"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Una Metodología para Identificar Niños Matemáticamente Talentosos

TESIS

Que para obtener el Grado
de Maestría en Ciencias
con Especialidad en
Matemática Educativa

Presenta

Zeidy M. Barraza García

Director de Tesis
Dr. José Luis Soto Munguía

Hermosillo, Sonora, México enero de 2014

Con todo mi cariño y mi amor para las personas que hicieron todo en la vida para que yo pudiera lograr mis sueños, por motivarme y apoyarme en todo momento, a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento.

A MIS PADRES.

Agradecimientos

Este trabajo no se habría podido realizar sin la colaboración de muchas personas que me han brindado su ayuda, conocimientos y apoyo durante todos mis estudios.

A mi Director de Tesis, Dr. José Luis Soto Munguía, quiero expresar mi más sentido agradecimiento, por su paciencia y apoyo incondicional no solo para la realización de este trabajo sino también de mi formación como investigadora. Muchas gracias Profesor, es imposible describir en unas breves palabras el grado de agradecimiento que siento hacia usted, así como de admiración por su labor docente y calidad humana.

A todos los profesores que ayudaron en mi formación profesional. Un agradecimiento especial al equipo de Álgebra: Dra. Silvia Elena Ibarra, M.C. Ana Guadalupe del Castillo y M.C. Maricela Armenta, por sus valiosas sugerencias, por toda la dedicación y por todo el tiempo empleado en la revisión de este trabajo.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1
JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este apartado presentaremos cuál es el problema de investigación a tratar y los antecedentes del trabajo que se pretende lograr. Principalmente se introduce al lector dentro de la problemática que afecta no solo a los estudiantes con talento, sino al país mismo. Así mismo, expondremos los paradigmas en cuanto a los niños matemáticamente talentosos, cuáles son las necesidades que enfrentan éstos en la actividad escolar y la respuesta educativa que les ofrecen las autoridades.

Siguiendo entonces, con algunos estudios que se han realizado acerca de la identificación y el tratamiento de niños o jóvenes matemáticamente talentosos, consecuentemente algunas aportaciones sistemáticas o empíricas en cuanto a programas específicos de atención. Para terminar, declaramos los objetivos del trabajo y las preguntas de investigación que nos hemos planteado.

1.1 Condiciones sobre la situación de la ciencia en el país

Conforme nuestro país se ha ido incorporando a un concierto general de naciones cada vez más globalizado en todos los aspectos, más claras han sido las evidencias de nuestras limitaciones y deficiencias en diferentes campos; el científico es uno de ellos.

La ciencia constituye uno de los factores más importantes del crecimiento económico de una nación, ya que los conocimientos nuevos sirven para generar tecnología y mejorar las aplicaciones tecnológicas que ya se tienen, así como para generar mejores aplicaciones en la industria, en la producción de alimentos y en la salud.

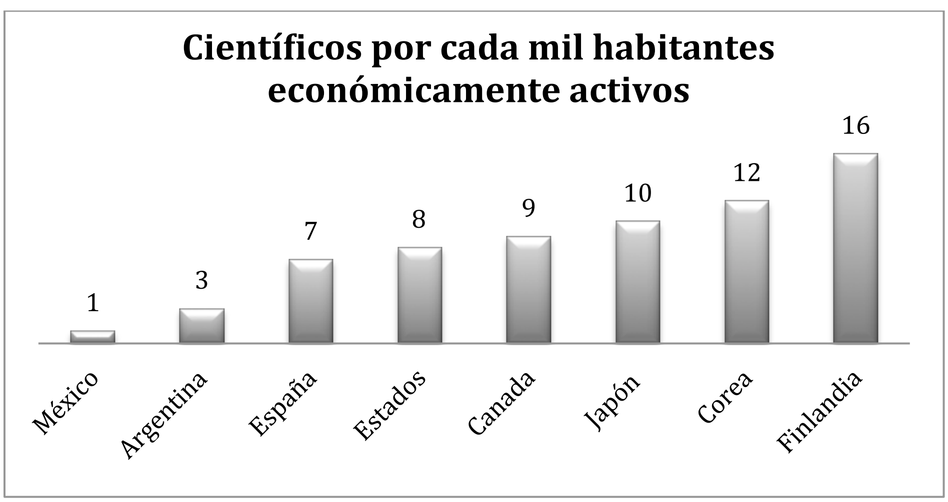


Figura 1.1 Científicos por cada mil habitantes económicamente activos.

Al igual que otros países, aspiramos a construir la sociedad del conocimiento, pero presentamos un atraso crónico en la formación de científicos y tecnólogos. Según la OCDE (cifras del 2011), tenemos un científico por cada mil habitantes económicamente activos, tal como podemos observar en la Figura 1.1 algunos de los países más desarrollados llegan a tener hasta 16.

Mejorar las condiciones en las que competimos con otras naciones, nos exige aumentar drásticamente la calidad y cantidad de nuestros cuadros técnicos y científicos, pero para cumplir con este requerimiento es necesario repasar varios puntos:

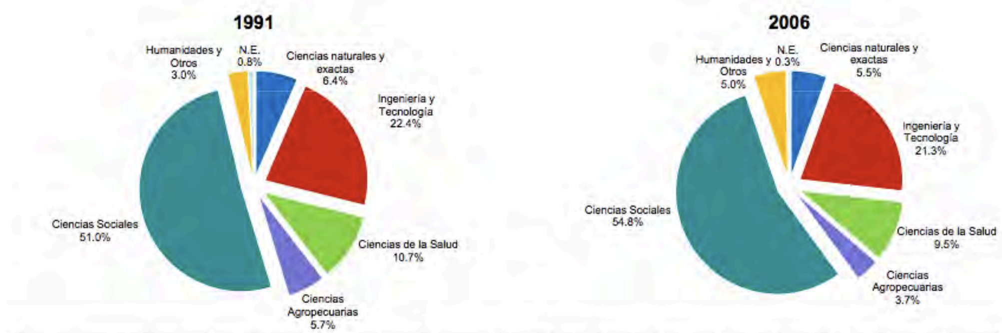
- Para promover la formación del científico se requiere favorecer la enseñanza de la ciencia desde los niveles educativos básicos.
- Se necesita un apoyo extra para los estudiantes potenciales con habilidades necesarias para desarrollarse en el ámbito científico.
- Es necesario el apoyo de programas para integrar a los docentes en un ambiente donde se promuevan actitudes favorables hacia el desarrollo científico.

Existen otras dificultades que están fuera del alcance de la educación, problemas externos, por ejemplo la falta de apoyo económico necesario para programas o proyectos de ciencia. A pesar de que no profundizaremos acerca de estos problemas políticos, no estamos ajenos a su importancia social.

“El problema de la investigación científica en México es de recursos y de educación'', menciona Mario Molina, primer mexicano en ganar el premio Nobel de Química en la entrevista que da a la jornada el día que recibió este premio. La parte de recursos que menciona Molina no corresponde a este trabajo pero si la parte de educación y en específico la educación matemática de calidad y alto desempeño que se esperaría ofrecer desde los niveles básicos.

Los organismos responsables de promover el desarrollo de la ciencia en México, han emprendido diversas estrategias para aumentar la cantidad y mejorar la calidad de nuestros científicos, pero dichas estrategias están orientadas principalmente a los estudiantes de licenciatura o posgrado, pero se trata de estudiantes que ya han decidido dedicarse a la ciencia. Para nosotros, el problema principal es que el número de estudiantes que decide tomar el camino científico es muy reducido. En la Universidad de Sonora, por ejemplo, los estudiantes inscritos en la División de Ciencias Exactas y Naturales no llegan al 5% del total de la población y estudian la

Licenciatura en Matemáticas apenas 78 estudiantes de una población estudiantil de 25000 (Universidad de Sonora base de datos, 2011).



Campo de la ciencia	1991	1993	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Total	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
Ciencias naturales y exactas	6.4%	6.6%	5.4%	5.9%	6.9%	5.8%	5.4%	5.6%	5.3%	5.4%	5.6%	5.8%	3.3%	5.5%
Ingeniería y Tecnología	22.4%	22.0%	23.4%	23.2%	22.3%	23.3%	22.4%	20.6%	23.2%	23.1%	23.5%	22.1%	23.3%	21.3%
Ciencias de la Salud	10.7%	11.2%	9.9%	9.7%	9.9%	9.7%	10.2%	10.3%	9.3%	9.8%	10.2%	10.1%	9.4%	9.5%
Ciencias Agropecuarias	5.7%	5.1%	5.1%	4.7%	3.9%	4.4%	4.0%	3.6%	4.0%	3.7%	3.6%	4.2%	2.0%	3.7%
Ciencias Sociales	51.0%	52.5%	53.7%	54.3%	54.8%	54.5%	55.3%	53.0%	55.7%	55.5%	55.2%	53.0%	60.3%	54.8%
Humanidades y Otros	3.0%	2.1%	2.4%	2.2%	2.3%	2.3%	2.6%	2.1%	2.4%	2.4%	1.9%	3.6%	0.6%	5.0%
No especificado	0.8%	0.5%	0.1%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	4.9%	0.0%	0.0%	0.0%	1.2%	1.2%	0.3%

Fuente: Foro Consultivo Científico y Tecnológico con base en datos del Sistema Integrado de Información sobre Investigación Científica y Tecnológica, CONACYT

Figura 1.2 Estudiantes en el campo de la ciencia

En el 2011 México contaba con un total de 17, 639 científicos acreditados, mil más que en el 2010. Posiblemente estemos avanzando, pero comparado con el crecimiento poblacional del país en esos años la mejora no es verdaderamente significativa.

1.2 Atención a la diversidad

En algunos países, sobre todo en aquellos con economías más desarrolladas, la atención tanto a niños con dificultades de aprendizaje como a los que muestran habilidades sobresalientes, ha sido desde las últimas décadas una prioridad para las autoridades educativas; particularmente estos últimos son atendidos con la expectativa de que se conviertan en los futuros cuadros científicos, técnicos o artísticos.

Así mismo, con un interés creciente en el tema de niños especiales la UNESCO (2004) ha presentado un libro sobre "La educación de niños con talento en Iberoamérica", en donde se proyecta lo siguiente:

> *"Toda persona tiene derecho a recibir una educación que desarrolle al máximo sus capacidades y le permita su proyecto de vida. Hacer efectivo ese derecho implica asegurar el principio de igualdad de oportunidades, es decir proporcionar a cada uno las ayudas y recursos que requiere, en*

función de sus características y necesidades individuales."

Además, mencionan que los sistemas educativos siguen ofreciendo respuestas homogéneas a personas con necesidades muy diversas, lo cual supone una barrera para lograr maximizar el potencial de cada uno de los alumnos en la escuela (UNESCO, 2004). Así, los alumnos que no se encuentren dentro de lo "supuestamente normal" quedan con un rezago en cuanto a su potencial intelectual.

En lo que respecta a la igualdad de oportunidades, Oktac, A., Fuentes, S., & Rodriguez, M. (2011) presentan en su artículo "Cuestiones de equidad relacionadas con los niños con talento matemático: Una perspectiva desde México", una serie de problemas educativos y sociales que manifiestan los niños matemáticamente talentosos y así mismo sugieren que es más productivo ver el tema equidad en términos de desarrollo óptimo del potencial humano en lugar de concentrarse en las diferencias de grupo. Y como un paso hacia el logro de este objetivo en el desarrollo matemático de los niños talentosos, el proyecto de estos autores se centra en el diseño y la aplicación de situaciones matemáticas desafiantes que ayudarían a mejorar las habilidades de pensamiento y conocimiento de los participantes.

Siguiendo en esta línea de equidad y diversidad en el aula, percibimos que tanto los alumnos con deficiencias como los alumnos con talento matemático necesitan una atención diferente. No porque sea una distinción a sus aptitudes sobresalientes sino porque es una necesidad a sus capacidades. De hecho, un buen porcentaje de alumnos con talento puede ver limitado el desarrollo de sus potencialidades, o bien presentar dificultades de aprendizaje y de participación, al no considerar sus necesidades educativas específicas (UNESCO, 2004).

1.3 Caracterización del talento matemático

Definir el significado de "talento matemático" no es una tarea sencilla, sin embargo, algunas instituciones educativas han establecido diversas definiciones que nos permiten comprender con mayor detalle este tema.

Uno de los expertos en el tema, Richard C. Miller (1990), supervisor de un programa para niños con talento, define el talento matemático como "una habilidad inusual para entender las ideas matemáticas y razonar matemáticamente, en lugar de ser capaz de realizar cálculos aritméticos u obtener excelentes calificaciones en matemáticas".

Otra definición de talento matemático es dada a conocer por el fundador del programa: Búsqueda de Talento Matemático en Wisconsin (WMTS por sus siglas en inglés), Laurence C. Young, quien se refiere al talento matemático como una combinación de ingenio, perspicacia, deseo de experimentar y persistencia; no solo destreza en la manipulación. Además menciona que trabajando los problemas se puede desarrollar el talento matemático.

Ambos investigadores nos dan una primera visión sobre la diferencia entre un buen estudiante y uno talentoso, una característica que se llega a confundir fácilmente y en la cual pondremos mayor énfasis más adelante.

Por otra parte, se han realizado diversos estudios sobre niños talento en referencia a su entorno familiar, académico y su condición socioeconómica. Además, existen otros que nos hablan específicamente sobre las comparaciones de género entre niños y niñas.

En Australia se realizó un estudio por Gilah Leder, a cargo de la Universidad La Trobe en el año 2006, cuya muestra son los estudiantes que asistieron a la Competencia Matemática Australiana (AMC por sus siglas en inglés) y fueron ganadores de medalla entre 1978 y 2006. La encuesta abarcó cinco grandes aspectos: antecedentes escolares y universitarios, carrera o vocación (real o prevista), hábitos de trabajo y algunas cuestiones generales sobre su persona. La encuesta fue respondida en su totalidad por sólo el 21% de los medallistas, 74 hombres y 5 mujeres.

Las ocupaciones de los padres de familia fueron enlistadas de la siguiente manera:

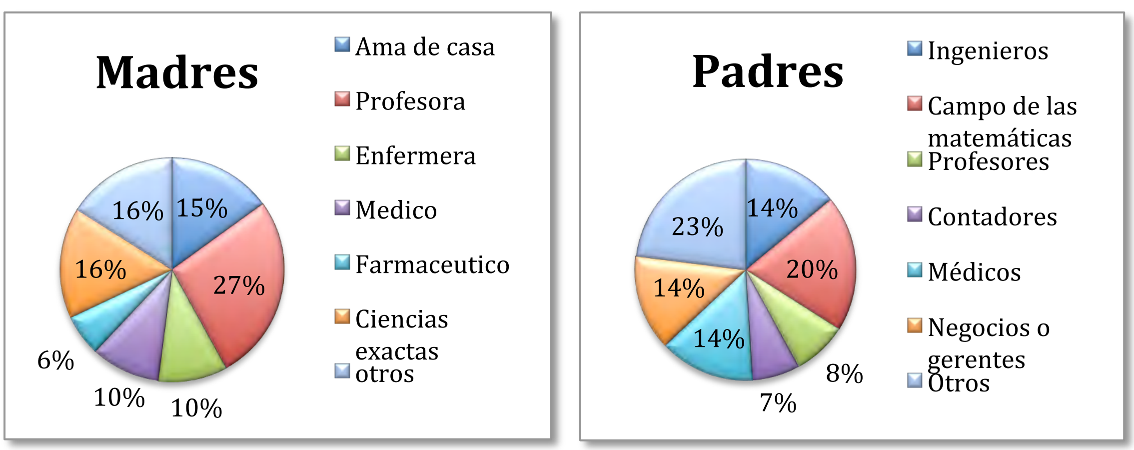


Figura 1.3 Ocupaciones de los padres de familia de estudiantes MT

Es decir, se puede inferir que los padres de los medallistas eran personas con educación superior. Y en específico una buena parte de los padres de familia fueron afines al campo de las matemáticas o ciencias exactas.

En lo que respecta a los medallistas, cerca de dos tercios respondieron que la asignación de su preferencia fue matemáticas. La carrera o vocación ejercida o prevista de más del 60% de los medallistas fue alguna relacionada con las matemáticas o las ciencias exactas. Su motivación y compromiso de trabajo es muy alto, la mayoría de ellos “se siente muy bien cuando trabaja en algo que le resulte desafiante”, además prefieren trabajar en situaciones que requieren un alto nivel de habilidad.

Algunos de los estudios sobre las características que describen a un niño talentoso se han hecho con base en personas adultas que son consideradas ante la sociedad como individuos con habilidades excepcionales. Éste es el caso de un estudio presentado por el psicólogo educativo Benjammin Bloom, en el que se presentan las circunstancias que han favorecido a la realización del talento de 20 profesionales de entre 30 y 40 años en Estados Unidos, los cuales han resultado eminentes como matemáticos (según sus colegas).

A continuación se mostrarán los resultados más relevantes de dicho estudio.

- De los 20 matemáticos 19 son hombres y sólo una mujer.
- 17 de los padres de los 20 tenían estudios superiores.
- 11 de las madres tenían estudios universitarios.
- 15 de los 20 matemáticos eran lectores entusiastas en cuanto aprendieron a leer.
- 19 de los 20 matemáticos fueron a la escuela pública ordinaria, el otro fue a una escuela experimental de una universidad.
- 6 tuvieron dificultades para aprender a leer, 8 tuvieron dificultades para relacionarse con sus compañeros.
- Los padres de 5 de ellos directamente buscaban oportunidades especiales para sus hijos, ya sea en ingresos a programas de verano o admisión temprana a la universidad.
- 16 matemáticos de los 20 trabajaron independientemente en matemáticas en la escuela secundaria.
- Al menos 7 leían libros que sus familiares habían usado en la universidad.
- 7 de los 20 siguieron algún programa especial, siendo “acelerados” (3 años en dos).
- Se caracterizaban a sí mismos como "buenos" estudiantes, tal vez mejores que la mayoría (especialmente en matemáticas y ciencias).

Así podemos hacer notar cómo en ambos estudios la escolaridad de los padres y madres fue un dato relevante. Ésta es una de las razones por las cuales se cataloga a los programas especiales para niños talento como elitistas, ya que un gran número de niños provienen de familias con educación superior, los cuales tienen mayores oportunidades de desarrollarse en estos programas.

Los estudiantes talentosos tienen, en su mayoría, ciertas características que los hacen ser más hábiles en las matemáticas. No se tiene una lista exacta de cuáles son éstas, pero algunas investigaciones han resaltado las más evidentes y repetitivas entre los alumnos sobresalientes.

Según un estudio elaborado por Abdullah Ficici y Del Siegle, (2008) los alumnos matemáticamente talentosos tienen habilidades de razonamiento complejo, mencionan que desafortunadamente las habilidades de razonamiento asociadas a las altas capacidades matemáticas son a menudo poco valoradas, por el contrario se hace un énfasis mayor en la exactitud de los cálculos. Así mismo, los autores Lupkowski-Shoplik y Assouline (1994) se percataron de que muchos niños matemáticamente talentosos comprenden de manera efectiva los conceptos matemáticos pero son relativamente débiles en los cálculos matemáticos. Matemáticamente los niños talentosos pueden conceptualizar los problemas y las soluciones correctamente a pesar de que pueden cometer errores de cálculo (Miserandino, Subotnik y Ou, 1995).

Algunas de las características, enumeradas de mayor a menor relevancia, con mayor ocurrencia en el estudio fueron:

1. Estudiantes con habilidades aritméticas excelentes:
   a) Muestran capacidad de hacer cálculos con precisión.
   b) Son buenos para memorizar.
   c) Recuerda las fórmulas y procedimientos.
   d) Tiene habilidades para hacer cálculos rápidos.
   e) Saca buenas notas en los exámenes cuantitativos.
   f) Piensa de una manera secuencial y procedimental.
   g) Entiende los conceptos matemáticos, principios y estrategias.

2. Estudiantes que solucionan problemas de forma creativa:
   a) Son capaces de pensar en forma creativa.
   b) Generar nuevas formas de resolver problemas.
   c) Tienen formas creativas (inusuales y divergentes) de resolver problemas de matemáticas.
   d) Ofrecen más de una solución a un mismo problema.
   e) Observan al mundo desde una perspectiva matemática.
   f) Ven las conexiones entre las diferentes áreas de la matemática.
   g) Explican conceptos en términos matemáticos.

3. Estudiantes que relacionan las matemáticas con el mundo real.
   a) Relacionan las matemáticas a la vida cotidiana.
   b) Pueden ver el mundo a través de un lente matemático.
   c) Comprenden cómo se utilizan las matemáticas en el mundo real.
   d) Relacionan a las matemáticas con otras materias.
   e) Generan muchas ideas, soluciones, explicaciones, etc.
   f) Tienen capacidad espacial.
   g) Disfrutan resolviendo problemas difíciles.

El estudio menciona que los profesores creen que la característica más evidente de los jóvenes talentosos es la creatividad para acercarse a la solución de problemas. Esta investigación demostró que los profesores más experimentados fueron más propensos a valorar esta característica.

Otra característica, según este mismo estudio, es que los estudiantes matemáticamente talentosos tienen un conocimiento extraordinariamente profundo y curioso acerca de la información numérica y trabajan los problemas matemáticos de manera flexible, más que de una manera estereotipada (Miller, 1990). Tienen habilidades para desarrollar soluciones únicas y creativas sobre problemas comunes e interpretan la información de los problemas de manera original (Greenes, 1981).

Krutetskii (1976) también consideraba que los niños matemáticamente talentosos, tienen una predisposición por interpretar el mundo matemáticamente (*mathematical cast of mind*). Además, tienen una tendencia a ver las matemáticas en la vida ordinaria y común.

Los niños matemáticamente talentosos tienen a interrogar acerca de preguntas relacionadas con las matemáticas que van más allá de una simple aclaración (Miserandino, Subotnik, & Ou, 1995). Y sobre todo no están dispuestos a aceptar afirmaciones sin un examen crítico para encontrar el "por qué" y "cómo", ellos critican de manera constructiva y a veces argumentativamente. Cuando a estos niños se les presenta un verdadero problema matemático tratan de aplicar múltiples estrategias para avanzar en el proceso de resolución de problemas (Hoeflinger, 1998).

Resultados de un estudio realizado por Olszewski-Kubilius, Shaw, Kulieke, Willis, y Krasney (1990), muestran que las experiencias previas así como las expuestas son factores importantes para el desarrollo del talento, los clubes de matemáticas, las tutorías particulares y la enseñanza de los padres en casa forman una gran ventaja para el proceso de desarrollo del talento del niño, así como para incrementar sus habilidades de razonamiento.

De acuerdo con Krutetskii (1976), *“el talento no es una característica única, sino una combinación cualitativa de diferentes habilidades únicas de cada persona”*. No todos los estudiantes matemáticamente talentosos tienen todos los atributos mencionados anteriormente, es decir, un estudiante puede poseer sólo algunas de las características.

Otros factores que han sido identificados por diversos investigadores incluyen rapidez en el aprendizaje, habilidad de observación aguda, excelente memoria y una excepcional capacidad de razonamiento verbal. Como resultado estos niños tienden a aburrirse fácilmente con las tareas rutinarias y de repetición. Tienen muy desarrollada la capacidad de abstracción, además de ser muy intuitivos. Son curiosos, y tienden a tomar riesgos en la fase exploratoria de los problemas. Algunas otras características de los niños con habilidades matemáticas sobresalientes son las mencionadas a continuación (Greenes, 1981).

- Formulación espontánea de problemas.
- Flexibilidad en el uso de datos.
- Habilidad para la organización de los datos.
- Riqueza de ideas.
- Originalidad de interpretación.
- Habilidad para la transferencia de ideas.
- Capacidad de generalizar.
- Preferencia por problemas en lugar de ejercicios repetitivos.

1.4 Identificación e intervención

Cómo distinguir a un niño que es buen estudiante, aquel que es reconocido por la institución como excelente alumno, de un alumno talentoso que cuenta con habilidades matemáticas sobresaliente, no es una tarea sencilla. La observación que tienen los profesores en el aula es necesaria para la identificación de los niños talento (Gavin et al., 2007), pero algunas investigaciones recientes mencionan que no es suficiente, para una selección más fina necesitaremos ayuda de otros recursos evaluativos. Además, los maestros deben buscar estrategias, como la eficiencia y elegancia, así como el ritmo durante el proceso de identificación. Algunos autores sugiere observar a los niños en el trabajo con el apoyo de grabaciones de audio y video, igualmente de presentaciones y demostraciones que cada alumno realiza para apoyo de las evaluaciones (Greenes, 1981).

Hasta el año de 1950, los únicos criterios establecidos para identificar a personas con habilidades matemáticas sobresalientes era el rendimiento escolar (calificaciones y opinión de los maestros) o en algunos casos la prueba del Coeficiente Intelectual (IQ por sus siglas en inglés).

Joy Paul Guilfordes, es una de las personas que más ha contribuido en establecer la actual definición de "giftedness", en la cual se incluye el potencial y creatividad junto con el éxito. En 1972 Sidney P. Marland, quien fue comisionado de la educación en Estados Unidos, marcó diversas pautas para la identificación de niños talentosos y planteó varios programas para niños con habilidades sobresalientes. Estas iniciativas fueron presentadas ante el congreso de los Estados Unidos en ese mismo año.

Uno de los problemas recurrentes del siglo pasado fue el de la identificación de los niños talentosos con base en los programas escolarizados de matemáticas. Estos programas invertían una gran parte de su esfuerzo en la manipulación de técnicas de cálculo, y por ello se solía evaluar la capacidad de los alumnos con base en el desempeño exitoso de la práctica de cálculos y algoritmos.

Uno de los pioneros en las investigaciones acerca de los jóvenes talento es el fundador del proyecto Centro para Jóvenes Talento (CTY por sus siglas en inglés) Julian C. Stanley, quien fundó dicho proyecto en los setentas, a cargo de la universidad John Hopkins (Linda E. Brody, 2004). Este centro examina a los estudiantes de la más alta capacidad académica a través de su búsqueda de talentos y les ofrece oportunidades educativas que desarrollan el intelecto, animan el desempeño y fomentan el desarrollo social. La Universidad tiene a cargo un proyecto llamado Estudio para Jóvenes con Talento Matemático Precoz (SMPY por sus siglas en inglés). El objetivo de esta investigación es desarrollar una mejor comprensión de las necesidades específicas de los jóvenes intelectualmente precoces y los factores determinantes de las trayectorias de desarrollo contrastantes que muestran durante toda la vida.

No se tiene hasta el momento un examen confiable, que pueda ser aplicado a los estudiantes del nivel básico para identificar si tienen habilidades matemáticas sobresalientes. Es por esta razón que se recurre muy frecuentemente al uso de múltiples criterios para su selección. La aplicación de un sólo examen no resulta regularmente una buena herramienta para identificar a los niños talentosos de los buenos estudiantes.

La Asociación Nacional para Niños Talentosos (NAGC por sus siglas en inglés) tiene un proyecto llamado "proceso sistemático para identificar el talento matemático", fundado por Richard C. Miller en 1990. Este modelo está diseñado para ser implementado con un grado de flexibilidad, con el fin de dar a los estudiantes con talento matemático todas las oportunidades para que su talento sea descubierto. Esto puede ser especialmente importante cuando se busca talento matemático en las poblaciones minoritarias o en desventaja económica o social. El modelo está dividido en dos etapas:

Etapa 1: Establecer un grupo de individuos de los que se sospecha que tienen talento para las matemáticas mediante la creación de una tabla que registren las razones por las que se sospecha que el estudiante tiene habilidades especiales para las matemáticas.

Nombre	Examen de Aptitud	Examen de aprovecha-miento	Examen de creatividad	Aprobación de Profesores/ Padres	Examen de nivel superior
	>= 95%	>=95%	si	si/si	

Existen diferentes opiniones sobre cómo pueden ser utilizados los exámenes de creatividad para la identificación de talento. Aunque los estudiantes con talento matemático muestran un grado elevado de creatividad e ingenio en las ideas matemáticas, esto no siempre se ve reflejado en los test de creatividad. Sin embargo, resultados con un alto grado de creatividad junto con indicadores sobre un intenso interés en matemáticas sí parecen ser una pista para la detección del talento matemático.

Por otro lado, los exámenes de aprovechamiento pueden aportar mucho en la identificación, pero tienen que ser interpretados cuidadosamente, ya que la mayoría de ellos muestran habilidades de cálculo y dan poca información sobre como el estudiante está razonando. Debido a que los exámenes de aptitudes no se centran tanto en los cálculos, son mayormente usados en la identificación de estudiantes talentosos.

Los exámenes de grado o nivel superior sólo puede ser utilizado con estudiantes que han demostrado previamente tener fuertes habilidades matemáticas en los instrumentos de evaluación para su grado correspondiente. Un examen de grado superior es aquel que es diseñado para estudiantes con un tercio de veces más la edad del individuo talentoso que se desea evaluar. Por ejemplo, un niño de 9 años (tercer año escolar) se pondrá a prueba utilizando un examen diseñado para uno de 12 años (sexto año escolar). Esto puede dar una mejor apreciación de las destrezas del razonamiento matemático, porque el estudiante tiene que encontrar maneras para resolver los problemas, las cuales no se le han enseñado (no es el mismo razonamiento que tiene un niño de primero de primaria al plantear una operación como 27 entre 3 al que tiene uno de tercer año).

Estas pruebas tienen muchos problemas difíciles que pondrán a prueba incluso a los estudiantes más capaces, por lo que es posible discriminar el talento de verdad de otros que son simplemente buenos en matemáticas. El método de poner a prueba a los niños en exámenes de grado o nivel superior al que cursan ha sido utilizado con éxito en la detección de talentos matemáticos y programas de matemáticas en la escuela con estudiantes de secundaria y preparatoria en los últimos 15 años. Más recientemente, ha habido programas que han utilizado con éxito este procedimiento en los grados elementales.

Etapa 2: Separar a los estudiantes con talento matemático de aquellos que son solamente buenos estudiantes de matemáticas.

Para pasar a la segunda fase el estudiante (de grado x) presentará un examen de grado o nivel superior (nivel x + x/3). Los resultados deben ser evaluados junto con los resultados de la fase 1. Resultados por encima del 74% en esta segunda fase colocan al estudiante en el 1% superior de su grupo de edad en cuanto a habilidades matemáticas. Resultados del 64% colocan al estudiante en el 3% superior de su grupo de edad en cuanto a habilidades matemáticas.

Nombre	Examen de Aptitud	Examen de aprovecha-miento	Examen de creatividad	Aprobación de Profesores/ Padres	Test de nivel superior
	>= 95%	>=95%	si	si/si	>=64

Ambos grupos son considerados con habilidades matemáticas especiales.

Así como este proyecto, en el Centro para Talento Joven (CTY por sus siglas en inglés) se tienen diferentes herramientas para la identificación de alumnos con habilidades matemáticas sobresalientes, aquí es indispensable demostrar excelente rendimiento académico, pasar los exámenes de niveles superiores (calificaciones arriba de 550 puntos) como es el caso de SAT (*School and College Ability Test*), ACT *(American College Test)* o el STB *(Spatial Test Battery*), además estar en el percentil 95% o superior en una o más áreas de exámenes estandarizados y normalizados a nivel nacional así como obtener buenos resultados en exámenes estatales.

Como podemos observar, los instrumentos de evaluación para niños con talento matemático han ido evolucionando a lo largo de la historia, y en la actualidad la prueba de IQ ha sido casi desechada para el propósito de identificar talento. En México, las herramientas más utilizadas para lograr este fin son los exámenes que se aplican en las Olimpiadas, como es el caso de la "Olimpiada Mexicana de Matemáticas" y para niños más pequeños "El Concurso de Primavera".

1.5 Respuesta educativa a los niños matemáticamente talentosos

1.5.1 México

A mediados de los ochenta se despierta en México, el interés por el estudio de individuos que llegan a manifestar un promedio de inteligencia mayor al nivel medio alto. En 1986 se inicia en México la implementación de modelos educativos específicos, entre ellos el Modelo de Atención a Niños y Jóvenes con Capacidades y Aptitudes Sobresalientes (SEP, s/f).

A partir de 2002 se implementó en México, el Programa Nacional de Fortalecimiento de la Educación Especial y de la Integración Educativa, que constituye una respuesta del gobierno federal a las demandas y propuestas en materia de integración educativa de los niños, niñas y jóvenes que presentan necesidades educativas especiales. Dentro de las metas prioritarias del Programa, se establece la atención de los alumnos con aptitudes sobresalientes. Para este fin, en 2003 la Subsecretaría de Educación Básica, a través del Programa Nacional, planteó el diseño de un Proyecto de investigación e innovación denominado: "Una propuesta de intervención educativa para alumnos y alumnas con aptitudes sobresalientes". Durante este periodo, se identificó que en el país se atendían a 17,590 alumnos con aptitudes sobresalientes, y que esta atención se otorgaba prioritariamente en educación primaria (SEP, s/f).

La Subsecretaría de Educación Pública tiene actualmente un programa llamado "Atención educativa a niños, niñas y jóvenes con aptitudes sobresalientes y/o talentos específicos", el cual tiene como objetivo impulsar el desarrollo de sus potencialidades a fin de ofrecerles diversas oportunidades educativas a partir de las necesidades que presentan, y en consecuencia incrementar el logro educativo de estos alumnos, lo cual se reflejará en mejores resultados en evaluaciones educativas nacionales e internacionales.

Lamentablemente, los programas que existen o existieron para el apoyo a estudiantes sobresalientes en diversas disciplinas y campos para el desarrollo intelectual de los niños son pocos, pero son menos o nulos los especializados en Matemáticas. Como vemos, para el país es muy importante atender a aquellos alumnos con insuficiencia pero no lo es de igual manera atender a los estudiantes con habilidades sobresalientes.

1.5.2 España, Estados Unidos y otros países.

Como se mencionó anteriormente, algunos países han puesto una atención especial en niños talentosos, estos cuentan con diversos programas para la identificación y atención de niños con talento, específicamente estudiaremos aquellos que impulsen el talento matemático, en la tabla siguiente se muestran algunos de ellos y además aparece con una X si el programa trata de identificar y/o trata de atender las habilidades de dichos niños.

País	Programa	Institución a cargo	Edad	Identificación	Atención
Colombia	Semicírculo	Universidad Sergio Arboleda	10-		X
España	I(M+C) y Talento Matemático	Instituto de Matemáticas y Computación	7-15	X	X
España	Estalmat	Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales	12-15	X	X
EEUU	Proceso Sistemático para Identificar el Talento Matemático.	National Association for Gifted Children.		X	
EEUU	Center of Talent Youth (CTY)	John Hopkins University	7-15	X	X
EEUU	Wisconsin Mathematics, Engineering and Science Talent Search.	Universidad de Wisconsin	13-17	X	
EEUU	USA Mathematical Talent Search (USAMTS)	National Security Agency (NSA)	13-17	X	
Australia	Mathematics Challenge for Young Australians	Departamento de Innovación, Industria, Ciencia e Investigación (DIISR)	11-16	X	X

Figura 1.4 Relación de algunos programas de atención al talento matemático.

Desde que las Olimpiadas de Matemáticas empezaron a tener un mayor auge en la comunidad estudiantil, se ha puesto mayor atención en niños matemáticamente sobresalientes. En la actualidad existe una gran variedad de programas (algunos mostrados en la Figura 1.4) para niños y jóvenes talento, aunque la mayoría de éstos se han ido formando de manera empírica, todos mantienen el mismo propósito: fomentar la simpatía y habilidad de niños matemáticamente talentosos. Estos programas van desde la aceleración en los planes de estudio hasta una visión exclusiva en las matemáticas recreativas o de resolución de problemas.

Un ejemplo claro de programas con esta visión es el proyecto ESTALMAT, mencionado anteriormente, cuyos principales objetivos son los siguientes:

- Fomentar la afición y habilidad especial en matemáticas de niños.
- Mostrar a los alumnos participantes los procedimientos específicos del quehacer matemático, a través de la resolución de problemas y la puesta en práctica de estrategias de pensamiento eficaces en los procesos de invención y descubrimiento matemáticos (De Guzmán, s/f).

La estructura de ESTALMAT está divida en tres etapas que se mencionan a continuación:

1. Selección de participantes.
2. Formación semanal durante dos cursos académicos.
3. Seguimiento periódico durante dos cursos más.

El equipo de profesores encargados son maestros de matemáticas en los niveles de educación secundaria y universitaria, con amplia experiencia y compromiso en actividades de promoción y divulgación de las matemáticas entre los jóvenes. Es un proyecto que ha perdurado con satisfacción y se ha expandido en varias ciudades Españolas.

En Estados Unidos algunos de los programas más conocidos para jóvenes talento son: Centro para Talento Joven Center (CTY por sus siglas en inglés), Búsqueda de Talento Matemático en Estados Unidos (USAMTS por sus siglas en inglés) y Búsqueda de Talento en Matemáticas, Ingeniería y Ciencias en Wisconsin (MESCS por sus siglas en inglés).

Desafortunadamente en México no se cuenta con programas establecidos de forma sistemática y disponibles para una gran parte de la población. Los que resaltan son algunos formados de manera empírica a cargo de las Universidades de cada Estado, con el objetivo de entrenar a los estudiantes que van a competir en las Olimpiadas de Matemáticas.

1.6 El problema a investigar.

En resumen, es indiscutible la necesidad que tiene actualmente el país de desarrollarse económica, tecnológica y científicamente, frente a esta problemática es importante considerar la formación de científicos competentes que afronten este reto. Así, nuestro trabajo tiene un especial interés en identificar y atender alumnos matemáticamente talentosos que en un futuro formen parte de esta comunidad científica. Asimismo, atender sus necesidades y potencializar sus habilidades matemáticas.

Por otra parte, tanto las habilidades matemáticas como la resolución de problemas son objetos de estudio de la matemática educativa, los cuales han resultado esenciales en esta investigación. El hecho de que la matemática educativa se ocupe principalmente de las cuestiones generales de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, no implica que los estudios dirigidos a estudiantes con características especiales de talento tengan menor relevancia para esta disciplina, porque finalmente también son estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Consideramos entonces que la matemática educativa ha desarrollado las herramientas teóricas y metodológicas necesarias para dar respuestas a la identificación y atención de niños matemáticamente talentosos y por eso planteamos aquí el problema de investigación:

¿Cómo Identificar Niños Matemáticamente Talentosos (MT)?

1.7 Preguntas de investigación y objetivos del trabajo.

A continuación se presentan las preguntas de investigación que se desprenden del problema expuesto y que se desean responder a lo largo del trabajo:

- ¿Cuáles habilidades matemáticas debieran incluirse en el diseño de un método de identificación de niños MT?

- ¿Con qué criterios se deberían seleccionar los problemas matemáticos que se usarán en la método?

- ¿En qué medida una estrategia metodológica basada en la resolución de problemas resulta útil para determinar el nivel de desarrollo de las habilidades en niños en edad escolar?

En esta línea, establecemos que los objetivos principales de este trabajo son: identificar a los niños matemáticamente talentosos mediante una herramienta que nos permita seleccionar cuáles alumnos muestran habilidades altamente desarrolladas, y proponer las líneas generales de un programa de intervención para ellos, donde se presenten algunas ideas de la elaboración del programa y la herramienta de identificación para los niños matemáticamente talentosos que participarán en este programa.

CAPÍTULO 2
REFERENCIAS TEÓRICAS

Los planteamientos principales que se delinean en este capítulo intentan dar una caracterización respecto al talento matemático, la identificación de los niños talentosos y la percepción de los anteriores con respecto a las habilidades matemáticas. Se muestra un compendio de los conceptos relacionados al talento y se precisa cuáles son las habilidades matemáticas que tomaremos como base para nuestro trabajo.

Para finalizar, se manifiesta en qué consisten dichas habilidades matemáticas y cuáles son algunas de las cuestiones generales de la resolución de problemas como método para detectarlas.

2.1 Talento matemático

Existen numerosos puntos de vista acerca del significado de la palabra talento, desde aquel presentado en el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2001): talento, como inteligencia, es la capacidad de entender y talento, como aptitud, es la capacidad para el desempeño o ejercicio de una ocupación; hasta modelos consolidados como el de la teoría de los tres anillos de Renzulli (1977) quien considera el talento como:

> *una interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos, consistentes en: capacidades intelectuales por encima de la media, altos niveles de compromiso con la tarea y altos niveles de creatividad* (Benavides, 2008).

Siguiendo en esta línea del talento, en los Estados Unidos, la mayoría de los estados, han adoptado el término legal "dotados y talentosos" (*gifted and talented*) para hacer referencia a los estudiantes, niños o jóvenes que muestran evidencias de alto rendimiento en áreas como las capacidades intelectuales, artísticas o de liderazgo, o en campos académicos específicos, y que requieren de servicios o actividades no provistas habitualmente por su institución, con el fin de desarrollar al máximo dichas capacidades (Johnsen, 2004).

Las investigaciones relacionadas con este tema pueden referirse a estos alumnos como superdotados, de alta capacidad, talentosos; hay múltiples definiciones, todas para determinar la excelencia intelectual. La principal diferencia entre las definiciones aparece de lo innato o adquirido. Por lo regular el término superdotado, generalmente, está más asociado con el carácter innato (Ramírez, 2012), por lo cual en nuestro trabajo no profundizaremos sobre esta definición, ya que consideramos a la excelencia intelectual como un concepto cambiante y en desarrollo.

El talento, mencionan algunos autores, no sólo posee un carácter relativo, también tiene un aspecto evolutivo, es decir el talento no es sólo fijo sino que puede irse desarrollando a través del tiempo, de acuerdo al potencial de cada persona. Es por esto, que haremos una distinción entre el talento actual, aquél que se ha puesto de manifiesto y el talento potencial, aquél que no se ha desarrollado o evidenciado (Benavides, 2008).

Al momento de definir o describir al talento como una sola característica, se presentan, como vimos, diversos y muy variados significados. Sin embargo, dado que esta investigación tiene como propósito identificar las habilidades que presenta un niño matemáticamente talentoso, necesitamos delimitar el término talento a otro más específico, aquel que se refiera sólo al área de las matemáticas. Por tal motivo, no se profundizará en el significado de talento sino en el significado conjunto del término talento matemático.

Las investigaciones relacionadas con el talento matemático tienen un desarrollo relativamente reciente uno de los pioneros en el tema es el psicólogo ruso V.A. Krutetskii quien en su libro "La Psicología de las Habilidades Matemáticas de los Niños" (*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren)* describe al talento no como una característica única, sino como una combinación cualitativa de diferentes habilidades únicas para cada persona (1976).

En este trabajo adoptaremos las ideas y concepciones de Krutetskii en lo que respecta al talento, él describe a los niños matemáticamente talentosos como aquellos que poseen habilidades en niveles de desarrollo alto, las cuales se pondrán de manifiesto en el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Ya que nuestro trabajo es específico de la actividad matemática, no pondremos en juicio si un niño matemáticamente talentoso es además, talentoso en otras áreas como la biología o la historia. En la literatura observamos que existen matemáticos talentosos pero que su talento se limita a estas áreas, como el caso de D. I. Mendeleev (Krutetskii, 1976). Así mismo, una persona talentosa en cualquier otro ámbito puede no ser matemáticamente talentosa.

2.2 Caracterización de un niño matemáticamente talentoso

El punto clave para poder caracterizar a un niño matemáticamente talentoso, viene del término habilidad, que Krutetskii define como: "un rasgo personal que permite a uno realizar una tarea dada rápida y correctamente, en contraste con un hábito o destreza, que es característico de la propia actividad".

Es fundamental hacer una diferenciación clara entre habilidad y destreza o hábitos, ya que son conceptos de la misma naturaleza, son formados y desarrollados en la vida, durante la actividad y todos son condiciones para el éxito en la vida y en la actividad. Están estrechamente relacionados, por un lado, cuando el conocimiento, destrezas y hábitos son adquiridos, las habilidades son desarrolladas; su formación y desarrollo es imposible fuera del proceso del dominio del conocimiento apropiado, destrezas y hábitos. Por otro lado, la adquisición de conocimiento, destrezas y hábitos dependen, junto con otras condiciones, de los rasgos individuales de cada alumno; las habilidades permiten que el conocimiento apropiado y los hábitos puedan ser dominados con más facilidad y más a fondo. Las habilidades, destrezas y hábitos no se distinguen por la velocidad en la que se adquieren o por la complejidad. Pero desde luego, si examinamos estos cuestionamientos en un marco general, puede decirse que las habilidades comparadas con los hábitos y destrezas, usualmente se forman y cambian lentamente, con más dificultad y con formaciones más estables.

