Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Modelación de Fenómenos Mediante Funciones Lineales

Tesis que presenta:

SAÚL ERNESTO COSMES ARAGÓN

Para obtener el grado de:

Maestría en Ciencias
con Especialidad en Matemática Educativa

Directora de Tesis:
Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Hermosillo, Sonora, México　　　　Enero de 2012

ÍNDICE

DEDICADA A:

A quienes ya no están conmigo físicamente, pero que les sigo teniendo el mismo amor de siempre. Mis abuelas:

Mamá Rosa y

Mamá Nety

AGRADECIMIENTOS:

A Dios, por estar siempre conmigo, demostrándome su gran amor, en cada día vivido y porque gracias a mi fe en Él puedo continuar.

A mis Papás, Elba y Ernesto, por ser parte esencial en mi existir, por su ayuda y por las cosas que me han enseñado, para ser cada vez un mejor ser humano.

A mis hermanos, Noé, Edén y Sugey por compartir momentos alegres y siempre estar unidos tanto en situaciones difíciles como de felicidad.

A mi directora de tesis, Dra. Silvia Ibarra, por su siempre profesional y valiosa dirección en la elaboración de este trabajo, de una manera cordial. Además de haber podido presenciar el gran ser humano que hay en su persona.

Al Dr. José Ramón por sus aportaciones y consejos para el trabajo.

A la Mtra. Martha, por imprimirme ánimo a través de consejos muy útiles.

A todos los profesores que me impartieron cursos.

A la Universidad de Sonora, por haberme permitido realizar el posgrado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por la beca otorgada durante los dos años de estudio.

CAPÍTULO I

PRESENTACIÓN

En este capítulo se muestra evidencia de la existencia de la problemática que abordamos, primero a nivel general y después en el terreno particular que nos interesó, correspondiente a una propuesta didáctica para el estudio de la función lineal.

Con la intención de tener un marco de referencia para el trabajo expuesto, se presentan también los resultados de una revisión bibliográfica donde se buscaron diseños didácticos y resultados de investigación que tuvieran coincidencia con el nuestro, ya sea desde el punto de vista de la temática tratada, de la metodología usada para diseñar las actividades didácticas o de los elementos teóricos empleados.

1.1 La evaluación por competencias en los estudiantes mexicanos

En México, y particularmente en el Estado de Sonora, existe consenso en el ambiente académico sobre la existencia de una seria problemática tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de la matemática. Los resultados que nuestro país ha obtenido en diversas evaluaciones tanto internas como externas, son evidencia de la poca capacidad que el sistema escolar mexicano logra desarrollar en los individuos para reconocer el papel que juegan las matemáticas en su vida y para aplicar ésta a situaciones en contexto.

Por ejemplo, la Subsecretaría de Educación Media Superior a través del sistema de Evaluación de la Educación Media Superior, ha desarrollado el examen conocido como Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE, por sus siglas), cuyos resultados, en el caso de la habilidad matemática de los estudiantes, en los dos últimos años de aplicación son siguientes:

Resultados	**Insuficiente**		**Elemental**		**Bueno**		**Excelente**	
	2009	2010	2009	2010	2009	2010	2009	2010
Estado de Sonora, México	49.3	42.5	32.3	36.1	13.6	15.9	4.8	5.5

Nacional	46.1	40.6	35.1	39.1	13.9	15.1	4.8	5.3

En ENLACE se considera que un estudiante cuenta con habilidad matemática si es capaz de valorar el papel que juegan las matemáticas en su vida, y de esta forma, aplicarlas en la solución de problemas en diferentes contextos.

En el caso del nivel catalogado como excelente, se espera por ejemplo que el individuo sea capaz de emplear operaciones con fracciones para solucionar problemas y resolver combinaciones con signos de agrupación, que identifique la relación existente entre gráficas y funciones lineales o cuadráticas, y exprese algebraicamente una representación gráfica. También se espera que el individuo identifique la ecuación de una recta a partir de sus elementos y las aplique para encontrar la distancia entre dos puntos.

Otra instrumento que nos indica resultados importantes en cuanto a las competencias matemáticas que presentan los estudiantes mexicanos es la prueba del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés), promovido y aplicado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

El propósito de la prueba PISA es determinar la medida en que los estudiantes de 15 años adquirieron conocimientos y habilidades relevantes para participar activa y plenamente en la sociedad moderna.

Al igual que ENLACE, la prueba PISA se propone medir las competencias matemáticas que ha adquirido el alumno y no los conocimientos específicos asociados a un currículo escolar; PISA define competencia matemática como:

La capacidad de un individuo para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz a la vez de plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones que incluyen conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, de probabilidad, o de otro tipo. Además, esta competencia tiene que ver con la capacidad para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados, y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que pueda *satisfacer las necesidades de la vida diaria de un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo* (OCDE, 2010).

En la evaluación de PISA 2009, para el Estado de Sonora se obtuvieron los siguientes resultados:

Niveles bajos (<=1)	55.4 %
Niveles medios (de 2 a 3)	42.1 %
Niveles altos (>=4)	2.5 %

Fuente: OCDE (2010)

Para PISA, un estudiante que se ubica en el nivel 1es incapaz de tener éxito en las tareas más básicas planteadas en dicho instrumento de evaluación, por lo que probablemente tendrá serias dificultades para usar las matemáticas como herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de su vida.

1.2 Ingeniería y matemáticas

Mostramos los resultados anteriores, porque buena parte de los egresados de los bachilleratos ingresarán a diversas carreras de ingeniería, espacio educativo en el que, desde tiempos antiguos, el conocimiento matemático juega un papel fundamental.

En un país en vías de desarrollo como el nuestro, es importante contar con profesionales de la ingeniería para hacer frente a esta era de la globalización tecnológica, pues la ingeniería está presente en la infraestructura de un país, desde las áreas de construcción de vivienda hasta la producción de energía nuclear.

Justamente por ser una de las áreas de formación profesional que más requerimientos matemáticos tiene, siempre ha existido un debate en cuanto a la manera de enseñar dicho conocimiento en las escuelas de ingeniería, tal y como se advierte en las referencias citadas por Ibarra (2008) del trabajo de Hernández (2000):

> *(…) los estudios de Grattan-Guinness (1989) para el caso de las matemáticas aplicadas en Francia en el siglo XIX; y las investigaciones del historiador alemán Gert Shubring*

(1989) para el caso de Alemania durante la época de Felix Klein. Durante este periodo hubo un gran debate en torno al entrenamiento matemático que deberían recibir los ingenieros. Así, por ejemplo, tenemos las siguientes recomendaciones hechas por Stäckel en 1913: los ingenieros deberán obtener su educación matemática en las escuelas técnicas; los cursos de matemáticas deberán ser enseñados por profesores de matemáticas quienes estén favorablemente dispuestos hacia la tecnología (Shubring, 1989; p.191). Esta última propuesta, de algún modo, es retomada por algunos autores de libros de texto en donde se rechaza el rigor de la matemática y se enfatiza el papel de la matemática como un medio para hacer ingeniería (…) (p.69).

De igual manera, encontramos referencias sobre problemas concretos identificados en algunas investigaciones, como por ejemplo las citadas por Hernández (2000), quien muestra los resultados de un estudio realizado entre graduados de ingeniería química y eléctrica, donde se afirma que los egresados "… muestran un desarrollo aceptable de habilidades algebraicas y muy pobres en preguntas que tienen que ver con la construcción de gráficas de funciones".

En este sentido tomamos la posición de una enseñanza de las matemáticas que involucre procesos de reflexión y construcción social para la aprehensión de los contenidos matemáticos por parte de los estudiantes, donde el profesor privilegie la enseñanza de las matemáticas desde la lupa de formar estudiantes competentes y capaces de dar significado a lo aprendido y aplicarlos ya sea en sus materias posteriores, en su vida cotidiana y ejercicio profesional.

1.3 Elementos para contextualizar la problemática de interés

1.3.1 Algunos índices importantes

Nos interesamos particularmente en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en ingeniería, a partir de la identificación de una problemática específica en nuestro centro laboral. En concreto nos referimos al índice elevado de reprobación en las materias de matemáticas básicas que se observa en el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), institución escolar de nivel superior que está ubicada en el noroeste de nuestro país y que está dedicada a la formación de profesionales en diversos campos de la ingeniería. Por citar un ejemplo, en la materia de Cálculo I los resultados del semestre enero-mayo de 2010 dan evidencia de ello, ya que de 904 alumnos inscritos solamente aprobaron 211. Si tomamos en consideración que el curso de Cálculo está ubicado en el plan de estudios de todas las ingenierías, pues se trata de contenidos matemáticos que son la base de la formación de cualquier egresado de esa área, es evidente que los procesos de formación profesional de la institución están teniendo dificultades para lograr sus objetivos.

Institucionalmente, tratando de buscar una salida a dicha problemática, el ITSON ha formulado un curso propedéutico de carácter extracurricular que se denomina Fundamentos de Matemáticas, en cuyo programa se declara que con él se contribuye a:

> *Solucionar problemas relacionados con procesos y sucesos en fenómenos naturales o producidos por el ser humano, a través de la aplicación de principios, leyes y modelos de las ciencias básicas -formales y experimentales-, con el propósito de desarrollar la capacidad de resolver problemas en ingeniería.*

Y como Descripción General del Curso se establece que se trata de un:

> *Curso extracurricular que se ofrece a todos aquellos alumnos que desean cursar alguna carrera de Ingeniería o Licenciatura en Tecnología de Alimentos, dentro del cual se trabaja con el desarrollo y aplicación de los fundamentos matemáticos a fin de poder aplicarlos en cursos posteriores.*

Sin embargo, pese a estos esfuerzos no se han conseguido resultados halagadores. Prueba de ellos son los índices de reprobación de las materias de Fundamentos de Matemáticas y Cálculo I, datos proporcionados por el Departamento de Registro Escolar del Instituto Tecnológico de Sonora, que se muestran a continuación:

Materia	**Índice de reprobación durante el semestre indicado**		
	2009-2	2010-1	2010-2
Fundamentos de Matemáticas	53.45%	52.24%	46.14%
Cálculo I	63.20%	58.10%	44.59%

De acuerdo con nuestro análisis del programa de la materia Fundamentos de Matemáticas y del manual que fue elaborado como apoyo para el profesor y los estudiantes, éstos no se corresponden con el propósito enunciado para el curso. En el caso del manual, la presentación que se hace de los temas es siempre mediante una definición, enunciación de algunas propiedades, ilustración mediante ejemplos y se finaliza con una tarea donde básicamente la intención es la reproducción de lo previamente ilustrado. Cuando llegan a aparecer gráficas, siempre son como fotografías que también ilustran lo expresado analítica o verbalmente. En ningún lado aparecen problemas que estén en contextos extra matemáticos o algún tipo de problema de aplicación. Aparentemente se da por hecho que cuando dichas situaciones aparezcan, el alumno podrá utilizar los conocimientos matemáticos estudiados sin mayores dificultades.

1.3.2 Descripción de algunos fragmentos del manual Fundamentos de Matemáticas

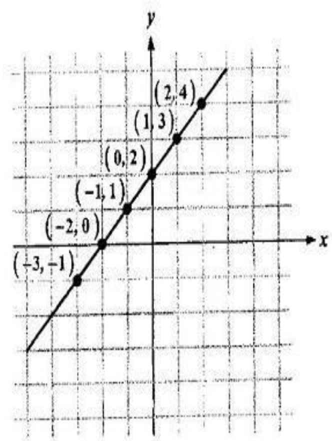
A continuación presentamos un análisis somero y parcial del contenido de algunos fragmentos del material de apoyo para curso, el cual, como comentamos anteriormente, consiste de un manual denominado Fundamentos de Matemáticas. Los fragmentos que presentamos están tomados de la presentación que ahí se hace del tema de funciones lineales; posteriormente daremos algunos argumentos del por qué se ha seleccionado esta temática.

Fragmento 1. Página 93 del manual Fundamentos de Matemáticas

Elaborar la gráfica de una ecuación en las variables x e y, significa localizar todos los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

Hay un número infinito de pares ordenados que satisfacen la ecuación $y = x + 2$ y todos se localizan sobre la misma línea recta. La siguiente tabla de valores muestra otros pares ordenados de números que satisfacen la ecuación $y = x + 2$.

x	y
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4



La línea recta contiene precisamente aquellos puntos cuyos pares ordenados (x, y) satisfacen la ecuación $y = x + 2$. Cualquier punto que no esté en la recta tendrá un par ordenado (x, y) en el cual $y \neq x + 2$. Así, $(3, 5)$ no está en la recta, ya que $5 \neq 1 + 2$. En otras palabras, ***para que una gráfica pase por un punto determinado, las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la gráfica.***

La gráfica de $y = x + 2$ es una línea recta y a la ecuación se le da el nombre de ***ecuación lineal.*** Como dos puntos determinan una recta, una manera más fácil de trazar la gráfica de una recta, consiste en localizar sus intercepciones con los ejes, es decir, sus dos **coordenadas al origen. La abscisa al origen** para $y = x + 2$ es **2**; o sea, la abscisa del punto donde la recta corta al eje x (hicimos a $y = 0$ y despejamos a x). **La ordenada al origen** es **2**; es decir, la ordenada del punto donde la recta corta al eje y (hicimos a $x = 0$ y despejamos a y).

En el fragmento anterior, se puede observar que la introducción al tema se da en un contexto intramatemático, a partir de una representación tabular que se pretende relacionar discursivamente con su representación gráfica y posteriormente con su representación algebraica. La presentación es estática, nos parece demasiado formalizada y que requiere así de una mayor exigencia de abstracción y generalización por parte del estudiante.

Veamos ahora el Fragmento 2, tomado de la página 94:

EJEMPLO. Elabore la gráfica de la ecuación lineal: $y = 2x - 1$, usando las intercepciones con los ejes.

Solución: Para encontrar la abscisa al origen, hacemos a $y = 0$. (Recuerde que cuando la recta, o cualquier curva, corta al eje x, el valor de y es cero).

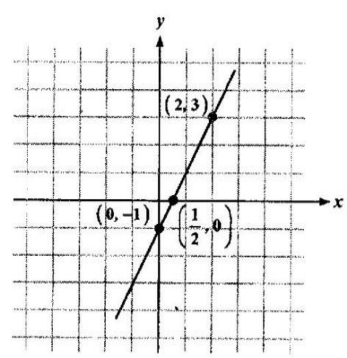
$$2x - 1 = y$$
$$2x - 1 = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{abscisa en el origen}$$

Para encontrar la ordenada al origen, hacemos $x = 0$. (Recuerde que cuando una recta, o cualesquier otra curva, corta al eje y, el valor de x es cero).

$$y = 2x - 1$$
$$y = 2(0) - 1$$
$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{ordenada al origen}$$

Generalmente, es conveniente localizar otro punto para verificar nuestro trabajo. Así, para $x = 2$, obtenemos que $y = 3$; y la recta pasa por el punto $(2, 3)$.

Finalmente, señale los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$ y $(2, 3)$. Trace la recta que pasa por ellos para determinar la gráfica

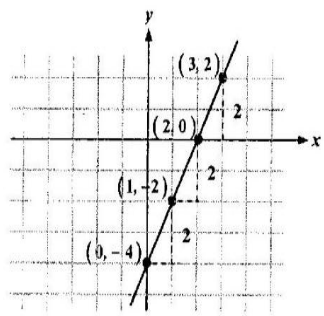


Acorde con la estrategia del texto, mediante la ejemplificación se pasa a la construcción de la gráfica asociada a la expresión algebraica utilizando otro recurso, el de las intersecciones con los ejes. Ahora se parte de una representación algebraica para encontrar las coordenadas de dos puntos, encontrar otro punto de verificación (innecesario por cierto), y llegar a la gráfica.

Pasemos al Fragmento 3, el cual fue seleccionado de la página 95:

La siguiente figura muestra la gráfica de la ecuación lineal $y = 2x - 4$, incluyendo las coordenadas de cuatro puntos específicos. Gracias a la figura, observará que el valor de y aumenta **2** unidades cada vez que el valor de x se incrementa en **1** unidad. La razón que se forma al comparar este cambio de y con el correspondiente cambio de x es $\frac{2}{1} = 2$. Usando las coordenadas de los puntos $(3, 2)$ y $(2, 0)$, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\textit{cambio de los valores de } y}{\textit{cambio de los valores de } x} = \frac{2-0}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$



*Por conveniencia, podemos referirnos con "Δy" (léase "delta y") al cambio de valor de y; el cambio de valor de **x** se designa "Δx" (léase "delta x")*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

Demuestre que se obtiene la misma razón al usar otros dos puntos cualesquiera de la recta, como $(1, -2)$ y $(0, -4)$.

A esta razón le damos el nombre de ***pendiente*** de la recta, y la definimos de la siguiente manera :

DEFINICION DE PENDIENTE

Si dos puntos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2), están en una recta l, la pendiente m de la recta l se define así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ ; \ x_2 \neq x_1$$

Observe en la definición que $x_2 - x_1 \neq 0$ no puede dar cero; es decir, $x_2 \neq x_1$. La única ocasión en que $x_2 = x_1$ ocurre cuando la recta es vertical.

Tal vez resulte útil concebir la pendiente de una recta en cualquiera de estas formas:

$$\textit{pendiente} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\textit{cambio de } y}{\textit{cambio de } x} = \frac{\textit{cambio vertical}}{\textit{cambio horizontal}} = \frac{\textit{elevación}}{\textit{avance}}$$

- 95 -

Nuevamente, mediante el esquema “ilustración de casos particulares-reproducción de lo ilustrado-definición”, se introduce el concepto de pendiente, que es una de las nociones claves para establecer la relación entre las cambios de las variables involucradas en un determinado fenómeno. Consideramos que introducir de esa manera el concepto de pendiente deja de lado otros acercamientos posiblemente más beneficiosos.

Reproducimos el Fragmento 5, de la página 98:

Ejercicio 6.2

1. *Encuentre las coordenadas al origen y úselas para obtener la gráfica de cada una de las rectas siguientes:*

a) $2x + y = 4$ **b)** $3x + y = 6$ **c)** $y + 2x = -5$

2. *Esboce lo siguiente en el mismo sistema de ejes:*

a) $y = x$

b) Añadiéndole **1** a cada valor de y (ordenada) de la parte (a), elabore la gráfica de $y = x + 1$. En otras palabras, *desplace* cada punto de $y = x$ una unidad hacia arriba.

c) Restándole **1** a cada valor de y (ordenada) de la parte **(a)**, obtenga la gráfica de $y = x - 1$. O sea, desplace una unidad hacia abajo cada punto de $y = x$.

3. *Dibuje lo siguiente en el mismo sistema de ejes:*

a) $y = x$

b) Multiplicando por $\frac{1}{2}$ cada valor de la y de la parte **(a)**, haga la gráfica de $y = \frac{1}{2}x$. En otras palabras, *reduzca* cada valor de la y de $y = x$ a la mitad de su tamaño.

c) Elabore la gráfica de $y = \frac{1}{2}x - 3$ desplazando $y = \frac{1}{2}x$ tres unidades hacia abajo.

Un común denominador en las actividades correspondientes al tema, tal y como se muestra en el Fragmento 4, es que la mayoría son ejercicios rutinarios, repetitivos y que no buscan provocar un reto cognitivo en el estudiante, solamente mecanizar algo previamente ilustrado. Además, el no proponer un enfoque de enseñanza vía la resolución de problemas, donde se pudiera partir de situaciones o problemas extra matemáticos, restringe el aprendizaje de las matemáticas al manejo de fórmulas, algoritmos y definiciones, sin lograr contribuir a una formación en la que el estudiante sea competente para afrontar situaciones del mundo real, o al menos lo más parecido a la realidad, tal como el modelo curricular de la institución pretende.

1.3.3 Propuesta didáctica para abordar la problemática

Hemos dado argumentos que nos permiten asegurar que, al igual que en otros centros escolares de nivel superior, existe una problemática importante en cuanto a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas básicas, especialmente cuando consideramos el papel y propósito de éstas en la formación de un profesional de la ingeniería.

Al tomar como eje central el que los egresados de ingeniería estén en condiciones de resolver problemas de diversos campos utilizando la potencia de los modelos matemáticos, una labor importante a realizar en los cursos de matemáticas tiene que ver necesariamente con desarrollar habilidades o competencias en el estudiante que lo conduzcan a eso. Particularmente, el curso de Fundamentos de Matemáticas puede convertirse en un espacio inicial para incidir en ese desarrollo.

En el marco de este contexto particular, retomando algunos resultados teóricos y metodológicos de Matemática Educativa, creemos procedente proponer un diseño alternativo de una secuencia de actividades que promueva la construcción de modelos matemáticos de fenómenos diversos, mediante las funciones lineales. En el capítulo III se expondrán ampliamente las características de la secuencia propuesta.

Antes es importante que mostremos los resultados de una búsqueda documental para conocer trabajos similares en el tema matemático abordado o en los principios metodológicos seguidos para el diseño.

1.4 Investigaciones y propuestas didácticas relacionadas

El objetivo de esta sección es mostrar trabajos relacionados con el que estamos proponiendo, señalando en qué aspectos este último se diferencia de los primeros. Consideramos que es importante estudiar estos trabajos para dar evidencia de la existencia de la problemática propuesta, decidimos considerar propuestas que se relacionaran no solo con el estudio de funciones, sino también que utilizaran la metodología propuesta en nuestro trabajo, esto debido a que es una metodología recientemente utilizada y no existe gran diversidad de estudios con ella.

Un estudio correspondiente a la función cuadrática fue realizado por Valdez (1999); en dicho trabajo se realizó un estudio piloto sobre los manipuladores simbólico, gráfico y tabular en el aprendizaje de la función cuadrática. Este trabajo de investigación se ubicó en el curso de Matemáticas II, que se impartía entonces a los alumnos del segundo semestre del CETis No. 18 en Mexicali, B. C. utilizando como herramienta tecnológica la calculadora TI-92.

El objetivo fue investigar el efecto que produce el uso de los manipuladores simbólico, gráfico y tabular, conjuntamente con la simulación de situaciones matematizables, en la enseñanza de la función cuadrática, y qué es lo que aprenden los estudiantes en un ambiente que integra estos elementos.

Peralta (2002) realizó un estudio consistente en la aplicación de un cuestionario donde se proponían a un grupo de estudiantes tareas de conversión entre las representaciones gráfica, algebraica y tabular de diversas funciones lineales, señalando como resultado que:

> "… *cuando se trata de la función lineal, la noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Esta dificultad se revela con mayor fuerza en cierto tipo de conversiones, por ejemplo cuando el registro de partida es el gráfico…revelan que los estudiantes han encontrado en la graficación punto por*

punto de la función lineal, una manera de llegar a la respuesta correcta eludiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica.

A pesar del éxito aparente logrado por los estudiantes, el registro tabular utilizado como registro de partida ha resultado desconcertante. Las causas de este desconcierto parecieran asociadas con la utilización de la tabulación, solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma. Puede decirse en lo general que los estudiantes no han mostrado una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio; en el sentido de que no han mostrado una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones. En estas condiciones es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta.

Páez (2004) investigó, a través de un estudio experimental, las concepciones de veintidós estudiantes de una maestría de educación matemática, para así entender con mayor precisión los problemas de aprendizaje del concepto de límite.

Para seleccionar el respaldo teórico que le permitiera realizar la investigación, y a la luz de teorías de corte construcción social del conocimiento y teoría de construcción individual del conocimiento, Páez se planteó la siguiente interrogante: ¿cómo conciliar dos posiciones teóricas tan disímiles: construcción social versus construcción individual?

Para llevar a cabo dicha conciliación utiliza la teoría de sistemas de representación semiótica de Duval, pero considera esencial el papel de las representaciones semióticas no oficiales (las espontáneas, es decir, aquellas que los estudiantes producen cuando tienen un primer contacto con la situación problema).

Es bajo este acercamiento teórico que se plantea la posibilidad de adaptar el trabajo de Duval a la metodología ACODESA (aprendizaje colaborativo, debate científico y auto reflexión), que se puede implementar en el aula de matemáticas y no necesariamente a un trabajo de corte individual.

Otro estudio que también nos da cuenta de la problemática es la tesis de Fernández (2006), en la cual se diseñó, experimentó y evaluó una secuencia didáctica para el estudio de la función cuadrática en el bachillerato. Este diseño estuvo respaldado con la Teoría de Representaciones Semióticas de Raymond Duval. Cabe mencionar que las situaciones problema base del diseño mayoritariamente estuvieron en el ámbito de la matemática.

Nájera (2010) realizó una investigación con el fin de describir e interpretar representaciones sobre variación y variable construidas en ambientes físicos y de simulación dinámica. La investigación se llevó a cabo con estudiantes de primer grado del nivel medio básico. El estudio estuvo respaldado por la teoría de representaciones funcionales (las representaciones espontáneas), según Hitt (2008) y los sistemas semióticos de registro de representación, según Duval (1993). Además, adapta la metodología ACODESA (aprendizaje colaborativo, debate científico y auto reflexión) para la puesta en escena de sus actividades.

En su trabajo de investigación hace énfasis en la problemática de iniciar el estudio del álgebra con el estudio de funciones (en este caso utiliza situaciones de variación lineal) y no, como tradicionalmente se ha hecho, con el uso de la literal como incógnita.

El estudio de las funciones lo realiza a través de la covariación, es decir, la variación conjunta de por lo menos dos cantidades (variables), además sostiene que la variación es por naturaleza de cualidad dinámica, por lo tanto una representación estática puede no ser la mejor opción para tratar la variación, por lo que hace uso de la Geometría Dinámica "GD" (Cabri Géomètre II) y la recreación física de la situación.

Acorde con el marco teórico que utilizó para la investigación, las representaciones producidas por los estudiantes las analizó desde una perspectiva evolutiva de las representaciones en cuanto a representaciones espontáneas.

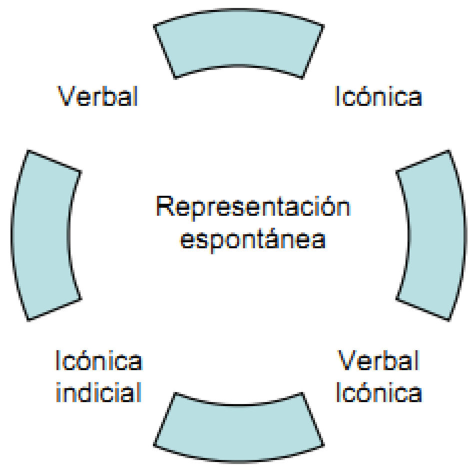


Figura tomada de Nájera (2010)

Nájera concluye como resultados de su investigación los siguientes aspectos:

1. Aún sin ser de tipo estadístico, este estudio aporta elementos para conjeturar, plausiblemente, la existencia de un bajísimo nivel de habilidad representacional de los alumnos de secundaria.

2. Aunado a lo anterior, se encontraron significados limitados de los signos asociados a los elementos que describen la variación y dificultades para dar sentido a los símbolos que representan las variables en relación funcional. Como consecuencia, ese bajo nivel se traduce en serias limitaciones para acceder a información gráfica y a la representación simbólica de la variación.

3. Por otra parte, este trabajo aporta elementos para suponer que en la GD hay un enorme potencial para apoyar el entendimiento de las variables y la variación, pero que esto, a su vez, puede y debe sustentarse con recreaciones físicas de la variación.

4. El estudio apoya la conjetura sobre el importante papel que tiene el diálogo entre los participantes que colaboran en el entendimiento de una tarea y/o en la construcción de significado de una noción o concepto.

5. Con relación al punto anterior, debe precisarse que el "diálogo entre los participantes" descansa en un pequeño conjunto de palabras situadas en las acciones ejecutadas con las herramientas de la GD, y que para los participantes tienen significados socialmente establecidos con referentes muy concretos y poderosamente llenos de sentido.

6. La GD es una herramienta puente entre las recreaciones físicas y los símbolos o recreaciones simbólicas propias del álgebra. Entonces podemos explotar ese puente para aligerar las dificultades propias en la comprensión de la variación y de las herramientas propias del álgebra: los símbolos y sus significados.

CAPÍTULO II

CONSIDERACIONES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS

En este capítulo presentamos los elementos teóricos que fundamentan nuestro trabajo de tesis, así como las consideraciones metodológicas que nos permitieron irlo desarrollando a lo largo del tiempo.

El capítulo se ha dividido en dos secciones, cada una de las cuales se dedica a los elementos que mencionamos en el párrafo anterior. En la primera de ellas desarrollaremos los elementos teóricos que son centrales en este proyecto, los cuales son: los registros de representación semiótica, la teoría de las representaciones funcionales en un marco de interacción social y el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

En la segunda sección hablaremos de los aspectos metodológicos en dos planos: el primero tiene que ver con la planeación general de la tesis, y el segundo con la metodología ACODESA. Esta última fue la que nos sirvió de base para el diseño de las actividades que constituyen la propuesta didáctica, así como para su puesta en escena y posterior interpretación de resultados.

2.1 Consideraciones teóricas

La construcción de marcos teóricos específicos sobre el aprendizaje de las matemáticas ha sido una preocupación latente de los investigadores en Matemática Educativa. DiSessa (1994) considera que existen, en general, dos tipos de teorías. Una que se puede considerar como general (Tipo G) y otra de tipo local (Tipo L). Hitt (2010) las interpreta así: *"Teoría tipo G permite saber en qué nivel se encuentra un estudiante, pero no nos indica en forma precisa cómo preparar actividades que permitan pasar a un estudiante de un nivel a otro, ni cómo dar cuenta de los procesos de adquisición del conocimiento en un contexto de aprendizaje en colaboración; Teoría tipo L permite ubicar a un estudiante en cierto nivel, y al mismo tiempo, la posibilidad de concebir actividades que promueven el paso de un nivel a otro".*

La referencia teórica que sustenta el presente proyecto es una teoría del tipo G-L, compatible con la línea que considera la construcción social del conocimiento, pues incorpora los aspectos teóricos desarrollados por Vigotsky, lo cual conformaría la parte G, y la parte L se interesa en las representaciones funcionales emergentes como producto de un primer encuentro del estudiante con una situación problema.

Sin embargo, para poder hablar de representaciones funcionales requerimos primero establecer algunas nociones previas. Para ello expondremos brevemente algunos tipos de registros de representación, cuando hablamos de registros de representación semiótica (en el sentido de Duval), y qué relación existe entre estos últimos y las representaciones funcionales.

2.1.1 Los registros de representación

La noción de representación es básica cuando se trata de estudiar los fenómenos del conocimiento, ya que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación. Las actividades de representación son básicas para crear habilidades cognitivas en el sujeto y que éstas a su vez le lleven a desarrollar competencias para la solución de problemas. Duval (2004 citado en Nájera (2009)) menciona que no existe ninguna otra forma de acceder a un objeto matemático sino es a través de sus representaciones.

Existen distintas nociones de representación:

La representación mental, es una representación interna que prioriza la interiorización de las acciones del pensamiento, fue estudiada entre otros por Piaget, quien en 1965 en una conferencia de educación e instrucción mencionó lo siguiente:

"*Hace falta tiempo para interiorizar las acciones en pensamiento, pues es mucho más difícil representarse el desencadenamiento de una acción y de sus resultados en términos de pensamiento, que limitarse a su ejecución material".*

La representación interna, la cual se refiere a la función de tratamiento automático o cuasi instantáneo, en esta noción no se tiene nada que ver con una creencia que remita a la conciencia vivida de un sujeto. Por el contrario, se trata de una codificación de la información.

Las representaciones semióticas. Esta noción nace como atención a los problemas de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos; estas representaciones son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y además pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, con la ventaja de que pueden proporcionar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza.

Es a partir de la noción de representación semiótica como se construyen las bases teóricas que sustentan este trabajo, y que a continuación se detallan.

2.1.2 Los registros de representación semiótica y su relación con la teoría de las representaciones funcionales en un marco de interacción social del aprendizaje

En este trabajo asumimos lo señalado por Bagni: "*No son pocos los obstáculos que se pueden encontrar con relación a la expresión de una función en los diversos registros semióticos".* Puesto que los objetos matemáticos son entes abstractos, es necesario expresarlos mediante representaciones, las cuales pertenecen a sistemas de signos que tienen una estructura, limitaciones de funcionamiento, significado y actividades cognitivas que permiten desarrollar.

Las representaciones son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento pues juegan un papel primordial en:

- ✓ El desarrollo de las representaciones mentales a través de un proceso de interiorización,
- ✓ El cumplimiento de diferentes funciones cognitivas: la de objetivación (expresión privada) y de funciones de tratamiento,

- ✓ La producción de conocimiento: cuando de un mismo objeto se producen distintas representaciones.

Por lo que para la aprehensión de un objeto matemático el papel de las representaciones es fundamental, sobre todo cuando de la coordinación de varios registros se trata. Y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

La coordinación de varios registros de representación semiótica (semiosis) es fundamental para la aprehensión conceptual de un objeto matemático (noesis).

Duval afirma que la noesis es inseparable de la semiosis cuando de enseñar matemáticas se trata.

Duval (1998) lo señala así: "*Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades ligadas a la semiosis:*

1. *La formación de una representación identificable: la enunciación de una frase, composición de un texto, escritura de una fórmula.*

   Por ejemplo, la identificación de un conjunto de datos obtenidos a partir de la medición de variables intervinientes en un fenómeno seria un registro identificable.

2. *El tratamiento: es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formado. El tratamiento es una transformación interna a un registro, es importante mencionar que existen reglas de tratamiento propias de cada registro, como por ejemplo las distintas formas de la ecuación de la recta.*

   Un ejemplo de tratamiento sería pasar de la ecuación de la recta en su forma punto- pendiente $y - 5 = 2(x - 1)$, a la forma pendiente – ordenada al origen, $y = 2x + 3$.

3. *La conversión: es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial.*

En la enseñanza tradicional la tarea de conversión es la menos privilegiada, puesto que no existen reglas de conversión tal como existen de tratamiento y exigen un mayor esfuerzo cognitivo por parte del alumno, pero es una tarea esencial en la conceptualización de conceptos.

Por ejemplo, en nuestra secuencia una tarea de conversión sería identificar parámetros en la representación gráfica de la función lineal para obtener la correspondiente representación algebraica.

Esta dificultad para aplicar la conversión de registros es estudiada por Duval (2006; citado en Nájera (2009)). Abajo se presenta una figura donde se muestra la tarea de reconocimiento de la expresión analítica a partir de la gráfica.

