"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Álgebra y el enfoque por competencias en el Bachillerato

TESIS

Que para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Dulce Yuridia Miranda Aragón

Directora de Tesis: Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Hermosillo, Sonora, México. Febrero de 2016

Agradecimientos

Primeramente doy gracias a Dios porque me ha dado un propósito en esta vida y una esperanza más grande de lo que alguna vez imaginé; porque en su plan consideró mi felicidad y me ha permitido vivir para alcanzar una meta más. A Él principalmente dedico mis triunfos.

A mis padres Javier y Olivia, por creer en mí, gracias por brindarme su amor y comprensión. Alejandro y Francisco, es una bendición tenerlos como hermanos y formar juntos esta hermosa familia. Jonathan, gracias por haber estado a mi lado durante esta etapa, por la ayuda que me diste en los momentos difíciles, animándome a esforzarme y seguir adelante, demostrando siempre tu amor y preocupación por mí.

De manera especial agradezco a mi directora de tesis, Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos, por su apoyo en todas las decisiones importantes para el desarrollo de la investigación, no habría sido posible llevarla a cabo sin su ayuda. Gracias por su paciencia, su atención y afecto hacia mi persona, que sin duda me permitieron admirarla no solamente por su preparación académica sino también por su carácter y personalidad.

Reconozco y aprecio sinceramente la labor de cada uno de los profesores del área de Matemática Educativa de la Universidad de Sonora; los cursos impartidos por ellos, permitieron fortalecer mis conocimientos y comprender el proceso que debe llevar a cabo un investigador en este campo.

Dra. Gisela Montiel Espinosa, gracias por haber aceptado la solicitud para realizar una estancia en Cinvestav bajo su supervisión. Por las observaciones y sugerencias que enriquecieron el trabajo de investigación, así como la oportunidad de darlo a conocer en esta comunidad.

A mis sinodales por tomarse el tiempo para revisar cuidadosamente esta tesis y hacer recomendaciones: Dr. Agustín Grijalva Monteverde, Dr. José Luis Soto Munguía y M.C. Jesús Manuel Duarte Sánchez, gracias por su disposición.

A mis compañeros de maestría, de trabajo y a mis amigos, gracias porque pude compartir con ustedes esta etapa y la alegría que trae consigo el llevarla a buen término. Es una gran satisfacción saber que siempre estarán en los grandes momentos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Universidad de Sonora, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, gracias por el espacio y recursos brindados.

Estas palabras no alcanzan a describir mi gratitud por todo el apoyo que me brindaron, hicieron de este camino un sendero más sencillo de recorrer y ahora que ha llegado a su conclusión, puedo mirar hacia atrás con una sonrisa en el rostro, porque aunque fue un gran reto, nunca estuve sola.

¡Muchísimas gracias por todo!

Índice

Introducción

Actualmente en nuestro país se han implementado una serie de reformas curriculares en el nivel básico y medio superior, las cuales responden al enfoque por competencias que ha sido aceptado por muchos países alrededor del mundo. Una de ellas es la Reforma Integral de la Educación Media Superior, la cual está fundamentada en cuatro ejes que permitirán la definición de las modalidades de oferta, el tránsito entre diversas instituciones así como un perfil de egreso común independientemente del subsistema que elijan los estudiantes para cursar el bachillerato.

Con relación al perfil de egreso se define un Marco Curricular Común con base en competencias, las cuales se establecieron considerando tres categorías: genéricas, profesionales y disciplinares. Es de nuestro interés investigar cuál es la relación que existe actualmente entre lo que establece la reforma relativo al enfoque por competencias y las acciones que han realizado las instituciones del nivel medio superior, en ese sentido se identificó una problemática y con el propósito de abordarla se propuso un proyecto de investigación.

En este documento se exponen los aspectos centrales ligados a la planeación, desarrollo y resultados de la investigación titulada "Álgebra y el enfoque por competencias en el Bachillerato", la cual tuvo como propósito identificar cuáles y de qué manera son promovidas las competencias matemáticas, específicamente aquellas relativas al conocimiento algebraico, en el caso de tres instituciones del Estado de Sonora: COBACH, C.B.T.i.s. y CECyTES. Esto se realizó mediante el análisis de documentos clave, como son los programas de materia y los libros de texto que son utilizados por las instituciones de interés.

A continuación se describen cada una de las cuatro secciones que componen este trabajo. El capítulo 1, "La problemática y su justificación", muestra la identificación del problema, las principales características de la investigación, así como algunos elementos mínimos que justificaron su selección. Entre estos elementos se consideraron el papel que juega el libro de texto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, el análisis de textos como una componente fuerte en la investigación, particularmente en matemática educativa y la importancia del tema matemático de estudio.

Otros aspectos que también se incluyen en el primer capítulo son el planteamiento de las preguntas de investigación, objetivos y estado del arte. En este último se retoman algunos resultados que guardan una relación con nuestro trabajo, entre ellos se consideraron principalmente investigaciones sobre libros de texto y el desarrollo de competencias.

El segundo capítulo se divide en dos apartados, en el primero de ellos se dan a conocer los componentes teóricos utilizados, los cuales forman parte del Enfoque Onto-Semiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font 2009, Godino y Batanero, 1994). Entre estos elementos tenemos las nociones de problema, práctica, institución y significado; así como los relativos a la dimensión epistémica: objetos, configuraciones y trayectorias.

En el segundo apartado se describe la metodología que se implementó en el desarrollo de la investigación, la cual se considera de carácter cualitativo y consiste en un análisis ontosemótico de los textos. Uno de los aspectos clave en la metodología es la identificación de atributos de las competencias genéricas, por lo cual se describen detalladamente en esta sección.

En el capítulo tres se desarrolla el análisis para cada una de las instituciones, y en este sentido en cada caso se describieron las características del texto, la sección del mismo que se consideró para el análisis y su relación con el programa de la asignatura. Posteriormente se presenta la trayectoria epistémica asociada a cada texto, concluyendo con un resumen de los atributos de las competencias disciplinares que se promueven en las configuraciones.

La última sección es el apartado correspondiente a las conclusiones, en el cual se describen los resultados obtenidos a partir del análisis. Entre ellos se consideran:

- Las nociones matemáticas que son promovidas por cada texto en lo que se refiere a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
- El alcance de los objetivos al dar respuesta a las preguntas de investigación.
- Algunas posibles líneas de investigación que proporcionarían un panorama más amplio del problema general abordado en el presente trabajo.

1. La problemática y su justificación

1.1.Las matemáticas en el currículo

En Chevallard, Bosch y Gascón (1997) se habla de la sociedad como una “obra” o una construcción, efecto de la acción humana, conformada a su vez por una diversidad de pequeñas “obras”. Entre éstas encontramos a la escuela, pues la creación de esta institución ha sido el resultado de la acción del hombre ante una necesidad social: la de educar, preparar a los estudiantes para la vida y sobre todo, una muy importante: la preservación de los saberes.

Al establecerse esta institución, surgen las siguientes cuestiones: ¿Qué se va a enseñar?, ¿cómo se va enseñar?, ¿cuáles son los conocimientos, habilidades y actitudes que debe poseer un estudiante al terminar su educación escolar? Y aun cuando los requerimientos de la sociedad han evolucionado, estas preguntas permanecen y son las que dan lugar al currículo, en sus diferentes niveles educativos.

“El concepto *curriculum* y la utilización que se hace de él aparecen ligados desde sus comienzos a la idea de selección de contenidos y de orden en la clasificación de los saberes a los que representan, que será la selección que se considerará en la enseñanza. En términos modernos, podríamos decir que con esa invención unificadora, por un lado, puede evitarse la arbitrariedad en la selección de lo *que se enseña* en cada situación, al tiempo que, en segundo lugar, se encauza, modela y limita la autonomía del profesorado” (Gimeno Sacristán, Feito Alonso, Perrenoud, Clemente Linuesa, 2011).

Sin embargo, el significado de currículum ha cambiado, no es solamente un sumario, o una lista de contenidos que ha de ser abarcado, ni siquiera una prescripción de objetivos, métodos y contenidos; más bien, es un objeto simbólico y significativo, el cual posee una existencia física. Tal como lo declara Stenhouse (2003, p. 30): “expresa, en forma de materiales docentes y de criterios para la enseñanza, una visión del conocimiento y un concepto del proceso de educación. Proporciona un marco dentro del cual el profesor puede desarrollar nuevas destrezas y relacionarlas, al tiempo que tiene lugar ese desarrollo, con conceptos del conocimiento y del aprendizaje.” Más aún, desde nuestro punto de vista, el currículo es la estrategia más general de formación de un individuo.

Veamos el caso de las matemáticas en el currículo, ya que es el área de interés en este trabajo de investigación. Hoy en día nadie discute que todos deben estudiar ciertas cuestiones matemáticas. Esta obligación puede parecemos muy natural y razonable, pero la verdad es que no ha sido siempre así y no se puede asegurar que seguirá siéndolo en el futuro. Lo que podemos afirmar de momento, es que en nuestra sociedad las matemáticas forman parte del proyecto educativo.

“La cuestión que surge entonces es: ¿qué matemáticas deben estudiarse hoy para adquirir cultura básica que nos reclama el interés social y, pues, nuestro propio interés? ¿En qué consiste ese "algo de matemáticas" que todos debemos saber? Éste es, en síntesis, el problema que aparece como central cuando se pretende diseñar un currículo obligatorio de matemáticas.” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p.119)

Desde esta perspectiva, el problema de diseñar un currículo en matemáticas no debería limitarse a elegir los contenidos, secuenciarlos y proporcionar una temporalización de los mismos, pues esto es solamente un problema metodológico. El problema que debe plantearse es cómo reconstruir las obras matemáticas seleccionadas en el currículo, no como algo a enseñar, sino como obras que deben ser estudiadas. Esta reconstrucción debe partir de un cuestionamiento previo, considerando sus elementos y las posibles maneras de estructurarlos.

La inclusión de un tema matemático en el currículo, debe tomar en cuenta las cuestiones problemáticas que este contenido permite abordar, aquellas que podrá abordar bajo determinadas condiciones, así como la pertinencia de plantear estas problemáticas en cierto nivel educativo.

No obstante, la pertinencia de un contenido puede cambiar con el tiempo. Ejemplo de ello es el estudio de las tablas logarítmicas. Antes de la introducción de las calculadoras científicas en las escuelas, el cálculo de logaritmos mediante el uso de tablas era algo que se estudiaba, se aprendía y evaluaba. Era un contenido matemático que se encontraba en el currículo. Sin embargo, a pesar de la resistencia de algunos, el uso de la calculadora en el aula fue aceptado y vino a reemplazar esas tablas, así que este contenido matemático desapareció del currículo.

Por distintas razones, los cambios se presentan. No solamente en matemáticas es necesario adecuar los contenidos, sino en todas las áreas del conocimiento. Al verlo de forma global, el currículum no ha sido el mismo desde sus inicios. La evolución de la sociedad conlleva cambios en todos los aspectos y nuestro país no ha sido la excepción. En México, algo que ha sido provocado por distintos cambios sociales (movimiento de independencia, revolución, gobiernos con distintas ideologías, integración al mundo globalizado, etc.), es el surgimiento de diferentes políticas y reformas educativas.

Con frecuencia, cada cambio en políticas educativas trae aparejado una reforma en el modelo educativo, detrás del cual aparece una reforma curricular. Por ejemplo, una de las más recientes reformas educativas mexicanas declara como razones para su implementación las siguientes:

- Contar con escuelas mejor preparadas para atender las necesidades específicas de aprendizaje de cada estudiante.
- Elevar la calidad de la educación.
- Mejorar el desempeño de todos los componentes del sistema educativo, el Plan y los programas de estudio.
- Tomar en cuenta las Tecnologías de la Información y la Comunicación.
  (Secretaría de Educación Pública, 2011)

En los últimos años se han implementado en nuestro país reformas en todos los niveles educativos, el caso de la Reforma Integral de la Educación Básica es resultado de un ciclo de reformas curriculares en cada uno de los niveles que la integran. Esto inició en 2004 con la Reforma de Educación Preescolar, posteriormente se dieron a conocer en 2009 la de Educación Primaria y en 2011 la de Educación Secundaria, aportando una propuesta formativa pertinente, significativa, congruente, orientada al desarrollo de competencias y centrada en el aprendizaje.

Dado que en este trabajo nos centraremos en el nivel medio superior, en la siguiente sección haremos un análisis más detallado de la reforma que actualmente rige a las instituciones de este nivel.

1.2.La Reforma Integral de la Educación Media Superior

Entre los antecedentes a la implementación de la reforma, se consideró el hecho de que la educación media superior "está compuesta por una serie de subsistemas que operan de manera independiente, sin correspondencia a un panorama general articulado y sin que exista suficiente comunicación entre ellos" (Vázquez, 2008, p.5). Por esta razón se propone como un reto identificar los objetivos comunes de esos subsistemas, tomando en cuenta la formación de personas cuyos conocimientos y habilidades les permitieran continuar sus estudios superiores o desempeñarse en el mundo laboral; además de una serie de actitudes y valores que tuvieran un impacto positivo en la sociedad.

Es así que en 2008 se da a conocer la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), la cual propone la creación de un Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) que integre los aspectos antes mencionados.

La RIEMS se desarrolla en torno a cuatro ejes:

- La construcción e implantación de un Marco Curricular Común con base en competencias.
- La definición y regulación de las distintas modalidades de oferta de la EMS.
- La instrumentación de mecanismos de gestión que permitan el adecuado tránsito de la propuesta
- Un modelo de certificación de los egresados del SNB.

Cada uno de estos ejes se ocupa de distintos aspectos que deben tomarse en cuenta para el correcto funcionamiento de la Reforma. El primero de ellos se enfoca en los conocimientos, aprendizajes y habilidades entre otros aspectos que deben desarrollar los estudiantes. El segundo busca dar reconocimiento a las distintas opciones disponibles para cursar el bachillerato, lo cual se logrará con la implementación de la reforma en cada una de estas modalidades. El tercer eje describe los estándares y procesos comunes que harán posible la universalidad del bachillerato y contribuirán al desarrollo de las competencias en los estudiantes. Por último, a través de la certificación se reconocerá que los estudiantes desarrollaron los desempeños que contempla el MCC en una institución reconocida y certificada que reúne ciertos estándares.

Aunque cada uno de estos ejes es de suma importancia para la implementación de la reforma, nos enfocaremos en describir más detalladamente el primero de ellos, ya que es el que hace referencia al currículo en el nivel medio superior.

1.2.1. El Marco Curricular Común

Tal como se describió anteriormente, en la EMS existe una gran diversidad de subsistemas, cada uno operando de manera independiente, lo que ha ocasionado una desarticulación académica de los planes y programas de estudio. La solución a este problema puede ir en dos direcciones, una de ellas consiste en definir un conjunto de asignaturas comunes para todas las modalidades del bachillerato y la otra es establecer desempeños finales compartidos que deben alcanzar todos los estudiantes que culminan este nivel educativo.

Sin embargo, el establecimiento de un conjunto de materias comunes no sería adecuado porque obligaría a todas las instituciones a planes de estudio rígidos, reduciendo el espacio para la oferta propia y las trayectorias optativas de los alumnos, limitando de esta forma los objetivos particulares de la formación que ofrece cada institución. Por esta razón en el Acuerdo Secretarial No. 444 (2008, p. 49) se describe:

> "…un perfil básico del egresado, compartido por todas las instituciones, y enriquecido de muy distintas maneras por aquello específico que cada institución ofrece de forma adicional, tanto en términos de formación para el trabajo como en la adquisición de conocimientos disciplinares más complejos. El perfil básico hace referencia a los desempeños comunes que los egresados del bachillerato deben conseguir independientemente de la modalidad y subsistema que cursen. Es lo que constituiría el eje de la identidad de la educación media superior".

Este perfil básico se constituyó con base en competencias, siendo éstas la unidad común para establecer los mínimos requeridos para obtener el certificado de bachillerato sin que las instituciones renuncien a su forma de organización curricular, continuando su misión de brindar atención a las necesidades de los estudiantes en el contexto personal, educativo y laboral.

La palabra competencia se ha convertido en un vocablo muy utilizado por la sociedad en estos días, sin embargo ¿cuándo se considera que se ha adquirido una competencia? De acuerdo a la OCDE (2005): "Una competencia es más que conocimiento y habilidades. Implica la capacidad de responder a demandas complejas, utilizando y movilizando recursos psicosociales (incluyendo habilidades y actitudes) en un contexto particular" (citado en el Acuerdo Secretarial No. 444, 2008, p. 51).

Por otro lado, en un documento de la ANUIES (2006, citado en el Acuerdo Secretarial No. 444, 2008, p. 51) se definen competencias como: "Conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales, que debe reunir un titulado para satisfacer plenamente las exigencias sociales. Fomentar las competencias es el objetivo de los programas educativos. Las competencias son capacidades que la persona desarrolla en forma gradual y a lo largo de todo el proceso educativo y son evaluadas en diferentes etapas. Pueden estar divididas en competencias relacionadas con la formación profesional en general (competencias genéricas) o con un área de conocimiento (específicas de un campo de estudio)".

Es así que el enfoque por competencias considera que los conocimientos por sí mismos no son lo más importante sino el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional. Perrenoud, autoridad en el ámbito pedagógico considera una competencia como "la capacidad de movilizar recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones" (2004, p. 8).

Debido a que la educación no está centrada en el conocimiento solamente sino en las competencias que se busca desarrollar en los estudiantes, se establecieron desempeños terminales que el egresado del bachillerato debe alcanzar. De acuerdo al MCC estos desempeños se conforman en tres tipos de competencias:

- Competencias genéricas
- Competencias y conocimientos disciplinares
- Competencias profesionales

Las competencias profesionales se refieren a un campo del quehacer laboral, se trata del uso particular del enfoque de competencias aplicado al campo profesional. Hay dos niveles de complejidad para estas competencias, pueden ser básicas o extendidas. Las primeras, tal como se indica en su nombre, se limitan a cuestiones básicas relacionados con el campo laboral, mientras que las extendidas especializan al individuo en una profesión técnica, permitiéndole incorporarse al campo laboral al finalizar sus estudios.

Es de nuestro interés profundizar más bien en las competencias genéricas y disciplinares ya que éstas son las que se busca desarrollar en un curso de Matemáticas.

Competencias Genéricas

Estas competencias les permiten a los estudiantes comprender el mundo e influir en él, les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean, participando eficazmente en su vida social, profesional y política a lo largo de la vida. Otra de las características de estas competencias es que no se limitan a un campo específico de conocimiento. Además, son transferibles, en tanto que refuerzan la capacidad de los estudiantes de adquirir otras competencias.

A continuación se desglosan las competencias genéricas de acuerdo a sus categorías, las cuales han sido retomadas del Acuerdo Secretarial No. 144:

<u>Se auto determina y cuida de sí</u>

1. *Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.*
2. *Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.*

3. *Elige y practica estilos de vida saludables.*

Se expresa y comunica

4. *Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.*

Piensa crítica y reflexivamente

5. *Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.*
6. *Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.*

Aprende de forma autónoma

7. *Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.*

Trabaja en forma colaborativa

8. *Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.*

Participa con responsabilidad en la sociedad

9. *Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.*
10. *Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.*
11. *Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.*

Competencias Disciplinares

Las competencias disciplinares se caracterizan por exigir la integración de conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para la resolución de un problema teórico o práctico. Hay dos niveles de complejidad para estas competencias, pueden ser básicas o extendidas. Las básicas se desprenden de los conocimientos que todos los alumnos tienen que dominar independientemente de sus estudios futuros. Las extendidas preparan al estudiante especializándolo en cierta área de conocimiento.

Dentro de este Marco Curricular Común se definen las competencias específicas mínimas de cada conjunto, además de determinar los distintos niveles en los que se ha de implementar la reforma, también llamados “niveles de concreción”, en los cuales se podrán complementar las competencias mínimas del MCC, otorgando de esta forma un cierto grado de libertad en el diseño de los planes y programas de estudio.

Es de nuestro interés definir las competencias disciplinares básicas en el área de Matemáticas, las cuales buscan el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Es así que se han determinado las siguientes competencias básicas y extendidas que se obtienen en el conjunto de asignaturas de Matemáticas como parte de los desempeños terminales que caracterizan a un estudiante egresado del Bachillerato:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Estas competencias podrán desarrollarse utilizando el método que la institución considere más apropiado, es decir, es responsabilidad de cada subsistema la definición de un plan de estudios que se adapte a los requerimientos del MCC y que permita a los estudiantes desarrollar en el área de matemáticas las competencias antes mencionadas.

Sin embargo las competencias antes mencionadas son muy generales y el objetivo es desarrollarlas a lo largo de la educación media superior. Es por ello que con el propósito de determinar el nivel de desarrollo de las competencias después de finalizar un curso de matemáticas o un apartado, se han establecido los "Desempeños del estudiante al concluir el bloque" en los cuales se especifican los aspectos que se desarrollarán en cada una de las secciones de estudio. Estos desempeños se hacen explícitos en los programas de cada una de las asignaturas, de acuerdo a los contenidos que se estudian en cada sección.

1.2.2. El planteamiento curricular en los programas de las instituciones de interés

Hemos descrito de manera muy general la situación actual en nuestro país en cuanto a la reforma educativa más reciente implementada en el nivel medio superior. En México existen distintas modalidades para el bachillerato y en todas ellas se desarrollan las competencias genéricas y disciplinares básicas, sin embargo las diferencias residen en las competencias extendidas que desarrollan.

El bachillerato general conformado por la Escuela Normal Preparatoria ENP, Colegios de Ciencias y Humanidades CCH y otras escuelas preuniversitarias, además de las competencias mencionadas también desarrollan las disciplinares extendidas.

Las escuelas incorporadas a la DGB y los Colegios de Bachilleres conforman la modalidad de bachillerato general con capacitación para el trabajo. Estas instituciones tienen una componente de formación profesional, en la cual se desarrollan las competencias profesionales básicas.

Por otro lado en los bachilleratos tecnológicos y CONALEP tienen un peso importante las competencias profesionales extendidas que proporcionan a los egresados una calificación de nivel técnico que eventualmente puede ser certificada.

Estas especificaciones se muestran en el siguiente diagrama:

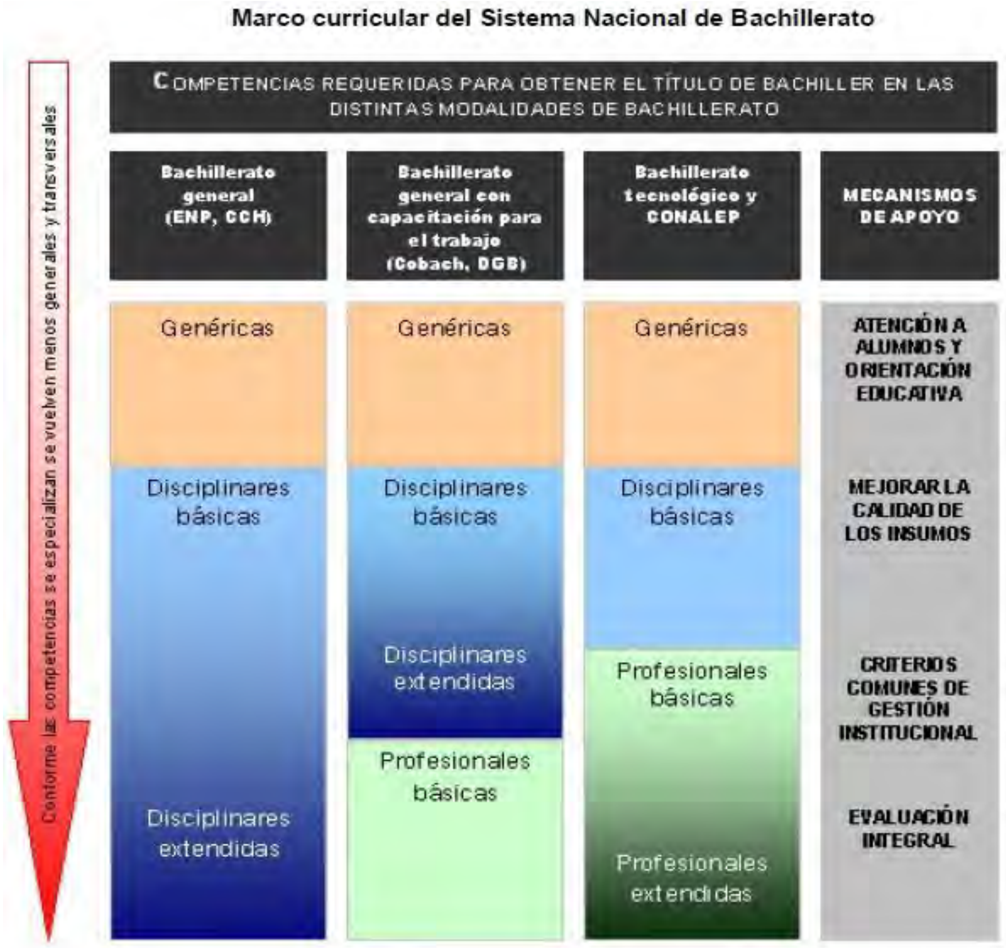


Figura 1.2.2.1. Tomada del Acuerdo Secretarial No. 442

Para nuestro estudio hemos considerado particularmente tres subsistemas que ofrecen la educación media superior en el estado de Sonora. Las instituciones que consideramos son las siguientes: el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTIS) y el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Sonora (CECYTES), por ser las preparatorias más representativas de nuestro estado.

En el ciclo escolar 2013-2014, la población estudiantil que cursaba el Bachillerato en el estado de Sonora era de 112,126, de los cuales 27,650 lo hacía en COBACH; 23,360 en CBTIS y 17,105 en CECYTES. En total representan el 60.75% de los alumnos de preparatoria, esto sin incluir las preparatorias incorporadas a cada uno de los subsistemas. En la Tabla 1.2.2.1 se especifican los datos de otras preparatorias en el estado (Secretaría de Educación y Cultura, 2014, p. 3-4).

Para el ciclo escolar 2014-2015, la población estudiantil que cursaba el Bachillerato en el estado de Sonora era de 113,352, de los cuales 27,203 lo hacía en COBACH; 23,735 en CBTIS y 17,162 en CECYTES. En total representan el 60.08% de los alumnos de preparatoria, esto sin incluir las preparatorias incorporadas a cada uno de los subsistemas. En la Tabla 1.2.2.1 se especifican los datos de otras preparatorias en el estado (Secretaría de Educación y Cultura, 2014, p. 3-4).

Tabla 1.2.2.2 Relación de alumnos en el Bachillerato Sonorense Escolarizado

Tipo de Sostenimiento	Preparatoria	Alumnos	Escuelas	Porcentaje Alumnos
Bachillerato Estatal	Por Cooperación	385	3	0.34
Bachillerato Federal	De Arte	112	1	0.10
	General	1763	2	1.57
	CETMAR	3184	4	2.84
	CBTIS	23360	15	20.83
	CBTA	6934	11	6.18
	CONALEP	12900	14	11.50
	Por Cooperación	343	1	0.31
Bachillerato Autónomo	COBACH	27650	29	24.66
	CECYTES	17105	30	15.26
	Bachillerato a Distancia	2862	20	2.55
	Telebachillerato	140	10	0.12
Bachillerato Particular	General	15183	112	13.54
	Técnico	205	2	0.18
	Total	112126	254	100

Fuente: ***Inicio de Cursos 2013-2014 por sostenimiento*. SEC**

Tabla 1.2.2.2 Relación de alumnos en el Bachillerato Sonorense Escolarizado

Tipo de Sostenimiento	Preparatoria	Alumnos	Escuelas	Porcentaje Alumnos
Bachillerato Estatal	Por Cooperación	466	4	0.41
Bachillerato Federal	De Arte	111	1	0.09
	General	1,716	2	1.51
	CETMAR	3,528	4	3.11
	CBTIS	23,735	15	20.94
	CBTA	6,739	10	5.95
	CONALEP	13,386	14	11.81
	Por Cooperación	339	1	0.3
Bachillerato Autónomo	COBACH	27,203	28	24
	CECYTES	17,162	29	15.14
	Bachillerato a Distancia	2,684	20	2.37
	Telebachillerato	444	22	0.39
Bachillerato Particular	General	15,644	119	13.8
	Técnico	195	2	0.17
	Total	113,352	271	100

Fuente: ***Inicio de Cursos 2014-2015 por sostenimiento*. SEC**

Enseguida se describe de manera muy general la organización del planteamiento curricular en las instituciones de Educación Media Superior de interés. Tal como se especificó anteriormente, COBACH es una de las instituciones que conforman la modalidad del Bachillerato General con Capacitación para el Trabajo, mientras que CBTIS y CECYTES son parte del Bachillerato Tecnológico.

Las exigencias internas y externas sugeridas por los procesos de globalización son cada vez más demandantes. ¿Cómo se ha respondido desde la institución escolar a estas exigencias? En el caso concreto de la matemática del bachillerato, ¿en qué se traducen esas respuestas?, ¿a qué tipo de cambios se responde en la clase de matemáticas?, ¿qué de novedoso encontramos en el planteamiento matemático curricular?

Con el propósito de desarrollar las distintas competencias, los estudiantes deben cursar una serie de asignaturas en las cuales se abordan diferentes contenidos relacionadas a cada una de las áreas del conocimiento.

En el caso del Colegio de Bachilleres las asignaturas de Matemáticas son las siguientes, las cuales se han organizado de acuerdo al semestre en el que se cursan:

Tabla 1.2.2.3 Asignaturas de Matemáticas en el Bachillerato General con capacitación para el trabajo

SEMESTRE	ASIGNATURAS
Primero	Matemáticas I
Segundo	Matemáticas II
Tercero	Matemáticas III
Cuarto	Matemáticas IV
Quinto	(Formación propedéutica) Cálculo Diferencial, Matemáticas Financieras I, Probabilidad y Estadística I
Sexto	(Formación propedéutica) Cálculo Integral, Matemáticas Financieras II, Probabilidad y Estadística II.

En el Bachillerato Tecnológico las asignaturas de Matemáticas se organizan de la siguiente manera:

Tabla 1.2.2.4 Asignaturas de Matemáticas en el Bachillerato Tecnológico

SEMESTRE	ASIGNATURAS
Primero	Álgebra
Segundo	Geometría y Trigonometría
Tercero	Geometría analítica
Cuarto	Cálculo Diferencial
Quinto	(Formación propedéutica) Cálculo Integral
Sexto	(Formación propedéutica) Probabilidad y Estadística, Matemáticas Aplicadas.

Hemos seleccionado la primera asignatura del plan de estudios que aborda temas matemáticos para realizar nuestro estudio, la cual corresponde a Álgebra. El programa de esta asignatura se estructura de diferentes formas de acuerdo al interés de la institución. En las instituciones de Bachillerato General con Capacitación para el Trabajo, se contemplan 5 horas por semana y la asignatura es Matemáticas 1, mientras que en el Bachillerato Tecnológico se dedican 4 horas por semana y la asignatura recibe el nombre de Álgebra.

En cada uno de los programas se especifican las competencias que adquirirán los estudiantes después de haber cursado esa asignatura, los cuales se exponen a continuación**.**

COBACH

El Bachillerato General con Capacitación para el Trabajo, se apega al plan de estudios diseñado por la Dirección General de Bachillerato (DGB), y para el caso de Matemáticas 1, el programa propone la estructuración de los contenidos correspondientes en 10 bloques (Secretaría de Educación Pública, 2013):

BLOQUE I: RESUELVES PROBLEMAS ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS. Se pone en práctica el uso de variables y expresiones algebraicas en el contexto de los números positivos.

BLOQUE II: UTILIZAS MAGNITUDES Y NÚMEROS REALES. Se utilizan variables y expresiones algebraicas en el contexto de los números reales, se considera el uso de tasas, razones, proporciones y la variación proporcional como caso simple de relación lineal entre dos variables.

BLOQUE III: REALIZAS SUMAS Y SUCESIONES DE NÚMEROS. Se estudian sucesiones y series (aritméticas y geométricas) de números, bosquejando funciones discretas (lineales y exponenciales).

BLOQUE IV: REALIZAS TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS I.

BLOQUE V: REALIZAS TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS II. En los Bloques IV y V se estudian operaciones con polinomios en una variable y factorizaciones básicas y de trinomios (incluyendo productos notables y expresiones racionales).

BLOQUE VI: RESUELVES ECUACIONES LINEALES I.

BLOQUE VII: RESUELVES ECUACIONES LINEALES II.

BLOQUE VIII: RESUELVES ECUACIONES LINEALES III. En los Bloques VI, VII y VIII se estudian, respectivamente, los sistemas de ecuaciones de 1x1, 2x2 y 3x3, en estrecha conexión con la función lineal.

BLOQUE IX: RESUELVES ECUACIONES CUADRÁTICAS I.

BLOQUE X: RESUELVES ECUACIONES CUADRÁTICAS II.

Finalmente en los Bloques IX y X se estudian las ecuaciones cuadráticas en una variable y su relación con la función cuadrática.

En el programa de la asignatura se específica que los estudiantes desarrollarán todas las competencias genéricas y en cuanto a las disciplinares este primer curso se centra en las competencias 1, 2, 3, 5 y 8, las cuales se fortalecen en cada uno de los bloques que forman el programa. Además en el programa se proponen actividades de enseñanza, de aprendizaje e instrumentos de evaluación.

Con el propósito de cumplir con lo establecido en el programa, el Colegio de Bachilleres se apoya en el diseño de textos acordes a éste, ya que el libro de texto juega un papel muy importante en esta institución, en particular al referirnos a las planeaciones semestrales.

Al diseñar la planeación se realiza una distribución de los contenidos del libro de texto en los periodos de tiempo disponibles y se incluyen las especificaciones señaladas en las “cartas descriptivas”, y esto conforma el plan de clase. Las cartas descriptivas, presentaban el programa del curso de la asignatura, el cual estaba basado en el módulo de aprendizaje (Valenzuela, 2010).

A partir de esta planeación, la institución solicita la entrega de reportes, conocidos como “avances programáticos”, los cuales se entregan tres veces en el semestre, en ellos se especifica qué tanto se logró avanzar en el programa, y de forma más específica, cuántas de las actividades del módulo se lograron realizar. Esto obliga al docente a apegarse a las actividades diseñadas en el módulo, no dejándole mucho tiempo para implementar otras no incluidas en el texto.

Además, en las reuniones de academias de plantel por asignatura, uno de los temas a tratar es el avance programático, así los profesores tiene la oportunidad de comparar sus avances en contraste al avance de otros profesores que imparten la misma asignatura (Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, 2012)

Este tipo de acciones solicitadas por parte de la institución, nos dejan ver la importancia que tiene para ellos la utilización del libro de texto por parte de los profesores y alumnos.

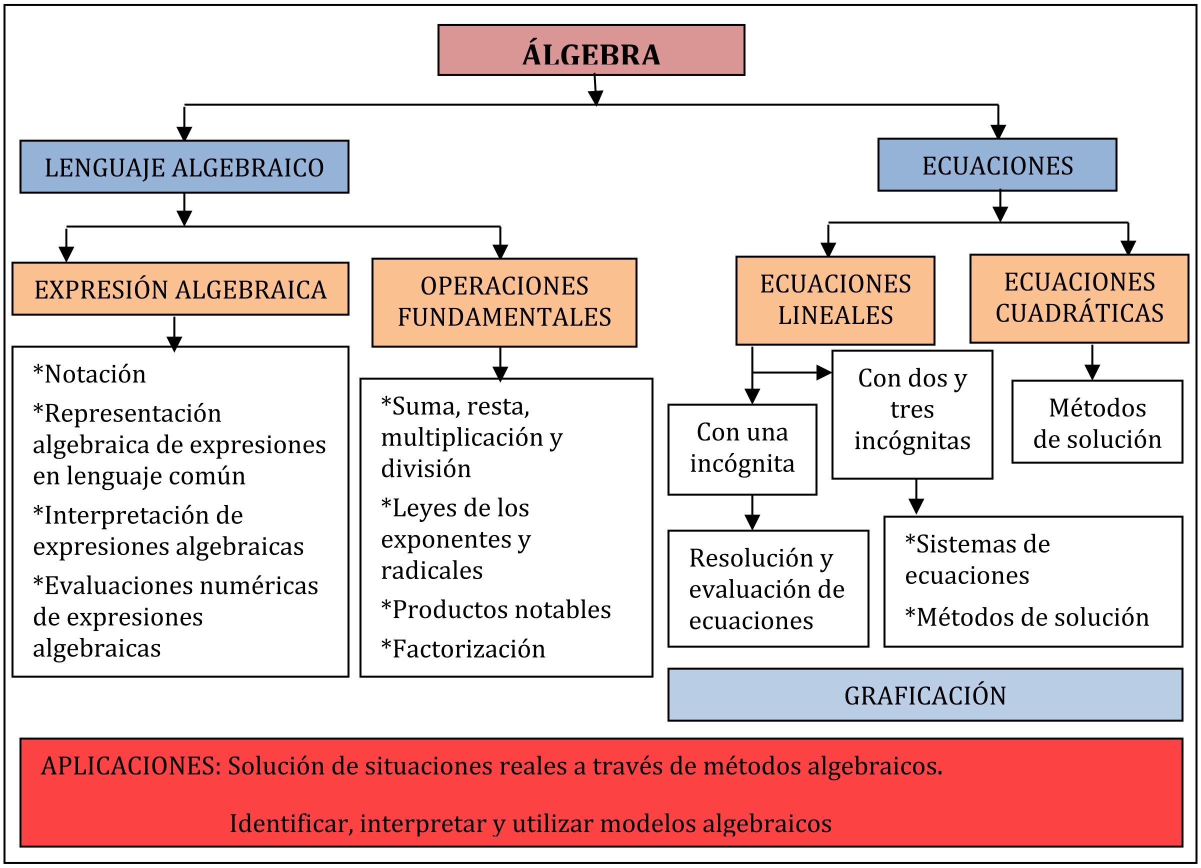
CBTIS y CECYTES

El Bachillerato Tecnológico propone el siguiente objetivo para la asignatura: "Que el estudiante desarrolle el razonamiento matemático y haga uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas de la vida cotidiana, dentro y fuera del contexto matemático, representados por modelos donde se apliquen conocimientos y conceptos algebraicos" (Acuerdo Secretarial 653, 2013). Para ello, se estructura la materia considerando los siguientes elementos:

- Conceptos fundamentales: integran conocimientos para explicar los fenómenos o procesos que constituyen los aprendizajes principales de la materia.
- Conceptos subsidiarios: agrupan diversas temáticas o elementos y tienen la función de proporcionar información específica, que al integrarse, construye el concepto fundamental.
- Contenidos de los conceptos subsidiarios: se refieren a conocimientos conceptuales o procedimentales a través de los que es posible construir los conceptos subsidiarios.
- Contenidos transversales: representan cada una de las etapas involucradas en la solución de un problema, desde la comprensión hasta la interpretación de la solución.
- Contenidos procedimentales: sitúan las habilidades más representativas a promover, fortalecer y potenciar en el campo disciplinar de las matemáticas.

- Contenidos actitudinales: organizan las actitudes y los valores más representativos, posibles de desarrollar mediante las estrategias didácticas en matemáticas.

Lo cual da como resultado la siguiente estructura:



Cabe aclarar que el planteamiento por competencias de la RIEMS no resulta ajeno a las instituciones del Bachillerato Tecnológico. La Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI), había implementado en sus 452 planteles, planes y programas de estudio basados en competencias: "un modelo educativo promotor de la acertada participación del alumno en su entorno, condición sin duda redituable no sólo para el propio estudiante, sino para la misma sociedad" (Sada, 2005).

Bajo esta reforma se concibieron los libros de texto de la colección DGETI, los cuales se siguen utilizando en algunas instituciones de bachillerato tecnológico. Estos textos se diseñaron como una síntesis de las experiencias de los docentes, incluyendo una metodología que tiene como referencia la estructura curricular vigente, así como los planes y programas de estudio.

En estas instituciones el propósito del texto es ser utilizado como material de apoyo para profesores y alumnos con el cual se fortalezca el proceso de aprendizaje.

Como se puede ver en el caso de la DGB, los programas están organizados en bloques, mientras que en el Bachillerato Tecnológico la organización se determina a partir de los conceptos fundamentales y los conceptos subsidiarios, los cuales se desglosan en una variedad de contenidos. En lo que se refiere a los temas de estudio, COBACH cubre una gama más amplia, aunque en esta institución se asignan cinco horas de clase por semana, mientras que CBTIS y CECYTES asignan cuatro. La diferencia entre los contenidos se da en los temas incluidos en los primeros tres bloques de la DGB, los cuales se relacionan con cuestiones de aritmética y de la transición entre ésta y el álgebra a partir de relaciones numéricas. Sin embargo, el resto de los contenidos guarda una gran similitud pese a la forma en que están declarados y distribuidos.

De acuerdo con el planteamiento expresado en la Reforma, ambos programas deberían ser formulados de tal modo que respondan al enfoque declarado, es decir al desarrollo de competencias genéricas y disciplinares en los estudiantes del nivel medio superior. Entonces, ¿cómo se establecen los contenidos matemáticos a estudiar en cada uno de los programas?, ¿qué se pierde o se gana al incluir o descartar determinados temas?, ¿en qué difieren con respecto a los programas que les anteceden?, ¿en qué elementos del programa se advierten las modificaciones que implica la reforma?

En esta investigación, justamente, estamos interesados en la relación que guardan los planteamientos en la RIEMS con las acciones que han realizado las diversas instituciones del bachillerato.

1.3.Planteamiento del problema

Además del aspecto curricular, la reforma se plantea objetivos que buscan mejorar los aspectos de cobertura, educación de calidad y equidad en la educación media superior, sin embargo los resultados de algunos procesos de evaluación de aprendizaje no han resultado muy alentadores. Muestra de ello son los resultados obtenidos por nuestro país en el “Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes” (PISA), los cuales siguen estando muy por debajo de los obtenidos por la mayoría de los países miembros de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE). Además en el ciclo escolar 2012-2013 la tasa de graduación en el bachillerato era menor al promedio en el que se encontraban los países miembros de esta organización a finales de la década de los años sesenta (OCDE, 2006), siendo México el país que reporta un menor avance en cobertura.

Sin embargo al implementar una reforma no es posible observar resultados inmediatamente, es natural que los cambios por más simples o profundos que sean no puedan darse de un día para otro. Finalmente son procesos cuya duración no se conoce con certeza, pero todo inicia a partir de pequeños cambios, motivados por el país, los subsistemas, las instituciones, e incluso los mismos profesores en su trabajo en el aula. Con el tiempo se deben reflejar estos cambios en los resultados obtenidos en evaluaciones, en las estadísticas al comparar la situación de México con la de otros países.

Motivadas por la RIEMS, cada una de las preparatorias en nuestro país ha realizado las modificaciones que considera convenientes para mejorar la calidad de educación que está ofreciendo, sin embargo estos cambios deben obedecer a los planteamientos de la Reforma independientemente del enfoque que hasta ahora haya tenido la institución. Es decir, aun cuando se le otorga cierto grado de libertad a las instituciones, existen ciertos puntos que son obligatorios.

Como ya se mencionó, además de los cambios realizados en planes y programas de estudio, también se han implementado a nivel nacional estrategias de formación de directivos y docentes en modalidades de diplomados y especialidades que buscan el desarrollo de competencias requeridas para la aplicación de la reforma. Como podemos ver, las instituciones han intentado realizar las adecuaciones que impone la RIEMS, renovando planes y programas, libros de texto, creando programas de formación de docentes y directivos, y otras acciones que posibilitan su ingreso al SNB. En este escenario, formulamos la siguiente problemática ¿las acciones realizadas reflejan realmente los planteamientos de la RIEMS?

Particularmente, en el plano curricular, ¿qué modificaciones se han realizado a los contenidos disciplinares?, ¿estas modificaciones han detonado otros procesos, como acciones de formación de profesores sobre distintas formas de trabajar con los estudiantes?, ¿qué versión de competencias se está promoviendo actualmente?

En este sentido, y con el propósito de tener elementos para responder a esta serie de interrogantes que hemos venido planteando, pretendemos estudiar las competencias disciplinares promovidas por el bachillerato en Sonora, en particular con relación al álgebra, considerando el Marco Curricular Común. Para esto analizaremos los programas de matemáticas y los libros de texto utilizados por las instituciones más representativas del estado ya que en los programas se establecen los contenidos matemáticos y en los textos se plasman dichos contenidos utilizando estrategias que permitan desarrollar las competencias en los estudiantes.

1.3.1. Las preguntas de investigación

Para desarrollar la presente investigación es importante plantear las preguntas clave que buscamos responder. Éstas nos permitirán dirigir la investigación y enfocarnos en la situación de interés.

Actualmente cada una de las instituciones del nivel medio superior ha diseñado sus planes de estudio y libros de texto de acuerdo al enfoque por competencias. Sin embargo ¿cómo se está interpretando el concepto de competencia?

Al hablar sobre competencias en el MCC nos estaremos refiriendo particularmente a las disciplinares del área de matemáticas, sin embargo una competencia matemática se define como:

> “la habilidad de poner en práctica el conocimiento matemático para dar solución a situaciones o problemas de la vida cotidiana o de las mismas matemáticas. Entiendo el conocimiento matemático como todo aquello que implica saber matemáticas como puede ser: el manejo de conceptos matemáticos, agilidad en el manejo de fórmulas o algoritmos, la interpretación de datos, de tablas, de gráficos de diversos tipos. El uso que se le dé a estos conocimientos matemáticos debe estar enmarcado en un contexto social. Además se debe tener la posibilidad de

> argumentar o comunicar resultados." (Ramírez, 2006, citado por Perdomo, 2013, p. 71)

Es por ello que al identificar las competencias matemáticas podemos describir las competencias disciplinares que desarrollarán los estudiantes. En este sentido nuestra pregunta de investigación queda expresada de la siguiente forma:

¿Qué competencias matemáticas específicas del álgebra, se están desarrollando y cómo se promueven en algunas instituciones de educación media superior del Estado de Sonora?

Buscamos dar respuesta a esta pregunta al centrarnos particularmente en los planes, programas y textos de las instituciones de estudio, considerando como casos separados cada una de las instituciones, con el propósito de realizar una descripción y análisis de las competencias promovidas en el nivel medio superior.

Para realizar este análisis utilizaremos el Enfoque Onto-Semiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática, (EOS), como marco teórico, el cual nos permitirá identificar las competencias matemáticas promovidas por la institución mediante la descripción y análisis de los sistemas de prácticas puestas de manifiesto ante ciertos problemas. Por lo cual de las preguntas anteriores se desprenden las siguientes:

Con relación al conocimiento algebraico, ¿Cuáles son las prácticas institucionales promovidas en los planes, programas y textos del bachillerato?

¿Cómo se relacionan las prácticas institucionales que se desprenden de los planes, programas y textos del bachillerato con la versión de competencias que se está promoviendo?

La razón para considerar el texto en nuestra investigación subyace en la importancia que tiene éste dentro del aula de clase. De forma más específica los libros de texto constituyen una parte fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje en diversos países, especialmente en México. Desde el nivel básico, hasta el medio superior, podemos ver cómo las diversas instituciones promueven la utilización de los textos en sus distintas disciplinas.

En el área de matemáticas particularmente, es en el libro de texto donde se ve reflejada la transformación del saber sabio, el cual no es enseñable directamente, tal como lo afirma Chamorro (2006).

Lo anterior es respaldado por los trabajos de Chevallard y sus colaboradores (Chevallard, 1985; Chevallard y Joshua, 1982, citado por González y Sierra, 2004, p. 390), en los cuales

> "se utiliza la noción de transposición didáctica relativa a las transformaciones entre el saber sabio y el saber enseñado y entre los que existe un escalón intermedio correspondiente al saber a enseñar que se refleja en el texto del saber. Este texto del saber es lo que el profesor piensa que tiene que enseñar una vez que se han publicado las orientaciones y libros de texto y se ha fijado la interpretación del currículo a través de diversos proyectos de centro y aula. Lo más próximo a este texto del saber, o saber a enseñar, es el libro de texto, cuyo contenido y estructura reflejan esas transformaciones del saber sabio."

Indiscutiblemente el papel que juega el libro de texto en el aula, y su utilización como un recurso importante en la enseñanza. En algunos casos, el libro de texto llega a sustituir la planeación del profesor, convirtiéndose en el único recurso empleado en la práctica docente.

Al tener un rol tan importante en los procesos educativos, el libro de texto debiera estar en constante escrutinio, con el propósito de evaluar su pertinencia disciplinar y didáctica. Además, en caso de presentarse aspectos potencialmente conflictivos, éstos deben señalarse y realizarse los ajustes convenientes. De esta forma, el libro de texto será una herramienta que contribuya a la conducción del proceso docente, permitiendo el desarrollo de las habilidades matemáticas.

Diversos autores comparten esta opinión, siendo el análisis de textos una componente fuerte en el área de matemática educativa. Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberria y Sarasúa (2013, p.247) lo expresan de la siguiente forma:

> "El estudio de los manuales escolares está considerado como campo de investigación, tanto en lo que se refiere a su relación con el currículo, como en lo

> que se refiere a la historia y epistemología; además de la importancia relativa a la transmisión del conocimiento. Dentro del ámbito de las matemáticas, y por lo que respecta a las clasificaciones de investigaciones curriculares en educación matemática, aparecen los libros de texto como una de las variables destacadas.”

Por lo tanto, se busca a través de la siguiente investigación realizar un estudio sobre la relación que guardan los manuales escolares con el Marco Curricular Común.

1.3.2. Objetivos

Hemos planteado las preguntas que deseamos responder en este trabajo de investigación, para lograrlo es importante que indiquemos los objetivos que nos llevarán en esa dirección.

El *objetivo general* de nuestro trabajo consistirá entonces en:

“Identificar y analizar las competencias matemáticas promovidas en el nivel medio superior correspondientes a ciertos contenidos de álgebra, además de establecer la relación que guardan con las competencias disciplinares planteadas en la RIEMS.”

Los *objetivos particulares* que nos permitirán alcanzar el objetivo general se enlistan a continuación:

- **Identificar y describir las prácticas institucionales promovidas en los planes de estudio de cada institución, en los programas y textos de álgebra.**
- **Relacionar las prácticas institucionales que se desprenden de los planes, programas y textos del bachillerato con las competencias disciplinares.**

Como ya se dijo, para instituciones de bachillerato en el Estado de Sonora.

1.3.3. El tema matemático de estudio

El tema matemático que hemos seleccionado es “Sucesiones y series”, algunas de las motivaciones que nos llevaron a realizar esta selección se presentan en seguida.

Este tema forma parte de lo que se conoce en matemáticas como pensamiento algebraico, el cual alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra. Por un lado, permite encontrar el sentido del lenguaje matemático y por otro, tiende un puente entre la aritmética y el álgebra, en el entendido de que el álgebra tiene una gran presencia como contenido matemático en diferentes etapas en la educación, en especial a partir de la Educación Secundaria, (Secretaría de Educación Pública, 2006).

Uno de los objetivos en matemáticas es tratar de describir procesos de formas globales, definir patrones y comportamientos generales, pero al mismo tiempo, se espera que los estudiantes sean capaces de realizar deducciones a partir de reglas y patrones ya definidos. Para Mason (1996, citado por Socas, 2011), esto es el corazón de las matemáticas y consiste en ver tanto los casos particulares en la generalidad como ver la generalidad a través de los casos particulares. Para Radford es tal la importancia de este aspecto, que incluso identifica tres tipos de generalización, en especial al referirse a patrones geométrico-numéricos (Radford, 2001).

En el programa de estudio para la asignatura de Matemáticas 1 se establecen los desempeños que se espera del estudiante al finalizar cada bloque, y en particular las habilidades a desarrollar por los estudiantes al estudiar “Sucesiones y series” (Osorio, 2013). Éstas incluyen el identificar series y sucesiones numéricas, diferenciarlas, clasificarlas, construcción de gráficas, obtención del enésimo término de una sucesión y la resolución de problemas usando series y sucesiones aritméticas y geométricas.

De esta forma el bloque de “Sucesiones y Series” además de permitir el desarrollo de habilidades en matemáticas, también promueve la mayoría de las competencias disciplinares en los estudiantes, lo cual se apega a los objetivos planteados en la Reforma.

1.3.4. Estado del arte

Entre los trabajos de investigación elaborados por especialistas en matemática educativa encontramos una diversidad de temáticas, en esta sección daremos a conocer algunas investigaciones afines a la que se expondrá en el desarrollo de este trabajo.

Como antecedente tenemos el trabajo realizado por Trujillo (2011), el cual se centra en la caracterización del significado institucional de referencia de las nociones de la teoría de conjuntos en el Colegio de Bachilleres en el Estado de Sonora. Esta investigación fue realizada por un egresado de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora.

En el desarrollo de esta investigación se realizó un análisis del libro de texto "Probabilidad y Estadística", el cual se utilizaba en el quinto semestre. Para realizar este análisis se distribuyeron sus contenidos en apartados denominados Unidades de Análisis. Una vez realizada dicha distribución, se hizo una distinción de elementos de significado y posteriormente se construyó la Configuración Epistémica asociada a cada Unidad de Análisis. También se identificaron las prácticas promovidas alrededor de los objetos matemáticos de las nociones básicas de la teoría de conjuntos. Por último se caracterizó el significado institucional de referencia través de las configuraciones epistémicas logradas.

Como resultado de este trabajo de investigación se llegó a la conclusión de que existe una distancia significativa entre las competencias declaradas por parte de la institución, en las cuales se declaran los conocimientos y habilidades que desarrollarán los estudiantes, y las que se busca promover con el uso del libro de texto analizado.

En 2008 al introducirse en nuestro país la Reforma Integral de la Educación Media Superior, siguiendo un enfoque basado en competencias, surge la necesidad de realizar investigación sobre el desarrollo de estas competencias en el bachillerato. Moreno y Grijalva (2013) plantean como objetivo principal de su investigación la identificación de las competencias disciplinares en el área de Matemáticas, y en qué medida, son desarrolladas por estudiantes del bachillerato.

La evaluación de estas competencias se realizó mediante la aplicación de un instrumento diseñado ex profeso y el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las situaciones problema presentes en el instrumento. En este análisis se identifican prácticas matemáticas, objetos matemáticos y procesos matemáticos intervinientes. Posteriormente se realizó la correspondencia entre estos elementos y los descriptores de las competencias de PISA, las cuales a su vez se asociaron con las competencias disciplinares de la RIEMS.

Las investigaciones mencionadas anteriormente fueron realizadas en el estado de Sonora, sin embargo también se han realizado investigaciones sobre competencias y análisis de textos en otras regiones del país, además internacionalmente también se encuentran estudios relacionados con enfoques basados en competencias.

Entre ellas encontramos el trabajo realizado por Cabrera (2009), quien presenta propuestas de diseño sobre Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) y su relación con el desarrollo de competencias bajo la RIEMS. En este trabajo se realiza un análisis, desde la Socioepistemología, de las situaciones de aprendizaje diseñadas bajo el Pylvar por diferentes autores, lo cual permitió afirmar que estas situaciones se presentan como una alternativa adecuada para el desarrollo de competencias, como las señaladas en la RIEMS, al menos para aquellas relacionadas con el estudio del cambio. De la misma forma en nuestra investigación se busca identificar si las actividades propuestas en los libros de texto permiten el desarrollo de competencias pero con relación al pensamiento algebraico.

En Maldonado, Rodríguez y Tuyub (2007) se realizó un estudio, desde el enfoque de la Socioepistemología, sobre el discurso en los libros de texto de Matemáticas del bachillerato y su relación con la práctica escolar. Dentro de este trabajo se incluye una sección donde se analiza el discurso matemático de tres libros de texto utilizados por profesores que imparten el tema de función en el Colegio de Bachilleres de Yucatán. A través de este estudio se observó la gran distancia que existe entre lo que proponen los autores de los textos analizados y lo desarrollado en dos de ellos. En nuestro análisis no sólo nos enfocaremos en el discurso de los textos, sino que además buscamos compararlo con la noción de competencias que se establece en la RIEMS.

Rubio (2012) en su tesis doctoral propone un método para evaluar competencias, basada en la técnica de análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en las prácticas que propone el Enfoque Ontosemiótico. Se trata de un método que consta de dos fases: la primera consiste en una evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas que se infieren de las respuestas de los alumnos; mientras que la segunda consiste en un método a priori de desarrollo de una determinada competencia.

De acuerdo a lo que proponemos en nuestra investigación, consideraremos la propuesta de Rubio (2012) como referencia para construir nuestra metodología en el análisis de los textos, ya que se tiene el objetivo común de identificar el desarrollo de las competencias.

Por otro lado se encuentran los trabajos de Monterrubio y Ortega (2009) y González y Sierra (2004), los cuales proponen metodologías para realizar análisis de textos con el fin de realizar una elección del texto que mejor se adapte a las necesidades educativas de los docentes. Además consideran que los libros de texto constituyen una fuente de investigación para los interesados en la historia de la educación, ya que permiten estudiar los enfoques que se han dado, a lo largo de la historia, a un concepto en particular o a las matemáticas como disciplina, considerando los distintos enfoques curriculares bajo los cuales son diseñados.

Aunque existen diversas investigaciones que proponen diferentes metodologías para el análisis de textos y otras con relación al desarrollo de competencias, no existen muchos trabajos enfocados a la identificación de las competencias que se promueven en los libros de texto, por ello la importancia de esta investigación, ya que proporcionará una visión sobre las competencias matemáticas que se están promoviendo en algunas instituciones de bachillerato.

2. Elementos teóricos y metodológicos

2.1. Marco teórico

El marco teórico que utilizaremos es el Enfoque Onto-Semiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font 2009, Godino y Batanero, 1994).

2.1.1. Problemas, prácticas e instituciones

Lester (1980, citado por Godino y Batanero, 1994, p.7) define un problema como "una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución". Aunque esto se aplica en cualquier área de conocimiento, nuestro interés se centrará en los problemas matemáticos.

De esta forma cualquier acción o pensamiento de un sujeto (pudiendo ser una persona o una agrupación), encaminadas a la resolución de problemas o con el fin de comunicar, validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas, se considerará como práctica matemática (Godino y Batanero, 1994).

Pero más que una práctica particular ante un problema concreto, consideraremos los sistemas de prácticas puestas de manifiesto ante tipos de situaciones problemáticas.

En Godino, Batanero y Font (2009), se concibe a las personas involucradas en una misma clase de problemas como institución. Esto conlleva la realización de prácticas sociales particulares, condicionadas por los instrumentos de la institución, sus reglas y modos de funcionamiento, las cuales consideraremos como sistema de prácticas institucionales.

Se considera que una práctica es significativa si esta práctica desempeña una función en los procesos de resolución de un problema, o bien para darla a conocer, validarla y/o generalizarla (Godino y Batanero, 1994).

