúan entre sí, de acuerdo a la "*terna dorada en la educación*", se abren cinco fases (Camarena, 2003):

- La Curricular, desarrollada desde 1984.
- La Didáctica, iniciada desde 1987.
- La Epistemológica, abordada en 1988.
- La de Formación Docente, definida en 1990.
- La Cognitiva, estudiada desde 1992.

La *Fase Curricular* surge del planteamiento de cómo poder construir una metodología para el diseño de programas de estudio de las ciencias básicas (Física, Química, etc.) en las carreras de Ingeniería, buscando que los profesores estuvieran convencidos de por qué determinados temas eran incluidos en el currículo y que los estudiantes pudieran ser motivados cuando el profesor mostrara las relaciones de las ciencias básicas con la Ingeniería y las aplicaciones de la Matemática en la Ingeniería.

El paradigma educativo que fundamenta la metodología para el diseño curricular de los programas de ciencias básicas (Física, Química y Matemáticas) en carreras de Ingeniería, parte del hecho que: "*con los cursos de las ciencias básicas el estudiante poseerá los elementos cognoscitivos y herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera, es decir, las asignaturas de las ciencias básicas, son el cimiento de la Ingeniería, pero no son una meta por sí mismas, sin dejar a un lado el hecho de que estas ciencias son formativas para el alumno*". (Camarena, 2002).

El proceso metodológico de la *Matemática en Contexto* es el siguiente:

1. Determinación de los eventos contextualizados:
    - Análisis de textos de las demás asignaturas que cursa el estudiante para determinar eventos en contexto que se le pueden llegar a plantear.
    - Vinculación con la industria para determinar eventos contextualizados para ser planteados a los estudiantes.

- Determinación de eventos de la vida cotidiana que involucren temas de los cursos.

2. Planteamiento del evento contextualizado.
3. Determinación de las variables y constantes del problema.
4. Inclusión de temas y conceptos matemáticos nuevos que se requieran para el modelaje y la solución, además de temas indispensables de las disciplinas del contexto.
5. Determinación del modelo matemático.
6. Solución matemática del problema.
7. Determinación de la solución requerida por el problema en el marco de las disciplinas en contexto.
8. Interpretación de la solución en términos del problema y el área de las disciplinas en contexto.
9. Recapitulación de los temas nuevos de Matemáticas que se consideraron en la resolución del evento, con el fin de impartir una Matemática descontextualizada donde se retoma la formalidad que se requiera, de acuerdo al área de estudio.

Con la *Fase Epistemológica* se verifica cómo una buena parte de la Matemática, que se considera en los cursos de las diferentes carreras de Ingeniería, proviene del contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento, pero que a lo largo del tiempo pierde su contexto, donde al ser llevada a las aulas se ofrece como Matemática pura y abstracta, lo cual hace que pierda todo sentido y utilidad para los estudiantes que no van a ser matemáticos (Chevallard citado en Camarena, 2004).

Con la *Fase de Formación Docente* se han detectado las deficiencias de los profesores que imparten los cursos de Matemáticas y que su formación no es de matemático, ya que dichas deficiencias son causa en gran medida de las deficiencias de los estudiantes. Además se señalan los lineamientos de la práctica docente para ser contemplados en los programas de actualización para profesores de las ciencias básicas en carreras de Ingeniería.

La *Fase Cognitiva* es el resultado de que en la *Matemática en Contexto* se resuelven problemas contextualizados en otras disciplinas, de aquí que sea necesario incorporar teorías acerca de la resolución de problemas, además de realizar investigaciones sobre los elementos que se ponen en juego al momento de que el estudiante resuelve problemas.

La *Matemática en Contexto* refuerza el desarrollo de habilidades mentales a través de la resolución de problemas que tienen relación con los propios intereses del estudiante, asimismo se ha determinado que se estimula fuertemente su factor motivacional y su desempeño académico se incrementa.

Finalmente la investigadora argumenta en relación con la opinión que tienen algunas personas de la Matemática en Contexto sin haberla utilizado: "*En general al hablar de la Matemática en Contexto no es simplemente ofrecer aplicaciones, sino desarrollar la teoría Matemática a las necesidades y ritmos que dictan los cursos de Ingeniería. El problema que algunas personas que no han practicado la Matemática en Contexto ven, es que de esta forma se estará ofreciendo un curso de tipo operativo y no será formativo porque solamente se está dando lo que necesitan. Para esto cabe recordar que el decir que se dan los temas a las necesidades y ritmos que dictan los cursos básicos de la Ingeniería y propios de la Ingeniería, no implica que se dé un curso mecánico, ni un curso no formativo, pues estos elementos son determinados por la forma como imparta estos temas el profesor*." (Camarena, 1999).

1.5. EL MOVIMIENTO DE PROYECTILES EN LA HISTORIA

Introducción

En el siguiente apartado se hace la narración de una sucesión de eventos históricos que derivaron en el surgimiento de una nueva ciencia, la Balística, como resultado de la necesidad de resolver problemas prácticos relacionados con el lanzamiento de proyectiles, lo que a su vez permitió el desarrollo de la Matemática por medio del objeto matemático parábola, cuya significación se da en el contexto de la Física. Este es un claro ejemplo de la importancia que tienen los contextos para los objetos matemáticos, derivado del pragmatismo que de manera intrínseca poseen.

Desarrollo

Los orígenes de la ciencia moderna se remontan a Galileo y los estudios que realizó sobre el movimiento, debido a que lo analizó desde un punto de vista estrictamente matemático. En la antigüedad los griegos ya habían estudiado el movimiento pero sin aplicarle ninguna fórmula matemática, a pesar de que tanto la Matemática como la Física ya habían alcanzado un cierto nivel de desarrollo. Esto se debió en parte a que Galileo y antes de él Tartaglia, se dedicaron a estudiar el fenómeno del movimiento con precisión matemática, hecho que dio un gran impulso a la tecnología del Renacimiento y que los griegos nunca llegaron a descubrir. (Burgio, 2006).

Si bien es cierto que la historia concede a Galileo Galilei el mérito de haber iniciado la ciencia moderna y la fundación de un nuevo método científico, basado en la observación y el cálculo matemático experimental, también es posible identificar un periodo específico en su obra que podría ser visto como la fuente de gran parte del desarrollo de su método y la causa de sus descubrimientos revolucionarios. Galileo se ocupó del estudio del movimiento en sus aspectos físicos y matemáticos, a pesar de la tradición cultural predominante en esa época.

Mientras que la cultura predominante, a raíz de los escritos de Aristóteles, distinguía diferentes tipos de movimiento (natural, violento, directo, circular, etc.), Galileo simplifica este hecho al considerar cualquier tipo de movimiento como de un solo tipo: el movimiento "*inercial*" (sin definirlo explícitamente), y se analiza solamente en sus aspectos físicos y matemáticos, es decir, dirección, velocidad, aceleración, etc. Lo que hoy puede parecer obvio y trivial en aquellos días era una revolución conceptual contra la que no tuvieron argumentos los que sostenían como válida la antigua definición dada por Aristóteles.

La incapacidad de la ciencia griega para explicar el movimiento a pesar del alto nivel de Matemáticas y Física que alcanzaron y a pesar de hombres como Euclides, Arquímedes y otros matemáticos de la época, se debió a que no creían en el análisis y estudio del movimiento en un sentido estrictamente matemático, sino que terminaron aceptando pasivamente la definición aristotélica tradicional de tipo filosófico y cualitativo. La mayor parte de la responsabilidad se atribuye a la veneración exagerada por disfrutar las obras antiguas y el pensamiento de Aristóteles (384-322 a.C.), hasta el punto que los estudiosos de la época no pusieron en tela de juicio ni cuestionaron su teoría, lo que limitó el desarrollo de nuevas investigaciones en ese campo.

La fama y presencia abrumadora de Aristóteles se atribuye haber hecho sombra al pensamiento de Demócrito (460-370 a.C.), que había percibido la oportunidad de estudiar la mecánica de la naturaleza en un sentido estricto. Con el tiempo, al final de la época antigua, Aristóteles comenzó a ser criticado y corregido por Giovanni Filopono (s.V-VI d.C.) que en el caso del movimiento introdujo una nueva propiedad, el "*ímpetu*".

En la Edad Media se había heredado del pasado la misma cultura de admiración aristotélica y durante el siglo XIV en la Universidad de París, en el *Merton College* de Oxford, los estudiosos como Nicola Oresme, Giovanni Buridan, Alberto de Sajonia y otros, abordaron el tema del movimiento casualmente tratando de rectificar las teorías de Aristóteles. Más allá de introducir algún método o concepto innovador, como la utilización de gráficas geométricas de Oresme, no lograron influir en la ruta cultural y científica de la época que permaneció casi insensible a sus teorías.

De hecho, como sucede a menudo en la ciencia, los avances más decisivos y revolucionarios ocurren cuando se tiene la necesidad de resolver problemas prácticos, a veces graves o urgentes. Así, los notables logros de los antiguos griegos y romanos en el campo de la Aritmética, la Geometría, la Física y la Astronomía se deben principalmente a su necesidad de resolver los diferentes problemas de la Arquitectura, Ingeniería y Construcción o a los problemas relacionados con la navegación. No fue una coincidencia para un genio de la Matemática como Arquímedes resolver problemas complejos relacionados con la física de fluidos y la ingeniería marina, de su ciudad natal, Siracusa, la cual fue en su tiempo una potencia marítima y comercial. Tal vez para los antiguos estudiosos, no había problemas de movimiento que los hiciera preocuparse demasiado, ya que contaban con una buena defensa contra el lanzamiento de flechas consistente en escudos y armaduras.

Tanto Galileo como Tartaglia vivieron en una época de guerras continuas en las que el aire era traspasado por movimientos fulminantes, poderosos y despiadados, de objetos no conocidos en aquella época: los proyectiles en forma de balas de cañón.

Durante el Renacimiento las armas de fuego se inventaron y perfeccionaron llegando a ser devastadoras y mortales. Las técnicas metalúrgicas también habían mejorado con ello, los cañones largos o cortos eran construidos en aleación de bronce para el beneficio y seguridad de la artillería. Entre las naciones pequeñas y grandes de Europa de aquella época se provocó una auténtica carrera armamentista que rápidamente alteró las tácticas militares establecidas en las batallas y con ellos de la vida política y social.

Las armas de fuego tenían un costo importante, no sólo su fabricación sino también su operación. Además de las balas, también la pólvora era muy cara, en parte debido a los tres ingredientes simples de los que se compone: el carbón, el salitre y el azufre; el segundo por lo general procedía de las regiones del Báltico, mientras que el último de las minas.

Teniendo en cuenta los altos costos del armamento, los gobiernos y todos los participantes en el uso de la artillería esperaban que sus armas dispararan con una mayor eficiencia y precisión tanto como fuera posible y así evitar que las balas y la pólvora se agotaran antes de la llegada del enemigo. Para ello no dejaron de participar en la resolución de este importante problema, incluso los estudiosos más distinguidos de la época estudiaron la trayectoria de las balas de una manera más rigurosa y científica posible.

El primero de ellos en lograr resultados significativos fue un personaje digno del estereotipo de genio del Renacimiento: Nicolo Fontana, apodado Tartaglia (que significa tartamudo). Nacido en 1499 en Brescia, Italia, quien de niño resultó gravemente herido en la cara durante el saqueo de su ciudad en 1511 por parte del ejército francés. A pesar de los cuidados y curaciones que le brindó su madre, quedó marcado para el resto de su vida y ya nunca más fue capaz de articular las palabras correctamente, de modo que sus contemporáneos le dieron el apodo de Tartaglia.

Tartaglia en 1531, mientras estaba en Verona, como él mismo relata en la introducción de su libro *La Nova Scientia* publicado en tres volúmenes en 1537 y dedicado al duque de Urbino, fue invitado por su viejo amigo un oficial de artillería, para abordar la cuestión de puntería de los disparos de las armas, y así aunque no hubiera practicado nunca cualquier arte de guerra pero deseoso de servir a su amigo se comprometió a dar una respuesta rápida. En el curso de su investigación, lo que redundará en el nacimiento oficial de la Balística como el estudio del movimiento de proyectiles solamente, Tartaglia, apoyado en sus investigaciones y también de forma experimental con la ayuda de escuadras y transportadores estableció que la inclinación óptima de un cañón para lograr un disparo de alcance máximo debía ser de 45°.

La importancia de toda esta investigación es doble: no sólo fue el primer ejemplo de la transformación de una técnica práctica, la Artillería, en una verdadera ciencia regida por leyes matemáticas, sino que también fue el primero en estudiar el movimiento en el sentido estrictamente físico y mecánico. Toda *La Nova Scientia*, que en realidad se refiere sólo a los proyectiles balísticos sin ninguna intención de revolucionar el método científico, está llena de descripciones de forma matemática aplicadas al movimiento de los cuerpos, así como definiciones, postulados, principios y referencias a la Geometría Euclidiana. Los resultados de los estudios desde el punto de vista práctico, fueron un éxito y pronto despertaron el interés de los artilleros, quienes primero querían comprobar experimentalmente los resultados obtenidos. Si bien Tartaglia fue capaz de demostrar que la trayectoria de la bala era una línea curva, no pudo dar una definición matemática precisa de ello.

Tocó a Galileo corregir al inventor de fórmulas de la Balística pues desarrolló las leyes fundamentales de la caída de los cuerpos, y entre otras cosas, cambió la descripción de Tartaglia de la trayectoria balística de los proyectiles, llamándola forma parabólica. También encontró la función matemática para representarla. El genio y la grandeza de Galileo lo llevaron a observar empíricamente la totalidad de la naturaleza y el universo en forma cuantificada geométrico-matemática, y a elegir los principios del método científico real. Pero, de hecho, este método ya estaba presente en el *Tratado de Balística de Tartaglia*, aunque sólo sea desde el punto de vista de la teoría implícita, con esto se le podría considerar como cofundador de la ciencia moderna.

1.6. OBJETIVO

Que los estudiantes construyan significados de la parábola como objeto matemático, que resulten eficaces para analizar, interpretar y resolver problemas relacionados con el movimiento de proyectiles.

Para la consecución de este objetivo, se diseñará una secuencia de actividades didácticas, donde el movimiento de proyectiles constituirá el contexto en el que se plantearán las situaciones problémicas que servirán de punto de partida del proceso de estudio.

Esto a su vez, permitirá ilustrar cómo la Matemática se desarrolla en interacción dialéctica con otras ciencias, como es el caso de la Física que, en este caso, aporta las situaciones problémicas cuya resolución da lugar, por una parte, al desarrollo de la Matemática al crear nuevos significados de los objetos matemáticos intervinientes y por otra, al desarrollo de la Física al resolverse el problema planteado.

CAPÍTULO 2.- MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

2.1. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Introducción

La investigación en Matemática Educativa tiene como propósito fundamental mejorar los procesos de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en el aula, para lo cual se hace indispensable comprender dichos procesos. Es precisamente a través de un marco teórico como puede lograrse la mejor comprensión de los procesos de estudio y aprendizaje de las Matemáticas, debido a que proporciona una serie de herramientas conceptuales y metodológicas que permiten analizar e interpretar los sucesos en el aula, esto es, permiten describirlos, explicarlos y valorarlos, a partir de lo cual se está en mejores condiciones de proponer cambios a los procesos de instrucción orientados a mejorarlos.

2.1.1. Consideraciones Teóricas

Para el diseño de la secuencia de actividades didácticas propuesta en este trabajo, así como para su análisis, interpretación y valoración, se tomó como soporte teórico el *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática* (EOS), (Godino, Batanero y Font, 2008).

En este marco teórico se parte de la consideración de la Matemática de tres modos:

- Como una actividad de resolución de problemas.
- Como un lenguaje simbólico.
- Como un sistema conceptual lógicamente organizado.

2.1.2. Situaciones Problémicas

El concebir a la Matemática como actividad de resolución de problemas, parte de asumir que, precisamente, es esta actividad la que da origen al surgimiento y desarrollo de los objetos y procesos matemáticos, esto a su vez conlleva a establecer la naturaleza antropológica y pragmática de los mismos.

De este modo, cuando se pretende resolver una situación problémica, al tratar de ejecutar alguna tarea o cuestionamiento, para lo cual no se cuenta con los elementos suficientes, es lo que deriva en un estado psicológico de *conflicto cognitivo*, es decir, en un *estado problémico* ya que no se puede lograr el objetivo deseado. A su vez esto sirve como motivación para producir una especie de activación intelectual para poner todo el empeño, talento, experiencia y conocimientos para tratar de interpretar y resolver la situación planteada, lo que se conoce como *problematización*.

Considerando a la Matemática de los tres modos anteriormente mencionados y de acuerdo al marco teórico que se emplea, al intentar resolver las situaciones problémicas se propicia el desarrollo de sistemas de prácticas matemáticas y la construcción de significados de los objetos matemáticos.

2.1.3. Sistemas de Prácticas Matemáticas

Cuando una persona intenta resolver un problema matemático, realiza una serie de acciones, como podrían ser actuaciones o manifestaciones verbales o simbólicas, incluso gesticulaciones o señales, todas ellas orientadas hacia la determinación de la solución del problema, y posteriormente, esta persona recurre a comunicar los resultados obtenidos, a validarlos y tal vez a lograr su generalización. Estas acciones son las que se denominan *sistemas* de *prácticas matemáticas*.

Podría tratarse de una persona o de toda una comunidad de personas, que para nuestros efectos se considera una institución matemática, comprometida en la resolución de un mismo tipo de problemas, de este modo se asume que los sistemas de prácticas matemáticas son relativas al sujeto que las realiza: si son realizadas por una sola persona, se consideran *sistemas de prácticas matemáticas personales*, y si son promovidas por una institución o realizadas en el seno de la misma, se consideran *sistemas de prácticas matemáticas institucionales* (Godino y Batanero, 1994).

Una práctica matemática específica se dice que es *significativa* o que tiene algún sentido, si para alguna persona dicha práctica desempeña una función importante en el logro del objetivo que es el de resolver algún problema. Se habla de prácticas significativas porque en el afán de resolver el problema se presentan intentos fallidos o procedimientos incorrectos que luego son desechados.

Las instituciones educativas promueven en los estudiantes la realización de sistemas de prácticas acordes a la planeación y a los programas de estudio, luego los profesores interpretan esos planes y programas pero le dan una orientación personal a los sistemas de prácticas que promueven y toman en consideración al grupo de estudiantes que tienen como destinatarios, finalmente cada estudiante, con todos los elementos anteriores, desarrolla su propio sistema de prácticas. Dicho de otro modo, en una institución educativa se espera que los sistemas de prácticas personales de los estudiantes sean cada vez más congruentes con los sistemas de prácticas institucionales.

2.1.4. Significados

Se considera que los significados que cada sujeto da a los objetos matemáticos son los sistemas de prácticas matemáticas que se ponen en juego al intentar resolver un mismo tipo de problemas donde se hace referencia al objeto, es decir, lo que el sujeto podría hacer o decir sobre el objeto matemático en cuestión.

De los sistemas de prácticas que el sujeto utiliza para resolver un cierto tipo de situaciones problémicas, surgen los objetos matemáticos y dichos sistemas de prácticas constituyen los *significados personales* que el sujeto tiene de dichos objetos.

Cuando un conjunto de personas que conforman una institución comparte un conjunto de prácticas y las utiliza para resolver un cierto tipo de situaciones problémicas, a dicho conjunto de prácticas se le conoce como *sistema de prácticas institucionales* y constituyen los *significados institucionales* de los objetos matemáticos.

Al entender los significados como sistemas de prácticas y conscientes de su utilización en el análisis didáctico, el marco teórico propone clasificarlos de acuerdo al tipo básico de significados que representan.

En relación a los *significados institucionales*, sus principales tipos son los siguientes:

- *Referencia:* es el que se promueve por la institución educativa, de acuerdo a sus planes y programas de estudio y es parte del significado global.
- *Pretendido:* es el que se deriva de la planeación que hace el profesor de aquellos sistemas de prácticas que va a promover.
- *Implementado:* es el sistema de prácticas que se logró promover en el aula.

- *Evaluado:* es el sistema de prácticas utilizado para hacer la evaluación de lo que se ha logrado aprender.

Una vez que el profesor interpreta los significados institucionales y agrega su toque personal y el sistema de prácticas derivado de su propia experiencia y dependiendo de los estudiantes a los que está dirigido, trae como resultado la apropiación que cada uno de ellos hace de lo aprendido.

Como *significados personales* de los estudiantes, los tipos serían los siguientes:

- *Global*: corresponde a todos los sistemas de prácticas que un estudiante ha adquirido sobre un objeto matemático.
- *Declarado*: se muestran los sistemas de prácticas que por medio de evaluaciones se hacen evidentes, pudiendo ser correctas e incorrectas.
- *Logrado*: corresponde a los sistemas de prácticas que el estudiante ha hecho suyas de aquéllos que promueve la institución.

2.1.5. Objetos Matemáticos

Los objetos matemáticos son entes de muy diversa naturaleza, tales como los símbolos, las actividades, los sucesos, las ideas, y prácticamente cualquier cosa sobre la que se pueda hablar o pensar.

Derivado de la enorme diversidad de objetos, se ha propuesto clasificarlos de acuerdo a los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios:

1) *Lenguaje:* términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., en sus diversos registros: oral, gestual, etc.

2) *Situaciones problémicas:* problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc.; son las tareas que inducen la actividad matemática.

3) *Conceptos-definición*: introducidos mediante definiciones o descripciones: número, punto, recta, media, función, etc.

4) *Proposiciones*: que suelen darse como enunciados sobre conceptos.

5) *Procedimientos*: operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, etc.

6) *Argumentaciones*: enunciados que se usan para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

Estos seis tipos de objetos primarios se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc., y amplían la distinción tradicional entre entidades conceptuales y procedimentales, por considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y los emergentes de la actividad matemática.

La razón de ser de la actividad matemática son las situaciones problémicas, el lenguaje representa a las entidades restantes además de servir como instrumento para la acción, los argumentos son las justificaciones de determinados procedimientos y proposiciones.

2.1.6. Elementos del Análisis Didáctico

Asumiendo los preceptos establecidos en los párrafos anteriores de este apartado, que constituyen los elementos fundamentales de nuestro marco teórico, se ha diseñado la secuencia de actividades didácticas que se presenta en este trabajo. La descripción, explicación y valoración de las actividades de dicha secuencia se hará utilizando la propuesta metodológica establecida en el propio marco teórico, para llevar a cabo lo que se denomina el *Análisis Didáctico*. Esta metodología propone realizar el análisis en cinco niveles:

1) Análisis de las prácticas matemáticas,
2) Análisis de objetos y procesos matemáticos,
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa).
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Los niveles del 1 al 4 son herramientas para una didáctica descriptiva explicativa (para comprender), es decir, ¿qué está pasando aquí? El nivel de análisis 5 pretende ser una herramienta para una didáctica prescriptiva, es decir, una herramienta que permite valorar las actividades y orientar las posibles modificaciones para mejorar los procesos.

El nivel 1.- Análisis de los sistemas de prácticas matemáticas:

- Se aplica, sobre todo, a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio y pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas (o planificadas) en dicho proceso.
- Permite descomponer el proceso de estudio en una secuencia de episodios y, para cada uno de ellos, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal.

El nivel 2: Análisis de objetos y procesos matemáticos.

En este nivel de análisis se pretende dar respuesta a la pregunta de:

- ¿Qué procesos y objetos matemáticos son activados con las prácticas matemáticas realizadas?

El nivel 3: Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos.

En este nivel de análisis se pretende dar respuesta a un grupo de preguntas como las siguientes:

- ¿Cuáles y de qué tipo son las configuraciones didácticas en que se divide el proceso de instrucción?
- ¿Cómo se articulan entre sí las configuraciones didácticas para formar la trayectoria didáctica?
- ¿Cuáles son los conflictos semióticos?, es decir, las disparidades entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

El nivel 4: Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa).

En este nivel de análisis se pretende dar respuesta a la pregunta de:

- ¿Qué normas y metanormas han condicionado el proceso de instrucción?

El nivel 5: Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

En este nivel de análisis se pretende dar respuesta a un grupo de preguntas relacionadas con la idoneidad didáctica del proceso de estudio analizado. Son preguntas como las siguientes:

- ¿Cómo se puede mejorar la idoneidad *epistémica* (relativa a los significados institucionales), *cognitiva* (significados personales), *mediacional* (recursos tecnológicos y temporales), *emocional* (actitudes, afectos, emociones), *interaccional* (interacciones docente-discentes), y *ecológica* (relaciones intra e interdisciplinares y social del proceso de estudio implementado?

- ¿Cómo se puede mejorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado?

2.2. METODOLOGÍA DEL DISEÑO DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Para el diseño de la secuencia de actividades didácticas se llevaron a cabo una serie de acciones que pueden agruparse en lo que denominamos fases del proceso, las cuales se describen a continuación:

- **Revisión Bibliográfica**.- Esta etapa estuvo orientada a la búsqueda de antecedentes ligados a la enseñanza de la parábola o de la función cuadrática en situaciones problémicas de la Física como son las de movimiento o lanzamiento de proyectiles, con el fin de contextualizar y justificar la secuencia didáctica propuesta.

  En primer lugar, como se menciona en el Capítulo 1 relativo al Marco Referencial que sustenta el presente trabajo, se revisaron algunos artículos de investigación de Matemática Educativa que tuvieran relación con los temas presentados en este trabajo y más específicamente los que tuvieran que ver con los fenómenos del movimiento en el contexto de la Física.

  También se revisaron varias tesis de posgrados en Matemática Educativa de diferentes instituciones educativas que estuvieran relacionadas con situaciones de movimiento contextualizadas en fenómenos de la Física.

  Se analizaron y comentaron varios documentos y tesis relacionados con la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*, ya que el presente diseño didáctico comparte la visión de esta propuesta metodológica.

  Finalmente se revisaron los antecedentes históricos del Movimiento de Proyectiles, como una manera de entender las motivaciones que se han tenido a lo largo del tiempo para resolver problemas de aplicación en diversos contextos y disciplinas, y así poder apreciar cómo esto ha contribuido al desarrollo y evolución de la Matemática como ciencia aplicada, que toma sus significaciones de los diversos contextos en la que se utiliza.

- **Selección de un Marco Teórico**.- Una valoración preliminar del *Enfoque Ontosemiótico* (EOS) como consecuencia de los primeros acercamientos a éste en los cursos del posgrado en Matemática Educativa, así como de las revisiones de artículos de investigación publicados y de algunas tesis fundamentadas en este marco teórico, fue la razón por la cual se seleccionó dicho marco para dar soporte al diseño de las actividades didácticas así como al análisis que se hará de las mismas.

  Se tiene la convicción de que las herramientas teóricas que este marco teórico ofrece son de mucha utilidad para lograr un diseño satisfactorio de actividades didácticas desde las etapas de planeación del proceso de instrucción, así como en la selección de situaciones problémicas, sus sistemas de prácticas, sus significados y sus objetos matemáticos.

  También se considera al EOS como un poderoso instrumento de análisis didáctico que permite y favorece la descripción, la explicación y la valoración de los procesos de instrucción en los que se pretende impactar mediante la implementación de la secuencia de actividades didácticas que se planea diseñar.

- **Diseño de la Secuencia de Actividades Didácticas**.- La planeación del diseño de la secuencia didáctica de situaciones de movimiento consistió en varias actividades cuyo propósito es el de promover sistemas de prácticas que construyan o enriquezcan los significados de los objetos matemáticos de la función cuadrática y la parábola en el contexto determinado de la Física y útiles para resolver situaciones problémicas del tema de Movimiento de Proyectiles.

  Como las situaciones problémicas sobre las que se iba a trabajar eran de movimientos en dos dimensiones, (en este caso sobre planos verticales), debía descomponerse un movimiento en sus proyecciones horizontal y vertical. De aquí surgió la idea de proyectar las sombras de una pelota de béisbol sobre el suelo y sobre la pared muy alta de un edificio detrás de la barda, dichas sombras darían como resultado la descomposición buscada, haciéndolo de manera simultánea con respecto al movimiento de la pelota.

Para hacer más sencilla la descomposición, se pensó en un halcón que volaría en línea recta y a velocidad constante sobre lo que sería la hipotenusa de un triángulo rectángulo, también el halcón proyectaría sus sombras sobre el suelo y sobre una pared vertical que forma un acantilado simultáneamente a su propio movimiento. En este caso, por medio de funciones trigonométricas y del teorema de Pitágoras, se lograra dicha descomposición, tanto de la velocidad como del desplazamiento.

Luego sin considerar la simultaneidad del movimiento, se pensó en la actividad de un camión que recorrería varios pueblos, en línea recta y a velocidad constante, que están sobre los vértices de un triángulo rectángulo, también con el fin de descomponer el movimiento del camión en sus proyecciones rectangulares también por medio de funciones trigonométricas y del teorema de Pitágoras.

También se pensó en una actividad un poco más sencilla, es decir, una situación estática, en este caso un pedazo de cable eléctrico colgado del extremo de un poste inclinado y que apenas roza el suelo, con la finalidad de descomponer las longitudes de la hipotenusa, en este caso el poste, y poder determinar la longitud del cable y determinar a qué distancia se hallaba de la base del poste.

Se pensó que al incluir estas cuatro actividades en el diseño de la secuencia, debía hacerse en orden inverso al que aquí se presentan, para ir desde la más sencilla hasta la más compleja, en este caso la de béisbol.

El diseño de la actividad del béisbol consistió en plantear una situación de un batazo elevado hacia los jardines, donde se conocía la velocidad de la pelota al ser bateada y el ángulo con el que salía, lo que se pedía era obtener la función cuadrática que representa el movimiento de la pelota, es decir, poder matematizar el movimiento.

Luego se pensó en el diseño de una actividad que incluyera una situación inversa a la plantead en el problema del béisbol, en este caso el lanzamiento de una pelota, donde ahora se partía de la función cuadrática que modelaba su movimiento y se pedía determinar los parámetros físicos, como velocidad y ángulo de inclinación, que están involucrados en el movimiento.

Después y siguiendo con las situaciones problémicas del Movimiento de Proyectiles, se pensó el diseño de una actividad didáctica relacionada con el lanzamiento de una pelota de golf, donde lo que se pedía determinar era con qué ángulo de salida de la pelota al ser golpeada, se produce su máximo alcance horizontal, considerando para este caso que la velocidad inicial del lanzamiento era fija.

Por último y de algún modo relacionado con la actividad del golf, se pensó en una actividad didáctica donde pudiera apreciarse cómo el Movimiento de Proyectiles está presente también en la naturaleza, en este caso sería el salto de una rana, la cual con un ángulo determinado trataría de lograr un alcance horizontal máximo.

Como parte del logro de un buen diseño didáctico, se pensó agregar en las hojas de trabajo impresas, algunas ilustraciones de las situaciones en el contexto planteadas, así como una serie de instrucciones y preguntas encaminadas a servir de guía al estudiante al momento de ser abordadas.

Además de las hojas de trabajo impresas para las siete actividades didácticas, se planeó acompañar aquellas situaciones de movimiento con archivos de animaciones multimedia que las hicieran de algún modo interactivas y lucieran más atractivas y motivadoras.