La principal diferencia entre estos conceptos es que las habilidades son rasgos personales favorables para el dominio rápido y fácil de una actividad definida, en cambio las destrezas y hábitos son acciones específicas dentro de una actividad que una persona realiza en un nivel relativamente alto, este último concepto viene del análisis específico de la actividad, en contraste con las habilidades que provienen de un análisis de la psicología de la persona.

Las habilidades matemáticas existen solo en un estado dinámico, en desarrollo; éstas son formadas y desarrolladas dentro de la actividad matemática. El progreso en la actividad matemática depende no sólo de una habilidad tomada por separado, sino de un conjunto de habilidades, así el alto rendimiento en una actividad puede ser condicionado por diferentes combinaciones de habilidades. La debilidad relativa de una habilidad puede ser compensada por otra, de modo que el rendimiento exitoso de la actividad no se descarta.

Luego de exponer dichas ideas, estableceremos las habilidades matemáticas, descritas por Krutetskii, en las que pondremos nuestra atención.

- Habilidad para generalizar.
- Flexibilidad en el pensamiento.
- Habilidad para reducir (acortar) los procesos de razonamiento.
- Habilidad para razonar lógicamente.
- Habilidad para la abstracción.

- Celeridad en el razonamiento.
- Agudeza en el entendimiento
- Ingeniosidad y creatividad.
- Habilidad para interpretar visualmente relaciones matemáticas.
- Habilidad para buscar cual es el camino más corto, directo y económico (economizar el pensamiento).
- Pensamiento lógico, sistemático y secuencial.
- Habilidad para cambiar del razonamiento directo al razonamiento "hacia atrás".
- Memorización rápida y acertada del material matemático.

Estas habilidades pueden manifestarse en mayor o menor grado en un sujeto, pero no es nuestro objetivo cuantificar el nivel de desarrollo que tienen los niños en cierta la habilidad, ya que esta tarea es muy compleja y es difícil precisarla. En consecuencia, lo que haremos será describir y analizar cualitativamente el nivel de desarrollo del talento matemático que tienen los sujetos de estudio, en nuestro caso, los niños de primaria.

Dentro de los resultados de la investigación realizada por este psicólogo, se concluye que el talento matemático es caracterizado por medio de un pensamiento generalizado, acortado y flexible en el ámbito de las relaciones matemáticas, de los números y de las literales usadas simbólicamente y por un Pensamiento Matemático (Mathematical Cast of Mind). Es decir, existen habilidades más "potentes" que otras para caracterizar a un niño matemáticamente talentoso, por lo tanto, pondremos una mayor atención en la habilidad para generalizar, flexibilidad en el pensamiento y habilidad para reducir (acortar) los procesos de razonamiento.

En definitiva, el talento matemático es caracterizado por habilidades matemáticas, sin embargo, no podemos hablar de una lista finita en donde se asocien solo ciertas características de talento matemático. Las tres habilidades expuestas anteriormente, son en las que centraremos nuestra atención para el análisis de los procesos de solución, sin embargo incluiremos todas las que muestre el alumno, sin importar que no están enlistadas en este trabajo.

2.2.1 Generalización

Es bien sabido que la habilidad para generalizar es una de las características más importantes en la inteligencia en general, muchos de los talentos prominentes tienen esta habilidad muy desarrollada, matemáticos y no matemáticos. Sin embargo, nosotros vamos a delimitar esta habilidad como la generalización matemática de objetos, relaciones y operaciones. Ya que esta habilidad no es trasferible a otras áreas, una persona que generaliza en matemáticas no necesariamente es buena generalizando en la literatura o historia (Krutetskii, 1976).

Lo anterior viene a contribuir una idea más global, señalada anteriormente, el referirnos al talento matemático es específico del desarrollo de las habilidades matemáticas y si estas habilidades no pueden ser generalizadas para otras áreas como la Biología, así mismo el talento matemático no podrá ser generalizado para el término aislado de talento.

Otros autores como Greenes (1981) coinciden en que esta habilidad es una característica importante en la identificación del talento matemático y desde otra perspectiva, tenemos a Mancera (2000) quien la identifica como una habilidad intelectual estrechamente relacionada con los procesos de la resolución de problemas, él menciona que al resolver un problema en realidad se están resolviendo una clase de problemas con las mismas características, es decir un problema puede ayudar a identificar relaciones que se presentan en problemas distintos pero de la misma naturaleza.

Así mismo, Krutetskii (1976) expone que esta habilidad es una componente esencial para el desarrollo de todas las habilidades, ya que permite transferir unas condiciones a otras, y unos materiales a otros. Además, comenta que esta habilidad usualmente es caracterizada por su propiedad de "enseñabilidad", una propiedad trascendental para fines de intervención de niños talentosos.

Los niños que presentan esta habilidad más desarrollada, no tienen dificultades para encontrar características comunes en diferentes problemas (que pertenecen a un solo tipo). Y así, poder transferir un método de solución que ha encontrado a otros problemas del mismo tipo.

Un problema resuelto puede servir como marco para identificar relaciones que se puedan presentar en otros problemas aunque el contexto cambie, para llegar a este habilidad es necesario el pleno entendimiento de las relaciones internas de problema, para así identificar los procedimientos o estrategias que pudieran ayudarme a resolver un tipo de problemas y no solamente un problema (Mancera, 2000).

Un problema que ejemplifica esta habilidad es el siguiente: "En dos ángulos adyacentes suplementarios, uno es igual a 45˚. Se construyen las bisectrices de esos ángulos, ¿cuál es el valor del ángulo entre las bisectrices?", Sonya, una niña entrevistada por Krutetskii, da la siguiente respuesta correcta (90˚) bastante rápido y, casi sin pensarlo, generaliza: "Para todos los ángulos suplementarios adyacentes las bisectrices deben formar un ángulo de 90°, ya que la suma de los ángulos suplementarios adyacentes es de 180°, y la mitad de esta suma siempre es 90°." Por lo que observamos, Sonya no sólo resolvió el problema cuando un ángulo es igual a 45°, sino para cualquier ángulo que se le presente, siempre y cuando sean suplementarios. Este es un claro ejemplo de la habilidad para generalizar altamente desarrollada.

2.2.2 Flexibilidad en el pensamiento.

Entre más pequeños sean los niños, menor es la influencia de los métodos basados en la aplicación mecánica de algoritmos. Por lo regular, algunos niños que presentan más desarrollada esta habilidad, no están completamente comprometidos con un tipo de pensamiento, sino pueden cambiar fácilmente de uno pensamiento a otro.

Los niños que presentan esta habilidad en un nivel más desarrollado, pueden cambiar fácilmente de una operación a otra o de algún método de solución a otro. Se caracterizan por la diversificación en los acercamientos que tienen para resolver los problemas. Por lo general, estos niños piensan en más de una estrategia para abordar un problema, de esas estrategias eligen una y llegan a la solución. Seguido de esto, pueden regresar al problema, tomar una estrategia distinta y analizar a qué conclusión los llevaría ésta. Es decir, por propia iniciativa pueden encontrar dos o tres formas de resolver un problema.

Por ejemplo, para el problema clásico de las gallinas y los conejos (en el que los datos son 94 patas y 35 cabezas en total dentro de un corral), una niña entrevistada por Krutetskii encontró las dos soluciones siguientes que muestran esta habilidad desarrollada: "Si había 35 cabezas en total, entonces debe de haber 35 gallinas y conejos en total. Si todos fueran gallinas, tendría que haber 70 patas. Esto quiere decir que hay 24 patas que sobran, porque en lugar de gallinas hay conejos corriendo en el lugar. También puede verse de la siguiente manera: hay 94 patas, si todas hubiesen sido de gallinas entonces habría 47 gallinas. Pero hay 35 cabezas en total, 12 menos. Entonces estas 12 cabezas tiene 4 patas cada una, no 2. Entonces había 12 conejos y 23 gallinas".

Esta habilidad, también ha sido estudiada más recientemente por otros autores, por ejemplo Mancera (2000) la ha definido como aquella que les permite a los estudiantes reconocer que un problema se puede resolver de distintas formas, involucrando procesos y conceptos diversos que no tienen que ver con la secuencia de contenidos planteada en los programas educativos, se refiere a la posibilidad de abordar las situaciones de varias maneras, empleando diferentes recursos y estrategias.

2.2.3 Habilidad para abreviar los procesos dentro del razonamiento.

Los niños que han desarrollado más esta habilidad, por lo general, saltan pasos intermedios para llegar a una solución, ya que logran identificar con rapidez algunos pasos que les resultan obvios, esto como resultado de una visión más global que tienen del problema. Ellos perciben lo que está sucediendo con la estrategia que eligieron para solucionar un problema y pueden permitirse omitir algunos pasos, gracias a ese entendimiento tan agudo. Esto les permite ver algunos tramos del proceso de resolución como un todo, sin entrar en detalles al respecto.

El desarrollo de esta habilidad les permite abreviar a tal grado los procesos dentro del razonamiento que para un observador, con frecuencia resulta difícil entender el proceso de resolución. Además, como en otros casos, es posible que dentro del proceso de "abreviación" el alumno que tiene desarrollada esta habilidad utilice otras.

A pesar de que esta habilidad es muy útil en los problemas de conteo, es importante no confundirla con el acortamiento de procesos algorítmicos, ya que éstos pueden ser desarrollados por el hábito o el entrenamiento, aspecto que se mencionó con anterioridad. Algunos estudiantes, cuando realizan un proceso algorítmico en repetidas ocasiones pueden encontrar o simplemente utilizar algunos atajos para mayor rapidez en los cálculos.

Veamos un ejemplo donde se muestra, por un lado la habilidad para abreviar el razonamiento y por otro la rapidez para hacer cálculos numéricos: "Encontrar dos números consecutivos, tales que su multiplicación sea igual a 156". En un alumno de primaria pueden observarse respuestas como la siguiente: "ya que los número deben ser consecutivos, el resultado de la multiplicación debe parecerse a $nxn=n^2$, entonces 156 debe parecerse a algún cuadrado; como el número es mayor que 100 entonces se parece a 11x11 = 121, 12x12 = 144, 13x13 = 169; como 156 está entre 144 y 169 los números que buscamos son 12 y 13", comprueba su hipótesis multiplicando y así finaliza su solución.

En este proceso de resolución pueden distinguirse tres pasos, en el primero se llega a la conclusión de que $n(n+1) \approx n^2$, en el segundo se establece que: n debe de ser un número mayor a 10 ya que $10^2 = 100$, y en el tercero: se buscan los cuadrados de números que acotan al número 156.

En el primer paso podemos observar un razonamiento abreviado en su estrategia, que lo lleva a concluir que $n(n+1) \approx n^2$, ya que esto permite reducir el conjunto de números posibles para solucionar el problema eficientemente, de hecho, si el estudiante conociera algún algoritmo rápido para encontrar raíces cuadradas, probablemente su respuesta sería inmediata a partir del primer paso, puesto que después de calcular la raíz de 156 pasaría a proponer los números 12 y 13 como solución. En el segundo paso, el estudiante elimina los números menores que 10 como posibles soluciones, puesto que sus cuadrados son menores a 100, esta eliminación pareciera basada en la memoria y en la rapidez del cálculo de los cuadrados.

La estrategia utilizada en el primer paso funciona para cualquier par de números consecutivos. Sin embargo, la segunda solo funciona para números con los que él niño esté más familiarizado, es decir si se propusiera otro problema similar donde la multiplicación fuese 17,292 (131 x 132), la primera estrategia sigue siendo útil ($\sqrt{17292} = 131.5$), pero la aplicación de la segunda (en este caso, 100 x 100=10,000) podría consumir mucho tiempo en los cálculos aritméticos.

Así mismo, la tercera parte de la solución, será eficiente en medida que el estudiante esté familiarizado con los cuadrados de algunos números o de sus habilidades de cálculo, pero de igual manera si se le proponen números mayores, el estudiante tendrá complicaciones para obtener un resultado rápidamente, por lo tanto su entrenamiento para acortar sería poco eficiente. En síntesis, la primera estrategia resulta clave para resolver el problema.

Krutetskii presenta el ejemplo de un niño que ha desarrollado la habilidad para abreviar el razonamiento, y que la pone de manifiesto mientras resuelve el problema siguiente: “Un tren pasa por un túnel de 450 m de largo en 3/4 de minuto y pasa por un poste en 15 segundos. ¿Cuánto mide el tren y qué velocidad lleva?” Sin ningún tipo de apoyo visual, el estudiante, comprendió la característica más compleja del problema que es “pasar a través del túnel es pasar a través de su longitud más la longitud del tren” y que “la distancia igual a su longitud la pasó en 15 segundos.” Aquí se muestra la solución abreviada que presentó el estudiante: “Pasar a través del túnel significa además, pasar a través de la longitud del tren. Pasó su longitud en 15 segundos: 450÷30 = 15 m/s = 54 km/h. 15 x 15 = 225.”

2.2.4 Celeridad en el razonamiento.

Esta habilidad se presenta cuando un niño encuentra una manera sorpresivamente rápida de resolver algún problema matemático. En algunos casos, la determinación del tiempo viene dada por los cálculos aritméticos, no por el tiempo en la comprensión del problema o en el planteamiento de una solución. Por ejemplo, a una de las niñas entrevistadas durante los estudios de Krutetskii, se le preguntó: “¿Es posible que un triángulo tenga dos ángulos rectos? A lo que ella rápidamente contestó: “No, porque entonces no hubiese un tercer ángulo”.

2.2.5 Pensamiento lógico, sistemático y secuencial.

Los niños que presentan esta habilidad en un alto desarrollo, pasan rápidamente de una premisa a una conclusión. Estos niños deducen que "B" sigue de "A" y no simplemente lo creen. Sus argumentos lógicos son muy compactos y persuasivos. En los estudios de Krutetskii, uno de los niños usaba con frecuencia la palabra "consecuentemente" y siempre la utilizaba en el lugar indicado. A pesar de que en niños tan pequeños algunos conceptos matemáticos no son formales (por ejemplo los números negativos), esto no es impedimento para que sus resultados tengan mucha precisión y estén fundamentados en la lógica.

En general, se considera válido un razonamiento cuando sus premisas ofrecen soporte suficiente a su conclusión.

2.2.6 Habilidad para la abstracción matemática.

Los niños que presentan esta habilidad en un alto desarrollo, suelen interpretar generalmente en un nivel abstracto los problemas que se les presentan, resolviéndolos como problemas de un tipo, es una habilidad ligada con la generalización.

Por ejemplo, a un niño estudiado por Krutetskii se le planteó el siguiente problema: "Representa de forma general aquellos números que dejen un residuo de 5 cuando sean divididos por 7", su solución fue la siguiente: "En general en estos casos, debemos multiplicar 'x' por el número dado y añadir el residuo para que así sea divisible por 'y' y quedará una 'z' como residuo. Todos los números serán xy + z. En el caso dado será 5 y 7.

2.2.7 Una tendencia distintiva por "economizar (optimizar) el pensamiento".

Los niños que presentan esta habilidad en un alto desarrollo, tienden a buscar las maneras más económicas para resolver los problemas, buscan claridad y sencillez en las soluciones. Inclusive podrían no encontrar la solución más racional al problema, sino seleccionan la manera más rápida y fácil para llegar al objetivo.

En el ejemplo de las gallinas y los conejos visto anteriormente, muchos de los estudiantes más experimentados podrían encontrar una forma algebraica de responderlo, sin embargo esta podría no ser la más económica. Mostremos un ejemplo de una solución que se distingue por la economía en el pensamiento: "Si hay 35 cabezas entonces todos los animales tienen por lo menos dos patas, es decir 70 patas, si hay 94 patas entonces, agregamos, de dos en dos 24 patas, por lo tanto tenemos 12 conejos y los restantes 23 son gallinas.

2.2.8 Memorización rápida y acertada del material matemático

Los niños que presentan esta habilidad en un alto desarrollo tienen una excelente memoria en términos de problemas, todas las operaciones intermedias y sus resultados. Recuerdan firmemente el trayecto básico de una solución, los tipos de problemas y los principios para resolverlos. Diferencian entre problemas de un tipo para poder aplicar las soluciones a un mismo tipo de problemas.

Mostremos unos problemas en los que aparentemente son distintos, pero en realidad forman un tipo de problemas similares que se pueden resolver de una misma forma.

> 1.- Un domador de elefantes, lava dos elefantes en 3 horas y su hijo lava un elefante en 2 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en lavar 7 elefante los dos juntos?
>
> 2.- Unos baldes de agua son llenados entre dos mangueras de presión, una de ellas llena por si sola una balde de agua en 10 segundo y la otra la llena en 15 segundos. ¿Cuánto tiempo tardarán las mangueras en llenar 5 baldes de agua?

Como podemos observar, las situaciones contextuales y los datos son distintos, sin embargo, las estrategias de resolución que podrían ser útiles para resolver estos dos problemas son las mismas. Se presenta una tabla a continuación para ejemplificar los resultados.

Problema del elefante				Problema de la piscina			
Tiempo	Hijo	Papa	Total	Tiempo	Manguera 1	Manguera 2	Total
3 horas	1.5	2	3.5	5 hrs.	1/2	1/3	
6 horas	3	4	7	10 hrs.	1	2/3	
				15 hrs.	3/2	1	
				20 hrs.	2	4/3	
				25 hrs.	5/2	5/3	
				30 hrs.	3	2	5

Como vemos, utilizando el mismo sistema como estrategia para resolver un problema se puede resolver otro distinto en su contexto.

Por lo regular estos estudiantes al momento de resolver un problema, y con ayuda de la habilidad para generalizar pueden resolver toda una gama de problemas con similitudes en sus planteamientos con gran facilidad.

2.2.9 Habilidades de conteo

Los niños que presentan esta habilidad en un alto desarrollo, por lo regular tienden a resolver problemas de operaciones rápidamente. Por ejemplo, un niño entrevistado por Krutetskii, a la edad de cinco años se preguntó: ¿en qué año estuvo mi bisabuela en segundo grado? Él solo conocía la edad de su bisabuela, entonces pensó el año de su nacimiento y trabajó su problema. La habilidad de estos niños es fácilmente detectable, ya que suelen resolver rápida y mentalmente operaciones con varios dígitos como 438 – 279 a temprana edad (6 o 7 años).

Es importante mencionar que la actividad matemática descrita anteriormente puede no ser observable en otras actividades, es por esto que hacemos una distinción clara entre los niños talentosos y los matemáticamente talentosos.

2.2.10 Habilidad para cambiar de una línea de pensamiento directo a una línea de pensamiento inverso.

Se trata de poder resolver un problema y tener claridad sobre el recíproco. La habilidad consiste en la posibilidad de que a partir de resolver un problema directo se pueda resolver el problema inverso. Por ejemplo, una respuesta similar a la siguiente, podría mostrar esta habilidad: Si tengo dos ángulos opuestos por el vértice entonces son iguales, pero si tengo dos ángulos iguales en algunas ocasiones son opuestos por el vértice.

2.3 Resolución de problemas como método para detectar habilidades matemáticas.

Como se mencionó anteriormente, las habilidades permiten a un sujeto realizar una tarea dada rápida y correctamente, entonces en este trabajo en específico tomaremos las tareas como la resolución de problemas matemáticos en donde el estudiante tiene que hacer uso específico de una o más habilidades para cumplir correctamente cada problema que se le presente.

Desde la década de los sesentas del sigo XX, se ha destacado la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, de igual manera ha habido investigaciones que han tratado de establecer las características más relevantes de los niños MT con base en los procesos de resolución de problemas matemáticos, uno de los primeros fue Krutetskii (Benavides, 2008).

Uno de los matemáticos más conocidos en este tema de investigación es Polya (1965), quien en su libro "Cómo plantear y resolver problemas" plantea cuatro etapas en la resolución de problemas matemáticos: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución obtenida. En los últimos años, se han hecho extensas revisiones sobre la literatura de investigación en resolución de problemas matemáticos, entre las que pueden citarse las de Lester, Schoenfeld y Kilpatrick.

En términos de habilidades, la resolución de problemas es una forma más útil para identificar el talento matemático que otras técnicas tradicionales de identificación, algunos autores especialistas en el tema, aconsejan el uso de la resolución de problemas como instrumento de identificación del talento matemático y desaconsejando el uso de pruebas de matemáticas de elección múltiple (Ramírez, 2012).

Nuestro punto de partida en la identificación es la resolución de problemas matemáticos, pero de éstos existen una gran variedad. Desde aquellos basados en el conocimiento, utilizados cotidianamente para la enseñanza de objetos matemáticos en las clases escolares y problemas creativos, basados en la inteligencia. Los problemas en los que pondremos nuestra atención son los segundos, aquellos que no necesitan de conocimientos de alto nivel, específicos y complejos, sino problemas que propicien el uso de las habilidades matemáticas que mencionamos anteriormente, en específico problemas donde el conocimiento, en medida de lo posible, no sea un impedimento para su resolución. Además, Krutetskii menciona que es necesario igualar las condiciones de los estudiantes y el proponer problemas de conocimientos específicos (por ejemplo, el volumen de un prisma determinado), contrapone esto.

Las habilidades matemáticas, como se mencionó anteriormente, se verán presentadas en el transcurso de la resolución de problemas, aquí presentamos un bosquejo general de las estructuras de las habilidades matemáticas en niños MT (matemáticamente talentosos).

1.- Obtención de la información matemática.

A. Habilidad para la percepción formal del material matemático; la habilidad para llegar a comprender la estructura formal de un problema.

2.- Procesamiento de la información matemática.

A. Habilidad para el pensamiento lógico en la esfera de las relaciones cuantitativas y espaciales, números y letras pensadas como símbolos; la habilidad para pensar en símbolos matemáticos.
B. Habilidad para la generalización rápida y amplia de objetos matemáticos, relaciones y operaciones.
C. Habilidad para abreviar (acortar) los procesos del razonamiento matemático y del sistema de operaciones correspondientes; la habilidad para pensar en estructuras reducidas (acortadas).
D. Flexibilidad en los procesos mentales de la actividad matemática.
E. Búsqueda de la claridad, simplicidad, economía y racionalidad en las

soluciones.

F. Habilidad para una rápida y libre reconstrucción de un proceso mental, alternando una línea de pensamiento directa a una indirecta (reversibilidad del proceso mental en el razonamiento matemático).

3.- Retención de la información matemática.

A. Memoria matemática o "memoria generalizada" para las relaciones matemáticas, tipo de características, esquemas de argumentos y pruebas, métodos en la resolución de problemas y principios de aproximación. Es importante mencionar que este tipo de memoria matemática no se refiere a la memorización de material escolar, tal como fórmulas, teoremas, etc.

Por otra parte, es esencial conocer no solo solo lo que el alumno ya ha aprendido sino también lo que es capaz de aprender. Para este fin Krutetskii utiliza dos índices: ¿cómo resolverá el problema por sí mismo? y ¿cómo resolverá el problema con ayuda de un adulto? Esto además, nos servirá para definir el talento matemático potencial del niño.

Siguiendo con estas ideas, tomaremos entonces la resolución de problemas como una herramienta que nos permitirá detectar el nivel de la habilidad en el que se encuentra los alumnos para así identificar el talento matemático.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

En este capítulo explicamos cuál es la metodología utilizada en la investigación, comenzando por declarar el tipo de investigación en el que está referido nuestro trabajo, en el cual utilizamos dos instrumentos metodológicos: los cuestionarios y las entrevistas semi-estructuradas. En ambas explicaremos el diseño, procedimiento y las modificaciones que sufrieron a lo largo de sus aplicaciones.

3.1 Tipo de investigación

El objetivo de la investigación radica en identificar, desde el punto de vista de las habilidades, el talento matemático de los estudiantes durante la resolución de problemas.

Para el desarrollo de esta investigación, hemos recurrido al tipo de investigación interpretativa, porque esta nos permite explicar en detalle las estrategias y habilidades que utilizan los estudiantes que participarán en nuestra investigación. Ya que las habilidades son un rasgo personal optamos por el estudio de casos, dado que esto nos permite llevar un registro detallado de lo que va sucediendo a lo largo del estudio de manera individual, este estudio pretende describir los niveles de desarrollo que tienen las estudiantes en sus habilidades. La idea de la investigación es conocer más sobre las habilidades de los estudiantes y el estudio de casos nos permite cubrir a todos los sujetos de estudio preseleccionados, gracias al cuestionario de identificación.

Por otra parte, es importante mencionar que no es nuestra intención formular juicios o decisiones finales acerca del talento matemático que presentan los sujetos de estudio, sino dar un diagnóstico general del nivel de sus habilidades por métodos cualitativos, que sean de ayuda para decisiones posteriores, como en el caso de agrupar a los niños MT en un programa de intervención de acuerdo a sus habilidades matemáticas.

3.2 Cuestionario

Con base en las referencias teórico metodológicas utilizadas por Krutetskii y un estudio exploratorio previo, diseñamos una serie de cuestionarios de identificación de niños MT aplicados a una muestra de alumnos. Se diseñó un primer cuestionario y de ahí se fueron realizando modificaciones para sus nuevas aplicaciones.

El objetivo del cuestionario es preseleccionar participantes para las entrevistas posteriores y ofrecer elementos para el diseño de éstas. Además, observar algunas las habilidades matemáticas mostradas durante los procedimientos, estrategias y resultados de los alumnos participantes en cada problema, buscar ideas "brillantes" y originales durante ese proceso y no sólo las respuestas "correctas". Más adelante, en la presentación del baremo, se explicará detalladamente cómo se considerarán cada uno de los problemas a resolver.

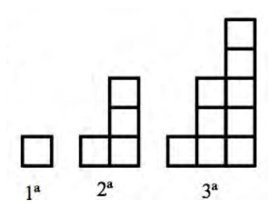
A continuación se presentan las características del primer cuestionario, siguiendo con las modificaciones que se le hicieron a lo largo de nuestra investigación.

3.2.1 Primer cuestionario
La selección de los problemas matemáticos se hizo tomando como referencia aquellos problemas no rutinarios utilizados en las competencias de matemáticas, se eligieron dependiendo de las habilidades que queríamos observar en los alumnos. Después de una selección se realizaron ajustes en cuanto a la redacción o datos.

En este cuestionario se pretende poner a prueba habilidades para: generalizar, razonar lógicamente, traducir problemas verbales a planteamientos matemáticos, abstraer, reconocer el complemento, detectar patrones, utilizar el razonamiento "hacia atrás" e interpretar visualmente las relaciones matemáticas.

A continuación se expondrán los problemas y en una tabla anexa de las características de cada uno, las habilidades que se desean destacar con el problema, los conocimientos (objetos matemáticos) necesarios para resolverlos y el reto cognitivo.

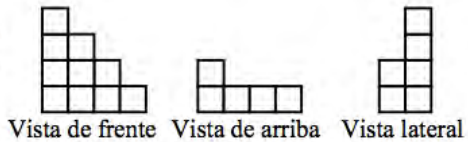
1.- Observa la siguientes figuras. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 15ª?



2. Miguel es más bajo que Gerardo pero más alto que Jorge. Jorge es más bajo que Miguel pero más alto que Carlos. ¿Quién es el más alto y quién es el más bajo?

3. Juan normalmente va al río caminando y vuelve a casa en elefante y tarda 40 minutos en ir y volver. Un día fue en elefante y también volvió en elefante y tardó sólo 32 minutos. ¿Cuántos minutos hubiera tardado si hubiera hecho ambos trayectos caminando?

4.- Hemos construido una figura con cubos iguales. ¿Cuántos cubos hemos utilizado si las vistas de la figura son éstas?



5.- Pedro tiene 20 bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. 17 no son verdes, 5 son rojas y 12 no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

6. Al doble del número que estoy pensando le he restado 23 unidades y he obtenido como resultado 123. ¿Cuánto suman las cifras del número que había pensado?

Prob.	Habilidad principal	Habilidades secundarias	Conocimientos necesarios	Reto cognitivo
1	Generalización	Reconocimiento de Patrones y Simplicidad en la solución	Operaciones básicas	Identificar la relación núm. de figura vs núm. de cuadrados
2	Razonamiento lógico	Abstracción	Conceptos de relaciones de ordenamiento	Lograr construir una jerarquización mediante símbolos.
3	Traducir problemas verbales a planteamientos matemáticos.	Razonamiento lógico y acortamiento en el proceso de resolución	Operaciones básicas	Identificación del tiempo en un solo trayecto
4	Abstracción	Percepción visual	Conteo de números naturales	Hacer una correspondencia entre las vistas y la figura tridimensional
5	Interpretar relaciones matemáticas	Reconocimiento del complemento, razonamiento lógico deductivo, flexibilidad en el pensamiento	Operaciones básicas	Identificar el complemento de cada relación
6	Razonamiento “hacia atrás”	Cálculos numéricos y pensamiento algebraico	Operaciones básicas	Identificar el camino “hacia atrás” para la solución.

Figura 3.1 Descripción de Problemas

3.2.1.1 Selección de estudiantes y aplicación del cuestionario 1

Los sujetos a los que están dirigidos los cuestionarios son alumnos de quinto y sexto grado de Primaria (10 a 12 años). La primera aplicación del cuestionario se realizó a alumnos de en una escuela particular ubicada la ciudad de Hermosillo, Sonora.

A los estudiantes se les indicó que contaban máximo con 45 minutos para resolver el cuestionario, en las indicaciones escritas se especificaba el uso exclusivo de pluma y se les pedía que dejaran los procedimientos y operaciones que necesitaron para resolver cada problema, además el aplicador leía esta información a todos los grupos.

Cada una de las preguntas fue leída por parte del aplicador, además antes de comenzar se les hicieron las siguientes preguntas y aclaraciones a todos los grupos participantes, con el fin de incorporarlos a la actividad y de poder ayudar en la comprensión del texto, ya que como sabemos son problemas no tradicionales en su clases.

Problema 1

Preguntas: "¿Cuántas figuras hay dibujadas? ¿Cuántos cuadrados se necesitaron para construir la figura que ocupa el lugar uno? ¿Cuántos cuadrados se necesitaron para construir la figura que ocupa el lugar dos? ¿Cuántos se necesitarán para construir la figura que ocupa el lugar quince?

Aclaraciones de redacción: en lugar de "la siguientes figuras" es "las siguientes figuras".

Problema 2

Sin preguntas o aclaraciones, se asume que el problema es suficientemente claro en su redacción.

Problema 3

Sin preguntas o aclaraciones, se asume que el problema es suficientemente claro en su redacción.

Problema 4

Preguntas: (Tomando un objeto de su aula) "Si ésta es la vista de frente, ¿cuál sería la vista de arriba? y ¿cuál sería la vista lateral?"

Problema 5

Sin preguntas o aclaraciones, se asume que el problema es suficientemente claro en su redacción.

Problema 6

Preguntas: "Al número que estoy pensando le sumé 2 y me dio de resultado 5, ¿qué número estoy pensando?"

Aclaraciones: Tachar ~~"¿Cuánto suman las cifras del número que había pensado?~~" y escribir "¿En cuál número estoy pensando?

Posteriormente, se les pide que a pesar de que el examen no tendrá una repercusión en su calificación, realicen su cuestionario de la mejor forma posible para poder formar parte del Club de Matemáticas que su escuela ofrecía.

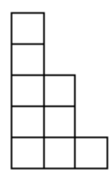
3.2.1.2 Diseño de baremo

Con fines de ponderar los procesos de resolución, se elaboró un baremo para cada problema, donde en términos generales se le asignó al estudiante: 1 punto si entendió el problema, 2 puntos si planteó alguna estrategia, 3 puntos si la respuesta es correcta y un punto extra si el estudiante mostró alguna "idea brillante", con lo que nos referimos a ciertas respuestas que resaltan la creatividad y originalidad en el alumno.

A continuación presentaremos el baremo diseñado para el primer cuestionario.

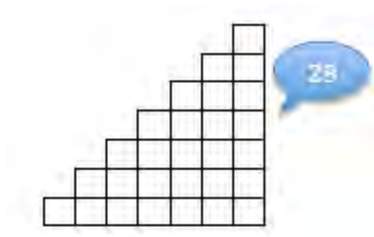
(0 puntos): Si su respuesta denota que no le entendió al problema.

a) Si deja en blanco el problema.
b) Si escribe una respuesta numérica errónea sin justificación, esquemas, dibujos, etc.
c) Si presenta un dibujo de una figura simétrica o figuras que no cumplen con el patrón, como la siguiente:



(1 punto): Si su respuesta denota que tiene claro el problema.

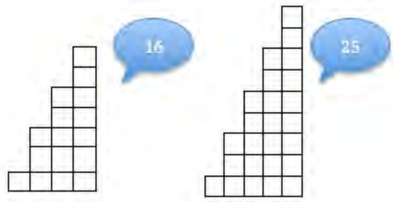
a) Si se nota un conteo de los cuadrados, por lo menos las tres primeras figuras.
b) Si intenta dibujar o contar los cuadrados de la cuarta figura, pero ésta no corresponde con el patrón.



a) Hace lo que se menciona en a) y b).

(2 puntos): Si se observa una estrategia planteada para solucionar el problema, entiende las relaciones internas del problema.

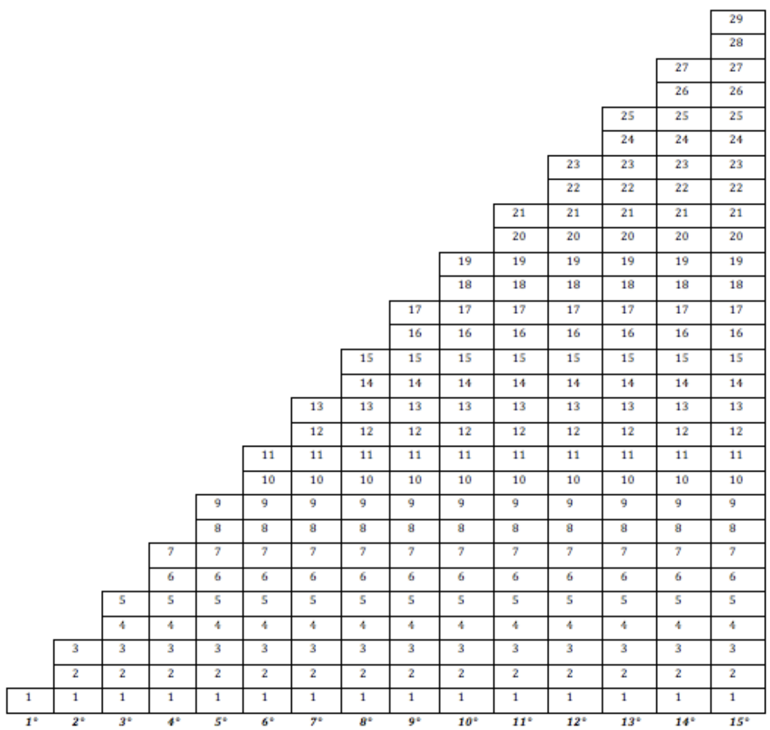
a) Si dibuja y/o cuenta los cuadros de algunas figuras que no se muestran en el problema, por ejemplo:



b) Si intenta plantear alguna relación numérica entre el número de la figura y el número de cuadrados que contiene.
c) Si realiza alguna combinación de las anteriores.

(3 puntos): Si resuelve correctamente el problema.

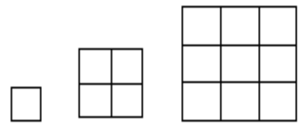
a) Si en algún momento de su respuesta especifica se necesitarían 225 cuadrados (identificó el patrón).
b) Si logra dibujar una figura como la siguiente (puede no contener la numeración).



c) Si realiza alguna combinación de las anteriores.

(Punto extra): Si su respuesta denota una economía en su pensamiento, un razonamiento estratégico mediante una respuesta compacta.

a) Si se muestra que logra identificar el patrón n^2 (n x n), donde se tiene que $15^2=225$.
b) Si hace una reconfiguración de las figuras de la siguiente forma:



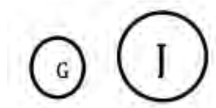
Problema 2

(0 puntos): Si su respuesta denota que no le entendió al problema.

a) Si deja el problema en blanco.
b) Si propone un resultado erróneo sin que se muestre cómo llego a éste.

(1 punto): Si su respuesta denota que tiene claro el problema.

a) Si el dibujo o representación no refleja las relaciones verdaderas del problema entre las estaturas, responde por ejemplo:



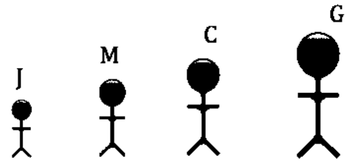
(2 puntos): Si responde bien parcialmente o si se nota que entiende las relaciones lógicas del problema.

a) Si identifica, sin el uso de figuras, al más bajo o al más alto pero no ambos. Intenta algún tipo de ordenación pero no la completa.
b) Si ordena figuras para representar personas con distintas estaturas (sin lograr la respuesta correcta) por ejemplo:

c) Si intenta ordenar un conjunto de cuatro números que representen las distintas estaturas.

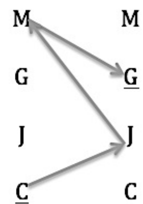
(3 puntos): Si resuelve correctamente el problema.

a) Escribiendo solamente: Carlos el más pequeño y Gerardo el más alto.
b) Si realiza un esquema o dibujo donde se logra el resultado correcto.



(Punto extra): Si su respuesta denota su razonamiento lógico, sistemático y creativo.

a) Si resuelve el problema de una manera abstracta, incluyendo las relaciones en un mismo esquema, como por ejemplo:



Problema 3

(0 puntos): Si su respuesta denota que no le entendió al problema.

a) Si deja en blanco el problema.
b) Si escribe una respuesta numérica errónea sin justificación, esquemas, dibujos, etc., por ejemplo:

$$40 + 32 = 72$$

(1 punto): Si su respuesta denota que tiene claro el problema pero no identifica sus relaciones internas.

a) Si supone que los 40 minutos de trayecto se dividen en partes iguales entre ir en elefante o ir caminando (20 minutos para cada uno).
b) Si determina que hubiera tardado más tiempo en ir caminando ambos trayectos, sin dar el resultado a su afirmación.

(2 puntos): Si se nota una estrategia planteada para solucionar el problema.

a) Si detectó que tarda 8 minutos menos en un trayecto en elefante que en uno caminando.

$$40 – 32 = 8$$

a) Si encontró que un recorrido en elefante tarda 16 minutos.

$$32/2 = 16$$

b) Si realizó un dibujo, esquema o tabla donde se representan los trayectos y su demora en cada uno (siendo éste incorrecto en alguna relación).

Caminando	20	Elefante	20	= 40
Elefante	16	Elefante	16	= 32
Caminando	20	Caminando	20	= 40

(3 puntos): Si resolvió correctamente el problema.

a) Si explica que tarda 48 minutos en ir caminando ambos trayectos.
b) Si explica que hubiese tardado 8 minutos más caminando ambos trayectos que en ir caminando y en elefante.

(Punto extra): Si su procedimiento para obtener la solución denota creatividad e ingenio.

a) Si hace una representación donde combine las relaciones, como la siguiente:

	Caminando	Elefante
Caminando	#	40
Elefante	40	32
Diferencia entre caminos	8	8

Entonces # - 40 = 8, por lo tanto # = 48

Problema 4

(0 puntos): Si no entiende el problema.

a) Si deja en blanco el problema.
b) Si no tiene un pensamiento espacial claro, por ejemplo: cuenta 21 cubos porque considera que es un problema en el plano.

(1 punto): Si presenta alguna estrategia de resolución sin tener una respuesta satisfactoria.

a) Si intenta dibujar la figura tridimensional, pero lo hace mal y no ofrece una respuesta numérica.

(2 puntos): Si tiene clara la percepción en dos vistas.

a) Si en su respuesta se muestra que faltó establecer la vista de arriba o la lateral, por ejemplo, contó 13 u 11 cubos.

(3 puntos): Si resolvió correctamente el problema.

a) Si se muestra que contó 12 cubos.

(Punto extra): Si se observan evidencias gráficas de la traducción a tres dimensiones.

a) Si dibuja correctamente la figura tridimensional.

Problema 5

(0 puntos): Si no entendió el problema.

a) Si deja el problema en blanco.
b) Si propone un resultado erróneo sin que se muestre cómo llego a éste.

(1 punto): Si encuentra cuantas bolas verdes o amarillas había, pero no ambas. Por ejemplo:

a) Como 17 no son verdes, entonces 20 – 17 = 3 son verdes
b) Como 12 no son amarillas, entonces 20 - 12 = 8 son amarillas.

(2 puntos): Si obtiene una respuesta como la siguiente pero no concluye el problema.

a) Si identifica 3 bolas verdes, 8 amarillas y 5 rojas pero no concluyó.

(3 puntos): Si resuelve correctamente el problema.

a) Si identifica que hay 3 bolas verdes, 8 amarillas, 5 rojas y por lo tanto **20 – 8 – 3 – 5 = 20 - 16 = 4** bolas azules.
b) Si dibuja las bolas identificándolas por colores.

(Punto extra): Si utiliza una estrategia de resolución original y creativa.

a) Si logra sistematizar la información, como se muestra en la tabla siguiente:

	Verde	Azul	Amarilla	Roja
1	X		X	SI
2	X		X	SI
3	X		X	SI
4	X		X	SI
5	X		X	SI
6	X		X	
7	X		X	
8	X		X	
9	X		X	
10	X		X	
11	X		X	
12	X		X	
13	X		SI	
14	X		SI	
15	X		SI	
16	X		SI	
17	X		SI	
18	SI		SI	
19	SI		SI	
20	SI		SI	
T	**3**	**20-8-3-5=4**	**8**	**5**

Problema 6

(0 puntos): Si su respuesta denota que no entiende el problema.

a) Si deja en blanco el problema.
b) Si escribe una respuesta numérica errónea sin justificación, esquemas, dibujos,

etc.

(1 punto): Si su procedimiento muestra que si entendió el problema.

a) Si realiza operaciones como dividir entre 2 o sumar 23.
b) Si intenta proponer números que cumplan con las relaciones.

(2 puntos): Si identifica por lo menos una de las dos relaciones.

a) Si confunde una de las relaciones: 123-23 = 100, entonces 100/2 = 50
b) Si identifica que debía sumar 123 + 23 = 146, pero no concluyó la siguiente.
c) Si aproxima la respuesta por "tanteo sistemático" sin llegar al resultado correcto.

(3 puntos): Si resuelve correctamente el problema.

a) Si se observa un razonamiento "hacia atrás" como el siguiente:

$$123+23=146, \text{ entonces } 146/2 = 73$$

b) Si resuelve el problema no estrictamente "hacia atrás":

$$73*2 = 146, 146-23 = 123$$

(Punto extra): Si denota habilidad para cambiar del razonamiento directo al razonamiento "hacia atrás" ó habilidad para plantear las relaciones matemáticas de una manera sistemática, expresando una ecuación.

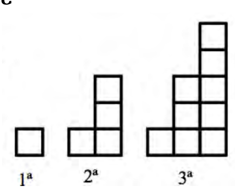
a) $2(x) - 23 = 123$
b) $2 \_\_\_ - 23 = 123$

3.2.2 Segundo cuestionario

Después de la revisión de las producciones de los estudiantes en el cuestionario 1, se realizaron las siguientes modificaciones: se eliminaron los problemas 2 y 3, se corrigió la ortografía del problema 1 y se modificó la pregunta del problema 6. El cuestionario quedó de la siguiente forma.

Problema 1

Observa las siguientes figuras. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 15?

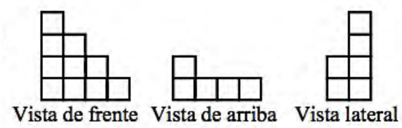


Problema 2

Supongamos que escribo los números del 1 al 999. ¿Cuántas veces habré escrito el número 1?