2.1.2. Objetos y procesos

En la resolución de problemas se toman una diversidad de decisiones, como ¿resolveré el problema utilizando lenguaje algebraico o de manera gráfica? ¿Qué teorema puedo utilizar? ¿Será correcta esta afirmación? Las decisiones que toma el sujeto para responder a estas cuestiones nos lleva a identificar ciertas prácticas, y al realizar estas prácticas surgen de una diversidad de objetos matemáticos, tales como diferentes lenguajes, procedimientos, conceptos, teoremas, propiedades, argumentaciones, por mencionar algunos, los cuales están relacionados entre sí.

Puesto que nos hemos concentrado en los sistemas de prácticas institucionales hablaremos también de objeto institucional, debido a que las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, concederemos al objeto una relatividad respecto a las mismas. De esta forma, el objeto institucional consiste en un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas.

Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos*: términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., expresados de forma escrita, oral, gestual entre otros.
- *Situaciones–problemas*: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.
- *Conceptos-definición*: los aceptados por la institución y dados a conocer como definiciones.
- *Proposiciones*: enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
- *Argumentos*: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

La consideración de una entidad como primaria es relativa a los juegos de lenguaje en que participan; también tienen un carácter recursivo, en el sentido de que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por los tipos restantes.

Los objetos institucionales antes mencionados se articulan entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Éstas reciben el nombre de configuraciones epistémicas al tratarse de redes de objetos institucionales y cognitivas si se refieren a los objetos personales.

Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas en que participan, pueden ser consideradas desde diferentes facetas o dimensiones duales de acuerdo al papel que juegan dentro de la configuración, es aquí donde consideramos los procesos.

En el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática, sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática. Para los propósitos de este trabajo consideraremos los siguientes procesos:

- *Idealización*: consiste en la transformación de una situación a otra descartando los aspectos que no son indispensables.
- *Materialización*: representar mediante una imagen una idea.
- *Significación*: expresar en el lenguaje verbal diferentes objetos matemáticos.
- *Representación*: representar gráficamente o analíticamente objetos cuyas características se hacen explícitas mediante el lenguaje verbal.
- *Personalización*: descomposición de una tarea en otras más simples con el propósito de guiar al estudiante en la resolución.
- *Institucionalización*: formalización de los conocimientos.
- *Particularización*: pasar de una situación general a una particular.
- *Generalización*: pasar de situaciones particulares a una general.
- *Argumentación*: proporcionar una justificación matemática.
- *Algoritmización*: realizar un procedimiento que implique cálculos numéricos.
- *Enunciación*: describir alguna característica, relación o resultado entre diferentes objetos matemáticos.

- *Problematización:* describir una situación problema que se ajuste a una serie de datos.
- *Comunicación:* momento en el cual se describe el procedimiento para resolver alguna situación problema.

Estos procesos están directamente ligados a los objetos matemáticos es por ello que al realizar la identificación de objetos, también aparecen los procesos.

2.1.3. Significados

Otro elemento importante es el de significado, el cual lo entenderemos como el sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona, (significado personal), o compartida en el seno de una institución, (significado institucional), ante una cierta clase de situaciones. En este trabajo de investigación estamos considerando al Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora como la institución en la cual se buscan resolver problemas como el diseño de los programas o la elección de los libros de texto que se utilizarán.

En el EOS se propone una clasificación de estos significados, pero centraremos nuestra atención en los tipos de significado institucional, particularmente, el de referencia y el pretendido. El significado institucional pretendido consiste en el sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio, para el caso de la institución de interés, este significado consistiría en el plan de clase utilizado por el docente. Por otro lado, el significado institucional de referencia, se conforma por el sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. Este significado queda expresado en los libros de texto y los programas de la materia.

2.1.4. Trayectorias epistémicas asociadas al conocimiento algebraico

En la teoría (Godino, Contreras, y Font, 2006) se distinguen diferentes procesos instruccionales, (cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático), en los cuales se distinguen seis dimensiones que se encuentran interconectadas: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional.

Es de nuestro interés estudiar la faceta epistémica a través de las trayectorias, las cuales consisten en la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional. Estos componentes van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.

Al requerirse la identificación de los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones que se establecen entre los mismos, recurrimos a las configuraciones epistémicas. La trayectoria epistémica es por lo tanto, la distribución en el tiempo de estas configuraciones.

Las relaciones entre los objetos matemáticos nos permitirán identificar las prácticas y corresponderlas con los atributos de las competencias disciplinares, proporcionando una descripción de las competencias que se busca desarrollar en los textos. De esta forma tendremos una versión de competencias de cada institución, siendo esto lo que se busca conocer mediante la investigación.

2.2.Acciones metodológicas

La investigación que se llevó a cabo se considera de carácter cualitativo y se centra en el análisis ontosemiótico de los libros de texto de tres instituciones considerando los programas de estudio. En esta sección se describen las acciones metodológicas que se realizaron para alcanzar los objetivos planteados.

Primeramente fue necesario realizar una revisión bibliográfica, en la cual se indagó sobre los aspectos principales de la RIEMS, la importancia del tema matemático de estudio, además de conocer los trabajos que hasta el momento se tienen sobre análisis de textos.

Posteriormente se procedió a la selección de los libros de texto que se revisarán y las secciones que se analizarán. Esta selección se realizó basándose en los textos representativos de las instituciones y los contenidos relacionados con el pensamiento algebraico.

Además se hizo la identificación de los atributos de las competencias disciplinares, particularmente los relacionados al conocimiento algebraico. Este proceso se describe de forma más detallada en la siguiente sección.

Después se procedió a la elaboración de las trayectorias epistémicas en cada uno de los textos, para lo cual se realizó una división de los apartados correspondientes en unidades de análisis. Éstas se organizaron en tablas en las cuales se describieron los objetos matemáticos primarios involucrados en cada unidad, además se describieron las relaciones que guardan entre sí, lo que constituye la configuración epistémica de cada unidad de análisis. Una vez hecha la configuración se identificaron los procesos relacionándolos con los atributos de las competencias. De esta forma se podrán describir las competencias que se están promoviendo en el texto y en qué medida se está haciendo.

A partir de esto se concluye con un resumen de las prácticas promovidas alrededor de los objetos matemáticos y sus relaciones, con lo cual se describe el significado institucional de referencia. Después de esto se relaciona el significado institucional con la noción de competencias globalmente, dando respuesta a la pregunta de investigación.

2.2.1. Atributos de las competencias disciplinares

Para cada una de las competencias disciplinares se construyeron los atributos considerando el trabajo de Marín, Guzmán y Zapata (2012) así como las competencias genéricas establecidas en la RIEMS y algunos trabajos sobre competencias en álgebra (Filloy, Puig y Rojano, 2008). A continuación se presentan cada una de ellas:

COMPETENCIA	ATRIBUTOS
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	*1a. Identifica constantes, incógnitas y variables así como el papel que juegan en la situación problema.* *1b. Representa las incógnitas y variables involucradas mediante literales.* *1c. Emplea casos particulares con el fin de identificar el comportamiento de las variables.* *1d. Generaliza una situación particular mediante una representación algebraica.* *1e. Expresa ideas y conceptos utilizando diferentes tipos de representaciones de los objetos matemáticos.* *1f. Articula los diferentes tipos de representaciones de los objetos matemáticos.* *1g. Maneja las TIC para obtener información y expresar ideas sobre la situación planteada.* *1h. Infiere resultados a partir de las representaciones utilizadas.*

	1i. Considera las restricciones del modelo utilizado. *1j. Solicita apoyo ante una situación que lo rebase.*
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	*2a. Identifica las variables en una situación problema y las ordena de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.* *2b. Identifica las interrogantes del problema.* *2c. Modela la situación utilizando representaciones algebraicas, numéricas, gráficas o figurativas.* *2d. Propone diferentes maneras de resolver los problemas.* *2e. Resuelve el problema, utilizando algoritmos consistentes para el modelo.* *2f. Considera la congruencia de las ideas en el lenguaje utilizado al momento de plantear una situación problema.* *2g. Expresa ideas y conceptos utilizando representaciones de los objetos matemáticos.* *2h. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo considerando los puntos de vista de otras personas.* 2i. *Utiliza las TIC para dar respuesta a una situación problema.*
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	*3a. Expresa ideas y conceptos mediante diferentes representaciones.* *3b. Identifica las interrogantes del problema y ofrece una solución* *3c. Evalúa sus argumentos y opiniones con el fin de identificar la coherencia de su resultado con el contexto del problema.* *3d. Sintetiza los resultados obtenidos para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.* *3e. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.* *3f. Relaciona los resultados con una familia de situaciones-problema similares.*
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	*4a. Verifica el resultado obtenido considerando las condiciones del problema.* *4b. Comunica sus ideas de manera estructurada integrando el dominio de la lengua materna y el dominio del discurso matemático.* *4c. Evalúa sus argumentos con el fin de presentar una solución coherente en base a conocimientos, reglas y procesos matemáticos.* *4d. Domina diferentes medios tecnológicos para expresar su solución al problema.* *4e. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva aunque sean contrarias a las propias.*
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables	*5a. Identifica las variables presentes en un proceso social o natural.* *5b. Establece las relaciones existentes en un proceso social o*

de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	*natural.* 5c. *Expresa las relaciones existentes mediante diferentes tipos de representación.* 5d. *Utiliza las TIC para procesar e interpretar las relaciones entre las variables.* 5e. *Infiere el comportamiento de un proceso social o natural a partir de las representaciones utilizadas.*
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	6a. *Identifica las magnitudes y propiedades físicas de diferentes objetos.* 6b. *Identifica las magnitudes y propiedades de los objetos en diferentes situaciones problemas.* 6c. *Utiliza los diferentes recursos de medición disponibles para cuantificar las magnitudes del espacio y de los objetos que lo rodean.* 6d. *Expresa las magnitudes y propiedades mediante diferentes tipos de representación y las interpreta.* 6e. *Sintetiza las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.* 6f. *Contrasta las propiedades físicas del espacio que lo rodea con fenómenos similares de manera experimental o mediante su representación matemática.* 6g. *Utiliza las fórmulas apropiadas para calcular áreas, perímetros, volúmenes, etc.*
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.	7a. *Identifica el tipo de variables (deterministas o aleatorias) que aparecen en el fenómeno o proceso.* 7b. *Utiliza los procedimientos relacionados con los fenómenos deterministas y aleatorios de acuerdo al tipo de variable.* 7c. *Comunica sus ideas de manera estructurada de acuerdo al enfoque implementado.* 7d. *Evalúa los argumentos y opiniones considerando su relevancia y pertinencia dentro del contexto determinista o aleatorio.* 7e. *Propone un enfoque considerando los puntos de vista de otras personas.*
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	8a. *Identifica los elementos involucrados en tablas, mapas, diagramas, figuras, gráficas y textos.* 8b. *Identifica las relaciones y el papel que juegan los elementos que constituyen los diferentes tipos de representaciones de los objetos matemáticos.* 8c. *Infiere resultados en base al comportamiento observado en tablas, mapas, diagramas y textos.* 8d. *Sintetiza la información expresada mediante tablas, gráficas, diagramas y textos.* 8e. *Articula los diferentes tipos de representaciones de los objetos matemáticos.*

3. El significado institucional de referencia

Tal como se ha descrito anteriormente son tres las instituciones que consideramos para realizar esta investigación. En esta sección se realizará el análisis de los textos, por lo cual es necesario determinar los contenidos que habrán de considerarse en cada uno para elaborar las trayectorias epistémicas y la descripción de las prácticas institucionales promovidas.

El texto o módulo de aprendizaje de COBACH lleva por título “Matemáticas 1” (Vargas et al., 2013). Esta es la primera versión la cual se terminó de imprimir en el año 2014; está organizado en nueve bloques; cada uno de estos bloques se conforma por secuencias didácticas que a su vez constan de tres tipos de actividades: inicio, desarrollo y cierre. En este caso, analizaremos las siguientes secuencias didácticas:

Del Bloque 1, la Secuencia Didáctica 2, titulada “¿Por qué es importante la herramienta algebraica?” y del Bloque 3, la Secuencia Didáctica 1: “Representaciones algebraicas” y la Secuencia Didáctica 2: “Sucesiones y series”.

Para nuestro estudio en CBTIS consideraremos el texto “Álgebra” (Sada, 2005), la primera edición es del año 2005 y contamos con la octava reimpresión del año 2014. Este texto cuenta con una “Introducción” que incluye conceptos fundamentales, en seguida aparecen dos unidades y cada una de éstas se distribuye en tres niveles diferentes. De este texto tomaremos la sección 1.1 titulada “Expresión algebraica” y sus subsecciones 1.1.1 Terminología y 1.1.2 Lenguaje común y lenguaje algebraico.

En el caso de CECYTES el texto o módulo de aprendizaje se titula “Álgebra” (Valencia, Valenzuela y González, 2009). La primera versión es del año 2009 y el texto actual es la reimpresión 2014. Éste está organizado en 3 unidades divididas en subsecciones, cada una compuesta por secuencias didácticas.

De este texto consideraremos la sub-sección 1.1 titulada “Utiliza el lenguaje algebraico en la representación de problemas”, y de esta sub-sección las siguientes Secuencias Didácticas: Describe las partes de un término algebraico, Convierte una expresión algebraica al lenguaje común, Convierte una expresión algebraica del lenguaje común al algebraico y Calcula el valor numérico de una expresión algebraica.

3.1. Trayectoria epistémica del texto de COBACH

El texto o módulo de aprendizaje de COBACH “Matemáticas 1” (Vargas et al., 2013). Está organizado en nueve bloques; cada uno de estos bloques se conforma por secuencias didácticas que a su vez constan de tres tipos de actividades: inicio, desarrollo y cierre. En este caso, analizaremos las siguientes secuencias didácticas:

Del Bloque 1, la Secuencia Didáctica 2, titulada “¿Por qué es importante la herramienta algebraica?” y del Bloque 3, la Secuencia Didáctica 1: “Representaciones algebraicas” y la Secuencia Didáctica 2: “Sucesiones y series”. Además se considerará la Sección de Problemas y la Autoevaluación que aparece al final de los bloques, tomando solamente los problemas relacionados con la secuencia. Se seleccionaron estos apartados por ser las primeras secciones en el texto relacionadas con el álgebra.

Para realizar el análisis de la trayectoria epistémica se dividieron las secuencias didácticas seleccionadas en unidades de análisis, tomando como referencia cada una de las actividades. Posteriormente se muestran las relaciones existentes entre los objetos matemáticos y las prácticas que se desprenden de éstas.

3.1.1. Bloque 1, secuencia didáctica 1

La primera secuencia didáctica corresponde al Bloque 1 del plan de estudios de la DGB, particularmente está relacionado con los desempeños “Representa relaciones numéricas y algebraicas entre los elementos de diversas situaciones” y “Soluciona problemas aritméticos y algebraicos” además el objeto de aprendizaje de acuerdo al programa sería “Modelos aritméticos y algebraicos”.

Algunas de las actividades que se proponen en el programa de Matemáticas I (Secretaría de Educación Pública, 2013) son las siguientes:

*Preparar con anticipación algunas narraciones de situaciones reales o hipotéticas (situadas en el contexto sociocultural que les es propio) a partir de las cuales se elaborarán modelos aritméticos o algebraicos.

*Conducir al grupo de clase para encontrar la solución matemática al problema o situación planteado.

*Retroalimentar al grupo sobre los aciertos obtenidos y la corrección de errores tanto en el establecimiento del modelo como en su solución.

*Proponer ejemplos, cuya complejidad aumente gradualmente, a partir de los cuales el estudiantado practicará tanto el establecimiento de modelos como la solución a los mismos.

* Emplear la calculadora para estimar la solución numérica o algebraica y/o verificar los resultados obtenidos.

Las actividades aquí planteadas buscan desarrollar en los estudiantes las competencias 1, 2, 3, 5 y 8 mediante los objetos de aprendizaje "Modelos aritméticos y algebraicos". Sin embargo las actividades que aparecen en el programa son sugerencias y las instituciones tienen la opción de complementarlas, modificarlas o cambiarlas por aquellas que se consideren más apropiadas. Además las actividades no especifican los problemas que se realizarán, el orden y/o la temporalización.

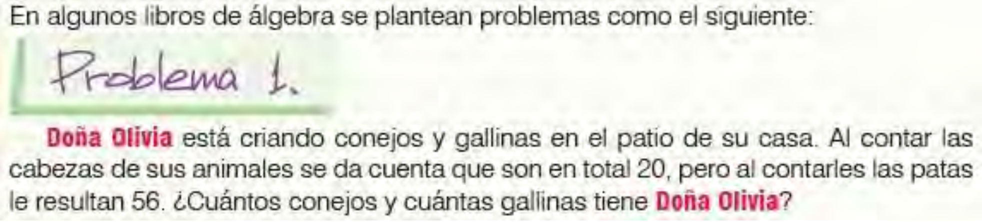
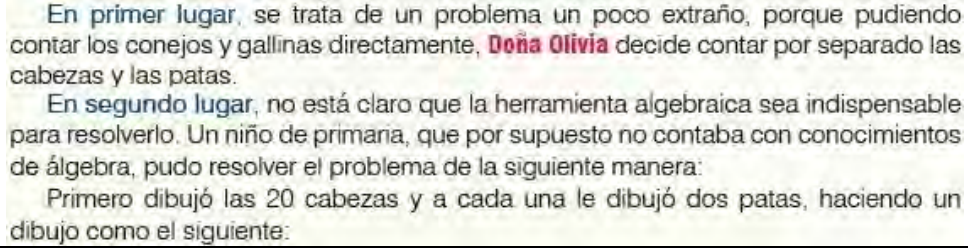
En seguida se presenta la secuencia didáctica del texto que busca cubrir este apartado del programa desde la perspectiva del Colegio de Bachilleres. Procederemos a analizar cada una de las actividades utilizando las herramientas que nos proporciona el EOS, posteriormente se realizará un resumen de las prácticas promovidas en la trayectoria con el propósito de identificar cuáles y en qué nivel se están promoviendo las competencias.

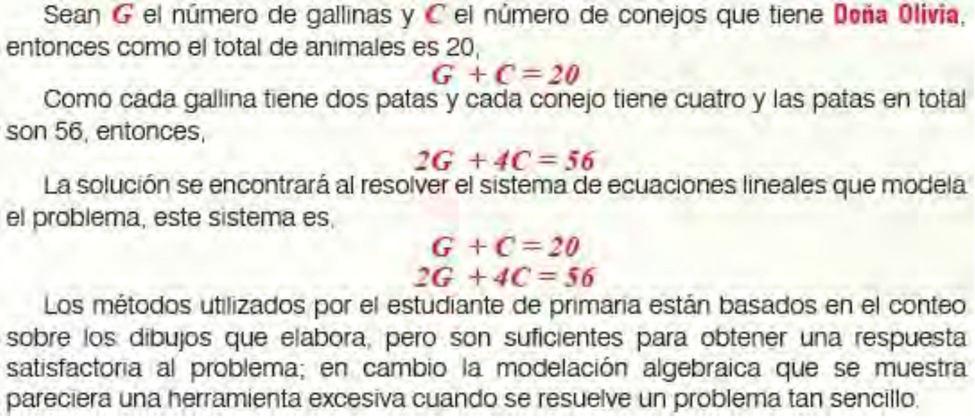
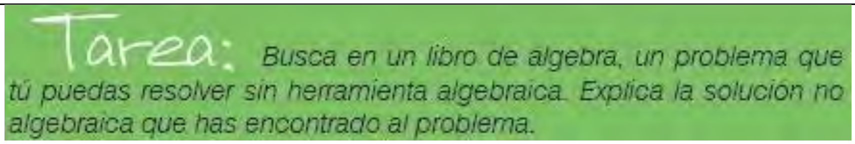
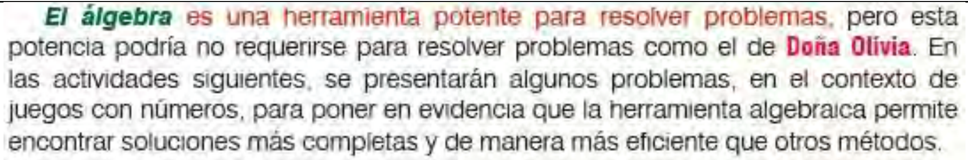
La primera parte del análisis incluye las siguientes configuraciones epistémicas:

C.E.	Descripción
1	Actividad 1: Inicio
2	Actividad 2: Desarrollo
3	Actividad 3: Desarrollo

C.E.	Descripción
4	Actividad 4: Cierre
5	Sección de Problemas
6	Autoevaluación

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 1

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
1.1	 Secuencia Didáctica 2.- Actividades de Inicio Por qué es Importante la herramienta algebraica Actividad: 1 Actividad Individual **¿Con aritmética o con álgebra?** **El álgebra** puede ser una herramienta potente para resolver problemas, esta potencia se pone en evidencia cuando resolvemos problemas que serían difíciles de resolver usando otras herramientas como la aritmética o las gráficas.	**Situaciones-Problemas:** *¿Cuántos conejos y cuántas gallinas tiene Doña Olivia? (1.2). *Resolver un problema sin usar la herramienta algebraica (1.5) **Lenguajes:** ***Verbal**: planteamiento de problemas, explicaciones, argumentaciones. ***Numérico:** $\mathbb{N}$, conteo y representación de cantidades. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas G, C; planteamiento de ecuaciones $(G + C = 20, 2G + 4C = 56)$ ***Ilustrativo:** Diagrama (1.3).
1.2	 En algunos libros de álgebra se plantean problemas como el siguiente: Problema 1. **Doña Olivia** está criando conejos y gallinas en el patio de su casa. Al contar las cabezas de sus animales se da cuenta que son en total 20, pero al contarles las patas le resultan 56. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas tiene **Doña Olivia**?	
1.3	 En primer lugar, se trata de un problema un poco extraño, porque pudiendo contar los conejos y gallinas directamente, **Doña Olivia** decide contar por separado las cabezas y las patas. En segundo lugar, no está claro que la herramienta algebraica sea indispensable para resolverlo. Un niño de primaria, que por supuesto no contaba con conocimientos de álgebra, pudo resolver el problema de la siguiente manera: Primero dibujó las 20 cabezas y a cada una le dibujó dos patas, haciendo un dibujo como el siguiente:	

1.3	 Como le quedaban 16 patas por acomodar, le fue dibujando dos patas más a cada cabeza, cuando agotó las patas que le quedaban, su dibujo se veía así: Entonces concluyó que **Doña Olivia** tiene 8 conejos y 12 gallinas. Pero el problema no está planteado en el libro para que se resuelva de esta manera, la respuesta que se espera es más bien como la siguiente:	**Conceptos:** *Intervinientes:* Problemas, sistema de ecuaciones lineales, solución. **Propiedades:** *Propiedad de sustitución de la igualdad. **Procedimientos:** *Elaborar un diagrama (Ejemplo en 1.3) *Técnicas de conteo (1.3) *Plantear un sistema de ecuaciones. *Resolver el sistema de ecuaciones (1.4) **Argumentos:** Presentar una imagen con la distribución de los animales.
1.4	 Sean G el número de gallinas y C el número de conejos que tiene **Doña Olivia**, entonces como el total de animales es 20, $G + C = 20$ Como cada gallina tiene dos patas y cada conejo tiene cuatro y las patas en total son 56, entonces, $2G + 4C = 56$ La solución se encontrará al resolver el sistema de ecuaciones lineales que modela el problema, este sistema es, $G + C = 20$ $2G + 4C = 56$ Los métodos utilizados por el estudiante de primaria están basados en el conteo sobre los dibujos que elabora, pero son suficientes para obtener una respuesta satisfactoria al problema; en cambio la modelación algebraica que se muestra pareciera una herramienta excesiva cuando se resuelve un problema tan sencillo.	
1.5	 Tarea: *Busca en un libro de algebra, un problema que tú puedas resolver sin herramienta algebraica. Explica la solución no algebraica que has encontrado al problema.*	
1.6	 **El álgebra** es una herramienta potente para resolver problemas, pero esta potencia podría no requerirse para resolver problemas como el de **Doña Olivia**. En las actividades siguientes, se presentarán algunos problemas, en el contexto de juegos con números, para poner en evidencia que la herramienta algebraica permite encontrar soluciones más completas y de manera más eficiente que otros métodos.	

En esta primera configuración epistémica, se inicia la Secuencia Didáctica describiendo al álgebra, una herramienta potente empleada en la resolución de problemas pero de acuerdo al EOS lo consideramos además un objeto matemático dentro de la categoría de lenguaje. En 1.2 se plantea una situación problema la cual se resuelve mediante un procedimiento que no hace uso de la herramienta algebraica (1.3).

Para comprender los procesos de materialización y comunicación que se presentan en 1.3, el estudiante debe ser capaz de identificar las incógnitas y constantes del problema, además de las preguntas que se plantean. Posteriormente es necesario interpretar el modelo empleado así como los procedimientos que se siguieron para resolver la situación, y al analizar esta solución es importante identificar cualquier paso que se considere incorrecto o dudoso acorde al contexto del problema. Todo este análisis implica la movilización de los atributos 1a, 2a, 2b, 2c, 2e, 2g, 3b, 3c, 8a, 8b y 8d; sin embargo todos ellos aparecen en el nivel de interpretación ya que la situación es resuelta en el texto y al irse explicitando las constantes, variables, representaciones, procedimientos, etc., el estudiante debe manejar los atributos enlistados para tener una visión clara sobre los procesos en los que están implicados los objetos.

Por otro lado en 1.4 se contrasta la solución anterior con la solución que un profesor esperaría de un alumno que ha estudiado el tema de sistema de ecuaciones lineales. Dicha solución implica un proceso de generalización, además de la comunicación. Con esto es importante considerar los atributos 1b y 1d los cuales implican el tratamiento de una situación mediante elementos algebraicos, desde la representación de las incógnitas hasta el planteamiento del modelo. Además aparecen nuevamente algunos de los mencionados en el párrafo anterior utilizados en la interpretación de la actividad planteada. También debemos considerar que el estudiante debe tomar en cuenta estas dos soluciones como alternativas para resolver el problema y ser capaz de encontrar la equivalencia entre ellas, lo que nos lleva a considerar los atributos 1e, 1f y 8e.

Mediante esta actividad la institución busca promover entre los estudiantes un interés en el álgebra como una herramienta en la resolución de problemas diferentes a los planteados en esta primera configuración, con lo que se espera cambiar el significado que algunos adquieren al considerar el álgebra una herramienta excesiva e innecesaria (1.4). Es decir, es importante que el estudiante comprenda que la forma de resolver un problema debe ser la óptima y la que permita llegar al resultado de forma más directa, y si esa solución no incluye el uso del álgebra es igualmente correcta.

Aunque se hace uso de varios lenguajes matemáticos, no se observa la inclinación hacia ninguno de ellos, ya que se considera válido el lenguaje ilustrativo para resolver un problema que también puede ser resuelto mediante el lenguaje algebraico.

En la sección 1.5 se solicita como tarea encontrar un problema similar, el cual pueda ser resuelto sin necesidad de recurrir al álgebra. Al realizar esta tarea se espera que el alumno lleve a cabo procesos de representación y/o materialización, además de la comunicación. Con esto se espera que el estudiante determine el procedimiento más apropiado para resolver su problema, así reconocerá a las matemáticas como una actividad de resolución de problemas, y no solamente como una asignatura en la que los problemas deben ser resueltos de la forma que el profesor indique aun cuando el método empleado no tenga sentido. En la realización de esta tarea se están promoviendo los atributos 1a, 1e, 2a, 2b, 2c, 2d, 2e, 2f, 2g, 3a, 3b, 3c, 3f, 8a, 8b y 8c, sin embargo la condición es no utilizar modelos algebraicos para resolver el problema.

Por último en 1.6 se resalta la importancia del álgebra como una herramienta poderosa que debe emplearse en los casos que se consideren necesarios, y no de manera excesiva en problemas que no la requieren. Para ello se necesitará que el estudiante desarrolla el atributo 1.i, ya que se recurrirá al álgebra cuando otros modelos no sean suficientes para resolver determinado problema.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 2

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>


Completa los arreglos con números postitivos Los juegos con números siempre han resultado atractivos para ciertos grupos de personas, particularmente para aquellos que se sienten atraídos por las matemáticas, encontrar el número perdido es una actividad que se presenta desde primaria en algunas situaciones sencillas en las que se debe encontrar un número que cumpla ciertas condiciones dadas de antemano.

Un ejemplo de este tipo de situaciones puede ser el siguiente:

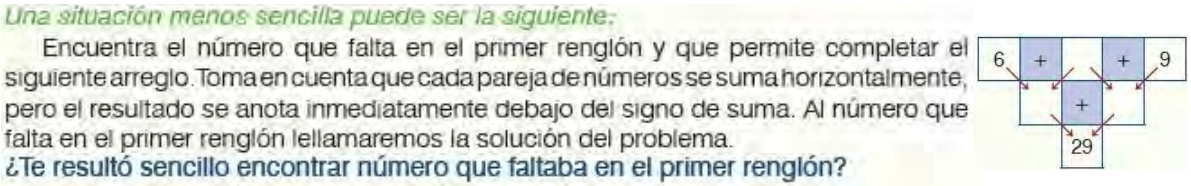
Encuentra el número que va en el cuadro:

$5 + \square = 18$ $4 + 3 \times \square = 19$

¿Cuáles son los números que van en los cuadros?
</td><td rowspan="4">

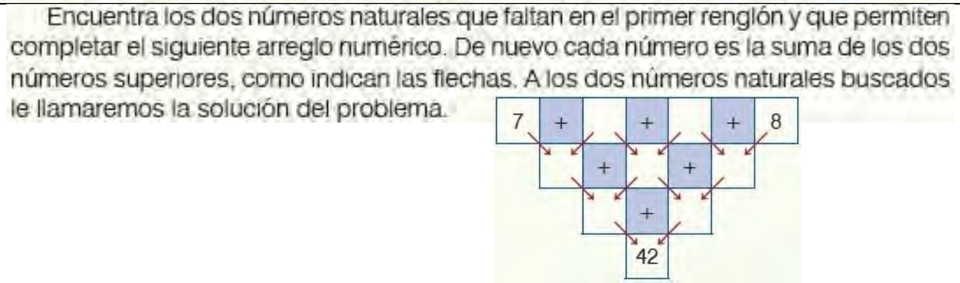
Situaciones-Problemas:
*Encontrar todos los números que cumplan con las características señaladas (2.1, 2.2, 2.3).
*Resolver un problema usando la herramienta algebraica (2.6).

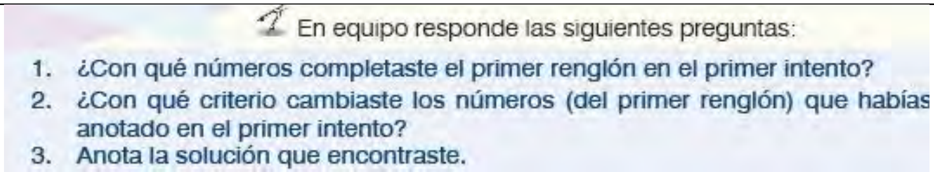
Lenguajes:
***Verbal**: planteamiento de problemas, explicaciones, argumentaciones.
***Numérico:** ℕ, conteo y representación de cantidades.
***Algebraico:** representar cantidades desconocidas x, y; plantear y simplificar una ecuación $(3x + 3y + 15 = 42)$
***Ilustrativo:** Figuras (2.2, 2.3, 2.6)

Conceptos:
Intervinientes:
Números, suma, solución del problema.
</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>

Una situación menos sencilla puede ser la siguiente:

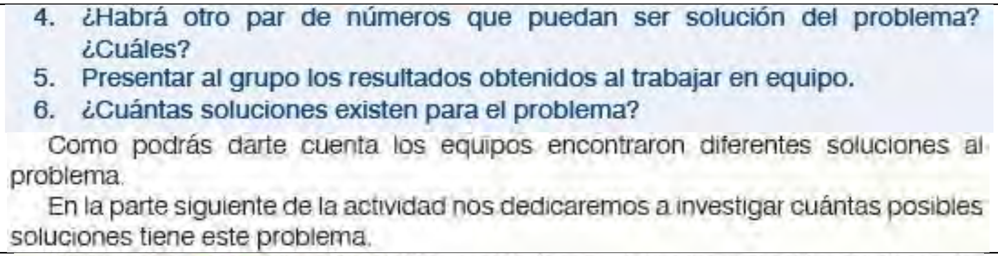
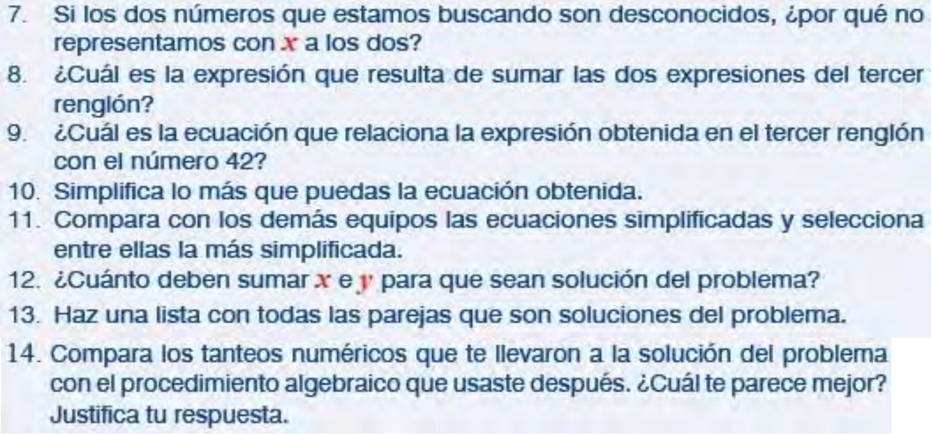
Encuentra el número que falta en el primer renglón y que permite completar el siguiente arreglo. Toma en cuenta que cada pareja de números se suma horizontalmente, pero el resultado se anota inmediatamente debajo del signo de suma. Al número que falta en el primer renglón lellamaremos la solución del problema.

¿Te resultó sencillo encontrar número que faltaba en el primer renglón?

</td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>

Encuentra los dos números naturales que faltan en el primer renglón y que permiten completar el siguiente arreglo numérico. De nuevo cada número es la suma de los dos números superiores, como indican las flechas. A los dos números naturales buscados le llamaremos la solución del problema.

</td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>

En equipo responde las siguientes preguntas:

1. **¿Con qué números completaste el primer renglón en el primer intento?**
2. **¿Con qué criterio cambiaste los números (del primer renglón) que habías anotado en el primer intento?**
3. **Anota la solución que encontraste.**
</td></tr>
</table>

2.5	 4. ¿Habrá otro par de números que puedan ser solución del problema? ¿Cuáles? 5. Presentar al grupo los resultados obtenidos al trabajar en equipo. 6. ¿Cuántas soluciones existen para el problema? Como podrás darte cuenta los equipos encontraron diferentes soluciones al problema. En la parte siguiente de la actividad nos dedicaremos a investigar cuántas posibles soluciones tiene este problema.	**Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva) *Suma de términos algebraicos. *Cerradura para la suma y la multiplicación. **Procedimientos:** *Sumas, restas, divisiones y multiplicaciones. *Suma de expresiones algebraicas simples para resolver un problema (Ejemplo en 2.6). *Simplificar una expresión (Ejemplo en 2.7). **Argumentos:** Justificación mediante la herramienta algebraica (Ejemplo en 2.7).
2.6	 Si llamamos x y y a los números que se colocan en el primer renglón, tal como se muestra, completa los espacios en blanco. 7 + x + y + 8 + + + 42	
2.7	 7. Si los dos números que estamos buscando son desconocidos, ¿por qué no representamos con x a los dos? 8. ¿Cuál es la expresión que resulta de sumar las dos expresiones del tercer renglón? 9. ¿Cuál es la ecuación que relaciona la expresión obtenida en el tercer renglón con el número 42? 10. Simplifica lo más que puedas la ecuación obtenida. 11. Compara con los demás equipos las ecuaciones simplificadas y selecciona entre ellas la más simplificada. 12. ¿Cuánto deben sumar x e y para que sean solución del problema? 13. Haz una lista con todas las parejas que son soluciones del problema. 14. Compara los tanteos numéricos que te llevaron a la solución del problema con el procedimiento algebraico que usaste después. ¿Cuál te parece mejor? Justifica tu respuesta.	

En la configuración epistémica 2 se plantean como situaciones problema, una serie de juegos donde deben encontrarse los números que cumplan con ciertas características, iniciando con la situación más simple en 2.1 hasta proponer una más compleja en 2.3. En cada uno de estos casos se le solicita al estudiante que realice el trabajo de forma individual. Los procedimientos empleados en la solución de los problemas en 2.1 y 2.2 se reducen a cálculos numéricos, principalmente sumas. Sin embargo, para la situación planteada en 2.3 existen cuatro parejas de números que permiten completar el arreglo y si se toma en cuenta el orden, son ocho las soluciones. Es así que concluimos que los problemas y procedimientos empleados en esta primera sección se relacionan mediante un proceso de algoritmización poniendo en juego los atributos 1a, 1c, 2b, 2e, 3b, 4a, 8a y 8b.

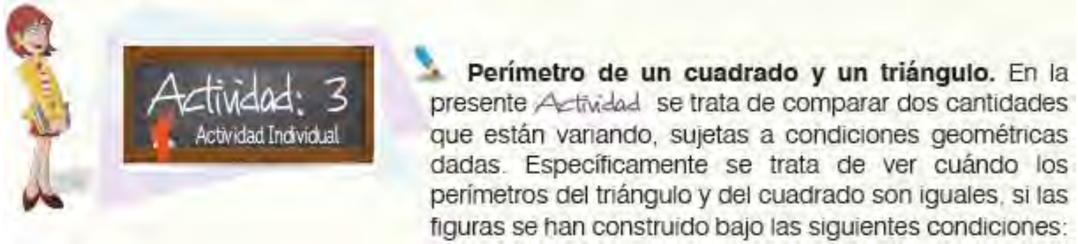
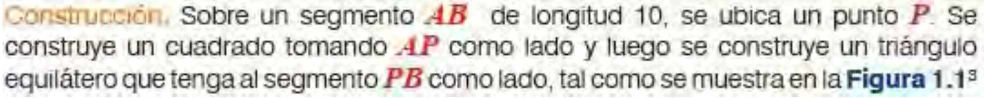
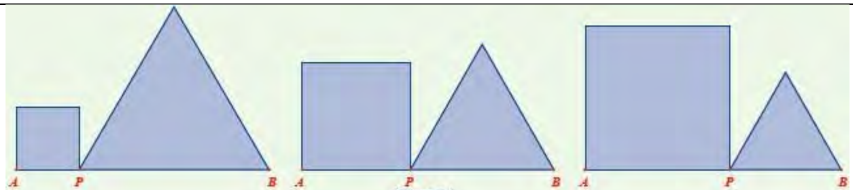
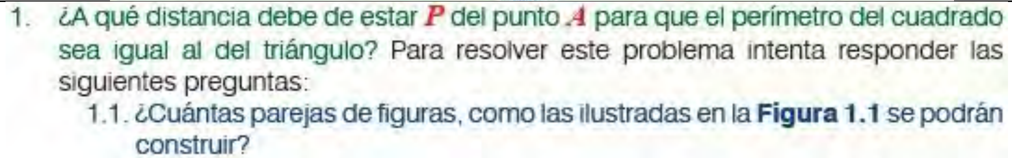
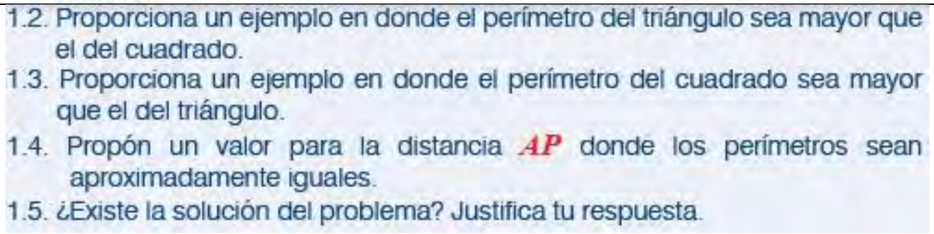
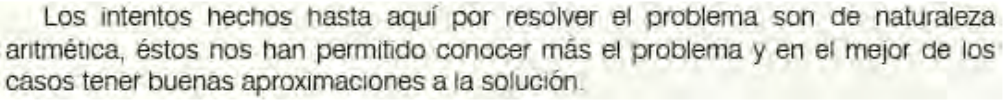
Después de que los estudiantes han trabajado en este problema de forma individual, se da la indicación de continuar la actividad en equipos. En esta parte el profesor tiene un papel muy importante: formar los equipos con estudiantes que hayan encontrado diferentes soluciones, de no ser así el resto de la actividad no tendrá sentido para ellos. Al trabajar en equipo la institución está promoviendo la cooperación entre los estudiantes y la discusión. En 2.5 la actividad en equipo pone en juego el proceso de comunicación, llegando a la conclusión de que existe más de una solución al problema. Es así que en los apartados 2.4 y 2.5 se están promoviendo los atributos 2g, 2h, 3c, 3d, 4b, 4c y 4e.

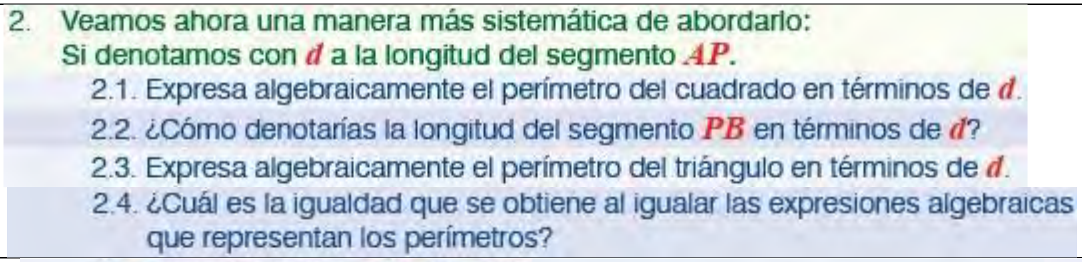
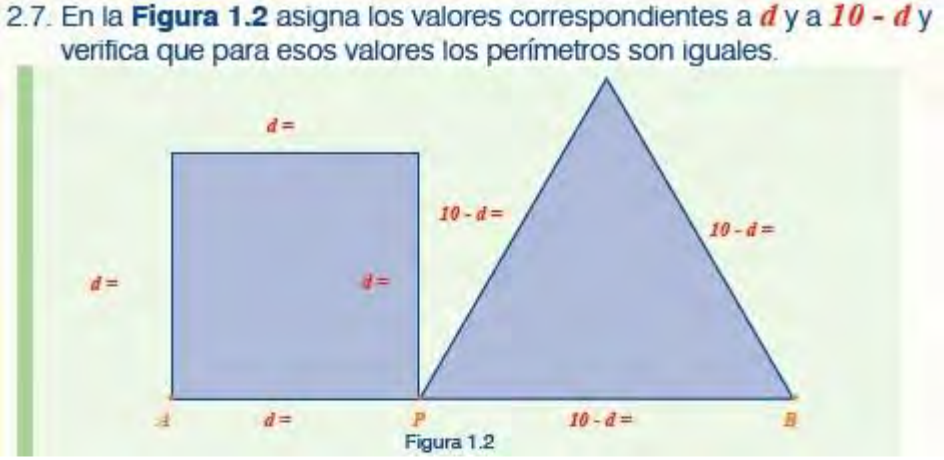
En la última parte se introduce un proceso de generalización al proponer el uso de la herramienta algebraica para determinar la totalidad de las soluciones. Sin embargo, sólo se propone una forma de abordar el problema y a partir de ahí se inicia un proceso de personalización en 2.7. Con esto se desarrollan los atributos 1b, 1d, 1h, 2a y 2c además algunos ya mencionados.

Con la actividad también se busca que los estudiantes intervengan en un proceso de argumentación, con lo cual aprenderán a justificar sus respuestas y no solamente a proporcionar una solución. Este proceso está ligado a los atributos 4b y 4c.

En esta configuración el estudiante ve la importancia de la herramienta algebraica la cual le permite encontrar un conjunto de soluciones y no solamente un caso particular. De esta forma el estudiante empezará a apropiarse de los procedimientos algebraicos al resolver problemas, considerando el modelo más apropiado para resolver determinada situación (atributos 1e, 1f, 1i, 3a y 8e).

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 3

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
3.1	 Actividad: 3 Actividad Individual **Perímetro de un cuadrado y un triángulo.** En la presente Actividad se trata de comparar dos cantidades que están variando, sujetas a condiciones geométricas dadas. Específicamente se trata de ver cuándo los perímetros del triángulo y del cuadrado son iguales, si las figuras se han construido bajo las siguientes condiciones:	**Situaciones-Problemas:** *Encontrar un punto P de tal forma en que el perímetro de las figuras sea el mismo (3.4). *Determinar el número parejas de figuras que se pueden construir dadas las condiciones en 3.2 (3.4) *Ubicar un punto P en AB de modo que el perímetro del cuadrado sea mayor que el del triángulo (3.5). *Ubicar un punto P en AB de modo que el perímetro del cuadrado sea menor que el del triángulo (3.5). **Lenguajes:** ***Verbal**: planteamiento de problemas, explicaciones, argumentaciones. ***Geométrico**: puntos *A, P, B;* construcción de segmentos y figuras. ***Numérico:** $\mathbb{R}^+$, medidas de segmentos y representación de cantidades. ***Algebraico**: representar
3.2	 Construcción. Sobre un segmento AB de longitud 10, se ubica un punto P. Se construye un cuadrado tomando AP como lado y luego se construye un triángulo equilátero que tenga al segmento PB como lado, tal como se muestra en la **Figura 1.1**[3]	
3.3	 Figura 1.1	
3.4	 1. ¿A qué distancia debe de estar P del punto A para que el perímetro del cuadrado sea igual al del triángulo? Para resolver este problema intenta responder las siguientes preguntas: 1.1. ¿Cuántas parejas de figuras, como las ilustradas en la **Figura 1.1** se podrán construir?	
3.5	 1.2. Proporciona un ejemplo en donde el perímetro del triángulo sea mayor que el del cuadrado. 1.3. Proporciona un ejemplo en donde el perímetro del cuadrado sea mayor que el del triángulo. 1.4. Propón un valor para la distancia AP donde los perímetros sean aproximadamente iguales. 1.5. ¿Existe la solución del problema? Justifica tu respuesta.  Los intentos hechos hasta aquí por resolver el problema son de naturaleza aritmética, éstos nos han permitido conocer más el problema y en el mejor de los casos tener buenas aproximaciones a la solución.	

3.6	 2. Veamos ahora una manera más sistemática de abordarlo: Si denotamos con d a la longitud del segmento AP. 2.1. Expresa algebraicamente el perímetro del cuadrado en términos de d. 2.2. ¿Cómo denotarías la longitud del segmento PB en términos de d? 2.3. Expresa algebraicamente el perímetro del triángulo en términos de d. 2.4. ¿Cuál es la igualdad que se obtiene al igualar las expresiones algebraicas que representan los perímetros?	cantidades desconocidas d; planteamiento y resolución de ecuaciones ($4d = 3[10 - d]$). **Conceptos:** *Intervinientes:* Figuras, perímetro, cuadrado, lado, triángulo equilátero, segmento, longitud, distancia, igualdad. **Propiedades:** *Construcción de figuras dada cierta información. *Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva) *Cerradura para la suma y la multiplicación. **Procedimientos:** Sumar, multiplicar, restar y dividir. Resolución de una ecuación lineal simple (Ejemplo en 3.7). **Argumentos:** Justificación mediante la herramienta algebraica (3.7). Comprobación (3.8)
3.7	 2.5. Resuelve la ecuación obtenida. 2.6. ¿Existirá otro valor para d que resuelva el problema? Justifica tu respuesta.	
3.8	 2.7. En la **Figura 1.2** asigna los valores correspondientes a d y a $10 - d$ y verifica que para esos valores los perímetros son iguales. Figura 1.2	

En esta configuración aparecen varias situaciones problema, sin embargo tres de ellas son el resultado de un proceso de personalización del problema más general: construir un cuadrado y un triángulo equilátero a partir de ciertas condiciones en 3.2, de tal forma que el perímetro de ambas figuras sea el mismo (3.1 y 3.4).

Cuando el estudiante responde la pregunta 1.1 planteada en 3.4 se lleva a cabo un proceso de significación, con relación a la noción que se tiene sobre la cantidad de puntos que puede encontrar en un segmento. Se espera que ellos se refieran a una infinidad de puntos y que este hecho les permita encontrar una solución más precisa, pues esta noción les permitirá considerar distancias con varias cifras decimales.

Sin embargo puede darse el caso del estudiante que proporcione una cantidad finita de figuras que pueden ser construidas. Independientemente de la significación, la respuesta a esta cuestión influirá en las siguientes situaciones planteadas.

Hasta este punto se han puesto en juego los atributos 1a, 1h, 2b, 3b, 6a, 6b, 6e, 6g, 8a, 8b y 8c.

Esta actividad está propuesta para ser realizada de forma individual por los estudiantes, lo cual requiere que el alumno conozca los objetos intervinientes para poder dar respuesta a las situaciones planteadas, ya que el hecho de no interpretar correctamente cualquiera de ellos, podría dirigir el problema en una dirección errónea. Sin embargo, el proceso de representación en 3.3 y 3.8 resulta bastante ilustrativo y permite clarificar algunos de los conceptos que no sean muy conocidos por los estudiantes. Por otro lado, el profesor puede tomar el papel de recordar cada uno de los conceptos o sólo hacerlo en aquellos casos que el estudiante se lo pregunte durante el desarrollo de la actividad.

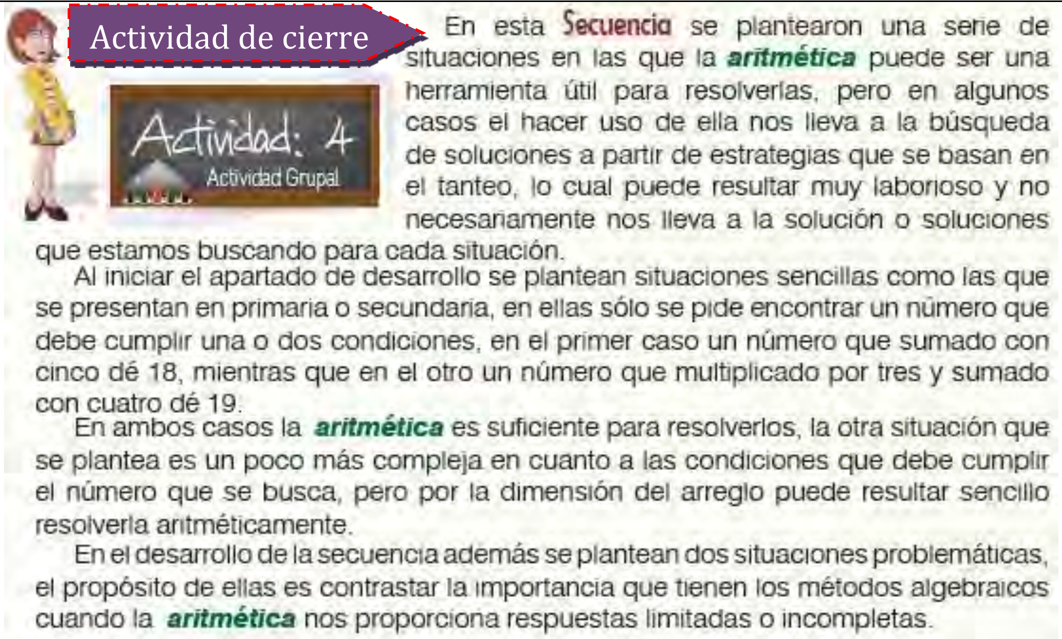
En 3.5 se plantean una serie de preguntas las cuales hemos considerado dentro de la clasificación de situaciones problemas, con estas cuestiones se busca la algoritmización (atributo 1c). Enseguida se hace una declaración que deja ver lo que pretende la institución con esta actividad: promover el uso de la herramienta algebraica en la resolución de problemas cuando la herramienta aritmética es insuficiente para proporcionar una respuesta, ya que los cálculos realizados hasta el momento han permitido a lo mucho obtener una buena aproximación de la solución. Es importante señalar que no se le resta importancia a la herramienta aritmética ya que al utilizarla el problema se comprende mejor y permite posteriormente el proceso de generalización en 3.6.

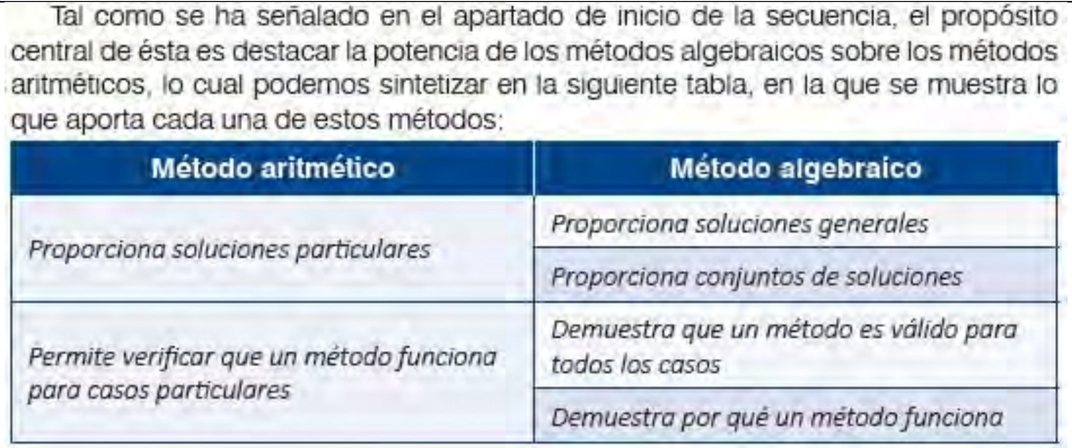
Analizando las indicaciones que se proporcionan en 3.6 y 3.7 observamos nuevamente procesos de personalización y generalización en los cuales se detectan varios atributos: 1b, 1d, 1e, 2a, 2c, 2e, 2g y 6d.

Se introduce nuevamente en el proceso de argumentación al emplear la herramienta algebraica y mediante la comprobación en 3.8, ya que el sustituir la solución en una ecuación o sistema de ecuaciones permite verificar que el resultado es correcto (atributo 4a).

Aunque en esta actividad no aparecen propiedades de manera ostensiva, en los diferentes procedimientos que se realizan se hace uso de ellas. Por ejemplo al resolver la ecuación en 3.7, una vez establecida la igualdad se deben añadir y restar términos en ambos miembros de la igualdad para poder obtener la solución. También en la construcción de las figuras se pasan por alto las características del cuadrado y del triángulo equilátero, ya que en ambos casos las figuras tienen la misma medida para todos sus lados.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 4

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
4.1	 Actividad de cierre Actividad: 4 Actividad Grupal En esta Secuencia se plantearon una serie de situaciones en las que la **aritmética** puede ser una herramienta útil para resolverlas, pero en algunos casos el hacer uso de ella nos lleva a la búsqueda de soluciones a partir de estrategias que se basan en el tanteo, lo cual puede resultar muy laborioso y no necesariamente nos lleva a la solución o soluciones que estamos buscando para cada situación. Al iniciar el apartado de desarrollo se plantean situaciones sencillas como las que se presentan en primaria o secundaria, en ellas sólo se pide encontrar un número que debe cumplir una o dos condiciones, en el primer caso un número que sumado con cinco dé 18, mientras que en el otro un número que multiplicado por tres y sumado con cuatro dé 19. En ambos casos la **aritmética** es suficiente para resolverlos, la otra situación que se plantea es un poco más compleja en cuanto a las condiciones que debe cumplir el número que se busca, pero por la dimensión del arreglo puede resultar sencillo resolverla aritméticamente. En el desarrollo de la secuencia además se plantean dos situaciones problemáticas, el propósito de ellas es contrastar la importancia que tienen los métodos algebraicos cuando la **aritmética** nos proporciona respuestas limitadas o incompletas.	**Situaciones-Problemas:** *El problema de encontrar los números que cumplan con las condiciones (4.2). *El problema de los perímetros de las figuras (4.2) **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, explicaciones, argumentaciones. ***Numérico:** $\mathbb{R}^+$, se usa para representar cantidades y medidas de segmentos. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas x, y, d; planteamiento, simplificación y resolución de ecuaciones (4.2, 4.5, 4.7). **Conceptos:** *Intervinientes:* Aritmética, solución, número, álgebra, método aritmético, método algebraico, demostrar, igualdad. *Emergentes:* Identidad, ecuación.
4.2	a. En el segundo problema de la *Actividad 2*, se presenta un arreglo de cuadros en los que debemos colocar números que cumplen ciertas condiciones, algo parecido a un sudoku, en él se pueden encontrar soluciones particulares usando la aritmética, pero es la herramienta algebraica la que nos permite generalizar respecto a la forma que tienen todas las parejas de números que resuelven el problema. **Algebraicamente se puede encontrar que la solución está formada por todas las parejas de números cuya suma es nueve, es decir $x + y = 9$, la cual es una solución general que sintetiza todas las soluciones posibles** b. En el problema de los perímetros de un cuadrado y un triángulo, aritméticamente se podrá llegar a una aproximación del resultado, y con el uso del applet realizado en el software GeoGebra se puede tener una mejor aproximación a la solución del problema, pero sólo serían eso, aproximaciones particulares. **Es el planteamiento algebraico de la situación lo que permite tener la solución exacta, así como la certeza de que sólo hay una solución posible.**	

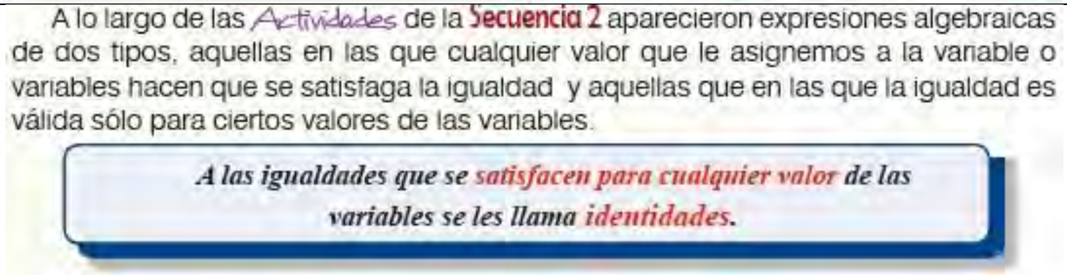
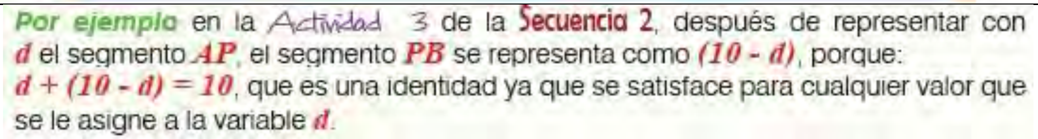
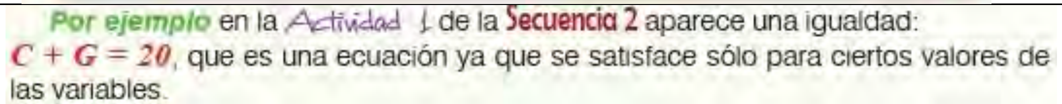
<table>
<tr>
<td>4.3</td>
<td>Tal como se ha señalado en el apartado de inicio de la secuencia, el propósito central de ésta es destacar la potencia de los métodos algebraicos sobre los métodos aritméticos, lo cual podemos sintetizar en la siguiente tabla, en la que se muestra lo que aporta cada una de estos métodos:
<table>
<tr><th>Método aritmético</th><th>Método algebraico</th></tr>
<tr><td rowspan="2"><i>Proporciona soluciones particulares</i></td><td><i>Proporciona soluciones generales</i></td></tr>
<tr><td><i>Proporciona conjuntos de soluciones</i></td></tr>
<tr><td rowspan="2"><i>Permite verificar que un método funciona para casos particulares</i></td><td><i>Demuestra que un método es válido para todos los casos</i></td></tr>
<tr><td><i>Demuestra por qué un método funciona</i></td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="5">Propiedades:

*Propiedad de sustitución de la igualdad.
*Cerradura para la suma y la multiplicación.