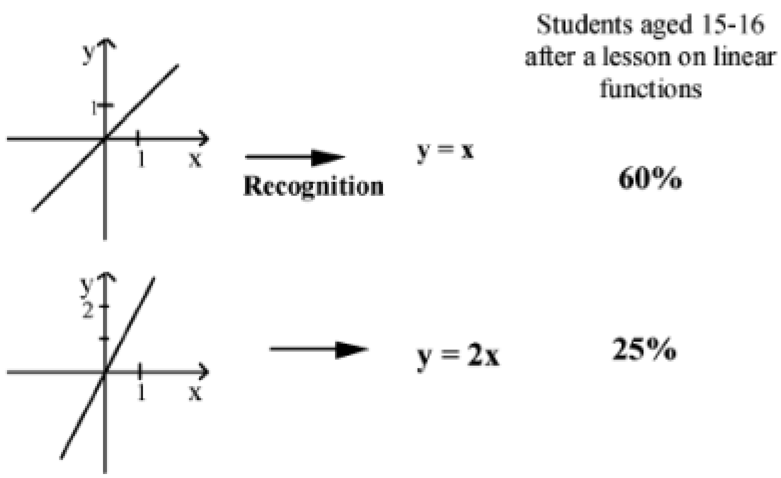


Fig. 1. Figura de Duval (2006), Tarea de reconocimiento.

En la figura anterior observamos que, cuando al estudiante se le presentan tareas de conversión con (por ejemplo, de la representación gráfica pasar a la representación algebraica), presentan dificultades para realizarla, y más aún cuando la expresión es más compleja, pues la dificultad aumenta.

Por otro lado, es muy importante poder establecer la distinción existente entre un objeto y su representación, cualquiera que ésta sea; esto tiene implicaciones en la didáctica de la matemática, puesto que si la enseñanza no conduce a establecer dicha distinción, los objetos matemáticos pueden quedar encapsulados en el registro donde han sido generados, limitando así su comprensión. En este sentido, la afirmación de Duval (1998) "*en una fase de aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización"* tiene especial importancia y por eso ha sido considerada en nuestro diseño.

Consideramos esencial para la aprehensión de un objeto matemático la formación, tratamiento y articulación de distintos registros de representación semiótica en el sentido de Duval, pero se considera que esta teoría (compatible con la construcción individual del conocimiento) no le da importancia a las representaciones espontáneas que se generan en el estudiante ante un primer encuentro con la situación, y que después va refinando en un trabajo en colaboración. Desde nuestro punto de vista, en la teoría de Duval se privilegian las representaciones institucionales, esencialmente las algebraicas, tabulares, verbales y gráficas en el trabajo matemático que un individuo realiza.

Creemos que en la enseñanza tradicional en el mejor de los casos se emplean los tratamientos de algunas representaciones, sobre todo la algebraica; sin embargo, en el sentido de Duval para que un sistema semiótico sea un registro de representación, se debe además realizar la actividad de conversión en al menos dos registros de representación. Sin embargo, señalamos una reconsideración a ese planteamiento: las representaciones espontáneas entran en juego como parte crucial para la evolución hacia las representaciones institucionales de Duval.

Nájera (2009) menciona que las representaciones espontáneas o representaciones auxiliares comúnmente son consideradas erróneas por parte de un experto (e.g. un profesor) y es frecuente que sean evitadas en la enseñanza, por lo que generalmente son ignoradas y por tal motivo no se aprovechan en los procesos de aprendizaje. Las representaciones espontáneas pueden ser erróneas dentro de un registro de representación, pero desde una perspectiva de semiótica evolutiva son representaciones transitorias funcionales, cuyo papel es organizar las ideas de la persona que las produce.

Hitt (2010) define así las representaciones institucionales y las representaciones funcionales:

Representación institucional: es una representación que es reconocida y aceptada por la comunidad en el contexto educativo. En nuestro caso, las representaciones institucionales son aquellas que se encuentran en los libros, las que utilizan los profesores de matemáticas, las que encontramos en las pantallas de las computadoras y calculadoras.

Representación funcional (espontánea). Frente a una tarea matemática (problema o situación problema), los estudiantes intentan comprenderla; si la tarea no está directamente relacionada con una actividad que ponga en marcha un pensamiento convergente (el recuerdo de un algoritmo conocido por los alumnos), los estudiantes en un proceso de pensamiento divergente (es decir que no existiendo un camino directo, la tarea los obliga a la búsqueda de alternativas, esa búsqueda puede estar ligada a intentos por entender la tarea), los lleva a la producción de representaciones mentales que al expresarlas sobre papel u otro medio, sirven como medio de comprensión y discusión con sus compañeros, para mejor comprender la tarea y al mismo tiempo, se crea un campo de posibilidades que podrían encaminar a los interesados hacia la solución de la tarea.

De esta manera, consideramos importantes para la utilización de una teoría del tipo G-L a las representaciones funcionales. Lo que se busca es que, dado un ambiente de interacción social del conocimiento, surjan representaciones funcionales, las cuales mediante un ambiente de trabajo en colaboración puedan refinarse. Así, daríamos paso a las representaciones institucionales y entonces podríamos hablar de una evolución de representación funcional a institucional.

Esta idea es central en la propuesta metodológica ACODESA, la cual desarrollaremos ampliamente en una de las secciones posteriores. Para nosotros este planteamiento reviste particular importancia, pues es con base en él que se diseñaron las actividades que constituyen nuestra secuencia didáctica.

Otros aspectos importantes que Hitt (2010) marca son las diferencias entre un ejercicio, un problema y una situación problema, tal y como se señala a continuación.

Ejercicio: si en la lectura de un enunciado matemático recordamos de inmediato un algoritmo a seguir para la solución.

Problema: si en la lectura del enunciado no recordamos algún algoritmo inmediato a seguir, y la situación nos obliga a producir representaciones espontáneas que nos permitan ligar aspectos matemáticos, no en forma directa sino a través de articulaciones entre representaciones y procesos de tratamiento al interior de los registros intervinientes.

Situación problema: la situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no necesariamente debe ser explicitada en el enunciado. Asumimos que la situación problema debe ser capaz de promover una actitud reflexiva, ante el desarrollo de la tarea y que esta debe de dotar al estudiante de una serie de experiencias, de tal manera que construyan un conocimiento funcional. En una inclusión de situaciones problema a un diseño didáctico con carácter de secuencia, es importante ver la evolución de las mismas en cada una de las etapas de la secuencia.

Para lo anterior se está interesado en la producción de secuencias didácticas que interrelacionen situaciones problema, a partir de las cuales se irá promoviendo un aprendizaje donde los estudiantes vía el modelado construyan su propio conocimiento en interacción social, todo ello con el propósito de que éste les sea funcional.

En este sentido, un marco de instrucción que considere los aspectos teóricos anteriores queda estructurado de la siguiente manera:

Una primera etapa donde se presentan Situaciones Problema y emerjan representaciones funcionales, para que promoviendo la construcción social del conocimiento, dichas representaciones permitan el tránsito fluido hacia las representaciones institucionales.

Una segunda etapa donde se presenten Problemas que promuevan el desarrollo de las representaciones funcionales en un contexto de institucionalización del conocimiento.

Una tercera etapa donde se trabaje con Ejercicios para promover la consolidación del conocimiento matemático en estudio.

La producción de secuencias didácticas que promuevan lo declarado anteriormente sigue la metodología ACODESA para su diseño, puesta en escena y análisis de la puesta en escena. Así mismo consideramos que el diseño de una secuencia didáctica acorde a estos constructos teóricos se corresponde con una enseñanza de las matemáticas vía la resolución de problemas, donde se este interesado en promover el desarrollo de habilidades de reflexión, ante tareas matemáticas en un contexto real.

2.1.3 Uso de software de geometría dinámica en la enseñanza de las matemáticas

En este apartado nos limitaremos a expresar algunas ideas sobre el uso de software de geometría dinámica en la enseñanza de las matemáticas. La razón de esta delimitación consiste en que el uso de dicho recurso tecnológico es nuestros diseños es muy puntual.

Además de las implicaciones sociales de la irrupción de la tecnología en el aula de matemáticas, si nos limitamos al software de geometría dinámica (usado en este trabajo), encontramos que este recurso hace viable la variación de parámetros, con lo que permite el estudio de un fenómeno tanto de manera particular como general.

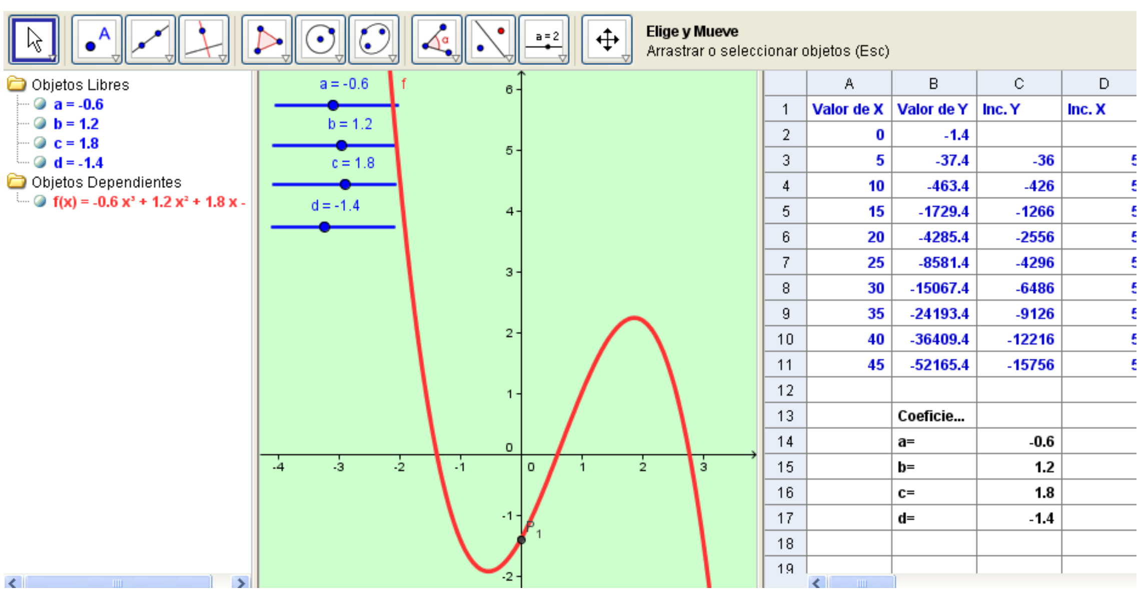
La facilidad de mover puntos, segmentos, de generar lugares geométricos y la posibilidad de cuantificar diversas relaciones (longitudes, áreas, ángulos) permite que el uso de la tecnología se convierta en una herramienta poderosa en el estudio de esta disciplina. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) identifica el uso de las herramientas tecnológicas como un principio que le debe dar soporte a las propuestas curriculares (Santos, 2001).

Es con la llegada de los distintos tipos de software de geometría dinámica (DGS) que aspectos como la visualización y el dinamismo de los objetos matemáticos en el aula, enriquecen la aprehensión de los objetos matemáticos al agilizar los procesos cognitivos del estudiante.

El Software de Geometría Dinámica es un recurso innovador e importante en el proceso de aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes, este tipo de software permite la exploración, la construcción de figuras con ciertas propiedades, la visualización de estas propiedades y la posibilidad de transformar las construcciones en tiempo real, de esta manera se logra que los estudiantes investiguen y aprendan matemáticas (Arcavi y Hadas, 2000, citado en Páez).

Los DGS amplían la posibilidad de integrar las matemáticas con el mundo real pues favorecen la simulación de un fenómeno de manera instantánea, dando la posibilidad de establecer patrones, conjeturas y validar de una manera más eficaz la situación.

A continuación se muestra un applet de GeoGebra donde se resalta lo mencionado anteriormente en cuanto al poder de visualización matemática de los DGS, y la facilidad que brindan para vincular dinámicamente los distintos registros de representación. Cabe resaltar que la ilustración en papel es forzosamente estática, mientras que en la pantalla de la computadora se tiene dinamismo.



Representación dinámica que genera un modelo del tipo función polinomial de grado tres

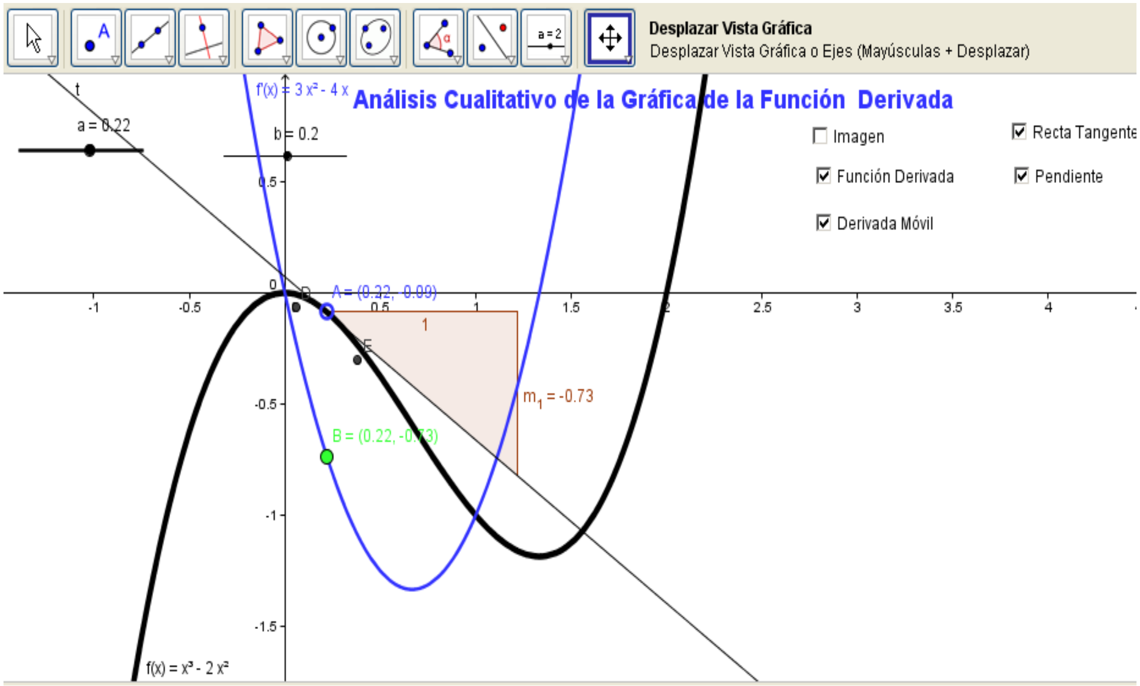
En nuestro trabajo de tesis decidimos utilizar el software de Geometría Dinámica GeoGebra, a continuación mencionamos las ventajas que este software tiene en particular.

GeoGebra cumple con las características de un software de geometría dinámica, esto es, permite la creación de construcciones dinámicas, de geometría euclidiana; por otro lado, al igual que los sistemas de cómputo algebraico, manipula y opera con expresiones simbólicas. Además, permite la graficación de funciones y su manipulación directa. En la versión 3.2 apareció el recurso de hoja de cálculo. Por las razones antes expuestas sus autores se refieren a él como *Software de Matemáticas Dinámicas* (Hohenwarter y Hohenwarter, 2009).

Algunas ventajas técnicas de GeoGebra:

- Es un software de código libre.
- Facilidad para publicación en internet.
- Se puede escribir texto matemático fijo y dinámico conociendo de manera básica el código Látex.
- Propiedad avanzada de cualquier objeto que permite mostrar u ocultar los objetos de acuerdo a condiciones determinadas por el estado de construcción.
- Animación por parámetros, con lo cual se puede lograr el movimiento de los objetos dentro de GeoGebra.

Mostramos un ejemplo donde construimos un applet que nos graficará la función derivada a través de una función dada, aprovechando la ventaja de animación por parámetros, logrando así el movimiento del objeto.



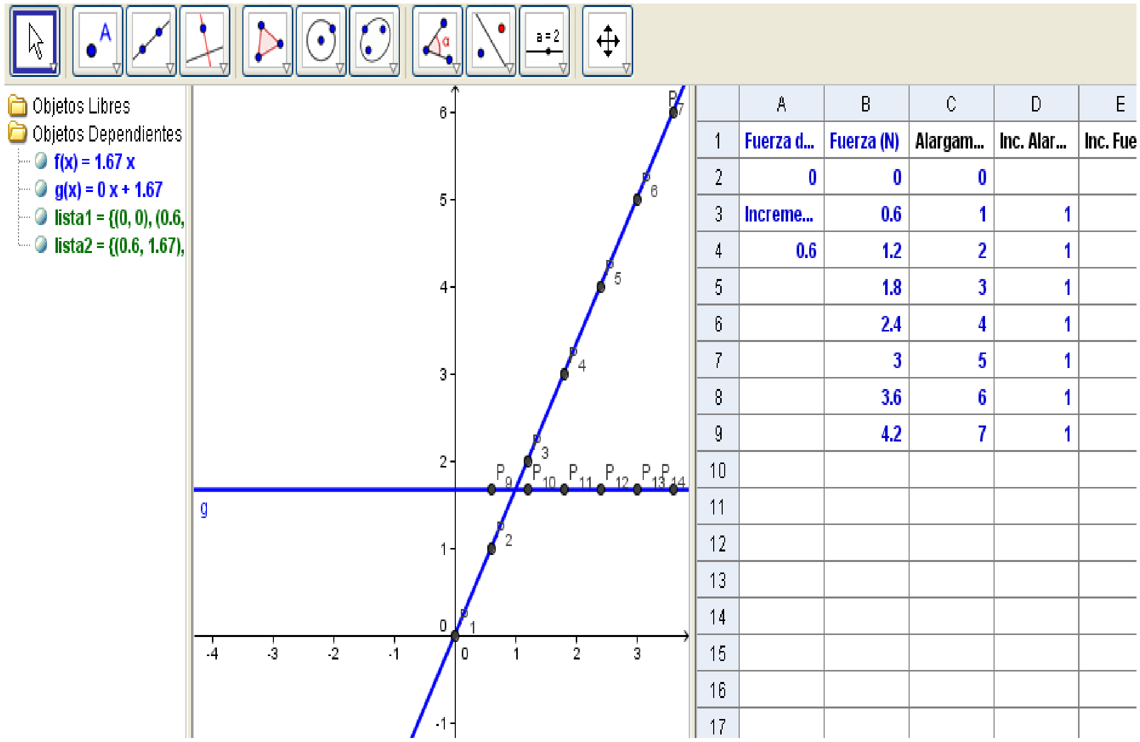
Visualización de la función derivada para una función dada, utilizando los manipuladores

- Presenta una gran cantidad de comandos que se pueden utilizar directamente en la línea de comandos.
- Excelente manejo de imágenes, ya que ellas se pueden manipular de acuerdo a nuestras construcciones deformándose a nuestra conveniencia.

Ventajas didácticas de Geogebra

GeoGebra tiene la ventaja de que concentra tres ventanas de trabajo: la representación tabular, la gráfica y la analítica. La interacción de estas tres ventanas permite estudiar la modificación que se produce en el resto de las ventanas cuando se modifica algún tipo de información en una de ellas. Esta funcionalidad es el equivalente técnico de la vinculación de representaciones.

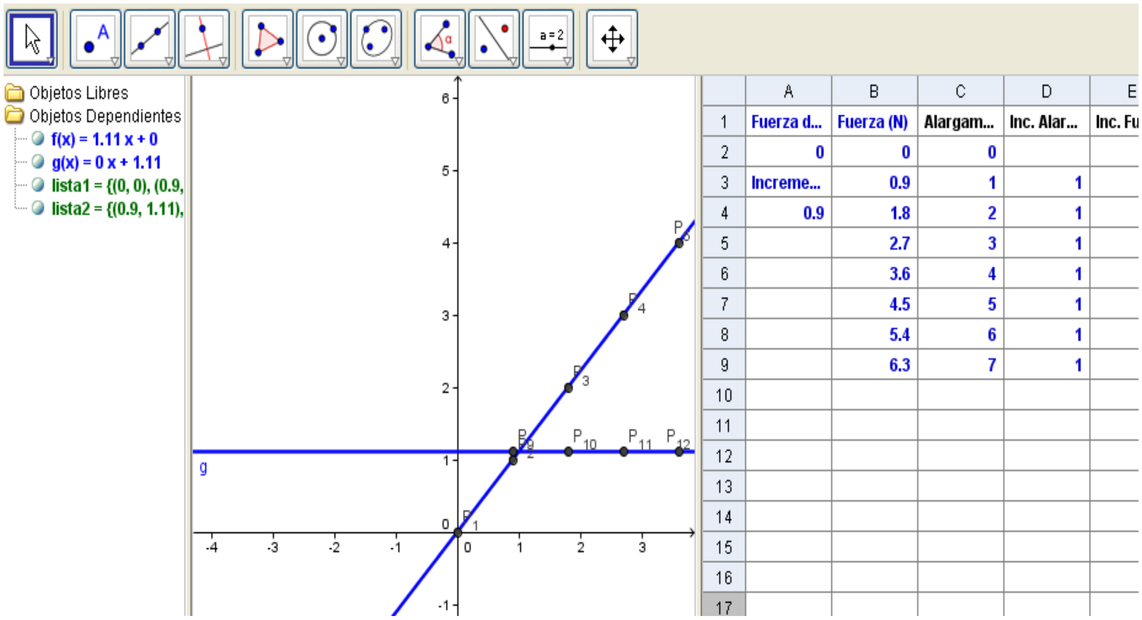
En la Figura 3 mostramos una hoja de trabajo donde se observan las tres ventanas que posee GeoGebra.



Ventanas usadas en una de las actividades de la secuencia

Como puede observarse, se pueden desplegar las tres ventanas que de izquierda a derecha corresponden a la ventana algebraica, gráfica y tabular respectivamente.

Dichas ventanas se vinculan dinámicamente; por ejemplo, al hacer variar los datos de entrada de la ventana numérica automáticamente se modifican las ventanas gráfica y algebraica, tal como se muestra en la figura de abajo.



Hoja que muestra el efecto respecto de la figura anterior de la vinculación de parámetros

2.2 Consideraciones metodológicas

A continuación se describen los aspectos metodológicos empleados en el presente trabajo, la descripción se realiza en dos direcciones, una referente a la planeación general del trabajo y otra donde se describe la metodología del diseño y puesta en escena de las actividades de la secuencia didáctica.

2.2.1 La planeación del trabajo de tesis

Describimos a continuación las acciones principales que se realizaron para llevar a término el presente trabajo.

a) Ubicación de nuestro proyecto

Situamos una problemática específica ubicada en una institución de nivel superior. Limitamos esa problemática en atención a que se trata de un esfuerzo de carácter individual. Como resultado tomamos la decisión de realizar la propuesta que ya se describió.

b) Revisión bibliográfica

Una vez identificada una problemática a abordar, se realizó una revisión bibliográfica en distintas fuentes: planes de estudio de las carreras de ingeniería de la institución escolar seleccionada, programas de la materia que nos interesó, documentos cuyo contenido estuviera relacionado con el tema de funciones lineales, como fueron propuestas didácticas, investigaciones sobre su enseñanza, trabajos que incluyen el uso de tecnología en la instrucción, entre otros, reportes teóricos, por citar los más importantes.

c) Definición de las características de la propuesta

Identificada la problemática a abordar y conscientes de que existe consenso de esa problemática y que una serie de trabajos relacionados se habían realizado, el siguiente paso fue plantearnos qué características le imprimiríamos a nuestro trabajo, las cuales fueron mencionadas en un apartado previo.

d) Diseño de la secuencia

La fase siguiente fue diseñar la secuencia, para lo cual nos basamos en:

- ✓ Las características mencionadas en el inciso anterior.
- ✓ La definición de elementos teóricos que tomaríamos en cuenta.
- ✓ Una metodología específica para el diseño de actividades didácticas.

e) Puesta en escena de la secuencia didáctica

Una vez diseñadas las actividades había que llevarlas al aula. Para ello se seleccionaron grupos de estudiantes y espacios para llevar a cabo los dos pilotajes que realizamos. El primero de ellos tuvo lugar con estudiantes de ingenierías diversas de ITSON, y el segundo fue con estudiantes de ingeniería de ITSON y con estudiantes de la licenciatura en física de la Universidad de Sonora. Los conductores de las actividades fueron el diseñador de las mismas, así como una maestra de la Universidad de Sonora que accedió a colaborar.

En ambos pilotajes se recopilaron las hojas de trabajo de los estudiantes y se levantaron registros de observación por parte de tres profesores, quienes accedieron a actuar como observadores no participantes. Se tienen también como evidencia algunas fotografías de las sesiones.

f) Análisis de la puesta en escena y resultados

Como ya se señaló, realizamos dos pilotajes. El primero de ellos con una sola de las actividades; ésta nos sirvió como base para identificar la claridad de los planteamientos que se hacían, la redacción, etc. Con los resultados obtenidos modificamos las actividades y corrimos un segundo pilotaje, del cual surgieron nuevas adecuaciones para elaborar lo que llamamos "versión final" de la secuencia de actividades didácticas.

2.2.2 La metodología ACODESA

Tal como se señaló en párrafos anteriores, nos interesó la producción de secuencias didácticas que promovieran en el estudiante sentido y significado para los objetos matemáticos en estudio.

Con esta idea se utilizó la metodología ACODESA (por sus siglas aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión), la cual integra varias situaciones problema interrelacionadas unas con otras. Ella toma en consideración el trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula y auto-reflexión.

En esta metodología, el profesor no dictamina sobre lo realizado por los alumnos en las primeras etapas, salvo al final. En las primeras tres fases el profesor actúa como guía y es deber de los estudiantes argumentar y validar sus producciones, en el proceso de institucionalización es donde el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales.

Describimos a continuación las etapas identificadas en ACODESA para desarrollar el trabajo en el aula:

a) Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema).

El trabajo individual se pretende como un primer encuentro del estudiante con la situación problema, se espera que un análisis a conciencia de dicha situación provoque en el estudiante representaciones mentales de manera espontánea, y que pueda materializarlas a través de un esquema, un dibujo, etc. Siendo este momento clave para encender la actividad cognitiva del sujeto.

b) Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).

Que el sujeto discuta con sus compañeros de equipo es rico para la refinación y reducción de posibles estrategias de solución de la situación, y poder establecer una visión común de equipo del fenómeno.

c) Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales).

Tiene el objetivo de reducir esa gama de posibilidades que hayan surgido en las fases anteriores, y así refinar las representaciones que en un primer encuentro con la situación se hayan producido con el estudiante.

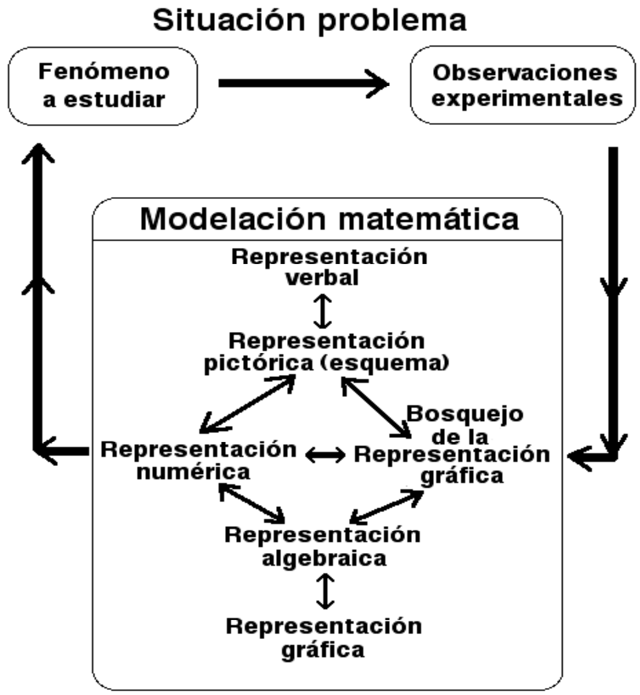
d) Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).

En esta fase el estudiante reflexiona sobre lo construido en las fases anteriores, se espera que esa refinación de representaciones lo encamine a la solución de la situación, que en nuestro caso sería la construcción del modelo.

e) Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

El profesor retoma las representaciones funcionales que surgieron durante el desarrollo de la actividad y en conjunto con sus alumnos llegan a un común acuerdo, para así después de un proceso de socialización de las ideas, se dé el paso de las representaciones funcionales hacia las representaciones institucionales.

Es necesario que las situaciones problema favorezcan la producción de representaciones funcionales y promuevan las tareas de conversión entre representaciones. Para nuestro caso, que es un acercamiento vía la modelación matemática, la metodología propone el siguiente tratamiento en el aula:



Cómo podemos notar en el esquema anterior, tomado de Cortés y Hitt (2009), se tiene plasmada nuestra manera de trabajar con las funciones lineales vía la modelación, pues partimos de datos experimentales, y a través de distintas representaciones se modela el fenómeno en estudio y no necesariamente la representación algebraica es la que se privilegia como registro de partida.

CAPÍTULO III

LA SECUENCIA DIDÁCTICA PROPUESTA. VERSIÓN PRELIMINAR Y PILOTAJES

En este capítulo se presenta una descripción general de la propuesta didáctica, mediante la identificación de los elementos principales que la caracterizan, además de enunciar los objetivos generales y específicos de la misma.

También incluimos una descripción del contenido matemático abordado: un análisis tabular y de los significados de los parámetros que intervienen en la expresión general $y = mx + b$.

Finalizamos el Capítulo haciendo la presentación de la versión preliminar de la secuencia, así como de los resultados de dos pilotajes previos.

3.1 Descripción general

Como ya hemos dicho, estamos proponiendo el diseño y puesta en escena de una secuencia de actividades que promueva la construcción de modelos matemáticos de fenómenos diversos, mediante las funciones lineales.

Se ha escogido ese tipo de funciones porque la literatura de la especialidad refiere que son uno de los tipos de funciones que más se utilizan en áreas diferentes de la matemática para la modelación de fenómenos, además de permitir aproximar otros donde el modelo es no lineal. En el sistema educativo mexicano constituyen el primer acercamiento con el concepto de función. A pesar de su aparente simplicidad, diferentes investigadores han estado interesados en el tema, como Duval (1993), Hitt (1996), De la Rosa (2000), García (2000).

Las características del diseño propuesto son:

- ✓ Se buscará promover en el estudiante el tratamiento y articulación de algunos registros de representación (tabular, gráfico, algebraico). Esto con base en las aportaciones de Duval (1993) sobre la coordinación de registros de representación semiótica: *“La comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.”*

- ✓ Las situaciones problema que servirán de punto de partida al estudio de la temática seleccionada estarán propuestas en contextos que se correspondan, dentro de lo posible, con el área profesional del estudiante. Esta decisión se tomó para estar a tono con el propósito del curso en el que la propuesta quedaría inmersa, sobre todo en nuestro interés de promover el uso de la función lineal como modelo de fenómenos de la ingeniería. Como Niss (1994) señala: *“La clave de la vinculación de la matemática con el funcionamiento y desarrollo de la sociedad,…, es la aplicación de la matemática a una variedad de áreas extra matemáticas. Esto es conocido como modelación matemática, esto es, la construcción y utilización de modelos matemáticos*”.

- ✓ Dichas situaciones problema se estudiarán a través del modelado de funciones del tipo declarado, partiendo de datos numéricos proporcionados por medio de tablas. Este hecho tiene que ver con que en su ejercicio profesional buena parte de los fenómenos que se estudian en ingeniería tienen como base datos numéricos que son producto de mediciones y/o procesos de observación. Además, Hitt y Morasse (2009) declaran que “… *el pensamiento numérico es esencial para proporcionar a los estudiantes significados sobre sus procedimientos sintácticos, que por una mala manipulación o por una concepción, en una situación dada, pueda guiarlos a un error*.”

- ✓ Se tiene contemplado el uso del software de geometría dinámica GeoGebra. Éste es un aspecto que nos interesa destacar, toda vez que GeoGebra brinda las opciones de hacer tratamientos y articulaciones de distintas representaciones, y lo que es mejor, de manera dinámica.

- ✓ Para el diseño y pilotaje de las actividades seguiremos la metodología ACODESA, la cual busca crear en el estudiante habilidades y capacidades de reflexión ante situaciones problema, vía modelado a través de un aprendizaje colaborativo, debate científico y auto reflexión. Existen algunas investigaciones que han sido realizadas teniendo como eje ACODESA, lo que es una muestra de su viabilidad. Véase Páez R. (2004), Hitt (2007), Hitt y Cortés (2009), Hitt y Morasse (2009).

El objetivo general que estamos planteando para la secuencia didáctica es promover en los estudiantes la construcción de la función lineal en un ambiente de modelación de fenómenos. Para alcanzar este objetivo general es necesario que el estudiante logre los siguientes objetivos específicos:

- ✓ Se familiarice con contextos extra matemáticos que se pueden modelar mediante una función lineal.
- ✓ Identifique las distintas representaciones del objeto matemático en juego.
- ✓ Realice conversiones entre los registros de representación tabular, gráfico y algebraico para las funciones lineales.
- ✓ Genere prácticas de aprendizaje en ambientes de trabajo colaborativo, debate científico y auto reflexión.
- ✓ Visualice dinámicamente los distintos registros de representación de las funciones lineales mediante la utilización de la tecnología.
- ✓ Construya a la función lineal desde el punto de vista de la modelación, como una variación uniforme de variables, dando un sentido dinámico y no estático a la relación entre variables.

3.2 Contenido matemático de la propuesta

El abordaje de las situaciones problema que se estudian para modelar los fenómenos por medio de funciones lineales en la secuencia didáctica, tiene en común que la información relativa al fenómeno es proporcionada en forma tabular.

Es a partir de esos datos numéricos que el estudiante identifica patrones que lo conducen a representar por medio de una gráfica y/o una expresión analítica la situación. Y a su vez desarrollar habilidades para identificar características en común entre las distintas representaciones de la situación.

Para modelar los datos proporcionados, se propone la utilización de GeoGebra con el objetivo didáctico de visualizar la función lineal en sus distintas representaciones, y que el estudiante vincule dinámicamente dichas representaciones y a su vez simule los distintos fenómenos.

Nos interesa la función lineal considerada desde el punto de vista de la modelación, la que es promovida como una covariación de magnitudes intervinientes, donde se estudia qué pasa al variar una magnitud cuando varía la otra.

Las magnitudes que varían se promueven como magnitud de interés, es decir, la magnitud que se ha elegido para ser representada como la variable dependiente, y la magnitud de referencia, es decir, la magnitud que se ha elegido como la variable independiente. Por ejemplo, en la actividad de la densidad del alcohol se podría elegir a la densidad como la magnitud de interés y al volumen como la magnitud de referencia.

La modelación se basa en las funciones lineales, por lo que el tipo de variación que se promueve es la variación uniforme, es decir, cuando los valores que toma la magnitud variable de interés cambian a una razón constante, al tiempo que los valores de la magnitud variable de referencia cambian también en una cantidad constante.