Para agregar dinamismo y poder hacer simulaciones de los lanzamientos de proyectiles se pensó generar archivos de *GeoGebra*, aprovechando las ventajas que brindaría la utilización de este poderoso recurso tecnológico, en cuanto a la interactividad que proporciona.

Los vínculos a los archivos de *GeoGebra* se pensó colocarlos en una página web determinada, para permitir y facilitar su acceso y aprovechamiento desde cualquier computadora que tuviera una conexión a internet. Las animaciones multimedia también se colocarían en forma de archivos de video con sonido en el sitio de *You Tube*, con una dirección electrónica específica.

- **Pilotaje de prueba**.- Como parte del diseño didáctico se planeó la realización de un pilotaje de prueba con estudiantes de bachillerato tecnológico, cuya finalidad sería identificar posibles limitaciones, errores o imprecisiones en el diseño de las actividades, que permitiera hacer modificaciones y lograr una versión lo más depurada y mejorada posible de la secuencia.

- **Modificaciones derivadas del pilotaje de prueba**.- Como parte de la planeación de este trabajo, siempre se tuvo presente que los resultados del pilotaje serían muy útiles para mejorar el diseño de la secuencia de actividades, para permitirnos contar con un producto final lo más depurado posible.

- **Futura implementación de la secuencia**.- Después de la incorporación de todas las mejoras en la secuencia de actividades, se pensó dejar un producto final, listo para su implementación, sin embargo nuca se perdió de vista que el producto es susceptible de ser mejorado a través de los resultados que se obtuvieran en las sucesivas implementaciones.

CAPÍTULO 3.- SECUENCIA DIDÁCTICA

Introducción

En el presente capítulo se analiza la secuencia de actividades didácticas a la luz del marco teórico empleado, el EOS, con la intención de desglosar, describir y explicar cada una de las partes que se tomaron en cuenta para su diseño. Se hace notar que es posible obtener un buen diseño didáctico teniendo como sustento y referencia un marco teórico determinado, de igual modo, el mismo marco teórico da la pauta para hacer un análisis a conciencia de las implicaciones e incidencias que pudieran lograrse con este diseño de actividades didácticas.

Se presentan a continuación de manera detallada los significados: institucional de referencia, institucional pretendido y la implementación del significado institucional pretendido. Se mencionan los aspectos más generales del diseño, de las actividades didácticas, del software *GeoGebra*, de las animaciones multimedia y de las hojas de trabajo.

3.1. LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Esta secuencia de actividades didácticas promueve diversas actividades encaminadas a dar significación a los objetos matemáticos de la parábola y la función cuadrática en problemas de contexto del Movimiento de Proyectiles en la Física del bachillerato tecnológico.

Dadas algunas situaciones de Movimiento de Proyectiles, se van a promover aquellos sistemas de prácticas que hagan emerger los objetos matemáticos de función cuadrática y parábola, para que adquieran su propia significación en el contexto determinado en el que se está trabajando, es decir, el del lanzamiento de proyectiles.

3.2. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA

Movimiento de Proyectiles, Función Cuadrática y Parábola

Para caracterizar el significado institucional de referencia del Movimiento de Proyectiles, como una aplicación de la función cuadrática, de la parábola y de las ecuaciones paramétricas, se revisaron algunos textos seleccionados en la bibliografía sugerida para los cursos de Física, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial del bachillerato tecnológico, para lo cual se presenta un análisis ontológico-semiótico de dichos textos, identificando los objetos primarios en cada caso.

Situaciones.- Las que se derivan del movimiento de un proyectil que sale disparado con una velocidad inicial y un ángulo determinado, en las cuales se desea predecir la posición y el movimiento en cierto instante, determinar la altura máxima y el alcance horizontal máximo alcanzado por el proyectil, además de identificar la función cuadrática que representa el movimiento en dos dimensiones, mediante la combinación de las ecuaciones del movimiento con el parámetro tiempo.

Conceptos.- Tiro parabólico, movimiento de proyectiles, proyectil, trayectoria, desplazamiento, posición, rapidez, velocidad, ángulo, aceleración, gravedad, magnitud, dirección, plano vertical, movimiento bidimensional, plano xy, componentes horizontal y vertical, caída libre, tiro vertical, movimiento rectilíneo uniforme, movimiento uniformemente acelerado, ecuaciones del movimiento, función cuadrática, parábola, parámetro, ecuaciones paramétricas, altura máxima, alcance horizontal máximo, tiempo de vuelo, tabla, gráfica, funciones trigonométricas, teorema de Pitágoras.

Procedimientos.- Se pueden identificar las siguientes tareas:

- Descomposición de la velocidad inicial en su componente horizontal y vertical, utilizando las funciones coseno y seno del ángulo de salida del lanzamiento.
- Cálculo de la posición horizontal x del proyectil en cualquier tiempo t determinado, utilizando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme.
- Cálculo de la posición vertical y del proyectil en cualquier tiempo t determinado, utilizando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado.
- Utilización de las ecuaciones paramétricas de la posición horizontal x y vertical y, donde el parámetro es el tiempo t.

- Tabulación de las posiciones horizontal x y vertical y para diferentes valores del tiempo t.
- Graficación de las diferentes posiciones horizontales y verticales en un plano cartesiano.
- Visualización de que los puntos graficados pertenecen a la trayectoria de una parábola, la cual es posible representar analíticamente por medio de su función cuadrática.
- Cálculo del tiempo en que se alcanza la altura máxima, haciendo en este instante la velocidad vertical igual a cero y despejando el tiempo. Con este tiempo se calcula la posición vertical, la cual corresponde a la altura máxima lograda por el proyectil.
- Cálculo del tiempo con que se logra el máximo alcance horizontal, haciendo en este instante la posición vertical igual a cero y despejando el tiempo. Con este tiempo se calcula la posición horizontal, la cual corresponde al máximo alcance horizontal logrado por el proyectil.
- Cálculo de la magnitud y dirección de la velocidad del proyectil en cualquier instante, a través de sus componentes horizontal y vertical, por medio del teorema de Pitágoras y de la función inversa de la tangente.
- Obtención de la expresión analítica de la función cuadrática que representa la posición vertical en términos de la posición horizontal, despejando el parámetro tiempo en la ecuación de la posición horizontal y sustituyéndolo en la ecuación de la posición vertical. Esta es la ecuación de la trayectoria del proyectil, de aquí que la trayectoria sea parabólica.
- Determinación del ángulo θ con el cual se logra el máximo alcance horizontal de un lanzamiento en donde se supone la velocidad inicial como constante.
- A partir de la expresión analítica de la función cuadrática que representa el lanzamiento de un proyectil, determinar la velocidad inicial y el ángulo con que fue lanzado dicho proyectil, es decir, explicar su movimiento.

Proposiciones.- Durante la práctica intervienen o emergen las siguientes propiedades de los objetos involucrados:

- Proyectil es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire.

- En el modelo idealizado del Tiro Parabólico se representa el proyectil como una partícula con aceleración constante (debida a la gravedad), tanto en magnitud como en dirección, despreciando los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación de la tierra.
- El movimiento de un proyectil siempre está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial ya que la aceleración debida a la gravedad es exclusivamente vertical, de aquí que el movimiento sea bidimensional.
- La clave del análisis del movimiento del proyectil es que se pueden tratar por separado las coordenadas x y y de la posición y de la velocidad en cualquier instante.
- La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. (por definición g siempre es positiva, pero por las direcciones de las coordenadas elegidas, la componente vertical a_y es negativa.).
- Se puede analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de un movimiento horizontal con velocidad constante y un movimiento vertical con aceleración constante.
- Se puede expresar todas las relaciones de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales.
- Dado que las aceleraciones en x y en y son constantes, se pueden usar directamente las ecuaciones de movimiento rectilíneo con aceleración constante.
- La componente vertical de la aceleración es constante pero no cero, así que la velocidad vertical v_y cambia en cantidades iguales a intervalos de tiempo iguales, justo igual que si el proyectil fuera lanzado verticalmente con la misma velocidad inicial.
- Se puede representar el vector de la velocidad inicial v_0 con su magnitud $\|v_0\|$ (la rapidez inicial) y su ángulo θ. En términos de estas cantidades, las componentes horizontal v_{0x} y vertical v_{0y} de la velocidad inicial son: $v_{0x} = v_0 cos\theta$ y $v_{0y} = v_0 sen\theta$.

- La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad), en términos de sus velocidades horizontal y vertical, en cualquier instante es: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, de acuerdo al teorema de Pitágoras.
- La dirección de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje $+x$ y de sus velocidades horizontal y vertical está dada por: $tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$.
- El vector velocidad v es tangente a la trayectoria en todos sus puntos.
- En el Movimiento de Proyectiles, con el modelo simplificado, la trayectoria siempre es una parábola, es decir, puede representarse por medio de una función cuadrática.

Argumentos.-

- Suponer que se lanza un objeto con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo en una dirección que hace un ángulo θ con el eje horizontal (el suelo). Partiendo de que la resistencia del aire es pequeña, puede no tomarse en cuenta, por lo tanto el objeto viajará únicamente sujeto a la fuerza de gravedad que lo atraerá hacia la tierra. No hay por tanto una fuerza horizontal que se oponga al movimiento.
- Dado que la velocidad del objeto en la dirección x será $v_0 cos\theta$, entonces la distancia que recorrerá después de t segundos será $(v_0 cos\theta)t$ metros.
- La velocidad inicial hacia arriba (que se ejerce sobre el objeto) es $v_0 sen\theta$ dando una distancia de $(v_0 sen\theta)t$ metros después de t segundos. A esto hay que restar la distancia de la velocidad (hacia el suelo) debida a la fuerza de la gravedad, que está dada por la fórmula: $\frac{1}{2}gt^2$, donde g es una constante (aproximadamente igual a $9.81\, m/s^2$).
- La curva está en su forma paramétrica, porque cada una de las coordenadas de los puntos depende de un parámetro, el tiempo t:
  $x = (v_0 cos\theta)t$; $y = (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$.
- Si se quiere graficar la curva no se tiene más que dar valores diferentes a t e ir obteniendo los puntos: $\left((v_0 cos\theta)t,\ (v_0 sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right)$.
- Al despejar t de la primera ecuación paramétrica y substituirla en la segunda se obtiene:

$y = (tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}x^2$, que representa una parábola que pasa por el origen. La trayectoria del objeto es una parábola y la velocidad inicial v_0 es tangente a la curva en el origen.

- Se puede expresar x y y separadamente en función de una tercera variable en una ecuación paramétrica.
- Las ecuaciones paramétricas facilitan el tratamiento de muchos problemas y, en otros casos, la única manera práctica de enfocar la solución de ciertos problemas. En ocasiones conviene expresar las coordenadas de un punto móvil en forma separada y en función del tiempo t.
- Algunas veces es conveniente eliminar el parámetro tiempo de una representación paramétrica para obtener una ecuación en forma rectangular o cartesiana.
- La función cuadrática aparece en el movimiento de un proyectil, con base en la Segunda Ley del Movimiento de Newton (fuerza igual a masa por aceleración, $F = ma$), y se demuestra que, pasando por alto la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado hacia arriba con una cierta inclinación respecto de la horizontal, corresponde a la gráfica de una función cuadrática, es decir, de una parábola.
- La trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo, describe una parábola abierta hacia abajo, propiedad descubierta por Galileo en el siglo XVI.

Lenguaje.-

- **Verbal**.- Son las designaciones que se hacen de los conceptos y de las proposiciones, así como los argumentos que se utilizan para dar explicaciones y justificaciones de los mismos.
- **Gráfico**.- Representaciones de las trayectorias del movimiento de un proyectil en el plano xy, partiendo de sus ecuaciones paramétricas o de su función cuadrática cartesiana.
- **Numérico**.- Tabulación de las posiciones x y y del proyectil para diferentes valores del tiempo t, en el caso de las representaciones paramétricas, o tabulación de los valores de la posición vertical y como función de la posición horizontal x, partiendo de la función cuadrática que representa el movimiento sin la presencia del parámetro t (tiempo).

- **Analítico**.- Las representaciones algebraicas de las ecuaciones del movimiento en forma paramétrica, o su equivalente en la representación cartesiana de la función cuadrática.

Para caracterizar el significado institucional de referencia se realizó una revisión bibliográfica de los siguientes textos:

1. *Precálculo*, Sullivan, M., Edit. Prentice Hall, México, 1997.
2. *Geometría Analítica*, De Oteyza, E. *et al*., Edit. Prentice Hall, México, 1994.
3. *Geometría Analítica*, Lehmann, C. H., Edit. Limusa, México, 2004.
4. *Geometría Analítica*, Teoría y Práctica, Selby, P. H., Edit. Sist. Técnicos de Edición, 1990.
5. *Geometría Analítica*, Filloy, E., Hitt, F., Grupo Edit. Iberoamérica, México, 1997.
6. *Física Universitaria*, Sears, F.W., Zemansky, M.W. et. al., Edit. Pearson Educación, México, 2009, Vol. 1, 9ª. Edición.
7. *Física*, Resnick, R. *et al*., Edit. CECSA, México, 2009, Vol. 1, 5ª. Edición.
8. *Física Conceptos y Aplicaciones*, Tippens, P. E., Edit. McGraw-Hill, México, 2007, 7ª. Edición.
9. *Física*, Pérez Silva, J. L. *et al*., Oxford University Press, México, 2009.

3.3. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO

En esta sección se presenta el sistema de prácticas que se planea promover con la realización de las actividades que constituyen la secuencia didáctica. Este sistema de prácticas corresponde a la interpretación que se hace del significado institucional de referencia.

El significado institucional pretendido con las actividades de esta secuencia, se describe a continuación:

Situaciones.-

- Predecir la posición en un plano xy de de un proyectil lanzado con una velocidad inicial y un cierto ángulo de inclinación respecto de la horizontal.
- Identificar la función cuadrática que representa el movimiento de un proyectil, de acuerdo a sus condiciones iniciales de lanzamiento.

- A partir de una función cuadrática que representa el movimiento de un proyectil, visualizar e identificar las características físicas de dicho movimiento.
- Lograr el alcance horizontal máximo de un proyectil que es lanzado con una velocidad inicial fija, haciendo variar el ángulo de salida.

Conceptos.- Posición, rapidez, velocidad, ángulo, plano xy, componente horizontal y componente vertical, ecuaciones del movimiento, función cuadrática, parábola, parámetro, ecuaciones paramétricas, altura máxima, alcance horizontal máximo, tiempo de vuelo, tabla, gráfica, función trigonométrica y teorema de Pitágoras.

Procedimientos.- Se pueden identificar las siguientes tareas:

- Descomposición de la velocidad en sus proyecciones horizontal y vertical a partir de funciones trigonométricas del ángulo de salida del lanzamiento.
- Determinar posiciones horizontal y vertical del proyectil en cualquier instante de tiempo t, mediante una tabla y una gráfica de los puntos x y y.
- Combinar las ecuaciones paramétricas del movimiento del proyectil para obtener e identificar analíticamente la función cuadrática que representa matemáticamente el movimiento.
- A partir de un movimiento representado por su función cuadrática, descomponerlo para identificar sus características físicas.
- Hacer simulaciones del movimiento mediante el software *GeoGebra*, el cual permite hacer dinámica la simulación del movimiento, además de generar las tablas y gráficas correspondientes, así como también generar la función cuadrática de dicho movimiento.
- También mediante el software *GeoGebra*, se puede modelar un movimiento a partir de una función cuadrática donde los coeficientes pueden ser manipulables para visualizar cómo impactan en el fenómeno físico que se está modelando.
- Simular con *GeoGebra* el lanzamiento de un proyectil donde se varía únicamente el ángulo de salida hasta obtener el ángulo con el que se logra el alcance horizontal máximo.

Proposiciones.- Durante la práctica intervienen o emergen las siguientes propiedades de los objetos involucrados:

- En el análisis del movimiento de proyectiles se pueden tratar por separado las coordenadas x y y de la posición y de la velocidad en cualquier instante, de acuerdo a las ecuaciones paramétricas del movimiento respecto del tiempo t.
- Cuando se combinan las ecuaciones paramétricas del tiempo, es posible eliminar el parámetro del tiempo para así obtener una función cuadrática donde la posición vertical de proyectil sólo depende de su posición horizontal.
- En el movimiento de proyectiles, con el modelo simplificado, la trayectoria siempre es una parábola, es decir, una función cuadrática, la cual se puede obtener a partir de las características físicas del movimiento.
- Si el movimiento es representado por medio de una función cuadrática, siempre es posible identificar sus características físicas.

Argumentos.-

- El software *GeoGebra* permite hacer simulaciones y manipulaciones de variables y parámetros que intervienen en las situaciones planteadas, lo que mejora el aspecto visual y da riqueza a los significados, además de que simplifica los cálculos rutinarios.
- En las situaciones planteadas se permite transitar desde los aspectos físicos de un movimiento de proyectiles a su modelización matemática mediante la función cuadrática y también el problema inverso, partir de la función cuadrática de un movimiento hasta llegar a describir su situación física.
- El movimiento de proyectiles produce trayectorias parabólicas, lo que hace posible su modelación y representación analítica por medio de funciones cuadráticas, es decir, parábolas.

Lenguaje.-

- **Verbal**.- Las designaciones de los conceptos y proposiciones y sus argumentos para justificarlos.
- **Gráfico**.- Representaciones gráficas de las trayectorias del movimiento de un proyectil en el plano cartesiano, a partir de la función cuadrática o de las ecuaciones paramétricas del movimiento.
- **Numérico**.- Construcción de tablas de las posiciones x y y del proyectil para diferentes valores del tiempo t, en el caso de las representaciones paramétricas, o

tablas de los valores de las posiciones x y y derivadas de la función cuadrática que representa el movimiento.

- **Analítico**.- Representación algebraica de las ecuaciones del movimiento en su forma paramétrica o cartesiana.

3.4. IMPLEMENTACIÓN DEL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO

Se sugiere iniciar la implementación en el aula, de la secuencia de actividades didácticas propuesta en este trabajo, presentando la animación multimedia del batazo de béisbol y utilizarla para problematizar a los estudiantes, lo cual puede intentarse formulando preguntas como las siguientes: ¿Cómo podrá determinarse la posición de la pelota en función del tiempo?, ¿En qué instante o instantes la pelota estará a una cierta altura?, ¿Cuánto habrá avanzado horizontalmente la pelota al alcanzar la máxima altura y cuál será ésta?, ¿De qué dependerá el alcance horizontal que se puede lograr?, ¿De qué dependerá que el alcance horizontal sea máximo?, etc.

Con la animación multimedia del béisbol también se pueden hacer cuestionamientos sobre las sombras de la pelota proyectadas en el piso o en la pared de un edificio, por ejemplo la relación de ellas con el movimiento de la pelota, o el tipo de movimiento que cada sombra desarrolla, esto, a su vez, puede aprovecharse para plantear la posibilidad de estudiar el movimiento de la pelota a partir del movimiento de sus proyecciones horizontal y vertical.

A partir de las hojas de trabajo de las primeras actividades se puede preparar el camino que permita responder los cuestionamientos que se derivan de la situación del béisbol, yendo desde lo más básico a lo más complicado en la descomposición del movimiento que se está estudiando.

En situaciones problémicas como la del béisbol, la del lanzamiento o la del golf, se propone el uso de las simulaciones que se hacen con *GeoGebra* de las situaciones, con el objeto de que los estudiantes puedan explorar, formular conjeturas, experimentar con la manipulación de parámetros y observar los efectos que produce en la situación y en el movimiento mismo que se está representando.

3.4.1. Las Actividades Didácticas

El conjunto de actividades didácticas propuestas tiene como finalidad principal la resolución de problemas en situaciones físicas, relacionadas con el Movimiento de Proyectiles. De la realización de las mismas se espera originen que los estudiantes adquieran un sistema de prácticas eficaces para analizar, interpretar y resolver problemas en este contexto, lo cual es equivalente a decir que han logrado enriquecer el significado de los objetos matemáticos denominados *parábola* y *función cuadrática*.

La secuencia de actividades didácticas está formada por siete actividades para ser implementadas en los cursos de Cálculo Diferencial o de Física del bachillerato tecnológico.

3.4.2. Las Hojas de Trabajo

Para la realización de las actividades de la secuencia didáctica, es decir, para la implementación del significado institucional pretendido, se ha diseñado, para cada actividad, una hoja de trabajo que habrá de proporcionarse a los estudiantes. En ellas se indica lo que debe hacerse (tareas a realizar o interrogantes que habrán de responderse), la forma y el momento en que deben realizarse (se indica si la actividad es individual, por equipos o grupal; lo mismo que los momentos en que deben realizarse y lo esperado en cada caso).

Para las actividades 4, 5 y 6 se utiliza, además, el recurso tecnológico de la computadora con el software de geometría dinámica llamado *GeoGebra*, el cual, por sus características, flexibilidad y dinamismo permite diseñar escenas en las cuales el estudiante puede interactuar con el software, puede hacer simulaciones de situaciones de movimiento y manipular variables o parámetros que dan riqueza a los significados obtenidos. Dicho software es de los llamados “libres”, es decir, para su utilización y desarrollo no es necesario hacer ningún pago, siempre y cuando los fines que se persiguen con su aprovechamiento sean no comerciales.

La combinación de las hojas de trabajo y del software *GeoGebra*, tiene como propósito lograr el mayor grado de reflexión por parte del estudiante y que, con la conducción del profesor, promover en el estudiante un papel más activo y autónomo en la ejecución de las prácticas matemáticas.

3.4.3. El Software *GeoGebra*

Las principales actividades didácticas de esta secuencia se realizan apoyándose con el software de geometría dinámica llamado *GeoGebra*, aprovechando las posibilidades de visualización y de manipulación de variables y parámetros de esta herramienta tecnológica, que agregan un enorme dinamismo a las tareas por ejecutar, lo que en gran medida permite a los profesores mejorar sus prácticas docentes. Los estudiantes podrán interactuar ampliamente con el *GeoGebra* enriqueciendo con ello los significados que vayan adquiriendo.

Dicho software puede adquirirse y descargarse sin ningún costo del sitio: *http://www.GeoGebra.org/cms/es/download*

En la actividad 4 se puede utilizar el archivo de *GeoGebra* llamado "*Béisbol*", el cual permite simular un batazo de una pelota en un estadio y determinar si con ciertos parámetros de velocidad inicial y ángulo de salida de la pelota, dicho batazo será o no un cuadrangular. El archivo posee además la flexibilidad para manipular todos los parámetros iniciales, así como la distancia del *home* a la barda, la altura de la barda, la altura a la que golpea la pelota respecto del suelo, etc. El archivo permite obtener tablas de posiciones y velocidades con respecto al tiempo. También proporciona la función cuadrática que representa este movimiento y su situación física.

En la actividad 5 se puede utilizar el archivo de *GeoGebra* llamado "*Lanzamiento*", el cual permite simular un lanzamiento de una pelota por una persona y verificar si otra persona a una cierta distancia la atrapará o no. En este archivo se parte de la función cuadrática que representa este fenómeno físico, y lo que se busca es determinar y explicar los elementos del fenómeno físico como son velocidad inicial y ángulo de salida del lanzamiento. El archivo tiene además la flexibilidad para manipular todos los parámetros iniciales de la función cuadrática, así como la distancia del receptor, su altura, la altura a la que fue lanzada la pelota respecto del suelo, etc. El archivo nos permite obtener tablas de posiciones y velocidades con respecto al tiempo. También nos da los parámetros iniciales de la situación física.

En la actividad 6 se puede utilizar el archivo de *GeoGebra* llamado "*Golf*", para simular un el golpe de una pelota de golf, con una cierta inclinación en la cara del palo, lo que imprime a la pelota su ángulo de salida. Aquí la modelación consiste en probar palos que dan diferentes ángulos de salida, hasta encontrar aquél con el que se logre la máxima distancia horizontal. El archivo tiene además la flexibilidad para manipular todos los parámetros iniciales del lanzamiento, y nos permite obtener tablas de alcances máximos con respecto al ángulo de salida de la pelota.

Los archivos de *GeoGebra* para estas actividades didácticas están disponibles en la siguiente dirección:

http://www.geogebra.org/en/upload/

Dentro la carpeta "*Alan Robles*", o directamente en la siguiente dirección:

http://www.geogebra.org/en/upload/index.php?&direction=0&order=&directory=Alan%20Robles

3.4.4. Las Animaciones Multimedia

Las principales actividades didácticas de esta secuencia están apoyadas en animaciones multimedia, aprovechando las posibilidades de visualización y de efectos gráficos y sonoros del movimiento que se trata de representar.

Estas herramientas informáticas hacen muy vistosas y motivadoras las actividades presentadas, lo que contribuye a que los profesores mejoren y hagan más interactivos los diseños, y contribuye a que los estudiantes asuman con entusiasmo las actividades propuestas.

A continuación se describen los principales aspectos técnicos necesarios para el desarrollo de las animaciones multimedia que refuerzan las actividades didácticas del presente trabajo:

Las animaciones multimedia consisten de programas computacionales desarrollados con el software *Macromedia Flash CS4*, que forman parte del conjunto de programas de la empresa *Adobe*. *Macromedia Flash CS4* es uno de los programas del paquete multimedia *Adobe*, que utiliza la tecnología de código con programación orientada a objetos. Los productos de *Adobe* están disponibles en el siguiente sitio: *http://www.adobe.com/*

Algunas programaciones también se pueden realizar con el código de programación *ActionScript*, otras por simple manipulación de mapas de bits en línea de tiempo respecto a fotogramas claves e interpolaciones de movimiento.

Los sonidos pueden ser manipulados con el programa *WavePad Sound*, que es un editor de sonidos del paquete *NCH Software*, disponible en el sitio: *http://www.nchsoftware.com/*

Los recursos de sonido utilizados en cada animación se pueden descargar de diferentes bancos de efectos sonoros, algunos gratuitos y otros con algún costo.

- Gratuitos:

  Gobierno de España, Ministerio de Educación:

  http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/

- Con costo:

  http://www.soundsnap.com/

La técnica de la incrustación de sonidos se realiza en la línea de tiempo con una sincronización de flujo y en algunas animaciones se hacen manipulaciones con *ActionScript* para que se repitan indefinidamente o se escuchen según el evento de la animación. Ejemplo de esto es cómo se introducen los sonidos a la animación y cómo se escucha su efecto cuando el golfista golpea la pelota.

La técnica de ejecución de movimiento adoptada en esta animación es la del trazo de mapa de bits sobre una fotografía real, creando así un efecto de movimiento realista sobre el plano. Ejemplo de esto es la animación del golfista, donde el cuerpo en movimiento es un trazo sugerido del pigmento tomado de un video real.

La transformación y codificación de los formatos de animación se realiza con el programa *Sothink SWF to Video Convert,* en donde se transforma el archivo con extensión .SWF, de formato natural de exportación por defecto del programa *Macromedia Flash CS4* a un archivo de video en formato con extensión .AVI, el cual es un formato casi universal en los programas de reproducción de formato de video. Con esto se explica cómo se convierten las animaciones en archivos de video reproducibles con la aplicación de *Windows Media Player*.

Los productos para hacer conversiones entre formatos de video están disponibles en el siguiente sitio: *http://www.sothink.com/product/swftovideoconverter/*

Las animaciones exportadas en archivos con formato de extensión .SWF pueden ser incrustadas y centradas en una ventana de formato .HTML, para poder ser reproducido en un explorador predeterminado, esto con el programa *Macromedia DreamWeaver CS4* del mismo paquete de *Adobe*.

Los archivos de video de las animaciones multimedia están disponibles para su ejecución en la siguiente página de *You Tube*:

http://www.youtube.com/user/TheAlanRobles?gl=MX#g/u

3.4.5. Descripción Breve de las Actividades Didácticas

Las actividades didácticas desarrolladas se describen brevemente a continuación:

Actividad 1.-

Esta actividad tiene como propósito reconocer una situación donde se forma un triángulo rectángulo, del cual solamente se conocen la longitud de la hipotenusa y uno de los ángulos agudos, y se plantea calcular las longitudes de los catetos, para lo cual se debe recurrir a las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo conocido, es decir, se pretende descomponer una trayectoria dada en sus componentes horizontal y vertical.

Actividad 2.-

En esta actividad se pide hacer descomposiciones de los desplazamientos y sus velocidades sobre los lados de un triángulo rectángulo. Se conoce la hipotenusa y uno de los ángulos agudos. Se requiere emplear funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo conocido o también con el teorema de Pitágoras. También se pide determinar las ecuaciones de los desplazamientos y velocidades en ambos catetos en términos del desplazamiento y la velocidad sobre la hipotenusa y del ángulo dado.

Actividad 3.-

Esta actividad es similar a la actividad 2. Se recorre una distancia determinada a una velocidad determinada, a través de la hipotenusa de un triángulo rectángulo y se pide descomponer esta distancia y la velocidad en las distancias y velocidades horizontales y verticales, para lo cual se recurre a las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo β. Aquí, a diferencia de la situación anterior, los movimientos sobre la hipotenusa y los catetos son simultáneos ya que se trata de un objeto moviéndose sobre la hipotenusa de un triángulo y sus sombras proyectándose horizontalmente sobre el suelo y verticalmente sobre un acantilado, lo que daría el efecto de la descomposición de su movimiento.

Actividad 4.-

Esta actividad se da en el contexto del béisbol, es decir, de un batazo elevado hacia los jardines, del cual se pide, en un inicio, analizarlo y comprenderlo intuitivamente para luego hacer cálculos partiendo de algunos parámetros del movimiento como son su velocidad y ángulo de salida de la pelota.

El movimiento se descompone en sus componentes horizontal y vertical, lo que facilita su comprensión, y el planteamiento de las ecuaciones que lo modelan, como la combinación de dos tipos de movimiento para poder analizarlo en detalle.

Se plantea resolver una situación numérica dada, para luego poder generar una función cuadrática que nos dé la representación exacta de fenómeno físico, por medio de un modelo que matematice sus características y elementos esenciales.

Actividad 5.-

En esta situación se tiene el problema inverso al de la actividad 4. Se parte de la función cuadrática que representa un movimiento, en este caso el lanzamiento de una pelota, y se pide describir las características físicas de dicho movimiento, para lo cual se deberán analizar los parámetros de la función, hacer cálculos y responder algunas preguntas.

Con esto se busca resolver el problema inverso: dada la función que matematiza un movimiento, poder describir las características físicas de dicho movimiento.

Actividad 6.-

En esta actividad tomada del contexto del golf, se plantea la situación de lograr un tiro que dé el máximo alcance horizontal, para lo cual se ha fijado la velocidad inicial del lanzamiento y se deberá identificar el ángulo con el cual se consiga dicho alcance máximo.

Primero se plantea resolver numéricamente esta situación con diferentes ángulos y acercamientos hasta quedar conformes con la solución obtenida. Después, a partir de la función cuadrática del movimiento y de sus parámetros, demostrar analíticamente el resultado que se obtuvo numéricamente.

Actividad 7.-

En esta actividad se ilustra de manera cualitativa cómo el Movimiento de Proyectiles también está presente en la naturaleza, ya que por medio del salto de una rana se puede apreciar que lo hace con un cierto ángulo de inclinación y a su vez ese ángulo le permite alcanzar la máxima distancia horizontal posible.