Procedimientos:

Simplificación de una ecuación.
Determinar el perímetro de un cuadrado y un triángulo.
Resolver una ecuación lineal.

Argumentos:

*Declaraciones en 4.2 a partir de las actividades previas.
*Ejemplos en 4.5 y 4.7</td>
</tr>
<tr>
<td>4.4</td>
<td>A lo largo de las Actividades de la Secuencia 2 aparecieron expresiones algebraicas de dos tipos, aquellas en las que cualquier valor que le asignemos a la variable o variables hacen que se satisfaga la igualdad y aquellas que en las que la igualdad es válida sólo para ciertos valores de las variables.
<i>A las igualdades que se satisfacen para cualquier valor de las variables se les llama identidades.</i></td>
</tr>
<tr>
<td>4.5</td>
<td>Por ejemplo en la Actividad 3 de la Secuencia 2, después de representar con d el segmento AP, el segmento PB se representa como $(10 - d)$, porque: $d + (10 - d) = 10$, que es una identidad ya que se satisface para cualquier valor que se le asigne a la variable d.</td>
</tr>
<tr>
<td>4.6</td>
<td><i>A las igualdades que se satisfacen sólo para ciertos valores de las variables se les llama ecuaciones.</i></td>
</tr>
<tr>
<td>4.7</td>
<td>Por ejemplo en la Actividad 1 de la Secuencia 2 aparece una igualdad: $C + G = 20$, que es una ecuación ya que se satisface sólo para ciertos valores de las variables.</td>
</tr>
</table>

En esta configuración aparece la actividad de cierre de una secuencia didáctica después de haber tenido un inicio y un desarrollo. Aquí se retoman las situaciones problema analizadas y resueltas en las actividades anteriores, iniciando primeramente con la situación en la que se debían encontrar una pareja de números que cumpliera con condiciones específicas.

Se abunda sobre este problema buscando relacionarlo con algunos elementos matemáticos, particularmente con el concepto *solución general*, ya que en este caso no solamente hay una solución para el problema, sino un conjunto infinito de soluciones y la única forma de determinar todas ellas es mediante una expresión algebraica.

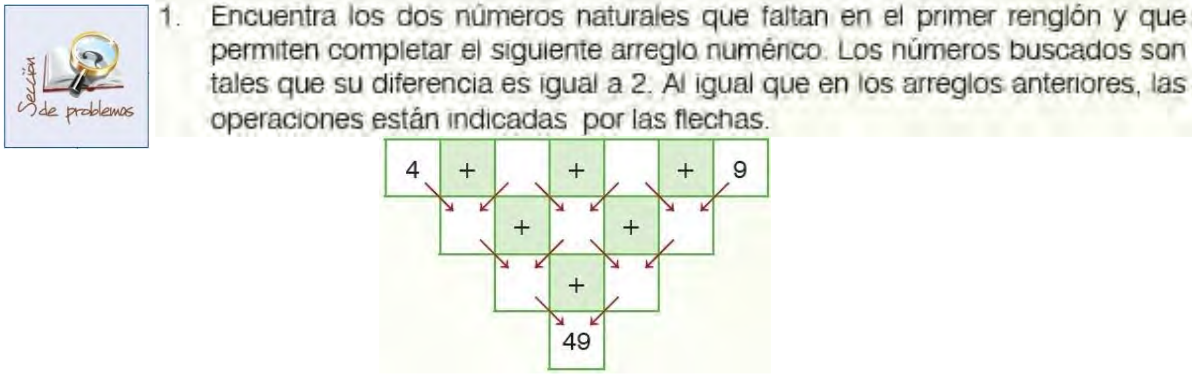
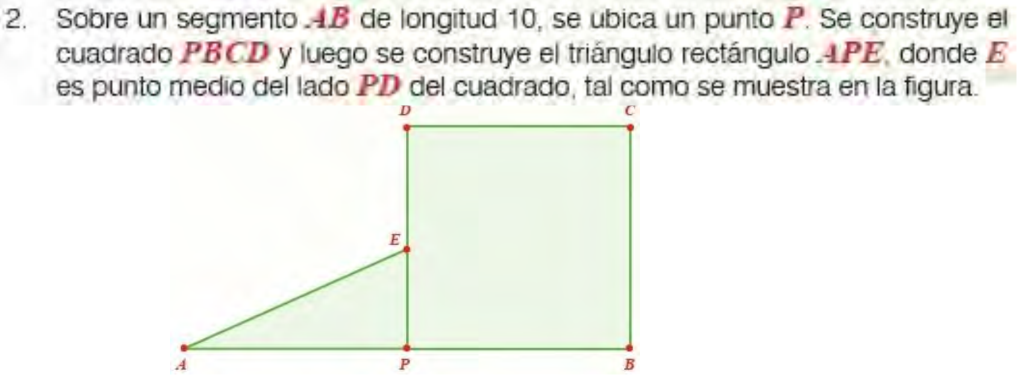
En el segundo problema revisado se buscaba igualar los perímetros de dos figuras geométricas y al mismo tiempo que los lados de ambas figuras estuvieran sobre un segmento de 10 unidades. En este caso se menciona el uso de un applet elaborado en GeoGebra que permite la manipulación de la situación; dicho applet puede ser empleado para el bosquejo de una solución aproximada, lo cual implica el desarrollo de los atributos 1g, 2i, 3e e incluso 4d si es el estudiante quien diseña el applet, sin embargo esta parte debe incluirse en la actividad 3, antes de encontrar la solución exacta. En 4.2 se establece que mediante el planteamiento algebraico de la situación es posible obtener la solución exacta, así como la certeza de que sólo hay una solución posible.

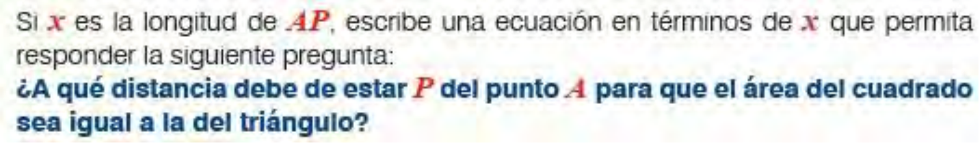
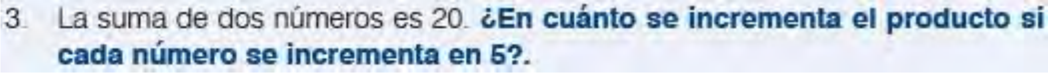
En esta actividad se busca resaltar la importancia del álgebra en la resolución de problemas mediante situaciones en las que se requiera su uso. Mediante el cuadro comparativo en 4.3, se contrastan el método aritmético y el algebraico, de esta forma los estudiantes pueden comprender que en algunas situaciones es más efectivo proceder algebraicamente y no solamente porque el profesor así lo indique. El propósito de esta secuencia es conocer la importancia del álgebra y que sea el estudiante quien lo descubra a través de la resolución de distintas situaciones, esto moviliza el manejo de los atributos 1e, 1f, 1h, 1i, 2d, 3a, 8c y 8e.

Una vez establecida esta importancia se introducen dos elementos algebraicos mediante un proceso de enunciación en 4.4 y 4.6 los cuales describen distintos tipos de igualdad que se desprenden de los problemas resueltos en las actividades previas.

Podemos notar que en la estructura de este texto la secuencia didáctica no sigue una estructura tradicional, las cuales en el cierre proponen una serie de ejercicios para reforzar lo que se ha aprendido, en esta secuencia el cierre busca desarrollar un proceso de institucionalización. Esta actividad se realiza de manera grupal, buscando que el conocimiento sea homogéneo, para lo cual es importante que tanto los estudiantes como el profesor expongan sus puntos de vista y opiniones en relación a las situaciones revisadas anteriormente, lo que implica el desarrollo de los atributos 1j, 2g, 2h, 4b y 4e.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 5

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
5.1	 1. Encuentra los dos números naturales que faltan en el primer renglón y que permiten completar el siguiente arreglo numérico. Los números buscados son tales que su diferencia es igual a 2. Al igual que en los arreglos anteriores, las operaciones están indicadas por las flechas. 	**Situaciones-Problemas:** *Problemas planteados en 5.1, 5.2 y 5.3. **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones. ***Numérico:** $\mathbb{R}^+$, cantidades, medidas de segmentos. ***Geométrico:** puntos *A, P, B;* construcción de segmentos y figuras. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas x, planteamiento y resolución de ecuaciones: $6x + 19 = 49$ $\frac{x(10-x)}{4} = (10-x)^2$ $x[20-x], [x+5][25-x])$ ***Ilustrativo:** Imagen (5.1)
5.2	 2. Sobre un segmento ***AB*** de longitud 10, se ubica un punto ***P***. Se construye el cuadrado ***PBCD*** y luego se construye el triángulo rectángulo ***APE***, donde ***E*** es punto medio del lado ***PD*** del cuadrado, tal como se muestra en la figura. 	

	 Si x es la longitud de AP, escribe una ecuación en términos de x que permita responder la siguiente pregunta: **¿A qué distancia debe de estar P del punto A para que el área del cuadrado sea igual a la del triángulo?**	**Conceptos:** *Intervinientes:* Número natural, diferencia, operaciones, segmento, longitud, cuadrado, triángulo rectángulo, área, suma, incrementar, producto. **Propiedades:** *Construcción de figuras dada cierta información. *Propiedad del ángulo llano. *Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva) *Cerradura para la suma y la multiplicación. **Procedimientos:** *Sumar, multiplicar, restar y dividir. *Resolución de las ecuaciones planteadas en cada uno de los problemas. **Argumentos:** Justificación mediante la herramienta algebraica aunque pueden presentarse como argumentos casos particulares.
5.3	 3. La suma de dos números es 20. **¿En cuánto se incrementa el producto si cada número se incrementa en 5?.**	

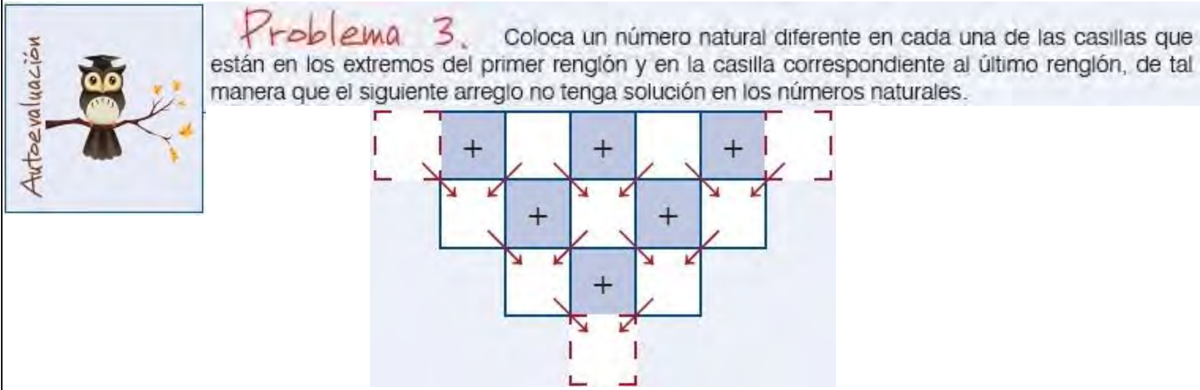
Al finalizar cada uno de los bloques en el texto encontramos el apartado “Sección de Problemas” el cual busca plantear situaciones relacionadas con las resueltas en las actividades previas. La configuración 5 recopila estos problemas y tal como observamos en 5.1, 5.2 y 5.3 aunque las situaciones son semejantes el objetivo buscado en cada una de ellas es distinto. Es así que la institución promueve en los estudiantes la aplicación de los conocimientos en situaciones diversas evitando los ejercicios de repetición.

Los estudiantes pueden tratar de resolver estas situaciones mediante procesos de algoritmización, sin embargo se espera que después de la secuencia didáctica anterior ellos consideren la generalización, de esta forma el estudiante manejará los atributos 1a, 1b, 1d, 1e, 1f, 1j, 2a, 2b, 2c, 2e, 2g, 3a, 3b, 3f, 6a, 6b, 6d, 6f, 6g, 8a, 8b y 8e. Por otro lado si relaciona los objetos mediante la algoritmización, pondrá en juego otros atributos pero debido a que no son los que la institución busca promover con los problemas, no los consideraremos en este análisis.

Es importante resaltar que los problemas planteados hasta este punto son intra-matemáticos con los cuales se busca ir más allá de la resolución. En estas situaciones se promueve la argumentación de las soluciones, lo cual es directo si el problema se resuelve por el método algebraico. De esta forma los estudiantes van desarrollando los atributos 2f, 3c, 4a, 4b, 4c y 4e.

En esta configuración aparecen una gran cantidad de conceptos intervinientes y se espera que el estudiante los comprenda mejor o esté más familiarizado con ellos después de la presente secuencia. Muchos de estos conceptos tales como diferencia, cuadrado, triángulo, etc., han aparecido desde los primeros cursos en primaria y otros durante la secundaria, con lo cual se le facilita al estudiante comprender lo que se plantea en los diferentes problemas. Además los diferentes lenguajes empleados permiten la visualización de las situaciones en los casos que se pueden representar en un lenguaje ilustrativo y geométrico.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 6

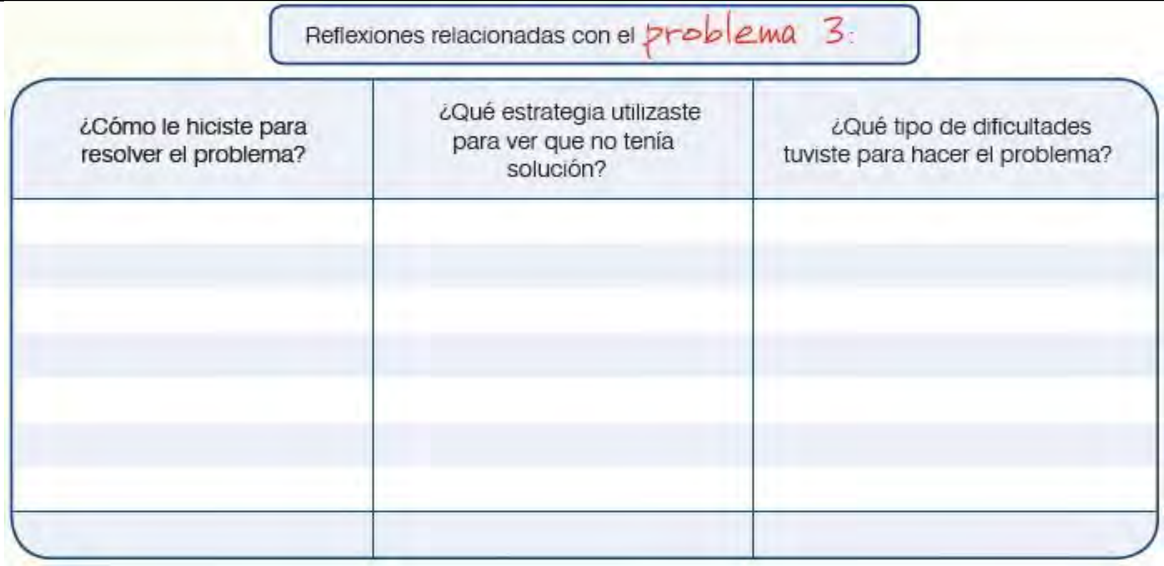
<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>6.1</td><td>
Problema 3. Coloca un número natural diferente en cada una de las casillas que están en los extremos del primer renglón y en la casilla correspondiente al último renglón, de tal manera que el siguiente arreglo no tenga solución en los números naturales. </td><td rowspan="3">**Situaciones-Problemas:**
*Problema planteado en 6.1

Lenguajes:
***Verbal:** planteamiento del problema, respuestas.
***Numérico:** valores que se asignan en el arreglo de 6.1.
***Ilustrativo:** Imagen (6.1).

Conceptos:
Intervinientes:
Número natural, solución.

Propiedades:
*Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva).

Procedimientos:
*Sumar.
*Resolución de las ecuaciones planteadas para dar respuesta al problema

Argumentos:
Justificación mediante la herramienta algebraica aunque pueden presentarse como argumentos casos particulares.</td></tr>
<tr><td>6.2</td><td>*Solución:*</td></tr>
<tr><td>6.3</td><td>Reflexiones relacionadas con el problema 3:
<table><tr><th>¿Cómo le hiciste para resolver el problema?</th><th>¿Qué estrategia utilizaste para ver que no tenía solución?</th><th>¿Qué tipo de dificultades tuviste para hacer el problema?</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

En esta configuración se ha retomado el problema de la Autoevaluación que tiene relación con la secuencia didáctica "¿Por qué es importante la herramienta algebraica?". En el problema 3 planteado en 6.1 no solamente se solicita la solución, sino que en 6.3 a través de una tabla se plantean una serie de cuestionamientos relacionados con la resolución del problema.

Se considera que antes de responder a los cuestionamientos el estudiante resolverá el problema. De acuerdo al enfoque que se está promoviendo, esto implicaría la movilización de los siguientes atributos: 1a, 1b, 1d, 2a, 2b, 2c, 2e, 3a, 3b, 8a y 8b.

Posteriormente con la pregunta *¿Cómo le hiciste para resolver el problema?*, planteada en 6.3 el alumno tiene que reflexionar en el proceso de comunicación, desarrollando así los atributos 2g, 3c, 3d, 4b y 4c. Luego debe especificar las estrategias para dar respuesta a la segunda pregunta *¿Qué estrategias utilizaste para ver que no tenía solución?* Se espera que en estas estrategias se emplee el método algebraico o que a través del método aritmético pueda llegar a una generalización que lo conduzca a una expresión algebraica.

Con el planteamiento *¿Qué tipo de dificultades tuviste para resolver el problema?,* el estudiante será capaz de identificar aquellos aspectos que le resulten complicados al momento de resolver el problema y meditar en alternativas para superar este tipo de dificultades. Por ejemplo, si trata de resolver el problema mediante una algoritmización se enfrentará a las restricciones que implica este proceso y de esta forma procedería a la generalización ya sea por sí mismo o con solicitando el apoyo de algún compañero. Estos procesos se relacionan con los atributos 1i, 1j y 4e.

De esta forma el proceso de autoevaluación no se limita a resolver una serie de problemas relacionados con los temas revisados, busca conducir al estudiante en un momento de reflexión que le permita superar las dificultades e identificar estrategias útiles en la resolución de otros problemas.

3.1.2. Bloque 3, secuencias didácticas 1 y 2

El Bloque 3 del plan de estudios de la DGB (Secretaría de Educación Pública, 2013), plantea los siguientes desempeños:

- Identifica y diferencia las series y sucesiones numéricas y así como sus propiedades.
- Clasifica las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas.
- Determina patrones de series y sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construye gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas.
- Emplea la calculadora para la verificación de resultado en los cálculos de obtención de términos de las sucesiones.
- Realiza cálculos obteniendo el enésimo término y el valor de cualquier término en una sucesión aritmética y geométrica tanto finita como infinita mediante las fórmulas correspondientes.
- Soluciona problemas aritméticos y algebraicos usando series y sucesiones aritméticas y geométricas.

El objeto de aprendizaje de acuerdo al programa sería “Representación de relaciones entre magnitudes” y “Modelos aritméticos y algebraicos”. De acuerdo al plan de estudios en esta sección el enfoque se centra en la transición de la aritmética al álgebra, considerando este proceso como algo no trivial ya que se dedica un bloque que introduce diversas actividades que contribuirán a facilitar esta transición.

Este bloque sirve de puente entre los modelos aritméticos y algebraicos ya que al estudiar sucesiones y series los estudiantes aprenden a generalizar situaciones. Algunas de las actividades que se proponen en el programa son: investigar lo relativo a series y sucesiones numéricas aritméticas y geométricas, explicar con ejemplos situados las diferencias entre sucesiones aritméticas y geométricas, proporcionar problemas situados para que sean resueltos por el alumnado, utilizar la calculadora como instrumento para obtener el resultado de la suma de una sucesión o para encontrar cualquier término, mostrar la solución de problemas con complejidad creciente relativas a series y sucesiones aritméticas y geométricas.

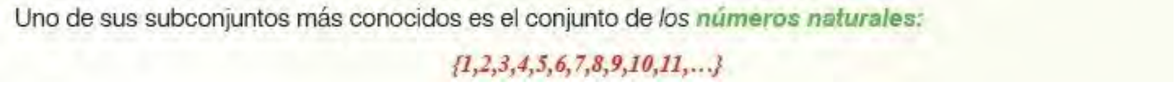
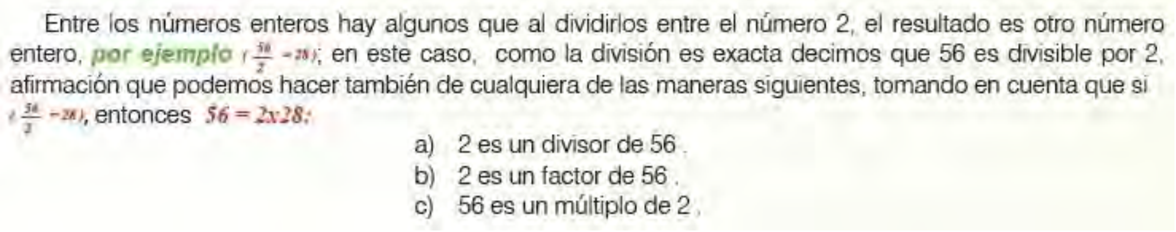
En seguida se presentan las configuraciones epistémicas que conforman las secuencias didácticas del texto y como veremos algunas de las actividades propuestas no fueron consideradas, dando un giro a lo que el programa propone. Sin embargo también aparecen actividades adicionales a las propuestas en el programa.

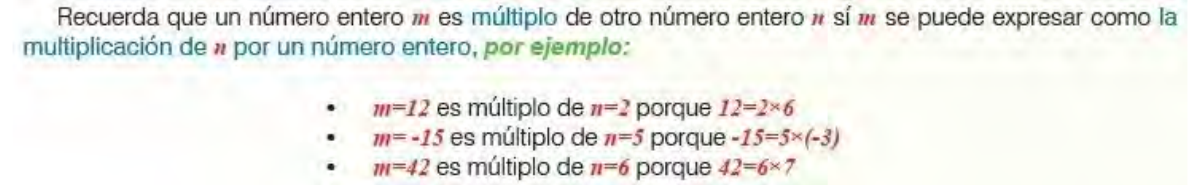
La primera secuencia didáctica de este bloque está centrada en dar a conocer la notación algebraica mientras que la segunda se centra en las sucesiones y series. Tal como se consideró en la primera parte de este análisis, se considerará una configuración por cada actividad, es así que la segunda parte de este análisis incluye las siguientes configuraciones epistémicas:

C.E.	Descripción
7	SD1 Actividad 1: Inicio
8	SD1 Actividad 2: Desarrollo
9	SD1 Actividad 3: Cierre
10	SD2 Actividad 1: Inicio
11	SD2 Actividad 2: Desarrollo

C.E.	Descripción
12	SD2 Actividad 3: Desarrollo
13	SD2 Actividad 4: Desarrollo
14	SD2 Actividad 5: Cierre
15	Sección de Problemas
16	Autoevaluación

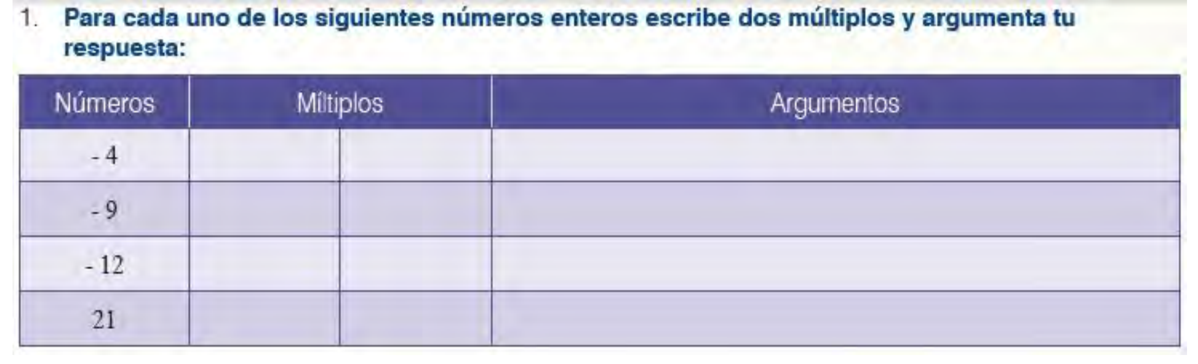
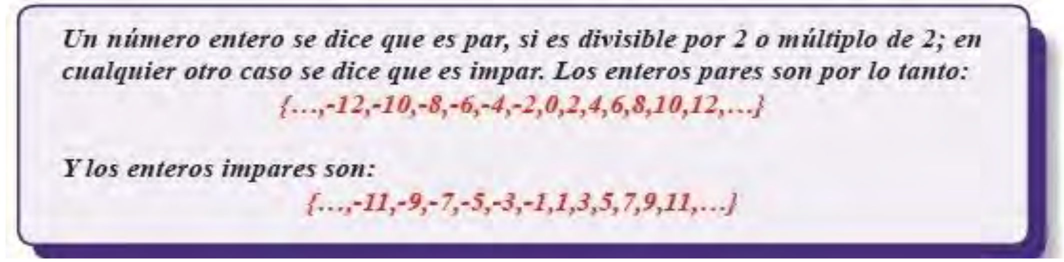
CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 7

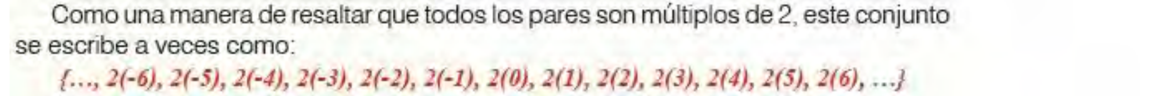
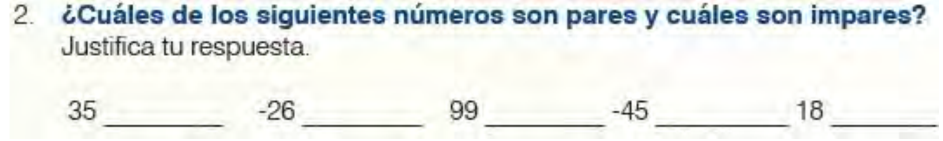
UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
7.1	 Secuencia Didáctica 1.- Actividad de Inicio Representaciones Algebraicas Actividad: 1 Actividad Individual **Números múltiplos** *Los números enteros*, como ya se vio en la escuela secundaria, forman un conjunto que usualmente se escribe como: *Z={…,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,…}*	**Situaciones-Problemas:** *Encontrar múltiplos de un número dado (7.5) *Determinar si un número es par (7.8) **Lenguajes:** ***Verbal:** definiciones, planteamiento de problemas, argumentaciones. ***Numérico:** $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$. ***Algebraico:** representar números conocidos m, n. ***Tabular:** Tabla (7.5)
7.2	 Uno de sus subconjuntos más conocidos es el conjunto de *los* ***números naturales:*** *{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,…}*	
7.3	 Entre los números enteros hay algunos que al dividirlos entre el número 2, el resultado es otro número entero, ***por ejemplo*** ($\frac{56}{2}=28$); en este caso, como la división es exacta decimos que 56 es divisible por 2, afirmación que podemos hacer también de cualquiera de las maneras siguientes, tomando en cuenta que si ($\frac{56}{2}=28$), entonces *56 = 2x28:* a) 2 es un divisor de 56 . b) 2 es un factor de 56 . c) 56 es un múltiplo de 2 .	

<table>
<tr>
<td>7.4</td>
<td>Recuerda que un número entero m es múltiplo de otro número entero n sí m se puede expresar como la multiplicación de n por un número entero, *por ejemplo:*
• $m=12$ es múltiplo de $n=2$ porque $12=2\times6$
• $m=-15$ es múltiplo de $n=5$ porque $-15=5\times(-3)$
• $m=42$ es múltiplo de $n=6$ porque $42=6\times7$</td>
<td rowspan="5">**Conceptos:**
Intervinientes:
Números enteros, números naturales, divisor, factor, múltiplo.
Emergentes:
Números pares e impares.

Propiedades:
*Propiedad de sustitución de la igualdad.
*Cerradura para la suma y la multiplicación.

Procedimientos:
*Multiplicaciones y divisiones.

Argumentos:
Explicaciones del tipo (7.4):
-15 es múltiplo de 5 porque:
$-15 = 5 \times (-3)$</td>
</tr>
<tr>
<td>7.5</td>
<td>1. **Para cada uno de los siguientes números enteros escribe dos múltiplos y argumenta tu respuesta:**
<table>
<tr><th>Números</th><th colspan="2">Múltiplos</th><th>Argumentos</th></tr>
<tr><td>- 4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- 9</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- 12</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>7.6</td>
<td>***Un número entero se dice que es par, si es divisible por 2 o múltiplo de 2; en cualquier otro caso se dice que es impar. Los enteros pares son por lo tanto:***
{…,-12,-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10,12,…}

Y los enteros impares son:
{…,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,…}</td>
</tr>
<tr>
<td>7.7</td>
<td>Como una manera de resaltar que todos los pares son múltiplos de 2, este conjunto se escribe a veces como:
{…, 2(-6), 2(-5), 2(-4), 2(-3), 2(-2), 2(-1), 2(0), 2(1), 2(2), 2(3), 2(4), 2(5), 2(6), …}</td>
</tr>
<tr>
<td>7.8</td>
<td>2. **¿Cuáles de los siguientes números son pares y cuáles son impares?** Justifica tu respuesta.
35 ________ -26 ________ 99 ________ -45 ________ 18 ________</td>
</tr>
</table>

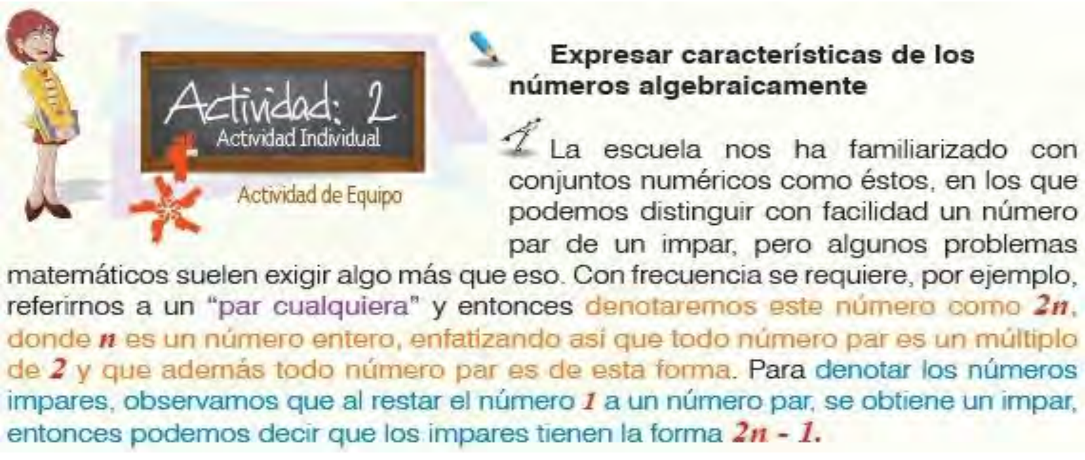
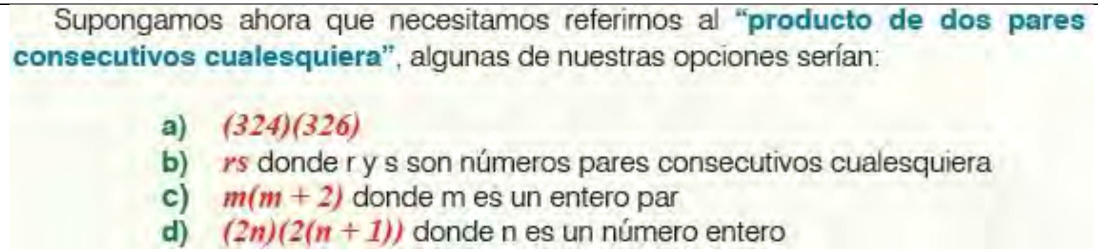
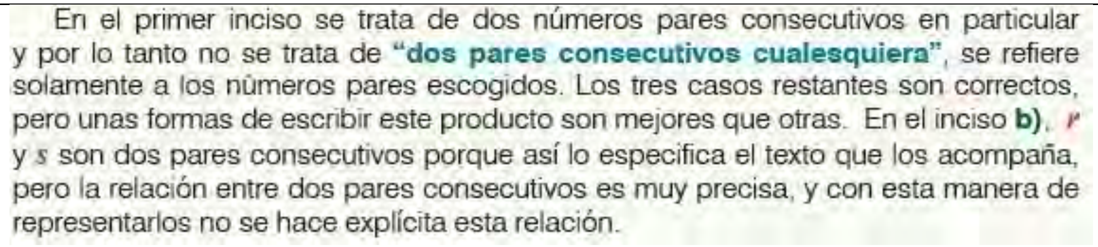
Como una introducción a esta secuencia didáctica se presenta la actividad de inicio la cual conforma la configuración epistémica 7. La actividad inicia con un proceso de enunciación del concepto de números enteros (7.1) a partir del cual se definen los naturales (7.2), añadiendo en 7.3 los conceptos de divisor, factor y múltiplo señalando las equivalencias existentes entre ellos.

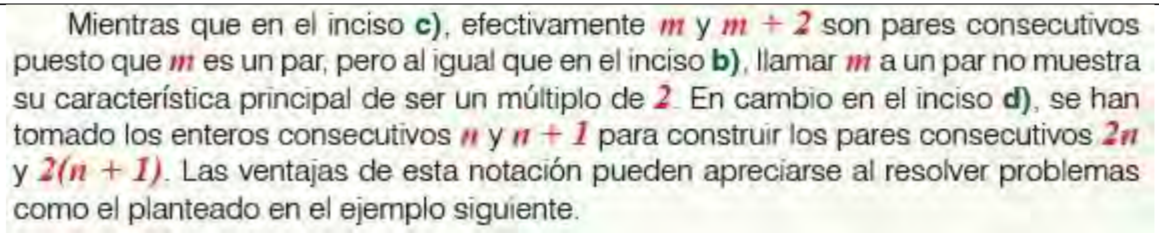
Sin embargo con la exposición que se realiza en esta actividad se propone una argumentación para respaldar las declaraciones en cuanto a los factores, divisores y múltiplos la cual es descrita en 7.4 (atributos 4a y 4b).

Después de las argumentaciones se definen los números pares e impares en 7.6 en base a los conceptos de factores y múltiplos. Posteriormente en 7.7 se propone una forma alterna de representar a los números pares como múltiplos de 2, en donde cualquier número par se obtiene al multiplicar 2 por un número entero, con esto se pretende ir encaminando al alumno en el proceso de generalizar los números pares ya que puede representar cualquier número entero con una letra, establecer el producto del número dos con ésta, obteniendo así la representación algebraica de los números pares. Con esto la institución busca promover los atributos 1a, 1c, 1e, 8a, 8b y 8c.

Por último es importante señalar que en esta configuración las situaciones-problema que encontramos son una serie de ejercicios a través de los cuales el estudiante puede identificar números pares e impares justificando sus respuestas, tales como los que se presentan en 7.8. Así para resolver los ejercicios al alumno le basta con relacionar los objetos mediante procesos de algoritmización y argumentación, lo cual implica la movilización de los siguientes atributos, además de algunos ya mencionados: 2b, 2c, 2e, 2g y 3b.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 8

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
8.1	Desarrollo  Actividad: 2 Actividad Individual Actividad de Equipo **Expresar características de los números algebraicamente** La escuela nos ha familiarizado con conjuntos numéricos como éstos, en los que podemos distinguir con facilidad un número par de un impar, pero algunos problemas matemáticos suelen exigir algo más que eso. Con frecuencia se requiere, por ejemplo, referirnos a un "par cualquiera" y entonces denotaremos este número como $2n$, donde n es un número entero, enfatizando así que todo número par es un múltiplo de 2 y que además todo número par es de esta forma. Para denotar los números impares, observamos que al restar el número 1 a un número par, se obtiene un impar, entonces podemos decir que los impares tienen la forma $2n - 1$.	**Situaciones-Problemas:** *Expresar algebraicamente números pares e impares (8.1). *Expresar algebraicamente números consecutivos (8.2, 8.6, 8.8) *Justificar por qué el producto de dos números pares consecutivos es múltiplo de 4. *Formulación de conjeturas.
8.2	 Supongamos ahora que necesitamos referirnos al **"producto de dos pares consecutivos cualesquiera"**, algunas de nuestras opciones serían: **a)** $(324)(326)$ **b)** rs donde r y s son números pares consecutivos cualesquiera **c)** $m(m+2)$ donde m es un entero par **d)** $(2n)(2(n+1))$ donde n es un número entero	
8.3	 En el primer inciso se trata de dos números pares consecutivos en particular y por lo tanto no se trata de **"dos pares consecutivos cualesquiera"**, se refiere solamente a los números pares escogidos. Los tres casos restantes son correctos, pero unas formas de escribir este producto son mejores que otras. En el inciso **b)**, r y s son dos pares consecutivos porque así lo especifica el texto que los acompaña, pero la relación entre dos pares consecutivos es muy precisa, y con esta manera de representarlos no se hace explícita esta relación.	

<table>
<tr>
<td>8.3</td>
<td>Mientras que en el inciso c), efectivamente m y $m + 2$ son pares consecutivos puesto que m es un par, pero al igual que en el inciso b), llamar m a un par no muestra su característica principal de ser un múltiplo de 2. En cambio en el inciso d), se han tomado los enteros consecutivos n y $n + 1$ para construir los pares consecutivos $2n$ y $2(n + 1)$. Las ventajas de esta notación pueden apreciarse al resolver problemas como el planteado en el ejemplo siguiente.</td>
<td rowspan="3">Lenguajes:

*Verbal: definiciones, planteamiento de problemas, argumentaciones.

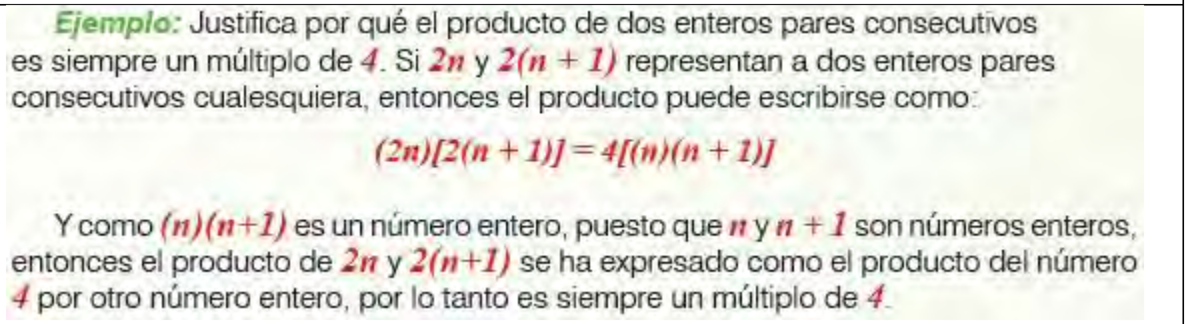
*Numérico: $\mathbb{Z}$.

*Algebraico: representar cantidades desconocidas m, n, r, s; expresiones algebraicas $m + 2, n + 1$, etc.

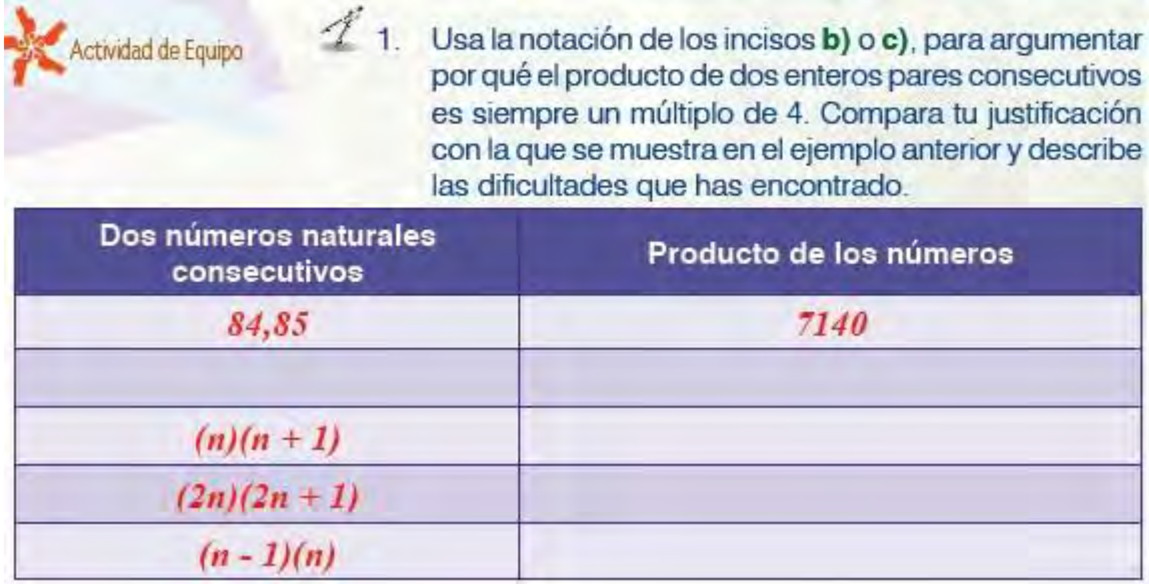
*Tabular: Tablas (8.5, 8.7)

Conceptos:

<i>Intervinientes:</i>
Números pares e impares, enteros, múltiplo, producto, números consecutivos.

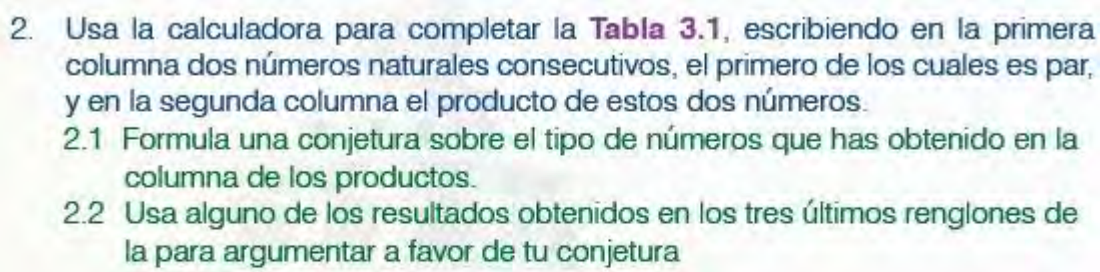
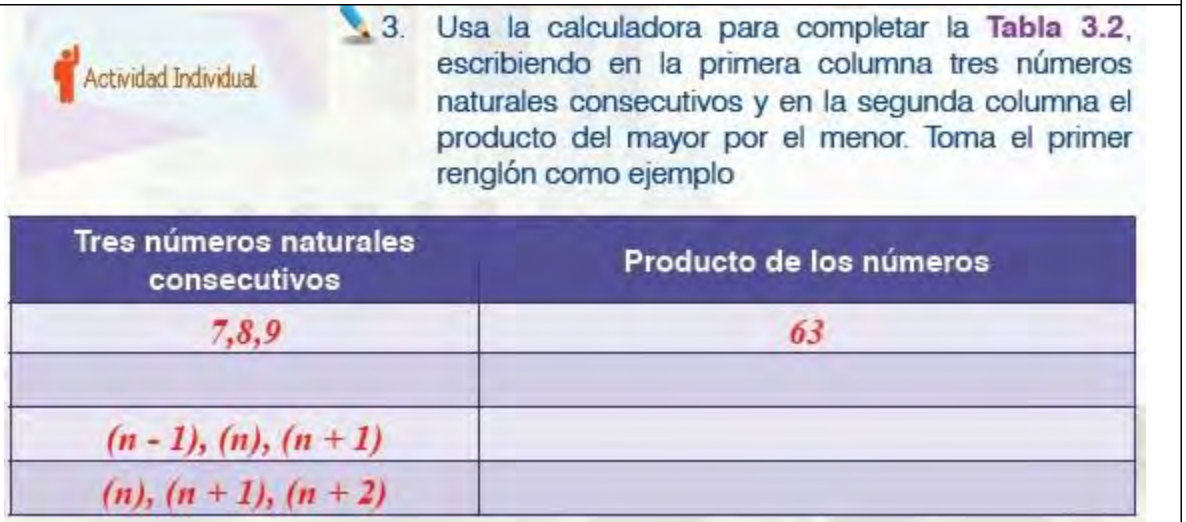
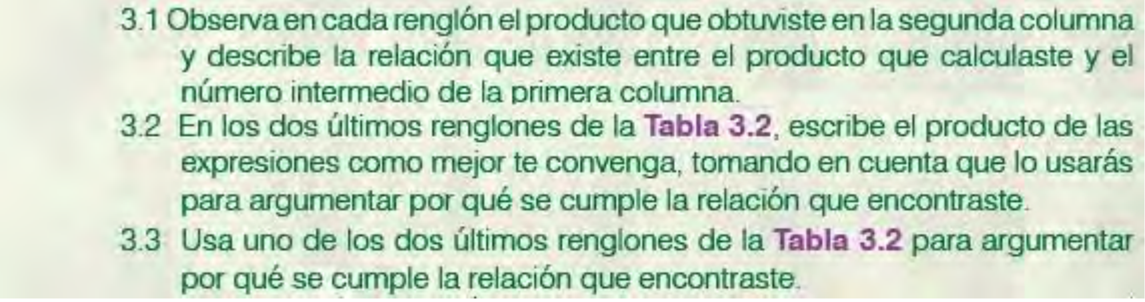
<i>Emergentes:</i>
Conjetura.</td>
</tr>
<tr>
<td>8.4</td>
<td><i>Ejemplo:</i> Justifica por qué el producto de dos enteros pares consecutivos es siempre un múltiplo de 4. Si $2n$ y $2(n + 1)$ representan a dos enteros pares consecutivos cualesquiera, entonces el producto puede escribirse como:

$$(2n)[2(n + 1)] = 4[(n)(n + 1)]$$

Y como $(n)(n+1)$ es un número entero, puesto que n y $n + 1$ son números enteros, entonces el producto de $2n$ y $2(n+1)$ se ha expresado como el producto del número 4 por otro número entero, por lo tanto es siempre un múltiplo de 4.</td>
</tr>
<tr>
<td>8.5</td>
<td>Actividad de Equipo

1. Usa la notación de los incisos b) o c), para argumentar por qué el producto de dos enteros pares consecutivos es siempre un múltiplo de 4. Compara tu justificación con la que se muestra en el ejemplo anterior y describe las dificultades que has encontrado.

<table>
<tr><th>Dos números naturales consecutivos</th><th>Producto de los números</th></tr>
<tr><td>84,85</td><td>7140</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$(n)(n + 1)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(2n)(2n + 1)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(n - 1)(n)$</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>8.6</td>
<td>
2. Usa la calculadora para completar la Tabla 3.1, escribiendo en la primera columna dos números naturales consecutivos, el primero de los cuales es par, y en la segunda columna el producto de estos dos números.
2.1 Formula una conjetura sobre el tipo de números que has obtenido en la columna de los productos.
2.2 Usa alguno de los resultados obtenidos en los tres últimos renglones de la para argumentar a favor de tu conjetura</td>
<td rowspan="3">Propiedades:
*Propiedad de sustitución de la igualdad.
*Cerradura para la suma y la multiplicación.
Procedimientos:
*Multiplicaciones, restas.
Argumentos:
*Explicaciones del tipo (8.3 y 8.4):
“En el primer caso se trata de un caso particular.”
“r y s son pares consecutivos porque el texto lo especifica.”
*Demostraciones usando el lenguaje algebraico (8.5).</td>
</tr>
<tr>
<td>8.7</td>
<td>
Actividad Individual
3. Usa la calculadora para completar la Tabla 3.2, escribiendo en la primera columna tres números naturales consecutivos y en la segunda columna el producto del mayor por el menor. Toma el primer renglón como ejemplo
<table>
<tr><th>Tres números naturales consecutivos</th><th>Producto de los números</th></tr>
<tr><td>7,8,9</td><td>63</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$(n - 1), (n), (n + 1)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(n), (n + 1), (n + 2)$</td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>8.8</td>
<td>
3.1 Observa en cada renglón el producto que obtuviste en la segunda columna y describe la relación que existe entre el producto que calculaste y el número intermedio de la primera columna.
3.2 En los dos últimos renglones de la Tabla 3.2, escribe el producto de las expresiones como mejor te convenga, tomando en cuenta que lo usarás para argumentar por qué se cumple la relación que encontraste.
3.3 Usa uno de los dos últimos renglones de la Tabla 3.2 para argumentar por qué se cumple la relación que encontraste.</td>
</tr>
</table>

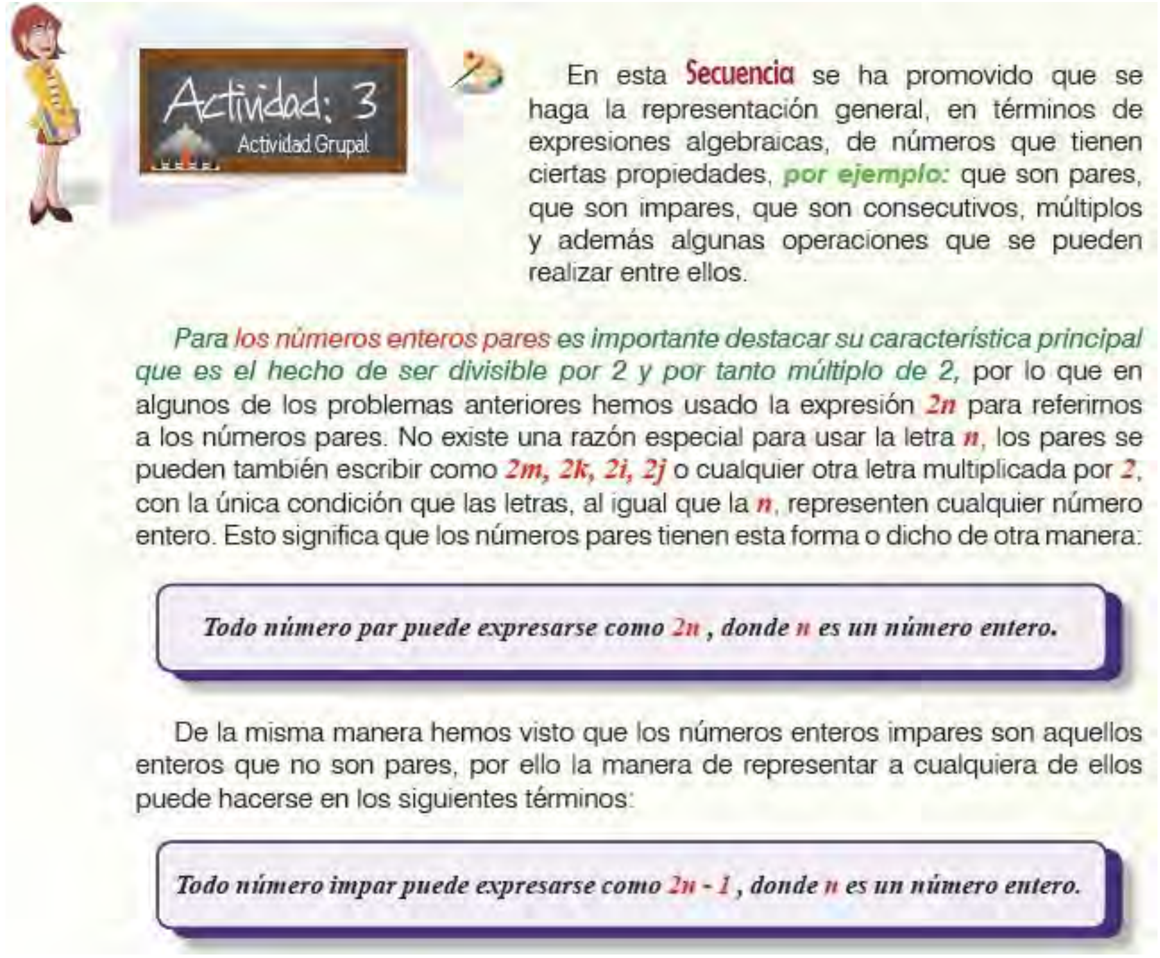
En la actividad 2 planteada en esta configuración se especifica que algunos puntos deben analizarse de forma individual y otros en equipo. Se inicia retomando los números pares proporcionando la expresión *2n*, sin embargo no es el estudiante quien deduce esta expresión ya que desde un principio en 8.1 se hace explícita al igual que la expresión para denotar los números impares. Es así que un proceso de generalización se convierte en comunicación ya que solamente se describe porqué esas expresiones son las adecuadas. En este caso el estudiante tiene como tarea la interpretación de dicha información, desarrollando los atributos 1a, 1h, 2a, 8a, 8b, y 8c.

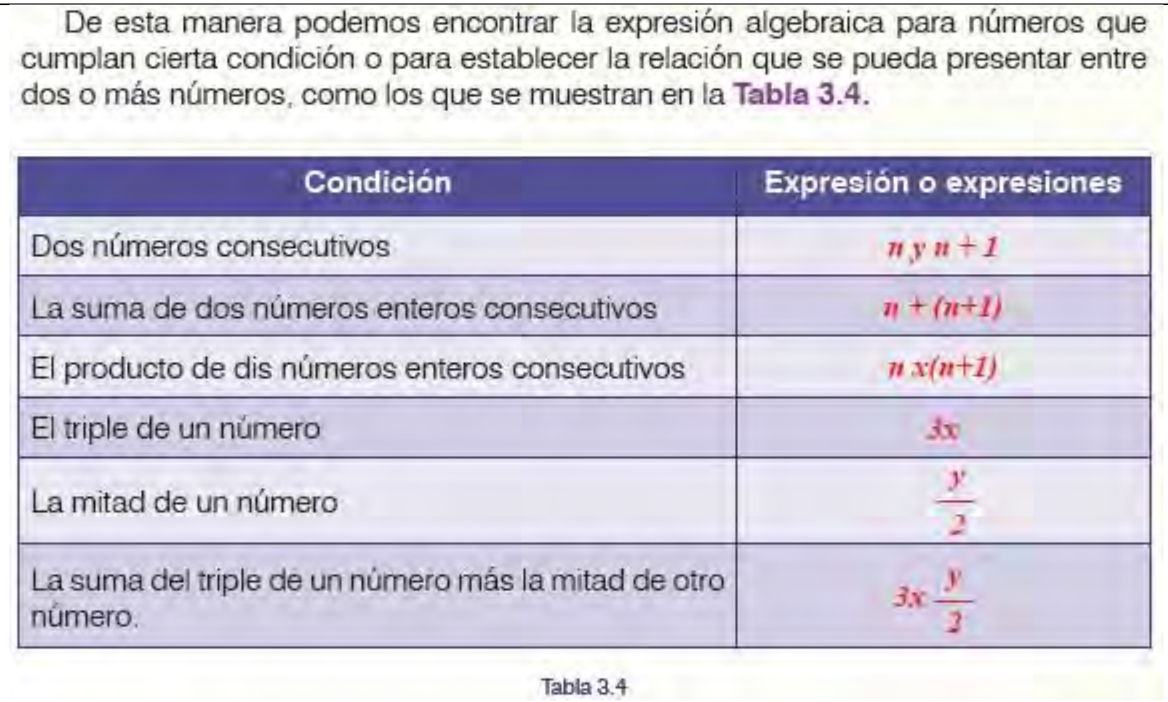
Después de esto se presenta una situación problema la cual consiste en denotar el producto de dos pares consecutivos y se enlista una serie de posibles respuestas que un estudiante podría proporcionar para resolverlo. Sin embargo en 8.3 se analiza cada una de estas opciones con el propósito de tomar la más apropiada, ya que sólo una de esas opciones permitirá la argumentación en 8.4. Con el análisis realizado en 8.3 el estudiante puede llegar a comprender que las representaciones algebraicas no sólo buscan asignar letras, sino que en ese proceso de generalización se deben tomar en cuenta las características de los números, como en este caso el hecho de que los números fueran pares y consecutivos restringe las expresiones que lo consideran. Con esto se promueven los siguientes atributos: 1b, 1d, 1i, 2b, 2c, 2e, 3a, 3b, 4a, 4b y 4c pero sólo a un nivel de interpretación.

En 8.5 se plantea otra situación que también involucra la representación de números algebraicamente, en esta actividad se incluye una tabla con espacios suficientes para varios casos particulares. Al hacer esto el estudiante inicia con procesos de particularización y algoritmización para después proceder a la generalización, tal como se propone en 8.6. Esta parte de la actividad se realizará en equipo, de esa forma se pueden apoyar entre todos para superar las dificultades. Se sigue un proceso de personalización en este apartado lo cual permite al estudiante tener una noción de lo que debe hacer. Además de movilizar algunos de los atributos ya mencionados, se ponen en juego el 1c, 1e, 1f, 1j, 2h, 4e y 8e.