Se presentan situaciones donde las magnitudes guardan una relación lineal sin ser directamente proporcionales, como es el caso de la variación de la temperatura con respecto al tiempo, donde a un tiempo inicial cero la temperatura inicia con un determinado valor y la representación gráfica no coincide con el origen de coordenadas cartesianas, y situaciones que guardan una relación lineal de magnitudes directamente proporcionales, por ejemplo, el caso del resorte, donde se considera que para una aplicación de fuerza cero ocurre cero deformación, por lo que la representación gráfica de la situación coincide con el origen de coordenadas cartesianas.

3.2.1 Estructura de una tabulación numérica

A continuación se detalla la estructura que tiene una tabulación de n parejas de datos numéricos experimentales o de algún otro tipo.

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
$\vdots$	$\vdots$
x_{j-1}	y_{j-1}
x_j	y_j
x_{j+1}	y_{j+1}
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

El símbolo x_j representa al valor numérico de la magnitud de referencia x que se encuentra en la tabla en la primera columna, en el renglón al que le corresponde el número j. El símbolo y_j representa el valor numérico de la magnitud de interés y que se encuentra en la tabla en la segunda columna, en el renglón al que le corresponde el número j.El símbolo n representa el número de renglones de la tabla.

Cada renglón de la tabulación anterior contiene una pareja de valores relacionados de manera funcional $(x_i, f\ (x_i))$. Esa relación funcional de los valores de $x_{i,}\ y_i$ se expresa de la forma $y = f(x)$.

Como se comentó en el apartado anterior, el criterio para afirmar que una tabulación contiene datos que reflejan una variación uniforme consiste en lo siguiente: cuando los cambios o diferencias Δx de la magnitud de referencia x son constantes (lo que significa que los valores de x en la tabulación están igualmente espaciados), entonces los cambios correspondientes Δy de la magnitud de interés y también son constantes, es decir, también están igualmente espaciados. Por lo tanto, el cociente de los cambios absolutos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una constante.

3.2.2 El cálculo de la razón de cambio

Para el cálculo de la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de manera global utilizamos el método siguiente.

Los cambios promedio:

x	y	Δy	Δx
x_1	y_1		
x_2	y_2	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$
x_3	y_3	$y_3 - y_2$	$x_3 - x_2$
x_4	y_4	$y_4 - y_3$	$x_4 - x_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{j-1}	y_{j-1}	$y_{j-1} - y_{j-2}$	$x_{j-1} - x_{j-2}$
x_j	y_j	$y_j - y_{j-1}$	$x_j - x_{j-1}$
x_{j+1}	y_{j+1}	$y_{j+1} - y_j$	$x_{j+1} - x_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	$y_n - y_{n-1}$	$x_n - x_{n-1}$

Por lo que los cambios promedio en global hacia atrás se calculan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_j - (y_{j-1})}{x_j - (x_{j-1})}$$

Donde j =2,3,…, n.

Para el caso de fenómenos de variación uniforme, el coeficiente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si analizamos la tabla donde calculamos los cambios promedio de la variable dependiente con respecto a la variable independiente en cada uno de los renglones de la tabulación, donde y representa los valores numéricos consignados en la columna 2, x representa los valores numéricos consignados en la columna 1, tenemos que a resulta ser numéricamente igual a los cambios promedio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Por lo tanto, la única incógnita de la ecuación es el parámetro b, el cual podemos calcular de la siguiente manera:

x	y	*Parámetro* $b = y - mx$
x_1	y_1	$y_1 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1$
x_2	y_2	$y_2 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_2$
x_3	y_3	$y_3 - \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) x_3$
x_4	y_4	$y_4 - \left(\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}\right) x_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{j-1}	y_{j-1}	$y_{j-1} - \left(\frac{y_{j-1} - y_{j-2}}{x_{j-1} - x_{j-2}}\right) x_{j-1}$
x_j	y_j	$y_j - \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right) x_j$

x_{j+1}	y_{j+1}	$y_{j+1} - \left(\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}\right) x_{j+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	$y_n - \left(\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\right) x_n$

En el lenguaje matemático, la variación antes descrita, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Donde:

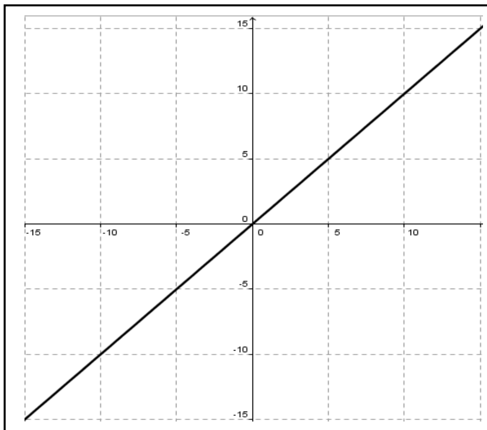
y representa a la magnitud de interés (variable dependiente),

x representa a la magnitud de referencia (variable independiente),

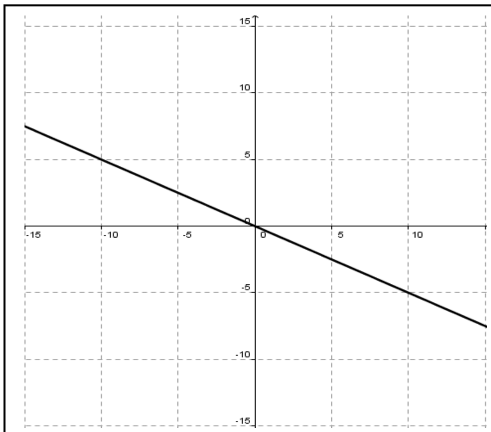
m y b son los parámetros de la función.

3.2.3 Características de la gráfica de acuerdo a los parámetros $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$

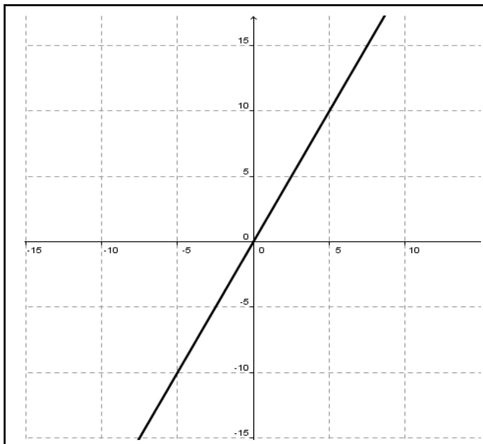
A continuación se presenta la gráfica de la función lineal de acuerdo con algunos de los posibles valores que podrían adquirir los valores de los parámetros m y b:



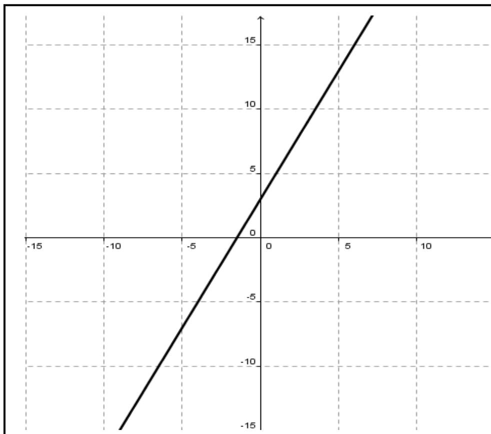
Cuando $m = 1, b = 0$



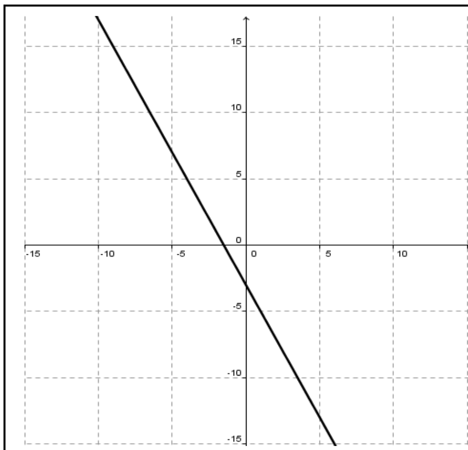
Cuando $m < 1, b = 0$



Cuando $m > 1, b = 0$



Cuando $m > 0 \, , b > 0$



Cuando $m < 0, b < 0$

De acuerdo a las gráficas anteriores podemos observar que de la misma manera como relacionamos los parámetros de la función lineal con los datos en la tabla, asimismo se pueden relacionar con la gráfica, pues el parámetro m representa la pendiente de la recta que representa a la función lineal, en tanto que el parámetro b representa la ordenada al origen de la misma.

3.3 La versión preliminar de la secuencia didáctica. Observaciones surgidas de los pilotajes.

3.3.1. Estructuración de la secuencia

Siendo congruentes con el marco teórico que fundamenta nuestra propuesta, el cual seguimos conjuntamente con la metodología ACODESA para el diseño de la secuencia didáctica, decidimos organizar las actividades en 4 bloques, cada uno de los cuales posee tres etapas, las cuales ya fueron explicadas a detalle en el capítulo de referencias teóricas:

- *Primer etapa: presentación de una situación problema*
- *Segunda etapa: presentación de un problema*
- *Tercera etapa: resolución de un ejercicio*

A continuación se muestran las actividades que constituyen cada uno de los mencionados bloques.

BLOQUE I: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables se relacionan de manera lineal y son directamente proporcionales. Forma $y = mx$

- ✓ Primera etapa: La deformación de un resorte en tensión. Modelo de la forma $y = mx$, donde $m > 0$.
- ✓ Segunda etapa: La deformación de un resorte en compresión. Modelo de la forma $f(x) = mx$, donde $m < 0$.
- ✓ Tercera etapa: Masa y volumen. Modelo de la forma $y = mx$, donde $m > 0$.

BLOQUE II: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal y cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$, con $m < 0$ y $b > 0$

- ✓ Primera etapa: ¿Qué tan frío es arriba? Modelo de la forma $y = mx + b$, con $m < 0$ y $b > 0$.
- ✓ Segunda etapa: Razón de ascenso. Modelo de la forma $y = mx + b$, con $m < 0$ y $b > 0$.
- ✓ Tercera etapa: Disminuyendo la temperatura. Modelo $y = mx + b$ con $m < 0$ y $b > 0$.

BLOQUE III: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal y cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$, donde $m > 0$ y $b > 0$.

- ✓ Primera etapa: Dilatación térmica. Modelo de la forma $y = mx + b$, con $m, b > 0$; $0 < m < 1$.
- ✓ Segunda etapa: La solubilidad del bromuro de potasio. Modelo de la forma $y = mx + b$, con $m, b > 0$ y $0 < m < 1$.
- ✓ Tercera etapa: Dilatación de una barra de estaño. Modelo de la forma $y = mx + b$, donde $m, b > 0$ y $0 < m < 1$

BLOQUE IV: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal y cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$.

- ✓ Primera etapa: Resistencia eléctrica. Modelo de la forma $y = mx + b$, donde $0 < m < 1$ y $b > 0$.

- ✓ Segunda etapa: Problema de investigación. Consiste en una búsqueda bibliográfica para encontrar un fenómeno distinto de los ya estudiados, que también pueda modelarse mediante una función lineal.
- ✓ Tercera etapa: La veladora. Modelo de la forma $y = mx + b$, $0 < m < 1$ y $b > 0$.

3.3.2 Primer pilotaje y su análisis

A continuación mostramos los resultados de un primer pilotaje, en el cual se trabajó con la primera versión de la actividad “Deformación de un resorte”. El propósito de llevar a cabo este primer pilotaje fue detectar fortalezas y debilidades de nuestro diseño al momento de ser llevado al aula, además de tener un primer acercamiento hacia nuestros estudiantes con la metodología seleccionada. Nos interesó también conocer la efectividad de la actividad en aspectos como la extensión y la redacción de las preguntas.

Estos aspectos que acabamos de mencionar, los organizamos de la siguiente manera:

a) Redacción y claridad de los cuestionamientos y tareas que integran a las actividades.
b) El papel que desempeñaron el profesor y los estudiantes, tomando como marco lo establecido en la metodología ACODESA.
c) Las representaciones espontáneas y su tránsito hacia las representaciones matemáticas institucionales.
d) El papel de la tecnología.

3.3.2.1 La deformación de un resorte

Esta actividad se llevó a cabo en un lapso de 3 horas, distribuidas en dos sesiones de una hora y media de duración; la primera se trabajó en un laboratorio de física que contaba con todo el equipo necesario, es decir pesas, soporte universal, resortes de diferentes tamaños, vernier, y mesas de trabajo apropiadas. La segunda sesión se realizó en un laboratorio de cómputo, donde cada estudiante tuvo una computadora con el software GeoGebra instalado. También se contó con la proyección del material utilizado, mediante un cañón y pantalla. Participaron ocho estudiantes de primer semestre de ingeniería, agrupados en 2 equipos de cuatro integrantes, el profesor y un observador.

Tomando como base los elementos mencionados líneas arriba, haremos la descripción de la puesta en escena de la actividad.

a) Redacción y claridad de los cuestionamientos y tareas que integran a las actividades

En cuanto a la extensión se pudo observar que las actividades, hasta ese momento del diseño, eran largas y sus secciones repetitivas, pues algunas preguntas no mostraban claridad y otras presentaban cuestionamientos similares. En consecuencia se llevaron a cabo cambios de redacción y eliminación de algunos cuestionamientos.

b) *El papel que desempeñaron el profesor y los estudiantes, tomando como marco lo establecido en la metodología ACODESA*

La falta de pericia y experiencia del conductor de la actividad provocó que en algunos momentos se presentaran impulsos excesivos hacia los estudiantes, impidiendo su libre flujo de ideas. Esto nos muestra la dificultad que entraña una metodología donde el profesor debe ser capaz de realizar una devolución de responsabilidad en la construcción de conceptos.

Como ilustración de lo anterior, se transcriben en los párrafos siguientes las notas del observador para cada una de las fases de la metodología:

- ✓ *Fase 1: Trabajo individual*
    - Del profesor.- Proporciona las instrucciones para el inicio de la actividad.
    - De los estudiantes.- Leen las instrucciones y manipulan el material, para así empezar a dar respuesta a las preguntas de la fase.

- ✓ *Fase 2: Trabajo en equipo*
    - Del profesor.- Brinda las instrucciones correspondientes. Se observó cómo interviene de manera impulsiva en la sección de llenado de la tabla, pues muestra un algoritmo a seguir, obstruyendo que los alumnos construyan de manera propia el proceso.

    - De los alumnos.- Comparan las respuestas a las preguntas de la fase anterior. El equipo 1 parece integrarse de mejor manera, mientras que el equipo 2 tiene dificultades, pues se distraen y resuelven la tarea dictándose las respuestas que el profesor había solicitado fueran en común.

- *Fase 3: Debate*

  Del profesor.- Proporciona algunas orientaciones para poder conducir hacia una discusión grupal, pero al observar cierta resistencia de los alumnos para iniciar un debate, interviene aportando pistas excesivas sobre patrones y comportamientos de los datos de las tablas.

  De los alumnos.- Identificaron la proporcionalidad entre el peso y el alargamiento del resorte. Además se da inicio a la tarea de relacionar esa proporcionalidad con alguna constante, pues observan y comentan sobre los resultados de la última columna. Aunque algunos estudiantes mencionan *"pues ni tan constantes porque algunos están un poco diferentes"* ellos mismos llegan a la conclusión de que debió ser por pequeños errores de medición. Otro aspecto a resaltar fue el proceso que siguieron los alumnos para llegar a la generalización algebraica del fenómeno, algunos estudiantes respondían que si se les pide un valor en el alargamiento para un peso nuevo, éste se obtiene verificando en la tabla un valor anterior y simplemente sumando a ese valor el aumento constante.

- Fase 4: Regreso al trabajo individual

  Del profesor.- Con la intención de que los alumnos realicen una reconstrucción reflexiva de lo generado en las fases anteriores, aporta algunas instrucciones. Hace énfasis en que el trabajo era "individual", pues se pudo observar tal como se esperaba, cierta dificultad en los alumnos para pasar de una manera de trabajar a otra.

  De los estudiantes.- Puesto que disponen de una computadora individual, se les pidió comparar sus respuestas previas con las que arrojó el software. Es aquí donde se pudo observar la potencia del software ya que fue de gran ayuda para que los alumnos realizaran algunas tareas de conversión, logrando relacionar las diferencias divididas con la pendiente de la recta en la representación algebraica.

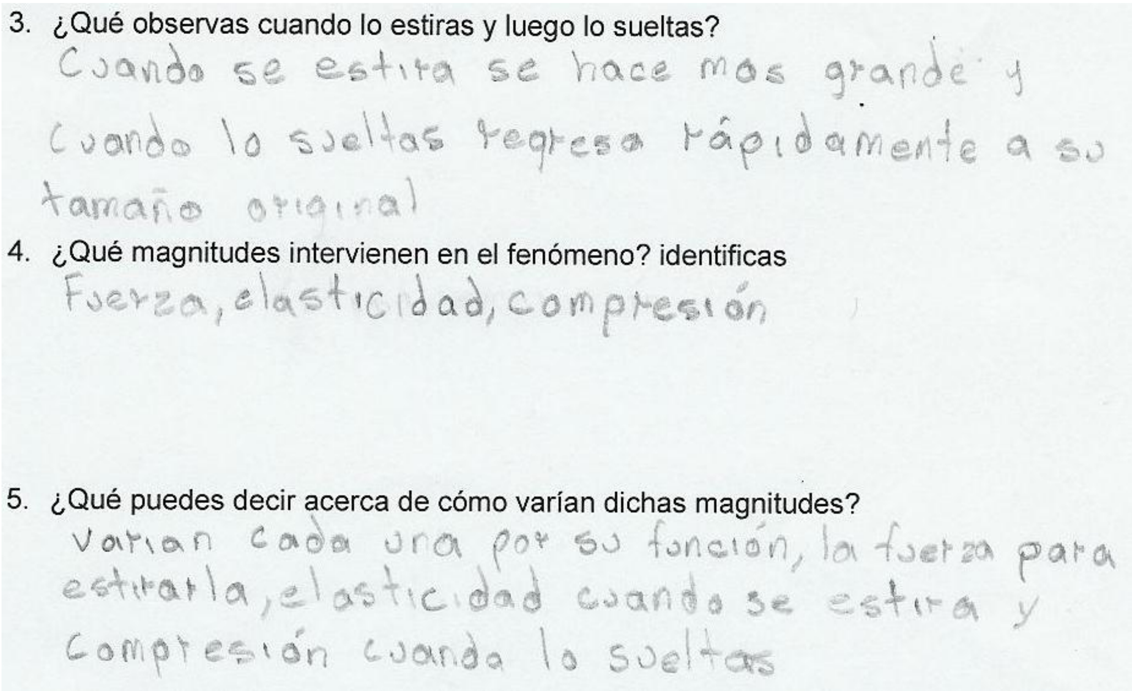
  Fase 5: Institucionalización.

  Del profesor.- En esta fase el profesor orienta al grupo para establecer alguna significación a la generalización que los alumnos construyeron.

De los alumnos.- Ellos mismos asignan letras a las variables intervinientes y las relacionan, con ayuda del profesor, con aspectos como la constante de proporcionalidad.

c) *Las representaciones espontáneas y su tránsito hacia las representaciones matemáticas institucionales*

Ilustramos la generación de representaciones espontáneas transcribiendo la respuesta de uno de los participantes.



3. ¿Qué observas cuando lo estiras y luego lo sueltas?

Cuando se estira se hace mas grande y cuando lo sueltas regresa rápidamente a su tamaño original

4. ¿Qué magnitudes intervienen en el fenómeno? identificas

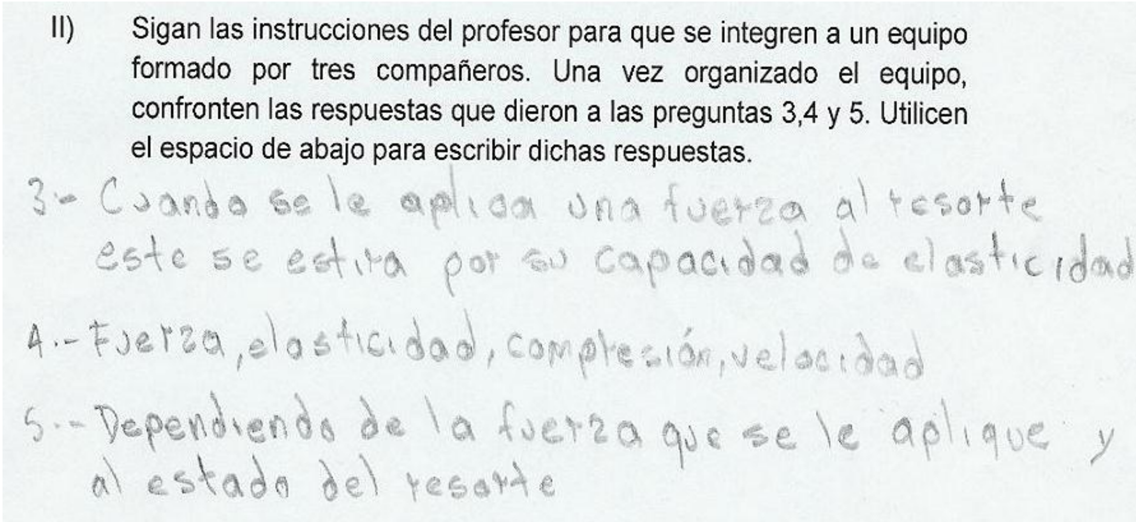
Fuerza, elasticidad, compresión

5. ¿Qué puedes decir acerca de cómo varían dichas magnitudes?

varian cada una por su función, la fuerza para estirarla, elasticidad cuando se estira y compresión cuando lo sueltas

Podemos observar cómo se inician las representaciones, una vez planteada la situación problema, pues aunque no identifica las magnitudes que interesan, el estudiante pone en acción su actividad cognitiva de una manera espontánea. Esas primeras representaciones son las que deben ir evolucionando hacia las institucionales.

En la siguiente imagen, se evidencia una evolución a partir de la discusión en el equipo.



II) Sigan las instrucciones del profesor para que se integren a un equipo formado por tres compañeros. Una vez organizado el equipo, confronten las respuestas que dieron a las preguntas 3,4 y 5. Utilicen el espacio de abajo para escribir dichas respuestas.

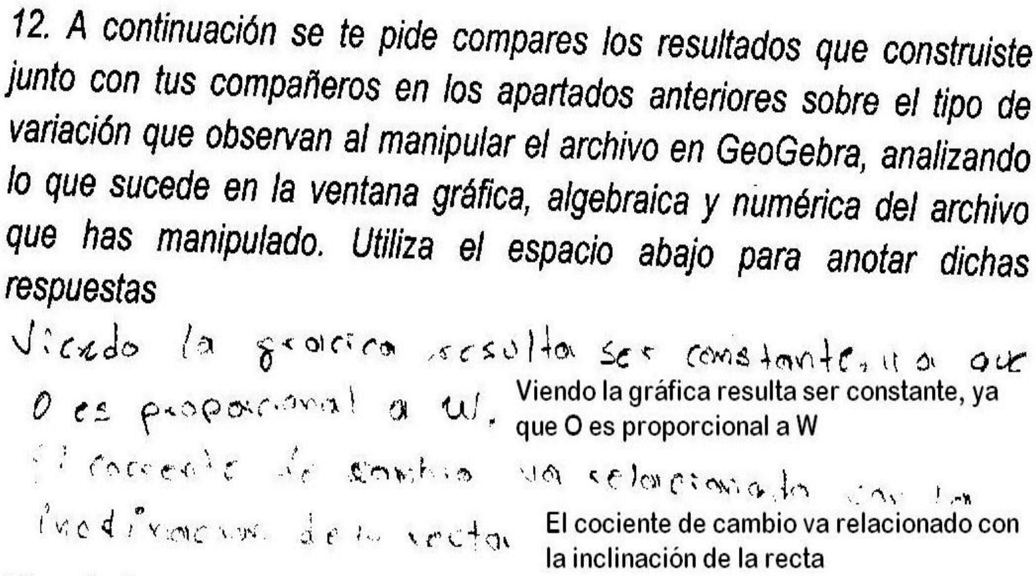
3.- Cuando se le aplica una fuerza al resorte este se estira por su capacidad de elasticidad

4.- Fuerza, elasticidad, compresión, velocidad

5.- Dependiendo de la fuerza que se le aplique y al estado del resorte

d) El papel de la tecnología

Otra etapa en la evolución se da cuando utilizan el software. Notamos como empiezan a relacionar las variables de interés a partir de lo dinámico de la visualización.

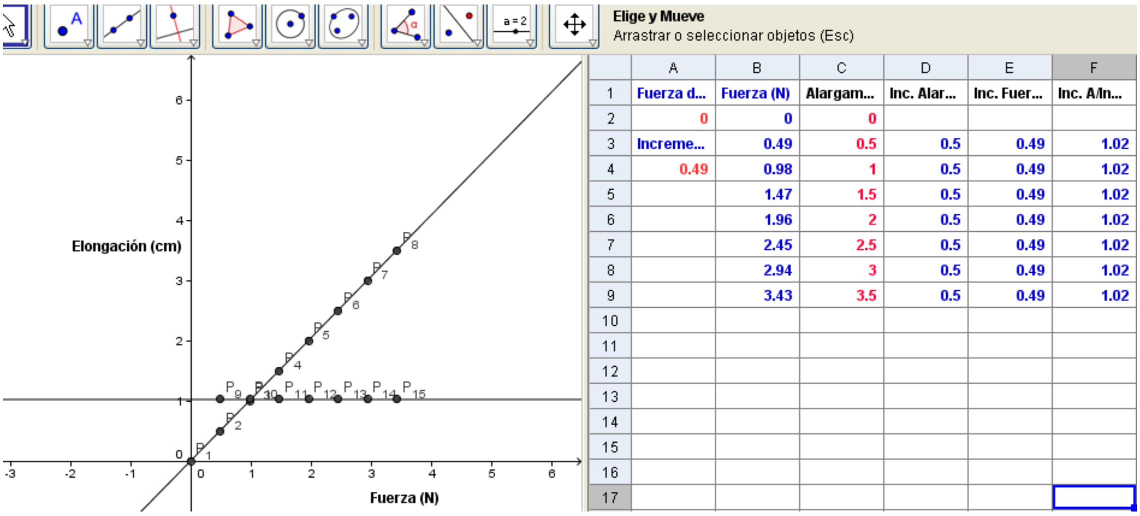


12. A continuación se te pide compares los resultados que construiste junto con tus compañeros en los apartados anteriores sobre el tipo de variación que observan al manipular el archivo en GeoGebra, analizando lo que sucede en la ventana gráfica, algebraica y numérica del archivo que has manipulado. Utiliza el espacio abajo para anotar dichas respuestas

Viendo la gráfica resulta ser constante, ya que O es proporcional a W

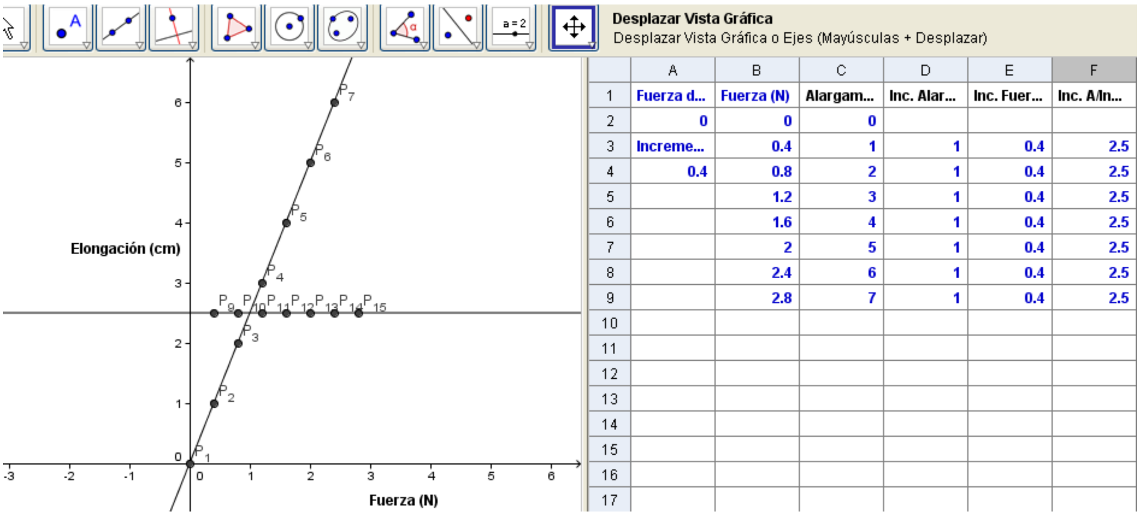
El cociente de cambio va relacionado con la inclinación de la recta

De acuerdo a los datos obtenidos en el laboratorio, el software muestra lo siguiente en pantalla:



	A	B	C	D	E	F
1	Fuerza d...	Fuerza (N)	Alargam...	Inc. Alar...	Inc. Fuer...	Inc. A/In...
2	0	0	0			
3	Increme...	0.49	0.5	0.5	0.49	1.02
4	0.49	0.98	1	0.5	0.49	1.02
5		1.47	1.5	0.5	0.49	1.02
6		1.96	2	0.5	0.49	1.02
7		2.45	2.5	0.5	0.49	1.02
8		2.94	3	0.5	0.49	1.02
9		3.43	3.5	0.5	0.49	1.02

Simulando otros tipos de resortes, el estudiante relaciona la inclinación de la recta con los cambios divididos mostrados en la quinta columna:



	A	B	C	D	E	F
1	Fuerza d...	Fuerza (N)	Alargam...	Inc. Alar...	Inc. Fuer...	Inc. A/In...
2	0	0	0			
3	Increme...	0.4	1	1	0.4	2.5
4	0.4	0.8	2	1	0.4	2.5
5		1.2	3	1	0.4	2.5
6		1.6	4	1	0.4	2.5
7		2	5	1	0.4	2.5
8		2.4	6	1	0.4	2.5
9		2.8	7	1	0.4	2.5

Las respuestas de otro de los estudiantes refuerzan nuestra suposición, tal como se muestra en la siguiente imagen:

12. A continuación se te pide compares los resultados que construiste junto con tus compañeros en los apartados anteriores sobre el tipo de variación que observan al manipular el archivo en GeoGebra, analizando lo que sucede en la ventana gráfica, algebraica y numérica del archivo que has manipulado. Utiliza el espacio abajo para anotar dichas respuestas

Los resultados fueron iguales a los que obtuvimos en el laboratorio, observé que mayor sea el cambio en la última columna la línea en la gráfica tendrá mayor inclinación.

Se muestra cómo a través de la utilización del software los estudiantes logran aprovechar las bondades del mismo, como la visualización, la validación de los resultados obtenidos de manera manual con los que calcula el software, además utilizando la animación pudieron hacer variar los datos en el registro numérico y observar a la vez que sucedía en el registro gráfico.

En las respuestas del estudiante anterior también observamos inicios del trabajo con la conversión entre la representación gráfica y tabular.

3.3.2.2 Aspectos a considerar para el rediseño

Lo anterior nos llevó a replantear cambios en nuestras actividades, además de detectar la necesidad de evolucionar en la conducción de la actividad. Los cambios que se platearon se tomaron en las siguientes direcciones:

- ✓ Replantear el estilo de redacción de las preguntas, pues algunas presentaban discordancia con los propósitos de la fase.
- ✓ Verificar la extensión de las actividades pues éstas resultaron ser excesivas para los estudiantes con respecto al número de preguntas.
- ✓ Para promover de mejor manera el trabajo de conversión entre representaciones se introdujo el trabajo con registros de partida cuya representación fuera la gráfica.

- ✓ Se planteó seguir el marco de instrucción propuesto en ACODESA, consistente en:

a) Presentación de una situación problema
b) Presentación de un problema
c) Presentación de un ejercicio.

3.3.3 Segundo pilotaje

En este pilotaje se trabajaron todas las actividades iniciales de cada uno de los Bloques y solamente algunos de los problemas y ejercicios. Desafortunadamente no fue posible contar siempre con el mismo grupo de estudiantes, lo que nos llevó a que las actividades se pusieran en escena aisladamente, perdiendo con ello la posibilidad de tener una valoración global de la secuencia.

De cualquier manera creemos que se observaron aspectos importantes en cuanto al ritmo de las multicitadas actividades. Para mostrar los resultados de esta segunda experiencia, decidimos utilizar un formato a doble columna, donde en la primera aparece la hoja de trabajo proporcionada al estudiante, y en la segunda las observaciones dependiendo de la fase en que nos encontrábamos. Éstas últimas son globales, y en algunos casos empleamos fragmentos escaneados para ilustrar alguna afirmación.

<table>
<tr><td colspan="2"><u>BLOQUE I:</u> Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables se relacionan de manera lineal y son directamente proporcionales. Forma $y = mx$</td></tr>
<tr><td>HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES</td><td>OBSERVACIONES REALIZADAS</td></tr>
<tr><td>I) A continuación se te proporcionará un dispositivo, similar a los de la imagen que se muestra abajo, para que lo manipules y realices observaciones. Después de eso, responde a las preguntas que se formulan.

1. ¿Reconoces el dispositivo que has manipulado?
2. ¿En qué situaciones lo has visto? ¿Qué usos tiene?
3. ¿Qué observas cuando lo estiras y luego lo sueltas?
4. ¿Cuáles magnitudes que intervienen en el fenómeno identificas?
5. ¿Qué puedes decir acerca de cómo varían dichas magnitudes?</td><td>Las respuestas de los alumnos sorprenden, pues varios de ellos declaran que nunca han visto los resortes. Las magnitudes identificadas son: elasticidad, presión, fuerza, longitud, resistencia, inercia.

En cuanto a la variación de las magnitudes los estudiantes comentaron:

✓ Dependiendo de la fuerza que se aplique
✓ Varía según lo que se estire el resorte
✓ Varía dependiendo de la acción que se realice</td></tr>
<tr><td>II) Integren un equipo formado por tres compañeros. Una vez organizado el equipo, confronten las respuestas que dieron a las preguntas 3,4 y 5. Utilicen el espacio de abajo para escribir dichas respuestas.</td><td>Los estudiantes en general llegaron a un acuerdo en común; sólo el equipo 1 menciona que identificaron diferentes variables.</td></tr>
</table>

III) Con el material que ahora les proporcionará el profesor, monten un dispositivo de acuerdo a sus instrucciones. Realicen el proceso de medición siguiente:

Vayan colocando las pesas en el extremo del resorte y procedan a medir con una regla el alargamiento que va sufriendo. Coloquen esta información en la tabla que se proporciona abajo, de la manera siguiente:

- En las primeras dos columnas coloquen los resultados de la medición.
- En las columnas tercera y cuarta, registren cómo se van modificando las magnitudes observadas en el fenómeno en estudio; escriban su registro primero en forma desarrollada y enseguida el resultado de la diferencia de mediciones que calcularon.
- En la quinta columna registren la relación de las magnitudes en forma de cociente (también llamada razón). Escriban su registro primero en forma desarrollada, es decir, como cociente o razón de las diferencias de las magnitudes involucradas y luego el resultado de dicho cociente.