Problema 3

Hemos construido una figura con cubos iguales. ¿Cuántos cubos hemos utilizado si las vistas de la figura son éstas?



Problema 4

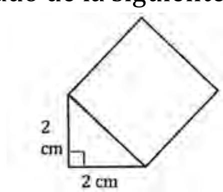
Pedro tiene 20 bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. 17 no son verdes, 5 son rojas y 12 no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

Problema 5

Al doble del número que estoy pensando le he restado 23 unidades y he obtenido como resultado 123, ¿en cuál número estoy pensando?

Problema 6

Encuentra el área del cuadrado de la siguiente figura.



La Figura 3.2 muestra las características de los problemas incorporados en este segundo cuestionario.

Prob	Habilidad principal	Habilidades secundarias	Conocimientos necesarios	Reto cognitivo
2	La habilidad para pensar en estructuras reducidas	Habilidad para pensar en forma creativa y agilidad y economía en el pensamiento	Conteo de números naturales	Elección de una forma de conteo conveniente
6	Flexibilidad en el pensamiento	Visualización y habilidad para reconfigurar a problemas más simples	Conceptos geométricos: ángulos, áreas. Conocimiento de la fórmula del área del triángulo. Operaciones básicas	Aditividad del área.

Figura 3. 2 Descripción de problemas nuevos 2 y 6

3.2.2.1 Selección de estudiantes y aplicación del segundo cuestionario

Este cuestionario se aplicó en una escuela primaria pública en la ciudad de Hermosillo en el estado de Sonora a 128 alumnos de 5to y 6to. El proceso fue muy similar al del primer cuestionario, pero para mayor claridad del lector se expondrán las preguntas y aclaraciones de cada uno de los problemas.

Problema 1

Preguntas: “¿Cuántas figuras hay dibujadas? ¿Cuántos cuadrados se necesitaron para construir la figura que ocupa el lugar uno? ¿Cuántos cuadrados se necesitaron para construir la figura que ocupa el lugar dos? ¿Cuántos se necesitarán para construir la figura que ocupa el lugar quince?

Problema 2
Preguntas: “¿Cuántos dígitos 1 habrá si escribo los números del 1 al 10? ¿Y si los escribo del 1 al 11?”
Aclaraciones: Se deben contar los uno de las unidades, de las decenas y de las centenas.

Problema 3
Preguntas: (Tomando un objeto de su aula) “Si ésta es la vista de frente, ¿cuál sería la vista de arriba? y ¿cuál sería la vista lateral?”

Problema 4
Sin preguntas o aclaraciones, se asume que el problema es suficientemente claro en su redacción.

Problema 5
Sin preguntas o aclaraciones, se asume que el problema es suficientemente claro en su redacción.

Problema 6
Aclaraciones: El problema se refiere a obtener el área del cuadrado grande, no del pequeño, ese se refiere a que ese triángulo tiene un ángulo recto.

Posteriormente, se les pide que hagan su mejor esfuerzo para resolverlo y que no copien, ya que a las mejores calificaciones se les aplicará una entrevista para saber cómo resolvieron cada problema.

3.2.2.2 Diseño de baremo para los problemas modificados

Problema 2

(0 puntos): Si su respuesta no muestra ninguna estrategia para llegar a la solución.

a) Si deja la respuesta en blanco
b) Si escribe un número incorrecto sin dejar evidencia de que entendió el problema.
c) Si intenta escribir la numeración 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 … sin concluir nada al respecto.

(1 punto): Si su respuesta denota que tiene claro el problema e intenta estrategias primitivas para resolverlo.

a) Si escribe una secuencia, donde se muestren las veces que aparece el dígito 1 en las unidades de cada número, sin importar que logre llegar a la conclusión correcta (100 dígitos 1 en las unidades).

1,11, 21,31,41,51,61,71,81, 91,101, 111, 121, … ,991

b) Si escribe una secuencia, donde se muestren las veces que aparece el dígito 1 en las decenas de cada número, sin importar que logre llegar a la conclusión correcta (100 dígitos 1 en las decenas).

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,17,18, 19, 110, …, 119, 210, …, 219, … , 910, …, 919.

c) Si escribe una secuencia, donde se muestren las veces que aparece el dígito 1 en las decenas de cada número, sin importar que logre llegar a la conclusión correcta (100 dígitos 1 en las centenas).

100, 101, 102, 103, 104, 105, …, 199

d) Si realiza una combinación de las anteriores, de nuevo sin llegar a la conclusión correcta.

(2 puntos): Si se observa un ordenamiento para encontrar la solución, muestra una estrategia económica para resolver el problema.

a) Si muestra un ordenamiento para encontrar la solución parcial, números que en su unidad tienen el número 1 (sin tener la necesidad de llenar toda la tabla número por número).

1	101	201	301	401	501	601	701	801	901
11	111	211							
21	121	221							
31	131	231							
41	141	241							
51	151	251							
61	161	261							
71	171	271							
81	181	281							
91	191	291	391	491	591	691	791	891	991

b) Si muestra un ordenamiento para encontrar la solución parcial, números que en su decena tienen el número 1 (sin tener la necesidad de llenar toda la tabla anterior).

c) Si muestra una lista, tabla o algún otro ordenamiento donde separa los números que tienen un solo dígito 1, los números que tienen 2 dígitos 1, y el 111 (único número que tiene 3 dígitos 1).

1) 1,10, 12,13,14, 15,16,17,18,19,21, 31,41,51,61,71,81,91,100, …
2) 11,101,110, 112,113,114,115,116,117,118,119, 121, 131, 141, 151, 161, 171,181,191,211, 311, …
3) 111

d) Si realiza alguna combinación de las anteriores.

(3 puntos): Si resuelve correctamente el problema.

a) Si en algún momento de su respuesta especificó que se habrá escrito 300 veces el número 1.
b) Si logra establecer un ordenamiento donde se muestre que localizó todas las opciones posibles de localizar el número 1 en la lista (se admiten soluciones aproximadas a la solución, siempre y cuando sean aritméticas o de conteo), por ejemplo: muestra un ordenamiento donde cuenta todas las veces que aparece el dígito 1 en las unidades, otra para el 1 en las decenas y otra para el 1 en las centenas y su resultado final es: 295.
c) Si logra establecer un ordenamiento donde se muestre que encontró todos los números que contengan una vez al número 1 (243), todos los números que contengan dos veces al número 1 (27) y el 111.

(Punto extra): Si utiliza una estrategia de resolución económica, lógica y creativa.

a) Si resuelve el problema por combinaciones (estrategia que da posibilidad a generalizar números mayores).

Posición 1	Posición 2	Posición 3

a. Hay 3 posiciones donde podemos colocar al dígito 1 y en las otras dos posiciones restantes podremos colocar 9 dígitos distintos: 0,2,3,4,5,6,7,8 y 9. Por lo tanto tenemos que 3 x 9 x 9 = 243.
b. Hay 3 posiciones donde podemos colocar 2 dígitos 1, en la otra posición podremos colocar 9 dígitos distintos: 0,2,3,4,5,6,7,8 y 9. Por lo tanto tenemos que 3 x 2 x 9 = 54.
c. Colocar 3 dígitos 1 en tres casillas. 3 x 1 = 3.

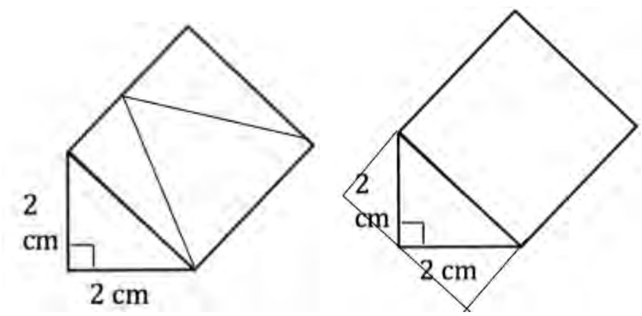
Por lo tanto, tenemos que: 243 + 54 + 3 = 300.

Problema 6

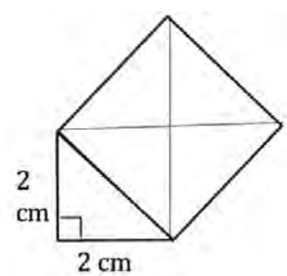
(0 puntos): Si su respuesta no muestra ninguna estrategia para llegar a la solución.

a) Deja la respuesta en blanco
b) Escribe una respuesta numérica errónea sin justificación o dibujos que muestren una estrategia de resolución clara, por ejemplo 4 cm^2.

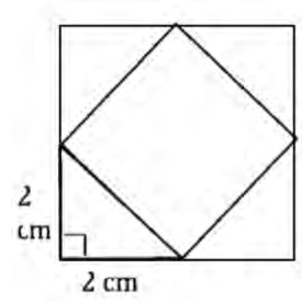
(1 punto): Si presenta alguna estrategia de resolución sin tener una respuesta satisfactoria.
a) Si logra identificar que un lado del cuadrado es mayor a 2 y/o trata de medir la figura por algún método para llegar al resultado. Por ejemplo: 2.5 x 2.5 = 6.25
b) Si intenta hacer una reconfiguración de la figura sin lograr un resultado, por ejemplo:



(2 puntos): Si se nota una estrategia planteada relevante y concreta para solucionar el problema.
a) Si hace la siguiente reconfiguración sin tener un resultado numérico correcto.



b) Si hace la siguiente reconfiguración sin tener un resultado numérico correcto y/o identifica que el área del cuadrado mayor es igual a 16.



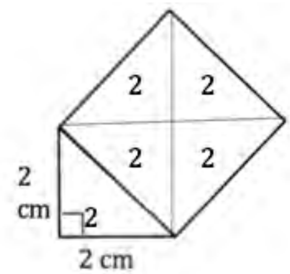
c) Si realiza alguna combinación de las anteriores.

d) Si identifica que el área del triángulo es 4 cm^2.

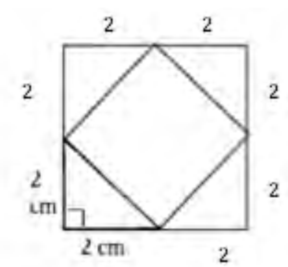
(3 puntos): Si resuelve correctamente el problema.

a) Si en algún momento de su solución menciona que el área es igual a 8 cm^2.

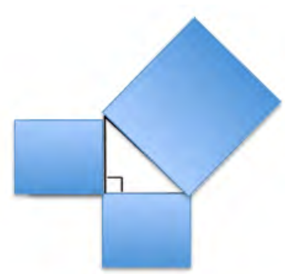
b) Si dibuja y escribe una solución parecida a la siguiente.



a) Si muestra que el área del cuadrado interior es un medio del cuadrado interior.



(Punto extra): Si utiliza alguna idea similar al teorema de Pitágoras. A pesar de que esta idea es muy utilizada en las matemáticas, los alumnos de 5to y 6to aun no la conocen, por lo cual la idea se considera como creativa.



3.2.3 Tercer cuestionario

De acuerdo a los resultados arrojados en el cuestionario 2, se decidió cambiar el problema 6 por el siguiente.

Problema 6
El rectángulo de la figura ha sido cuadriculado y luego se ha sombreado una parte. ¿Qué fracción de este rectángulo ha sido sombreada?

Prob	Habilidad principal	Habilidades secundarias	Conocimientos necesarios	Reto cognitivo
6	Flexibilidad en el pensamiento y Visualización	Habilidad para reconfigurar a problemas más simples. Percepción Visual	Conocimiento y manejo de fracciones.	Identificar las áreas que están divididas a la mitad y contar las mitades.

Figura 3.3 Descripción problema nuevo 6

3.2.3.1 Selección de estudiantes y aplicación del tercer cuestionario

Este cuestionario se aplicó en una escuela primaria pública en la ciudad de Hermosillo, Sonora a 75 alumnos de 5to y 6to. El proceso fue muy similar al del primer y segundo cuestionario, en este caso solo se realizó un cambio, el del sexto problema que mencionamos anteriormente. Las instrucciones fueron leídas de igual manera que en el segundo cuestionario por el aplicador y el sexto problema no tuvo especificaciones adicionales.

3.2.3.2 Diseño del baremo para el problema modificado

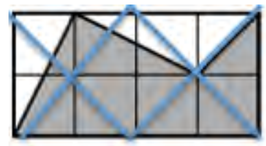
Problema 6

(0 puntos): Si su respuesta no muestra ninguna estrategia para llegar a la solución.

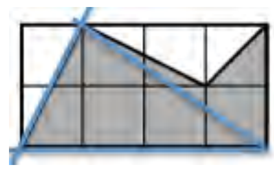
a) Si deja la respuesta en blanco
b) Si escribe un número incorrecto sin dejar evidencia de que entendió el problema.
c) Si hay alguna evidencia de que contó como unidad los cuadrados que tienen solo una parte sombreada.

(1 punto): Si presenta alguna estrategia de resolución sin tener una respuesta satisfactoria.

a) Si intenta partir cada cuadrado en cuatro partes.

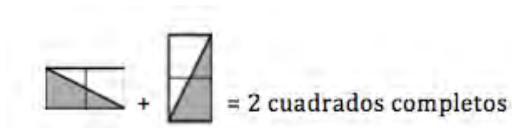


b) Si intenta construir uno o varios triángulos con las partes para después calcular sus áreas



(2 puntos): Si se nota una estrategia planteada relevante y concreta para solucionar el problema.

a) Si existe algún rastro de que logra identificar que las siguientes partes forman dos cuadrados completos.



b) Si identifica 5 cuadrados sombreados, de tal manera que su respuesta escrita es 5/8.

(3 puntos): Si logra identificar los cinco cuadrados y medio sombreados.

a) Si existe rastro escrito de que el resultado es 11/16 o cualquier equivalencia a éste número.
b) Si escribe 5.5/8 en su resultado.
c) Si escribe cinco cuadrados y medio o 5½ cuadrados en su respuesta, sin especificar que son de un total de ocho cuadrados.

3.3 Entrevistas

3.3.1 Objetivos de las entrevistas

Las entrevistas tienen como principal objetivo indagar más acerca de las habilidades que tienen más desarrolladas los niños entrevistados e identificar cuáles habilidades tienen en un nivel de desarrollo bajo para después, dentro del programa de atención, agruparlos de acuerdo a sus necesidades. Por ejemplo, los niños que presenten deficiencias en la percepción espacial serán agrupados para poder recibir la atención necesaria en esa área en específico.

Otro objetivo es completar las respuestas de cada estudiante, si se tuviera alguna duda o aclaración esta es una oportunidad para que se clarifique el proceso de resolución de algún o algunos problemas. Es importante además, observar durante cada entrevista el nivel de desarrollo que pueden llegar los alumnos con la ayuda del maestro aplicador, es decir observación del talento potencial de los estudiantes.

Por otro lado, las entrevistas nos ayudarán a validar el cuestionario diseñado, descubrir si realmente los niños que obtuvieron las mejores calificaciones son matemáticamente talentosos y de ser así proponerlos como participantes en el programa de intervención.

3.3.2 Diseño de las entrevistas

Las entrevistas están basadas en la hoja de respuestas del alumno, cada problema lo separamos en dos etapas, la primera consiste en preguntas diseñadas para conocer más acerca de las estrategias y habilidades utilizadas en el cuestionario y la segunda en plantear problemas nuevos que se diseñaron con el fin de profundizar más en ciertas habilidades específicas como la generalización.

Así entonces, si el estudiante recibió mínimo tres puntos en el problema:

> Etapa 1: Se le harán una serie de preguntas para profundizar acerca de las habilidades utilizadas para resolver el problema y para responder algunas dudas que se tuvieran sobre las estrategias planteadas durante la revisión de su cuestionario.
>
> Etapa 2: Se le propondrá un problema más complejo dónde pueda poner a prueba la habilidad de la generalización y algunas otras habilidades que se especificarán más detalladamente en la descripción, o un problema que mejore la percepción que tenemos de los estudiantes sobre la habilidad o habilidades mostradas en sus cuestionarios.

Así mismo, si el estudiante recibió menos de tres puntos en el problema:

> Etapa 1: Se le plantearán una serie de variantes sobre el problema para que muestre en qué nivel de desarrollo se encuentra su habilidad y a cuál logra llegar con la ayuda del maestro entrevistador. Además es nuestra intensión, tratar de profundizar en el desarrollo que lo llevaría una conclusión incorrecta para después lograr el razonamiento esperado.
>
> Etapa 2: Se le planteará un problema semejante donde muestre si puede generalizar y llegar a la resolución correcta con la misma habilidad mostrada

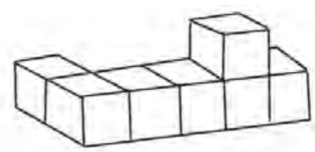
anteriormente.

Para ejemplificar se muestra aquí la entrevista de la segunda aplicación diseñada para la estudiante que llamaremos aquí Carmen.

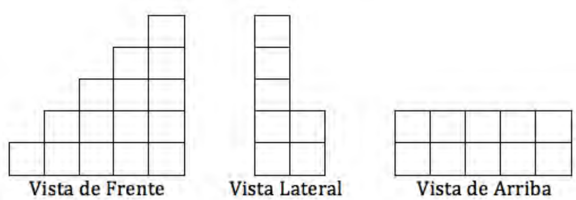
Problema 1
1.- ¿Qué cosas recuerdas de este problema?
2.- ¿Qué cambia de una figura a otra?
3.- Dibuja la 4ta figura.
4.- ¿Cómo se vería la figura 15va?
5.- Intenta resolver de nuevo el problema.
6.- ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 100?
7.- ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar n?

Problema 2
1.- ¿Cómo llegaste a que eran 300 veces?
2.- ¿Cuántos números del 1 al 1000 hay que terminan en 2?

Problema 3
1.- ¿Cómo hiciste para resolverlo?
2.- Dibuja las tres vistas (lateral, frente, arriba) que tiene la siguiente figura



3.- Hemos construido un arreglo de con cubos iguales, éstas son sus vistas

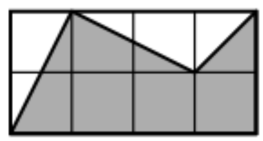


a) ¿Cuántos cubos hemos utilizado para construir la figura?
b) ¿Sólo existe esa figura para esas vistas?
c) ¿Habrá otros arreglos de cubos que tengan las mismas vistas del problema anterior, pero un número diferente de cubos?
Nota: Uso de cubos de madera como material de apoyo.
d) ¿Cuáles otros puedes encontrar?

Problema 4
1.- ¿Cómo lo resolviste?
2.- Tengo 10 canicas, azules y rojas. Si 15 de ellas no son azules, ¿cuántas canicas rojas tengo en total?
3.- Tengo 10 canicas rojas, azules y verdes y cuatro de ellas no son rojas.
a) ¿Cuántas canicas rojas hay?
b) ¿Cuántas canicas azules hay?

3.- Tengo 27 monedas en mi bolsillo que en total suman $100 pesos, adivina cuántas hay de $1, $2, $5 y $10 pesos, si 10 monedas no son ni de $5 ni de $10, y 20 monedas no son ni de $5 ni de $2.

Problema 5
1.- ¿Cómo hiciste para resolver el problema?
2.- Al triple del número que estoy pensando le he sumado 5 y he obtenido como resultado 50, ¿en cuál número estoy pensando?
Problema 6
1.- ¿Cómo hiciste para resolverlo?
2.- ¿Cuál área si puedes conocer de la figura?
3.- ¿De qué sirve conocer esa área?
4.- ¿Cuántas veces cabría el triángulo en el cuadrado?
5.- Intenta resolver el problema de nuevo.
6.- El rectángulo de la figura ha sido cuadriculado y luego se ha sombreado una parte. ¿Qué fracción de este rectángulo ha sido sombreada?



3.3.3 Selección de estudiantes
Después de examinar los cuestionarios y con base en el baremo, se seleccionaron de cada escuela dos o tres alumnos con el mejor puntaje. En la primera aplicación del cuestionario se seleccionaron tres estudiantes que obtuvieron 17 puntos, una alumna de quinto grado y dos de sexto, pero una de ellas no participó por cuestiones personales y ajenas a este trabajo, de la segunda prueba se seleccionaron dos estudiantes de 10 y 9 puntos, uno de quinto grado y una de sexto y de la tercera prueba dos estudiantes con 11 puntos, ambas de sexto grado de primaria.

3.3.4 Procedimiento de aplicación de la entrevista
Cada entrevista difiere una de otra según las respuestas escritas de cada estudiante durante el cuestionario, es de tipo semi-estructurada, ya que se les fueron adecuando preguntas conforme los estudiantes iban proporcionando sus respuestas.

Previo a la entrevista se le especificó a cada estudiante cuál era el objetivo de la misma: profundizar en cuanto a sus estrategias utilizadas para resolver cada problema. Y además, se le mencionó en repetidas ocasiones que en medida de lo posible pensara en voz alta las ideas que se le fueran presentando en el camino, estrategia utilizada por Krutetskii durante sus estudios.

Durante la entrevista, los estudiantes contaban con una copia de su cuestionario para que fuera revisando y recordando sus respuestas, y un cuestionario nuevo que contenía los problemas nuevos de las etapas 1 y 2 mencionadas anteriormente y hojas blancas para desarrollar cualquier solución que pudiera ocupar más espacio.

CAPÍTULO 4
RESULTADOS

En esta sección presentamos los resultados conseguidos a lo largo de nuestra investigación, el análisis de la información y los datos que obtuvimos, cuáles fueron las características generales de los problemas que planteamos en los cuestionarios y en las entrevistas. Y además, mostramos los resultados del desarrollo de las habilidades particulares de los estudiantes entrevistados.

4.1 Aplicación del cuestionario 1

Este primer cuestionario consta de seis problemas los cuales fueron aplicados a 120 niños de 5to y 6to grado de primaria en una escuela privada en la Ciudad de Hermosillo, a finales de septiembre del año 2012.

Al inicio de la sesión se les solicitó que escribieran sus procedimientos y resultados exclusivamente con pluma y sin uso de corrector o borradores. A los estudiantes se les respondían dudas que no fueran propias del problema, sino de conceptos o definiciones de palabras como el caso de "vista de lado".

El cuestionario contenía un máximo de 18 puntos sin contar con los puntos extras, la Figura 4.1 muestra la puntuación del total de los alumnos. En donde tres alumnas de los 120 obtuvieron 17 puntos, y que por cuestiones ajenas al trabajo se logró entrevistar solo a una de ellas.

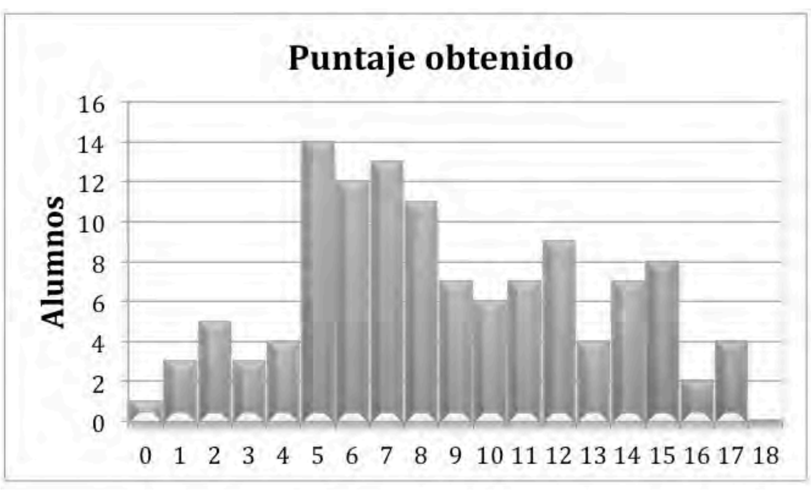


Figura 4.1

En el cuestionario, el problema uno fue resuelto por el 23% de alumnos, el dos por el 78%, el tres por el 39%, el cuatro por el 16%, el cinco por 23% y el seis por el 32%.

De los resultados generales de la aplicación, podemos destacar lo siguiente:

- El problema uno fue el único que resultó con ideas brillantes y los estudiantes dejaron varios rastros sobre las estrategias utilizadas, lo que resultó más favorable para su evaluación con base en el baremo.
- El problema dos fue resuelto por más del 75% de los alumnos, no fue una buena muestra en cuanto al nivel de la habilidad de un niño MT ya que se sospecha que resultó demasiado sencillo para la mayoría de los alumnos.

- El problema tres causó varias dudas y conflictos respecto a la redacción y el planteamiento de las relaciones que intervenían en él, por lo tanto se ha decidido que debe de ser eliminado de la lista.

- Los problemas cuatro, cinco y seis fueron resueltos satisfactoriamente en cuanto a las expectativas planteadas en la metodología.

4.2 Aplicación del cuestionario 2

Este cuestionario fue aplicado en una escuela pública en la ciudad de Hermosillo, a mediados de Febrero del 2013. Participaron 128 alumnos de 5to y 6to grado de Primaria en un tiempo de 30 a 45 minutos.

Las consideraciones fueron similares a las de la primera aplicación. En este cuestionario la estudiante que obtuvo la mayor calificación tuvo 10 puntos. Misma que fue seleccionada para participar en la entrevista posterior.

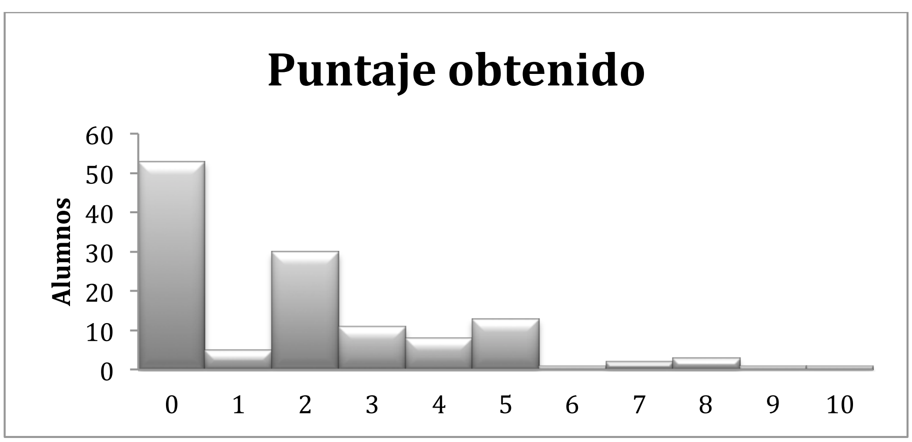


Tabla 4.2

En el cuestionario, el problema uno fue resuelto por el 10% de alumnos, el dos por el

7%, el tres por el 4%, el cuatro por el 5%, el cinco por 3% y el seis por el 2%.

De los resultados generales en la aplicación, podemos destacar lo siguiente:

- El problema uno, dos, tres, cuatro y cinco resultaron favorables para nuestros objetivos.
- El problema seis tuvo muchos conflictos en cuanto al concepto del área y los alumnos confundieron la notación de ángulo recto con un cuadrado pequeño.

4.2 Aplicación del cuestionario 3

Este fue el último cuestionario que aplicamos a mediados de mayo, en la Ciudad de Hermosillo, se le aplicó a 75 estudiantes de 5to y 6to grado de una escuela pública.

Este cuestionario solo se diferencia en una pregunta del cuestionario 2, la máxima puntuación obtenida por dos estudiantes fue de 11 puntos, una de ellas participó en la entrevista que mostraremos posteriormente.

Tabla 4.3

En el cuestionario, el problema uno fue resuelto por el 8% de alumnos, el dos por el 13%, el tres por el 5%, el cuatro por el 6%, el cinco por 2% y el seis por el 5%.

De los resultados generales de la aplicación, podemos destacar lo siguiente:

- El problema dos había sido explicado con anterioridad por la maestra del grado en repetidas ocasiones, algunos estudiantes no realizaron operaciones escritas y cuando se les preguntaba sobre su razonamiento, comentaban que lo habían realizado en la mente. Se considera que es un problema muy difundido y no debería de ser seleccionado para la próxima aplicación.

4.4 Análisis de las entrevistas
Como mencionamos anteriormente, en el diseño de la entrevista, los problemas se han separado en dos categorías y se ha procedido de manera distinta en cada una de ellas:

a) Problemas que reciben mínimo tres puntos.
Etapa 1: Preguntas sobre las estrategias que la estudiante siguió para resolver el problema en el cuestionario.
Etapa 2: Planteamiento de un problema nuevo, relacionado con el que ha resuelto correctamente: la intención aquí es observar si la estudiante tiene habilidades matemáticas más desarrolladas de las que ha mostrado al resolver el problema en cuestión.

b) Problemas que reciben menos de tres puntos .
Etapa 1: Preguntas que nos permitan analizar por qué no se pudo llegar a la solución, sugerencias que la guíen para resolver el problema correctamente y preguntas que nos ayuden a observar su talento potencial.
Etapa 2: Una vez que la estudiante ha podido resolver el problema correctamente se le plantea un problema adicional, muy similar al anterior, donde pueda observarse su habilidad para generalizar el material matemático utilizado en la solución a la que acaba de arribar.

4.4.1 Entrevista Bianca
4.4.1.1 Datos generales de la entrevista
La entrevista a Bianca se realizó dos meses después de haberle aplicado el cuestionario de identificación y tuvo una duración aproximada de 45 minutos, previo a la entrevista se le especificó cuál era el objetivo de la misma: profundizar en cuanto a sus estrategias utilizadas para resolver cada problema, y además que en medida de lo posible pensara en voz alta las ideas que se le fueran presentando en el camino.

4.4.1.2 Descripción de la entrevista
Problema 1.
Etapa 1.

E: ¿Recuerdas el problema?

B: Sí [asintiendo].

E: ¿Cómo supiste que eran 225 cuadrados?

B: Yo vi que en el primero tenía 1, el segundo tenía [contando los cuadrados del segundo caso] 4, y después vi que el tercero tenía [contando los cuadros del tercer caso] 9 cuadrados. Entonces me di cuenta que 1x1 era 1, 2x2 era 4 y 3x3 era 9 entonces yo multipliqué 15x15 y eran 225.

E: ¿Esto lo hiciste antes o después [señalando el dibujo y la suma de la Figura

4.5]?
B: Después.
E: ¿Por qué lo hiciste [señalando el dibujo y la suma de la Figura 4.5]?
B: Para comprobar.

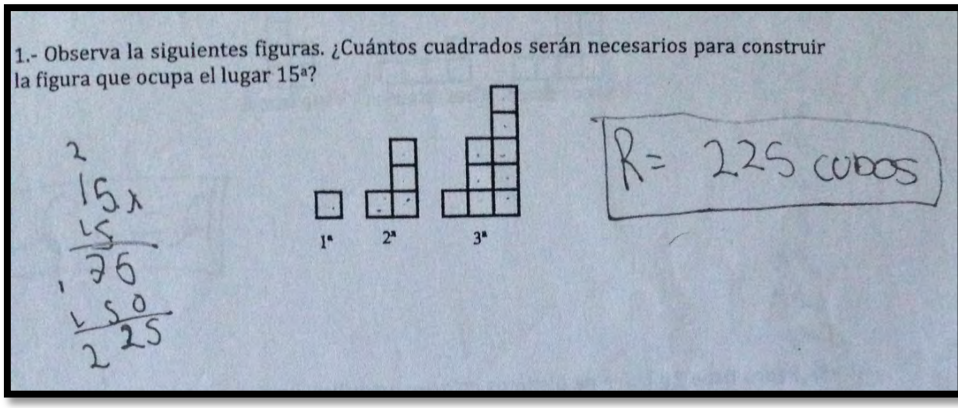
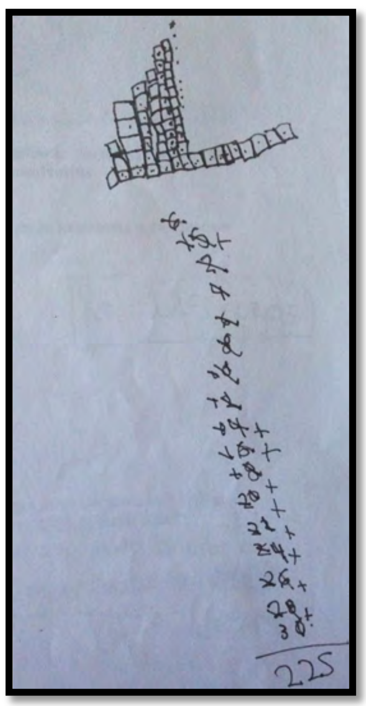


Figura 4.4



6
15
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
225

Figura 4.5

Al preguntar acerca de la suma que aparece en la Figura 4.5, la alumna no recordó que significaban los cálculos que ella había realizado con anterioridad. Aunque se sospecha que estos cálculos tienen como significado: la suma de los 15 cuadrados que tiene la base de la figura completa más la suma de los cuadrados de las siguientes columnas (2,4,6,…,28). Con esto, pasaremos a la Etapa 2 del primer problema.

Etapa 2

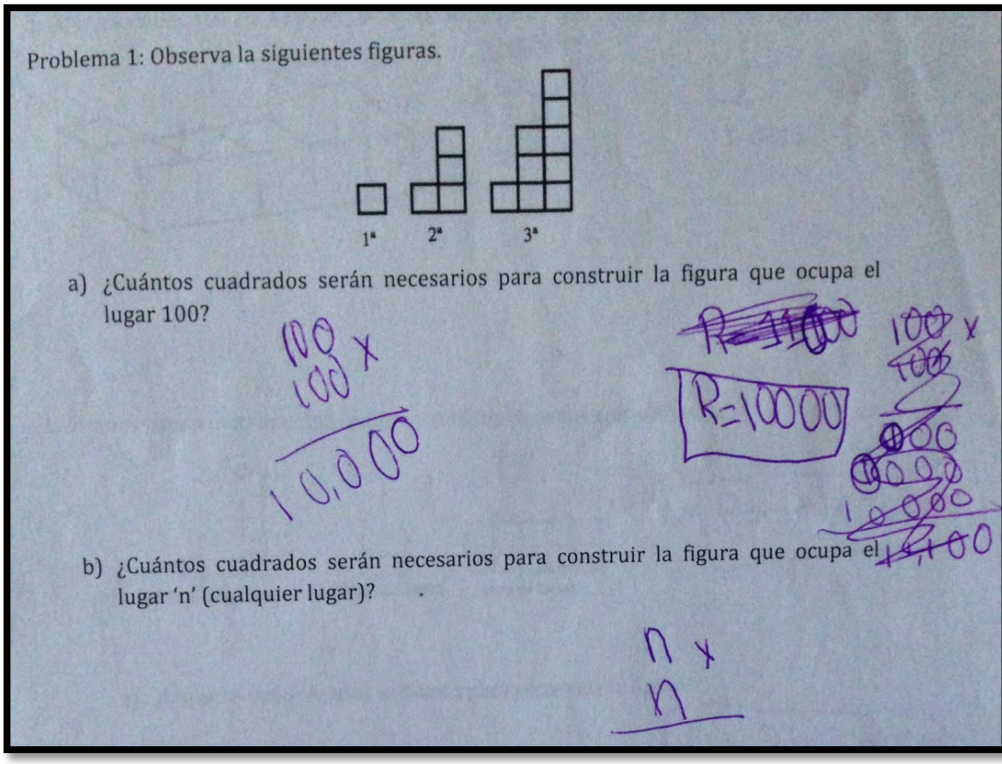


Figura 4.6

La primera reacción de Bianca fue contar los cuadrados de las figuras cuando la Entrevistadora leyó el inciso a de la Figura 4.6, después la Entrevistadora le preguntó si eran las mismas figuras a lo que respondió que sí y comenzó a escribir 100x100, al momento de realizar la operación hizo lo siguiente:

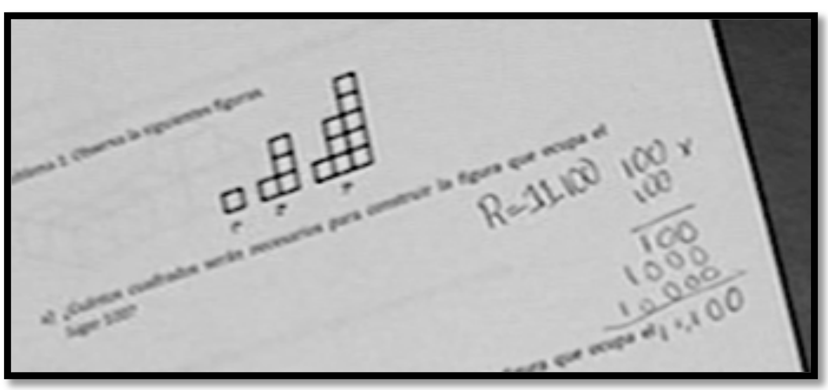


Figura 4.7

Como podemos observar en la Figura 4.7, Bianca en un primer momento, no realizó correctamente el cálculo (100 x 100 no es igual a 11,100) cometiendo un error cómo se muestra en la figura, fue hasta que la Entrevistadora le preguntó: "¿cuánto es 0 por algún número?” que ella corrigió el problema y consiguió realizar correctamente la operación 100 x 100 = 10,000 explicando que solo le agregaría los ceros, sin usar el algoritmo de la multiplicación como aparece en la Figura 4.6.

Tomaremos una parte de la conversación para describir lo ocurrido al momento de preguntarle a Bianca el inciso b.

> E: [Después de leer el inciso b de la Figura 4.6] con ‘n’ me refiero al lugar que sea. Si yo te digo un millón por lo que sea, lo que sea por lo que sea.
> B: pero yo no sé que lugar es.
> E: Pero por ejemplo, si fuera el lugar un millón, ¿cuál sería?
> B: Un millón por un millón.
> E: Por ejemplo, 399,999
> B: Lo tengo que escribir.
> E: No, nada más es un ejemplo.
> B: 399,999 por 399,999
> E: Muy bien, entonces para referirnos a cualquier número, en las matemáticas usamos una letra. ¿Cómo responderías con una letra?
> B: ¿La letra la convierto en un número?
> E: No, la letra significa cualquier número. Entonces, ¿cómo le harías para poner cualquier número con una letra?
> B: Pues yo pienso que la ‘n’ es un número y multiplico n por n.

De esta manera, terminamos con el primer problema.

Problema 2.

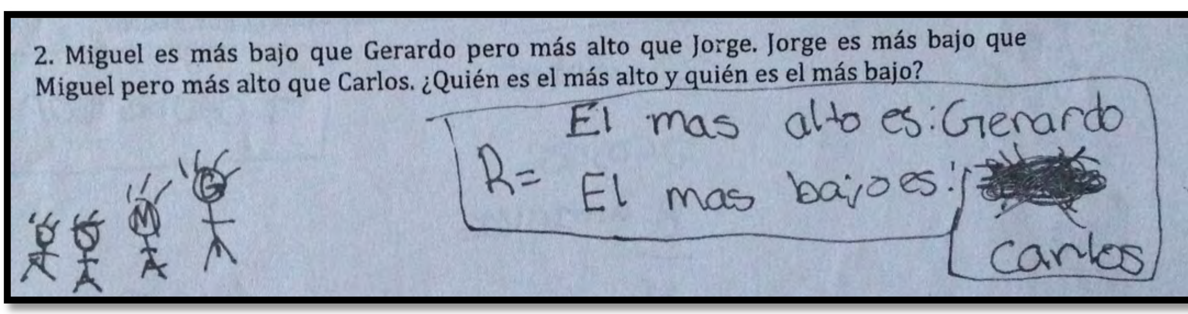


Figura 4.8

Etapa 1.

Cuando se le cuestiona a Bianca sobre cómo resolvió el problema 2 del cuestionario, comienza a realizar los círculos que se observan en la Figura 4.9, escribiendo los dos primeros nombres que aparecen en el enunciado, Miguel y Gerardo espaciadamente, después dibuja el nombre de Jorge en una posición más baja que Miguel y al finalizar a

Carlos al lado izquierdo de Jorge. Al mismo tiempo explica en voz alta el por qué los posiciona de esa forma, obteniendo de nuevo un resultado correcto.

Figura 4.9

Etapa 2

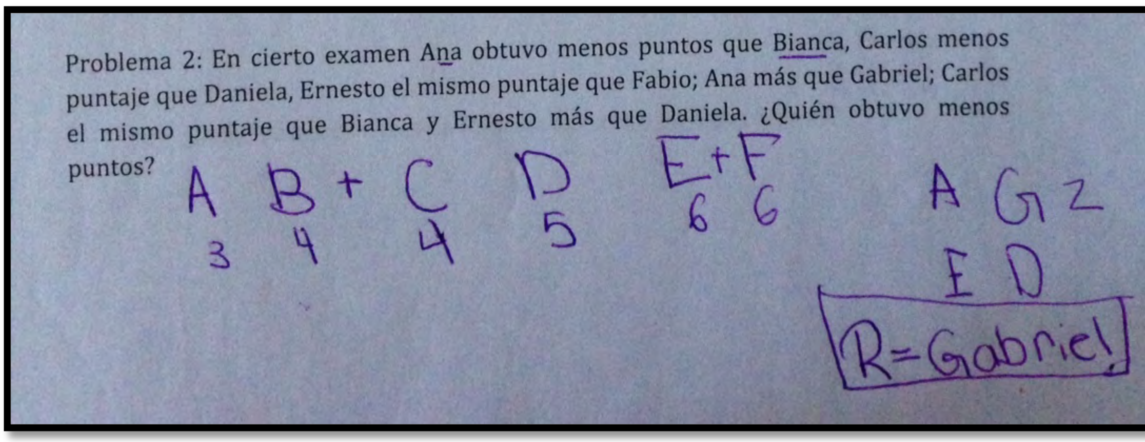


Figura 4.10

> B: [Después de leer el problema] Primero voy a poner todos los nombres [escribe las iniciales que se muestran en la Figura 4.10]. Después podemos poner que Ana tuvo 3 Gabriel 2 y Bianca 4.

Después de ordenar los nombres Bianca fue proponiendo calificaciones que cumplieran con las características de mayor o menor promedio. Para así poder concluir que Gabriel tendría la más baja calificación.

> E: ¿Qué fue lo que hiciste?
> B: Fui poniendo un puntaje.
> E: Pero ahí no decía ningún puntaje.
> B: No, yo solo fui poniendo el puntaje dependiendo de si decía que era más, menos o igual.
> E: Muy bien.

De esta manera se concluye con el problema 2. El problema 3, resuelto correctamente por Bianca, no se tomó en cuenta durante la entrevista ya que la redacción y planteamiento del mismo no fue del todo clara.

Problema 4: Resuelto correctamente en el cuestionario.

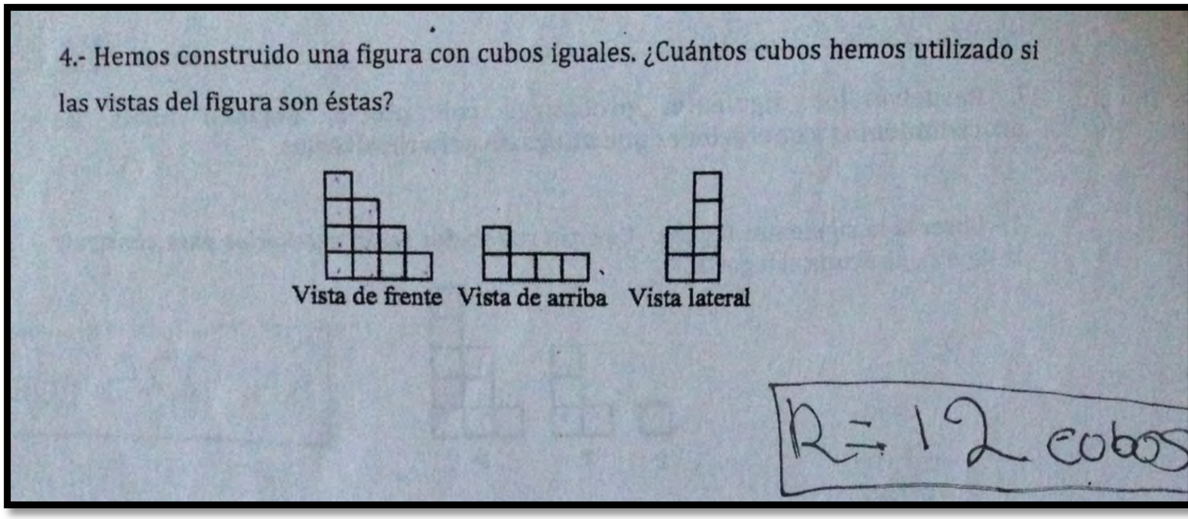


Figura 4.11

Etapa 1.