Por último de forma individual se plantea el ejercicio en 8.7 y 8.8, el cual promueve la argumentación de las conjeturas realizadas por los estudiantes apoyándose de los procesos de particularización y algoritmización.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 9

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
9.1	Actividad de Cierre  Actividad: 3 Actividad Grupal En esta **Secuencia** se ha promovido que se haga la representación general, en términos de expresiones algebraicas, de números que tienen ciertas propiedades, *por ejemplo:* que son pares, que son impares, que son consecutivos, múltiplos y además algunas operaciones que se pueden realizar entre ellos. *Para los números enteros pares es importante destacar su característica principal que es el hecho de ser divisible por 2 y por tanto múltiplo de 2,* por lo que en algunos de los problemas anteriores hemos usado la expresión $2n$ para referirnos a los números pares. No existe una razón especial para usar la letra n, los pares se pueden también escribir como $2m$, $2k$, $2i$, $2j$ o cualquier otra letra multiplicada por 2, con la única condición que las letras, al igual que la n, representen cualquier número entero. Esto significa que los números pares tienen esta forma o dicho de otra manera: ***Todo número par puede expresarse como $2n$, donde n es un número entero.*** De la misma manera hemos visto que los números enteros impares son aquellos enteros que no son pares, por ello la manera de representar a cualquiera de ellos puede hacerse en los siguientes términos: ***Todo número impar puede expresarse como $2n - 1$, donde n es un número entero.***	**Situaciones-Problemas:** *Expresar algebraicamente números que cumplan con cierta condición (9.1, 9.2). **Lenguajes:** ***Verbal:** definiciones, planteamiento de problemas, argumentaciones. ***Numérico:** $\mathbb{R}$. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas i, j, k, m, n, x, y; expresiones algebraicas $2n$, $2n - 1$, etc. ***Tabular:** Tabla 3.4 (9.2)

<table>
<tr>
<td>9.2</td>
<td>

De esta manera podemos encontrar la expresión algebraica para números que cumplan cierta condición o para establecer la relación que se pueda presentar entre dos o más números, como los que se muestran en la Tabla 3.4.
<table>
<tr><th>Condición</th><th>Expresión o expresiones</th></tr>
<tr><td>Dos números consecutivos</td><td>n y $n + 1$</td></tr>
<tr><td>La suma de dos números enteros consecutivos</td><td>$n + (n+1)$</td></tr>
<tr><td>El producto de dis números enteros consecutivos</td><td>$n\ x(n+1)$</td></tr>
<tr><td>El triple de un número</td><td>$3x$</td></tr>
<tr><td>La mitad de un número</td><td>$\frac{y}{2}$</td></tr>
<tr><td>La suma del triple de un número más la mitad de otro número.</td><td>$3x\ \frac{y}{2}$</td></tr>
</table>
Tabla 3.4
</td>
<td>
Conceptos:
<i>Intervinientes:</i>
Números pares e impares, suma, números consecutivos, múltiplos, números enteros, producto, triple, mitad, suma.
Propiedades:
*Cerradura para la suma y la multiplicación.
</td>
</tr>
</table>

En el cierre de la secuencia tenemos la actividad 3, la cual interviene en el proceso de institucionalización. En este caso se presentan las expresiones algebraicas que son resultado de la generalización de los números pares e impares, tal como se presenta en 9.1. Con estos procesos relacionamos los atributos 1a, 1b, 1d, 1h, 8a, 8b y 8c, sin embargo algunos de ellos sólo se promueven en el nivel de interpretación.

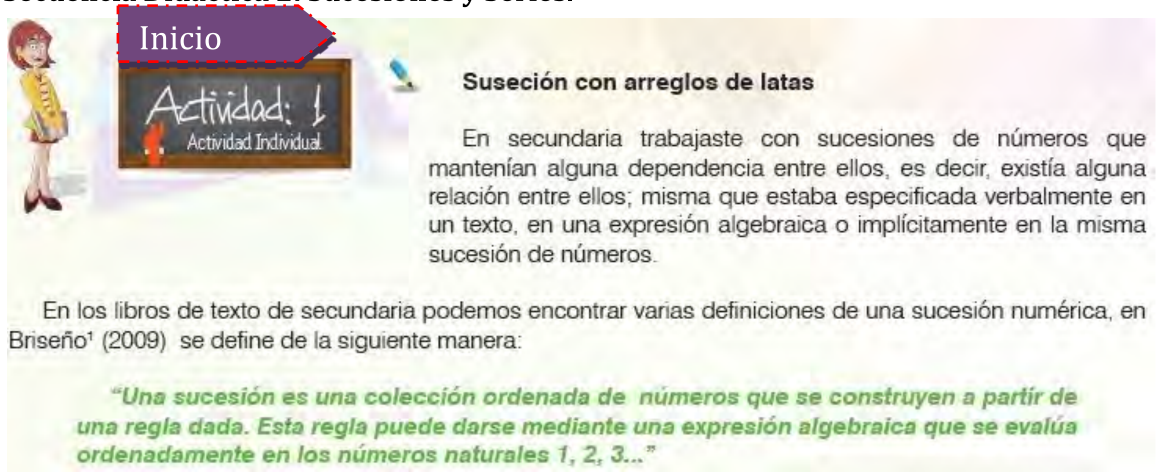
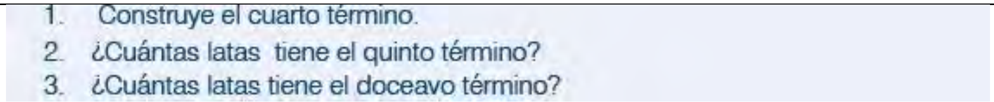
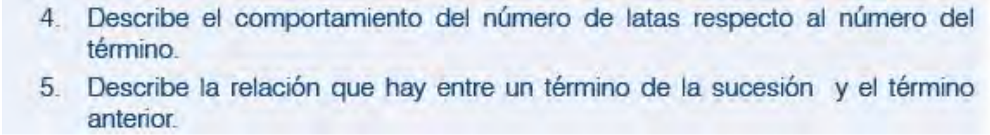
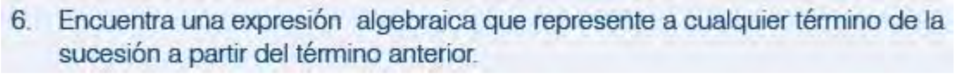
Posteriormente en la tabla 3.4 presentada en 9.2, se muestran otras expresiones para números que cumplen con ciertas condiciones y es importante identificar algunos posibles conflictos semióticos. Vemos que al denotar el producto de dos números consecutivos aparece la expresión $nx(n+1)$, es decir se utiliza la letra x para indicar el producto, ya que en secundaria se emplea este símbolo para indicar una multiplicación, sin embargo al estarse refiriendo a expresiones algebraicas no es apropiado utilizar este símbolo ya que en este caso podría representar otra variable; lo mismo sucede en el primer ejemplo donde se presentan los dos números consecutivos separados por la letra “y”.

En estos casos es importante la intervención del profesor para aclarar estas situaciones a los estudiantes, al igual que el error que se observa en el último ejemplo de la tabla donde hizo falta el signo + para denotar la suma de los dos términos.

Otro aspecto importante por señalar es que las expresiones que aparecen en esta configuración y las presentadas en las actividades previas no son deducidas por los estudiantes. Dicho de otra forma, en esta actividad se relaciona los objetos matemáticos mediante un proceso de representación donde los autores presentan de manera explícita las expresiones analíticas.

La cuestión que aparece ahora es si los estudiantes se apropiarán del proceso de generalización, sólo por haber visto las expresiones planteadas en las actividades de esta secuencia. Otro hecho importante es que sólo se proponen situaciones intra-matemáticas, y en su mayoría son demostraciones de las conjeturas hechas por los estudiantes en actividades previas. La última tabla no involucra procedimientos con lo que se promueve la idea de pasar del lenguaje verbal al algebraico como un proceso automático. Sin embargo, hemos visto que en los procedimientos se dan procesos de algoritmización, generalización, comunicación, entre otros que permiten el desarrollo de más competencias.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 10

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
10.1	**Secuencia Didáctica 2: Sucesiones y Series.**  Inicio Actividad: 1 Actividad Individual **Suseción con arreglos de latas** En secundaria trabajaste con sucesiones de números que mantenían alguna dependencia entre ellos, es decir, existía alguna relación entre ellos; misma que estaba especificada verbalmente en un texto, en una expresión algebraica o implícitamente en la misma sucesión de números. En los libros de texto de secundaria podemos encontrar varias definiciones de una sucesión numérica, en Briseño[1] (2009) se define de la siguiente manera: ***"Una sucesión es una colección ordenada de números que se construyen a partir de una regla dada. Esta regla puede darse mediante una expresión algebraica que se evalúa ordenadamente en los números naturales 1, 2, 3..."***	**Situaciones-Problemas:** *Identificar los términos de una sucesión de figuras (10.2, 10.3). *Describir de manera recursiva el comportamiento de una sucesión (10.4, 10.5) **Lenguajes:** ***Verbal:** definiciones, planteamiento de problemas, argumentaciones. ***Numérico:** $\mathbb{N}$. ***Algebraico:** representar un número de término n, a_n; expresiones algebraicas $a_n = a_{n-1} + n$. ***Ilustrativo:** Figura 3.1 (10.2) **Conceptos:** *Intervinientes:* Números, sucesión, término, expresión algebraica, números naturales. **Propiedades:** *Cerradura para la suma y la multiplicación. **Procedimientos:** Sumar, encontrar patrones, construir sucesiones.
10.2	En la **Figura 3.1** se muestran los tres primeros términos de una sucesión, formada por latas sobrepuestas.  Término 1 | Término 2 | Término 3 | Término 4 Tabla 3.1	
10.3	 1. Construye el cuarto término. 2. ¿Cuántas latas tiene el quinto término? 3. ¿Cuántas latas tiene el doceavo término?	
10.4	 4. Describe el comportamiento del número de latas respecto al número del término. 5. Describe la relación que hay entre un término de la sucesión y el término anterior.	
10.5	 6. Encuentra una expresión algebraica que represente a cualquier término de la sucesión a partir del término anterior.	

Este apartado inicia con el concepto de “Sucesión” retomando lo revisado en secundaria en 10.1, enseguida se muestra una sucesión formada por latas donde ellos deben dibujar el cuarto y quinto término en 10.2, con esto se llevan a cabo procesos de materialización que implica la movilización de los atributos 1a, 1c, 1e, 2c, 3a, 8a y 8b.

En 10.3 se hacen una serie de preguntas sobre la cantidad de latas que tiene cada término, de esta forma se introduce el proceso de idealización con el propósito de notar patrones entre cada uno de los términos de la sucesión (atributos 2a, 2b, 2e, 3b y 8c). En especial cuando se le pregunte por el término en la posición 12 es posible que el estudiante dibuje todos los términos anteriores para saber la cantidad de latas que forman este término.

Las descripciones que se solicitan en 10.3 y 10.4 forman parte del proceso de personalización de la situación más general que consiste en proporcionar una expresión recursiva para los términos de la sucesión la cual debe especificarse en 10.5, además en este apartado el estudiante debe reflexionar en el proceso de generalización, y no limitarse a la materialización y algoritmización.

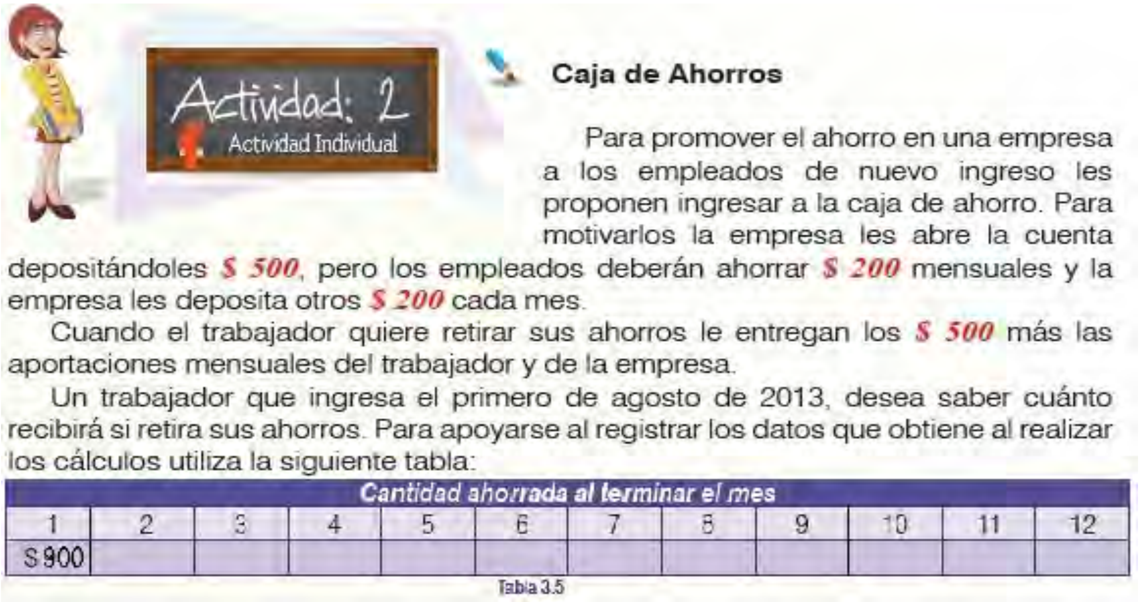
El lenguaje predominante en esta sección es el verbal y el numérico, ya que los demás sólo se utilizan en una sola ocasión. El algebraico sólo se utiliza al final para denotar la expresión solicitada en 10.5, el ilustrativo es útil para representar la sucesión en 10.2.

La actividad aquí planteada resulta bastante sencilla para realizarse de forma individual y si el estudiante está atento a cada uno de los puntos solicitados analizando la sucesión logrará la generalización o al menos enunciación. Con estos procesos desarrollaría los siguientes atributos, además de algunos ya mencionados: 1b, 1d, 1h, 2g y 8d.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 11

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>11.1</td><td>

Desarrollo



Actividad: 2

Actividad Individual

Caja de Ahorros

Para promover el ahorro en una empresa a los empleados de nuevo ingreso les proponen ingresar a la caja de ahorro. Para motivarlos la empresa les abre la cuenta depositándoles *$ 500*, pero los empleados deberán ahorrar *$ 200* mensuales y la empresa les deposita otros *$ 200* cada mes.

Cuando el trabajador quiere retirar sus ahorros le entregan los *$ 500* más las aportaciones mensuales del trabajador y de la empresa.

Un trabajador que ingresa el primero de agosto de 2013, desea saber cuánto recibirá si retira sus ahorros. Para apoyarse al registrar los datos que obtiene al realizar los cálculos utiliza la siguiente tabla:

<table>
<tr><th colspan="12">Cantidad ahorrada al terminar el mes</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>$ 900</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 3.5

</td><td rowspan="4">

Situaciones-Problemas:

*Determinar la cantidad de dinero que obtendrá un trabajador al retirar sus ahorros de la caja de ahorro tiempo después (11.1, 11.4).

*Encontrar una expresión algebraica que describa el comportamiento de la tabla (11.4)

Lenguajes:

***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones.

***Numérico:** ℕ.

***Algebraico:** representar términos n, a_n; expresiones algebraicas $a_n = 400n + 500$.

***Tabular:** Tabla 3.5 (11.1)

Conceptos:

Intervinientes:

Relación, incrementos.

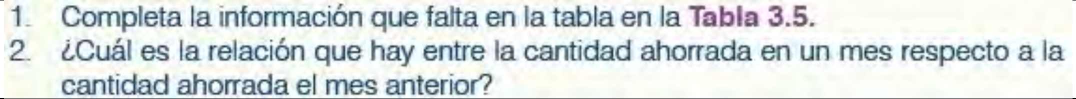
Propiedades:

*Cerradura para la suma y la multiplicación.

Procedimientos:

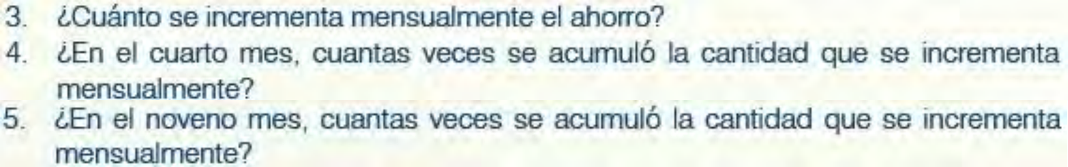
Sumar, multiplicar.

</td></tr>
<tr><td>11.2</td><td>



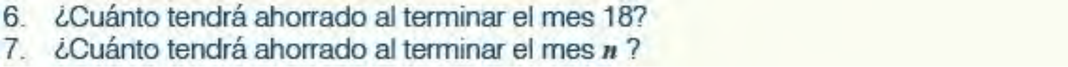
1. Completa la información que falta en la tabla en la **Tabla 3.5.**
2. ¿Cuál es la relación que hay entre la cantidad ahorrada en un mes respecto a la cantidad ahorrada el mes anterior?

</td></tr>
<tr><td>11.3</td><td>



3. ¿Cuánto se incrementa mensualmente el ahorro?
4. ¿En el cuarto mes, cuantas veces se acumuló la cantidad que se incrementa mensualmente?
5. ¿En el noveno mes, cuantas veces se acumuló la cantidad que se incrementa mensualmente?

</td></tr>
<tr><td>11.4</td><td>



6. ¿Cuánto tendrá ahorrado al terminar el mes 18?
7. ¿Cuánto tendrá ahorrado al terminar el mes *n* ?

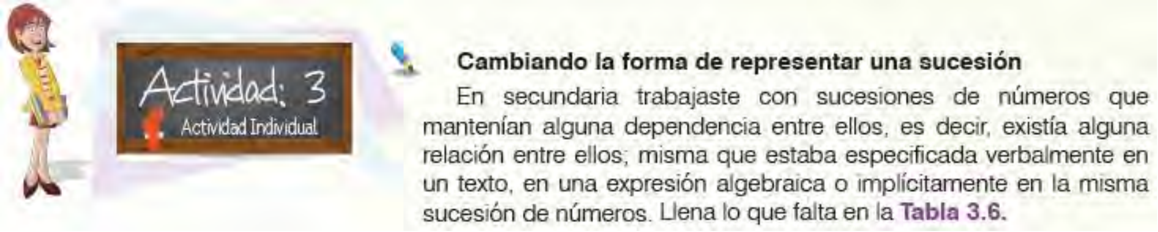
</td></tr>
</table>

Esta configuración inicia con una situación de la vida real sobre empleados y cajas de ahorro (11.1). Como primera indicación se les solicita a los estudiantes completar la tabla para lo cual deberán realizar procedimientos sencillos como sumas y multiplicaciones. Al ver esta tabla como una sucesión, tenemos que en 11.2 se les pide a los estudiantes determinar la relación existente entre los términos de la sucesión aplicado al caso de la caja de ahorro. Se esperaría un proceso de generalización y comunicación después de haber completado la tabla. Esta primera parte promueve el desarrollo de los atributos 1a, 1c, 2a, 2b, 5a, 5b, 8a y 8b.

En 11.3 se plantean el proceso de personalización, de esta forma en 11.4 podrán obtener la expresión algebraica que describe el comportamiento de la sucesión (proceso de generalización), lo cual implica abstraer las operaciones realizadas para obtener el término directamente en vez de ir sumando de 400 en 400 hasta llegar al término que se solicite. El último procedimiento mencionado no es el óptimo es por eso que se busca que el estudiante busque el procedimiento más directo, el cual permite obtener el término general de una sucesión (atributo 1i).

Después de realizar la actividad se espera que el estudiante llegue a una expresión semejante a $a_n = 400n + 500$, la cual le permitirá obtener la cantidad de dinero ahorrado al final de cualquier mes simplemente con sustituir el valor de n por el número de mes. Al obtener esta expresión se logra el desarrollo del proceso de generalización y con ello los atributos 1b, 1d, 1h, 2c, 2e, 2g, 3a, 3b, 5c, 5e y 8c, ya que al presentarse la situación problema el estudiante debe identificar las variables, identificar su comportamiento y las relaciones que se dan entre ellas para culminar en la expresión algebraica. De esta forma el alumno aprende a modelar situaciones mediante el uso de las matemáticas, lo cual le permitirá en un futuro realizar análisis más complejos.

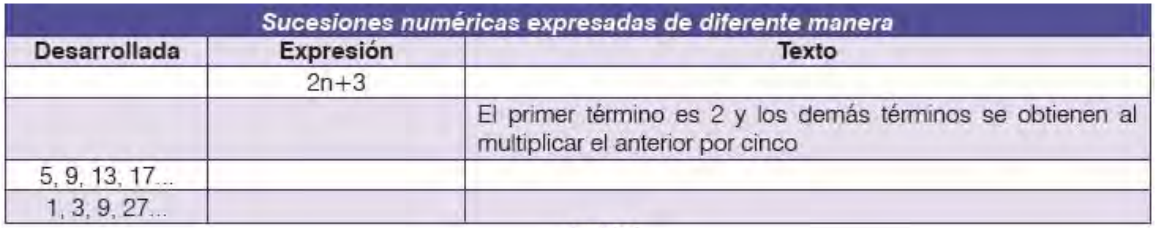
CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 12

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>12.1</td><td>


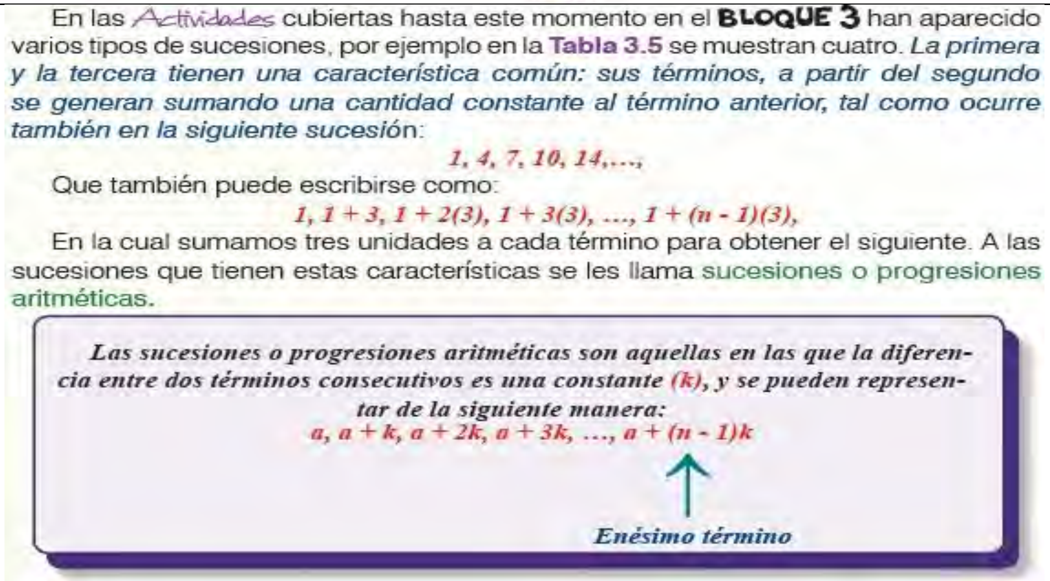
Cambiando la forma de representar una sucesión

En secundaria trabajaste con sucesiones de números que mantenían alguna dependencia entre ellos, es decir, existía alguna relación entre ellos; misma que estaba especificada verbalmente en un texto, en una expresión algebraica o implícitamente en la misma sucesión de números. Llena lo que falta en la **Tabla 3.6.**
</td><td rowspan="3">
Situaciones-Problemas:
*Expresar una sucesión numérica mediante diferentes representaciones (12.1).
*Obtener representaciones generales para las sucesiones aritméticas y geométricas (12.3, 12.4)

Lenguajes:
*Verbal: planteamiento de problemas, argumentaciones, definiciones.
*Numérico: ℕ.
*Algebraico: representar términos n, a_n; expresiones algebraicas $a_n = 400n + 500$.
*Tabular: Tabla 3.6 (12.2)

Conceptos:
<i>Intervinientes:</i>
Sucesión, número, expresión algebraica, cociente, término, diferencia, constante.
<i>Emergentes:</i>
Enésimo término, sucesiones aritméticas, sucesiones geométricas.
</td></tr>
<tr><td>12.2</td><td>


<table>
<tr><th colspan="3">Sucesiones numéricas expresadas de diferente manera</th></tr>
<tr><th>Desarrollada</th><th>Expresión</th><th>Texto</th></tr>
<tr><td></td><td>2n+3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>El primer término es 2 y los demás términos se obtienen al multiplicar el anterior por cinco</td></tr>
<tr><td>5, 9, 13, 17...</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1, 3, 9, 27...</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 3.6
</td></tr>
<tr><td>12.3</td><td>


En las *Actividades* cubiertas hasta este momento en el **BLOQUE 3** han aparecido varios tipos de sucesiones, por ejemplo en la **Tabla 3.5** se muestran cuatro. *La primera y la tercera tienen una característica común: sus términos, a partir del segundo se generan sumando una cantidad constante al término anterior, tal como ocurre también en la siguiente sucesión*:

$$1, 4, 7, 10, 14, \ldots,$$

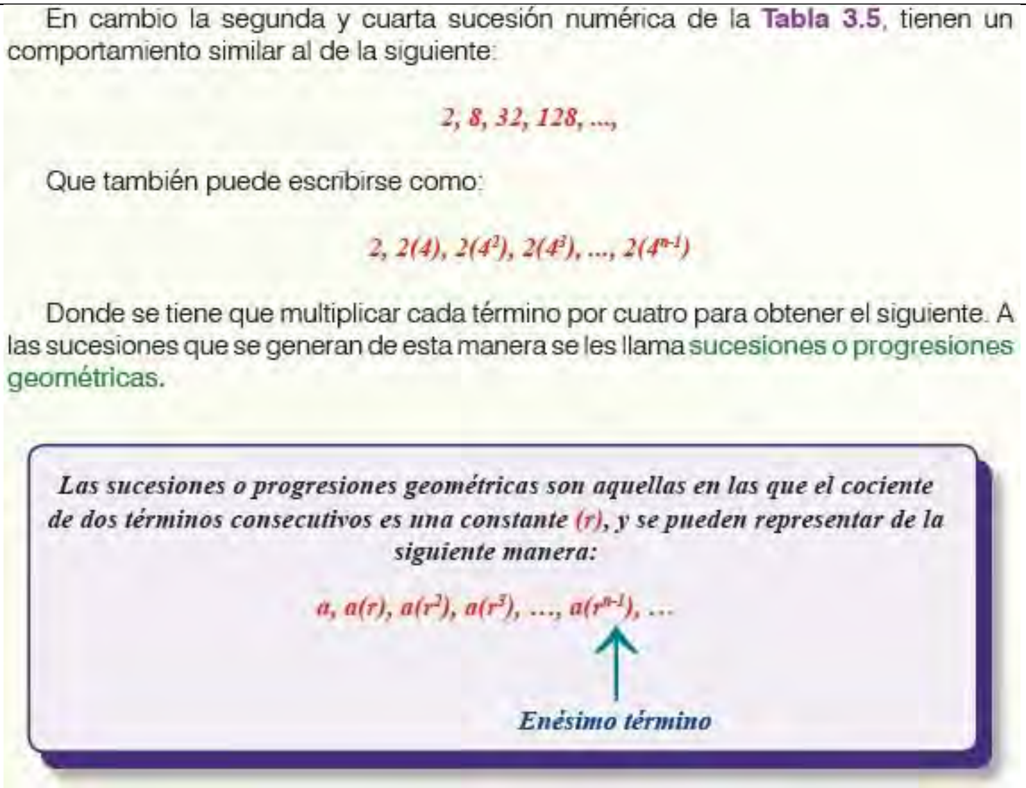
Que también puede escribirse como:

$$1, 1 + 3, 1 + 2(3), 1 + 3(3), \ldots, 1 + (n - 1)(3),$$

En la cual sumamos tres unidades a cada término para obtener el siguiente. A las sucesiones que tienen estas características se les llama sucesiones o progresiones aritméticas.

Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (k), y se pueden representar de la siguiente manera:

$$a, a + k, a + 2k, a + 3k, \ldots, \underbrace{a + (n - 1)k}_{\text{Enésimo término}}$$
</td></tr>
</table>

12.4	 En cambio la segunda y cuarta sucesión numérica de la **Tabla 3.5**, tienen un comportamiento similar al de la siguiente: $2, 8, 32, 128, \ldots,$ Que también puede escribirse como: $2, 2(4), 2(4^2), 2(4^3), \ldots, 2(4^{n-1})$ Donde se tiene que multiplicar cada término por cuatro para obtener el siguiente. A las sucesiones que se generan de esta manera se les llama sucesiones o progresiones geométricas. ***Las sucesiones o progresiones geométricas son aquellas en las que el cociente de dos términos consecutivos es una constante (r), y se pueden representar de la siguiente manera:*** $a, a(r), a(r^2), a(r^3), \ldots, a(r^{n-1}), \ldots$ ***Enésimo término***	**Propiedades:** *Cerradura para la suma y la multiplicación. *Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva). *Enésimo término de una sucesión aritmética: $a + (n-1)k$ *Enésimo término de una sucesión geométrica: $a(r^{n-1})$ **Procedimientos:** *Sumar, restar, multiplicar, dividir. *Expresar una sucesión de diferentes formas.

Después de haber construido la expresión algebraica anterior, se espera que los estudiantes sean capaces de aplicar el mismo razonamiento a otras situaciones abstractas (intra-matemáticas) como las que se presentan al inicio de esta configuración en 12.2. En esta tabla se representan las sucesiones utilizando tres lenguajes diferentes: numérico, algebraico y verbal. Al pasar de un lenguaje a otro se habla de diferentes procesos: generalización al pasar al lenguaje algebraico (atributos 1a, 1b, 1d, 2c, 8a y 8b); significación al pasar al lenguaje verbal (atributos 1e, 8c y 8d); particularización al pasar del lenguaje algebraico al numérico (atributo 1c) y algoritmización al pasar del lenguaje verbal al numérico (atributo 2e).

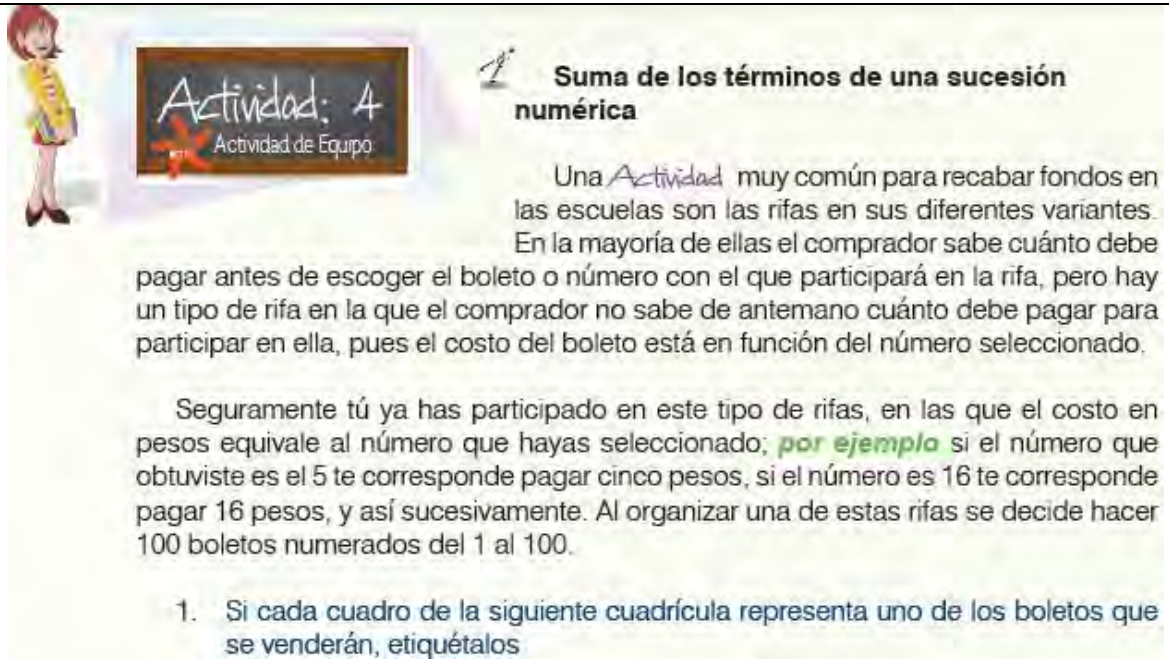
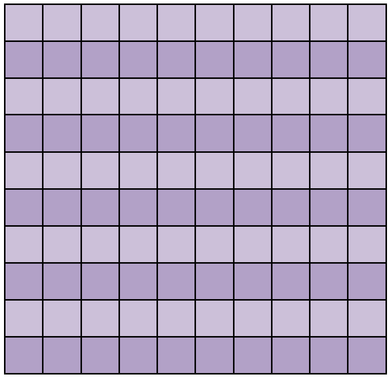
En la tabla aparecen 4 casos distintos en los cuales se representan dos sucesiones aritméticas y dos geométricas, siendo esta la primera vez que se presenta una sucesión geométrica, esto podría ser un posible conflicto al que se enfrentarán los estudiantes si llegan a considerar que todas las expresiones algebraicas serán similares, para lo cual es importante solicitar apoyo (atributo 1j). En este punto la intervención del profesor será muy valiosa para que sus alumnos logren completar esta apartado correctamente.

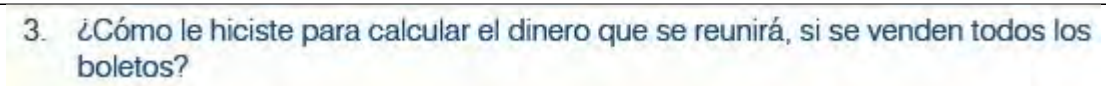
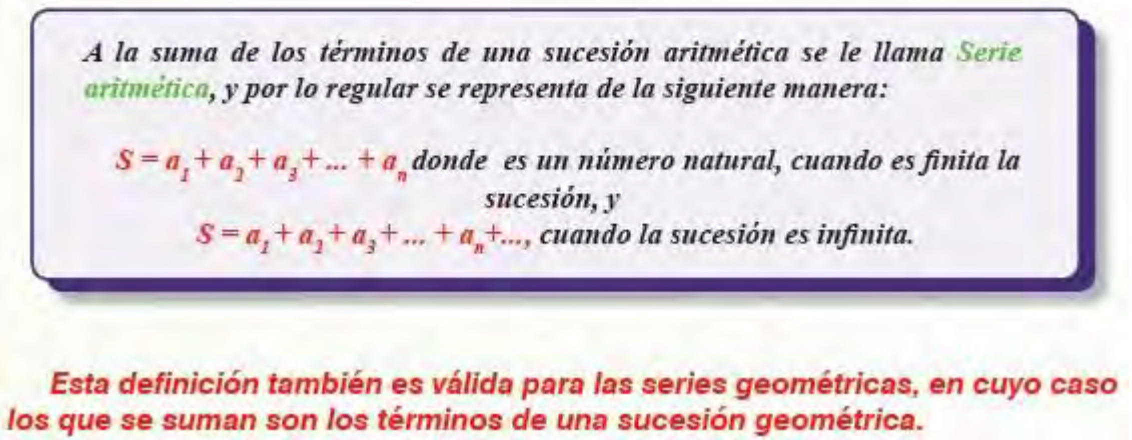
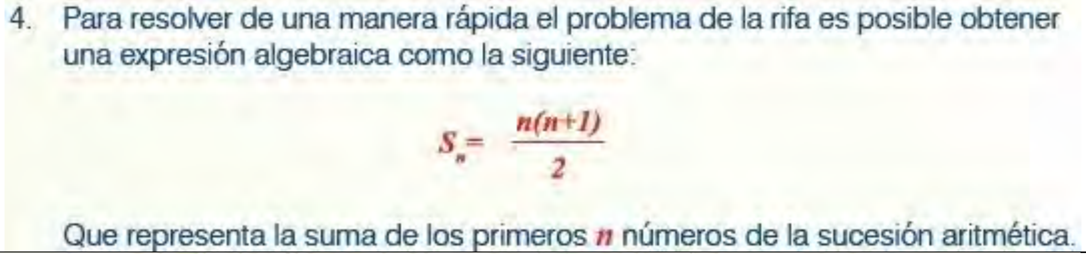
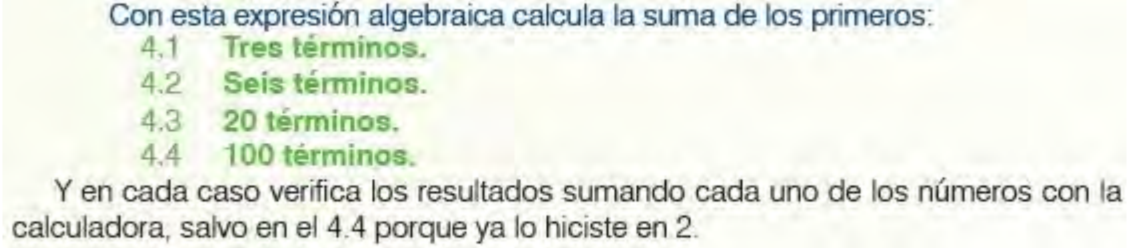
Por otro lado el análisis que se realiza posteriormente en 12.3 y 12.4 conduce a la generalización en ambos tipos de sucesiones. Además el realizar este análisis primeramente con ejemplos particulares para después considerar el caso general permite la abstracción de las situaciones de tal forma que los estudiantes pueden llegar a aplicar este mismo razonamiento en las sucesiones que se le presenten posteriormente. En estas secciones los atributos que se movilizan además de los ya mencionados para el caso de la generalización son aquellos relacionados con las diferentes representaciones y la equivalencia entre las mismas: 1f, 1h, 2f, 2g, 3a y 8e.

Aunque estamos considerando como propiedades el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas, en esta actividad no se busca el emplear estas propiedades como fórmulas para obtener el enésimo término, más bien forman parte del proceso de formalización de los conceptos. Podemos afirmar que es así ya que en este apartado se emplea el lenguaje formal de las matemáticas para referirse a los objetos analizados en las actividades previas tales como sucesiones aritméticas, geométricas y enésimo término; además no se proponen ejercicios de práctica posterior a esta actividad donde se proponga determinar el enésimo término de las sucesiones a partir de los valores de a, n, k y r.

Las otras propiedades que se enlistan en los objetos tales como cerradura para la suma y las propiedades de la igualdad, así como los procedimientos no aparecen de forma explícita en la actividad, sin embargo se han considerado debido a que de forma no ostensiva intervienen en el desarrollo de la actividad, particularmente al realizar la particularización para pasar del lenguaje algebraico al numérico.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 13

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
13.1	 Actividad: 4 Actividad de Equipo 1 **Suma de los términos de una sucesión numérica** Una Actividad muy común para recabar fondos en las escuelas son las rifas en sus diferentes variantes. En la mayoría de ellas el comprador sabe cuánto debe pagar antes de escoger el boleto o número con el que participará en la rifa, pero hay un tipo de rifa en la que el comprador no sabe de antemano cuánto debe pagar para participar en ella, pues el costo del boleto está en función del número seleccionado. Seguramente tú ya has participado en este tipo de rifas, en las que el costo en pesos equivale al número que hayas seleccionado; por ejemplo si el número que obtuviste es el 5 te corresponde pagar cinco pesos, si el número es 16 te corresponde pagar 16 pesos, y así sucesivamente. Al organizar una de estas rifas se decide hacer 100 boletos numerados del 1 al 100. 1. Si cada cuadro de la siguiente cuadrícula representa uno de los boletos que se venderán, etiquétalos	**Situaciones-Problemas:** Determinar la suma de los primeros números naturales: *1 al 100 (13.1) *1 al 3, al 6 y al 20 (13.6) **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, definiciones. ***Numérico:** $\mathbb{N}$, cantidades. ***Algebraico:** incógnitas, términos a, n, S, a_n, S_n; expresiones algebraicas $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, entre otras. **Conceptos:** *Intervinientes:* Sucesión aritmética, término, suma, expresión algebraica.
13.2	 Si ordenas los números de los boletos podrás darte cuenta que se obtiene una sucesión aritmética, ya que para obtener un nuevo término de la sucesión se le suma una unidad al término anterior. Una pregunta interesante en este tipo de situaciones es saber cuánto se reunirá de dinero si se venden todos los boletos. **2. Utilizando la calculadora, determina la cantidad de dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos.**	

13.3	 3. ¿Cómo le hiciste para calcular el dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos?	*Emergentes:* Serie aritmética, serie geométrica, finita e infinita. **Propiedades:** *Cerradura para la suma y la multiplicación. *Suma de los primeros *n* naturales: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ *Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva). **Procedimientos:** Sumar, multiplicar, dividir. Calcular la suma de los primeros *n* naturales a partir de 13.5. **Argumentos:** *Verificar el resultado en la calculadora (13.2, 13.6). *Explicación en 13.3
13.4	 ***A la suma de los términos de una sucesión aritmética se le llama Serie aritmética, y por lo regular se representa de la siguiente manera:*** $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ***donde es un número natural, cuando es finita la sucesión, y*** $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, ***cuando la sucesión es infinita.*** ***Esta definición también es válida para las series geométricas, en cuyo caso los que se suman son los términos de una sucesión geométrica.***	
13.5	 4. Para resolver de una manera rápida el problema de la rifa es posible obtener una expresión algebraica como la siguiente: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ Que representa la suma de los primeros ***n*** números de la sucesión aritmética.	
13.6	 Con esta expresión algebraica calcula la suma de los primeros: 4.1 **Tres términos.** 4.2 **Seis términos.** 4.3 **20 términos.** 4.4 **100 términos.** Y en cada caso verifica los resultados sumando cada uno de los números con la calculadora, salvo en el 4.4 porque ya lo hiciste en 2.	

En la configuración 13 se presenta como situación de fondo un problema de la vida real (13.1), relacionado con una rifa en la cual se requiere saber la cantidad de dinero que se recaudará si se venden los 100 boletos (13.2 y 13.3). En estas secciones se desarrollan los atributos 2e y 3b, en el momento que el estudiante da respuesta al planteamiento en 13.2 y en 13.3 interviene un proceso de comunicación (atributos 1e, 2g, 3a y 4b).

En base al problema planteado en 13.1 se da el proceso de formalización del concepto de serie en 13.4, tanto aritmética como geométrica, diferenciando las series finitas de las infinitas. Al utilizar esta situación para introducir el concepto de serie la comprensión del mismo resulta natural debido al proceso de problematización que se da (atributos 1h, 5a, 5b, 5c, 5e y 8c).

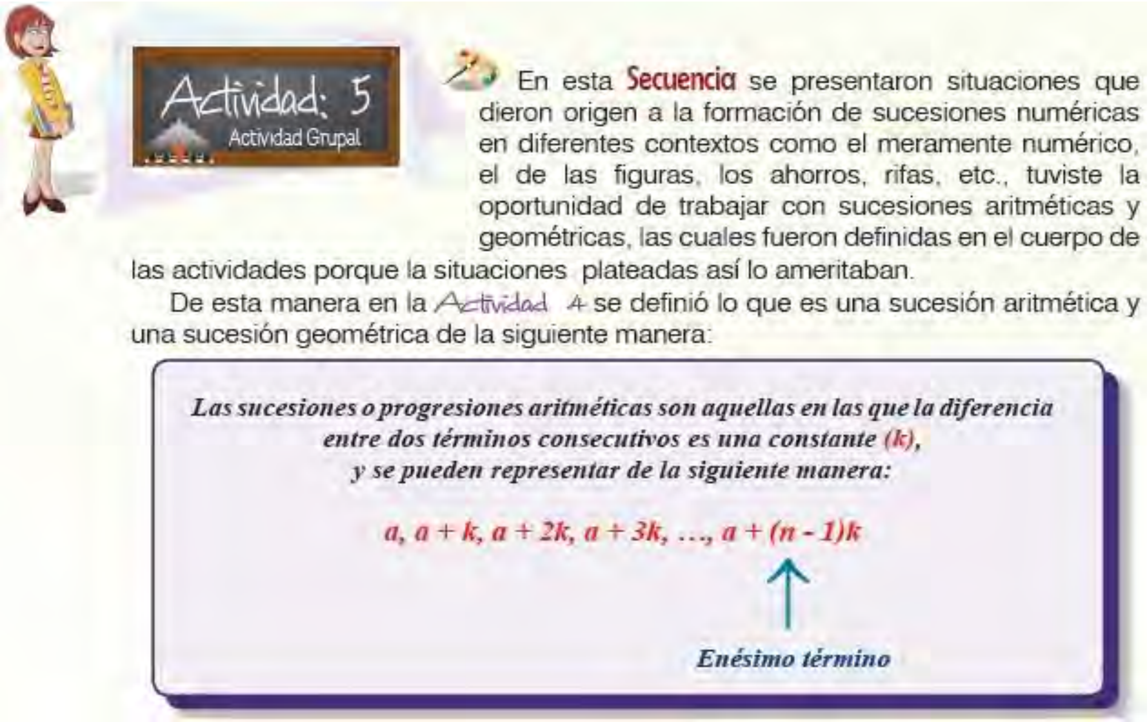
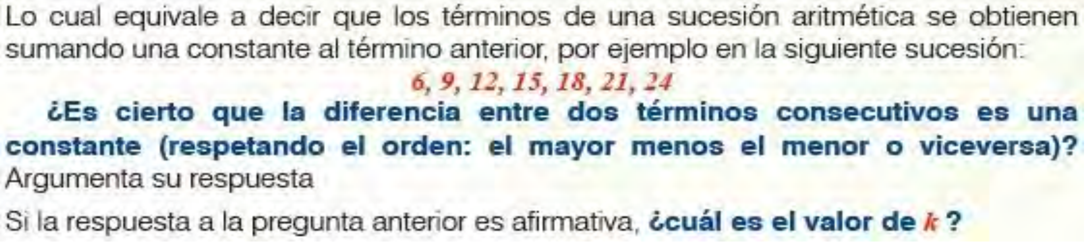
No es práctico sumar uno a uno los términos de una serie para determinar su valor, en especial cuando se trata de una sucesión con una gran cantidad de términos o con una infinidad. Si el alumno se da cuenta de esto desarrolla el atributo 1i y es probable que solicite apoyo del profesor o quizás busque en su libro una forma más sencilla de calcular la suma que se solicita en 13.2 (atributo 1j). Cuando el alumno comprende la expresión que permite obtener el valor directamente en 13.5 desarrolla los atributos 1b, 1d, 2c, 8a y 8b.

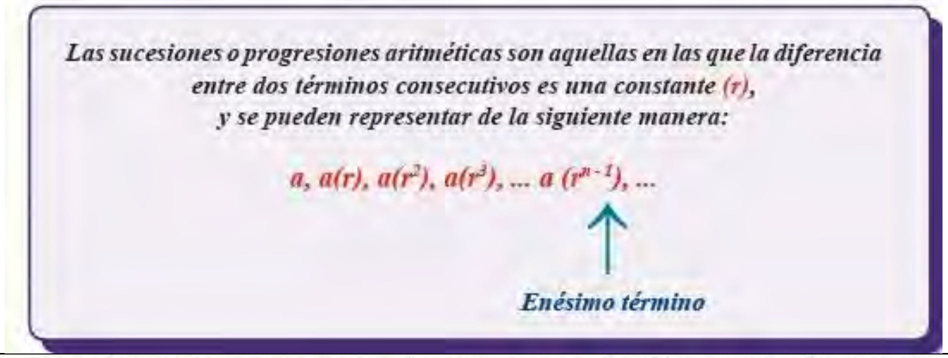
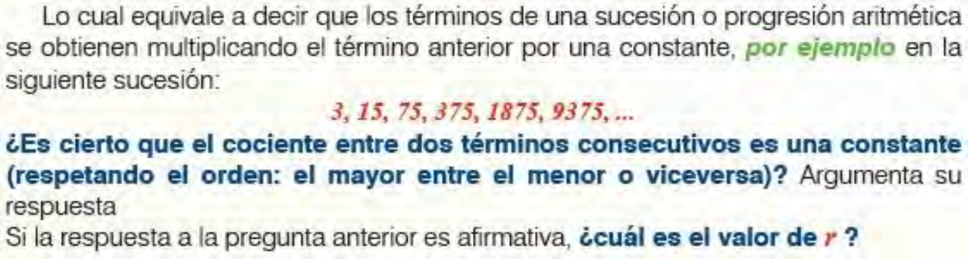
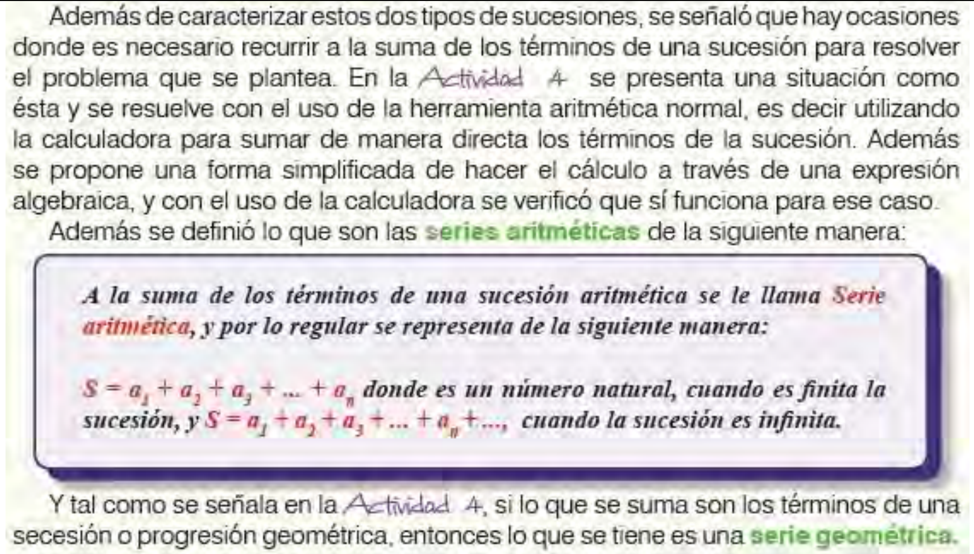
Un inconveniente que se encuentra en esta configuración es el hecho de que no existe un proceso de generalización relacionado con la propiedad de suma de los primeros *n* números naturales en 13.5. Con esto el estudiante puede llegar a pensar que este tipo de fórmulas ya están dadas y que no es posible obtenerlas por sí mismos.

En 13.6 se presentan varios ejercicios que permiten la justificación de la propiedad dada en 13.5 mediante la algoritmización apoyándose en la calculadora, desarrollando así los atributos 1c, 2i, 3e, 4a y 4d; además como la actividad está propuesta para ser realizada en equipos, también se desarrollan los atributos 2h y 4e.

En esta configuración lo que se está promoviendo es utilizar las herramientas matemáticas necesarias para simplificar las operaciones matemáticas, en especial la suma de términos de sucesiones.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 14

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>14.1</td><td>Actividad de Cierre

Actividad: 5
Actividad Grupal
En esta Secuencia se presentaron situaciones que dieron origen a la formación de sucesiones numéricas en diferentes contextos como el meramente numérico, el de las figuras, los ahorros, rifas, etc., tuviste la oportunidad de trabajar con sucesiones aritméticas y geométricas, las cuales fueron definidas en el cuerpo de las actividades porque la situaciones plateadas así lo ameritaban.
De esta manera en la Actividad 4 se definió lo que es una sucesión aritmética y una sucesión geométrica de la siguiente manera:
Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (k), y se pueden representar de la siguiente manera:
$a, a + k, a + 2k, a + 3k, \ldots, a + (n - 1)k$
↑
Enésimo término</td><td rowspan="2">Situaciones-Problemas:
*Determinar el valor de la constante k en una sucesión aritmética (14.2).
* Determinar el valor de la constante r en una sucesión geométrica (14.4).
Lenguajes:
*Verbal: planteamiento de problemas, argumentaciones, definiciones.
*Numérico: $\mathbb{Z}$, cantidades.
*Algebraico: incógnitas, términos a, k, n, r, S, a_n, S_n; expresiones algebraicas $(n-1)k, a(r^{n-1})$, $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, etc.</td></tr>
<tr><td>14.2</td><td>
Lo cual equivale a decir que los términos de una sucesión aritmética se obtienen sumando una constante al término anterior, por ejemplo en la siguiente sucesión:
6, 9, 12, 15, 18, 21, 24
¿Es cierto que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (respetando el orden: el mayor menos el menor o viceversa)? Argumenta su respuesta
Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, ¿cuál es el valor de k?</td></tr>
</table>

14.3	 *Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (r), y se pueden representar de la siguiente manera:* $a, a(r), a(r^2), a(r^3), \dots a\ (r^{n-1}), \dots$ *Enésimo término*	**Conceptos:** *Intervinientes:* Constante, sucesiones o progresiones aritméticas y geométricas, enésimo término, series aritméticas y geométricas finitas e infinitas. **Propiedades:** *Cerradura para la suma y la multiplicación. *Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva). *Enésimo término de una sucesión aritmética: $a+(n-1)k$ *Enésimo término de una sucesión geométrica: $a(r^{n-1})$ **Procedimientos:** Restar, dividir. **Argumentos:** *Argumentaciones en 14.2 y 14.4.
14.4	 Lo cual equivale a decir que los términos de una sucesión o progresión aritmética se obtienen multiplicando el término anterior por una constante, **por ejemplo** en la siguiente sucesión: *3, 15, 75, 375, 1875, 9375, ...* **¿Es cierto que el cociente entre dos términos consecutivos es una constante (respetando el orden: el mayor entre el menor o viceversa)?** Argumenta su respuesta Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, **¿cuál es el valor de *r* ?**	
14.5	 Además de caracterizar estos dos tipos de sucesiones, se señaló que hay ocasiones donde es necesario recurrir a la suma de los términos de una sucesión para resolver el problema que se plantea. En la Actividad 4 se presenta una situación como ésta y se resuelve con el uso de la herramienta aritmética normal, es decir utilizando la calculadora para sumar de manera directa los términos de la sucesión. Además se propone una forma simplificada de hacer el cálculo a través de una expresión algebraica, y con el uso de la calculadora se verificó que sí funciona para ese caso. Además se definió lo que son las **series aritméticas** de la siguiente manera: *A la suma de los términos de una sucesión aritmética se le llama Serie aritmética, y por lo regular se representa de la siguiente manera:* $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ *donde es un número natural, cuando es finita la sucesión, y* $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$ *cuando la sucesión es infinita.* Y tal como se señala en la Actividad 4, si lo que se suma son los términos de una secesión o progresión geométrica, entonces lo que se tiene es una **serie geométrica.**	

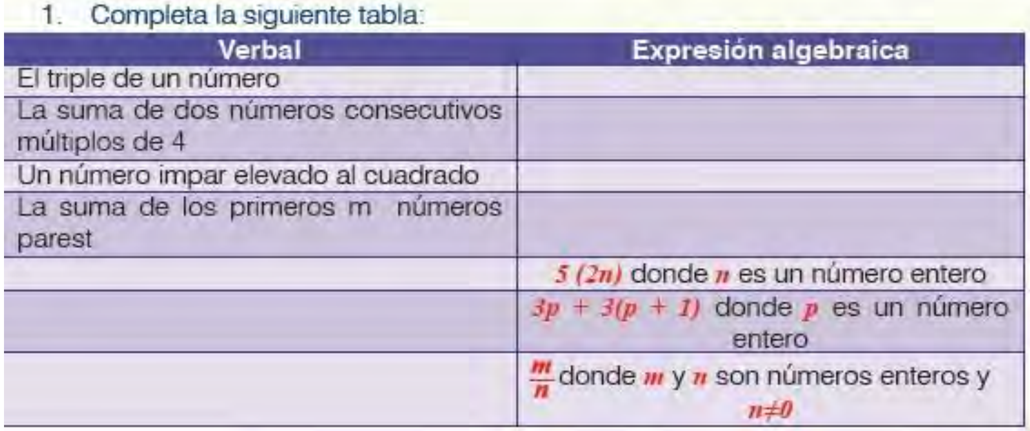
Como cierre de la secuencia didáctica aparece la Actividad 5 la cual está propuesta para ser revisada de manera grupal. En esta configuración se van retomando cada uno de los objetos emergentes en las actividades previas mostrando algunos ejemplos para cada caso.

Iniciando en 14.1 se hace la enunciación de las sucesiones aritméticas y la diferencia de dos términos consecutivos como constante. Luego se procede a la argumentación mediante un ejemplo en 14.2. Posteriormente se hace algo similar para el caso de las sucesiones geométricas en 14.3, pero en este caso la constante se obtiene al dividir dos términos consecutivos y en 14.4 tenemos el ejemplo. Por último en 14.5 se retoma el concepto de serie aritmética y geométrica. Al retomar estos conceptos se espera que el estudiante sea capaz de interpretar cada uno de ellos y además responder a los cuestionamientos planteados en 14.2 y 14.4 promoviendo el desarrollo de los atributos 1a, 1c, 1h, 2a, 2b, 2e, 2g, 3b, 3c, 3f, 4b, 4c, 8a, 8b y 8c.

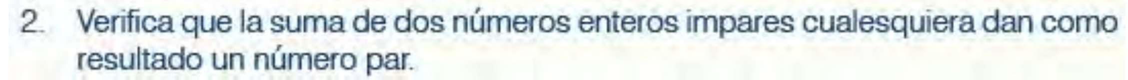
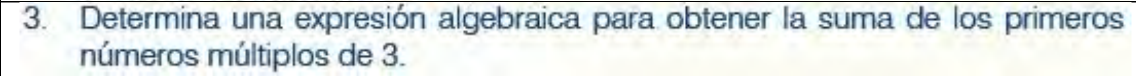
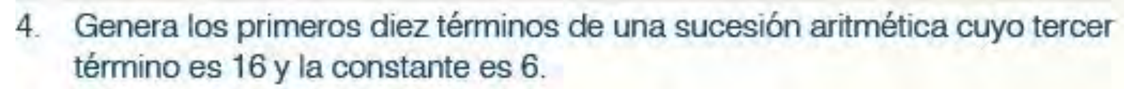
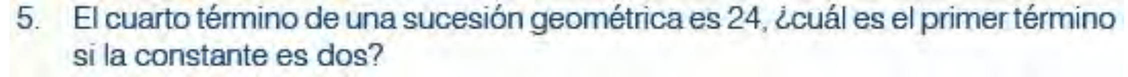
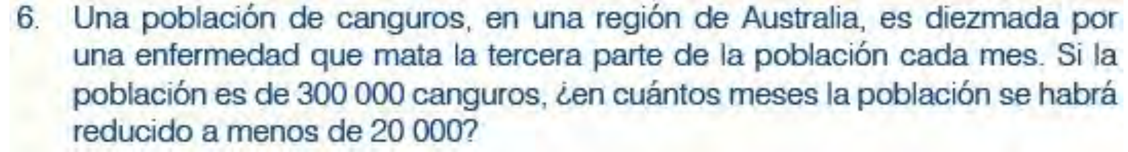
El hecho de presentar este tipo de Actividades en el cierre de las secuencias didácticas dice mucho sobre el tipo de secuencia que se está promoviendo. En cada una de las secuencias que hemos analizado encontramos al final una concentración de los objetos centrales en las secuencias y en los casos que no se ha dado la formalización, este proceso se presenta en el cierre mediante la descripción de los objetos en términos matemáticos, con el lenguaje formal que exige esta ciencia.