CAPÍTULO 4.- ANÁLISIS DIDÁCTICO

Introducción

La reflexión de los profesores de Matemáticas sobre su práctica docente es muy importante para mejorar los procesos de instrucción. Esta reflexión debe ser sistemática tomando en cuenta los elementos intervinientes en el proceso como son: los contenidos matemáticos, los conocimientos previos, las habilidades intelectuales y las actitudes de los estudiantes; los procesos de interacción en el aula, el uso de los diversos medios, entre otros.

Las herramientas teóricas que aporta el EOS, para llevar a cabo este proceso de reflexión sistemática sobre su práctica docente, permiten no sólo entender de mejor manera el proceso de docente, sino valorarlo y proponer cambios orientados a mejorar los procesos de instrucción, además de permitir la realización de distintos tipos de análisis, aportando cada uno de ellos información útil para el diseño, implementación y evaluación de dichos procesos. (Font, 2010).

El propósito principal de llevar a cabo el análisis didáctico del proceso docente es el de estar en mejores condiciones de describir, explicar y valorar los procesos que se desarrollan en el aula. El modelo propuesto considera cinco niveles de análisis, los cuales fueron presentados y explicados en el capítulo correspondiente al marco teórico en que se basa el desarrollo de este trabajo.

Se presenta a continuación un análisis didáctico de la secuencia de actividades propuesta, de acuerdo a las cinco fases que el EOS recomienda para este fin, como son: los tipos de problemas y sistemas de prácticas, las configuraciones, las trayectorias, las normas y metanormas y la valoración de la idoneidad didáctica.

4.1. ANÁLISIS DE LOS TIPOS DE PROBLEMAS Y SISTEMAS DE PRÁCTICAS

En este nivel de análisis se pretende identificar las prácticas matemáticas que se proponen en la secuencia de actividades, es decir, las manifestaciones lingüísticas o de otros tipos que se realizan a lo largo del proceso de instrucción, de los problemas matemáticos, su resolución, su comunicación o la generalización de los mismos a otros contextos.

Actividad 1

La situación problémica planteada en esta actividad tiene como propósito, a partir de una representación estática, reconocer e identificar la formación de un triángulo rectángulo, donde algunos de sus elementos son conocidos (la hipotenusa y un ángulo agudo). Con estos datos se deberán calcular los elementos faltantes (los catetos).

Como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Comprender la actividad y lo que en ella se pide obtener.
- Identificar los elementos con que se cuenta.
- Construir el esquema del modelo geométrico que representa la situación.
- Utilizar funciones trigonométricas para obtener la información que hace falta.

Actividad 2

La situación problémica planteada es similar a la actividad 1, ya que también se pide reconocer el triángulo rectángulo que se halla inmerso en la situación para, a partir de algunos de sus elementos, poder obtener los elementos faltantes. Además del cálculo de distancias sobre los lados del triángulo, también se pide calcular velocidades promedio de recorridos que se hacen sobre el mismo triángulo.

Como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Comprender la actividad y lo que en ella se pide obtener.
- Identificar los elementos con que se cuenta.
- Construir el esquema del modelo geométrico que representa la situación.
- Utilizar funciones trigonométricas para obtener la información que hace falta.
- Calcular velocidades promedio de un objeto en movimiento.
- Representar la situación en un plano cartesiano.
- Hacer proyecciones horizontales y verticales de un desplazamiento y de su velocidad promedio, en forma numérica y algebraica.

Actividad 3

La situación problémica planteada es similar a la de la actividad 2, en el sentido de reconocer el triángulo rectángulo que se forma a partir de la trayectoria del objeto en movimiento sobre una línea recta en un plano vertical. También se pide calcular velocidades promedio de recorridos que se hacen sobre el mismo triángulo, de un objeto en movimiento y de las sombras que se proyectan horizontal y verticalmente, aprovechando que los movimientos ocurren simultáneamente.

Como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Comprender la actividad y lo que en ella se pide obtener.
- Identificar los elementos con que se cuenta.
- Construir el esquema del modelo geométrico que representa la situación.
- Utilizar funciones trigonométricas para obtener la información que hace falta.
- Calcular velocidades promedio de un objeto en movimiento.
- Representar la situación en un plano cartesiano.
- Hacer proyecciones horizontales y verticales de un desplazamiento y de su velocidad promedio, en forma numérica y algebraica.

Actividad 4

La situación problémica planteada en esta actividad es el análisis del movimiento de un proyectil, es decir, la pelota bateada en un juego de béisbol. Se pide generar el modelo matemático que representa esta situación, partiendo de algunos elementos de la situación física como son la velocidad inicial de la pelota y el ángulo de salida.

Como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Comprender la actividad y lo que en ella se pide obtener.
- Dibujar la trayectoria seguida por la pelota.
- Utilizar el *GeoGebra* en esta situación.
- Reconocer el efecto de la gravedad sobre la pelota en movimiento.
- Identificar los movimientos de las sombras de la pelota como proyecciones horizontal y vertical del movimiento de la pelota.
- Dado el tiempo, calcular la posición horizontal y vertical de la pelota con las ecuaciones paramétricas del movimiento.
- Dada la posición horizontal de la pelota, calcular el tiempo y su posición vertical.
- Dada la posición vertical de la pelota, calcular el tiempo y su posición horizontal.
- Hacer tablas de tiempo, posición horizontal y posición vertical de la pelota.

- Graficar posiciones horizontal o vertical contra el tiempo, o posición vertical contra posición horizontal.
- Obtener la función cuadrática del movimiento al combinar sus ecuaciones paramétricas.
- Utilizar la función cuadrática para obtener las posiciones verticales en función de las posiciones horizontales y sin necesidad de utilizar el parámetro tiempo.

Actividad 5

La situación problémica planteada en esta actividad es la inversa a la planteada en la actividad 4, es decir, ahora se tiene la función cuadrática que representa el lanzamiento de una pelota y se trata de determinar su velocidad inicial y su ángulo de salida al momento de ser lanzada.

Como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Comprender la actividad y lo que en ella se pide obtener.
- Modelar con *GeoGebra* esta situación.
- Dada la posición horizontal de la pelota, calcular su posición vertical.
- Dada la posición vertical de la pelota, calcular su posición horizontal.
- Construir una tabla de la posición vertical y horizontal de la pelota.
- Graficar la posición vertical contra posición horizontal de la pelota en un plano cartesiano.
- Determinar el ángulo de salida de la pelota a partir de los coeficientes de la función cuadrática.
- Determinar la velocidad inicial de la pelota a partir de los coeficientes de la función cuadrática y del ángulo de salida.

Actividad 6

La situación problémica planteada en esta actividad es el análisis del movimiento de un proyectil, el disparo de una pelota de golf para identificar el ángulo de salida que produce el alcance horizontal máximo, considerando que la velocidad inicial del lanzamiento se mantiene constante y sólo podemos variar su ángulo.

Como sistema de prácticas podemos identificar el siguiente:

- Comprender la actividad y lo que en ella se pide obtener.
- Identificar los elementos necesarios para el alcance máximo.
- Modelar con *GeoGebra* esta situación.
- Calcular el alcance horizontal para un valor determinado del ángulo de salida.
- Construir una tabla de alcances horizontales y ángulos de salida.
- Graficar los alcances horizontales contra ángulos de salida.
- Obtener analíticamente el ángulo que produce el máximo alcance horizontal.

4.2. CONFIGURACIONES DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

En este nivel de análisis se identifican los objetos matemáticos primarios que se ponen en juego para la realización de las prácticas matemáticas asociadas. Se presentan a continuación las configuraciones de los objetos matemáticos de las primeras seis actividades propuestas.

Actividad 1

Lenguaje:

Intervinientes:

- *Verbal*: Longitud, ángulo de inclinación.
- *Gráfico*: Representación de la situación.

Emergentes:

- *Verbal*: Posición vertical, ángulo recto, perpendicularidad, hipotenusa, catetos.
- *Gráfico*: Representación esquemática de la situación por medio de un triángulo rectángulo.
- *Analítico*: Expresión analítica de la medida de ambos catetos como función trigonométrica que relaciona la medida de la hipotenusa y uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

Situaciones:

Intervinientes:

- Aquéllas cuya resolución propicia la realización de prácticas matemáticas y hace emerger objetos de la Geometría y la Trigonometría, en este caso interviene la situación que deriva en un triángulo rectángulo.

Emergentes:

- La solución de un triángulo rectángulo cuando algunos de sus elementos son conocidos y se pide obtener aquellos elementos que hagan falta.

Conceptos:

Intervinientes:

- Longitud, medida, distancia, ángulo agudo, hipotenusa, cateto.

Emergentes:

- Triángulo rectángulo, ángulo recto, perpendicular, línea vertical, teorema de Pitágoras, función trigonométrica.

Procedimientos:

Intervinientes:

- Crear una representación esquemática de la situación planteada.
- Identificar el triángulo rectángulo que se forma.
- Reconocer los elementos con que se cuenta.
- Identificar los elementos que hace falta obtener.

Emergentes:

- Utilizar funciones trigonométricas para obtener los elementos faltantes del triángulo rectángulo.
- Podría incluso utilizarse el teorema de Pitágoras para obtener algunos de los elementos faltantes.

Proposiciones:

Intervinientes:

- El cable que cuelga del poste y que casi toca el suelo está en posición vertical.

- El cable es perpendicular al suelo.
- El cable forma un ángulo recto con el suelo.
- El poste forma un ángulo agudo respecto del suelo.

Emergentes:

- La situación deriva en la formación de un triángulo rectángulo.
- El poste representa la hipotenusa del triángulo.
- El cable representa uno de sus catetos.
- La distancia de la base del poste al cable representa el otro cateto.

Argumentos:

Intervinientes:

- El efecto de la gravedad hace que el cable suspendido quede en posición vertical con respecto del suelo como si fuera una plomada.
- El poste es más largo que cable ya que la hipotenusa es más larga que cualquier cateto.

Emergentes:

- Los triángulos rectángulos, como el de esta situación, se pueden resolver con funciones trigonométricas o con el teorema de Pitágoras.

Actividad 2

Lenguaje:

Intervinientes:

- *Verbal*: Longitud, distancia, ángulo de inclinación, velocidad promedio, recorrido, tiempo, desplazamiento.
- *Gráfico*: Representación de la situación.

Emergentes:

- *Verbal*: Posición vertical, ángulo recto, perpendicularidad, hipotenusa, catetos, velocidad promedio, recorrido, tiempo, desplazamiento.
- *Gráfico*: Representación esquemática de la situación por medio de un triángulo rectángulo.
- *Analítico*: Expresión analítica de las distancias implicadas de los recorridos como función trigonométrica, expresión analítica de las velocidades de los recorridos entre los pueblos representados en la situación.

Situaciones:

Intervinientes:

- Aquéllas cuya resolución propicia la realización de prácticas matemáticas y hace emerger objetos de la Geometría, la Trigonometría y la Física, en este caso interviene la situación que deriva en un triángulo rectángulo.

Emergentes:

- La solución de un triángulo rectángulo cuando algunos de sus elementos son conocidos y se pide obtener aquellos elementos que hagan falta.

Conceptos:

Intervinientes:

- Longitud, medida, distancia, ángulo agudo, hipotenusa, cateto, velocidad promedio, recorrido, tiempo, desplazamiento.

Emergentes:

- Triángulo rectángulo, ángulo recto, perpendicular, línea vertical, teorema de Pitágoras, función trigonométrica, velocidad promedio, recorrido, tiempo, desplazamiento.

Procedimientos:

Intervinientes:

- Crear una representación esquemática de la situación planteada.
- Identificar el triángulo rectángulo que se forma.

- Reconocer los elementos con que se cuenta.
- Identificar los elementos que hace falta obtener.
- Calcular velocidades promedio.

Emergentes:

- Utilizar funciones trigonométricas para obtener los elementos faltantes del triángulo rectángulo.
- Podría incluso utilizarse el teorema de Pitágoras para obtener algunos de los elementos faltantes.
- Relacionar distancias y velocidades derivadas de la hipotenusa con las distancias y velocidades de los catetos.

Proposiciones:

Intervinientes:

- Los recorridos sobre los caminos rectos entre los pueblos se dan sobre un triángulo rectángulo.
- Un camino secundario forma un ángulo agudo con la carretera principal.
- El otro camino secundario es perpendicular a la carretera principal.

Emergentes:

- La situación deriva en la formación de un triángulo rectángulo.
- Un camino secundario representa la hipotenusa del triángulo.
- El otro camino secundario representa uno de sus catetos.
- La carretera principal representa el otro cateto.
- Las distancias y velocidades asociadas a los catetos se pueden representar en términos de la distancia y velocidad asociada a la hipotenusa y al ángulo agudo que hay entre la hipotenusa y uno de los catetos.

Argumentos:

Intervinientes:

- El camino más largo en un triángulo rectángulo es el que está sobre su hipotenusa.

Emergentes:

- Los triángulos rectángulos, como el de esta situación, se pueden resolver con funciones trigonométricas o con el teorema de Pitágoras.
- Si dos recorridos de diferente distancia se realizan en el mismo tiempo, el recorrido mayor corresponde con una velocidad promedio mayor.

Actividad 3

Lenguaje:

Intervinientes:

- *Verbal*: Longitud, distancia, ángulo de inclinación, velocidad promedio, recorrido, tiempo, desplazamiento.
- *Gráfico*: Representación de la situación.

Emergentes:

- *Verbal*: Posición vertical, ángulo recto, perpendicularidad, hipotenusa, catetos, velocidad promedio, recorrido, tiempo, desplazamiento.
- *Gráfico*: Representación esquemática de la situación por medio de un triángulo rectángulo.
- *Analítico*: Expresión analítica de las distancias implicadas de los recorridos como función trigonométrica, expresión analítica de las velocidades de los recorridos de halcón y de sus sombras en el suelo y en el acantilado.

Situaciones:

Intervinientes:

- Aquéllas cuya resolución propicia la realización de prácticas matemáticas y hace emerger objetos de la Geometría, la Trigonometría y la Física, en este caso interviene la situación que deriva en un triángulo rectángulo.

Emergentes:

- La solución de un triángulo rectángulo cuando algunos de sus elementos son conocidos y se pide obtener aquellos elementos que hagan falta.

Conceptos:

Intervinientes:

- Longitud, medida, distancia, ángulo agudo, hipotenusa, cateto, velocidad promedio, recorrido, tiempo, desplazamiento, simultaneidad.

Emergentes:

- Triángulo rectángulo, ángulo recto, perpendicular, línea vertical, teorema de Pitágoras, función trigonométrica, velocidad promedio, recorrido, tiempo, desplazamiento, descomposición del movimiento.

Procedimientos:

Intervinientes:

- Crear una representación esquemática de la situación planteada.
- Identificar el triángulo rectángulo que se forma.
- Reconocer los elementos con que se cuenta.
- Identificar los elementos que hace falta obtener.
- Calcular velocidades promedio.

Emergentes:

- Utilizar funciones trigonométricas para obtener los elementos faltantes del triángulo rectángulo.
- Podría incluso utilizarse el teorema de Pitágoras para obtener algunos de los elementos faltantes.
- Relacionar distancias y velocidades derivadas de la hipotenusa con las distancias y velocidades de los catetos.
- Descomposición del movimiento oblicuo del halcón en dos movimientos simultáneos de sus sombras, uno horizontal sobre el suelo y otro vertical sobre el acantilado.

Proposiciones:

Intervinientes:

- Los recorridos sobre del halcón y de sus sombras se dan sobre los lados de un triángulo rectángulo.
- El acantilado es perpendicular al suelo.

Emergentes:

- La situación deriva en la formación de un triángulo rectángulo.
- La trayectoria seguida por el halcón representa la hipotenusa del triángulo.
- El suelo representa el cateto horizontal.
- El acantilado representa el cateto vertical.
- Las distancias y velocidades asociadas a los catetos se pueden representar en términos de la distancia y velocidad asociada a la hipotenusa y al ángulo agudo que hay entre la hipotenusa y uno de los catetos.

Argumentos:

Intervinientes:

- El recorrido más largo en un triángulo rectángulo es el que está sobre su hipotenusa.

Emergentes:

- Los triángulos rectángulos, como el de esta situación, se pueden resolver con funciones trigonométricas o con el teorema de Pitágoras.
- Si tres recorridos, el del halcón y los de sus sombras, sobre diferentes distancias se realizan simultáneamente, el recorrido mayor corresponde con una velocidad promedio mayor.

Actividad 4

Lenguaje:

Intervinientes:

- *Verbal*: Trayectoria, velocidad inicial, ángulo de salida, aceleración, tiempo, plano cartesiano, movimiento rectilíneo uniforme, tiro vertical, gravedad, velocidad promedio, altura, alcance horizontal, función trigonométrica, función cuadrática, ecuaciones del movimiento, componentes horizontal y vertical, ecuaciones paramétricas del tiempo.
- *Gráfico*: Gráfica de la trayectoria de la pelota bateada.

Emergentes:

- *Verbal*: Función cuadrática, parábola, coeficientes, concavidad, tabla de posiciones verticales contra posiciones horizontales, gráfica de posiciones verticales contra posiciones horizontales en el plano cartesiano, expresión analítica de la función cuadrática que representa el movimiento.
- *Gráfico*: Gráfica de posiciones verticales contra posiciones horizontales en el plano cartesiano, las cuales conforman la trayectoria de la pelota.
- *Numérico*: Tabla de valores de las posiciones verticales contra posiciones horizontales de la pelota.
- *Analítico*: Expresión analítica de la función cuadrática que representa la trayectoria de la pelota al ser bateada.

Situaciones:

Intervinientes:

- Aquéllas cuya resolución propicia la realización de prácticas matemáticas y hace emerger objetos del Cálculo, la Geometría Analítica y la Física, es decir, los problemas de Tiro Parabólico o Movimiento de Proyectiles, a través del seguimiento de las actividades didácticas propuestas, en este caso el batazo de una pelota de béisbol para analizar el movimiento y lograr su matematización.

Emergentes:

- La situación inversa donde en un movimiento de proyectiles se conoce la función cuadrática que lo representa y se desea conocer las características físicas que describen su movimiento.
- La situación donde dada la velocidad inicial fija de un lanzamiento, se busca un ángulo de salida que maximice el alcance horizontal.

Conceptos:

Intervinientes:

- Trayectoria, velocidad inicial, ángulo de salida, aceleración, tiempo, plano cartesiano, movimiento rectilíneo uniforme, tiro vertical, gravedad, velocidad promedio, altura, alcance horizontal, función trigonométrica, ecuaciones del movimiento, componentes horizontal y vertical, ecuaciones paramétricas del tiempo.

Emergentes:

- Función cuadrática que representa el movimiento, parábola como representación gráfica de la trayectoria de un proyectil, coeficientes de la función cuadrática dependientes de la velocidad inicial y ángulo de salida del lanzamiento.

Procedimientos:

Intervinientes:

- Identificar y dibujar la trayectoria seguida por la pelota al ser bateada.
- Descomponer el desplazamiento en sus componentes horizontal y vertical.
- Descomponer la velocidad inicial en sus componentes horizontal y vertical con las funciones coseno y seno del ángulo de salida del batazo.
- Utilizar las ecuaciones paramétricas del movimiento, las cuales nos dan la posición horizontal y vertical de la pelota, para cualquier valor del parámetro tiempo.
- Determinar las posiciones horizontal y vertical de la pelota a un tiempo determinado.
- Determinar el tiempo y la posición vertical de la pelota cuando se conoce una posición vertical determinada.
- Determinar el tiempo y la posición horizontal de la pelota cuando se conoce una posición horizontal determinada.
- Con la ayuda del software *GeoGebra*, hacer simulaciones del batazo para analizarlo, desglosarlo y manipular variables y parámetros para observar los efectos que esto tiene.

Emergentes:

- Dados los elementos: tiempo, posición horizontal y posición vertical, determinar, cuando se conoce uno de los tres, los dos restantes.
- Tabular las posiciones horizontal y vertical de la pelota para diferentes valores del tiempo.
- Graficar posiciones horizontales y verticales con respecto al tiempo.
- Graficar posiciones horizontales y verticales en un plano cartesiano sin la presencia del parámetro del tiempo.
- Reconocer que la gráfica en el plano cartesiano corresponde a la trayectoria de una parábola.
- Combinar las ecuaciones paramétricas del movimiento para obtener la expresión analítica de la función cuadrática que lo representa.

Proposiciones:

Intervinientes:

- La acción de la gravedad hace que la pelota al ser bateada no siga una trayectoria recta hasta el infinito, sino que suba hasta un punto máximo y luego baje hasta el suelo.
- La trayectoria seguida por la pelota se asemeja a una parábola cóncava hacia abajo.
- La altura máxima y el máximo alcance horizontal de la pelota dependen de la velocidad que se le imprime al ser bateada y de su ángulo de salida.
- Para analizar el movimiento de la pelota, se pueden ver por separado sus posiciones verticales y horizontales.
- La proyección del movimiento de la pelota sobre la horizontal corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme.
- La proyección del movimiento de la pelota sobre la vertical corresponde a un movimiento de tiro vertical.
- La aceleración del movimiento de la proyección vertical de la pelota es la de la gravedad.

Emergentes:

- Si de la ecuación de la posición horizontal se despeja el tiempo y se sustituye en la ecuación de la posición vertical, se puede desaparecer el parámetro tiempo.
- Si combinamos las dos ecuaciones de la posición horizontal y vertical se puede obtener una función cuadrática donde la posición vertical de la pelota quedará expresada en términos de su posición horizontal.
- La combinación de las dos ecuaciones paramétricas del tiempo para el movimiento de la pelota, da como resultado la representación de una función en la forma cartesiana.
- La trayectoria de la pelota es una parábola cóncava hacia abajo, en un plano cartesiano vertical de dos dimensiones.
- Los coeficientes de la función cuadrática que representa el movimiento de la pelota están en función de la velocidad inicial y del ángulo de salida con los que fue bateada la pelota.

Argumentos:

Intervinientes:

- La gravedad es el efecto de atracción de la pelota hacia el centro de la tierra, de manera que su efecto se produce sobre la velocidad vertical.
- La gravedad no tienen ningún efecto sobre la velocidad horizontal de la pelota.
- El movimiento vertical de la pelota al verse afectado con la gravedad se considera un tiro vertical cuya aceleración es la de la gravedad.
- La velocidad horizontal de la pelota es constante, es decir, su aceleración es cero y se modela como movimiento rectilíneo uniforme.
- El software *GeoGebra* permite simular el movimiento de la pelota al ser bateada.

Emergentes:

- Se puede afirmar que la trayectoria que describe es una parábola cóncava hacia abajo, ya que el movimiento de la pelota representa con una función cuadrática.
- El software *GeoGebra* permite justificar visualmente la trayectoria del batazo y las proyecciones verticales y horizontales de la pelota al ser bateada.
- El software *GeoGebra* permite validar las tablas y gráficas obtenidas a partir de los parámetros y ecuaciones del movimiento.

- El software *GeoGebra* permite validar el resultado de combinar las ecuaciones paramétricas del movimiento, que es la función cuadrática que representa el movimiento de la pelota al ser bateada.

Actividad 5

Lenguaje:

Intervinientes:

- *Verbal*: Función cuadrática, parábola, coeficientes, concavidad, tabla de posiciones verticales contra posiciones horizontales, gráfica de posiciones verticales contra posiciones horizontales en el plano cartesiano, expresión analítica de la función cuadrática que representa el movimiento.
- *Gráfico*: Gráfica de la trayectoria de la pelota lanzada.

Emergentes:

- *Verbal*: Trayectoria, velocidad inicial, ángulo de salida, aceleración, tiempo, plano cartesiano, movimiento rectilíneo uniforme, tiro vertical, gravedad, velocidad promedio, altura, alcance horizontal, función trigonométrica, función cuadrática, ecuaciones del movimiento, componentes horizontal y vertical, ecuaciones paramétricas del tiempo.
- *Gráfico*: Gráfica de posiciones verticales contra posiciones horizontales en el plano cartesiano, las cuales conforman la trayectoria de la pelota.
- *Numérico*: Tabla de valores de las posiciones verticales contra posiciones horizontales de la pelota.
- *Analítico*: Expresiones analíticas de las ecuaciones paramétricas del movimiento y de los parámetros de velocidad inicial y ángulo de salida como función de los parámetros de la función cuadrática del movimiento.

Situaciones:

Intervinientes:

- Aquéllas cuya resolución propicia la realización de prácticas matemáticas y hace emerger objetos del Cálculo, la Geometría Analítica y la Física, es decir, los problemas de Movimiento de Proyectiles, a través del seguimiento de las actividades didácticas propuestas, en este caso el lanzamiento de una pelota para analizar y explicar su movimiento.

Emergentes:

- La situación inversa donde en un movimiento de proyectiles donde se conocen las características físicas que describen su movimiento y se desea determinar la función cuadrática que lo representa.
- La situación donde dada la velocidad inicial fija de un lanzamiento, se busca un ángulo de salida que maximice el alcance horizontal.

Conceptos:

Intervinientes:

- Función cuadrática que representa el movimiento, parábola como representación gráfica de la trayectoria de un proyectil, coeficientes de la función cuadrática dependientes de la velocidad inicial y ángulo de salida del lanzamiento.

Emergentes:

- Trayectoria, velocidad inicial, ángulo de salida, aceleración, tiempo, plano cartesiano, movimiento rectilíneo uniforme, tiro vertical, gravedad, velocidad promedio, altura, alcance horizontal, función trigonométrica, ecuaciones del movimiento, componentes horizontal y vertical, ecuaciones paramétricas del tiempo, parámetros de velocidad inicial y ángulo del lanzamiento como funciones de los parámetros de la función cuadrática del movimiento.

Procedimientos:

Intervinientes:

- Identificar y dibujar la trayectoria seguida por la pelota al ser lanzada.
- Dada una posición de la pelota horizontal o vertical determinar la otra.
- Con la ayuda del software *GeoGebra*, hacer simulaciones del lanzamiento de la pelota para analizarlo, desglosarlo y manipular variables y parámetros para observar los efectos que esto produce.

Emergentes:

- Tabular las posiciones horizontal y vertical de la pelota.
- Graficar posiciones horizontales y verticales en un plano cartesiano sin la presencia del parámetro del tiempo.
- Reconocer que la gráfica en el plano cartesiano corresponde a la trayectoria de una parábola.
- Obtener los parámetros del movimiento como son: velocidad inicial y ángulo de salida de la pelota al ser lanzada, a partir de los parámetros de la función cuadrática que representa el movimiento.

Proposiciones:

Intervinientes:

- La acción de la gravedad hace que la pelota al ser lanzada no siga una trayectoria recta hasta el infinito, sino que suba hasta un punto máximo y luego baje hasta el suelo o hasta ser atrapada.
- La trayectoria seguida por la pelota se asemeja a una parábola cóncava hacia abajo.
- La altura máxima y el máximo alcance horizontal de la pelota dependen de la velocidad que se le imprime al ser lanzada y de su ángulo de salida
- La aceleración del movimiento de la proyección vertical de la pelota es la de la gravedad.

Emergentes:

- Los parámetros físicos del movimiento, como velocidad inicial y ángulo de salida, están relacionados muy estrechamente con los parámetros de la función cuadrática.
- La trayectoria de la pelota es una parábola cóncava hacia abajo, en un plano cartesiano vertical de dos dimensiones.

Argumentos:

Intervinientes:

- La gravedad es el efecto de atracción de la pelota hacia el centro de la tierra, de manera que su efecto se produce sobre la velocidad vertical.
- La gravedad no tienen ningún efecto sobre la velocidad horizontal de la pelota.
- El movimiento vertical de la pelota, al verse afectado con la gravedad, se considera un tiro vertical cuya aceleración es la de la gravedad.
- La velocidad horizontal de la pelota es constante, es decir, su aceleración es cero y se modela como movimiento rectilíneo uniforme.
- El software *GeoGebra* permite simular el movimiento de la pelota al ser lanzada.

Emergentes:

- Se puede afirmar que la trayectoria que describe es una parábola cóncava hacia abajo, ya que el movimiento de la pelota representa con una función cuadrática.
- El software *GeoGebra* permite justificar visualmente la trayectoria del lanzamiento y las proyecciones verticales y horizontales de la pelota al ser lanzada.
- El software *GeoGebra* permite validar las tablas y gráficas obtenidas a partir de los parámetros y ecuaciones del movimiento.
- El software *GeoGebra* permite validar el resultado de combinar los parámetros de la función cuadrática para obtener la descripción física del movimiento.

Actividad 6

Lenguaje:

Intervinientes:

- *Verbal*: Trayectoria, velocidad inicial, ángulo de salida, aceleración, tiempo, plano cartesiano, altura máxima, alcance horizontal máximo, función cuadrática, coeficientes.
- *Gráfico*: Gráfica del alcance horizontal contra el ángulo de salida del lanzamiento.
- *Analítico*: Expresión analítica de la función cuadrática que representa la trayectoria de la pelota al ser lanzada.

Emergentes:

- *Verbal*: Función cuadrática, parábola, coeficientes, concavidad, función cuadrática que representa el movimiento, maximizar una función.
- *Gráfico*: Gráfica de alcances horizontales contra ángulos de salida de la pelota al ser lanzada.
- *Numérico*: Tabla de alcances horizontales contra ángulos de salida.
- *Analítico*: Expresión del alcance horizontal como función del ángulo de salida de la pelota.

Situaciones:

Intervinientes:

- Aquéllas cuya resolución propicia la realización de prácticas matemáticas y hace emerger objetos del Cálculo, la Geometría Analítica y la Física, es decir, los problemas de Movimiento de Proyectiles, a través del seguimiento de las actividades didácticas propuestas, en este caso el lanzamiento de una pelota de golf al ser golpeada con el palo.

Emergentes:

- Reconocer que a partir del ángulo con el que se logra el alcance horizontal máximo, si le suma o resta el mismo valor a ese ángulo, se obtiene exactamente el mismo alcance horizontal para esos dos nuevos ángulos.

Conceptos:

Intervinientes:

- Trayectoria, velocidad inicial, ángulo de salida, aceleración, tiempo, plano cartesiano, altura máxima, alcance horizontal máximo, función cuadrática, coeficientes.

Emergentes:

- Función cuadrática que representa el movimiento, parábola como representación gráfica de la trayectoria de un proyectil, coeficientes de la función cuadrática dependientes de la velocidad inicial y ángulo de salida del lanzamiento, relación entre el alcance horizontal y el ángulo de salida, maximización de una función determinada.

Procedimientos:

Intervinientes:

- Manipulación de la función cuadrática del movimiento para obtener la relación entre el alcance horizontal y el ángulo de salida.
- Con la ayuda del software *GeoGebra*, hacer simulaciones del lanzamiento para encontrar el ángulo que con el que se logra el máximo alcance horizontal.

Emergentes:

- Maximizar la función del alcance horizontal, la cual depende únicamente del ángulo de salida ya que la velocidad inicial del lanzamiento se mantiene fija en nuestra situación.