> E: [Después de que Bianca lee el problema.] ¿Te acuerdas más o menos del problema?
> B: Si.
> E: ¿Cómo lo resolviste?
> B: Yo vi que de frente tenía 10 [después de contar los cuadrados de la vista de frente]. Y como estos son los de arriba yo vi que atrás tiene otro de estos, entonces aquí van 10, entonces 11, 12, 13, 14 [contando la columna izquierda de la vista de frente]. Y la vista lateral me dice que …

En este momento Bianca no logra explicar correctamente su resultado (12 cubos), por el contrario preguntó si su resultado estaba mal ya que contó 14 cubos en ese momento.

> B: ¡Ah! Ya vi, ya vi cómo.
> E: Okey, a ver. ¿Cómo fue?
> B: Entonces yo estaba contando esta hilera [la columna derecha de la vista lateral] y era está [la columna izquierda de la vista de frente]. Entonces era 10 y 11 [contando el cuadrado de arriba de la vista de arriba] y de la vista lateral sería otro de acá [apuntando la vista de frente], entonces fueron 12.
> E: O sea, atrás de esos 10 [refiriéndose a la vista de frente], ¿cuántos hay?
> B: 12.

E: ¿Dónde están? En la vista de arriba, ¿dónde estarían?, ¿los 10 donde están?
B: Aquí [señalando la fila de cuatro cuadros de la vista de arriba].
E: ¿Y los otros dos?
D: Aquí [señalando el cuadro que se encuentra sobre la fila de la vista de arriba]
E: Muy bien.

Etapa 2.

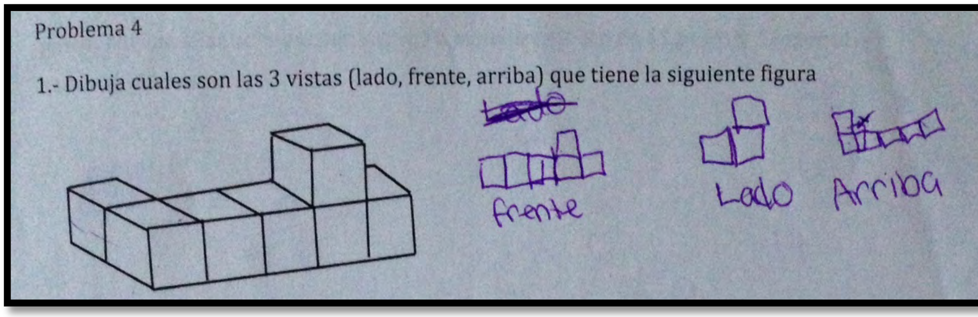


Figura 4.12

En este problema Bianca logró dibujar las vistas sin dificultad (como se muestra en la Figura 4.12), al momento de preguntarle sobre la otra vista lateral, dijo "sólo se cambiaría el cuadrito de arriba para el otro lado". Por lo tanto se continuó con las preguntas de la Figura 4.13.

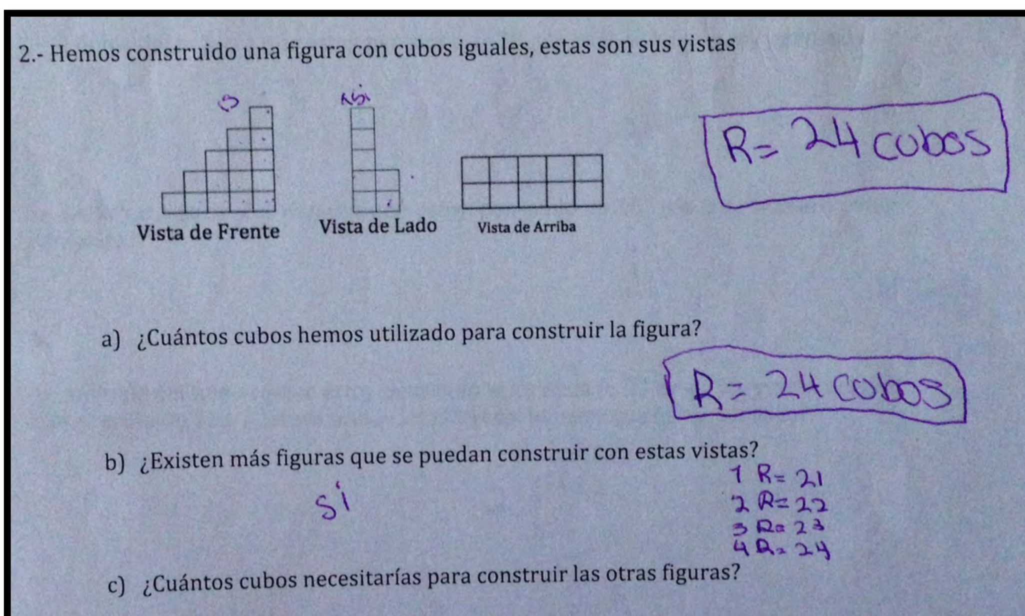


Figura 4.13

La primera reacción de Bianca al leer el inciso a de la Figura 4.13 fue contar los cubos que se observan en la vista de frente (15 cubos). Posteriormente, en la figura de lado señaló la columna de la izquierda afirmando: “estos son los 15”. Después de un minuto, cuando la maestra se percató de que Bianca se encontraba confundida , se refirió a la vista de lado preguntándole:

E: ¿Cuántos cubos hay aquí [señalando la columna de la derecha]?
B: Yo creo que tiene cinco.
E: ¿Cuál?
B: Ésta [señalando el cuadro inferior de la columna de la derecha]?
E: ¿Y la de arriba?
B: Tiene cuatro.
E: Entonces, ¿cuántos tendría en total?
B: Entonces 15, 20, 24, tendría 24. Y estos [señalando la vista de arriba], ya son estos [señalando las otras vistas].

Cuando se le pregunta a Bianca el c de la Figura 4.13, ella responde que es la única respuesta. En vista de su resultado, la Entrevistadora recurrió al material manipulable para ver si podría encontrar las diferentes posible soluciones al problema. Esta imagen muestra su resultado construido con cubos de madera (Figura 4.14).

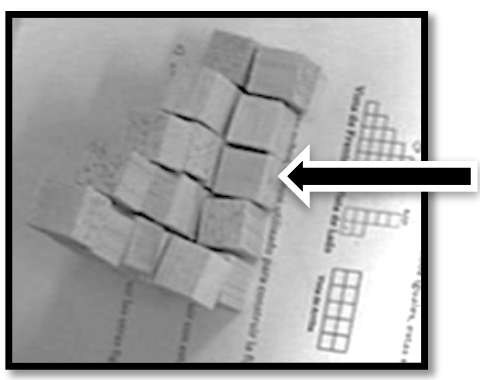


Figura 4.14

Cuando Bianca termina la construcción que aparece en la Figura 4.14 se da la siguiente conversación entre la Entrevistadora y Bianca.

B: Pero yo necesito llenar estos [señalando donde se muestra la flecha].
E: ¿Por qué?
B: Por qué ahí mi indica los que son [señalando la vista de arriba].
E: ¿De lado ya se vería así o no?
B: ¡Ah!, entonces si se podrían más.

E: ¿Cuántos cubos tendrían las otras?

B: 21 (Contando los cubos de uno en uno en repetidas ocasiones].

E: ¿Cuál otra podrías formar [haciendo referencia al c]?

B: Aparte de ésta, también puedo formar una si le quitamos estas[deja la figura como se muestra en la Figura 4.15].

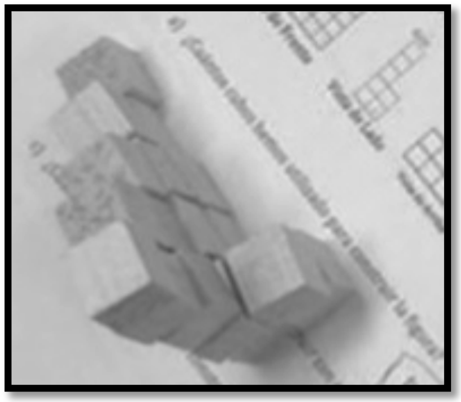


Figura 4.15

Como vemos, la Figura 4.15 no coincide con la vista de arriba, por lo tanto la Entrevistadora pregunta lo siguiente.

E: Si le quito eso, ¿las vistas de arriba coinciden?

B: Ah, es cierto [vuelve a acomodarlas como en la Figura 4.14].

E: Tu ya me dijiste otra por ejemplo, una que tenía 24.

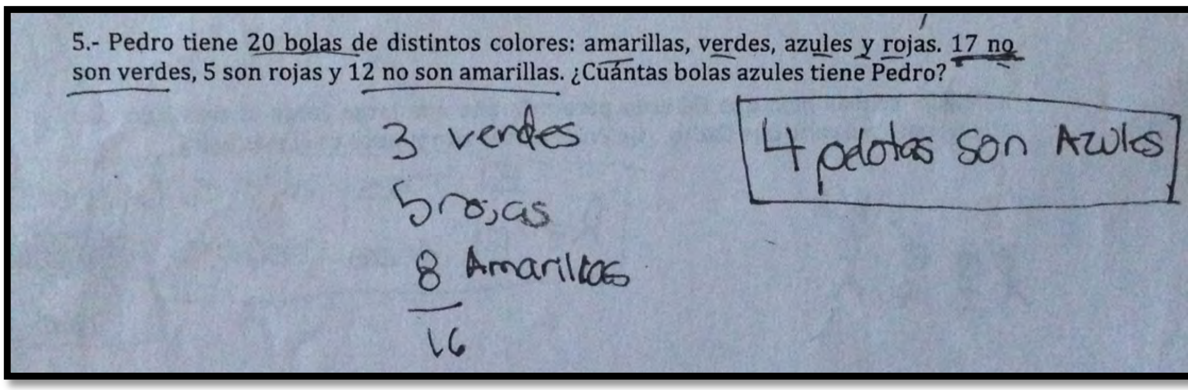
B: Podremos hacer otra que tenga 22 [agregando un cubo como se muestra en la Figura 4.16].

Figura 4.16

E: Otra que tenga, ¿cuántos?
B: Otra que tenga 23 [agrega un cubo más]
E: ¿qué otra?
B: Déjame ver, la del 24.
E: ¿Podrías otra o ya son todas?
B: No, ya serían todas.

La Entrevistadora hace unas aclaraciones sobre ese mismo problema y así termina con el problema 4.

Problema 5.


5.- Pedro tiene 20 bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. 17 no son verdes, 5 son rojas y 12 no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

3 verdes
5 rojas
8 Amarillas
16

4 pelotas son Azules

Figura 4.17

Etapa 1
E: ¿Cómo supiste que eran 4 bolas azules?
B: 17 no son verdes, entonces 3 si son verdes, porqué 17 + 3 son 20. Después 5 son rojas, Si 12 no son amarillas entonces 8 son amarillas.

Al momento de contar las amarillas, utilizó sus dedos para ayudarse a calcular una operación relativamente sencilla 12+___=20, cómo se muestra en la Figura 4.18.

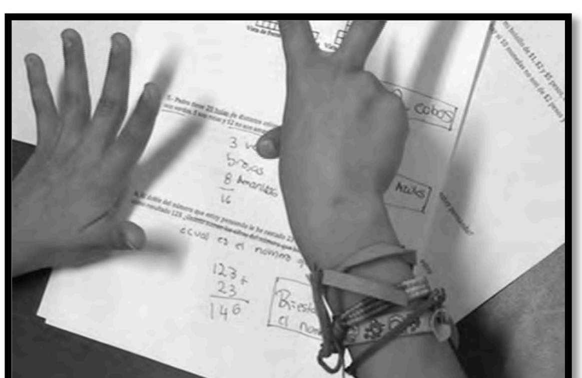


Figura 4.18

B: Entonces, 3 + 5 + 8 son 16 y para llegar al veinte nos faltan 4 bolas.

Etapa 2

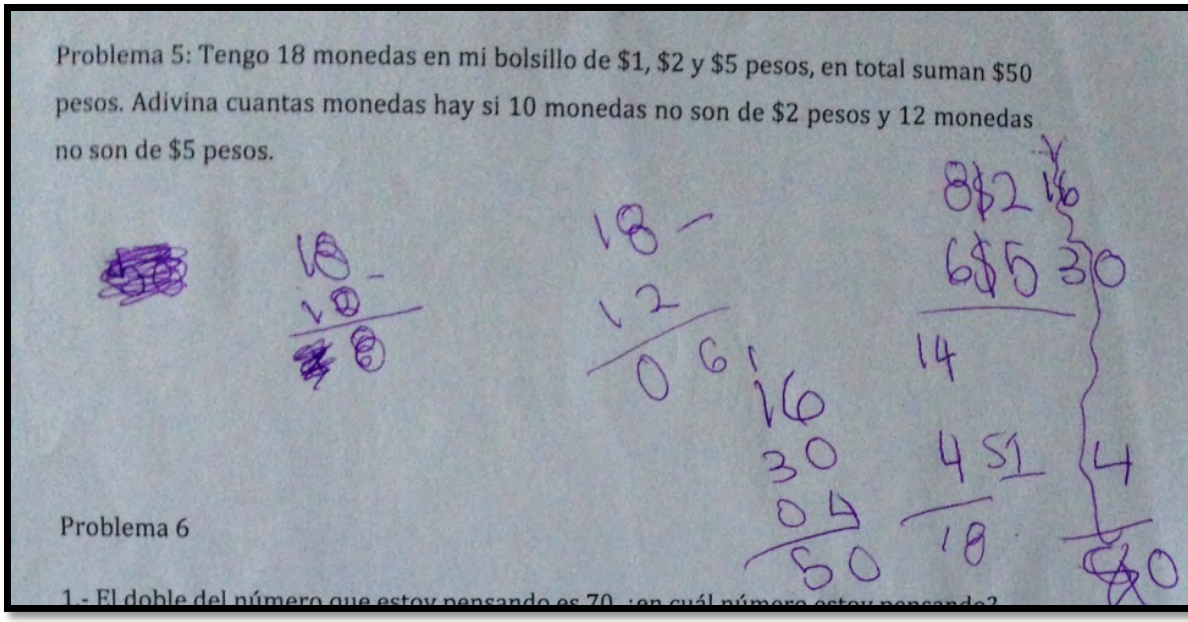


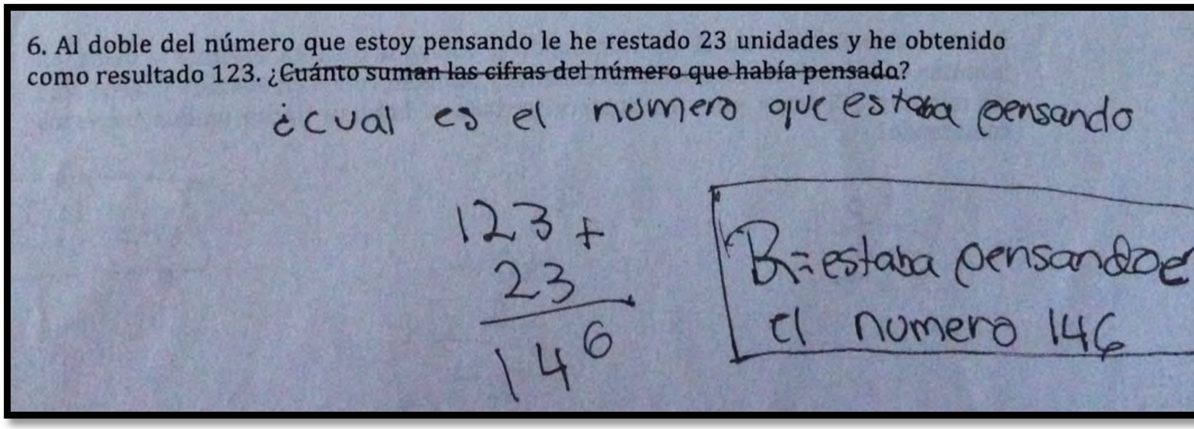
Figura 4.19

> B: [Después de leer el problema.] Entonces también, si le restáramos aquí nos ahorraríamos el contar. Hay 50 monedas.
>
> E: No, una cosa son las monedas y otra los pesos [La Entrevistadora lee de nuevo el problema].
>
> B: Entonces son 18 monedas [comienza a hacer cálculos], 10 no son de $2 pesos, entonces de $2 pesos no tenemos 10 tenemos 8, porque si 10 no son tienen que ser 8.

Bianca enlista el resultado y sigue con las monedas de $5 con el mismo procedimiento. Y obtiene que deben ser 6 monedas. Al momento de multiplicar 8 por 2 de nuevo hace uso de sus dedos para realizar la operación. Posteriormente, multiplica 6 por 5 y suma el número de monedas teniendo como resultado 14. Para así concluir que necesitarían 4 de $1 peso. Seguido de esto, suma las cantidades pero al momento del cálculo aritmético, suma el 4 como unidad y después como decena, obteniendo $90 pesos, como se muestra en la esquina inferior derecha de la Figura 4.19.

Cuando llegó a este resultado se percató de que había un error y la Entrevistadora la invitó a hacerlo de nuevo, llegando así a la comprobación correcta: 30+16+4=50

Problema 6.



6. Al doble del número que estoy pensando le he restado 23 unidades y he obtenido como resultado 123. ¿~~Cuánto suman las cifras del número que había pensado~~?

¿cual es el numero que estaba pensando

123 +
23
146

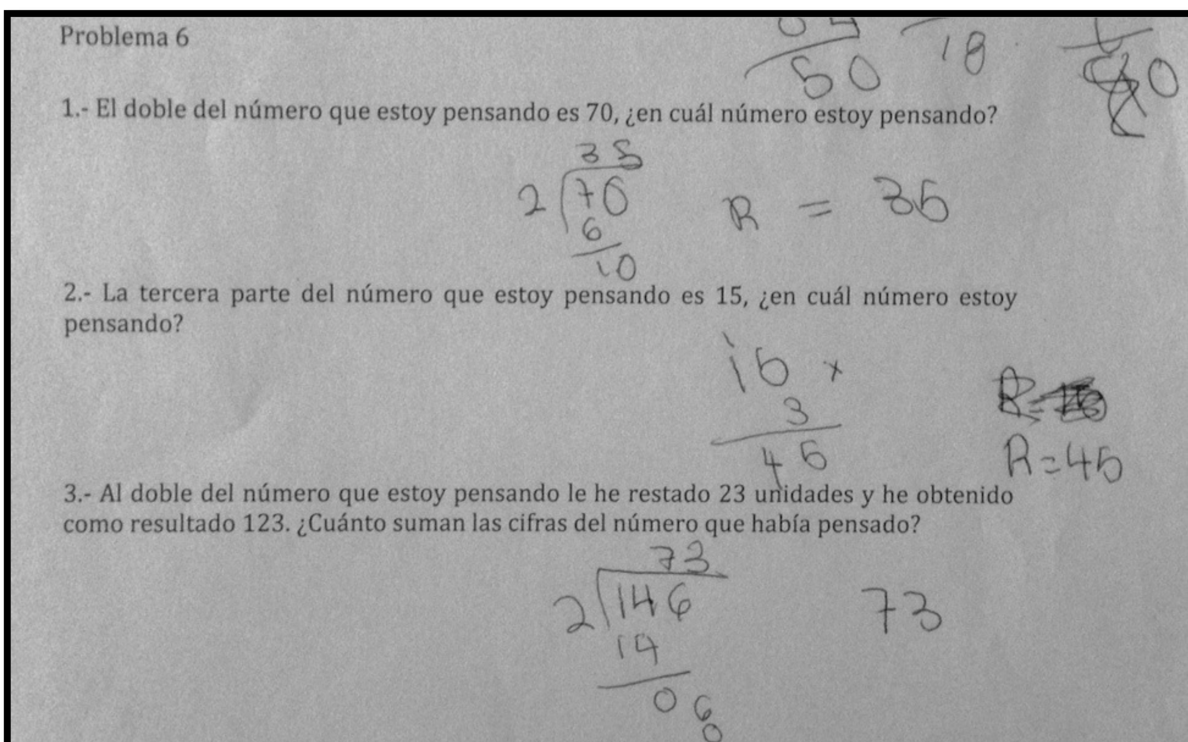
R= estaba pensando el numero 146

Figura 4.20

Etapa 1

E: ¿Cómo hiciste para resolver el problema?

B: Pues al 123 le quité 23, entonces le sumo los 23 que le había quitado.



Problema 6

1.- El doble del número que estoy pensando es 70, ¿en cuál número estoy pensando?

R = 35

2.- La tercera parte del número que estoy pensando es 15, ¿en cuál número estoy pensando?

15 ×
3
45

R=45

3.- Al doble del número que estoy pensando le he restado 23 unidades y he obtenido como resultado 123. ¿Cuánto suman las cifras del número que había pensado?

73

Figura 4.21

E: Pero yo quiero el doble del número que estoy pensando, por ejemplo: el doble del número que estoy pensando es 70, ¿en cuál número estoy pensando? [refiriéndose al problema 1 de la Figura 4.21].
B: Entonces al número que estaba pensando lo multiplicamos por dos y me dio esto.
E: 70 es el doble, por ejemplo en la oración "le he restado 23" tu no le restabas 23 si no le sumabas los 23. Entonces, cuál es el número que estaba pensando si el doble es 70.
B: Si este es el doble, entonces es entre dos (realiza la operación 70/2=35).
E: Ahora, la tercera parte del número que estoy pensando es 15, ¿en cuál número estoy pensando? [refiriéndose al problema 2 de la Figura 4.21].
B: Entonces, yo creo que es entre 3.
E: ¿Ese no sería el triple del número que estoy pensando?
B: Ah! Si, entonces… [después de un minuto aproximadamente] 15 x 3 sería el resultado.
E: Al doble del número que estoy pensando le he sumado 23 y he obtenido como resultado 123, ¿en cuál número estoy pensando?
B: Entonces yo sumaría 123 + 23 y después lo divido entre dos [realiza la operación aritmética como se ve en la parte inferior de la Figura 4.21].

Bianca escribe correctamente el resultado, por lo tanto pasamos a la siguiente Etapa.

Etapa 2

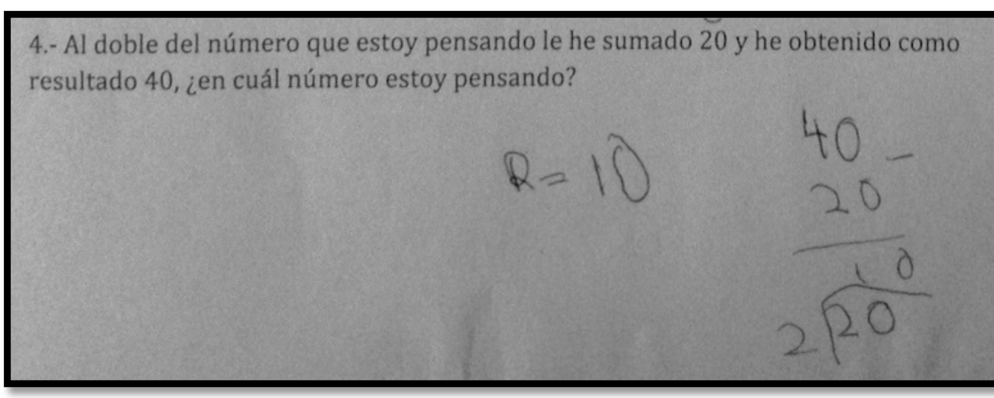


Figura 4.22

E: Ahora, al doble del número que estoy pensando le he sumado 20 y he obtenido como resultado 40, ¿en cuál número estoy pensando? [refiriéndose al problema 4 de la Figura 4.22].
B: Entonces, al 40 le resto 20 y me da 20. Entonces, 20/2 serían 10.

M: ¿Cuál es el número que estoy pensando?
B: 10.

La entrevista se concluye con un agradecimiento a Bianca por la participación en esta investigación.

4.4.1.3 Análisis de la entrevista de Bianca

El análisis de los problemas es presentado según el bosquejo general de las estructuras de las habilidades matemáticas en niños MT de Krutetskii.

Problema 1.

1.1 Obtención de la información matemática.

En las respuestas del cuestionario (Imagen 1 y 2) podemos observar dos aproximaciones distintas para solucionar el problema en cuestión, es claro que la información matemática presentada aquí fue comprendida y analizada por Bianca y por lo tanto, podemos concluir que el nivel de la habilidad para la percepción formal de material matemático, en este problema, se muestra altamente desarrollado.

1.2 Procesamiento de la información matemática.

Es importante conocer el orden de la resolución de un problema presentado en el cuestionario, el percatarse de que Bianca logró identificar la relación entre el número de la figura y el número de cuadrados sin tener que dibujar primero la figura muestra, además de un pensamiento flexible para encontrar soluciones distintas, dos aspectos significativos: la primera es una habilidad altamente desarrollada para abreviar los procesos del razonamiento matemático y para pensar en estructuras reducidas y la segunda es la habilidad de encontrar caminos distintos para corroborar resultados anteriores.

Bianca logró mostrar en un nivel de desarrollo alto la habilidad para generalizar y detectar patrones, sin embargo, en este problema pudimos observar fuertes deficiencias al momento de realizar el algoritmo de la multiplicación. Se esperaría que un niño hábil en el cálculo numérico realizara fácilmente operaciones como 100 x 100.

En lo que respecta a la parte final de la etapa 2, proponer variables en lugar de números no es una tarea sencilla para estudiantes del nivel básico y muy pocos logran comprender estos conceptos rápidamente, en esta parte ella mostró una dificultad para entender la noción de “cualquier número” y a pesar de que obtuvo la respuesta correcta se sospecha que no alcanzó a adquirir dicho concepto.

1.3 Retención de la información matemática “memoria generalizada”.

En la Etapa 2, podemos observar como Bianca logra generalizar su resultado en un problema similar, sin dificultad en la identificación de los patrones. Bianca, al momento de contar de nuevo los cuadrados para verificar si se trataba de un problema equivalente muestra cierta experiencia con este tipo de problemas, ya que primero identifica las diferencias que existen entre ellos y posteriormente da una solución.

1.4 Recomendación
Resolución de problemas que involucren cálculo numérico.

Problema 2.
2.1 Obtención de la información matemática.
En la metodología, Krutetskii menciona que un alumno matemáticamente talentoso que es capaz de resolver problemas complicados resolverá fácilmente problemas más sencillos. Es decir, se esperaría que si un alumno resolvió algunos problemas de este cuestionario haya resuelto con facilidad éste, uno de los más sencillos para los alumnos. Bianca no es la excepción, el dibujo que aparece en la Figura 4.8 nos muestra que tiene habilidad para comprender y representar gráficamente las relaciones internas que aparecen en este problema tanto en la Etapa 1 como en la Etapa 2. Bianca, secciona los enunciados para ir obteniendo información de ellos y los representa gráficamente. Una estrategia que denota que tiene claro el problema y por lo tanto una habilidad de comprensión desarrollada, se muestra al momento que Bianca comienza a dibujar los dos primeros nombres espaciadamente, esto le permite un acomodo libre de demás nombres al leer los enunciados.

2.2 Procesamiento de la información matemática.
En este problema, Bianca muestra un razonamiento lógico y secuencial al momento de argumentar y desarrollar su resolución nuevamente en la Etapa 1, ya que con facilidad vuelve a resolver el problema mostrando su proceso del razonamiento.

La estudiante muestra el nivel de su habilidad altamente desarrollada para interpretar visualmente relaciones matemáticas y agudeza en su entendimiento principalmente en la Etapa 2, aquí podemos ver como Bianca obtiene la información dada, al utilizar una estrategia muy común entre niños MT: suponer de una información matemática general algo particular, proponer valores que cumplan con la información que se proporciona para así generalizar de nuevo y resolver correctamente el problema.

2.3 Retención de la información matemática “memoria generalizada”.
En la Etapa 2 observamos como Bianca generaliza una estrategia de acomodo identificando las diferencias y aportando una estrategia nueva que ayuda para

resolver el problema.

Problema 4.

4.1 Obtención de la información matemática.

En un primer momento Bianca no explica con facilidad cómo obtuvo la información matemática para lograr resolver el problema, esto puede ser causado también por el tiempo de espera entre la resolución del cuestionario y la aplicación de la entrevista. La entrevista tiene que hacer una aportación para facilitar esta actividad.

4.2 Procesamiento de la información matemática.

De este problema, deducimos que Bianca presenta desarrollada la habilidad para la percepción visual, pero le hace falta desarrollar más la parte de la abstracción. Este problema no tiene un enfoque especial en las habilidades de cálculo numérico, sin embargo, Bianca tiene algunas dificultades para contar rápidamente los cubos.

4.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada".

En la Etapa 2, Bianca generaliza su resultado anterior y logra dibujar las vistas identificando que la vista del lado izquierdo y la del derecho difieren en un cuadrado. Cuando se le proporcionan los cubos ella logra construir una figura que cumple con las características dadas.

4.4 Recomendación.

Resolución de problemas que impliquen el conteo de objetos.

Resolución de problemas que necesiten habilidades de abstracción.

Problema 5.

5.1 Obtención de la información matemática.

Bianca explica con facilidad como obtiene la información para resolver el problema, logra identificar el complemento del conjunto fácilmente, tanto en la Etapa 1 como en la Etapa 2. De este problema, podemos deducir que Bianca tiene altamente desarrollada la habilidad para la percepción formal de material matemático.

5.2 Procesamiento de la información matemática.

En la Etapa 1, Bianca muestra la habilidad para detectar relaciones matemáticas. Ella resuelve el problema en una forma lógica y secuencial. Pasando de una implicación a otra, generalización rápidamente la información de las bolas verdes a las amarillas.

5.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada".

En la Etapa 2, presenta la habilidad para generalizar en el momento que usa su razonamiento previo para resolver el nuevo problema, pero de nuevo le falta mayor desarrollo en el conteo aritmético, algo recursivo hasta el momento, durante el transcurso de la entrevista.

5.4 Recomendación.
Resolución de problemas que involucren operaciones aritméticas.

Problema 6.
6.1 Obtención de la información matemática.
La mayoría de los estudiantes a los que se les aplicó este problema tuvieron el mismo resultado que Bianca: 146. Es notable como a los alumnos se les facilita más encontrar caminos inversos cuando se trata de sumas y restas, que cuando se trata de multiplicaciones y divisiones. En la primera parte del problema, Bianca obtiene cierta información del problema pero omite otra que no le permite obtener el resultado correcto, por lo tanto la Entrevistadora contrasta la primera información, resta como operación inversa de la suma, para observar si puede observar la segunda implicación que involucra ahora la división.

6.2 Procesamiento de la información matemática.
Este es el único problema que Bianca no pudo resolver correctamente en el cuestionario, esto resulta bastante lógico siendo que para resolver este problema se utilizan habilidades aritméticas. En la Etapa 1, fue difícil para Bianca entender conceptos como la tercera parte y el triple de un número, llegó a la respuesta correcta con algunas conflictos en el proceso. Pero cabe destacar que tuvo que recurrir a algoritmos tradicionales para realizar operaciones sencillas durante las dos etapas del problema. A pesar de responder correctamente algunas de ellas, le costó trabajo llegar a sus soluciones.

6.3 Retención de la información matemática “memoria generalizada”.
Una vez que Bianca comprende el problema en cuestión, se le plantea un nuevo problema para observar su memoria generalizada, la cual se muestra en la Figura 4.22. Y aparentemente no muestra ninguna dificultad en retener la información matemática y aplicarla de nuevo identificando las diferencias. Por lo tanto, podemos concluir que tiene altamente desarrollada la habilidad para generalizar material matemático comprendido.

6.4 Recomendación.
Resolución de problemas que involucren conceptos como el doble, el triple, la cuarta parte, etc.

En conclusión, Bianca identifica con facilidad las relaciones internas de los problemas matemáticos y además, tiene un pensamiento lógico, sistemático y secuencial. La habilidad para generalizar se encuentra altamente desarrollada en ella, al igual que la percepción visual. Muestra en desarrollo la habilidad para cambiar del razonamiento directo al razonamiento “hacia atrás”, así como la habilidad de abstracción. Bianca pone en manifiesto algunos síntomas que nos sugieren inferir que las habilidades aritméticas y de conteo se encuentran en un nivel de desarrollo bajo. Se recomienda colocar a Bianca en un grupo donde se trabajen las habilidades aritméticas y de conteo.

4.4.2 Entrevista Carmen

4.4.2.1 Datos generales de la entrevista

La entrevista a Carmen se realizó aproximadamente un mes después de haberle aplicado el cuestionario de identificación y tuvo una duración aproximada de 45 minutos, previo a la entrevista se le especificó a Carmen cuál era el objetivo de la misma: profundizar en sus estrategias utilizadas para resolver cada problema, y además se le pidió que expresara en voz alta las ideas que se le fueran ocurriendo durante la entrevista.

4.4.1.2 Descripción de la entrevista

En esta entrevista estuvieron presentes dos Entrevistadores y Carmen.

Problema 1: No resuelto en el cuestionario.

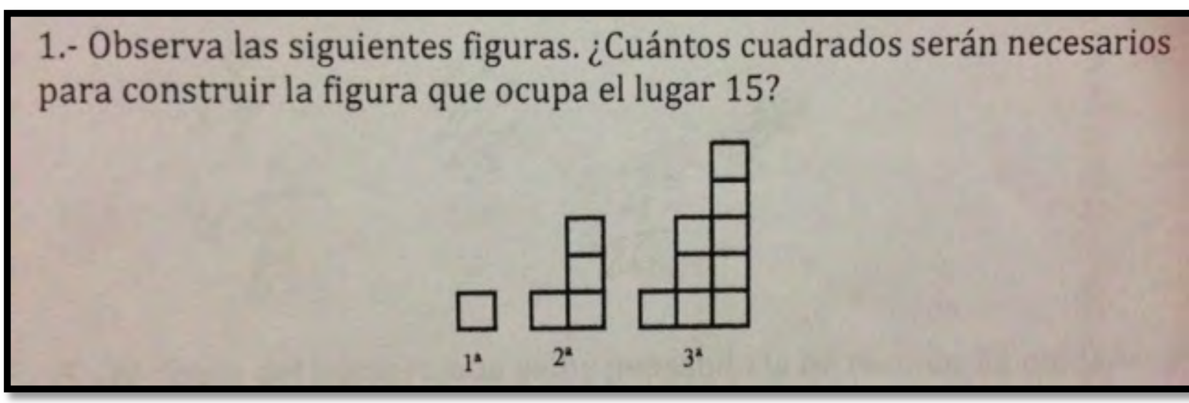


Figura 4.23

Etapa 1.

E1: Lee el problema.

C: Observa las siguientes figuras. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 15?

E1: ¿Qué no entendiste de ese problema?

C: ¿Cómo diré?, por ejemplo el orden, cómo iban.

E1: Ésta es la Figura 4.23, ésta es la 2, ésta es la 3 (señalando el dibujo del

problema 1). En esta otra hoja (señalando la Figura 4.23) dice aquí: dibuja la figura que seguiría en el lugar 4. Dibuja la que pensarías va en el lugar 4.
[Aquí Carmen, comienza a dibujar la figura que se ve en la cuarta posición de la Figura 4.23, primero dibuja los cuatro cuadritos de la base y después las columnas que corresponden a cada cuadrito de la base.]
C: [al terminar] Yo creo que se vería así:

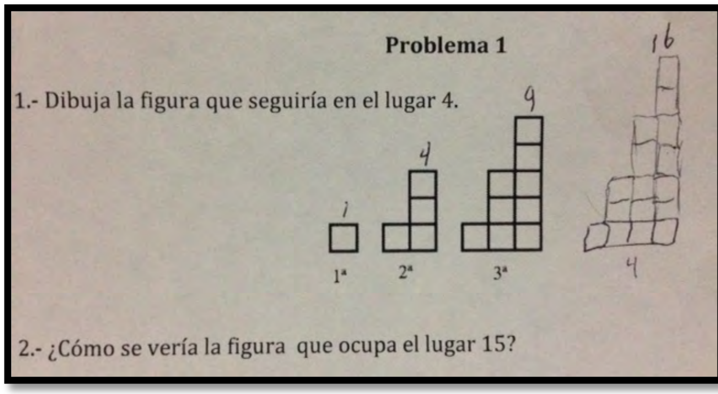


Figura 4.24

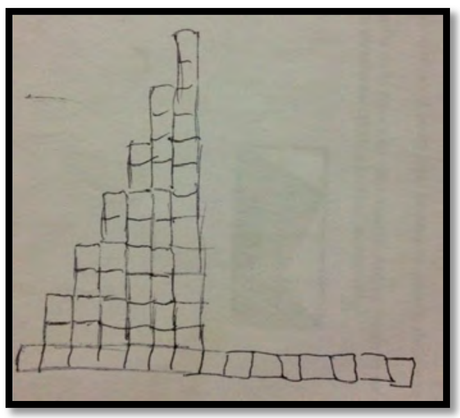


Figura 4.25

E1: Entonces qué fue lo que le hiciste que cambió la figura.
C: Es que aquí como es uno, nomás es un cuadro, aquí es dos como base son dos y aquí son tres y me imaginé que aquí eran cuatro. Y como van aumentando de dos, dos y luego otros dos (hacia arriba) Pues pensé que era así.
E1: Entonces lo que cambió de la Figura 4.25 a la 4 es la última columna, ¿cómo se vería la figura que ocupa el lugar 15?, ¿cómo piensas que se vería?, ¿más alta, más chaparrita?
C: Más ancha y más alta, porque yo creo que serían 15 de base y como son dos que van aumentando yo creo que serían 30 de alto.
E1: Entonces, cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 15, ¿cuántos cuadrados necesitaste para dibujar la cuatro?

C: 16
E2: En éste tu tienes en la base, 3 (Figura 4.25) y la columna más grande tiene cuántos?
C: 4
E2: En este (Figura 4.25) tienes de base cuatro, si quieres ponle ahí cuarto lugar y la columna más grande son cuantos?
C: 7
E2: Entonces tu decías si tiene de base 15 entonces de altura tendrá 30, pues ésta tiene 4 de base y si de altura tuviera el doble entonces tendría…
C: 8
E2: y no tiene 8
C: entonces tendría a lo mejor 31
E2: Entonces como cuántos cuadraditos serían por todos.
C: No sé, podríamos hacerlo pero serían muchos.
E2: Ve haciéndola así como se te ocurra la de 15.
[Comienza a dibujar la figura cuatro comenzando por la base].
E2: Ahora inténtanos decir qué podrías hacer para decirnos cuántos cuadraditos sin tener que dibujarla toda.
C: Podría darme una idea de … No, no sé.
E2: Vamos a hacer una cosa, *vamos a irlos contando* y anotándolos cada uno, en cada caso, en el primer caso, ¿cuántos cuadraditos tiene?
C: uno
E2: En el segundo…
C: cuatro
E2: en el tercer caso…
C: nueve
E1: en el cuatro
C: 16
E2: Sin dibujar el 5to tu crees que puedas proponer cuántos tiene.
C: Podríamos ver como van aumentando, en este aumento 3, en este 5, en el otro 7. Voy viendo que van aumentando de dos, podríamos ver que aumentó 9. Podrían ser 27 cuadros.
E2: ¿tú ves alguna relación entre los números?
C: Si, que si se multiplican por si mismos me da el número de arriba (Imagen 1).
E2: Entonces en el caso de 15, ¿cuántos serían?
C: Podríamos multiplicar 15x15.

Carmen hace esta multiplicación correctamente y resuelve el problema: 225

Etapa 2

4.- ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 100?

Figura 2.26

E2: Ahora, si tu tuvieras el caso número 100, ¿podrías decirnos cuántos cuadritos habría?

C: Si, serían 10, 000 [responde sin hacer cálculos en la hoja].

E1: Entonces, tu podrías encontrar para cualquier lugar.

C: Si, ya sabiendo que relación tiene,

E1: ¿Cuál fue la relación aquí?

C: Que la figura que estamos buscando multiplicada por si misma me da el número de cuadritos que tiene.

E1: Muy bien.

Problema 2.

2.- Supongamos que escribo los números del 1 al 999. ¿Cuántas veces habré escrito el número 1? 300 veces

Figura 4.27

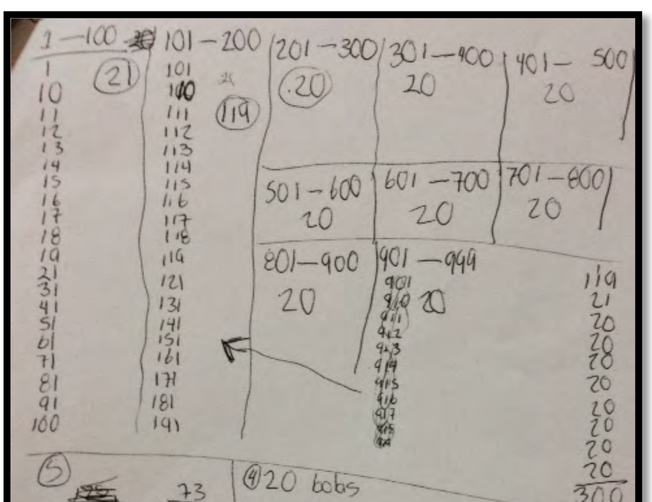


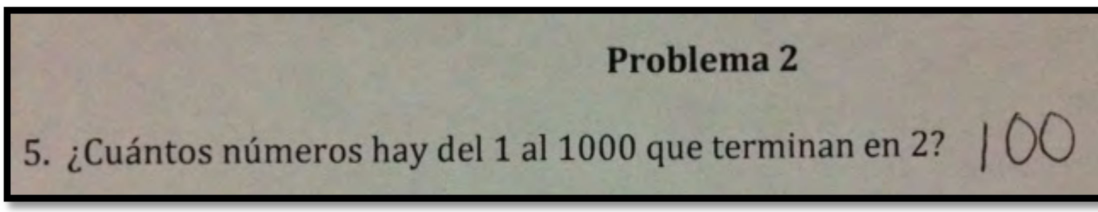
Figura 4.28

Etapa 1.

E1: ¿Dinos cómo le hiciste para resolver el problema 1?"

C: Es que antes nos habían dejado un trabajo que era poner cuántas veces había el 1 del 1 al 1000 y yo le había hecho así: Primero puse los números así (señalando la lista de la izquierda de la Figura 4.28) y me dio 21 y luego lo fui suponiendo que así era en el 200, pero en el 100 iba a ser distinto porque eran los 100. Y fui viendo los de 11, 12, 13, tomé esos 10 y también los de 11, 21, 31 los tomé en cuenta. Y más o menos fui suponiendo para los demás números [En este momento Carmen identificó el 1 de las centenas, el 1 en las decenas y el 1 en las unidades].

Etapa 2



Problema 2

5. ¿Cuántos números hay del 1 al 1000 que terminan en 2? 100

Figura 4.29

E1: Ya que nos explicaste de éste, te vamos a preguntar otra parecida: ¿Cuántos números hay del 1 al 1000 que terminan en 2?

[Carmen se toma unos momentos y comienza a escribir en una hoja los números 2, 12, 22 y a contar con sus manos …]

C: ¿Les voy explicando lo que estoy haciendo?

E2: O más bien cuando lo vayas haciendo puedes ir hablando.

C: Es que estoy viendo que en el 100, hay 2 …. y luego está 12, 22, 32, y estoy diciendo que son [hasta el] 100, y también el 20, 21, 22, los estoy contando serían 10 entonces serían 20. Entonces en el de 100 también serían 20 pero en el de 200 serían 120.

[Como podemos observar aquí la niña supuso que la pregunta era la misma que la del problema que ya había resuelto correctamente, con la única variante de que ahora se trataba de contar el dígito 2, en lugar del dígito 1].

E1: [la Entrevistadora 1 interrumpe a Carmen] Lee otra vez el problema en voz alta.

C: ¿Cuántos números hay del 1 al 1000 que terminan en 2?

E1: Que terminan en dos.

C: Terminan, al final. Ah okey.

E1: ¿Van a ser más números o menos números?