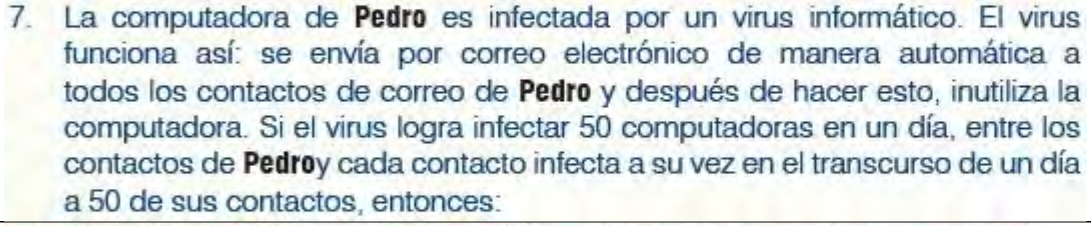
Este tipo de secuencias no promueve la enseñanza tradicional en la cual el profesor da a conocer los objetos matemáticos y posteriormente propone ejercicios para practicar lo enseñado. Lo que se busca es que los estudiantes al estar en contacto con una diversidad de situaciones problemas de diversa índole vayan construyendo el significado personal de cada objeto emergente, dejando el proceso de formalización a la institución y el de enunciación a los estudiantes.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 15

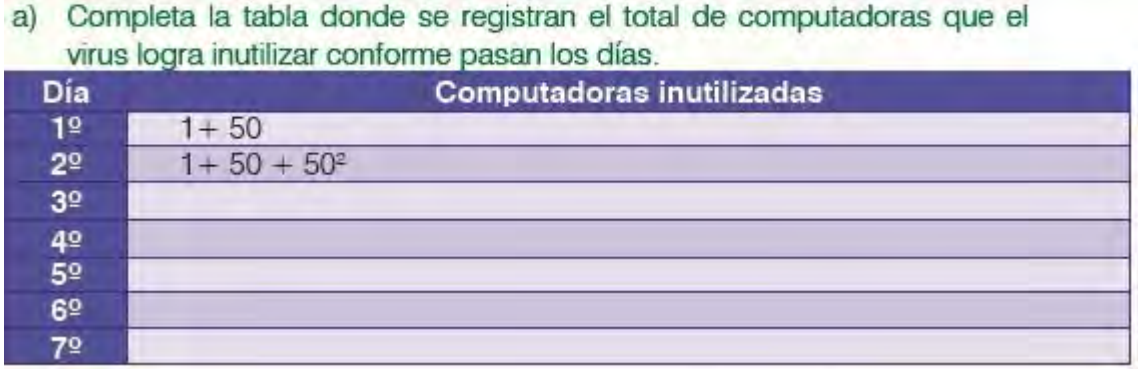
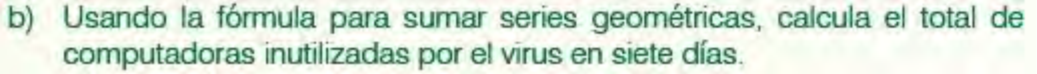
<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>15.1</td><td>Sección de problemas

1. Completa la siguiente tabla:<table><tr><th>Verbal</th><th>Expresión algebraica</th></tr><tr><td>El triple de un número</td><td></td></tr><tr><td>La suma de dos números consecutivos múltiplos de 4</td><td></td></tr><tr><td>Un número impar elevado al cuadrado</td><td></td></tr><tr><td>La suma de los primeros m números parest</td><td></td></tr><tr><td></td><td>$5\,(2n)$ donde n es un número entero</td></tr><tr><td></td><td>$3p + 3(p + 1)$ donde p es un número entero</td></tr><tr><td></td><td>$\frac{m}{n}$ donde m y n son números enteros y $n \neq 0$</td></tr></table></td><td rowspan="6">Situaciones-Problemas:
*Situaciones planteadas en 15.1, 15.2, 15.3, 15.4, 15.5, 15.6, 15.7, 15.8 y 15.9.

Lenguajes:
*Verbal: planteamiento de problemas, argumentaciones, definiciones.
*Numérico: ℝ, cantidades.
*Algebraico: números (15.1), expresiones algebraicas, etc.
*Tabular: Tabla (15.1)

Conceptos:
<i>Intervinientes:</i>
Triple, número, suma, consecutivo, múltiplo, impar, par, entero, término, sucesión aritmética y geométrica, constante, diezmada, serie geométrica.</td></tr>
<tr><td>15.2</td><td>
2. Verifica que la suma de dos números enteros impares cualesquiera dan como resultado un número par.</td></tr>
<tr><td>15.3</td><td>
3. Determina una expresión algebraica para obtener la suma de los primeros números múltiplos de 3.</td></tr>
<tr><td>15.4</td><td>
4. Genera los primeros diez términos de una sucesión aritmética cuyo tercer término es 16 y la constante es 6.</td></tr>
<tr><td>15.5</td><td>
5. El cuarto término de una sucesión geométrica es 24, ¿cuál es el primer término si la constante es dos?</td></tr>
<tr><td>15.6</td><td>
6. Una población de canguros, en una región de Australia, es diezmada por una enfermedad que mata la tercera parte de la población cada mes. Si la población es de 300 000 canguros, ¿en cuántos meses la población se habrá reducido a menos de 20 000?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>15.7</td>
<td>
7. La computadora de **Pedro** es infectada por un virus informático. El virus funciona así: se envía por correo electrónico de manera automática a todos los contactos de correo de **Pedro** y después de hacer esto, inutiliza la computadora. Si el virus logra infectar 50 computadoras en un día, entre los contactos de **Pedro**y cada contacto infecta a su vez en el transcurso de un día a 50 de sus contactos, entonces:</td>
<td rowspan="3">**Propiedades:**
*Cerradura para la suma y la multiplicación.
*Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva).
*Propiedad distributiva.
*Serie geométrica:
$a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$
*Suma de los primeros n naturales:
$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Procedimientos:
*Sumar, restar, multiplicar, dividir, factorizar.
*Pasar del lenguaje común al algebraico y viceversa.
*Identificar el n-ésimo término de una sucesión aritmética o geométrica.
*Obtener determinado término de una sucesión.

Argumentos:
*Demostración en 15.2.
*Explicaciones utilizando las propiedades de las sucesiones.</td>
</tr>
<tr>
<td>15.8</td>
<td>
a) Completa la tabla donde se registran el total de computadoras que el virus logra inutilizar conforme pasan los días.
<table>
<tr><th>Día</th><th>Computadoras inutilizadas</th></tr>
<tr><td>1º</td><td>1+ 50</td></tr>
<tr><td>2º</td><td>1+ 50 + 50^2</td></tr>
<tr><td>3º</td><td></td></tr>
<tr><td>4º</td><td></td></tr>
<tr><td>5º</td><td></td></tr>
<tr><td>6º</td><td></td></tr>
<tr><td>7º</td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>15.9</td>
<td>
b) Usando la fórmula para sumar series geométricas, calcula el total de computadoras inutilizadas por el virus en siete días.</td>
</tr>
</table>

En esta sección nos encontramos con una diversidad de problemas, de los cuales los planteados en 15.1, 15.2 y 15.3 están relacionados con el lenguaje algebraico. En el primer problema particularmente es importante que el estudiante sea capaz de representar un mismo objeto matemático en dos lenguajes diferentes, el verbal y algebraico lo cual implica procesos de generalización y significación. Previamente en la secuencia didáctica de este bloque se revisaron algunos ejemplos parecidos pero en este apartado el estudiante debe trabajar por su cuenta, sin embargo el profesor puede intervenir para guiar el proceso de generalización por medio del planteamiento de preguntas (atributos 1b, 1d, 1e, 1f, 2b, 2c, 2g, 3a, 8a, 8b y 8e).

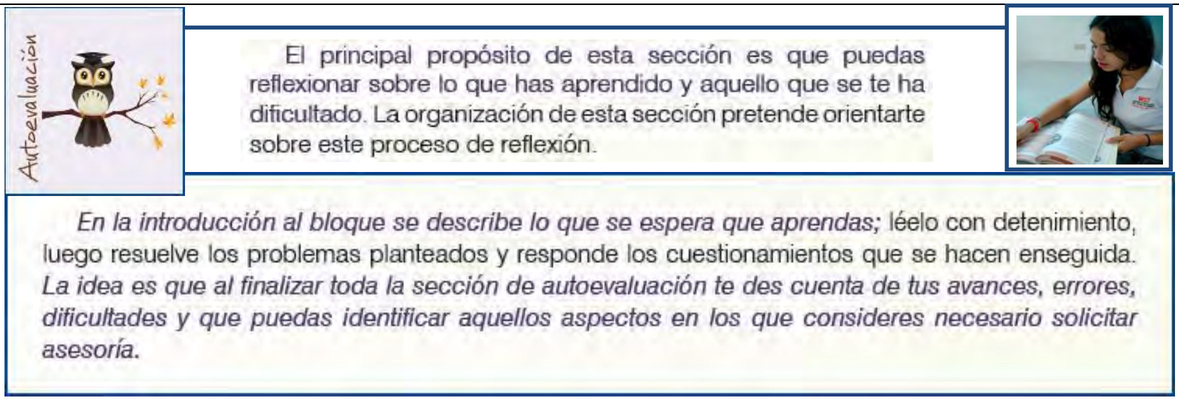
En el segundo problema de manera no ostensiva se sugiere la factorización para resolver el problema ya que para expresar la suma de dos pares como múltiplo de 2, debe aparecer un dos como factor en la suma. De la misma forma en la resolución del problema 15.3 es necesario factorizar y utilizar la expresión para la suma de los primeros n números naturales, ya que de esta forma se obtiene la expresión que permite calcular la suma de los primeros múltiplos de 3. Es así que los procesos involucrados en estas situaciones son de representación y generalización, aunque también se requiere de cierta algoritmización, con esto se agregan los atributos 1a, 1c, 1h, 2a, 2e, 3b, 3c, 3f, 4a, 4b, 4c y 8c a los que son desarrollados con esta actividad.

A partir del problema planteado en 15.4 se recurre a las sucesiones tanto geométricas como aritméticas. Para resolver estas situaciones los estudiantes deben comprender el proceso de generalización de estas sucesiones para dar respuesta a los problemas planteados. En particular en 15.4 y 15.5 deben reconocer el papel que juega la constante en este tipo de sucesiones.

Las situaciones planteadas en 15.6 y 15.7 requieren la fórmula para la serie geométrica, la cual puede ser proporcionada por el profesor o asignar como tarea a los estudiantes investigarla. Sin embargo esta fórmula no es indispensable para resolver el problema, ya que los estudiantes pueden encontrar la respuesta sumando cada uno de los términos usando su calculadora. Lo importante en este punto es que los estudiantes identifiquen las series como parte de la solución del problema. Al tratarse de situaciones contextualizadas identificamos un proceso de problematización lo cual implica la movilización de los atributos 2i, 3e, 5a, 5b, 5c, 5e y 8d.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 16

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>16.1</td><td>



Autoevaluación

El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. *La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.*

</td><td rowspan="4">

Situaciones-Problemas:

*Situaciones planteadas en 16.2, 16.5 y 16.8.

Lenguajes:

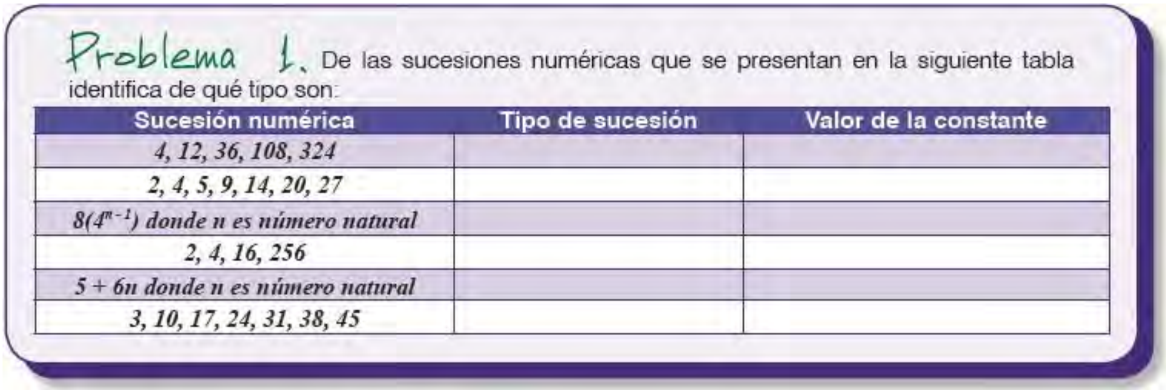
***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, definiciones.
***Numérico:** ℝ, cantidades.
***Algebraico:** expresiones algebraicas (16.2).
***Tabular:** Tabla (16.2).

Conceptos:

Intervinientes:
Triple, número, suma, consecutivo, múltiplo, impar, par, entero, término, sucesión aritmética y geométrica, constante, diezmada, serie geométrica.

Propiedades:
*Cerradura para la suma y la multiplicación.

</td></tr>
<tr><td>16.2</td><td>



Problema 1. De las sucesiones numéricas que se presentan en la siguiente tabla identifica de qué tipo son:

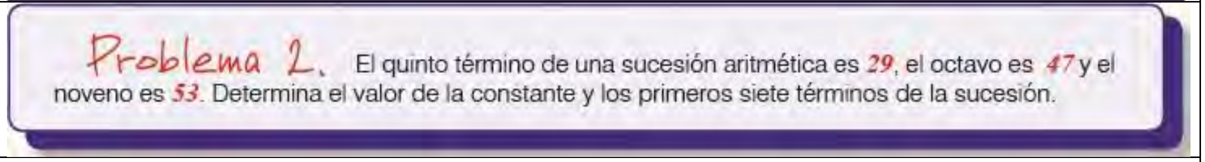
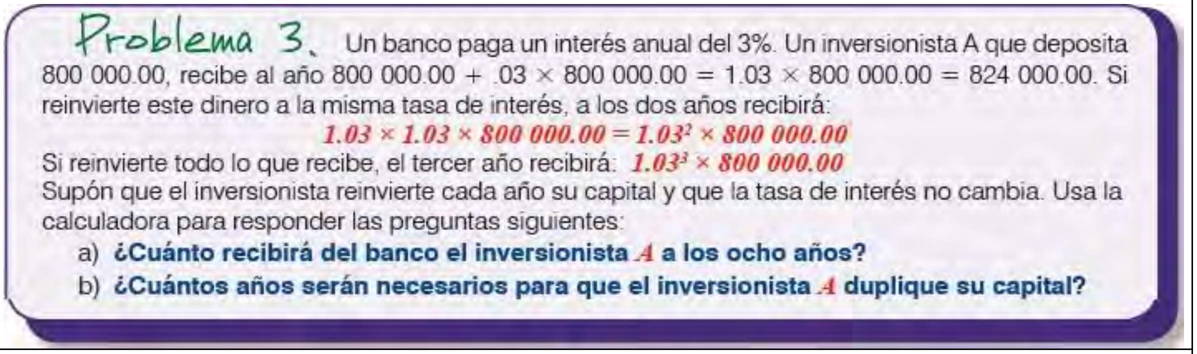
<table>
<tr><th>Sucesión numérica</th><th>Tipo de sucesión</th><th>Valor de la constante</th></tr>
<tr><td>4, 12, 36, 108, 324</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2, 4, 5, 9, 14, 20, 27</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$8(4^{n-1})$ donde n es número natural</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2, 4, 16, 256</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$5 + 6n$ donde n es número natural</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3, 10, 17, 24, 31, 38, 45</td><td></td><td></td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td>16.3</td><td>Procedimientos o cálculos:</td></tr>
<tr><td>16.4</td><td>

Reflexiones relacionadas con el *problema 1*

¿Cómo le hiciste para determinar el tipo de sucesión en cada caso?
¿Qué estrategia utilizaste para determinar el valor de la constante cuando identificaste que era sucesión aritmética?
¿Cómo le hiciste para determinar el valor de la constante cuando identificaste que era sucesión geométrica?
¿Qué te resultó más difícil, identificar las sucesiones aritméticas o las geométricas?

</td></tr>
</table>

	¿En qué tipo de representación te resultó más difícil identificar el tipo de sucesión, cuándo está desarrollada o cuándo está en la forma de expresión algebraica?	*Propiedades de la igualdad (sustitución, multiplicativa, simétrica y aditiva). *Propiedad distributiva. *Serie geométrica: $a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ **Procedimientos:** *Sumar, restar, multiplicar, dividir, factorizar. *Pasar del lenguaje común al algebraico y viceversa. *Identificar el *n*-ésimo término de una sucesión aritmética o geométrica. *Obtener determinado término de una sucesión. **Argumentos:** *Explicaciones utilizando las propiedades de las sucesiones. *Respuestas a las preguntas planteadas en 16.4, 16.7 y 16.10.
16.5	 Problema 2. El quinto término de una sucesión aritmética es *29*, el octavo es *47* y el noveno es *53*. Determina el valor de la constante y los primeros siete términos de la sucesión.	
16.6	*Solución:*	
16.7	Reflexiones relacionadas con el *problema 2* ¿Qué hiciste para determinar el valor de la constante? ¿Cómo le hiciste para obtener el primer término de la sucesión? De lo que aprendiste en este bloque ¿Qué fue lo que usaste para resolver el problema? ¿Cuál fue la mayor dificultad que tuviste para resolver el problema?	
16.8	 Problema 3. Un banco paga un interés anual del 3%. Un inversionista A que deposita 800 000.00, recibe al año 800 000.00 + .03 × 800 000.00 = 1.03 × 800 000.00 = 824 000.00. Si reinvierte este dinero a la misma tasa de interés, a los dos años recibirá: $1.03 \times 1.03 \times 800\,000.00 = 1.03^2 \times 800\,000.00$ Si reinvierte todo lo que recibe, el tercer año recibirá: $1.03^3 \times 800\,000.00$ Supón que el inversionista reinvierte cada año su capital y que la tasa de interés no cambia. Usa la calculadora para responder las preguntas siguientes: a) **¿Cuánto recibirá del banco el inversionista *A* a los ocho años?** b) **¿Cuántos años serán necesarios para que el inversionista *A* duplique su capital?**	
16.9	*Solución:*	
16.10	Reflexiones relacionadas con el *problema 3* Describe lo que hiciste para responder la primera pregunta. ¿Qué estrategia utilizaste para encontrar el número de años que se necesitan para que se duplique el capital? ¿Consideras que es suficiente lo que se trabajó en el bloque para responder la segunda pregunta? Argumenta.	

La autoevaluación del Bloque 3 es la última unidad de análisis para el análisis del texto de COBACH. Aparecen tres situaciones problemas, las primeras dos son intra-matemáticas y la última se trata de un problema contextualizado. Procederemos a analizar más detalladamente cada una de ellas y las relaciones entre los distintos objetos que se han identificado.

En 16.2 aparecen nuevamente las sucesiones expresadas en lenguaje numérico y algebraico, para cada caso se solicita la identificación del tipo de sucesión y la enunciación del valor de la constante. Para completar esta tabla se requiere primeramente la comprensión por parte del estudiante de cada sucesión y el papel que juegan la constante, así como la idealización que le permita articular los diferentes tipos de representación. Esto conlleva la movilización de los atributos 1f, 1h, 2a, 2e, 8a, 8b, 8c y 8e.

Los procedimientos y cálculos necesarios para responder a este problema se plasmaran en 16.3. Posteriormente basándose en 16.2 y 16.3 se dará respuesta a los planteamientos que aparecen en 16.4 los cuales responden a los procesos de comunicación y argumentación. Con esto se busca la justificación matemática por parte de los estudiantes, promoviendo el desarrollo de los atributos 1e, 2g, 3a, 3c, 3f, 4b, 4c y 8d.

El problema 2 planteado en 16.5, 16.6 y 16.7 comparte el desarrollo de la mayoría de los atributos descritos anteriormente ya que está relacionado con los procedimientos y argumentaciones mediante los mismos procesos, al tratarse de una sucesión como las que se presentan en la tabla en 16.2. Sin embargo aquí también se involucran procesos de representación y algoritmización, por lo que se añaden los atributos 1a, 1c, 3b y 4a.

Por último la situación planteada en 16.8 implica un proceso de problematización y personalización para el estudiante, ya que se le proporcionan preguntas guía para responder al problema. Además al tratarse de una situación contextualizada, hay otras competencias involucradas al momento de dar el paso a la generalización (atributos 2b, 2c, 5a, 5b, 5c y 5d). En la parte de la argumentación en 16.10 se le pregunta al estudiante si lo aprendido es suficiente para responder el problema, esta cuestión está relacionada con los atributos 1i y 1j.

3.1.3. Resumen de atributos y competencias para el caso de COBACH

De acuerdo al análisis que se ha presentado se identifican la movilización de los siguientes atributos en el análisis del texto de COBACH.

			CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA																TOTAL
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
COMPETENCIA Y ATRIBUTO	1	1a	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	14
		1b	*	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*		*		12
		1c		*	*				*	*		*	*	*	*	*	*	*	11
		1d	*	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*		*		12
		1e	*	*	*	*	*		*	*		*		*	*		*	*	12
		1f	*	*		*	*			*				*			*	*	8
		1g				*													1
		1h		*	*	*				*	*	*	*	*	*	*	*	*	12
		1i	*	*		*		*		*			*		*			*	8
		1j				*	*	*		*				*	*			*	7
	2	2a	*	*	*		*	*		*		*	*			*	*	*	11
		2b	*	*	*		*	*	*	*		*	*			*	*	*	12
		2c	*	*	*		*	*	*	*		*	*	*	*		*	*	13
		2d	*			*													2
		2e	*	*	*		*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	14
		2f	*				*							*					3
		2g	*	*	*	*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*	14
		2h		*		*				*					*				4
		2i				*									*		*		3
	3	3a	*	*		*	*	*		*		*	*	*	*		*	*	12
		3b	*	*	*		*	*	*	*		*	*		*	*	*	*	13
		3c	*	*			*	*								*	*	*	7
		3d		*				*											2
		3e				*									*		*		3
		3f	*				*									*	*	*	5
	4	4a		*			*		*	*					*		*	*	7
		4b		*		*	*	*	*	*					*	*	*	*	10
		4c		*			*	*		*						*	*	*	7
		4d				*									*				2
		4e		*		*	*	*		*					*				6

		CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA																TOTAL
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
5	5a											*		*		*	*	4
	5b											*		*		*	*	4
	5c											*		*		*	*	4
	5d																	0
	5e											*		*		*	*	4
6	6a			*		*												2
	6b			*		*												2
	6c																	0
	6d			*		*												2
	6e			*														1
	6f					*												1
	6g			*		*												2
7	7a																	0
	7b																	0
	7c																	0
	7d																	0
	7e																	0
8	8a	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	15
	8b	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	15
	8c	*		*	*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	13
	8d	*									*		*			*	*	5
	8e	*	*		*	*			*				*			*	*	8

Tabla 3.1.3.1. Atributos y competencias para el caso COBACH

Esta tabla nos permite apreciar la frecuencia con la que se presentan los atributos en cada una de las configuraciones y a partir de esto declarar qué competencias son las que se están promoviendo en el texto en el apartado que se seleccionó para el análisis. Mediante un asterisco se ha señalado los atributos que aparecen en cada configuración y consideraremos como frecuencia significativa aquellos atributos que aparezcan en al menos 5 configuraciones.

En el caso de COBACH se observa presencia en la mayoría de las competencias, exceptuando la competencia 7 la cual establece que el estudiante "Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia". (Acuerdo Secretarial No. 444, 2008, p. 6). Sin embargo no todas las competencias se promueven en la misma medida. A continuación describiremos los aspectos que se desarrollan de cada competencia.

Para la competencia 1 relativa a la construcción e interpretación de modelos se consideraron 10 atributos, los cuales se movilizaron en al menos una de las configuraciones. El atributo que aparece con menos frecuencia es el 1g (sólo una vez) y existe una gran diferencia entre la frecuencia con la que aparece este atributo y el siguiente con menor frecuencia (el 1j con 7). El atributo 1g indica que el estudiante "maneja las TIC para obtener información y expresar ideas sobre la situación planteada", debido a que este atributo sólo se presenta en una configuración, se puede afirmar que este aspecto de la competencia se desarrolla en un nivel muy pobre.

De los 9 atributos que se consideraron en la competencia 2 los que tienen menor frecuencia son el 2d, 2f, 2h y 2i. El primero de estos atributos establece que el estudiante propone diferentes maneras de resolver problemas, de acuerdo a las actividades que aparecen en el texto, en la mayoría de los problemas se solicita la solución del problema pero una respuesta es suficiente. El atributo 2f está relacionado con plantear situaciones problema; en el texto se resuelven problemas pero son pocas las actividades en las que se solicita al estudiante que plantee problemas que se ajusten a ciertas características. El atributo 2h también considera el resolver un problema de distintas maneras pero al trabajar en equipo y el 2i está relacionado con el uso de tecnología para resolver el problema.

El observar los atributos que aparecen con menor frecuencia nos permite declarar que la competencia 2 se promueve pero centrándose en la resolución de problemas. Los aspectos formular problemas y aplicar diferentes enfoques están relacionados principalmente con los atributos que se promovieron en menor medida.

Los atributos que aparecen con menor frecuencia en la competencia 3 son el 3d y 3e, el primero establece que el estudiante sintetiza los resultados para formular nuevas preguntas, el no tener una mayor frecuencia en este atributo está relacionado con la formulación de problemas de la competencia 2. Por otro lado el atributo 3e está relacionado con el uso de tecnología para procesar información. Es así que la competencia 3 sí promueve los aspectos de explicar e interpretar los resultados así como la contrastación con modelos establecidos o situaciones reales.

En la competencia 4 sólo hay un atributo relacionado con el manejo de tecnologías y éste es el que se presenta con menor frecuencia en las configuraciones. Es por ello que la argumentación que se busca promover en el texto se centra principalmente en métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.

En los apartados que se seleccionaron en el texto la mayoría de las situaciones que se presentaron eran intra-matemáticas, por lo cual los atributos de las competencias 5 (relativa al análisis de situaciones sociales o naturales) y 6 (concerniente a los aspectos espaciales y geométricos), presentan una frecuencia menor. Se promueven las competencias pero se pasan por alto en la mayoría de las actividades propuestas.

Por último en los atributos de la competencia 8 no se observa ninguno cuya frecuencia sea muy pequeña o casi cero, por lo cual se considera que los aspectos de esta competencia se están promoviendo en su totalidad.

3.2. Trayectoria epistémica del texto de C.B.T.i.s.

El texto de C.B.T.i.s. "Álgebra" (Sada, 2005), es la octava reimpresión del libro cuya primera edición es del año 2005. De este texto tomaremos la sección 1.1 titulada "Expresión algebraica" y sus subsecciones 1.1.1 Terminología y 1.1.2 Lenguaje común y lenguaje algebraico.

Para realizar el análisis de la trayectoria epistémica se dividieron las secciones seleccionadas en unidades de análisis, tratando de seccionar los contenidos por tema, sin embargo, aquellos que son muy amplios fueron divididos en varias unidades.

Al iniciar la unidad 1 se hace una descripción del propósito mediante el planteamiento de tres preguntas. A continuación se muestran las respuestas correspondientes a esta primera sección.

- ¿Qué aprenderás?

A traducir el lenguaje común al algebraico.

- ¿Cómo lo lograrás?

Mediante el análisis de ejemplos resueltos paso a paso, identificando los procedimientos y las reglas empleadas en su resolución; además, se propone una serie de ejercicios en los cuales aplicarás los conocimientos adquiridos.

- ¿Para qué te va a servir?

El aprendizaje que logres en esta unidad te permitirá resolver problemas de manera más rápida y eficaz problemas surgidos de situaciones reales susceptibles de generalización mediante el álgebra.

3.2.1. Unidad 1, sección 1.1, subsecciones 1.1.1 y 1.1.2.

Uno de los dos conceptos fundamentales que se consideran en el programa de la asignatura Álgebra (Acuerdo Secretarial 658, 2008), es "Lenguaje Algebraico", del cual se desprenden dos conceptos subsidiarios, en este análisis sólo se ha considerado el primer concepto "Expresión Algebraica". De los contenidos del concepto subsidiario la subsección 1.1.1 "Terminología" ha considerado dos: notación y evaluaciones numéricas de expresiones algebraicas. Por otro lado la subsección 1.1.2 "Lenguaje común y lenguaje algebraico" consideró los temas: representación algebraica de expresiones en lenguaje común e interpretación de las expresiones algebraicas.

Para abordar dichos contenidos se han considerado los siguientes temas:

- Terminología.
    - Notación algebraica.
        - Literales.
        - Coeficientes.
        - Variables.
        - Término algebraico.
        - Expresión algebraica.
    - Grado de una expresión algebraica.
        - Monomio.
        - Polinomio.
    - Ordenación de los elementos de una expresión algebraica.
        - Orden en un término.
        - Orden en un polinomio.
    - Valor numérico de una expresión algebraica.
        - Identidad.
        - Ecuación.
        - Cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas.
        - Comprobación de una igualdad.
- Lenguaje común y lenguaje algebraico.

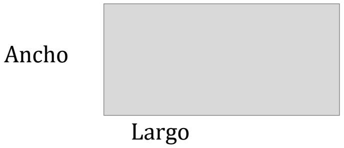
Estos temas se han organizado en las siguientes configuraciones como se muestra:

C.E.	Descripción
1	Expresión algebraica: Terminología
2	Terminología: Reseña histórica
3	Notación algebraica
4	Grado de una expresión algebraica
5	Ordenación de los elementos de una expresión algebraica

C.E.	Descripción
6	Valor numérico de una expresión algebraica
7	Ecuación (definición)
8	Ejemplos
9	Lenguaje común y lenguaje algebraico
10	Ejemplos
11	Ejemplos

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 1

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>1.1 Expresión Algebraica
Algunas definiciones de la palabra álgebra que encontramos en los diccionarios son las siguientes: “Generalización de la aritmética que, en lugar de emplear números concretos como ésta, representa las cantidades mediante símbolos” (<i>Gran diccionario enciclopédico ilustrado</i>): “Parte de las matemáticas que estudia las operaciones en las que hay cantidades conocidas representadas por números y otras desconocidas representadas por letras u otros símbolos” (<i>Diccionario escolar de la lengua española</i>).
En álgebra, además de emplear los números, propios de la aritmética, se usan letras y otros símbolos que pueden representar cualquier número, conocido o desconocido. La comprensión del uso correcto de estos símbolos nos permitirá dominar el álgebra. Las propiedades que se utilizan en la resolución de problemas algebraicos provienen de la aritmética: por ello, es conveniente revisar algunos contenidos aritméticos importantes, los cuales se presentan con mayor profundidad en el apéndice A).
A continuación se describen diversos elementos que intervienen en el lenguaje algebraico.</td><td rowspan="2">Situaciones-Problemas:
*Definir álgebra (1.1).
*Definir la notación de las operaciones en álgebra (1.2).
* Precio de venta de una computadora (1.3).
* Perímetro de un rectángulo (1.4).
Lenguajes:
*Verbal: planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones.
*Numérico: representación de cantidades, $\mathbb{N}$.
*Algebraico: representar cantidades conocidas a, b, (1.2) o desconocidas v, c, (1.3) P, a, l (1.4); ecuaciones ($v = c + 1000, P = 2l + 2a$)
*Tabular: Cuadro 1.1 (en 1.2)</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>1.1.1 | Terminología
Como se mencionó antes, en álgebra se utilizan letras para representar números. Luego, es posible que, partiendo de que <i>a=2</i> y <i>b=5</i>, se expresen operaciones de la siguiente manera.
Cuadro 1.1
<table>
<tr><th>OPERACIÓN</th><th>REPRESENTACIÓN ARITMÉTICA</th><th>REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA</th></tr>
<tr><td>Suma</td><td>$2 + 5$</td><td>$a + b$</td></tr>
<tr><td>Resta</td><td>$2 - 5$</td><td>$a - b$</td></tr>
<tr><td>Multiplicación</td><td>2×5</td><td>$ab,\ (a)(b),\ a * b\ o\ a \cdot b$</td></tr>
<tr><td>División</td><td>$2 \div 5$</td><td>$a \div b,\ (a) \div (b)\ o\ \frac{a}{b}$</td></tr>
</table>
En álgebra no se utiliza el símbolo × para no confundirlo con la x que se utiliza para denotar una cantidad generalizada.
Por otra parte, si se usan otros símbolos para representar números, se puede establecer, por ejemplo, que si $\delta = 3$ y $\lambda = 4$ entonces $\delta + \lambda = 7$. En este ejemplo, se tiene la certeza que se cumple la igualdad porque primero se indicó la equivalencia de cada símbolo.</td></tr>
</table>

1.3	En álgebra se siguen procedimientos generales en la resolución de problemas incluso cuando se desconoce el valor numérico de las letras o símbolos utilizados. Un ejemplo de generalización es el siguiente. Si se venden computadoras e invariablemente la ganancia es de mil pesos por cada computadora vendida, el precio de venta (v) es igual al precio de costo (c) más mil pesos, sin importar el costo específico de la computadora. La expresión algebraica o fórmula que representa este procedimiento en forma general es: $v = c + 1000$ En este ejemplo, cada persona podría utilizar las letras que quisiera. Por lo general, se utilizan letras que tienen alguna relación con los “conceptos” que intervienen en el problema, para que no se olviden.	**Conceptos:** *Intervinientes:* Aritmética, números, suma, resta, multiplicación, división, igualdad, generalización, figura, fórmula, perímetro, rectángulo. *Emergentes:* Álgebra, expresión algebraica. **Propiedades:** *Cerradura para la suma y la multiplicación. *Propiedad de sustitución de la igualdad. *Propiedad distributiva. **Procedimientos:** *Plantear ecuaciones (1.3 y 1.4)
1.4	Presentaremos otro ejemplo sencillo para lograr una mejor comprensión de lo que es el álgebra. El perímetro (P) de cualquier figura rectilínea se determina sumando las longitudes de sus lados. Si se quiere particularizar este proceso para un rectángulo, se puede designar al largo con la letra l y al ancho con la letra a. Observamos entonces que el largo y el ancho se deben sumar dos veces (véase la figura 1.1). Por lo tanto, el perímetro de un rectángulo está dado por $P = 2l + 2a$. Sin importar las medidas del rectángulo, el perímetro se calcula con esta fórmula: es decir, esta fórmula generaliza el proceso algebraico para obtener el perímetro de un rectángulo. **Figura 1.1**  Perímetro = largo + largo + ancho + ancho	
1.5	Cuando en un proceso aritmético la resolución de un problema se expresa con letras o símbolos, se está trabajando con álgebra. Desde el nivel básico de educación escolar la hemos utilizado, aunque probablemente sin saber que se trataba del álgebra. Si necesitamos entablar conversación con un extranjero, digamos un alemán, tendríamos que hablar su idioma o el alemán tendría que hablar el nuestro. Otra posibilidad sería que ambos hablaran un tercer lenguaje, o bien, auxiliarse de un traductor. Algo así es el álgebra: una especie de idioma general que sirve para entender una gran diversidad de situaciones reales.	

Este texto inicia con la definición de álgebra en 1.1 donde se presenta como una aritmética generalizada, donde las cantidades representan números, continuando con esta noción en 1.2 se introduce el cuadro 1.1 donde se utilizan las incógnitas para representar las cantidades conocidas. En esta primera parte se da a conocer al estudiante la notación que se empleará, lo cual implica un proceso de representación para los procedimientos básicos en aritmética. De esta manera se promueve en el estudiante los atributos relacionados con la interpretación de información: 1e, 1f, 8a, 8b y 8e.

En 1.2 aparece una situación problema relacionada con la venta de computadoras, por lo cual identificamos un proceso de problematización al tratarse de una situación contextualizada. Sin embargo no se da un proceso de personalización que conduzca al estudiante a la expresión generalizada en el lenguaje algebraico, aparece como enunciación, por lo cual los atributos que se promueven con esto son 1a, 1b, 1d, 1h, 2a, 5a, 5e y 8c.

El problema que se plantea en 1.3 está relacionado con geometría y relaciona los conceptos intervinientes de rectángulo y perímetro, posteriormente se inicia el proceso de enunciación de la fórmula para determinar el perímetro, lo cual implica la movilización de los atributos 6a y 6d. Como cierre se hace mención nuevamente del álgebra y se presenta como lenguaje que permitirá representar diversas situaciones en matemáticas.

La propiedades que se han identificado aparecen de manera no ostensiva en la unidad de análisis, por ejemplo, en 1.3 al mencionar que las dimensiones del rectángulo se deben sumar dos veces tenemos lo siguiente: $2(l+a)=2l+2a$. En este caso se ha empleado la propiedad distributiva y la sustitución en la igualdad; además si se afirma que el resultado representa el perímetro, una cantidad, implica que el resultado P es un número real aún después de realizar la suma y la multiplicación de las dimensiones l y a (propiedad de cerradura).

En esta primera configuración se observa que no se plantea ningún problema o ejercicio para ser resuelto por parte del alumno. Lo que se espera es que mediante la explicación de los conceptos y la enunciación de diversas expresiones el estudiante logre la generalización en las situaciones que se le presenten posteriormente.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 2

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
2.1	*En el siglo IX se publicó un libro del matemático y astrónomo árabe Mohamed ibn Musa Al-Jwarizmi:* Hisab aljabr w'almuqabalah (Transposición y eliminación). *En este texto aparecían por primera vez fórmulas generales para la resolución de problemas planteados por medio de ecuaciones de primer grado y segundo grado. El término álgebra proviene del título árabe de este libro.*	**Situaciones-Problemas:** *Origen del álgebra (2.1) *Utilidad y aplicación del álgebra (2.2) *Reconocer los antecedentes en el álgebra (2.3). **Lenguajes:** ***Verbal:** descripción de situaciones, argumentaciones, explicaciones. ***Numérico:** representación de cantidades, números romanos para los siglos.
2.2	En la resolución de problemas algebraicos no sólo se utilizan símbolos literales para representar las cantidades desconocidas, llamadas *incógnitas*, sino también para representar cantidades que se suponen conocidas mediante los denominados *coeficientes* por ejemplo. El álgebra tiene la ventaja de que con su utilización pueden obtenerse fórmulas para resolver problemas de manera general. Así, para llegar a la solución de un caso particular, es suficiente con sustituir en la expresión algebraica el valor de las literales. La siguiente lectura se incluye con el fin de complementar la exposición de este tema.	
2.3	Entre los más antiguos testimonios gráficos de relaciones matemáticas que, en cierto sentido, pueden considerarse expresiones algebraicas, cabe mencionar las Tablas de Ahmes, papiro egipcio conservado en el Museo Británico de Londres, en el que hallan contenidas algunas sencillas ecuaciones. El conocimiento algebraico experimentó un gran desarrollo en la Grecia clásica con los principios de la deducción matemática abstracta aportados por los miembros de la escuela pitagórica y con los trabajos de Diofanto de Alejandría, matemático griego del siglo III de nuestra era, quien introdujo el uso de símbolos y realizó relevantes investigaciones en el ámbito de las ecuaciones determinadas e indeterminadas. Otros importantes trabajos que contribuyeron a diferenciar esta disciplina fueron los de la escuela índica, representada por matemáticos como Brahmagupta, Mahavira, Bhaskara, entre otros y cuyas aportaciones fueron dadas a conocer en Europa occidental por medio de los matemáticos árabes, como Mohamed ibn Musa al-Jwarizmi. En Europa, el conocimiento algebraico registró un importante desarrollo durante los siglos XVI y XVII y se nutrió de los trabajos de la notable escuela de álgebra que tuvo su centro en Italia. A ella pertenecieron Nicolás Fontana, conocido como Tartaglia, autor de la teoría de la ecuación de tercer grado; Gerolamo Cardano, quien realizó cálculos con raíces de números negativos y publicó el libro *Ars Magna* en 1545, texto en el que recopilaba los conocimientos	

	matemáticos de la época, y Ludovico Ferrari, descubridor de la solución a las ecuaciones de cuarto grado. A partir del siglo XVIII comenzó a gestarse lo que constituiría el ámbito de la moderna especulación algebraica. En este desarrollo del álgebra, son decisivas las aportaciones del francés Jean-Baptiste Fourier, el inglés Isaac Newton y el alemán Gottfried Leibniz. En este contexto surgieron las nociones fundamentales del álgebra, como el concepto de función, el de conjunto o el de cambio de variable. Asimismo, se desarrolló la diferenciación entre la tendencia que recogió los avances en las técnicas de resolución de ecuaciones y en el cálculo de funciones y variables y a la que se agregaron los desarrollos lógicos que conformaron el fundamento del análisis matemático. En estos últimos desarrollos es de destacar la figura del italiano Paolo Ruffini, quien aseveró la imposibilidad de solucionar ecuaciones de grado superior al cuarto; así como la del noruego Niels Henrik Abel, autor de importantes teorías sobre funciones algebraicas, y el francés Camille Jordan, quien complementó estudios sobre grupos finitos.[1] Enseguida analizaremos los elementos más importantes de la terminología algebraica y la forma en que estos se representan. [1] Tomado de: *Enciclopedia Hispánica,* Encyclopaedia Britannica Publishers, Kentucky, 1991, tomo 1, p. 212.	**Conceptos:** *Intervinientes:* Fórmulas, ecuaciones, grado, álgebra, incógnitas, coeficientes, expresión algebraica, deducción, raíces, función, conjunto, variable, análisis, grupos finitos.

En esta segunda configuración se hace una reseña histórica sobre el álgebra y sus orígenes siendo las situaciones problema de carácter intra-matemático tal como se indica en la clasificación de objetos. Las situaciones que se han identificado son origen del álgebra en 2.1, dar a conocer la utilidad y aplicación del álgebra en 2.2 y reconocer los antecedentes en el 2.3; por lo cual no se identifican procesos ya que este tipo de problemáticas no van ligadas a procedimientos y/o argumentos. Sin embargo, se hace uso de los lenguajes verbal y numérico en un proceso de enunciación relativo al álgebra y algunos conceptos intervinientes en 2.3. Es así que las competencias que se movilizarán en este apartado son 8a y 8d los cuales están relacionados con la interpretación de información en textos.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 3

UNIDAD DE ANÁLISIS

3.1

1.1.1.1 NOTACIÓN ALGEBRAICA

La palabra *notación* en matemáticas significa la forma en que representamos conceptos matemáticos. Para el caso del álgebra, a continuación se describen los elementos más comunes y la forma general de su utilización.

3.2

Literales

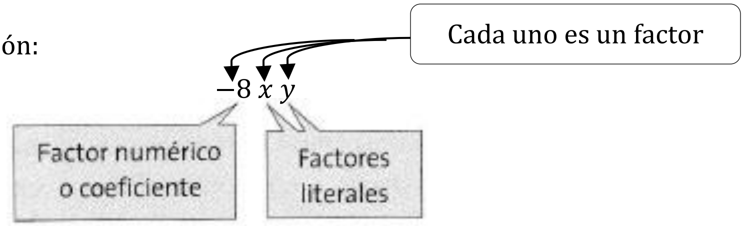
Cuando los números se representan con letras, reciben el nombre de *literales*. Por ejemplo: *a, b, c, … x, y, z*. Las literales representan números; por lo general, con las primeras letras del alfabeto se representan valores *constantes*, mientras que las últimas se utilizan para indicar valores desconocidos o variables; por ello se llaman *incógnitas*.

Constante. Es una cantidad que no cambia el valor.

3.3

Coeficientes

Observa la siguiente expresión:



Cuando los factores son letras, reciben el nombre de *factores literales* y cuando un factor es un número, recibe el nombre de *coeficiente*. En las expresiones que se muestran el cuadro 1.2 se identifican los factores literales y los coeficientes.

3.4

Cuadro 1.2

EXPRESIÓN ALGEBRAICA	COEFICIENTE	FACTORES LITERALES
$\mathbf{4ab}$	4	ab
$\mathbf{-mn}$	-1	mn
$\mathbf{-12x}$	-12	x
$\mathbf{y}$	1	y

OBJETOS PRIMARIOS

Situaciones-Problemas:

*Identificar coeficientes y factores literales de un término (3.4).

*Identificación de los términos de una expresión (3.9).

*Asignar el nombre a una expresión algebraica de acuerdo al número de términos (3.11)

Lenguajes:

***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones, definiciones.

***Numérico:** $\mathbb{Z}$, representación de cantidades y coeficientes.

***Algebraico:** representar incógnitas o constantes *a, b, c d, m, n, x, y, z*; términos y polinomios (3.4 y 3.8, 3.9 y 3.11), igualdades $y = 2x$, $x = 0$, entre otras (3.7 y 3.9).

***Tabular:** Cuadro 1.2 (en 3.4) y Cuadro 1.3 (3.11).

3.5	Cuando una expresión algebraica sólo tiene factor literal, significa que le corresponde el número 1 como coeficiente, pero éste no se escribe.	**Conceptos:** *Intervinientes:* Álgebra, números, incógnitas, factor, conjunto. *Emergentes:* Notación, constante, literales, coeficiente, variable dependiente e independiente, término algebraico, expresión algebraica, monomio, binomio, trinomio, polinomio. **Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). *Leyes de los exponentes (potencia cero). *Propiedad distributiva de la división.
3.6	*Variables* Cuando una literal puede adoptar cualquier valor de un conjunto de números, se le conoce como *variable*. Por ejemplo, en $y = 2x$, el valor de la literal y varía conforme a los valores que se le asignen a la literal x. **Variable.** Es una cantidad que cambia el valor numérico en el proceso de un mismo problema.	
3.7	En $y = 2x$, tenemos que Variable independiente Variable dependiente si $x = 0$, $y = 0$ si $x = 1$, $y = 2$ si $x = 2$, $y = 4$ El valor de y varía (cambia) de acuerdo con el valor que adopta x. En esta situación, la x se conoce como *variable independiente* mientras que a y se le conoce como *variable dependiente.*	
3.8	*Término algebraico* Un *término algebraico* consta de una o varias literales que se multiplican o dividen y un coeficiente, es decir, en él sólo se identifica un signo $+$ o uno $-$. En el siguiente ejemplo aparecen cinco términos algebraicos. $-8ab + 2c - d - 12abd + c$ Los cinco términos son: El coeficiente de d es -1 El coeficiente de c es +1 $-8ab$, $+2c$, $-d$, $-12abd$, $+c$ Observa que a cada término le corresponde el signo $+$ o – que le antecede.	

<table>
<tr>
<td>3.9</td>
<td>Ejemplos
1 ¿Cuántos términos hay en $-\frac{2xy}{z}$?
Sólo hay uno con coeficiente -2 y literales $\frac{xy}{z}$.
2 ¿Cuántos términos hay en $\frac{8a-3b}{a}$?
Hay dos términos. Observa que
$\frac{8a-3b}{a}=\frac{8a}{a}-\frac{3b}{a}=8-\frac{3b}{a}$; los dos términos son $+8$ y $\frac{-3b}{a}$</td>
<td rowspan="3">Procedimientos:
*Multiplicaciones (3.7)
*Simplificación de fracciones (3.9)
Argumentos:
*Explicaciones como las mostradas en (3.5, 3.8 y 3.9).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.10</td>
<td><i>Expresión algebraica</i>
Una expresión algebraica está formada por uno o varios términos. De acuerdo con la cantidad de términos se le denomina <i>monomio, binomio, trinomio o polinomio</i> (véase el cuadro 1.3). En una expresión algebraica cada signo + o – indica un término.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.11</td>
<td>Cuadro 1.3
<table>
<tr><th></th><th>NOMBRE</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td>Con un término</td><td>Monomio</td><td>$-5x^3y^2$</td></tr>
<tr><td>Con dos términos</td><td>Binomio</td><td>$5a^3+3b^2c$</td></tr>
<tr><td>Con tres términos</td><td>Trinomio</td><td>$-5x^3y^2+x^2y+y^3$</td></tr>
<tr><td>Con dos o más términos</td><td>Polinomio</td><td>$-2xy^2-5xy+3z^2+4y^2z-z$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

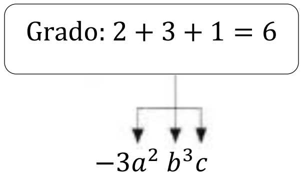
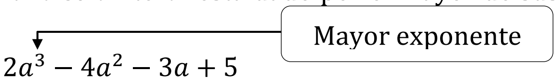
Dentro de la subsección 1.1.1 tenemos el apartado 1.1.1.1 relativo a la notación algebraica en el cual los objetos centrales son los conceptos emergentes, iniciando con la noción de notación en 3.1. Después aparecen los conceptos de literales, constante (en 3.2) y coeficientes (en 3.3), y con el propósito de aclarar estas nociones se introduce como ejemplo una situación problema en 3.4 mediante el lenguaje tabular. Dicha situación consiste en la identificación de los coeficientes y factores literales de varias expresiones algebraicas. Al interpretar la información que se presenta en 3.4 el estudiante desarrollará los atributos 1a, 2a, 8a y 8b.

Al introducirse el concepto de variable en 3.6 se habla de una cantidad que cambia su valor numérico de acuerdo a los valores que se asignan a las literales, por lo cual en 3.7 mediante la problematización se darán procesos de particularización algoritmización si el estudiante va realizando las operaciones que se indican en 3.7. Con esto se promueve la movilización de los siguientes atributos 1c, 1h, 2e y 8c; logrando así que emerjan los conceptos de variable dependiente e independiente al manipular cada posible valor de x.

En 3.8 se introduce la noción de término algebraico y en 3.9 una situación problema que viene a reforzar la comprensión del concepto, ya que se solicita la identificación de los términos semejantes en una serie de ejemplos. Sin embargo tanto el concepto como los ejemplos mostrados pueden causar conflicto al alumno, en particular el ejemplo dos, en el cual la argumentación que se da para afirmar que se trata de dos términos consiste en una simplificación de un cociente de dos términos entre un tercero donde se aplica la propiedad distributiva de la división (la cual se emplea de forma no ostensiva). Si el alumno comprende el procedimiento desarrollado en este apartado, desarrollará los atributos 3c, 4a, 4c relacionados con el proceso de argumentación.

Este apartado concluye con la definición de expresión algebraica en 3.10 a partir de la noción de término, posteriormente en 3.11 se presenta el cuadro 1.3 que describe los conceptos de monomio, binomio, trinomio y polinomio a partir de la cantidad de términos, ejemplificando cada caso. Al plantear los conceptos y ejemplos de esta forma el proceso en el que se involucran es de enunciación, por lo cual los atributos que se desarrollan son los que ya se han mencionado anteriormente, relacionados con la interpretación de textos con símbolos matemáticos.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 4

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
4.1	**1.1.1.2 GRADO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA** El *grado* de una expresión algebraica es un concepto que permite comprender la resolución de ecuaciones. Por el momento sólo se presenta la manera en que se puede determinar el grado tanto de monomios como de polinomios.	**Situaciones-Problemas:** *Determinar el grado de un término (4.2) *Determinar el grado relativo y absoluto de un polinomio (4.5) **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones, definiciones. ***Numérico:** $\mathbb{Z}$, cantidades, coeficientes, exponentes. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas *a, b, c, x, y, z*; términos y polinomios (4.2, 4.3, 4.5, 4.7). **Conceptos:** *Intervinientes:* Expresión, literal, ecuaciones, monomio, mayor, término, exponente, polinomio. *Emergentes:* Grado, relativo, absoluto.
4.2	*Monomio* El *grado* de un monomio que contenga sólo *una literal*, como en $5x^4$, está dado por el exponente de dicha literal. Así, el monomio $5x^4$ es de cuarto grado. El *grado* de un monomio que contenga *varias literales*, como $-3a^2b^3c$, está dado por la suma de los exponentes de dichas literales. Así, $-3a^2b^3c$ es un monomio de sexto grado: 	
4.3	*Polinomio* El grado de un polinomio que contenga *una sola literal* está dado por el mayor de sus exponentes. Por ejemplo,  El término que contiene el mayor exponente es $2a^3$ y el exponente de la literal es 3. Por lo que el polinomio es de tercer grado.	
4.4	Cuando un polinomio tiene *varias literales*, su grado será *relativo* o *absoluto*. Es relativo el que se considera con respecto a una literal específica; es absoluto el que se considera tomando el polinomio completo, y está dado por el término de mayor grado.	
4.5	**Ejemplo** Encontrar el grado relativo y el absoluto del polinomio $-5xy^3 + 3y^2 - 4x^3yz^4$	

4.6	▫ *Grado relativo* ▪ Con respecto a x: 3. ▪ Con respecto a y: 3. ▪ Con respecto a z: 4.	**Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). **Procedimientos:** *Sumas (4.2). *Obtener el grado de un término y de un polinomio. **Argumentos:** *Explicaciones del tipo (4.2): *El grado es 6 porque al sumar los exponentes $2 + 3 + 1 = 6$
4.7	▫ *Grado absoluto*. Necesitas encontrar primero el grado de cada término, que como vimos está dado por la suma de los exponentes de las literales. ▪ Grado del primer término, $-5xy^3$: $1 + 3 =$ 4. ▪ Grado del segundo término, $3y^2$: 2. ▪ Grado del tercer término, $-4x^3yz^4$: $3 + 1 + 4 = 8$. El grado absoluto del polinomio está dado por el término de mayor grado. Así pues, $-5xy^3 + 3y^2 - 4x^3yz^4$ es un polinomio de octavo grado.	

En este apartado nuevamente juegan un papel central los conceptos emergentes a partir de los cuales se presentan situaciones problemas que juegan el papel de ilustrar los conceptos como ejemplos. Iniciando con la noción de grado en 4.1 aclarando que se calculará diferente si se trata de un monomio o polinomio.

En 4.2 se describe el procedimiento para determinar el grado de un monomio con su respectivo ejemplo, en tal caso hablamos de un proceso de comunicación y algoritmización si aparecen varias literales; por lo cual se desarrollan los atributos 1a, 2e, 8a y 8b. Después de esto en 4.3 y 4.4 se da el proceso de comunicación para el procedimiento de determinar el grado de un polinomio haciendo la distinción entre polinomios de una o varias literales; y en el caso de los polinomios de varias literales se habla de grado absoluto y relativo.

La suma que se realiza en 4.2 para determinar el grado de un término hace uso de manera no ostensiva de la propiedad de sustitución de la igualdad, ya que se reemplaza lo que se tiene del lado izquierdo de la igualdad por algo que es igual.

Se han considerado como argumentaciones las explicaciones presentadas en 4.2 ya que no solamente se está proporcionando una respuesta a la situación planteada, sino que para proporcionar esa respuesta se da la explicación que va ligada al concepto de grado (atributos 3c, 4a y 4c).

La situación planteada en 4.5 viene a ilustrar los conceptos de grado relativo y absoluto, desarrollados respectivamente en 4.6 y 4.7. Para el grado relativo el estudiante debe identificar el mayor exponente en la variable indicada. Lo cual implica la movilización de los siguientes atributos: 1h, 2a y 8c. En cuanto al grado absoluto, el estudiante debe considerar primeramente el grado de cada término, lo cual implica realizar el mismo procedimiento planteado en 4.2 para el cual ya se han especificado los procesos asociados y los atributos que se desprenden de dichas prácticas. Una vez hecho esto el grado del polinomio queda determinado por el término de mayor grado del polinomio, esta parte del procedimiento puede asociarse con el grado relativo, ya que a partir de aquí sólo se debe tomar el valor mayor.

En cuanto a los lenguajes podemos observar que predomina el lenguaje verbal al igual que en las configuraciones previas, lo cual se debe principalmente a la estructura que presenta este libro de texto de carácter expositivo. El lenguaje verbal se relaciona con las situaciones problemas, las argumentaciones y explicaciones mediante el proceso de comunicación principalmente, aunque en ocasiones también es mediante un proceso de enunciación, es por ello que los atributos que se han movilizados hasta el momento están relacionados con los aspectos de interpretación de textos e identificación de modelos.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 5

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
5.1	**1.1.1.3 ORDENACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA** *Orden en un término* Las literales de un mismo término se ordenan alfabéticamente, sin tomar en cuenta los exponentes; el coeficiente siempre debe anteceder a las literales, es decir, debe ir antes de ellas. De esta manera se facilita la identificación de *términos semejantes* (sección 1.1.3). Por ejemplo, al rescribir la expresión $-b^4c^36a^2$ en orden queda así: $\overset{\text{El coeficiente antecede a las literales}}{-6}\,\underbrace{a^2b^4c^3}_{\text{Las literales se ordenan alfabéticamente}}$	**Situaciones-Problemas:** *Ordenar términos (5.1). *Ordenar polinomios de forma ascendente (5.3, 5.6). *Ordenar polinomios de forma descendente (5.3, 5.5) **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones, definiciones. ***Numérico:** $\mathbb{R}$, cantidades, coeficientes, exponentes. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas *a, b, c, x, y, z*; términos y polinomios (5.1, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6). **Conceptos:** *Intervinientes:* Orden, expresión algebraica, término, literal, exponentes, coeficiente, semejantes, polinomio, *Emergentes:* Término independiente, decreciente, descendente, creciente, ascendente.
5.2	*Orden en un polinomio* Ordenar un polinomio implica anotar los elementos de cada uno de sus términos como se acaba de describir, y luego los términos se ordenarán con respecto a una misma literal de tal forma que el exponente de ésta disminuya (o aumente) de uno al siguiente término. Conviene ordenar los polinomios como se ha descrito, en parte para que sea más sencillo efectuar operaciones con expresiones algebraicas (si se te dificulta identificar el coeficiente de un término algebraico cuando éste es 1, escríbelo, pero no olvides que no es necesario hacerlo).	
5.3	**Ejemplos** **1** Ordena el siguiente polinomio respecto a x. $-2xy^2+4x^3\underbrace{-6}_{\text{Término independiente}}+5x^2y^4$ ▫ De mayor a menor exponente (orden *decreciente* o *descendente*): $4x^3+5x^2y^4-2xy^2-6$ ▫ De menor a mayor exponente (orden *creciente* o *ascendente*): $-6-2xy^2+5x^2y^4+4x^3$	

5.4	Observa la posición en que quedó en cada caso el término independiente. Recuerda que un número $a \neq 0$ cumple que $a^0 = 1$. Esto es, se puede considerar que un término independiente es el coeficiente de la *literal* considerada elevada a la cero: $-6x^0 = -6(1) = -6$.	**Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). *Leyes de los exponentes (potencia cero). **Procedimientos:** *Multiplicaciones (5.4). *Ordenar un polinomio. **Argumentos:** *Explicaciones del tipo (5.4).
5.5	$\boxed{2}$ Ordena en forma *descendente* el polinomio $-\frac{2a}{3} - 4 + 3a^3 - 25a^2$ $3a^3 - 25a^2 - \frac{2a}{3} - 4$ **Orden descendente.** Significa de mayor a menor exponente respecto a una literal.	
5.6	$\boxed{3}$ Ordena en forma *ascendente* respecto a y el polinomio $-3 + 3x^3y^2 - 2x^2y^3 + 5xyz^2$. $-3 + 5xyz^2 + 3x^3y^2 - 2x^2y^3$ **Orden ascendente.** Significa de menor a mayor exponente respecto a una literal.	