Tabla 1. Registro datos y cambios

Peso aplica-do, medido en Nw	Alarga-miento producido, medido en cm	Cambio en el peso aplicado	Cambio en el alarga-miento	Cambio del alargamiento con respecto al cambio en el peso aplicado

Los equipos presentaron dificultades en el llenado de la tabla, por ejemplo no entendían el significado de cambio, en la columna 5 existió conflicto con la frase "*con respecto*", aún con las instrucciones que se les presentaban, pasado un tiempo procedieron a contestarla en general bien.

La observación de los cambios en las variables de interés fue adecuada, pues detectaron que eran con una variación constante, sólo que por tratarse de datos experimentales donde diversos factores pueden afectar la correcta toma de los datos pueden presentarse algunas diferencias pequeñas. Por ejemplo el equipo 3 responde: *el alargamiento del resorte varía.*

En cuanto a la variación de los cambios producidos conforme se modificaban los valores de las variables fue posible que detectaran que éstos fueron constantes y concluyeron que no variaban, aunque en algunos equipos seguía la incertidumbre de la variación de los cambios debido a las dificultades antes mencionadas, por ejemplo del equipo 1 (Alumno A): *De manera diferente, no sigue un patrón igual supongo por el ambiente y el aire que influyó.*

Llama la atención cómo en un equipo incluso se detecta proporcionalidad: Alumna D (equipo 2): *El alargamiento del resorte es proporcional al peso que se le aplique.*

<table>
<tr>
<td>
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
6. Describan los cambios observados en el alargamiento del resorte y el peso:
7. ¿Cómo se modifica el alargamiento del resorte cuando se modifica el peso?
8. De acuerdo a lo realizado en la tabla anterior, ¿cómo variaron los valores de la tercera columna?
9. ¿Qué pasa con los valores que obtuviste en la quinta columna de la Tabla 1? ¿A qué crees que se debe ese comportamiento?
</td>
<td>
Se mencionan los factores antes mencionados, por ejemplo Alumno E (equipo 2), responde así: variaron algunos valores porque la medida del alargamiento fue aproximada por lo tanto tiene la mínima variación.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
10. De acuerdo al análisis de los datos calculados en la Tabla 1, comenten sus observaciones respecto de la variación ocurrida, es decir ¿Qué nuevos valores se obtuvieron para cada nueva fuerza aplicada?
11. ¿Qué sucede con cada nueva fuerza aplicada al resorte? Comenten cómo varía el alargamiento con respecto de la fuerza aplicada al resorte. Sugerencia: Observen los valores de la quinta columna que llamaremos primeras diferencias divididas.
</td>
<td>
Tomando en consideración que los datos experimentales pueden variar mínimamente debido a errores de diversa índole, los alumnos en general llegaron a la conclusión siguiente:
Alumno G (equipo 3): Si a pesos iguales hay alargamientos iguales, por esto podemos predecir valores más lejanos.
Incluso aún después del debate grupal algunos alumnos sólo detectaron relación entre las variables pero no declaran cambios uniformes.
Alumna B (equipo 1, coincidiendo con los otros integrantes): el alargamiento depende del peso entre más peso se alarga más el resorte.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
El profesor te guiará para que abras y manipules el archivo <u>Resorte.ggb</u> , el cual te permitirá analizar el fenómeno en cuestión de manera dinámica.
12. Compara los resultados que construiste junto con tus compañeros en los apartados anteriores sobre el tipo de variación que se observa al manipular el archivo en
</td>
<td>
Los alumnos corroboran los datos obtenidos en la tabla con los datos que les arroja GeoGebra y pueden notar algunas relaciones de la tabla con la gráfica, por ejemplo:
Alumno E (equipo 2): Con respecto al valor real en
</td>
</tr>
</table>

GeoGebra. Analiza lo que sucede en las ventanas gráfica, algebraica y numérica del archivo. Utiliza el espacio de abajo para responder a las siguientes preguntas: 13 ¿Qué expresión te permite relacionar las magnitudes intervinientes (Fuerza y elongación)? 14. Calcula el valor de la elongación del resorte en caso de que hubiese ocurrido un incremento más, (suponiendo que se conserva el límite de elasticidad del resorte, es decir que el resorte volverá a su posición original) 15. ¿De qué manera compruebas que es correcta la relación que obtuviste para relacionar las magnitudes intervinientes?	*GeoGebra observamos que la mínima variación altera de manera notable la gráfica ya establecida.* Alumno G (equipo 3) declara lo siguiente: *La última columna afecta a la recta de modo que si se aumenta el valor del incremento la recta sube y si la disminuye es baja* Cabe mencionar que algunos alumnos presentaron dificultad al interpretar el fenómeno con auxilio del software, quizá por la falta de uso que se hace de éste en los cursos de matemáticas en general. En cuanto a establecer alguna expresión algebraica que represente la situación en la fase de auto reflexión individual, los alumnos presentaron dificultades como las siguientes: respondieron que podían probar la efectividad de la expresión algebraica con los datos tomados en la tabla. Por ejemplo Alumno C (equipo 1), percibe lo siguiente: *mediante la tabla y pues una gráfica.*
16. Durante el desarrollo de la actividad identificaste magnitudes, las cuales observaste que cambiaban de manera uniforme una respecto de la otra. ¿Qué nombre genérico pondrías a las magnitudes que están variando? ¿Y a las que no varían? 17. ¿Con qué literal representas cada variable y qué significa? 18) Las variables son magnitudes que tal como se dice en la pregunta anterior, varían una respecto de la otra con una razón de cambio constante. Sólo que una de las	Es hasta esta fase donde los alumnos logran tener una expresión algebraica del fenómeno en cuestión, pero con ayuda del profesor. Cabe mencionar un dato curioso: a pesar de haber trabajado insistentemente con la observancia de las magnitudes que variaban y las que no, se creó en algunos alumnos cierta confusión con el concepto de variación entre variables pues algunos de ellos mencionaban que las variables fuerza y alargamiento no variaban, interviniendo el profesor para mostrarles que si existía una variación, auxiliándose con

variables se considera la magnitud de interés (es decir la variable dependiente), y la otra la magnitud de referencia, (es decir la variable independiente). ¿Cuál variable identificas como la magnitud de interés? ¿Cuál variable identificas como la variable de referencia? 19) Con base en la expresión general construida, comenta sobre el parámetro que multiplica a la que elegiste como variable independiente. ¿Varía de un resorte a otro? ¿Cómo se comporta para cada pareja de valores dentro de un mismo resorte? ¿Qué relación tiene con la tercera columna de la cuestión número 8? 20. ¿Qué expresión correspondiente a situaciones de variación uniforme te representaría de manera general fenómenos similares a los establecidos en esta actividad?	los datos de la tabla.

Etapa 2. Problema

Parte I

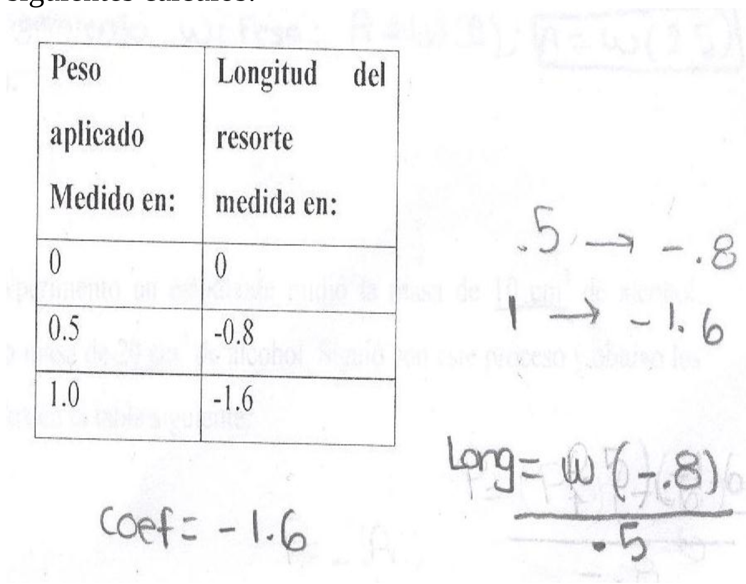
<table>
<tr><th>HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES</th><th>OBSERVACIONES REALIZADAS</th></tr>
<tr><td>

Parte 1. Se realizó un experimento de laboratorio consistente en comprimir un resorte aplicando gradualmente un peso para determinar el cambio en su longitud conforme se aumentaba el peso. Como resultado del experimento de laboratorio se obtuvieron los datos que se muestran:

<table>
<tr><th>Peso aplicado (N)</th><th>Longitud del resorte (cm)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>-0.8</td></tr>
<tr><td>1.0</td><td>-1.6</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>-2.4</td></tr>
<tr><td>2.0</td><td>-3.2</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>-4.0</td></tr>
<tr><td>3.0</td><td>-4.8</td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>-5.6</td></tr>
</table>

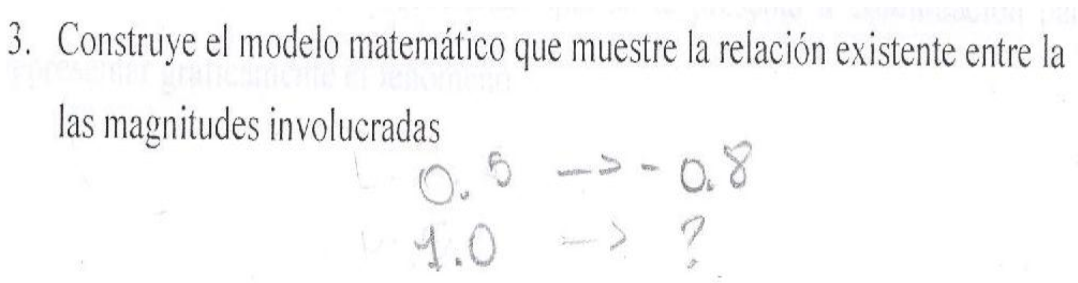
</td><td>

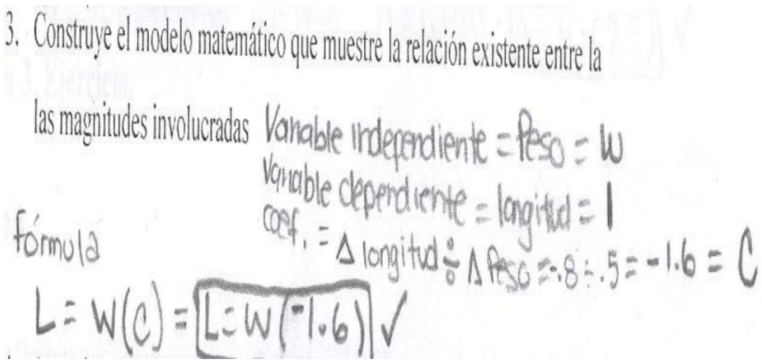
Debido a la experiencia previa con el tratamiento con datos numéricos, los estudiantes no tuvieron la necesidad de realizar metódicamente el llenado de cinco columnas, como en la actividad anterior. Por ejemplo, Alumna D usa la regla de tres para determinar la variación uniforme en los datos de la tabla, realizando los siguientes cálculos:



<table>
<tr><th>Peso aplicado Medido en:</th><th>Longitud del resorte medida en:</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>-0.8</td></tr>
<tr><td>1.0</td><td>-1.6</td></tr>
</table>

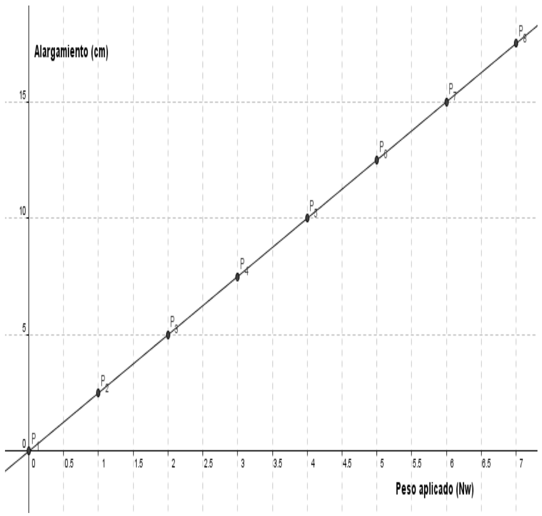
</td></tr>
<tr><td>1. ¿Qué interpretación das al hecho de que los</td><td>Los estudiantes relacionan los datos negativos con el hecho de que el resorte se comprimía, aprovechando la experiencia previa donde el resorte se estiraba. Un</td></tr>
</table>

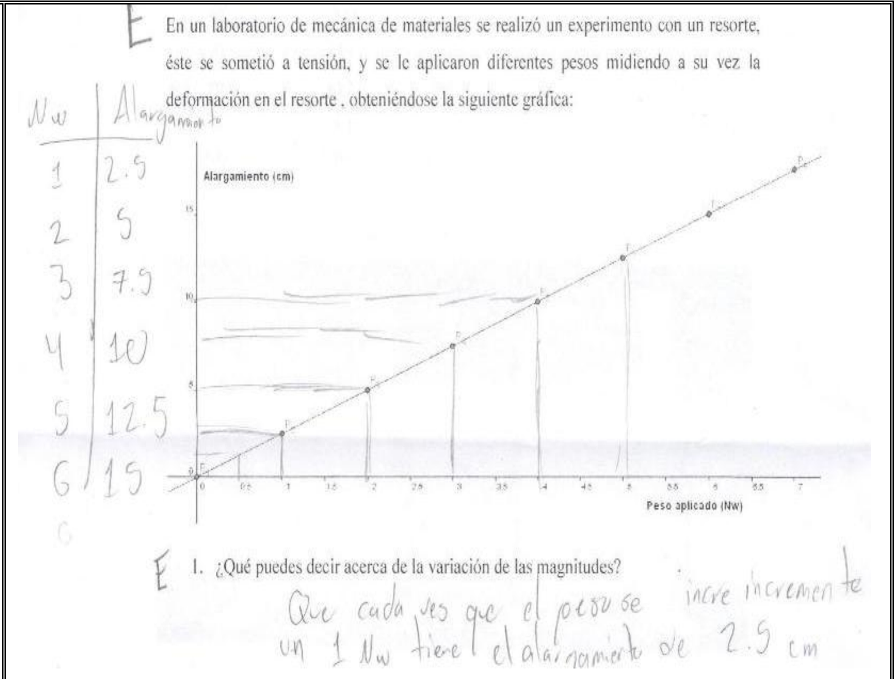
números que aparecen en la segunda columna sean negativos? 2. ¿Qué variación observas en las magnitudes involucradas? ¿Por qué?	alumno lo explica así: *Que cuando le aplicas peso al resorte el resorte se encoje o se comprime.* En cuanto a la variación de las magnitudes es posible que identifiquen una variación constante, Alumno H dice: *El peso aplicado va aumentando de 0.5 en 0.5 y la longitud del resorte es directamente proporcional al peso y aumenta de 0.8 en 0.8.* Como podemos ver en la declaración anterior, el estudiante puede observar una variación uniforme, sólo que para cuando el resorte se contrae, se queda con el concepto de aumento y no declara una disminución, que era lo que se esperaba. Sólo dos estudiantes no logran detectar la variación uniforme en los datos de las variables intervinientes, por ejemplo Alumna F afirma que: *el peso y la longitud son constantes.*
3. Construye el modelo matemático que muestre la relación existente entre la las magnitudes involucradas	Se destaca en esta etapa la poca capacidad para generalizar el fenómeno, pues los estudiantes en general aplican la regla de tres para encontrar el valor de la compresión correspondiente a algunos valores del peso. Por ejemplo, Alumna F:  3. Construye el modelo matemático que muestre la relación existente entre la las magnitudes involucradas 0.5 —> -0.8 1.0 —> ?

	Solamente tres estudiantes intentan una generalización a través de una expresión algebraica que modele a la situación: Alumna D lo resuelve así: $\mathrm{L} = -1.6\ (\mathrm{W})$  3. Construye el modelo matemático que muestre la relación existente entre la las magnitudes involucradas Variable independiente = Peso = W Variable dependiente = longitud = l fórmula coef. = Δ longitud ÷ Δ Peso = -.8 ÷ .5 = -1.6 = C $L = W(C) = \boxed{L = W(-1.6)}$ ✓ Solamente una estudiante deja en blanco esta tarea (AlumnaB).
4. A continuación utiliza el Apple resorte-compresión.ggb y de acuerdo a los datos obtenidos verifica la fórmula que has construido 5. ¿Identificas la constante del resorte? ¿Qué relación guarda ésta con la fórmula que obtuviste? ¿Y con la gráfica de la tabulación?	Los jóvenes responden de una manera muy general a estos cuestionamientos, tal como : Alumno C: *sí la identifico, y sí tiene relación con la fórmula y la gráfica*. Alumno H: *si se identificó y creo que la fórmula se realizó gracias a que el aumento es constante.*

Etapa 2. Problema

Parte II

<table>
<tr><th>HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES</th><th>OBSERVACIONES REALIZADAS</th></tr>
<tr><td>En un laboratorio de mecánica de materiales se realizó un experimento con un resorte, éste se sometió a tensión, y se le aplicaron diferentes pesos midiendo a su vez la deformación en el resorte, obteniéndose la siguiente gráfica:

</td><td>Observan, a excepción de Irma, una variación uniforme de las variables peso-alargamiento. Por ejemplo:
Alumno A visualiza la información gráfica y a partir de ahí expresa: que cada vez que el peso se incrementa un newton tiene el alargamiento de 2.5 cm.</td></tr>
</table>

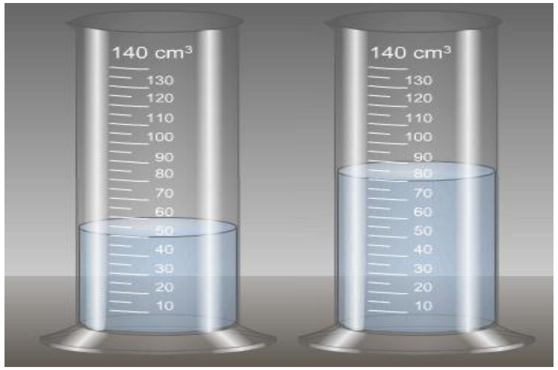
1. ¿Qué puedes decir acerca de la variación de las magnitudes?	 Alumno G: *van incrementando uniformemente, una depende de la otra*
2. A partir de la gráfica mostrada anteriormente, encuentra la representación algebraica del modelo matemático que relaciona las magnitudes involucradas.	En este tipo de tareas es sumamente evidente la falta de capacidad por parte de los estudiantes para trabajar a partir de una gráfica, pues sólo uno de los estudiantes logra vaciar los datos en un registro numérico. Alumno A: $(Nw)(2.5) = P$

	Alumna F: 1 ----- 2.5 2------? Nada: Alumno G, Alumna B, Alumno C, Alumno E

Etapa 3. Ejercicio

Parte I

HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES	OBSERVACIONES REALIZADAS



Durante un experimento un estudiante midió la masa de 10 cm^3 de alcohol. Luego midió la masa de 20 cm^3 de alcohol. Siguió con este proceso y obtuvo los datos contenidos en la tabla siguiente:

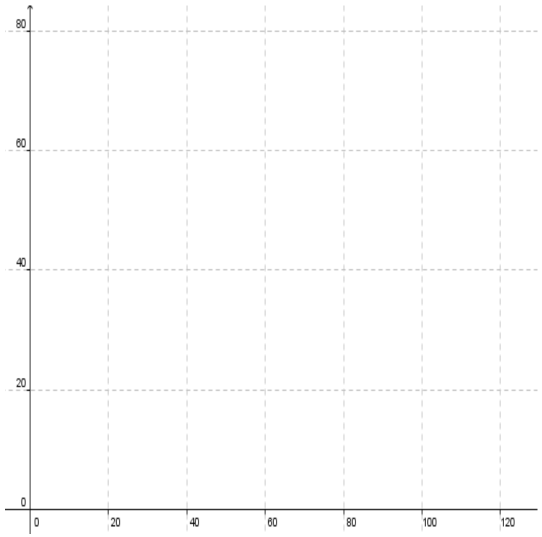
Una alumna realiza el tratamiento, tal como se realizó en la situación problema del resorte, de manera completa:

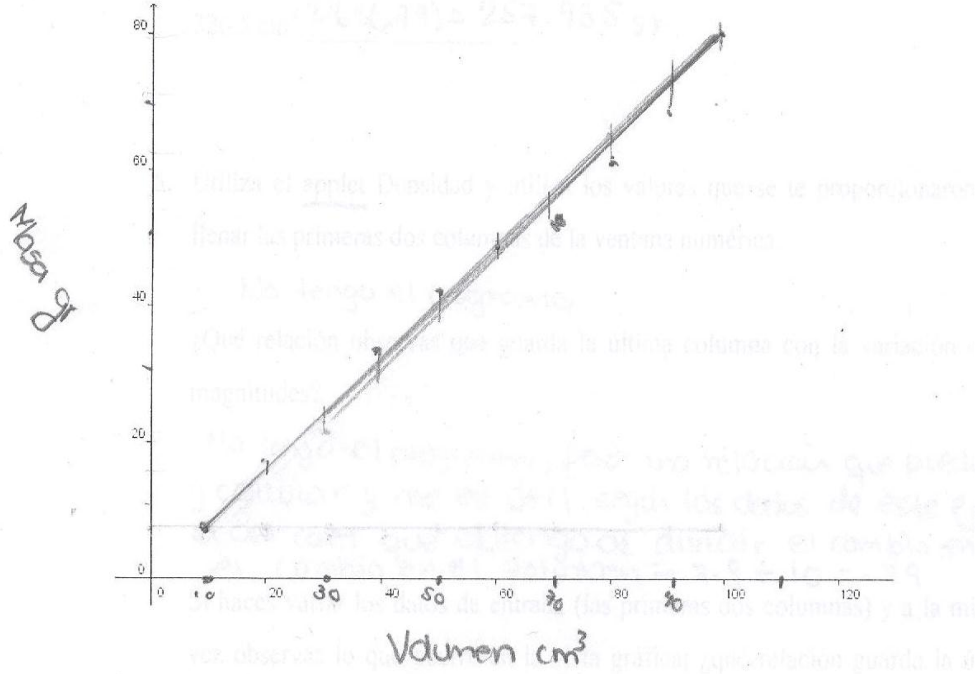
Alumna F responde así:

Volumen V En (cm^3)	Masa m En (gramos) 0.04	incremento volumen	incremen en gramos	incremen en g / inc volumen
10	7.92	10	7.88	7.88/10 = .788
20	15.8	10	7.89	7.89/10 = .789
30 ⟩ 10	23.69	10	7.89	7.89/10 = .789
40	31.58	10	7.87	7.87/10 = .787
50 ⟩ 10	39.45	10	7.9	7.9/10 = .79
60	47.35	10	7.95	7.95/10 = .795
70	55.3	10	7.9	7.9/10 = .79
80	63.2 ⟩ 7.9	10	7.9	7.9/10 = .79
90	71.1 ⟩ 7.9	10	7.9	7.9/10 = .79
100	79	10	7.9	7.9/10 = .79

Volumen V En (cm^3)	Masa m En (gramos)
10	7.92
20	15.8
30	23.69
40	31.58
50	39.45
60	47.35
70	55.3
80	63.2
90	71.1
100	79

1. Utiliza el sistema de coordenadas que se te presenta a	En general no se presentan dificultades para que los estudiantes detecten la variación uniforme de las variables masa y volumen. Alumno C: *va en aumento uniforme porque es el mismo aumento en ambos*.

<table>
<tr>
<td>
continuación para representar gráficamente el fenómeno.


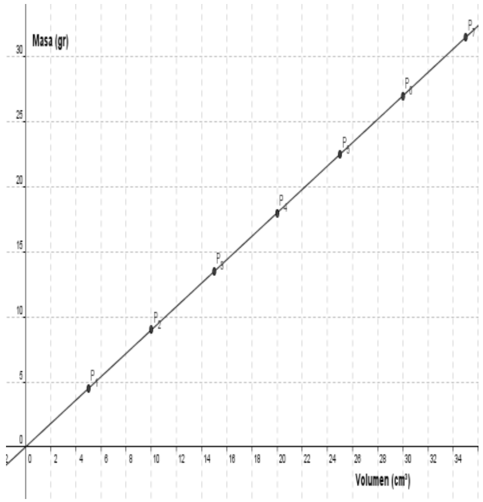
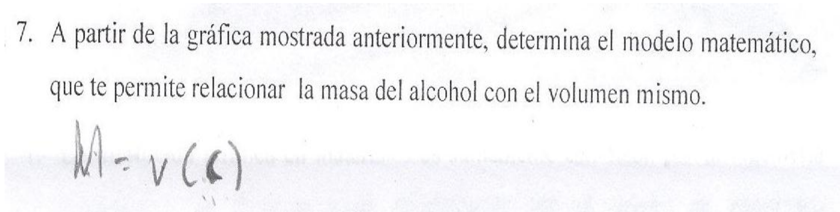
1. ¿Cómo observas que varían las magnitudes intervinientes? ¿Por qué?
</td>
<td>
Alumna D: el volumen varía de manera constante 10 y la masa varía con 7.9 (si redondeamos)
Alumna D construye


E 2. ¿Cómo observas que varían las magnitudes intervinientes? ¿Por qué?
El volumen varía de manera constante 10 y la masa varia con 7.9 (si redondeamos
</td>
</tr>
<tr>
<td>2. ¿Qué modelo matemático representa una manera general de</td>
<td>Algunos estudiantes utilizan las representaciones construidas en fenómenos</td>
</tr>
</table>

calcular un valor de la masa para un valor de volumen? 3. Utiliza la expresión anterior para los siguientes valores del volumen del recipiente: 158 cm^3__________________ 300 cm^3__________________ 326.5 cm^3________________	anteriores para responder. Llama la atención cómo algunos estudiantes, haciendo uso de la expresión algebraica de la recta $y = mx + b$, intentan dar solución al ejercicio Alumno A: $(0.79)(v) + 0.04 = 7.42$ Solamente dos alumnos utilizan la expresión $y = mx$ Alumna D: $V(coef) = V(0.79)$ Alumno H: $M = VC$ *Donde:* M*=masa*, V *= volumen* C *= cociente de m/v.*
4. Utiliza el applet Densidad.ggb y emplea los valores que se te proporcionaron para llenar las primeras dos columnas de la ventana numérica. ¿Qué relación observas que guarda la última columna con la variación de las magnitudes intervinientes? Si haces variar los datos de entrada (las primeras dos columnas) y a la vez observas lo que ocurre en la vista gráfica; ¿qué relación guarda la última columna con el comportamiento de la gráfica?	Alumna D: menciona que no tuvo la posibilidad de utilizar el software Alumno E observa: *la última columna es constante y sirve para la fórmula* En cuanto a la relación última columna con el comportamiento de la gráfica, Alumna F: *reacciona en la inclinación de la gráfica.* Alumno A*: es similar.* Algunos estudiantes sólo observan una modificación. Por ejemplo *Alumno G: Se modifica la gráfica y la que se altera es la constante*

Etapa 3. Ejercicio

Parte II

HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES	OBSERVACIONES REALIZADAS
En un experimento donde se midió la masa de alcohol para un volumen determinado y se representó a través de una gráfica.  2. ¿Cómo observas que varían las magnitudes? ¿Por qué? 3. A partir de la gráfica mostrada anteriormente, determina el modelo matemático, que te permite relacionar la masa del alcohol con el volumen del mismo.	Una estudiante utiliza la regla de tres en su intento por obtener la expresión algebraica. En general los estudiantes modelaron el fenómeno con la expresión $y = mx$, sólo que no declaran el valor de la pendiente específico de la recta graficada y solamente lo dejan indicado. Alumno E:  7. A partir de la gráfica mostrada anteriormente, determina el modelo matemático, que te permite relacionar la masa del alcohol con el volumen mismo. M = v(c)

Comentarios: El Bloque I se piloteó en una institución de educación superior de Cd. Obregón, Sonora, se formaron tres equipos de tres integrantes, los estudiantes son alumnos de nuevo ingreso en carreras de ingeniería.

Los alumnos presentaron dificultades relacionadas con las prácticas a las que están acostumbrados a trabajar en la clase de matemáticas, pues muestran poca capacidad para construir ideas pertinentes a una situación problema dada, aunque declaran que la situación les pareció interesante y se observó entusiasmo al trabajar con las actividades.

Se observaron dificultades para articular adecuadamente los registros de representación utilizados, solamente se logró que los alumnos relacionaran aspectos como la inclinación de la gráfica con los datos mostrados en la tabla, evidenciando así nula experiencia con este tipo de tareas matemáticas.

En general se logra dotar de sentidos y significados de la función lineal del tipo declarado, en la medida en que los mismos estudiantes identificaron la función que desempeñaron las distintas magnitudes intervinientes, estableciendo las constantes y las variables de la situación.

Se muestra muy poca capacidad para el uso de la tecnología, en algunas de las tareas para casa se declaró que el software no pudo ser utilizado. También existe poca disposición para analizar el applet, ya que sólo es utilizado para comparar los datos obtenidos de manera manual y, como se menciona en párrafos anteriores, si acaso se vinculan los registros de una manera muy limitada en cuanto a la pendiente de la recta.

Se presentó la necesidad de intervenir en varias ocasiones para estimular los trabajos en equipo, para lograr que fluyeran las ideas y lograr que establecieran puestas en común de las situaciones planteadas.

Se muestra afinidad entre los integrantes del grupo para compartir ideas y llegar a puestas en común.

Es en la fase de institucionalización cuando se logra de manera general establecer la expresión algebraica que modeló la situación.

BLOQUE II: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal y cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$, con $m < 0$ y $b > 0$

<table>
<tr><th>HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES</th><th>OBSERVACIONES REALIZADAS</th></tr>
<tr><td>

I) Desde hace algunos años, los aviones están equipados con pantallas que van mostrando, entre otras cosas, el desplazamiento del avión de acuerdo a la ruta de vuelo que tiene asignada. Además, cada determinado tiempo, en dichas pantallas se va mostrando la información de la altura a la que se encuentra el aparato, así como la temperatura exterior que corresponde a dicha altura. Esto se debe a que conforme nos elevamos de la faz de la tierra, la temperatura presenta una disminución de su valor respecto al que tiene cuando estamos en tierra.
1. ¿Habías oído hablar de esta situación? Escribe otras situaciones que conozcas donde haya evidencias de la disminución de la temperatura al aumentar la altura.
2. ¿Qué magnitudes identificas que se presentan en las situaciones descritas en el inciso anterior?
3. ¿Cómo varían esas magnitudes?</td><td>Mencionan situaciones similares: una montaña, un rascacielos, la sierra, alejarse cada vez más de la superficie terrestre.

Las magnitudes que se identificaron son: temperatura, altura, velocidad del viento, presión atmosférica, características demográficas, humedad, tiempo.

Acerca de cómo variaron las magnitudes, los alumnos respondieron de manera general que existe variación de la temperatura conforme aumenta la altura, Alumno J lo escribe así: A mayor temperatura hay una disminución en la temperatura y un incremento en la velocidad del viento.</td></tr>
</table>

II) El profesor dará instrucciones para que se integren en equipos de tres personas, y de esa manera confronten las respuestas dadas en la fase anterior. Escribe en el espacio que sigue los comentarios emergidos.	Los equipos responden que trataron con situaciones similares y tienen una idea en común entre los integrantes del equipo.
III) Enseguida se proporcionan unos datos, y se pide respondas a los cuestionamientos. En meteorología se estudia la disminución de la temperatura del aire a medida que éste se eleva. Esto resulta importante cuando se aplica a la aviación. A continuación se te muestran unos datos donde: h es la altura en miles de pies y T es la temperatura en grados Fahrenheit. Para completar la tabla se les pide: En la columna tercera y cuarta registren cómo se van modificando las magnitudes observadas en el fenómeno en estudio En la quinta columna registren la relación de las magnitudes en forma de cociente (razón)	

Altura *h*, miles de metros	Tempera-tura *T*, ℃	Cambio en la altura	Cambio en la temperatura	Cambio en la temperatura/ cambio en la altura
0	21.9			
1	12.4			
2	2.9			
3	- .6			
4	-16.1			
5	-25.6			
6	-35.1			
7	-44.6			
8	-54.1			
9	-63.6			
10	-73.1			

4. ¿A qué altura encontraremos una temperatura más agradable para el

Los equipos llenan la tabla sin mayor problema y responden que a los cero metros estarían con una agradable temperatura, esto tomado de la información de la tabla.

cuerpo humano? 5. Describe los cambios observados en la altura y la temperatura. 6. ¿Cómo se modifica la temperatura cuando se modifica la altura? 7. De acuerdo a los cálculos que realizaron en la tabla anterior ¿cómo variaron los valores de la tercera columna? 8. Contrasten su respuesta de la pregunta anterior respecto a sus respuestas de la pregunta 3. Escriban sus comentarios al respecto.	Para la pregunta 5: El equipo 1 responde: *a una variación de altura hay una variación de temperatura, sus variaciones son directamente proporcionales*. El equipo 2: *la variación es proporcional donde la constante será igual a la pendiente.* Para la pregunta 6 detectan sin problema la constante de proporcionalidad. Por ejemplo Alumno K responde: *disminuye la temperatura cuando aumenta la altura, cuando la altura aumenta en uno la temperatura disminuye en 9.5.* Respecto de lo que habían respondido en la pregunta 3, logran determinar que pueden identificar de mejor manera qué tipo de variación está ocurriendo. Por ejemplo Alumno J escribe: *Que en la pregunta 3 está muy generalizada y en la 6 es más analítica y concreta.*
9. De acuerdo al análisis de los datos calculados los estudiantes debaten sus observaciones respecto de la variación ocurrida, es decir qué nuevos valores se obtuvieron para cada nuevo cambio en la altura adquirida. 10. ¿Qué sucede con cada cambio en la altura? Comenten cómo varía la temperatura con respecto a la altura. Sugerencia: pueden observar qué valores arrojaron los primeros cambios divididos en la tabla que realizaron en la instrucción número III.	Es convincente para los equipos el tipo de variación ocurrida dada la relación de esa constante de proporcionalidad con la determinación de una relación lineal entre las variables. Alumno L escribe: *al ir aumentando la altura de 1000 m a 2000m y así sucesivamente obtenemos que la temperatura disminuye a la mitad de la variación original (-9.5^0), o en un tercio, correspondientemente. Sigue variando proporcionalmente.*

IV) Tu profesor te guiará para que utilices el applet temperatura-altura.ggb y analices el fenómeno en estudio, reflexionando y contestando lo siguiente. 11. A continuación se te pide que compares los resultados que construiste junto con tus compañeros en las fases anteriores sobre el tipo de variación observada al manipular el applet con las instrucciones de tu profesor, analiza lo que sucede en la ventana gráfica, algebraica y tabular. Utiliza el espacio abajo para anotar dichas respuestas.	
12. ¿Qué expresión te permite relacionar las magnitudes intervinientes? (Temperatura y altura)	$T(h) = -9.5h + 21.9$

13. Con la expresión que escribiste en la pregunta 11, calcula el valor de la temperatura para las siguientes alturas: 1500 m______________ 2300 m______________ 4600.50 m___________ 11000 m____________ Trabaja en el applet los resultados que has calculado. 14. ¿De qué manera compruebas que efectivamente es correcta la relación que obtuviste para las magnitudes intervinientes?	Se argumentó que con los datos de la tabla era posible verificar que la expresión algebraica a la que habían llegado era la correcta.
15. En el desarrollo de la actividad identificaste magnitudes, observaste que variaban de manera uniforme una con respecto a otra. ¿Qué nombre genérico le pondrías a las magnitudes que varían? ¿y a las que no varían? Simbolízalas con una literal. 16. Es necesario determinar para la función que has modelado y de acuerdo al nombre que diste a las magnitudes que varían lo siguiente: ¿qué magnitud es la de interés? ¿Qué magnitud es la de referencia? 17. Con base en la expresión general construida, comenta sobre el parámetro que multiplica a lo que elegiste cómo variable independiente. ¿Cómo se comporta para cada pareja de valores en la tabla?	Se establece que la magnitud de interés es la temperatura y la magnitud de referencia es la altura, y que la expresión general para modelar a este tipo de situaciones es $y = mx + b$

Comentarios: El bloque II se implementó en una institución de educación superior de la ciudad de Hermosillo, Sonora, se formaron dos equipos de tres integrantes, los estudiantes son alumnos de nuevo ingreso en la institución a la carrera de físico.