C: Van a ser menos números. Serían como 100 [respuesta correcta].

E1: ¿Por qué 100?

C: Porque si no estamos contando los de doscientos [centenas] y los de los veintes [decenas] tendríamos 10 de cada 100 y como tenemos 1000 serían 10x10 y así los conté.

E1: Muy bien.

Problema 3.

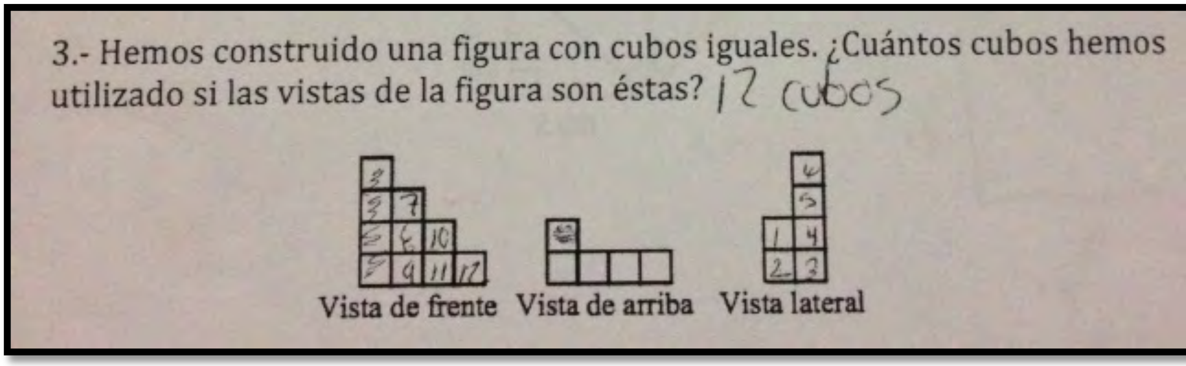


Figura 4.30

Etapa 1.

Carmen se tomó un momento para explicarnos qué es lo que hizo para resolverlo.

C: Como en las posiciones que está, fui viendo cuantos cubos había, los fui contando por ejemplo, estos dos por atrás serían este, este es desde encima… no me acuerdo muy bien como lo hice pero si puedo verlo de frente, de atrás…

Aunque la explicación no es completa, las marcas en el dibujo denotan la manera como Carmen ha sistematizado el conteo, por lo cual pasamos a la etapa 2. Como es un problema visual, es notable que se le dificulta argumentar sin embargo, no es un impedimento para observar sus estrategias y habilidades, esto gracias a las notas que realizó durante el cuestionario.

Etapa 2.

Carmen logró dibujar las vistas de la Figura 4.31 con facilidad, al momento de preguntarle sobre la otra vista lateral, dijo “sólo se cambiaría el cuadrito de arriba a la izquierda”. Al terminar el problema anterior se le presenta un problema más complejo en comparación con el del cuestionario.

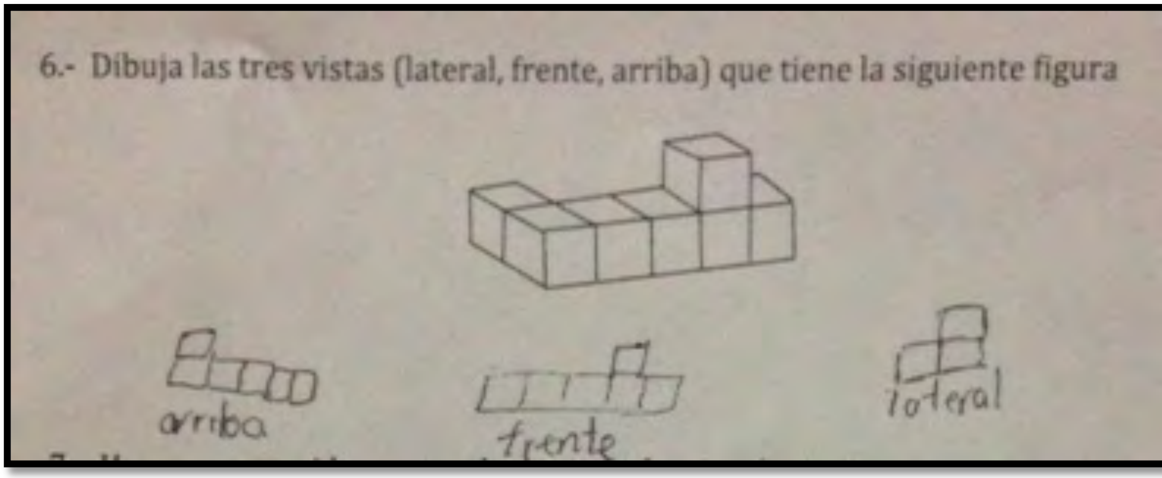


Figura 4.31

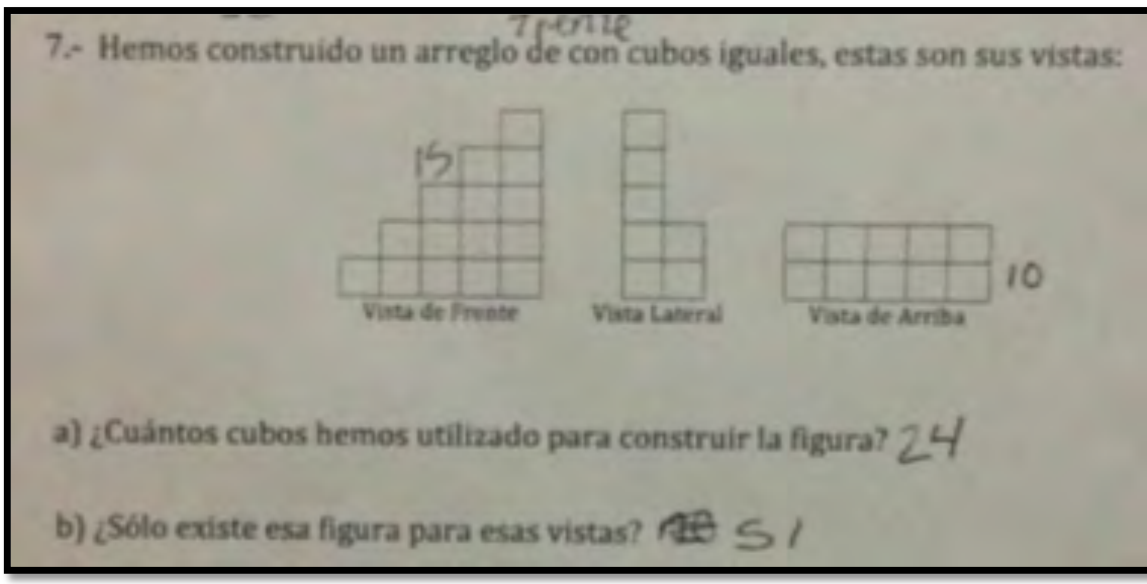


Figura 4.32

Al abordar el inciso a, mostrado en la Figura 4.32, Carmen contó los cuadrados de la "vista de frente", escribiendo el número 15 a un lado de esta vista, posteriormente escribió el número 10 a un lado de la "vista de arriba", como se ve en Figura 4.32:

> C: Yo creo que son 25, mas o menos los intenté formar teniendo en cuenta la vista de frente y la de arriba primero.
> E1: ¿Sólo existe esa figura para esas vistas? [inciso b de la Figura 4.32]
> C: ¿Cómo esa figura?
> E1: Ese arreglo de cubos, tu te imaginaste un arreglo de cubos y me dijiste son 25 cubos, ahora, ¿solo existe para estas vistas esa figura que tu visualizaste de 25

cubos?

C: Podría visualizarse de otra manera, podría acomodarlos de diferente manera.

Después de algunas intervenciones del Entrevistador 2, podemos observar que las preguntas no se están realizando en forma clara para el estudiante y pasamos a utilizar el material manipulable. En este momento Carmen interviene y comenta lo siguiente:

C: Estoy viendo que me equivoqué porque la fila de arriba de la vista de frente solo lleva 4 cubos no 5, entonces podrían ser 24 cubos [corrigiendo su resultado].

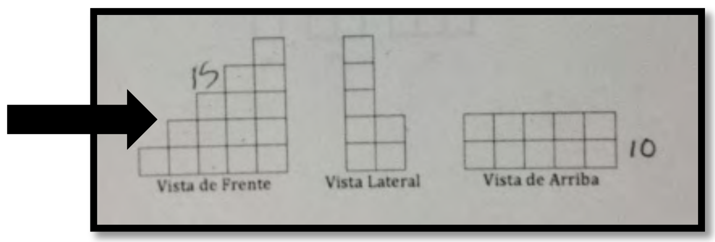


Figura 4.33

[En la flecha se señala el lugar que ocuparía el cubo que contó demás]

E1: Con los cubos siguientes constrúyenos la figura que te imaginaste. [Carmen comienza a formar la estructura que se ve en la Figura 4.34]

Figura 4.34

[Cuando termina la maestra vuelve a preguntar la opción b.]

C: ¿Puedo mover cubos?

En este momento, podemos observar que Carmen pretende mover la posición de la

construcción completa, posiblemente tratando de verificar que podría existir una construcción con las mismas vistas, pero en otra posición.
No logra hasta el momento comprender el problema que se intenta plantear.

> E1: Si yo quito un "cuadradito" [Figura 4.34], ¿serían las mismas vistas?
> C: Si.
>
> E1: Y es otra figura con otro número de cubos.
>
> C: Si, es que le pregunté si con los mismos cubos. Pero entonces podríamos quitar otros más.
>
> E1: ¿Qué otro podrías encontrar?

En esta parte podemos observar que las preguntas no fueron claramente planteadas, tal como menciona Carmen, lo cual provocó confusión en ella, pero cuando se aclaró el problema, ella pudo encontrar fácilmente que los números 21, 22 y 23 también eran solución al problema (véase Figura 4.35).

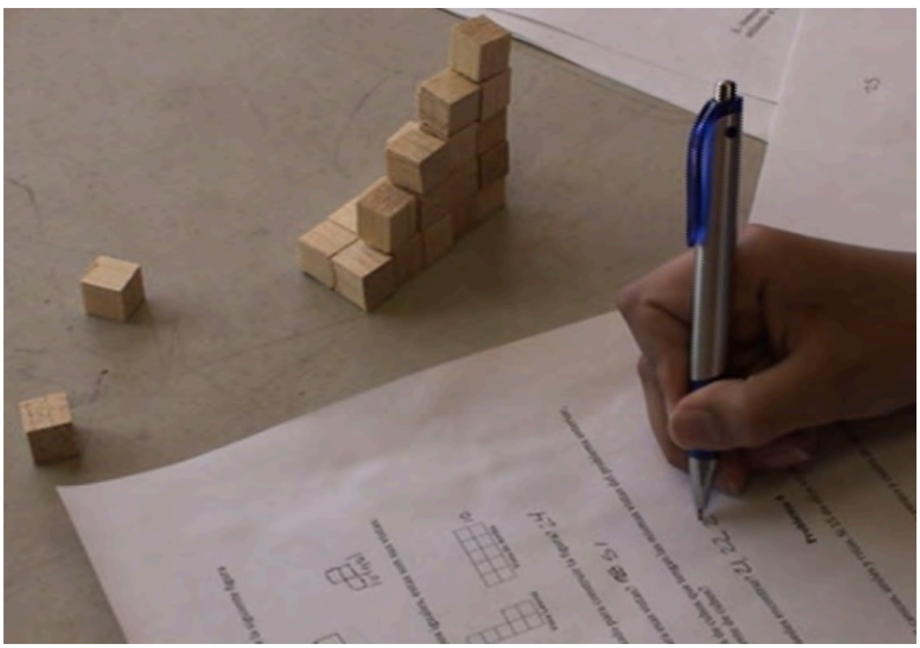
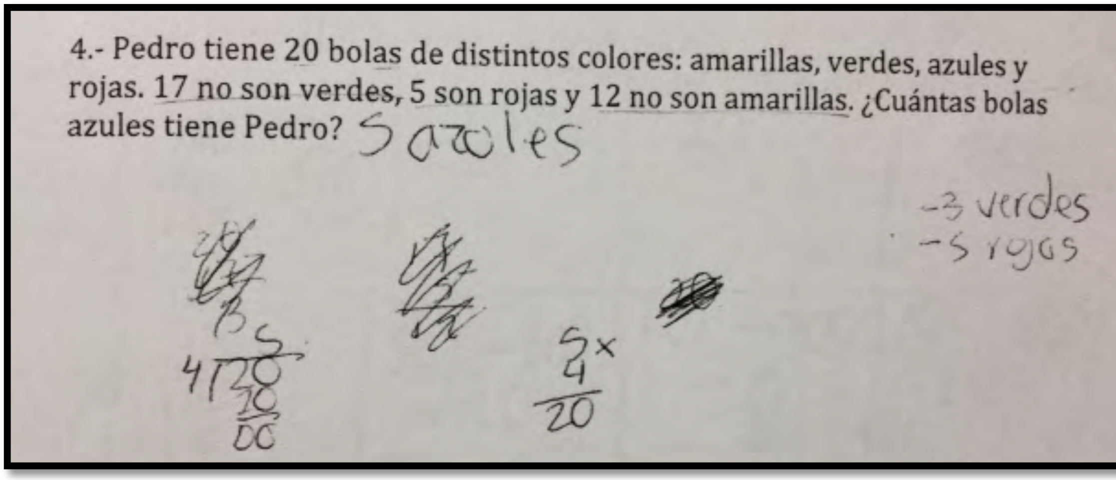


Figura 4.35

Pasamos ahora al problema 4

Problema 4.


4.- Pedro tiene 20 bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. 17 no son verdes, 5 son rojas y 12 no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro? 5 azules

-3 verdes
-5 rojas

Figura 4.36

Este fue uno de los problemas que más le causó dificultades durante la entrevista, el lapso de tiempo transcurrido desde que leyó el problema 4 hasta encontrar una solución fue de 13 minutos. A continuación pasaremos a la transcripción de ciertos momentos durante el transcurso de la resolución de este problema, que nos ayudará a entender las dificultades principales de Carmen en este problema.

Después de leer el problema 4, Carmen nos comenta que no recuerda los intentos que hizo para resolverlo. Por lo que se pasó a la siguiente parte de la entrevista: realización de ejercicios o problemas de menor dificultad que la guíen para llegar al resultado correcto.

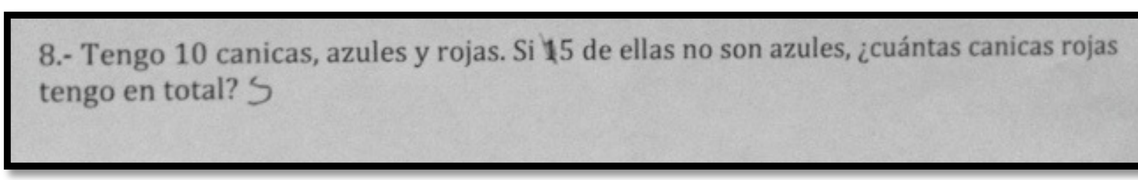

8.- Tengo 10 canicas, azules y rojas. Si 15 de ellas no son azules, ¿cuántas canicas rojas tengo en total? 5

Figura 4.37

El problema de la Figura 4.37 tiene un error, debiera decir 5 en lugar de 15, este se corrigió antes de presentárselo a Carmen.

En un primer momento, Carmen dice que no tiene idea de cómo resolver el problema, como puede verse en el episodio siguiente, iniciado por el segundo Entrevistador por un ejemplo.

E2: Vamos a pensar que nosotros tenemos diez canicas en la bolsa. Están revueltas, azules y rojas. Si alguien me dice no sé cuántas hay de cada una, pero yo sé que cinco no son azules, entonces pensamos en el color de las canicas y yo sé que cinco no son azules entonces cuántas rojas habrá.

C: Pero no sé si hay más de cinco azules o menos de cinco azules.

E2: Si yo tengo canicas que son rojas y azules, ¿si una no es azul entonces como es? Nada más hay azules y rojas y la que tengo no es azul, ¿entonces qué color será?

C: Roja.

E2: No tengo otra opción ¿verdad?, eso sucede con una y si yo sé que cinco no son azules entonces esas de qué color serán.

C: Rojas. Podrían ser cuatro azules y seis rojas... O podrían ser cinco y cinco.

Como podemos observar Carmen no interpreta claramente las negaciones que aparecen en el problema. Tiene nociones de las respuestas, pero al estar hablando de posibilidades nos muestra que aun no detecta la relación del complemento, Pareciera que Carmen confunde el "saber" que no son azules, con el "extraer" cinco que no son azules, quizás porque para ella la única forma de saber es extrayendo.

Aparentemente Carmen no comprende el problema, sin embargo podríamos afirmar que el entendimiento lógico de Carmen es tan agudo que este problema pareciera tener distintas implicaciones, que para ella involucran la probabilidad y la extracción de bolas. Se cree además, que las preguntas formuladas por los Entrevistadores no resultaron de ayuda para el entendimiento del problema.

Después de unos minutos Carmen llega a la solución correcta y la Entrevistadora lee el siguiente problema.

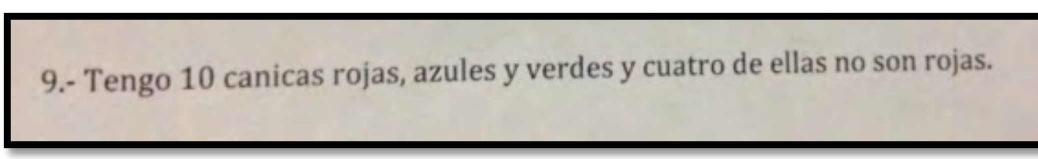

9.- Tengo 10 canicas rojas, azules y verdes y cuatro de ellas no son rojas.

Figura 4.38

E: Tengo 10 canicas rojas, azules y verdes y cuatro de ellas no son rojas… [leyendo el enunciado del problema] ¿Qué sí sabes de ahí?

C: Que cuatro no son rojas.

E: Entonces las otras…

C: Entonces las otras seis podrían ser las rojas.

E: Entonces ¿Cuántas canicas rojas hay? [problema nuevo]

C: Seis
E: ¿Podrías saber cuántas canicas azules hay? [problema nuevo]
C: No pero podría suponer que son dos y dos o tres y una. [Respuesta correcta]
E: Entonces con esto que ya vimos intenta resolver de nuevo el problema. [Refiriéndose al problema original]
C: Estoy pensando que si dice que 17 no son verdes entonces son 3 verdes. Lo que me confundió es que si llegarán a ser 3 verdes más 5 rojas y 12 no fueran amarillas, si sumo doce más cinco más tres no me da veinte. [Aunque la suma si es 20]
E: A ver, pero aquí por qué pusiste 8 [señalando la Figura 4.38].
C: Porque de éstas ya son ocho [refiriéndose a 5 rojas más 3 verdes], y si son doce [azules] me quedaría sin amarillas.
E: Para encontrar tú las verdes no sumaste 12 + 17 + 8 ¿verdad?
C: No.

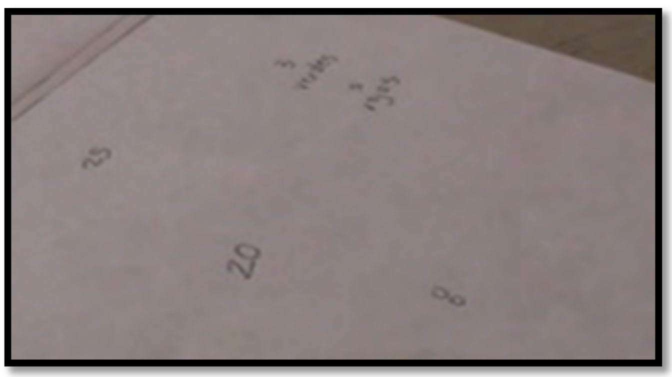


Figura 4.39

Siguiendo con esta dinámica Carmen, supone que existen distintas formas de combinar colores en el enunciado "12 canicas no son amarillas". Los entrevistadores intentan guiarla hacia el resultado y lo consiguen, pero Carmen nunca mostró que identificó las relaciones internas del problema. Ella nunca dejó de manifestar inseguridad mientras lo resolvía, refiriéndose siempre a sus soluciones como "podrían ser…". Por lo tanto, no se le preguntó sobre el problema que se tenía pensado para la etapa 2, el cual se presenta a continuación:

Tengo 18 monedas en mi bolsillo de \$1, \$2 y \$5 pesos, en total suman \$50 pesos. Adivina cuántas monedas hay si 10 monedas no son de \$2 pesos y 12 monedas no son de \$5 pesos.

Problema 5.

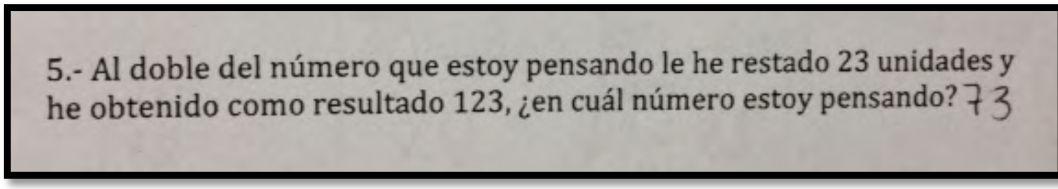

5.- Al doble del número que estoy pensando le he restado 23 unidades y he obtenido como resultado 123, ¿en cuál número estoy pensando? 73

Figura 4.40

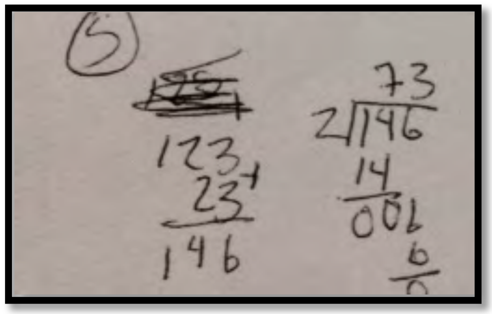


Figura 4.41

Etapa 1.

Después de leer el problema y ver su procedimiento por unos segundos dice lo siguiente.

> C: Sí, ya sé como le hice, sumé esto más esto (señalando el número 23 y el número 123 en el enunciado del problema), porque es el doble del resultado que tengo pero mientras que le quite 23. Entonces lo sumé y como decía que era el doble lo dividí entre dos y me dio 73.

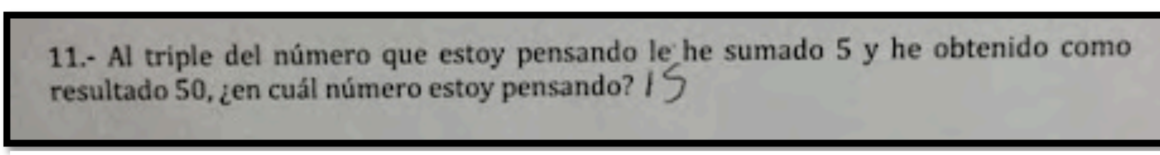

11.- Al triple del número que estoy pensando le he sumado 5 y he obtenido como resultado 50, ¿en cuál número estoy pensando? 15

Figura 4.42

Etapa 2.

> C: 45 entre 3 podría ser.

Al momento de realizar la división, Carmen se equivoca y escribe como resultado 13, la Entrevistadora cuestiona su resultado y Carmen corrige sin mayor complicación.

Problema 6.

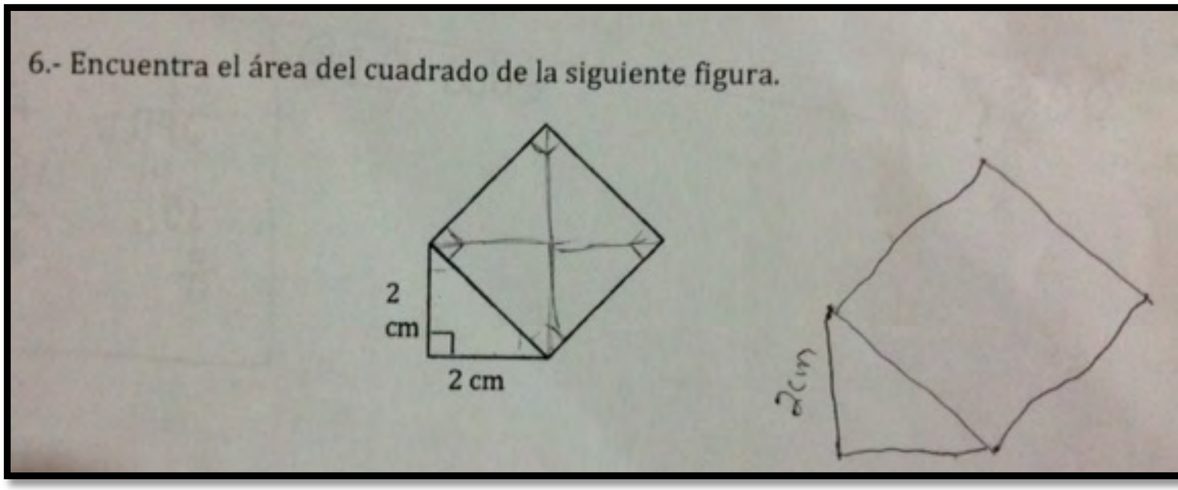


Figura 4.43

Etapa 1.

E1: El área de cuál cuadrado te están pidiendo

C: De éste [señalando el cuadrado grande de la figura]

E2: Entonces, ¿los dos cm a qué se refieren?

C: A este cuadrado chiquito [señalando la marca del ángulo recto]

Hasta aquí observamos que Carmen, no tiene clara cuál es la información que se le está dando en el problema. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes a los que se les presentó este problema tuvieron dificultades similares, confundieron la medida de los catetos del triángulo con las medidas del cuadrado que aparece como marca del ángulo recto, lo que muestra que el problema no fue lo suficientemente claro para el alumno. Después de que los entrevistadores detectan el problema que causaron las medidas antes mencionadas el Entrevistador 2, hace otro dibujo sobre el problema, donde omite la marca del ángulo, como se muestra en la siguiente figura.

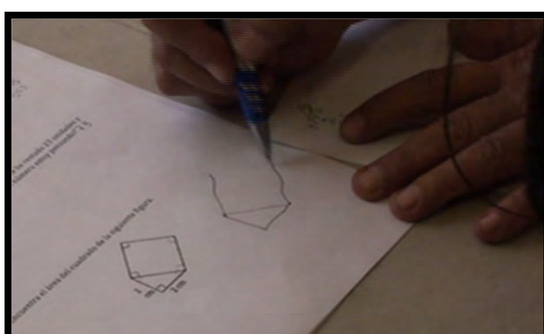


Figura 4.44

E2: ¿Cómo se te ocurre que podría calcularse?

C: mmm… no sé.
E2: ¿El área del triángulo si podrías calcularla?.
C: No me acuerdo como sacarla.
E1: Base por altura sobre dos.
C: Dos por dos cuatro entre dos, dos.
E2: Entonces el área del triángulo, ¿cuánto es?
C: Dos.
E2: ¿Y el cuadrado es más chico o más grande que eso?
C: Es más grande
E2: ¿Y te servirá de algo que conozcas el área de este triángulo para calcular la del cuadrado éste?
C: No sé.
E1: ¿Cuántas veces crees que cabe el triángulo en el cuadrado?
C: Podrían ser cuatro veces.
E1: ¿Por qué?
C: A lo mejor podría caber una vez aquí, …
E2: A ver, trata de dibujarlo.

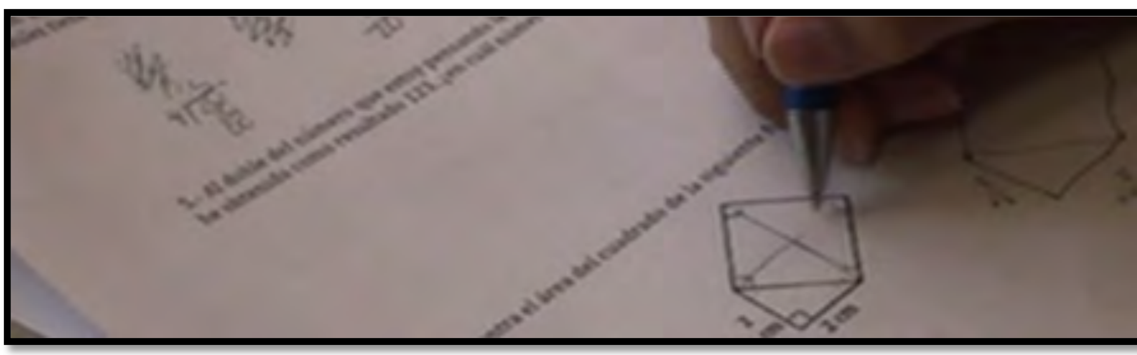


Figura 4.45

C: Si, si es casi igual, entonces si fuera 2 el cuadrado, serían 8.

Y así, se concluye con este problema. Como podemos observar anteriormente, la pregunta: ¿cuántas veces cabe el triángulo en el cuadrado? ayudó a que Carmen resolviera el problema correctamente. Durante este problema Carmen, no muestra tener las habilidades de reconfiguración necesarias para resolverlo o por lo menos no al nivel requerido para resolverlos por sí misma.

Etapa 2.

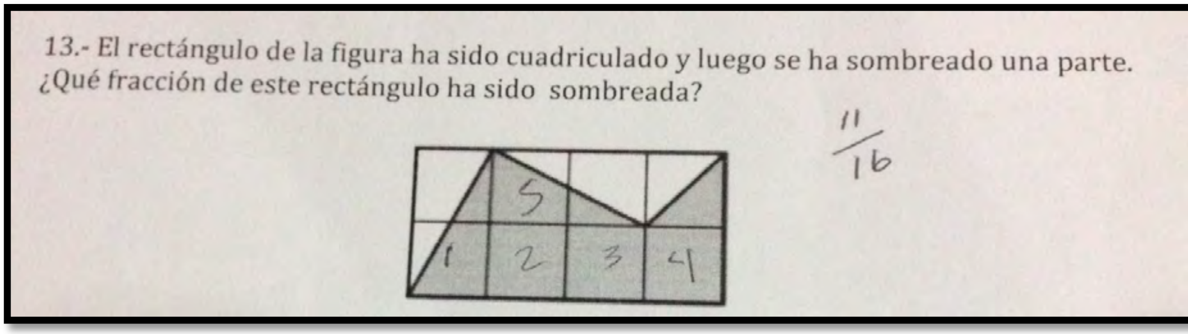


Figura 4.46

> C: Estoy viendo que esto podría caber aquí y sería un cuadro [transformando el triángulo de la primera columna en el cuadrado marcado con el número uno, visto como una tabla], dos, tres, cuatro, y este cabría aquí 5 [haciendo la misma reconfiguración, pero ahora para el triángulo ubicado en las dos columnas centrales, en el cuadrado que etiquetó con el número 5], y este sería [señalando el triángulo sombreado ubicado en la última columna] …. Podrían ser cinco octavos.
> E: ¿No te faltaría un pedacito?
> C: Podrían ser once dieciseisavos.
> E: ¿Por qué?
> C: Porque si son ocho lo dividimos entre dos, serían dieciseisavos y como son cinco los que están sombreados enteros serían 10 más la mitad ésta, serían 11.

Al finalizar la entrevista se le hicieron preguntas generales a Carmen sobre las matemáticas a manera de conclusión. Finalizando con un agradecimiento por el tiempo invertido.

4.4.2.3 Análisis de la entrevista

El análisis de los problemas es presentado según el bosquejo general de las estructuras de las habilidades matemáticas en niños MT de Krutetskii.

Problema 1.

1.1 Obtención de la información matemática.

Carmen no tienen ninguna dificultad en predecir la forma de la figura número 15. Ella está convencida que la información que contienen las tres figuras anteriores son suficientes para conocer el resultado del problema. Además, ella identifica cómo van evolucionando las figuras en los primeros tres casos. Hasta este punto, manifiesta desarrollada la habilidad para la comprensión de la estructura del problema matemático.

1.2 Procesamiento de la información matemática.
El método aquí planifica las intervenciones para observar si puede llegar a la solución con una guía. Al momento de preguntarle a Carmen si podría dibujar la figura número 15 podemos observar que ha identificado que el número de cuadrados en la base de cada figura, corresponde al número de la figura. Y además, identifica el incremento de dos cuadrados cada vez que añade una columna. Lo que la llevaría al resultado correcto después de realizar un conteo.

Al momento de hacerle sugerencias a Carmen como: "intenta conocer el resultado sin dibujar toda la figura" ella encontró un patrón numérico entre el número de la figura y el número de cuadrados que se incrementan entre dos figuras consecutivas. Logró identificar que para obtener, por ejemplo, el número de cuadrados de la quinta figura basta con sumarle el quinto impar al número de cuadrados de la cuarta figura, resultado esencial para resolver el problema sin necesidad de dibujar la figura número 15. Si ella tuviera conocimiento de que la suma de n impares consecutivos es n^2 el problema estaría completo. Sin embargo, a falta de este conocimiento se le propuso que pensara en las relaciones que existen entre el número de la figura y el número de cuadrados, que fue encontrando. Inmediatamente después de esta pregunta Carmen resolvió el problema correctamente. La habilidad para identificar patrones se muestra en de dos formas distintas: en la visualización del comportamiento de las figuras y en el patrón numérico que relaciona el número de cuadrados de una figura con la siguiente.

La estrategia de Carmen no es abreviada, sin embargo, muestra dos estrategias distintas para resolver el problema: dibujar la figura completa siguiendo el patrón que ha identificado y después contar el total los cuadrados o bien, ir sumando el número impar que correspondiente hasta llegar a la figura número 15. En la situación, ella identifica con mucha claridad algunos patrones geométricos y numéricos que están presentes en la figura, pero no logra organizar el conteo de una manera abreviada.

1.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada"
En la segunda etapa de la metodología, se le preguntó sobre la figura que ocuparía el lugar 100, Carmen respondió rápida y correctamente. Lo que nos permite observar una memoria generalizada del material matemático antes visto. Ella toma el número que indica el lugar que ocupa la figura y lo multiplica por si mismo.

Por otra parte, es complicado que Carmen pueda vislumbrar un acomodo distinto para formar cuadrados de nxn si nunca ha tenido relación con la descomposición y recomposición de áreas. Una experiencia previa a esas actividades de reacomodo geométrico la pudo llevar a tomar esta estrategia y resolver con mayor facilidad el problema. Aunque, cabe destacar que en la entrevista nunca se le sugirió modificar la configuración de las figuras.

Recomendación.
Resolución de problemas que impliquen cálculo de áreas mediante descomposición y recomposición (geometría).
Asimismo, planteamiento de problemas que involucren suma de números naturales, para desarrollar habilidades que le permitan abreviar sus cálculos. (teoría de números).

Problema 2. Resuelto correctamente en el cuestionario.
2.1 Obtención de la información matemática.
Carmen comentó al inicio del problema que ya había resuelto un problema similar en sus clases, por lo que no se le dificultó la organización de los datos. Esto nos permitió observar nuevamente que tiene desarrollada la memoria generalizada, retiene información matemática para volverla a aplicar en problemas de "un mismo tipo".
2.2 Procesamiento de la información matemática.
Podemos observar en la Figura 4.23 la organización clara que le permitió proporcionar un resultado correcto, esto denota habilidad en el acortamiento del pensamiento, ya que no necesitó escribir todos los números, pero si detectó que tenía que concentrarse en los números del 100 al 200, los cuales se comportan de manera distinta al resto de los números. Carmen enlista las dos formas de conteo, identifica que del 200 en adelante se repite el primer conteo. Detecta rápidamente la existencia de dos tipos de conjuntos, donde el conteo es distinto. Una vez que cuenta las dos categorías distintas, en los conjuntos posteriores solo repite la primera forma.

Al presentarle el nuevo problema (segunda etapa del método), supuso que íbamos a encontrar ahora el dígito 2, y su respuesta es inmediata. Cuando se le aclara lo que pide el problema, es sorprendente la rapidez con la que responde correctamente al problema. Carmen muestra nuevamente la habilidad altamente desarrollada de un pensamiento acortado. Por una parte retiene el método y por otra lo utiliza para abreviar, de cierta manera combina ambas habilidades para resolver el problema con mayor facilidad. La separación de casos, le facilita el conteo, porque ya no tiene un conjunto donde los dígitos 2 aparezcan en forma distinta.

2.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada".
En el momento en que Carmen confunde la segunda pregunta, relacionada con el dígito 2, podemos observar la transferencia de la estrategia que utilizó para resolver

el primer problema al segundo, y cómo aprovecha la solución del primer problema para resolver el segundo. Al aclarar su error en la comprensión del problema, ya no necesita realizar tablas o conjuntos de datos organizados, simplemente utiliza su resultado anterior para el nuevo problema al que se enfrenta.

Es extraordinaria la simplicidad y economía en sus respuestas, algo que buscamos en un niño con talento matemático. Además, hasta el momento, Carmen ha ido explicando paso a paso cómo va pensando las estrategias y sus razonamientos, algo difícil de conseguir en la mayoría de los alumnos de su edad.

Problema 3.
3.1 Obtención de la información matemática.
Carmen, prácticamente resolvió de nuevo el problema (un mes después) y logró explicar el significado de las etiquetas: dos de las vistas le sirven para obtener la información, y la otra la usa de referencia. Teniendo en cuenta que la estudiante resolvió correctamente el problema, podemos observar durante la resolución de la segunda parte del método, cómo nuevamente generaliza su resultado anterior para la realización del nuevo.

3.2 Procesamiento de la información matemática.
Carmen, tiene muchas habilidades espaciales y visuales, esto lo observamos desde que se presentó el primer problema. En la Figura 4.24 podemos observar cómo, para clarificar su pensamiento, ordenó numéricamente la correspondencia entre las vistas y el número de cubos. Una estrategia que no había presentado ningún estudiante con anterioridad.

Carmen separó en dos conjuntos que son ajenos y apropiados, para no contar dos veces el mismo cubo, separa los cubos en la de la vista lateral y cuenta los de la vista de frente que no estaban en la vista lateral.

En la segunda parte del método, se le pedía que resolviera un problema inverso al anterior, dibujar las vistas de una estructura, al momento de preguntarle de cual lado era la vista, ella tenía tan clara la estructura que contestó de inmediato especificando la diferencia entre vista lateral por la derecha y por la izquierda.

Al finalizar esta parte, propusimos en el diseño de la entrevista una serie de preguntas relacionadas con un problema de mayor dificultad, el cual involucra varias soluciones. Al momento de encontrar su primera solución, se nota cómo generaliza la estrategia planteada para el primer problema y no tiene ninguna dificultad para expresar con simplicidad su razonamiento y resultado. Las preguntas siguientes involucraban distintas soluciones al mismo problema, en esta parte Carmen tuvo dificultades para encontrar las respuestas. Sin embargo, al analizar la situación y las dudas que se le presentaron, consideramos que las preguntas no se plantearon claramente. Además, pudo haber influido la poca familiaridad de los estudiantes de este nivel, con problemas que tienen varias soluciones posibles.

Recomendación.
Resolución de problemas que involucren habilidades como flexibilidad en el pensamiento y problemas con más de una solución.

3.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada".
La memoria generalizada se muestra de nuevo, tanto en el espacio de tiempo que hubo entre la aplicación del cuestionario y la entrevista (aproximadamente un mes), como en la aplicación de las mismas estrategias visuales utilizadas en el problema en la primera etapa y también en la complicación del problema en la segunda etapa del método. El método lo retiene, lo pone a prueba y lo vuelve a reproducir en el problema nuevo de manera crítica, no mecánicamente, y eso es lo que le permite corregir su error.

Problema 4.
4.1 Obtención de la información matemática.
Este problema en particular, centra su atención en la habilidad para comprender la estructura del problema, ya que si no se reconoce el complemento del conjunto que tienen cierto color, sería muy complicado llegar a la solución. El uso de las negaciones en problemas de matemáticas es poco frecuente en las tareas escolares y más a temprana edad y la mayoría de los estudiantes no están habituados a este tipo de problemas de lógica. En Carmen, esto no fue la excepción, la resolución de este problema fue uno de los que le causó mayor dificultad durante la entrevista. Sin embargo, consideramos que algunas de las intervenciones de los Entrevistadores, no fueron las más adecuadas para que Carmen lograra un entendimiento de la información matemática dada, esto lo podemos observar durante algunas intervenciones que se le hicieron a Carmen, la siguiente muestra un ejemplo de esto: … *"y yo sé que cinco no son azules entonces cuántas rojas habrá."* Una pregunta que podría haber sido de más ayuda sería: Si cinco bolas no son azules, entonces ¿cuántas azules habrá?

4.2 Procesamiento de la información matemática.
En este problema, Carmen no capta de golpe que las bolas no amarillas más las bolas

amarillas me da en total todo el conjunto. Ella logra identificar la negación: "bolas no verdes", sin embargo se esperaría que lograra una generalización rápida de su razonamiento lógico para cualquier otro color. Ya que anteriormente no hemos observado que la habilidad para generalizar sea un impedimento para ella, podemos intuir que en realidad no está comprendiendo las relaciones internas del problema, otra muestra de esto es la conjugación que utiliza para dar una respuesta: "Podrían ser cuatro azules y seis rojas... O podrían ser cinco y cinco." Este tipo de respuestas apuntan más hacia la posibilidad que a un resultado que ya se conoce. Sin embargo, esta incomprensión pudiera revelar aspectos sutiles de la redacción del problema, por ejemplo la estudiante puede preguntarse si ya se conoce el número de bolas que hay de cada color, entonces por qué se pregunta esto.

Cuando a Carmen se le dice estas no son azules ella perfectamente sabe que son rojas, pero cuando ella trata de ver el complemento no sabe que respuesta dar, porque pareciera que Carmen confunde el "saber" que no son azules, con el "extraer" cinco que no son azules, quizás porque su experiencia escolar solo involucre problemas de extracción. De hecho, las mismas preguntas que se le hicieron pudieron influir en esta confusión, cuando se le dice: "tu supón que estás no son… " se le está hablando de una hipótesis no de tener un resultado ya establecido.

En los problemas de lógica es más frecuente que el complemento sea algo del que no se tiene la información precisa. Por ejemplo: Se tiene una caja con 20 bolas azules y verdes. Si saco cinco bolas de la caja y ninguna es azul, ¿cuál es el máximo de bolas azules que podría haber en la caja?

En este problema, las bolas que se quedan dentro de la caja podrían ser azules o verdes, no se sabe de qué color, lo que sí sabemos es que las que están en la mano son verdes, por lo tanto el máximo de bolas azules que podría haber es 15, pero no se sabe con certeza que sea este número.

4.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada"

Ya que Carmen no resolvió como se esperaba este problema, no se pudo proceder a la segunda etapa de la metodología: planteamiento de un problema similar para observar la memoria generalizada, en donde Carmen pudiera utilizar estrategias similares del problema visto para resolver uno nuevo. Sin embargo, durante este problema se puede observar como Carmen responde una parte correctamente (conjunto de bolas verdes) pero no logra generalizar esa estrategia para resolver la segunda parte del problema (conjunto de bolas amarillas) de la misma naturaleza que el anterior.

Recomendación:
Resolución de problemas que involucren habilidades lógicas.

Problema 5. Resuelto correctamente en el cuestionario.
5.1 Obtención de la información matemática.
En esta parte, podemos observar que Carmen comprende el material matemático dado, además, explica perfectamente el procedimiento que utilizó para resolverlo en el cuestionario. Lo mismo para el problema de la segunda etapa.

5.2 Procesamiento de la información matemática.
Carmen escribe y explica un procedimiento abreviado, claro, simple y económico para este problema. Utiliza como estrategia principal la marcha atrás: de un resultado final recorre el camino inverso que la lleva a encontrar la solución correcta. De manera espontánea, ella identifica que en un conjunto que le quite cosas entonces se las tengo que agregar o viceversa, en otras palabras identifica desde el contexto la suma y la resta, la multiplicación y la división como operaciones inversas. Se brinca todo el planteamiento aritmético, lo hace de golpe. Ella tiene muy desarrollada su habilidad para abreviar todo el proceso de interpretación.