La situación problema central en esta configuración es el orden, iniciando en 5.1 se habla del orden en un mismo término mediante un ejemplo. Esto permite evidenciar la importancia que se le da a la formalidad matemática en el texto en relación a la notación, ya que todo este apartado tiene como objetivo la expresión adecuada para términos y polinomios.

En 5.2 se distinguen los dos tipos de ordenación que se considerarán: orden ascendente y descendente, ejemplificando ambos en 5.3, 5.4 y 5.5. Debido a que se han considerado polinomios con varias variables, se habla de orden con respecto a una de las variables, el polinomio presentado en 5.3 se ordena con respecto a x, en el ejemplo 2 (5.5) no se especifica con respecto a qué variable se ordenará el polinomio ya que sólo aparece a; y el polinomio del ejemplo 3 (5.6) se ordena con respecto a y. Para llevar a cabo este proceso de ordenar los términos el estudiante debe ser capaz de identificar primeramente las incógnitas y sus exponentes, y de acuerdo a esto identificar el lugar que ocupará en la expresión resultante. Dichas acciones implican la movilización de los atributos 1a, 2a, 4a, 8a y 8b.

En 5.4 se identifica un proceso de argumentación mediante la propiedad potencia cero relativo a las leyes de los exponentes, dicho proceso busca la justificación del orden en el que se ubica al término independiente al considerarlo de grado cero. En este proceso se desarrollan los atributos 3c y 4c.

Los conceptos descendente y ascendente se definen respectivamente en 5.5 y 5.6 mediante un proceso de enunciación que relaciona las nociones de orden, exponentes y literales. Al presentar dichos conceptos se espera que el estudiante tenga las herramientas suficientes para desarrollar por sí mismo el procedimiento empleado al ordenar un polinomio, pero en el momento que se presenta dicho procedimiento no se le otorga participación al estudiante, es decir no se identifican procesos de construcción.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 6

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
6.1	**1.1.1.4 VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA** **Valor numérico de una expresión algebraica.** Es el resultado que se obtiene al sustituir las literales de la expresión por el valor numérico asignado a cada una de ellas y realizar las operaciones indicadas. Ha quedado definido hasta este punto qué es una expresión algebraica y se ha descrito cómo se ordena. Por otra parte, una expresión algebraica *no* tiene un valor numérico definido por sí misma. Sin embargo, cuando se tiene que las literales toman determinados valores, la situación cambia. Por ejemplo, si se pide el triple de un número cualquiera, $3x$, se podrían dar varias respuestas. Pero si se pide el triple de 4, $3(4)$, la respuesta única es 12. En el primer caso interviene una incógnita x, mientras que en el segundo caso se tiene un número específico, 4. Resulta que $3x = 12$ cuando $x = 4$. El *valor numérico de una expresión algebraica* se obtiene al sustituir cada una de sus literales por un valor numérico que se le asigne y efectuar operaciones indicadas. En el ejemplo anterior el valor numérico de la expresión $3x$ es 12: se obtiene al sustituir la literal x por el valor numérico 4 y realizar la multiplicación indicada.	**Situaciones-Problemas:** *Identificar identidades (6.5). **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones, definiciones. ***Numérico:** $\mathbb{Z}$, coeficientes, exponentes, igualdades. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas x; igualdades (6.1), identidades (6.5). **Conceptos:** *Intervinientes:* Expresión algebraica, literal, triple, número, incógnita, sustituir. *Emergentes:* Valor numérico, igualdad, miembros de la igualdad, igualdad aritmética, algebraica, identidades, ecuaciones.
6.2	Antes de continuar, es necesario definir el concepto de *igualdad* que se utiliza en este tema. Por ahora estudiaremos lo indispensable, posteriormente en el tema de ecuaciones se desarrolla con mayor amplitud. Como sabemos, la igualdad establece que dos cantidades tienen el mismo valor; esta relación se indica con el símbolo = que se lee “igual a” o “es igual a”. A cada una de las dos expresiones escritas a uno y otro lado de este símbolo se les denomina *miembros de la igualdad.*	
6.3	Cuando en una igualdad sólo intervienen valores numéricos, se le llama *igualdad aritmética*. Por ejemplo, $8 - 5 = 10 - 7$ y $20 + 5 = (5)(5)$.	
6.4	Una *igualdad algebraica* es aquella en la que intervienen expresiones algebraicas en uno o en ambos miembros de la igualdad. Se considera que hay dos tipos de igualdades algebraicas: *i) identidades* y *ii) ecuaciones*.	
6.5	*Identidad* Una identidad es una igualdad algebraica la cual se verifica para cualesquiera valores que se le asignen a las literales en ambos miembros. Por ejemplo, $6x + 2x = 10x - 2x$ *primer miembro = segundo miembro*	

6.6	No importa el valor que se le asigne a x, siempre el primer miembro será igual al segundo. Comprobémoslo para algunos valores de x: $6x + 2x = 10x - 2x$ ▫ Si $x = 3$, $6(3) + 2(3) = 10(3) - 2(3)$ $18 + 6 = 30 - 6$ $24 = 24$ ▫ Si $x = -2$, $6(-2) + 2(-2) = 10(-2) - 2(-2)$ $-12 - 4 = -20 + 4$ $-16 = -16$ ▫ Si $x = 10$, $6(10) + 2(10) = 10(10) - 2(10)$ $60 + 20 = 100 - 20$ $80 = 80$ Como ejercicio, puedes seguir sustituyendo otros valores de x y verificar la igualdad.	**Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). *Jerarquía de operadores. **Procedimientos:** *Multiplicaciones (6.1, 6.3, 6.6). *Sumas y restas (6.3, 6.6) **Argumentos:** *Ejemplos (6.6).

Esta configuración incluye el título de la sección a la que corresponde este apartado el cual es: “Valor numérico de una expresión algebraica” y respecto a este tema se enuncia un concepto en 6.1 y se proporciona un ejemplo. Después de esto en 6.2 se habla del concepto de igualdad, siendo éste el aspecto central a desarrollar en esta configuración epistémica, particularmente las identidades.

En 6.3 y 6.4 se clasifican los tipos de igualdad en aritmética y algebraica, clasificando las igualdades algebraicas en identidades y ecuaciones. El ejemplo que se muestra en 6.5 ilustra la noción de identidad y se procede a la argumentación, la cual está basada en casos particulares, como se muestra en 6.6. En esta situación se puede identificar un posible conflicto ya que este tipo de justificación puede llevar a considerar el caso de una igualdad como identidad: al sustituir los valores que son solución de la ecuación, tenemos que se cumple la igualdad, sin embargo no se trata de una identidad. En 6.4 se afirma que debe cumplirse la igualdad para todos los valores y en 6.6 se comprueba para 3 y al final se propone como ejercicio sustituir otros valores, sin embargo no es posible sustituir todos los valores para comprobar que se cumple la igualdad para cada uno de ellos, es por ello que matemáticamente no se considera una demostración o justificación suficiente para probar que se trata de una identidad.

El ejercicio que se realiza en 6.6 consiste en la sustitución de diferentes valores en la expresión dada en 6.5, de acuerdo a la jerarquía de operadores, esto implica un proceso de algoritmización donde se realizan operaciones como sumas, restas y multiplicaciones; así identificamos los atributos 1a, 1c, 2e, 3c, 4a, 4c, 8a y 8b. Este ejercicio se propone como ejemplo por lo cual es estudiante no movilizará estos atributos hasta que resuelva una situación por sí mismo, pero al interpretar el texto debe verificar cada aspecto para construir su propia noción sobre los conceptos y procedimientos aquí dispuestos, por lo cual pone en juego los atributos en un nivel de interpretación.

Esta forma de organizar los temas da respuesta al problema de organización que se ha presentado en las matemáticas, donde se considera que antes de ver un nuevo tema o concepto, se deben estudiar formalmente todos los conceptos involucrados. En este caso se observa que para hablar de valor numérico de una expresión, se introduce la noción e igualdad y posteriormente la de ecuación y en esta configuración de manera implícita se emplea el valor numérico para verificar cuándo se trata de una identidad.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 7

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
7.1	*Ecuación* Una ecuación es una igualdad algebraica en la que hay una o varias cantidades desconocicas, llamadas *incógnitas*, y que sólo se verifica para determinados valores de ellas, por lo que se le conoce como *igualdad condicionada*. Veamos un ejemplo:	**Situaciones-Problemas:** *Identificar ecuaciones (7.2). *Verificar si un valor es solución de una ecuación (7.2, 7.4). *Determinar el número de soluciones de una ecuación (7.5, 7.6, 7.7). **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones, definiciones. ***Numérico:** $\mathbb{Z}$, coeficientes, exponentes, igualdades. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas *x*; ecuaciones (7.2)
7.2	$3x - 4 = 5$ Cuando no sabemos si la igualdad es una identidad o una ecuación, le asignamos un valor a la literal, en este caso x, y verificamos si se cumple la igualdad. Si $x = 2$, $3(2) - 4 = 5$ $6 - 4 = 5$ $2 \neq 5$ Como sabemos, 2 no es igual a 5. Así que no se trata de una identidad, sino de una ecuación, pues no se le puede asignar a la incógnita cualquier valor para que se cumpla la igualdad. Si mostramos que una igualdad no es una identidad, significa que la incógnita tiene un valor numérico para el cual se cumple la igualdad y debemos encontrar ese valor. Así, ¿qué número al multiplicarse por 3 y restarle 4 al producto es igual a 5? Encontraremos que el número 3 satisface lo anterior. No todas las ecuaciones se pueden resolver de esta forma, pero existen procedimientos algebraicos para resolverlas. $3(3) - 4 = 5$ $9 - 4 = 5$ $5 = 5$ Así, se dice que la ecuación se satisface para el valor $x = 3$.	
7.3	Para entender mejor el concepto de igualdad, podemos comparar situaciones algebraicas con frases que utilizamos en la vida diaria. Por ejemplo, al utilizar las frases “El cuarto mes del año es abril” y “Él es un estudiante muy aplicado y simpático”, en la primera estamos dando un dato exacto, no tenenmos duda de la afirmación: “cuarto mes del año *igual a* abril”; pero en la segunda, no sabemos de quién se esta hablando: necesitamos saber quién es “él”. Para aceptar o rechazar que en realidad sea “aplicado y simpático”, “él es un estudiante muy aplicado y simpático *igual a* desconocido”.	

7.4

De igual forma podemos crear oraciones en donde falte una palabra:

1. ____________________ es un estado de la República mexicana.
2. El número ____________________ es un número primo.
3. El átomo de ____________________ es un componente de la molécula del agua.
4. Durante el periodo del presidente ____________________ se nacionalizó el petróleo en 1938.

No podemos aseverar si estas cuatro oraciones son falsas o verdaderas, pues desconocemos la palabra que falta en cada línea. Cuando se conoce la palabra que falta, podemos decir que hemos encontrado la solución para la oración.

- Si en la primera oración la palabra que falta es “Tamaulipas”, como sabemos que éste es un estado de la República mexicana, decimos que es verdadera la solución “Tamaulipas es *igual a* un estado de la República mexicana.”
- Si ahora se toma como la palabra que falta en la primera oración “Italia”, decimos que la afirmación “Italia es un estado de la República mexicana” es falsa, Italia no es una solución para esta oración por no ser un estado de la República mexicana. “Italia *no es igual* a un estado de la República mexicana.”
- Si en la segunda oración la palabra que falta es el número “6”, decimos que 6 hace que esta oración sea falsa, ya que el número 6 no es un número primo.
- Si en la tercera oración la palabra que falta es “hidrógeno”, decimos que la solución “hidrógeno” para esta oración es válida, pues los constituyentes del agua son hidrógeno (H) y oxígeno (O).
- Si en la cuarta oración la palabra que falta es “Cárdenas” decimos que la solución “Cárdenas” para esta oración es verdadera, porque fue el presidente Lázaro Cárdenas del Río quien nacionalizó el petróleo en 1938.

Recuerda que

En una identidad algebraica la incógnita puede tomar cualquier valor y siempre se cumplirá la igualdad; mientras que en una ecuación algebraica es necesario encontrar la solución, porque la incógnita debe tomar un valor específico para que se cumpla la igualdad

7.5

La cantidad de soluciones para la incógnita en una ecuación está dada por el grado absoluto de la expresión algebraica.

- Si es de *primer grado*, sólo tiene una solución.
- Si es de *segundo grado*, tendrá a lo más dos soluciones reales.
- Si es de *tercer grado*, tendrá a lo más tres soluciones reales.

Y así sucesivamente.

Conceptos:

Intervinientes:
Igualdad, igualdad algebraica, incógnitas, identidad, grado absoluto, expresión.

Emergentes:
Ecuación, solución, igualdad condicionada.

Propiedades:

*Propiedades de la igualdad (sustitución).

*Jerarquía de operadores.

Procedimientos:

*Multiplicaciones (7.2).

*Sumas y restas (7.2).

7.6	Retomemos los ejemplos de las cuatro oraciones dadas antes para aclarar más. En la cuarta oración, “Durante el periodo del presidente ____________ se nacionalizó el petróleo en 1938”, sabemos que la respuesta es “Cárdenas” y es única: no hay otra opción. Este sería un ejemplo de una ecuación de primer grado, pues tiene una sola solución. En la tercera oración, “El átomo de ____________ es un componente de la molécula del agua”, si contestamos “hidrógeno”, es correcto; pero si se contesta “oxígeno”, también sería correcto. Así que esta oración tiene dos soluciones posibles, por lo que podemos utilizarla como ejemplo de ecuación de segundo grado.	**Argumentos:** *Contraejemplo (7.2) *Comprobación de la solución de una ecuación mediante sustitución (7.2) *Explicaciones del tipo (7.4).
7.7	**Algo para pensar** En el ejemplo de las oraciones incompletas dado en la página 75, ¿cuántas soluciones tiene la primera oración?; ¿cuántas la segunda? A continuación vamos a practicar un procedimiento sencillo: cuando conocemos los valores de las incógnitas de una expresión algebraica, podemos sustituirlos en ésta y encontrar así el valor numérico de dicha expresión.	

En este apartado se encuentran las nociones básicas sobre las ecuaciones, teniendo como situaciones problema identificar si se trata de una ecuación, verificar si un valor es solución y determinar cuántas soluciones tiene a partir del grado. En la unidad 7.1 se presenta la ecuación como una igualdad condicionada y mediante un contraejemplo en 7.2 se evidencia mediante un proceso de algoritmización que implica el uso de la jerarquía de operadores como propiedad no ostensiva, que no se trata de una identidad ya que existe un valor para el cual no se cumple y este proceso de argumentación es suficiente para descartarla como identidad. Al hacer esto se desarrollan los atributos 1a, 1c, 2e, 3c, 4c, 8a, 8b y 8c. Por otro lado, no todas las igualdades que no son identidades serán ecuaciones, puede darse el caso de una igualdad que no tiene solución, así que nuevamente se identifica un conflicto ya que esta situación no se considera.

En 7.2 se obtiene la solución después de plantear una pregunta y en seguida se presenta la comprobación de la solución mediante la sustitución de su valor en la ecuación dada (atributos 2e y 4a). Sin embargo se aclara que no siempre será posible obtener la solución a una ecuación de esta "forma", aun cuando el procedimiento que se empleó para obtener la solución no se da a conocer.

Después de presentar el ejemplo anterior se hace una analogía de las ecuaciones con situaciones de la vida real, particularmente en 7.3 hacen referencia al signo igual. Al representar las igualdades mediante el lenguaje verbal o natural se busca recurrir a la experiencia del estudiante para construir los nuevos conceptos a partir de estas ideas.

El problema planteado en 7.4 consiste en verificar si los valores son soluciones de la ecuación, lo cual equivale a colocar una palabra en la línea y comprobar si la oración es verdadera al hacerlo. Para ello se muestran cinco ejemplos donde 3 de ellas eran soluciones y 2 no, ya que al sustituirlas en la línea, el enunciado no era verdadero. Al hacer esta analogía se lleva a cabo un proceso de idealización y significación entre los conceptos matemáticos que aparecen en esta configuración, con ello se promueven los atributos 1f, 1h, 5a, 5b, 5e y 8e, entre otros que ya se han mencionado.

En 7.5 se lleva a cabo un proceso de institucionalización y enunciación relativo al grado de una ecuación y se ejemplifica retomando la situación previa. Por último en 7.7 se deja como ejercicio al estudiante determinar el "grado" para cada dos de las situaciones planteadas en 7.4; en la primera de ellas el estudiante debe responder que se trataría de una ecuación de grado 32 ya que la República Mexicana se divide en 32 estados mientras que en el segundo caso se tiene una situación donde no se podría asignar un valor numérico al grado, ya que existen una infinidad de números primos. Con este ejercicio como ya se mencionó antes, el estudiante aprende a identificar el número de soluciones de una ecuación y a partir de ello determinar su grado.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 8

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
8.1	*Cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas* ¿Cuánto vale la expresión $2x^2 - 3y$ para $x = 2$ y $y = 4$? $2x^2 - 3y =$ $= 2(2^2) - 3(4)$ $= 2(4) - 12$ $= 8 - 12$ $= -4$ Así, el valor numérico de $2x^2 - 3y$ es -4 si $x = 2$ y $y = 4$. Es decir, si $x = 2$ y $y = 4$ entonces $2x^2 - 3y = -4$.	**Situaciones-Problemas:** *Determinar el valor numérico de una expresión algebraica (8.1, 8.3, 8.4). *Verificar si un valor es solución de una ecuación (8.2, 8.5, 8.6). **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones. ***Numérico:** $\mathbb{Z}$, coeficientes, exponentes, igualdades. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas *a, b, x, y*; expresiones algebraicas (8.1, 8.3, 8.4), ecuaciones (8.2, 8.5, 8.6).
8.2	*Comprobación de una igualdad* Analiza la expresión algebraica $4a + 6 = -6$. Verifica si $a = -3$ es solución de la ecuación. $4a + 6 = -6$ $4(-3) + 6 = -6$ $-12 + 6 = -6$ $-6 = -6$ ← Ambos miembros de la igualdad coinciden: el valor propuesto $a = -3$ es solución. En la expresión algebraica $4a + 6 = -6$ podemos afirmar que cuando $a = -3$ sí se cumple la igualdad, es decir $a = -3$ sí es una solución de la igualdad algebraica.	
8.3	**Ejemplos** A continuación encontraremos el valor numérico de algunas expresiones algebraicas. **1** Determina el valor numérico de $4a^2 - 4ab + b^2$ si $a = 3$ y $b = 2$. $4(3)^2 - 4(3)(2) + (2^2)$ $4(9) - 24 + 4$ $36 - 20$ 16	

<table>
<tr>
<td>8.4</td>
<td>$\boxed{2}$ Determina el valor numérico de
$$3x^2 - 2x + 3$$
para $x = -4$.
$$3(-4)^2 - 2(-4) + 3$$
$$3(16) + 8 + 3$$
$$48 + 11$$
$$59$$</td>
<td rowspan="3">Conceptos:
<i>Intervinientes:</i>
Valor numérico, expresión algebraica, igualdad, solución, ecuación.
Propiedades:
*Propiedades de la igualdad (sustitución).
*Jerarquía de operadores.
Procedimientos:
Multiplicaciones, potencias, sumas, restas.
Argumentos:
*Comprobación de la solución de una ecuación mediante sustitución (8.2, 8.5, 8.6)</td>
</tr>
<tr>
<td>8.5</td>
<td>Comprobaremos si las siguientes igualdades son ciertas para los valores dados.
$\boxed{3}$ Verifica que
$$x^2 + x - 6 = 0$$
para $x = -3$.
$$(-3)^2 + (-3) - 6 = 0$$
$$9 - 3 - 6 = 0$$
$$9 - 9 = 0$$
$$0 = 0$$
Así, la igualdad dada es cierta para $x = -3$.</td>
</tr>
<tr>
<td>8.6</td>
<td>$\boxed{4}$ Verifica que
$$2x - 2 = x + 3$$
para $x = 2$.
$$2(2) - 2 = 2 + 3$$
$$4 - 2 = 2 + 3$$
$$4 - 2 = 5$$
$$2 \neq 5$$
Sabemos que $2 \neq 5$. Así que para $x = 2$ no se cumple la igualdad dada. Decidimos que la igualdad dada no se cumple para $x = 2$ porque los dos miembros de la igualdad no resultaron iguales ($2 \neq 5$) al sustituir el valor propuesto $x = 2$. ¿Y para $x = 5$?</td>
</tr>
</table>

En esta configuración epistémica se desarrollan los temas de “Cálculo de valor numérico de expresiones algebraicas” y “Comprobación de una igualdad”, sin embargo en los apartados previos ya se habían considerado situaciones donde se determinaba el valor numérico de una expresión y se utilizaba la comprobación de una igualdad para determinar si se trataba de una identidad o de una ecuación.

Las situaciones problema planteadas en cada uno de los apartados integran algunos conceptos intervinientes, procedimientos y propiedades que son utilizadas de manera no ostensiva con el propósito de dar respuesta al problema. Particularmente en 8.1, 8.3 y 8.4 se presentan expresiones algebraicas con una o dos variables, se proporcionan valores numéricos para las variables y a partir de esto se obtiene el valor numérico de la expresión algebraica. Al realizar esta sustitución el estudiante lleva a cabo un proceso de algoritmización para interpretar los resultados obtenidos en cada uno de los ejemplos (atributos 1a, 2e y 8a).

De la misma forma que en los ejemplos mencionados anteriormente, al momento de realizar la comprobación el estudiante lleva a cabo un proceso de algoritmización ya que es necesario realizar operaciones y cálculos. Además de esto se ponen en juego los conceptos de igualdad, ecuación y solución, los cuales se relacionan con los procedimientos y explicaciones presentadas en un proceso de argumentación, ya que mediante estos objetos se proporciona una respuesta a los planteamientos de los problemas y ejercicios. Estos procesos implican la movilización de los atributos 1h, 2a, 3c, 4a, 4c y 8c.

En esta configuración se ha considerado el último apartado correspondiente a la subsección 1.1.1 y hasta este punto del análisis hemos notado una gran similitud entre los atributos que se busca desarrollar en cada apartado, lo cual tiene una estrecha relación con la forma que se presentan los temas en el texto.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 9

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
9.1	**1.1.2 | Lenguaje común y lenguaje algebraico** En diversos problemas de índole matemática es necesario expresar en lenguaje algebraico lo que se expresa en lenguaje común, pero también se presentan situaciones en las que se debe traducir al lenguaje común lo expresado en lenguaje algebraico. En realidad no es complicado efectuar la traducción de un lenguaje a otro, si logramos compararlo inicialmente con algo de lo que nos rodea. A continuación se presentan algunos ejemplos.	**Situaciones-Problemas:** *Representar algebraicamente el doble de algo (9.2). *Representar algebraicamente la mitad de algo (9.3). *Pasar del lenguaje común al algebraico (9.4, 9.5, 9.6) **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones. ***Numérico:** $\mathbb{R}$, cantidades, coeficientes, exponentes. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas *c, d, e, m, x*; expresiones algebraicas (9.2, 9.3, 9.5). ***Tabular:** Cuadro 1.4 (en 9.5).
9.2	*a) El doble de algo*. Tal vez tengo el doble de dinero que Edmundo o el doble de la edad de Daniela, o bien, mi casa es el doble de grande que la tuya, o me saqué el doble de calificación que tú. Una vez que entiendas el concepto, planteándolo como una situación real, es importante escribirlo correctamente según lo imagines, pero respetando siempre lo que indica la expresión en el lenguaje común. *Doble* significa dos veces algo: $2e$, $2d$, $2c$, $2x$, etcétera. ▫ $2e$: puede representar que tengo el doble de dinero que Edmundo. Se lee: “dos veces *e*”. ▫ $2d$: puede representar el doble de la edad de Daniela. Se lee: “dos veces *d*”. ▫ $2c$: puede representar que mi casa es el doble de grande que la tuya, o que me saqué el doble de calificación que tú. Se lee: “dos veces *c*”. ▫ $2x$: puede representar el doble de cualquier cantidad, es decir, “dos veces *x*”.	
9.3	*b) La mitad de algo*. Para comprender el concepto de *mitad*, piensa en algo real, por ejemplo, en la mitad de una manzana. ¿Cómo escribiríamos esta situación? Primero definimos cómo se escribe numéricamente *mitad*: $\frac{1}{2}$; después, qué letra seleccionamos para representar manzana: *m*. Entonces tenemos que la mitad de una manzana se puede escribir en lenguaje algebraico de la siguiente forma: $\frac{1}{2}m$ o $\frac{m}{2}$. ¿Por qué? Recuerda que $\frac{1}{2}m = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{m}{2}$. Se lee “un medio de *m*” o “la mitad de *m*”.	
9.4	Identifica la diferencia que presentan los siguientes enunciados escritos en lenguaje común. ▫ El *doble* de un número cualquiera. ▫ La *mitad* de un número cualquiera. ▫ El *cuadrado* de un número cualquiera.	

- La *raíz cuadrada* de un número cualquiera.
- Un número cualquiera *incrementado en dos* unidades.
- Un número cualquiera *disminuido en dos* unidades.

9.5

¿Qué tienen en común estos enunciados?

Pensamos en el número 2: en todos ellos aparece, pero debes entender que en cada uno de ellos significa algo diferente. Si consideramos que la literal x representa un número cualquiera, los enunciados anteriores se pueden escribir algebraicamente como se muestra en la segunda columna del cuadro 1.4.

Cuadro 1.4

El *doble* de un número cualquiera	$2x$
La *mitad* de un número cualquiera	$\frac{x}{2}$
El *cuadrado* de un número cualquiera	x^2
La *raíz cuadrada* de un número cualquiera	$\sqrt{x}$
Un número cualquiera *incrementado en dos* unidades	$x+2$
Un número cualquiera *disminuido en dos* unidades	$x-2$

9.6

Algo para pensar

❶ ¿Qué tienen en común las siguientes expresiones?

a El triple de un número
b La tercera parte de un número
c El cubo de un número
d La raíz cúbica de un número
e Un número incrementado en 3 unidades
f Un número disminuido en 3 unidades

❷ ¿Cómo quedarían escritos en lenguaje algebraico los enunciados del inciso ❶? Intenta escribirlos.

❸ ¿Qué operación interviene en cada operación?

Conceptos:

Intervinientes:
Lenguaje común, lenguaje algebraico, doble, mitad, cuadrado, raíz, incrementado, disminuido, expresión, triple, tercera parte, cubo.

Propiedades:

*Propiedades de la igualdad (sustitución).

Procedimientos:

*Multiplicaciones (9.3)
*Multiplicación, división, potenciación, radicación, sumar, restar (9.5, 9.6)

Argumentos:

*$\frac{1}{2}m$ o $\frac{m}{2}$. ¿Por qué?

$$\frac{1}{2}m = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{m}{2}$$

Las situaciones problema en esta configuración están relacionadas con la representación de expresiones en lenguaje algebraico. En 9.1 se menciona la necesidad de pasar del lenguaje común al algebraico y viceversa, de acuerdo a las situaciones que se estudien.

En 9.2 mediante un proceso de enunciación se dan a conocer varios ejemplos del doble de "algo", describiendo su característica la cual consiste en ser un múltiplo de 2. Cada uno de los ejemplos propuestos es sobre actividades cotidianas, dinero, edad, tamaño, entre otras. Se especifica cuál será la representación en cada ejemplo poniendo atención especial a la forma en que se denota y cómo se leería la expresión. Los atributos que se desarrollan en esta primera parte son: 1a, 2a, 5a, 5b, 8a y 8b. De la misma forma, en 9.3 se identifica el mismo proceso de enunciación para la representación de la mitad de una manzana. Además se lleva a cabo un proceso de argumentación mediante la multiplicación de fracciones para justificar porque $\frac{1}{2}m$ equivale a $\frac{m}{2}$ (atributos 2e y 4a).

La situación problema que se plantea en 9.4 es de carácter intra-matemático, particularmente consiste en representar mediante el lenguaje algebraico diversos procedimientos tales como la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. En 9.5 se presentan las expresiones algebraicas correspondientes a los enunciados y aquí se identifica cada procedimiento con una palabra clave, por ejemplo, al referirse a doble, triple, etcétera, se hace una asociación con la multiplicación. El estudiante es el que debe interpretar esta información ya que él resolverá posteriormente una situación similar.

Por último en 9.6 se deja un problema o ejercicio de reproducción al estudiante y resolverlo implica procesos de generalización y enunciación. Con estos procesos relacionamos los atributos 1b, 1d, 1e, 1f, 1h, 3a, 3b, 3f, 4b, 8c y 8e además de algunos que ya se consideraron anteriormente. En este apartado el estudiante pone en juego estos atributos ya que será él quien proporcione las expresiones correspondientes a cada ejercicio.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 10

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
10.1	A continuación se presenta una serie de ejemplos que relacionan el lenguaje común y el algebraico. Utilizaremos cualquier letra del abecedario para representar la expresión, pero siempre respetando la operación indicada. En cada caso se dará también un ejemplo aritmético.	**Situaciones-Problemas:** *Representar algebraicamente una expresión en lenguaje común (10.2, 10.3, 10.4). *Representar en lenguaje común una expresión algebraica (10.5) **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones. ***Numérico:** ℝ, cantidades, coeficientes, exponentes. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas *a, b, m, n, x, y*; expresiones algebraicas (10.2, 10.3, 10.4, 10.5).
10.2	**Ejemplos** 1 Suma de dos números iguales ▫ $a+a$ ▶ $2+2$ ▫ $(-x)+(-x)$ ▶ $(-5)+(-5)$	
10.3	2 Suma de dos números cualesquiera ▫ $a+b$ ▶ $3+6$ 3 El triple de un número menos el cuadrado del mismo ▫ $3x-x^2$ ▶ $3(4)-(4)^2$ 4 La suma de los cubos de dos números cualesquiera ▫ a^3+b^3 ▶ 5^3+6^3 5 La diferencia del triple de un número cualquiera y la tercera parte de otro ▫ $3m-\frac{n}{3}$ ▶ $3(2)-\frac{1}{3}(4)$ 6 El cuádruple del cuadrado de un número menos la mitad de otro ▫ $4a^2-\frac{b}{2}$ ▶ $4(2^2)-\frac{1}{2}(5)$	
10.4	7 El cociente del doble del cuadrado de un número y el cuadrado del doble del mismo ▫ $\frac{2(y^2)}{[2y]^2}$ ▶ $\frac{2(4^2)}{[2(4)]^2}$	
10.5	En el ejemplo 7 pareciera que es lo mismo lo que debemos escribir en el numerador y el denominador, pero no es así. Para mayor claridad, efectuaremos las operaciones indicadas con números:	

	$\frac{2(4^2)}{[2(4)]^2}=\frac{2(16)}{8^2}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$	**Conceptos:** *Intervinientes:* Lenguaje común, lenguaje algebraico, expresión, suma, números, triple, cubo, tercera parte, cuádruple, mitad, cociente, doble, cuadrado, numerador, denominador, literal, raíz, diferencia, producto, semiproducto, tercio. **Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). **Procedimientos:** *Multiplicaciones (10.5) *Elevar al cuadrado (10.6)
10.6	Es importante tener cuidado de no confundir las expresiones numéricas y las expresiones algebraicas. Las expresiones numéricas tienen un valor único; por ejemplo, si se nos pide el cuadrado del número 2, sabemos que es 4. En cambio, las expresiones algebraicas generalizan una operación. Si nos piden el cuadrado de un número y no se tienen más datos, se puede contestar 4, 9, 16, o 100, por ejemplo. Todos son correctos. La operación realizada fue la misma, elevar al cuadrado el número seleccionado: $2^2=4, 3^2=9, 4^2=16$ y $10^2=100$. La expresión “el cuadrado de un número” no tiene un valor numérico específico, depende del valor que se asigne a la literal. Una misma expresión algebraica tiene muchas formas de presentarse, dependiendo de las literales que se seleccionen. Sin embargo, la operación indicada no cambia.	
10.5	A continuación presentaremos algunas expresiones que se traducirán al lenguaje común. ▫ $3x^2-4y$ ▶ El triple del cuadrado de un número menos el cuádruple de otro. ▫ $\sqrt[3]{a-b}$ ▶ La raíz cúbica de la diferencia de dos números. ▫ $x^2-(a+b)^2$ ▶ El cuadrado de un número menos el cuadrado de la suma de dos números. ▫ $2(x-y)^3$ ▶ El doble del cubo de la diferencia de dos números. ▫ $3a^2b$ ▶ El triple del producto del cuadrado de un número por otro. ▫ $(x+y)(x-y)$ ▶ El producto de la suma de dos números por la diferencia de los mismos números. ▫ $\frac{(x+y)(x-y)}{2}$ ▶ El semiproducto de la suma de dos números por su diferencia. ▫ $\left(\frac{a}{2}\right)^3$ ▶ El cubo de la mitad de un número. ▫ $\frac{a^3}{2}$ ▶ La mitad del cubo de un número. ▫ $\frac{(x+y)^2}{3}$ ▶ Un tercio del cuadrado de la suma de dos números. ▫ $\frac{x^2+y^2}{3}$ ▶ Un tercio de la suma de los cuadrados de dos números. ▫ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3$ ▶ El cubo de la diferencia de las raíces cuadradas de dos números.	

Esta sección está destinada a presentar más situaciones que ejemplifiquen la representación en el lenguaje algebraico a partir del lenguaje verbal y viceversa. La forma en que se presenta este tema en el texto indica que el estudiante va a aprender mediante el análisis de los ejemplos y posteriormente reproducirá lo que leyó.

De manera general al considerar las situaciones problema planteadas en 10.2, 10.3 y 10.4 se identifican procesos de representación mediante generalización y particularización ya que primeramente se presenta la expresión algebraica correspondiente a la expresión en lenguaje verbal y enseguida se muestra un caso particular de dicha expresión. Con estos procesos identificamos los atributos 1a, 1c, 1d, 1f, 4c, 8a, 8b y 8e.

Esta sección de ejemplos se dividió en tres apartados porque se quiere analizar por separado algunos posibles conflictos que se identificaron. Iniciando en 10.2 se describe "la suma de dos números iguales" y posteriormente en el lenguaje algebraico se presentan dos posibles representaciones cuando una de ellas es suficiente. El hecho de mostrar estas dos representaciones puede conducir en un futuro a que el estudiante considere que las literales sólo representan a números positivos.

En 10.4 el conflicto que se presenta es debido a la extensión del enunciado y la repetición de palabras. Incluso el autor del texto se ve en la necesidad de explicar que no está diciendo lo mismo dos veces con la expresión verbal de 10.4, por lo cual en 10.5 desarrolla las operaciones para el caso particular con el propósito de evidenciar que el denominador y numerador son diferentes. Se desarrollan las operaciones y no se retoma posteriormente, por lo cual el alumno puede perder de vista el propósito de la algoritmización (atributo 2e).

Después de esta serie de ejemplos se lleva a cabo un proceso de argumentación en el cual se relacionan los procedimientos con el lenguaje algebraico (10.6). Se aclara la diferencia entre expresiones numéricas y algebraicas mediante el ejemplo del cuadrado de un número. Con la argumentación se movilizan los atributos 3c y 8e.

En la última sección (10.7) se considera el proceso inverso, es decir dada una expresión algebraica pasar al lenguaje verbal, esto implica un proceso de enunciación de las características de la expresión y la movilización de algunos atributos que ya se mencionaron anteriormente y el atributo 2a.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 11

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
11.1	**Ejemplos** ¿Cómo expresarías en lenguaje algebraico las siguientes situaciones? $\boxed{1}$ El sábado, Ángel come media pizza y su novia Jessica sólo come dos manzanas y 5 uvas porque está a dieta. ¿Cuánto comen entre los dos?	**Situaciones-Problemas:** *Expresar en lenguaje algebraico diversas situaciones (11.1, 11.2, 11.5, 11.8). *Determinar cuántas personas asistieron al cine (11.7). **Lenguajes:** ***Verbal:** planteamiento de problemas, argumentaciones, explicaciones. ***Numérico:** $\mathbb{R}$, cantidades, coeficientes. ***Algebraico:** representar cantidades desconocidas *a, b, c, d, m, p, r, s, u, x*; igualdades, expresiones algebraicas (11.2, 11.4, 11.6, 11.9).
11.2	▫ Si empleamos literales para representar cada alimento tenemos que Ángel comió $\frac{1}{2}p$ y Jessica comió $2m+5u$ Por lo que Ángel y Jessica comieron $\left(\frac{1}{2}p\right)+(2m+5u)$	
11.3	$\boxed{2}$ Se organizó una fiesta en casa de Leticia. Se terminaron una y media cajas de refrescos (de 24 refrescos cada una), dos bolsas de papas fritas, una bolsa de chicharrón de cerdo, medio bote de salsa botanera (de medio litro) y además 4 rebanadas de pastel de chocolate (cortado en 10 partes).	
11.4	Al pastel no le podemos asignar la literal *p* porque dentro de la misma expresión representa *papas* ▫ Asignamos literales a cada uno de los productos que se consumieron en la fiesta (por lo general se utilizan las que se relacionan de alguna forma con el producto): *r* para refrescos, *p* para las papas, *c* para el chicharrón, *s* para la salsa y *d* para el pastel. $\left(1\frac{1}{2}\right)(24)r+2p+c+\frac{1}{2}s+\frac{4}{10}d$ Los refrescos se expresan por unidad (no por caja) Se simplifica la fracción $=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{24}{1}\right)r+2p+c+\frac{1}{2}s+\frac{2}{5}d$ $=36r+2p+c+\frac{1}{2}s+\frac{2}{5}d$	

11.5	$\boxed{3}$ El cinetis 119 de la localidad cuenta con tres salas de 120 butacas cada una y se proyectan las siguientes películas: *Matando cabos, Daño colateral* y *El rey Arturo.* En la primera sala se ocupa 25% de ella; en la segunda, las tres cuartas partes, y en la tercera 60 butacas. ¿Qué expresión algebraica representa la cantidad de gente que vio cada una de las películas?	**Conceptos:** *Intervinientes:* Lenguaje algebraico, literales, medios, cuartos, expresión, porcentaje, reducción, términos semejantes. **Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). **Procedimientos:** *Multiplicaciones (11.4, 11.6) *Simplificación de fracciones (11.4) *Representar porcentajes mediante fracciones (11.6) **Argumentos:** *Explicaciones y ejemplos (11.4, 11.6).
11.6	Sabemos que 25% representa la cuarta parte de un todo, en este caso, $\frac{1}{4}$ de 120; también podemos expresarlo de la siguiente forma: 25% de 120 equivale a $\left(\frac{25}{100}\right)120 = 30$ (consulta el apéndice F) ▫ Asignamos las literales a a la sala 1, b a la sala 2 y c a la sala 3. La cantidad de gente por cada sala es $\left(\frac{1}{4}\right)120a + \left(\frac{3}{4}\right)b + 60c$ $= 30a + 90b + 60c$	
11.7	¿Cuántas personas fueron al cine ese día?	
11.8	$\boxed{4}$ Guillermo tiene cartas *Yu-Gi-Oh*. Su hermano Francisco tiene 5 menos que él, mientras que Fernando le gana a Francisco por tres cartas. ¿Cuántas cartas tienen entre los tres?	
11.9	▫ Guillermo tiene x. Francisco tiene $x - 5$. Fernando tiene $(x - 5) + 3$. Entre los tres tienen $x + (x - 5) + [(x - 5) + 3]$ Esta expresión se puede simplificar si efectuamos las operaciones y después realizamos la reducción de *términos semejantes*. Esto es lenguaje algebraico. Después de todo no es tan difícil. Sólo hay que poner atención y algo de imaginación.	

Al considerar de manera general las situaciones problema planteadas en 11.1, 11.3, 11.5 y 11.8 y sus respectivas soluciones (11.2, 11.4, 11.6 y 11.9) se identifica un proceso de representación en el cual se proporciona la expresión algebraica correspondiente a la expresión en lenguaje verbal y comunicación al describir el procedimiento que se sigue para llegar a la expresión. Con estos procesos se ponen en juego los atributos 1a, 1d, 1f, 2a, 2b, 2c, 4b, 8a, 8b y 8e.

Se identifica un posible conflicto en el proceso de representación que se presenta en 11.4, ya que el expresar la cantidad de refrescos mediante $\left(1\frac{1}{2}\right)(24)r$ puede llevar a pensar que es necesario expresar mediante fracciones un valor que ya se conoce al leer el texto del problema. El estudiante puede deducir fácilmente que si la caja tenía 24 refrescos y se consumió una caja y media, en total se utilizaron 36 refrescos, no es necesario representarlo mediante fracciones y hacer las operaciones indicadas en 11.4 ya que el pensamiento que conduce a deducir el 36, implica estos cálculos pero sin la rigurosidad.

Algo similar al conflicto planteado en 11.4 sucede en 11.6 al determinar cuántas sillas representa cada porcentaje. Al presentar un problema y su solución se promueve en los estudiantes cierto tipo de pensamiento sin dejar lugar a la creatividad, en estos casos se promueve la representación mediante fracciones. Si el estudiante responde la pregunta que se plantea al final de 11.6 implicará un proceso de idealización al descartar que estén en diferentes salas, además de la movilización de los atributos 1h, 2e, 3b y 8c.

No se identifican propiedades excepto la de sustitución para la igualdad, la cual se emplea de manera no ostensiva al realizar procedimientos como la simplificación de fracciones y multiplicaciones. Los argumentos en esta sección son las explicaciones que se presentan en cada proceso de comunicación, ejemplo de ello son los recuadros que aparecen en 11.4 y 11.6, donde se justifica porque se elige determinada letra o coeficiente.

3.2.2. Resumen de atributos y competencias para el caso de C.B.T.i.s.

De acuerdo al análisis que se ha presentado se identifican la movilización de los siguientes atributos en el análisis del texto de C.B.T.i.s.

			CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA											TOTAL
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
COMPETENCIA Y ATRIBUTO	1	1a	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	10
		1b	*								*			2
		1c			*			*	*			*		4
		1d	*								*	*	*	4
		1e	*								*			2
		1f	*						*		*	*	*	5
		1g												0
		1h	*		*	*			*	*	*		*	7
		1i												0
		1j												0
	2	2a	*		*	*	*			*	*	*	*	8
		2b											*	1
		2c											*	1
		2d												0
		2e			*	*	*	*	*	*	*	*	*	9
		2f												0
		2g												0
		2h												0
		2i												0
	3	3a									*			1
		3b									*		*	2
		3c			*	*	*	*	*	*		*		7
		3d												0
		3e												0
		3f									*			1

			CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA											TOTAL
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
COMPETENCIA Y ATRIBUTO	4	4a			*	*	*	*	*	*	*			7
		4b					*				*		*	3
		4c			*	*	*	*	*	*		*		7
		4d												0
		4e												0
	5	5a	*						*		*			3
		5b							*		*			2
		5c												0
		5d												0
		5e	*						*					2
	6	6a	*											1
		6b												0
		6c												0
		6d	*											1
		6e												0
		6f												0
		6g												0
	7	7a												0
		7b												0
		7c												0
		7d												0
		7e												0
	8	8a	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	11
		8b	*		*	*	*	*	*		*	*	*	9
		8c	*		*	*			*	*	*	*	*	8
		8d		*										1
		8e	*						*		*	*	*	5

Tabla 3.2.2.1. Atributos y competencias para el caso C.B.T.i.s.

En el caso de C.B.T.i.s. al igual que en COBACH, se observa presencia en la mayoría de las competencias, exceptuando la competencia 7. Sin embargo la mayoría de ellas desarrollan sólo algunos de los atributos. A continuación describiremos los aspectos que se desarrollan de cada competencia.

En el texto se presentan los contenidos y se ejemplifican, dejando al estudiante la tarea de interpretar los modelos que se proporcionan para representar la situación, así como los procedimientos empleados en la resolución de problemas. Como consecuencia los atributos que se promueven están relacionados con la interpretación.

De la competencia 1 los atributos que aparecen con una frecuencia significativa son 1a, 1f y 1h, el primero de ellos consiste en la identificación de incógnitas y variables, el segundo trata sobre la articulación de diferentes tipos de representaciones y el tercero está enfocado en la inferencia de resultados a partir de las representaciones dadas. De esta forma la parte de la competencia relacionada con la construcción de modelos no se desarrolla.

Los atributos con mayor frecuencia en la competencia 2 son 2a y 2e, el primero se refiere a la identificación de variables y su ordenamiento de acuerdo al papel que juegan en la situación problema; el segundo atributo implica la resolución de problemas mediante algoritmos. Se considera que se promueve el manejo de algoritmos ya que se emplean en la mayoría de los procedimientos que se describen en el texto.

De la competencia 3 el atributo que se desarrolla es el 3c, el cual consiste en evaluar los argumentos con el fin de identificar la coherencia del resultado con el contexto del problema. Debido a que la solución ya está dada en los ejemplos que se presentan en cada tema, al estudiante le queda la tarea de verificar si dicha respuesta tiene sentido de acuerdo al problema que se está planteando. Es así que la parte de la competencia que se promueve es la relativa a la interpretación de los resultados.

En la competencia 4 son dos los atributos que se desarrollan: el 4a, que consiste en verificar el resultado y el 4c el cual establece que el estudiante evalúa los argumentos con el fin de presentar una solución coherente. Tal como se ha mencionado anteriormente, en el texto se presenta la solución y en algunos casos se proporcionan explicaciones mediante ejemplos es en este sentido que se dan las argumentaciones y por lo que se promueve en cierta medida la competencia.

En los apartados que se seleccionaron del texto la mayoría de las situaciones que se presentaron son intra-matemáticas, por lo cual los atributos de las competencias 5 (relativa al análisis de situaciones sociales o naturales) y 6 (concerniente a los aspectos espaciales y geométricos), no presentan una frecuencia representativa. Se promueven las competencias pero sólo en algunos de los contenidos analizados.

La última competencia se refiere a la interpretación de tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos. En la tabla se observa que la mayoría de los atributos se desarrollan en las configuraciones, excepto el 8d, el cual implica que para la interpretación de textos el estudiante debe ser capaz de sintetizar información y dicha tarea no se solicita en el texto.

3.3.Trayectoria epistémica del texto de CECyTES.

El texto o módulo de aprendizaje de CECyTES se titula “Álgebra” (Valencia, Valenzuela y González, 2009). La primera versión es del año 2009 y el texto actual es la reimpresión del año 2014. Éste está organizado en 3 unidades divididas en subsecciones, cada una compuesta por secuencias didácticas. El nombre de la primera unidad es “Aplica las operaciones algebraicas en la resolución de problemas cotidianos”.

De este texto se ha considerado la primera sección de la unidad 1 titulada “Utiliza el lenguaje algebraico en la representación de problemas”, y de esta sección las siguientes Secuencias Didácticas: “Describe las partes de un término algebraico”, “Convierte una expresión algebraica al lenguaje común”, “Convierte una expresión algebraica del lenguaje común al algebraico” y “Calcula el valor numérico de una expresión algebraica”.

Para realizar el análisis de la trayectoria epistémica se dividieron las secuencias didácticas en unidades de análisis, considerando una o varias actividades en cada unidad de acuerdo a la extensión de las mismas.

Antes de iniciar la unidad 1 se enuncia el propósito de la asignatura en la presentación:

> "Desarrollar la capacidad del razonamiento matemático haciendo uso del lenguaje algebraico, a partir de la resolución de problemas de la vida cotidiana dentro y fuera del contexto matemático, representados en modelos donde se aplican conocimientos y conceptos algebraicos, en un clima de colaboración y respeto".

De acuerdo a lo que establece el texto para lograr el propósito se relaciona la teoría con la práctica, a través de ejercicios, encaminados a apoyar al estudiante en el desarrollo de las competencias requeridas para esta asignatura.

3.3.1. Unidad 1, sección 1.1, secuencias didácticas 1, 2, 3 y 4

Uno de los dos conceptos fundamentales que se consideran en el programa de la asignatura Álgebra (Acuerdo Secretarial 658, 2008), es "Lenguaje Algebraico", del cual se desprenden dos conceptos subsidiarios, en este análisis sólo se ha considerado el primer concepto "Expresión Algebraica". En la sección 1.1 "Utiliza el lenguaje algebraico en la representación de problemas", se ha considerado un contenido del concepto subsidiario por secuencia didáctica. Así se identifica la siguiente relación:

Secuencia Didáctica	**Contenido del concepto subsidiario**
1. Describe las partes de un término algebraico.	Notación.
2. Convierte una expresión algebraica al lenguaje común.	Interpretación de las expresiones algebraicas.
3. Convierte una expresión algebraica del lenguaje común al algebraico.	Representación algebraica de expresiones en lenguaje común.
4. Calcula el valor numérico de una expresión algebraica.	Evaluaciones numéricas de expresiones algebraicas.

También en la actividad de apertura de la primera secuencia didáctica se hace una descripción de los contenidos procedimentales y actitudinales, además de los aprendizajes a lograr, los cuales son elementos que conforman el programa de la asignatura. A continuación se enlistan dichos contenidos:

- Contenidos procedimentales.
  - Define los términos algebraicos.
  - Interpreta expresiones algebraicas.
  - Identifica los elementos de los términos algebraicos.
  - Diferencia entre términos algebraicos y numéricos.
  - Describe en lenguaje común una expresión algebraica.
  - Expresa en lenguaje algebraico un enunciado dado en lenguaje común.
  - Evaluación numérica de expresiones algebraicas.

- Contenidos actitudinales.
  - Trabaja de manera colaborativa.
  - Se comunica de forma oral y escrita.

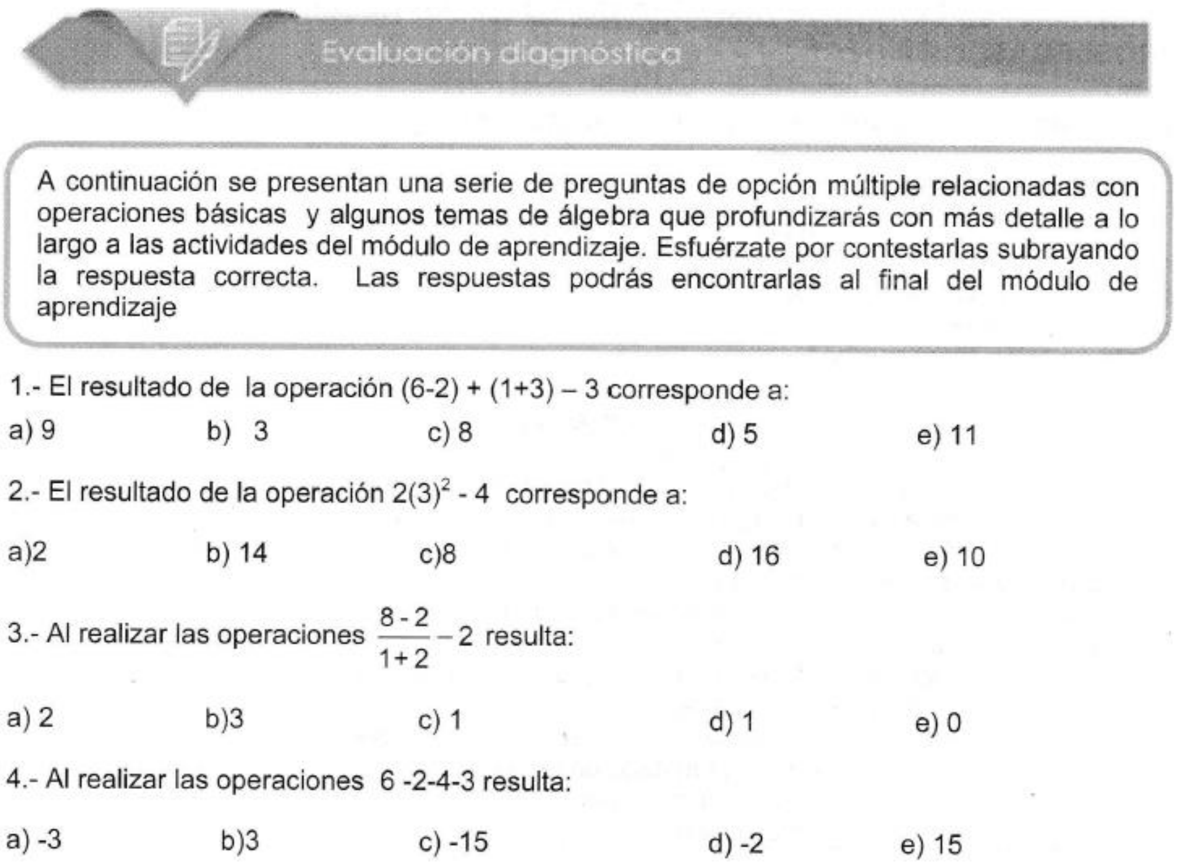
- Aprendizajes a lograr.
  - Define los términos algebraicos y expresiones algebraicas.
  - Identifica los elementos de los términos algebraicos.
  - Diferencia entre términos algebraicos y numéricos.
  - Enuncia en lenguaje común una expresión algebraica.
  - Expresa en lenguaje algebraico un enunciado dado en lenguaje común.
  - Calcula el valor numérico de una expresión algebraica.

Para llevar a cabo el análisis las secuencias didácticas se han dividido en unidades de análisis resultando en una distribución del contenido en nueve configuraciones como se muestra:

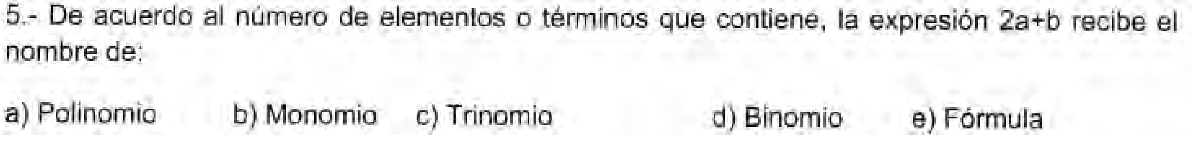
C.E.	Descripción
1	Evaluación Diagnóstica
2	SD1 Apertura y desarrollo
3	SD1 Desarrollo y cierre
4	SD2 Apertura
5	SD2 Desarrollo y cierre

C.E.	Descripción
6	SD3 Apertura
7	SD3 Desarrollo y cierre
8	SD4
9	Autoevaluación

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 1

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>
Evaluación diagnóstica
A continuación se presentan una serie de preguntas de opción múltiple relacionadas con operaciones básicas y algunos temas de álgebra que profundizarás con más detalle a lo largo a las actividades del módulo de aprendizaje. Esfuérzate por contestarlas subrayando la respuesta correcta. Las respuestas podrás encontrarlas al final del módulo de aprendizaje
1.- El resultado de la operación (6-2) + (1+3) – 3 corresponde a:
a) 9 b) 3 c) 8 d) 5 e) 11
2.- El resultado de la operación $2(3)^2 - 4$ corresponde a:
a)2 b) 14 c)8 d) 16 e) 10
3.- Al realizar las operaciones $\frac{8-2}{1+2}-2$ resulta:
a) 2 b)3 c) 1 d) 1 e) 0
4.- Al realizar las operaciones 6 -2-4-3 resulta:
a) -3 b)3 c) -15 d) -2 e) 15</td><td rowspan="2">Situaciones-Problemas:
*Realizar operaciones de acuerdo a la jerarquía de operadores (1.1, 1.3).
*Determinar el nombre de una expresión algebraica (1.2).
*Resta de monomios (1.4).
*Producto de monomios (1.5).
*Cociente de monomios (1.6).

Lenguajes:
*Verbal: planteamiento de problemas, indicaciones.
*Numérico: ℝ, exponentes, coeficientes, cantidades.
*Algebraico: representar incógnitas <i>a, b, x</i>; expresiones algebraicas (1.2, 1.4, 1.5, 1.6).

Conceptos:
<i>Intervinientes:</i>
Operación, álgebra, términos, expresión, polinomio, monomio, trinomio, binomio, fórmula, simplificar, cociente, producto.</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
5.- De acuerdo al número de elementos o términos que contiene, la expresión 2a+b recibe el nombre de:
a) Polinomio b) Monomio c) Trinomio d) Binomio e) Fórmula</td></tr>
</table>

1.3	6.- El valor que corresponde a la operación $2(3)^2 +2(2)-4$ es: a) 4 b) 12 c) 18 d) 10 e)8	**Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). *Leyes de los exponentes (producto de potencias, cociente de potencias) **Procedimientos:** *Sumas, restas, divisiones, multiplicaciones, potencias (1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6) *Operaciones entre monomios (1.4, 1.5, 1.6).
1.4	7.- La simplificación de la expresión 3x-2x a) 6x b) $5x^2$ c) x d) –x e) $-5x^2$	
1.5	8.- El producto de $(2ab)(4ab^2)$ equivale a: a) $6ab^2$ b) $8ab^2$ c) $8a^2b^2$ d) $8a^2b^3$ e) $6a^2b^3$	
1.6	9.- El cociente $\frac{6x^{10}}{2x^4}$ equivale a: a) $3x^6$ b) $4x^{14}$ c) $12x^{14}$ d) 4x e)$4x^{40}$	

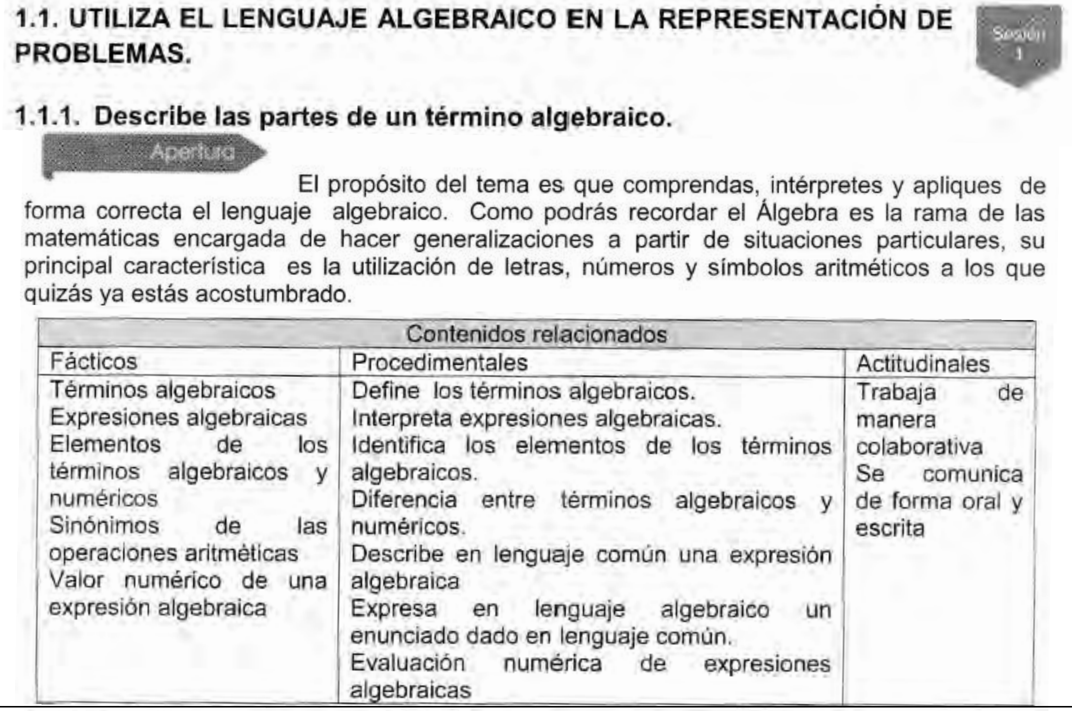
Esta sección corresponde a la autoevaluación que se aplicará antes de abordar los contenidos correspondientes a la asignatura y está dividida en dos secciones principalmente: cálculos aritméticos y lo relativo a expresiones algebraicas. En 1.1 y 1.3 la situación problema consiste en realizar procedimientos tales como sumas, restas, divisiones, multiplicaciones y potencias de acuerdo a la jerarquía de operadores, para dar respuesta a estos reactivos el estudiante realizará un proceso de algoritmización, con lo cual desarrollará los atributos: 2b, 2e, 3b, 8a y 8b.