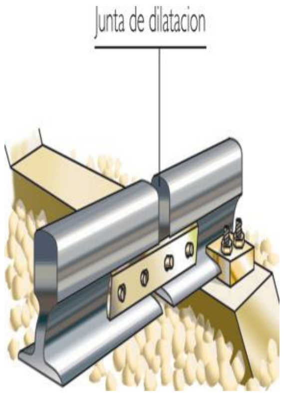
Los jóvenes presentan facilidad para resolver la situación, aplicando a la actividad los conocimientos previos necesarios para solucionarla. Articulan la representación analítica con la gráfica, pues establecen que la constante que relaciona el cambio en la temperatura con respecto al cambio en la altura es la pendiente en la recta.

Muestran facilidad para el trabajo en equipo pues sin dificultad establecen ideas en común y analizan los resultados individuales para la respuesta del equipo.

En las fases de regreso al trabajo individual logran reflexionar en aspectos como la relación proporcional de las variaciones.

El profesor establece los significados de las magnitudes intervinientes, relacionándolas con la expresión matemática que generaliza la situación del tipo estudiado y la relación de estos parámetros con la representación gráfica y tabular.

BLOQUE III: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal y cuya expresión algebraica es de la forma $y = m + b$, donde $m > 0$ y $b > 0$.

HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES	OBSERVACIONES REALIZADAS
 I. A continuación analizarás el fenómeno de la variación de la longitud de una barra de estaño respecto de la variación de la temperatura, y se te pide contestes las siguientes preguntas. 1. La dilatación térmica en materiales es sumamente estudiada por la ingeniería mecánica y en diversas áreas relacionadas con el diseño de elementos mecánicos, pues una condición a considerar en el diseño es la contracción y estiramiento de los materiales sujetos a diversas temperaturas. Esto de acuerdo a la temperatura que corresponda al lugar donde será utilizado un elemento.	Los estudiantes mencionan haber observado dilatación en vías, plásticos, algunos metales, puentes, cables, madera. Las magnitudes que identifican son: longitud, temperatura, volumen, resistencia, alargamiento, contracción. Acerca de cómo varían se respondió que dependía del calor que se aplicara.

Por ejemplo en un pavimento se construyen unos elementos llamados juntas de contracción, para que no se vea afectado por la variación de sus dimensiones por efectos térmicos. ¿Has escuchado hablar de esta situación? Cita algunos otros tipos de estructuras donde se observe el fenómeno 2. ¿Qué magnitudes identificas que se presentan en las situaciones descritas en el inciso anterior? 3. ¿Cómo varían esas magnitudes?	
II) El profesor dará instrucciones para que se integren en equipos de tres personas, para que de esta manera discutan las respuestas dadas en la fase anterior. Utiliza el espacio que sigue para que anotes los comentarios emergidos.	Equipo 2: *Nuestras respuestas son similares, al incrementar la temperatura, aumenta la longitud, el volumen del material, y al disminuir ésta, algunos materiales vuelven a su estado inicial.*

III. Enseguida se te proporcionan unos valores que representan al fenómeno en estudio, y se te pide respondas a los cuestionamientos. Al medirse la longitud de una barra de estaño a intervalos de temperatura de 20^0 C se anotaron los resultados en la siguiente tabla, donde se plasma la variación de la longitud l (en milímetros), respecto a la temperatura T (en grados centígrados). Completen la tabla con las instrucciones siguientes: En las columnas tercera y cuarta registren cómo se van modificando las magnitudes observadas en el fenómeno en estudio. En la quinta columna registren la relación de las diferencias de las magnitudes en forma de cociente (razón).	De una manera más ágil los estudiantes llenan la tabla. Se describe que los cambios son constantes: La modificación de uno con respecto de otro, en el equipo 2, se describe a detalle. Alumna F: *aumenta 0.9 mm constantemente por cada* 20^0 *C que se incrementan.* Otros alumnos no son tan específicos, como Alumno C (equipo 1), quien responde a la pregunta 5 mencionando que esas modificaciones son: *se expande.* En cuanto a la pregunta donde se les pide comparar las respuestas cuando realizaron un primer comentario sobre la variación de las magnitudes y donde ya se tenían los datos experimentales, los estudiantes realizaron los siguientes comentarios: Equipo 1: *El calor hizo que se expandiera el estaño.* Equipo 2: *Igual aumenta la longitud (aunque varía en .9 y .8) conforme aumenta la temperatura. Las respuestas fueron similares. Igual aumenta la longitud con la variación de la energía.* Equipo 3: *La longitud varía uniformemente con respecto a la temperatura.*

Dilatación Térmica

Tempe-ratura *T* , C	**Longitud *l* , mm**	**Cambio en la temperatura**	**Cambio en la longitud**	**Cambio en la longitud/cambio en la tempe atura**
20	2597			
40	2597.8			
60	2598.7			
80	2599.6			
100	2600.5			
120	2601.3			
140	2602.1			
160	2603			
180	2603.8			
200	26 4.7			

4. Describan los cambios observados en la temperatura y la longitud de la barra de estaño.

5. ¿Cómo se modifica la longitud de la barra cuando se modifica la temperatura? 6. De acuerdo con los cálculos que realizaron en la tabla anterior, ¿cómo variaron los valores de la tercera columna? 7. Contrasten su respuesta a la pregunta anterior sus respuestas con las que dieron a la pregunta 3. Escriban sus comentarios al respecto.	
8. De acuerdo al análisis de los datos que calcularon, discutan en forma de debate sus observaciones respecto de la variación obtenida, es decir, qué nuevos valores se obtuvieron para cada nuevo cambio en la temperatura. 9. ¿Qué sucede con cada cambio en la temperatura alcanzada? Es decir comenten cómo varía la temperatura con respecto a la longitud	Se constata que la variación fue uniforme, Alumno E escribe: *simplemente de 20 a 20 la temperatura*.

alcanzada por la barra de estaño. Sugerencia: se pueden observar qué valores arrojaron los primeros cambios divididos en la tabla que construyeron en la fase anterior.	
V) El profesor te guiará para que utilices el applet temperatura-longitud.ggb y analices el fenómeno en estudio, reflexionando y respondiendo lo siguiente. 10. Compara los resultados que construiste en equipo y con los demás compañeros de clase en las fases pasadas, sobre el tipo de variación observada al manipular el applet en GeoGebra. Con las instrucciones de tu profesor, analiza lo ocurrido en las ventanas gráfica, algebraica y tabular. Utiliza el siguiente espacio para anotar tus respuestas.	Quizá por la casi nula práctica de los estudiantes en el uso de software matemático, fue poca la interacción que tuvieron con él. Algunos sólo se limitaron a comparar los valores estáticos que habían construido manualmente con los que les arrojaba el software, en esta fase 3 alumnos no estuvieron presentes.
	Los estudiantes manifiestan muy poca capacidad para aplicar conceptos que se supone ya manejan, como es la aplicación de

11. ¿Qué expresión te permite relacionar las magnitudes intervinientes? (Temperatura-longitud) 12. Con la expresión que escribiste en la pregunta anterior, calcula el valor de la longitud de la barra de estaño para las siguientes temperaturas: 30^0 C_________________ 45^0 C_________________ 138^0 C________________ 350^0 C________________ Visualiza y verifica en el applet los resultados calculados. 13. ¿De qué manera compruebas que efectivamente es correcta la relación que obtuviste para las magnitudes intervinientes?	formas de la ecuación de la línea recta que les condujera hacia la construcción del modelo algebraico, o la explotación de habilidades numéricas para generalizar los datos de la tabla en un patrón algebraico, o falta de capacidad para analizar los datos gráficos que el mismo software les proporcionaba. Sólo un estudiante intenta construir una expresión algebraica aunque incorrecta: $L = TC$. Alumno C sólo se limita a escribir $\frac{cambio\ en\ L}{cambio\ en\ T}$. 3 estudiantes no estuvieron presentes en esta fase.
V. Durante el desarrollo de la actividad identificaste magnitudes, observaste que variaban de manera uniforme una respecto de la otra. ¿Qué nombre genérico le pondrías a las magnitudes que varían? ¿Y a las que no varían?	Se identificaron T (temperatura) y L (longitud) entre las magnitudes variables. Dentro de las que no varían se identificó a los cambios y K fue otra que no varió (relación cambio en la longitud y cambio en la temperatura). La magnitud de interés, la longitud y la magnitud de referencia la temperatura.

14. ¿Con qué literal representas cada variable y qué significa? 15. Las variables son magnitudes que tal como se dice en la pregunta anterior, varían una respecto de la otra a manera de razón de cambio constante. Sólo que una de las variables se considera la magnitud de interés (es decir la variable dependiente, y otra la magnitud de referencia (es decir la variable independiente). ¿Cuál variable identificas cómo la variable de interés? ¿Cuál variable identificas cómo la variable de referencia?	
16. ¿Qué expresión algebraica correspondiente a situaciones de variación uniforme te representaría de manera general fenómenos similares a los establecidos en esta actividad?	La expresión a la que se llega es $L = KT + b = 0.045T + 2596.1$

Comentarios: El bloque III descrito al inicio de la actividad se implementó en una institución de educación superior de Cd. Obregón, Sonora, se formaron tres equipos de tres integrantes, los estudiantes son alumnos de nuevo ingreso en carreras de ingeniería.

Se muestra familiarización con las situaciones planteadas, en este bloque es posible evidenciar más afinidad por parte de los estudiantes para resolver este tipo de situaciones extra matemáticas, aunque a pesar de haber trabajado con una situación de modelación a través de una función lineal se siguen presentando problemas para establecer la expresión algebraica que modele las situaciones planteadas.

Se muestra falta de habilidad aún en este segundo bloque y con la experiencia previa para vincular los registros promovidos relacionando sólo la inclinación de la recta con la constante de proporcionalidad del fenómeno.

La falta de manejo de software matemático es quizá la causa de la poca capacidad de análisis y de aprovechamiento de las bondades del applet estudiado, pues sólo se utiliza para verificar los datos previamente construidos haciendo un uso limitado del mismo sólo simulando las situaciones para otros valores, pero sin un análisis más fino de vinculación.

Hay mayor fluidez en el trabajo en equipo y en el grupal.

Etapa 2. Problema

HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES	OBSERVACIONES REALIZADAS
 Si cogemos un vaso con agua, le añadimos una cucharada de sal y agitamos, observamos que la sal desaparece. Hemos preparado una disolución. Naturalmente, la sal ha quedado dispersa en el seno de la disolución, que adquiere un conocido sabor salado. El agua es el disolvente y la sal es el soluto. Si seguimos echando sal al vaso de agua, llegará un momento en que, por mucho que agitemos, la sal se queda en el fondo, ya no se disuelve más. Hemos formado una disolución saturada. Esto sucede porque cada sustancia tiene una capacidad máxima para disolverse en agua, tiene una solubilidad determinada. En la siguiente tabla se muestra la solubilidad del bromuro de potasio en agua a distintas temperaturas, considerándose que T es la temperatura del agua en grados	

centígrados y C es la concentración, es decir, el número de soluto que hay en 100 gramos de agua. *Nota: solubilidad se refiere a la cantidad máxima de soluto que el disolvente admite a una terminada temperatura.*	Los estudiantes detectan una variación uniforme de la concentración con respecto a la temperatura.

Temperatura T**, en** ℃	**Concentración** C**, en** %
-10	45.4
0	51.3
10	57.1
20	63
30	68.8
40	74.6
50	80.4
60	86.3
70	92.1
80	97.9
90	103.7
100	109.6

1. ¿Qué sucede con cada cambio en la temperatura alcanzada? Comenta cómo varía la concentración del bromuro de potasio con respecto a la variación de la temperatura del agua.	
2. Construye el modelo matemático que relacione las magnitudes involucradas 3. ¿Cómo puedes comprobar que el modelo que construiste es correcto?	Ningún estudiante es capaz de construir adecuadamente una representación algebraica que modele al problema, sólo algunos de ellos presentan los siguientes intentos de construcción: *Alumno G :* $T = 51.3 + 5.8$ *(aumento.)* El estudiante anterior ubica que para una temperatura de cero, existe un $51.3\,\%$ de concentración, pero no logra

	calcular adecuadamente la constante de proporcionalidad ni la colocación de las variables intervinientes. *Alumno C , Alumno E y Alumna F :* $0.58t + 39.6$ Los estudiantes anteriores identifican adecuadamente las variables intervinientes, sólo que presentan dificultad para ubicar la ordenada al origen, o establecer adecuadamente para cero de temperatura cuánta concentración existe, algo que se hacía muy evidente en la gráfica.
4. Utiliza el applet que te proporcionará tu profesor y verifica los resultados que has encontrado en las cuestiones anteriores. ¿Qué relación guarda el valor en cero de la temperatura de los datos en la tabla con la gráfica? Observa la quinta columna de la ventana numérica y establece la relación de la misma con la gráfica de la función.	No existe evidencia de uso de applet. Sigue siendo muy evidente la pobre interacción de los estudiantes con el software para relacionar los distintos registros que éste presenta de la situación. Algunos estudiantes comentan brevemente lo siguiente: Alumno H: *al modificarse la quinta columna se modifica totalmente la gráfica.* Alumna F: *la quinta columna es la constante de la tabla que afecta la inclinación de la gráfica.*

Parte 3. Ejercicio

HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES	OBSERVACIONES REALIZADAS
 Cuando un material es sometido a calor, la energía cinética de sus moléculas aumenta conforme aumenta la temperatura y esto provoca que choquen a gran velocidad unas con otras, provocando en el material un cambio en sus dimensiones. Considerando lo anterior se sometió a incrementos de temperatura a una barra de estaño para verificar el efecto en su longitud, obteniendo los siguientes resultados:	No existe dificultad para expresar que las variables guardan una relación lineal pues presentan cambios constantes.

Temperatura $\boldsymbol{T}$, (°C)	Longitud $\boldsymbol{l}$, ($\boldsymbol{mm}$)
20	1835
40	1835.7
60	1836.4
80	1837.1
100	1837.8
120	1838.5
140	1839.2
160	1839.9
180	1840.6
200	1841.3

1. ¿Cómo observas que varía la longitud de la barra de estaño al variar la temperatura?

2. Construye el modelo matemático que representa la situación. 3. Comprueba la efectividad del modelo matemático que has construido.	En esta parte de la tarea, presentaron menos dificultades para construir la expresión algebraica. alumnos la construyeron adecuadamente y los demás sólo intentaron su construcción : Alumna D escribe la siguiente expresión sólo que presenta un error al no ubicar adecuadamente la ordenada al origen. *Alumna D:* $L = CT + b$ Los siguientes alumnos construyen adecuadamente la expresión algebraica buscada*:* Alumna F, Alumno E, Alumno C y Alumno H $L = 0.035T + 1834.3$ Alumno G intenta la construcción del modelo, pero no es capaz de generalizar la situación y sólo encuentra algunos valores de la tabla. *Alumno G:* $x(T) = 1835(0.7)(x)$*, donde* x *es el aumento en grados* Alumno A y Alumno C no calculan adecuadamente la constante de proporcionalidad, pues establecen que ésta es sólo el cambio en la temperatura, sin calcular la razón de cambio Alumno A y Alumno C*:* $0.07C + Li = R$

BLOQUE IV: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal y cuya expresión algebraica es de la forma $y = m + b$.

Resistencia eléctrica y temperatura

HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES	OBSERVACIONES REALIZADAS
 A continuación analizarás el fenómeno de la variación de la resistencia eléctrica de un alambre de cobre con respecto de la variación de la temperatura. Se te pide respondas las siguientes preguntas. 1. Los metales son buenos conductores de electricidad y son utilizados para este fin, el ambiente de trabajo del conductor de electricidad puede reducir la capacidad de conducción de acuerdo al aumento de la temperatura, es decir aumentaría la resistencia del conductor. Comenta sobre qué tipos de materiales conductores de electricidad conoces o cuáles te son familiares:	Algunos materiales que conocen los jóvenes son: plata, oro, cobre, bronce, platino, agua. Las magnitudes que identifican: temperatura, resistencia eléctrica, intensidad eléctrica, voltaje. Acerca de la variación de las magnitudes se estableció que a mayor temperatura, mayor resistencia eléctrica en los metales. Un estudiante menciona que dependerá del material con el que esté hecho el conductor.

1. ¿Qué magnitudes identificas que se presentan en las situaciones estudiadas en la pregunta anterior? 2. ¿Cómo varían esas magnitudes? I) El profesor dará instrucciones para que se agrupen en equipos de tres integrantes, para que de esa manera confrontes las respuestas dadas en la fase anterior. Escribe en el espacio que sigue los comentarios surgidos.	Los integrantes de los equipos mencionan que coinciden en sus respuestas anteriores.
II) Enseguida se te proporcionan datos referentes a la situación estudiada y se pide respondan a los cuestionamientos: La resistencia eléctrica de un alambre de cobre No. 10 varía conforme la temperatura. En la tabla siguiente se anota la resistencia eléctrica R, en ohms, y la temperatura T, en grados centígrados. Completa la siguiente tabla con las instrucciones siguientes:	

En las columnas tercera y cuarta registren cómo se van modificando las magnitudes observadas en el fenómeno en estudio.

En la quinta columna registren la relación de las magnitudes en forma de cociente (razón).

Resistencia eléctrica de un alambre de cobre No. 10, medida a diferentes temperaturas.

Temperatura ***T*** en °C	Resistencia eléctrica ***R*** en ohms	Cambio en la tempera-tura	Cambio en la resistencia	Cambio en la resistencia/cam-bio en la temperatura
20	1.00			
40	1.08			
60	1.15			
80	1.24			
100	1.32			
120	1.41			

4. Sin problema determinan con la información dada en la tabla, es decir que aproximadamente para una temperatura de 40°C, como la de Hermosillo, le corresponde una resistencia al alambre de cobre de 1.08 Ohm

5. Debido a errores experimentales, los datos observados en la resistencia eléctrica presentaron pequeñas diferencias en sus cambios.
   Alumna T: *El cambio en la temperatura es constante pero el cambio en la resistencia oscila entre 0.07 y 0.09*

6. En general determinan que aumentaron uniformemente

140	1.50			
160	1.58			

3. En tu localidad si utilizaras el mismo conductor, ¿qué resistencia crees que presentará?

4. Describan los cambios observados en la temperatura y la resistencia eléctrica del alambre.

5. ¿Cómo se modifica la resistencia eléctrica cuando se modifica la temperatura?

6. Conforme a los cálculos realizados en la tabla anterior, ¿cómo variaron los valores de la tercera columna?

Constantes

7. Comparen la respuesta que dieron en la pregunta anterior respecto a sus respuestas de la pregunta 3. Escriban sus comentarios al respecto.	Alumna U: *modificamos nuestra opinión respecto a la resistencia eléctrica, nuestras respuestas variaban.*
8. De acuerdo al análisis de los datos que calcularon, debatan sus observaciones respecto a la variación calculada, es decir, discutan qué nuevos valores se obtuvieron para cada nuevo cambio en la temperatura. 9. ¿Qué sucede con cada cambio en la temperatura alcanzada?,	Ya habían discutido en equipo que no podían considerar un cambio uniforme en los valores de la resistencia, sólo que se llega al acuerdo de que por errores de diversa índole, en un experimento se pueden presentar pequeñas diferencias en los cambios al momento de observar los datos, considerando lo anterior. Alumno P escribe: *De acuerdo con los datos obtenidos y debido a que el cambio en la resistencia permaneció "casi" constante podemos considerarlo como tal.* De manera grupal, consideraron los cambios en la temperatura

Comenten cómo varía la temperatura con respecto a la resistencia eléctrica del alambre de cobre. Sugerencia: se pueden observar qué valores arrojaron los primeros cambios divididos en la tabla que construyeron en la fase anterior.	constante. Alumna S: *El cambio en la temperatura se mantuvo constante y al considerar que la resistencia también, el cambio entre ellas permanecería constante.*
V) Tu profesor te orientará para que utilices el applet temperatura-resistencia eléctrica.ggb y analices el fenómeno que estás estudiando, se te pide respondas lo siguiente: 11. Compara los resultados tanto en equipo cómo los respondidos en el debate y los que construiste de manera individual sobre el tipo de variación observada al manipular el applet de GeoGebra, con las instrucciones de tu profesor. Analiza lo que ocurre en las ventanas gráfica, algebraica y tabular. Utiliza el siguiente espacio para anotar tus respuestas.	Los estudiantes relacionan la constante de la columna cinco con la pendiente de la recta, y determinan que a mayor incremento de temperatura la pendiente de la recta es menor. Alumna U: *Al aumentar el incremento de temperatura la pendiente de la recta es menor, el cambio de resistencia y cambio de temperatura se mantiene constante.*

<table>
<tr>
<td>

9. ¿Qué expresión algebraica te permite relacionar las magnitudes que intervienen en el fenómeno estudiado? (Temperatura-Resistencia eléctrica).
10. Con la expresión algebraica que respondiste en la pregunta anterior, calcula qué resistencia presentaría el alambre de cobre para las siguientes temperaturas:

36^0C___________________

95^0C___________________

250^0C__________________

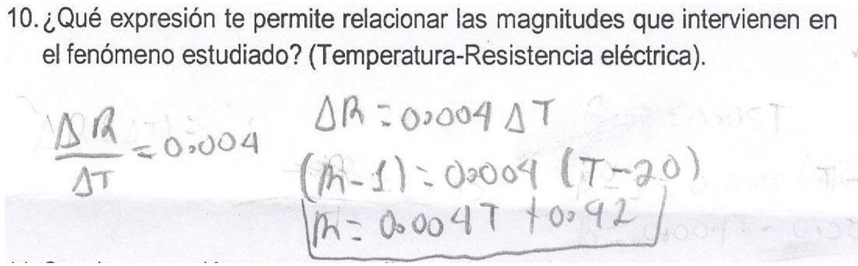
300^0C__________________

Visualiza y valida en el applet los resultados obtenidos. Comenta al respecto.

11. ¿De qué manera compruebas que efectivamente es correcta la relación que obtuviste para las magnitudes intervinientes?

</td>
<td>

De 6, 3 alumnos llegaron al modelo buscado por métodos ortodoxos. Otra alumna por tanteo y 2 llegaron sólo a identificar el coeficiente. $R(t) = 0.004t + 0.92$, donde R, variable dependiente, representa a la resistencia y t, variable independiente, a la temperatura.

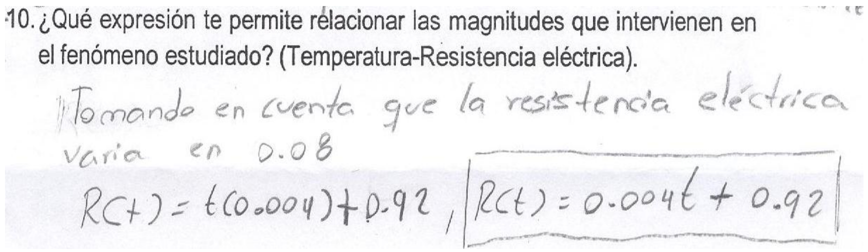


10. ¿Qué expresión te permite relacionar las magnitudes que intervienen en el fenómeno estudiado? (Temperatura-Resistencia eléctrica).

$\frac{\Delta R}{\Delta T} = 0.004$ $\Delta R = 0.004 \Delta T$

$(R-1) = 0.004 (T-20)$

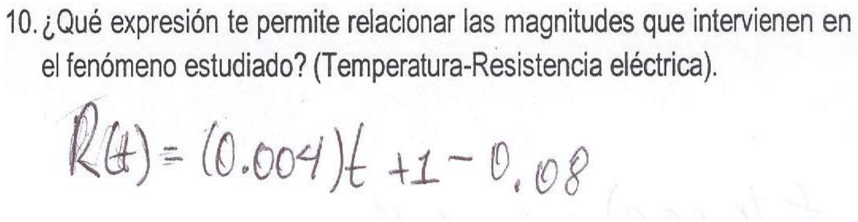
$\boxed{R = 0.004T + 0.92}$



10. ¿Qué expresión te permite relacionar las magnitudes que intervienen en el fenómeno estudiado? (Temperatura-Resistencia eléctrica).

Tomando en cuenta que la resistencia eléctrica varía en 0.08

$R(t) = t(0.004) + 0.92$, $\boxed{R(t) = 0.004t + 0.92}$



10. ¿Qué expresión te permite relacionar las magnitudes que intervienen en el fenómeno estudiado? (Temperatura-Resistencia eléctrica).

$R(t) = (0.004)t + 1 - 0.08$

</td>
</tr>
<tr>
<td>12. ¿Cuál es la representación algebraica que representa de manera</td>
<td>$y = mx + b$</td>
</tr>
</table>

general situaciones de variación uniforme? 16. En el caso del fenómeno específico estudiado, ¿qué representa cada una de las literales que aparecen en la expresión algebraica del inciso anterior?	m es la pendiente, es decir el coeficiente constante y es la variable dependiente (R) x es la variable independiente (t) b es la ordenada al origen (0.92),

Comentarios: El bloque IV descrito al inicio de la actividad se implementó en una institución de educación superior de Hermosillo, Sonora, se formaron tres equipos de dos integrantes, los estudiantes son alumnos de nuevo ingreso en la institución en la carrera de físico.

Se muestra afinidad con la actividad planteada, suponemos que por ser alumnos de la carrera de física, los estudiantes se muestran participativos y desarrollan la actividad de manera adecuada.

Se logra la vinculación entre registros, aunque en un primer momento algunos estudiantes presentaban dificultad para articular ideas que les llevaran a la construcción de la expresión algebraica que modela la situación.

Los alumnos comentan que les pareció interesante la situación, pues se aborda la matemática con un contexto extra matemático.

Se observa que presentaron facilidad para el manejo del software; simularon la situación con otros valores para las magnitudes, vinculando, por ejemplo, la pendiente de la recta con la constante de proporcionalidad. Vale la pena comentar que se observa la utilización de métodos tradicionales para la solución de la actividad, haciéndose evidente que la representación algebraica es la predominante en la mayoría de los alumnos.

CONCLUSIÓN GENERAL DEL PILOTAJE.

Como resultado de analizar los procesos de construcción llevados a cabo durante la puesta en escena de la secuencia didáctica, donde presentamos un análisis tanto por fase como por bloque, presentamos ahora las siguientes reflexiones generales del pilotaje:

- ✓ Al momento de desarrollar las actividades se observó la necesidad de incluir propósitos y sugerencias para cada una de las fases pertenecientes a las situaciones problema, con la finalidad de que se correspondiera el desarrollo de las mismas con lo pretendido por el diseñador.

- ✓ Los contextos utilizados resultaron atractivos para los estudiantes, de acuerdo a sus comentarios, asimismo se pudo observar interés en la solución de las actividades.
- ✓ En general los estudiantes presentan facilidad para representar sus resultados, aunque cabe mencionar que dos de los bloques presentaron dificultad para modelar algebraicamente las situaciones.
- ✓ Se tuvo un éxito parcial en cuanto al trabajo con la conversión de los registros de representación, pues se pudo observar que algunos estudiantes relacionaron la representación numérica de la razón de cambio con la pendiente de la recta.
- ✓ En cuanto a la metodología utilizada para la puesta en escena, se tienen las siguientes observaciones:
    - ➢ Para la fase de trabajo individual resultó interesante poder observar las primeras representaciones sobre la situación, hubo alumnos que inmediatamente identificaron las variables de interés para el fenómeno en cuestión, aunque también existió el caso donde mencionaban otras posibles variables que no estaban directamente relacionados con lo que se pretendía en la situación. Además se reprodujeron ideas generales de cómo podría relacionarse la variación de las variables intervinientes.
    - ➢ Para la fase de trabajo en equipo se cumple con el objetivo de refinar las representaciones funcionales emergidas en las fases previas con las fases posteriores, toda vez que los alumnos en general daban cuenta de la

variación lineal de las variables intervinientes, comparándola con sus primeras representaciones correspondientes a la fase anterior.

- El trabajo grupal sirvió para que los alumnos discutieran sus resultados y se pudo observar una tendencia hacia la construcción de representaciones institucionales. En dos de los bloques se presenta dificultad para discutir sus resultados correctamente, en el sentido en que les costó trabajo la presentación de la representación algebraica del fenómeno.
- Para la fase de regreso al trabajo individual con el objetivo de reflexionar sobre lo construido y afinar las representaciones producidas en las fases anteriores, pudimos observar facilidad en el manejo del applet para la mayoría de los estudiantes. Así pues, consideramos que fue de utilidad u uso, en el sentido de que simularon el fenómeno para otras cantidades, además de comparar sus representaciones con las representaciones proporcionadas por el software.

CAPÍTULO IV

VERSIÓN DEFINITIVA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

La versión que presentamos a continuación es el producto de las modificaciones surgidas al incorporar las diferentes experiencias que vivimos durante los dos pilotajes que llevamos a cabo. Los detalles surgidos de esos pilotajes ya los comentamos en el Capítulo inmediato anterior.

Como podrá observarse, la presentación de la secuencia está estructurada a dos columnas; en la columna de la derecha se muestra lo que podríamos llamar un cuadernillo de actividades, formado por las “Hojas de trabajo”, dirigidas a los estudiantes. En la columna de la derecha se han agregado “Sugerencias para el profesor”; este agregado se hizo pensando en la posibilidad de que otros profesores puedan utilizar en sus clases el material diseñado. Las explicaciones contenidas en esta columna intentan clarificar las intencionalidades de cada fase, así como dar orientaciones sobre cómo es que debe actuar quien tenga a su cargo la conducción del trabajo en el aula.

Las funciones lineales como modelos de fenómenos de la ingeniería

Cuaderno de trabajo

Incluye sugerencias didácticas para el profesor

BLOQUE I: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables son directamente proporcionales, con expresión algebraica de la forma

$$y = mx,\ con\, m \neq 0,\ \ m\epsilon\mathbf{R}$$

<table>
<tr><th>HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES</th><th>SUGERENCIAS PARA EL PROFESOR</th></tr>
<tr><td>I) A continuación se te proporcionará un dispositivo, similar a los de la imagen que se muestra abajo, para que lo manipules y realices observaciones. Después de eso, responde a las preguntas que se formulan.

1. ¿Reconoces el dispositivo que has manipulado?
2. ¿En qué situaciones lo has visto? ¿Qué usos tiene?
3. ¿Qué observas cuando lo estiras y luego lo sueltas?
4. ¿Cuáles magnitudes que intervienen en el fenómeno identificas?
5. ¿Qué puedes decir acerca de cómo varían dichas magnitudes?</td><td><u>Fase 1:</u> Generación de las primeras representaciones funcionales, a partir del trabajo individual del estudiante en el contexto propuesto.

<u>Propósito:</u> Familiarizar al estudiante con el contexto de la actividad, buscando generar y conocer sus primeras representaciones.

<u>Estrategia didáctica</u>: Dado que esta fase se realiza en el laboratorio de física, los estudiantes deben ubicarse en mesas de trabajo, organizados por equipos. En esta primera parte del trabajo, el profesor debe entregar un resorte por mesa, y solicitar a los estudiantes que lo examinen y manipulen. Después de esto, les pedirá respondan individualmente algunas interrogantes.</td></tr>
<tr><td>II) Ahora nos integraremos en equipos de 3 miembros. Pregunta a tu profesor con quiénes deberás formar tu equipo.</td><td><u>Fase 2:</u> Refinamiento de las representaciones funcionales generadas en la fase anterior, mediante su confrontación entre los miembros de los equipos. Validación de dichas</td></tr>
</table>

6. Una vez organizado el equipo, confronten las respuestas que dieron a las preguntas 3,4 y 5. Utilicen el espacio de abajo para escribir dichas respuestas.

Con el material que ahora les proporcionará el profesor, monten un dispositivo de acuerdo a sus instrucciones. Realicen el proceso de medición siguiente:
Vayan colocando las pesas en el extremo del resorte y procedan a medir con una regla el alargamiento que va sufriendo. Coloquen esta información en la tabla que se proporciona abajo, de la manera siguiente:

- En las primeras dos columnas coloquen los resultados de la medición.
- En las columnas tercera y cuarta, registren cómo se van modificando las magnitudes observadas en el fenómeno en estudio; escriban su registro primero en forma desarrollada y enseguida el resultado de la diferencia de mediciones que calcularon.
- En la quinta columna registren la relación de las magnitudes en forma de cociente (también llamada razón). Escriban su registro primero en forma desarrollada, es decir, como cociente o razón de las diferencias de los valores de las magnitudes involucradas, y luego el resultado de dicho cociente.

Tabla 1. Registro de datos y cambios

Peso aplica-do, medido en Nw	Alarga-miento producido, medido en cm.	Cambio en el peso aplicado	Cambio en el alarga-miento	Cambio del alarga-miento con respecto al cambio en el peso aplicado

7. Describan los cambios observados en el alargamiento del resorte y el peso.
8. ¿Cómo se modifica el alargamiento del resorte cuando se modifica el peso?

ideas mediante un proceso de medición.