En cuanto a los cálculos numéricos, podemos ver que no realiza operaciones simples mentalmente, algo que nos gustaría observar en un niño matemáticamente talentoso. El hecho de que haga mentalmente la división 45/3 podría significar que no confía en sus habilidades de cálculo o que no lo hace con frecuencia. De cualquier manera, no es un impedimento para su razonamiento “hacia atrás”.

5.3 Retención de la información matemática “memoria generalizada”
En la segunda etapa del problema notamos como de nuevo utiliza el razonamiento hacia atrás como método para resolver un problema similar al anterior. Lo que denota que tiene desarrollada su memoria generalizada, como ya lo habíamos estado apreciando en algunos de los problemas anteriores.

Recomendación.
Resolución de problemas que involucren cálculo mental.

Problema 6.
6.1 Obtención de la información matemática.
El problema 6 tuvo problemas generales en esta parte, la información matemática dada causó dificultades para su comprensión. Durante la aplicación del cuestionario, se observaron aspectos generales del uso de los ángulos en los estudiantes de la educación básica. Algunos estudiantes, no están familiarizados con la notación de un

ángulo recto en una figura, algo que ciertamente no consideramos cuando se redactó este problema en el cuestionario, por lo cual se decidió sustituir para su siguiente aplicación.

La versión que le planteó el entrevistador 2, tenía muy sugerida la respuesta, en cuanto le dice cuántas veces cabrá ella encuentra con facilidad, esto oscurece la información porque se le está induciendo la respuesta.

6.2 Procesamiento de la información matemática.

Este problema como podemos observar en la parte metodológica es el único que necesita más conocimientos matemáticos. Al proponerlo se pensó en que no sería una dificultad para los estudiantes la utilización de fórmulas sencillas como el área del triángulo. Sin embargo, en la entrevista de Carmen observamos que no fue así. Ella dice no conocer cómo se obtiene el área de un triángulo, por esta razón la entrevistadora 1 decide proporcionarle esa información para poder concentrarnos en la parte de la reconfiguración. Cuando Carmen menciona que no sabe como resolver el problema se le hace la siguiente pregunta: "¿Cuántas veces crees que cabe el triángulo en el cuadrado?" Una pregunta que se considera demasiado guiada, ya que se le está forzando a que reconfigure sin que ella haya mostrado algún síntoma de esta habilidad. Carmen, efectivamente logra reconfigurar el cuadrado en cuatro triángulos como se esperaba, pero no se puede afirmar que ella lo hubiera podido lograr por si misma.

6.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada"

En la etapa dos de este problema, podemos observar como logra reconfigurar por sí misma y de una manera abreviada los cuadrados. Aquí se puede observar su talento potencial, en el problema anterior no identifica de golpe que es necesario reconfigurar, pero ya que se le introdujo a este tipo de estrategias geométricas, se le facilitó hacerlo en este nuevo problema, esto también gracias al desarrollo de una memoria generalizada. Es decir cuando Carmen no conoce algo, se le enseña como hacerlo y lo puede seguir desarrollando con gran facilidad.

4.4.3 Entrevista Daniela

4.4.3.1 Datos generales de la entrevista

La entrevista con Daniela fue presentada aproximadamente tres semanas después de la aplicación del cuestionario en su salón de clases. La entrevista duró 50 minutos, y al igual que a las entrevistadas anteriormente se le especificó a Daniela los propósitos de la entrevista y las demás generalidades mencionadas anteriormente. Durante la entrevista estuvieron presentes Daniela y la Entrevistadora.

4.4.3.2 Descripción de la entrevista

Problema 1.

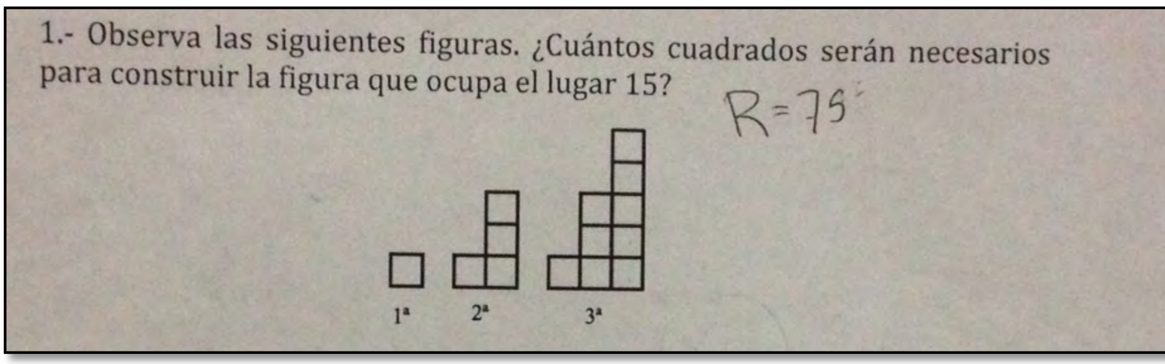


Figura 4.47

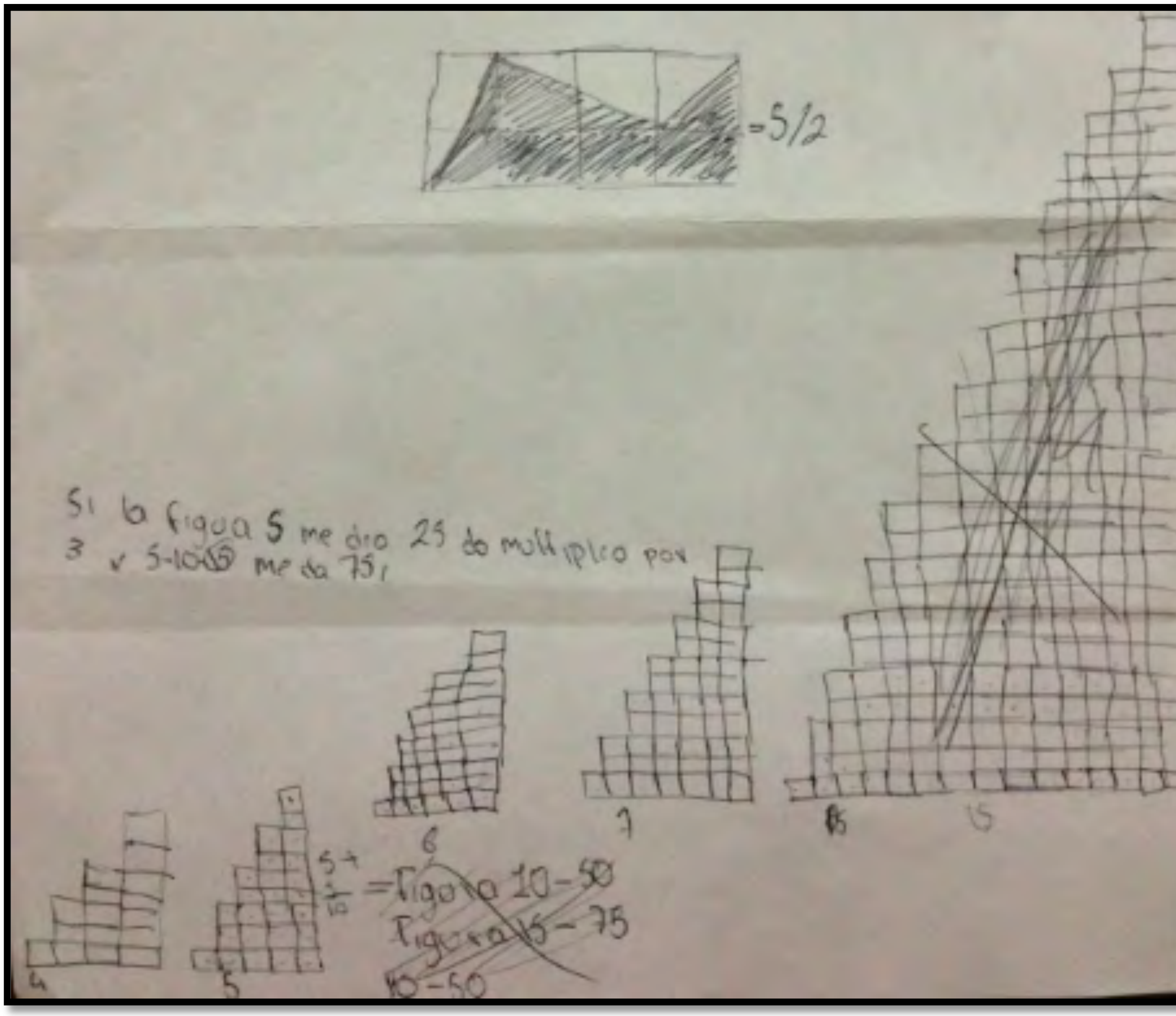


Figura 4.48

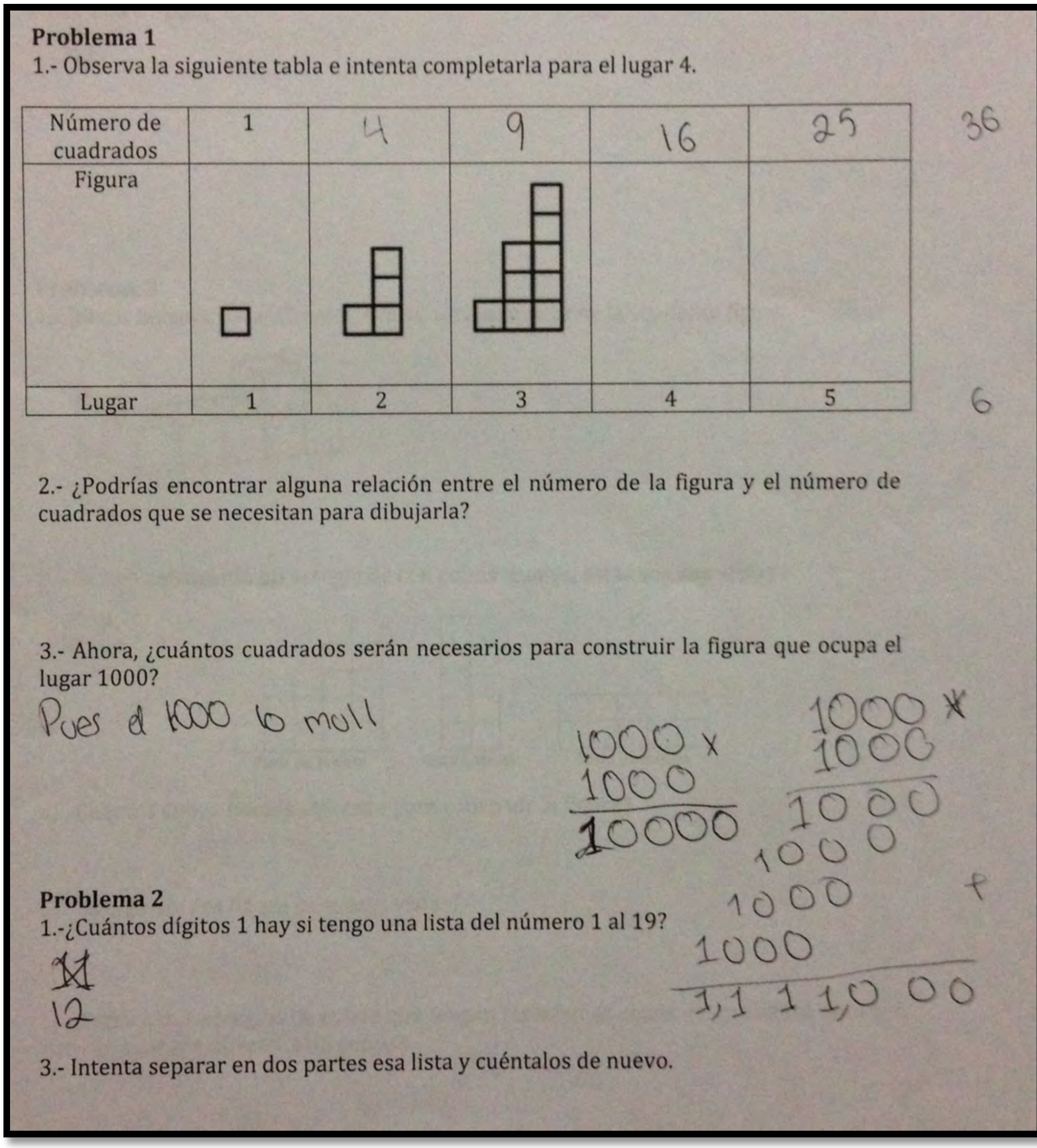
Etapa 1.

> E: Lee el primer problema
>
> D: Observa las siguientes figuras. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 15?
>
> E: ¿Qué hiciste para resolverlo?
>
> D: Aquí yo saqué hasta el número 5, que es éste [refiriéndose a la figura 5 que dibujó en la Ilustración 2] y ahí me dieron los 25 cuadritos y yo ahí saqué una lógica si en la figura 15 eran 25 entonces en la figura 15 serían cinco veces 5 que es 15 serían 75, porque se doblaría.

Hasta este momento, el último enunciado de Daniela no tiene sentido, una explicación más lógica que podemos inferir de su respuesta escrita es la siguiente: si en la figura 5 eran 25, entonces en la figura 15 serían 3 veces más que en la 5 y serían 75. Es decir sacó la proporción directa multiplicando por tres, entre el número de la figura y los números de los cuadrados.

> E: Entonces, éste que hiciste acá [refiriéndose a la figura 15 que se muestra en la Ilustración 2]…
> D: Lo estaba haciendo pero…
> E: ¿Sentiste que no estaba bien?
> D: Mjm… pero me gustó más el otro método.

Después de conocer sobre los métodos utilizados para resolver el problema, pasamos a las preguntas o problemas siguientes que servirán de guía para resolver el problema mediante otra estrategia.



Problema 1
1.- Observa la siguiente tabla e intenta completarla para el lugar 4.

Número de cuadrados	1	4	9	16	25	36
Figura						
Lugar	1	2	3	4	5	6

2.- ¿Podrías encontrar alguna relación entre el número de la figura y el número de cuadrados que se necesitan para dibujarla?

3.- Ahora, ¿cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 1000?

Pues el 1000 lo mull

1000 x 1000 = 10000

1000 x 1000 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 1,1 1 1,0 00

Problema 2
1.-¿Cuántos dígitos 1 hay si tengo una lista del número 1 al 19?

~~11~~
12

3.- Intenta separar en dos partes esa lista y cuéntalos de nuevo.

Figura 4.49

E: [Después de leer el Problema 1 de la Figura 4.49] Entonces, aquí está el lugar que es el uno y aquí está el número de cuadrados que es uno. Si aquí está el dos, ¿cuál es el número de cuadrados que tiene?
D: Cuatro.
E: La siguiente…
D: Nueve.
E: La siguiente…
D: Dieciséis [Responde después de contar los cuadrados de la última columna de la figura que ocupa el lugar tres más otros dos]

E: Entonces, fíjate bien, con el método que utilizaste para resolver el problema yo voy a hacer una. Si para la figura tres necesité nueve ahora yo voy a sacar la figura seis, ¿por qué número lo voy a tener que multiplicar?
D: Por el nueve, no por el tres…
E: Por el dos, ¿no? Siguiendo lo que tu hiciste, si tengo la del 5 y la quiero para la quince la multiplico por tres, si tengo la del 3 y quiero la del 6 la multiplico por dos. Entonces yo voy a multiplicar por dos el nuevo y me da 18, ¿crees que va a tener 18?
D: No.
E: No verdad, porque aquí ya son muchos y la del cinco tu dijiste que que eran cuántos, D: 25
E: ¿Verdad? ¿La del seis cuántos crees que va a tener?
D: Me salió también 25.
E: Cuéntala de tu figura que dibujaste.
D: Treinta y seis [después de contar].
E: Entonces, podrás encontrar alguna relación entre el número de la figura y el número de cuadrados [leyendo la segunda parte de la Figura 4.49]. Es decir, al uno le corresponde el uno, al dos el cuatro, al tres el nueve, al cuatro el dieciséis, ¿podrías encontrar alguna relación?
D: Que todos se multiplican por ese mismo número.

Como podemos observar Daniela, logró, con la guía de la maestra, llegar al razonamiento esperado. La Entrevistadora, en este problema obvió que Carmen podría resolver el problema inicial que es la figura 15. Sin embargo, consideramos que hubiese sido de ayuda solo para ver la aplicación del algoritmo en la multiplicación 15 x 15. Pasamos entonces a la siguiente parte metodológica.

Etapa 2

E: Entonces si yo te preguntara ahora por ejemplo la del 1000. ¿Tu la podrías hacer o la dibujarías?
D: Pues ahora que ya se esto pues la haría así.
E: ¿Cómo?
D: Pues el mil lo multiplicaría por el mismo mil.
E: A ver, hazla.

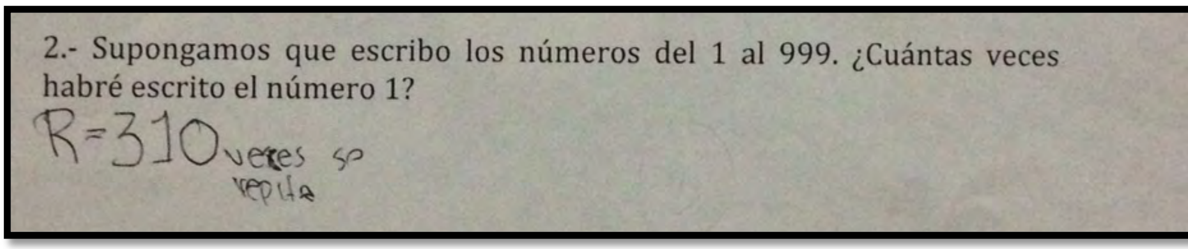
En este momento Carmen comienza a realizar la operación de mil por mil, antes de poner el resultado, pregunta que si tiene que poner todos los ceros o solo el resultado, cuando la maestra contesta que solo el resultado ella escribe 2000. Cuando la maestra le pregunta ¿cuánto es 1000 más 1000? Ella intenta corregir su error poniendo un 1 en lugar del 2 y un cero más, resultando 10,000, como podemos observar en la Figura

4.49. La maestra vuelva a cuestionar su resultado y comienza a realizar la multiplicación paso por paso como se muestra en la parte derecha de la Figura 4.49, donde obtiene como resultado 1,111,000. La maestra en este momento decide pasar a la siguiente pregunta a pesar de que Daniela no llegó a la solución numérica correcta.

E: Entonces, para el número que yo te preguntara tú me podrías contestar, ¿verdad?
D: Si.
E: ¿Cómo le harías para el cincuenta?
D: Multiplicaría cincuenta por cincuenta.

Terminando así, las preguntas para el problema 1.

Problema 2.


2.- Supongamos que escribo los números del 1 al 999. ¿Cuántas veces habré escrito el número 1?

R=310 veces se repita

Figura 4.50

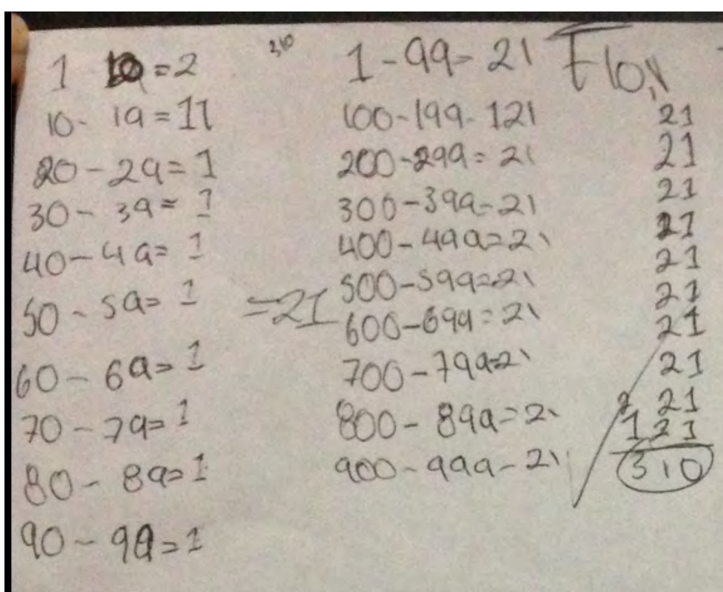


Figura 4.51

Etapa 1

E: [Después de leer el problema] ¿Cómo le hiciste para resolverlo?

D: Pues aquí lo saqué como anteriormente la maestra ya nos había puesto varios así, también con el número uno hasta el mil. Entonces saqué esta de 10 en 10 y ya con tener la del 10 pues con la del 100, la del 200, ya se me hizo más o menos. La de 10 era más o menos la del 200 pero la del 100 al 199 ahí le iba agregando un uno. Entonces ahí fueron los de 21 números, del 100 fueron 121. Y luego ya todos me daban 21 y luego ya los sumé todos. Con hacerlo del 1 al 100 podía hacerlos más fácil de 100 en 100.

El siguiente paso en la metodología es obtener información sobre el error que tuvo Daniela en el acomodo conveniente de los números del 1 al 19.

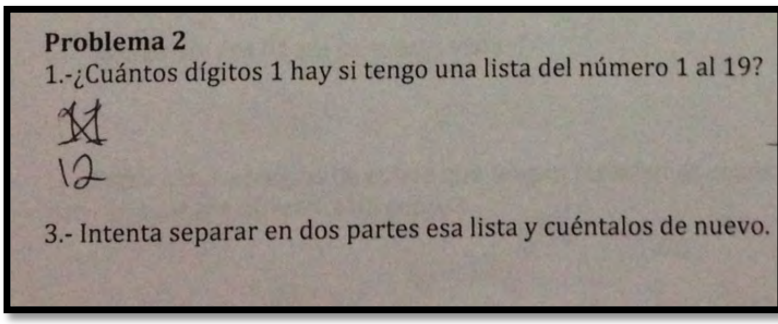

Problema 2
1.-¿Cuántos dígitos 1 hay si tengo una lista del número 1 al 19?
~~11~~
12
3.- Intenta separar en dos partes esa lista y cuéntalos de nuevo.

Figura 4.52

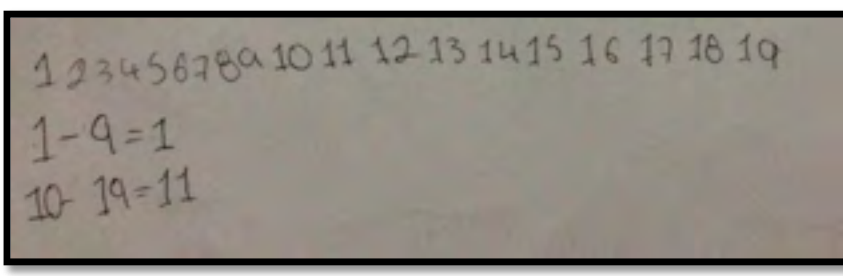

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
1-9=1
10-19=11

Figura 4.53

E: Entonces, ¿cuántos dígitos 1 hay si tengo una lista del 1 al 19. [Leyendo el problema 1 de la Figura 4.52]

D: Doce, Trece…

E: No sé, a ver … tu dime.

D: Once.

E: Si quieres apunta los números. [Daniela comienza a escribir los números del 1 al 19 como aparece en la Figura 4.53.

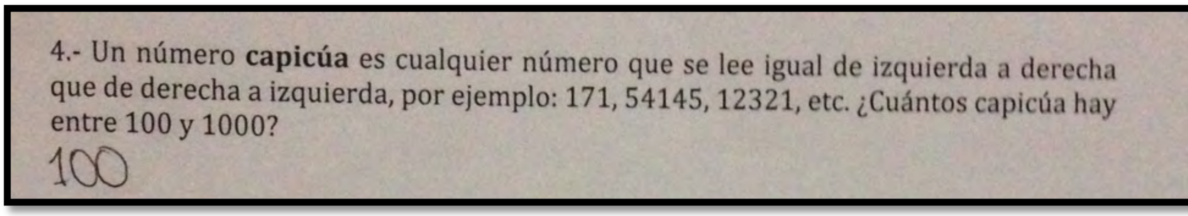
D: Salieron 12

E: Si tuvieras que separarlos en dos partes, ¿cómo le harías?

D: ¿Cómo?
E: Sepáralo en dos listas los números del 1 al 19.
D: Separaría del 1 al 9 y del 10 al 19.

Después de que Daniela resuelve el problema, la Entrevistadora pasa al problema del cuestionario y le pregunta sobre la confusión en la lista del 1 al 10 y del 10 al 19, en este momento Daniela corrige su error. Terminando con la primera etapa del problema.

Etapa 2


4.- Un número **capicúa** es cualquier número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo: 171, 54145, 12321, etc. ¿Cuántos capicúa hay entre 100 y 1000?
100

E: [Después de que Daniela lee el problema.] Si te quedó claro que es un número capicúa.
D: El 22.
E: Ahora, uno de tres cifras.
D: El 333. [Lo escribe]
E: Quiero saber cuántos capicúa hay entre 100 y 1000.
D: El primero es el 111.
E: Pero no tienen que ser todos iguales, que se lean igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo el 171, pero se lee igual.
D: 113
E: No, el 131 por ejemplo sí es. ¿Cuántos hay del 100 al 1000?
D: Que no sean iguales.
E: No, si pueden ser iguales también, solo tienen que tener la particularidad de que se lean de un lado y del otro igual.
D: Serían muchos.
E: Si, pero igual en el problema anterior había muchos y no los tuviste que escribir todos.
D: Del 100 al 199 habría como …. Como 21.
E: Escribe los del 100 al 199.

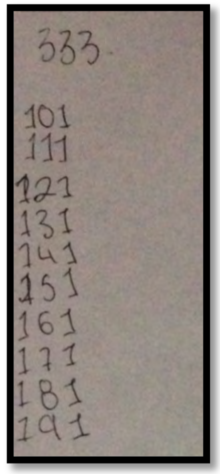


Figura 4.54

Daniela comienza a escribir los números del 111 en adelante, como se muestra en la Figura 4.54, omitiendo el 101. Cuando termina la maestra le pregunta:

E: Del 100 al 110 no hay.
D: No se.
E: ¿El 100 es? ¿El 101 es?
D: Ah si.
E: Muy bien, ya tienes ahí los del 100, entonces del 100 al 1000, ¿cuántos habría?
D: [Después de unos segundos]. Pues… Como 100.
E: ¿Cómo le hiciste?
D: Casi igual que en todos, porque si del 100 al 199 hay 10 y luego son número que se leen al derecho y al reverso. Entonces los de abajo también están los 10. Haz de cuenta 232.
E: Muy bien, escríbelo.

Así se concluye con el problema 2.

Problema 3.

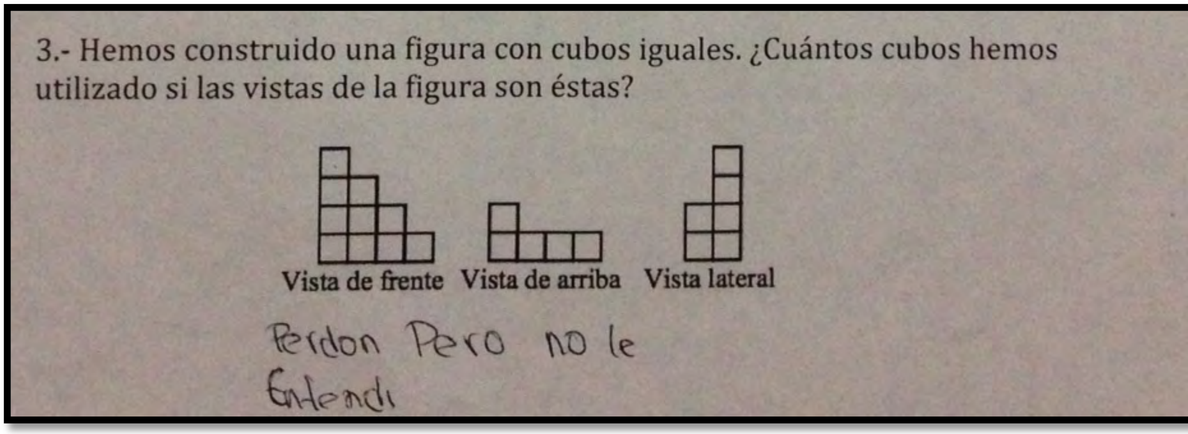


Figura 4.55

E: ¿Qué fue lo que no entendiste de eso? [Después de leer el problema 3]
D: Es que… conoce como que… Pues por lo mismo si así se ve de frente [señalando la figura de vista de frente], no podrías ver exactamente los cuadritos.
E: Haz de cuenta que tu no puedes ver cuántos cubos hay, porque son cubos, es una figura con cubos y tú la ves así. Tu nada más ves una pared y ves esto [señalando la figura de vista de frente], tu volteas esa figura y ves otra cosa, que es la vista lateral. Y tu volteas ahora de arriba y tu ves esta figura [señalando la vista de arriba]. Te colocas sobre esa y ves eso.
D: Pero por ejemplo, si así lo veo de frente, por qué o cómo si lo veo de arriba lo veo así.
E: Si yo lo veo de frente, esto [tomando un *folder* delgado] nada mas es una línea. Pero de arriba, ¿qué es?
D: Un rectángulo.
E: Un rectángulo, se ve distinto, ¿verdad? Y de lado [tomando la vista lateral del folder] no es una línea igual, es una línea más pequeña, ¿verdad? Entonces se ven diferente pero es una sola cosa. Por ejemplo, esa computadora no se va a ver igual así como está que de lado, ¿verdad?

Después de esta explicación, la entrevistadora se percata de que la estudiante sigue sin comprender el problema de cómo las vistas pueden formar una figura, le entrega unos cubos de madera, para que ella pueda visualizar mejor el arreglo que es formado con estas vistas.

E: Intenta construir una donde la vista de frente se vea así [señalando la vista de frente de la Figura 4.55]

Daniela seguido de la instrucción anterior comienza a construir el siguiente arreglo de cubos, como se muestra en la Figura 4.56.

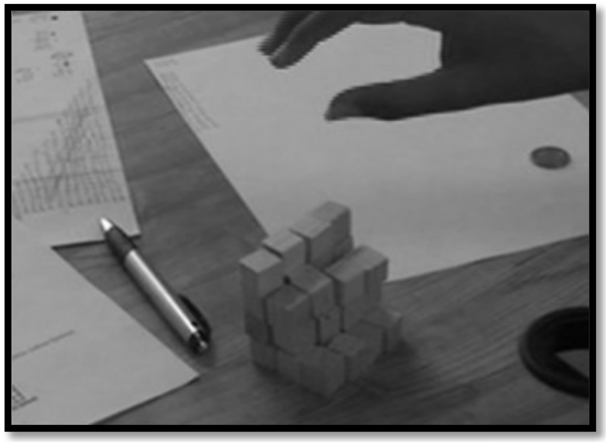


Figura 4.56

Como vemos en la Figura 4.56, Daniela reproduce la vista de frente cuatro veces, cuando se le acaban los cubos, la maestra la interrumpe construyendo un arreglo [Figura 4.57] para que Daniela verifique si efectivamente tiene la vista de frente como se pide.

Figura 4.57

Después de que Daniela confirma que efectivamente esa construcción me da la vista de frente, se le pide la modifique para que se cumple que la vista lateral, Daniela construye la figura de la Figura 4.59.

Figura 4.56

La cual funciona también para la observación de la vista de arriba, cuando se le cuestiona sobre esto, ella después de preguntar si podía ponerse de pie para verificar afirma que sí, efectivamente la figura cumple con la vista de arriba. Ya que terminamos con esta parte, se le pide que responda la pregunta del problema 3 a lo que ella responde 12. Terminando así con esta etapa.

Etapa 2.

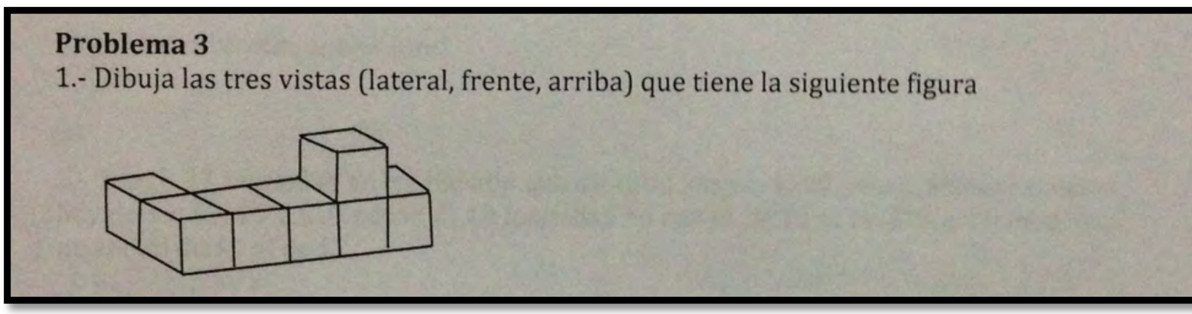

Problema 3
1.- Dibuja las tres vistas (lateral, frente, arriba) que tiene la siguiente figura

Figura 4.57

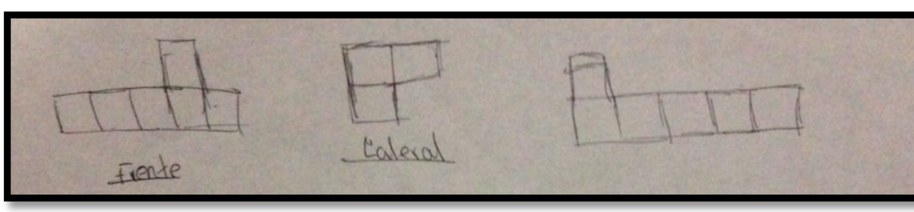
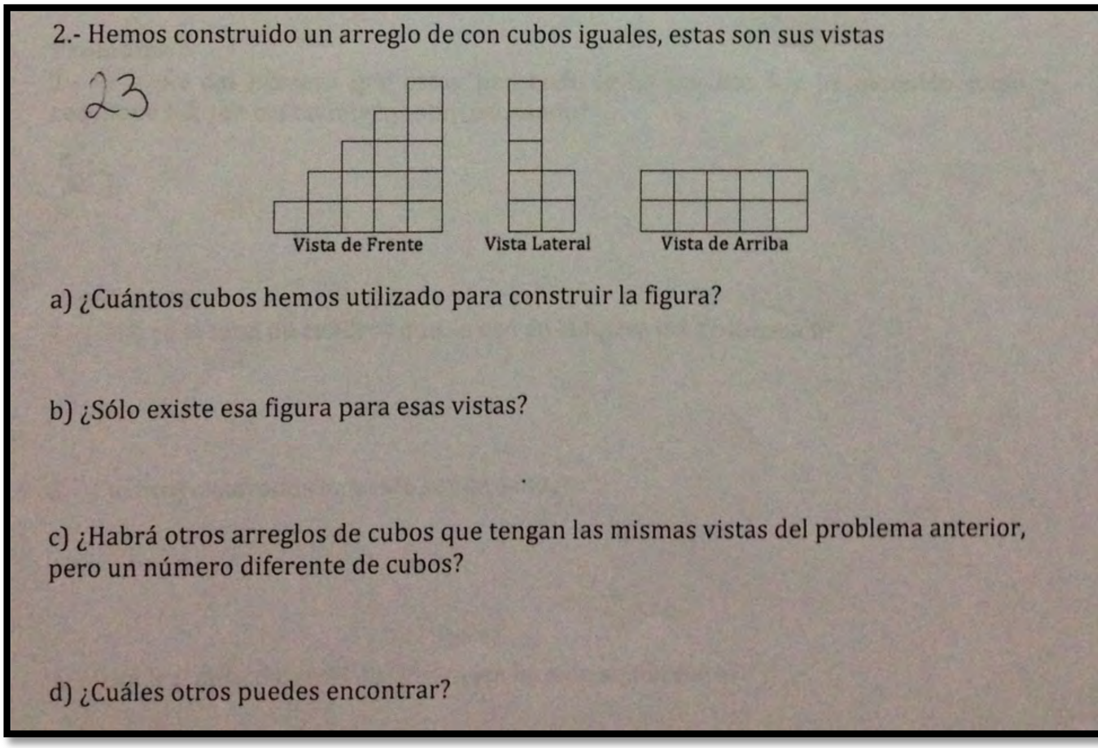


Figura 4.58

E: [Después de leer el problema 1 de la Figura 4.60] Ahora te doy una figura como la que teníamos. Dibújame ahora las vistas: lateral, frente y arriba.
D: ¿La puedo formar? [Refiriéndose a tomar los cubos para verla]
E: Intenta hacerlo primero sin los cubos.

En este momento, Daniela comienza a dibujar las figuras que se muestran en la Figura 4.61. Cuando termina, se le cuestiona sobre la otra vista lateral, dice que sería igual, es decir no identifica el cambio de la vista lateral izquierda a la derecha.


2.- Hemos construido un arreglo de con cubos iguales, estas son sus vistas

23

Vista de Frente Vista Lateral Vista de Arriba

a) ¿Cuántos cubos hemos utilizado para construir la figura?

b) ¿Sólo existe esa figura para esas vistas?

c) ¿Habrá otros arreglos de cubos que tengan las mismas vistas del problema anterior, pero un número diferente de cubos?

d) ¿Cuáles otros puedes encontrar?

Figura 4.59

Continuando con las preguntas, la entrevistadora lee el problema 2 que se muestra en la Figura 4.62, este problema es una complicación del Problema 3 del cuestionario.

> D: ¿Es la misma de antes?
> E: Se parece.
> D: [Después de contar los cuadrados] 32.

Como podemos observar en este momento Daniela lo que hace para resolver el problema, a pesar de que se le indicó que era parecido al anterior, es contar todos los cuadrados del problema, 15 de la vista de frente, más 7 de la vista lateral, más 10 de la vista de arriba. Cuando la Entrevistadora, se percata de que Daniela no está comprendiendo el problema le da de nuevo los cubos de madera para que construya la figura e intente resolverlo. Ella toma los cubos y forma la siguiente figura.

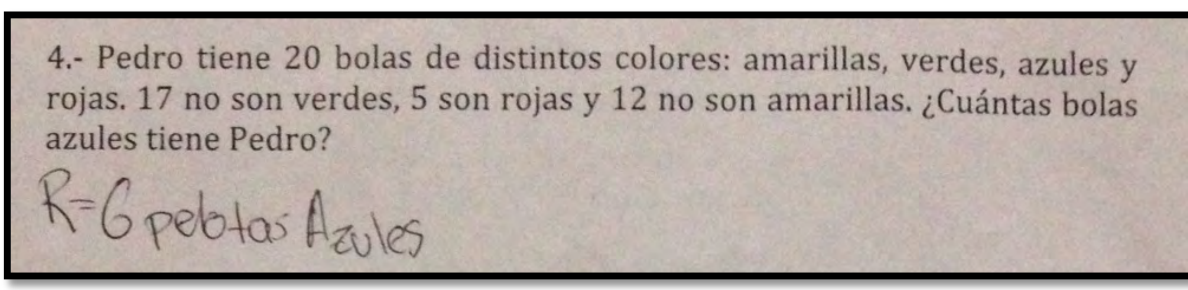
Figura 4.60

En la Figura 4.60 se muestra que la construcción de Daniela con los cubos no coincide con la del Problema, la entrevistadora en ese momento la cuestiona para que reflexione su resultado, Daniela quita el cubo que sobra, teniendo así el resultado correcto. Terminando esta parte se sigue con los siguientes incisos.

> E: ¿Solo existe esa figura para esas vistas? o ¿puedes hacer otra diferente?
> D: ¿Con los mismos cubitos?
> E: No, puedes quitar o poner cubos, siempre y cuando se mantengan estas vistas. O dime si es la única.
> D: Es la única, ¿no?

Hasta este momento Daniela no percibe que se podrían construir distintas figuras con esas vistas, la entrevistadora ayuda en este proceso finalizando con otros resultados posibles. Sin embargo, las preguntas siguientes son solo a manera de conclusión y no para seguir observando sus habilidades potenciales.

Problema 4


4.- Pedro tiene 20 bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. 17 no son verdes, 5 son rojas y 12 no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

R=6 pelotas Azules

Figura 4.61

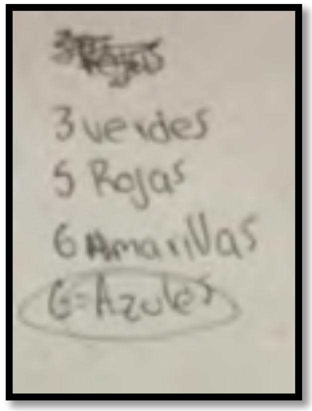


Figura 4.62

E: [Después de que Daniela lee el problema.] ¿Cómo le hiciste para resolverlo?
D: Pues yo aquí saqué tenía 6 pelotas porque si tienes 20 y 17 no son verde pues entonces tres serían verdes, porque las demás ya no son verdes. Y luego ya cinco son rojas. Y luego si ya llevo tres y cinco son ocho y si doce no son amarillas entonces ocho son amarillas…
E: Y aquí tienes 6 amarillas [señalando el fragmento de la Figura 4.52]
E: Pero estás bien.
D: Entonces 8 serían amarillas, ahí ya tengo… Pues el resto de las pelotas serían las azules.
E: ¿Y cuántas son?
D: Quedan 2.
E: Si quieres apúntalo.

Daniela comienza a escribir lo que se observa en la Figura 4.63.

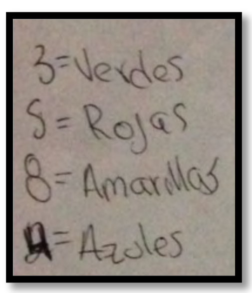


Figura 4.63

D: Pues quedan dos azules [Esta parte es previo a que escribiera 4 azules en el Figura 4.63].
E: Todos esos suman veinte.
D: Son cuatro azules.

Se toma atención al cálculo anterior, ya que se considera que es parte fundamental del resultado, la observación de que lo que resta son las azules. En el diseño de la entrevista estaba previsto realizarle las preguntas de la Figura 4.64, sin embargo, ya que Daniela, no presentó ningún problema para detectar el complemento del conjunto, se decidió no realizarlas. Por lo tanto, así terminamos la primera etapa.

2.- Tengo 10 canicas rojas, azules y verdes y cuatro de ellas no son rojas.

a) ¿Cuántas canicas rojas hay?

b) ¿Cuántas canicas azules hay?

Figura 4.64

Etapa 2.

3.- Tengo 27 monedas en mi bolsillo que en total suman \$100 pesos, adivina cuántas hay de \$1, \$2, \$5 y \$10 pesos, si 10 monedas no son ni de \$5 ni de \$10, y 20 monedas no son ni de \$5 ni de \$2.

Figura 4.65

Al estar revisando la Entrevista, se detectó una inconsistencia en el problema. Ya que si resolvemos el problema tal y como está redactado. Los resultados de los números de monedas serían fracciones. La redacción correcta del problema debiera ser la siguiente:

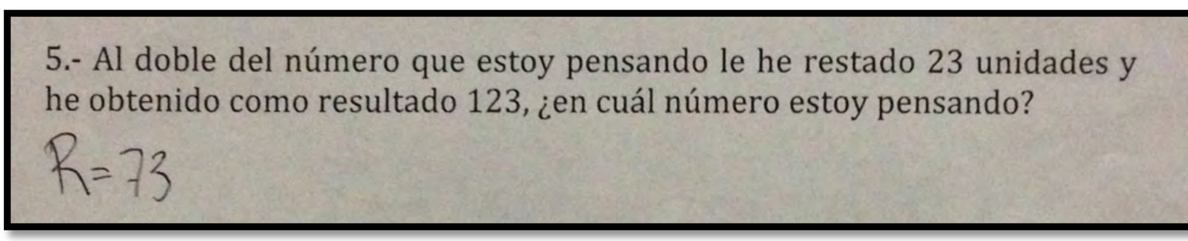
> 3.- Tengo 27 monedas en mi bolsillo que en total suman \$100 pesos, adivina cuántas hay de \$1, \$2, \$5 y \$10 pesos, si 10 monedas son de \$5 y de \$10, y 20 monedas no son ni de \$5 ni de \$2.

Teniendo esto en cuenta en la descripción y análisis de este problema, solo tomaremos la parte en donde Daniela identifica los complementos de los conjuntos de monedas de 5 y 10; de 5 y de 2.