Proposiciones:

Intervinientes:

- La trayectoria seguida por la pelota se asemeja a una parábola cóncava hacia abajo.
- La altura máxima y el máximo alcance horizontal de la pelota dependen de la velocidad que se le imprime al ser lanzada y de su ángulo de salida.
- Si se fija la velocidad inicial del lanzamiento de la pelota, debe haber un ángulo de salida con el que se logre un alcance horizontal máximo.

Emergentes:

- La trayectoria de la pelota es una parábola cóncava hacia abajo, en un plano cartesiano vertical de dos dimensiones.
- Los coeficientes de la función cuadrática que representa el movimiento de la pelota están en función de la velocidad inicial y del ángulo de salida con los que fue lanzada la pelota.

Argumentos:

Intervinientes:

- El software *GeoGebra* permite simular el movimiento de la pelota al ser lanzada y nos permite obtener el ángulo que maximiza el alcance horizontal.
- Es posible demostrar algebraicamente que existe un ángulo que maximiza el alcance horizontal.

Emergentes:

- Se puede afirmar que la trayectoria que describe es una parábola cóncava hacia abajo, ya que el movimiento de la pelota representa con una función cuadrática.
- El software *GeoGebra* permite justificar visualmente la trayectoria del lanzamiento y las proyecciones verticales y horizontales de la pelota al ser lanzada.
- El software *GeoGebra* permite validar las tablas y gráficas obtenidas a partir de los parámetros y las ecuaciones del movimiento.

4.3. ANÁLISIS DE TRAYECTORIAS E INTERACCIONES DIDÁCTICAS

El tercer nivel de análisis para procesos de instrucción que plantea el EOS consiste en el análisis de trayectorias e interacciones didácticas.

En la conciencia de que un proceso de instrucción comprende distintas dimensiones, las cuales están interconectadas entre sí: *epistémica* (significados institucionales), *docente* (funciones del profesor), *discente* (funciones de los alumnos), *mediacional* (recursos materiales y temporales), *cognitiva* (significados personales), *emocional* (sentimientos y afectos), estas dimensiones pueden modelarse como un proceso estocástico, de manera que, en cada realización del proceso de instrucción se produce una serie de estados posibles, es decir, se produce una trayectoria muestral del proceso, que describe la secuencia particular de funciones o componentes que han tenido lugar a lo largo del tiempo. (Godino, 2006).

De acuerdo al EOS se distinguen seis tipos de procesos y trayectorias muestrales:

1. *Trayectoria Epistémica*: es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. Donde los componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.

2. *Trayectoria Docente*: es la distribución de las tareas y acciones del profesor a lo largo del proceso de instrucción.
3. *Trayectorias Discentes*: es la distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante).
4. *Trayectoria Mediacional:* es la representación de la distribución de los elementos o recursos temporales y tecnológicos utilizados (libros, apuntes, objetos para manipular, software, etc.).
5. *Trayectorias Cognitivas*: son aquéllas que producen los significados personales de los estudiantes.
6. *Trayectorias Emocionales*: es la distribución a lo largo del tiempo de los estados emocionales (actitudes, valores, afectos y sentimientos) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Cada trayectoria es la realización de un proceso estocástico, ya que el proceso de instrucción posee características no deterministas, debido a que siempre están presentes elementos aleatorios que pueden producir cambios a cada trayectoria, de acuerdo a la necesidad de hacer adaptaciones a las características y requerimientos propios de los estudiantes.

El tercer nivel de análisis se da a partir de las hojas de trabajo de las actividades didácticas cuya finalidad es la de describir la secuencia de interacciones didácticas que se espera se presenten a lo largo del proceso de instrucción como un análisis del sistema de prácticas que se desea implementar.

Se pretende entonces elaborar las trayectorias epistémica, la docente y la discente de acuerdo a la distribución en el tiempo que tendrán los objetos matemáticos involucrados desde el punto de vista de sus significados institucionales, de las funciones que realiza el profesor y de las acciones que realizan los estudiantes.

4.3.1. Trayectoria Epistémica

En este nivel de análisis se describe el modo en que los objetos matemáticos se conectan entre sí en un orden específico durante el desarrollo de las actividades, esto con el fin de comprender de mejor manera lo que sucede dentro del aula en el proceso de instrucción.

Para el análisis epistémico se elaborará una tabla donde se resumen las tareas planteadas en el diseño didáctico. En dicha tabla se recurre a las nociones de configuración epistémica, trayectoria epistémica y a los estados potenciales. La *configuración epistémica* es el sistema de objetos y de funciones semióticas entre los objetos relacionados con la resolución de situaciones problémicas. La *trayectoria epistémica* consiste en la distribución a lo largo del tiempo de los objetos matemáticos y sus funciones semióticas que se espera sucedan en un cierto orden durante su proceso de instrucción, lo que permitiría caracterizar el significado institucional pretendido. En este caso la configuración epistémica sería un elemento de la trayectoria epistémica, y de aquí que el análisis epistémico consista en la caracterización de las configuraciones epistémicas.

En la tabla descrita se mencionan las *unidades naturales*, las cuales se relacionan con cada situación problémica, así como las *unidades epistémicas*, referidas a las unidades elementales presentadas ordenadamente a lo largo de toda la trayectoria. También en la tabla se identifican los *estados potenciales* sucesivos de la trayectoria, los cuales están relacionados con los objetos primarios que constituyen un sistema de prácticas: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, proposiciones y argumentos. Entonces se cuenta con los siguientes seis estados potenciales:

1. *Situacional*: se enuncia un ejemplo de un cierto tipo de problemas.
2. *Actuativo*: se aborda el desarrollo de una cierta forma de resolver los problemas.
3. *Notacional*: se introducen representaciones gráficas, tablas, expresiones verbales, notaciones, etc.
4. *Conceptual*: se formulan o interpretan definiciones de los objetos matemáticos que se ponen en juego.
5. *Proposicional*: se enuncian e interpretan propiedades o atributos de los objetos matemáticos que se ponen en juego.
6. *Argumentativo*: se justifican o explican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Estos estados se suceden a lo largo del proceso de instrucción relativo al estudio de un cierto tema. El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instrucción permitirá caracterizar el significado efectivamente implementado.

A continuación se presenta la trayectoria epistémica elaborada a partir de las actividades consideradas en el desarrollo de la secuencia didáctica.

Trayectoria Epistémica

(de las actividades 1 a la 6)

Unidad Natural	Configur. Epistémica	Unidad Epistémica	Descripción	Estado
1	CE-1	1	Reconocer a partir de una situación estática la formación de un triángulo rectángulo donde algunos de sus elementos son conocidos y se tomarán como base para calcular sus elementos faltantes.	Situacional
		2	Construir el esquema del modelo geométrico de la situación planteada.	Actuativo
		3	Identificar visualmente la formación de un triángulo rectángulo.	Notacional
		4	Resolver el triángulo planteado con funciones trigonométricas o con el teorema de Pitágoras.	Proposicional
2	CE-2	5	Reconocer una situación de movimiento sobre un triángulo rectángulo donde a partir de algunos de sus elementos calcular los faltantes. Además de calcular velocidades promedio de recorridos sobre el triángulo.	Situacional
		6	Construir el esquema del modelo geométrico de la situación representada.	Actuativo
		7	Identificar visualmente la formación de un triángulo rectángulo.	Notacional
		8	Resolver el triángulo planteado con funciones trigonométricas o con el teorema de Pitágoras	Proposicional
		9	Obtener velocidades promedio de los recorridos de un objeto en movimiento.	Conceptual
		10	Justificar la relación de distancias y velocidades derivadas de la hipotenusa con las distancias y velocidades de los catetos.	Argumentativo
		11	Representar las velocidades como funciones de distancias y ángulos.	Notacional
		12	Utilizar representaciones de la situación en un plano cartesiano.	Notacional
		13	Proyectar horizontal y verticalmente un desplazamiento y su velocidad promedio, en forma numérica y como ecuación.	Actuativo
		14	Las distancias y velocidades asociadas a los catetos se pueden representar en términos de la	Proposicional

			distancia y velocidad asociada a la hipotenusa y al ángulo agudo que hay entre la hipotenusa y uno de los catetos del triángulo.	
3	CE-3	15	Reconocer una situación de movimiento sobre un triángulo rectángulo y calcular velocidades promedio de recorridos que se hacen sobre el mismo triángulo de un objeto en movimiento sobre la hipotenusa y de las sombras que se proyectan horizontal y verticalmente considerando la simultaneidad de los movimientos.	Situacional
		16	Construir el esquema del modelo geométrico de la situación representada.	Actuativo
		17	Obtener velocidades promedio de los recorridos de los objetos en movimiento.	Conceptual
		18	Identificar visualmente la formación de un triángulo rectángulo.	Notacional
		19	Resolver el triángulo planteado con funciones trigonométricas o con el teorema de Pitágoras.	Proposicional
		20	Justificar la relación de distancias y velocidades derivadas de la hipotenusa con las distancias y velocidades de los catetos.	Argumentativo
		21	Representar las velocidades como funciones de distancias y ángulos.	Notacional
		22	Utilizar representaciones de la situación en un plano cartesiano.	Notacional
		23	Proyectar horizontal y verticalmente un desplazamiento y su velocidad promedio, en forma numérica y como ecuación.	Actuativo
		24	Representar un movimiento como la descomposición de sus proyecciones horizontal y vertical.	Proposicional
		25	Las distancias y velocidades asociadas a los catetos se pueden representar en términos de la distancia y velocidad asociada a la hipotenusa y al ángulo agudo que hay entre la hipotenusa y uno de los catetos del triángulo.	Proposicional
4	CE-4	26	Analizar el movimiento de una pelota en un batazo elevado hacia los jardines en un juego de béisbol. Construir el modelo matemático que representa este movimiento tomando como base algunos elementos físicos como son: la velocidad inicial de la pelota y el	Situacional

			ángulo de salida.	
		27	Representar gráficamente la trayectoria de la pelota.	Notacional
		28	Identificar los movimientos de las sombras de la pelota como sus proyecciones horizontal y vertical.	Notacional
		29	Descomponer la velocidad inicial en sus componentes horizontal y vertical con las funciones coseno y seno del ángulo de salida del batazo.	Actuativo
		30	Dado el tiempo, calcular la posición horizontal y vertical de la pelota con las ecuaciones paramétricas del movimiento.	Actuativo
		31	Utilizar las ecuaciones paramétricas del movimiento, las cuales determinan la posición horizontal y vertical de la pelota para cualquier valor de tiempo.	Proposicional
		32	Representar un movimiento como la descomposición de sus proyecciones horizontal y vertical.	Proposicional
		33	Considerar la altura máxima y el máximo alcance horizontal de la pelota relacionados con la velocidad que se le imprime al ser bateada y de su ángulo de salida.	Proposicional
		34	La trayectoria descrita por el batazo corresponde a una parábola y se puede representar por medio de una función cuadrática.	Conceptual
		35	Obtener la función cuadrática del movimiento al combinar sus ecuaciones paramétricas.	Actuativo
		36	Construir tablas o gráficas de posiciones verticales, horizontales y del tiempo.	Notacional
		37	Con la ayuda de *GeoGebra*, hacer simulaciones del batazo para analizarlo, desglosarlo y manipular variables y parámetros para observar los efectos que esto tiene.	Actuativo
		38	La gravedad es el efecto de atracción de la pelota hacia el centro de la tierra, de manera que su efecto se produce sobre la velocidad vertical.	Argumentativo
		39	El movimiento vertical de la pelota al verse afectado con la gravedad se considera un tiro vertical cuya aceleración es la de la gravedad.	Argumentativo
		40	La velocidad horizontal de la pelota es constante, es decir, su aceleración es cero y se modela	Argumentativo

			como movimiento rectilíneo uniforme.	
		41	El *GeoGebra* permite validar el resultado de combinar las ecuaciones paramétricas del movimiento como una función cuadrática que representa el movimiento de la pelota.	Argumentativo
5	CE-5	42	Analizar el movimiento de una pelota donde se tiene la función cuadrática que representa su trayectoria y se desea determinar la velocidad inicial y el ángulo de salida al momento de su lanzamiento.	Situacional
		43	Representar gráficamente la trayectoria de la pelota.	Notacional
		44	A partir de los coeficientes de la función cuadrática dada, obtener la velocidad inicial y el ángulo de salida del lanzamiento de la pelota.	Actuativo
		45	Construir tablas o gráficas de posiciones verticales, horizontales y del tiempo.	Notacional
		46	La trayectoria descrita por el lanzamiento corresponde a una parábola la cual está representada por medio de una función cuadrática.	Conceptual
		47	Con la ayuda de *GeoGebra*, hacer simulaciones del lanzamiento para analizarlo, desglosarlo y manipular variables y parámetros para observar los efectos que esto tiene.	Actuativo
		48	La velocidad inicial del lanzamiento y su ángulo de salida dependen al mismo tiempo de los coeficientes de la función cuadrática dada.	Proposicional
		49	El *GeoGebra* tiene la capacidad y el dinamismo tal que permite observar el efecto que tiene mover los coeficientes de la ecuación cuadrática y sus resultados en los parámetros físicos del movimiento, precisamente por tratarse de un software de geometría dinámica.	Argumentativo
6	CE-6	50	Analizar del movimiento de una pelota de golf, para identificar el ángulo de salida que produce el alcance horizontal máximo, suponiendo que la velocidad del lanzamiento se mantiene constante.	Situacional
		51	Manipular la función cuadrática del movimiento para obtener la relación	Actuativo

			entre el alcance horizontal y el ángulo de salida.	
		52	Hacer simulaciones del lanzamiento con *GeoGebra* para encontrar el ángulo que con el que se logra el máximo alcance horizontal.	Actuativo
		53	Construir tablas o gráficas de los alcances horizontales de acuerdo a los distintos ángulos de salida de la pelota.	Notacional
		54	La trayectoria descrita por el lanzamiento corresponde a una parábola la cual está representada por medio de una función cuadrática.	Conceptual
		55	Al fijar la velocidad inicial del lanzamiento de la pelota, debe haber un ángulo de salida con el que se obtenga el alcance horizontal máximo.	Proposicional
		56	Los coeficientes de la función cuadrática del movimiento de la pelota están en función de su velocidad inicial y de su ángulo de salida.	Proposicional
		57	El *GeoGebra* tiene la capacidad y el dinamismo para hacer todas las simulaciones que requiere esta situación precisamente por ser un poderoso software de geometría dinámica.	Argumentativo

4.3.2. Trayectoria Docente

La trayectoria docente consiste en las actividades que realizan los profesores durante el proceso de estudio de un contenido matemático y donde dichas actividades corresponden con su modo de afrontar sus tareas o funciones como docente, las cuales se describen como sigue:

1. *Planificación*: Diseñar el proceso y seleccionar los contenidos a presentar y los significados a estudiar (construcción del significado pretendido y la trayectoria epistémica).
2. *Motivación*: Generar un clima de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y colaborativo, a fin de que el estudiante se involucre en el proceso de instrucción.

3. *Asignación*: Dirigir y controlar el proceso de estudio, la asignación de tiempos, la adaptación de tareas, la orientación y el estímulo de las funciones del estudiante.
4. *Regulación*: Establecer las reglas a seguir (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplos, etc.), recuperación e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptar la planificación prevista.
5. *Evaluación*: Observar y valorar el estado del aprendizaje logrado en los momentos críticos (al inicio, al final o durante el proceso) y resolver las dificultades observadas.
6. *Investigación*: Reflexionar y analizar el desarrollo del proceso para introducir cambios en sus futuras implementaciones.

Enseguida se presenta la trayectoria docente elaborada a partir de las actividades consideradas en el desarrollo de la secuencia didáctica.

Trayectoria Docente

(de las actividades 1 a la 6)

Unidad Natural	**Configur. Didáctica**	**Unidad Docente**	**Descripción**	**Estado**
1	CD-1	1	Se da y se justifica la indicación de establecer una relación entre los elementos presentados para resolver la situación problémica planteada del poste y el cable eléctrico.	Regulación
		2	Se dan indicaciones de cumplir y seguir las instrucciones de las hojas de trabajo.	Asignación
		3	Se promueve el trabajo individual y el colaborativo.	Motivación
		4	Se verifica la comprensión del grupo en relación a la situación planteada.	Evaluación
		6	Se promueve la representación esquemática de la situación.	Asignación
		7	Se resuelven las dificultades individuales que se van presentando respecto de las actividades.	Evaluación
		8	Se promueve ser muy claro en las argumentaciones que se den.	Motivación
		9	Se controlan los tiempos.	Asignación
2	CD-2	10	Se da y se justifica la indicación de establecer una relación entre los elementos presentados para resolver la situación problémica planteada del	Regulación

			camión materialista	
		11	Se dan indicaciones de cumplir y seguir las instrucciones de las hojas de trabajo.	Asignación
		12	Se promueve el trabajo individual y el colaborativo.	Motivación
		13	Se verifica la comprensión del grupo en relación la situación planteada.	Evaluación
		14	Se promueve la representación esquemática de la situación.	Asignación
		15	Se resuelven las dificultades individuales que se van presentando respecto de las actividades.	Evaluación
		16	Se promueve ser muy claro en las argumentaciones que se den.	Motivación
		17	Se controlan los tiempos.	Asignación
3	CD-3	18	Se da y se justifica la indicación de establecer una relación entre los elementos presentados para resolver la situación problémica planteada del halcón.	Regulación
		19	Se dan indicaciones de cumplir y seguir las instrucciones de las hojas de trabajo.	Asignación
		20	Se promueve el trabajo individual y el colaborativo.	Motivación
		21	Se verifica la comprensión del grupo en relación la situación planteada.	Evaluación
		22	Se promueve la representación esquemática de la situación.	Asignación
		23	Se resuelven las dificultades individuales que se van presentando respecto de las actividades.	Evaluación
		24	Se promueve ser muy claro en las argumentaciones que se den.	Motivación
		25	Se controlan los tiempos.	Asignación
4	CD-4	26	Se da y se justifica la indicación de establecer una relación entre los elementos presentados para resolver la situación problémica planteada del béisbol.	Regulación
		27	Se dan indicaciones de cumplir y seguir las instrucciones de las hojas de trabajo.	Asignación
		28	Se promueve el trabajo individual y el colaborativo.	Motivación
		29	Se verifica la comprensión del grupo en relación la situación planteada.	Evaluación
		30	Se promueve la representación esquemática de la situación.	Asignación
		31	Se recuerda el proceso de construcción de una tabla de datos.	Regulación
		32	Se recuerda el proceso de construcción de una gráfica a partir de una tabla.	Regulación

		33	Se resuelven las dificultades individuales que se van presentando respecto de las actividades.	Evaluación
		34	Se promueve ser muy claro en las argumentaciones que se den.	Motivación
		35	Se insiste en explicaciones individuales amplias y claras en términos de las ideas que se viertan y del modo de escribirlas.	Motivación
		36	Se establece una adecuada interacción con el software *GeoGebra*	Regulación
		37	Se resuelven las dificultades individuales respecto a la interacción con el software *GeoGebra*.	Evaluación
		38	Se controlan los tiempos.	Asignación
		39	Se analiza y reflexiona en torno a la actividad realizada.	Investigación
		40	Se valoran los significados logrados y las aclaraciones presentadas.	Evaluación
		41	Se da el proceso de institucionalización.	Regulación
5	CD-5	42	Se da y se justifica la indicación de establecer una relación entre los elementos presentados para resolver la situación problémica planteada del lanzamiento de una pelota.	Regulación
		43	Se dan indicaciones de cumplir y seguir las instrucciones de las hojas de trabajo.	Asignación
		44	Se promueve el trabajo individual y el colaborativo.	Motivación
		45	Se verifica la comprensión del grupo en relación la situación planteada.	Evaluación
		46	Se promueve la representación esquemática de la situación.	Asignación
		47	Se recuerda el proceso de construcción de una tabla de datos.	Regulación
		48	Se recuerda el proceso de construcción de una gráfica a partir de una tabla.	Regulación
		49	Se resuelven las dificultades individuales que se van presentando respecto de las actividades.	Evaluación
		50	Se promueve ser muy claro en las argumentaciones que se den.	Motivación
		51	Se insiste en explicaciones individuales amplias y claras en términos de las ideas que se viertan y del modo de escribirlas.	Motivación
		52	Se establece una adecuada interacción con el software *GeoGebra*	Regulación
		53	Se resuelven las dificultades individuales respecto a la interacción con el software *GeoGebra*.	Evaluación
		54	Se controlan los tiempos.	Asignación

		55	Se analiza y reflexiona en torno a la actividad realizada.	Investigación
		56	Se valoran los significados logrados y las aclaraciones presentadas.	Evaluación
		57	Se da el proceso de institucionalización.	Regulación
6	CD-6	58	Se da y se justifica la indicación de establecer una relación entre los elementos presentados para resolver la situación problémica planteada del golf.	Regulación
		59	Se dan indicaciones de cumplir y seguir las instrucciones de las hojas de trabajo.	Asignación
		60	Se promueve el trabajo individual y el colaborativo.	Motivación
		61	Se verifica la comprensión del grupo en relación la situación planteada.	Evaluación
		62	Se promueve la representación esquemática de la situación.	Asignación
		63	Se recuerda el proceso de construcción de una tabla de datos.	Regulación
		64	Se recuerda el proceso de construcción de una gráfica a partir de una tabla.	Regulación
		65	Se resuelven las dificultades individuales que se van presentando respecto de las actividades.	Evaluación
		66	Se promueve ser muy claro en las argumentaciones que se den.	Motivación
		67	Se insiste en explicaciones individuales amplias y claras en términos de las ideas que se viertan y del modo de escribirlas.	Motivación
		68	Se establece una adecuada interacción con el software *GeoGebra*	Regulación
		69	Se resuelven las dificultades individuales respecto a la interacción con el software *GeoGebra*.	Evaluación
		70	Se controlan los tiempos.	Asignación
		71	Se analiza y reflexiona en torno a la actividad realizada.	Investigación
		72	Se valoran los significados logrados y las aclaraciones presentadas.	Evaluación
		73	Se da el proceso de institucionalización.	Regulación

Para el logro de los objetivos planteados en esta serie de actividades se requiere poner en juego una gran variedad de funciones docentes de acuerdo a las siguientes consideraciones:

Planificación: En el diseño de las actividades de la secuencia didáctica se conformó una ruta de trabajo a partir de las situaciones en contexto presentadas, se distribuyó el material de trabajo en siete actividades, ordenadas de acuerdo a los fines que se buscaban. Además se diseñaron las ilustraciones de las situaciones así como las animaciones multimedia que dan realce y vistosidad a las situaciones, sin dejar de mencionar las simulaciones en *GeoGebra*, como una herramienta muy útil en el logro de las tareas matemáticas propuestas.

Motivación: La utilización del *GeoGebra* así como las animaciones multimedia que se hicieron de las situaciones en contexto, generan un ambiente interactivo que puede resultar atractivo, interesante y muy amigable para los estudiantes y que abona su involucramiento en el proceso de instrucción. Se propone además la interacción entre compañeros y se promueve la socialización de las actividades matemáticas.

Asignación: Se requiere en todo momento que el proceso de instrucción sea guiado y controlado por el profesor, pero se espera que el estudiante se sienta libre durante la realización del trabajo, llegando a un cierto grado de autonomía durante el proceso, debido a lo numeroso de los grupos y lo limitado de los recursos, como son la cantidad disponible de computadoras.

Regulación: El profesor deberá hacer un trabajo previo en cuanto a la construcción de significados personales que permitirán a los estudiantes enfrentar las tareas propuestas, sin descartar por ello la función regulativa que va a ejercer el profesor durante la ejecución de la secuencia de actividades didácticas.

Evaluación: El profesor deberá estar atento del estado de aprendizaje a lo largo de todo el proceso de instrucción, además de estar preparado para resolver las dificultades que los estudiantes vayan presentando.

Investigación: Antes de poner en marcha la secuencia de actividades didácticas se llevó acabo un pilotaje de prueba que da lugar a la reflexión, el análisis y el rediseño de algunas actividades.

4.3.3. Trayectoria Discente

La trayectoria discente consiste en el sistema de acciones y funciones que realiza el estudiante en relación a una trayectoria epistémica determinada. A continuación se presenta una relación de estados potenciales o funciones discentes que se ponen en juego durante un proceso de instrucción:

1. *Aceptación* del compromiso educativo, adopción de una actitud positiva al estudio y de colaboración con los compañeros.
2. *Exploración*, indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas.
3. *Recuerdo*, interpretación y seguimiento de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los elementos notacionales de cada situación.
4. *Formulación* de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.
5. *Argumentación* y justificación de conjeturas al profesor o a los compañeros.
6. *Recepción* de información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar.
7. *Demanda* de información, son estados en los que los estudiantes solicitan información al profesor o a otros compañeros.
8. *Ejercitación*, es la realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas.
9. *Evaluación,* son los estados en los cuales el estudiante realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor, o de autoevaluación.

A continuación se presenta la trayectoria discente elaborada a partir de las actividades consideradas en el desarrollo de la secuencia didáctica.

Trayectoria Discente

(de las actividades 1 a la 6)

Unidad Natural	**Configur. Didáctica**	**Unidad Discente**	**Descripción**	**Estado**
1	CD-1	1	Asume la tarea propuesta en la actividad didáctica.	Aceptación
		2	Recibe instrucciones sobre cómo abordar las hojas de trabajo.	Recepción
		3	Identifica elementos y relaciones del triángulo rectángulo en la situación propuesta.	Exploración
		4	Utiliza funciones trigonométricas o teorema de Pitágoras para resolver el triángulo de la situación planteada.	Recuerdo
		5	Calcula los elementos faltantes del triángulo a partir de los elementos	Formulación

			conocidos.	
2	CD-2	6	Asume la tarea propuesta en la actividad didáctica.	Aceptación
		7	Recibe instrucciones sobre cómo abordar las hojas de trabajo.	Recepción
		8	Identifica el triángulo rectángulo en la situación propuesta.	Exploración
		9	Utiliza funciones trigonométricas o teorema de Pitágoras para resolver el triángulo de la situación planteada.	Recuerdo
		10	Calcula los elementos faltantes del triángulo a partir de los elementos conocidos.	Formulación
3	CD-3	11	Asume la tarea propuesta en la actividad didáctica.	Aceptación
		12	Recibe instrucciones sobre cómo abordar las hojas de trabajo.	Recepción
		13	Identifica el triángulo rectángulo en la situación propuesta.	Exploración
		14	Utiliza funciones trigonométricas o teorema de Pitágoras para resolver el triángulo de la situación planteada.	Recuerdo
		15	Calcula los elementos faltantes del triángulo a partir de los elementos conocidos.	Formulación
		16	Establece relaciones entre distancias y velocidades del movimiento en la situación planteada.	Exploración
		17	Justifica sus respuestas a los cuestionamientos presentados.	Argumentación
4	CD-4	18	Asume la tarea propuesta en la actividad didáctica.	Aceptación
		19	Recibe instrucciones sobre cómo abordar las hojas de trabajo.	Recepción
		20	Justifica sus respuestas a los cuestionamientos presentados.	Argumentación
		21	Realiza la descomposición del movimiento para facilitar su análisis y su comprensión.	Exploración
		22	Recupera las ecuaciones del movimiento rectilíneo y del tiro vertical.	Recuerdo
		23	Utiliza las ecuaciones del movimiento para calcular posiciones horizontal, vertical y tiempo.	Formulación
		24	Recibe indicaciones de explicar ampliamente lo observado y socializar su aprendizaje.	Recepción
		25	Construye tablas y gráficas para representar las posiciones de la pelota.	Formulación
		26	Construye la ecuación cuadrática del movimiento de la pelota a partir de sus parámetros físicos.	Formulación
		27	Justifica y explica los resultados obtenidos.	Argumentación

		28	Recibe instrucciones sobre cómo interactuar con el software *GeoGebra*.	Recepción
		29	Manipula el *GeoGebra* para hacer variaciones a los parámetros físicos y observar sus efectos en la ecuación cuadrática del movimiento.	Exploración
		30	Participa en el proceso de evaluación y asignación del profesor para la valoración de los significados logrados y el proceso de institucionalización.	Aceptación
5	CD-5	31	Asume la tarea propuesta en la actividad didáctica.	Aceptación
		32	Recibe instrucciones sobre cómo abordar las hojas de trabajo.	Recepción
		33	Justifica sus respuestas a los cuestionamientos presentados.	Argumentación
		34	Recupera la ecuación cuadrática del movimiento donde los coeficientes son a su vez funciones de la velocidad inicial y del ángulo de salida de la pelota.	Recuerdo
		35	Determina los parámetros físicos del movimiento a partir de su función cuadrática	Formulación
		36	Justifica y explica los resultados obtenidos.	Argumentación
		37	Manipula el *GeoGebra* para hacer variaciones a los coeficientes de la función cuadrática y observar sus efectos en la velocidad inicial y el ángulo de salida.	Exploración
		38	Participa en el proceso de evaluación y asignación del profesor para la valoración de los significados logrados y el proceso de institucionalización.	Aceptación
6	CD-6	39	Asume la tarea propuesta en la actividad didáctica.	Aceptación
		40	Recibe instrucciones sobre cómo abordar las hojas de trabajo.	Recepción
		41	Justifica sus respuestas a los cuestionamientos presentados.	Argumentación
		42	Recupera la ecuación cuadrática del movimiento donde los coeficientes son a su vez funciones de la velocidad inicial y del ángulo de salida de la pelota.	Recuerdo
		43	Manipula el *GeoGebra* para hacer variaciones en el ángulo de salida de la pelota para obtener el alcance horizontal máximo.	Exploración
		44	Construye tablas y gráficas para representar los alcances horizontales contra los ángulos de salida.	Formulación
		45	Justifica y explica los resultados obtenidos.	Argumentación

		46	Participa en el proceso de evaluación y asignación del profesor para la valoración de los significados logrados y el proceso de institucionalización.	Aceptación

4.4. ANÁLISIS DE NORMAS Y METANORMAS

El aprendizaje en Matemáticas durante el proceso de instrucción está condicionado al cumplimiento de ciertas normas u obligaciones no explícitas, las cuales son convenciones acerca de cómo debiera ser la interacción entre los participantes de un proceso, además estas normas regulan el funcionamiento de las actividades del profesor y de los estudiantes sin importar la asignatura a desarrollar.

En un proceso de instrucción de contenidos matemáticos se pone especial atención a los elementos normativos del discurso de la actividad matemática en el salón de clases, de modo que las normas se pueden clasificar de acuerdo al momento en que se presentan: diseño del currículo, planeación, implementación, evaluación; o de acuerdo al aspecto del proceso de instrucción al que hacen referencia: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional, ecológico; o según de donde provengan: sociedad, escuela, aula, disciplina, etc.; o de acuerdo al grado de coerción: disciplinar o social.

De acuerdo al EOS, las *normas epistémicas* regulan los contenidos matemáticos a impartir, el tipo de situaciones para su aprendizaje, las diferentes representaciones (notaciones) que se utilicen, las definiciones, los conceptos, las proposiciones, los procedimientos y los argumentos. Estas normas determinan y regulan las prácticas matemáticas y las configuraciones epistémicas que las promueven en un marco institucional dado.