Propósitos: Generar, a partir del contexto presentado en la fase anterior:

a) Una discusión en la que los estudiantes tengan la oportunidad de confrontar sus respuestas personales con sus compañeros de equipo.
b) Un proceso de medición que provea de un conjunto de datos que validen las conjeturas expresadas en la fase anterior, poniendo especial atención en las variaciones y covariaciones de los valores de las magnitudes involucradas.

Estrategia didáctica: El profesor indicará a los alumnos que se agrupen en equipos de tres personas. Una vez que se encuentren organizados, les indicará que confronten las respuestas que dieron en la primera etapa a las preguntas 3, 4 y 5, tratando de negociar "la respuesta del equipo".
Concluida esta parte, les solicitará monten el dispositivo siguiente: colocarán el resorte en el soporte que tendrán a su disposición. Posteriormente, los alumnos deben aplicar las fuerzas, (pesas de diferente masa) y medir con la regla las elongaciones producidas. En cada caso, se registrarán los datos obtenidos.
El profesor monitoreará el trabajo de los equipos, prestando especial atención a las respuestas dadas a aquellas preguntas que pretenden que los alumnos reflexionen sobre la variación de las magnitudes involucradas en el fenómeno que están estudiando.

9. De acuerdo a lo realizado en la tabla anterior, ¿cómo variaron los valores de la tercera columna? 10) ¿Qué pasa con los valores que obtuvieron en la quinta columna de la Tabla 1? ¿A qué creen que se debe ese comportamiento?	
III) Trabajaremos ahora en un debate grupal, bajo las indicaciones del profesor. 11. ¿Son similares los resultados de las mediciones hechas previamente y las respuestas que dieron en su equipo con las de los otros equipos? ¿En qué coinciden las diferencias, si es que éstas existen? 12. Durante el desarrollo de la actividad identificamos magnitudes, las cuales observamos que cambiaban una respecto de la otra. ¿Qué nombre genérico pondríamos a las magnitudes que varían, independientemente del fenómeno que estemos estudiando? ¿Y a las que no varían? 13) Las variables son magnitudes que cambian una respecto de la otra, en el caso del fenómeno del resorte, con una razón de cambio constante. Sólo que una de las variables se considera la magnitud de interés, y se le llama la variable dependiente, y la otra la magnitud de referencia, se denomina variable independiente. En el caso del resorte, ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente? 14. Para el caso particular del resorte, propongamos una manera general para representar a esas variables, los cambios que se dan entre ellas y el cociente (o razón) de cambio.	**<u>Fase 3:</u>** Nuevo refinamiento de las representaciones funcionales mediante un debate grupal. Se promoverá una institucionalización local. **<u>Propósito:</u>** Generar un debate en el que se: a) Analicen los resultados y conjeturas construidos en los equipos. b) Introduzcan las nociones de variables dependiente e independiente. c) Resalten de nueva cuenta la naturaleza constante de la razón de cambio entre la deformación del resorte y la fuerza aplicada. **Estrategia didáctica:** El profesor guiará la discusión grupal, retomando los resultados de los equipos, para conducir hacia la necesidad de definir la noción de variable y de la razón de cambio. Deberá poner especial atención en hacer notar que la razón de cambio del fenómeno del resorte es constante.
IV) El profesor te guiará para que abras y manipules el archivo Resorte.ggb, el cual te permitirá analizar el fenómeno en cuestión de manera dinámica. 15. Compara los resultados que construiste junto con tus compañeros en los apartados anteriores, sobre el tipo de variación que se observa al manipular el archivo en GeoGebra. Analiza lo que sucede en las ventanas gráfica, algebraica y numérica del archivo. Utiliza el espacio de abajo para responder a las siguientes preguntas: 16. ¿Qué expresión algebraica te permite relacionar las variables intervinientes (fuerza y elongación)? 17. Calcula el valor de la elongación del resorte en caso de que hubiese ocurrido un	**<u>Fase 4:</u>** Regreso sobre la situación. El estudiante regresa al trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión **<u>Propósitos:</u>** Relacionar los registros de representación verbal, gráfico, algebraico y tabular para el fenómeno del resorte. Generar la expresión algebraica que representa el modelo en cuestión. **<u>Estrategia didáctica:</u>** El profesor conducirá ahora al regreso al trabajo de manera individual, verificando en todo momento que el estudiante trabaje con pertinencia,

incremento más, suponiendo que se conserva el límite de elasticidad del resorte, es decir que el resorte volverá a su posición original. 18. ¿De qué manera compruebas que es correcta la relación que obtuviste para relacionar las variables intervinientes?	pero sin proporcionarle puntos de vista clave para la solución del problema.

V) En esta sección trabajaremos de nueva cuenta de manera grupal. El profesor dará las indicaciones pertinentes. A partir de las intervenciones del profesor, contesta: 19. Con base en la expresión algebraica construida, comenta sobre el parámetro que multiplica a la variable que elegiste como independiente. ¿Varía de un resorte a otro? ¿Cómo se comporta para cada pareja de valores al usar un mismo resorte? 20. Abre el applet modelolinealsinb.ggb siguiendo las siguientes instrucciones: ✓ En la ventana gráfica 1 mueve los deslizadores de la manera siguiente: para el deslizador m utiliza valores positivos. ✓ Compara los registros gráfico, algebraico y tabular del applet, con los que construiste tanto de manera individual como junto con tus compañeros. Anota tus comentarios. 21. ¿Qué expresión algebraica modelaría de manera general fenómenos similares a los estudiados en esta actividad?	**Fase 5**: Institucionalización global. El profesor conduce hacia las representaciones institucionales. **Propósitos:** Presentar al estudiante una generalización del fenómeno en estudio ($y = mx,\ con\, m \neq 0,\ m\, \epsilon \mathbf{R}$). Presentar la expresión algebraica del modelo lineal y su representación gráfica y tabular. **Estrategia didáctica:** El conductor integrará las nociones importantes surgidas durante el desarrollo de la actividad: la variación constante de las variables involucradas, las representaciones tabular, gráfica y algebraica del modelo. Para ello se auxiliará de los archivos resorge.ggb y modelolineal.ggb que han sido utilizados por los estudiantes en la etapa previa. Es importante no descuidar la articulación de esos registros y tener cuidado en las respuestas que emitan los estudiantes, pues en este momento nos encontramos en la etapa de institucionalización del conocimiento matemático que nos interesa.

Etapa 2. Consta de dos problemas que se asignarán como tarea para realizar en casa.

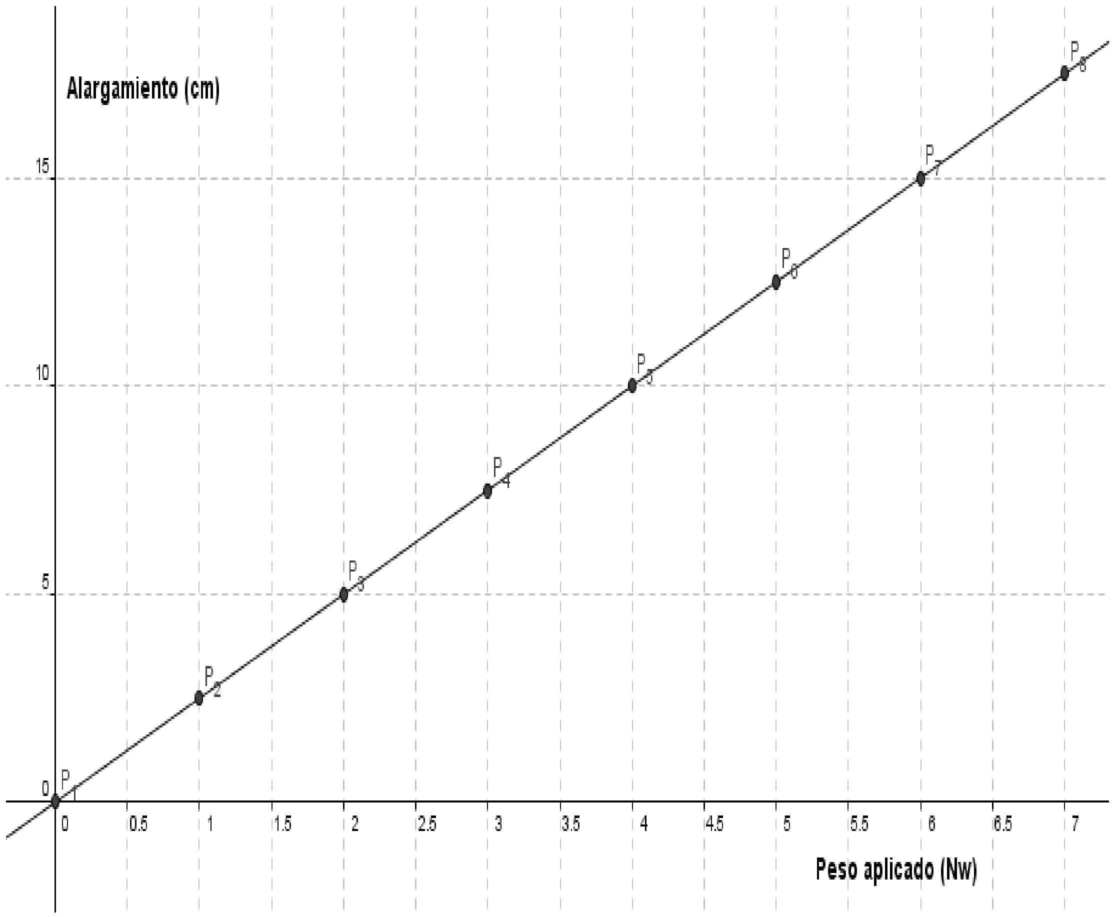
Nombre del estudiante:____

Problema 1. Se realizó un experimento de laboratorio consistente en comprimir un resorte aplicando gradualmente un peso para determinar el cambio en su longitud conforme se aumentaba el peso. Como resultado del experimento de laboratorio se obtuvieron los datos que se muestran:

Peso aplicado, medido en Nw	Longitud del resorte medida en cm
0	0
0.5	-0.8
1.0	-1.6
1.5	-2.4
2.0	-3.2
2.5	-4.0
3.0	-4.8
3.5	-5.6

1. ¿Qué interpretación das al hecho de que los números que aparecen en la segunda columna sean negativos?
2. ¿Qué variación observas en los valores mostrados en la tabla?
3. Construye la expresión algebraica que muestre la relación existente entre las magnitudes involucradas.
4. A continuación utiliza el apple resorte.ggb; llena las dos primeras columnas con los datos de la tabla anterior. ¿Cuál es la constante del resorte? ¿Qué relación guarda con la expresión algebraica que obtuviste? ¿Y con la gráfica correspondiente?

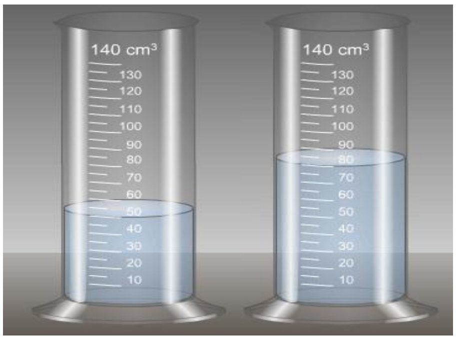
Problema 2. En un laboratorio de mecánica de materiales se realizó un experimento con un resorte. Éste se sometió a tensión, aplicándosele diferentes pesos y midiendo a su vez su deformación. A partir de dichas mediciones se obtuvo la siguiente gráfica:



1. ¿Qué puedes decir acerca de la variación de las variables que intervienen en este fenómeno?
2. A partir de la gráfica mostrada anteriormente, encuentra la representación algebraica del modelo matemático que relaciona las variables involucradas.

Etapa 3. Ejercicio

Nombre del alumno: ____

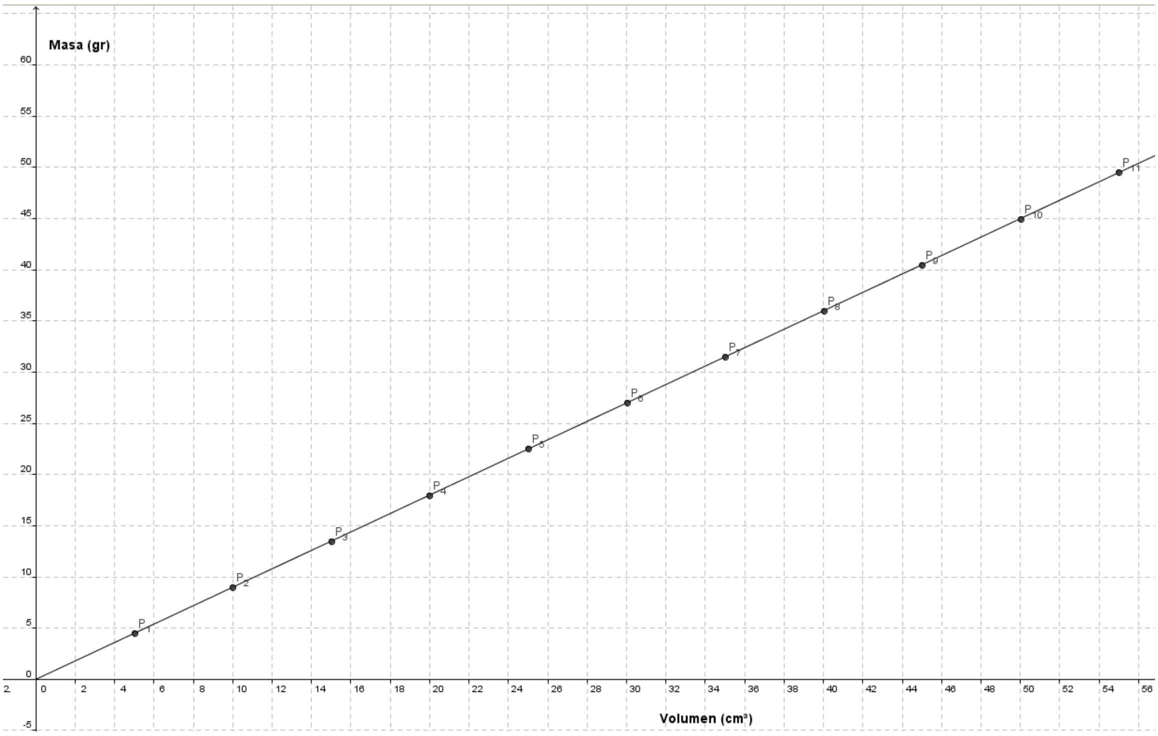


Parte 1. Durante un experimento un estudiante midió la masa de 10 cm^3 de alcohol. Luego midió la masa de 20 cm^3 de alcohol. Siguió con este proceso obteniendo los datos contenidos en la tabla siguiente:

Volumen $\boldsymbol{V}$, en $\boldsymbol{cm^3}$	Masa $\boldsymbol{m}$, en gramos

4. Abre el applet Densidad.ggb y utiliza los valores que se te proporcionaron para llenar las primeras dos columnas de la ventana numérica. A partir de lo que observes, escribe todo lo que puedas sobre este experimento y la expresión algebraica

Parte 2. En un experimento se midió la masa de alcohol para un volumen determinado, representando los valores obtenidos en la gráfica que sigue:



1. ¿Qué puedes decir acerca de las variables intervinientes y la relación que existe entre ellas?

2. ¿Existe una constante equivalente a la del resorte en este fenómeno? En caso de que exista, ¿qué información proporciona?

3. ¿Cuál es la masa que correspondería a un volumen de 40 cm^3

BLOQUE II: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal, con expresión algebraica de la forma $y = mx + b,\ con\, m < 0\ y\ b > 0\ ,\ m, b\ \epsilon \mathbf{R}$

HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES	SUGERENCIAS PARA EL PROFESOR
 I) Desde hace algunos años, los aviones están equipados con pantallas que van mostrando, entre otras cosas, el desplazamiento del avión de acuerdo a la ruta de vuelo que tiene asignada. Además, cada determinado tiempo, en dichas pantallas se va mostrando la información de la altura a la que se encuentra el aparato, así como la temperatura exterior que corresponde a dicha altura. Así, podemos darnos cuenta de que, conforme nos elevamos de la faz de la tierra, la temperatura presenta una disminución de su valor respecto al que tiene cuando estamos en tierra. En meteorología se estudia la disminución de la temperatura del aire a medida que éste se eleva. Esto resulta importante cuando se aplica a la aviación.	**Fase 1:** Se producen las representaciones funcionales para comprender la situación problema cuando el estudiante trabaja de manera individual. **Propósito:** Familiarizar al estudiante con el contexto del fenómeno en cuestión, procurando emerjan sus primeras representaciones. **Estrategia didáctica:** El profesor conducirá al estudiante para que se familiarice con el contexto expuesto, y buscará que los alumnos proporcionen ejemplos de situaciones similares, identificando variables intervinientes y su relación.

1. Escribe otros situaciones que conozcas donde se presente una disminución de la temperatura al aumentar la altura. 2. ¿Qué variables se presentan en la situación expuesta al inicio de esta actividad? 3. ¿Qué relación existe entre esas variables?	
II) El profesor dará instrucciones para que se integren en equipos de tres personas para abordar la siguiente parte de la actividad. Un científico midió las temperaturas en grados centígrados correspondientes a diversas alturas, medidas éstas en miles de metros. Los datos que obtuvo los organizó en una tabla, a la que se han agregado algunas columnas. Para llenar la tabla se pide que: 4. En las columnas tercera y cuarta registren cómo se van modificando las variables observadas en el fenómeno en estudio. 5. En la quinta columna registren la relación de los cambios de las variables, escribiendo este registro en forma de cociente o razón.	**Fase 2:** Se forman equipos de tres integrantes. Ocurre un proceso de validación y discusión, es decir se busca que se refinen las representaciones funcionales. **Propósito:** Establecer, a partir del contexto estudiado en la fase anterior: ➢ Un proceso de discusión, mediante una comparación de las respuestas individuales con las respuestas de equipo. ➢ El análisis del fenómeno del descenso de temperatura a partir de los datos arrojados en tablas numéricas, mediante el estudio de las variaciones y covariaciones de las variables que intervienen. **Estrategia didáctica:** El profesor solicitará a los estudiantes que se organicen en equipos, orientándolos para que confronten sus respuestas individuales, las analicen y lleguen a un acuerdo general de equipo.

Altura *h*, miles de metros	**Temperatura *T*, °C**	**Cambio en la altura**	**Cambio en la tempe-ratura**	**Cambio en la temperatura/cambio en la altura**
0	21.9			
1	12.4			
2	2.9			
3	-6.6			
4	-16.1			
5	-25.6			
6	-35.1			
7	-44.6			
8	-54.1			
9	-63.6			
10	-73.1			

6. Describan los cambios observados en la altura y la temperatura del aire.

7. ¿Cuántos grados cambia la temperatura por cada mil metros de cambio en la altura?

8. De acuerdo a los cálculos que realizaron en la tabla anterior, describan qué obtuvieron en la quinta columna.

III) Ahora trabajaremos en grupo, por lo que deberás atender las

Fase 3: Se presenta un refinamiento de las representaciones

instrucciones del profesor. 9. ¿Cuáles similitudes y cuáles diferencias encuentras en el comportamiento de los datos de los fenómenos del Bloque I y los que se presentan en esta tabla? 10. Si graficamos los datos de la tabla, ¿existirá alguna diferencia con respecto al tipo de gráficas que se obtuvieron en el Bloque I? Si tu respuesta es afirmativa, ¿en qué consiste y a qué crees que se deba? Haz un bosquejo de la gráfica. 11. ¿Qué cambios esperas en la expresión algebraica correspondiente? Propón la expresión algebraica que creas se corresponde.	funcionales, esto con el fin de transitar de una manera gradual hacia las representaciones institucionales. Para lograrlo se promueve un debate grupal. **Propósito:** Que los alumnos: ✓ Identifiquen y enfaticen el tipo de covariación de las variables intervinientes, diferenciándola de la covariación presente en los fenómenos estudiados en el Bloque I. ✓ Establezcan conjeturas sobre las representaciones gráficas y algebraicas asociadas a la representación numérica que sirvió como punto de partida. **Estrategia didáctica:** El profesor conducirá un debate grupal, donde se contrastarán las respuestas de los diferentes equipos. Es conveniente que se haga notar la diferencia entre el comportamiento de los datos de los problemas del Bloque I y los de esta actividad. Por ejemplo, es importante hacer notar lo que sucede cuando la variable independiente vale cero. Es muy importante promover la formulación de conjeturas sobre las representaciones gráfica y algebraica asociadas, para luego compararlas en la siguiente etapa con lo que el software de apoyo proporcione.

IV) El profesor te guiará para que utilices el applet Temperatura-altura.ggb A partir de la manipulación que realices de manera individual, 12. Contrasta las conjeturas que se elaboraron en el grupo con lo que el applet muestra. ¿Qué puedes decir al respecto? ¿Coinciden o no?	**Fase 4:** Regreso sobre la situación. El estudiante regresa al trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión. **Propósito:** Que el alumno reflexione sobre lo construido en las fases anteriores, buscando establecer la relación entre los registros de representación tabular, gráfico y algebraico. **Estrategia didáctica:** El conductor pedirá a los alumnos que trabajen de manera individual. Para alcanzar el propósito de esta fase, el conductor dará los impulsos necesarios a los estudiantes que así lo requieran. El recurso que puede utilizar son preguntas apropiadas, que ayuden a contrastar las conjeturas del grupo con lo que el alumno puede desprender de su manipulación del applet Temperatura-altura.ggb.
V) Abre el applet modelolinealgeneral.ggb y manipúlalo a partir de las siguientes instrucciones: 13. En la ventana gráfica 1 mueve los deslizadores de la manera siguiente: para el deslizador m utiliza valores positivos; para el deslizador b utiliza valores positivos. 14. Compara los registros gráfico, algebraico y tabular del applet con los que construiste tanto de manera individual como junto con tus compañeros. Anota tus comentarios.	**Fase 5:** Institucionalización global. Se arriba, bajo la conducción del profesor a las representaciones institucionales. **Propósito:** Presentar al estudiante el modelo matemático general del fenómeno en estudio, conforme a la pertinencia institucional. Articular la representación algebraica $y = mx + b,$ $con\ m < 0\ y\ b > 0\ ,\ m, b\ \epsilon\mathbf{R}$ con las representaciones gráfica y tabular. **Estrategia didáctica:** En esta fase regresamos al trabajo grupal, donde el profesor toma la voz para realizar una síntesis de los objetos matemáticos que han surgido a lo largo de la actividad, los cuales fundamentalmente son otra

15. ¿Qué expresión algebraica representa de manera general fenómenos similares a los estudiados en esta actividad? ¿Cómo es la gráfica asociada? ¿Qué características se observarán en los datos numéricos?	vez: variables, el tipo de variación y las representaciones algebraicas, tabulares y gráficas construidas. Para ello se auxiliará de la manipulación de los applets Temperatura-altura.ggb y modelolinealgeneral.ggb. Es importante, al igual que en el resto de la actividad continuar motivando la participación de los alumnos, aunque en este momento el maestro es quien tiene el papel protagónico, dado que es quien ostenta el conocimiento institucional.

Etapa 2. Consta de un problema que se asignará como tarea para realizar en casa.

Nombre del alumno:____

Problema 1. Conforme un avión va alcanzando mayor altura, la razón de ascenso (velocidad a la que una aeronave incrementa su altitud) va cambiando.

La razón máxima de ascenso de un avión, representado con la literal R, y medido en cientos de pies por minuto), varía con la altura h, medida en miles de pies, a la que éste se eleva. En la siguiente tabla, mostramos algunos datos.

Altura *h*, en miles de pies	**Razón máxima de ascenso *R*, en cientos de pies por minuto**
0	20
2	18.71
4	17.41
6	16.1
8	14.79
10	13.5
12	12.2
14	10.89
16	9.6
18	8.29
20	6.99

1. ¿Qué incrementos en la altura se utilizaron en la tabla anterior como referencia para medir la razón de ascenso correspondiente?

2. Si los datos se hubieran tomado utilizando incrementos en la altura de 3 mil pies, construye la tabla de valores que se obtendría

Altura *h*, en miles de pies	**Razón máxima de ascenso *R*, en cientos de pies por minuto**
0	
3	
6	
9	
12	
15	
18	

3. Compara las razones de cambio, (los cambios de la razón de ascenso con respecto a los cambios en la altura). Anota tus observaciones.

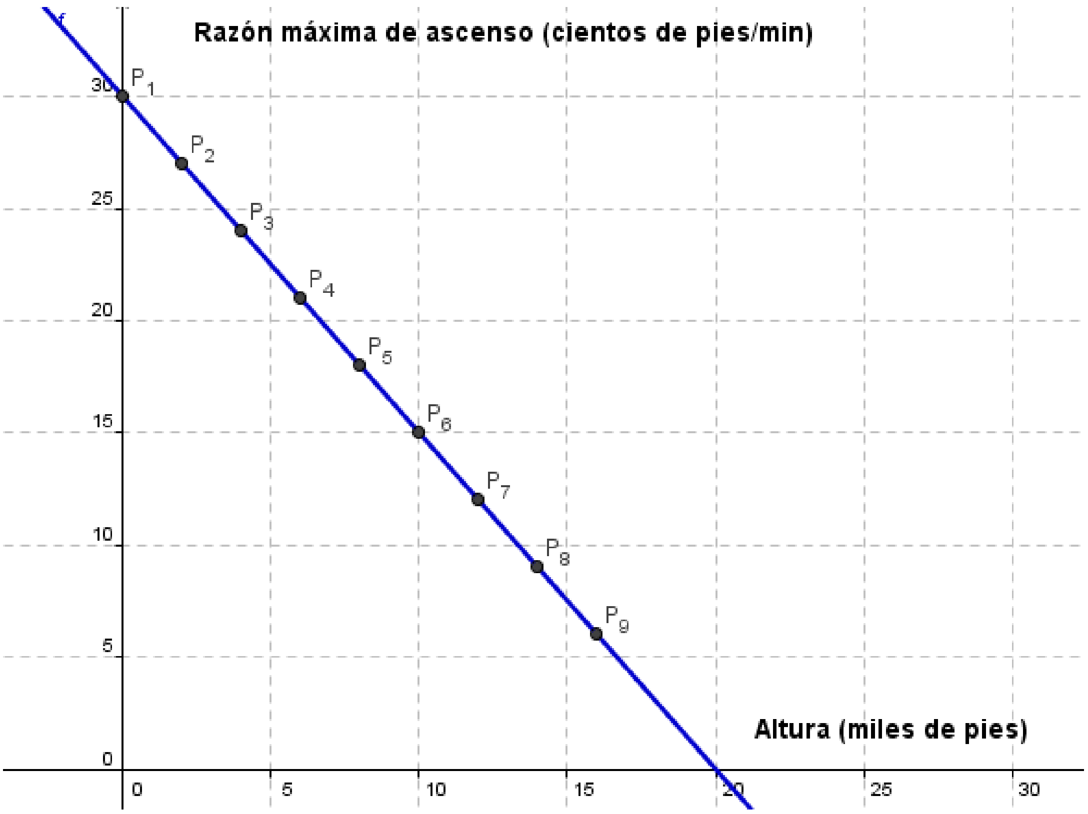
4. Abre el applet Razón de ascenso.ggb que te ha proporcionado tu profesor y haz lo que se indica:

a) Introduce valores diferentes a los de las columnas 1y 2 de la tabla anterior.
b) Construye la expresión algebraica que modela el fenómeno en cuestión.

Etapa 3. Ejercicio

Nombre del alumno:____

Una empresa de aeronáutica, dedicada a la construcción de aviones, ha realizado un experimento para determinar la razón de ascenso de una clase de avión conforme éste se eleva. Como resultado ha obtenido el gráfico siguiente:



1. ¿Cuánto se modifica la razón máxima de ascenso cuando se incrementa la altura en 2 miles de pies?
2. Para una altura de 0 miles de pies ¿cuánto vale la razón de ascenso?
3. ¿Y para 15 mil pies?

<u>BLOQUE III:</u> Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal y cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$; $m > 0\ y\ b > 0$

<table>
<tr><th>HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES</th><th>SUGERENCIAS PARA EL PROFESOR</th></tr>
<tr><td>

I) La dilatación térmica en materiales es estudiada a profundidad por la ingeniería mecánica y diversas áreas relacionadas con el diseño de elementos mecánicos. Este estudio es importante, pues una condición a considerar en el diseño es la contracción y estiramiento de los materiales sujetos a diversas temperaturas, de acuerdo a la que corresponda al lugar donde será utilizado un elemento. Por ejemplo, en el pavimento se construyen unos elementos llamados juntas de contracción, para que éste no se vea afectado por la variación de sus dimensiones por efectos térmicos.

1. ¿Has escuchado hablar de esta situación? Cita algunos otros tipos de estructuras donde se observe este fenómeno.

2. ¿Qué variables puedes identificar en la situación descrita en el inciso anterior?

3. ¿Qué tipo de variación existe?

</td><td>

Fase 1: Se producen las representaciones funcionales para comprender la situación problema cuando el estudiante trabaja de manera individual en el contexto propuesto.

Propósitos:

- ✓ Familiarizar al estudiante con el contexto del fenómeno en cuestión.
- ✓ Tomando como base los conocimientos construidos en su trabajo previo, promover que el estudiante sea capaz de realizar otro tipo de tratamiento numérico con los datos que le son presentados.
- ✓ Promover en el estudiante la evolución de las representaciones funcionales hacia las representaciones institucionales.

Estrategia didáctica: El profesor puede pedir a alguno de los alumnos que de lectura al párrafo que presenta el fenómeno que se estudiará. Luego solicitará comentarios sobre el particular, tratando de extender el contexto presentado.

Aprovechando la experiencia de los bloques anteriores, se espera que la identificación de las variables de interés se produzca sin dificultades.

Cabe resaltar que la estructura de esta situación problema es diferente de las de los dos primeros bloques, pues esta primera etapa del bloque integra planteamientos más numerosos y retadores, con la expectativa de que las representaciones

</td></tr>
</table>

Al medirse la longitud de una barra de estaño, considerando intervalos de temperatura de 20℃, se obtuvieron los datos consignados en la siguiente tabla.

Como se puede observar, en la tabla se muestra la variación de la temperatura T, (en grados centígrados), el valor inicial de la longitud l, (en milímetros), y el valor de la razón de cambio.

4. Completa con los datos faltantes.

Temperatura T, ℃	**Longitud l, mm**	**Cambio en la temperatura**	**Cambio en la longitud**	**Cambio en la longitud/cambio en la temperatura**
20	2597			
40				0.045
60				0.045
80				0.045
100				0.045
120				0.045
140				0.045
160				0.045
180				0.045
200				0.045

5. ¿Cómo calculaste los datos faltantes?

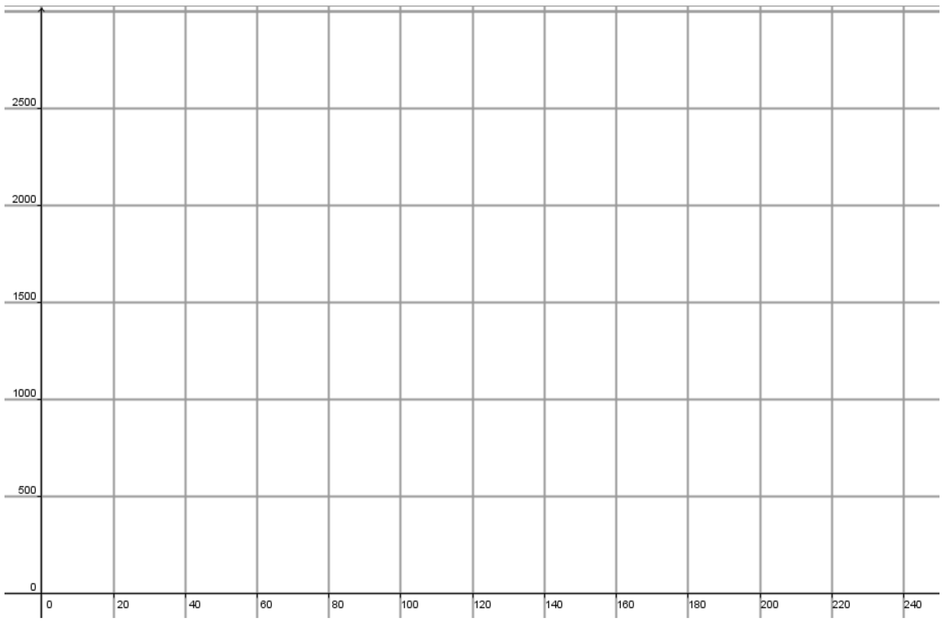
6. Con base en los datos de que dispones, propón la expresión algebraica que modela la situación planteada y construye la gráfica correspondiente en el plano siguiente:

funcionales de los estudiantes hayan evolucionado hacia las institucionales y puedan emplearse para abordar los cuestionamientos. Lo que el alumno realice en esta etapa permitirá que el profesor se dé cuenta del grado de evolución del conocimiento que ha sido construido por el alumno.

Puede suceder que, por ejemplo, el estudiante ya tenga identificado que el valor que aparece en la quinta columna es el valor del parámetro m y que además ya cuenta con las coordenadas de un punto, lo que le permitiría transitar de la representación tabular a la algebraica. Otra posibilidad es que haga los tratamientos apropiados entre los datos proporcionados para encontrar el valor del cambio en la longitud y poder llenar la tabla, quedando en condiciones de recorrer nuevamente un camino ya recorrido.

Cualquiera de esas posibilidades será una manifestación de que sus representaciones funcionales han avanzado.

Recordar que en esta etapa las respuestas solicitadas son individuales y que en ese caso, la labor del maestro consistirá en monitorear la actividad que los estudiantes van realizando, poniendo cuidado en proporcionar los impulsos que permitan destrabar los conflictos que se presenten.


2500
2000
1500
1000
500
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240

II. En esta fase nos integraremos en equipos, de acuerdo con las instrucciones del profesor. Cada equipo tendrá tres miembros.