> D: [Después de que la entrevistadora lee el problema.] Entonces estas 10 monedas que no son de $5 ni de $10 ni de $20, serían de $2 pesos.
> E: ¿Por qué de dos pesos?
> D: Porque dice que hay de $1,$2, $5 y $10 y dice que hay 10 monedas que no son de $5 ni de $10 ni de $20.
> E: No, ni de $5 ni de $10, dice "y 20", eso es aparte.
> D: Ah, entonces podrían ser de 20…
> E: Pero no hay monedas de 20, hay de $1, de $2, de $5 y de $10.
> D: Podrían ser monedas de $1 o de $2. Y veinte monedas no son ni de $5 ni de $2, entonces esas podrían ser de $10 y de $1.

Seguido de esta parte, la estudiante intenta resolver el problema proponiendo valores que cumplan las condiciones que ella estableció con los enunciados anteriores, el problema no se resolvió y cuando la entrevistadora se percató del error en el enunciado pasó lo siguiente, terminando así con la segunda etapa del cuarto problema.

Problema 5


5.- Al doble del número que estoy pensando le he restado 23 unidades y he obtenido como resultado 123, ¿en cuál número estoy pensando?

R=73

Figura 4.66

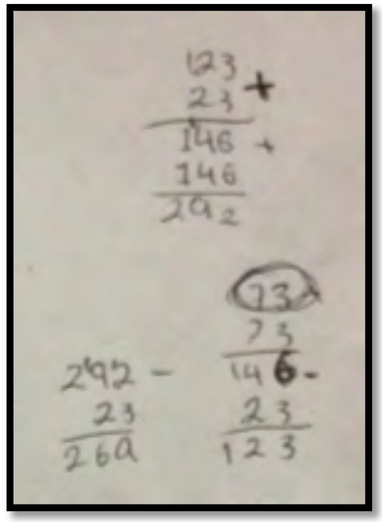
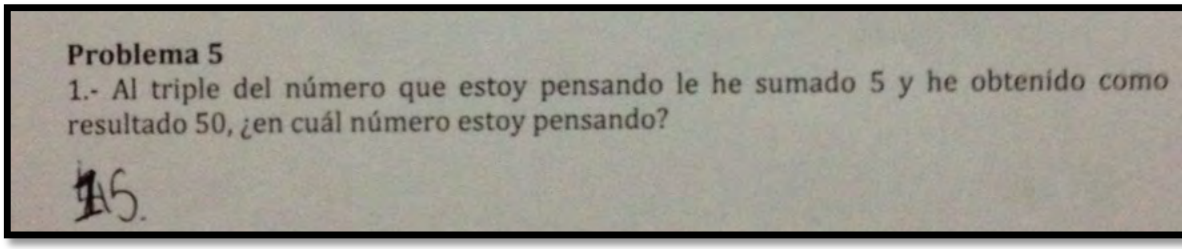


Figura 4.67

D: [Después de que la entrevistadora lee el problema.] Ahí yo puse 73 porque… [vuelve a leer el problema Daniela] ¿Puedo ver ésta hoja también? [Refiriéndose a la hoja de la Figura 4.67]
E: Sí.
D: Entonces como le había restado 23 unidades y había obtenido eso, pues ahora le tengo que sumar los 23. Y me da los 146. Entonces como era el doble del número lo voy a volver a sumar. Y ahí quedan 292. Entonces al 292…
E: Entonces…
D: Como se los había restado, se los vuelvo a sumar. Como era el doble se los vuelvo a sumar.
E: No, pero a ver. Tienes aquí el 73, ¿verdad? Dice el doble del número que estoy pensando y el doble de ese número de 73 es 146 y a 146 le resté 23 y me quedó 123, ¿verdad? Y ese fue el resultado 73.
D: Entonces acá tendría que 73 y 73 me dan 146 queda la mitad, o sea que al doblar este número me da 146.

Daniela, en su respuesta tiene dos procedimientos distintos, se esperaría que si su resultado final fue 73, ella explicara las operaciones que se encuentran en la parte inferior derecha de la Figura 4.67. Por lo tanto, en el diseño de la entrevista no estaba la etapa donde se le presentarían variaciones del problema simplificadas para llegar a la solución correcta. Sin embargo, ya que ella en el fragmento de la transcripción anterior, da otro procedimiento y por ende otro resultado la entrevistadora explica el resultado basado en las operaciones correctas. Ahora, pasaremos a la segunda etapa del diseño.

Etapa 2


Problema 5
1.- Al triple del número que estoy pensando le he sumado 5 y he obtenido como resultado 50, ¿en cuál número estoy pensando?

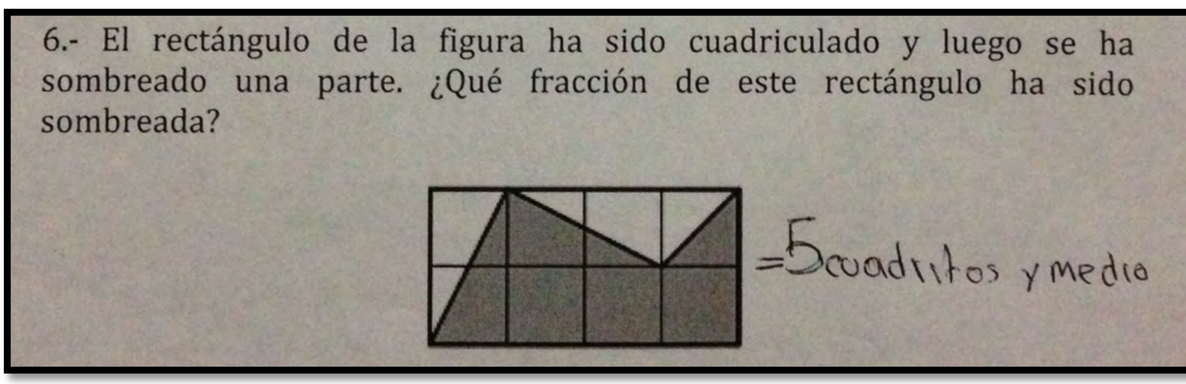
15.

Figura 4.68

D: [Después de que la maestra lee el problema.] Pues al 50 le tengo que sumar el cinco porque se lo había restado, entonces serían 55, entonces luego si me quedan 55…
E: A ver, al triple del número que estoy pensando le he sumado 5.
D: Entonces le tengo que restas cinco, y me quedan 45. Y el 45… lo tengo que dividir entre tres, porque 15 por tres son 45.

Así terminamos con la etapa 2 del quinto problema del cuestionario.

Problema 6


6.- El rectángulo de la figura ha sido cuadriculado y luego se ha sombreado una parte. ¿Qué fracción de este rectángulo ha sido sombreada?

=5cuadritos y medio

Etapa 1

D: [Después de leer el problema.] Pues aquí tengo los cinco cuadritos y medio porque aquí tengo tres cuadritos que están llenos y luego empecé a ver los cuadritos que no están llenos y vi que formaban dos cuadritos más, porque este espacio cabía aquí, y luego este chiquito cabía acá, entonces ya son otros dos y este ya queda a la mitad.
E: Okey, entonces, cinco cuadritos y medio pero de cuánto es el total. Porque aquí dice que es fracción.
D: Cinco quintos y medio.

E: Cinco cuadritos y medio de cuanto es el total.
D: Cinco octavos y medio.
E: Cinco cuadritos y medio de ocho.

Ya que no se le ocurre ninguna idea a Daniela para representar ese número, se pasó a la siguiente etapa.

Etapa 2

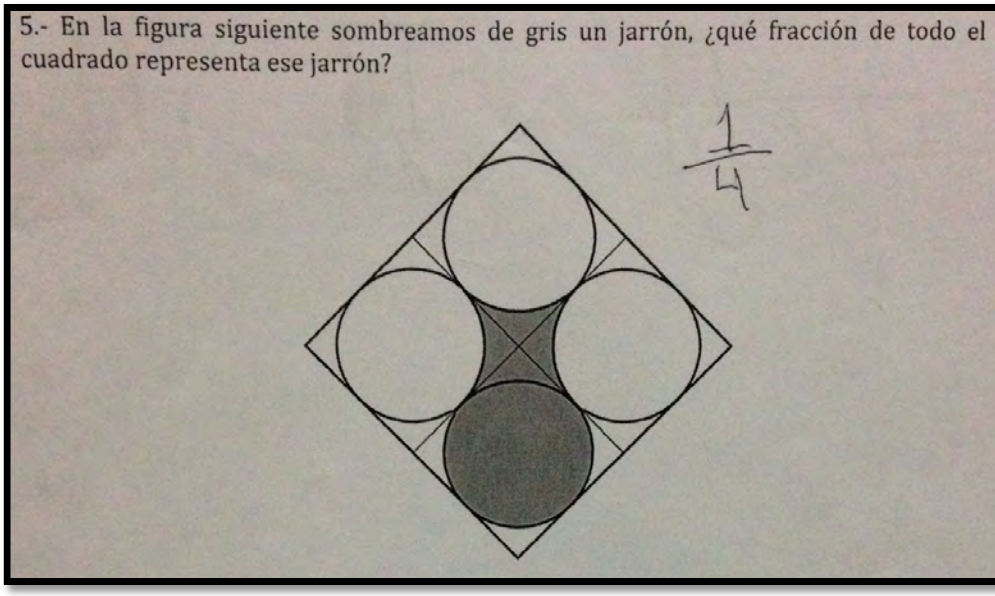


Figura 4.69

Después de que Daniela lee el problema 5 de la Figura 4.69 comienza a colocar señalando los espacios sombreados del centro hacia los espacios en blanco del cuadrado que contiene al círculo sombreado (Figura 4.70).

D: Está representando un cuarto.
E: Okey, ¿por qué?
D: Porque esta figura está partida en cuatro y aquí está un círculo y aquí hay cuatro de estos y haga de cuenta, esto lo puedo poner acá y este acá y este acá. [Señalando la reconfiguración de los tres espacios sombreados al cuadrado sombreado.]

Figura 4.70

Terminando con un agradecimiento a Daniela por su tiempo finalizamos con la entrevista.

4.4.3.3 Análisis de la entrevista

El análisis de los problemas es presentado según el bosquejo general de las estructuras de las habilidades matemáticas en niños MT de Krutetskii.

Problema 1. Resuelto incorrectamente en el cuestionario.

1.1 Obtención de la información matemática.

Desde la hoja de respuestas realizada durante la aplicación del cuestionario, podemos ver la claridad que tiene Daniela en la evolución de las figuras del problema 1. Con base en el baremo se le asignaron a ella dos puntos por realizar las figuras siguientes correctamente y casi lograr la número 15. Sin embargo su resultado fue 75, un número que no coincide con las aproximaciones gráficas, al preguntarle sobre las acciones utilizó para resolver el problema, ella manifestó que primero hizo intentos por encontrar la figura gráficamente y después las operaciones para calcular la figura 15 en proporción a la cinco, concluyendo que este era el resultado correcto, sin verificar sus resultados gráficos.

Independientemente de las decisiones que Daniela tomó en el procesamiento de la información, en esta primera parte ella manifiesta desarrollada la habilidad para la comprensión de la estructura del problema matemático.

1.2 Procesamiento de la información matemática.

La habilidad para identificar patrones se muestra desde el cuestionario, ella dibuja la figura 4 y 5 correctamente y hace un intento por dibujar la 15. Sin embargo, se deja guiar por su segunda estrategia. Algo que se esperaría de un alumno talentoso es la comparación de un resultado numérico vs el gráfico. En el cuestionario Daniela, no estima ni contrasta sus resultados, decide que las figuras son proporcionales sin contrastar por lo menos las figuras 4 y 5. Estas estrategias de proporción directa son muy comunes en los problemas escolares, y es muy probable que Daniela haya considerado que era un problema rutinario, por lo cual descarga la responsabilidad en su rutina. De lo anterior, podemos concluir que hubo poca reflexión crítica sobre sus estrategias y resultados.

Las preguntas realizadas en la primera etapa de la entrevista están diseñadas con el propósito de observar si Daniela puede desechar la estrategia en donde utiliza la proporcionalidad y buscar una que compare el número de la figura con el número de cuadrados. Por ejemplo, en el momento en que la entrevistadora pregunta: "Entonces, podrás encontrar alguna relación entre el número de la figura y el número de cuadrados. Es decir, al uno le corresponde el uno, al dos el cuatro, al tres el nueve, al cuatro el dieciséis, ¿podrías encontrar alguna relación?" Daniela encuentra rápidamente una estrategia para resolver el problema, multiplicar el número por si mismo. Dado que ella respondió con facilidad se obvió la pregunta de los cuadrados de la figura 15. Además, la respuesta se había inducido suficiente en la pregunta de la entrevistadora, por lo tanto se decidió pasar a la siguiente etapa.

En la segunda etapa al resolver la operación 1000x1000 Daniela muestra muchas dificultades al realizar el algoritmo de la multiplicación, hace dos intentos por resolverlo y la entrevistadora decide no insistir en llegar a un resultado numérico correcto, ya que las habilidades a detectar en este problema no están relacionadas principalmente con las de cálculo. Sin embargo, a pesar de que no es nuestro principal objetivo, podemos observar un bajo desarrollo en las habilidades de cálculo.

Hasta el momento, no se observan habilidades altamente desarrolladas de abreviación o flexibilidad en el pensamiento.

1.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada"

En esta etapa, podemos observar como Daniela encuentra un patrón y lo puede generalizar para cualquier variante del primer problema. Y se considera trascendental el que no haya podido llegar al resultado numérico, pero si es significativo que haya logrado una conexión entre los cambios de cierto número de figura a otro.

1.4 Recomendaciones

Resolución de problemas que impliquen cálculo de áreas mediante descomposición y recomposición (geometría).

Planteamiento de problemas que involucren soluciones no proporcionales (teoría de números).

Problema 2. Resuelto incorrectamente en el cuestionario.

2.1 Obtención de la información matemática.

Al preguntarle a Daniela sobre las estrategias que utilizó para resolver el problema 2 durante el cuestionario, nos explicó que en repetidas ocasiones la maestra había puesto problemas similares a este, algo que no conveniente para los propósitos de este trabajo y en específico para esta etapa del análisis. El que ella ya esté relacionada con las estrategias para resolver este tipo de problemas influye directamente en cómo obtiene y utiliza la información matemática dada, ya que no se sabe si para ella es un problema o un ejercicio repetitivo que no le ofrece ningún reto cognitivo.

En la Etapa 2, si podemos conocer más sobre este aspecto, ya que es un término nuevo para Daniela. En un primer momento podemos observar que la primera aproximación de la información matemática que Daniela percibe es que un número capicúa es un número con todas sus cifras iguales, esto lo podemos intuir de sus primeros ejemplos: “el 22”, “el 333”, “el primero es el 111”. La Entrevistadora tiene que especificar en repetidas ocasiones el significado del término para que Daniela pueda comenzar con el procesamiento. De esto podemos concluir que la estudiante no comprende rápidamente y por sí misma la información matemática nueva.

2.2 Procesamiento de la información matemática.
Para Daniela éste no fue un problema nuevo, sino como ella menciona: “la maestra ya nos había puesto varios así, también con el número 1 hasta el 1000”. Por tal motivo, es complejo opinar sobre el nivel de sus habilidades hasta este punto, ya que las habilidades son observables por medio de las estrategias propias de cada alumno. Asimismo, en la Entrevista anterior, Bianca menciona que de igual manera, ella ya había tenido relación con este problema. Por lo tanto, se recomienda que no se utilice este problema posteriormente en otras pruebas de identificación.

De la Etapa 2 podemos observar que la primera estrategia de Daniela es generalizar su resultado del problema anterior, ella responde que serían 21 números capicúa del 100 al 199, sin embargo hasta este momento Daniela no tiene un claro entendimiento del término capicúa. Una vez que Daniela escribe los números capicúa del 100 al 199 logra generalizar este resultado con mucha sencillez para los números del 1 al 1000, separando de igual manera en conjuntos de 100 en 100. Sin embargo, no toma en cuenta que comenzó a contar del número 100, y el conjunto del 1 al 99 no debe de ser tomado en cuenta.

De lo anterior, vemos que Daniela no logra generalizar apropiadamente en un nuevo contexto, como se esperaría de un niño matemáticamente talentoso. En su interés por abreviar pierde ciertos elementos de la información matemática necesarios para resolver el problema correctamente.

2.3 Retención de la información matemática “memoria generalizada”
Es esta parte Daniela, muestra desde la primera etapa que dado un problema ella puede generalizar a otro, pero no lo logra con un entendimiento total del problema, sino cree que se le preguntarán problemas similares al realizado y lo convierte a un ejercicio rutinario. No contrasta los resultados de esa generalización al nuevo problema. Su razonamiento no es flexible en esta parte, desde el comienzo del problema Daniela quiere transferir la solución sin antes analizar las diferencias de un

problema con otro.

Aquí podemos observar como no se trata solo de retener información matemática para poder reproducirla, sino de ser capaz de generalizar esa información y utilizarla apropiadamente en distintos contextos.

2.4 Recomendaciones
Planteamiento de problemas que involucren estrategias creativas y originales.
Planteamiento de problemas que involucren estrategias de conteo (combinatoria).

Problema 3. No resuelto en el cuestionario.
3.1 Obtención de la información matemática.
En este problema Daniela no logra comprender la información que le proporcionan las vistas con relación a la construcción de una figura tridimensional, por lo tanto se le proporciona el material manipulable. Una vez comprendida esta parte se pasa a la Etapa 2, donde podemos ver que es más sencillo para Daniela pasar de la figura construida a visualizar sus vistas. Una de las posibles razones de que haya sido más sencillo para Daniela la segunda parte es la familiaridad que tuvo anteriormente con los objetos manipulables, es decir, Daniela ahora no parte de cero para lograr una comprensión de la información matemática como lo fue en el problema 3 del cuestionario.

3.2 Procesamiento de la información matemática.
En la Etapa 1, Daniela no logra visualizar el arreglo de cubos que corresponden a las vistas, por lo que la Entrevistadora pasa a entregarle el material manipulable, con ayuda de los cubos, Daniela reproduce la vista de frente cuatro veces, como vemos en la Figura 4.56, seguido de esto y con guía de la Entrevistadora realiza varios intentos hasta lograr la figura correspondiente. El mencionar que si puede pararse para verificarla vista de arriba, nos da una idea de cuales son sus estrategias, no visualiza aun la figura, sino necesita observar el material para dar un veredicto. Hasta este punto, podemos concluir que Daniela necesita seguir desarrollando sus habilidades visuales.

En la Etapa 2, Daniela no tiene ningún problema para pasar de la figura de la Figura 4.57 a la representación de sus tres vistas. Sin embargo, cuando se le pregunta sobre la otra vista lateral no logra identificar el cambio del cuadrado, que debiera estar en la parte de arriba, una respuesta deseable en alumnos que tienen claridad sobre el problema. Después de este segmento, se le presenta a Daniela una complicación del problema inicial, Figura 4.55, donde se espera que ya tenga cierta familiaridad y le sea más sencillo abordarlo, aplicando las estrategias del problema pasado. Sin embargo, su primera estrategia es el conteo de todos los cuadrados que aparecen en la Figura 4.59 y por lo tanto su respuesta 32. Se esperaría que un alumno talentoso frente a un problema similar como el que se le presenta a Daniela, realizara aproximaciones más precisas. En el desarrollo de este problema, Daniela no muestra altamente desarrollada su habilidad para visualizar o para generalizar.

En el momento que se le ofrece de nuevo el material manipulable, Daniela en una primera aproximación, construye una figura que no cumple con una de las vista, aquí podemos observar un avance en la comprensión del problema, ya que en el anterior construyó una que no cumplía con dos de las vistas. Con base en las respuestas anteriores, la Entrevistadora decide no preguntarle el inciso d de la Figura 4.59 y pasar al siguiente problema.

3.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada".
Las preguntas de la Figura 4.59 fueron diseñadas principalmente para el análisis de la memoria generalizada. Daniela aquí, no logra abordar el nuevo problema con la información del problema anterior, a pesar de que ella menciona que son similares. No se esperaría que Daniela llegara inmediatamente al resultado correcto, pero si que concluyera que el número de cubos debe ser menor a los cuadrados que se presentan en las vistas. Con ayuda del material manipulable, Daniela construye en la primera etapa una figura (Figura 4.56) ignorando dos de sus vistas y en la segunda una figura (Figura 4.60) ignorando solo una vista, aquí podemos observar una memoria generalizada en las estrategias para construir las figuras, sin embargo esta construcción no es visual, un aspecto importante para establecer el nivel de las habilidades deseables a detectar en este problema: visualización y abstracción.

3.4 Recomendaciones
Resolución de problemas que involucren habilidades de abstracción.
Resolución de problemas que involucren habilidades visuales.

Problema 4. Parcialmente correcto en el cuestionario.
4.1 Obtención de la información matemática.
Daniela en esta parte de la Entrevista, explica con facilidad el razonamiento que utilizó para resolver este problema en el Cuestionario. Este problema en específico centra su atención en la dificultad para obtener correctamente la información matemática, aquí los enunciados aportan la información del complemento y de este se debe obtener el número de bolas que hay de cada color, Daniela no tiene problemas en reconocer esta información sino es durante el procesamiento que los procesos aritmético no le permiten llegar al resultado numérico correcto.

En la Etapa 2, como se mencionó anteriormente existe una inconsistencia en el problema planteado. No obstante, podemos analizar un fragmento del problema de la Figura 4.65; en un primer momento Daniela no realiza correctamente la primera implicación: 10 monedas no son de \$5 ni de \$10 por lo tanto 10 monedas son de \$1 y de \$2, ella asume que existe una moneda de \$20 en el conjunto. Aclarado esa malinterpretación del enunciado, Daniela dice lo siguiente: "y veinte monedas no son ni de \$5 ni de \$2, entonces esas podrían ser de \$10 y de \$1", ella nuevamente identifica los complementos de los conjuntos que deben ser analizados.

De lo anterior, podemos concluir que Daniela, en este problema, muestra desarrollada la habilidad para interpretar las relaciones matemáticas y llegar a comprender la estructura de los problemas lógicos.

4.2 Procesamiento de la información matemática.

En la respuesta del cuestionario, Daniela obtuvo un punto del Baremo por haber encontrado el número de pelotas verdes correctamente. En la entrevista podemos observar que ella contestó 6 pelotas azules y no 4 en las hojas del cuestionario, porque al restar 12 pelotas amarillas de un total de 20 no realizó correctamente la operación. Esto sucedió de nuevo en las preguntas una vez más cometió un error aritmético, al contestar "quedan 2", refiriéndose a las pelotas azules. Es común que un estudiante cometa errores aritméticos simples, asimismo con los alumnos matemáticamente talentosos, sobre todo se observa con quienes que logran acortar pasos en su razonamiento. Sin embargo, pareciera en Daniela una característica repetitiva, la cual podría ser atribuida a diversos factores; algunos externos a su razonamiento, como el nerviosismo causado por la entrevista. Es importante notar estos aspectos a desarrollar, para las recomendaciones que se le ofrecerán posteriormente. En lo que respecta a la habilidad lógica Daniela aquí muestra altamente desarrollada esta habilidad, aunque desafortunadamente el problema de la Etapa 2 no fue planteado correctamente, lo que nos impide un análisis más completo sobre sus habilidades en esta sección.

4.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada"

Daniela en la Etapa 2 generaliza la estrategia utilizada en el problema del cuestionario, ella logra una generalización en un problema más complejo y con un contexto distinto. Podríamos asumir que para cualquier problema similar Daniela lograría deducir las relaciones entre los conjuntos y sus complementos.

4.4 Recomendaciones

Resolución de problemas y ejercicios que involucren cálculo numérico.

Problema 5. Resuelto correctamente en el cuestionario.

5.1 Obtención de la información matemática.

Al momento de preguntarle a Daniela acerca de la solución que escribió en el cuestionario (Figura 4.66), se esperaría que la explicación de ésta vaya de acuerdo con el camino que la llevó a encontrar el número 73. En el cuestionario, Daniela escribe tres fragmentos con operaciones distintas, en la Figura 4.67 podemos observar que la que la resuelve el problema es la operación ubicada en la esquina inferior derecha, de la cual esperábamos una explicación. Sin embargo, Daniela explica lo siguiente: "…como le había restado 23 unidades y había obtenido eso, pues ahora le tengo que sumar los 23. Y me da los 146. Entonces como era el doble del número lo voy a volver a sumar. Y ahí quedan 292." Daniela en esta explicación comprende la primera información: si se le restó algo habrá que sumarlo o que la operación inversa de la resta es la suma; pero la parte donde menciona al doble del número en su explicación no lo toma como su inverso, es decir habría que dividir en lugar de multiplicar como ella lo hace durante la entrevista.

La Etapa 2, Daniela comprende las relaciones del problema y arroja soluciones y explicaciones consistentes, nuevamente ella afirma que las operaciones necesarias son las inversas a las que aparecen en el texto.

5.2 Procesamiento de la información matemática.

En Etapa 1 se revela en un primer momento, una contradicción entre la solución final en el cuestionario y la explicación que se ofrece de ésta durante la entrevista. Recordemos que una de las finalidades de la entrevista es observar si la trayectoria que siguieron los estudiantes al resolver un problema puede ser explicada consistentemente durante la entrevista, algo que no sucedió en este primer momento. No obstante, logra resolver los problemas correctamente y muestra su razonamiento "hacia atrás" por medio de las operaciones inversas.

5.3 Retención de la información matemática "memoria generalizada"

En la Etapa 2, se le plantea un problema similar en donde podemos observar que Daniela generaliza la información del problema anterior y lo aplica en este. Daniela quiere generalizar de la misma forma en que lo hizo para el problema anterior y explica: "Pues al 50 le tengo que sumar el cinco porque se lo había restado, entonces serían 55", no se percata de que ahora el problema requiere de una resta (50 – 15). Este error de aplicar un método en un nuevo contexto sin analizar las diferencias con el problema lo ha mostrado en problemas anteriores.

5.4 Recomendaciones

Resolución de conjunto de problemas que involucren la habilidad para generalizar, donde los problemas difieran en contexto y contenido.

Problema 6. Resuelto correctamente en el cuestionario.
6.1 Obtención de la información matemática.
Como podemos observar en la descripción de este problema, fue con el que más fácilmente trabajó Daniela. No tiene dudas sobre la información geométrica que se ofrece en el problema. El detalle a destacar en la Etapa 1 es que Daniela no reconoce que lo que se está preguntando en el problema es una fracción del total de cuadrados dibujados a pesar de que la entrevistadora intenta guiarla, solo responde que el total de cuadrados sombreados son 5 y medio.

6.2 Procesamiento de la información matemática.
Durante las dos Etapas, Daniela muestra altamente desarrolladas sus habilidades para reconfigurar a problemas más simples y razonamiento flexible. Sus respuestas son claras, abreviadas y económicas.

6.3 Retención de la información matemática “memoria generalizada”
Es posible que el primer problema haya sido de ayuda para que Daniela lograra realizar tan fácilmente el problema de la Figura 4.69. Ella generaliza las estrategias utilizadas en la Etapa 1: extraer fragmentos y reacomodarlos en otro espacio convenientemente, y las aplica sin importar que ahora no se trata fragmentos rectangulares o triangulares.

Daniela durante el transcurso de todo este problema muestra habilidades altamente desarrolladas.

6.4 Recomendaciones
Resolución de problemas en donde se utilicen proporciones y fracciones.

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

En este capítulo, se exponen las conclusiones del presente trabajo. En primer lugar se hacen algunas reflexiones sobre la efectividad de los instrumentos que se diseñaron para la toma de datos; luego se exponen y analizan los resultados de la aplicación del método de identificación, es decir los distintos niveles de desarrollo observados en las habilidades matemáticas de las tres niñas entrevistadas; posteriormente se describen las respuestas que arrojó este estudio sobre las preguntas de investigación formuladas; enseguida se precisan las limitaciones del método de identificación desarrollado y por último se puntualizan algunos problemas que este trabajo deja abiertos y que podrían darle continuidad.

5.1 Los instrumentos de toma de datos.

El cuestionario diseñado ha respondido a la necesidad de contar con un instrumento para aplicarse masivamente, pero que a la vez proporcionara alguna información sobre las habilidades matemáticas de los niños. Por esta razón se integró con problemas de respuesta abierta, en lugar de problemas de opción múltiple, más frecuentes en métodos de identificación de niños MT aplicados masivamente, sobre todo porque pueden calificarse de manera mecánica.

La selección de los problemas, pero sobre todo el análisis a priori de las posibles respuestas, ha resultado clave para el diseño de las entrevistas realizadas a las niñas seleccionadas. Aunque las respuestas al cuestionario han sido en general escuetas, quienes mejor lo han respondido, son también los que más abundaron en reportar los procedimientos que han seguido; lo cual ha permitido diseñar cada una de las entrevistas con mayor conocimiento de causa. Como puede verse, aún cuando los dos instrumentos usados han sido descritos por separado, en realidad están íntimamente relacionados, puesto que el punto de partida para el diseño de la entrevista han sido las soluciones ofrecidos por los niños que han logrado un mejor desempeño en el cuestionario.

5.2 Clasificación de las alumnas entrevistadas según sus habilidades.

Como ya se dijo en el capítulo 2, las distintas habilidades matemáticas pueden observarse en tres etapas distintas de la resolución de un problema: obtención de la información matemática, procesamiento de la información matemática y retención de la información matemática. Sin embargo, las tres habilidades que buscamos en un niño matemáticamente talentoso y en las que centraremos nuestra atención se ubican en las últimas dos. A continuación, expondremos las habilidades que mostraron las alumnas entrevistadas en la resolución de problemas.

La habilidad para generalizar material matemático (memoria generalizada) se ve acentuada principalmente en la etapa de retención de información matemática, de Bianca, podemos destacar que es la habilidad que tiene más desarrollada, no tuvo ningún problema en resolver los problemas nuevos que contenían material matemático similar. Carmen, también muestra esta habilidad altamente desarrollada, en todos los problemas que se le presentaron logró no solo utilizar la habilidad sino además explicar y argumentar cómo la estaba utilizando, una habilidad poco común en los estudiantes de su edad. Daniela en cambio, en la mayoría de los problemas no logró identificar las diferencias entre un tipo de problemas, hace intentos por generalizar pero sin tomar en cuenta que los problemas difieren en su contexto, se cree que descarga la responsabilidad en la rutina, como usualmente se observa en las clases de matemáticas escolares.

La flexibilidad en el pensamiento la podemos enfatizar de los problemas en que las estudiantes utilizaron más de una estrategia para resolverlo. En Bianca observamos claramente esta habilidad altamente desarrollada desde el primer problema resuelto en el cuestionario, en donde ella presenta dos soluciones con fines de comprobar su resultado, algo poco común en las prácticas escolares. En Carmen su habilidad para argumentar nos permitió observar en algunas ocasiones la flexibilidad en su pensamiento, ya que la mayoría de sus respuestas estaban acompañadas de ciertas reflexiones con las que podríamos afirmar que muestra esta habilidad desarrollada. De Daniela, podemos concluir que ésta es la habilidad que presentó más desarrollada, sobre todo en el último problema de la entrevista en donde logra reconfigurar rápidamente y sin ninguna complicación.

Con respecto a la habilidad para pensar en forma abreviada, Bianca y Carmen la muestran desarrollada, de hecho, la demora en resolver un problema, en la mayoría de los casos, era causada principalmente por la realización de algoritmos y cálculos numéricos. En el caso de Carmen en particular, en el problema 4 del cuestionario tuvo algunas dificultades que podría atribuirse a las inconsistencias del problema mismo y no a la falta de habilidades para resolverlo. Por otra parte, en Daniela es complicado dar una conclusión respecto a esta habilidad, ya que en algunos problemas pareciera no tener ninguna dificultad en utilizarla y en otros pareciera estar ausente.

5.3 Respuestas a nuestras interrogantes y objetivos de investigación.

Planteamos nuevamente aquí las preguntas de investigación para analizar en qué medida fueron respondidas durante las etapas del presente trabajo.

5.3.1 ¿Cuáles habilidades matemáticas debieran incluirse en el diseño de un método de identificación de niños MT?

En los primeros capítulos de este trabajo se muestra con detalle la gran diversidad que existe de habilidades matemáticas, las cuales se ponen en juego cuando un sujeto trata de resolver problemas. Algunas de ellas son muy específicas; como la habilidad para cambiar de un razonamiento directo a uno “hacia atrás”, habilidad que puede ser detectada más fácilmente; y otras más generales; como la habilidad para razonar en forma abreviada, que puede ser observada en una mayor gama de problemas matemáticos y cuya detección es más compleja. A pesar de que en nuestro trabajo experimental nos concentramos en analizar éstas últimas, no excluimos la importancia que tiene cualquier habilidad cuando observamos el proceso de resolución de problemas matemáticos.

En sus estudios experimentales, Krutetskii dedica una parte a analizar y describir las habilidades mostradas por estudiantes con excepcional talento matemático, que utilizaban al momento de resolver determinados problemas. En sus conclusiones él reporta que un alumno MT se caracteriza por tener un pensamiento generalizado, abreviado y flexible; habilidades en las que está centrada la presente investigación.

En la metodología de nuestra investigación se utilizan dos instrumentos: los cuestionarios y las entrevistas. Las tres habilidades antes mencionadas se toman en cuenta como básicas para el diseño de las entrevistas, pero en los cuestionarios esto no ocurre de la misma manera. Para el diseño de los cuestionarios, tal como se estableció en el capítulo 3 de este trabajo, se han tomado como referencia las habilidades estudiadas por Krutetskii; sin embargo, con ello no se ha pretendido predecir todas las habilidades que serían utilizadas en cada problema, mas bien se ha tenido en cuenta que alguna o algunas de las siguientes habilidades podrían ser utilizadas en la resolución de los problemas propuestos.

- Habilidad para generalizar.
- Flexibilidad en el pensamiento.
- Habilidad para reducir (acortar) los procesos de razonamiento.
- Habilidad para razonar lógicamente.
- Habilidad para la abstracción.
- Celeridad en el razonamiento.
- Agudeza en el entendimiento
- Ingeniosidad y creatividad.
- Habilidad para interpretar visualmente relaciones matemáticas.
- Habilidad para buscar cuál es el camino más corto, directo y económico

(economizar el pensamiento).

- Pensamiento lógico, sistemático y secuencial.
- Habilidad para cambiar del razonamiento directo al razonamiento “hacia atrás”.

De los resultados obtenidos en los cuestionarios, podemos concluir lo siguiente.

- Entre más se preste el problema para que un alumno utilice diversas estrategias mayor será la gama de habilidades que los estudiantes podrían utilizar para resolverlo. Esto quedó establecido *a priori* desde la elaboración del baremo y pudo confirmarse en la revisión de los cuestionarios.
- El cuestionario ha sido diseñado pensando en que la diversidad de problemas cubran un mayor espectro de habilidad, de tal manera que abran al estudiante más posibilidades de utilizar sus habilidades. Este criterio es importante para que los estudiantes talentosos tengan mayores posibilidades de utilizar las habilidades que han desarrollado.
- La posibilidad de observar las habilidades en la resolución de problemas del cuestionarios, depende del registro escrito de las estrategias que haya utilizado un estudiante para resolver un problema. La aplicación del cuestionario ha mostrado que algunos problemas son mas apropiados que otros para que el estudiante registre por escrito sus procesos.

En los aspectos metodológicos que comprenden a las entrevistas, establecimos líneas que nos ayudaron con el análisis del nivel de las habilidades de los estudiantes seleccionados. En general, se estableció para cada problema que si: el estudiante lo había resuelto correctamente se le presentaría un problema del mismo tipo para observar la habilidad para generalizar y en algunos casos se le presentaría uno de mayor complejidad para identificar el nivel de la habilidad utilizada, esto en correspondencia con la metodología utilizada por Krutetskii para caracterizar las habilidades matemáticas. Por el contrario, si el estudiante no había resuelto correctamente el problema: se le presentarían problemas más sencillos que pudieran llevarlo hacia una estrategia de resolución correcta y asimismo estos problemas funcionarían para identificar el nivel de su habilidad.

Las entrevistas semi-estructuradas que utilizamos en la metodología permitieron la orientación de las preguntas hacia las habilidades de interés, lo que resultó muy útil para conocer el nivel de desarrollo de las habilidades de los estudiantes. Sin embargo, es importante mencionar que no fue nuestra intención establecer una clasificación cuantitativa de los niveles, sino dar una prescripción sobre cuáles habilidades tiene más desarrolladas y cuáles tendría que desarrollar más un estudiante.

De los resultados obtenidos en las entrevista, podemos concluir lo siguiente.

- Es más sencillo observar las habilidades matemáticas de los estudiantes en las respuestas de las alumnos durante las entrevistas que en las respuestas escritas que se presentan en los cuestionarios. El poder tener la posibilidad de que el alumno esté presente para explicitar los procesos de resolución, nos ofreció una perspectiva mucho más amplia que durante el análisis de los cuestionarios. Sin embargo, los cuestionarios fueron de gran ayuda para diseñar las entrevistas.
- A pesar de que en algunas ocasiones las alumnas entrevistadas no lograron expresar claramente sus razonamientos o estrategias utilizadas, las entrevistas nos han proporcionado claridad suficiente para clasificar cualitativamente a las estudiantes en cada una de sus habilidades.
- La aplicación de las entrevistas ha mostrado que en algunas ocasiones, los estudiantes en algunas ocasiones no logran mostrar sus habilidades en la resolución de un problema por ciertas limitaciones en su conocimiento. Por ejemplo, el conocimiento de la fórmula del área puede ser determinante para resolver correctamente un problema matemático.

Por otra parte, una ventaja adicional del método detección, tiene que ver con el diagnóstico que se está haciendo de los alumnos seleccionados. Ya que no solo pretendemos identificar a los estudiantes MT sino ofrecer información que pudiera resultar útil para su atención.

Respondiendo a la pregunta principal de este apartado, podemos decir que las tres habilidades antes mencionadas han resultado útiles para identificar niños MT. Esta detección se hizo a lo largo del desarrollo de las entrevistas que fueron instrumentos diseñados especialmente para ello aunque difícilmente podrían ser observadas en las respuestas a los problemas del cuestionario.

Las habilidades en que centramos nuestra investigación pudieran ser útiles como referencia para proponer un cuestionario escrito, pero teniendo en cuenta que las habilidades que un estudiante podría utilizar no están controladas por la persona que aplica el método sino dependen del desarrollo logrado por el estudiante en ese momento.

En conclusión, es posible observar las habilidades de los alumnos durante su proceso de razonamiento, como se ha podido ver en las entrevistas, mientras que en las respuestas del cuestionario esta información sobre las habilidades siempre será muy limitada, aunque éstos cumplen con distintas funciones además de la detección de habilidades, como se mencionó en el primer apartado de este capítulo.

5.3.2 ¿Con qué criterios se deberían seleccionar los problemas matemáticos que se usarán en la metodología?

5.3.2.1 Problemas del cuestionario de identificación.

En lo que respecta a los problemas que debieran incluirse en el diseño de un cuestionario como el propuesto en este trabajo, recordamos lo mencionado en los primeros capítulos: La resolución de los problemas en un cuestionario de identificación de talento matemático, debiera depender lo menos posible de contenidos matemáticos específicos, porque el uso de herramientas técnicas puede obstaculizar la observación de las habilidades. Por lo tanto, entre más requiera del uso de habilidades un problema mejor resultará para nuestros fines.

Uno de los problemas del cuestionario 2 muestra un ejemplo de lo anterior, el problema que trataba de calcular el área de un cuadrado en razón del área de un triángulo, una de las niñas entrevistadas no logró recordar la fórmula para calcular el área del triángulo en la entrevista y eso fue un obstáculo para resolver el problema de manera autónoma (ver capítulo 4). En este caso, la fórmula fue uno de los principales obstáculos para resolver el problema, lo cual no debiera de ser determinante para juzgar sus habilidades, en dado caso podríamos juzgar los conocimientos que tiene. En particular, este problema fue eliminado del cuestionario en la siguiente aplicación, ya que las razones para no resolverlo en la mayoría de los casos no provinieron de las habilidades sino de factores como el conocimiento de áreas y la confusión que produjo la notación usada para el ángulo recto.

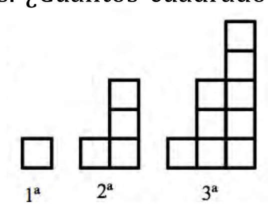
Existen problemas “triviales” que son rutinarios en la escuela, y que por lo regular no ponen en juego las habilidades que nos interesan, estos sin duda serían inapropiados nuestra metodología. Sin embargo, hay problemas que si exigen mostrar las habilidades que nos interesan pero que pudieron haber sido planteados y resueltos en clase por el maestro, entonces el estudiante ya cuenta con un método específico para resolverlos, y cuando se le plantea, simplemente lo reproduce. En este caso no se sabría si está poniendo tal o cuál habilidad en juego, por esta razón sería muy recomendable diseñar o seleccionar problemas que fueran lo más originales posibles.

De la lista de los problemas puestos a prueba, podemos retomar el siguiente para ejemplificar lo anterior: “Identificar todos los dígitos 1 que hay en la numeración del 1 al 999.” Este problema no mostró las habilidades con claridad ya que algunos estudiantes lo habían resuelto anteriormente, de hecho una de las entrevistadas comentó que lo había realizado en repetidas ocasiones, por tal motivo, en ese momento no pudimos observar si sus estrategias eran propias o si las había memorizado durante su actividad escolar.

Uno de los criterios más importantes para la selección de los problemas del cuestionario fue incluir problemas de respuestas abiertas, esto para observar de mejor manera en los registros escritos los procesos de resolución, ya que entre más descriptivo sea el registro, más posibilidades tenemos de observar la trayectoria de su razonamiento y por lo tanto el nivel de habilidad. A pesar de que esto implique la necesidad de personal capacitado para poder aplicar el cuestionario, no sería congruente con nuestros objetivos el proponer problemas de opción múltiple porque dicen muy poco sobre las estrategias y habilidades de un estudiante. Este tipo de problemas no ofrecen información de lo que nos interesa: las habilidades matemáticas usadas en el trayecto entre abordar un problema y ofrecer una solución. Además, si dos estudiantes contestaron el mismo inciso, no se puede realizar ningún tipo de comparación entre sus habilidades.

Siguiendo con lo anterior, también podemos destacar que la experimentación nos ha mostrado que algunos problemas han sido más enriquecedores para interpretar el nivel de las habilidades de los estudiantes que otros, entre mayor era el registro escrito mejor era la interpretación de sus estrategias y más precisa era su evaluación en el baremo. El primer problema fue uno de ellos, en la mayoría de las respuestas se observaban ciertos acercamientos de los estudiantes al problema y eso resultó considerablemente clarificador.

1.- Observa la siguientes figuras. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 15ª?



El criterio que tomamos en el diseño del cuestionario, fueron problemas de respuestas abiertas y no se consideró como criterio plantear problemas que pretendieran que el estudiante dejara un registro escrito. Durante la aplicación del cuestionario, se les pidió a los estudiantes que intentaran dejar por escrito cualquier idea que se les fuera ocurriendo para resolver el problema y adicionalmente se les pidió el uso exclusivo del bolígrafo, para evitar que borraran alguna información que pudiera ayudarnos con el análisis, con el fin de que si el estudiante presentó, por ejemplo, una estrategia útil pero cálculos aritméticos incorrectos se pudiera observar el nivel de su habilidad. Sin embargo, consideramos que en lo posterior se tomen en cuenta, para el diseño del cuestionario, problemas que requieran que el estudiante deje alguna estrategia por escrito, conscientes de que esta decisión es solo del estudiante.

Igualmente, en lo que respecta al diseño de la entrevista, ésta se logró realizar con mayor minuciosidad en los casos en que se presentó un registro escrito detallado. Por lo tanto, entre más se preste un problema a dejar un registro del proceso de razonamiento, contaremos con más herramientas para diseñar la entrevista que se le aplicará al estudiante seleccionado.