Las *normas metaepistémicas* son las que orientan a los estudiantes sobre las consideraciones que se producen y preservan a lo largo del tiempo, además de coexistir con otras configuraciones epistémicas. Como ejemplo de este tipo de normas están las que se refieren a lo que un problema representa, a en qué momento ha sido resuelto, a las reglas a seguir para su resolución, a cuándo se considera un argumento como válido, etc.

Para identificar las normas relativas al papel del profesor, se buscan aquéllas que cuando son cumplidas, sean suficientes para garantizar el aprendizaje deseado. En el caso de las normas de los estudiantes, la atención está puesta en la forma de responder a las instrucciones del profesor.

Las normas más relevantes en la secuencia de actividades didácticas que pudieran llegar a presentarse durante su ejecución se muestran a continuación:

Profesor:

- N1. Tratar de ser muy claros en las respuestas que se anoten en las hojas de trabajo.
- N2. Se deben dar explicaciones y argumentaciones amplias cuando así se solicite.
- N3. Sinónimo de comprender bien algo es poder expresarlo por escrito.
- N4. Para dar las respuestas que se solicitan los estudiantes deben retomar conocimientos de sus cursos de Física, Geometría Analítica y Cálculo del bachillerato.
- N5. El profesor aclarará todas las dudas que se presenten en cuanto a la redacción en las hojas de trabajo.
- N6. Cuando se responda a una duda de algún compañero los demás estudiantes deberán también poner atención para no repetir las aclaraciones.
- N7. Las hojas de trabajo son suficientes para desarrollar las actividades planteadas.
- N8. El uso de la computadora es sólo para los fines de la actividad didáctica de modo que no se permiten otro tipo de usos.
- N9. Deberá surgir interés en los estudiantes para manipular el software *GeoGebra* y explorar sus potencialidades.
- N10. Los estudiantes deberán reconocer la riqueza de las situaciones puestas en contexto de acuerdo a lo interactivo de las simulaciones presentadas.

Estudiantes:

- N11. Hay cosas que aunque entienda bien me cuesta mucho trabajo ponerlas por escrito.
- N12. Es importante escribir todos mis resultados y conclusiones en las hojas de trabajo.
- N13. Si una instrucción no la entiendo el profesor me puede explicar mejor lo que hay que hacer.

- N14. A veces es útil la interacción con los demás compañeros en la clase para aclarar las situaciones que se presenten.
- N15. Es obligación del profesor aclarar mi duda en todo momento aunque otro compañero haya tenido la misma duda antes que yo.
- N16. Los dibujos y los videos nos dan una muy buena idea de lo que está pasando en cada situación.
- N17. No es necesario calcular todo a mano si el *Geobegra* nos puede ayudar a hacer las cosas más rápidas y fáciles.
- N18. Cuando se identifica la función cuadrática de un movimiento los coeficientes deben quedar en decimales.
- N19. La parábola de la trayectoria de la pelota es la gráfica de función cuadrática que obtuve.

De los diferentes tipos de normas enlistadas puede observarse que pertenecen a los diferentes tipos, por ejemplo:

Las normas N1, N2, N3, N4, N11 y N12 son del tipo *metaepistémicas,* ya que se conservan a lo largo del proceso de implementación de la secuencia de actividades didácticas, a través de la regulación de las configuraciones epistémicas en la trayectoria.

Las normas N5, N6, N13, N14 y N15 están relacionadas con el aspecto *interaccional,* ya que se refieren a las relaciones alumno-profesor y alumno-alumno.

Las normas N18 y N19 son de tipo *epistémico,* ya que están referidas a los significados institucionales que se ponen en juego durante el proceso de instrucción.

Las normas N7, N8, N9, N10, N16 y N17 corresponden al tipo *mediacional,* ya que se refieren al uso de recursos materiales y tecnológicos en el salón de clase.

Con los 4 primeros niveles de análisis se estaría en posibilidades de descomponer un proceso de instrucción en una trayectoria de configuraciones didácticas y estudiar sus diferentes aspectos. Una configuración epistémica es una red de objetos primarios donde se activan las prácticas matemáticas realizadas (situaciones, notación, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). De acuerdo al EOS, las configuraciones docente y discente se encuentran en asociación con la configuración epistémica, de tal suerte que la asociación de las tres configuraciones constituyen una *configuración* *didáctica*, la cual puede clasificarse como *adidáctica*, *magistral*, *dialógica* o *personal*. (Godino, 2006).

La configuración didáctica del tipo *adidáctico* consiste en una secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación y como situación didáctica la institucionalización, también se consideran las situaciones que especifican las funciones de los estudiantes y su interacción con el medio, que incluye al profesor, los conocimientos pretendidos y los recursos materiales y cognitivos.

La configuración didáctica del tipo *magistral* hace referencia al modo tradicional de enseñar la matemática, basado en una presentación magistral, con ejercicios de aplicación de los conocimientos presentados. En primer lugar se presenta la componente discursiva del significado de los objetos matemáticos, a través de definiciones, enunciados o demostraciones, dejando al propio estudiante la responsabilidad de dar sentido al discurso mediante ejemplos, ejercicios o aplicaciones propuestas.

Las configuraciones del tipo *dialógico*, que conforman una variante intermedia entre las configuraciones del tipo *adidáctico* y *magistral*, conceden al estudiante el momento de exploración dejando los momentos de exploración y validación a cargo del profesor. El momento de institucionalización se presenta por medio de un diálogo en contexto entre el profesor y los estudiantes, quienes asumen la tarea propuesta, familiarizándose con ella y tal vez presentar alguna técnica de solución.

La configuración del tipo *personal* es aquélla donde la resolución de una situación problémica o la realización de alguna actividad, quedan directamente a cargo de los estudiantes y sin la intervención del profesor, de modo que éstos puedan resolver de manera autónoma los ejercicios propuestos por el profesor o que están incluidos en los libros de texto.

4.5. VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

De acuerdo a lo establecido por el EOS, el quinto nivel de análisis corresponde a la valoración de la idoneidad didáctica. Partiendo de la información recuperada por los cuatro primeros niveles del análisis didáctico, la valoración de la idoneidad didáctica se desarrolla a partir de sus seis criterios de idoneidad, mencionando lo esperado a propósito del diseño de la secuencia de actividades didácticas.

1. ***Idoneidad Epistémica***. Este criterio permite valorar la calidad del contenido matemático a enseñar, en términos de su grado de consistencia con los significados institucionales de referencia.

   Desde el diseño de la secuencia de actividades didácticas se ha propuesto dar significación al objeto matemático de la parábola y la función cuadrática, específicamente situados en el contexto de la Física, para lo cual se han seleccionado situaciones problémicas provenientes del tema de Movimiento de Proyectiles. El foco está puesto en la implementación de un sistema de prácticas tal que promueva en los estudiantes la construcción de significados del objeto matemático a través de la ruta procedimental que se ha propuesto a través de esta secuencia, y que sea más consistente con el significado institucional de referencia. Desde esta perspectiva la idoneidad epistémica se considera *alta*.

2. ***Idoneidad Cognitiva***. Este criterio permite valorar a priori, si lo que se pretende enseñar se puede considerar como razonablemente cercano a lo que saben los estudiantes; y a posteriori, si el aprendizaje efectivamente logrado es consistente con el pretendido.

   Derivado del pilotaje que se hizo en versión preliminar de la secuencia de actividades didácticas, se pudo apreciar que los conocimientos previos así como los sistemas de prácticas que se requieren para un razonable desarrollo de las actividades en un modo más o menos efectivo, sí estaban presentes en la mayoría de los estudiantes que participaron en dicho pilotaje. Dicho sistema de prácticas estuvo orientado hacia el establecimiento de funciones semióticas, por parte de los estudiantes, que promovieran la matematización de un lanzamiento de proyectiles, así como la descripción física de un lanzamiento representado por medio de su función cuadrática, lo que da una buena evidencia para considerar a la idoneidad cognitiva como *alta*.

3. ***Idoneidad Interaccional***. Este criterio busca valorar si la interacción permite identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los que efectivamente se presenten durante el proceso de instrucción.

   El diseño de la secuencia de actividades didácticas buscaba que el material impreso, las animaciones multimedia y los archivos de *GeoGebra* de apoyo, deberían ser suficientes para provocar la emergencia de los objetos institucionales pretendidos y lograr que el estudiante se apropie de ellos. Es decir, que las hojas de trabajo, las animaciones multimedia y el *GeoGebra* deberían ser capaces de guiar al estudiante a lo largo del proceso de construcción de la función cuadrática de un lanzamiento de proyectiles, con una mínima participación del profesor y promoviendo el trabajo colaborativo. La elaboración del material impreso se reajustó de acuerdo a los conflictos observados durante el pilotaje como es el caso de la redacción, sencillez del lenguaje, orientación de la pregunta hacia la respuesta esperada, etc. Con estos elementos se considera *alta* la idoneidad interaccional.

4. ***Idoneidad Mediacional***. Este criterio busca valorar el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales involucrados en el proceso de instrucción.

   Al decidir incluir el software *GeoGebra*, se tiene la conciencia de que en el centro de cómputo el número de computadoras es muy limitado, es decir, habría que considerar al menos dos estudiantes por cada una de ellas, de aquí que la idoneidad mediacional podría considerarse como *media*. Pero al tratarse del material impreso en las hojas de trabajo, de las animaciones multimedia y del software con el que se habría de trabajar, la idoneidad mediacional se considera *alta*.

5. ***Idoneidad Emocional***. Este criterio busca valorar la situación afectiva de los estudiantes, lo que determina el grado de motivación o de empeño que vayan a poner a la hora de la ejecución durante el proceso de instrucción.

   El tipo de situaciones seleccionadas en las actividades, el tipo y calidad de las ilustraciones en las hojas de trabajo impresas, las animaciones multimedia y las simulaciones interactivas con el software empleado, además de que permiten suponer la participación muy entusiasta de los estudiantes en las tareas a realizar, de aquí que la idoneidad emocional se considere *alta*.

6. ***Idoneidad Ecológica***. Este criterio busca valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo escolar, es decir, que sea consistente con el currículo, que sea pertinente con el entorno, etc.

La implementación de la secuencia de actividades didácticas puede contribuir a dar significación al objeto matemático de la parábola y la función cuadrática en el contexto físico, en situaciones problémicas del Movimiento de Proyectiles, lo que permitiría abordar, con una mayor eficacia, otros objetos matemáticos en el contexto de la Física, con una buena selección de situaciones problémicas que puedan promover la emergencia de dichos objetos. En este sentido, se podría considerar como *alta* a la idoneidad ecológica.

CONCLUSIONES

1. La historia muestra que el origen y desarrollo de la matemática se debe en gran medida, a la necesidad que el hombre ha tenido de resolver diversos problemas.

2. La relación entre la resolución de problemas y el desarrollo de las ideas matemáticas confirma nuestra creencia acerca de la naturaleza antropológica y pragmática de los objetos matemáticos.

3. La resolución de problemas como la razón fundamental del diseño de las actividades didácticas, le da sentido al estudio de los diversos objetos matemáticos intervinientes y al surgimiento y desarrollo de los emergentes.

4. El uso de la tecnología digital, como recurso didáctico para el diseño de las actividades, le da al estudio de la Matemática un carácter experimental pues permite observar visualmente, hacer simulaciones (con geometría dinámica), experimentación (al manipular variables y parámetros y ver sus efectos), lo cual facilita la detección y establecimiento de las relaciones entre las variables de un fenómeno dado.

5. La experiencia de haber diseñado la secuencia de actividades didácticas me ha permitido valorar la potencia de la propuesta metodológica que para el análisis didáctico se presenta en el EOS, pues sirve de guía didáctica para el diseño y como método para llevar a cabo el análisis didáctico propiamente dicho.

6. La noción de idoneidad didáctica que ofrece el EOS en su quinto nivel de análisis, ha permitido hacer una valoración a priori de qué tan pertinentes pudieran llegar a ser las actividades al momento de ser implementadas con los estudiantes de bachillerato tecnológico.

7. Sin lugar a dudas, el EOS ha sido la herramienta precisa para el logro de este diseño de actividades didácticas, puesto que aporta muchos elementos para el

soporte y sustento teórico y metodológico de lo diseñado, además de que contribuye a su análisis y valoración de todos los elementos didácticos que se incluyen en el presente trabajo.

8. Haber realizado este trabajo me ha permitido entender y utilizar más ampliamente las herramientas del EOS, me ha permitido hacerme cada vez más consciente y reflexivo sobre todos los pormenores que implican los procesos de instrucción.

9. Este trabajo de tesis me ha dado la oportunidad de hacerme cada vez más consciente sobre mis propios sistemas de prácticas en mi labor docente y cómo pudiera llegar a mejorarlos. A reflexionar sobre mi labor como profesor y a la gran responsabilidad que ello conlleva.

10. Este trabajo me ha dado elementos para hacer investigaciones sobre los procesos de instrucción, analizarlos y hacer valoraciones en los términos que lo propone un marco teórico como el Enfoque Ontosemiótico.

REFERENCIAS

Buendía, G. (2002).

Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 12, pp. 109-114.

Burgio, I. (2006).

Tartaglia, Galileo, la balistica e la nascita esplosiva della scienza moderna. Revista Catania Cultura, Italia.

Camacho, R. (1992).

Análisis de textos para Ingeniería (un breve estudio sobre las cantidades en movimiento). Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena, P. (1999).

Hacia la Integración del Conocimiento: Matemáticas e Ingeniería, 2º. Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, IPN, México.

Camarena, P. (2002).

Metodología Curricular para las Ciencias Básicas en Ingeniería. En Innovación Educativa, 2(10).

Camarena, P. (2003).

Un indicador para el desarrollo de competencias profesionales del futuro ingeniero. En 7º. Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. pp. 1-6, ESIME-IPN, México.

Camarena, P. (2004).

La formación de los profesores de las ciencias básicas en el nivel superior. En Científica, 8(1), pp. 35-44, ESIME-IPN, México.

Cruz, P. (sin fecha).

El laboratorio de matemáticas un lugar para vincular la Matemática, la Física y la Ingeniería. Tomado del evento académico: "La enseñanza de las Matemáticas para Ingenieros", UNAM, ENEP-Aragón, México.

Dolores, C, Alarcón, G., Albarrán, D. (2002).

Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 5, Núm. 3, pp. 225-250, México.

Fascella, M. (2006).

Utilización de un modelo de crecimiento económico para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 19, pp. 83-88, Venezuela.

Fernández, M., Rondero, C. (2004).

El inicio histórico de la ciencia del movimiento: implicaciones epistemológicas y didácticas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 7, Núm. 2, pp 145-156, México.

Filio, E. (1992).

La interpretación física como una alternativa didáctica de las ecuaciones diferenciales. Tesis, CINVESTAV-IPN, México.

Flores, C. (2007).

Variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en una situación de graficación y modelación de movimiento. Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

Font, V. (2010).

Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, 33 (1), pp. 89-105.

García, L., Rivera, M. (2009).

Un acercamiento a la variación por estudiantes del nivel medio superior y superior, basado en la modelación del movimiento. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 22.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994).

Significado institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. Recherches en Didactique des Mathematiques, 14 (3), 325-355. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2008).

Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J.D. (2006).

Análisis de procesos de instrucción basado en el Enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 26 (1) : pp. 39-88.

Gómez, A. (2007).

La evaluación en actividades de aprendizaje con uso de tecnología. Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

Hernández, H. (2003).

Una epistemología de la matematización del movimiento: caso de predicción y variación con la serie de Taylor y diferencias finitas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 16.

Hernández, M. (2009).

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme. Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

Martínez, V. (2002a).

Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 15

Martínez, V. (2002b).

Ecuaciones diferenciales y cinética química. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 15, pp. 144-149.

Moreno, E., Maldonado, M. (1998).

Movimiento uniformemente acelerado. Construcción de la expresión utilizando progresiones aritméticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 11.

Oviedo L. (2004).

Un problema motivador para un trabajo interdisciplinario en Matemática y Física. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, pp. 687-692, Cuba.

Pulido, R. (1998).

Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso matemático escolar: la transposición didáctica del diferencial en la Física y la Matemática escolar. Tesis de Doctorado, CINVESTAV-IPN, México.

Ramírez, P., Cortés, G. (2005).

El tratamiento de fenómenos físicos para aprender matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 18, pp. 625-630.

Torres, A. (2004).

La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

Torres, A., Suárez, L. (2005).

La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 18.

Trujillo, J. (2007).

Desarrollo de la noción derivada a través de un enfoque integrador entre la Física y la Matemática. Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

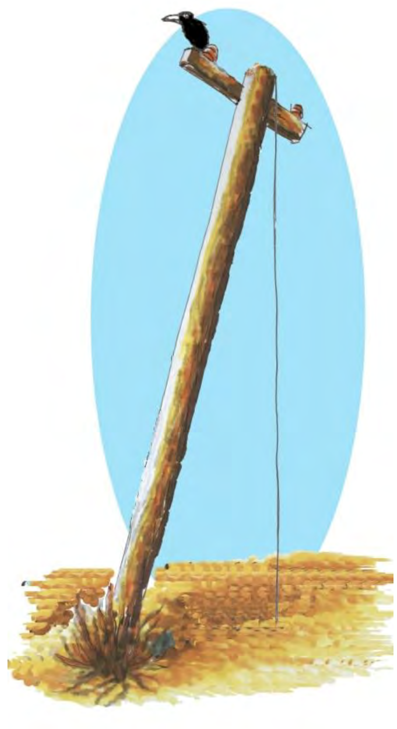
Velasco, E., Buendía, G. (2006).

Elementos socioepistemológicos de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 19.

ANEXOS

ANEXO 1.- SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Situación 1. El poste y el cable eléctrico:



Un poste de la Comisión Federal de Electricidad está dañado y se necesita recuperar un trozo de cable eléctrico para su reutilización en otra instalación. El poste tiene una cierta inclinación respecto del suelo. El cable cuelga del extremo superior del poste y apenas roza el suelo. ¿Cuánto material se podría recuperar?

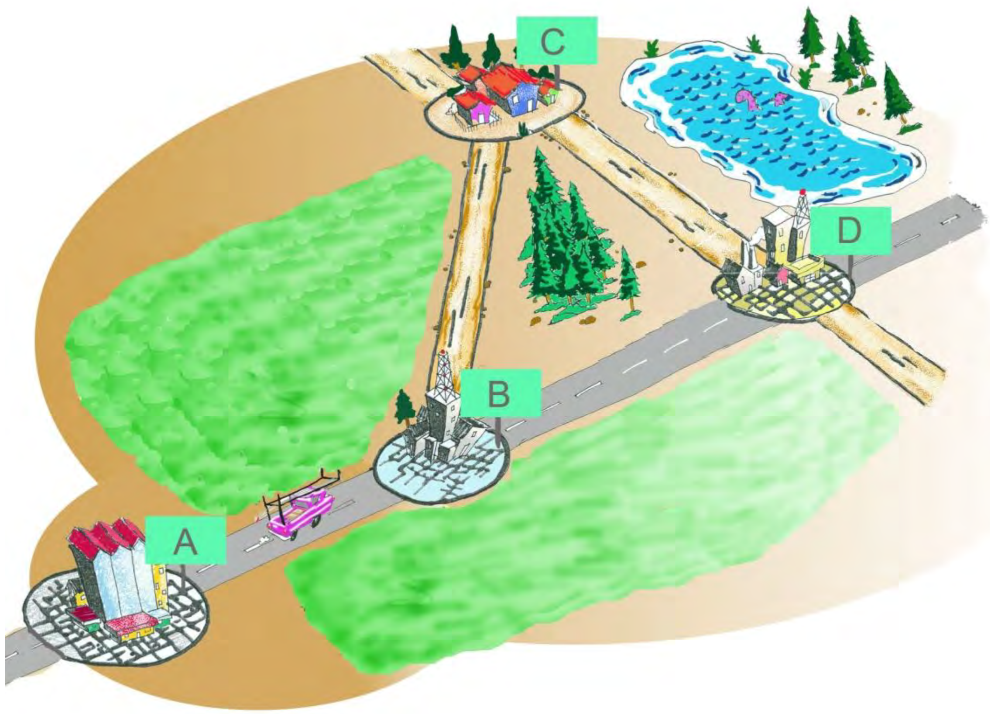
1.- ¿Qué ángulo forma el cable con el suelo?

2.- Si el poste mide 20 m, y el ángulo que forma con el suelo es de 75°, ¿Será la medida del cable menor, igual o mayor a la del poste?

3.- ¿Cuánto mide el cable?

4.- ¿A qué distancia de la base del poste está el cable?

Situación 2. El camión materialista:



Juan salió en su camión por la carretera principal del pueblo A con dirección al pueblo D para repartir material para construcción. Al llegar al pueblo B se acuerda que primero tenía que ir al pueblo C a hacer una entrega urgente de cemento. Una vez hecha la entrega en el pueblo C, se fue a hacer una entrega de varilla al pueblo D. Finalmente regresó al pueblo A pasando por B.

Si del poblado B al C recorrió 20 km, y el ángulo que se forma entre la carretera principal y el camino de B a C es de 30°, (además el camino que va de C a D es perpendicular a la carretera principal).

1.- ¿Cuál es la distancia que recorrió para ir desde el pueblo C al D en donde retomó la carretera principal?

2.- ¿Qué distancia recorrió Juan para ir desde el pueblo D al B?

3.- ¿A qué velocidad promedio en km/h recorrió la distancia entre el poblado B y C, si le tomó 15 minutos recorrer los 20 km?

4.- Si de B a C tardó lo mismo que de C a D y de D a B también tardó lo mismo que de B a C, ¿Qué tramo lo recorrió a mayor velocidad promedio?

5.- Si cada uno de los tramos le tomó 15 minutos para recorrerlo, ¿Cuáles son las velocidades promedio en km/h en cada tramo?

6.- Si llamamos h a la distancia que une B con C y α al ángulo que se forma entre la carretera principal y el camino secundario que une B con C:

a) Determina la distancia que hay entre C y D en términos de h y α.

b) Determina la distancia que hay entre D y B en términos de h y α.

7.- Si V_h es la velocidad promedio a la que se recorre la distancia h, determina V_h en términos de h y de t.

8.- Si llamamos i a la distancia entre C y D y j a la distancia entre D y B; V_i es la velocidad promedio a la que se recorre la distancia i y V_j es la velocidad promedio a la que se recorre la distancia j.

a) Determina las velocidades V_i y V_j en términos de i, j y t .

b) Determina las velocidades V_i y V_j en términos de h, α y t.

c) Determina las velocidades V_i y V_j en términos de V_h y α.

Situación 3. El halcón veloz:

Un halcón que se encuentra en el suelo se lanza a volar en línea recta hacia la parte alta de un acantilado para atrapar a una ardilla. Sobre el suelo y sobre el acantilado se proyectan las sombras del halcón durante todo su recorrido. La distancia medida en línea recta desde donde parte el halcón y hasta donde está la ardilla es de 250 m.

1.- Si al halcón le toma 10 segundos ir desde el suelo a lo alto del acantilado, ¿A qué velocidad promedio iba en m/s?

2.- ¿Qué distancia recorre la sombra del halcón sobre el suelo si el ángulo que forma la trayectoria del halcón con el suelo es de 35°?

3.- ¿Qué distancia recorre la sombra del halcón sobre el acantilado?

4.- ¿A qué velocidad promedio en m/s van las sombras del halcón proyectadas sobre el suelo y sobre el acantilado?

Ahora si llamamos d a la distancia que recorre el halcón en línea recta desde el suelo hasta donde se encuentra el ratón en la parte alta del acantilado y β al ángulo entre el suelo y la trayectoria recta del halcón. Si e y f son las distancias que recorren las sombras del halcón sobre suelo y sobre el acantilado respectivamente.

5.- Determina las distancias e y f en términos de la distancia d y el ángulo β .

Llamemos V_d a la velocidad promedio del halcón desde el suelo hasta donde se encuentra la ardilla en la parte alta del acantilado. Llamemos V_e y V_f a las velocidades de las sombras del halcón sobre suelo y sobre el acantilado respectivamente.

6.- Determina las velocidades V_e y V_f en términos de la velocidad V_d y del ángulo β .

Situación 4. El batazo de béisbol:

1.-En un batazo de béisbol elevado hacia los jardines ¿Cómo es la trayectoria que describe la pelota? Dibuja la trayectoria completa de la pelota, desde que es bateada y hasta que cae al suelo.

2.- ¿Por qué crees que la pelota sigue una trayectoria curva y no se va en línea recta?

3.- ¿De qué dependerá qué tan lejos llegue la pelota?

4.- ¿De qué dependerá qué tan alto llegue la pelota?

5.- ¿Qué relación habrá entre la alto y lo lejos que llegue la pelota?

En la parte alta del estadio hay juegos de luces que hacen que la pelota, en su recorrido por el aire, proyecte su sombra sobre el suelo, también hay luces colocadas detrás del plato del *home* en forma horizontal, que hace que la pelota proyecte su sombra sobre la pared de un edificio alto que está detrás de la barda.

6.- Describe el movimiento de la sombra de la pelota sobre el suelo.

7.- ¿La velocidad de la sombra de la pelota sobre el suelo es constante o es variable?

8.- ¿Qué tipo de movimiento describe la sombra de la pelota sobre el suelo?

9.- ¿Cómo puedes calcular la velocidad promedio de la sombra de la pelota sobre el suelo?

10.- Si ahora observamos la sombra de la pelota proyectada en el edificio que está detrás de la barda. Describe este movimiento.

11.- ¿La velocidad de la sombra de la pelota sobre la pared crees que es constante o que es variable?

12.- ¿Qué fuerza actúa verticalmente sobre la pelota para que suba hasta un punto, haga como que se detiene y luego empiece a bajar?

13.- ¿Qué tipo de movimiento describe la sombra de la pelota sobre la pared del edificio?

Llamemos $\boldsymbol{x}$ a la posición de la sombra de la pelota sobre el suelo, y $\boldsymbol{y}$ a la altura de la sombra de la pelota sobre el edificio, ambas en un mismo tiempo t determinado, debido a que los movimientos de la pelota y de sus sombras ocurren simultáneamente.

Las siguientes ecuaciones del movimiento de la pelota provienen del movimiento rectilíneo uniforme para la sombra sobre el suelo (horizontal) y del tiro vertical para la sombra sobre la pared (vertical).

$\boldsymbol{x = v_{ox}t}$ (posición horizontal de la pelota a un tiempo $\boldsymbol{t}$)

$\boldsymbol{y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2}$ (posición vertical de la pelota a un tiempo $\boldsymbol{t}$)

Donde:

$\boldsymbol{v_{ox}}$ es la velocidad inicial horizontal de la pelota

$\boldsymbol{v_{oy}}$ es la velocidad inicial vertical de la pelota

$\boldsymbol{t}$ es el tiempo

$\boldsymbol{g}$ es la aceleración debida a la gravedad (9.81 m/s^2)

$\boldsymbol{v_o}$ es la velocidad inicial de la pelota

$\boldsymbol{\alpha}$ es el ángulo de salida de la pelota

$\boldsymbol{v_{ox}} = v_o cos\alpha$

$\boldsymbol{v_{oy}} = v_o sen\alpha$

Se dispara un batazo hacia el jardín, en donde la barda tiene el rótulo de 400 $pies$ (121.92 m). La velocidad de salida de la pelota es de 130 km/h (36.11 m/s), con un ángulo respecto de la horizontal de 35°. La pelota es bateada a una altura de 1 metro sobre es suelo. (Se sugiere utilizar el archivo de *GeoGebra* llamado "Béisbol" como apoyo para la experimentación y validación de los resultados obtenidos).

14.- ¿Tocará la pelota el suelo antes de llegar a la barda? Argumente su respuesta.

15.- ¿En cuánto tiempo la pelota llegará a la barda?

16.- Si la barda tiene 3 metros de altura, ¿será este batazo un cuadrangular?

17.- ¿Cuáles son las posiciones horizontal y vertical de la pelota a los 3 segundos?

18.- ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota recorrer horizontalmente los 100 metros?

19.- ¿En cuánto tiempo la pelota estará a 20 metros sobre la altura a la que fue bateada?

20.- ¿Qué distancia horizontal recorre la pelota para estar a 21 metros de altura?, considere que la pelota fue bateada a una altura de 1 metro sobre el suelo.

21.- ¿A qué altura en metros se encuentra la pelota después de recorrer horizontalmente 100 metros?

22.- ¿A qué altura en metros se encontraba la pelota después de recorrer horizontalmente x metros?

23.- Determina la posición vertical y de la pelota en términos de su posición horizontal x, suponiendo que hubiera sido bateada desde la superficie el suelo.

24.- Determina la posición vertical y de la pelota en términos de su posición horizontal x, considerando que fue bateada a una altura de 1 metro sobre el suelo y utilizando los valores de velocidad inicial y ángulo de salida con los que se cuenta.

25.- Determina la posición vertical y de la pelota en términos de su posición horizontal x, considerando que fue bateada a una altura h sobre el suelo y utilizando los valores de velocidad inicial v_o y ángulo de salida α cualquiera

26.- Si la posición vertical $\boldsymbol{y}$ de la pelota fuera una función cuadrática de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, determina los coeficientes A, B y C en términos de la velocidad inicial v_o, el ángulo de salida α y la altura h a la que fue bateada la pelota.

Situación 5. Lanzamiento de una pelota:

En la situación problémica anterior del béisbol se determinó que la función cuadrática que representa la posición vertical y de la pelota en términos de su posición horizontal x está dada por:

$$\boldsymbol{y = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}x^2 + (tan\theta)x + h}$$

Donde:

$\boldsymbol{g}$ es la gravedad,

$\boldsymbol{v_o}$ es la velocidad inicial de la pelota,

$\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo de salida de la pelota,

$\boldsymbol{h}$ es la altura respecto del suelo desde donde es lanzada la pelota.

La altura y (en metros) de una pelota lanzada por un joven está dada por la siguiente función:

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x^2 + 3x + 2}\ ,$$

donde x representa la posición horizontal de la pelota en algún instante. (Se sugiere utilizar el archivo de *GeoGebra* llamado “Lanzamiento” como apoyo para la experimentación y validación de los resultados obtenidos).

1.- Relacionando la función cuadrática generalizada de un lanzamiento cualquiera con la función cuadrática de esta situación en particular determina:

a) El ángulo θ de salida con que fue lanzada la pelota.

b) La velocidad inicial v_o de la pelota al ser lanzada.

2.- ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar hasta el otro joven que se encuentra a 9 metros de distancia?

3.- ¿Pasará la pelota por arriba de la cabeza de otro joven a 9 metros de distancia, tratando de atrapar la pelota? Suponga que el joven trata de atrapar la pelota, para lo cual levanta el guante a una altura de 1.8 metros.