7. Comparen las respuestas que dieron a las preguntas anteriores, sus tablas, gráficas y expresiones algebraicas. Discutan y argumenten sus diferencias y a continuación escriban las respuestas que tengan consenso en su equipo.

a) Tabla

Dilatación Térmica

Tempe-ratura T, ℃	**Longitud** l, mm	**Cambio en la temperatura**	**Cambio en la longitud**	**Cambio en la longitud/cam-bio en la temperatura**
20	2597			
40				0.045
60				0.045
80				0.045
100				0.045
120				0.045
140				0.045
160				0.045
180				0.045
200				0.045

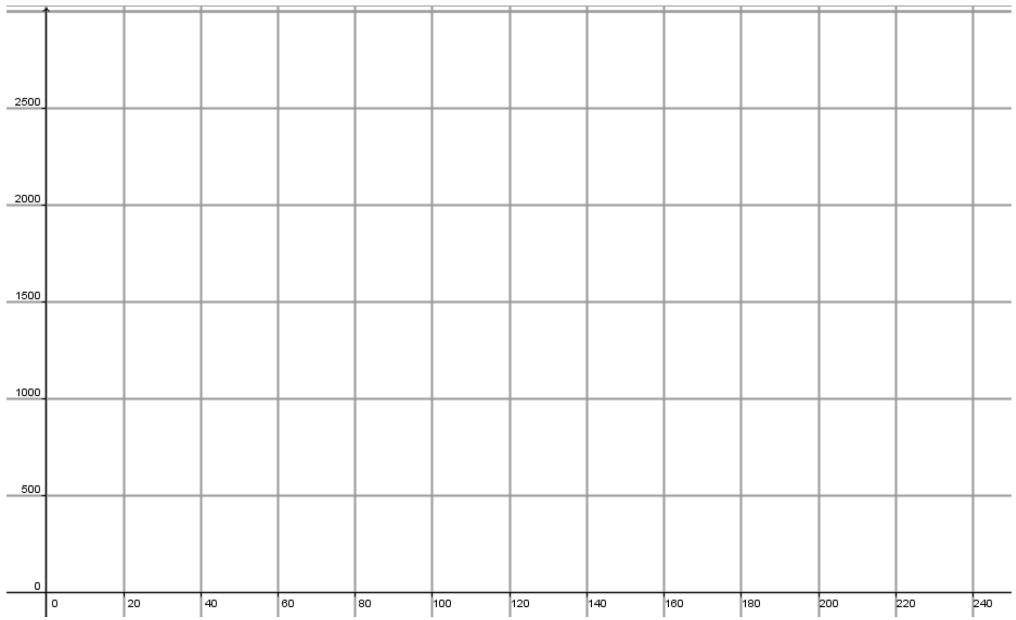
Fase 2: Se forman equipos de tres integrantes. Ocurre un proceso de validación y discusión.

Propósito: Construir significados negociados sobre los objetos matemáticos surgidos del estudio de la problemática planteada, mediante un proceso de discusión y argumentación en los equipos.

Estrategia didáctica: El conductor formará equipos de tres personas dando las instrucciones necesarias a sus estudiantes, posteriormente los orientará para que discutan las respuestas construidas en la fase anterior y lleguen a un acuerdo general de equipo.
El profesor inspeccionará los resultados de los equipos, de tal manera que se enfatice la observación del refinamiento de las representaciones funcionales y la validación de las ideas generadas.

b) Expresión algebraica

c) Gráfica



III) Ahora discutiremos al nivel del grupo las respuestas que acabas de obtener. Nombren un representante de su equipo para que proporcione al profesor las respuestas que en él se generaron. 8. ¿Coinciden las respuestas de tu equipo con las que se obtuvieron en el grupo? ¿Cuáles sí, cuáles no?	**Fase 3:** Se continúa el proceso de la construcción de ideas que generen un refinamiento de las representaciones emitidas por los alumnos en las fases anteriores, ahora mediante un debate grupal. **Propósito:** Construir significados institucionales sobre la problemática planteada mediante un debate grupal. **Estrategia didáctica:** El profesor conducirá el debate grupal, empezando por solicitar a cada uno de los equipos las respuestas que dieron a cada uno de los planteamientos, en el orden en el que están presentados. Se debe poner énfasis en que las respuestas proporcionadas sean argumentadas y contra argumentadas en caso de que no coincidan.
IV) El profesor te guiará para que utilices el applet Temperatura-longitud.ggb. 9. Compara los resultados que construiste, en equipo y con los demás compañeros de clase en las fases pasadas, sobre el tipo de variación observada al manipular el applet en GeoGebra. ¿Coinciden las respuestas con lo que	**Fase 4:** Regreso sobre la situación. (El estudiante regresa al trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión). **Propósito:** Verificar los resultados del debate grupal por medio del applet Temperatura-longitud.ggb.

observas en las ventanas numéricas, algebraica y gráfica del applet?	**Estrategia didáctica:** El profesor orientará al estudiante para que trabaje de forma individual, buscando validar el patrón construido apoyándose en un applet construido en GeoGebra donde podrá vincular de manera dinámica las representaciones.
V) Abre el applet modelolinealgeneral.ggb y manipúlalo atendiendo las siguientes instrucciones: 10. En la ventana gráfica 1 mueve los deslizadores de la manera siguiente: para el deslizador m utiliza valores positivos y para el deslizador b utiliza valores positivos. 11. Compara los registros gráfico, algebraico y tabular del applet con los que construiste tanto de manera individual como junto con tus compañeros, anota tus comentarios. 12. ¿Qué expresión algebraica modela de manera general fenómenos similares a los estudiados en esta actividad? ¿Cómo es la gráfica asociada? ¿Qué características se observarán en los datos numéricos?	**Fase 5:** Institucionalización global, se muestran por parte del profesor las representaciones institucionales. **Propósito:** El profesor conducirá al estudiante hacia una generalización del modelo matemático de interés, conforme a la pertinencia institucional. Se articularán las representaciones algebraica, gráfica y tabular de la función lineal que modela la situación estudiada. **Estrategia didáctica:** El profesor muestra y manipula el archivo de GeoGebra, mostrando qué pasa si se hacen variar los registros de representación y cómo se articulan, conduciendo a que el estudiante construya su generalización con base en las representaciones institucionales.

Etapa 2. Consta de un problema que se asignará como tarea para realizar en casa.

Nombre del alumno:____

Si cogemos un vaso de agua, le añadimos una cucharada de sal y agitamos, observamos que la sal desaparece. Hemos preparado una disolución. Naturalmente, la sal ha quedado dispersa en el seno de la disolución, que adquiere un conocido sabor salado. El agua es el disolvente y la sal es el soluto. Si seguimos echando sal al vaso de agua, llegará un momento en que, por mucho que agitemos, la sal se queda en el fondo, ya no se disuelve más.

Hemos formado una disolución saturada. Esto sucede porque cada sustancia tiene una capacidad máxima para disolverse en agua, tiene una solubilidad determinada.

Completa la siguiente tabla, en la que se muestran algunos datos sobre la solubilidad del bromuro de potasio en agua a distintas temperaturas, considerándose que T es la temperatura del agua en grados centígrados y C es la concentración, es decir, el número de soluto que hay en 100 gramos de agua. Además se sabe que la razón de cambio de la concentración con respecto de la temperatura es de 0.59

Nota: solubilidad se refiere a la cantidad máxima de soluto que el disolvente admite a una terminada temperatura.

Temperatura *T*, **en** ℃	**Concentración** ℃, **en** %
-10	
0	51.3
	54.25
20	
38	
	77.85
50	
	87.88
	95.55
85	
	103.22
100	

1. Utiliza el applet solubilidad.ggb y compara los resultados que encontraste de manera manual.

2. ¿Qué relación guarda el valor en cero de la temperatura de los datos proporcionados en la tabla con respecto a la gráfica?

3. Haz variar los valores tanto del valor inicial como del incremento en la temperatura. ¿Qué comportamiento observas en la tabla y gráfica correspondientes?

Etapa 3. Ejercicio

Nombre del alumno:____

Cuando un material es sometido a calor, la energía cinética de sus moléculas aumenta conforme aumenta la temperatura. Esto ocasiona que choquen a gran velocidad unas con otras, provocando en el material un cambio en sus dimensiones.

Considerando lo anterior, se sometió a incrementos de temperatura una barra de estaño para verificar el efecto en su longitud, obteniendo los siguientes resultados:

Temperatura T , ℃	**Longitud l , mm**
20	1835
40	1835.7
60	1836.4
80	1837.1
100	1837.8
120	1838.5
140	1839.2
160	1839.9
180	1840.6
200	1841.3

Utiliza el applet que te proporciona tu profesor y captura los datos de la tabla anterior. Escribe todo lo que puedas decir y encontrar del fenómeno en cuestión.

BLOQUE IV: Situaciones que plantean fenómenos cuyas variables guardan una relación lineal y cuya expresión analítica es de la forma $y = mx + b;\ m \neq 0\ y\ b > 0,\ m, b \in \mathbf{R}$.

Resistencia eléctrica y temperatura

<table>
<tr><th>HOJA DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES</th><th>SUGERENCIAS PARA EL PROFESOR</th></tr>
<tr><td>

I. Los metales son buenos conductores de electricidad y son utilizados para este fin; sin embargo el ambiente de trabajo del conductor de electricidad puede reducir la capacidad de conducción, de acuerdo con el aumento de la temperatura, es decir aumentaría la resistencia del conductor.
1.Comenta sobre qué tipos de materiales conductores de electricidad conoces o cuáles te son familiares:
2. ¿Qué variables identificas que se presentan en las situaciones estudiadas en la pregunta anterior?
3. ¿Cómo se relacionan esas variables?

Se realizó un experimento donde se estuvieron estudiando las variaciones de la resistencia del alambre de cobre conforme aumentaba la temperatura y se pudo observar que la relación entre las variables presenta un comportamiento similar a los contextos estudiados en los bloques anteriores.
</td><td>
Fase 1: Se producen las primeras representaciones funcionales para comprender la situación problema.

Propósito: Establecer ,a partir del contexto estudiado, un medio donde el estudiante:
✓ Se familiarice con el contexto de la actividad.
✓ Presente las primeras representaciones funcionales, además de formular conjeturas que lo pongan en el camino de las representaciones institucionales.

Estrategia didáctica: El profesor presentará al estudiante el contexto en estudio, haciéndole cuestionamientos que lo induzcan a analizar la relación entre las variables.
Además conducirá al estudiante para que éste conjeture sobre la representación algebraica de la situación, como un primer acercamiento a dichas representaciones.
</td></tr>
</table>

II. Para el caso de la resistencia eléctrica R, en ohm, de un alambre de cobre # 10, se obtuvo una razón de cambio de 0.004 $ohm/℃$. Además, se tiene la información de que para una temperatura de 20℃ , se presenta una resistencia de 1 ohm. A partir de la información anterior: 4. Calcula los valores de la resistencia eléctrica desde los 20 ℃ hasta los 160 ℃ , si se necesitó determinar su valor cada 20℃? 5. Haz un bosquejo de la gráfica asociada. ¿Qué información tomaste en cuenta para trazar tu gráfica? 6. Encuentra la expresión algebraica asociada al fenómeno que estás analizando. ¿Cómo procediste para encontrarla?	

II) El profesor dará instrucciones para que se agrupen en equipos de tres integrantes. 7. Discutan sus respuestas individuales a las preguntas de la Fase I) y en el espacio que sigue, escribe aquellas que tengan el consenso del equipo.	**Fase 2:** Se forman equipos de tres integrantes. Ocurre un proceso de validación y discusión. Se refinan las representaciones funcionales. **Propósito:** Establecer un proceso de discusión mediante una comparación de las respuestas individuales donde la intención en generar un consenso sobre las representaciones tabular, gráfica y algebraica del fenómeno modelado. **Estrategia didáctica:** El profesor solicitará a los estudiantes que se agrupen en equipos orientándoles para que confronten las respuestas construidas en la fase anterior y lleguen a un acuerdo en su equipo. A estas alturas del trabajo, los diferentes equipos deben haber generado prácticas aceptables para argumentar y contra argumentar sus opiniones. Puede parecer ocioso el reiterar que el maestro debe monitorear el trabajo de los equipos e incentivar la participación de sus integrantes, pero ésta es una actitud que siempre se debe tener presente y ponerla en práctica. Se espera que el tiempo dedicado a esta etapa sea breve, pues ya se habrá alcanzado alguna madurez en algunos conceptos, procedimientos, argumentos, etc.
III) A partir de este momento, el trabajo se realizará de manera grupal. Sigue las instrucciones de tu profesor. 8. Tomando como referencia lo discutido en el grupo, ¿fueron acordes las respuestas de tu equipo con las de los otros equipos? ¿En qué coincidieron y en qué se diferenciaron? 9. Escribe las respuestas que tengan el consenso del grupo.	**Fase 3:** Producción de una institucionalización parcial producto de un nuevo refinamiento de las representaciones funcionales en un trabajo grupal en forma de debate. **Propósito:** Construir un consenso grupal sobre las representaciones gráficas, tabulares, algebraicas de la función lineal utilizada para modelar, así como sobre los procesos de construcción de las mismas. **Estrategia didáctica:** Mediante un proceso de elaboración

	conjunta profesor estudiantes, se sintetizará el proceso de modelación del fenómeno en estudio. Se debe partir de las respuestas de los equipos, comparándolas y enfrentándolas, hasta llegar a la construcción de un consenso grupal.
IV) Tu profesor te orientará para que utilices el applet temperatura-resistencia eléctrica 10. Compara los resultados construidos, (tanto en equipo cómo los respondidos en el debate y los que construiste de manera individual), sobre el tipo de variación observada al manipular el applet de GeoGebra con las instrucciones de tu profesor. Analiza lo que ocurre en las ventanas gráfica, algebraica y tabular. Utiliza el siguiente espacio para anotar tus respuestas.	**Fase 4:** Regreso sobre la situación. El estudiante regresa al trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión. **Propósito:** Reflexionar sobre lo construido en las fases anteriores tomando como apoyo el trabajo con el applet temperatura-resistencia.ggb. **Estrategia didáctica:** El profesor guiará al estudiante para que trabaje de manera individual, promoviendo su reflexión sobre lo trabajado y esperando que logre articular los distintos registros de representación correspondientes a la variación estudiada. Se solicitará al estudiante validar el patrón construido, apoyándose en un applet temperatura-resistencia.ggb.

V) Sigue las instrucciones de tu profesor para la utilización del applet modelolinealgeneral.ggb. 11. Abre el applet mencionado y: ✓ En la ventana gráfica 1 mueve los deslizadores así: para el deslizador m utiliza valores reales positivos y para el deslizador b utiliza valores reales positivos. ✓ Compara los registros gráfico, algebraico y tabular de la función lineal surgida en la etapa individual con la que surgió al trabajar en equipo. Escribe tus comentarios al respecto.	**Fase 5:** Institucionalización global. (Se trabajan por parte del profesor las representaciones institucionales). **Propósito:** Construir la generalización del modelo matemático estudiado, estableciendo la relación existente entre sus diferentes representaciones institucionales. **Estrategia didáctica:** El profesor tiene una participación protagónica durante el desarrollo de esta fase, encamina al grupo para la presentación de las representaciones institucionales. Para ello utiliza los applet resistenciaelectrica.ggb y modelolinealgeneral.ggb

Etapa 2. Consta de un problema que se asignará como tarea para realizar en casa.

En los bloque I, II, III y IV, has trabajado con distintos fenómenos que has modelado mediante funciones lineales. Ahora se te pide realizar una investigación, que puede ser bibliográfica o en sitios adecuados de internet, para que encuentres otro fenómeno diferente a los estudiados que también pueda ser modelado mediante una función lineal. Además de las representaciones algebraicas, tabular y gráfica, formula cinco preguntas que puedan resultar de interés en términos de la situación concreta que plantees.

Etapa 3. Ejercicio

El problema de la veladora

Nombre del alumno:____

Al realizar un experimento asignado por el profesor como tarea, se registraron los siguientes datos relativos al proceso de disminución del tamaño de una vela aromática de olor a naranja, al consumirse por el fuego.

Disminución de la altura de una vela al arder

Tiempo (min)	Altura de la vela (cm)
5	22.8
10	22.5
15	22.2
20	21.9
25	21.6
30	21.3
35	21
40	20.7
45	20.4
50	20.1
55	19.8
60	19.5

1. Si graficas los puntos dados en la tabla, y los observas de izquierda a derecha, ¿sus ordenadas van creciendo o decreciendo? ¿Esperabas ese comportamiento? ¿Por qué?

2. ¿En qué tiempo consideras que la vela se extinguirá?
3. ¿Puedes determinar la solución de las preguntas 3 y 4 a través de la gráfica? ¿Cuáles son esos valores?
4. ¿Cuándo recién se prendió la vela ¿qué altura crees que tenía?

5. Determina que altura tiene la vela cuando han pasado 65 min.

6. Determina en que tiempo la altura de la vela será de 14 cm.

7. ¿Cuáles son los valores de m y b para el caso de la veladora?

ACTIVIDAD DE CIERRE DE LA SECUENCIA

INSTITUCIONALIZACIÓN GLOBAL

HOJA DE TRABAJO PARA EL ALUMNO	SUGERENCIAS PARA EL PROFESOR
Nombre del alumno(a): ____ Se te pide abrir el applet modelogeneral.ggb y responder las preguntas formuladas, atendiendo las instrucciones de tu profesor. I) Mueve el deslizador b de la ventana gráfica 1 (Gráfica de $X\ vs\ Y$) y colócalo en cero; posteriormente mueve el deslizador m en las posiciones que se te piden en los siguientes incisos: a) Números positivos b) Números negativos Para cada uno de los incisos anteriores responde las siguientes cuestiones: 1. ¿Cuál es la expresión algebraica resultante? ¿Qué forma general se le puede atribuir a este tipo de expresiones? 2. ¿Qué sucede en la ventana gráfica cuando haces variar los valores de m? 3. Para cualquier valor que hayas tomado para m, haz variar el valor inicial en x y el incremento en x. ¿Qué cambios observas en los valores de las columnas 3,4 y 5? ¿A qué crees que se deba ese	**<u>Descripción:</u>** Se presenta una actividad donde se favorece la visualización de las distintas representaciones correspondientes a situaciones de variación uniforme del tipo estudiado en los bloques anteriores, utilizando como apoyo el software GeoGebra. Se hacen variar los parámetros que intervienen en la representación algebraica $y = mx + b$, de tal manera que de manera dinámica se articulen los registros tabular y gráfico, además se presenta una introducción al estudio gráfico de la razón de cambio. **<u>Propósito:</u>** Realizar una institucionalización global tomando en cuenta que en los procesos de construcción llevados a cabo en los bloques anteriores, el estudiante construyó sentido y significado de los conceptos matemáticos involucrados en la variación uniforme, Promover que el estudiante: ✓ Reafirme la existencia, necesidad y utilidad de las diferentes representaciones (algebraica, geométrica, numérica) de las

comportamiento? 4. Observa la ventana gráfica 2 (Gráfica de la razón de cambio) ¿Por qué es horizontal la representación gráfica de la razón de cambio? ¿En qué condiciones crees que dejaría de serlo? II) Mueve el deslizador b de la ventana gráfica 1 (Gráfica de $X\ vs\ Y$) y colócalo en números positivos; posteriormente mueve el deslizador m en las posiciones que se te piden, de acuerdo a los siguientes incisos: a) Números positivos b) Números negativos Para cada uno de los incisos anteriores responde las siguientes cuestiones: 5. ¿Cuál es la expresión algebraica resultante? ¿Qué forma general se le puede atribuir a este tipo de expresiones? 6. ¿Qué sucede en la ventana gráfica cuando haces variar los valores de m? ¿y los de b en el intervalo pedido? 7. Para cualquier valor que hayas tomado en m, haz variar el valor inicial en x y el incremento en x. ¿Qué cambios observas en los valores de las columnas 3, 4 y 5? ¿A qué crees que se deba ese comportamiento? 8. Observa la ventana gráfica 2 (Gráfica de la razón de cambio) ¿Por qué es horizontal la representación gráfica de la razón de cambio?	funciones lineales. ✓ Realice vinculaciones entre los registros de representación mencionados, con apoyo del software GeoGebra. ✓ Enfatice la relación directamente proporcional de los cambios entre las variables intervinientes, de tal manera que se observe que la razón de cambio permanece constante para cualquier cambio en los incrementos de la variable de referencia (variable independiente) ✓ Se introduzca someramente en la representación gráfica de la razón de cambio. **Estrategia didáctica:** El profesor dará una introducción a la actividad donde se enfatice que se presentarán las distintas representaciones de los fenómenos de variación uniforme en un contexto matemático. Así mismo los guiará para que respondan los cuestionamientos presentados en el desarrollo de la actividad, utilizando el applet modelolinealgeneral.ggb y dando las siguientes instrucciones de uso: ✓ Abrir utilizando el software GeoGebra el applet modelolinealgeneral.ggb ✓ Indicar al estudiante que solamente se efectuarán cambios en los deslizadores presentes en la ventana gráfica 1 y los valores inicial e incrementos de la variable independiente en la ventana numérica.

¿En qué condiciones crees que dejaría de serlo? III) Mueve el deslizador b de la ventana gráfica 1 (Gráfica de X vs Y) y colócalo en números negativos; posteriormente mueve el deslizador m en las posiciones que se te piden en los siguientes incisos: a) Números positivos b) Números negativos Para cada uno de los incisos anteriores responde las siguientes cuestiones: 9. ¿Cuál es la expresión algebraica resultante? ¿Qué forma general se le puede atribuir a este tipo de expresiones? 10. ¿Qué sucede en la ventana gráfica cuando haces variar los valores de m? ¿y los de b en el intervalo pedido? 11. Para cualquier valor que hayas tomado en m, varía el valor inicial de x y el incremento en x. ¿Qué cambios observas en los valores de las columnas 3, 4 y 5? ¿A qué crees que se deba ese comportamiento? 12. Observa la ventana gráfica 2 (Gráfica de la razón de cambio) ¿Por qué es horizontal la representación gráfica de la razón de cambio? ¿En qué condiciones crees que dejaría de serlo? 13. ¿Qué aprendiste en esta secuencia sobre las funciones lineales?	✓ Explicar que la ventana gráfica 1 indica la gráfica de las variables dependiente e independiente y la ventana gráfica 2 indica la gráfica la razón de cambio.

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES

En este capítulo presentaremos las conclusiones generales de este trabajo. Como se dijo en la Presentación, interesaba el diseño y puesta en práctica de una secuencia de actividades didácticas enfocada hacia la modelización de fenómenos mediante el uso de las funciones lineales.

De la experiencia que se generó en las etapas de diseño, pilotaje y rediseño de las actividades, se puede concluir que ninguna de las tareas anteriores es elemental, y cada una de ellas tiene diferentes grados de dificultad. Por el hecho de seleccionar una metodología de diseño propuesta por investigadores en Matemática Educativa, pudiera creerse que se simplifica dicha tarea; sin embargo, concretar planteamientos teóricos ya establecidos implica aspectos como conocer, comprender e interpretar la metodología seleccionada, para estar en condiciones de proponer, experimentar y reformular las actividades didácticas. Cada una de estas facetas aportó enseñanzas de diferente naturaleza para el autor de esta tesis.

Durante la etapa de formación en la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora, los alumnos tenemos la oportunidad de estudiar algunas propuestas metodológicas para el diseño de actividades didácticas. Para aquellos alumnos que tienen experiencia docente, resulta a la vez que atractivo, retador el hecho de conocer otras alternativas para la conducción de la actividad de aprendizaje de los estudiantes. Particularmente en la metodología ACODESA, base para el diseño que se presenta en este documento, está presente una concepción diferente de la tradicional de lo que deben hacer profesor y alumnos en el salón de clases. Para los que hemos desempeñado la actividad de enseñanza esencialmente de manera expositiva, de pronto nos entusiasma la posibilidad de realizar nuestra labor de manera diferente, donde la diferencia no solamente está en la manera de accionar en el aula, sino también en la oportunidad que ahora tenemos de justificar y argumentar nuestra manera de proceder.

Es importante comentar, sin embargo, que cuando ya nos enfrentamos al diseño, planeación y ejecución de las actividades, el asunto no es fácil. Particularmente durante el pilotaje nos resultó complicado poder seguir fielmente la metodología, por la inercia ejercida por la práctica docente previa. Desde nuestro punto de vista evidenciamos falta de experiencia en el manejo de los estudiantes para poder conducirlos adecuadamente en todas las fases y etapas de la metodología, debido a que el profesor solamente puede intervenir de manera sutil y no proporcionando información directa para solucionar el problema o situación que se hubiera planteado.

Un elemento que agregamos en nuestro trabajo fue proponer que el pilotaje de al menos una de las actividades fuese realizada por otro profesor, para contar con otra fuente de información sobre el diseño. Afortunadamente logramos la colaboración de un profesor con una gran calidad como docente, que nos hizo llegar observaciones muy acertadas sobre nuestra propuesta.

El cambio de rol expuesto en ACODESA no solamente es del profesor, sino también del estudiante. En este sentido, los alumnos también tienen dificultades para asumir un papel donde su actividad se transforma de ser receptores a ser activos, proponer ideas, contrastarlas con sus compañeros, argumentarlas, etc. También detectamos algunas dificultades de los estudiantes, las cuales enunciamos a continuación:

- ❖ Dificultad para abordar un problema matemático donde se plantee una situación divergente, es decir, que no existiendo un camino directo, la tarea los obliga a la búsqueda de alternativas, esa búsqueda puede estar ligada a intentos por entender la tarea. Por ejemplo el fenómeno del resorte, donde el alumno tiene que investigar los datos que intervienen en el fenómeno, establecer la relación que guardan las variables y analizar de qué manera se comportan durante la situación expuesta.

- ❖ Dificultad para comunicar ideas, esto en la medida de que la actividad sugiere una constante comunicación de resultados primero en el equipo y después grupal.

- ❖ Dificultad para tomar decisiones en cuanto a los aspectos matemáticos que intervienen en las situaciones, por ejemplo al establecer la relación directamente proporcional de las magnitudes intervinientes.

- ❖ Poca capacidad para generalizar un patrón algebraico que induzca la producción de modelos matemáticos en algunos estudiantes, y este tipo de error se observa más acentuadamente en los bloques de El resorte y Dilatación térmica.

Otro aspecto que nos interesa comentar fue el uso del recurso tecnológico seleccionado. Como ya vimos, en el desarrollo de las actividades se apoyó a los estudiantes con el software GeoGebra; en este sentido las ventajas que se observaron fueron las siguientes:

- ❖ El manejo del software no presentó problemas, toda vez que se manejaron archivos pre construidos, sin que hubiera necesidad de dedicar algún tiempo a la capacitación en el uso del mismo. Los archivos fueron suficientemente amigables de tal forma que no se constituyeron en un problema extra.

- ❖ La naturaleza del software utilizado permitió el manejo de las ventanas tabular, algebraica y gráfica simultáneamente, así que al variar los datos en cualquiera de ellas, podían advertirse las modificaciones en las otras. A partir de esto pudieron algunos estudiantes lograron relacionar la razón de cambio (numérica), con la inclinación de la gráfica de la recta. A pesar de ello, esta habilidad para relacionar los datos de la tabla con la información gráfica no fue alcanzada por la generalidad de los participantes.

- ❖ Se pudieron realizar simulaciones de otros datos para el mismo fenómeno.

De acuerdo al objetivo plateado se tiene:

- ✓ El estudiante adquiere habilidades para modelar situaciones extra-matemáticas, es capaz de identificar variables y relaciones entre variables, en general presenta habilidad para representar sus soluciones.
- ✓ Desarrolla el objeto matemático “función lineal” haciendo uso de distintas representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Para finalizar estas reflexiones, nos interesa comentar las posibilidades de continuación de lo que en esta tesis se ha expuesto. Por un lado, si continuamos desde el campo del diseño de actividades, la experiencia obtenida puede extenderse para el tratamiento de otro tipo de funciones que también son muy utilizadas en la modelación de fenómenos físicos y de otros campos. Una continuación natural sería plantearse trabajar ahora la construcción de modelos empleando a las funciones cuadráticas y cúbicas.

Por otro lado, las hojas de trabajo de los estudiantes y los registros de observación conseguidos durante los pilotajes, pueden también observarse ya no con la lupa del diseñador, sino con la lupa de un investigador. La información generada por ambas fuentes, (hojas de trabajo y registros de observación), concebidas ahora como instrumentos de investigación, dan evidencias de las dificultades que los estudiantes presentaron en el tratamiento de la temática seleccionado. Este hecho abre una puerta para tratar de profundizar en ellas, buscando por ejemplo, cuáles son las causas de esas dificultades.

Referencias

Hitt F. y Cortés J. (2009). *Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas*. Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamete/) 10(1). 6, 9-10

Morimoto, T. (2010). Manual del curso Fundamentos de Matemáticas. Departamento de Matemáticas. Instituto Tecnológico de Sonora. México.

Peralta, J. (2003). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal.* En Memorias de la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas (pp 166-173. México.

Hitt, E., (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa. (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R., (1992), Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sanchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.

Hernández Arturo (2000): Algunos aspectos sobre las habilidades matemáticas de los estudiantes graduados de ingeniería, Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario, Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN, México

García, D. (2000): Conversión entre representación gráfica y algebraica del concepto de de recta. Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario, Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN, México

De la Rosa, A. (2000): El concepto de función en secundaria: conocer el grado de visualización de función lineal en el alumno. Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario. Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN, México

Hitt, F., & Morasse (2009) Pensamiento Numérico Algebraico avanzado: Construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función. Electronic Journal of Research in Educational Psychology. NO. 17 Vol(1), pp. 243-260

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt F. (2010). Propuesta sobre una teoría sobre el aprendizaje y la instrucción de las matemáticas basada en un interaccionismos social. Documento de trabajo. Universidad de Sonora. México.

Niss, M. (1994). Mathematics in society. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.(pp. 367-368). Kluwer Academics Publishers. Netherlands.

Hitt F. & Morasse C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en3ème secondaire dans un contexte demodélisation mathématique et de résolutionde situations problèmes. *Actes* CIEAEM-61, Montréal, Québec. Juillet-200

Páez R. (2004). Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión.Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, México

Nájera V. (2009). Construcción de significados de variación y variable en ambientes dinámicos y entornos físicos. Tesis doctoral, UAEM, México

Páez C. (2003). *Ambientes de geometría dinámica en actividades de planteamiento y justificación de conjeturas.* En Memorias Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora. (pp. 2). México.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D.Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pourl'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes

Laborde, C. (2003). *¿Por qué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?* Contribución a la Conferencia Cumbre Mundial de T^3 en Tokio. Traducción de Tapia, F. en El Uso del sistema de cómputo simbólico Voyage 200 como recurso didáctico. Universidad de Sonora, México.

Hohenwarter, M.; Fuchs, S. (2005). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference, Pecs, Hungaria.

Santos L. (2001). *Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. Avance y perspectiva vol. 20.* Recuperado el 7 de mayo de 2011 de http://www.cinvestav.mx/Portals/0/Publicaciones%20y%20Noticias/Revistas/Avance%20y%20perspectiva/julago01/5%20santos.pdf

Anexo 1

Fragmentos del manual utilizado en el curso

Fundamentos de Matemáticas

TEMA 6. GRAFICAS DE LINEAS RECTAS EN UN SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES.

6.1 Definición de Ecuación.

Se dice que una expresión como $2x - 3 = 7$ constituye una **igualdad condicional.** Es verdadera para algunos valores dados a la variable x, pero no lo es con otros. Por ejemplo, $2x - 3 = 7$ es una expresión verdadera para $x = 5$, pero resulta falsa con $x = 7$. Por otra parte, una expresión como $3(x + 2) = 3x + 6$ resulta cierta para cualesquier valor real que le asigne a la variable x, por lo que forma una **igualdad absoluta.** Una igualdad de tipo condicional constituye una **ecuación**, mientras que una igualdad absoluta, forma una **identidad.**

Resolver una ecuación significa encontrar los números reales x con los que la igualdad dada resulta verdadera; a dichos números se les llama **soluciones** o **raíces** de la ecuación.

Resolvamos la ecuación $2x - 3 = 7$, ilustrando los pasos más importantes:

$2x - 3 = 7$ sumamos 3 a cada lado de la igualdad

$2x - 3 + 3 = 7 + 3$ efectuamos la suma

$2x = 10$ multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{2}$

$2x \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2}$ efectuamos el producto

$x = 5$

Podemos verificar esta solución sustituyendo **5** en lugar de x en la ecuación original:

$$2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$$

6.2 Propiedades de las igualdades.

En la solución anterior, hemos empleado las siguientes *Propiedades de la igualdad*, que son básicas:

PROPIEDAD DE ADICION DE LA IGUALDAD :

Para todos los números reales a, b, c, si $a = b$, entonces: $a + c = b + c$

PROPIEDAD DE MULTIPLICACION DE LA IGUALDAD :

Para todos los números reales a, b, c, si $a = b$, entonces : $ac = bc$

Podríamos resumir las propiedades de las igualdades, diciendo que una igualdad no se altera mientras hagamos lo mismo en los dos miembros de la misma, es decir, si sumamos alguna cantidad en el lado izquierdo, tenemos que sumar la misma cantidad en el lado derecho o si multiplicamos o dividimos o restamos o elevamos a una potencia, etc., tenemos que hacerlo por la misma cantidad en los dos lados.

Estas propiedades de la igualdad se usan también para resolver ecuaciones más complicadas. El procedimiento es reunir todos los términos donde aparece la variable en un lado de la ecuación y todas las constantes en el

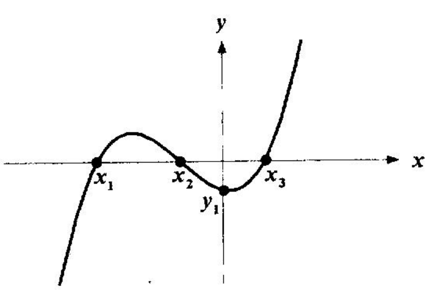
Solución Tarea 6.1

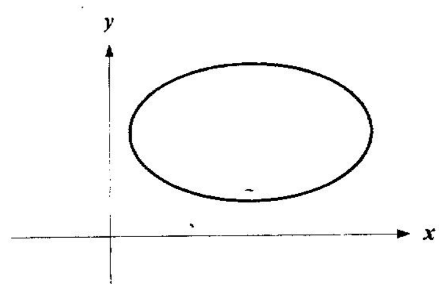
1) $p = \frac{10}{9}$	2) $x = 1$	3) $s = -\frac{20}{39}$	4) $x = \frac{31}{79}$
5) $x = 3$	6) $\nexists$ *sol.*.	7) $\nexists$ *sol.*	8) $\nexists$ *sol.*
9) $x = -\frac{2}{3}$	10) $\nexists$ *sol.*	11) $\nexists$ *sol.*	12) $x = 7$
13) $x = 5$	14) $x = 5$	15) $h = \frac{2A}{b}$	16) $z = \frac{d - ax - by}{c}$
17) $I = \frac{E}{R}$	18) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$	19) $r = \frac{3V + \pi h^3}{3\pi h^2}$	20) $r = \frac{a - sl}{l - s}$

6.4 Gráficas de Ecuaciones Lineales

Intercepciones con los ejes coordenados.