Otra cuestión interesante en la experimentación, fue analizar cómo funcionaron los problemas seleccionados en conjunto. En general, podemos concluir que cuando el conjunto de problemas estuvo más cargado hacia la visualización (caso del segundo cuestionario), la metodología identificó a una estudiante con esta habilidad muy desarrollada. Por esto, en la medida de lo posible, es importante que el conjunto de los problemas comprenda una gama de habilidades y no se enfoque solo en una, para que los estudiantes tengan más oportunidades de mostrar las habilidades que han desarrollado.

Por último, podemos mencionar que el diseño del baremo resultó bastante enriquecedor para poder registrar a *priori* posibles estrategias de resolución y por lo tanto posibles habilidades que nos interesa detectar en los estudiantes. Recordemos que las habilidades están directamente relacionadas con las estrategias que utilizará. De aquí, podemos concluir que entre mayor sea el número de trayectos que tenga un problema para llegar a una solución, mayores serán las probabilidades de que un estudiante pueda utilizar alguna de sus habilidades para resolverlos.

En conclusión, el conjunto de problemas diseñados en el cuestionario debiera de tener las siguientes características:

- Problemas que induzcan a registrar por escrito el proceso de razonamiento.
- Problemas de respuesta abierta.
- Conjunto de problemas que pretendan detectar diferentes habilidades.
- Problemas en donde sea posible utilizar distintas estrategias de resolución.
- Problemas creativos y no difundidos en la localidad donde se hará la aplicación.
- Problemas que se hayan puesto a prueba para observar las estrategias y las habilidades, antes mencionadas, que nos interesan detectar en los estudiantes.

5.3.2.1 Problemas de la entrevista.

Dentro de la investigación, establecimos que las habilidades son mostradas durante el proceso de la resolución de los problemas matemáticos, en las entrevistas esta parte la pudimos observar con mayor detenimiento, ya que fue posible analizar en los audios el razonamiento en "voz alta" de los estudiantes y cuestionarlos sobre cada estrategia que iba utilizando en sus procedimientos.

En general, un problema presentado en el cuestionario llevaba a un conjunto de problemas en la entrevista, dependiendo de las estrategias que había utilizado en el cuestionario, el objetivo de esta secuencia de problemas era establecer el nivel de las habilidades del entrevistado. En su metodología Krutetskii realiza algo similar, él menciona que si un estudiante logró resolver un problema se le presenta un problema de mayor dificultar, sino uno más sencillo hasta lograr determinar de cierta forma en qué nivel de desarrollo se encuentra su habilidad.

Con base en las estrategias de este autor, diseñamos los problemas de las entrevistas, como mencionamos anteriormente, en donde: si algún estudiante no había podido resolver determinado problema del cuestionario se le presentarían problemas o preguntas más sencillos, y en caso de que el estudiante no pudiera responder correctamente, el conjunto de problemas se dejaría hasta ese punto, concluyendo que el estudiante no presentó cierta habilidad altamente desarrollada.

A pesar de que estamos conscientes de la imposibilidad de establecer criterios cuantitativos para determinar con exactitud el nivel de las habilidades, la secuencia de problemas de las entrevistas nos ayudó a analizar tanto el talento potencial (aquel no presentado en el cuestionario) como el nivel de las habilidades de las estudiantes y con esto determinar si una estudiante era más talentosa que otra.

En resumen, de las entrevistas realizadas podemos concluir que para establecer un nivel de desarrollo de determinada habilidad es necesario un conjunto de problemas basados en las respuestas del cuestionario, algunos más sencillos y otros más complicados dependiendo del caso, que ayuden a analizar el nivel de su habilidad, enfocándonos en las tres habilidades antes mencionadas: generalización, un pensamiento abreviado y un pensamiento flexible.

5.3.3 ¿En qué medida una estrategia metodológica basada en la resolución de problemas resulta útil para determinar el nivel de desarrollo de las habilidades en niños en edad escolar?

La estrategia metodológica con la que se debe partir en cualquier problemática, va de acuerdo al objetivo que se tiene, ya que nuestro objetivo principal es la identificación del talento matemático, y éste no se limita al dominio de conocimientos matemáticos específicos con los que cuenta el estudiante, no sería consistente limitarnos a evaluar este conocimiento. Si lo que se intenta establecer es quién sabe dividir o multiplicar, entonces lo más lógico sería poner operaciones aritméticas al estudiante y con esto evaluarlo. Sin embargo, las actividades matemáticas rutinarias que realiza un buen estudiante no están necesariamente asociadas con el talento matemático. Las actividades rutinarias no ponen en juego sus habilidades sino sus hábitos, por el contrario enfrentarse a un problema matemático no resuelto con anterioridad pone en juego sus habilidades y por lo tanto su talento matemático.

El supuesto del que partimos en nuestra investigación es que: el talento matemático está asociado directamente con resolver problemas matemáticos, ya que no se concibe alguien con habilidades matemáticas altamente desarrolladas que no pueda resolver problemas, en definitiva si un niño no puede resolver problemas entonces las habilidades matemática con las que cuenta, son muy limitadas.

5.4 Dificultades prácticas del método de identificación.

A pesar de todas las consideraciones teóricas y de los estudios que hemos realizado aquí, la aplicación de la metodología ha tenido dificultades prácticas, propias del método, que tendrían que tenerse en consideración para cualquiera que quisiera aplicar este método de identificación. A continuación enlistaremos algunas de las que consideramos más significativas.

1. La aplicación del método obliga que el personal que lo ejecute esté capacitado y familiarizado de él. Un maestro sin entrenamiento tendría seguramente muchas dificultades para aplicar el método y por lo tanto la identificación sería poco fiable.
2. El diseño de las entrevistas debe de realizarse para cada cuestionario que se haya elegido, lo que implica una considerable carga de trabajo para el personal que esté a cargo del método.
3. Se debe de tener presente que a pesar de los esfuerzos en la aplicación del cuestionario y de que se les menciona a los alumnos que esto no influye en sus calificaciones, algunos estudiantes copian sus respuestas, o bien muestran poca disposición para responder el cuestionario. Algo similar puede ocurrir con algunos alumnos que habiendo sido seleccionados para entrevistarse se nieguen a hacerlo.
4. Algunos maestros o instituciones tienen particular interés en los concursos matemáticos y propician actividades entre sus estudiantes y desafortunadamente, en otras escuelas no existe actividad alguna de este tipo

de ejercicios, el conjunto de aplicación puede ser muy heterogéneo. Es importante considerar esto al momento de seleccionar a los alumnos participantes para cualquier programa de atención al talento.

5. La resistencia de algunos profesores a que el cuestionario sea aplicado en su grupo por diversas razones.
6. Al momento de aplicar el cuestionario, se corre el riesgo de que si el profesor está presente habrá la posibilidad de que proporcione alguna ayuda a sus estudiantes.

5.5 Limitaciones del estudio.

Cualquier método de identificación de talento matemático, puede enfrentarse a la posibilidad de excluir niños talentosos o incluir a aquellos que no presenten talento matemático. Este en particular, corre ese riesgo sobre todo en la etapa del cuestionario, una razón podría ser que si el niño no fue a clases ese día no tendrá la posibilidad de participar, otra que el niño puede ser talentoso pero tener un mal desempeño en el cuestionario por circunstancias del momento de la explicación, y es claro que eso no se podrá ver en sus respuestas escritas. Ya que solo tenemos dos instrumentos, cualquiera de los dos tiene posibilidades de dejar fuera a alguien con habilidades matemáticas altamente desarrolladas. En todo caso, se trata de disminuir esas posibilidades.

Así mismo, las entrevistas no son un medio natural para un niño, tener una cámara presente pudiera ser un factor para que los estudiantes se inhiban en ese momento. En la experimentación, sobre todo en el caso en donde estuvieron presentes dos entrevistadores, se podía observar cierto nerviosismo en la estudiante, esto a pesar de que era notable el nivel de madurez que tenía para su edad. Sin embargo, la metodología pretendería ser lo mas fina posible de lo que hay hasta el momento en la literatura, ya que la mayoría de los métodos en el país se basan exclusivamente en aplicar cuestionarios.

Una de las principales limitaciones de nuestro estudio es la imposibilidad de tomar en cuenta todas las habilidades matemáticas que pudiera mostrar un alumnos MT en el cuestionario de identificación, esto podría ser causa de no identificar a los estudiantes que nos interesan.

Otra limitante del trabajo, es que el método establecido en nuestro trabajo no puede aplicarse mecánicamente, por lo tanto, sin personal capacitado no es posible que se realice correctamente. Hasta cierto punto, la identificación depende del nivel de familiaridad que tenga cierta persona con el tema en cuestión.

5.6 Problemas abiertos.

5.6.1. Primer problema

Establecer el perfil del profesor que pudiera aplicar el método presentado aquí, es un problema que sobrepasa los alcances de este trabajo, pero la presente experiencia nos permitió hacer un bosquejo de este perfil, pero no profundizar en sus características. Lo que si podemos concluir es que en general el profesor debería de estar familiarizado con las habilidades matemáticas, el talento, la resolución de problemas y el entrenamiento de niños participantes en concursos de matemáticas. Por lo que consideramos que uno de los problemas abiertos se deriva de la siguiente pregunta:

¿Cuál sería el perfil de una persona que pudiera aplicar el método?

5.6.2 Segundo problema

Como mencionamos en este capítulo, uno de los objetivos de las entrevistas es ofrecer un diagnóstico sobre las habilidades matemáticas menos desarrolladas por los estudiantes entrevistados. El propósito de este diagnóstico ha sido obtener información sobre aquellas habilidades que requieren de una mayor atención para potencializar el talento; la idea es que los estudiantes pudieran ingresar a un eventual programa de atención con alguna información sobre las características de su talento. Por lo tanto, una pregunta que continuaría con esta línea de trabajo sería la siguiente:

¿Cómo promover las habilidades que se muestran menos desarrolladas en niños MT?

5.6.3 Tercer problema

Los problemas utilizados en la metodología, fueron seleccionados y modificados basándonos en problemarios ya diseñados, la mayoría fueron tomados de programas de entrenamiento o problemas propuestos en años pasados por concursos de matemáticas. Sin embargo, consideramos que un programa de atención a niños MT debiera contar, como material de enseñanza imprescindible, con un banco de problemas clasificados por grado de dificultad y por el tipo de habilidades que pudieran requerir para resolverse. El diseño y la elaboración de este banco debiera formar parte de la formulación de un programa de atención a niños MT, por eso dejamos abierto el problema siguiente.

¿Cómo diseñar un banco de problemas matemáticos útil en la atención de niños MT?

EPÍLOGO
LINEAMIENTOS GENERALES DE UN PROGRAMA DE INTERVENCIÓN

En esta segmento del trabajo se proponen algunos elementos para la construcción de un programa de intervención para niños con talento matemático. Éste programa pretende formar parte de un proyecto más general por parte de la SEC-Sonora y la Universidad de Sonora (UNISON), en donde no sólo se atenderá a los niños matemáticamente talentosos, sino se integrará junto con éste un programa de intervención para niños con deficiencias en el área de la matemática.

5.1 Ideas generales y objetivo de la propuesta.

Atendiendo las necesidades que presentan los niños matemáticamente talentosos proponemos los lineamientos generales de un Programa de intervención, en donde los niños puedan desarrollar y potencializar sus habilidades matemáticas por medio de la resolución de problemas.

Uno de los principales objetivos del Programa es elevar la calidad de la educación matemática que reciben los alumnos con talento matemático, así como ejercer su derecho a recibir una educación de acuerdo a sus capacidad y habilidades.

Este programa, en términos más generales, pretende atender las necesidades de la sociedad promoviendo las carreras científico-tecnológicas que estén enfocadas en las matemáticas o en alguna de sus ramas.

Una de las referencias externas del Programa son las competencias de matemáticas, como el caso específico de la Competencia Cotorra organizada por la Academia Mexicana de Ciencias, se pretende que el Programa sea compatible con los problemas de concursos, esto para crear motivaciones en los alumnos y además, tener puntos de referencia de los resultados del progreso de los participantes.

Este programa está dirigido a niños de escuelas públicas de educación básica, entre tercero y sexto grado (9 a 12 años), con habilidades matemáticas altamente desarrolladas.

A continuación intentaremos mostrar las características generales del Programa de intervención.

5.2 Selección de los participantes

El proceso de identificación y selección de los destinatarios del programa consistirá en dos etapas:

1. Un cuestionario de 6 problemas matemáticos abiertos
2. Una entrevista semi-estructurada basada en el cuestionario.

Todos los niños de tercero a sexto de las escuelas participantes, realizarán un cuestionario donde se les plantearán problemas matemáticos, ahí pondrán a prueba sus habilidades ya desarrolladas, este cuestionario tendrá una duración máxima de 50 minutos, durante este transcurso el aplicador deberá resolver dudas en cuanto a la redacción de los problemas y una explicación breve de cada uno de ellos, pero no podrá interferir en el proceso de resolución de cada alumno ni resolver dudas que puedan ser propias del razonamiento o de la matemática utilizada para cada problema.

Ya finalizada la primera etapa, se calificarán los cuestionarios con base en un baremo previamente elaborado, donde en términos generales se le asignará al alumno una puntuación de 0 a 3 puntos por cada problema y un punto extra si se considera que el alumno utilizó alguna idea "brillante" para resolverlo. A partir del cuestionario, se seleccionarán a los alumnos que obtengan la mayor puntuación para pasar a la segunda etapa, ellos serán entrevistados para indagar más sobre el nivel de las habilidades mostradas en el examen y de ser posible algunas otras no presentadas en éste, los que sean considerados como matemáticamente talentosos de acuerdo a los resultados obtenidos durante la identificación formarán parte del Programa de intervención.

5.3 Planteamiento del programa.

El Programa consiste en plantearles a los alumnos problemas matemáticos de reto y dificultad mayor a la ya proporcionada en sus clases, en los cuales puedan plantear estrategias de resolución cada vez más óptimas y económicas, resolver un mismo problema con diferentes estrategias, resolver problemas similares utilizando una misma estrategia y principalmente desarrollar estrategias originales y creativas propias de cada alumno. Además, los problemas que se les plantearán deberán propiciar el uso de las habilidades que tienen en niveles de desarrollo bajos.

Por ejemplo, si se pretendieran abrir 10 centros de atención en la ciudad de Hermosillo, con aproximadamente 40 alumnos cada uno, 20 de 3ro y 4to y 20 de 5to y 6to cada centro contará con el apoyo de un maestro de educación básica y un alumno universitario con formación científica y experiencia en atención de niños talentosos.

Cada niño llegará con un diagnóstico general acerca de sus habilidades, este diagnóstico especificaría el nivel de sus habilidades matemáticas más características, esto con el fin de separar a los alumnos por equipos de acuerdo a la habilidades que se detecten en niveles de desarrollo bajo. En estos equipos se proporcionarán problemas de acuerdo a las necesidades particulares de los alumnos, es decir, los problemas no serán exactamente iguales dentro de un mismo grupo. Es fundamental proporcionar, dentro del Programa, una atención particularizada para cada uno de los estudiantes, ya que estamos conscientes de la diversidad del alumnado.

Es fundamental crear ambiente de trabajo creativo entre los estudiantes, en donde puedan interactuar con las diferentes estrategias y soluciones, analizando cuales serían las más adecuadas o económicas para cada tipo de problemas. Así mismo, fomentar el gusto y la curiosidad por la matemática y sus ramas debiera ser una prioridad dentro de cada grupo.

5.4 Grupo responsable del programa.
Cada grupo estaría bajo la responsabilidad de un profesor con las siguientes características:

a) Profesores activos del nivel básico.
b) Profesores que hayan mostrado interés en promover la resolución de problemas matemáticos.
c) Profesores que no tengan dificultades con la matemática que se enseña en su nivel.
d) Profesores que tenga gusto por la matemática.

Además, cada grupo tendría un asesor adicional, un estudiante universitario con las siguientes características:

a) Alumnos que cursen la carrera de matemáticas o a fin.
b) Alumnos que hayan vivido la experiencia de concursar en competencias de matemáticas.
c) Alumnos con experiencia en entrenamiento de competencias.

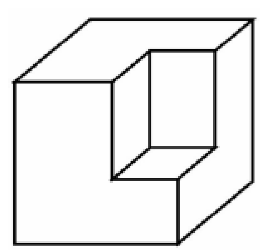
Por cada grupo se necesitaría un profesor a cargo y dentro de cada centro de atención un alumno universitario. Es decir, se contaría con la participación de 20 profesores y 10 alumnos universitarios.

Anexo a esto, es necesario formar un equipo de coordinación y elaboración de materiales, el cual sería responsable de capacitar a los profesores y alumnos universitarios sobre las características del Programa y uso de los materiales de trabajo.

5.5 Metodología de trabajo en el aula.
Dentro del Programa, tendremos dos “tipos” principales de clases los cursos y los talleres, los cursos serán aquellos explicativos, en donde se les proporcionarán temas desconocidos para algunos de ellos pero indispensables para resolver algún tipo de problemas, como es el caso del teorema de la desigualdad del triángulo, en estos cursos se les llevará a los alumnos con estrategias didácticas a que lleguen a este teorema y que lo dominen para utilizarlo en algunos problemas. Los talleres de resolución serán aquellos en donde se les proporcione a los alumnos problemas de desafío a sus habilidades no desarrolladas o medianamente desarrolladas, que los puedan resolver individualmente, en parejas o por equipos. El eje central de las clases es la resolución de los problemas, las secciones de cursos o secciones explicativas se programarían donde sea necesario y cuando la herramienta matemática desconocida sea un impedimento para resolver algún tipo de problemas. Además, sería conveniente realizar diferentes estrategias didácticas, por ejemplo, experimentos fuera del aula cuyo objetivo sea visualizar el mundo de manera matemática.

5.6 Tipos de los Problemas
Los problemas se dividirán de acuerdo a las cuatro áreas utilizadas en los concursos de matemáticas: Teoría de números, Combinatoria, Geometría y Miscelánea. Después se dividirán en subcategorías de acuerdo a las habilidades necesarias para resolver los problemas y al final por niveles de dificultad. Los alumnos que muestren en niveles de desarrollo altos cierto tipo de habilidades se les proporcionarán problemas complejos, donde puedan potencializarlas. Aquí unos ejemplos de dichos problemas:

Área: Geometría.
Habilidades: Percepción visual y flexibilidad en el pensamiento.
Nivel de dificultad: medio.
1- Haciendo cortes paralelos a las caras de un cubo de madera se obtiene una pieza como la que se muestra. Si el volumen original del cubo era de 8 m^3, ¿cuál es la superficie de la pieza.



Área: Combinatoria.
Habilidades: Razonamiento lógico, economía en el pensamiento.
Nivel de dificultad: alto.
2.- Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon las manos. Encuentra el

número de personas que había en la reunión, si se sabe que hubo quince apretones de manos.

Área: Teoría de números.
Habilidades: Pensamiento abreviado, cálculo numérico.
Nivel de dificultad: bajo.

3. Linda hace una lista con todos los números de tres cifras cuyas cifras suman 8. ¿Cuál es el número mayor de esa lista?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdullah Ficici y Del Siegle, (2008). International teachers' judgment of gifted mathematics student characteristics. Volumen 23. Recuperado el 18 de Enero del 2012 de

http://www.gifted.uconn.edu/siegle/Publications/gtimathteacherjudgments.pdf

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. (Tesis doctoral) Granada: Universidad de Granada.

Bloom, B. (Ed.). (1985). Developing talent in Young people. New York: Ballentine.

DRAE (2001). Diccionario de la Real Academia Española. La 22.ª Edición. Madrid.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. (Trad. Teller J.). Chicago, EEUU: The University of Chicago Press (Original en ruso, 1968).

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. Arithmetic Teacher.

Guzmán, M. (s/f). El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas.
Recuperado el 21 de Marzo de 2012 de

http://thales.cica.es/estalmat/sites/thales.cica.es.estalmat/files/MGUZMAN_TRATAMIENTO_EDUCATIVO.pdf

Hoeflinger, M. (1998). Developing mathematically promising students. Roeper Review.

Johnsen, S. K. (2004). Identifying Gifted Students: A Practical Guide. Prufrock Press, Inc.

Linda E. Brody. (2004). The Johns Hopkins Talent Search Model for Identifying and Developing Exceptional Mathematical and Verbal Abilities. Springer Netherlands.

Lupkowski-Shoplik, A. E., & Assouline, S. G. (1994) Evidence of extreme mathematical precocity: Case studies of talented youths. Roeper Review. (Del international teachers judgment)

Mancera E. (2000). Saber matemáticas es saber resolver problemas: la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. México: Grupo Editorial iberoamericana.

Marland, Sidney P. (1972). Education of the Gifted and Talented, Volumen 1. Report to the Congress of the United States by the U. S. Commissioner of Education. Washington, D. C. United States Government Printing Office.

Miserandino, D. A., Subotnik, R. F., & Ou, K. (1995). Identifying and nurturing mathematical talent in urban school setting. The Journal of Secondary Gifted Education. (Del international teachers judgment)

Miller, Richard C. (1990). Discovering Mathematical Talent. Estados Unidos: The Council for Exceptional Children. Recuperado el 13 de Febrero del 2012 de

http://www.gifted.uconn.edu/siegle/tag/Digests/e482.html

SEP. (s/f). Atención educativa a niños, niñas y jóvenes con aptitudes sobresalientes y/o talentos específicos. Recuperado el 15 de Agosto de 2013 de http://www.educacionespecial.sep.gob.mx/html/asantecedentes.html

OCDE (2011). Científicos por cada mil habitantes económicamente activos

http://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=MSTI_PUB

Oktac, A., Fuentes, S., & Rodriguez, M. (2011). Equity Issues Concerning Gifted Children in Mathematics: A perspective from Mexico. Springer Science+Business Media B.V.

Olszewski-Kubilius, P., Shaw, B., Kulieke, M. J., Willis, G. B., & Krasney, N. (1990). Predictors of achievement in mathematics for gifted males and females. Gifted Child Quarterly.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas Sa De Cv.

Ramírez U. Rafael (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. (Tesis Doctoral) Granada. Editorial de la Universidad de Granada.

Renzulli, J. S. (1977). The enrichment triad model. A guide for developing defensible programs for the gifted and talented. Mansfield Center, CT: Creative Lerning Press.

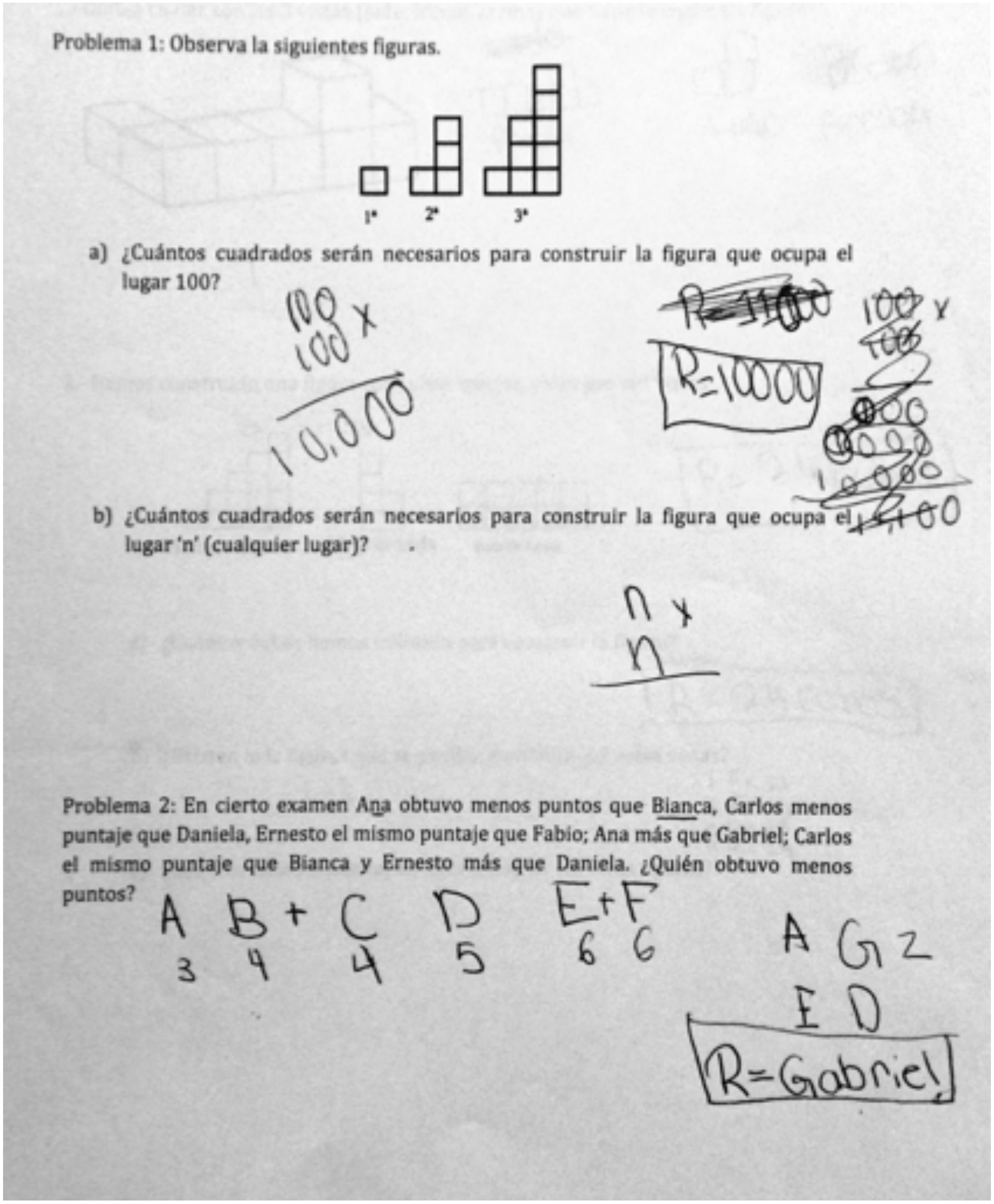
UNESCO. (2004). La educación de niños con talento en Iberoamérica. (M. Benavides, A. Maz, & R. Blanco, Eds.) Santiago, Chile: Trineo S.A.

Universidad de Sonora (2011), [base de datos]. Hermosillo, Sonora: Dirección de Servicios Escolares. Recuperado el 20 de Junio de 2012 de

http://www.planeacion.uson.mx/sie/alumnos/res_poblacion_his.php

ANEXOS

1. Hoja de la entrevista de Bianca.



Problema 1: Observa la siguientes figuras.

1ª 2ª 3ª

a) ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 100?

100 x 100

10,000

~~R=1100~~

$\boxed{R=10000}$

b) ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 'n' (cualquier lugar)?

n x n

Problema 2: En cierto examen Ana obtuvo menos puntos que Bianca, Carlos menos puntaje que Daniela, Ernesto el mismo puntaje que Fabio; Ana más que Gabriel; Carlos el mismo puntaje que Bianca y Ernesto más que Daniela. ¿Quién obtuvo menos puntos?

A B + C D E + F

3 4 4 5 6 6

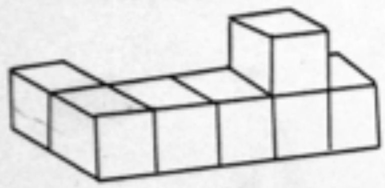
A G 2

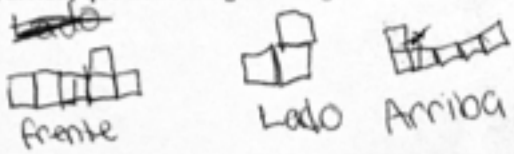
E D

$\boxed{R=Gabriel}$

Problema 4

1.- Dibuja cuales son las 3 vistas (lado, frente, arriba) que tiene la siguiente figura





2.- Hemos construido una figura con cubos iguales, estas son sus vistas

R= 24 cubos

a) ¿Cuántos cubos hemos utilizado para construir la figura?

R= 24 cobos

b) ¿Existen más figuras que se puedan construir con estas vistas?

Si

1 R= 21
2 R= 22
3 R= 23
4 R= 24

c) ¿Cuántos cubos necesitarías para construir las otras figuras?

Problema 5: Tengo 18 monedas en mi bolsillo de \$1, \$2 y \$5 pesos, en total suman \$50 pesos. Adivina cuantas monedas hay si 10 monedas no son de \$2 pesos y 12 monedas no son de \$5 pesos.

18 -
10
8

18 -
12
06

8 \$2 16
6 \$5 30
14

16
30
04
50

4 \$1
18

4
50

Problema 6

1.- El doble del número que estoy pensando es 70, ¿en cuál número estoy pensando?

$2\overline{)70}$ 35
6
10

R = 35

2.- La tercera parte del número que estoy pensando es 15, ¿en cuál número estoy pensando?

15 x
3
45

R=45

3.- Al doble del número que estoy pensando le he restado 23 unidades y he obtenido como resultado 123. ¿Cuánto suman las cifras del número que había pensado?

$2\overline{)146}$ 73
14
06
0

73

4.- Al doble del número que estoy pensando le he sumado 20 y he obtenido como resultado 40, ¿en cuál número estoy pensando?

R= 10

40 -
20
$2\overline{)20}$ 10

2. Hojas de la entrevista de Carmen

Problema 1

1.- Observa la siguiente tabla e intenta completarla para el lugar 4.

Número de cuadrados	1	4	9	16	25
Figura					
Lugar	1	2	3	4	5

2.- ¿Podrías encontrar alguna relación entre el número de la figura y el número de cuadrados que se necesitan para dibujarla?

3.- Ahora, ¿cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 1000?

1000×
1000
0000
0000
000
1000000

1,000,000

Problema 2

1.- ¿Cuántos números hay del 1 al 1000 que terminan en 0?

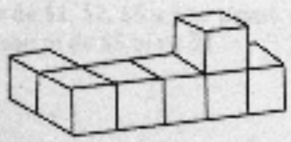
100 numeros

2.- Un número capicúa es cualquier número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo: 171, 54145, 12321, etc. ¿Cuántos capicúa hay entre 100 y 1000?

100

Problema 3

1.- Dibuja las tres vistas (lateral, frente, arriba) que tiene la siguiente figura



2.- Hemos construido un arreglo de con cubos iguales, estas son sus vistas

a) ¿Cuántos cubos hemos utilizado para construir la figura?

21

b) ¿Sólo existe esa figura para esas vistas?

c) ¿Habrá otros arreglos de cubos que tengan las mismas vistas del problema anterior, pero un número diferente de cubos?

d) ¿Cuáles otros puedes encontrar?

22, 23, 24

Problema 4

1.- Tengo 20 canicas, azules y rojas. Si 15 de ellas no son azules, ¿cuántas canicas rojas tengo en total?

15

2.- Tengo 10 canicas rojas, azules y verdes y cuatro de ellas no son rojas.

a) ¿Cuántas canicas rojas hay?

6

b) ¿Cuántas canicas azules hay?

3.- Tengo 27 monedas en mi bolsillo que en total suman $100 pesos, adivina cuántas hay de $1, $2, $5 y $10 pesos, si 10 monedas no son ni de $5 ni de $10, y 20 monedas no son ni de $5 ni de $2.

Problema 5

1.- El doble del número que estoy pensando es 70, ¿en cuál número estoy pensando?

35

2.- La tercera parte del número que estoy pensando es 15, ¿en cuál número estoy pensando?

45

3.- Intenta resolverlo de nuevo el problema 5 del Cuestionario.

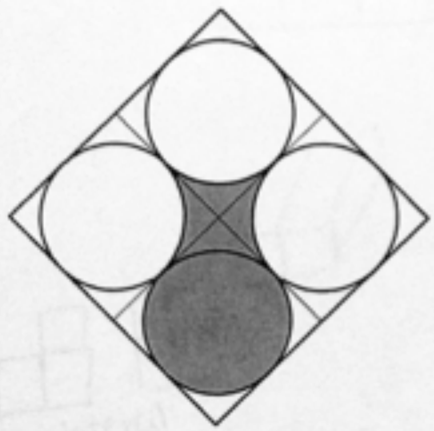
4.- Al doble del número que estoy pensando le he sumado 20 y he obtenido como resultado 40, ¿en cuál número estoy pensando?

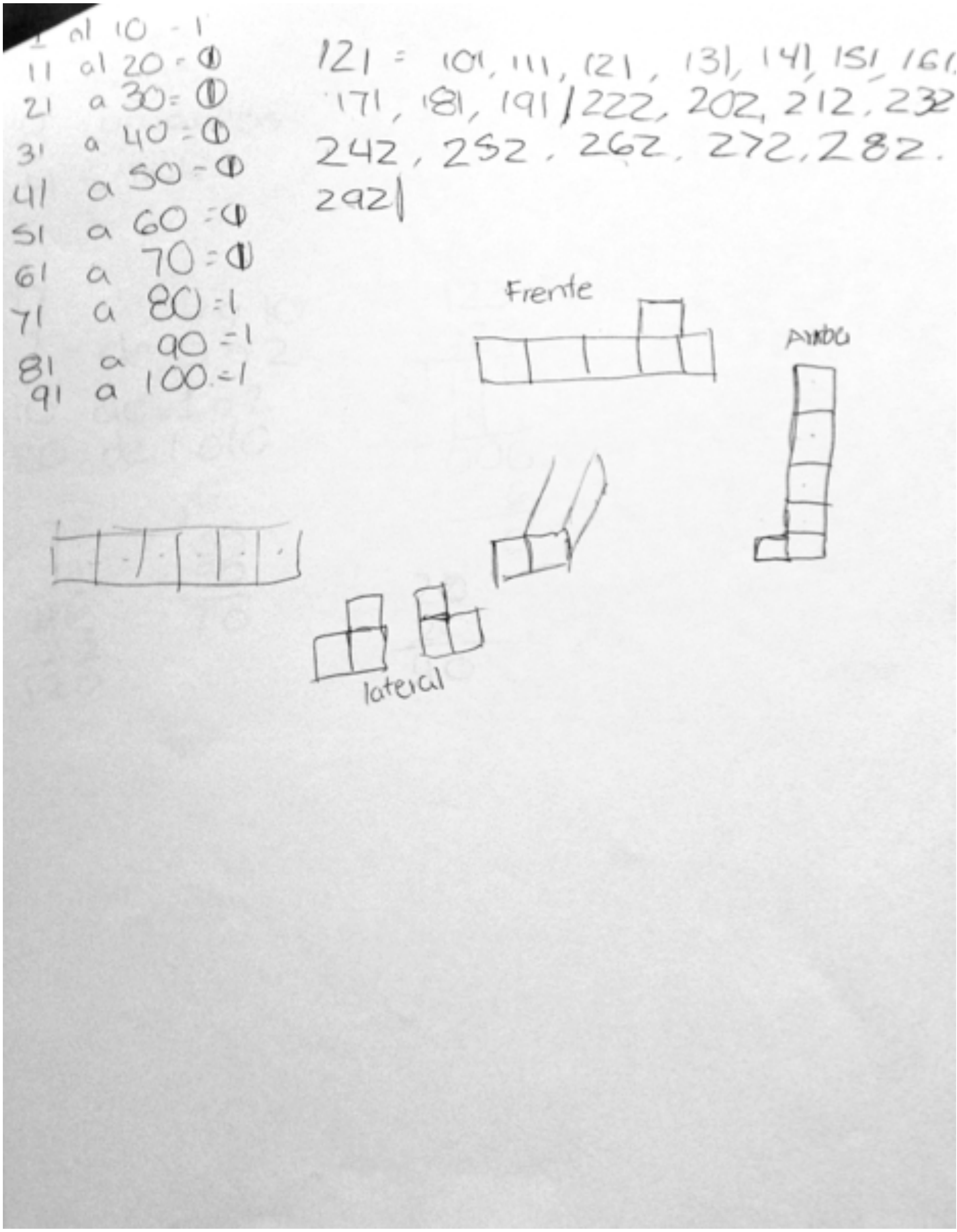
10

Problema 6

1.- En la figura siguiente sombreamos de gris un jarrón, ¿qué fracción de todo el cuadrado representa ese jarrón?

1/4




1 al 10 = 1
11 al 20 = 1
21 a 30 = 1
31 a 40 = 1
41 a 50 = 1
51 a 60 = 1
61 a 70 = 1
71 a 80 = 1
81 a 90 = 1
91 a 100 = 1
121 = 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191 / 222, 202, 212, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292
Frente
Arriba
lateral

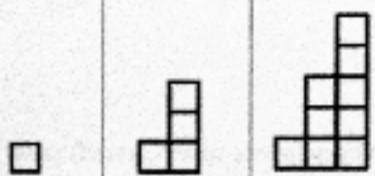
3 - verdes
5 - rojas
8 - amarillas
4 - Azules

17 - de 5 o 10
7 - de 5 o 2
10 de 1 o 2
20 de 1 o 10

123
23
73
2) 146
14
006
6
0

$$\begin{array}{r} 73 \\ \underline{73} \\ 146 \\ \underline{23} \\ 123 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}35 \\ \underline{35} \\ 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ \underline{20} \\ 40 \end{array}$$

3. Hojas de la entrevista de Daniela.



Problema 1

1.- Observa la siguiente tabla e intenta completarla para el lugar 4.

Número de cuadrados	1	4	9	16	25	36
Figura						
Lugar	1	2	3	4	5	6

2.- ¿Podrías encontrar alguna relación entre el número de la figura y el número de cuadrados que se necesitan para dibujarla?

3.- Ahora, ¿cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 1000?

Pues el 1000 lo mull

1000 x
1000
10000

1000 x
1000
1000
1000
1000
1000 +
1000
1,1 1 1,0 00

Problema 2

1.-¿Cuántos dígitos 1 hay si tengo una lista del número 1 al 19?

~~11~~
12

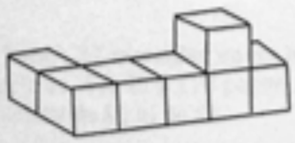
3.- Intenta separar en dos partes esa lista y cuéntalos de nuevo.

4.- Un número **capicúa** es cualquier número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo: 171, 54145, 12321, etc. ¿Cuántos capicúa hay entre 100 y 1000?

100

Problema 3

1.- Dibuja las tres vistas (lateral, frente, arriba) que tiene la siguiente figura



2.- Hemos construido un arreglo de con cubos iguales, estas son sus vistas

23

a) ¿Cuántos cubos hemos utilizado para construir la figura?

b) ¿Sólo existe esa figura para esas vistas?

c) ¿Habrá otros arreglos de cubos que tengan las mismas vistas del problema anterior, pero un número diferente de cubos?

d) ¿Cuáles otros puedes encontrar?

Problema 4

1.- Tengo 20 canicas, azules y rojas. Si 15 de ellas no son azules, ¿cuántas canicas rojas tengo en total?

2.- Tengo 10 canicas rojas, azules y verdes y cuatro de ellas no son rojas.

a) ¿Cuántas canicas rojas hay?

b) ¿Cuántas canicas azules hay?

3.- Tengo 27 monedas en mi bolsillo que en total suman $100 pesos, adivina cuántas hay de $1, $2, $5 y $10 pesos, si 10 monedas no son ni de $5 ni de $10, y 20 monedas no son ni de $5 ni de $2.

Problema 5

1.- Al triple del número que estoy pensando le he sumado 5 y he obtenido como resultado 50, ¿en cuál número estoy pensando?

15.

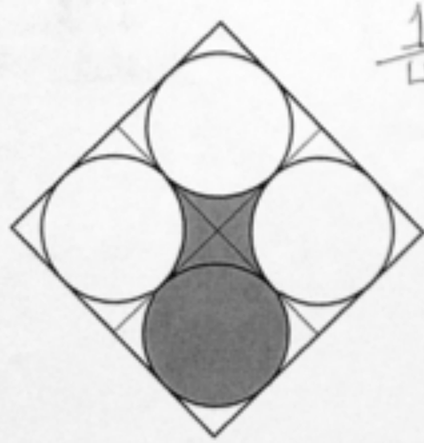
Problema 6

1.- ¿Cuál es el total de cuadros que se ven en la figura del Problema 6?

2.- ¿Cuántos cuadrados han sido sombreados?

4.- **¿Qué fracción** del total de cuadrados ha sido sombreado?

5.- En la figura siguiente sombreamos de gris un jarrón, ¿qué fracción de todo el cuadrado representa ese jarrón?

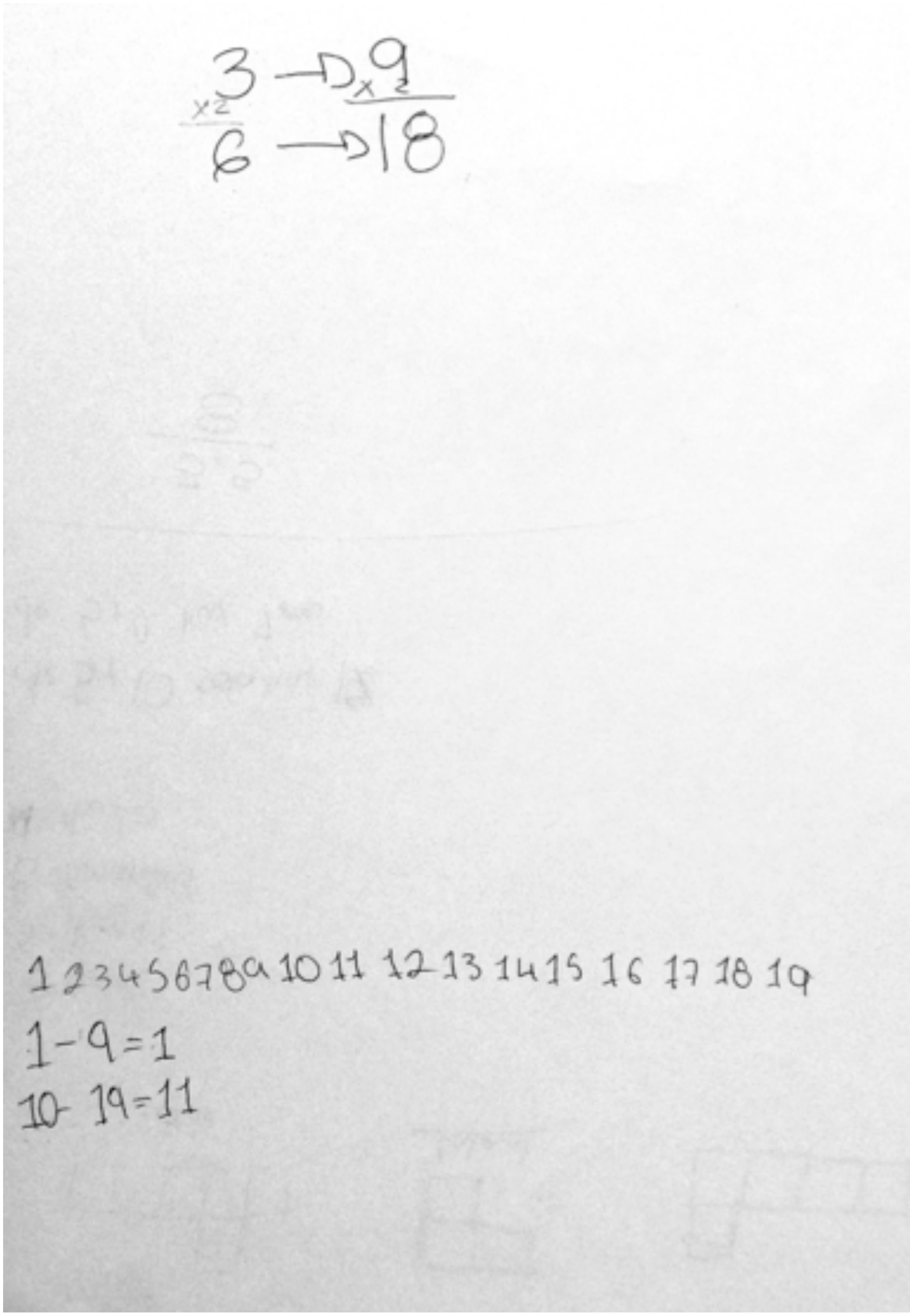


$\frac{1}{4}$

3=Verdes
5=Rojas
8=Amarillas
4=Azules

de 5 y 10 sola hay ~~15~~
de 5 y 2 hay 7

$$\frac{5.5}{8}$$


3 → 9
x2 x2
6 → 18
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
1-9=1
10- 19=11