La segunda sección de la autoevaluación está dedicada a identificar hasta qué punto están familiarizados con la notación algebraica y las operaciones entre monomios. En 1.2 el problema consiste en identificar el número de términos de la expresión y relacionarlo con su nombre correspondiente, la expresión en este caso es un binomio. En este apartado identificamos un proceso de significación el cual se relaciona con los atributos: 1a, 1h, 2a y 8c.

En 1.4 se solicita la simplificación de una expresión que consta de dos términos que pueden reducirse a uno mediante la suma de términos semejantes. Después de esto en 1.5 y 1.6 se realiza una multiplicación y división de monomios respectivamente, para la cual es necesario el manejo de ciertas propiedades (leyes de los exponentes), además de realizar procedimientos que implican multiplicaciones y divisiones. Al realizar estos procedimientos se identifica nuevamente un proceso de algoritmización, por lo cual se promueven los mismos atributos que ya se habían mencionado anteriormente.

En la configuración se han identificado varios conceptos intervinientes, debido a que los alumnos egresados de educación secundaria han tenido un acercamiento a estos conceptos y los procedimientos aquí considerados. Se observa que esta evaluación diagnóstica está enfocada principalmente en el aspecto procedimental y operacional ya que ninguna de las preguntas está relacionada con la generalización o la creación de modelos a partir de situaciones cotidianas.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 2

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>


1.1. UTILIZA EL LENGUAJE ALGEBRAICO EN LA REPRESENTACIÓN DE PROBLEMAS.

Sesión 1

1.1.1. Describe las partes de un término algebraico.

Apertura

El propósito del tema es que comprendas, intérpretes y apliques de forma correcta el lenguaje algebraico. Como podrás recordar el Álgebra es la rama de las matemáticas encargada de hacer generalizaciones a partir de situaciones particulares, su principal característica es la utilización de letras, números y símbolos aritméticos a los que quizás ya estás acostumbrado.

<table>
<tr><th colspan="3">Contenidos relacionados</th></tr>
<tr><th>Fácticos</th><th>Procedimentales</th><th>Actitudinales</th></tr>
<tr><td>Términos algebraicos
Expresiones algebraicas
Elementos de los términos algebraicos y numéricos
Sinónimos de las operaciones aritmèticas
Valor numérico de una expresión algebraica</td><td>Define los términos algebraicos.
Interpreta expresiones algebraicas.
Identifica los elementos de los términos algebraicos.
Diferencia entre términos algebraicos y numéricos.
Describe en lenguaje común una expresión algebraica
Expresa en lenguaje algebraico un enunciado dado en lenguaje común.
Evaluación numérica de expresiones algebraicas</td><td>Trabaja de manera colaborativa
Se comunica de forma oral y escrita</td></tr>
</table>
</td><td rowspan="2">
Situaciones-Problemas:

*Organización de los contenidos (2.1).

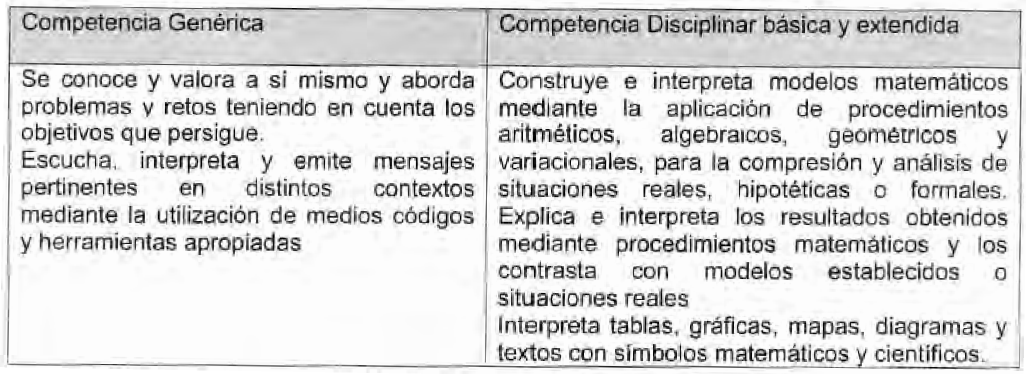
*Identificación de términos en una expresión algebraica (2.4, 2.5)

Lenguajes:

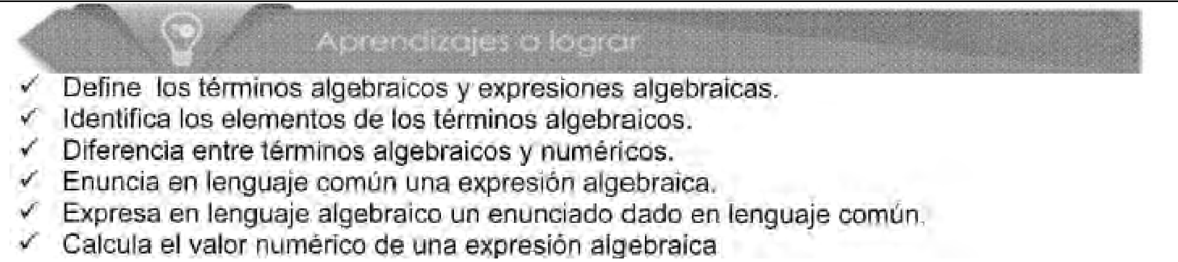
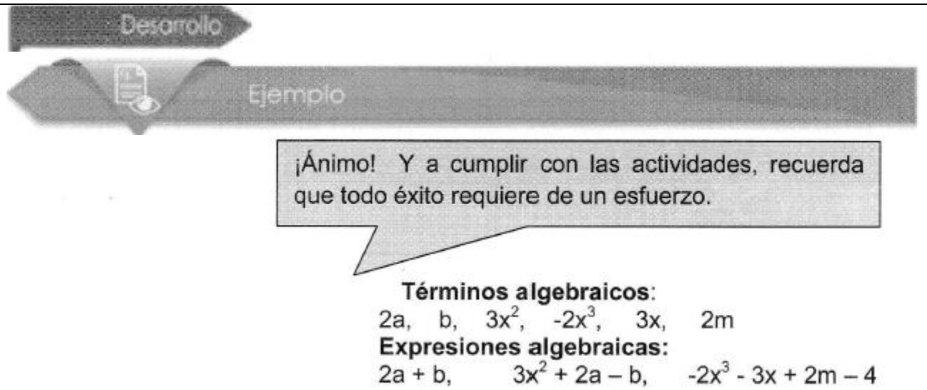
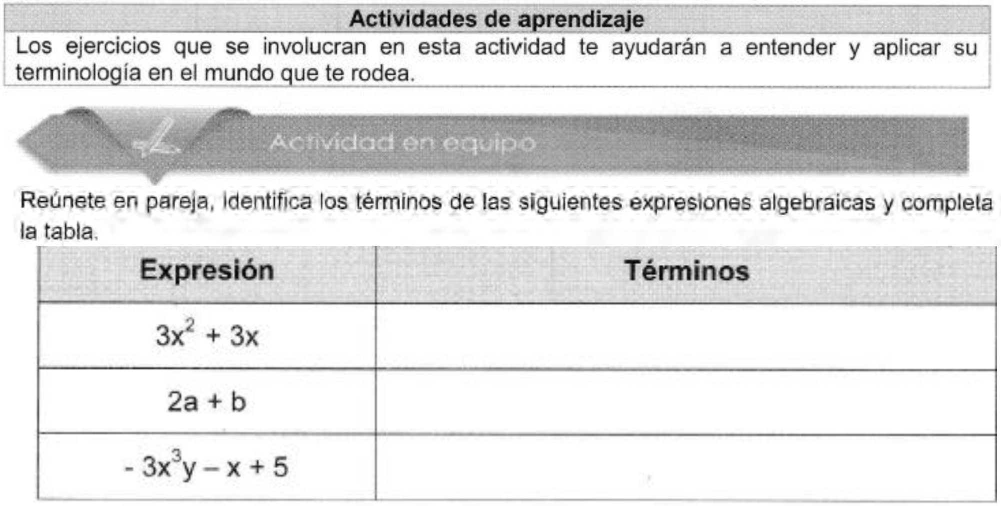
***Verbal:** planteamiento de problemas, indicaciones.

***Numérico:** ℝ, exponentes, coeficientes, cantidades.

***Algebraico:** representar incógnitas *a, b, m, x, y*; expresiones algebraicas (2.4, 2.5).

***Tabular:** Tabla en 2.5.
</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>


<table>
<tr><th>Competencia Genérica</th><th>Competencia Disciplinar básica y extendida</th></tr>
<tr><td>Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios códigos y herramientas apropiadas</td><td>Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la compresión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2.3</td>
<td>
Aprendizajes a lograr
✓ Define los términos algebraicos y expresiones algebraicas.
✓ Identifica los elementos de los términos algebraicos.
✓ Diferencia entre términos algebraicos y numéricos.
✓ Enuncia en lenguaje común una expresión algebraica.
✓ Expresa en lenguaje algebraico un enunciado dado en lenguaje común.
✓ Calcula el valor numérico de una expresión algebraica</td>
<td rowspan="3">Conceptos:
<i>Intervinientes:</i>
Álgebra, lenguaje algebraico, generalización, valor numérico, lenguaje común.
<i>Emergentes:</i>
Términos y expresiones algebraicas.
Procedimientos:
*Identificar los términos en una expresión algebraica (2.4, 2.5).</td>
</tr>
<tr>
<td>2.4</td>
<td>
Desarrollo
Ejemplo
¡Ánimo! Y a cumplir con las actividades, recuerda que todo éxito requiere de un esfuerzo.
Términos algebraicos:
$2a$, b, $3x^2$, $-2x^3$, $3x$, $2m$
Expresiones algebraicas:
$2a + b$, $3x^2 + 2a – b$, $-2x^3 - 3x + 2m – 4$</td>
</tr>
<tr>
<td>2.5</td>
<td>
Actividades de aprendizaje
Los ejercicios que se involucran en esta actividad te ayudarán a entender y aplicar su terminología en el mundo que te rodea.
Actividad en equipo
Reúnete en pareja, identifica los términos de las siguientes expresiones algebraicas y completa la tabla.
<table>
<tr><th>Expresión</th><th>Términos</th></tr>
<tr><td>$3x^2 + 3x$</td><td></td></tr>
<tr><td>$2a + b$</td><td></td></tr>
<tr><td>$- 3x^3y – x + 5$</td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

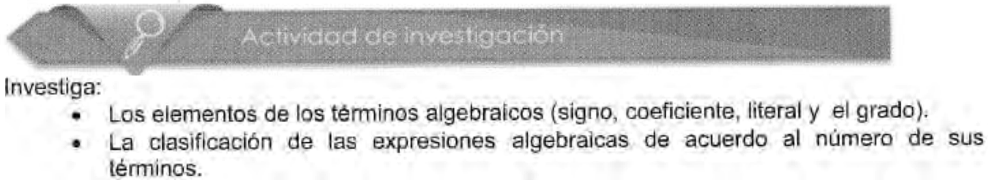
La secuencia didáctica 1 inicia en este apartado con la actividad de apertura, en la cual se plantea la organización de acuerdo a los contenidos. En 2.1 se especifican los contenidos fácticos, procedimentales y actitudinales; en 2.2 se mencionan las competencias genéricas y disciplinares que se desarrollarán en esta unidad; y en 2.3 se declaran los aprendizajes a lograr en las cuatro secuencias didácticas que tomaremos en cuenta para nuestro análisis.

Después de esto se presenta la primera actividad correspondiente al "Desarrollo" de la secuencia didáctica, en la cual se ejemplifican términos y expresiones algebraicas (2.4). Al analizar esta situación el estudiante debe ser capaz de identificar las variables y constantes así como el papel que juegan en cada caso, esto se realizará mediante un proceso de significación movilizando los atributos 1a, 1h, 8a, 8b y 8c.

En 2.5 se solicita a los estudiantes que trabajen en parejas para completar la tabla posterior al análisis de los ejemplos en 2.4. Al trabajar en parejas se promueve en los estudiantes la discusión de los conceptos emergentes en esta configuración: términos y expresiones algebraicas; o si algún estudiante tiene dificultades con alguno de los conceptos puede solicitar apoyo a su compañero. Al realizar esta actividad la institución promueve procesos de significación y comunicación, lo cual implica la movilización de los atributos: 1j, 2a, 2b, 2h, 3b y 4e.

En esta configuración no se han identificado propiedades ni argumentos, debido a los contenidos matemáticos que se abordan en esta sección y el tipo de actividad que se ha propuesto. Para completar la tabla el estudiante sólo debe identificar los términos de cada expresión, no se solicita que explique o justifique su respuesta por lo cual no hay argumentos. Por otro lado la identificación de los términos depende de las operaciones de cada expresión, la operación suma o resta define la cantidad de términos, es por ello que en este proceso no aparece ninguna propiedad ligada a los procedimientos o conceptos.

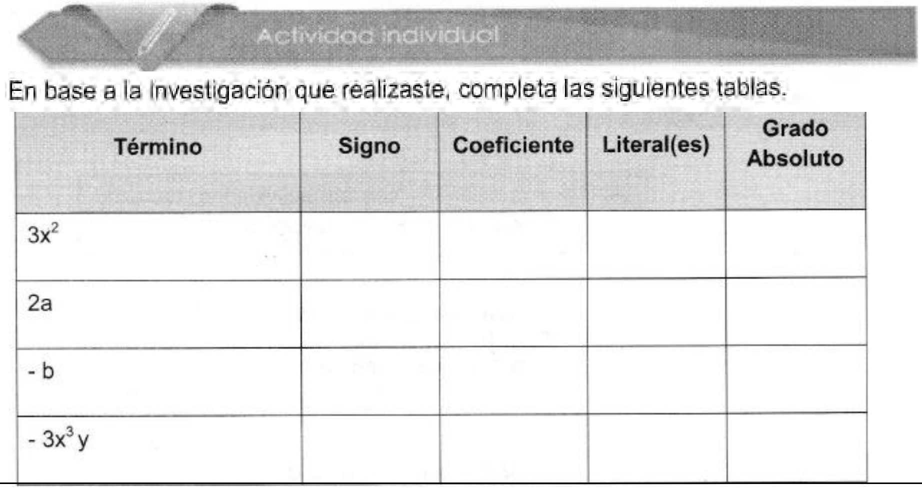
CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 3

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>

Actividad de investigación

Investiga:

- Los elementos de los términos algebraicos (signo, coeficiente, literal y el grado).
- La clasificación de las expresiones algebraicas de acuerdo al número de sus términos.
</td><td rowspan="3">
Situaciones-Problemas:
*Definir los elementos de los términos algebraicos (3.1).
*Investigar la clasificación de las expresiones de acuerdo al número de términos (3.1).
*Identificar signo, coeficiente, literal (es) y grado absoluto de un término (3.2).
*Asignar el nombre a la expresión de acuerdo al número de términos (3.3).
*Determinar el grado de una expresión algebraica (3.4).

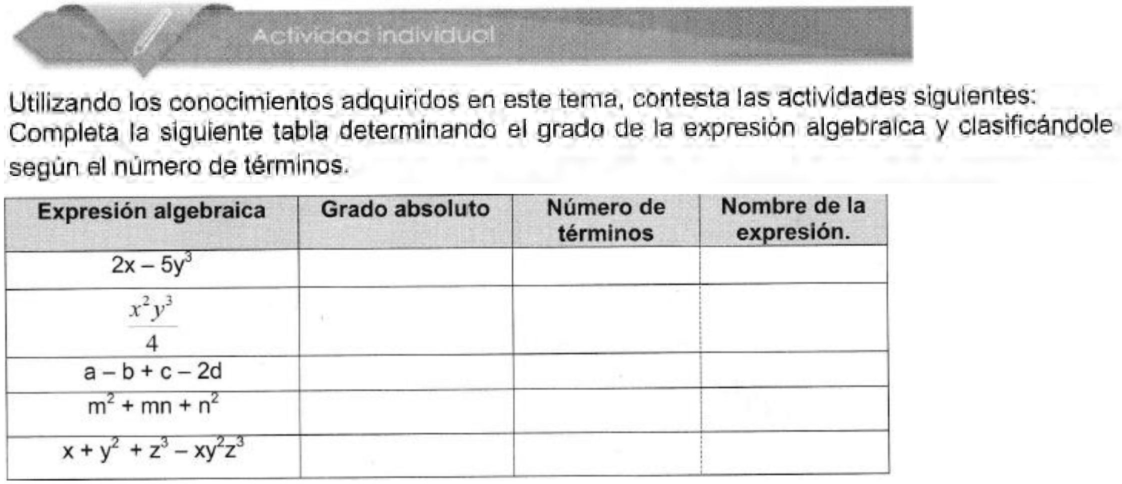
Lenguajes:

*Verbal: planteamiento de problemas, indicaciones.
*Numérico: $\mathbb{R}$, exponentes, coeficientes, cantidades.
*Algebraico: representar incógnitas <i>a, b, c, d, m, n, x, y, z</i>; expresiones algebraicas (3.3 y 3.4).
*Tabular: tablas (3.2, 3.3, 3.4)
</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>

Actividad individual

En base a la investigación que realizaste, completa las siguientes tablas.

<table>
<tr><th>Término</th><th>Signo</th><th>Coeficiente</th><th>Literal(es)</th><th>Grado Absoluto</th></tr>
<tr><td>$3x^2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2a</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- b</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$- 3x^3 y$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>

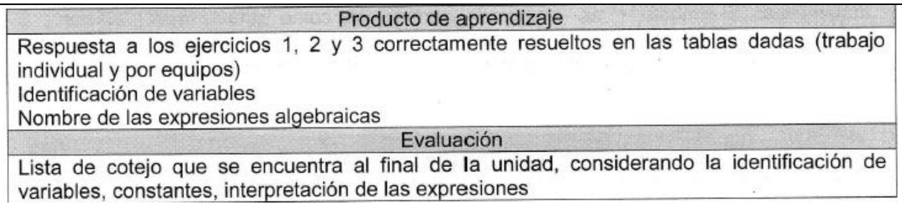
<table>
<tr><th>Expresión algebraica</th><th>Nombre</th></tr>
<tr><td>$3x^2 + 3x$</td><td></td></tr>
<tr><td>2a + b</td><td></td></tr>
<tr><td>$- 3x^3y – x + 5$</td><td></td></tr>
<tr><td>3ab</td><td></td></tr>
<tr><td>1/2ab + 2</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>3.4</td>
<td>


Utilizando los conocimientos adquiridos en este tema, contesta las actividades siguientes:
Completa la siguiente tabla determinando el grado de la expresión algebraica y clasificándole según el número de términos.

<table>
<tr><th>Expresión algebraica</th><th>Grado absoluto</th><th>Número de términos</th><th>Nombre de la expresión.</th></tr>
<tr><td>$2x - 5y^3$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{x^2y^3}{4}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$a - b + c - 2d$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$m^2 + mn + n^2$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x + y^2 + z^3 - xy^2z^3$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">
Conceptos:
Intervinientes:
Términos y expresiones algebraicas.
Emergentes:
Signo, coeficiente, literales, grado absoluto, monomio, binomio, trinomio, polinomio.

Propiedades:
*Propiedades de la igualdad (sustitución).
*Jerarquía de operadores.

Procedimientos:
*Sumas (3.2, 3.4)
*Determinar el grado absoluto de términos y expresiones algebraicas (3.2, 3.4).
</td>
</tr>
<tr>
<td>3.5</td>
<td>

Producto de aprendizaje
Respuesta a los ejercicios 1, 2 y 3 correctamente resueltos en las tablas dadas (trabajo individual y por equipos)
Identificación de variables
Nombre de las expresiones algebraicas
Evaluación
Lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad, considerando la identificación de variables, constantes, interpretación de las expresiones
</td>
</tr>
</table>

La primera actividad de esta configuración es una tarea extra clase que tiene como situación problema definir los elementos de los términos algebraicos y la clasificación de las expresiones de acuerdo al número de términos, lo cual puede investigarlo en libros o fuentes digitales (atributos 1g, 8a, 8b, 8c y 8d).

De esta investigación se desprenden los conceptos emergentes que se enlistan en la configuración, a partir de los cuales es posible realizar la actividad planteada en 3.2. Para identificar el signo, coeficiente y literales basta con observar el término, sin embargo para determinar el grado es necesario un proceso de algoritmización. Al completar la tabla en 3.2 el estudiante pone en juego los atributos 1a, 1h, 2a y 2e.

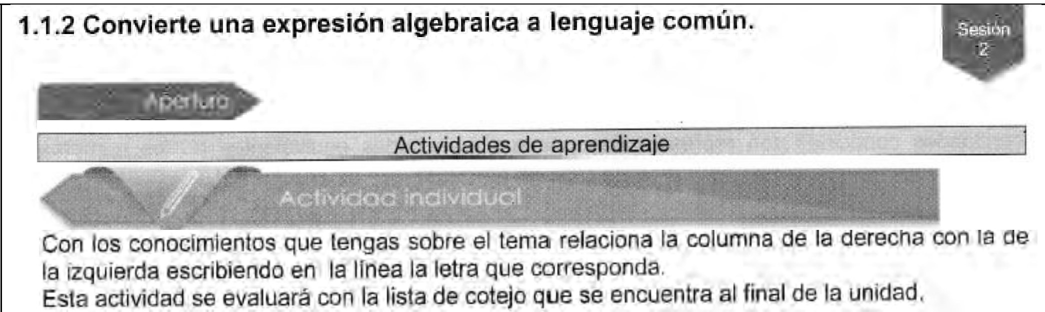
La tabla que se presenta en 3.3 involucra expresiones algebraicas y su nombre, el cual depende del número de términos de la expresión. Tal como se mencionó en la configuración previa, al identificar el nombre correspondiente a cada expresión se da un proceso de significación ya que mediante una palabra en lenguaje verbal se representa un objeto matemático. Este proceso implica la movilización de los atributos 1f y 8e, los cuales se refieren a la articulación de diferentes tipos de representación, en este caso consistiría en la expresión algebraica y la representación en lenguaje verbal.

En 3.4 se propone como actividad determinar el grado de la expresión, así como el número de términos y a partir de ello el nombre que recibe la expresión. Al completar esta tabla se identifican los procesos de algoritmización y representación que se mencionaron anteriormente, así como los atributos que están relacionados con dichos procesos.

En la configuración se menciona la propiedad de la igualdad (sustitución), ésta se emplea al momento de realizar sumas con los exponentes para obtener el grado del término primeramente y después de la expresión algebraica. En cuanto a los argumentos en las indicaciones de la actividad se solicita completar las tablas y al hacerlo no se da un proceso de argumentación.

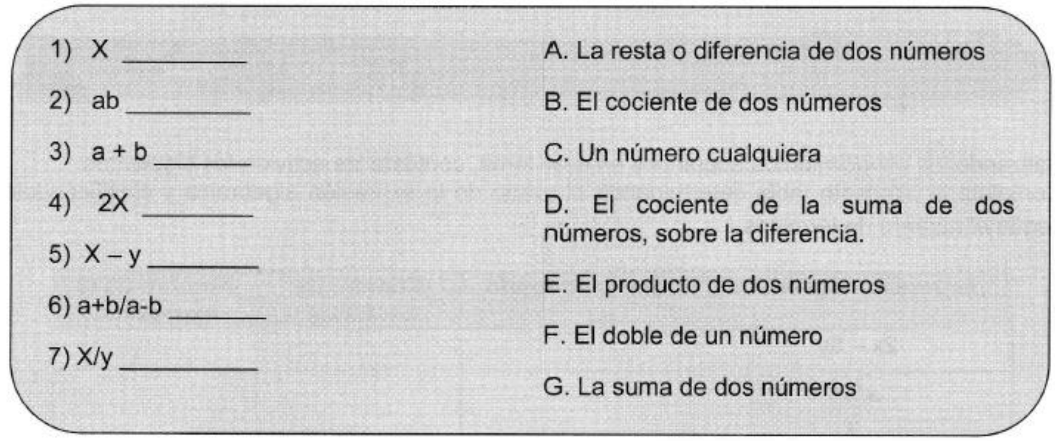
En esta configuración juega un papel muy importante la situación problema planteada en 3.1 ya que si el estudiante no investiga o su investigación es muy pobre, no será capaz de completar el resto de la actividad a menos que solicite apoyo al profesor o algún compañero. Por lo cual es importante considerar las acciones que realice el profesor a partir de la respuesta de los estudiantes. La recomendación para él sería el retomar las respuestas de los estudiantes, retroalimentar y completar la información faltante para que el resto de la secuencia se complete con éxito, particularmente porque las últimas actividades se han propuesto para realizarse de forma individual.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 4

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>
1.1.2 Convierte una expresión algebraica a lenguaje común.
Sesión 2
Apertura
Actividades de aprendizaje
Actividad individual
Con los conocimientos que tengas sobre el tema relaciona la columna de la derecha con la de la izquierda escribiendo en la línea la letra que corresponda.
Esta actividad se evaluará con la lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad.</td><td rowspan="2">**Situaciones-Problemas:**
*Encontrar relación entre el lenguaje algebraico y el lenguaje común (4.2)

Lenguajes:
***Verbal:** expresiones, planteamiento de problemas, indicaciones.
***Numérico:** numerar.
***Algebraico:** representar incógnitas *a, b, x, y*; expresiones algebraicas (4.2).

Conceptos:
Intervinientes:
Resta, diferencia, números, cociente, producto, doble, suma.

Procedimientos:
*Pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico (4.2).</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>
1) X ________
2) ab ________
3) a + b ________
4) 2X ________
5) X – y ________
6) a+b/a-b ________
7) X/y ________
A. La resta o diferencia de dos números
B. El cociente de dos números
C. Un número cualquiera
D. El cociente de la suma de dos números, sobre la diferencia.
E. El producto de dos números
F. El doble de un número
G. La suma de dos números</td></tr>
</table>

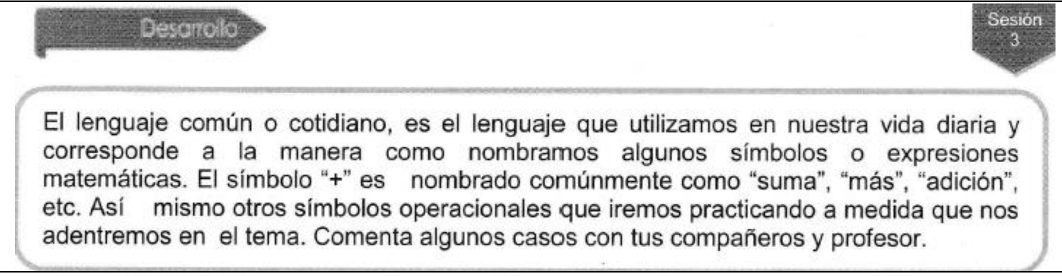
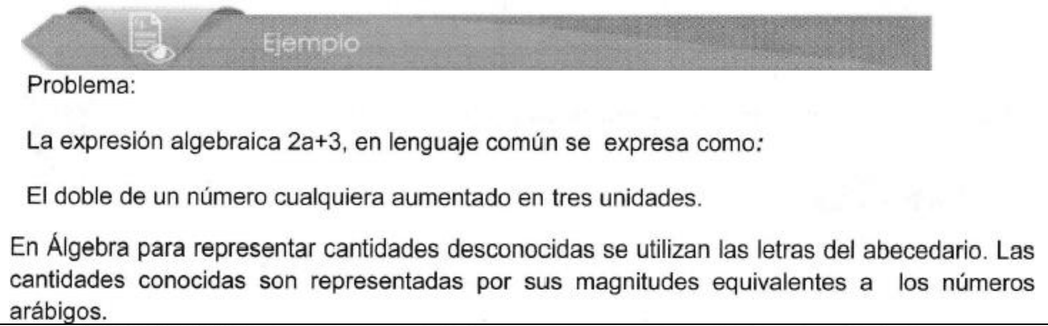
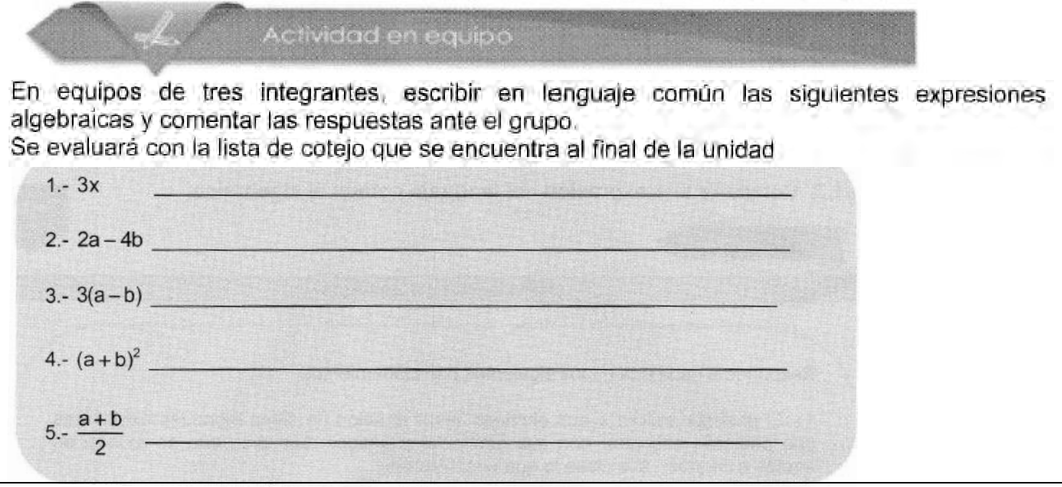
En esta configuración se presenta la actividad de apertura de la secuencia didáctica 2, aquí se presentan diversas expresiones en lenguaje algebraico y su equivalente en el lenguaje verbal (4.2).

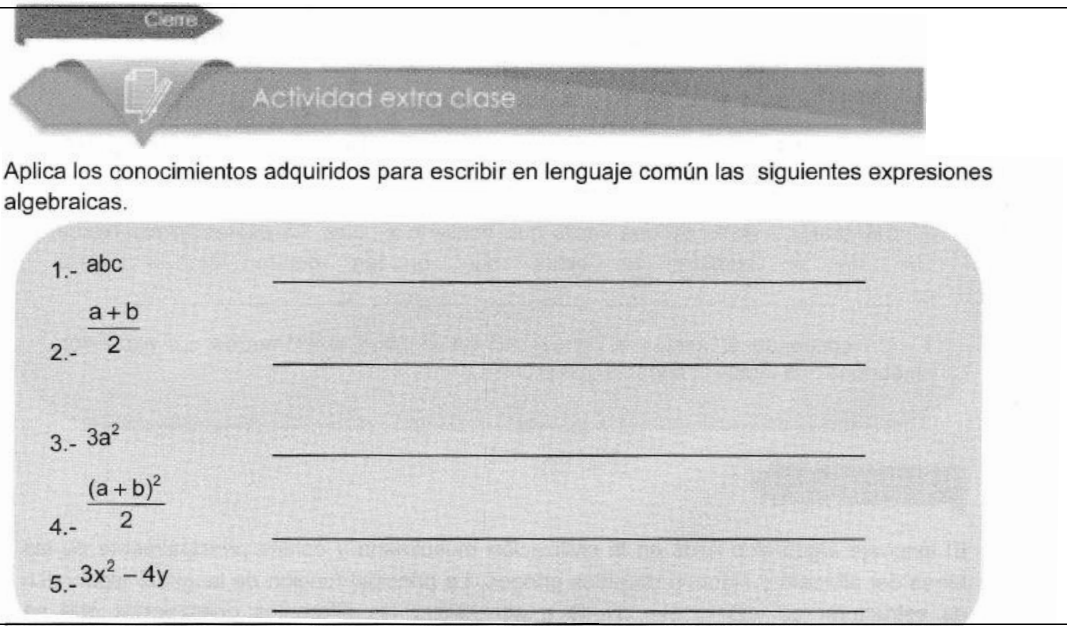
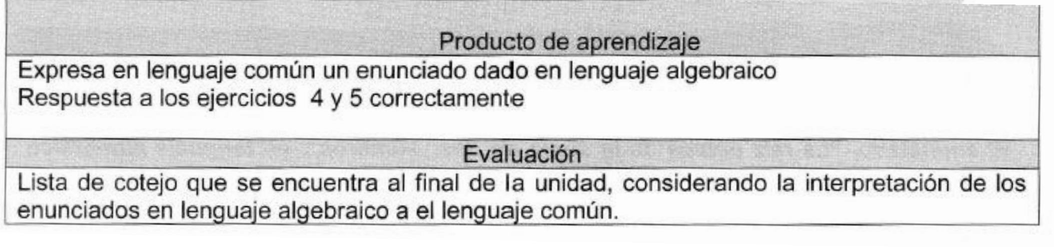
En 4.1 la indicación es que los estudiantes a partir de los conocimientos previos (conceptos intervinientes), relacionen ambas columnas. Para que el estudiante relacione correctamente ambas columnas debe intervenir en un proceso de significación para cada una de las expresiones que aparecen en la primera columna o un proceso de representación al pasar de las expresiones en lenguaje verbal a las algebraicas. Estos procesos implican la movilización de los atributos 1a, 1b, 1f, 1h, 8a, 8b, 8c y 8e.

En esta configuración se identifica un posible conflicto en la notación empleada en el ejercicio 6), ya que al representarse en un solo renglón, en lenguaje verbal esa expresión equivale a “Un número más el cociente de otro número entre el primero, menos el segundo número”. Al hacer la relación de las columnas la que le corresponde a 6) es: “el cociente de la suma de dos números sobre la diferencia”. El conflicto que se identifica aquí es que no se colocaron los paréntesis a la expresión que representaba la suma ni a la resta, por lo cual se puede prestar a otra interpretación; para omitir los paréntesis era necesario presentar la expresión algebraica de esta forma: $\frac{a+b}{a-b}$.

Esta actividad de apertura es un diagnóstico mediante el cual el profesor identificará cuáles de sus estudiantes tienen facilidad al desarrollar el procedimiento de pasar de lenguaje común al algebraico y viceversa.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 5

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
5.1	 Desarrollo Sesión 3 El lenguaje común o cotidiano, es el lenguaje que utilizamos en nuestra vida diaria y corresponde a la manera como nombramos algunos símbolos o expresiones matemáticas. El símbolo "+" es nombrado comúnmente como "suma", "más", "adición", etc. Así mismo otros símbolos operacionales que iremos practicando a medida que nos adentremos en el tema. Comenta algunos casos con tus compañeros y profesor.	**Situaciones-Problemas:** *Escribir expresiones algebraicas en lenguaje común (5.3, 5.4) **Lenguajes:** ***Verbal:** expresiones, planteamiento de problemas, indicaciones. ***Numérico:** ℝ, coeficientes, exponentes. ***Algebraico:** representar incógnitas *a, b, x*; expresiones algebraicas (5.2, 5.3. 5.4).
5.2	 Ejemplo Problema: La expresión algebraica 2a+3, en lenguaje común se expresa como: El doble de un número cualquiera aumentado en tres unidades. En Álgebra para representar cantidades desconocidas se utilizan las letras del abecedario. Las cantidades conocidas son representadas por sus magnitudes equivalentes a los números arábigos.	
5.3	 Actividad en equipo En equipos de tres integrantes, escribir en lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas y comentar las respuestas ante el grupo. Se evaluará con la lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad 1.- $3x$ ____________________ 2.- $2a-4b$ ____________________ 3.- $3(a-b)$ ____________________ 4.- $(a+b)^2$ ____________________ 5.- $\frac{a+b}{2}$ ____________________	

5.4	 Cierre Actividad extra clase Aplica los conocimientos adquiridos para escribir en lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas. 1.- abc ____________________ 2.- $\frac{a+b}{2}$ ____________________ 3.- $3a^2$ ____________________ 4.- $\frac{(a+b)^2}{2}$ ____________________ 5.- $3x^2-4y$ ____________________	**Conceptos:** *Intervinientes:* Lenguaje algebraico, doble, suma, adición, resta, triple, cuadrado, mitad, producto, diferencia. *Emergentes:* Lenguaje común. **Procedimientos:** *Pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico (5.2. 5.3, 5.4). **Argumentos:** *Explicación en 5.2.
5.5	 Producto de aprendizaje Expresa en lenguaje común un enunciado dado en lenguaje algebraico Respuesta a los ejercicios 4 y 5 correctamente Evaluación Lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad, considerando la interpretación de los enunciados en lenguaje algebraico a el lenguaje común.	

En esta configuración el objeto central es el lenguaje, particularmente el verbal (en el texto aparece como lenguaje común) y el algebraico. De aquí se desprende la situación problema la cual consiste en pasar de un lenguaje a otro. En 5.1 se presenta el lenguaje común un concepto emergente, invitando a los estudiantes a ejemplificar situaciones donde se ha empleado para describir diversos símbolos o expresiones matemáticas.

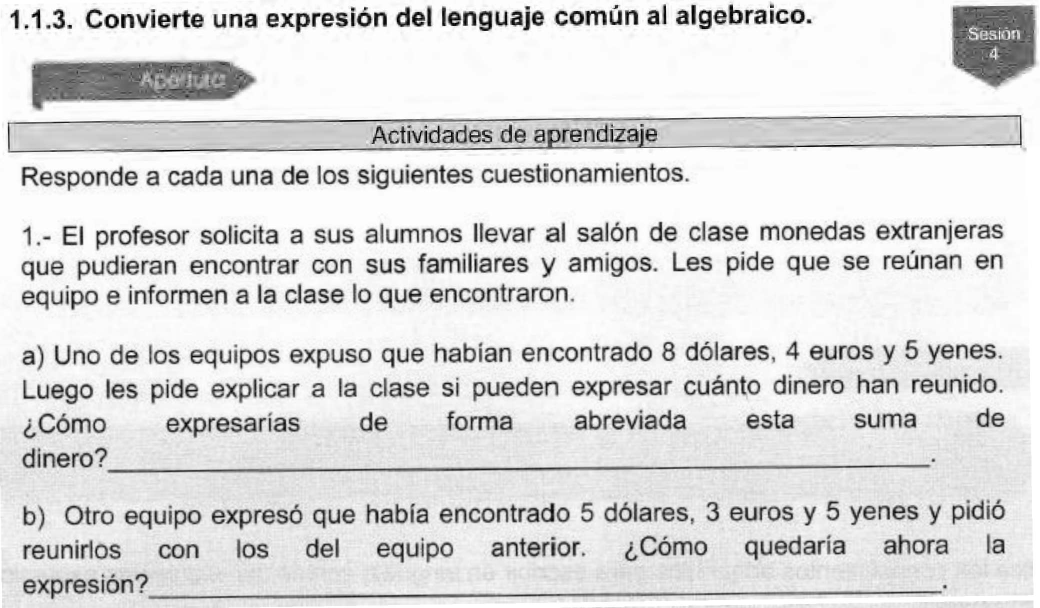
El ejemplo que aparece en 5.2 ilustra un proceso de significación mediante el cual una expresión en lenguaje algebraico se traduce al lenguaje común. También en esta sección se identifica un argumento que consiste en explicar que en álgebra se emplean las literales para representar cantidades desconocidas y las magnitudes mediante números arábigos; ésta es la argumentación ante la notación que se emplea para representar en lenguaje verbal una expresión algebraica.

Después del ejemplo se plantea una situación problema similar en 5.3, para resolverla los estudiantes trabajaran en equipo. El trabajo en equipo implica un proceso de comunicación además de la significación ya que los estudiantes deben describir a sus compañeros el procedimiento empleado para resolver el problema, lo cual se presta para comparar las respuestas y llegar a un acuerdo en equipo. Al completar la tabla en 5.3 los estudiantes desarrollarán los atributos 1a, 1e, 1f, 1h, 1j, 2a, 2h, 4b, 4e, 8a, 8b, 8c y 8e.

Como actividad de cierre en 5.4 se propone una situación problema similar a la anterior, de forma individual y extra clase. La tabla que se presenta en 5.4 implica de la misma forma el proceso de significación pero se omite el proceso de comunicación ya que el trabajo se realiza de forma individual, por eso los atributos que se promueven con esta situación ya se consideraron en el apartado anterior.

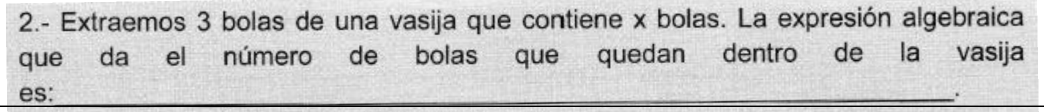
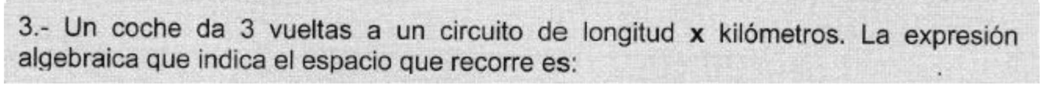
Al final de cada secuencia didáctica se observa un apartado semejante a 5.5, donde se describen los productos y los instrumentos de evaluación para las actividades. Este aspecto no se ha resaltado en las configuraciones porque no está relacionado con el conocimiento algebraico.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 6

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DE ANÁLISIS</th><th>OBJETOS PRIMARIOS</th></tr>
<tr><td>6.1</td><td>
1.1.3. Convierte una expresión del lenguaje común al algebraico.
Sesión 4
Apertura
Actividades de aprendizaje
Responde a cada una de los siguientes cuestionamientos.
1.- El profesor solicita a sus alumnos llevar al salón de clase monedas extranjeras que pudieran encontrar con sus familiares y amigos. Les pide que se reúnan en equipo e informen a la clase lo que encontraron.
a) Uno de los equipos expuso que habían encontrado 8 dólares, 4 euros y 5 yenes. Luego les pide explicar a la clase si pueden expresar cuánto dinero han reunido. ¿Cómo expresarías de forma abreviada esta suma de dinero?________________________________.
b) Otro equipo expresó que había encontrado 5 dólares, 3 euros y 5 yenes y pidió reunirlos con los del equipo anterior. ¿Cómo quedaría ahora la expresión?________________________________.</td><td rowspan="3">**Situaciones-Problemas:**
*Expresar en lenguaje algebraico una situación en lenguaje común (6.1, 6.2, 6.3)

Lenguajes:
***Verbal:** expresiones, planteamiento de problemas, indicaciones.
***Numérico:** ℝ, cantidades.
***Algebraico:** representar tipo de moneda, cantidades, longitud d, e, x, y; expresiones algebraicas $8d + 4e + 5y$, $13d + 7e + 10y$ (6.1), $x - 3$ (6.2), $3x$ (6.3).

Conceptos:
Intervinientes:
Suma, expresión, longitud.

Procedimientos:
*Pasar del lenguaje algebraico al lenguaje común (6.2).</td></tr>
<tr><td>6.2</td><td>
2.- Extraemos 3 bolas de una vasija que contiene x bolas. La expresión algebraica que da el número de bolas que quedan dentro de la vasija es:________________________________.</td></tr>
<tr><td>6.3</td><td>
3.- Un coche da 3 vueltas a un circuito de longitud **x** kilómetros. La expresión algebraica que indica el espacio que recorre es: .</td></tr>
</table>

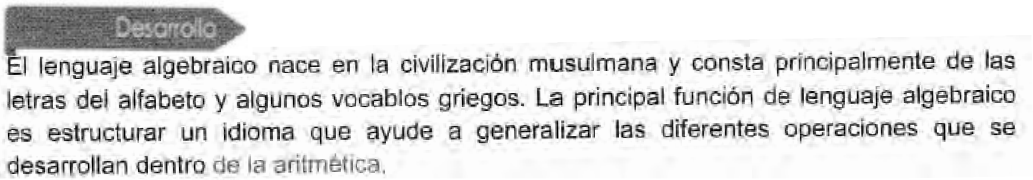
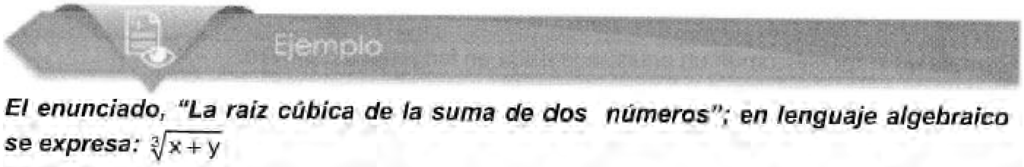
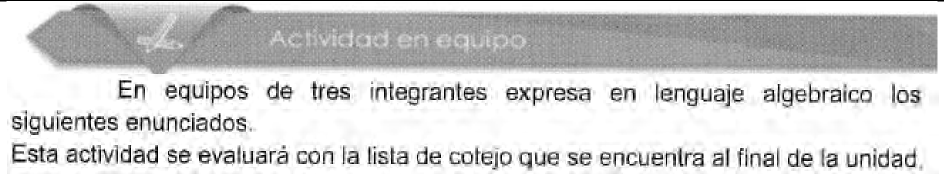
Los problemas de esta configuración se desprenden del lenguaje común y algebraico ya que las situaciones planteadas consisten en pasar de un lenguaje a otro. En 6.1 se presenta en lenguaje común una situación que implica el manejo de diferentes monedas y se solicita al estudiante representar de forma abreviada lo que se plantea. Al responder los cuestionamientos se da un proceso de representación en cada respuesta del estudiante y se movilizan los atributos 1a, 1b, 1d, 1f, 2a, 2b, 2c, 5a, 5b, 8a, 8b y 8e.

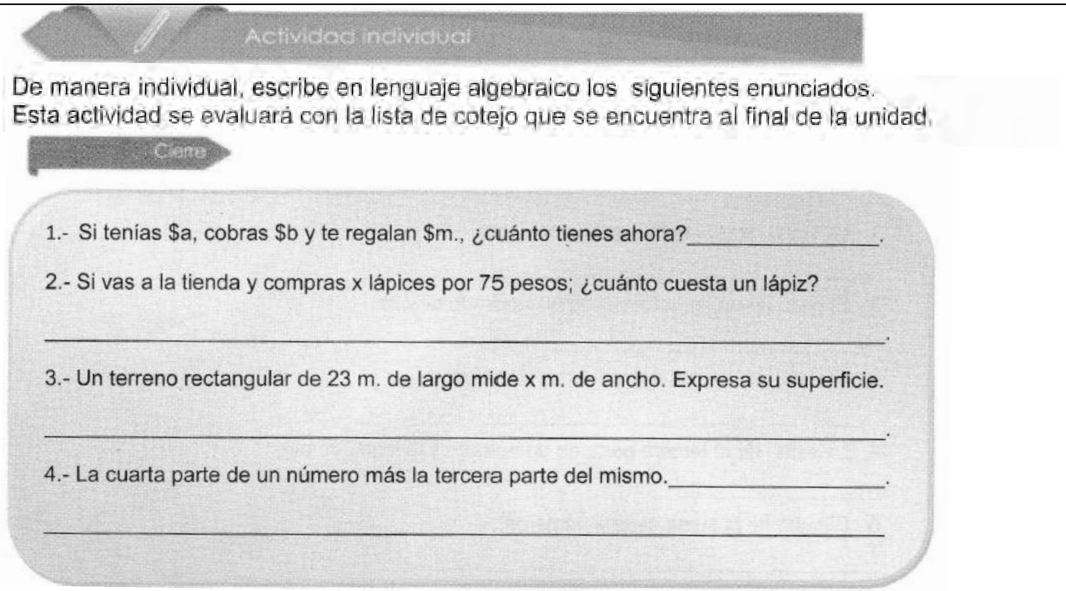
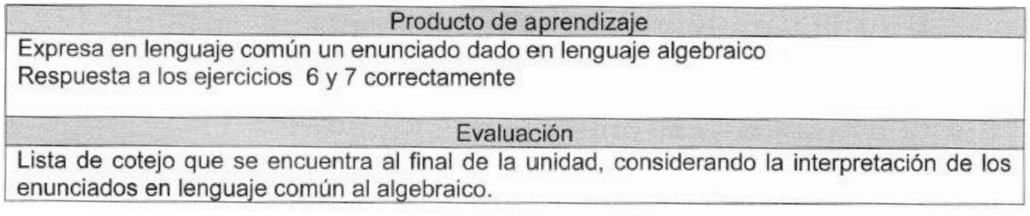
De la misma forma las situaciones planteadas en 6.2 y 6.3 implican procesos de representación. En el problema planteado en 6.2 el estudiante debe comprender primeramente lo que significa extraer en una expresión algebraica, es decir equivale a una resta por lo cual la expresión correspondiente a este apartado es $x-3$. Aunque parece que es un proceso directo, la representación implica primeramente la identificación de las variables y constantes así como el papel que juegan en la situación problema, además es importante encontrar esta relación entre las palabras en el lenguaje verbal y su equivalente en operaciones matemáticas.

Por último la expresión que se solicita en 6.3 sería $3x$, ya que se especifica que el coche da tres vueltas y cada vuelta tiene longitud x. Nuevamente se espera que el estudiante sea capaz de obtener esta expresión por sí mismo y de esa forma desarrollar los atributos antes mencionados.

Lo que el texto está promoviendo con este tipo de actividades es que el estudiante proporcione una respuesta y que el profesor sea quien determine si su respuesta es correcta o no, ya que no se le pide justificación o argumentación a sus respuestas en las actividades que hasta el momento se han solicitado. El único argumento con el que se podría contar es el procedimiento que realice el estudiante para resolver el problema, pero en este tipo de problemas donde la situación consiste en pasar de un lenguaje a otro el procedimiento queda implícito de manera no ostensiva.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 7

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
7.1	 Desarrollo El lenguaje algebraico nace en la civilización musulmana y consta principalmente de las letras del alfabeto y algunos vocablos griegos. La principal función de lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética.	**Situaciones-Problemas:** *Pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico (7.3, 7.4, 7.5) **Lenguajes:** ***Verbal:** expresiones, planteamiento de problemas, indicaciones. ***Numérico:** ℝ, coeficientes, exponentes. ***Algebraico:** representar incógnitas *a, b, x, y*; expresiones algebraicas (7.3, 7.4, 7.5). **Conceptos:** *Intervinientes:* Lenguaje común, raíz cúbica, suma, cubo, cuadrado, producto, tercera parte,
7.2	 Ejemplo ***El enunciado, "La raiz cúbica de la suma de dos números"; en lenguaje algebraico se expresa:*** $\sqrt[3]{x+y}$	
7.3	 Actividad en equipo En equipos de tres integrantes expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados. Esta actividad se evaluará con la lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad.	
7.4	1.- La suma de tres números cualesquiera.___________________________________ 2.- El cubo de un número menos el cuadrado de otro. __________________________ 3.- El producto de dos números cualesquiera._________________________________ 4.- La suma de la tercera parte de un número y la mitad de otro. _________________ 5.- El cubo de la suma de dos números. ____________________________________ 6.- El cuadrado de la mitad de la suma de dos números. ________________________ 7.- El cociente de la suma de dos números entre su diferencia. ___________________ 8.- La cuarta parte de la suma de dos números.________________________________	

7.5	 Actividad individual De manera individual, escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados. Esta actividad se evaluará con la lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad. Cierre 1.- Si tenías $a, cobras $b y te regalan $m., ¿cuánto tienes ahora?________________. 2.- Si vas a la tienda y compras x lápices por 75 pesos; ¿cuánto cuesta un lápiz? ____. 3.- Un terreno rectangular de 23 m. de largo mide x m. de ancho. Expresa su superficie. ____. 4.- La cuarta parte de un número más la tercera parte del mismo.________________. ____	mitad, cociente, diferencia, cuarta parte. *Emergente:* Lenguaje algebraico. **Propiedades:** *Fórmula para determinar el área de un rectángulo (7.5). **Procedimientos:** *Pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico (7.3, 7.4, 7.5). **Argumentos:** *Ejemplos como en 7.2.
7.6	 Producto de aprendizaje Expresa en lenguaje común un enunciado dado en lenguaje algebraico Respuesta a los ejercicios 6 y 7 correctamente Evaluación Lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad, considerando la interpretación de los enunciados en lenguaje común al algebraico.	

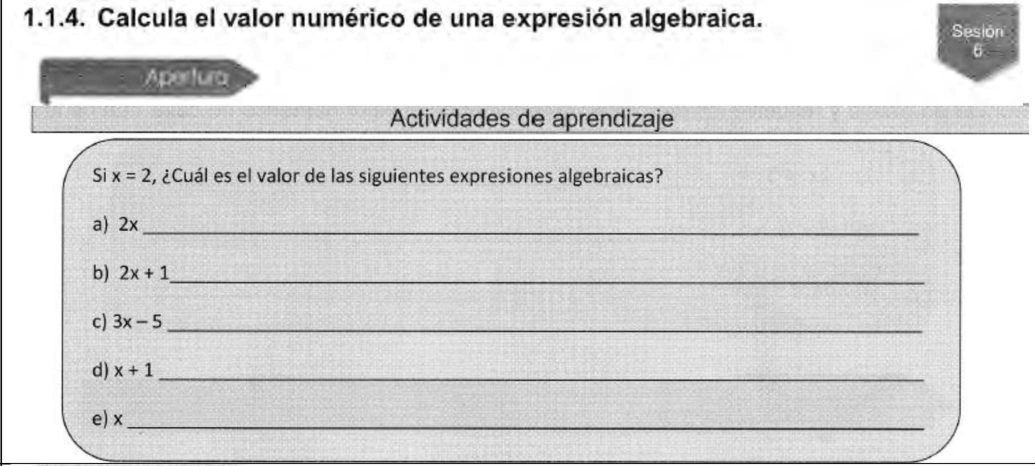
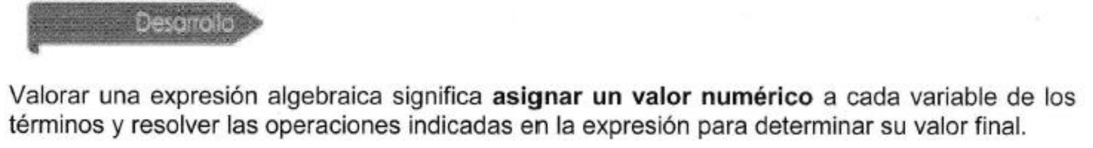
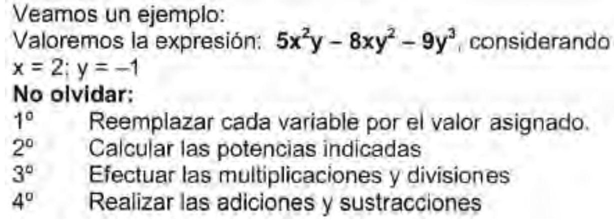
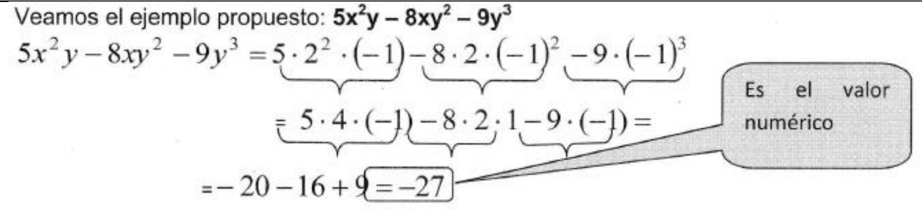
En esta configuración el objeto central es el lenguaje nuevamente, ya que se continúa con las situaciones problema que consisten en pasar de un lenguaje a otro. En 7.1 se presenta el lenguaje algebraico como un concepto emergente, sin embargo en configuraciones previas aparecía como un objeto interviniente; aquí se presenta como una generalización de la aritmética.