Cuando se traza la gráfica de una ecuación, siempre es conveniente investigar si la gráfica tiene **intersecciones con los ejes.** La abscisa de un punto donde la gráfica corta al eje x se llama **intercepción** x (o *abscisa en el origen*). La ordenada de un punto donde la gráfica corta al eje y se denomina **intercepción** y (u *ordenada en el origen*). En la figura **1** las intercepciones x de la gráfica son: x_1, x_2 y x_3. La única intercepción y es y_1. La figura **2** muestra una gráfica que no tiene intercepciones con los ejes.





Como $y = 0$ para todo punto en el eje x y $x = 0$ para todo punto en el eje y, las intercepciones de la gráfica de un ecuación pueden determinarse de la siguiente manera :

Intercepciones con el eje x:	hacer $y = 0$ en la ecuación y despejar x.
Intercepciones con el eje y:	hacer $x = 0$ en la ecuación y despejar y.

EJEMPLO. Encontrar las intercepciones con los ejes de la gráfica de:

a) $y = 4x - 3$ b) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5}$

Solución:

(a) Haciendo: $y = 0$ se obtiene: $0 = 4x - 3$; de donde $x = \frac{3}{4}$. Haciendo $x = 0$, se tiene que: $y = -3$.

Las intercepciones con los ejes x y y son: $x = \frac{3}{4}$ y $y = 3$, respectivamente.

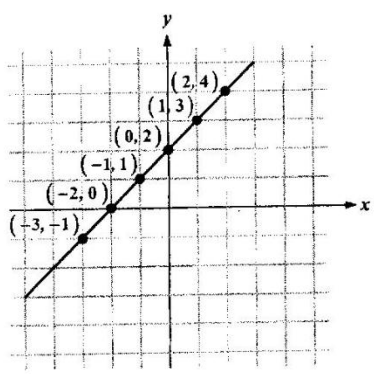
(b) En esta ecuación, $y = 0$ si $x^2 + 1 = 0$ y $x^2 + 5 \neq 0$. Como $x^2 + 5 \neq 0$ para todos los números reales, se tiene que: $x^2 + 1 = 0$, o sea, $x^2 = -1$. Sin embargo, no hay números reales que satisfagan la última ecuación, por lo cual la gráfica no tiene intercepciones con el eje x. Haciendo ahora $x = 0$, la ecuación resulta $y = \frac{1}{5}$, por lo que la intersección con el eje y es $y = \frac{1}{5}$.

La igualdad $y = x + 2$ es una ecuación con dos variables. Cuando un valor específico de x se sustituye en esta ecuación, obtenemos el valor correspondiente de y. Por ejemplo, si sustituimos a x por **3**, se obtiene: $y = 3 + 2 = 5$. Por lo tanto, decimos que el par ordenado $(3, 5)$ *satisface* la ecuación $y = x + 2$. Recordemos que:

Elaborar la gráfica de una ecuación en las variables x e y, significa localizar todos los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

Hay un número infinito de pares ordenados que satisfacen la ecuación $y = x + 2$ y todos se localizan sobre la misma línea recta. La siguiente tabla de valores muestra otros pares ordenados de números que satisfacen la ecuación $y = x + 2$.

x	y
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4



La línea recta contiene precisamente aquellos puntos cuyos pares ordenados (x, y) satisfacen la ecuación $y = x + 2$. Cualquier punto que no esté en la recta tendrá un par ordenado (x, y) en el cual $y \neq x + 2$. Así, $(3, 5)$ no está en la recta, ya que $5 \neq 1 + 2$. En otras palabras, ***para que una gráfica pase por un punto determinado, las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la gráfica.***

La gráfica de $y = x + 2$ es una línea recta y a la ecuación se le da el nombre de ***ecuación lineal***. Como dos puntos determinan una recta, una manera más fácil de trazar la gráfica de una recta, consiste en localizar sus intercepciones con los ejes, es decir, sus dos **coordenadas al origen. La abscisa al origen** para $y = x + 2$ es **2**; o sea, la abscisa del punto donde la recta corta al eje x (hicimos a $y = 0$ y despejamos a x). **La ordenada al origen** es **2**; es decir, la ordenada del punto donde la recta corta al eje y (hicimos a $x = 0$ y despejamos a y).

EJEMPLO. Elabore la gráfica de la ecuación lineal: $y = 2x - 1$, usando las interecepciones con los ejes.

Solución: Para encontrar la abscisa al origen, hacemos a $y = 0$. (Recuerde que cuando la recta, o cualquier curva, corta al eje x, el valor de y es cero).

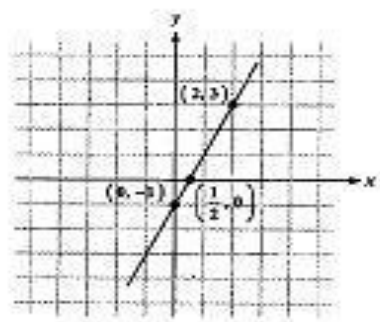
$$2x - 1 = y$$
$$2x - 1 = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{abscisa en el origen}$$

Para encontrar la ordenada al origen, hacemos $x = 0$. (Recuerde que cuando una recta, o cualesquier otra curva, corta al eje y, el valor de x es cero).

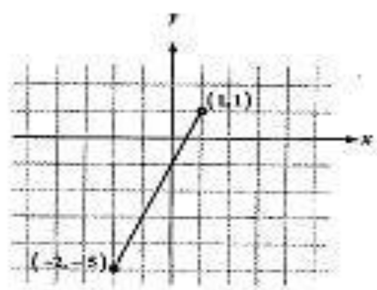
$$y = 2x - 1$$
$$y = 2(0) - 1$$

Generalmente, es conveniente localizar otro punto para verificar nuestro trabajo. Así, para $x = 2$, obtenemos que $y = 3$; y la recta pasa por el punto $(2, 3)$.

Finalmente, señale los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$ y $(2, 3)$. Trace la recta que pasa por ellos para determinar la gráfica



Habitualmente, los valores que le podemos asignar a x en una ecuación de este tipo, es el conjunto de todos los números reales. No obstante, es posible que a veces se desee limitar estos valores. Por ejemplo, la gráfica de $y = 2x - 1$, para $-2 \leq x \leq 1$ es el segmento de recta que tiene como extremos los puntos $(-2, -5)$ y $(1, 1)$, como se observa en la siguiente figura



EJEMPLO. Encuentre la pendiente de la recta l, determinada por los puntos $(-3, 4)$ y $(1, -6)$.

Solución: Usamos, $(x_1, y_1) = (-3, 4)$ y $(x_2, y_2) = (1, -6)$, entonces:

$$m = \frac{-6-4}{1-(-3)} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

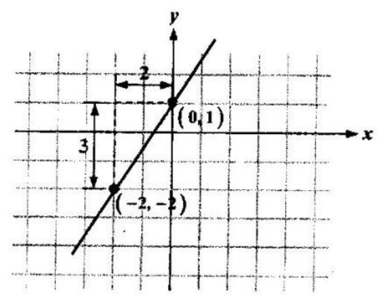
Nota: No tiene importancia a cuál de los dos puntos se le llame (x_1, y_1) o (x_2, y_2), ya que la razón obtenida será la misma. Si $(x_1, y_1) = (1, -6)$, por ejemplo, y $(x_2, y_2) = (-3, 4)$, obtendremos:

$$m = \frac{4-(-6)}{-3-1} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

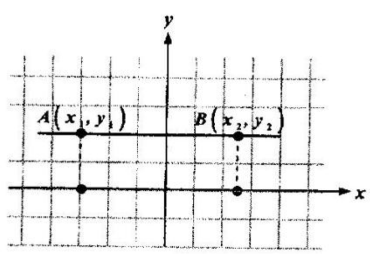
EJEMPLO. Elabore la gráfica de la recta con pendiente $\frac{3}{2}$; que pasa por el punto $(-2, -2)$.

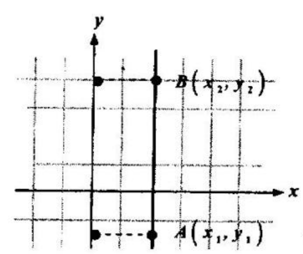
Solución: Pensemos en los $\frac{3}{2}$; así:

$\dfrac{\textbf{cambio de } y}{\textbf{cambio de } x} = \dfrac{3}{2}$. Ahora, empezamos en $(-2, -2)$ y nos desplazamos **3** unidades hacia arriba (cambio de y) y **2** unidades hacia la derecha (cambio de x). Esto determina el punto $(0, 1)$. Ahora, trazamos la recta que pasa por los dos puntos que conocemos.



Enseguida, tomaremos en consideración las rectas que resultan paralelas a los ejes; o sea, las horizontales y verticales.





ADVERTENCIA: *No confunda la pendiente* 0 *de las rectas horizontales con la pendiente indefinida de las rectas verticales.*

Como l es paralela al eje x, resulta: $y_2 = y_1$ entonces, $y_2 - y_1 = 0$. Por lo tanto, *la pendiente de una recta horizontal es* **0**.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

Como l es paralela al eje y, resulta: $x_2 = x_1$ entonces, $x_2 - x_1 = 0$.

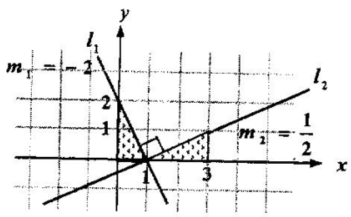
Dado que la división entre cero ha quedado indefinida, decimos que *la pendiente de una recta vertical no está definida.*

Dos rectas que no son verticales resultan paralelas, si y solo si tienen la misma pendiente.

La propiedad de las pendientes para rectas perpendiculares entre sí no es tan obvia. Veamos la siguiente figura para sacar una sugerencia.

l_1 es perpendicular a l_2

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$



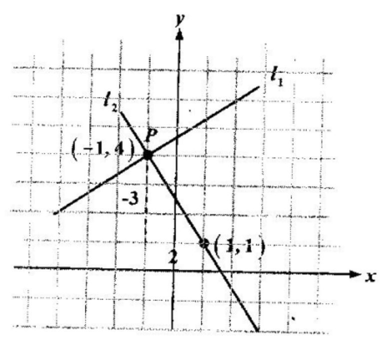
Dos rectas que no son paralelas a los ejes coordenados resultan perpendiculares si y solo si sus pendientes son recíprocas y con signo contrario.

Nota: *Por lo pronto, tomemos como válida la sugerencia anterior. En el tema correspondiente a trigonometría haremos la demostración formal.*

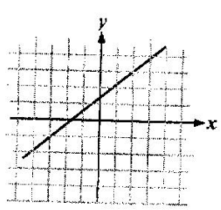
EJEMPLO. En la figura, la recta l_1 tiene como pendiente $\frac{2}{3}$ y es perpendicular a l_2. Si las rectas se cortan en $P(-1, 4)$, aproveche la pendiente de l_2 para calcular las coordenadas de otro punto de la propia recta l_2.

Solución: Como las rectas son perpendiculares, la pendiente de l_2 es $-\frac{3}{2}$.

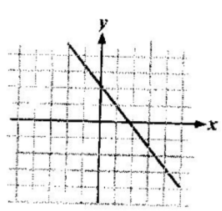
Ahora empezando en P, contamos **3** unidades hacia abajo y **2** hacia la derecha para llegar al punto $(1, 1)$ en l_2. Son posibles otras soluciones. ¿Puedes localizar un punto en l_2 que esté ubicado en el segundo cuadrante?



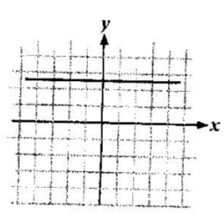
En resumen, tenemos lo siguiente en relación con las pendientes de las rectas:



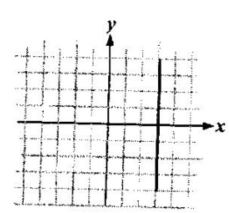
La recta l tiene pendiente *positiva* por lo que *asciende* de izquierda a derecha



La recta l tiene pendiente *negativa* por lo que *desciende* de izquierda a derecha



La recta l tiene pendiente *cero* por lo que es *horizontal*



La pendiente de la recta l *no está definida* por lo que es *vertical*

10. Cualquier recta horizontal es perpendicular a cualquier recta vertical. ¿Por qué se han excluido estas rectas del resultado que establece que dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario?

11. Encuentre t, si la recta que pasa por $(-1, 1)$ y $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ es perpendicular a la que pasa por $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $(7, t)$.

Tarea 6.2

1. *Encuentre las coordenadas al origen y úselas para obtener la gráfica de cada una de las rectas siguientes:*
   a) $x + 2y = 4$ **b)** $2x - y = 4$ **c)** $y = -3x - 9$
2. *Calcule la pendiente; si existe, para la recta determinada por cada pareja de puntos.*
   a) $(4, 3); (-5, 2)$ **b)** $(6, -7); (10, -7)$ **c)** $\left(2, -\frac{3}{4}\right); \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
3. *Trace la recta que pasa por el punto dado teniendo la pendiente m:*
   a) $(0, 2); m = \frac{3}{4}$ **b)** $(-3, 4); m = -\frac{1}{4}$ **c)** $\left(-2, \frac{3}{2}\right); m = 0$
4. *Señale en una gráfica cada una de las rectas que pasan por el punto* $(5, -3)$ *con las siguientes pendientes:*
   $m = -2$; $m = -1$; $m = 0$; $m = 2$
5. *En el mismo sistema de coordenadas, trace las rectas indicadas:*
   a) La que pasa por $(2, 0)$ con $m = -2$ **b)** La que pasa por $(0, 2)$ con $m = 2$
   c) La que pasa por $(-2, 0)$ con $m = -2$ **d)** La que pasa por $(0, -2)$ con $m = 2$

6. ¿Por qué la recta determinada por los puntos $(6, -5)$ y $(8, -8)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-3, 12)$ y $(1, 6)$?.

7. Tome en consideración los cuatro puntos $A(5, 11)$, $B(-7, 16)$, $C(-12, 4)$ y $D(0, -1)$. Demuestre que los cuatro ángulos del cuadrilátero $ABCD$ son rectos. Además, demuestre que las diagonales son perpendiculares.

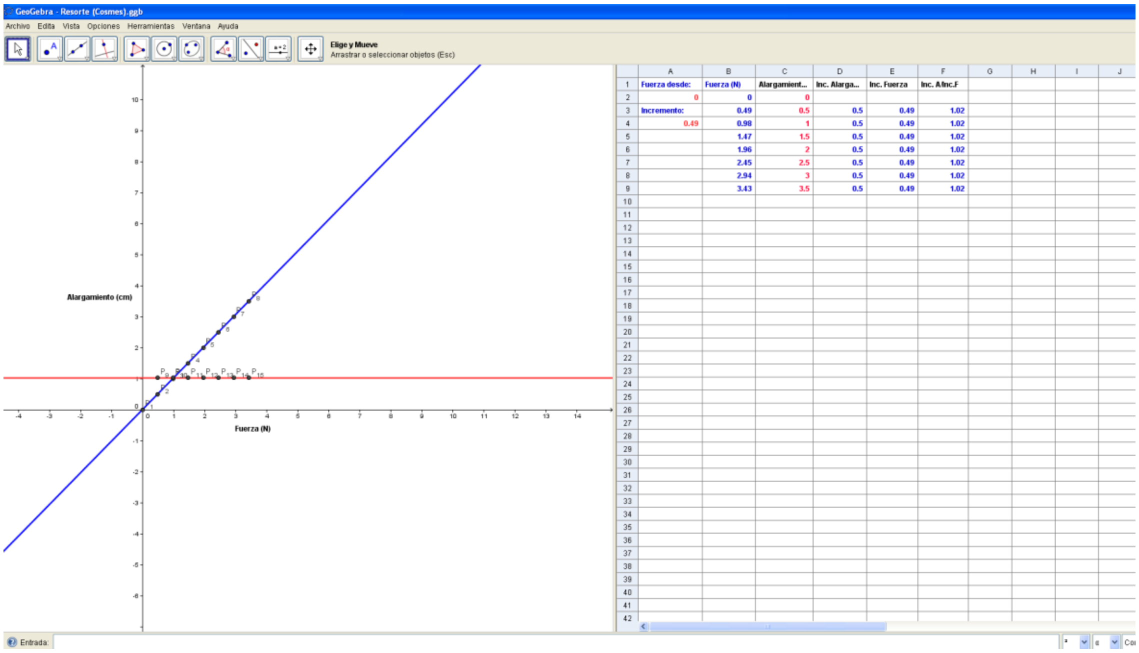
8. Cualquier recta horizontal es perpendicular a cualquier recta vertical. ¿Por qué se han excluido estas rectas del resultado que establece que dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario?

9. Encuentre t, si la recta que pasa por $(-1, 1)$ y $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ es perpendicular a la que pasa por $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $(7, t)$.

Anexo 2

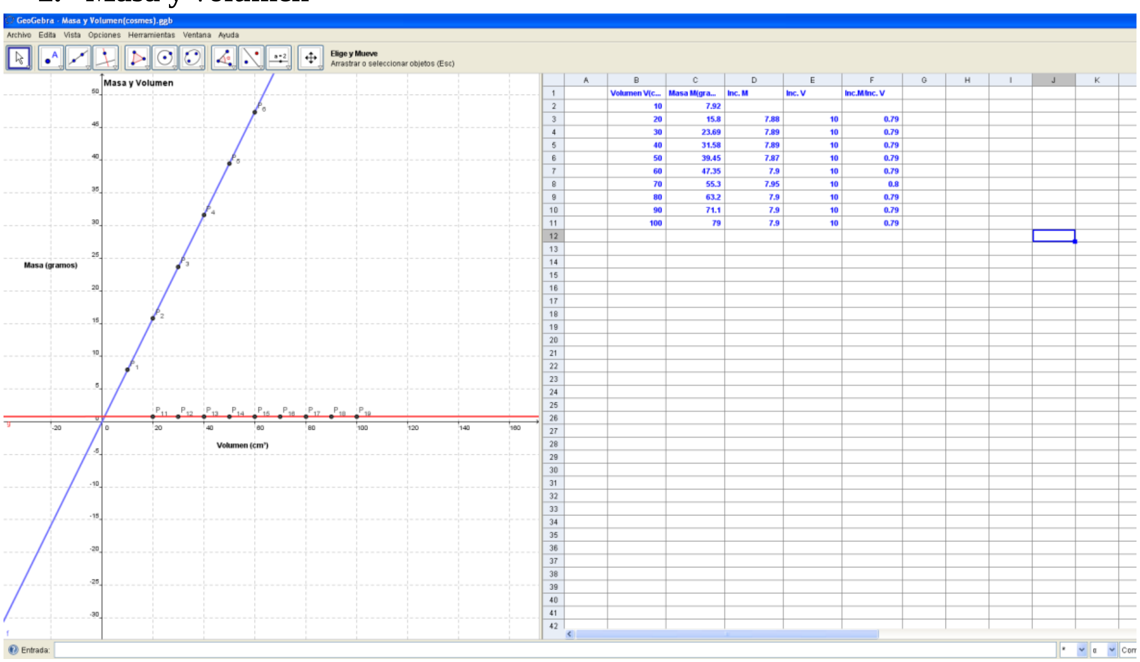
Vistas en pantalla de los applets construidos en GeoGebra para el desarrollo de las actividades de la secuencia

1. La deformación de un resorte



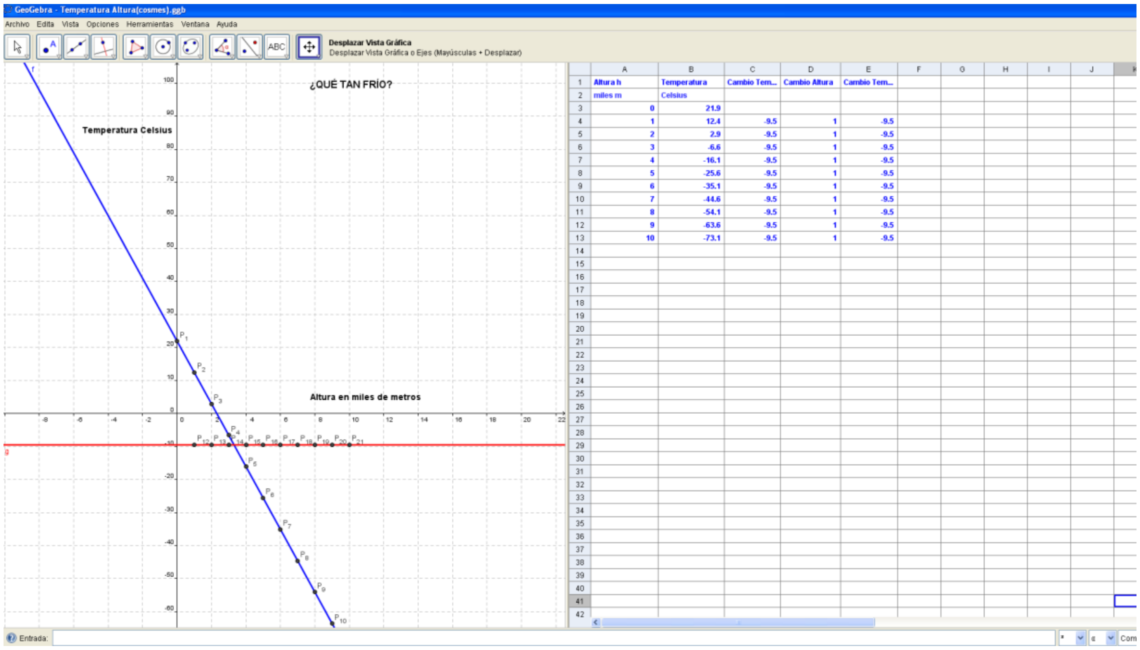
	A	B	C	D	E	F
1	Fuerza desde:	Fuerza (N)	Alargamient...	Inc. Alarga...	Inc. Fuerza	Inc. A/Inc.F
2	0	0	0			
3	Incremento:	0.49	0.5	0.5	0.49	1.02
4	0.49	0.98	1	0.5	0.49	1.02
5		1.47	1.5	0.5	0.49	1.02
6		1.96	2	0.5	0.49	1.02
7		2.45	2.5	0.5	0.49	1.02
8		2.94	3	0.5	0.49	1.02
9		3.43	3.5	0.5	0.49	1.02

2. Masa y volumen

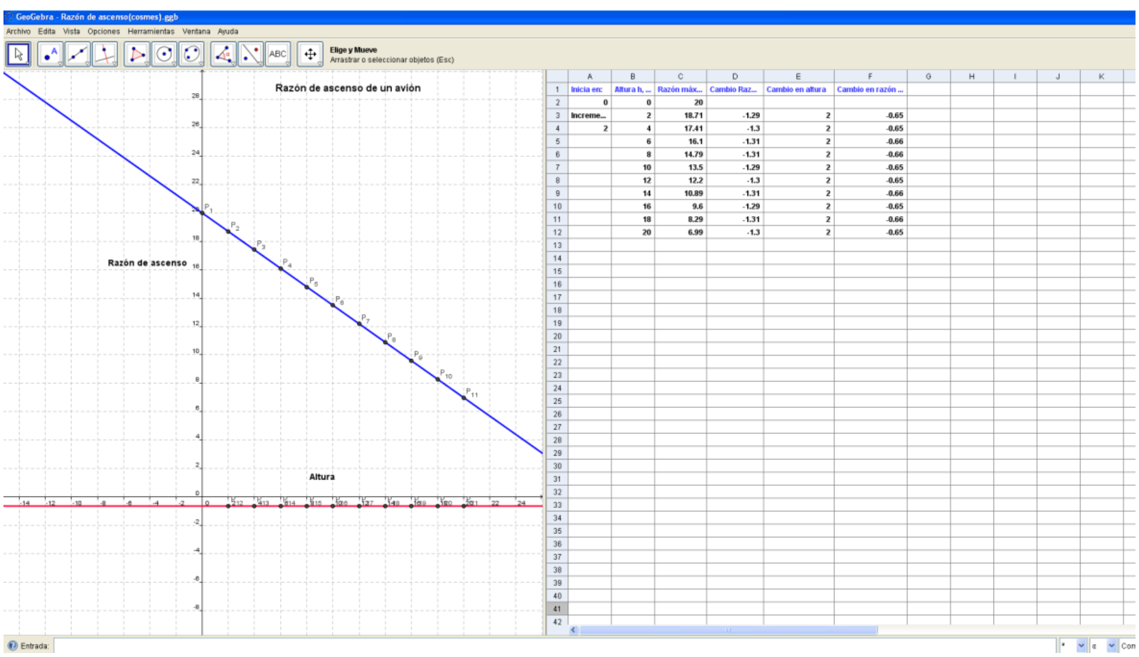


	A	B	C	D	E	F
1		Volumen V(c...	Masa M(gra...	Inc. M	Inc. V	Inc.M/Inc. V
2		10	7.92			
3		20	15.8	7.88	10	0.79
4		30	23.69	7.89	10	0.79
5		40	31.58	7.89	10	0.79
6		50	39.45	7.87	10	0.79
7		60	47.35	7.9	10	0.79
8		70	55.3	7.95	10	0.8
9		80	63.2	7.9	10	0.79
10		90	71.1	7.9	10	0.79
11		100	79	7.9	10	0.79

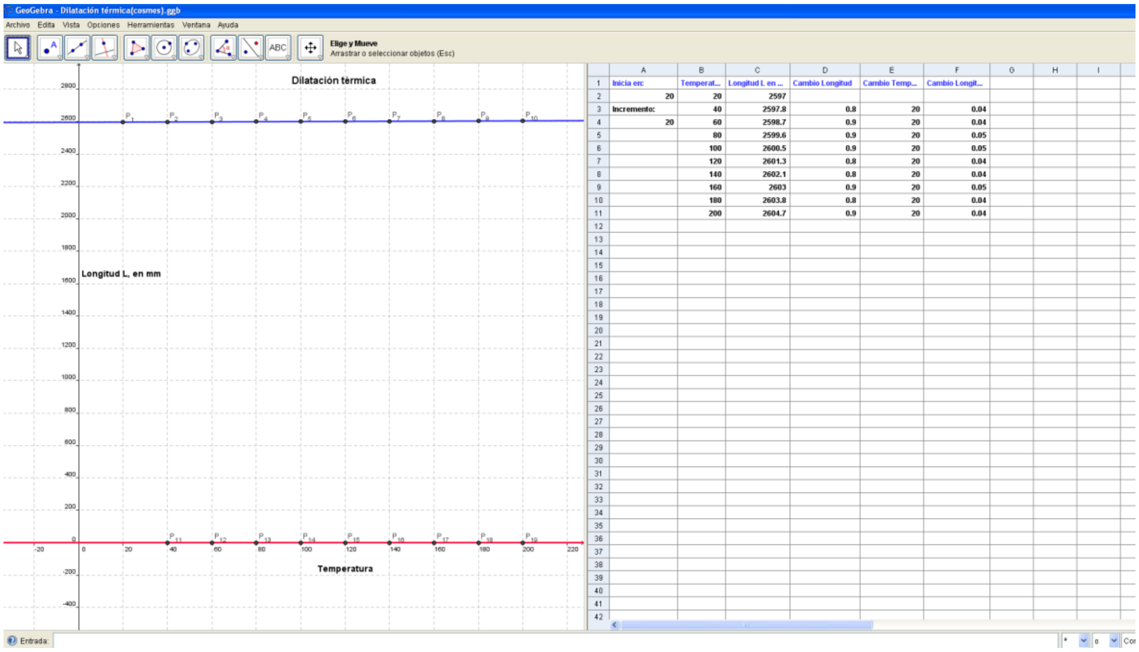
3. ¿Qué tan frío?



4. Razón de ascenso

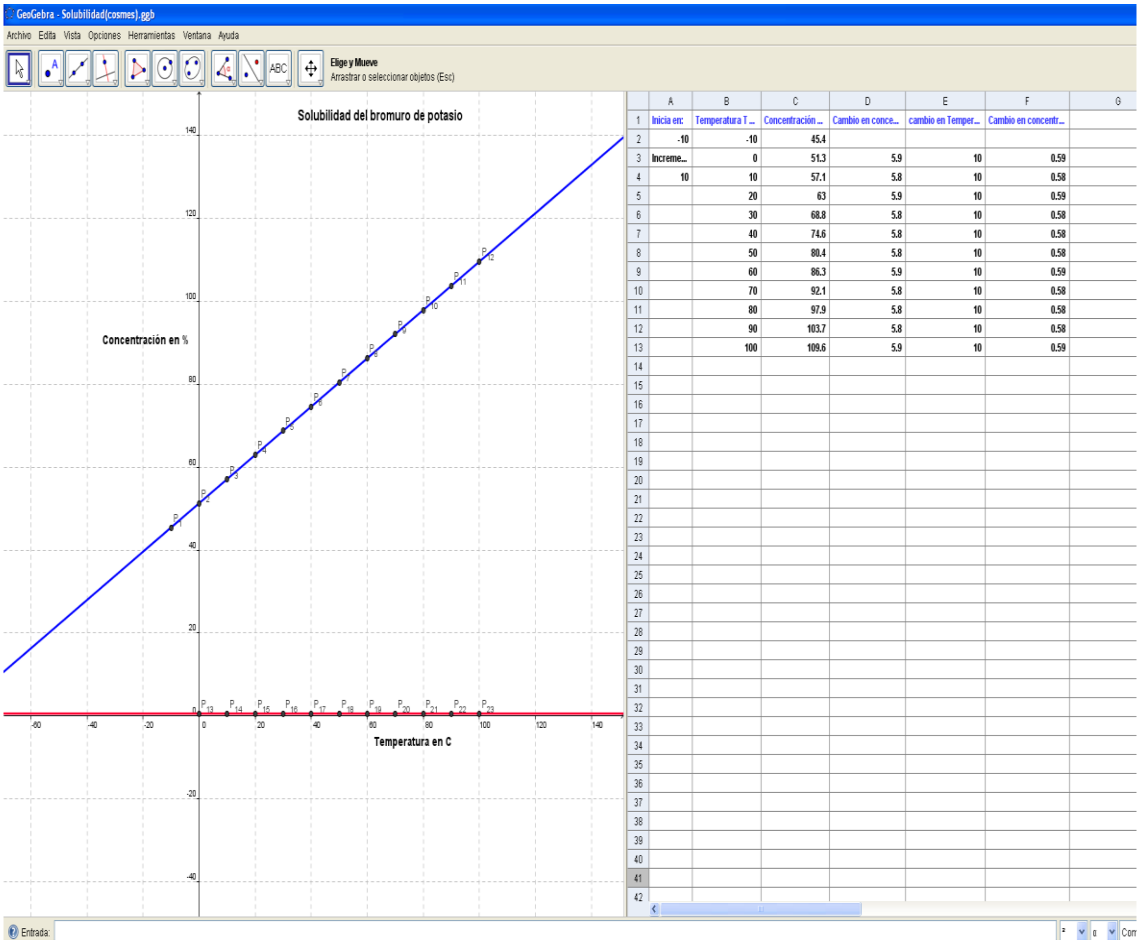


5. Dilatación térmica



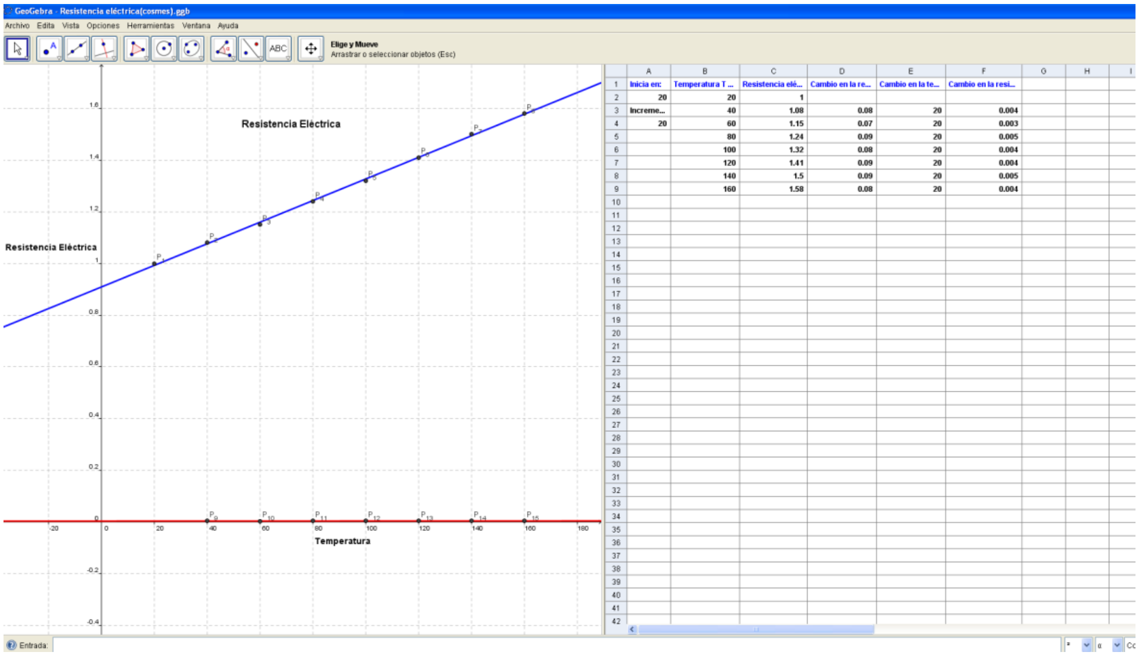
	A	B	C	D	E	F
1	Inicia en:	Temperat...	Longitud L en ...	Cambio Longitud	Cambio Temp...	Cambio Longit...
2	20	20	2597			
3	Incremento:	40	2597.8	0.8	20	0.04
4	20	60	2598.7	0.9	20	0.04
5		80	2599.6	0.9	20	0.05
6		100	2600.5	0.9	20	0.05
7		120	2601.3	0.8	20	0.04
8		140	2602.1	0.8	20	0.04
9		160	2603	0.9	20	0.05
10		180	2603.8	0.8	20	0.04
11		200	2604.7	0.9	20	0.04

6. Solubilidad del bromuro de potasio



	A	B	C	D	E	F	G
1	Inicia en:	Temperatura T ...	Concentración ...	Cambio en conce...	cambio en Temper...	Cambio en concentr...	
2	-10	-10	45.4				
3	Increme...	0	51.3	5.9	10	0.59	
4	10	10	57.1	5.8	10	0.58	
5		20	63	5.9	10	0.59	
6		30	68.8	5.8	10	0.58	
7		40	74.6	5.8	10	0.58	
8		50	80.4	5.8	10	0.58	
9		60	86.3	5.9	10	0.59	
10		70	92.1	5.8	10	0.58	
11		80	97.9	5.8	10	0.58	
12		90	103.7	5.8	10	0.58	
13		100	109.6	5.9	10	0.59	

7. Resistencia eléctrica



8. La Veladora