Situación 6. El golf:

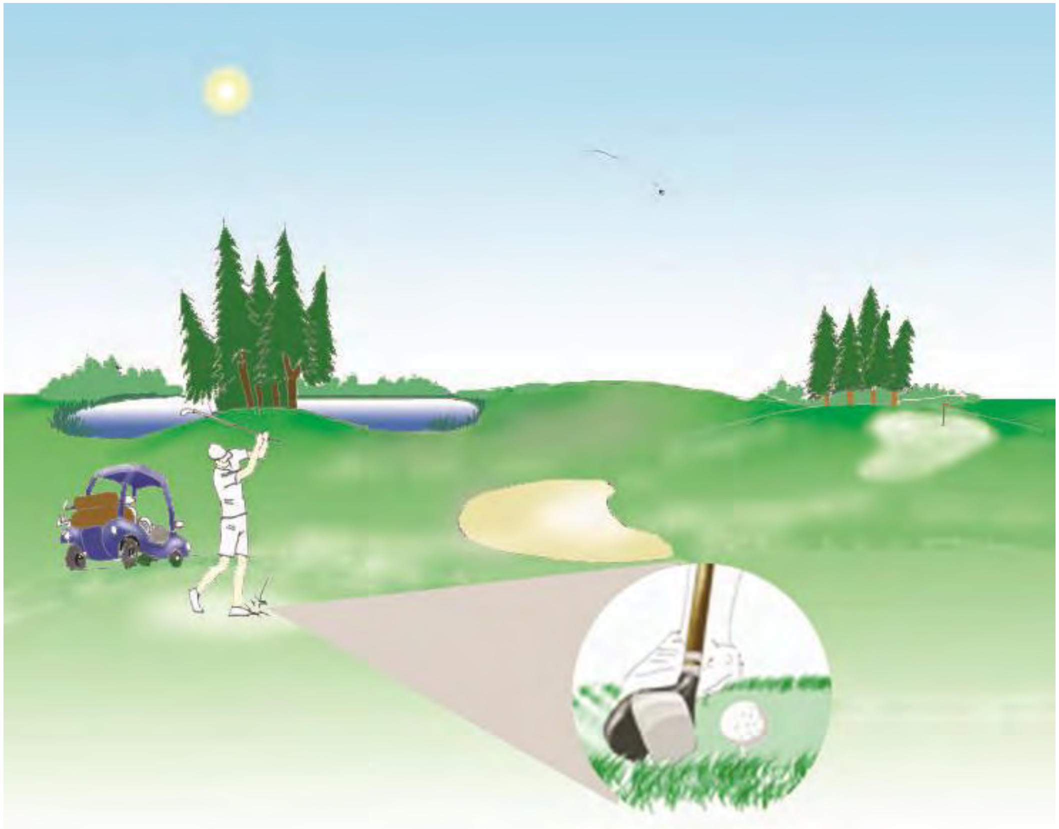
Los palos de golf con los que se puede golpear más fuertemente y lograr mayor distancia se denominan maderas, aunque en la actualidad ya no son de este material, sino de acero o titanio. Se llevan normalmente tres maderas para los golpes largos. Las maderas se utilizan para lograr distancia con la bola. Su uso primordial es para salir de los *tees*, que son las salidas de cada hoyo del campo.

Para los restantes golpes se emplean los hierros, de los que se llevan nueve o diez. Todos estos palos se diferencian entre sí por el ángulo de sus bases, mediante el cual varía su inclinación. Los palos con mayor inclinación son los *wedges*. Los que se suelen encontrar en este grupo reciben nombres específicos como *pitching wedge* (45° a 48°) o *sand wedge* (56°), que se suele usar para sacar la bola de las trampas de arena.

Otros *wedges* habituales son el *gap wedge* (unos 52°), para cubrir el hueco entre los dos anteriores, o el *lob wedge* (60°) que ayuda a detener la bola en el lugar donde cae, sin que ruede más allá. Finalmente se utiliza un palo denominado *putter* para empujar la bola mediante un golpe (*putt*) hacia el hoyo en el *green*.

1.- ¿Por qué crees que tiene una cierta inclinación la cara del palo que hace contacto con la pelota?

2.-¿De qué dependerá lograr un tiro que alcance una gran distancia horizontal?



En un campo de golf plano, Jorge quiere hacer un tiro que alcance la máxima distancia horizontal, si la máxima velocidad con que sale la pelota después de ser golpeada es de 50 m/s (unos 180 km/h), ¿Qué ángulo de salida deberá imprimirle el palo al lanzamiento para que la distancia horizontal lograda sea la máxima posible?

Con el archivo "Golf" de *GeoGebra*, ajusta los datos físicos de velocidad inicial v_0 , altura inicial y_0 y para una serie de ángulos θ, obtén las distancias alcanzadas en cada caso.

Una vez seleccionado el ángulo, deberás arrastrar el punto de la línea del tiempo t para que se vaya dibujando la trayectoria de la pelota. Llena la siguiente tabla.

Ángulo θ	Alcance Horiz.
20°	
25°	
30°	
35°	
40°	
45°	
50°	
55°	
60°	
65°	
70°	

3.-¿Con qué inclinación en la cara del palo de golf se logró la máxima distancia horizontal?

4.-Para estar más seguros de que con este ángulo se logra la máxima distancia horizontal, verifica con un ángulo θ de un grado menos y otro de un grado más. Anota los resultados:

Ángulo θ	Alcance Horiz.

5.- ¿Será posible validar este resultado analíticamente, es decir, con ecuaciones?

De las actividades anteriores recuperemos la ecuación cuadrática que represente este movimiento:

$$\boldsymbol{y} = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}\boldsymbol{x}^2 + (tan\theta)\boldsymbol{x} + y_0$$

6.- Si el campo es plano y la pelota se golpea a ras de suelo, ¿Cuánto debe medir y_0 ?

7.- Reescribe la ecuación con la consideración de la medida de y_0.

8.- Al final del recorrido de la pelota en el aire, ¿A qué altura se va a encontrar?, es decir, una vez que la pelota haya alcanzado horizontalmente los x metros que cubren el recorrido, ¿Cuánto medirá y?

9.- Reescribe la ecuación con la consideración del valor de y al final del recorrido de la pelota en el aire.

10.- De la ecuación que quedó del punto anterior, despeja x para que quede en términos del ángulo Θ, es decir, para que el máximo alcance horizontal de la pelota dependa únicamente del valor del ángulo Θ, ya que hemos supuesto que la velocidad inicial del lanzamiento es fija.

Situación 7. La rana:

En el salto de una rana se puede apreciar cómo también el Movimiento de Proyectiles está presente en la naturaleza, es decir, el hecho de que la rana, al desplazarse por medio de saltos, la trayectoria que sigue en el aire es una parábola.

1.- Observa la posición de la rana cuando se encuentra en reposo justo antes de saltar ¿Cuál será aproximadamente su ángulo de salida en el momento de saltar?

2.- ¿Qué puedes decir del alcance horizontal que logrará la rana al saltar con este ángulo?

ANEXO 2.- DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Situación 1.- El poste y el cable eléctrico:

En el punto 1, se pide determinar el ángulo que forma el cable con el suelo, y se espera que observe que es perpendicular.

En el punto 2, se pide comparar la longitud del cable con la del poste, donde se deberá apreciar que se forma un triángulo rectángulo donde el poste es la hipotenusa y el cable uno de los catetos, de aquí que la longitud de cualquier cateto es menor a la longitud de la hipotenusa.

En el punto 3, se pide calcular la longitud del cable, para lo cual se deberá recurrir a la función seno del ángulo que forma el poste con el suelo, y multiplicar este seno por la longitud del poste para obtener dicha longitud.

En el punto 4, se pide calcular la distancia del cable a la base del poste, para lo cual se deberá recurrir a la función coseno del ángulo que forma el poste con el suelo, y multiplicar este coseno por la longitud del poste para obtener dicha distancia.

Situación 2.- El camión materialista:

En los puntos 1 y 2, se pide calcular la distancia de ambos catetos del triángulo rectángulo que se forman por la distancia de C a D (a la carretera principal) y la distancia desde B a D. Son datos conocidos la distancia de B a C, es decir, la hipotenusa así como el ángulo que se forma entre el camino que une a B con C y la carretera principal. Se espera que para descomponer un desplazamiento diagonal en sus componentes vertical y horizontal, se utilicen las funciones seno y coseno del ángulo dado. Si se utilizara sólo la función seno para un cateto y el Teorema de Pitágoras para el otro cateto, se solicitaría comprobar el segundo cateto utilizando la función coseno.

En los puntos 3, 4 y 5, se pide calcular la velocidad promedio del camión que va del pueblo B al C, es decir, sobre la hipotenusa del triángulo; y comparar esta velocidad con la que tuvo en los tramos de C a D y de D a B, es decir, sobre los catetos del triángulo rectángulo. Si al camión en los tres tramos le toma el mismo tiempo recorrer sus respectivas distancias, se esperaría que se identifique cualitativamente al tramo donde fue más veloz de los tres en función de la mayor distancia recorrida en el mismo tiempo. Luego se pide calcular las velocidades del camión en los tres tramos para comprobar que efectivamente que se es más veloz sobre el tramo de B a C, es decir, sobre la hipotenusa del triángulo.

Ahora se presenta la misma situación inicial pero ahora las distancias de los catetos e hipotenusa son variables, así como el ángulo que se forma entre la carretera principal y el camino que une al pueblo B con el pueblo C. El pueblo D es donde se retoma la carretera principal.

En el punto 6, se pregunta por las distancias de C a D y de B a D, identificadas como i y j respectivamente, para lo cual se parte de la distancia de B a C, identificada como h, es decir, la hipotenusa del triángulo rectángulo y α como el ángulo que se forma entre la carretera principal y el camino que une a B con C. Se pretende que las distancias i y j queden expresadas en términos de h y α, por medio de las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo α.

En el punto 7, se pregunta por la velocidad promedio sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo para un tiempo t, es decir la velocidad en función de h y del tiempo t.

En el punto 8, se pide expresar las velocidades promedio sobre los catetos i y j, es decir v_i y v_j en términos de la hipotenusa h, del ángulo α y del tiempo t. También se pide expresar las velocidades promedio sobre los catetos v_i y v_j en términos de la velocidad sobre la hipotenusa v_h y del ángulo α. En esta parte se pretende descomponer la velocidad que se recorre sobre la hipotenusa, en dos velocidades: una vertical y la otra horizontal, para lo cual es necesario utilizar las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo α.

Situación 3.- El halcón veloz:

Esta situación es similar a la situación 2 del camión materialista, en el sentido de que se recorre una distancia determinada a una velocidad determinada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo y se pide descomponer esta velocidad en las velocidades horizontal y vertical, para lo cual se recurre a las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo β.

En los puntos 1, 2, y 4, se pide calcular la velocidad promedio de un halcón dadas la distancia que recorre en línea recta y el tiempo que le toma recorrerla, así como las distancias y velocidades de las sombras del halcón proyectadas sobre el suelo y sobre un acantilado. Se espera que se calcule utilizando las descomposiciones horizontal y vertical de la velocidad, de acuerdo a las funciones seno y coseno del ángulo dado, tal y como se hizo en la Situación 2.

En los puntos 5 y 6, se pide expresar las distancias recorridas por las sombras del halcón proyectadas en ambas paredes, en términos de la distancia d que recorre el halcón y del ángulo β que forma la trayectoria del halcón con la pared 2. Así como las velocidades de las sombras en ambas paredes en términos de la velocidad del halcón y del mismo ángulo β.

Situación 4.- El batazo de béisbol:

En esta situación se plantea analizar el movimiento de una pelota de béisbol al ser bateada, para explicar y comprender el fenómeno físico y tratar de matematizarlo.

En el punto 1, se pide dibujar la trayectoria que sigue la pelota de béisbol al ser bateada en un elevado hacia los jardines, vista desde una perspectiva lateral.

En los puntos 2, 3, 4 y 5, se pregunta de manera intuitiva por qué seguiría la pelota esa trayectoria, de qué depende el máximo alcance horizontal y la máxima altura a la que llega la pelota, y si hay relación entre la altura máxima y la máxima distancia horizontal que la pelota alcanza. Se espera que las respuestas señalen los elementos que intervienen en esta situación física, es decir, el impulso que le imprime el batazo a la pelota, el ángulo con que sale y la acción que ejerce la gravedad sobre el movimiento de la pelota.

Ahora, en la misma situación del batazo de béisbol, se toman en cuenta las sombras de la pelota en el suelo y en una pared vertical muy alta que está detrás de la barda.

En los puntos 6, y 7, se pide describir intuitivamente lo que pasa con la sombra de la pelota que se proyecta sobre el suelo, también se pregunta si existe algo que horizontalmente afecte al movimiento y si la velocidad de la sombra sobre el suelo es constante o variable. Se espera que se describa el movimiento de la sombra como en línea recta y a velocidad constante ya que no hay ninguna fuerza actuando horizontalmente sobre la pelota, por lo que su velocidad horizontal no varía, es decir, se mantiene constante.

En los puntos 8 y 9, una vez identificadas las características de movimiento de la sombra de la pelota sobre el suelo, se pide señalar qué tipo de movimiento es y cómo se calcula su velocidad promedio. Se espera que se identifique como movimiento rectilíneo uniforme y se calcule como la distancia recorrida sobre el tiempo que tarda en recorrerla.

En los puntos 10, 11, 12 y 13, se pide describir el movimiento de la sombra de la pelota proyectada sobre una pared vertical que está detrás de la barda, se pregunta sobre la velocidad de la sombra, sobre qué fuerza actúa verticalmente sobre la pelota y qué tipo de movimiento describe su sombra sobre la pared vertical. Se espera que se describa un movimiento de tiro vertical, donde la pelota sube hasta llegar a un punto de máxima altura, para después descender, es decir, la velocidad sería variable por el efecto de la gravedad.

En la siguiente parte se recuperan las ecuaciones tanto del movimiento rectilíneo uniforme como del tiro vertical, se enlistan las variables, los parámetros y las constantes que intervienen, también se descompone la velocidad inicial en su parte horizontal y vertical, de acuerdo a lo presentado en las situaciones 1 y 2 anteriores.

En el punto 14, se pregunta si la pelota tocará al suelo antes de llegar a la barda. Se espera que la respuesta intuitiva sea que dependerá de la altura de la barda.

En el punto 15, se pide calcular el tiempo que le tomaría a la pelota llegar o pasar por encima de la barda. Se espera primero que se calcule la velocidad horizontal, y dada la distancia a la que está la barda, se calcule el tiempo que tomaría a la pelota cubrir toda esa distancia.

En el punto 16, se da la altura de la barda y se pide determinar si el batazo es o no cuadrangular, es decir, si la pelota pasa o no por encima de la barda. Se deberá utilizar la ecuación de la altura a un tiempo determinado, para lo cual es necesario calcular la velocidad vertical dado que el tiempo de vuelo ya se calculó en el punto anterior. A la altura obtenida será necesario sumarle un metro, que fue la altura respecto del suelo a la que se dio el batazo.

En el punto 17, se pide determinar las posiciones horizontal y vertical de la pelota a los 3 segundos, aquí es necesario despejar la posición x de la ecuación de movimiento horizontal, y despejar y de la ecuación del movimiento vertical.

En el punto 18, se pide determinar cuánto tiempo le toma a la pelota recorrer horizontalmente 100 metros, para lo cual se deberá despejar el tiempo t de la ecuación del movimiento horizontal.

En el punto 19, se pide determinar cuánto tiempo le toma a la pelota estar a 20 metros de altura sobre la altura a la que fue bateada, para lo cual se deberá despejar el tiempo t de la ecuación del movimiento vertical, y como se trata de una ecuación cuadrática se determinarán dos tiempos en donde se da la altura indicada, con la utilización de la fórmula general.

En el punto 20, se pide determinar qué distancia horizontal recorre la pelota para estar a 21 metros de altura, considerando que la pelota fue bateada a una altura de 1 metro sobre el suelo. Aquí se deben determinar los dos tiempos que resultan de la fórmula general, y con la ecuación del movimiento horizontal x, calcular las dos posiciones.

En el punto 21, se pide determinar a qué altura se encontraba la pelota al instante de haber recorrido horizontalmente 100 metros, respecto de la altura a la que fue bateada, para lo cual se sigue un procedimiento muy similar al de los dos puntos anteriores, es decir, primero se calcula el tiempo en que se recorren horizontalmente esos 100 metros y luego ese tiempo se sustituye en la ecuación de la altura, para ambos cálculos fue necesario separar la velocidad inicial en sus componentes horizontal y vertical, lo que ya se tenía hecho en los dos puntos anteriores.

En el punto 22, análogo al punto anterior, se pide determinar a qué altura quedará la pelota después de haber recorrido horizontalmente x metros, respecto de la altura a la que fue bateada. Se esperaría que primero se determinara el tiempo como función de los x metros y luego en la ecuación de la altura sustituir ese tiempo, así se obtendrá una ecuación de la altura como función de la distancia horizontal recorrida x. Con todo esto lo que estamos obteniendo es la ecuación cartesiana del movimiento a partir de las ecuaciones paramétricas de la distancia horizontal x, así como la altura y, ambas como funciones del tiempo.

En los puntos 23 y 24, sólo se pide expresar la altura o posición vertical y de la pelota en términos de la distancia horizontal recorrida o posición horizontal x, primero respecto de la altura en que fue bateada la pelota y luego respecto del suelo, en este último caso se deberá sumar 1 a la primera ecuación, con lo que se tomaría en cuenta que la altura a la que fue bateada la pelota con respecto al suelo fue de 1 metro.

En el punto 25, se pide expresar la altura o posición vertical y de la pelota en términos de la distancia horizontal recorrida o posición horizontal x respecto del suelo, en este caso se deberá sumar h a la primera ecuación, con lo que se tomaría en cuenta que la altura a la que fue bateada la pelota con respecto al suelo fue de h metros.

En el punto 26, se pide expresar la ecuación que representa de la altura y de la pelota en términos de la distancia horizontal recorrida x, como una función cuadrática de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$. La altura h estará considerada con respecto del suelo.

Situación 5.- Lanzamiento de una pelota:

En esta situación ahora se tiene el problema inverso de la situación 4, es decir, se tiene la ecuación de un movimiento de Tiro Parabólico, y se pide describir dicho movimiento, para lo cual se deberán analizar los parámetros de la ecuación, calcular y responder algunas preguntas.

En el punto 1, se pide determinar el ángulo con el que se lanzó la pelota y a qué velocidad salió. Se espera en estos dos puntos que se tomen los coeficientes A y B de la función cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$, luego recuperar de la situación 4 lo que representan esos parámetros en la descripción del movimiento, con esto se estará en posibilidades de determinar el ángulo de salida del lanzamiento y la magnitud de la velocidad inicial de la pelota.

En los puntos 2 y 3 se pide determinar el tiempo en que la pelota llega hasta otro joven a 9 metros de distancia del primero y si la pelota será atrapada al levantar su guante o si le pasará por arriba sin ser atrapada. Como de los dos puntos anteriores ya se tiene la velocidad inicial y el ángulo de salida, se utilizan las ecuaciones del movimiento para calcular el tiempo de vuelo de la pelota y luego con la ecuación de la y en función del tiempo t, se calcula la altura a la que pasará la pelota respecto del segundo joven. Del parámetro C de la función cuadrática se determina a qué altura sobre el suelo fue lanzada la pelota, agregamos la altura y de la ecuación para saber si la pelota será atrapada o no. Con esto se tendría resuelto el problema inverso de dada la ecuación que matematiza un movimiento, poder describir las características de ese movimiento.

Situación 6.- El golf:

En esta situación del golf se quiere hacer un tiro que logre el máximo alcance horizontal, para lo cual se ha fijado la velocidad inicial del lanzamiento y se deberá identificar el ángulo con el cual se dé dicho alcance máximo.

En el punto 1, y después de ver la foto de un palo de golf se pregunta para qué se tiene una cierta inclinación en la cara del palo, para lo cual se espera se responda que dicha inclinación es la responsable de imprimir al disparo un cierto ángulo de salida.

En el punto 2, se pregunta de qué dependerá lograr un tiro de gran alcance horizontal, para lo cual se espera se responda que depende de la velocidad inicial del disparo y del ángulo de salida de la pelota.

Se plantea la siguiente situación en el contexto del golf:

"En un campo de golf plano, Jorge quiere hacer un tiro que alcance la máxima distancia horizontal, si la máxima velocidad con que sale la pelota después de ser golpeada es de 50 m/s (unos 180 km/h), ¿Con qué inclinación de la cara del palo se logrará la distancia máxima?"

En el punto 3, después de llenar, con el apoyo de *GeoGebra*, una tabla del alcance horizontal máximo en función del ángulo de salida, se pide identificar el posible ángulo con el que se lograría la máxima distancia horizontal. Se identificaría que el posible ángulo debe ser de 45°.

En el punto 4, y para verificar que con el ángulo de 45° se logra el máximo alcance horizontal, se pide verificar el alcance con un ángulo de 44° y otro de 46°, lo cual confirmará que el ángulo buscado es el de 45°.

En el punto 5, se pregunta si el resultado del punto anterior se puede validar algebraicamente.

En los puntos 6 y 7, y dado que el campo de golf es plano y la pelota inicia su recorrido desde el suelo, se pregunta por la altura inicial y_0, la cual debe ser cero, y así reescribir la función cuadrática del movimiento sin considerar el término independiente y_0.

En los puntos 8, 9 y 10, se pide despejar la x de la función cuadrática suponiendo que al final del recorrido en el aire la altura y es cero. Con esto y la ayuda de una identidad trigonométrica se demostrará que el ángulo de salida que da el máximo alcance horizontal es el de 45°.

Situación 7.- La rana:

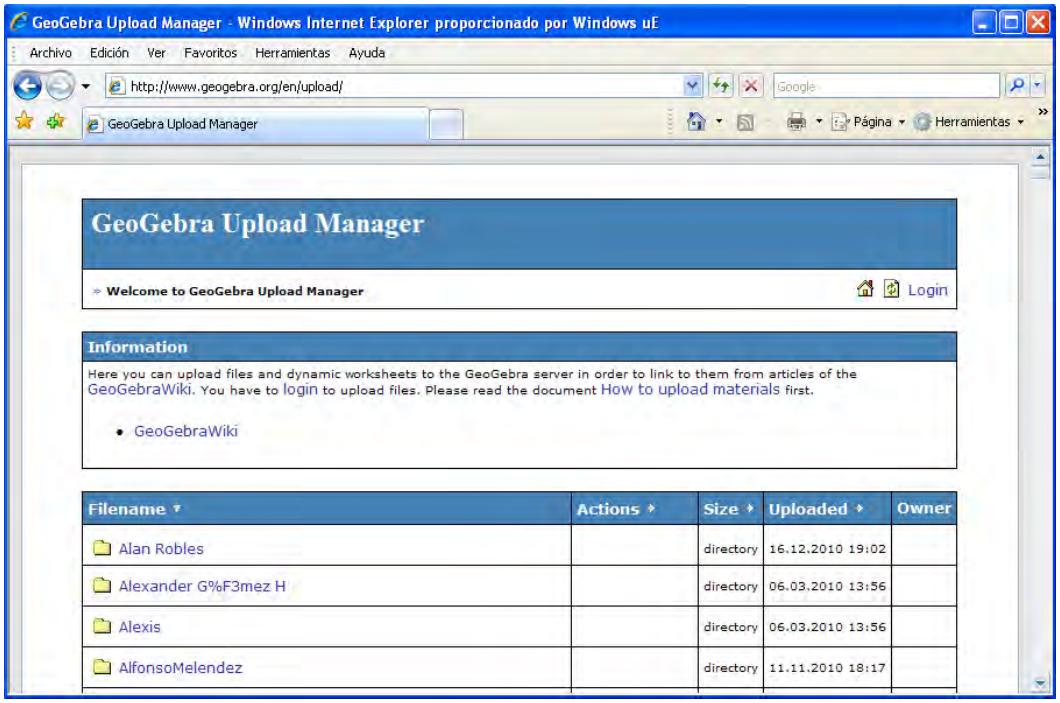
En esta situación se presenta el salto de una rana para poder ilustrar cómo en la naturaleza también está presente el Movimiento de Proyectiles.

En el punto 1, se pide determinar aproximadamente el ángulo con el que saltará la rana, a partir de observar la ilustración que la presenta en posición de reposo justo antes de saltar.

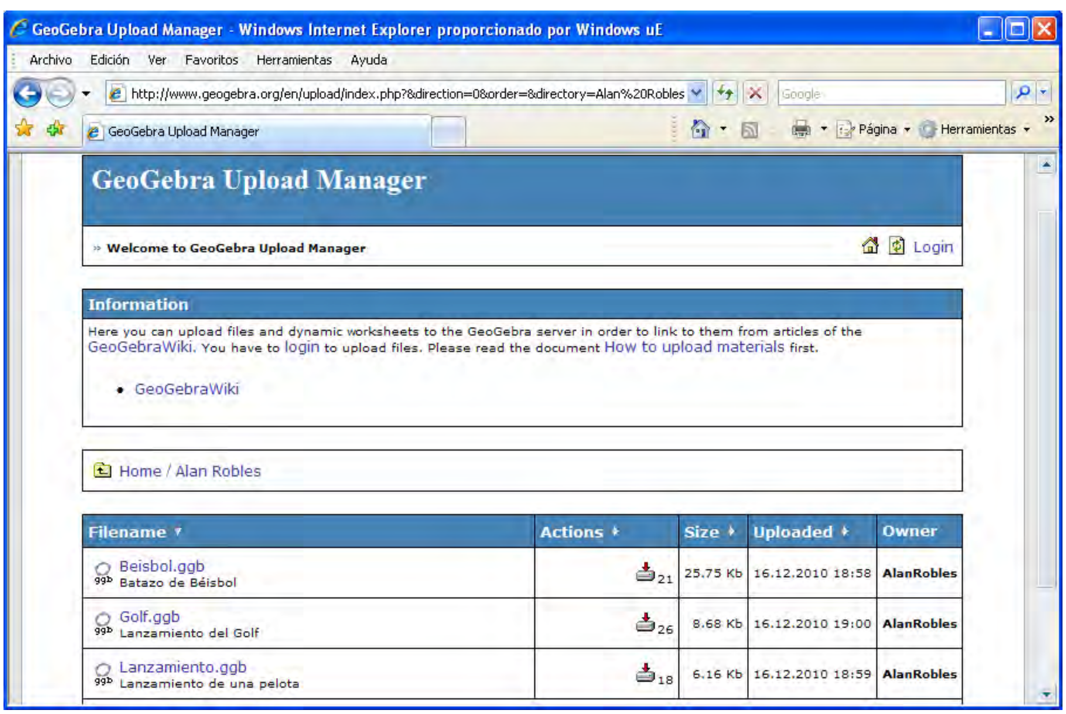
En el punto 2, se pregunta por el efecto que tendrá saltar con ese ángulo, es decir, determinar que con ese ángulo es posible lograr un alcance horizontal máximo.

ANEXO 3.- ARCHIVOS Y PANTALLAS DE GEOGEBRA

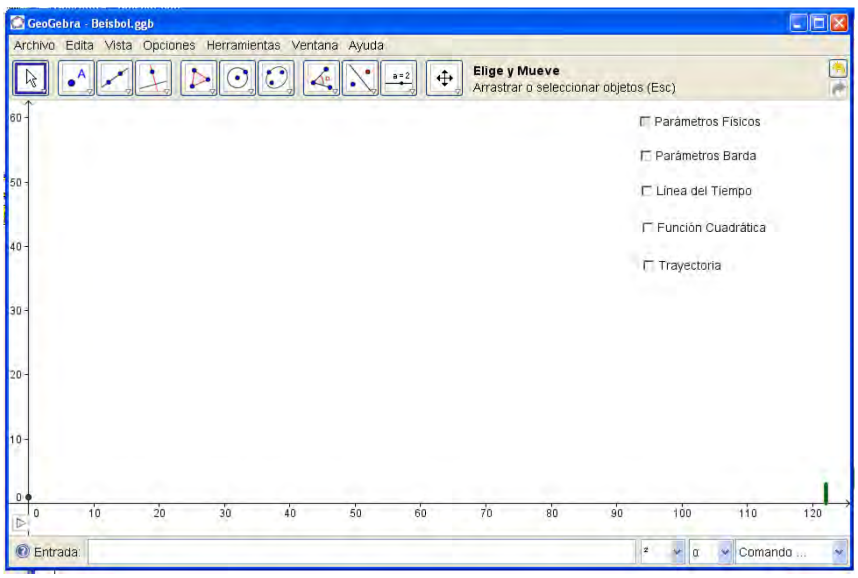
Los archivos de *GeoGebra* para las actividades didácticas están disponibles en la siguiente dirección: *http://www.geogebra.org/en/upload/*



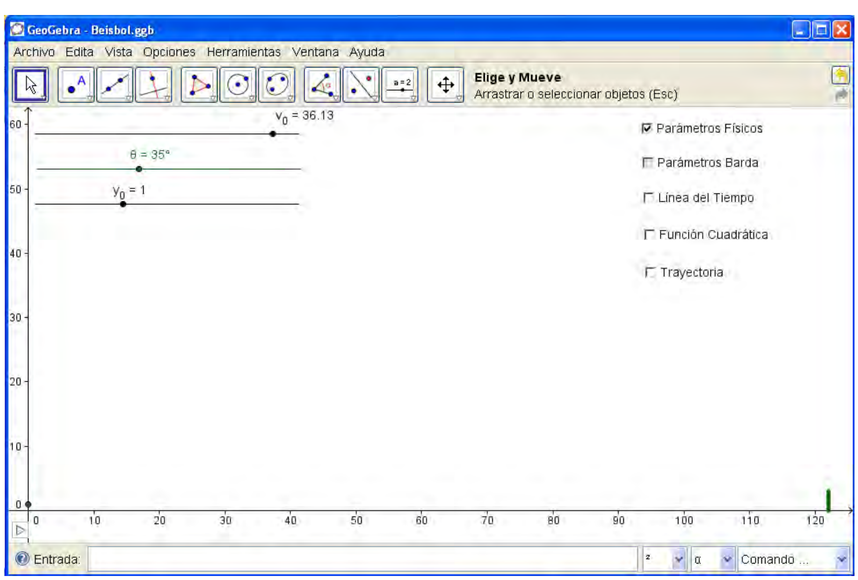
Dentro la carpeta "*Alan Robles*", o directamente en la siguiente dirección: *http://www.geogebra.org/en/upload/index.php?&direction=0&order=&directory=Alan%20Robles*



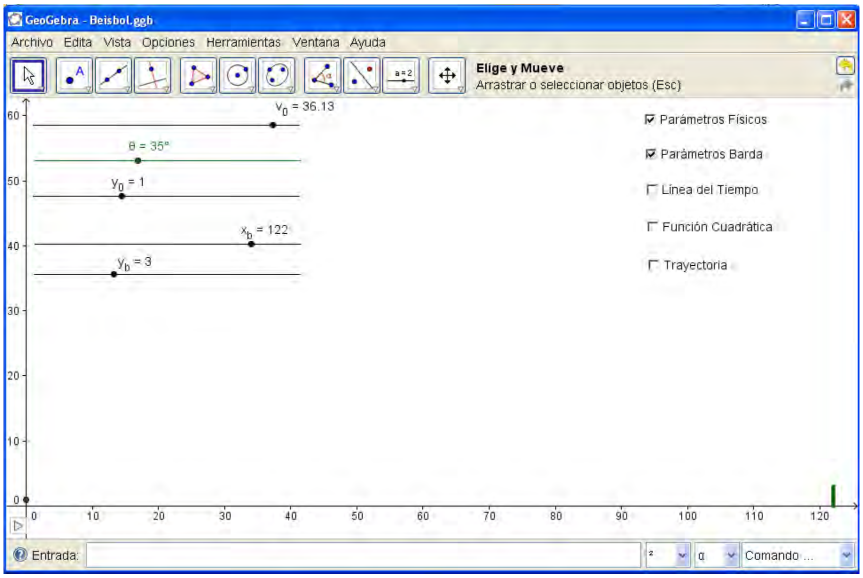
1.- El Batazo de Béisbol



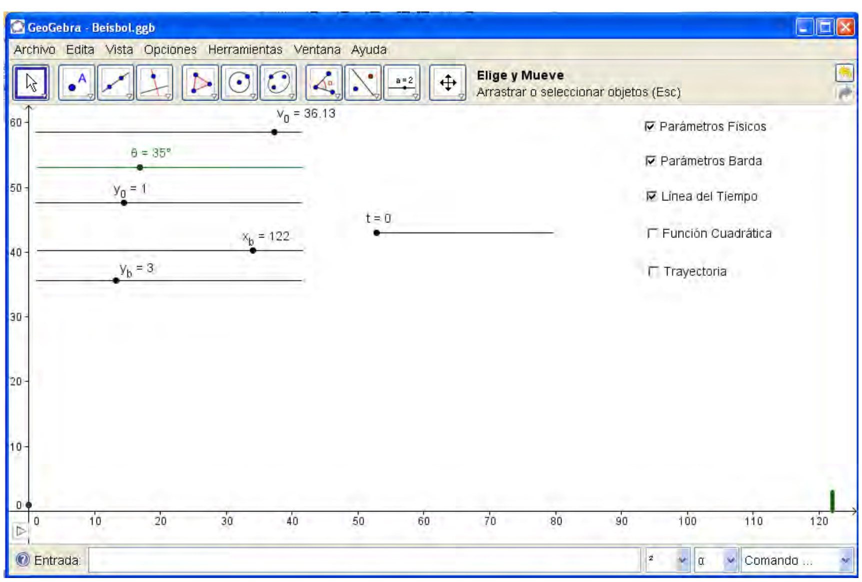
En esta primera pantalla se muestra el sistema de coordenadas cartesianas donde se va a modelar el movimiento del batazo de béisbol. También se muestran los *check box* de todas las opciones que se contemplan en este archivo y que desplegarán los demás aditamentos para el manejo y la simulación que *GeoGebra* permite.