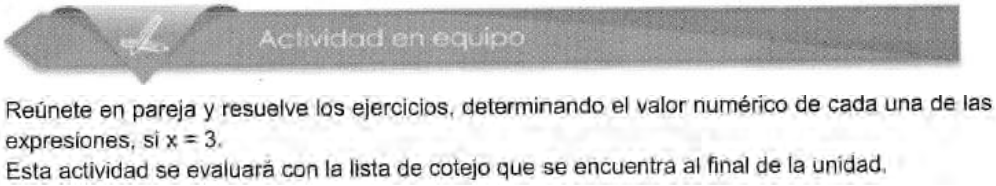
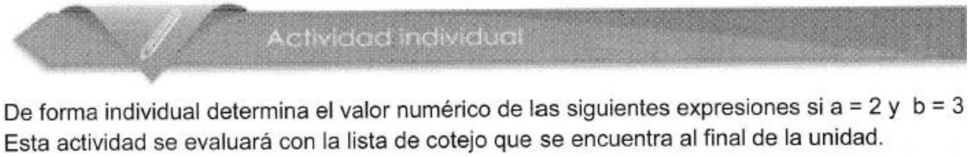
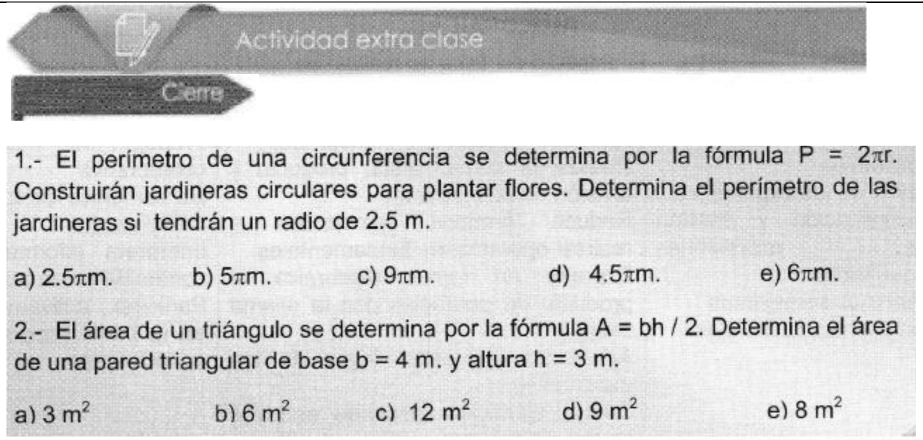
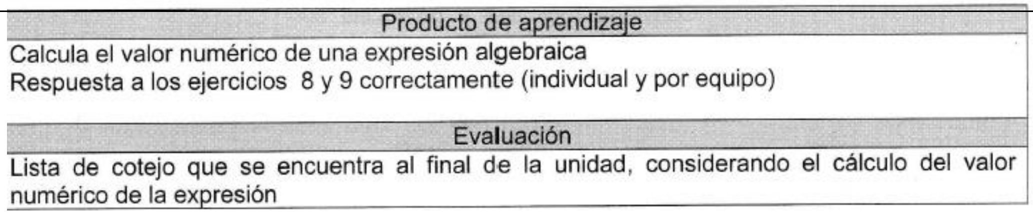
El ejemplo que aparece en 7.2 ilustra un proceso de representación mediante el cual una expresión en lenguaje común se traslada al lenguaje algebraico. También en esta sección se identifica un argumento que consiste en proporcionar un ejemplo para representar una situación mediante el lenguaje algebraico; ésta es la argumentación ante la notación que se emplea.

Después del ejemplo se plantea una situación problema similar en 7.3, para resolverla los estudiantes trabajaran en equipo. El trabajo en equipo implica un proceso de comunicación además de la representación ya que los estudiantes deben describir a sus compañeros el procedimiento empleado para resolver el problema, lo cual se presta para comparar las respuestas y llegar a un acuerdo en equipo. Al completar la tabla en 7.4 los estudiantes desarrollarán los atributos 1a, 1b, 1d, 1f, 1j, 2a, 2c, 2h, 4b, 4e, 8a, 8b y 8e.

Como actividad de cierre en 7.5 se propone una situación problema contextualizada a diferencia de la anterior que consistía en un problema intra-matemático; esta actividad se realizará de forma individual y extra clase. La tabla que se presenta en 7.5 implica de la misma forma el proceso de significación pero para situaciones contextualizadas, por eso se consideran los atributos 5a y 5b, además de los que ya se consideraron en el apartado anterior. Además el problema 3 planteado en 7.5 está relacionado con un problema geométrico y se requiere conocer la fórmula para determinar el área de un rectángulo para resolverlo (atributos 6a, 6b, 6d y 6g).

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 8

	UNIDAD DE ANÁLISIS	OBJETOS PRIMARIOS
8.1	 **1.1.4. Calcula el valor numérico de una expresión algebraica.** Sesión 6 Apertura Actividades de aprendizaje Si x = 2, ¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones algebraicas? a) 2x ________ b) 2x + 1 ________ c) 3x – 5 ________ d) x + 1 ________ e) x ________	**Situaciones-Problemas:** *Obtener el valor numérico de una expresión algebraica (8.1, 8.4, 8.5 y 8.6). *Obtener el valor numérico de expresiones que representan perímetros y áreas (8.7). **Lenguajes:** ***Verbal:** expresiones, planteamiento de problemas, indicaciones. ***Numérico:** ℝ, cantidades. ***Algebraico:** representar literales, cantidades, longitud *a, A, b, h, P, r, x, y*; expresiones algebraicas $2x+1$, $3x-5$ (8.1), $5x^2y-8xy^2-9y^3$ (8.2), entre otras.
8.2	 Desarrollo Valorar una expresión algebraica significa **asignar un valor numérico** a cada variable de los términos y resolver las operaciones indicadas en la expresión para determinar su valor final.	
8.3	 Veamos un ejemplo: Valoremos la expresión: **$5x^2y - 8xy^2 - 9y^3$**, considerando x = 2; y = –1 **No olvidar:** 1° Reemplazar cada variable por el valor asignado. 2° Calcular las potencias indicadas 3° Efectuar las multiplicaciones y divisiones 4° Realizar las adiciones y sustracciones	
8.4	 Veamos el ejemplo propuesto: **$5x^2y - 8xy^2 - 9y^3$** $5x^2y-8xy^2-9y^3=\underbrace{5\cdot 2^2\cdot(-1)}-\underbrace{8\cdot 2\cdot(-1)^2}\underbrace{-9\cdot(-1)^3}$ $=\underbrace{5\cdot 4\cdot(-1)}-\underbrace{8\cdot 2\cdot 1}-\underbrace{9\cdot(-1)}=$ $=-20-16+9\boxed{=-27}$ Es el valor numérico	

8.5	 Actividad en equipo Reúnete en pareja y resuelve los ejercicios, determinando el valor numérico de cada una de las expresiones, si x = 3. Esta actividad se evaluará con la lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad. 1) $2x + 3 =$ 2) $x^2 - 3 =$ 3) $3x^2 + 2x - 3 =$	**Conceptos:** *Intervinientes:* Expresión algebraica, variable, sumas, potencias, multiplicaciones, divisiones, restas, adición, sustracción, *Emergentes:* Valor numérico. **Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). *Jerarquía de operadores. **Procedimientos:** *Suma, resta, multiplicación, división y potencias (8.1, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7). *Calcular el valor numérico de una expresión algebraica.
8.6	 Actividad individual De forma individual determina el valor numérico de las siguientes expresiones si a = 2 y b = 3 Esta actividad se evaluará con la lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad. 1) $2ab + 4 =$ 3) $5a - 2b =$ 5) $a^3 + b^2$ 2) $3a^2 - 2b =$ 4) $a + b =$	
8.7	 Actividad extra clase Cierre 1.- El perímetro de una circunferencia se determina por la fórmula P = 2πr. Construirán jardineras circulares para plantar flores. Determina el perímetro de las jardineras si tendrán un radio de 2.5 m. a) 2.5πm. b) 5πm. c) 9πm. d) 4.5πm. e) 6πm. 2.- El área de un triángulo se determina por la fórmula A = bh / 2. Determina el área de una pared triangular de base b = 4 m. y altura h = 3 m. a) 3 m^2 b) 6 m^2 c) 12 m^2 d) 9 m^2 e) 8 m^2	
8.8	 Producto de aprendizaje Calcula el valor numérico de una expresión algebraica Respuesta a los ejercicios 8 y 9 correctamente (individual y por equipo) Evaluación Lista de cotejo que se encuentra al final de la unidad, considerando el cálculo del valor numérico de la expresión	

Con esta configuración se ha considerado la Secuencia Didáctica 4 y la situación problema central consiste en determinar el valor numérico de una expresión algebraica. En 8.1 se propone como actividad de apertura determinar el valor numérico de una expresión con una sola variable; al resolver esta situación los alumnos realizarán un proceso de algoritmización en el cual mediante sumas, restas y multiplicaciones aplicando la propiedad de jerarquía de operadores, para obtener el valor numérico. Este proceso moviliza los atributos 1a, 2a, 2b, 2e, 3b, 8a y 8b.

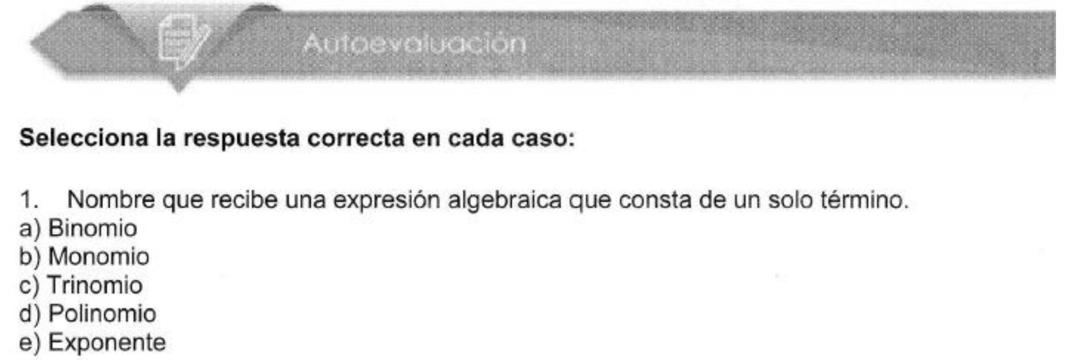
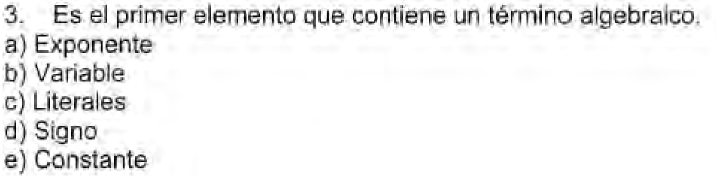
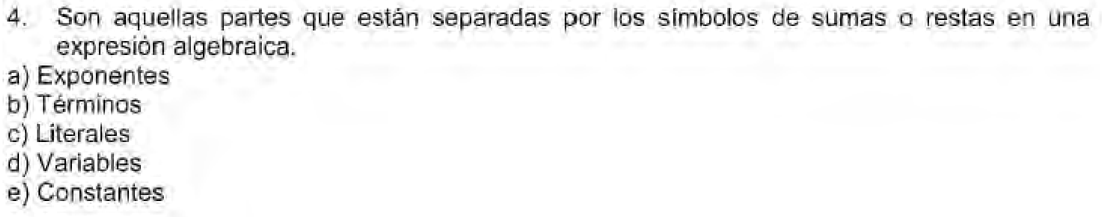
En 8.2 se presenta como objeto emergente mediante un proceso de enunciación el concepto valor numérico y después de esto en 8.3 se da un proceso de comunicación mediante el cual se enuncian los pasos a seguir para determinar el valor numérico de una expresión algebraica. Se hace uso de la jerarquía de operadores de manera no ostensiva, sin embargo no se han identificado argumentos en la construcción de este procedimiento. Posteriormente en 8.4 se resuelve la situación planteada en 8.3, lo cual implica un proceso de algoritmización y al seguir este procedimiento los estudiantes desarrollan los atributos que se mencionaron en el párrafo anterior para la obtención del valor numérico de una expresión.

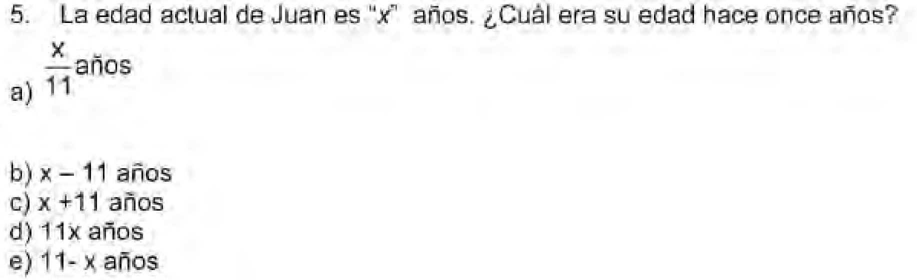
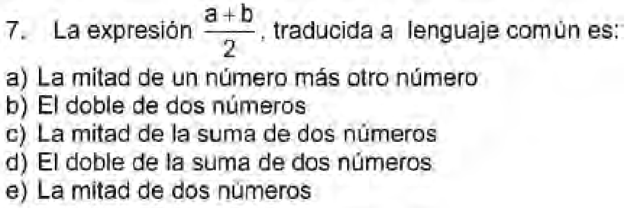
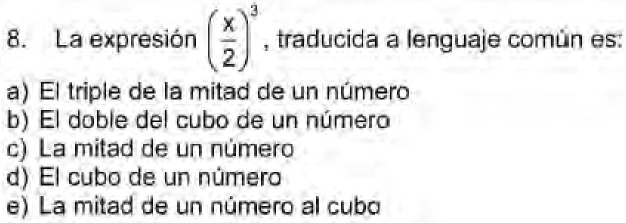
Para resolver la situación planteada en 8.5 los estudiantes trabajaran en parejas, esto implica un proceso de comunicación además de la algoritmización para resolver el problema, ya que los estudiantes deben describir a sus compañeros el procedimiento empleado. Al comentar las respuestas y llegar a un acuerdo en equipo se movilizarán los atributos 1j, 2h y 4e.

Después de trabajar en equipo el estudiante responderá de forma individual la actividad planteada en 8.6, ésta es muy similar a la que se realizó en equipo en el apartado anterior: dadas varias expresiones y valores fijos, se debe determinar su valor numérico, la diferencia es que en esta sección aparecen dos variables.

Como actividad de cierre en 8.7 se propone una situación problema que implica el manejo de ciertas fórmulas de geometría (atributos 6a, 6g); esta actividad se realizará de forma individual y extra clase. La situación planteada en esta sección también tiene como objetivo determinar el valor numérico pero en una situación contextualizada.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 9

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
9.1	 Autoevaluación **Selecciona la respuesta correcta en cada caso:** 1. Nombre que recibe una expresión algebraica que consta de un solo término. a) Binomio b) Monomio c) Trinomio d) Polinomio e) Exponente	**Situaciones-Problemas:** *Relacionar el número de términos y su nombre (9.1). *Determinar el número de términos de una expresión (9.2). *Identificar un término algebraico (9.3, 9.4). *Representar una situación en lenguaje común mediante una expresión algebraica y viceversa (9.5, 9.6, 9.7, 9.8). *Obtener el valor numérico de expresiones algebraicas (9.9, 9.10). **Lenguajes:** ***Verbal:** expresiones, planteamiento de problemas, respuestas. ***Numérico:** $\mathbb{R}$, cantidades. ***Algebraico:** representar literales, cantidades, longitud *a, b, t, v, x, y*; expresiones algebraicas.
9.2	 2. El número de términos de la expresión $4x^2 - 3x + 1$ corresponde a: a) 3 b) 4 c) 5 d) 1 e) 2	
9.3	 3. Es el primer elemento que contiene un término algebraico. a) Exponente b) Variable c) Literales d) Signo e) Constante	
9.4	 4. Son aquellas partes que están separadas por los símbolos de sumas o restas en una expresión algebraica. a) Exponentes b) Términos c) Literales d) Variables e) Constantes	

9.5	 5. La edad actual de Juan es "*x*" años. ¿Cuál era su edad hace once años? a) $\frac{x}{11}$ años b) x – 11 años c) x +11 años d) 11x años e) 11- x años	**Conceptos:** *Intervinientes:* Expresión algebraica, literal, término, binomio, monomio, trinomio, variable, polinomio, exponente, signo, constante, suma, resta, recíproco, producto, mitad, doble, triple, cubo, valor. **Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (sustitución). *Jerarquía de operadores. **Procedimientos:** *Pasar del lenguaje común al algebraico y viceversa. *Calcular el valor numérico de una expresión algebraica. *Sumas y multiplicaciones (9.9, 9.10).
9.6	6. El recíproco del producto de dos números: a) $\frac{1}{ab}$ b) ab c) $\frac{1}{a+b}$ d) $\frac{1}{a-b}$ e) $\frac{b}{a}$	
9.7	 7. La expresión $\frac{a+b}{2}$, traducida a lenguaje común es: a) La mitad de un número más otro número b) El doble de dos números c) La mitad de la suma de dos números d) El doble de la suma de dos números e) La mitad de dos números	
9.8	 8. La expresión $\left(\frac{x}{2}\right)^3$, traducida a lenguaje común es: a) El triple de la mitad de un número b) El doble del cubo de un número c) La mitad de un número d) El cubo de un número e) La mitad de un número al cubo	
9.9	9. Una expresión está determinada por $v + at$, determina su valor cuando $a = 3, v = 3\ y\ t = 4$. a) 21 b) 6 c) 12 d) 11 e) 13	
9.10	El valor de la expresión $(x-3)(y+4)$, cuando $x = 1, y = 2$, corresponde a: a) -4 b) 12 c) 8 d) -12 e) 14	

Uno de los apartados que conforman la unidad es la autoevaluación, la cual aparece al final de la unidad. En esta configuración se han considerado las situaciones problemas relacionadas con los contenidos que se abordaron en las primeras cuatro secuencias didácticas, se describirán y señalarán los procesos que intervienen así como los atributos que se promueven.

La primera situación en 9.1 implica que el estudiante conozca el significado de monomio, binomio, trinomio y polinomio, así como su relación con el número de términos. Al resolver esta situación el estudiante se ve inmerso en un proceso de significación en el cual desarrollará los atributos 8a y 8b. En 9.2 se da la expresión y se solicita la identificación de términos (atributos 1a, 1h y 8c). Las situaciones planteadas en 9.3 y 9.4 también están relacionadas con los términos algebraicos y sus elementos pero respecto a los conceptos.

En 9.5 y 9.6 se parte de expresiones en lenguaje verbal y es necesario obtener la expresión algebraica lo cual implica un proceso de representación por parte de los estudiantes. En el primer caso se trata de una situación contextualizada y la segunda es intra-matemática. Al resolverlas se desarrollan los atributos 1b, 1d, 1f, 2b, 2c, 5a, 5b, 8a, 8b y 8e.

En las situaciones siguientes se considera como situación problema el expresar mediante el lenguaje verbal lo que representa una expresión algebraica. Es así que en 9.7 y 9.8 se considera un proceso de significación por lo que se movilizan los atributos 2a, 3f y 4b, ya que para resolver las situaciones el estudiante relacionará las expresiones aquí presentadas con las que se estudiaron en las secuencias didácticas.

En 9.9 y 9.10 se tienen dos situaciones para las que se pide determinar el valor numérico, la primera de ellas se trata de una situación contextualizada y la segunda es intra-matemática. Al resolverlas interviene un proceso de algoritmización mediante el cual se emplea el procedimiento para calcular el valor numérico de una expresión (sumas, restas y multiplicaciones). Con esto se ponen en juego los atributos 2e y 3b.

Se ponen en juego muchos atributos en este apartado si el estudiante resuelve los problemas, en el caso de que solamente encierre las respuestas se pierde la intención que se tenía con cada situación planteada. Por esta razón podría ser un inconveniente este tipo de respuestas en una evaluación.

3.3.2. Resumen de atributos y competencias para el caso de CECyTES.

De acuerdo al análisis que se ha presentado se identifican la movilización de los siguientes atributos en el análisis del texto de CECyTES.

			CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA									TOTAL
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
COMPETENCIA Y ATRIBUTO	1	1a	*	*	*	*	*	*	*	*	*	9
		1b				*		*	*		*	4
		1c										0
		1d						*	*		*	3
		1e					*				*	2
		1f			*	*	*	*	*		*	6
		1g			*							1
		1h	*	*	*	*	*				*	6
		1i										0
		1j		*			*		*	*		4
	2	2a	*	*	*		*	*	*	*	*	8
		2b	*	*				*		*	*	5
		2c						*	*		*	3
		2d										0
		2e	*		*					*		3
		2f										0
		2g										0
		2h		*			*		*	*		4
		2i										0
	3	3a										0
		3b	*	*						*	*	4
		3c										0
		3d										0
		3e										0
		3f									*	1

			CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA									TOTAL
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
COMPETENCIA Y ATRIBUTO	4	4a										0
		4b					*		*		*	3
		4c										0
		4d										0
		4e		*			*		*	*		4
	5	5a						*	*		*	3
		5b						*	*		*	3
		5c										0
		5d										0
		5e										0
	6	6a							*	*		2
		6b							*			1
		6c										0
		6d							*			1
		6e										0
		6f										0
		6g							*	*		2
	7	7a										0
		7b										0
		7c										0
		7d										0
		7e										0
	8	8a	*	*	*	*	*	*	*	*	*	9
		8b	*	*	*	*	*	*	*	*	*	9
		8c	*	*	*	*	*				*	6
		8d			*							1
		8e			*	*	*	*	*		*	6

Tabla 3.3.2.1. Atributos y competencias para el caso CECyTES

Debido a que se construyeron nueve configuraciones en este texto, se considerarán aquellos atributos que presentan una frecuencia mayor o igual a 4 configuraciones.

De los 10 atributos de la competencia 1, 5 de ellos se desarrollan en apartado del texto que se analizó: 1a, 1b, 1f, 1h y 1j. Estos atributos son: identifica constantes, incógnitas y variables así como el papel que juegan en la situación problema, representa incógnitas mediante literales, articula los diferentes tipos de representaciones, infiere resultados a partir de las representaciones y solicita apoyo ante una situación que lo rebase. Esto nos indica que con las situaciones problema que se presentan en el texto se busca la construcción de modelos además de la interpretación de los mismos. Por otro lado, el proponer actividades en equipo permite al estudiante conocer sus limitaciones y solicitar apoyo a sus compañeros.

De la competencia 2 los atributos con mayor frecuencia son 2a, 2b y 2h, el primero se refiere a la identificación y ordenación de variables, el segundo a identificar las interrogantes del problema y el último se relaciona con el trabajo en equipo. Por lo tanto el aspecto que se promueve en esta competencia es la resolución de problemas, sin embargo no se considera la formulación de otras situaciones o la aplicación de diversos enfoques.

En la competencia 3 sólo hay un atributo que se promueve, el 3b: "Identifica las interrogantes del problema y ofrece una solución". Esta competencia busca promover la explicación e interpretación de los resultados, sin embargo en el texto solamente se solicita resolver el problema, por ello solamente se desarrolla este atributo de la competencia. Para la competencia 4 también se identifica un solo atributo (4e), como resultado del trabajo en equipo el estudiante aportará su punto de vista ante sus compañeros y estas son las argumentaciones que se promueven en las actividades planteadas en el texto.

La última competencia se refiere a la interpretación de tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos. En la tabla se observa que la mayoría de los atributos se desarrollan en las configuraciones, excepto el 8d, el cual implica que para la interpretación de textos el estudiante debe ser capaz de sintetizar información.

Conclusiones

A casi 8 años de la implementación de la Reforma Integral de la Educación Media Superior reconocemos que se han realizado una serie de acciones que buscan el cumplimiento de los diferentes aspectos que ésta señala. Sin embargo estas acciones (creación de diplomados, certificación de profesores, ingreso de diversas instituciones al SNB, elaboración de nuevos programas y textos) aún dejan mucho que desear ya que en el entorno inmediato hay aspectos que aún no se han tomado en consideración.

En la RIEMS se habla de cuatro niveles de concreción: interinstitucional, institucional, escuela y aula. El primero de éstos se refiere a los aspectos generales que se plantean en el MCC, los cuales los podemos identificar en los Acuerdos Secretariales 442 y 444 (2008). Sin embargo este nivel de concreción es muy general por lo cual es importante señalar lo que sucede en los otros niveles.

En el nivel institucional se considera la adecuación de los planes y programas, tomando en consideración el enfoque por competencias y los intereses de la institución. En los programas que se analizaron, se observa que se buscó la forma de adecuar las competencias en cada uno de los bloques o unidades, los cuales fueron construidos en torno a contenidos matemáticos, siendo estos temas el eje central en el programa aun cuando en el discurso no se declara así.

En el último nivel se señalan las modificaciones que toma el profesor con relación a la planeación y aunque se tiene un cierto grado de libertad en el diseño del plan de clase, podemos identificar algunas complicaciones a las que se enfrenta el docente: por un lado la institución exige cubrir una amplia gama de contenidos y por el otro debe considerar el desarrollo de las competencias. Considerando la limitación del tiempo ¿es posible cumplir con los dos aspectos simultáneamente?, el planteamiento que se presenta en el programa ¿es realista al considerar los contenidos, competencias a desarrollar y la temporalización?

Éstos son solamente algunos de los obstáculos a los que se enfrenta el docente cuando trata de concretar lo que establece la reforma en el último de sus niveles. Otro de los aspectos que aún no se define claramente es la forma de evaluar las competencias, ya que no se cuenta con los recursos, herramientas e instrumentos necesarios para realizar semejante tarea. También se han externado opiniones por parte de los profesores con relación a las implicaciones del aprendizaje basado en competencias, es decir, muchos de ellos no consideran tener los elementos suficientes para diseñar actividades que promuevan el desarrollo de competencias y recurren al libro de texto considerándolo como el plan de clase en sí mismo.

Este tipo de consideraciones fueron las que nos permitieron en un principio interesarnos en el problema que se plantea en la presente, el cual está relacionado con el papel que tienen el programa y el libro de texto en la implementación de la Reforma.

En el primer capítulo de este trabajo se dio a conocer la problemática así como algunos elementos que la justifican, tanto en el ámbito educativo como en el campo de investigación. Se presentaron una serie de reflexiones que nos permitieron plantear el problema de investigación, particularmente se consideraron las acciones de las instituciones como respuesta a las exigencias de la Reforma y concretamente aquellas relacionadas con el currículum.

Considerando el caso de las instituciones del nivel Medio Superior se enmarcó la investigación en la RIEMS, retomando la noción de competencias que se plantea en el MCC y con relación a esto el objetivo general de la investigación se enuncia de la siguiente forma:

> **“Identificar y analizar las competencias matemáticas promovidas en el nivel medio superior correspondientes a ciertos contenidos de álgebra, además de establecer la relación que guardan con las competencias disciplinares planteadas en la RIEMS.”**

Para alcanzar el objetivo de la investigación se siguieron una serie de pasos que culminaron en el análisis descrito en el Capítulo 3 de la presente investigación, donde se construyeron las trayectorias epistémicas relativas a los contenidos seleccionados en los textos de tres instituciones de bachillerato.

A partir del análisis realizado podemos presentar las siguientes conclusiones, las cuales se han agrupado en varias secciones con el propósito de resaltar los aspectos que se desprenden de la presente investigación.

a) Las nociones de matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, que son promovidas por el texto

De acuerdo al Enfoque Onto-Semiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática se consideran dos tipos de configuraciones globales al realizar análisis de textos: las formales o intra-matemáticas y las empíricas (Font y Godino, 2006). Tal como se describe en el capítulo correspondiente a los elementos teóricos, cada una de estas configuraciones responde a concepciones de la matemática muy diferentes.

En las trayectorias correspondientes a cada uno de los textos de las instituciones, se observa un patrón al considerar las configuraciones que las conforman. Como resultado del análisis tenemos que el tipo de configuración que se propone en el texto de COBACH es empírica.

En las configuraciones empíricas se parte de una situación problema 5la cual juega un papel central en la configuración, puesto que partir de ella se construyen los conocimientos, esto es, el conocimiento matemático emerge como producto de la actividad de resolución de problemas. De entrada el tipo de configuración nos permite comprender mejor el tipo de prácticas y competencias que se promueven en el texto, las cuales serán descritas más detalladamente en el siguiente apartado.

Al mismo tiempo el tipo de configuración está ligada a la noción de enseñanza que se está promoviendo con el manejo de este texto, así como los procesos de aprendizaje. Con este texto el personaje central es el estudiante y el papel del profesor consiste en supervisar la actividad del estudiante y guiar la actividad con el propósito de no perder de vista el objetivo, para posteriormente formalizar los conocimientos. Mediante las actividades planteadas el estudiante entra en contacto con los diferentes objetos primarios, tomando en consideración conceptos intervinientes para diseñar procedimientos que le permitan resolver el problema, inconscientemente en este proceso emergerán una diversidad de objetos que después se formalizarán, logrando alcanzar el objetivo de la actividad.

La dinámica propuesta anteriormente guarda una estrecha relación con el enfoque que propone la RIEMS,, ya que la figura del profesor es removida del centro, considerando al estudiante como el actor principal en el proceso de aprendizaje, con lo cual se acerca al alumno a los desempeños terminales que busca alcanzar.

Para el caso de C.B.T.i.s. y CECyTES se proponen configuraciones formales, es decir, al considerar de manera global las trayectorias de estas instituciones podemos relacionar las configuraciones que se construyeron en el análisis con las del tipo intra-matemático, aun cuando se trata de dos textos diferentes. El identificar el papel que juega la situación problema dentro de la configuración, es lo que da pie a esta clasificación, ya que en ambos casos se utilizan para reforzar los conceptos o procedimientos.

En este tipo de configuraciones se parte de conceptos o procedimientos los cuales se presentan formalmente en el texto, tal fue el caso de C.B.T.i.s. a lo largo del tratamiento de la trayectoria, sin embargo en el texto de CECyTES en algunas configuraciones se enunciaban los conceptos y procedimientos, mientras que en otras se solicitaba como tarea que el estudiante los investigara. En ambos casos después de presentar estos objetos se resolvían ejemplos o se planteaban problemas con el propósito de reforzar dichos conocimientos.

Tomando en consideración la estructura de estos textos, podemos identificar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se están promoviendo. Primeramente el docente tiene la tarea de explicar los conceptos o procedimientos que aparecen al inicio de la configuración, si es necesario mediante la introducción de ejemplos; posteriormente solicitará al estudiante la resolución de los ejercicios o problemas propuestos en el texto. Se podría considerar que en aquellos casos en los que el estudiante investiga los conceptos es él quien construye el conocimiento y que no es necesaria la intervención del profesor, sin embargo, si se busca homogeneizar los conocimientos, el docente se verá obligado a intervenir retomando los productos de las investigaciones de los estudiantes para después continuar con el proceso descrito anteriormente.

En esta dinámica podemos identificar el estilo clásico empleado en los procesos de enseñanza de los profesores de matemáticas, sin embargo no es lo que propone la RIEMS, ya que esta estructura no permitirá el desarrollo de algunas competencias, en particular la relacionada con la resolución de problemas, pasando por alto los objetivos propuestos en el MCC.

Como una primera conclusión tenemos que los textos de tres instituciones de bachillerato promueven diferentes concepciones de la matemática, así como diferentes procesos de enseñanza y de aprendizaje, incluso cuando todos ellos establecen en el discurso, estar elaborados bajo un mismo enfoque.

b) Las preguntas de investigación

Después de haber analizado por separado el caso de cada institución, estamos en posición para responder la pregunta de investigación. Retomaremos las preguntas auxiliares y cerraremos este apartado con la pregunta central de este trabajo.

Primera pregunta auxiliar

Con relación al conocimiento algebraico, ¿Cuáles son las prácticas institucionales promovidas en los programas y textos del bachillerato?

Para dar respuesta a esta pregunta consideraremos cada una de las instituciones por separado, sin embargo primeramente es importante recordar a qué se refiere el planteamiento de la pregunta. Las prácticas consisten en identificar las acciones encaminadas a resolver situaciones problema. Dichas prácticas se concretan en los procesos, ya que cada uno de estos relaciona los diferentes objetos intervinientes y emergentes en la configuración mediante diferentes acciones. Por esta razón, los procesos que intervienen en las configuraciones son un indicador útil para identificar las prácticas que se promueven.

En cada una de las instituciones se enlistarán primeramente los procesos que se promueven en cada una de las trayectorias; a partir de esto se describirán el tipo de prácticas que está promoviendo la institución. Al tratarse de contenidos relativos al álgebra, dichas prácticas estarán en términos del conocimiento algebraico.

COBACH

Los procesos que se presentan con mayor frecuencia en esta institución son los siguientes:

- Significación
- Representación
- Personalización
- Institucionalización
- Particularización
- Generalización
- Argumentación
- Algoritmización
- Enunciación
- Comunicación

La variedad que se presenta en este texto nos permite señalar la diversidad de prácticas que la institución está promoviendo. Considerando cada uno de estos procesos, procederemos a exponer de manera resumida las prácticas que promueve la institución. Éstas son:

- Se espera que el estudiante sea capaz de expresar mediante el lenguaje verbal las características de diferentes objetos matemáticos, particularmente los que se representan mediante expresiones algebraicas.
- La institución promueve el manejo de expresiones algebraicas y analíticas para representar objetos cuyas características se hacen explícitas mediante el lenguaje verbal.
- Se espera que el estudiante resuelva problemas no triviales relativos al álgebra, y para ello sugiere descomponer los problemas complejos en tareas más sencillas que le permiten llegar a resolver el problema.
- Se propone la formalización de los conocimientos una vez que el estudiante ha tenido la oportunidad de construirlos mediante diversas actividades.
- La institución promueve la consideración de casos particulares que permitan al estudiante reconocer el comportamiento de una situación y a partir de esto llegar a la generalización.
- La generalización en sí misma es una de las prácticas que se promueven.

- Se espera que el estudiante justifique los procedimientos empleados en la resolución de problemas.
- Se promueve la solución de problemas mediante algoritmos, cuando esto se requiera.
- La institución promueve en los estudiantes la descripción de características y relaciones entre diferentes objetos matemáticos.
- Se considera parte fundamental que los estudiantes sean capaces de comunicar los procedimientos empleados en la solución de un problema, además de dar a conocer entre sus compañeros su opinión con relación a diferentes situaciones.

De manera general podemos concluir que el tipo de prácticas que promueve la institución son muy ricas y consideran aspectos muy importantes relacionados con el conocimiento algebraico, tales como la identificación de variables, la representación y la generalización. Sin embargo también se están considerando cuestiones relacionadas con el carácter tales como la justificación y exteriorización de los pensamientos y opiniones personales al trabajar en equipo. Esta gama amplia de prácticas que está promoviendo la institución, consolidan la formación matemática y personal de los estudiantes.

C.B.T.i.s.

En el caso de esta institución los procesos que se presentan con mayor frecuencia son los siguientes:

- Enunciación
- Significación
- Algoritmización

En torno a los procesos anteriores tenemos la identificación de las siguientes prácticas institucionales:

- La institución se propone como tarea el describir las características y relaciones entre diferentes objetos matemáticos, particularmente entre conceptos relacionados con el álgebra.

- Se espera que el estudiante sea capaz de identificar la relación existente entre los objetos matemáticos, (representados algebraicamente), y la expresión mediante el lenguaje verbal, así como sus características.
- Se promueve la solución de problemas mediante algoritmos, cuando esto se requiera.

Esta institución busca un aprendizaje mediante una estrategia que promueve el análisis de ejemplos resueltos, por lo cual el papel que juega el estudiante consiste en interpretar la información y dar sentido a las expresiones que se presentan en el texto. También es necesario que realice cálculos aritméticos cuando está interpretando los procedimientos empleados en la resolución de problemas, por lo cual el proceso de algoritmización aparece con frecuencia en las configuraciones.

De manera general concluimos que las prácticas que promueve la institución están dirigidas a la interpretación de contenidos a partir de los cuales se espera la solución de ejercicios de reproducción. Las prácticas que está promoviendo la institución, consolidan la formación matemática en los aspectos relativos a la estructura ya que es uno de los puntos que se toman en consideración en el diseño del texto.

CECyTES

En el tercer caso de estudio los procesos que se presentan con mayor frecuencia son los siguientes:

- Significación
- Representación
- Algoritmización
- Comunicación

Los cuales implican que se promuevan las prácticas que se enlistan a continuación:

- Se espera que el estudiante sea capaz de expresar mediante el lenguaje verbal las características de diferentes objetos matemáticos, en particular los relativos al álgebra.

- La institución promueve el manejo de expresiones algebraicas y analíticas para representar objetos cuyas características se hacen explícitas mediante el lenguaje verbal.
- Se promueve la solución de problemas mediante algoritmos, cuando se requiera.
- Se considera importante que los estudiantes sean capaces de comunicar los procedimientos empleados en la solución de un problema, además de dar a conocer entre sus compañeros su opinión con relación a diferentes situaciones.

Las actividades que se plantean no permiten que intervengan otros procesos que darían lugar a prácticas relacionadas con la construcción del conocimiento, tales como la personalización de tareas y posteriormente la formalización. Por otro lado no hay una componente fuerte en cuanto a la estructura del contenido matemático ya que las actividades se centran en los aspectos procedimentales.

En cuanto al conocimiento algebraico las prácticas que se promueven son las relacionadas con la parte procedimental y la manipulación de las expresiones, además se consideran algunos aspectos relacionados con la formación personal del alumno, ya que muchas de las actividades están propuestas para ser realizadas por equipos. Al intervenir para dar a conocer su opinión el estudiante aprende a defender su postura y estructurar sus ideas para presentar una propuesta coherente de acuerdo a los problemas planteados.

Retomando las prácticas que se promueven en las instituciones se distingue una gran diferencia, lo cual no es sorprendente ya que en el apartado previo se especificó el tipo de configuración que se tenía para cada caso. Este aspecto no solamente influye en la concepción de matemática, procesos de enseñanza y de aprendizaje, sino que además también está relacionado con el tipo de prácticas que se promueven.

Observamos que en las configuraciones empíricas se desprenden una diversidad de prácticas mientras que en la formal aparecen menos, estos aspectos también estarán relacionados con las competencias y los aspectos que se desarrollan en las mismas tal como lo veremos en seguida.

Segunda pregunta auxiliar

¿Cómo se relacionan las prácticas institucionales que se desprenden de los planes, programas y textos del bachillerato con la versión de competencias que se está promoviendo?

En cada uno de los análisis se establece la relación de los objetos, prácticas y procesos con los atributos de las competencias y de acuerdo a los atributos que se desarrollan podemos identificar la versión de competencias que se promueve para cada institución.

Identificar los atributos correspondientes a las configuraciones permitió determinar cuáles eran los que aparecían con menor frecuencia, y considerando esto se señalan algunos aspectos de la competencia que no se están promoviendo en el apartado analizado. Dichos aspectos se hacen explícitos en la sección correspondiente al resumen de atributos y competencias de cada institución.

Cabe aclarar que el desarrollo de competencias se considera como un desempeño terminal, y de acuerdo a esto, es necesario que el estudiante finalice sus estudios de bachillerato para desarrollar la totalidad de las competencias, por lo cual es entendible que algunas competencias no se desarrollen en este curso, particularmente las relacionadas con aspectos estadísticos y geométricos. La ausencia de algunos atributos en las configuraciones solamente es un indicador de los aspectos de la competencia que no se están promoviendo en las secciones analizadas. De ninguna manera refleja las competencias que se promueven o no en el bachillerato.

En las tres instituciones se identifican atributos en siete de las ocho competencias disciplinares que establece la RIEMS, sin embargo considerando la frecuencia con la que aparecen en las configuraciones, se enunciarán para cada caso cuáles fueron las competencias que más se promueven.

Es importante aclarar que uno de los aspectos que no se promueve en las actividades es el relacionado al manejo de tecnologías en la resolución de problemas o para obtener y procesar información; este aspecto es común a las tres instituciones que se consideraron para el estudio.

COBACH

En el módulo de aprendizaje de esta institución, en la parte seleccionada para realizar el análisis, las competencias que se promueven al realizar las actividades son las siguientes (en ese orden):

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

En este caso se trata de cinco competencias que se están promoviendo, las cuales nos permiten destacar varios aspectos importantes. Primeramente al comparar este resultado con el programa de la asignatura, tenemos que no se corresponden, ya que en el programa se señala que serán las competencias 1, 2, 3, 5 y 8 y en el texto no se promueve la competencia 5 pero considera una más: la competencia 4.

Tomar en cuenta la competencia 4 implica además de explicar los resultados, que la institución promueve el desarrollo de atributos relativos a la argumentación de sus respuestas, es decir se le está abonando a una competencia que de acuerdo al plan no se consideraba para esta asignatura en particular, pero es muy importante en el campo de las matemáticas.

Esta institución es la que promueve más competencias y en gran parte se debe a la estructura que se propone en el texto y las configuraciones tipo que se identificaron en el análisis. Es en el único caso donde se consideran competencias relacionadas con la explicación y argumentación. Además para la competencia 2, relacionada con la resolución de problemas, se promueven la mayoría de los atributos y en la trayectoria se observó el papel que se le otorga a la situación problema al ser ésta la que motiva la construcción del conocimiento.

Podemos afirmar que las decisiones que ha tomado la institución en respuesta a la exigencia de la reforma, se corresponden de manera positiva ya que vemos como mediante el uso de este texto, se promueve el desarrollo de la mayoría de las competencias que establece el MCC.

Aquellas competencias que no aparecen como producto del análisis solamente nos indican que en esta sección del módulo no se están desarrollando, sin embargo existe la posibilidad de que se promuevan en otros bloques, si el texto conserva esta estructura y toma en consideración otros contenidos de la matemática además del álgebra.

C.B.T.i.s.

El texto de esta institución promueve las siguientes competencias:

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

Al considerar las competencias que se están promoviendo en el texto no tenemos con qué compararlas con relación al programa de la DGETI, ya que dicho programa no establece las competencias que se van a desarrollar en cada uno de los cursos. Se habla de manera general de las competencias disciplinares y genéricas pero no se señala en particular una distribución como la que presenta la DGB. Por lo que podría ser suficiente para el programa que en esta asignatura se desarrollen estas competencias.

Con relación a lo que promueve la institución previa, observamos que el texto empleado por C.B.T.i.s. no promueve el desarrollo de la mayoría de las competencias y los aspectos que sí se consideran son los relacionadas con la interpretación. Aunque la competencia 1 establece la construcción e interpretación de modelos, la institución sólo promueve los atributos relacionados con la interpretación.

Las competencias que se promueven por esta institución están ligadas a la estructura que se propone en el texto y las configuraciones de tipo formal que se identificaron en el análisis. En este tipo de configuraciones los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen como figura central al profesor, el cual explica los conceptos y solicita una serie de ejercicios a los alumnos. En este sentido la competencia relacionada con la resolución de problemas no se promueve, ya que las situaciones que se plantean son generalmente ejemplos y ejercicios. Además el estudiante recurrirá a la aprobación por parte del profesor en lugar de verificar su resultado o justificar su respuesta, por lo que las competencias relacionadas con estos aspectos se dejan de lado.

Las decisiones que ha tomado la institución en respuesta a los planteamientos de la reforma, particularmente en lo que se refiere al MCC, dejan mucho que desear ya que mediante el uso de este texto, se promueve el desarrollo de algunas competencias solamente. La razón principal se debe a que la institución establece contar con un enfoque por competencias previo a la reforma, bajo el cual diseñó el texto, por lo cual es probable que este enfoque no sea equivalente a lo que plantea la RIEMS.

También es importante señalar que algunos aspectos que surgen a partir del análisis es la identificación de errores en el texto, en este caso el tipo de errores que encontramos está relacionado con la concepción misma de la matemática y en determinado momento puede provocar concepciones erróneas en los estudiantes.

CECyTES

Esta institución guarda una estrecha relación con el anterior, es así que las competencias que se promueven son casi las mismas:

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

Esta institución también se apega a los lineamientos de la DGETI, sin embargo aunque en dicho programa no establecen las competencias que se van a desarrollar en cada uno de los cursos, en el texto se hace una descripción de las competencias que se busca promover con las actividades propuestas. Las cinco competencias que se señalan son las siguientes: 2, 3, 4, 5 y 6.

De las cinco competencias vemos que solamente una de ellas se está desarrollando en el texto, la número 2, relacionada con la resolución de problemas, mientras que las otras competencias que sí se desarrollan no se habían considerado en el texto.

Algunos aspectos que cabe resaltar es que no se había considerado la competencia relacionada con la interpretación, siendo ésta la primera competencia que se desarrolla al analizar situaciones, leer textos u observar tablas que utilicen expresiones matemáticas. Además se trata de un curso de Álgebra, el cual debería incluir la construcción e interpretación de modelos, sin embargo en el caso del texto de CECyTES solamente se promueve la interpretación.

Nuevamente podemos afirmar que las competencias que se promueven por esta institución están ligadas a la estructura que se propone en el texto y las configuraciones de tipo formal que se identificaron en el análisis. En estas trayectorias se observa la importancia que se le da a la parte interpretativa y por lo tanto las competencias que van ligadas son las relacionadas con estos aspectos. En cuanto a la competencia de resolución de problemas es importante señalar que el tipo de problemas que se plantean en este texto incluyen un gran número de situaciones repetitivas y ejercicios, a diferencia del texto de COBACH, que también promueve esta competencia y considera situaciones más complejas.

Pregunta de investigación

¿Qué competencias matemáticas específicas del álgebra, se están desarrollando y cómo se promueven en algunas instituciones de educación media superior del Estado de Sonora?

El análisis que se realizó nos permite identificar el desarrollo de diferentes competencias disciplinares en los contenidos que se consideraron en cada institución, y en el resumen posterior a cada trayectoria se especifican en qué medida se promueven; sin embargo esto no responde la pregunta de investigación.

La respuesta que buscamos con esta pregunta va más allá de establecer una lista de competencias por institución, lo que se busca es un análisis más profundo de la situación en la que se encuentra cada bachillerato.

Hemos mencionado que actualmente está vigente en nuestro país la RIEMS, uno de sus ejes es el establecimiento de un Marco Curricular Común basado en el desarrollo de competencias, en lugar de centrarse en la formulación de un plan de estudios único. Para todas las instituciones se establece la misma definición de competencias, declarándose una serie de competencias genéricas y disciplinares comunes a todos los subsistemas, independientemente de la modalidad de bachillerato.

A pesar de lo anterior, nuestro estudio nos da evidencias de que, considerando tres instituciones que se rigen bajo la misma reforma, situándonos en un mismo curso, (álgebra), todas ellas promueven una noción de competencias diferente, concepciones distintas de la matemática, particularmente del álgebra, procesos de enseñanza y aprendizaje diferentes.

El tener tres instituciones que promueven diferentes aspectos de las competencias disciplinares nos permite concluir lo siguiente en cuanto a las competencias matemáticas de cada institución:

Con relación al álgebra, COBACH promueve en los estudiantes aquellas competencias relacionadas con el pensamiento algebraico, tomando como aspecto central el paso que se da al partir de situaciones que se pueden considerar como casos particulares, pero que al generalizarlas se pueden representar con un modelo. C.B.T.i.s. y CECyTES presentan al álgebra como un lenguaje, promoviendo en los estudiantes las competencias matemáticas relativas al paso del lenguaje verbal al algebraico y viceversa.

La forma en que se promueven dichas competencias guarda estrecha relación con la estructura del texto. En COBACH se promueven las competencias mediante la resolución de diversas actividades, trabajo individual, por equipos y grupal, donde el docente interviene para asegurarse de que las actividades se realicen y formalizar los conocimientos en el cierre. Su propósito de acuerdo a lo que el texto promueve en las actividades, consiste en crear ambientes de aprendizaje, guiar discusiones, retomar las opiniones de los estudiantes y de esta forma llevar a cabo el proceso de institucionalización.

En la segunda institución el profesor sigue siendo el actor principal, ya que se le deja a él la tarea de ejemplificar a los estudiantes los conceptos emergentes, es decir, este enfoque sigue promoviendo la enseñanza tradicional. Aunque en el texto no se le indique al profesor las acciones que debe realizar, se han identificado el tipo de prácticas que aparecen en las configuraciones, las cuales se corresponden con las acciones aquí descritas.

Por último la tercera institución tiene la intención de promover las competencias como se plantean en la reforma, sin embargo el realizar investigaciones y realizar trabajos extra clase que impliquen la definición de diferentes objetos matemáticos, puede desviar el enfoque o dar lugar a concepciones erróneas ya que el profesor no está presente para asegurarse que el estudiante realmente realice las actividades como se propone el texto. En este caso, se sugiere implícitamente que el profesor lleve a cabo el proceso de enseñanza con un enfoque tradicional, ya que en general el inicio de las actividades consiste en la definición de conceptos y procedimientos.

Con este análisis pudimos identificar las competencias que cada institución está promoviendo y así describir aspectos más generales como las implicaciones que tienen las percepciones de tres instituciones que se rigen bajo la misma reforma.

Desde esta perspectiva tenemos que aunque en el discurso se ha asumido el enfoque por competencias, las instituciones aún no han logrado concretar lo que se establece en la RIEMS, particularmente en el MCC. Asumimos que esto no se debe a que las instituciones no hayan realizado acciones dirigidas a promover el desarrollo de competencias en los estudiantes, sino a una visión y concepción de competencias que desde nuestro punto de vista no se corresponde con lo que se busca.

Un proceso de cambio tan profundo como el propuesto en la RIEMS, específicamente lo relativo al MCC no es fácil de concretar, en especial por aquellas personas e instituciones que no intervinieron en su elaboración. Además al tener tan poca información al respecto y con la restricción de cumplir con un cúmulo de contenidos debido a las exigencias de las instancias escolares superiores, resulta complicado hacer que el enfoque funcione.

Estas afirmaciones se desprenden solamente del análisis realizado en los textos, sería interesante realizar investigación relacionada con otros aspectos de la reforma o que incluyan otro tipo de prácticas como las personales. Esto permitirá tener una visión más amplia sobre lo que está sucediendo en las instituciones, que son las promotoras de los lineamientos de la reforma y a partir de dichas investigaciones proponer acciones que permitan contar con un currículum completo, actualizado y diseñado en beneficio de los estudiantes.

c) Problemas abiertos

Ante cualquier investigación, siempre aparece la necesidad de hacer delimitaciones de diferentes tipos, en algunos casos debido a los recursos con los que se cuenta, en otros a la amplitud de la problemática que se plantea. Estos hechos, que un momento dado pudieran constituirse en restricciones, al final de la investigación se transforman en posibilidades de identificación de otras líneas que pueden seguirse y que nos proporcionarían un panorama amplio del problema general de la investigación. En este sentido se proponen los siguientes problemas:

- ❖ En la práctica ¿el estudiante desarrolla los atributos que se busca promover en los libros de texto?

- ¿Cuál es el uso que el profesor le da al texto para promover el desarrollo de competencias?
- ¿Cuáles son las competencias relativas a otras áreas del conocimiento matemático que se están promoviendo en los textos de bachillerato?

La primera de estas pregunta consistiría en identificar hasta qué punto los atributos ya identificados se corresponden con los que desarrollaría el estudiante si realizara todas las actividades planteadas en los textos que se consideraron para esta investigación. Este aspecto es importante ya que el promover los atributos no garantiza que se van a desarrollar, se tendrían que tomar otro tipo de consideraciones tal como las características de los estudiantes, el ambiente, las condiciones del aula, entre otras.

La segunda problemática arrojaría luz sobre el uso que le da el profesor al libro de texto, particularmente en lo que se refiere a promover el desarrollo de competencias en los estudiantes. Aunque la institución busque promover cierto tipo de prácticas y procesos de enseñanza de cierta naturaleza, el texto por sí sólo no logrará su objetivo si el profesor no le da el uso adecuado.

El último problema que hemos considerado está relacionado con ampliar esta misma investigación a otros contenidos matemáticos, se podría tomar en cuenta la totalidad de contenidos de un solo texto o considerar contenidos en otras asignaturas del bachillerato.

El llevar a cabo investigaciones que den respuesta a estas preguntas nos proporcionaría una perspectiva más completa sobre el problema que consideramos, el cual implica identificar cuáles son las competencias que se promueven en el bachillerato.

d) Consideraciones y reflexiones finales

Al enfrentarse a una problemática un investigador principiante tiene frente a sí una serie de dificultades que se deben afrontar y superar con el propósito de alcanzar el objetivo planteado. En nuestro caso la primera dificultad que enfrentamos consistió en la delimitación del problema, el cual evolucionó hasta tomar la forma que se presenta aquí.

En un principio el estudio estaba centrado en una de las instituciones de bachillerato y originalmente se había considerado además de analizar el programa y texto considerar las prácticas de los profesores. Sin embargo después se tomó la decisión de incluir a otras instituciones con el propósito de tener una visión más amplia sobre lo que ocurre en el bachillerato sonorense. Al incluir otras instituciones la problemática se amplió y por esta razón se decidió realizar la investigación con relación a las prácticas que se promueven en los textos y programas.

Al realizar el análisis los elementos teóricos que se habían considerado eran las nociones de configuraciones de objetos primarios, prácticas y la de significado. Se había propuesto relacionar las prácticas con las configuraciones, sin embargo tuvimos dificultados en relacionarlos directamente. Observamos que las competencias disciplinares estaban descritas de forma muy general y al tomarlas así, no se tenía una imagen clara de las competencias que buscaba promover cada institución. Era necesario definir descriptores de las competencias que proporcionaran elementos para determinar los aspectos de la competencia que se promueven.

Estas inquietudes nos llevaron a considerar la construcción de los atributos, los cuales permitieron relacionar los aspectos teóricos con la noción de competencias disciplinares planteadas en el MCC. La construcción incluye un aporte personal en el cual se consideró un trabajo similar que se había realizado en torno a atributos de las competencias. Se retomó la propuesta de Marín, Guzmán y Zapata (2012) que fue enriquecida al considerar aspectos propios de las competencias del álgebra.

Esta propuesta, además de posibilitarnos ligar a las competencias con los elementos teóricos, también podría considerarse en otros trabajos como una forma de concreción de la promoción de las competencias. Además puede emplearse como un recurso que permite evaluar competencias al contar con descriptores de la competencia general.

Después de esto se procedió a la elaboración de la trayectoria epistémica de uno de los textos y en este análisis se observó un faltante teórico para complementar los aspectos que ya se habían identificado en las configuraciones con los atributos de las competencias disciplinares. Al reconocer este faltante se tomó la decisión de incluir la noción de proceso en el análisis, ya que cada uno de éstos se correspondía con los atributos, lo cual permitió finalizar el análisis de las trayectorias epistémicas.

Todo este proceso y las situaciones que se presentaron dieron como resultado un enriquecimiento en el conocimiento que ya se tenía sobre la teoría, en particular al realizar el análisis de los textos, dando como resultado una visión más completa del trabajo de investigación que realiza un matemático educativo.

Con la investigación se ponen en práctica los conocimientos que se construyen en los cursos, sin embargo las nociones teóricas se interiorizan cuando se emplean en los análisis que se realizan. Además el enfrentarse a este tipo de problemáticas relacionadas con la educación, tiene como consecuencia un efecto en la práctica docente.

Personalmente al realizar los análisis pude darme cuenta de aspectos que de otra manera pasan desapercibidos, tales como las prácticas que permitirán el desarrollo de las competencias en los estudiantes. Por otro lado me permitió reflexionar en mi práctica como profesor y en los ambientes de enseñanza y de aprendizaje que estoy promoviendo cuando estoy en el aula.

Esta investigación me permitirá redireccionar las acciones que he realizado que no necesariamente se corresponden con el enfoque por competencias y al considerar el trabajo colectivo por academias poder influir en mis compañeros de forma positiva. Sin embargo el producto más significativo de este trabajo, es la transformación que pasé en cuanto a mi visión de la realidad escolar, particularmente en lo que se refiere a la matemática. Cada situación que enfrente podrá ser vista en términos de un marco teórico y a partir de ello realizar análisis y reflexiones en beneficio de la comunidad educativa.

Referencias bibliográficas

Acuerdo Secretarial No. 442. (2008). *Por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. México: DOF.

Acuerdo Secretarial No. 444. (2008). *Por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común.* México: DOF.

Acuerdo Secretarial No. 653. (2008). *Por el que se establece el Plan de Estudios del Bachillerato Tecnológico*. México: DOF.

Cabrera, L. M. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato.* Tesis de maestría. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Chamorro, M. del C. (2006). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. España: Pearson Educación.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. (2012). *Manual de organización y funcionamiento del consejo académico y de las academias*. Obtenido el 2 de Julio de 2014 en: http://www.cobachsonora.edu.mx:8086/portalcobach/pdf/Docentes/manual_academias_2012.pdf

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(3), pp. 327-342.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educ. Mat. Pesqui.* 8(1), pp. 67-98.

Gimeno Sacristán, J., Feito Alonso, R., Perrenoud, P. y Clemente Linuesa, M. (2011). *Diseño, desarrollo e innovación del currículum.* Madrid: Ediciones Morata.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font (2009). *Un Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Obtenida el 21 de Mayo de 2014 en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de Matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*. 22(3), 389–408.

Maldonado, M. R., Rodríguez, M. T. de J., y Tuyub, J. C. (2009). *Un estudio sobre el discurso en los libros de texto de Matemáticas. Su relación con la práctica escolar*. Tesis de licenciatura. Universidad Autónoma de Yucatán.

Marín, R., Guzmán, I. y Zapata, M. (2012). La construcción de atributos. Una propuesta pedagógica viable en la evaluación de competencias matemáticas. Obtenida el 30 de Marzo de 2015 en: http://cie.uach.mx/cd/docs/area_01/a1p30.pdf

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Moreno, G. A. y Grijalva, A. (2013). *Evaluación del desarrollo de competencias en el bachillerato. Un estudio con situaciones que involucran la integral de una función.* En Flores R. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 26 (pp. 645-652). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

OCDE. (2006). *Education at a Glance 2006. Highlights.* Paris: OCDE.

Osorio, J. M. (2013). *Programas de estudio. Matemáticas 1*. México: DGB/DCA.

Perdomo, I. C. (2013). La competencia matemática comunicar. *Amazonia Investiga,* 2(3), 68-82.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar. Invitación al viaje*. Barcelona: Graó.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra, in: Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Marja van den Hueuvel-Panhuizen (ed.), Freudental Institute, Utrecht University, The Netherlands, Vol.4, pp.81-88.

Ramírez, A. (2009). *La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria.* Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona.

Rubio, N. V. (2012) *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberria, J. y Sarasúa, J. (2013). Los libros de texto del bachillerato en el periodo de 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 16 (2), 245-276.

Sada, M. T. (2005). *Álgebra*. México: Departamento de Libros de Texto, FCE.

Secretaría de Educación Pública. (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Matemáticas 1. Serie: Programas de estudio.* México: SEP.

Secretaría de Educación y Cultura. (2014). Inicio de Cursos 2013-2014 por sostenimiento. Obtenida el 2 de Julio de 2014, de: http://148.235.6.240/upeo/imagen/documentos/Inicio%202013%20-%202014.pdf

Secretaría de Educación y Cultura. (2015). Inicio de Cursos 2014-2015 por sostenimiento. Obtenida el 29 de Mayo de 2015, de: http://148.235.6.240/upeo/imagen/documentos/Inicio%202014%20-%202015.pdf

Socas, M. (2011) La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*. (77), 5-34.

Stenhouse L. (2003) Aportes de L. Stenhouse a la reflexión sobre curriculum. *Reflexiones Pedagógicas,* (21), 28-37.

Trujillo, E. (2011), *Caracterización del significado institucional de referencia de la teoría de conjuntos en el colegio de bachilleres del Estado de Sonora*. Tesis de maestría. Universidad de Sonora.

Valencia, M., Valenzuela, I. y González, R. (2009). *Álgebra*. Hermosillo: CECyTES.

Valenzuela, A. L. (2010). Carta Descriptiva de Matemáticas 1. México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Vargas, J., Rodríguez, M., del Castillo, A., Villalva, M., Ibarra, S., Grijalva, A.,…, Bravo, J. (2014). *Matemáticas 1*. Hermosillo: COBACH.