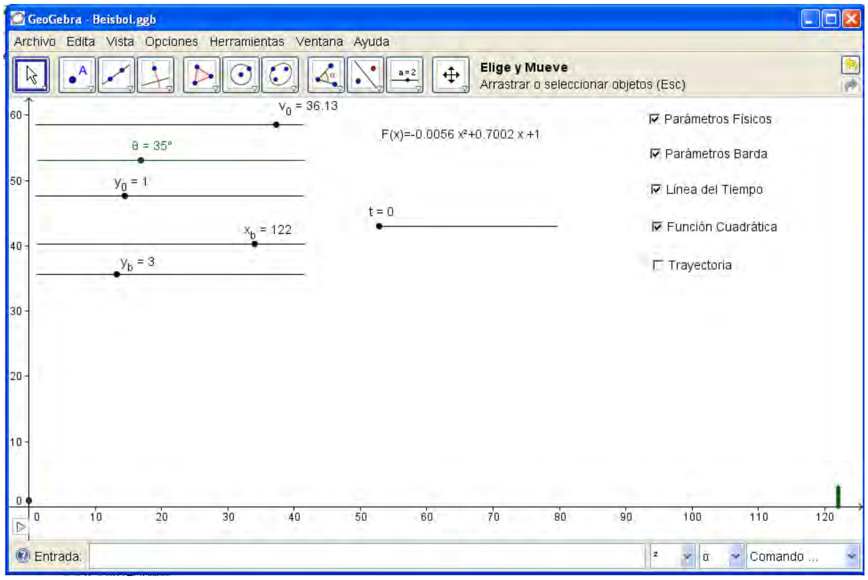
Al activar el *check box* de “Parámetros Físicos”, aparecen tres deslizadores: el de la velocidad inicial del batazo (v_0, en m/s), el del ángulo de salida de la pelota (θ, en grados) y de la altura a la que se batea la pelota con respecto del suelo (en metros).



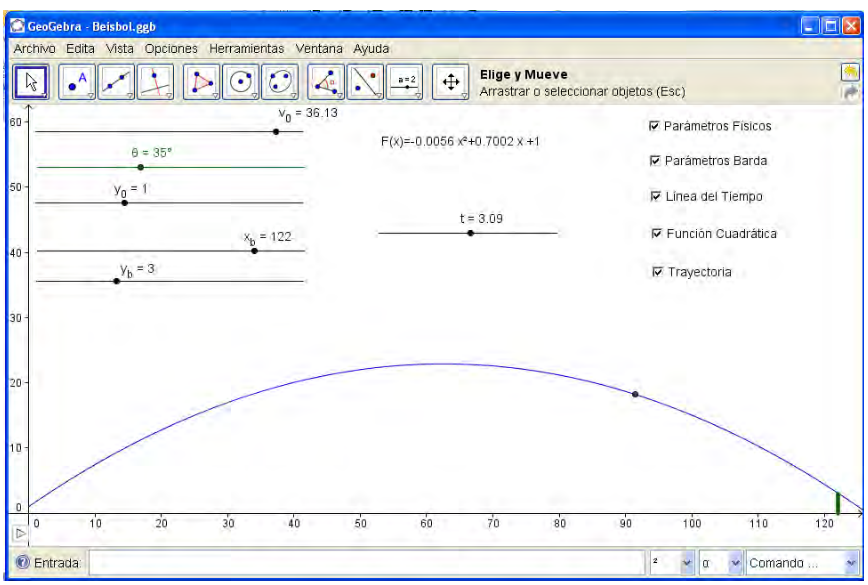
Al activar el *check box* de "Parámetros Barda", aparecen dos deslizadores más: el de la distancia a la que se encuentra la barda (x_b) y el de la altura de la barda (y_b), ambos en metros.



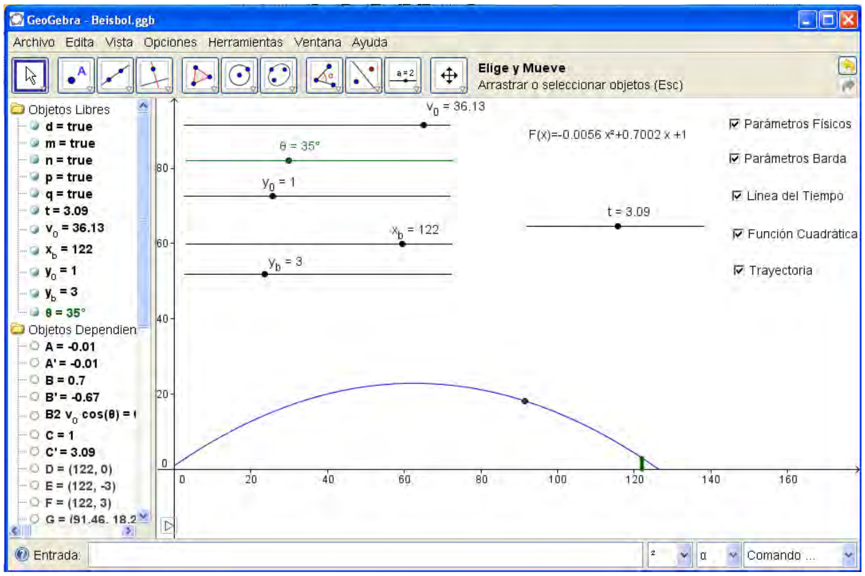
Al activar el *check box* de "Línea del Tiempo", aparece un deslizador más: el del parámetro del tiempo (t), medido en segundos. Si este deslizador se arrastra provocará el movimiento de la pelota, o cuando se activa el botón de "*play*", (que se encuentra en la esquina inferior izquierda), provocara que el deslizador del tiempo también avance.



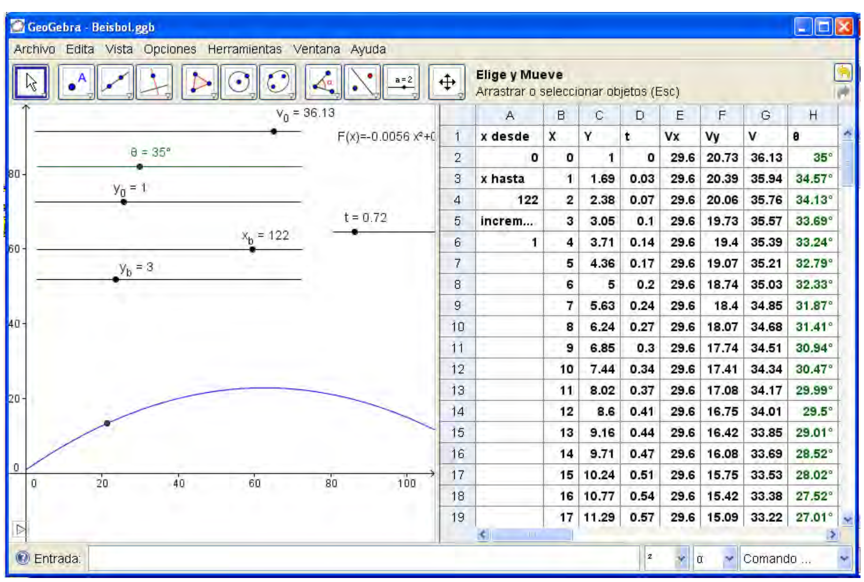
Al activar el *check box* de “Función Cuadrática”, aparece la función cuadrática con la que se representa el modelo matemático de este movimiento. Dicha función cuadrática depende únicamente de los tres parámetros físicos del movimiento.



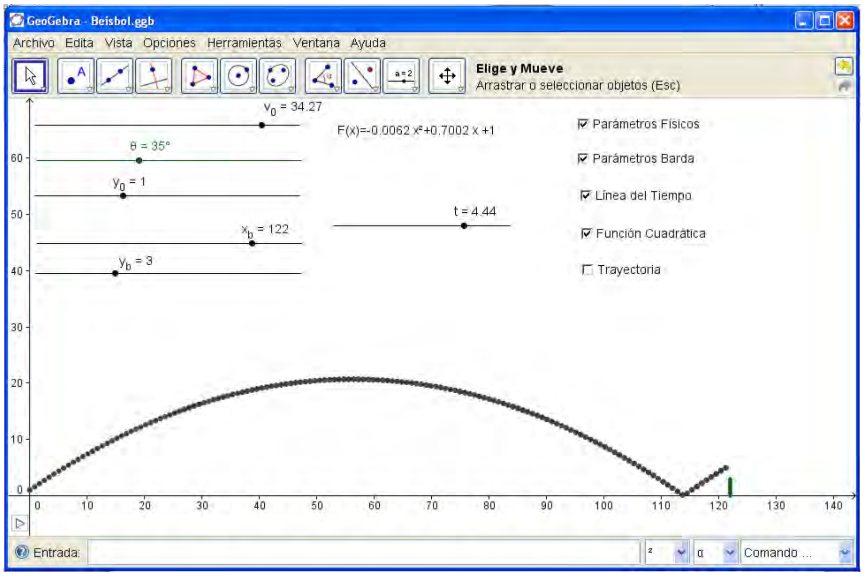
Al activar el *check box* de “Trayectoria”, aparece con una curva de color azul la trayectoria que sigue la pelota al ser bateada, es decir su parábola.



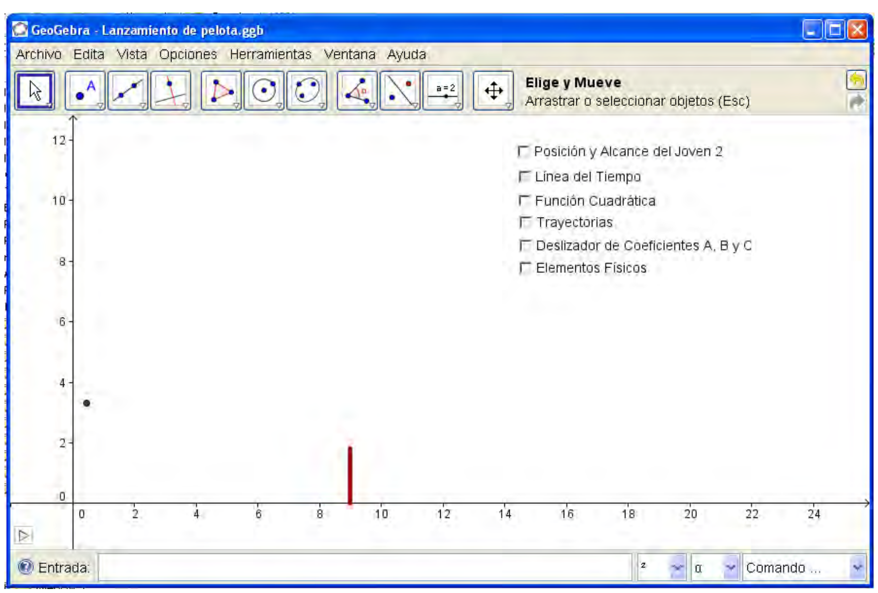
Si se abre del menú principal del *GeoGebra* la opción “Vista” y luego se selecciona la opción “Vista Algebraica”, aparecen todos los objetos puestos en la generación del archivo (puntos, líneas, segmentos, gráficas, cálculos, etc.).

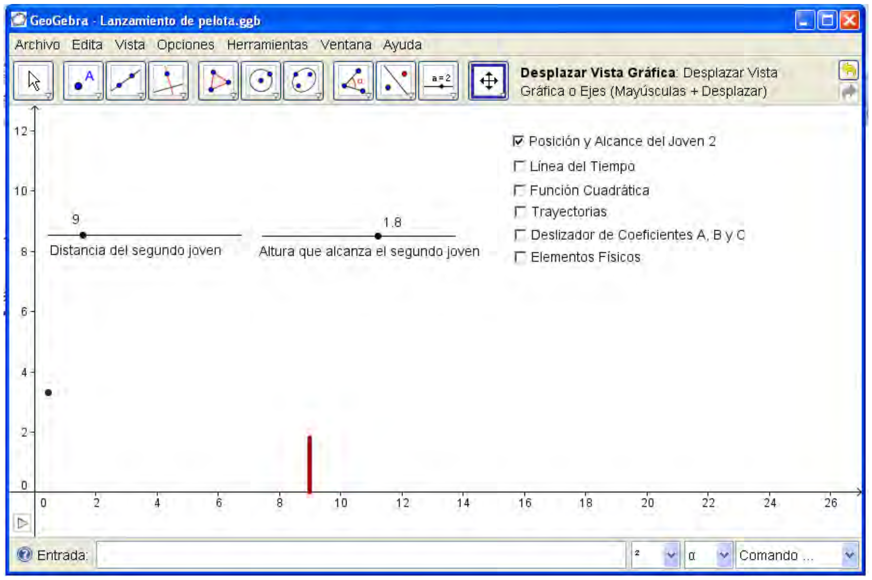


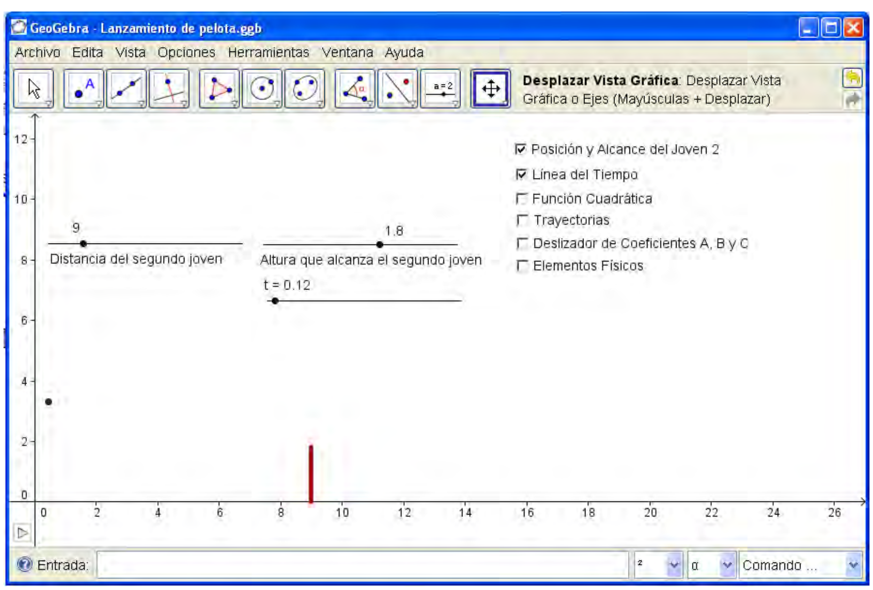
Al abrir en el menú principal de *GeoGebra* la opción “Vista” y luego se selecciona la opción “Vista de Hoja de Cálculo”, aparece un simulador de hoja de Excel, la cual muestra una tabla que resume algunas variables del movimiento como son las posiciones x y y, el tiempo, las velocidades horizontal y vertical, así como la magnitud y dirección del vector velocidad, referido a la pelota.

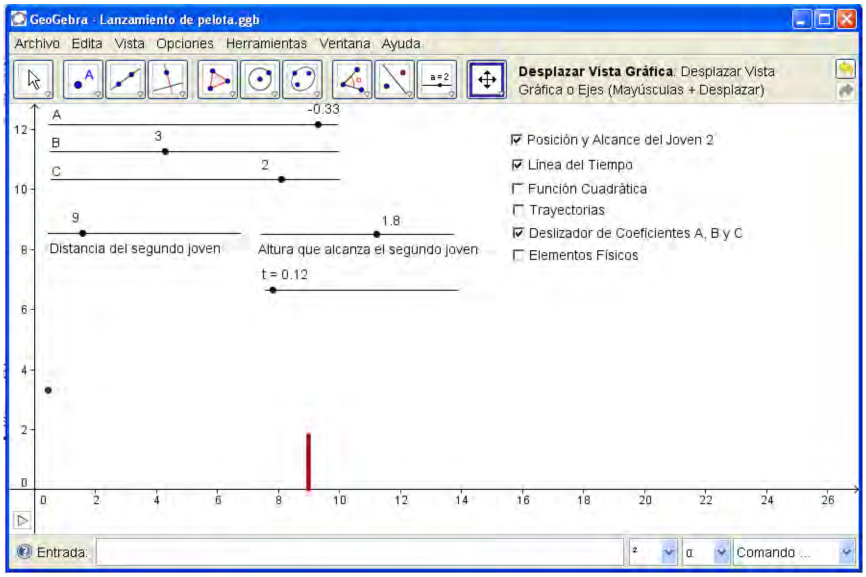
	Para lograr el siguiente efecto de rastro sobre la trayectoria, se toca con el *mouse* el punto con el que se representa la pelota y se da *click* con el botón derecho, con esto se abre un menú donde se selecciona la opción “Activa Rastro”. Luego se da *click* al botón de *play* que se encuentra en la esquina inferior izquierda, para que con esto se produzca la animación.

2.- El Lanzamiento de una Pelota

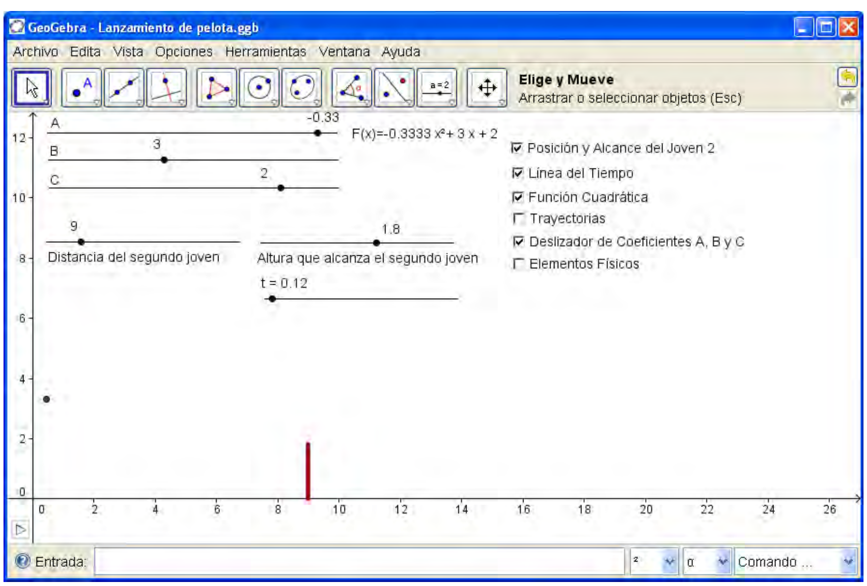
	En esta primera pantalla se muestra el sistema de coordenadas cartesianas donde se va a modelar el movimiento del lanzamiento de una pelota. También se muestran los *check box* de todas las opciones que se contemplan en este archivo.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Al activar el check box de “Posición y Alcance del Joven 2”, aparecen dos deslizadores: el de la distancia que separa a los dos muchachos y el del alcance vertical que tiene el segundo muchacho para poder atrapar la pelota que le lanzaron, ambos están en metros.</td>
</tr>
</table>

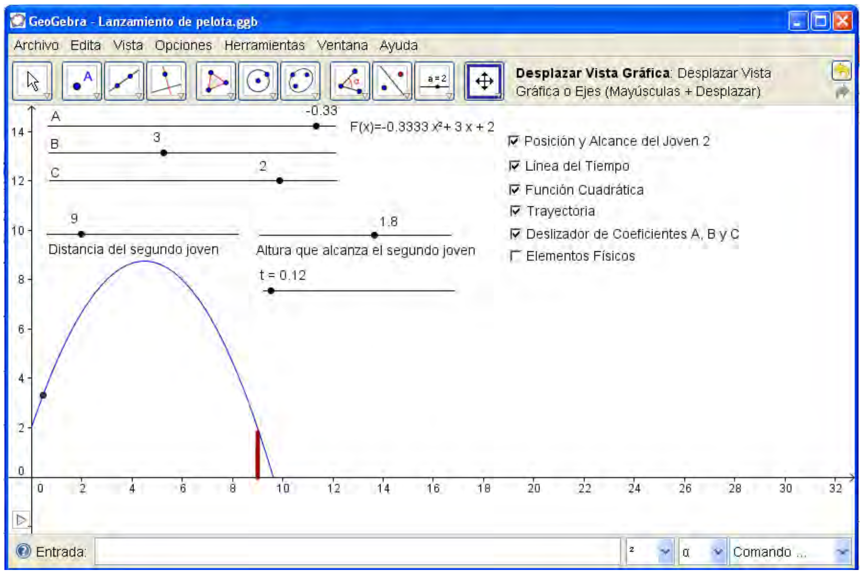
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Al activar el check box de “Línea del Tiempo”, aparece un deslizador más: el del parámetro del tiempo (t), medido en segundos. Análogamente con el archivo anterior.</td>
</tr>
</table>



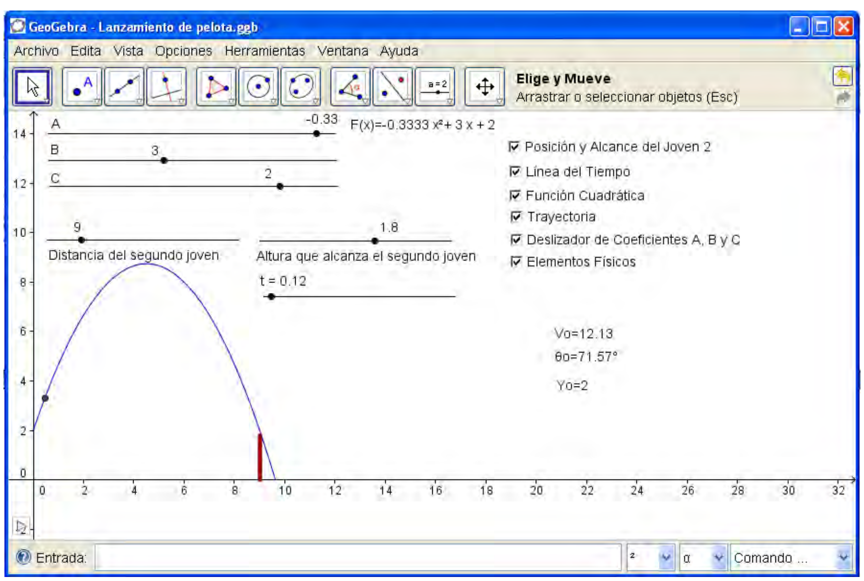
Al activar el *check box* de “Posición y Alcance del Joven 2”, aparecen tres deslizadores: que son los coeficientes de la función cuadrática denotados por las letras *A*, *B* y *C*.



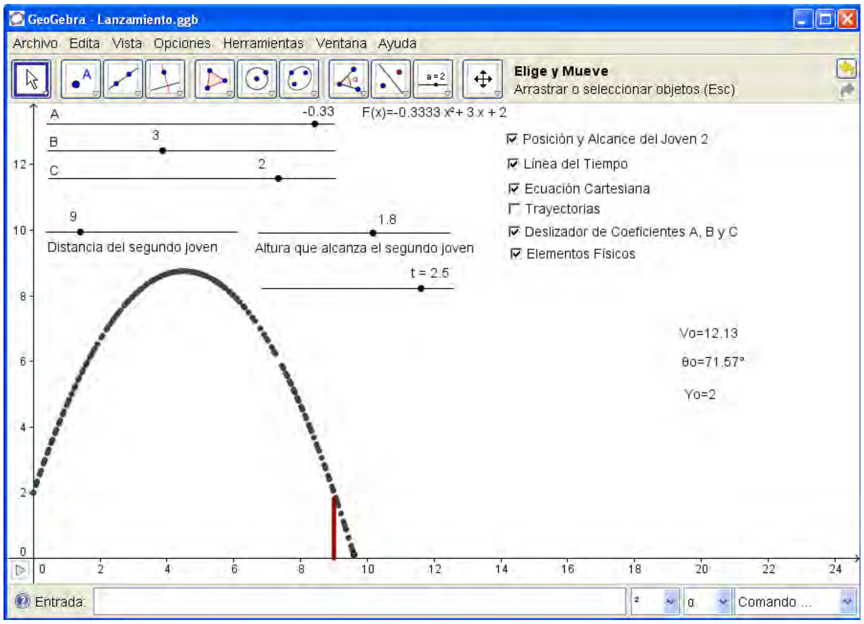
Al activar el *check box* de “Función Cuadrática”, aparece la función cuadrática con la que se representa el modelo matemático de este movimiento. Dicha función cuadrática únicamente considera los coeficientes de los deslizadores de *A*, *B* y *C*.



Al activar el *check box* de “Trayectoria”, aparece con una curva de color azul la trayectoria que sigue la pelota al ser lanzada, es decir su parábola.

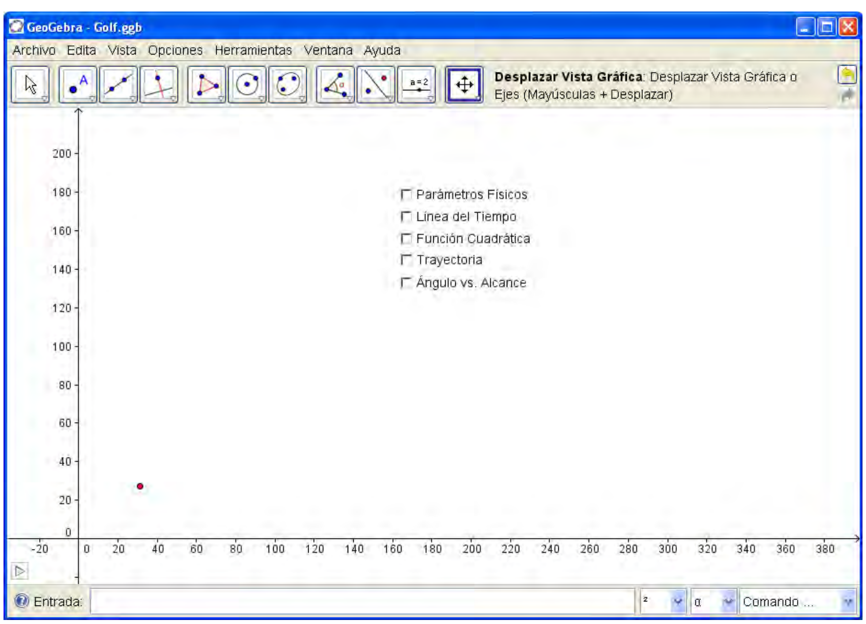


Al activar el *check box* de “Elementos Físicos”, aparecen los valores de la velocidad inicial del lanzamiento (v_0 , en m/s), el del ángulo de salida de la pelota (θ, en grados) y de la altura a la que se lanzó la pelota con respecto del suelo (en metros).

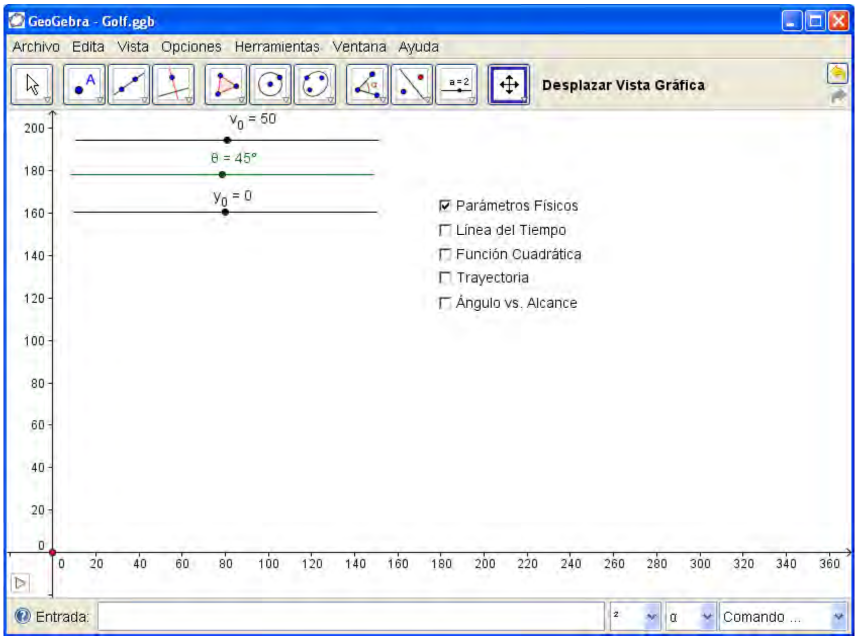


Este es el efecto de rastro que deja la pelota al ser lanzada sobre su trayectoria, al igual que el archivo del batazo de béisbol.

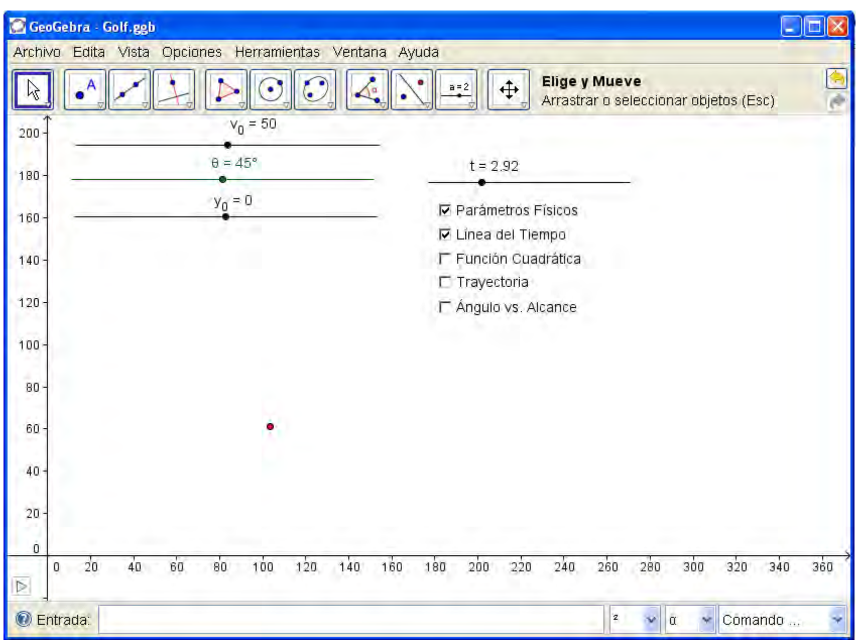
3.- El Golf



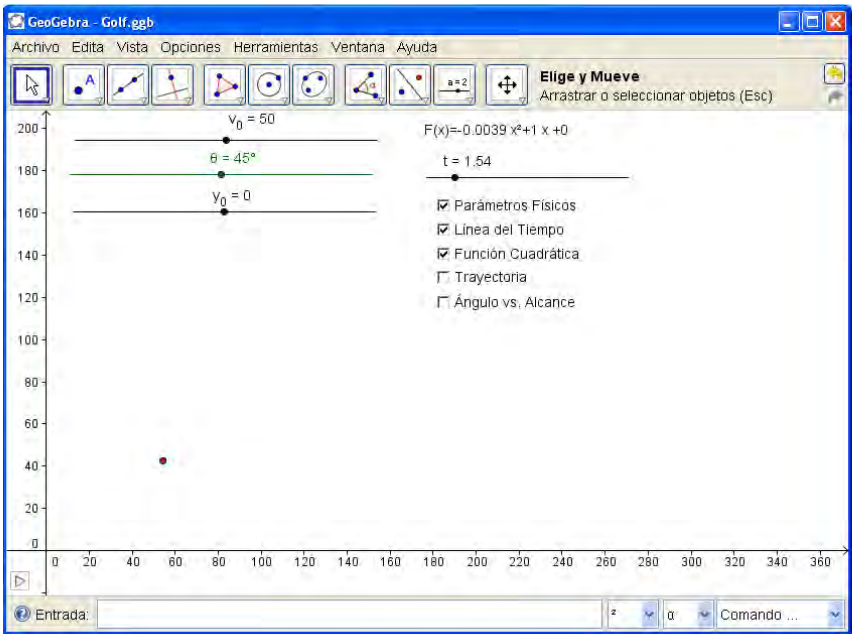
En esta primera pantalla se muestra el sistema de coordenadas cartesianas donde se va a modelar el movimiento de una pelota de golf al ser golpeada. También se muestran los *check box* de todas las opciones que se contemplan en este archivo.



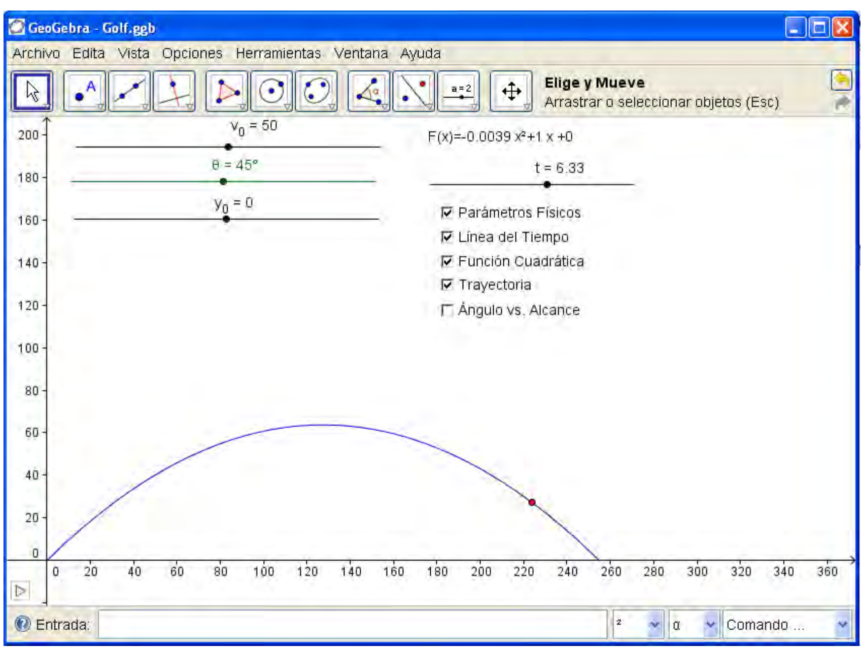
Al activar el *check box* de “Parámetros Físicos”, aparecen tres deslizadores: el de la velocidad inicial del lanzamiento (v_0 , en m/s), el del ángulo de salida de la pelota (θ, en grados) y de la altura a la que se golpea la pelota con respecto del suelo (en metros).



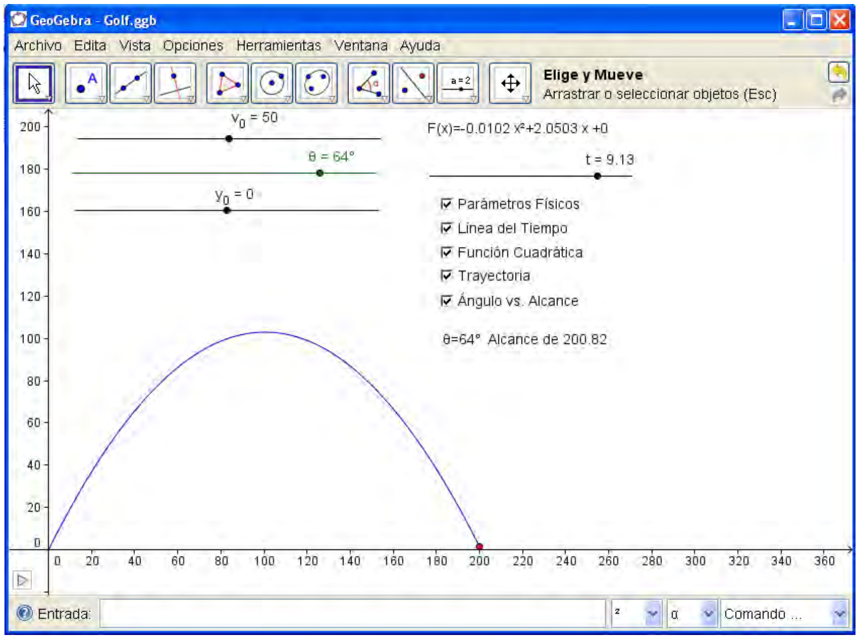
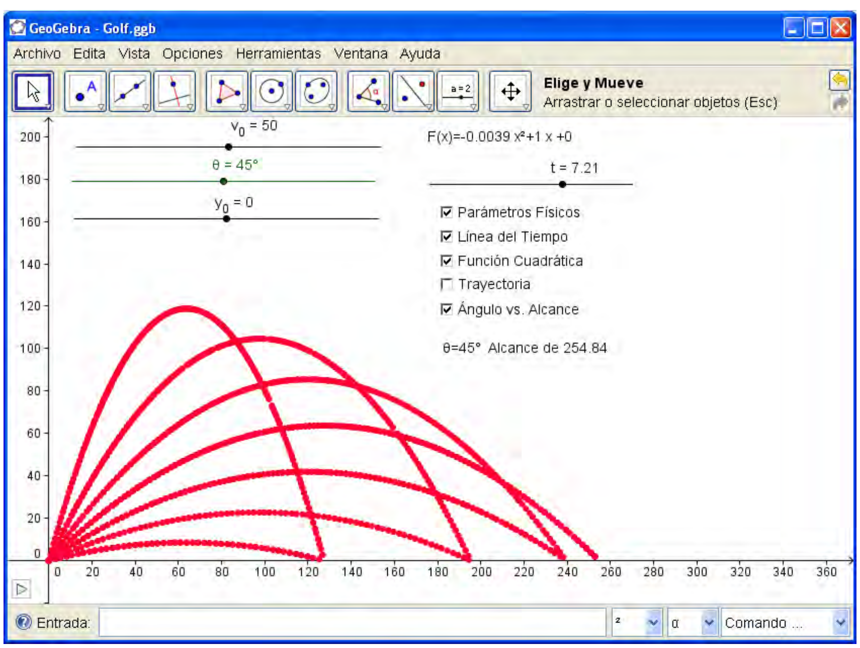
Al activar el *check box* de “Línea del Tiempo”, aparece un deslizador más: el del parámetro del tiempo (t), medido en segundos. Análogamente con el archivo anterior.

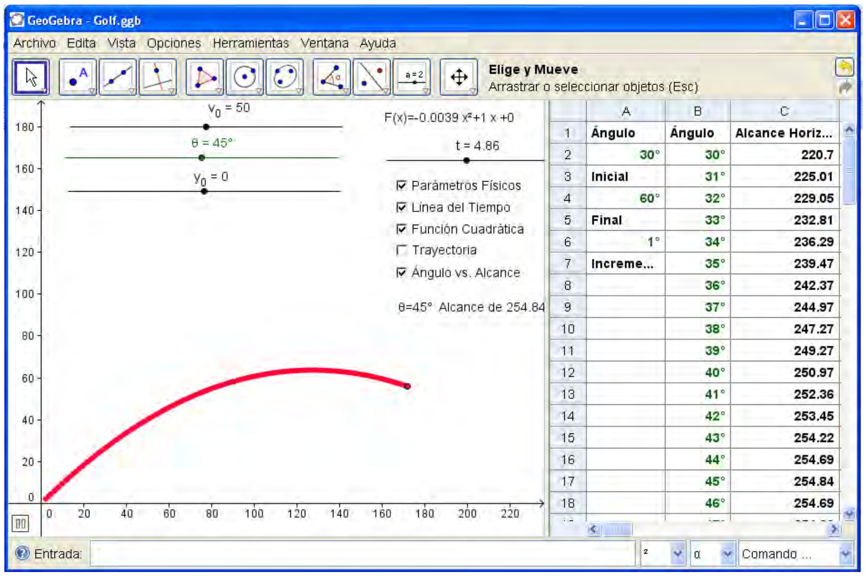


Al activar el *check box* de "Función Cuadrática", aparece la función cuadrática con la que se representa el modelo matemático de este movimiento.



Al activar el *check box* de "Trayectoria", aparece con una curva de color azul la trayectoria que sigue la pelota de golf al ser golpeada, es decir su parábola.

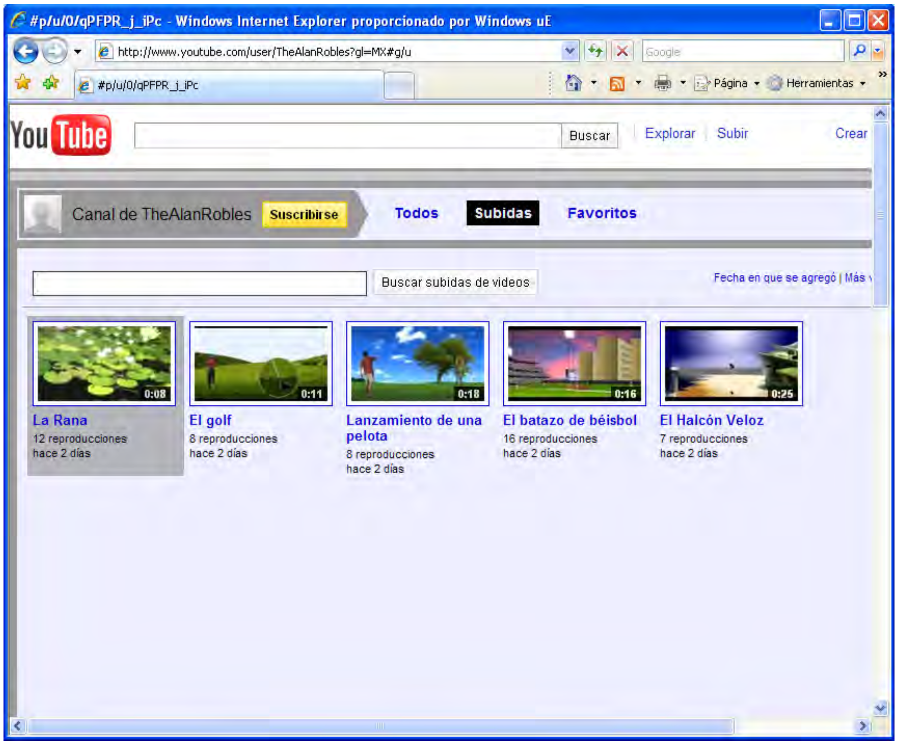
	Al activar el *check box* de “Ángulo vs. Alcance”, aparece el ángulo θ que se seleccionó con el deslizador de los parámetros físicos, además del alcance horizontal en metros logrado con dicho ángulo.
	El siguiente efecto se logra al activar la opción de dejar rastro para la pelota, se seleccionan varios ángulos y luego se arrastra el deslizador de la línea del tiempo y así se van dibujando todas las trayectorias.



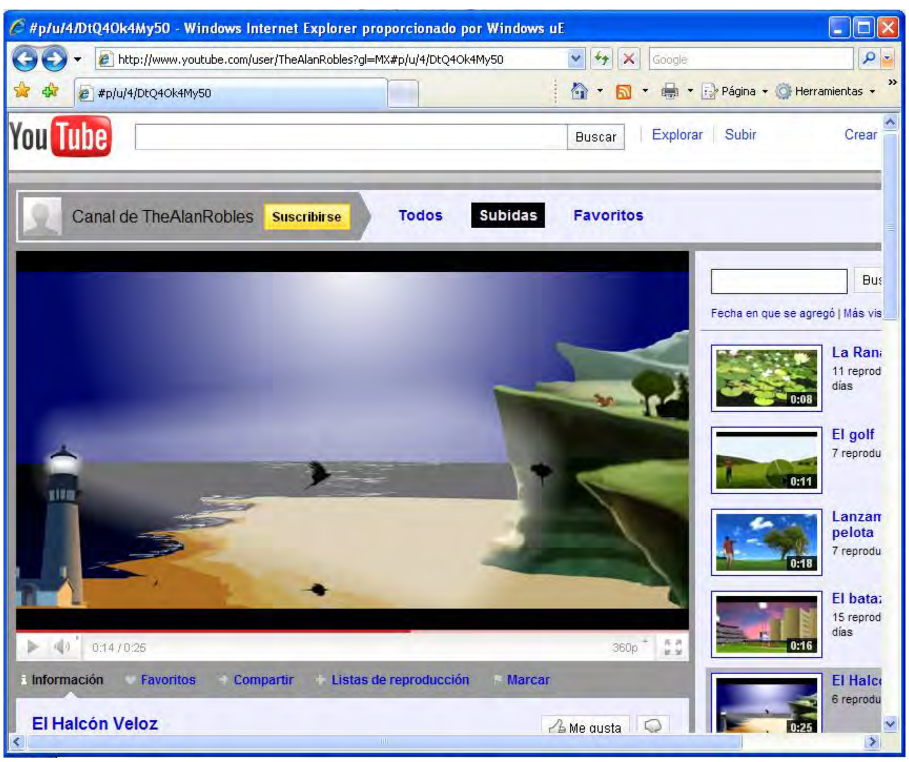
En esta pantalla se muestra el simulador de hoja de Excel de *GeoGebra*, el cual muestra una tabla con los diferentes alcances horizontales que se logran con sus respectivos ángulos.

ANEXO 4.- ANIMACIONES MULTIMEDIA EN YOU TUBE

Todas las animaciones en: *http://www.youtube.com/user/TheAlanRobles?gl=MX#g/u*

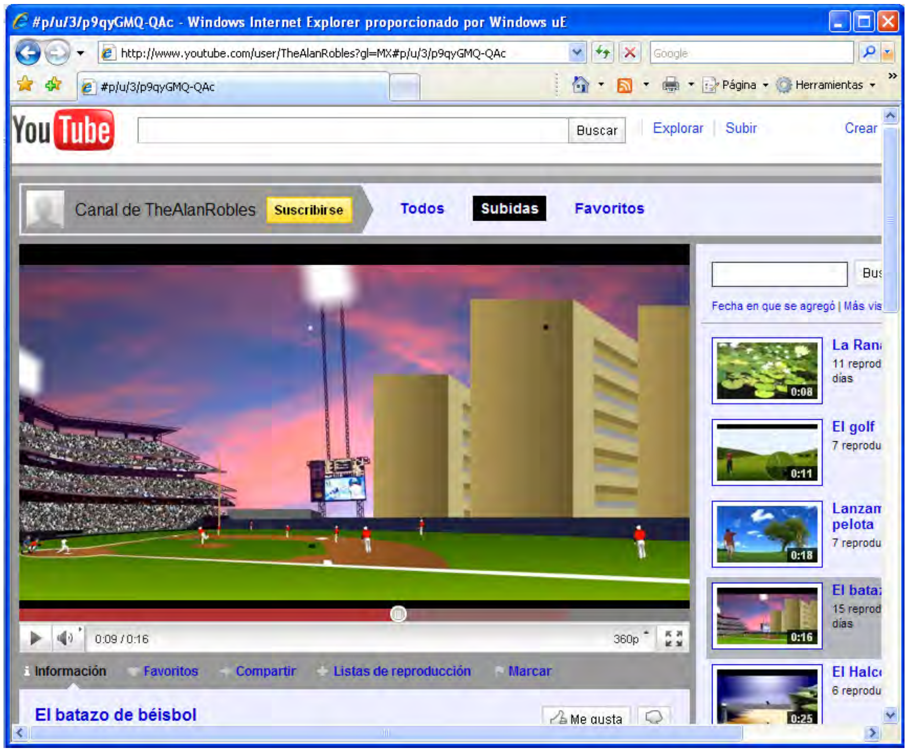


1.- El Halcón Veloz: *http://www.youtube.com/user/TheAlanRobles?gl=MX#p/u/4/DtQ4Ok4My50*



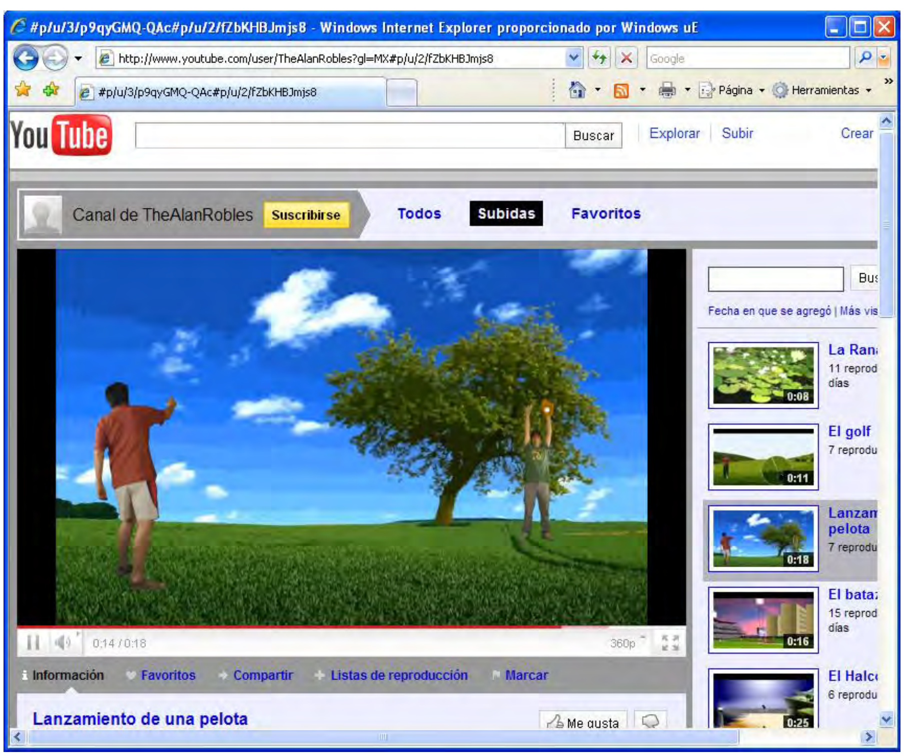
2.- El Batazo de Béisbol:

http://www.youtube.com/user/TheAlanRobles?gl=MX#p/u/3/p9qyGMQ-QAc



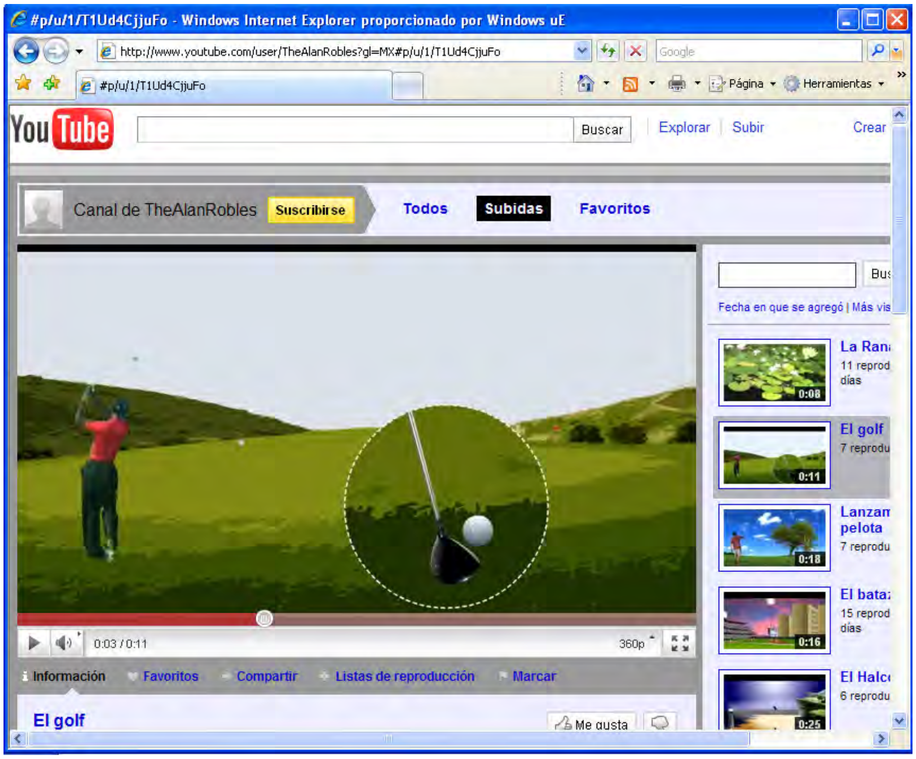
3.- El Lanzamiento de una Pelota:

http://www.youtube.com/user/TheAlanRobles?gl=MX#p/u/2/fZbKHBJmjs8



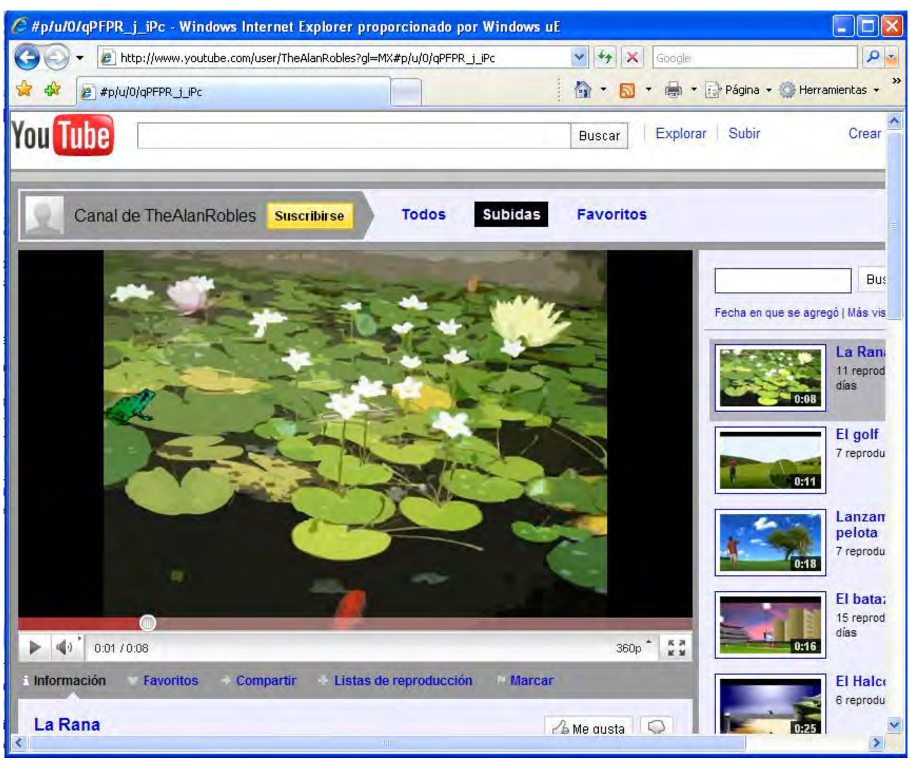
4.- El Golf:

http://www.youtube.com/user/TheAlanRobles?gl=MX#p/u/1/T1Ud4CjjuFo



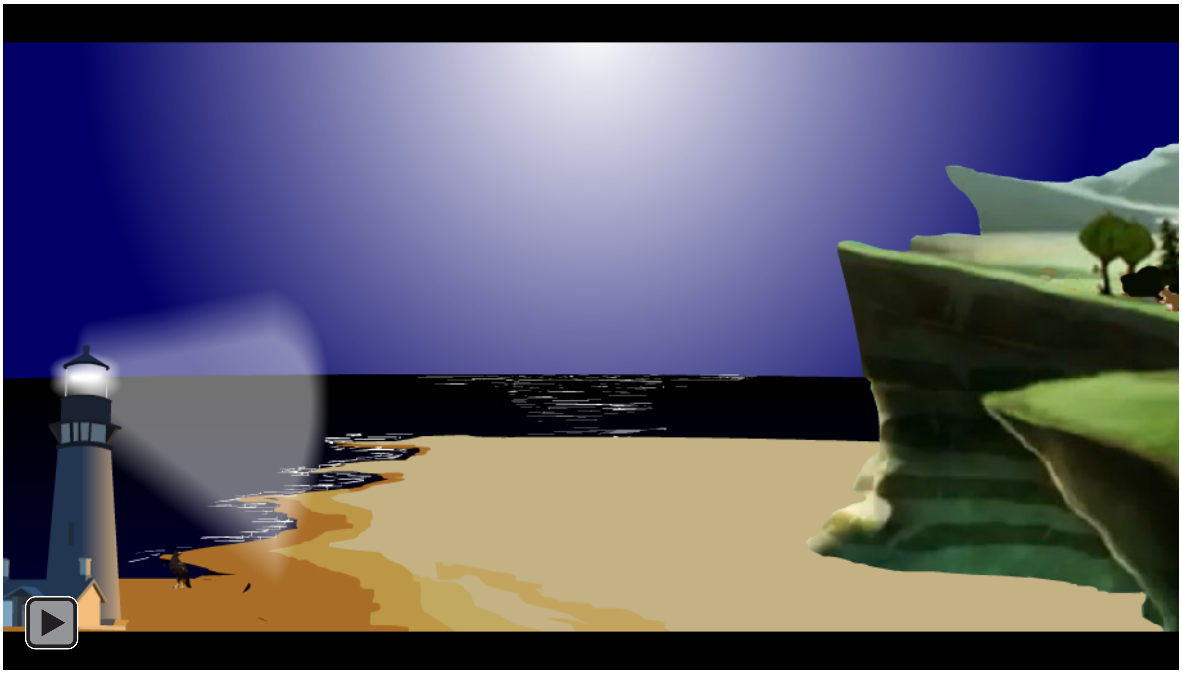
5.- La Rana:

http://www.youtube.com/user/TheAlanRobles?gl=MX#p/u/0/qPFPR_j_iPc

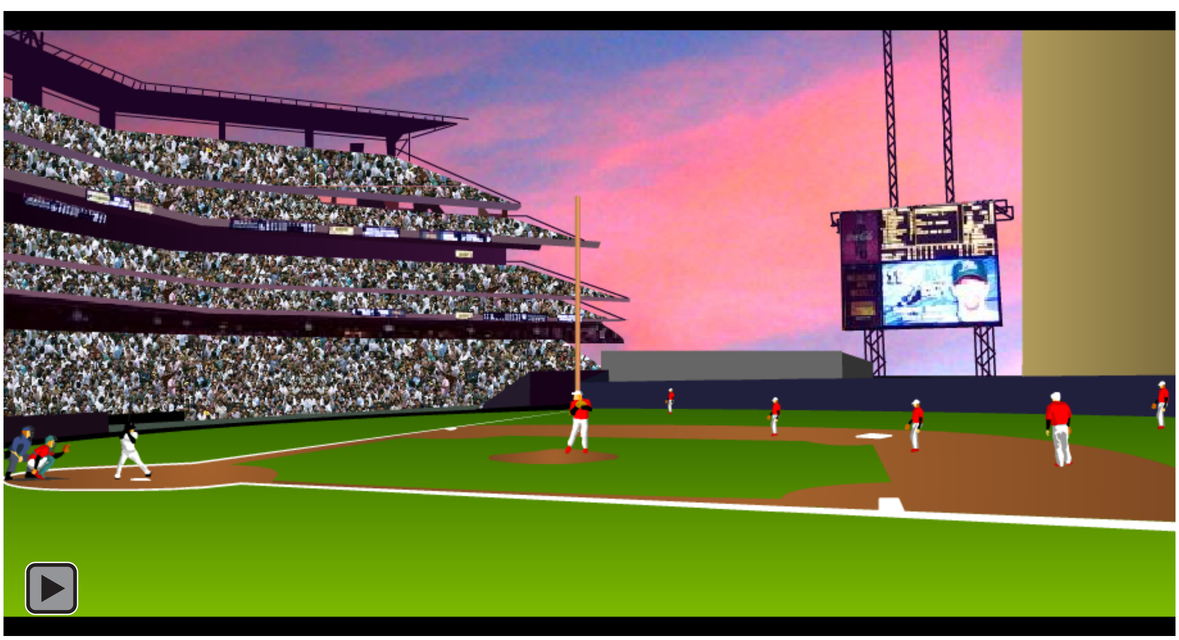


ANEXO 5.- ANIMACIONES MULTIMEDIA INCRUSTADAS

1.- El Halcón Veloz:



2.- El Batazo de Béisbol:



3.- El Lanzamiento de una Pelota:

4.- El Golf:

5.- La Rana: