EL SABER DE MIS HIJOS
HARÁ MI GRANDEZA

Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas.
Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

El concepto de Variable: Su evolución histórica y su caracterización en textos, con profesores y estudiantes.

T E S I S

Que para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias
Con Especialidad en Matemática Educativa
PRESENTA:
LINA MORALES PERAL.

Director de Tesis:
Dr. José Luis Díaz Gómez.

Hermosillo, Sonora, Diciembre de 2005

A mi padre, sr. Miguel Morales Delgadillo, que en espíritu ha sabido transmitirme su fuerza
A mi madre, sra. Luz Alicia Peral de Morales, por su amor y apoyo incondicional
A mis hijos, Emet Zaid y Michelle Deneb, por su comprensión y ser mi razón de vivir

A todos ellos, sin lugar a dudas, muchas gracias por su amor, apoyo y motivación, reciban mil bendiciones y ojalá la vida, me permita compensarles todos los sacrificios que hicieron para que yo pudiera terminar con éxito

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis compañeros del programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora que juntos logramos salir adelante en nuestras asignaturas.

A todos aquellos que directa o indirectamente facilitaron el desarrollo del trabajo de tesis.

A los miembros del Comité Revisor que siempre han estado abiertos a mis preguntas y dispuestos a ofrecerme su ayuda. A la MC Martha Cristina Villalba y Gutiérrez, por su orientación en muchas de las tantas cosas que hubo que hacer y por sus oportunas sugerencias y correcciones.

Al MC Jorge Ruperto Vargas Castro por el apoyo incondicional que siempre me prestó durante todas las etapas de esta investigación; al Dr. Salvador Moreno Guzmán por la culminación de este trabajo.

Muy especialmente a mi director de tesis el Dr. José Luis Díaz Gómez, mi agradecimiento, respeto y admiración, por su acertada dirección en este trabajo de tesis, por el apoyo mostrado no sólo durante el transcurso de la tesis, sino durante todo el trayecto del programa y por ser, además de mi maestro, sobre todo mi amigo

Gracias, muchas gracias por todo y a todos

CONTENIDO

Introducción

Actualmente nuestro sistema educativo se enfrenta a diversos problemas, uno de los cuales es el de la enseñanza de las matemáticas y actualmente objeto de atención por parte de investigadores en Matemática Educativa. Para los profesores en general y en particular para los de matemáticas, resulta extremadamente importante tratar de indagar en torno a cómo se generan en unos y en otros de nuestros estudiantes las ideas o conceptos matemáticos.

Sabemos que existe gran dificultad entre los estudiantes por asimilar conceptos clave, necesarios para su formación profesional. Algunos de estos conceptos son: variable, función, derivabilidad, límites, aproximación de áreas por medio de sumas. Una de las causas importantes de las dificultades a las que se enfrentan muchos alumnos está en nuestra concepción misma de lo que son las matemáticas y de cómo se aprenden, es decir, no basta saber matemáticas, es necesario saber enseñarlas, por lo que se necesita preparación pedagógica y didáctica para el maestro.

Para esto es necesario favorecer la discusión sobre el qué enseñar y no sólo sobre el cómo enseñar. Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, tradicionalmente los cursos de precálculo (o de preparación al análisis) se conforman por un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis, por ejemplo, el estudio del concepto de función. Su enseñanza tiende a sobrevalorar los aspectos analíticos y los procedimientos algorítmicos, dejando de lado a los argumentos visuales o a los enfoques numéricos, por no considerarlos, entre otras causas, como procesos plenamente matemáticos. Es decir, la concepción que de la matemática se tenga se extiende a su vez a la de su enseñanza, independientemente de los estudiantes a los que ésta se dirija.

Por esto, la motivación inicial para este trabajo de investigación nace de la problemática, observada empíricamente desde una práctica pedagógica y aprovechando la experiencia profesional como docente, del paso de la aritmética al álgebra en el ámbito escolar. La existencia de dicha problemática es evidenciada por el estudio de algunas investigaciones (Kieran, Rosnick, Rojano, Ursini, Trigueros, Wagner, etc.) que han abordado como objeto de estudio los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra en secundaria, el álgebra y su lenguaje, el simbolismo algebraico, etc. Como resultado de éstas se ratifica la existencia de dificultades u obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra escolar.

La experiencia de años de trabajo en el aula, enseñando varios cursos de matemáticas, nos permite detectar errores e inconsistencias en el conocimiento matemático de los estudiantes, así como varios problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entre los problemas detectados en los estudiantes se encuentra el relacionado con la significación del concepto de variable. El concepto de variable es una de las ideas fundamentales de la matemática. Sin embargo, las investigaciones indican que, efectivamente, los estudiantes experimentan dificultades por el hecho de que al interior de las Matemáticas se utilizan de distintas formas.

Muchos de los errores que los alumnos cometen dejan entrever la presencia de cierta confusión en cuanto a cuáles son las acciones apropiadas a efectuarse en los diferentes contextos en los que aparece la variable: enfrentado a una expresión algebraica, el estudiante a menudo duda si tiene que asignar valores a los símbolos literales que ahí aparecen o calcular su valor; si la letra representa uno o más valores; si tiene que obtener un resultado numérico o una expresión algebraica como solución. Las acciones que hay que efectuar varían dependiendo del papel que desempeña la literal en determinada situación; el no reconocer los diferentes usos de las literales conduce a los estudiantes a un mal desempeño en los cursos de la matemática universitaria.

Asimismo, se ha mostrado que muchos estudiantes no entienden la naturaleza arbitraria de las variables literales matemáticas. En particular, tienden a creer que diferentes letras utilizadas en el mismo contexto representan diferentes valores. Por ejemplo, estudiantes que ya han cursado Álgebra parecen no darse cuenta que el cambiar la incógnita en una ecuación no afecta la solución de la ecuación. Cabe mencionar que el análisis del concepto de variable, tanto en el lenguaje ordinario como en el matemático, brinda mayores armas al maestro para la comprensión de este elemento fundamental de la matemática.

Así, las dificultades que los alumnos tienen para alcanzar un manejo adecuado del concepto de variable, sugieren la búsqueda de alternativas didácticas que propicien la formación de este concepto. Creemos firmemente que la enseñanza de los conceptos matemáticos, a cualquier nivel de profundidad, puede mejorarse u obstruirse mediante métodos de enseñanza que sólo produzcan en el estudiante una concepción de las matemáticas como algo compuesto de fórmulas y técnicas incomprensibles, laboriosas e inservibles (Cuevas, 1998). Desafortunadamente, esta última concepción es, hoy en día, un caso común en nuestra educación, al menos en los niveles medio y medio superior.

En este trabajo se estudian algunas de las dificultades que se presentan con el concepto de variable algebraica y sus distintos usos en estudiantes universitarios de ciencias e ingeniería. Básicamente, la investigación se realiza en el área de Ciencias Exactas y Naturales en los cursos de Álgebra, donde los alumnos ya tienen conocimiento de representaciones gráficas, de manipulación algebraica de expresiones y de construcción de tablas para la graficación. Esta investigación está distribuida en la siguiente forma:

En el Capítulo 1 analizamos la problemática del concepto de variable, cómo se enseña y utiliza actualmente en diferentes ámbitos y las diferencias que existen entre estos usos, para lo cual tratamos diversos puntos: (1) las variables en el álgebra escolar; (2) las variables en la matemática; (3) las variables en la ciencia, (4) Las variables en los sistemas algebraicos computacionales. En este mismo capítulo estudiamos algunas investigaciones que nos servirán como marco teórico para nuestro trabajo.

Por otro lado, ya que la manera en que se maneja actualmente el concepto de variable es un objeto muy elaborado, uno de los aspectos importantes que se debe considerar para entenderlo es el proceso mediante el cual se llegó a su forma actual. Tener claridad sobre este proceso ubica al problema de su enseñanza en una dimensión más exacta, lo cual impide el tratar de dar a este problema una solución trivial. Por ello, en el capítulo 2 se bosqueja brevemente el desarrollo histórico del concepto de variable,

En el capítulo 2 vemos que la introducción de símbolos para las variables es una culminación de un largo proceso histórico que fue el punto de partida para nuevas disciplinas. En el desarrollo histórico de la variable, sus diferentes usos se desarrollaron como diferentes conceptos que más tarde fueron integrados y generalizados de manera que pudieran usarse en diferentes áreas de las matemáticas. Actualmente, el término genérico “variable” incluye las nociones de incógnita específica, número general, variables en relación funcional y otros. Por lo tanto el término variable se usa hoy como un concepto polisémico.

La riqueza conceptual de la noción de variable se pierde cuando en el capítulo 3 analizamos los textos y la forma como se introduce este concepto en la escuela. El papel desempeñado por los textos como mediadores en el desarrollo del currículum, la articulación de la enseñanza y el propio proceso de aprendizaje, exige incorporar paulatinamente en su elaboración el nuevo conocimiento que se va generando en el campo de la Educación Matemática. En este capítulo realizamos un análisis del enfoque y los usos con el que presenta el concepto de variable en los textos de varios niveles escolares y los comparamos con la definición personal de estudiantes y profesores.

Un breve análisis del currículo a nivel superior y los textos indica que los aspectos más frecuentemente usados de la variable son la incógnita específica, el número general y variables en relación funcional. Generalmente son tratados como facetas de un único concepto de variable pero sin enfatizar explícitamente sobre estos diferentes usos. Basados en estos antecedentes y nuestra experiencia como profesores, consideramos los tres usos de variable mencionados antes, así como también algunos aspectos básicos que caracterizan cada uno de estos usos.

Por otro lado, como parte del proceso de enseñanza, consideramos a los profesores que imparten los cursos de matemáticas. Por supuesto que la manera como se tratan los distintos usos de la variable en los cursos, es decir, la forma en que abordan los profesores este concepto influye en cierta medida en las dificultades que experimentan los estudiantes con su concepción propia de la variable. En otras palabras, consideramos que estas dificultades están fuertemente influidas por las prácticas docentes, el contenido de los cursos y la manera de abordar los textos este concepto.

En el Capítulo 4, a diferencia de otras investigaciones, analizamos el concepto de variable con estudiantes universitarios de segundo semestre y que ya han pasado por un filtro matemático como lo es el primer semestre del tronco común de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora, semestre en el cual se espera que adquieran una madurez matemática y una mayor responsabilidad como estudiantes universitarios. Los estudiantes en el primer semestre cursan las materias de Cálculo Diferencial e Integral I, Geometría Analítica y Algebra Superior, por lo que se espera que tengan un mejor manejo y comprensión del concepto de variable; los estudiantes al avanzar en sus cursos ven una variable primero como una letra, luego como una operación, después como una expresión algebraica, como un proceso y finalmente como un objeto; pero no todos logran llegar hasta este nivel.

Así pues, en este capítulo estudiamos la significación que tienen de la noción de variable los estudiantes de un segundo semestre del tronco común de Ciencias e Ingeniería, analizaremos los resultados y después aplicaremos una serie de actividades para estudiar si los estudiantes cambian su comprensión del concepto. Para estudiar la comprensión del concepto de variable por parte de los estudiantes, se utilizó parte del cuestionario diseñado y validado por Ursini y Trigueros (1998).

Esta tesis finaliza con comentarios generales, las referencias bibliográficas consultadas y los Anexos, que incluyen los diversos cuestionarios empleados.

1. Problemática del concepto de variable.

1.1 La Enseñanza de las Matemáticas y el Concepto de Variable.

Las matemáticas han ocupado un lugar muy importante en la escuela desde hace muchos años, tiempo en que el educador se ha enfrentado a diferentes problemas, tanto en la adquisición de su conocimiento como en su instrucción a quien aprende. Actualmente nuestro sistema educativo se enfrenta a diversos problemas, uno de ellos fundamental y de crucial importancia por los problemas que a su vez suscita para el desarrollo de la ciencia y la técnica de nuestro país. Este problema es el de la enseñanza de las matemáticas, el cual actualmente es objeto de atención por parte de investigadores en Matemática Educativa.

Las causas de este problema son muchas y variadas como lo demuestran los distintos artículos que se presentan en revistas de investigación y en congresos de educación matemática, pero un denominador común lo constituye la forma en que se enseñan actualmente las matemáticas. Históricamente se ha observado que, en general, la enseñanza de la matemática no produce los resultados deseados, que no es capaz de suscitar progreso y formar en el estudiante nociones y operaciones nuevas. Incluso, con mucha frecuencia origina un conjunto de ideas confusas que difícilmente asimila y retiene el estudiante, provocando así una serie de dificultades para la correcta comprensión de las nociones y conceptos matemáticos.

Cada vez que nos enfrentamos a una tarea matemática específica: determinar el valor de un algoritmo o generalización dados los valores específicos de sus variables, graficar una función definida en un intervalo de $\mathbb{R}$, estimar el resultado de un cálculo determinado, demostrar un teorema o generalización, etc., percibimos que estamos utilizando diversos procesos, conceptos y generalizaciones (algoritmos, teoremas, propiedades, etc.). Al examinar con más detalle a cada uno de ellos, notamos que su estructura contempla, además de los conectivos y elementos que permiten organizar con sentido la comunicación oral o escrita, la presencia de ciertos sustantivos esenciales que constituyen los nombres para los diferentes conceptos involucrados; de esta manera, pareciera que todas las herramientas matemáticas que podemos utilizar para desempeñarnos frente a las diferentes tareas matemáticas, tendrían como importantes elementos constitutivos estos sustantivos.

Entre las razones por las cuales se argumenta que los estudiantes tienen dificultades y hasta sienten aversión por las Matemáticas, se mencionan factores de tipo cultural, político y psicológico que han causado el fracaso de muchos estudiantes que bien pudieron ser matemáticos, científicos, personas de negocios y programadores de computadoras al término de su educación profesional. Pero así como son completamente válidos estos argumentos, no debemos olvidar la dificultad inherente de las Matemáticas relacionadas con la naturaleza propia de la misma.

Otro aspecto importante que debemos considerar es que el currículum de Matemáticas, desde la escuela elemental hasta la Universidad, sigue una trayectoria de abstracción ascendente. Y a medida que el currículum se torna más abstracto, los términos que se enseñan y los símbolos que se utilizan se vuelven cada vez más oscuros para el estudiante, provocando graves dificultades en su aprendizaje y sobre todo en la comprensión de los conceptos.

La comprensión de cualquier rama de las matemáticas requiere de un manejo completo y profundo de los conceptos algebraicos, particularmente del concepto de variable: un concepto de gran importancia y de difícil comprensión entre los estudiantes. Este concepto es una idea central en las matemáticas de todos los niveles, su comprensión provee la base para la transición de la aritmética al álgebra, y pone los fundamentos para la comprensión de las funciones y toda la matemática avanzada, asimismo es indispensable para la resolución de problemas del mundo real. Es tan importante que su invención constituye un punto de partida en la historia de las matemáticas (Rajaratnan, 1957).

El estudio de la noción de variable y sus distintas interpretaciones es la puerta de acceso a una comprensión de los diferentes mundos del álgebra, a saber: el mundo de las expresiones abiertas, el de las identidades, el de las relaciones funcionales y el de las ecuaciones.

Algunas investigaciones relacionadas con el concepto de variable se han enfocado en la habilidad de los estudiantes para traducir oraciones a expresiones algebraicas y viceversa; los resultados arrojados indican que aún estudiantes que ya han cursado uno o dos semestres de cálculo atraviesan por un período muy difícil con estas traducciones. Es decir, se ha encontrado que los malos entendimientos que tienen los estudiantes alrededor del uso de letras en las ecuaciones contribuyen significativamente para esta dificultad. Las dificultades que los estudiantes tienen en lograr un manejo aceptable de este concepto puede ser la causa de su bajo rendimiento en álgebra y en otras ramas de las matemáticas escolares.

Muchos estudiantes piensan que todas las variables son letras que sustituyen números, pero no es así; aún los valores que toma una literal no siempre son números. Por ejemplo, en geometría a menudo las literales representan puntos como en A, B, C cuando escribimos “si AB=BC, entonces ΔABC es isósceles”; en lógica, las variables p y q a menudo representan proposiciones; en análisis, la variable *f* representa una función; en álgebra lineal la variable A puede ser una matriz o la variable *v* un vector; y en álgebra superior, la variable * puede representar una operación.

El recuerdo de las dificultades que muchos tuvimos y, en ocasiones, aún tenemos, provocan nuestro interés en los problemas asociados con el aprendizaje de las matemáticas, en particular con el concepto de variable y sus usos. Y nos preguntamos: ¿cómo desarrollar en el aula una mejor enseñanza, que permita un aprendizaje más significativo, del concepto de variable, en el estudiante?, ¿de qué manera podemos desarrollar en nuestros estudiantes habilidades matemáticas que les permitan enfrentar y aplicar los conceptos adquiridos en situaciones totalmente inesperadas? Más aún, conocedores de los problemas a que se enfrentan los estudiantes debido a sus conocimientos tan frágilmente adquiridos y que al paso del tiempo los van olvidando, ¿cómo crear en ellos un conocimiento más estable y permanente acerca del concepto de variable? No nos referimos específicamente a la variable como una cantidad variante o cambiante en particular, como se hace en la literatura, algunas veces, sino a sus diferentes aspectos o caracterizaciones. No es nuestra intención responder a estas preguntas aquí, sino más bien realizar algunas investigaciones relacionadas con el concepto de variable y sus representaciones que nos acerquen más a la respuesta de estas preguntas. Es lo que desarrollaremos en los capítulos siguientes.

Para iniciar, con el propósito de tener una mayor claridad sobre la significación de variable y de ubicarlo en una dimensión más exacta analizaremos cómo se utiliza en diferentes ámbitos educativos, así pues, en lo que sigue trataremos los siguientes temas: (1) las variables en el álgebra escolar; (2) las variables en las matemáticas; (3) las variables en la ciencia, (4) las variables en los sistemas algebraicos de cómputo.

1.2. Las Variables en Diferentes Ámbitos Educativos.

1.2.1 Las Variables en el Algebra Escolar.

El concepto de variable es una de las ideas fundamentales de la matemática. Sin embargo, las investigaciones indican que los estudiantes experimentan dificultades para darle significado por el hecho de que al interior de las Matemáticas se utilizan de distintas formas. En la matemática escolar, se le ha prestado mucha atención a la introducción de este concepto; los educadores buscan las formas de familiarizar a los alumnos con las variables (p. e. ver Kieran, 1992; Kieran, 1997). Además, en el contenido del álgebra escolar de secundaria se ha desarrollado un acercamiento más o menos estándar a este tema.

Al inicio del aprendizaje del álgebra, se enfatiza la relación con la aritmética: las letras se utilizan en expresiones algebraicas para representar cantidades, números, y relaciones numéricas. En esta etapa, una expresión algebraica todavía se considera una operación aritmética sobre números y la manipulación algebraica es más o menos un cambio de la receta para calcular un resultado: $x + x$ y $2x$ son algebraicamente equivalentes porque los resultados numéricos cuando x se sustituye por un valor concreto son iguales, sin tomar en cuenta que las expresiones son diferentes desde un punto de vista de cómputo.

Los alumnos inician estudiando la conexión entre una tabla, un cálculo simple, y una fórmula verbal simple. Las instrucciones representan cálculos simples como "multiplíquese por 2", "sumar 3", y así sucesivamente. Las palabras se utilizan para describir entradas y salidas. En contextos situados, los alumnos deben encontrar en ciertas secuencias patrones regulares y expresarlos en términos de fórmulas. Las relaciones son casi siempre lineales. Las tareas típicas son:

- Dados una serie de cálculos, completar una tabla.
- Dada una tabla de números, descubra un patrón y encuentre la fórmula correspondiente.
- Dado un contexto situado, crear una fórmula y comprobar su veracidad.

Viene después el estudio de la conexión entre una fórmula verbal, una tabla, y una gráfica. Los ejercicios típicos son:

- Dada una fórmula, completar una tabla.
- Dada una tabla, dibujar los puntos en una gráfica.
- Dada una gráfica, leer las coordenadas de puntos en la gráfica.

Después de esto, sigue la conversión de fórmulas verbales a fórmulas escritas y el aprendizaje de las reglas básicas de simplificación tales como a+a+a=3a. Las letras se utilizan como abreviaturas de cantidades y los alumnos aprenden las reglas usuales de cálculo con letras en contextos situados.

Después de la introducción de las variables, al trabajar con expresiones algebraicas simples que contienen operaciones aritméticas familiares como la adición, substracción, multiplicación, y la división, los alumnos comienzan a aprender a ver una expresión no sólo como un proceso de cálculo, sino también como un resultado de este proceso. Es decir, una expresión también se convierte en un objeto matemático que puede ser manipulado.

Gradualmente, los alumnos aprenden a ver las variables como un reemplazo no sólo para los números, sino también para las expresiones. Aprenden y practican las distintas maneras en las cuales las expresiones algebraicas pueden ser manipuladas: combinando términos literales, substituyendo subexpresiones, descomponiendo en factores, completando el cuadrado en un polinomio cuadrático, racionalizando el denominador, sustrayendo el mismo término de ambos lados de una ecuación, resolviendo sistemas de ecuaciones lineales, y diferenciándolos, estos son ejemplos de las actividades que están presentes en todos los planes de estudios de las matemáticas escolares.

En este punto, el estatus del álgebra escolar es la de una aritmética pura generalizada, basada en números libres de referencias, donde las variables se utilizan sobre todo como nombres polivalentes (es decir, puede tomar cualquier valor numérico y no ser incógnita ni variable) y guarda lugares. En muchas investigaciones (p.e., ver Kieran, 1989; Sfard et al, 1994; MacGregor y Stacey, 1997; Stacey y MacGregor, 2000; Tall et al, 2001) se reporta que comprender la aritmética pura generalizada no es fácil: los símbolos literales son como números y palabras, pero son diferentes, y los alumnos tienen que aprender a tratar con estas diferencias. Deben entender la estructura subyacente del álgebra y llegar a familiarizarse con el carácter dual de las expresiones algebraicas (operacional/estructural, proceso/objeto) para ganar capacidad en las matemáticas.

Este es también el punto donde las matemáticas dan un giro en una dirección diferente al de las ciencias naturales, que utilizan aritmética generalizada de cantidades, es decir, la aritmética de modelaje, en la cual las variables son principalmente utilizadas como objetos. Con mucha frecuencia se espera que los alumnos realicen por sí mismos el enlace entre la aritmética pura generalizada y la aritmética generalizada de cantidades.

1.2.2. Las Variables en la Matemática.

En la matemática, las variables se utilizan en tan diferentes formas que difícilmente se intenta definirlas con rigor, excepto en el campo de la lógica formal y el álgebra abstracta. Los siguientes ejemplos (Etten, 1980) ilustran las diferentes formas en que las variables aparecen en la matemática.

$f: x \mapsto 2x+1$ $a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$ *n es un divisor de 24* *p es un número primo* $a + b = b + a$ $\cos x + \sqrt{3} senx = 1$ *K es paralelo al eje x*	$A = lxw$ $x \varepsilon N$ $\sqrt{x^2} = x$ $x = y$ $a^2 = 9$ $x < 2$ *P está sobre l*	$a + b = 7$ $x + 3 = x + 3$ $x + 3 = 2x + 8$ $A = 2\pi r$ $S \subset Q$ $x^2 + y^2 = z^2$

Aunque las letras sólo se utilicen para los números, se pueden distinguir diversos papeles de las literales en el contexto algebraico (Kücheman, 1981; Usiskin, 1988). Estas pueden representar:

- Una indeterminada, como en $a^2 - 9 = (a - 3)\ (a + 3)$
- Una incógnita, en ecuaciones como $a + b = 7$
- Una número conocido como π.
- Un número generalizado, como en x ε N, o al declarar a p como un número primo, y en diferencias como f(a + 1) – f(a).
- Un número calculable como A en la fórmula A = 2π r
- Un guarda lugar, por ejemplo f: x →2x + 1 o f(x) = 2x + 1
- Un parámetro, como una etiqueta en la definición de la función fp(x)=px para distinguir varios casos.
- Una abreviatura como R = {1, 2, 3}.

La notación matemática se ha desarrollado en un simbolismo de gran alcance y muy flexible. Por ejemplo, la expresión simple a(x + e) se puede utilizar de varias maneras: como un número generalizado a×(x + e) en el cual el símbolo e puede o no representar la base del logaritmo natural, como una función ***a*** aplicada a **(*x + e*)**, como una función de *x* con los parámetros a y e, como una función en dos o más indeterminadas, y como la instrucción **a** aplicada al argumento x + e. Así, el contexto matemático o la fraseología utilizada sobre una expresión con frecuencia dan una pista sobre su uso. Pero no es ninguna gran sorpresa que los estudiantes no siempre entiendan las declaraciones y expresiones matemáticas, y que con frecuencia se confundan con las notaciones. Toma tiempo y práctica comprender el hecho de que una variable tiene varios significados en matemáticas con su uso (como indeterminada, como incógnita, como parámetro, etc.), con su dominio, con su dominio de reemplazo si está utilizada en una declaración abierta, y con el contexto en el cual se utiliza.

Por la palabra "contexto" en la última frase también entendemos el contexto de las "matemáticas escolares", la cual tiene sus propias convenciones matemáticas. Por ejemplo, la palabra "fórmula" tiene un sentido especial en la matemática escolar y el papel de las letras en la *fórmula* $y = x^2$ no es igual al de la *ecuación* $y - x^2 = 0$.

Las palabras "fórmula" y "ecuación" se utilizan para distinguir entre, el caso de una relación funcional entre la variable *y* que depende de otra variable *x*, y el caso de una relación más general entre incógnitas. Es importante que los alumnos tengan clara la distinción entre estas dos nociones. Para un matemático o un científico es mucho más fácil utilizar el mismo simbolismo algebraico para muchos propósitos, por ejemplo: $y = x^2$ puede representar una ecuación, una función, una abreviatura de la expresión x^2, así como el proceso de calcular el valor de y a partir del valor de x.

Una variable se puede relacionar con otras. Por ejemplo, las variables independientes cuyos valores se pueden elegir libremente, y las variables dependientes, cuyos valores se deben de calcular dados los valores de las variables independientes. Podemos dar varios ejemplos: la posición de un objeto que se mueve depende del tiempo, la temperatura ambiente depende de la hora del día, el número de artículos vendidos en una tienda como variable que depende del precio por unidad, el ingreso de una persona en función de su educación, y así sucesivamente.

En muchos casos, una variable puede depender de más variables que se establecen explícitamente. Por ejemplo, el ingreso de una persona puede depender de la educación, experiencia profesional, edad, número de horas en el trabajo, sexo, estado del trabajo, y así sucesivamente. Pero en un estudio económico o social no todas las variables independientes son consideradas; algunas de ellas se omiten, otras aparecen como parámetros en la descripción del modelo. Los papeles de las variables independientes y dependientes con frecuencia no se fijan durante el cálculo. Por ejemplo, al estudiar el movimiento de un corredor, se puede por un lado considerar la aceleración en función del tiempo, pero por otro lado describirla en función de la velocidad del corredor. Una de las ideas grandes del cálculo, y en la matemática en general, es la libertad de seleccionar las variables independientes y dependientes.

1.2.3. Las Variables en la Ciencia.

En Vredenduin (1979), el autor discute algunas de las diferencias entre la terminología de la física y las matemáticas, pero la mayor parte de sus conclusiones son válidas para cualquier campo de la ciencia.

Matemáticas	**Física**
Se utilizan variables aritméticas con variables sin dimensiones.	Predominan las cantidades aritméticas con sus propias reglas y uso de unidades.
Los nombres de las variables son libres de elegir y cambiar sin que una expresión cambie su significado.	Con frecuencia una variable está relacionada con algún concepto físico y su nombre es una abreviatura de esta noción.
Los números irracionales como $\sqrt{2}$, π y e son importantes; los números de punto flotante son sin precisión: $1.0 = 1.000$	En las medidas, sólo números naturales y los números con coma flotante con precisión ocurren: $1.0 \neq 1.000$
Hay un fuerte enfoque sobre las propiedades especiales de las funciones, p. e., sobre el comportamiento asintótico.	Las propiedades y las suposiciones pueden descartar partes de interés matemático.
Palabras como, “grande”, “pequeño”, “insignificante”, tienen poco significado.	Un cambio pequeño de una cantidad Q es también una cantidad ΔQ con su propia aritmética.
Algunas diferencias esenciales entre la matemática y la física.	

Aquí, el uso más frecuente de una variable es como un nombre para una cantidad que puede variar (a menudo con respecto al tiempo) y que en muchos casos puede ser medida. Las cantidades físicas pueden ser magnitudes tales como temperatura, masa, y longitud, o las combinaciones de la magnitud y dirección tal como la velocidad, aceleración, y fuerza. La función, algunos valores de la función, y un solo valor de la función se mezclan fácilmente en la ciencia y al parecer sin mucho daño: una cantidad física es a veces una función del tiempo, en otras ocasiones una muestra finita de valores medidos en diferentes tiempos, y a veces un valor de la función en cierto valor fijo.

Como ejemplo concreto podemos analizar la ley de Boyle, pV = constante, donde p es la presión y V el volumen, suponiendo que la temperatura no se altera. Supongamos, por ejemplo, que la cantidad de gas y las demás circunstancias son tales que podemos decir que pV = 1 (sin que éste número altere substancialmente la situación). De hecho, las variables son funciones del tiempo: $p : t \mapsto p(t)$ y $V : t \mapsto V(t)$. La ley de Boyle dice que el producto de estas dos funciones es una función constante, es decir, $p(t) \times V(t)$ = constante, en todo tiempo t. En un experimento, se puede verificar o redescubrir la relación midiendo p y V bajo diversas condiciones.

Un ingeniero o un físico pueden necesitar conocer la presión particular que corresponde a un determinado volumen; es entonces cuando se presenta el caso de determinar el valor de la incógnita p cuando V es un número conocido. Pero esto sucede sólo en casos particulares. En un problema como “suponga que V=10 ml cuando p=2 atm, ¿cuál es el volumen V cuando la presión es p=4 atm?”, aquí p y V no representan funciones sino más bien valores de la función, a saber, la presión y el volumen para un tiempo fijo. En las matemáticas este uso ambiguo de la notación de las funciones y de los valores de las funciones raramente ocurre.

Veamos otro ejemplo. Galileo (1564-1642) descubrió la ley aproximada de los cuerpos en caída libre o en un plano inclinado, cerca de la superficie de la Tierra.: $s = ½ gt^2$. Consideremos un cuerpo que cae libremente hacia la Tierra; Galileo intentó determinar no el *por qué* cae, sino el *cómo* cae, es decir, en qué forma matemática la distancia recorrida y la velocidad alcanzada dependen del tiempo transcurrido en la caída y el espacio recorrido.

Actualmente, el investigador moderno se preguntaría: ¿qué función es el número ν, que representa la velocidad de los números s y t que, a su vez, representan respectivamente la distancia recorrida y el tiempo de caída? A su modo aún primitivo, Galileo planteó la pregunta del modo siguiente: ¿es ν proporcional a s? ¿o es proporcional a t? En símbolos, si el número de unidades de velocidad adquirida en t unidades de tiempo es ν, y si ν es proporcional a t, entonces el número s de unidades de longitud recorridas es proporcional a $t^2/2$. Efectivamente: s está dado por $\nu t/2$; y como ν es proporcional a t, entonces s lo es a $t^2/2$.

Así pues, el movimiento de caída cuya existencia comprobó Galileo es un movimiento cuya velocidad aumenta proporcionalmente al tiempo. El “método de fluxiones” o “cálculo infinitesimal” se ocupa en darnos métodos para determinar las relaciones entre variables partiendo de las relaciones entre sus tasas de cambio, o entre ellas y esas tasas. Esto muestra la importancia del cálculo en esas cuestiones físicas.

Estos ejemplos ilustran cómo la idea de variable es fundamental, tanto en la teoría como en la aplicación de las matemáticas. Es indispensable en la aplicación de las fórmulas matemáticas tener ideas claras y la apreciación correcta de su papel en los fenómenos que se observan.

En matemáticas raramente ocurre el uso ambiguo de la notación; se permite a menudo cambiar nombres en una expresión sin cambiar el significado: por ejemplo, $\{(x, y) \mid xy=1\}$ es el mismo sistema de pares ordenados que $\{(a, b) \mid ab=1\}$. Pero en la ciencia, tales reemplazos se prohíben casi siempre: el sustituir los nombres tradicionales para la energía E, la masa m, y la velocidad de la luz c en la ley de Einstein $E=mc^2$, la arruinará. La razón es simple: la mayoría de las variables en la física no son sin sentido sino que tratan con conceptos en la física que tienen la propiedad de cantidad. Por lo tanto, uno elige a menudo el primer carácter del nombre del concepto como el nombre de la variable: F para la fuerza, m para la masa, y a para la aceleración en la ley de Newton $F = ma$ es un ejemplo de muchos otros.

En la ciencia, las palabras como "grande", "pequeño", "relativamente pequeño", "insignificante" pueden ser utilizadas mientras que hablen de cantidades. A un cambio pequeño de una cantidad Q también se le da un nombre, tal como ΔQ, y se puede manipular como si fuera otra variable, excepto que con frecuencia podemos ignorar términos de mayor grado como $(\Delta Q)^2$, para conseguir una descripción más simple del modelo.

Es claro que cuando una variable se utiliza mayormente como guarda lugar, en donde solamente puede substituirse un número o una expresión que evalúa a un número , un alumno tiene la impresión de que una variable es una entidad matemática algo estática: tiene poco sentido considerar el cambio de la variable. En contraste, cuando una variable se utiliza para un objeto variable, se convierte en una técnica natural y útil en modelación matemática pues el cambio se convierte en una edición importante y el cálculo de cambios pequeños, conduce en última instancia a los diferenciales.

Pero esto es válido no solamente para el estudio de fenómenos físicos, sino también para problemas más de tipo matemáticos. Veamos otro ejemplo.

La relación entre la circunferencia y el área de un círculo puede derivarse como sigue: considere el área A como una variable dependiente del radio r. Hagamos crecer el radio en una pequeña cantidad Δr, lo que provoca un pequeño crecimiento en el valor del área ΔA. Estos pequeños cambios se relacionan por la expresión $\Delta A \approx C x\ \Delta r$, donde C es la circunferencia de un círculo de radio r. Esta aproximación puede explicarse transformando el aro pequeño suavemente en un rectángulo de longitud C y anchura Δr. Escogiendo crecimientos muy pequeños Δr y, en última instancia, tomando valores infinitesimales llegamos a la siguiente ecuación con diferenciales: $dA=Cdr$. Esto corresponde con $C=dA/dr$; conociendo la fórmula $C=2\pi r$ encontramos que $A=\pi r^2$.

Por otro lado, el valor numérico de una cantidad depende de la unidad en la cual se expresa. Esto afecta las fórmulas en las cuales la cantidad ocurre. Por ejemplo, el índice de masa corporal se define como el cociente del peso corporal (en kilogramo) dividido por el cuadrado de la talla (en metros). Si las unidades se cambian de kilogramo y metros a gramos y centímetros, respectivamente, un factor de escala de tamaño 10 se debe incluir en la definición para mantener el significado del índice.

Los comentarios anteriormente expuestos permiten tener una mayor comprensión sobre las dificultades que tienen los alumnos con relación a los métodos matemáticos y las técnicas que se utilizan en ciencias y que se aprenden en lecciones de matemáticas, además del uso adecuado de la variable. En matemáticas las variables se usan más frecuentemente como guarda lugares y nombres polivalentes; se hace énfasis en la aritmética pura generalizada, con referencia a números y en el concepto de función definido como una clase especial de correspondencia entre conjuntos no vacíos A y B que asigna a cada elemento de A uno y sólo un elemento de B, i.e., el acercamiento de Dirichlet al concepto de función. En la ciencia y en matemáticas avanzadas se pone en juego el objeto variable. Uno se involucra con relaciones funcionales entre cantidades variantes, en donde se distinguen las variables dependientes e independientes. Al trabajar con objetos variables y relaciones entre ellos se utiliza principalmente la teoría y práctica de solución de ecuaciones en cantidades conocidas y desconocidas y el cálculo del cambio.

1.2.4. Las Variables en los Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS).

El uso de los sistemas algebraicos de cómputo y las calculadoras simbólicas es nuevo en matemáticas escolares. A principios de los 90, pioneros en la educación tuvieron grandes expectativas del álgebra computacional (ver Karian, 1992), lo que resultó en varios artículos. El alcance previsto del uso del álgebra de la computadora era amplio y estaba en línea con la meta original del diseño de la mayoría de los sistemas simbólicos: abastecer de una herramienta de fines generales para computación técnica en varias áreas. La descripción de Mayes (1997) indica que estudios en este período investigan el potencial de los sistemas simbólicos, como por ejemplo para mejorar la comprensión conceptual, la superación de las limitaciones impuestas por habilidades algebraicas pobres, proporcionar aplicaciones de las matemáticas dentro del alcance de los estudiantes en la expectativa que el plan de estudios de las matemáticas sea más atractivo de esta manera. Parece que existe consenso en dichos trabajos acerca de cuál es la más importante ventaja del uso del álgebra computacional en matemáticas: hacer las matemáticas más agradables para profesores y estudiantes ya que involucra entidades matemáticas en objetos concretos que pueden ser directamente investigados, validados, manipulados, ilustrados y explorados. La belleza de las curvas y las gráficas, los interesantes resultados numéricos y simbólicos, todo se hace más accesible. La abstracción, el razonamiento exacto y el uso cuidadoso del simbolismo no son solamente un hobby de los profesores de matemáticas, sino que inmediatamente son recompensados cuando utilizamos álgebra computacional.

Más tarde, en la segunda mitad de los 90, experimentos realizados en las aulas muestran que la integración del álgebra computacional en matemáticas es más compleja de lo esperado: los estudiantes pueden construir significados no esperados o incorrectos. Aún así, algunas investigaciones (Artigue, 1997; Guin y Trouche, 1998) aclaran que el uso eficiente y exitoso de los sistemas simbólicos no es evidente en sí: toma tiempo y esfuerzo adquirir las habilidades apropiadas y el conocimiento para el uso experto en estos sistemas, además de que este proceso puede diferir de estudiante a estudiante. Los obstáculos con que se han enfrentado los estudiantes mientras trabajan con un sistema simbólico son a menudo de tipo matemático o técnico.

En secundaria, por ejemplo, las matemáticas y la química casi están limitadas a conversión de unidades, dibujo e interpretación de curvas, balanceo de ecuaciones químicas y los cálculos relacionados con un equilibrio químico. Aparte de la solución de ecuaciones no se presentan muchos cálculos simbólicos y donde se necesita matemáticas en química se espera que pueda trabajarse con las herramientas básicas aprendidas en matemáticas. En física, se utilizan más matemáticas: trigonometría, graficación y análisis de medición de datos, vector, álgebra de cantidades pequeñas y transformación de coordenadas.

En cambio, en la ciencia las matemáticas son más un medio que un fin: el trazo de gráficas ayuda a interpretar datos; la simulación de experimentos se hace para entender fenómenos del mundo real; la manipulación algebraica ayuda a menudo a presentar resultados experimentales de manera más conveniente; y así sucesivamente. Los programas de computadora y calculadora graficadora se utilizan principalmente para adquirir datos experimentales, visualización y análisis de resultados experimentales y simulación de experimentos. La necesidad del cálculo simbólico se presenta más a niveles superiores, cuando la modelación matemática es más importante y se extiende a ecuaciones diferenciales, integración, funciones especiales, etc., y la manipulación de fórmulas es más elaborada. Entonces, un sistema algebraico de cómputo CAS entra en juego como un asistente personal que permite a un estudiante a concentrarse en los conceptos en lugar de perder el tiempo en cálculos algebraicos.

Reportes sobre el uso de álgebra computacional en clases de matemáticas y ciencia durante los últimos dos años de universidad y educación vocacional superior, además de observaciones que se han hecho en cursos que introducen *Mathematica* y Maple para nuevos usuarios nos conducen a los siguientes resultados generales sobre la manipulación algebraica con CAS:

- Se requieren herramientas básicas de manipulación para el uso efectivo de un CAS.
- CAS fuerza a sus usuarios a expresar sus intenciones de una manera explícita y en una sintaxis que es muy distinta del simbolismo flexible usado normalmente en matemáticas y ciencia.
- No se apoya mucho el uso de variables como objetos variables en CAS.

Esto tiene gran impacto en el uso del álgebra computacional en la educación: CAS proporciona un pequeño soporte en el tiempo real de adquisición y análisis de datos de experimentos, mientras que esto es a menudo el punto de partida del trabajo científico. El uso de una variable como objeto variable es el aspecto finito de cualquier representación en una computadora que imponga restricciones. Posibles representaciones finitas son:

- con un listado indexado finito de valores.
- vía un algoritmo expresado en muchos términos finitos.

En Spunde y Neidinger (1999) los autores defienden la implementación de una variable objeto como una lista finita de valores y muestran cómo con CAS es posible el cálculo con muestras de valores. Sin embargo, estos sistemas carecen de la manipulación directa de listas y liga inmediata de listas, como se ofrece con las calculadoras graficadoras.

Al parecer el enfoque de este concepto está mucho muy relacionado con el ámbito y el nivel en el que se utiliza; entonces, ¿cómo puede definirse el concepto de variable y de cuántas y cuáles formas puede utilizarse?

1.3 Concepciones sobre el Concepto de Variable.

1.3.1 Concepto Polisémico de Variable.

Con el objetivo de unificar conceptos en el currículum de matemáticas, a partir de los años 60 se enseñó el concepto de variable en su forma más general; como resultado de ello todos los símbolos literales se consideraban como variables (Kieran, 1989), con la excepción de los numerales o símbolos fijos para un número específico, tales como la velocidad de la luz c, la gravedad g, e, etc. De esta manera, con la virtual inclusión de casi todos los símbolos literales en la definición de variable, los matemáticos, profesores de matemáticas, y escritores de textos de matemáticas han operacionalizado una definición que discrimina muy poco de cualquier uso para que los estudiantes aprendan matemáticas.

Básicamente, el entendimiento de los símbolos literales y de las variables en particular, es esencial en álgebra, por lo que ha sido el punto de atención de varias investigaciones (Rosnick, 1981; Shoenfeld & Arcavi, 1988; Trigueros y Ursini, 1996, 2000, 2003; Wagner, 1983) que muestran que el concepto de variable proporciona la base para la transición de la aritmética al álgebra y es necesario para el uso significativo de toda la matemática avanzada (A. Philipp, 1992).

Sin embargo, a pesar de la importancia del concepto, muchos programas tratan las variables como términos primitivos que - después de alguna práctica, por supuesto - serían entendidos y usados de manera clara por los estudiantes. Además, los profesores de matemáticas con frecuencia reflejamos la presentación de los libros de texto y desarrollamos en el pizarrón la manipulación de a’s, b’s, x’s y y’s de forma fácil y automática. De hecho, es fácil hacerlo sin tomar en cuenta las múltiples connotaciones, significados y usos de los términos manipulados, lo cual provoca dificultades en los estudiantes para la correcta comprensión y utilización de dicho concepto.

Por otro lado, las variables se usan generalmente en textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que pudiera servir como base en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados (Ursini, 1993).

El aprendizaje del concepto de variable logrado por los estudiantes a través de su paso por el sistema escolar es poco significativo; aunque son capaces de reconocer el papel que juega la variable en expresiones y problemas muy simples, un ligero aumento en la complejidad de los mismos provoca generalizaciones inadecuadas y la búsqueda de soluciones memorizadas o por inspección que no son acordes al nivel requerido para el estudio de matemáticas más avanzadas. Las estrategias de los estudiantes están dominadas por procedimientos que no han sido interiorizados, lo cual los deja anclados a un nivel de acción que se manifiesta, por ejemplo, en la necesidad de hacer explícitos los pasos que siguen en el proceso mental de solución y usarlos como soporte para continuar, sin ser capaces de analizarlos, y detectar posibles errores (Ursini y Trigueros, 1997, págs. 1-19).

Por supuesto que no sería productivo redefinir variable, pero se requiere que los educadores lleguen a términos con las diferentes formas en que las variables se utilizan en la matemática, la ciencia y los sistemas algebraicos computacionales, para darles a los estudiantes una oportunidad de reflexionar sobre estos diferentes usos.

1.3.2 Distintos Usos de la Variable.

A menudo, se distinguen varios papeles de las variables en el álgebra, como el de guarda lugar, número generalizado, cantidad cambiante, parámetro o incógnita (Janvier, 1984; Küchemann, 1981; Philipp, 1992; Usiskin, 1988). Una herramienta importante en álgebra es la habilidad para distinguir en estos diferentes papeles de una manera flexible y consciente, que consecuencias tienen en los procedimientos algebraicos y como cambian durante el proceso de solución de problemas (Arcavi, 1994).

De aquí que podemos preguntarnos qué conocimientos contextuales poseen los estudiantes y de qué manera estos conocimientos pueden interactuar con su entendimiento de los símbolos literales. Veamos algunos ejemplos.

Considere la ecuación exponencial $A = Pe^{kt}$, que se utiliza para determinar el monto de dinero que se obtiene después del tiempo t, si se depositan P dólares a interés compuesto a una tasa k. Esta ecuación utiliza los símbolos literales de tres maneras diferentes: como constante (e), como cantidades que varían (t, A) y como parámetros (P, k). ¿Se dan cuenta realmente los estudiantes de los distintos papeles que juegan los símbolos literales? ¿Señalan los profesores estas diferencias?

Un ejemplo que destaca la diferencia entre una cantidad que varía y un parámetro se refiere a la compra de un producto básico. La ecuación que representa el costo C, dado el número de kilos comprados k, es $C= gk$, donde g es el costo por kilo del producto. En este ejemplo, k y C son cantidades que varían y que dependen una de otra, mientras que g es un parámetro fijado al principio seleccionando una tienda de abarrotes donde se vende el producto. C y k dependen uno del otro pero sólo después de que g se coloca para un problema en particular.

En realidad, una letra puede sustituirse por un número sin que se involucre algo "desconocido". Esta distinción es mejor y debería hacerse cuando los estudiantes manejan las fórmulas. Muy frecuentemente, los profesores y autores de libros ven de manera muy superficial el hecho de que los estudiantes puedan usar la fórmula $A = \pi r^2$ en dos formas diferentes:

1. Como fórmula para determinar el área de un círculo, que se usa cuando su radio r está dado. En este caso, no se espera que los estudiantes imaginen o consideren el radio del círculo como una incógnita, sino por el contrario, el radio puede tomarse como muchos valores específicos proporcionados por el ejercicio. Algo similar ocurre con A: tan pronto se le da un valor a r, existe automáticamente un valor para A. Así, una letra puede considerarse una incógnita solamente si se muestra que es usada como tal, es decir, una representación simbólica tiene el significado de quien está dedicado a la solución de un problema.
2. Usar la fórmula "de la otra manera" es totalmente diferente. Si se proporciona el área, para tratar de determinar el correspondiente valor de r, pueden realizarse algunos cálculos que no son ordinarios pues involucran el manejo de las letras como números generales que no tienen valores específicos.

Así, las fórmulas pueden definirse como dos expresiones simbólicas unidas con un signo "=" que requiere sólo de cálculos directos de números conocidos, mientras que una ecuación deberá involucrar cálculos sobre números desconocidos. Por ejemplo, expresiones como $y = 3x + 2$ o $T = (9/5)\ C + 32$ pueden señalarse como ecuaciones o fórmulas dependiendo del tipo de actividad en la cual estén involucradas: si se pide encontrar y o T dados los valores de x o de C entonces las expresiones son fórmulas. Pero si un par ordenado (x, y) satisface que y = 3x + 2 entonces la expresión simbólica puede reconocerse como ecuación. Esta distinción tiene que considerarse como fundamental.

Más aún, si en las expresiones $A = \pi r^2$, $y = 3x + 2$, $T= (9/5) C + 32$ se tiene que r, x o C varían, consecuentemente A, y, y T varían también. Esto posibilita una distinción adicional relevante.

En resumen, por ejemplo, el uso de la letra *a* puede interpretarse en formas diferentes y en cada caso utilizarse un proceso mental diferente:

a) Puede usarse como un valor indeterminado en una fórmula: $P = 4a$.
b) Puede considerarse una incógnita: $2a + 3 = 7$.
c) Puede considerarse como una variable: $a = \pi r^2$, cuando r varía.
d) Como nombre polivalente, es decir, puede tomar cualquier valor numérico y no ser incógnita ni variable: $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$

Pasemos a otros ejemplos. Considere ahora las siguientes expresiones, ¿qué puede decir de ellas?

1. $A = (1/2)\, bh$
2. $40 = 5x$
3. $\operatorname{sen} x = \cos x \tan x$
4. $1 = n\,(1/n)$
5. $y = k\,x$.

Todas tienen la misma forma: el producto de dos elementos es igual a un tercero pero, como ya vimos, cada una de ellas tiene diferente interpretación. Generalmente clasificamos a 1) como una fórmula: la del área de un triángulo donde A, b, h se utilizan para representar área, base y altura y que se interpretan como cantidades ya conocidas. Clasificamos a 2) como una ecuación a resolver, donde tendemos a pensar en x como incógnita; 3) la clasificamos como una identidad, donde x es el argumento de una función; 4) podemos clasificarla como una propiedad, donde se generaliza un patrón aritmético y n identifica un instante del patrón; y 5) se clasifica como una función de variación directa (no para resolverse), donde x corresponde a una variable independiente, y a una variable dependiente (el valor a tomar de acuerdo a x) y k una constante de proporcionalidad. Aparentemente, sólo en 5) se tiene un sentido de variabilidad, pero si analizamos con cuidado las expresiones veremos que no es así: en 1), representa el área A de un triángulo, donde su valor depende de los valores de b y h; así, A, b y h pueden tomar cualquier valor por lo que los identificamos como números generales, al igual que en las expresiones 3) y 4). En 2) identificamos a x como una incógnita que, a diferencia de los casos anteriores, representa un valor específico *no arbitrario* que puede calcularse con base en las restricciones de los datos, pero que antes de este momento nos permite considerar a x como variable.

Considere ahora la bien conocida expresión $y = mx + b$. ¿Qué significan cada una de las literales? Esta expresión describe una línea recta en el plano, que tiene pendiente m y corta al eje y en b, por lo que puede asignarse cualquier valor a cada una de las literales involucradas, es decir, considera la relación general entre los puntos de una recta cualquiera y su pendiente. Por esta razón, x, y, m, b son números generales que pueden tomar cualquier valor, esto es, son variables. Sin embargo, para una recta particular m y b son constantes dadas o que pueden calcularse utilizando los datos del problema (b puede ser incógnita), x y y son dos variables dentro de una relación funcional, donde x puede considerarse como una variable independiente que puede asumir cualquier valor y el valor de la variable y cambia dependiendo de x.

Es decir, que para resolver un problema tan sencillo como lo es el determinar la ecuación de una recta que pasa por un punto particular dado y tiene una pendiente m también dada, los estudiantes deben enfrentarse a números generales, constantes, incógnitas y variables en una relación funcional, por lo que deben ser capaces de pasar de una interpretación de variable a otra aún cuando estas diferentes caracterizaciones del concepto de variable estén involucradas en la misma expresión.

Muchos profesores tienen dificultades para que los alumnos comprendan las condiciones de aplicación de las fórmulas que conocen y utilizan. Efectivamente, estas condiciones no tienen el mismo papel de las fórmulas en un problema: éstas son herramientas que permiten obtener un resultado, mientras que las condiciones no forman parte de los propios tratamientos. Más aún, los mismos profesores pueden tener dificultades en su enseñanza no por desconocimiento, sino porque no se tiene a un nivel que asegure su transmisión confiable. Todavía más: en matemáticas se usan generalmente los símbolos literales para representar a las variables. Los mismos símbolos son utilizados para denotar diferentes caracterizaciones de la variable, y diferentes símbolos son empleados para representar la misma caracterización de la variable. Esto contribuye a opacar las diferencias entre las distintas caracterizaciones de la variable y ocultar las condiciones que determinan dónde y cómo puede variar su valor (Matz, 1982).

Argumentos de este tipo han llevado en distintas ocasiones a considerar que los símbolos comúnmente utilizados para representar la variable no son los más adecuados y que, por lo tanto, contribuyen a crear confusión en los estudiantes que inician el estudio del álgebra (Wagner, 1981; Matz, 1982). Se llegó inclusive a sugerir la conveniencia de usar símbolos que reflejen la variedad conceptual que subyace bajo los diferentes usos de las variables (Menger, 1956). Sin embargo, esto no liberaría a los estudiantes de la necesidad de interpretar la misma variable simbólica de diferentes formas. Así como se ha dicho anteriormente, es muy frecuente que para poder resolver un problema se requiera la capacidad de interpretar un mismo símbolo literal de maneras distintas. Así, para no implicar un uso particular de las variables, en este trabajo se utilizan los símbolos literales para describir el uso matemático de una letra.

Las consideraciones anteriores subrayan el carácter multifacético del concepto de variable y señalan que para poder trabajar exitosamente con la variable es necesario poder interpretar de distintas maneras los símbolos que se usan para representarla, así como poder pasar de una interpretación a otra.

1.3.3 Algunos Estudios sobre el Concepto de variable.

(a) Küchemann (1980).

Con el fin de elucidar de qué manera los alumnos interpretan los símbolos literales usados para representar a las variables en un contexto algebraico escolar, Küchemann (1980) realizó un estudio con más de 3000 estudiantes cuyas edades oscilaban entre 13 y 15 años. Para ello aplicó un cuestionario escrito, en el cual se pedía a los alumnos que interpretaran y manipularan expresiones algebraicas, y que resolvieran problemas en los que las variables estaban representadas por símbolos literales.

Al analizar las respuestas dadas por los alumnos, Küchemann (1980) identificó seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales, a saber:

- Letra evaluada.- A la letra se le asigna un valor numérico;
- Letra no utilizada.- La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado;
- Letra como objeto.- Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;
- Letra como incógnita especifica.- La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella:
- Letra como número generalizado.- Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores;
- Letra como variable.- Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

Entre estos resultados destacan el hecho de que los alumnos tienen diferentes maneras de interpretar las letras usadas para representar las variables, lo cual indica que quienes se inician en el estudio del álgebra consideran que los símbolos literales pueden interpretarse de diferentes formas, y que su significado puede variar con el problema. Esto muestra que la interpretación dada no es siempre la apropiada, y frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas.

Küchemann considera que esta clasificación de la interpretación de los símbolos literales refleja un grado de dificultad creciente. Considera que las primeras tres categorías indican un bajo nivel de respuesta, y argumenta que para que un niño tenga una comprensión de los "inicios del álgebra" es necesario que sea capaz de trabajar, por lo menos, con problemas simples que requieran el uso de la "letra como incógnita específica". Afirma que un niño habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la "letra como variable". El orden que Küchemann propone sugiere que es más fácil para el niño trabajar con la "letra como incógnita específica" que con la "letra como número generalizado", y que es más fácil trabajar con la "letra como número generalizado" que con la "letra como variable".

(b) Usiskin (1988).

Por otro lado, Usiskin (1988) destaca en su investigación cuatro usos diferentes de la variable y las asocia a diferentes concepciones del álgebra de la siguiente manera:

CONCEPCION DEL ÀLGEBRA	USO DE LA VARIABLE
Aritmética Generalizada	Generalizadores de patrones (traduce generaliza)
Medio para resolver problemas	Incógnitas, constantes (resuelve, simplifica)
Estudio de relaciones	Argumentos, parámetros (relaciona, grafica)
Estructura	Marcas arbitrarias en papel (manipula, justifica)

De aquí puede verse que las causas de esta dificultad en la comprensión del concepto de variable, estriban en que una variable tiene caracterizaciones que varían de acuerdo al problema en el cual está inmerso. Por ejemplo, una variable puede representar, una incógnita específica, esto es, un número desconocido pero especifico que puede ser calculado considerando las restricciones dadas; como un número generalizado, es decir un número indeterminado comprendido dentro de un método general; o también puede ser utilizado para representar una relación funcional entre dos cantidades cuyos valores cambian. Más aún, una variable puede utilizarse de diferentes formas en momentos distintos dentro de un mismo problema, es decir, puede tener distintas caracterizaciones; las acciones que hay que efectuar varían dependiendo del papel que desempeña la variable en determinada situación.

Así pues, el concepto de variable se utiliza en diferentes contextos con diferentes significados y dependiendo del contexto lo tratamos de diferente manera (Usiskin, 1988). No sería productivo intentar redefinir variable, pero sí es necesario encontrar un acercamiento de enseñanza no tradicional que pueda ayudar a reducir las dificultades y que contemple la posibilidad de darles a los estudiantes una oportunidad de reflexionar sobre estos diferentes usos.

(c) Ursini y Trigueros (1997). (Trigueros y Ursini, 1996, 2000, 2003)

Para estudiar la forma en la que los estudiantes entienden el concepto de variable Ursini y Trigueros refinaron las caracterizaciones de tres usos del concepto de variable; variable como incógnita, variable como número general, variable como relación funcional, aislando sus componentes y describiendo detalladamente cada una de ellas, obteniendo una "descomposición" del concepto de variable. A continuación se muestra la descomposición del concepto de variable que consideran básicos para su comprensión:

Variable como incógnita.

Consideramos que la conceptualización de la variable como incógnita implica:

- Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;

- Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;
- Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;
- Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;
- Identificar la incógnita en una situación especifica y representarla simbólicamente en una ecuación.

Aquí mencionan lo siguiente:

"Habrá quien considere inadecuada la terminología variable como incógnita por el hecho de que una incógnita no es variable dado que representa un valor fijo. Sin embargo, consideramos que la primera percepción de las literales al trabajar con un problema algebraico es, o tendría que ser, de símbolos que representan cualquier valor y que es en un segundo momento cuando se define su papel específico dentro de la expresión o problema en el que aparecen. Así, por ejemplo frente a una ecuación, se toma conciencia de que la variable representa valores específicos solo después de llevar a cabo, de hecho o mentalmente, las operaciones necesarias que permitan darse cuenta de que se trata efectivamente de una ecuación y no, por ejemplo, de una tautología. Por esta razón nos parece que el uso de la terminología «variable como incógnita» es adecuada."

Variable como número general

En el caso de la variable como número general consideramos que su conceptualización implica la capacidad de:

- Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;
- Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;
- Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variables de los invariantes en familias de problemas similares, basta J1egar a 1a simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual este actúa.;
- Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

Variables en relación funcional

La conceptualización de las variables en relación funcional implica:

Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;

- Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
- Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;
- Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;
-
- Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;

- Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica a partir de los datos de un problema.

Para cada uno de estos aspectos de la variable, esta "descomposición" pone de manifiesto distintos nive1es de abstracción en los que se puede usar este concepto.

1.4. Discusión, Conclusiones y Proyectos de Investigación.

El concepto de variable no es fácil de definir, ya que su significado puede cambiar con el contexto en el cual aparece (Ursini, 1993), pero definitivamente el concepto de variable se ve restringido en mucho al uso de letras. Muchas de las dificultades que los estudiantes encuentran con las variables se relacionan con su incapacidad para reconocer su papel correcto. Aunque puede ser que sólo uno de los usos de la variable aparezca en una tarea específica, es muy común que los estudiantes tengan que resolver problemas en los que aparece más de uno de sus usos, por ejemplo, deben ser capaces de trabajar con números generales, con constantes, con incógnitas, con variables en una relación funcional y poder transitar de una a otra interpretación, aún cuando estas diferentes caracterizaciones de la variable tengan la misma representación simbólica. El no reconocer las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable se convierte frecuentemente en un obstáculo que bloquea el aprendizaje del álgebra.

Esto es, la comprensión del concepto de variable implica la posibilidad de superar la simple realización del cálculo y operaciones con letras o con símbolos, para alcanzar una comprensión de las razones por las que funcionan estos procedimientos; la capacidad de prever hacia dónde conducen y la posibilidad de establecer relaciones entre los aspectos que asume la variable en el contexto del álgebra elemental.

Por otra parte, los cursos de matemáticas que se imparten a nivel universitario requieren de una comprensión profunda de los conceptos del álgebra, en particular del concepto de variable, el cual es central en esta disciplina. Se espera que los estudiantes universitarios tengan un manejo sólido y flexible de la variable, sean capaces de distinguir entre sus diferentes usos y lo puedan manejar de manera integrada, pero, a pesar del nivel de escolaridad, persisten concepciones equivocadas y estrategias de solución de problemas propias de estudiantes con menor escolaridad, lo cual hace pensar que existe un anclaje a nivel de acción que impide a la mayoría de los estudiantes acceder a niveles de abstracción que les permitan tratar a la variable como un objeto cuya función se puede analizar. Así, las dificultades que alumnos de diversas edades tienen para alcanzar un manejo adecuado del concepto de variable, sugieren la realización de más estudios que propicien un mayor acercamiento a la solución de este problema.

Una revisión bibliográfica de las investigaciones realizadas sobre el concepto de variable, nos muestra que la mayoría se han llevado a cabo con estudiantes de nivel básico, secundaria y, si acaso, de nuevo ingreso a estudios universitarios. En este trabajo, a diferencia de ellos, analizaremos el concepto de variable con estudiantes universitarios de segundo semestre y que ya han pasado por un filtro matemático como lo es el primer semestre del tronco común de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora, semestre en el cual se espera que adquieren una madurez matemática y una mayor responsabilidad como estudiantes universitarios. Los estudiantes en el primer semestre cursan las materias de Cálculo Diferencial e Integral I, Geometría Analítica y Algebra

Superior, por lo que se espera que tengan un mejor manejo y comprensión del concepto de variable.

Consideramos que una parte importante del proceso de enseñanza y aprendizaje son los textos que utilizan los profesores para los cursos que imparten. Así que un aspecto importante a considerar en la investigación sobre el concepto de variable es hacer un análisis de la forma en que los libros de texto presentan el concepto de variable.

En realidad los textos se basan en caracterizaciones del concepto de variable y no en una definición explícita; los estudiantes al avanzar en sus cursos ven una variable primero como una letra, luego como una operación, después como una expresión algebraica, como un proceso y finalmente como un objeto; pero no todos logran llegar hasta este nivel.

Por supuesto que esto debe influir en cierta medida en las dificultades que experimentan los estudiantes con su concepción propia de la variable, además de la manera como se tratan los distintos usos de la variable en los cursos, es decir, la forma en que aborden los profesores este concepto. En otras palabras, consideramos que estas dificultades están fuertemente influidas por las prácticas docentes, el contenido de los cursos y la manera de abordar los textos este concepto, por lo que analizaremos estos puntos en los capítulos siguientes.

Con la finalidad de buscar superar estas dificultades se realizó un análisis del enfoque y los usos con que se presenta el concepto de variable en textos, y los comparamos con la definición personal de profesores y estudiantes.

En resumen, con el propósito de aportar elementos que permitan una mayor claridad sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de este concepto, en esta investigación analizamos cuatro aspectos relacionados con el concepto de variable:

1. La manera en que se maneja actualmente el concepto de variable es un objeto muy elaborado, así que uno de los aspectos importantes que se debe considerar para entenderlo es el proceso mediante el cual se llegó a su forma actual. Este estudio deberá aportar información acerca de la evolución del concepto en los distintos momentos históricos, y conocimiento relevante para comprender los factores determinantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta noción a lo largo de los distintos niveles de enseñanza.
2. La forma como se presenta la definición de variable en los textos escolares. En las investigaciones revisadas se menciona con bastante frecuencia que el concepto de variable es difícil de definir; sin embargo, así como algunos presentan una definición otros no. De aquí, nos preguntamos: ¿cuáles la presentación que hacen los textos de la definición de variable?, ¿qué diferencias hay en el enfoque de esta presentación? Para responder a estas preguntas realizamos una revisión de la presentación del concepto en los libros de texto.
3. Aunque para algunos es tan fundamental y tan difícil de aprender el concepto de variable, no sabemos suficiente acerca del conocimiento de los profesores ni de su conocimiento base previo para la enseñanza de este concepto; en particular el conocimiento sobre el tema y su conocimiento pedagógico del mismo. Sin pretender hacer un trabajo exhaustivo acerca de este tema nos preguntamos ¿Cuál es la concepción que tienen los profesores acerca del concepto de variable?

4. Por otro lado, los estudiantes con los que se han realizado las investigaciones son, cuando mucho, pre-universitarios, por lo que nos interesa saber ¿cuál es la concepción de variable que tienen los estudiantes universitarios?

~~5.~~

Igualmente importante es que, por la forma en que desarrollamos el tema, abrimos la posibilidad de que a partir de este trabajo se deriven nuevos y variados proyectos de investigación.

A continuación desarrollaremos los anteriores puntos.

2. Una Visión Histórica sobre la Evolución del Concepto de Variable.

2.1 Introducción.

La matemática es un fenómeno cultural y está sujeto a fuerzas culturales además de las fuerzas internas de su propia naturaleza (Wilder, 1968). Varios conceptos matemáticos y su uso en las matemáticas han pasado a través de numerosos cambios. Los conceptos matemáticos surgieron como generalizaciones de ideas intuitivas y con cambios graduales condujeron a definiciones formales. Algunas veces las definiciones incluían objetos que no estaban originalmente destinados a algo. Después, los matemáticos estudiaron los nuevos objetos y las definiciones fueron llevadas al más alto nivel de abstracción (Díaz, 2001).

La manera en que se maneja actualmente el concepto de variable es un objeto muy elaborado. Por eso, uno de los aspectos importantes que se debe considerar para entenderlo, es el proceso mediante el cual se llegó a su forma actual.

En relación con este concepto, el análisis de su evolución histórica nos muestra que para llegar a la definición actual del concepto de variable tuvo que pasarse por un proceso largo y laborioso que conlleva una serie de dificultades y problemas por los que tuvieron que atravesar los grandes matemáticos para irlo adecuando a sus necesidades; las diferentes caracterizaciones de la variable corresponden a diferentes niveles de abstracción y el paso de un nivel a otro se dio con bastante dificultad. Tener claridad sobre este proceso ubica al problema de su enseñanza en una dimensión más exacta, lo cual impide el tratar de dar a este problema una solución trivial. Por ello, en esta sección se bosqueja brevemente el desarrollo histórico del concepto de variable. Este bosquejo se basa en algunos libros populares sobre historia y artículos que tratan algunos hechos relacionados con la historia del concepto de variable y que a medida que se utilicen se hará referencia a ellos.

Este estudio deberá aportar información acerca de la evolución del concepto en los distintos momentos históricos, tratando de identificar los factores condicionantes que han determinado distintos estadios de desarrollo de esta noción. Interesa, por tanto, identificar las situaciones problemáticas a las cuales las personas involucradas han dedicado esfuerzos, los atributos y características. Asimismo, el estudio permitirá identificar las concepciones que históricamente se han configurado como resistentes a su evolución y generalización y, por tanto, pueden describirse como obstáculos epistemológicos.

El interés del estudio para la didáctica es claro, ya que aportará conocimiento relevante para comprender los factores determinantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta noción a lo largo de los distintos niveles de enseñanza.

2.2 La Evolución del Concepto de Variable.

El estudio del desarrollo histórico de la simbología algebraica y particularmente de la estructuración del concepto de variable, desde las ideas aritméticas de los pitagóricos hasta la construcción de una base puramente formal en el análisis de

Weierstrass, ha permitido vislumbrar la pertinencia de la intervención de la Historia de las Matemáticas en la investigación; permitiendo visualizar los diferentes referentes –aritméticos y geométricos- a los cuales ha estado unida en sus inicios esta noción y sus connotaciones a lo largo de ese proceso y determinar algunos obstáculos que han intervenido en la dinámica de esta construcción (Torres Rengifo, 1995).

Algunos estudios de investigación toman el desarrollo histórico del álgebra como una fuente de inspiración para el desarrollo de una línea educativa. La justificación razonada para esto es que el desarrollo histórico y la lucha de matemáticos a todo lo largo de los siglos indica dónde residen las dificultades de un tema particular. Por ejemplo, Rojano (1996) usa la perspectiva histórica para acentuar el papel de la resolución de problemas en el desarrollo del álgebra y discute el peligro de una transición rápida para la manipulación simbólica.

La forma como participa la historia de las matemáticas en las investigaciones en educación matemática está determinada por los objetivos que persigue ésta. En particular, en investigaciones de este tipo - en donde está en juego un conocimiento y un saber matemático- esta disciplina es fundamental pues da cuenta de los procesos de construcción y comunicación del conocimiento matemático a través del tiempo, iluminando así la construcción y comunicación de ese conocimiento hoy en día (Torres Rengifo, 1995).

El desarrollo histórico puede servir de un diseño heurístico en dos formas: Puede señalar dificultades conceptuales dentro de un dominio específico, y puede proveer un contorno de una línea educativa. La línea educativa puede seguir el desarrollo histórico global, y los ejemplos históricos y las estrategias pueden servir de contextos usados en textos estudiantiles (Harper, 1987).

Así, el desarrollo histórico a realizar de la simbología algebraica y, particularmente, de la noción de variable, se pretende que incluya aspectos con relación a obstáculos como variaciones semánticas, terminológicas, influencia del contexto socio-cultural, etc. en las distintas etapas de la formación del concepto. Incluso más recientemente y en términos más generales Freudenthal (1973) sugirió que, para obtenerse una mejor comprensión del contenido matemático del currículum, éste debería presentarse en exactamente el mismo orden en que se fue dando a lo largo de la historia.

Sin pretender realizar un estudio exhaustivo de este desarrollo, daremos un vistazo al pasado e intentaremos identificar y describir los obstáculos epistemológicos asociados a dicho concepto que se configuraron a lo largo de estas etapas.

La historia de las matemáticas puede abordarse de dos formas distintas: o bien cronológicamente o a través de sus distintas ramas. Cronológicamente, esta historia podría dividirse en cuatro bloques, según la prioridad establecida por A. N. Kolmogorov:

a) *Nacimiento de las matemáticas*.- Este período se prolonga hasta los siglos VI-V a.C. cuando las matemáticas se convierten en una ciencia independiente con objeto y metodología propios. También podría denominarse matemáticas antiguas o prehelénicas y en ellas se suelen englobar las matemáticas de las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India. Grecia estaría situada entre este período y el siguiente.

b) *Período de las matemáticas elementales.-* A continuación del anterior, se prolonga hasta finales del siglo XVI. Durante este período se obtuvieron grandes logros en el estudio de las matemáticas constantes, comenzando a desarrollarse la geometría analítica y el análisis infinitesimal.

c) *Período de formación de las matemáticas de magnitudes variables*.- El comienzo de este período está representado por la introducción de las magnitudes variables en la geometría analítica de Descartes y la creación del cálculo diferencial e integral en los trabajos de I. Newton y G.V. Leibniz. En el transcurso de este período se formaron casi todas las disciplinas conocidas actualmente, así como los fundamentos clásicos de las matemáticas contemporáneas. Este período se extendería aproximadamente hasta mediados del siglo XIX.

d) *Período de las matemáticas contemporáneas*.- En proceso de creación desde mediados del siglo XIX. En este período el volumen de las formas espaciales y relaciones cuantitativas abarcadas por los métodos de las matemáticas han aumentado espectacularmente, e incluso podríamos decir exponencialmente desde la llegada del ordenador.

Las distintas ramas que pueden analizarse son: (a) Álgebra y Aritmética; (b) Análisis Matemático; (c) Geometría.

En nuestro estudio nos interesa lo correspondiente a las matemáticas de magnitudes variables, aunque realmente necesitamos remontarnos más atrás en el tiempo.

Aunque la idea de variable tiene un papel central en las matemáticas de hoy, no siempre fue así. El concepto, como es natural dentro de la matemática, tuvo diferentes etapas para llegar al que utilizamos hoy en día. Youschkevitch (1976) distingue varias etapas dentro del desarrollo del concepto de función, que podemos relacionar con la evolución del álgebra y, con ello, con las diversas concepciones de variable. Estas etapas son:

1.- La etapa de la Antigüedad, en la que el estudio de casos particulares de dependencias entre dos cantidades aún no había aislado nociones generales de cantidades variables y funciones. Esta etapa se conoce como período pre-diofantino (circa 250 AD), debido al lenguaje algebraico utilizado; en el álgebra de esta época llamada – **algebra retórica**- todos los argumentos se escribían en forma extensa.

2.- La etapa de la Edad Media, en la que estas nociones generales eran primero expresadas definitivamente, tanto en formas geométricas como mecánicas pero en las cuales, al igual que en la antigüedad, cada caso concreto de dependencia entre dos cantidades estaba definida por una descripción verbal o por una gráfica, más que por una fórmula. Esta etapa se extiende desde Diofanto hasta fines del siglo XVI; el álgebra de esta época corresponde a la fase del **algebra sincopada**, en la que aparecen algunas abreviaturas.

3.- *La etapa del Período Moderno*, en la que empezó a predominar la expresión analítica de las funciones. En esta época hace su aparición el **álgebra simbólica** y al mismo tiempo que los métodos, álgebra y geometría analítica y cálculo infinitesimal se desarrollaban, se desarrollaron también las nuevas concepciones que influyeron en la forma que tomó la matemática durante los siglos XVII, XVIII y XIX. Los conceptos de variable y función se introdujeron a partir de la concepción del movimiento y pasaron a primer plano.

Sin pretender realizar un estudio exhaustivo de este desarrollo, daremos un vistazo al pasado e intentaremos identificar y describir los obstáculos epistemológicos asociados a dicho concepto que se configuraron a lo largo de estas etapas.

2.2.1 Etapa de la Antigüedad.

El concepto de número surge de la necesidad de cuantificar: desde culturas muy remotas ya era necesario contar colecciones con un número de elementos cada vez mayor. Igualmente, la geometría tiene su origen en necesidades prácticas: su origen proviene de la medición de áreas. Otras formas de cuantificar utilizadas posteriormente son calcular y estimar.

La matemática mesopotámica logró varios avances conceptuales importantes, como son:

a) Se crearon símbolos, gráficos o lingüísticos, para denotar a los números.

b) Se utilizó una base y hasta un proceso posicional para representar números cada vez mayores.

c) Se efectuaban operaciones numéricas complejas y se construyeron tablas de multiplicar, tablas de multiplicar por recíprocos para representar la división.

Y, aunque los babilonios no utilizaron letras para representar variables, los términos longitud, anchura, área y volumen les servían para este fin (7 longitud + 5 longitud = 12 longitud).

Un punto muy importante es que el grado de abstracción logrado ya era muy grande y se tenía una conceptualización de "número", para tener significación por sí mismos.

Precisamente cuando se da el paso de contar y medir a calcular y estimar es cuando la aritmética mesopotámica funciona como ciencia predictiva, pues permite hacer ciertas predicciones; por ejemplo, para hacer cálculos astronómicos o relacionados con áreas y volúmenes, métodos para resolver ecuaciones cuádricas, cúbicas y cuárticas, tablas con potencias de números para los cuales, por medio de interpolación, resolver ecuaciones de tipo exponencial.

La necesidad de contar colecciones finitas de objetos obligó al hombre a utilizar los números naturales; al asociar en suma y resta estos conjuntos, los naturales se extienden a los enteros. Pero después, al presentarse la necesidad de "medir "longitudes, etc., se requirió el uso de fracciones (racionales).

Los griegos tenían dos peculiaridades que los distinguían de los egipcios y babilonios: eran muy dados a construir grandes teorías a partir de las pocas evidencias que obtenían con su método de observación directa y también de tratar de comprobar, por todos los medios a su alcance, si tales teorías se ajustaban a la realidad.

La matemática prehelénica no contaba con nada que pudiera llamarse un teorema, y menos con una prueba tal como la entendieron los griegos; sólo contaban con recetas que elevaban al rango de verdades al verificar una y otra vez que podían realizarlas, cuando iban a la realidad y comprobaban sus datos. De ahí que mostraran una total indiferencia por contar con fórmulas precisas. Este plantearse de manera general los problemas es el paso que implicó tomar el camino de la generalidad y la abstracción, que es donde se inicia la conceptualización de variable.

Es obligado admitir la influencia egipcia e incluso babilónica en el origen de las matemáticas griegas : los griegos, al tratar de convertir esa especie de ciencia experimental que heredaron del Oriente en una ciencia basada en la deducción, dieron un giro que desembocó en la formalización, al demostrar los resultados mediante razonamientos y ya no obtenidos por simple verificación repetitiva ; de esta forma, las nociones como demostración, teorema, definición y axioma sustituyeron al carácter empírico y particular de las matemáticas prehelénicas. Así, surgen las estructuras matemáticas y los métodos de demostración. De aquí, podemos decir que los egipcios eran expertos en el método práctico, y los griegos en el teórico.

En otras palabras, en las ideas aritméticas de los pitagóricos podemos vislumbrar la preocupación por un pensamiento matemático en sí mismo, donde las matemáticas toman un carácter abstracto y diferente al carácter empírico y pragmático de las matemáticas babilónicas y de los egipcios. Además, se percibe la generalidad en las operaciones aritméticas; ésta se corresponde con la identificación de una determinada regla que se cumple en una secuencia. Aunque aún esta regla no se considera como una generalización, pues no se realiza una comprobación para todos los elementos (infinitos) de la secuencia; no obstante, está latente en tal regla un sentido de generalidad que sin producir aún un algoritmo explícito, sí hay el reconocimiento de que en distintos casos particulares, unos objetos matemáticos (n) tienen un comportamiento que sigue una regla. El comportamiento general dentro de los casos particulares, implícitamente conlleva la idea de *variación*: algo permanece invariante cuando se aplica a una variedad de casos. La generalidad y las reglas asociadas a ésta, se pueden apreciar por ejemplo en;

La obtención de cuadrados a partir de las sumas de la sucesión de impares: 4 = 1 + 3; 9 = 1 + 3 + 5; 16 = 1 + 3 + 5 +7. Que en lenguaje moderno esto nos conduce a la expresión: $n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$.

Para los griegos no eran desconocidas las ideas de cambio y de cantidad variable. Desde la época de Heráclito y de Zenón de Elea ya habían sido examinados los problemas del movimiento, de la continuidad y del infinito. Además, una gran parte de la filosofía natural aristotélica estaba consagrada al estudio de estos temas (Youschkevitch, 1976, 44). Puede decirse, entonces, que en el pensamiento griego estaban contenidas las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables, aunque consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. Incluso, en los Elementos de Euclides los objetos matemáticos y las relaciones son estáticas y en ellos se estudian los objetos fijos y sus relaciones. Es debido a esta filosofía "estática" de las matemáticas que, durante mucho tiempo, los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas, más que en términos de variables, lo cual condujo a las ecuaciones y proporciones (Díaz, 2001).

De lo que sí no hay duda es que las paradojas de Zenón suscitaron una gran conmoción entre los griegos y que, durante mucho tiempo, el tratar de desentrañar lo que había detrás de esas "falacias" impulsó el desarrollo del estudio de modelos aritméticos del tiempo y del espacio que hicieran posible una descripción adecuada del movimiento. Pero no es sino hasta el último tercio del siglo XIX en que se dan estos modelos.

Los griegos, preocupados sobre todo por la representación de los números por medio de cantidades geométricas y desprovistos de una notación algebraica adecuada, tuvieron que inventar procesos geométricos ingeniosos para llegar a solucionar problemas algebraicos. Consiguieron no sólo demostrar algunas identidades geométricas, sino también resolver, utilizando la geometría, ecuaciones cuadráticas. Esta geometría algebraica griega procede en gran parte de los trabajos de los pitagóricos.

Los números figurados, concebidos como los números de puntos en ciertas configuraciones geométricas, constituyen un nexo directo entre la geometría y la aritmética. La nomenclatura geométrica de estos números es abundante y comienza generalmente con los números *triangulares*, *cuadrados*, *rectangulares*, *pentagonales* y *hexagonales*.

Numerosos e interesantes problemas relativos a propiedades maravillosas de estos números figurados, pueden ser demostrados utilizando únicamente diagramas de puntos; en ellos pueden apreciarse la generalidad y las reglas asociadas a ésta. Así, la suma de la serie aritmética: $1 + 2 + 3 +... + n = \frac{n(n+1)}{n}$ corresponde al n-ésimo número triangular y su figura es un triángulo equilátero; la suma de los primeros n impares, es decir: $1 + 3 + 5 +... + (2n - 1) = n^2$ corresponde al n-ésimo número cuadrado y su figura es la de un cuadrado. Algebraicamente, un número rectangular representa la suma de los primeros n números pares, en la forma $2 + 4 + 6 +... + 2n = n(n + 1)$. Y su figura es la de un rectángulo. Además aparecen los números pitagóricos: $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$, para n impares y $(n+1)^2 = (n-1)^2 + 4n$, para números pares.

Sin embargo, se debe resaltar que la ausencia de un símbolo, un término o una expresión que diera cuenta de esta generalidad no se convirtió en obstáculo para la construcción de una aproximación (por la vía de lo finito) a la noción de variación, propia de la época.

La tradición de considerar los números como magnitudes perduró en el pensamiento matemático de los griegos, aún ante la dificultad presentada por el descubrimiento de la no racionalidad de $\sqrt{2}$, o de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado de lado unitario; esta dificultad se traducía en que si bien los números (racionales) expresan magnitudes geométricas, no todas las magnitudes geométricas se pueden expresar como números, lo cual conllevó a que la colección de las magnitudes geométricas (segmentos) era más completa que el conjunto de los números racionales; surge entonces un cálculo más general en forma geométrica: el álgebra-geométrica que se encuentra en *Los Elementos* de Euclides, por lo que, después de Pitágoras, los trabajos matemáticos se orientaron en gran medida hacia la construcción de dichos *Elementos*. En los *Elementos* los números se consideran enteros y discretos, pero las magnitudes continuas por lo que sólo podía construirse una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza [Edwards, 1982]

Los griegos sustituyeron la manipulación puramente aritmética, que hacían babilonios e hindúes, por procedimientos geométricos; incluso las soluciones de ecuaciones de grado mayor que dos. Sus logros fueron notables si se tiene en cuenta lo pesado que resulta, para nuestros ojos, la manipulación de un “álgebra de segmentos”.

Podemos decir que los problemas planteados se expresan en dos direcciones: por un lado, la expresión de relaciones entre lados y áreas de figuras planas y por otro, la resolución de ecuaciones en forma geométrica.

La mayor parte de los resultados en Euclides II podemos interpretarlos algebraicamente de una manera inmediata, lo que ha llevado a muchos a afirmar que éste es un libro de resultados algebraicos probados de manera geométrica. El empleo de la geometría algebraica tiene la ventaja de que permite expresar, en terminología más accesible, algunos resultados.

Pero es importante remarcar que los antiguos griegos nunca usaron la noción de movimiento en sus obras sistemáticas; descubrieron bastantes cosas ayudándose imaginativamente con puntos móviles imaginarios, pero nunca introdujeron el uso del movimiento en sus demostraciones finales.

Por lo que se refiere a la resolución de ecuaciones en forma geométrica, los griegos utilizaron principalmente dos métodos: el método de las proporciones (basado en su técnica) y el método de la aplicación de las áreas. Las proporciones representaban la razón numérica que se puede establecer entre dos cantidades de una misma magnitud, pero siempre comparaban cantidades de la misma naturaleza y no distinguían la relación entre magnitudes diferentes, lo cual no les permitió observar relaciones de dependencia entre ellas.

Con la teoría de las proporciones podemos encontrar segmentos lineales que cumplan proporciones como:

A) $a : b = c : x$

B) $a : x = x : b$

donde a, b y c son segmentos lineales dados. Esto es, utilizando regla y compás resuelven ecuaciones que dan cuenta de la generalidad a la que condujo el sistema numérico griego para clasificar relaciones entre magnitudes, tales como: encontrar el lado x de un cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo ab($x^2 = ab$), o, dado un cuadrado de área b^2, encontrar un rectángulo de igual área de lado a ($ax = b^2$).

En esta álgebra retórica, esto es, expresada totalmente en lenguaje natural- de los griegos, la variable (x) aparece referida a una magnitud (longitud, superficie, volumen) y connota un valor numérico desconocido (incógnita) que corresponde al resultado de la medición de una magnitud conocida.

En resumen, las culturas de la antigüedad no tuvieron un acercamiento a la notación simbólica, aunque el estudio de su matemática nos muestra que resolvieron problemas donde se requería la determinación de una cantidad desconocida. El álgebra fue retórica, esto es, totalmente expresada en lenguaje natural. Por otro parte, cualesquiera que hayan sido las causas y circunstancias que condujeron a las características de la ciencia antigua descrita, el pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de cantidad variable o de una función (Youschkevitch, 1976, 40).

2.2.2. Etapa de la Edad Media.

En el período alejandrino surgen la aritmética y el álgebra independientes de la geometría. El trabajo aritmético de Arquímedes, Apolonio y Ptolomeo es un paso en esta dirección, aunque usaron la aritmética para calcular cantidades geométricas: Arquímedes fue probablemente el más ilustre de los matemáticos griegos. Sus trabajos encierran a la vez un contenido original y rebuscado; tocó las principales ramas de las matemáticas griegas, reestructurando algunas con la aportación de teoremas nuevos, desarrollando partes inexploradas por sus predecesores e innovando sobre varios temas teóricos o prácticos.

Con Apolonio, las secciones cónicas se convierten en un tema matemático complejo que comprende una teoría de cónicas tan elaborada que había que esperar a que las investigaciones matemáticas del siglo XVII hagan posible un desarrollo en profundidad, lo que se consigue gracias a la aparición del álgebra; instrumento inexistente en la época del gran geómetra.

La aplicación de fórmulas matemáticas y un elaborado estudio de las mediciones constituyeron la obra de Heron. Por último, Diofanto se ocupó detenidamente de un álgebra sincopada en la que la teoría de las ecuaciones desempeña un papel preponderante. No hay duda de que Heron, Nichomachuss y Diofanto trataron los problemas aritméticos y algebraicos en sí mismos, esto es, no dependían de la geometría ni por motivación, ni para apoyar la lógica de las relaciones establecidas entre las cantidades.

En problemas tales como: "Dado un cuadrado tal que la suma de su área y el perímetro es 896, hallar el lado" ($x^2 + 4x = 896$), el área y la longitud eran sólo palabras para ciertos elementos aritméticos desconocidos. En esta tradición aparece la variable como *cantidad desconocida*.

El punto más alto de desarrollo del álgebra griega alejandrina es alcanzado por Diofanto; sus trabajos difieren en esencia de lo que hoy es el álgebra y también de la geometría algebraica griega. Su principal obra es la *Aritmética*, que comprende 189 problemas con sus soluciones; esta obra representa sobre todo una nueva rama de las matemáticas griegas, tanto a nivel de contenido – se parece al álgebra babilónica pero se diferencia de ella en el "significado" del número[1] - como en el plano de los nuevos enfoques: divorcio con los métodos geométricos griegos. Dentro del marco histórico de evolución del álgebra, que pasa de la fase retórica, en la que todo se escribe, a la fase sincopada, en la que aparecen algunas abreviaturas, para, por último, desembocar en la fase simbólica, la *Aritmética* debe situarse en la segunda categoría.

En los seis volúmenes de la *Aritmética* Diofanto introduce el simbolismo algebraico al representar lo desconocido por ζ (el número del problema) – símbolo que parece ser omega (ω), la cual no corresponde a un número en el sistema griego -. Además se observa una utilización sistemática de las abreviaturas para las potencias de números así como para las relaciones y las operaciones. Así, aparecen abreviaturas para las incógnitas, sus potencias hasta la sexta, para la unidad, las operaciones de adición y sustracción, y los inversos. La unidad es M, la incógnita es ζ, su cuadrado se representa por Δ^r, su cubo por K^r, la cuarta potencia por $\Delta^r\Delta$ y la quinta por ΔK^r, y la sexta por K^rK. Diofanto conoce, evidentemente, las leyes de los exponentes positivos y negativos. Por ejemplo, $x^3 = 5x^2 + 8x - 1$ corresponde a $K^r\alpha\ \eta\ \Delta^r\varepsilon M\alpha$, lo que se lee:

---

[1] Las matemáticas babilónicas comprenden generalmente una solución aproximada de las ecuaciones determinadas, mientras que Diofanto se ocupa generalmente de la solución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas.

incógnita al cubo unidad + incógnita 8 – incógnita cuadrado 5, unidad 1,

en donde los coeficientes numéricos se sitúan después del número y los términos negativos y positivos se agrupan separadamente. No existe ninguna base que permita establecer postulados, ni se buscan todas las posibles soluciones. A pesar de que aparezca el símbolo de la sustracción, una solución negativa es impensable para Diofanto~~.~~

Es importante reconocer que las letras siempre representaron cantidades desconocidas, de manera que el conocimiento de los algebristas se reducía exclusivamente a descubrir la identidad verdadera de la(s) letra(s), que no es lo mismo que obtener una expresión para la solución general.

La tendencia hacia un método general se manifiesta a veces y puede resumirse así: si dos incógnitas deben satisfacer dos condiciones, entonces se eligen las dos incógnitas de manera que una condición sea satisfecha; el problema se reduce así a satisfacer una sola condición. Para evitar ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, Diofanto prefiere operar sucesivamente con estas condiciones a fin de reducirlo todo a una sola incógnita. Además, Diofanto resulta muy difícil de entender para un matemático moderno ya que, incluso después de haber estudiado un gran número de soluciones diofánticas, con frecuencia nos quedamos asombrados ante un nuevo problema, sobre todo al examinar la solución propuesta. En suma, la carencia de métodos generales y la aplicación repetida de medios ingeniosos, específicos de cada problema, resumen bien las características de su tratamiento heurístico.

Diofanto, en su álgebra sincopada, desarrolla sus soluciones en un texto continuo; al igual que hoy, la ejecución de las operaciones es totalmente aritmética, esto es, no se apela a la geometría para ilustrar y sustentar las afirmaciones. Así, $(x-1)(x-2)$ es desarrollado algebraicamente. Diofanto trabaja problemas de ecuaciones en una o más variables (incógnitas), ecuaciones indeterminadas de segundo grado, cuadráticas en dos incógnitas y cuadráticas simultáneas.

Parece razonable considerar la *Aritmética* de Diofanto como una compilación de problemas – análoga a la de Euclides en sus *Elementos*- realizada por una persona competente en la materia, que asimiló lo mejor, estructurando el conjunto en un orden lógico e inteligente.

Entre 250 y 1600 ad. los algebristas aumentaron gradualmente el tipo de ecuaciones que podían resolver – primero cuadráticas y después cúbicas – pero todas las ecuaciones tenían coeficientes numéricos y las soluciones eran expresadas exclusivamente en términos numéricos. Solamente los métodos de solución pueden describirse como “generales”, en el sentido de que pueden aplicarse a una clase completa de ecuaciones cuadráticas o cúbicas. Los algebristas de este período fueron capaces de aceptar la “ley de la cerradura” (Collis, 1975) con respecto al uso de letras, en la medida que se fueron usando los métodos de sustitución: pero eventualmente todas las letras fueron evaluadas numéricamente. Las “soluciones generales” usando letras no podían expresarse.

El valor del período alejandrino, en este estudio, radica en el reconocimiento de un referente eminentemente numérico para la variable y en la potencia del símbolo en cuanto a generalidad y abstracción. A pesar de ello, una teoría algebraica general aún no está presente, lo cual se podría explicar por el hecho de que el estilo cognitivo de Diofanto se centra en el estudio de propiedades y relaciones numéricas. No cabe duda de que Diofanto contribuyó de manera original a la ciencia matemática griega, a la que aportó nuevos problemas y modos de tratamiento de los mismos, así como algunos métodos generales.

Así, esta segunda etapa se ejemplifica por el uso algebraico de letras para cantidades desconocidas; se resolvieron ecuaciones con una y dos incógnitas, utilizando un solo símbolo y, posteriormente, se introdujeron letras diferentes para incógnitas distintas.

En el siglo XIII Jordanus Nemorarius (1225 - 1260) publicó su libro De Numeris Datis. En él utilizó las variables literales para las incógnitas, pero también para los valores conocidos. Esto abrió el horizonte para las soluciones generales que faltaron en el trabajo de Diofanto y al álgebra simbólica.

En resumen, la idea de una variable algebraica aún no surgía y, de este modo, no se consideraba que una ecuación con dos incógnitas establecía una relación funcional entre dos variables. En esta etapa aparece el Algebra Sincopada nombre que ideo Nesselman en 1842, en la que los procedimientos para resolver problemas fueron demostrados por medio de ejemplos numéricos, que el lector podía adapta a otros casos equivalentes. Sin embargo, las notaciones sincopadas no permitieron la formulación de soluciones generales.

2.2.3 Etapa del Período Moderno.

El desarrollo del concepto de variable en este período puede dividirse en dos fases: una en donde la variable se caracteriza como número general y otra en la cual adquiere un carácter funcional; en este período es cuando se presenta el cambio más significativo: el paso del concepto de incógnita al concepto de variable. Esto permitió que surgieran disciplinas tales como el cálculo y el análisis.

Con el paso del tiempo, la teoría de ecuaciones terminó por separarse de la geometría, y se fue desarrollando gradualmente en ella una cantidad de simbolismo considerable. Vieta (siglo XVI) contribuye considerablemente a la introducción del simbolismo con su obra "*Introducción al arte analítico*"; fue fuertemente influenciado por antiguos textos griegos, pero la forma de reinterpretarlos refleja una concepción y un entendimiento del mundo que difería de los tiempos antiguos y que llevó al desarrollo de ideas completamente nuevas. Vieta en esta obra enfocó su trabajo al desarrollo de un método general que intentó ser un instrumento para la solución de problemas en general.

El *Arte Analítico* de Vieta fue influenciado fuertemente por el método presentado por Pappus con referencia a teoremas geométricos y problemas, y por los procedimientos de la *Aritmética* de Diofanto. El conjeturaba que 'un procedimiento generalizado que no está confinado a figuras y números está situado, no sólo detrás del análisis geométrico de los antiguos, sino también... detrás de la *Aritmética* Diofantina...' (Klein J., 1968, 158).

Sin embargo, la gran innovación y diferencia crucial con respecto a los "métodos generales" antiguos para la solución de problemas fue la concepción de Vieta del objeto manejado por el método general. Aunque los métodos generales desarrollados en tiempos antiguos siempre fueron aplicados a números, magnitudes, puntos, períodos de tiempo, etc., no existía una concepción de un "objeto general" al cual se aplicara el método general. Vieta concibió un objeto general, al que llamó "especie", y lo trató como un objeto que podía operar bajo reglas bien definidas. Este "objeto general", mientras preservaba su conexión con los números, representaba magnitudes generales y convertía el objeto de una disciplina matemática general, no identificable con aritmética o con geometría. Este "objeto general" representaba un valor potencial, sin embargo, fue tratado como un objeto matemático actual capaz de ser manipulado y operado.

Así, con Vieta aparece un concepto completamente nuevo: el concepto de "número general". Sin embargo, debe ser preocupante que, aunque Vieta concibió muy claramente la generalidad, trabajó con ella e introdujo un simbolismo para ella (denotaba cantidades desconocidas con vocales y coeficientes con consonantes), no tenga aún un sistema simbólico completamente desarrollado para expresar su teoría. De hecho, para describir el *Arte Analítico* así como las reglas operativas a seguir cuando trabajaba con "especies", utilizaba álgebra retórica o sincopada.

En su obra Vieta hace énfasis en las ventajas del uso de los símbolos, no sólo para las variables (incógnitas A, E, I,...) sino también para las cantidades conocidas (parámetros constantes B, C, D,...). De esta manera podía trabajar en forma general. Aún así, la adopción por Vieta de un simbolismo adecuado para hacer las identificaciones anteriores y la utilización de los símbolos germánicos para la adición y la sustracción no son suficientes para simbolizar completamente algunas ecuaciones. En efecto, su álgebra es moderna en algunos aspectos, y antigua en lo que respecta a la utilización de palabras o abreviaturas. Desarrolló así una notación sincopada tal como

A cub + plano in A aequatur C in A quad + D sólido

equivalente a $A^3 + BA = CA^2 + D$.

Vieta puso también el álgebra en conexión con la geometría, determinando las ecuaciones que corresponden a diversas interpretaciones geométricas. Empleaba esta técnica sólo en el caso de problemas geométricos que llevaban a ecuaciones determinadas con una sola incógnita.

Aunque Vieta no se enfocó a problemas que involucraran funcionalidad y no aplicó su nuevo método a favorecer este concepto, la creación del álgebra simbólica tuvo una gran influencia en el desarrollo de la idea de función y relacionó cantidades variables.

El análisis de la *Aritmética* de Diofanto y su contraste con el *Arte Analítico* de Vieta infieren que el cambio más significativo en la simbolización en esa etapa del nacimiento del álgebra, es el paso del concepto matemático de incógnita al concepto matemático de variable[2].

Según Sierpinska (1992, 44) fue tan significativo el desarrollo de la notación simbólica y de la resolución de ecuaciones que, por medio de él, se fue superando el obstáculo epistemológico de la diferenciación existente entre números y magnitudes; el uso de letras en álgebra van haciendo más y más abstracta la noción de magnitud, de manera que cada vez se justifica menos el distinguir entre magnitudes y proporciones por un lado y números e igualdades por otro. Sin embargo, el hechizo del álgebra podría convertirse en un obstáculo para el desarrollo del pensamiento funcional en Matemáticas, pues llegó a pensarse que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden describirse mediante expresiones algebraicas y ecuaciones.

---

[2] En su "Introducción al Arte Analítico" Vieta explica la superioridad de su propio sistema algebraico sobre el de Diofanto; lo hizo resolviendo un problema que Diofanto había resuelto previamente en su "Aritmética" utilizando su propio sistema: la solución de Diofanto no es inmediatamente general (y naturalmente, Vieta prestó atención a este punto). En cambio, la solución de Vieta sí lo es.

La etapa siguiente fue la de plantear ecuaciones indeterminadas con dos variables (incógnitas) para resolver problemas relativos a lugares geométricos; Fermat y Descartes, en el siglo XVII, dieron este paso casi simultáneamente: aplicaron el nuevo simbolismo a la geometría y presentaron el método analítico para introducir las funciones. Se introduce así un carácter más amplio a la variable, en el sentido de que ésta toma valores sobre un rango determinado, es decir, un carácter funcional. Descartes consideró la nueva álgebra como una herramienta útil para modelar y pensar acerca de problemas que implican cantidades indeterminadas o desconocidas y, por primera vez, consideró que

"*una ecuación en x y y es una manera de introducir una dependencia entre cantidades variables de tal manera que permite calcular el valor de una de ellas correspondiente a un valor de la otra*".

A la vez, Descartes introduce el convenio de utilizar las últimas letras del alfabeto (*x, y, z*) para denotar números desconocidos y las primeras (*a, b, c,...*) para los números conocidos, recordando con esto que, en Matemáticas, es esencial las economías mentales que permiten que un cálculo largo y complicado resulte fácil.

Aunque Descartes manifestara un cierto interés por los métodos infinitesimales, no participó en su desarrollo. Sin embargo, con motivo de la polémica con Fermat mostró su interés en el problema de las tangentes. Cabe señalar que su procedimiento es puramente algebraico y no recurre a conceptos de límite o de infinitésimo. Descartes evitó el uso de métodos infinitesimales a causa de los riesgos que presentaban y debido a la ausencia de bases teóricas para el razonamiento infinitesimal. Se oponía así a un movimiento importante de su época.

Después de este primer acercamiento, el lenguaje algebraico fue adoptado gradualmente para expresar funcionalidad, pues el surgimiento de una simbología algebraica precisa, unida al carácter funcional de la variable, permitió la consolidación del álgebra simbólica y el surgimiento de disciplinas generales como el cálculo y el análisis.

Oresme (1323-1382) es célebre en Matemáticas por varias razones; una de ellas es la representación gráfica de variaciones, que da origen a la connotación de la variable como variación en su trabajo con latitudes. El estudio de la cuantificación de las "cualidades" o de las formas variables se desarrolla progresivamente en la época de Oresme y se refiere tanto a fenómenos físicos, tales como la velocidad, la variación de la temperatura, la variación de la intensidad luminosa, como a otros fenómenos de diversa índole. Además, el estudio cuantitativo de la variación lleva a los filósofos del siglo XIV a su clasificación según que la tasa de variación o de cambio sea o no uniforme, después según que la tasa de cambio de la tasa de variación de una cualidad sea o no uniforme, y así sucesivamente. Partiendo de estas cosas conocidas, Oresme tuvo la brillante idea de trazar el gráfico de las variaciones observadas, para así facilitar la comprensión de la variación.

La utilización gráfica en términos de longitud y latitud –la una perpendicular a la otra- de un diagrama velocidad-tiempo es en esencia una operación de geometría analítica. El uso que Oresme hace de las coordenadas es importante porque sirven para representar gráficamente una cantidad variable o una cualidad. Oresme realiza innovaciones en la representación gráfica de una función, pero parece más interesado por el área bajo la curva trazada que por el estudio analítico de ésta. Las preocupaciones de

Oresme se sitúan más en el aspecto de la variación del fenómeno, representada por la curva, y en la variación del área bajo la curva, que en la relación analítica entre el gráfico y el fenómeno estudiado.

En Oresme y sus contemporáneos, la representación gráfica es más bien escasa y su estudio es más cualitativo que cuantitativo. Sin embargo, la noción de gráfico, como elemento descriptivo de una cualidad, facilita la comprensión, y el estudio de la variación de los fenómenos constituyó un tema de moda al que los matemáticos de los dos siglos siguientes dedicaron una particular atención.

Los métodos de análisis preconizados por los predecesores de Newton y Leibniz fueron desarrollados con el objeto de resolver una clase de problemas bien definidos. Aunque diversos matemáticos del siglo XVII hubieran desarrollado algoritmos eficaces, ninguno de ellos había conseguido proporcionar el método general que se esperaba. Asimismo, pocos matemáticos habían percibido los estrechos lazos existentes entre los problemas estudiados, porque les faltaba un método general de cálculo o porque se preocupaban demasiado de encontrar una solución específica para su problema.

Newton y Leibniz fueron los primeros que estudiaron los problemas del análisis infinitesimal elaborando un método general y nuevo, aplicable a muchos tipos de problemas. La notación algebraica y las técnicas que utilizaron les permitieron no sólo emplear una herramienta más eficaz que la de la geometría, sino también estudiar diversos problemas de geometría y física mediante el mismo método general.

Newton descubrió los principios de su cálculo diferencial e integral, un potente método general, hacia 1665-1666, y durante el decenio siguiente elaboró al menos tres enfoques diferentes de su nuevo análisis.

La primera información publicada acerca de su cálculo diferencial e integral aparece indirectamente en sus famosos *Principia*, de 1687. Aunque en esta obra predomina la forma sintética y, por otra parte, Newton utiliza métodos geométricos en sus demostraciones, se encuentran sin embargo algunos pasajes analíticos. Newton introduce la noción de “diferencial”, designada por la palabra “momento”, el cual es producido por una cantidad variable llamada “genita”. Este constituye una aproximación al concepto de función. Parece que estas cantidades llamadas “genita” son variables e indeterminadas, y que aumentan o decrecen mediante un movimiento continuo, mientras que sus momentos son crecimientos temporales que pueden generar partículas finitas.

Por su parte Leibniz, en 1666, redacta *De Arte Combinatoria*, ensayo en el que presenta un intento de crear un método general en el cual todas las verdades de la razón deberían reducirse a una especie de cálculo.

Aunque Leibniz se distrajo al querer abarcar demasiado, no es menos cierto que su genio matemático es notable. Emprendió sus primeras investigaciones con Huygens y, guiado por él, desarrolló sus concepciones del cálculo diferencial e integral bebiendo en las fuentes de sus predecesores. Deslindó así los principios del cálculo, creó una notación eficaz, percibió bien la relación de reciprocidad entre la diferenciación y la integración, y expuso el algoritmo correspondiente.

De este modo, la connotación de la variable como variación es consolidada en los trabajos de Newton y Leibniz. Este concepto de variable está muy relacionado con el desarrollo del concepto de función. De hecho, fue Leibniz quien introdujo los términos función y variable (Klein, 1972).

Así, la noción de variable irrumpe definitivamente en el escenario matemático con el advenimiento del análisis infinitesimal o cálculo, aunque ya en tiempos de Descartes su método analítico permite un enorme avance en el uso de la letra como incógnita específica a su utilización como número generalizado. Dice Descartes:

"*Y notando luego que para entender esas relaciones unas veces tenía que considerarlas una por una, mientras que otras veces era necesario pensarlas o abarcarlas todas juntas pensé que, para mejor considerarlas individualmente, debía contemplarlas como relaciones entre líneas rectas; por otra parte que, con objeto de tenerlas en la memoria o de abarcarlas todas juntas debía expresar esas relaciones mediante ciertos caracteres lo más simples posible. De este modo, pensé que podía tomar prestado lo mejor del análisis geométrico y del álgebra...*"[3]

Posteriormente, en la aplicación de los resultados de Descartes al estudio de problemas sobre el movimiento, Newton y Leibniz introducen expresiones como "infinitamente pequeño", "incrementos evanescentes", "cantidades que se desprecian", "sucesiones infinitas" con las cuales, además de referir la generalidad puntual permite, por decirlo así, guardar memoria del pasado "inmediato" como forma sensible de constatar el cambio.

Como resultado del desarrollo de la teoría que estudia tales fenómenos, y que paulatinamente se independiza de ellos, el cálculo infinitesimal, la referencia de esas expresiones citadas se decanta y consolida dos, que se vuelven fundamentales para la teoría: variable y función.

Sin embargo, el carácter que toma la variable en el cálculo de los siglos XVII y XVIII es impensable al margen del concepto del continuo real manejado en esa época (conjunto de puntos actuales), e inseparable en las conceptualizaciones posteriores.

Por ejemplo, Cauchy (siglo XIX) desarrolló el cálculo diferencial e integral sobre la base del concepto de límite y afirma que su principal objetivo es conciliar el rigor con la simplicidad que resulta de la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas. Para él, una variable es una cantidad ideada para recibir sucesivamente valores diferentes.

En los textos de Cauchy el concepto de límite se convierte, claramente y de manera definitiva, en un concepto aritmético sin apoyo geométrico, como puede verse en su definición:

"*Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor real fijo, de manera que llegan a diferir tan poco como se quiera de él, éste último se llama el límite de todos los demás*".

Esta definición da cuenta exacta de la idea intuitiva de límite, pero es más verbal que numérica. Cauchy se sirve a continuación de esta definición para definir un infinitamente pequeño, que resulta ser simplemente una cantidad variable dependiente con un límite igual a cero: "Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente hasta convertirse en más pequeños que cualquier número dado, esta variable se convierte en lo que se llama un infinitesimal o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene cero como límite."

---

[3] Citado por Philip, J. (1985).La Naturaleza de las Matemáticas. En Sigma: El mundo de las Matemáticas, vol. 1. Barcelona; Grijalbo págs. 359-360.

El continuo de Cauchy (tal vez a diferencia del de Leibniz) no es un conjunto de puntos actuales, sino un conjunto de puntos que se mueven, la *cantidad variable* no es simplemente una manera de hablar, sino una parte vital de la teoría. Por ejemplo, el "punto" en el que Cauchy muestra que $senx + \frac{sen2x}{2} + \ldots$ no converge, es un punto en movimiento, $x = \frac{1}{n}$, donde $n \to \infty$. [Lakatos, 1981; citado por Torres, 1991]

Así, pues el continuo de Cauchy es un conjunto más bien "dinámico". Sin embargo, ciertas expresiones como "suficientemente pequeña", "llega a ser y sigue siendo", serían eliminadas más adelante para ser sustituidas por expresiones numéricas bastante más rigurosas, gracias a los trabajos de Karl Weierstrass (1815-1897); la formulación lógica de esta notación se erige en la segunda mitad del siglo XIX, cuando construye una base formal para el análisis, independiente de la intuición geométrica.

En la presentación weierstrassiana la noción de variable no pierde su dinámica, sino que su teoría del movimiento explica el movimiento, el cambio y las variables en términos de un álgebra infinita de cantidades actuales; la expresión "una variable se aproxima a un límite" que se encuentra en las definiciones de Cauchy sugiere implícitamente el tiempo y el movimiento. Weierstrass, por su parte, resalta el concepto aritmético e interpreta sencillamente una variable como "una letra que representa cualquier valor de un conjunto dado" ; una variable continua es una variable tal que si x_0 es cualquier valor del conjunto de los valores atribuibles a la variable y δ es un número positivo cualquiera, hay otros valores de la variable en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

La relación estrecha entre el concepto de variable y el de función continuó hasta la primera mitad del siglo XX, como se puede apreciar en la siguiente definición:

"*Los números relacionados que varían al mismo tiempo, como x y y en la ecuación anterior, se llaman variables. Cuando una variable depende de otra para su valor, decimos que esta es una función de la otra* (Upton, 1936, 239).

Durante este período muchos libros de texto distinguen entre cantidades que representan valores únicos, llamados constantes, y cantidades que representan muchos valores, que fueron llamados variables. Típica de esta distinción es la definición dada por Osborne (1909):

"*Una cantidad que puede asumir un número ilimitado de valores se llama una variable. Una cantidad cuyos valores no cambian se llama una constante. Por ejemplo, en la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, x y y son variables pero a es constante*" (Osborne, 1909,1).

Los movimientos de reforma de las Matemáticas al final de los años 50's y principios de los 60´s trajeron un cambio substancial en la definición de variable, un cambio que permanece aún en la actualidad. En respuesta a la búsqueda de unificar conceptos en el currículum de Matemáticas, el concepto de variable se enseñó desde el inicio en su forma más general; como resultado de ello todos los símbolos literales se consideraban como variables (Kieran, 1989).

De la asociación de las variables con las funciones se pasó a la asociación con los conjuntos. En un estudio de los libros de texto de Matemáticas publicados entre el final de los 50´s y el inicio de los 80´s, Tonnenssen (1981) encontró que casi todos los libros de texto, de una manera explícita o implícita, definen una variable como un símbolo fijo, así también como un referente para un conjunto de al menos dos elementos.

Esto es, casi todos los usos de las literales fueron variables. Aún el símbolo literal x en la expresión $x + 3 = 7$ es una variable, puesto que x representa cualquiera de los elementos del conjunto indefinido, pero implícito supuesto dominio, sea éste los números reales, racionales, enteros, números naturales, etc. En cuanto el dominio tenga dos elementos, x es una variable. Los únicos ejemplos de no variables son los numerales o números fijos para un número específico, tales como la base de los logaritmos naturales e, la velocidad de la luz c, y π. Un ejemplo típico de la definición de una variable en los libros de texto escritos durante los últimos treinta años se encuentra en el Dolciani et.al. (1967), allí se define una variable como "un símbolo que representa a cualquiera de los miembros de un conjunto específico, llamado el conjunto reemplazo o dominio de la variable" (pág. 26).

Con la virtual inclusión de casi todos los símbolos literales en la definición de variable, los matemáticos, profesores de Matemáticas, y escritores de textos de matemáticas han operacionalizado una definición que discrimina muy poco de cualquier uso para que los estudiantes aprendan álgebra. No sería productivo redefinir variable, pero los educadores requieren llegar a términos con las diferentes formas en que las variables se utilizan en contextos matemáticos, para darles a los estudiantes una oportunidad de reflexionar sobre estos diferentes usos.

A partir de este relato puede verse que, efectivamente, la evolución histórica del concepto de variable conlleva una serie de dificultades y problemas por los que tuvieron que atravesar los grandes matemáticos para ir respondiendo a necesidades específicas y cómo se llegó al concepto actual, lo cual sugiere una razón para explicarnos el por qué no es tan fácil para los estudiantes el comprender este concepto: no se necesita de mucha imaginación para reconocer que los estudiantes se enfrentan a dificultades similares.

De esta manera se pone de manifiesto la existencia de diferentes caracterizaciones del concepto de variable, a saber:

Variable como incógnita específica, donde la variable representa un valor numérico específico pero desconocido que puede ser calculado, es decir, la variable es una cantidad desconocida.

Variable como número general, donde la variable representa un número indeterminado manipulado en un método general; es el cambio más significativo en la etapa del nacimiento del álgebra.

V*ariables con carácter funcional*, en donde las variables representan números que toman valores dentro de un rango determinado. Cuando se tienen variables en una relación funcional, entonces los rangos están conectados mediante una relación de manera que podemos calcular el valor de una de ellas correspondiente a un valor de la otra, es decir, se presenta una dependencia entre cantidades variables.

A partir de la concepción del movimiento, se consolida la connotación de la variable como variación en los trabajos de Newton y Leibniz; así, esta noción irrumpe definitivamente en el campo matemático con la aparición del análisis infinitesimal.

Algunos de los obstáculos epistemológicos detectados durante la evolución a través del tiempo del concepto de variable que podemos mencionar son (Janvier, 1984):

- *Concepción sin movimiento*.- Desde la antigüedad y la edad media, las descripciones de cambio se hacían mediante largas y elaboradas explicaciones. La descripción de cambios o de las relaciones de entes que varían se hacían bastante indirectamente mediante el uso de proporciones, pero esto no sugería que un elemento variara con respecto a otro, más bien sugiere una forma de relacionar dos proporciones. Esta concepción fue ciertamente un obstáculo epistemológico que puede atribuirse mayormente a las características culturales y tradicionales de la filosofía griega, que no contaba con una concepción del movimiento.
- Disociación entre magnitudes y números.- Es debido a la incapacidad intrínseca para ver "número" o "cantidad" como algo que varía: las cantidades eran básicamente discretas y no involucraban cambios continuos, mientras que las magnitudes eran continuas. Esto provocó que no se observaran las leyes físicas como funciones matemáticas. Esta es otra característica importante para entender la construcción de la noción de variable que tienen los estudiantes.
- De la razón o proporción.- Por lo que se mencionó en el primer obstáculo, el aspecto funcional de la proporción quedó oculto por su carácter escalar.
- Homogeneidad de las proporciones.- Esto conducía siempre a comparar magnitudes de la misma naturaleza por lo que no podían encontrarse dependencias entre variables de diferentes magnitudes.

2.3 Resumen y Conclusiones.

En coincidencia con otros investigadores (Boyer, 1968; Harper, 1987) encontramos tres fases en el desarrollo histórico del concepto de variable: La fase retórica, la fase sincopada y la fase simbólica en las cuales se ponen de manifiesto tres caracterizaciones del concepto de variable, variable como incógnita especifica, variable como número general y variable como relación funcional.

En la fase de álgebra retórica, que duró a partir de épocas antiguas hasta la época de Diofanto (ac. 250 A.D.), las palabras no fueron abreviadas y no había símbolos para las incógnitas. Los problemas y las soluciones fueron descritos en el lenguaje natural.

La fase sincopada es el período de Diofanto hasta Vieta (1540 - 1603). En esta fase, notaciones cortas y abreviaturas fueron introducidas, por ejemplo, para representar potencias. Los símbolos literales ahora fueron utilizados para representar la incógnita. La actividad algebraica fue dirigida a encontrar el valor numérico de una incógnita; las soluciones eran números. Eventualmente diferentes letras fueron utilizadas para diversas variables.

En la fase sincopada, los procedimientos para resolver problemas fueron demostrados por medio de ejemplos numéricos, que el lector podía adaptar a otros casos equivalentes al problema. Sin embargo, las notaciones sincopadas no permitieron la formulación de soluciones generales.

En la tercera fase el álgebra simbólica- inició con François Vieta. En su trabajo, las variables literales también se refieren a cantidades dadas. El trabajo de vieta es de suma importancia en el desarrollo del álgebra, pues él fue el primero en distinguir los diferentes papeles de los símbolos literales (Boyer, 1968). Una incógnita (la "cosa") fue representada por una vocal, y las consonantes simbolizaron las cantidades conocidas o dadas, los parámetros.

	Retórica	**Sincopada**	**Simbólica**
Forma escrita del problema	Sólo palabras	Palabras y números	Palabras y números
Forma escrita del método de solución	Solo palabras	Palabras y números; abreviaciones y símbolos matemáticos para operaciones y exponentes.	Palabras y números; abreviaciones y símbolos matemáticos para operaciones y exponentes.
Representación de la incógnita	palabras	Símbolos o letras	símbolos
Representación de los números dados	Números específicos	Números específicos	Letras.

Características de los tres tipos de notación algebraica.

Una generación más tarde, Descartes empezó a utilizar las primeras letras del alfabeto para los valores dados y los conocidos, y las últimas letras de alfabeto para las incógnitas, una convención que es todavía usada hoy en día.

Vieta tendía a desarrollar un álgebra "homogénea"' que fuera independiente de la aritmética y la geometría (Charbonneau, 1996). La primera parte del libro de vieta "Introducción al arte analítico" llamado "Zetitics", contiene un conjunto de reglas para la manipulación de expresiones algebraicas. Las incógnitas y los coeficientes fueron tratados en una manera similar. Fue sólo después del trabajo de Vieta que Newton, Leibniz y otros fueron capaces desarrollar el concepto de función, dónde la variable tiene el carácter de una cantidad dinámicamente cambiante.

La introducción de variables simbólicas es la culminación de un largo proceso histórico así como el punto de partida de una disciplina totalmente nueva. El término genérico “variable” incluye actualmente las nociones de incógnita, de número general, y las variables vinculadas a una relación funcional. Por consiguiente, el término “variable” como es usado hoy es un concepto multifacético que contiene el desarrollo histórico de incógnita específica, de número general y de cantidades relacionadas.

No se pretende aquí decir que para introducir a los alumnos al concepto multifacético de variable se debe de seguir el desarrollo histórico de las diversas caracterizaciones de la variable. De hecho, hay características distintivas entre el desarrollo histórico y el desarrollo individual de estos conceptos. En el transcurso de la historia estos conceptos fueron inventados y elaborados. Al contrario, se espera que los alumnos los asimilen. Sin embargo, el "desarrollo histórico de estos conceptos puede sugerir acercamientos que se pueden utilizar para facilitar el trabajo de las alumnos con ellos. Esta breve descripción histórica sugiere que el desarrollo de estas nociones en una etapa pre-simbólica fue crucial para el surgimiento del simbolismo algebraico.

La creación del simbolismo algebraico dio sentido y unificó todos estos diferentes usos de la variable. Una explicación plausible para el fracaso de los alumnos cuando son introducidos directamente al álgebra simbólica podría ser una falta de experiencia previa con todos esos diferentes usos de la variable en un nivel pre-algebraico. Este tipo de experiencia proveería a los alumnos de un entorno más rico en el cual el lenguaje algebraico podría inicialmente introducirse como una herramienta para manipular problemas que impliquen caracterizaciones diferentes de la variable.

3. Una caracterización del concepto de variable: En textos, profesores y alumnos.

3.1 Introducción.

En la investigación en Matemática Educativa uno de los problemas principales que se plantea es la comprensión de los procesos de aprendizaje de los conceptos matemáticos. Revisando la literatura especializada, podemos ver cómo los investigadores se han dedicado a analizar la manera como se produce el aprendizaje de los conceptos matemáticos. En cada caso encontramos aproximaciones al problema que difieren en el tipo de material usado, la metodología de enseñanza, la organización de los conocimientos matemáticos o el tipo de actividades realizadas por los estudiantes. Esta diversidad es un reflejo de la complejidad del problema, incluso en el caso de conceptos algebraicos considerados como más elementales, por ejemplo el concepto de variable; un concepto de gran importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de difícil comprensión entre los estudiantes.

Un factor importante es el hecho de que los conceptos que se introducen en la matemática escolar forman parte de una amplia red de relaciones que los ligan, lo cual se traduce en una diversidad de organizaciones posibles de esos conceptos. Numerosas experiencias muestran que unidades de enseñanza basadas en organizaciones distintas de unos mismos conceptos pueden dar buenos resultados, si bien las comprensiones que adquieren los estudiantes de dichos conceptos y las formas en que después los aplican pueden ser bastante diferentes.

Vinner y sus colaboradores, han realizado investigaciones que han dado lugar a un modelo teórico cuyo objetivo es explicar los procesos cognitivos que tienen lugar en los estudiantes durante el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, bien sea como conceptos aislados, bien como ampliaciones de campos conceptuales ya formados.

Un elemento central de este modelo es la distinción que hace entre un "concepto" matemático, la "*imagen conceptual*" (concept image) creada en la mente de un estudiante y la "*definición conceptua*l" (concept definition) verbalizada por dicho estudiante. Un aprendizaje correcto lleva a la identificación de estos tres objetos, si bien para numerosos estudiantes se trata de tres componentes desligadas que utilizan o no según la tarea que deban realizar.

A veces las definiciones que de algunos conceptos nos dan los estudiantes difieren mucho de la definición formal de dicho concepto, "*son una descripción de la imagen conceptual que personalmente hayan construido*". A este tipo de definición lo llaman "*definición personal*" y la consideran como parte integrante de su propia imagen conceptual (Vinner, 1983, p. 294)

En este capítulo presentamos un análisis de la definición tanto formal como conceptual de conceptos matemáticos, viendo determinadas implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje y centrándonos en el caso del concepto de variable.

En el momento actual, uno los recursos que el profesor de matemáticas de cualquier nivel educativo puede tener en cuenta para planificar sus acciones, llevarlas a cabo en el aula y reflexionar sobre los resultados son los textos

Debido a ello, los consideraremos para mostrar cómo las definiciones formales de *variable* expuestas en los diferentes textos, pueden influir en las definiciones personales de los profesores y de los alumnos. Para llevar a cabo esto, por un lado, haremos un análisis de la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes textos, sus características y elementos que se utilizan para definirla, y por otro lado, realizaremos una encuesta entre profesores y estudiantes con una sola pregunta: "Escribe la definición de variable", para recopilar su definición personal de variable, con el propósito de analizarla a la luz del resultado del análisis de la definición de variable de los textos.

3.2 Marco Teórico.

3.2.1 Variables.

En general una *variable* es un símbolo (habitualmente una letra) que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos. Varios autores mencionan que existen diferentes usos y concepciones de las variables: variables como números generalizados, variables como incógnitas o constantes, variables como parámetros o argumentos, variables como símbolos abstractos (Usiskin, 1998; Kuchemann, 1978; Ursini y Trigueros, 1997). Sin embargo, los usos principales de las variables que son parte del currículum escolar son variables como incógnitas, como números generalizados y variables en relación funcional**.** (Kieran, 1990; Ursini y Trigueros, 1997). A continuación mostramos y ejemplificamos estos tres usos y que son los que consideraremos en este trabajo.

- *Las variables como incógnitas*: Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La *incógnita* interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido.
  Ejemplos:
  Cuando en los primeros cursos se escribe, por ejemplo, $5 + \_\_ = 20$
  Cuando en cursos más avanzados se proponen ejercicios del tipo: ¿Cuánto vale x para que sea cierta la igualdad $3x + 5 = 2x + 10$?
- *Las variables* como *números generalizados* o expresión de patrones generales. Es el caso cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números (o elementos del conjunto que se trate).
  Ejemplos:
  Para todos los números reales se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$
  El área de cualquier triángulo es $A = ½(b \cdot a)$ (a = base y b = altura).
- *Las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente*. La relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra.
  Ejemplos:
  En la expresión $y = 5x + 6$, cuando cambia x también lo hace y.
  En la fórmula $C = 2\pi r$, cuando cambia el radio r también cambia la longitud de la circunferencia C.

Una conceptualización adecuada de cada uno de estos aspectos requiere de ciertas capacidades básicas como las que sugieren Usini y Trigueros (1997):

A. La conceptualización de la variable como incógnita implica:

A1. Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar.
A2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos.
A3. Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera.
A4. Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias.
A5. identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una ecuación.

B. Variable como número general.

La conceptualización de la variable como número general implica:

B1. Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas.
B2. Interpretar la variable simbólica como un ente que puede tomar cualquier valor.
B3. Interpretar la variable simbólica como un objeto indeterminado que se puede operar.
B4. Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variables de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general sobre el cual éste actúa.
B5. Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

C. Variables en relación funcional.

La conceptualización de las variables en relación funcional implica.

C1. Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica.
C2. Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente.
C3. Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente.
C4. Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación.
C5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conoce los de la otra.
C6. Expresar una relación funcional de manera tabular, grafica, y/o analítica, a partir de los datos de un problema.

Shulman (1986) argumenta que los profesores necesitan tener dos clases de entendimiento acerca del tema en cuestión: conocer el “qué” y el “por qué”. El profesor no necesita entender solamente lo que es ese algo, debe entender el por qué es así.

De aquí que el “saber que” en el contexto de las variables incluye simbolización, manipulación e interpretación de cada uno de estos usos en diferentes situaciones matemáticas. Esto forma el “repertorio básico” del conocimiento del tema de las variables. Even (1993) argumenta que los profesores deben adquirir el “repertorio básico” que los compenetra en el tema y les proporciona un entendimiento más profundo del conocimiento general y más complicado. El conocimiento general y más complicado de las variables se obtiene integrando todos sus usos en un concepto y cambiando de uno a otro de manera flexible.

En el contexto de las variables, el "saber por qué" incluye la comprensión del por qué trabajan las reglas en la manipulación de símbolos literales y la anticipación de las consecuencias de usar estas reglas.

Ursini por su parte dice que un estudiante es capaz de trabajar con la variable como un ente matemático integrado, cuando la emplea en una situación específica, pasa de uno a otro de sus aspectos de manera flexible y los integra como componentes de un mismo ente.

3.2.2 La Definición de Conceptos Matemáticos.

Según Vinner (1983, 1991), cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido, se estimula nuestra memoria y se evoca algo, que raramente es la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este "algo" es lo que Vinner llama la *imagen conceptual* (concept image). En otras palabras, la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las diversas figuras, dibujos o representaciones que recuerdan los estudiantes como ejemplos de dicho concepto, junto al conjunto de las propiedades que el estudiante asocia al concepto. En el caso de la variable, la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por los diferentes símbolos, letras o representaciones que recuerdan los estudiantes como ejemplo de dicho concepto, junto al conjunto de propiedades que el estudiante asocia al concepto. Según esto, una imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que llevan asociadas son todas relevantes.

Como resultado de los métodos de enseñanza, los estudiantes memorizan una cierta definición, que repiten cuando el profesor les pregunta pero que no utilizan cuando les pide que pongan en acción dicho concepto para resolver un problema. Vinner y Hershkowitz (1983) llaman *definición conceptual* a esta definición verbal que un estudiante tiene en su memoria y que recita cuando se le pide. La definición conceptual expresada por un estudiante no tiene por qué estar ligada operativamente a su imagen conceptual en el momento de la realización de tareas.

Por ejemplo, al preguntarle a un estudiante su definición de variable escribió "*Es una letra que toma el valor de un número para utilizarla en una ecuación y así resolverla*", utilizando la variable como incógnita, pero al preguntarle que representaban las letras en la expresión $y = 2x + b$, contestó que todas son variables. En cambio, otro estudiante dio la siguiente definición "*Es una letra o símbolo que se le puede asignar cualquier valor*", luego le pedimos que identificara las variables de $y = a\,x + b$, su respuesta fue x e y, cuando se le cuestionó que las letras a y b caen dentro de su definición, dudó y dijo que no eran variables. Estos casos ponen en evidencia la diferencia que, para los estudiantes hay entre la imagen y la definición conceptual.

A veces las definiciones que de algunos conceptos nos dan los estudiantes difieren mucho de la definición formal de dicho concepto, "*son una descripción de la imagen conceptual que personalmente hayan construido*". A este tipo de definición lo llaman "*definición personal*" y la consideran como parte integrante de su propia imagen conceptual (Vinner, 1983, p. 294)

Una creencia muy extendida entre los profesores de los diferentes niveles educativos es la de que sus estudiantes basan sus razonamientos principalmente en las definiciones verbales (formales) de los conceptos y que sus imágenes conceptuales tienen, como mucho, un papel secundario de apoyo, Vinner (1983, 1991) representa esta creencia mediante los diagramas, resumidos en el de la figura 1, en los cuales se ve que la imagen conceptual está subordinada, tanto en su formación como en su utilización, a la definición conceptual. Probablemente estos profesores también dan por supuesto que la definición conceptual manejada por sus alumnos es la matemáticamente correcta que se les ha enseñado.

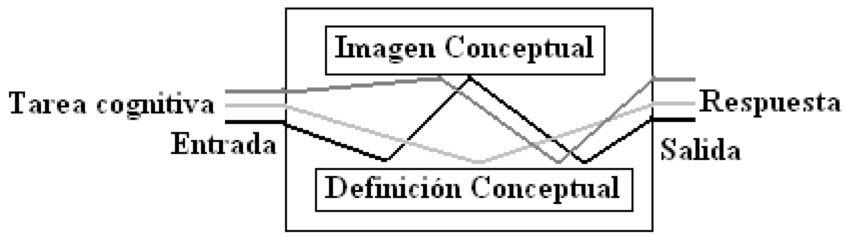


Figura 1. Modelos de actividad mental de los estudiantes esperados por muchos profesores.

Sin embargo, la actividad mental de los estudiantes está, en una mayoría de casos, basada sólo en su imagen conceptual, como refleja Vinner (1983, 1991) mediante el diagrama de la figura 2. Hay un elevado número de estudiantes cuya definición conceptual es inactiva o no existe, ya sea porque nunca la aprendieron o la olvidaron.

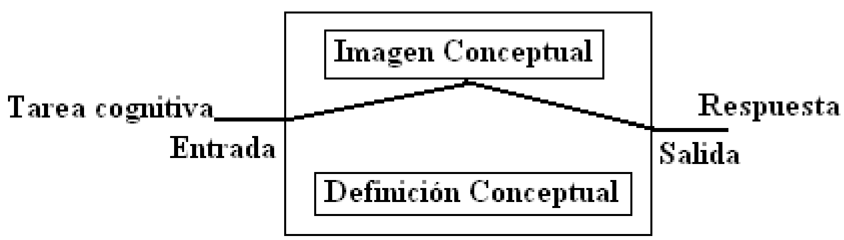


Figura 2. Modelo de actividad mental de muchos estudiantes.

Barnard y Tall (1997) introdujeron el término *unidad cognoscitiva* para representar un trozo de la imagen conceptual en la cual un individuo centra la atención en un momento dado. Las unidades cognoscitivas pueden ser símbolos, representaciones o cualquier otro aspecto relacionado con el concepto. Una imagen conceptual rica debe incluir no sólo la definición formal, si no también muchos enlaces en y entre las unidades cognoscitivas.

Desde un punto de vista estrictamente formal, en un sistema formal de reglas de inferencia, un objeto matemático es caracterizado perfectamente por su definición, de modo que la definición agota totalmente el objeto y, en este sentido, un objeto matemático *es* su definición.

Sin embargo, la teoría de la imagen conceptual sugiere que la enseñanza de un concepto matemático debe incluir diversos acercamientos y representaciones para permitir a los estudiantes construir conexiones múltiples y flexibles entre las unidades cognoscitivas.

Generalmente, en álgebra, a los estudiantes se les dice que las letras simbolizan variables que representan incógnitas o valores que pueden variar. Esto, de hecho, causa un problema cuando se da un cambio de significado. No es necesario que las letras tengan que representar valores que varían. Por ejemplo, en la expresión $x + 5 = 8$, la letra no representa una cantidad que varía. En otras palabras no es una función. Es sólo una ecuación, y x representa una cantidad fija.

Esta distinción poco clara de la raíz de una ecuación y de la variable de una función causa errores serios en posteriores interpretaciones de muchos problemas funcionales y no funcionales. Por ejemplo, Artigue (1992) en una investigación encontró que cuando la noción de símbolo representa una variable incógnita, muchos estudiantes en su estudio equivocadamente creyeron que la función constante $y = 5$ no es una función.

Por otro lado, Stacey y MacGregor (1997) encontraron que al solicitarles a estudiantes universitarios que escribieran el entero consecutivo de m, algunos de ellos escribieron n en lugar de $m +1$. Este último caso indica claramente que los estudiantes identificaron la variable como representación de una letra más bien que una cantidad.

Cada uno de estos ejemplos es una descripción que subraya ciertos aspectos del concepto, pero también echa sombras sobre otras.

3.3. Aproximación Mediante Diversos Textos a la Definición de variable.

En los cursos de Matemáticas de todos los niveles educativos, los libros de texto y los materiales escritos (manuales, notas de clase, tareas, etc.) son de los principales, y clásicos, materiales de apoyo para la enseñanza. La producción abundante de estos materiales, la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula de este material, su función como transmisores de contenidos socialmente aceptados, hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Así pues, podemos considerar a los textos como importantes recursos instruccionales, que caracterizan de alguna manera la enseñanza y el aprendizaje. La forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden (qué y cómo) si admitimos que proporcionan la mayor parte del contenido matemático que los estudiantes deben aprender, y son además una de las principales fuentes de tareas y actividades. Nos podríamos plantear aquí, si el modo en que el contenido matemático reflejado en los textos utilizados determinará, en cierta medida, algunas características de la comprensión que los alumnos consigan.

Desde un punto de vista superficial, puede observarse el gran esfuerzo realizado por las editoriales en actualizar la presentación y el formato. La tipografía utilizada, los dibujos empleados, la mejora en las técnicas de impresión, etc. han modificado su apariencia externa. En cambio, resulta difícil determinar si los textos han incorporado, y de qué manera, los resultados obtenidos en investigaciones sobre la forma en que se aprenden algunas nociones matemáticas, realizadas en el campo de la Matemática Educativa.

El papel desempeñado por los textos como mediadores en el desarrollo del currículum, la articulación de la enseñanza y el propio proceso de aprendizaje exige incorporar paulatinamente en su elaboración el nuevo conocimiento que se va generando en la matemática educativa. Con el propósito de observar hasta que punto se ha dado esta incorporación en relación con el concepto de variable efectuamos una somera revisión de algunos libros de álgebra.

Esta revisión nos muestra que algunos libros le dedican a lo más una página para explicar el concepto de variable, pero otros generalmente mucho menos, e incluso algunos no definen el concepto. Esto a pesar del hecho de que la matemática contenida en ellos se basa en la existencia de variables, y que estas predominan virtualmente en cada página de los textos. Esto sin contar, que las definiciones que se encuentran en ellos son distintas y utilizan diferentes formas para definirlas.

Con respecto al concepto de variable, varios autores han encontrado evidencia convincente de que muchos estudiantes, tanto de primaria, como de universidad tienen dificultades para resolver ciertos tipos de problemas elementales de álgebra Matz (1980), Kieran (1980), Trigueros y Ursini (1999). La evidencia muestra que los errores manifestados por los estudiantes subyacen, en parte, en una tenue y mal definida concepción de lo que son las variables y qué papel juegan en la resolución de problemas. En particular creemos que parte de esta problemática tiene que ver con el hecho de que los libros de texto dedican muy poco espacio y tiempo a la discusión y definición del concepto de variable, así como a la forma en que se define este concepto, de acuerdo con nuestra revisión preliminar.

Así pues, con el propósito de buscar respuestas a estas dificultades realizamos una revisión más extensa de algunos libros de texto en el ámbito en el que trabajamos. Creemos que aunque la revisión de la bibliografía no es exhaustiva, presenta una amplia gama de estilos de la presentación y del contenido.

El análisis de libros de texto se ha llevado a cabo en diferentes ámbitos de investigación. En este capítulo se hace una revisión de libros de texto de matemáticas y la revisión se centra en un aspecto del currículo: la presentación del concepto de variable. Pero para hacer esta revisión nos documentamos acerca de cómo se ha venido realizando este tipo de trabajo.

3.3.1 Diferentes formas de Analizar los Textos.

Centrándonos en el campo de la educación matemática, Howson (1995) distingue entre investigaciones realizadas sobre textos a posteriori, es decir, la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado; y las realizadas a priori. Entre estas últimas se menciona el trabajo de Chevallard (Chevallard, 1985), en los que aparece la noción de transposición didáctica, es decir, la transformación de la matemática en el contenido escolar, que se refleja fundamentalmente en los libros de texto.

Por otro lado, se han desarrollado dos líneas de actuación en relación al análisis de los libros de texto, que pasamos a comentar brevemente (García y Llenares, 1995). Podemos considerar:

I. Estudios centrados en el análisis de la forma en que se reflejan en ellos los contenidos, adoptándose dos puntos de vista:

1. Los que se han ocupado del propio instrumento de análisis que se aplica al texto. Entre ellos:

a) Chiappetta y sus colaboradores (1991) se han centrado en el análisis del contenido de diferentes textos de Química, y en particular del énfasis colocado sobre diferentes aspectos de la ciencia y la actividad científica, reflejados en la forma de tratar el contenido (la ciencia como cuerpo de conocimiento, como una forma de investigar, como una forma de pensar, la interacción entre ciencia, tecnología y sociedad).

b) Remillard (1990) analiza las suposiciones pedagógicas y epistemológicas del contenido matemático escolar de diversos textos de matemáticas. En particular, en relación a las perspectivas que sobre los problemas y resolución de problemas se adoptaba.

c) Van Dormolen (1986) y Otte (1986) ponen énfasis en lo que transmite el texto, las relaciones entre el conocimiento y su representación textual y las variaciones en las interpretaciones y hacen una clasificación de los elementos que son imprescindibles en un libro de texto de matemáticas. Desde una perspectiva más general, aportan una perspectiva analítica, destacando algunos principios que deben ser tomados en cuenta. Entre ellos, la naturaleza del aprendizaje pretendido, errores, etc.

d) Kang y Kilpatrick (1992) utilizan la teoría de la transposición didáctica, es decir, la transformación de la matemática en el contenido escolar que se refleja fundamentalmente en los libros de texto, para analizar algunos libros de álgebra, examinando la utilidad de los conceptos vinculados a dicha teoría para el análisis de textos matemáticos.

e) Sanz (1990) se centra en la necesidad de considerar los modos de representación utilizados, para realizar inferencias relativas al significado de las ideas matemáticas que los textos transmiten.

2. Los que eligen un tópico concreto y examinan la forma en que este contenido particular se contempla en diferentes textos. Como Küchemann (1987), que intenta ver cómo un mismo tópico (razón y proporción) se caracteriza en diferentes libros de texto. Utiliza como esquema de referencia la información relativa a las estrategias y procedimientos que los niños emplean para resolver las situaciones de proporcionalidad.

II. Estudios centrados en el uso que se hace de los textos en las situaciones de enseñanza. Freeman y Porter (1989) describen diferentes estilos en el uso de los libros de texto de matemáticas por los profesores, en el nivel de enseñanza primaria, y examinan el solapamiento entre el contenido enseñado y el contenido que aparecía en los textos.

El trabajo que aquí presentamos se encuadra dentro de aquellos que eligen un tópico y examinan las diferentes formas en que éste se presenta. Examinamos la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes textos, sus características y elementos que se utilizan para definirla. Además clasificamos las definiciones de acuerdo a su uso. Sin duda que el análisis pudiera ser mucho más completo, sin embargo, para nuestro trabajo el que realizamos es suficiente.

3.3.2 Metodología.

1. Se recopilaron libros de primaria, secundaria, preparatoria y universidad, además de algunas enciclopedias recomendadas para diversos niveles.
2. Se analizó cada libro buscando la definición de variable que presenta el libro o la página donde aparece por primera vez la palabra variable.
3. Con los datos anteriores se formó una tabla de datos (ver anexos) que contiene la información de la definición que contiene el texto y la referencia del texto.
4. Se realizó un análisis de las definiciones buscando regularidades sobre el enfoque con que se presenta y términos matemáticos que intervienen en la definición.
5. Se realizó un análisis de las definiciones para clasificar el uso que se le da en los textos de acuerdo con la clasificación siguiente: como incógnita, como número general, como variable, como relación funcional, siguiendo la clasificación dada por Trigueros y Ursini (2000).

A continuación mostramos algunas definiciones representativas.

Definición	Referencia
Una letra que se utilice para representar cualquier elemento de un conjunto dado se llama variable. Un símbolo que representa a un elemento específico se llama constante. Las variables representan números reales	Swokowski, Earl. W. 1986. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericana. Pág. 23.
La letra x se llama variable y el conjunto R cuyos elementos la remplazan se llama conjunto satisfactor. Cada vez que se usa una variable, debe uno saber cuál es el conjunto satisfactor.	Lovaglia, F. M. 1972. Álgebra. Harla. Pág. 8 – 9.
Una variable es una literal que adquiere varios valores en un problema dado. Para nombrar a un miembro genérico de un conjunto de números se emplea una variable tal como x, y, z, m, n.	Gobran Alfonse. 1990. Algebra Elemental. Grupo Editorial Iberoamericana. Pag. 7.
Una **expresión algebraica** es una colección de letras llamadas variables y números reales organizados de alguna manera utilizando sumas, restas multiplicaciones divisiones y radicales. Nota: No define variable, a partir de aquí usa el término variable.	Larson, R, Hostetler R. 1985. College Algebra. D.C. Hearth and Company. Pág. 30.
Las ecuaciones 3 x -5 = x + 3; x = x +1;	Thompson R. 1976. Intermediate Algebra.

b^2= 4. Contienen una letra como variable. Si reemplazamos la letra con un número, obtenemos una expresión que es falsa o verdadera. Nota; No define variable, a partir de aquí la utiliza.	Prindle, Weber & Schmidt, Incorporated. Pág. 38.
No define variable, solo utiliza la palabra variable.	Stockton, D. 1979. Essential College Algebra. Houghton, MYFFLIN, Company.

3.3.3 Resultados de la Revisión de Textos.

El total de libros revisados fue de 100, y la revisión de las definiciones dadas en ellos nos muestra que el concepto de variable se define con diferentes enfoques y para definirla o explicarla se utilizan varios términos que mencionamos abajo, así como el número de libros que los sustentan:

1. **El conjunto de reemplazo**. El conjunto de reemplazo de una variable se compone de todos los elementos que se puedan sustituir por la variable. Este conjunto puede estar compuesto por cosas, por un número o por un conjunto de números. En el álgebra de la secundaria el conjunto de reemplazo es casi siempre el conjunto de los números reales, pero en el Álgebra Lineal el conjunto puede estar formado por vectores, en las Ecuaciones Diferenciales por funciones, en Estadística los conjuntos pueden estar formados por palabras y en Topología el conjunto de reemplazo para las variables con frecuencia son conjuntos de conjuntos.

   Sin embargo, al introducir el concepto de variable no se presenta una definición que comprenda todas las posibilidades del conjunto de reemplazo, sino que sólo se menciona que la variable representa números, haciendo poco abstracto este concepto. Las siguientes son algunas de las formas comunes en que se describe el conjunto de reemplazo en los textos revisados:

   a)**El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas**. Una definición muy general es la que da Mazani y colegas (p. 34, 1968): "Las letras tales como a, b, c,… que pueden representar cualquier (definido, pero no especificado) elemento de un conjunto (Este conjunto puede estar formado por cualquier tipo de objetos; personas, números, funciones, etc.) se llaman variables. Por otra parte Spiegel (p. 75, 1969) da una definición aún más general en el libro de Álgebra Superior: "Una variable es un símbolo al que se le puede asignar un conjunto de valores". Sin definir el tipo de valores al que se refiere.

   b)**El conjunto de reemplazo es un conjunto de números**. Generalmente números reales, pero este hecho se pierde en muchos estudiantes, porque de acuerdo con Kieran (1980) y Matz (1979) los estudiantes ven las variables como etiquetas para simbolizar entidades concretas, en vez de cosas abstractas de números. La definición de Barnet (p. 234,1960), está dentro de esta categoría, define: "Una variable en álgebra es una letra que representa cualquier número de un conjunto de números bajo discusión cuando el conjunto contiene más de un número". Otra definición parecida es la que da Oteiza, et al. (p. 2, 1996); "Una variable es un símbolo que representa números".

c)**La variable se reemplaza por un único número**. En este caso no hay referencia a un conjunto y tampoco hay una referencia a la naturaleza múltiple de la variable. En el libro "Matemáticas Aplicaciones y Conexiones (Glencoe, p. 12, 1999) se menciona; "Algunas ecuaciones además contienen variables. La ecuación x + 9 = 17 no es ni verdadera ni falsa hasta que x se sustituya con un número que la hace verdadera. Resuelves la ecuación cuando reemplazas la variable con un número que la hace verdadera".

d) **Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c).** En el siguiente problema el autor introduce las variables y utiliza el símbolo de "guardalugar" para representar la variable.

Número de hula hoops	Venta
0	\$2 x 0 = \$0
1	\$2 x 1 = \$2
2	\$2 x 2 = \$4

Observa que el precio de hula hoop es una constante, \$2, pero que el número de hula hoops varía. Puedes usar un símbolo o **variable**, para representar el número de hula hoops. La expresión para la cantidad ganada es \$2 x o \$2 x n. La rama de las matemáticas relacionada con expresiones que contienen variables recibe el nombre de álgebra (Glencoe, p. 243, 1999)

En el libro Graficas y Relaciones y Funciones, de la NCTM (p. 13, 14, 1979), se utilizan además del símbolo , los símbolos Δ y n y, x para representar la variable.

"*¿ Qué aspecto tiene en matemáticas una proposición abierta?. He aquí algunas:*

$$\left\{\begin{array}{l} 2+W=7 \\ 3xn<12 \\ 6-V=2 \\ x+2>5 \end{array}\right.$$

En estos casos, no podemos decir si las afirmaciones son verdaderas o falsas hasta que hayamos reemplazado los símbolos , n, Δ y x por números….

En matemáticas se les llama variables."

e)**Textos que no tienen una definición explicita de variable**. Como en el texto de Álgebra I del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (1987) que utiliza el concepto de variable hasta la página 77 para describir un polinomio:

"Puesto que usaremos en esta sección y en las demás de este capítulo las expresiones algebraicas llamadas polinomios, escribiremos P(x) en lugar de la proposición: un polinomio en la variable x…. "

Proposición que no se encuentra en las páginas anteriores, así como la definición de variable, pero que partir de esta página utiliza la palabra variable. Otro textos que no definen variable son: Álgebra y Trigonometría de Larson y Hostettler (1985), Álgebra Intermediate de Prindle, (1976). Esto a pesar del hecho de que el álgebra se basa en la existencia de variables, y que las x´s predominan virtualmente en cada página de los textos.

Muchos libros de Cálculo definen los conceptos de variable independiente y dependiente, pero generalmente utilizan antes las variables sin definirlas, por ejemplo, como cuando definen intervalos y resuelven desigualdades, es decir, dan por hecho que el estudiante conoce el concepto de variable (Steward, 1994, Purcell, 1992, Zill, 1987)

2. **Variación**. Las definiciones de los libros transmiten diferentes formas en las que varía la variable. Se presentan al menos tres posibilidades:

a) **Variables que no varían**. Esto es lo que con frecuencia se llama la incógnita. Se le encuentra en los textos cuando se resuelve un problema para el cual hay una respuesta única o la mayoría de las veces muchas respuestas finitas. Por ejemplo: "encuentre el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual a 21". La solución del problema es la ecuación $3x = 21$, donde x representa el lado del triángulo. A pesar de que la variable x tiene como conjunto de reemplazo todos los números positivos conceptualizamos un triángulo único y el lado de este triángulo no cambia. Muchos libros de texto presentan solamente problemas verbales que tienen una única respuesta numérica. En éstos el estudiante puede deducir que el único reemplazo apropiado para una variable es un único número. Las variables no se substituyen cuando se encuentran en expresiones como "a + 6 " (donde no hay solución) o la **a** se substituye solamente una vez. Por ejemplo Thompson, (p. 38, 1976) en su definición de variable escribe: "Las ecuaciones $3x – 5 = x - 3$, $x = x +1$, y $b^2 = 4$ contienen una letra como variable. Si reemplazamos la letra con un número obtenemos una expresión que es falsa o verdadera". Y a partir de aquí utiliza las variables.

b)**Variables discretas**. La consideración de las variables en las relaciones funcionales difiere de la situación "estática" descrita en (a). Una forma de demostrar la naturaleza discreta de la variabilidad de una variable está con las tablas, una técnica utilizada por varios textos, aunque no se defina el concepto de variable como sucede con los libros de educación primaria.

Por ejemplo, en el problema de encontrar el costo C de producir x cajas de cartón, donde el costo se encuentra con la expresión $C = 2x$, a través de la tabulación.

La variable x representa una variable discreta con un número infinito de valores.

x	C
1	2
2	4
3	6

c)**Variables continuas**. En general se presenta de la misma forma que en (b) excepto que se considera que la variable cambia continuamente. Un ejemplo de una variable que varia continuamente es la de la ecuación $s(t) = 50t$ donde ***s*** es la distancia y ***t*** es el tiempo (Lang, p. 15, 1990). Sin embargo, es difícil comunicar el concepto de variación continua ya que el acto de reemplazo debe de hacerse discreto. Es decir, es difícil mostrar la naturaleza continua de la variable ***s*** asignando valores a ***t*** en la expresión $s(t) = 50t$. Y esto se complica más porque aun cuando el tiempo y la distancia son conceptualmente continuos, cualquier medida de ellas debe de ser discreta. Debemos de cuestionarnos aquí en si el tratar con entidades continuas discretamente simplifica el problema o si esta es una sobre simplificación que pierde la esencia de la continuidad.

3. **En términos de constantes**. Algunos textos hacen la distinción entre constantes y **variables**, otros no. Así como el concepto de variable tiene una multitud de

definiciones, también lo tiene el término “constante”. Algunos textos definen constante, otros como un caso especial de una variable, y otros no la definen, como lo hace Barnett p. 3, 1984 donde dice que una constante es un símbolo que corresponde exactamente a un objeto. En otras ocasiones hasta se da una clasificación de las constantes, como hace Christy. 1993 donde afirma: Una constante es un símbolo que representa el mismo número a lo largo de un problema particular. Los números que nunca cambian de valor se llaman constantes absolutas. Si no conocemos el número fijo hasta que tenemos dada información específica acerca del problema, el símbolo se llama una constante arbitraria. Brook,1985, ni siquiera la define

4. Como componente de otro concepto matemático. Una característica de varios libros es que definen variable y constante cuando definen expresión algebraica, o polinomio, o ecuación, o formula, o bien utilizan alguna expresión particular de algún problema algebraico, mencionamos algunos ejemplos:

“Utilizaremos letras (llamadas variables) y números al formar las expresiones y proposiciones con las que trabajaremos.
Una expresión algebraica es una colección de variables y números reales (llamados constantes) organizados de tal manera utilizando sumas, restas,..” (Larson/ Hostetler, p. 40, 1985).

“Un termino (llamado también monomio) es una expresión que está compuesta por una constante o un producto de constantes y variables elevadas a potencias positivas” (Peterson, p. 11, 1985).

“Considera la ecuación $Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b, \varepsilon\ ¡, b \neq 0 \right\}$. Las letras a, b, son variables, esto es, representan diferentes números” (Tobey, p. 3, 1991)

“Cualquier expresión como $2x^2 + 3x + 5$ se llama un polinomio y x se llama variable.

En la ecuación $2x + 1 = 0$, llamamos a x incógnita porque buscamos un valor particular de x que no conocemos. En los polinomios llamamos a x variable porque varía su valor.” (Kerr, p. 90)

Estas definiciones obscurecen el significado real de variable. Una variable es un símbolo que representa una cantidad, relación u otras estructuras matemáticas, pero la esencia de una variable es que representa un conjunto de cantidades, relaciones o estructuras matemáticas. Cuando las variables son introducidas en el interior de una ecuación, los estudiantes frecuentemente desarrollan el error conceptual de que la variable representa un sólo número -el valor que hace que una ecuación tenga solución.

La siguiente tabla 3.1 nos muestra el número de textos en cada una de las clasificaciones que se encontró en la revisión. En algunos textos es posible encontrar mas de una forma de clasificar la definición por esta razón se observan discrepancias en los totales.

Tabla 3.1		
Clasificación de acuerdo al enfoque.	No de Textos.	%
1a) El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas.	12	16
1b) El conjunto de reemplazo es un conjunto de números.	**49**	**67**
1c) La variable se reemplaza por un único número.	5	7
1d) Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c).	5	7
1e) Textos que no tienen una definición explícita de variable.	10	14
2a) Variables que no varían.	18	25
2b) Variables discretas.	14	19
2c) Variables continuas.	5	7
3 En términos de constantes.	2	3
4. Como componente de otro concepto matemático.	22	30
5. No define variable, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización.	4	5
6. Usan la palabra variable sin definirla, o no hay claridad en la definición.	21	29

Para clasificar los textos de acuerdo a su uso se consideraron solo los textos donde se define el concepto de variable o se aprecia una posible definición. El número de textos utilizados para la clasificación fueron 73. En algunas definiciones se aprecia mas de un uso de la definición, por eso se observa discrepancias en los totales. La tabla 3.2 muestra los totales:

Tabla 3. 2		
Clasificación de acuerdo al uso.	#	%
A. Como Incógnita		
A1. Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar.	14	19
A2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos.	44	60
A3. Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera.	5	7
A4. Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias.	10	14
Total como Incógnita.	**73**	**100**
B. Como Número General.		
B2. Interpretar la variable simbólica como un ente que puede tomar cualquier valor.	19	26
Total como Número General.	**19**	**26**

C. Como Relación Funcional.		
C1. Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, grafica, etc.	1	1
C4. Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación.	7	10
Total como relación funcional	**8**	**11**

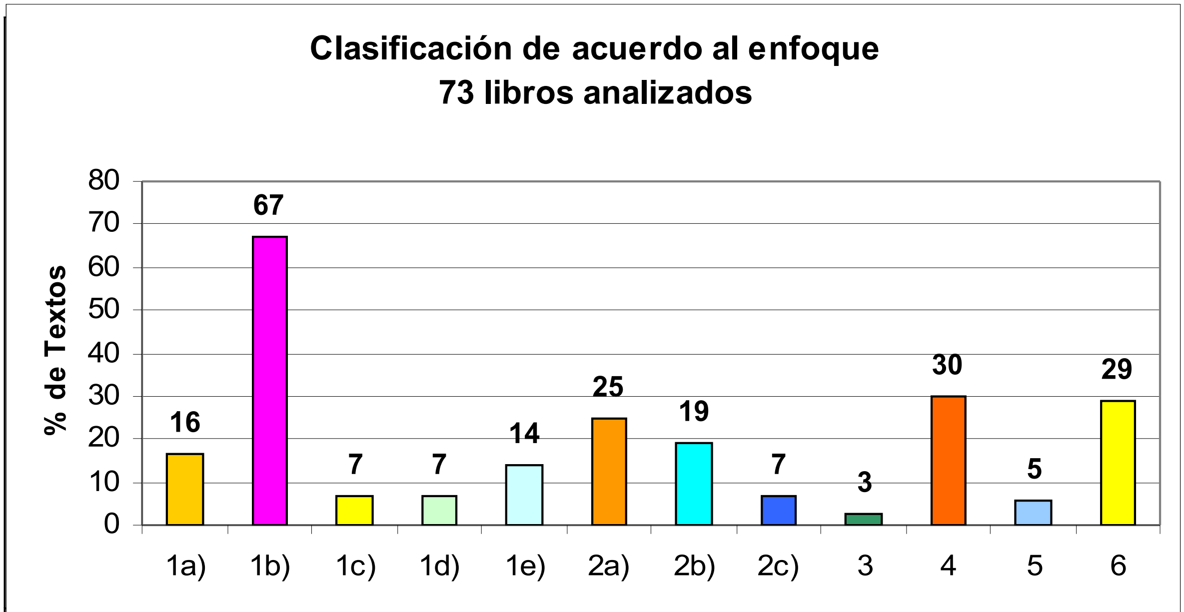
3.3.4 Análisis de los Resultados de la Revisión de Textos.

El análisis de los resultados se basan solamente en las tablas y figuras 3.1 y 3.2 y las definiciones de los anexos, sin considerar el nivel al que está dirigido el texto (primaria, secundaria, bachillerato o universidad), este es un análisis que se pospondrá a futuro.

Las experiencias que se tienen con la aritmética son importantes para la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la "aritmética generalizada". El uso de variables es un indicador clave de que la actividad matemática pasa de ser aritmética a algebraica. Sin embargo los resultados de varias investigaciones con estudiantes de todos los niveles nos muestran la persistencia de concepciones erróneas y la evidencia de que el concepto de variable es una cuestión confusa para los estudiantes.

Creemos que parte de esta problemática se debe a que el concepto de variable en sí mismo es muy difícil de definir y esto se corrobora con los resultados del análisis de la presentación de la definición de 100 textos de matemáticas. Estos textos contienen muchas maneras de presentar el concepto de variable, es decir no se presenta una única definición formal de variable. Este concepto se puede ver al parecer desde muchas perspectivas diferentes. Incluso una gran cantidad de los libros, no la definen, o la definición no es clara, o la definen como un elemento secundario cuando definen otro concepto matemático, como puede observarse en los apartados 1.e), 4, 5 y 6 de la tabla 3.1.

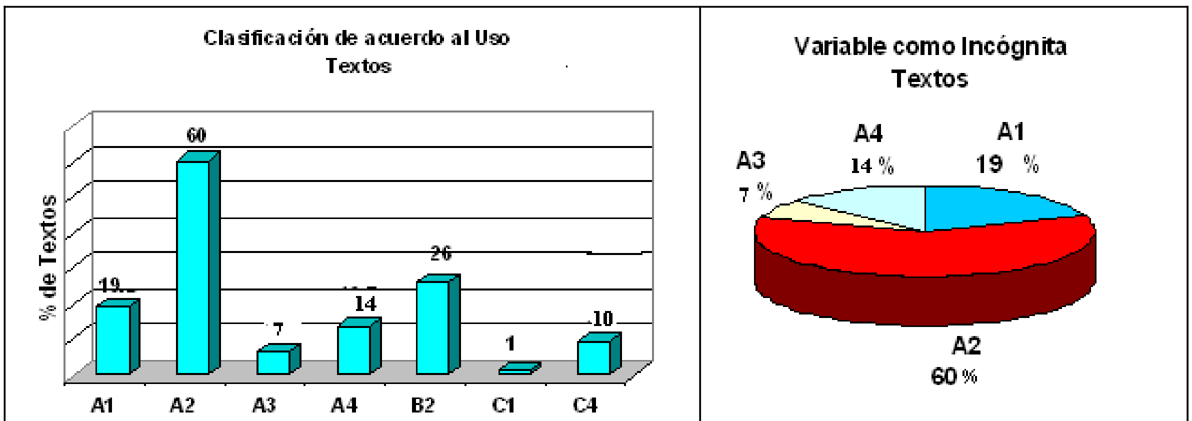
Otro punto importante es que una gran cantidad de las definiciones (49) enfatizan el conjunto de reemplazo como un conjunto de números, posiblemente esto sea adecuado para los niveles medio y medio superior, pero no para los del nivel superior.



1b) El conjunto de reemplazo es un conjunto de números. **2a)** Variables que no varían. **4.** Como componente de otro concepto matemático. **6.** Usan la palabra variable sin definirla, o no hay claridad en la definición.

Figura 3.1

En cuanto al uso de la variable la tabla 3.2 nos muestra que el 100% de las definiciones de los textos enfatizan la variable como incógnita y de ellos un 60.3% conceptualizan la variable del tipo A2: “Interpretan la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos”.



A. Variable como Incógnita. **B.** Variable como Número General. **C.** Variable como Relación Funcional

A2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos.

Figura 3.2

Una conclusión que podemos hacer del análisis de la presentación de la definición de variable de los textos revisados, sin tomar en cuenta una revisión más exhaustiva del contenido del texto, es que no existe una definición formal de variable y que en las definiciones predomina fuertemente una conceptualización de la variable como incógnita.

3.4 La definición Personal de Variable de los Profesores.

3.4.1 Introducción.

El concepto de variable es uno de los conceptos más fundamentales en matemáticas desde la escuela elemental hasta la universidad. Sin embargo, investigaciones realizadas en muchos países indican que los estudiantes experimentan dificultades en la enseñanza del concepto de variable. Aunque para algunos es tan fundamental y tan difícil de aprender, no sabemos suficiente acerca del conocimiento de los profesores ni de su conocimiento base previo para la enseñanza de este concepto; en particular el conocimiento sobre el tema y su conocimiento pedagógico del mismo.

Comúnmente convenimos en que el conocimiento profesional de los profesores, el cual es el conocimiento base de la enseñanza, es una amalgama de diferentes formas de conocimiento. Existen diferentes maneras de clasificar el conocimiento base de la enseñanza. Una de las clasificaciones que más influencia tiene es la sugerida por Shulman (1986), que distingue varias componentes del conocimiento base de la enseñanza: el conocimiento del tema; el conocimiento pedagógico del mismo; el conocimiento de estrategias educacionales. Describe el conocimiento pedagógico como "las formas de representar y formular el tema que lo hace comprensible a otros" (p.9), y afirma que incluye:

> "*una comprensión de lo que hace que la enseñanza de temas específicos sea fácil o difícil; las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y antecedentes tienen sobre aquellos temas y lecciones más frecuentemente trabajados (p.9)*."

Es decir, el conocimiento pedagógico se refiere a la forma en que el profesor presenta el tema. Así, el conocimiento previo de los profesores sirve como fuente de conocimiento pedagógico y su conocimiento del tema afecta las decisiones pedagógicas de los profesores en el contexto de las variables. En esta sección nuestro objetivo es conocer cual es el conocimiento previo del profesor sobre el concepto de variable visto este como la definición personal que da el profesor a una pregunta simple de una encuesta cuya única pregunta es: "Defina el concepto de variable".

Después analizamos las definiciones dadas por los profesores realizando un análisis parecido al que se hizo con las definiciones de los textos.

3.4.2 Metodología.

1. Realizamos una actividad en la que aplicamos una encuesta donde se plantea una sola cuestión: defina el concepto de variable. Esta encuesta se aplicó a 74 matemáticos y profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y se intentó aprovechar la mayoría de los eventos realizados en los cuales fuera posible aplicarla (como diplomados, cursos, reuniones, etc.), solicitando se señale el nivel en que se labora.
2. Se analizó cada definición de variable presentada.
3. Con los datos anteriores se formó una tabla de datos que contiene la información de la definición dada y el nivel educativo donde labora el profesor.

4. Realizamos un análisis de las definiciones buscando regularidades sobre el enfoque con que se presenta y términos matemáticos que intervienen en la definición.
5. Realizamos un análisis de las definiciones para clasificar el uso que le da el profesor de acuerdo con la clasificación siguiente: como incógnita, como número general, como relación funcional.

3.4.3 Resultados de la Revisión de las Definiciones de los Profesores.

La intención de esta encuesta es reexaminar el concepto de variable y, al hacerlo, redescubrimos su riqueza y multiplicidad de significados. La aplicación posterior de nuestro renovado entendimiento del concepto esperamos que nos ayude a reformar la manera en que enseñamos y utilizamos el concepto de variable en nuestras clases.

La profundidad y variedad de respuestas apuntan a la riqueza, complejidad y diversidad del concepto. Las respuestas proporcionadas por los profesores van desde definir a la variable como adjetivo, hasta definiciones más formales y con mayor contenido matemático, hasta las muy ambiguas. A continuación mostramos algunas de estas definiciones:

Definición	**Nivel en que se labora**
69M. Generalmente letra que puede ser sustituida por cualquier número $\mathbb{R}$.	No indica
57M. Elemento de una igualdad, ecuación o fórmula que puede depender o no de otra.	No indica.
52M. Es la parte literal que aparece en cualquier expresión algebraica, la cual puede tener diferentes valores numéricos.	No indica.
48M. Es algo que no tiene un valor constante.	Bachillerato
11M. Símbolo que indica cambios.	Bachillerato
55M. Es la expresión algebraica que cambia constantemente.	Bachillerato.

Se encuestaron en total a 74 profesores. Intentamos conservar la clasificación que utilizamos en la revisión de los libros de texto. La tabla 3.3 nos muestra el número de definiciones en cada una de las clasificaciones que se encontró en la revisión. En algunas definiciones es posible encontrar más de una forma de clasificar la definición, por esta razón se observan discrepancias en los totales.

Tabla 3.3		
Clasificación de acuerdo al enfoque.	**No. de Profesores.**	**%**
1a) El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas.	0	0
1b) El conjunto de reemplazo es un conjunto de números.	**43**	**58**
1c) La variable se reemplaza por un único número.	6	8
1d) Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c).	3	4
1e) No dio una definición explícita de variable.	1	1
2a) Variables que no varían.	**19**	**26**
2b) Variables discretas.	7	9.
2c) Variables continuas.	7	9.
3 En términos de constantes.	5	7
4. Como componente de otro concepto matemático.	0	0
5. No define variable, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización.	0	0
6. Usan la palabra variable sin definirla, o no hay claridad en la definición.	12	16
7. Ninguna	5	7

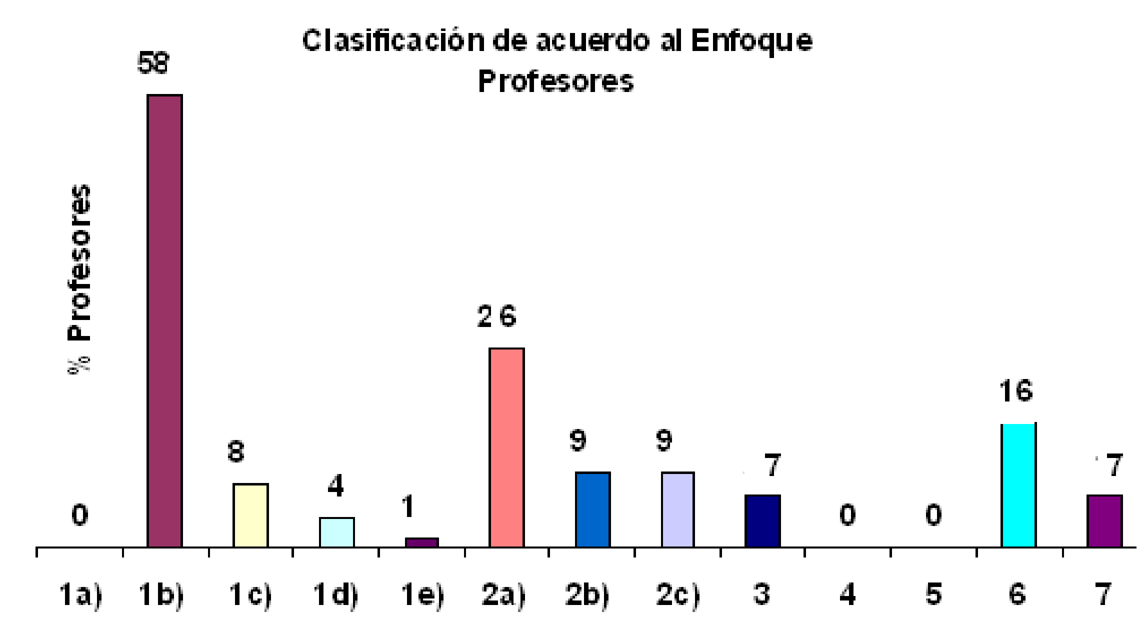
Para clasificar las definiciones de acuerdo a su uso se consideraron solo aquellas donde se define el concepto de variable o se aprecia una posible definición. El número de definiciones utilizadas para la clasificación fueron 69, (quitamos 5 expresiones que no representan una definición de variable). En algunas definiciones se aprecia mas de un uso de la definición, por eso se observa discrepancias en los totales. La siguiente tabla 3.4 muestra los totales:

Tabla 3.4		
Clasificación de acuerdo al uso.	**#**	**%**
A. Como Incógnita		
A1. Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar.	3	4
A2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos.	43	62
A3. Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera.	4	6
A4. Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias.	12	17
Total como Incógnita.	**62**	**90**
B. Como Número General.		
B2. Interpretar la variable simbólica como un ente que puede tomar cualquier valor.	10	15
Total como Número General.	**10**	**15**

C. Como Relación Funcional.		
C1. Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, grafica, etc.	9	13
C2. Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente.	1	1
Total como relación funcional	**10**	**14**

3.4.4 Análisis de los Resultados de la Revisión de las Definiciones de los Profesores.

En la tabla 3.3 se aprecia que hay una coincidencia con la tabla 3.1 de los textos, en las definiciones de los profesores se enfatiza el conjunto de reemplazo como un conjunto de números.

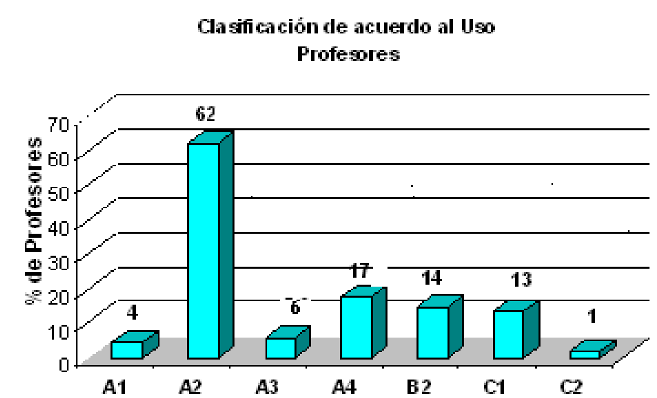
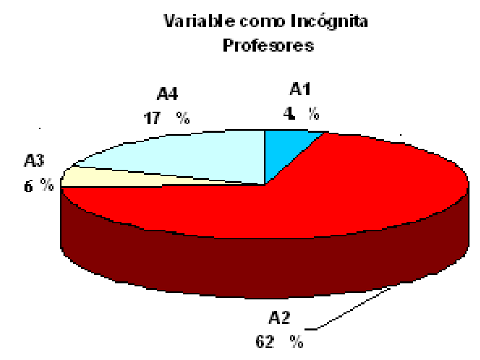


1b) El conjunto de reemplazo es un conjunto de números. **2a)** Variables que no varían.
6. Usan la palabra variable sin definirla, o no hay claridad en la definición.

Figura 3.3

Por otro lado, más de un 22% de los profesores no dio una definición de variable o la dio muy confusa como para clasificarla.

En la tabla 4.4 se aprecia que el 89.8% de los profesores conceptualizan la variable como incógnita, coincidiendo en mucho con las definiciones de los textos.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>A. Variable como Incógnita. B. Variable como Número General. C. Variable como Relación Funcional</td>
<td>A2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">Figura 3.4</td>
</tr>
</table>

Con los datos que se muestran en las tablas 4.3 y 4.4 y de las definiciones dadas por los profesores podemos concluir al igual que en las definiciones de los textos, que se revela una diversidad asombrosa en los acercamientos al presentar el concepto de la variable. Muchos acercamientos imposibilitan otros acercamientos, son contradictorios, o son en cierta forma incompatibles unos con otros. Además, la mayoría de las definiciones son en un cierto modo ambiguas o confusas.

No creemos que los profesores no sean capaces de manejar los distintos usos de las variables durante el proceso de enseñanza, sin embargo la definición personal de variable de una gran mayoría de los profesores entrevistados está fuertemente influenciada por el uso de la variable como incógnita.

3.5 La definición Personal de Variable de los Estudiantes.

3.5.1. Introducción.

Todos los conceptos matemáticos excepto los primitivos tienen definiciones. Muchos de ellos se introducen a los estudiantes desde la primaria hasta la preparatoria o la universidad. Sin embargo, los estudiantes no necesariamente utilizan la definición para decidir si una idea dada es o no un ejemplo del concepto. En la mayoría de los casos, deciden con base en su imagen conceptual, es decir, con todas las figuras, características y procesos mentales asociados al concepto en su mente. (Tall y Vinner, 1981; Rasslan y Vinner, 1997).

El concepto de variable en la escuela primaria se introduce representado por símbolos literales y más como un guarda lugar que como variables que representan una relación funcional. Aunque las utilizan para resolver ecuaciones sencillas donde la incógnita se representa por una letra.

En secundaria los programas de matemáticas incluyen una introducción al lenguaje algebraico, el manejo de ecuaciones de primero y segundo grado, y de expresiones algebraicas y adicionalmente un breve estudio de las funciones elementales.

En preparatoria, los cursos consisten en un estudio más profundo del algebra, estudios de geometría analítica, y una introducción al cálculo diferencial e integral o matemáticas financieras.

Es de esperarse que durante este proceso educativo los estudiantes lleguen a la universidad con un sentido de los símbolos literales y que sean capaces de trabajar con el concepto de variable y de sus diferentes usos así como de ir de una a otra cuando se requiera en una tarea especifica.

En los primeros años de la universidad los cursos de los primeros semestres consisten en cursos mas formales de cálculo diferencial e integral, geometría analítica, algebra superior, y algebra lineal, en donde se enfrentan con los diferentes usos de las variables.

Sin embargo, se ha encontrado que aunque son capaces de interpretar, simbolizar y manipular la variable cuando esta aparece en expresiones simples, no lo pueden hacer cuando se enfrentan a expresiones más complejas.

Las ideas aquí comentadas y los resultados de la revisión de las definiciones de los textos y de los profesores nos conduce a las siguientes preguntas: ¿Cuál es la definición personal de variable de los estudiantes universitarios? ¿Cuál es la concepción de variable que prevalece después de todo un proceso educativo? Para investigar este hecho realizamos una encuesta a estudiantes universitarios de varias escuelas y semestres de la universidad de Sonora.

3.5.2 Metodología.

Es semejante a la aplicada con los maestros:

1. Realizamos una actividad en la que aplicamos una encuesta donde se plantea una sola cuestión: defina el concepto de variable. Esta encuesta se aplicó a 126 alumnos de materias de matemáticas de nivel universidad.
2. Se analizó cada definición de variable presentada.
3. Con los datos anteriores se formó una tabla.
4. Realizamos un análisis de las definiciones buscando regularidades sobre el enfoque con que se presenta y términos matemáticos que intervienen en la definición.
5. Realizamos un análisis de las definiciones para clasificar el uso que le da el alumno de acuerdo con la clasificación siguiente: como incógnita, como número general, como relación funcional.

3.5.3 Resultados de la Revisión de las Definiciones de los Estudiantes.

Las dificultades que experimentan los estudiantes con las definiciones formales no son un fenómeno nuevo. En los ’60 la reforma de las Matemáticas buscaba mejorar su enseñanza, pero aún hecho esto, las dificultades persistieron.

Podemos preguntarnos: ¿Qué es una buena definición? En la educación es una que puede ser entendida por los alumnos. (Poincaré, 1908).

Para investigar la definición personal del concepto de variable de los estudiantes universitarios que prevalece después de todo un proceso educativo aplicamos una encuesta donde se plantea una sola cuestión: defina el concepto de variable.

Las definiciones de los alumnos están enunciadas de manera bastante sencilla; en ocasiones no es difícil enmarcarlas dentro de alguna de las clasificaciones que estamos utilizando, pero en otras ocasiones es bastante difícil hacerlo, pues no corresponden a alguna de ellas o no está clara la definición. Las respuestas proporcionadas van desde definir a la variable como adjetivo, hasta definiciones más formales y con mayor contenido matemático. Algunas definiciones representativas son las siguientes:

8A. Son representaciones o letras que pueden tomar valores distintos o variables dentro de una ecuación o expresión algebraica
9A. *Es un valor que cambia*
23A. *Una letra o símbolo que representa cualquier número que puede variar*
25A. *Es un valor que cambia, no es constante*
41A. *Es algo que puede tomar diferentes valores, que no permanece constante*

Esta encuesta se aplicó a 126 alumnos de materias de matemáticas de nivel universidad. Intentamos conservar la clasificación que utilizamos en la revisión de los libros de texto y en las definiciones de los profesores. Los comentarios planteados en ese momento siguen siendo válidos: la tabla 3.5 nos muestra el número de definiciones en cada una de las clasificaciones que se encontró en la revisión de las definiciones de los alumnos. En algunas definiciones es posible encontrar mas de una forma de clasificar la definición por esta razón se observan discrepancias en los totales.

Tabla 3.5		
Clasificación de acuerdo al enfoque.	**No. de Alumnos.**	**%**
1a) El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas.	0	0
1b) El conjunto de reemplazo es un conjunto de números.	**46**	**37**
1c) La variable se reemplaza por un único número.	12	10
1d) Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c).	0	0
1e) No dio una definición explícita de variable.	0	0
2a) Variables que no varían.	**42**	**33**
2b) Variables discretas.	5	4
2c) Variables continuas.	5	4
3 En términos de constantes.	16	13
4. Como componente de otro concepto matemático.	2	2
5. No define variable, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización.	2	2
6. Usan la palabra variable sin definirla, o no hay claridad en la definición.	23	18
7. Ninguna	8	6

También aquí para clasificar las definiciones de acuerdo a su uso se consideraron solo aquellas donde se define el concepto de variable o se aprecia una posible definición, por lo que el número de definiciones utilizadas para la clasificación fueron 118 (quitamos

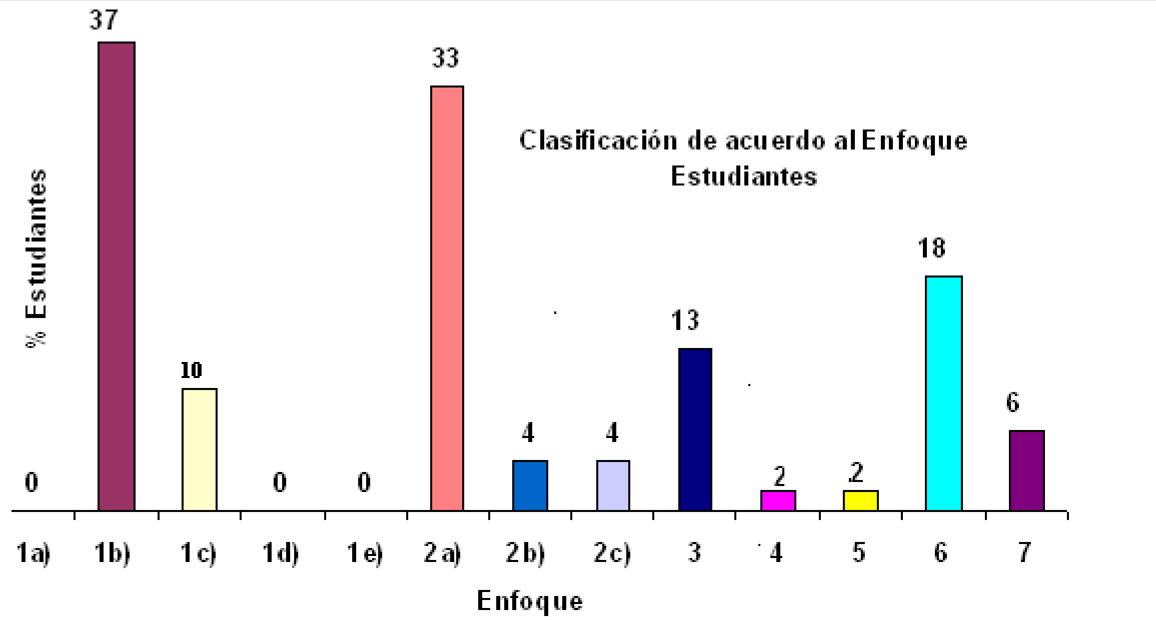
8 expresiones que no representan una definición de variable). En algunas definiciones se aprecia mas de un uso de la definición, por eso se observa discrepancias en los totales. La siguiente tabla 3.6 muestra los totales:

Tabla 3.6		
Clasificación de acuerdo al uso.	#	%
A. Como Incógnita		
A1. Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar.	9	8
A2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos.	57	48
A3. Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera.	16	14
A4. Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias.	12	10
Total como Incógnita.	**94**	**80**
B. Como Número General.		
B2. Interpretar la variable simbólica como un ente que puede tomar cualquier valor.	18	15
B3. Interpretar la variable simbólica como un objeto indeterminado que se puede operar.	2	2
Total como Número General.	**20**	**17**
C. Como Relación Funcional.		
C1. Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, grafica, etc.	3	3
C4. Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación.	3	3
Total como relación funcional	**6**	**5**

3.5.4 Análisis de los Resultados de la Revisión de las Definiciones de los Alumnos.

La tabla 3.5 muestra que hay una coincidencia con las tablas 3.1 de los textos y 3.3 de los profesores: en las definiciones de los estudiantes también se enfatiza el conjunto de reemplazo como un conjunto de números, pero además muy cercana a esta clasificación está la de variables que no varían.

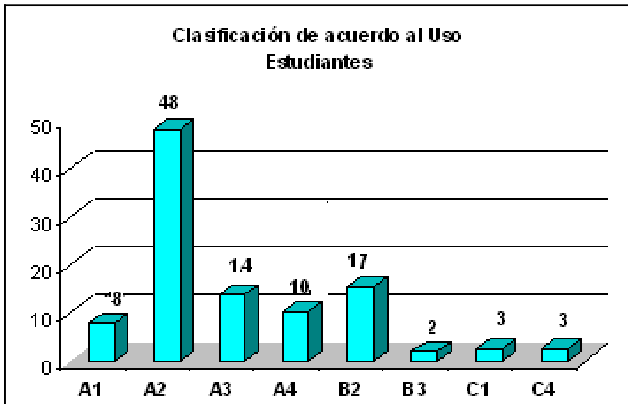
Por otro lado, más de un 24% de los estudiantes no dio una definición de variable o la dio muy confusa como para clasificarla.

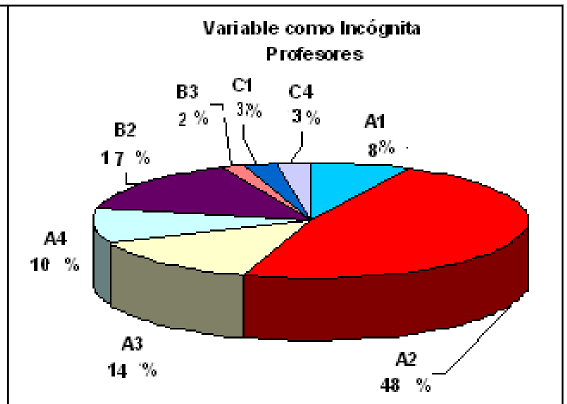


1b) El conjunto de reemplazo es un conjunto de números. **2a)** Variables que no varían.
6. Usan la palabra variable sin definirla, o no hay claridad en la definición.

Figura 3.5

En la tabla 3.6 se aprecia que el 79.6% de los estudiantes conceptualizan la variable como incógnita, coincidiendo en mucho con las definiciones de los textos y de los profesores.





A. Variable como Incógnita. **B.** Variable como Número General. **C.** Variable como Relación Funcional

A2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos.

Figura 3.6

Con los datos que se muestran en las tablas 3.5 y 3.6 y las definiciones dadas por los estudiantes, si bien es cierto que se revela una diversidad en los acercamientos al presentar el concepto de la variable, la definición personal de variable de una gran mayoría de los estudiantes encuestados está fuertemente influenciada por el uso de la variable como incógnita.

Además, un gran número de definiciones son en un cierto modo ambiguas o confusas.

3.6 Conclusiones.

Hemos realizado un estudio de la variable desde la perspectiva de la definición ofrecida del concepto en diversos textos, por profesores de diversos niveles educativos y estudiantes universitarios.

Los textos presentan definiciones en función del lector y del momento en que se escriben. Los textos analizados tienen distintas características, y cada uno tiene posibilidades didácticas diferentes, siendo el profesor el que, teniendo en cuenta el contexto escolar, delimite aquellas características que desee resaltar para obtener un fin adecuado.

Con respecto a la definición, los resultados nos muestran que el concepto de variable es en si mismo muy difícil de definir y esto se corrobora con los resultados del análisis de la presentación de la definición de 100 textos de matemáticas, 74 profesores y 126 estudiantes. Estos resultados muestran que existen muchas maneras de presentar el concepto de variable.

De aquí que es de tomarse en cuenta, dentro de la problemática que se presenta alrededor del concepto de variable, el hecho de que una gran cantidad de alumnos y profesores no tienen clara la definición de este concepto pues no son capaces de proporcionar una definición explícita, aunque coinciden con los textos en que el mayor uso que se hace de este concepto es en base al conjunto de reemplazo enfocado como un conjunto de números; en cuanto a su caracterización, los tres grupos coinciden en su mayoría en su enfoque: como incógnita.

4. Comprensión de los Estudiantes Universitarios del Concepto de Variable.

4.1 Introducción.

Hay muchos estudios sobre los obstáculos que los alumnos encuentran en el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Algunos de ellos revelan que la introducción del concepto de variable representa el punto crítico de la transición (Matz, 1982; Wagner, 1981, 1983). Este concepto es complejo porque se utiliza con significados diversos en diversas situaciones. Su manejo depende precisamente de la forma que se use en la resolución de problemas. De hecho, mucha de la literatura sobre la comprensión del álgebra utiliza como principio de organización la noción de los diversos usos de los símbolos literales.

Küchemann’s (1981) determinó que los alumnos progresan en su comprensión del uso de letras y el dominio de las variables según ciertos estadios o niveles; *Letra evaluada*. El niño asigna un valor numérico a las letras desde el principio. *Letra ignorada*. El niño ignora la presencia de la letra, o no le da ningún significado; *Letra usada como objeto*. La letra es considerada como un objeto concreto; *Letra usada como incógnita* específica. Los niños consideran las letras como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente; *Letra usada como un número generalizado*. Una letra se ve como representando varios valores diferentes en lugar de uno solo.

Usiskin (1988) describe cuatro significados de la variable ligados a diversos propósitos del álgebra. Éstas son *generalizaciones*, si el álgebra se considera como aritmética generalizada; i*ncógnitas* si el álgebra se considera como procedimiento para solucionar ciertas clases de problemas; *parámetros o argumentos* si el álgebra se considera como el estudio de relaciones entre cantidades; finalmente, *objetos arbitrario*s que son miembros de un sistema abstracto.

En cambio Sfard y Linchevski (1994) señalan el desarrollo histórico del álgebra a través de las etapas siguientes: *álgebra como aritmética generalizada* (fase operacional y después estructural), *álgebra de un valor fijo* (de una incógnita), *álgebra funcional* (de una variable), y finalmente *álgebra abstracta* (álgebra de operaciones formales y de estructuras abstractas).

De acuerdo con estos trabajos la noción de la variable puede adquirir una pluralidad de concepciones: *La variable como incógnita*: Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. *La variable como indeterminada* o expresión de patrones generales. Es el caso cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números (o elementos del conjunto que se trate). *La variable para expresar cantidades que varían conjuntamente*. La relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra. *Las variables como parámetros.*

De acuerdo con Usiskin (1988), la secundaria privilegia principalmente las tres primeras concepciones. Según él, las dificultades que los alumnos encuentran en el estudio del álgebra es posible que se deriven de la construcción inadecuada del concepto de la variable. Esta construcción debe incluir sus concepciones principales y la posibilidad de pasar de una a la otra con flexibilidad, en lo referente a las necesidades del problema por resolver.

Por otro lado Kücheman (1981) mostró que la mayoría de los alumnos entre 13 y 15 años tratan las letras en expresiones o en ecuaciones como incógnitas específicas antes que como números generalizados o variables en una relación funcional.

En cambio Ursini y Trigueros (1997) consideran las habilidades algebraicas necesarias para superar los estudios universitarios bajo tres categorías: variable como incógnita, variable como número general y variables en una relación funcional. Afirman que "un estudiante es capaz de trabajar con la variable como un objeto matemático integrado, cuando la emplea en una situación específica, pasa de uno a otro de sus aspectos de manera flexible y los integra como componentes de un mismo ente matemático" (1999). En su estudio encontraron que los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad tienen un concepto bastante pobre de la variable en su aspecto como número generalizado y como relación funcional. Tienen dificultad, principalmente, en entender la variación de una forma dinámica, como lo es la relación de la variación con otras variables. Los obstáculos son mayores cuando la resolución de los problemas no se hace a través de la manipulación, sino a través de la interpretación y la simbolización. Trigueros, M. *et al.* (1996)

Cada uno de los estudios que mencionamos tiene un propósito levemente diferente para la noción de los diversos usos de los símbolos literales. Küchemann lo utiliza para clasificar las respuestas de los niños; Usiskin lo liga a diferentes comprensiones del propósito del álgebra; Sfard y Linchevski lo utilizan para identificar etapas en el desarrollo histórico y epistemológico del álgebra y Ursini y Trigueros lo utilizan para identificar y clasificar habilidades algebraicas.

En particular creemos que el álgebra y específicamente el concepto de variable también son de gran importancia para las matemáticas que se enseñan en el nivel universitario, y que identificar causas en la educación matemática que generan la incomprensión del concepto de variable es de vital importancia para conformar, una propuesta alternativa para una enseñanza que posibilite el aprendizaje de este concepto, que juega un papel determinante en el álgebra superior, la geometría analítica y el cálculo. Así como en la construcción de modelos matemáticos

En este capítulo a diferencia de otros investigadores analizaremos el concepto de variable con estudiantes universitarios de segundo semestre y que ya han pasado por un filtro matemático como lo es el primer semestre del tronco común de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora, semestre en el cuál se espera que adquieren una madurez matemática y una mayor responsabilidad como estudiantes universitarios. Los estudiantes en el primer semestre cursan las materias de Cálculo Diferencial e Integral I, Geometría Analítica y Algebra Superior, por lo que se espera que tengan un mejor manejo y comprensión del concepto de variable.

Así pues, en este capítulo estudiaremos la comprensión que tienen de la noción de variable los estudiantes de un segundo semestre del tronco común de Ciencias e Ingeniería, analizaremos los resultados y después aplicaremos una serie de actividades para estudiar si los estudiantes cambian su comprensión del concepto.

4.2. Marco Teórico.

4.2.1 Variables.

Anteriormente hemos mencionado que hay diferentes usos y concepciones de las variables y también que los principales usos de las variables en el currículum escolar son como; incógnita, número general y como relación funcional. En este capítulo seguiremos considerando estos tres usos del concepto de variable así como la caracterización que hacen Trigueros y Ursini de cada uno de estos tres aspectos (ver Cáp. 3.) y que consideran básicos para su comprensión.

4.2.2 Marco Didáctico.

Muchos de los errores que los alumnos cometen dejan entrever la presencia de cierta confusión en cuanto a cuáles son las acciones apropiadas a efectuarse en los diferentes contextos en los que aparece la variable: enfrentado a una expresión algebraica, el estudiante a menudo duda si tiene que asignar valores a los símbolos literales que ahí aparecen o calcular su valor; si la letra representa uno o más valores; si tiene que obtener un resultado numérico o una expresión algebraica como solución. Las acciones que hay que efectuar varían dependiendo del papel que desempeña la variable en determinada situación; el no reconocer los diferentes usos de la variable conduce a los estudiantes a un mal desempeño en los cursos de la matemática universitaria.

Así, las dificultades que los alumnos tienen para alcanzar un manejo adecuado del concepto de variable, sugieren la búsqueda de alternativas didácticas que propicien la formación de este concepto.

Sin embargo, un aspecto que se nota en la revisión que realizamos de los textos de matemáticas es que se le dedica muy poco espacio o casi nada a la explicación del concepto de variable y también desconocemos si los profesores le dedican un espacio en sus clases a este concepto. Creemos que no. Pero de lo que si estamos seguros es de que unida a las dificultades inherentes del concepto de variable, se encuentra también la forma actual de la enseñanza.

La enseñanza actual, llamada tradicional, ha sido severamente cuestionada. La enseñanza tradicional concibe las nociones como derivadas de imágenes mentales, de "intuiciones" que se imprimen en nuestro espíritu, y halla el origen de todas las ideas en la experiencia sensible y atribuye al sujeto un papel insignificante en su adquisición (Aebli, 1958). Este tipo de enseñanza no produce los resultados deseados y no es capaz de suscitar progreso y formar las nociones y operaciones nuevas. Tiende a la construcción de hábitos rígidos que imposibilitan al estudiante a enfrentar situaciones imprevistas en las que pudiera aplicar el conocimiento. En este capítulo consideraremos algunos lineamientos didácticos que trata de solucionar algunas de las carencias de las que adolece la didáctica tradicional, estos lineamientos son tomados del modelo didáctico de Hans Aebli (1958) y los sistemas de representación.

La forma específica para guiar a un estudiante en la adquisición de cierto tipo de conocimiento se denomina *didáctica*. Así, el hecho de cómo los alumnos conocen y aprenden determinada asignatura debe de estar a cargo de la didáctica. Aebli (1958, 6-8) en la introducción de su obra define la didáctica en los siguientes términos: "La didáctica es una ciencia auxiliar de la pedagogía en la que esta delega, para su realización en detalle, tareas educativas más generales".

Una parte del trabajo que se realiza en esta tesis es la de observar si la concepción de los estudiantes sobre el concepto de variable cambia después de trabajar con ellos una serie de problemas diseñados con el propósito de guiar a los estudiantes en los diferentes usos del concepto de variable en diversos contextos. Para guiar el trabajo durante la resolución de los problemas se utilizaron algunos principios didácticos.

Sin pretender aquí dar una didáctica para la enseñanza del concepto de variable a través de la resolución de problemas, ni tampoco desarrollar problemas que se ajusten estrictamente a los principios didácticos, daremos los principios didácticos que nos guiaron durante el desarrollo de las actividades dirigidas a enseñar el concepto de variable. Estos principios son los siguientes (Cuevas-Pluvinage, 2003):

- Cada vez que se introduzca un concepto o noción matemática, se debe de partir de un problema. Este problema puede generar ejercicios o subproblemas cuya solución, lleve al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado.
- Es esencial que el estudiante desarrolle siempre una acción. En este sentido es importante señalar que debe de ser el propio educando quien, mediante la resolución de problemas específicos gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado. El alumno debe de estar constantemente resolviendo o intentando resolver problemas.
- Una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe de comprobar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo al problema planteado.
- Cada vez que se planteen ejercicios que representen las operaciones directas asociadas a un concepto, de ser posible, implementar ejercicios que representen la operación inversa asociada.
- Cuando se proponga una forma o método para resolver un problema intentar proporcionar una solución alternativa.
- Elaborar los problemas, en lo que corresponde a su grado de dificultad. Es decir, que las dificultades de los problemas deben de ser graduadas de tal forma que requieran el esfuerzo del estudiante, puesto que en caso contrario no los tomaran en cuenta, pero lo suficientemente fáciles para que puedan resolverlos.
- Cada vez que se propongan problemas o ejercicios que apoyen la enseñanza de un determinado concepto de las matemáticas, en un determinado sistema o registro, plantear actividades semejantes al mismo, en los diversos sistemas de representación o registros que le sean propios. Desde luego si la actividad lo permite.

4.3 Dificultades de los Estudiantes Universitarios Frente al Concepto de Variable.

4.3.1 Metodología.

En esta etapa de nuestra investigación, que corresponde al quehacer con alumnos, partimos del punto de detectar los usos que se le han estado dando al concepto de variable mediante una encuesta consistente en un solo planteamiento: Defina el concepto de variable. Esta encuesta se aplicó a profesores y estudiantes de diferentes niveles educativos aprovechando diferentes eventos organizados durante los años 2001, 2002 y, con base en las respuestas obtenidas, se diseñó un primer cuestionario que fue sometido a consideración de profesores de matemáticas para criticar la claridad de sus enunciados, el nivel de dificultad de los problemas y recoger sugerencias al respecto.

A partir de éstas se diseñó un segundo cuestionario, más amplio que el anterior, que se dividió en tres partes y se analizaron por separado. Este cuestionario se aplicó a estudiantes de grupos de Algebra Lineal y Cálculo Diferencial e Integral III en Ciencias e Ingeniería durante el semestre 2002-2 con el fin de "medir" el que los problemas estuvieran acordes a su nivel de conocimientos. Este es el cuestionario que posteriormente aplicamos a alumnos, previo al tratamiento, para evaluar el manejo y el conocimiento que tienen los estudiantes acerca de las diversas caracterizaciones del concepto de variable.

Nuestro siguiente paso consistió en la aplicación de los cuestionarios a un grupo de estudiantes que se encontraba cursando la materia de Álgebra Lineal. Este grupo se eligió de los programados para impartir por la Profa. Morales durante el semestre 2003-2.

Aunque en el grupo estaban inscritos 35 alumnos no todos participaron, pues se hizo voluntariamente y durante el transcurso del semestre por lo que surgieron diversos problemas técnicos, como: asistencia irregular debido a prácticas, laboratorios, acumulación de tareas de otras materias, etc.

Así, como se dijo anteriormente, las muestras iniciales utilizadas en los cuestionarios constaron de 22, 20 y 27 alumnos, respectivamente. Posteriores a la aplicación de las actividades las muestras constaron de 15 alumnos la primera parte, 18 alumnos en la segunda y para la tercera parte la muestra fue de 17 alumnos.

Con la idea de tener un seguimiento con los alumnos participantes en estos cuestionarios, fijamos nuestra atención en los alumnos que tomaron parte en los tres cuestionarios. Así, nuestra muestra se redujo a 6 alumnos que tomaron parte en esta investigación antes y después de las actividades que desarrollamos.

Con el fin de obtener una visión más completa de la comprensión de la noción de variable que tienen los estudiantes, se hizo un análisis cualitativo de las respuestas dadas al cuestionario. Comenzamos por agruparlas primeramente en tres categorías: no contestó, respuesta correcta, respuesta incorrecta. Posteriormente, se procedió a analizar para cada pregunta todas las respuestas incorrectas. Cabe señalar que las caracterizaciones del concepto de variable que aquí manejamos nos permitió un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes.

4.4 Resultados.

A continuación se hará un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de los cuestionarios con cada uno de los usos considerados del concepto de variable.

4.4.1 Variable como Incógnita.

En este trabajo se asume que la idea de variable como incógnita tiene las siguientes características básicas:

Una incógnita representa un valor específico no arbitrario (A2).

El valor de una incógnita puede calcularse (A4).

Para calcular el valor de una incógnita deben considerarse las restricciones de los datos (A4).

Puede identificarse la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una ecuación (A5).

Esta parte del cuestionario se elaboró en base a 31 reactivos, la mayoría de ellos utilizando a la variable como incógnita. Obsérvese que en los problemas el concepto de variable utilizado como incógnita puede representarse en dos esquemas distintos: algebraico, como una expresión algebraica, y escrito, como un enunciado verbal que corresponde a su traducción.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla 4.1

Antes de las actividades.			
Estudiante	**Contestó correcto**	**Contestó incorrecto**	**No contestó**
E1	2,5,6-15,17,18, 20,21,25, 27-31	1,3,4,16,19,22,23,24,26	
E2	1,3,4,7-31	2,5,6	
E3	1-13,15,18,20,22-25, 27-31	14,16,17,21,25,26,31	19
E4	5-9,12,13,18, 21	1-4,10,11,14-17,20,22,27,28, 30, 31	19,23-26,29
E5	1-5,7-18,20-27, 29-31	6,19,28	
E6	1-5,7-10,13-18,20-27,29-31	6,11,12,28	19
Tabla 4.1			

Analizando los resultados tenemos:

En los primeros 4 problemas se pretende tener una idea de la habilidad que tienen los alumnos para distinguir los diferentes usos de las letras, así como de la relación que existe entre ellas, al igual que en el problema 18. Se esperaba que fuera clara la diferencia entre variables y constantes, pero no fue así: el 33% de los alumnos no distingue a las variables dependientes como tales; Por ejemplo, en el problema 1 $C=2\pi r$ se identifica a r como variable y a 2π como constante, ignorándose a la variable dependiente C.

Los problemas 5 y 6 buscan medir en lo posible el manejo por parte de los alumnos de algunas definiciones y puntos importantes que ponen en evidencia el manejo de distintos esquemas de representación; el 50% de los alumnos respondieron incorrectamente al problema 6: “Una función constante no tiene variables” donde afirman que es verdadero porque una constante siempre vale lo mismo, sin distinguir que esto sucede para la variable dependiente.

Los problemas 7 al 17, 29, 30 y 31 también son alusivos a estos distintos esquemas de representación para la variable; los problemas 19 y 20 están muy relacionados con la interpretación de problemas, parte muy importante del álgebra. No hubo dificultad para relacionar ecuaciones con enunciados pero sí se observó dificultad para redactar en oración verbal las proposiciones: no se hace patente el orden en que se realizan las operaciones ni es claro distinguir unas de otras (separarlas).

Por ejemplo, en el problema 11: $4(y + 5) = 17$ al traducirlo responden que un número más 5 multiplicado por 4 es igual a 17. En el problema 14: “El cuadrado de la suma de un número más 10 veces el mismo número” lo traducen como $x^2 + 10x$.

El problema 16 presentó el 50% de respuestas equivocadas: “El triple de un número aumentado en 2 es lo mismo que el número aumentado en 8”, donde se respondió $(3x)2 = (3x)8$. Se tuvo cuidado con la redacción de los enunciados, pero no se identificó la operación a realizarse.

En el problema 17 las respuestas incorrectas fueron debidas a que no están completas, pues se dan las parejas de números que se pide determinar como ejemplos o la expresión pedida, pero no ambas. El enunciado del problema es “Escriba la siguiente oración verbal como proposición abierta y determine tres parejas de números que al sustituir N y k por ellos, la proposición resulte cierta”: si a un número natural N se le suma 1 y después se divide por 5 el resultado dado será otro número natural k”: se respondió N=9, k=2; N=4, k=1; N=8, k=8/5. En otro caso, la respuesta fue solamente $(N+1)/5 = k$.

En las respuestas de los problemas 19 y 20 se muestra que no tienen habilidad para interpretar los problemas y representarlos mediante una expresión. El problema 19 dice “Represente mediante una expresión: Un señor de 37 años tiene un hijo de 7. ¿Dentro de cuántos años tendrá el padre el triple de la edad de su hijo? A lo que plantean $x = 17$, $3x = 7$.

En los problemas del 21 al 26 se intenta que al determinar cuántos valores puede tomar la letra, se haga referencia a los distintos usos que puede tener la variable involucrada en las expresiones, no a su valor en particular; por ejemplo, el enunciado es: “para cada uno de las siguientes expresiones, ¿cuántos valores puede tomar la letra? En el problema 25 la expresión es $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ y responden que dos valores, cuando si esta expresión corresponde a una bien conocida identidad válida para todo valor de x. El problema 26 se refiere a la expresión $4 + x^2 = x(x + 1)$ y afirman que x puede tomar dos valores asumimos que por ser una expresión cuadrática, pero de la igualdad resulta que no es así, pues se eliminan los términos cuadráticos.

En cambio, los problemas 27 y 28 tienen un enfoque más aritmético, pues en ellos se pide determinar los valores que puede tomar la letra involucrada en las expresiones. En el problema 28, por ejemplo, la expresión es $\frac{10}{1+x^2} = 2$ sólo proporcionan un valor de x, está incompleta la respuesta.

Aún así, los problemas 21-28 denotan en términos generales un manejo bastante deficiente del álgebra: no reconocen a una variable como número general o en un producto notable. Además, se nota que en ocasiones no leen con cuidado los enunciados de los problemas y dan el (los) valor(es) de la variable cuando se pregunta por la cantidad de valores a tomar por la variable y viceversa.

En los problemas 29-31 se esperaba un buen manejo de las fórmulas de perímetros y áreas de figuras geométricas: sólo un alumno comete errores injustificados para el nivel de preparación matemática de los estudiantes y, además, utiliza la notación usual y no con las variables indicadas en la figura. Pensamos que en parte es falta de atención.

4.4.1.2 Análisis.

Dentro de los errores más comunes en esta parte del cuestionario se detectaron los siguientes:

- Se esperaba que fuera clara la diferencia entre variables y constantes, pero no fue así.
- No se considera adecuadamente a la variable dependiente, ni algebraica ni geométricamente. Esto es, no se considera a las variables dependientes como un tipo de variable, es decir, cantidades que también varían, sino como constantes.
- De aquí que, en ocasiones, se tiene una vaga idea del concepto de variable.
- No se identifica en ciertos casos, resultados bien conocidos, por lo que en ocasiones se observa un manejo algebraico deficiente.
- Se visualiza en ocasiones una dificultad muy marcada para expresar en símbolos los enunciados (problemas de traducción), es decir, se observa dificultad para redactar en oración verbal algunas proposiciones: no se hace patente el orden en que se realizan las operaciones ni es clara la separación entre unas y otras.
- No se tiene habilidad para interpretación de problemas y su representación mediante una expresión.
- En parte esto es debido a que no hay la atención debida, falta de concentración.

4.4.2 Variable como Número General.

La idea de números generales, o números con letras, es una de las ideas fundamentales en Matemáticas. En este estudio asumimos que una variable es usada como un número general cuando representa un número indeterminado involucrado en un método general. Esta parte del cuestionario se elaboró en base a 10 reactivos, utilizando a la incógnita como número general.

Los problemas contenidos consisten en mostrar la habilidad que se tiene en la generalización de patrones, en ocasiones a partir de figuras, en otras en base al planteamiento de alguna situación y en otras partiendo de igualdades algebraicas.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente Tabla 4.2

Antes de las actividades			
Estudiante	**Contestó correcto**	**Contestó incorrecto**	**No contestó**
E1	32-38,41	39,40	
E2	32-39,41	40	
E3	32-38,41	39	40
E4	33-35,37,38	32,36,39-41	
E5	32,34-38,41	39	33b), 40
E6	32-38	40,41	39

Tabla 4.2

Analizando los resultados tenemos:

El problema 32 pide escribir una fórmula para calcular el perímetro del polígono y el estudiante deja indicada la respuesta: $L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$

El problema 36 pide: Imagine que puede seguir dibujando figuras hasta la figura #m. ¿Cuántos puntos en total tendrá la figura #m? Y el estudiante responde: n#

En el problema 39 se pregunta ¿cuántos puntos se agregan para pasar de la figura #m a la siguiente? Y la respuesta es n números. Algo semejante sucede en el problema 40, donde se pide escribir una fórmula que muestre cómo se van agregando puntos hasta llegar a la figura #m, y el estudiante afirma que 3 + 5 + 7 +...+ m = n# puntos.

En cambio, el problema 41 se refiere a una bien conocida identidad algebraica que se pide completar, y el estudiante no lo hace, sólo calcula. También en este caso creemos que falta mayor atención al responder los problemas.

4.4.2.1 Análisis.

Los problemas detectados en este caso son:

- No relacionan la numeración de las figuras con la cantidad de puntos que contienen, es decir, no se encuentra la relación general entre el total de puntos que se agregan para pasar de una figura a otra, el cómo se van agregando estos puntos y las figuras que se vieron anteriormente.
- A pesar de manejarse igualdades bien conocidas, no pueden determinarla (ni completarla) correctamente.
- No se muestra habilidad para generalizar.

Se nota claramente la gran dificultad que se tiene para la generalización de patrones. Cabe aclarar que el proceso de generalización no es algo tan sencillo como para que baste con unos cuantos ejemplos para manejarlo correctamente; aún en profesores de nivel profesional se presenta esta dificultad. Pueden programarse temas completos en cursos acerca de este proceso, como sucede con el método de inducción matemática, y aún así necesitarse de más ejercicios.

4.4.3 Variable como Relación Funcional.

La noción dinámica de una relación funcional está presente desde hace mucho tiempo, antes de que se introdujera cualquier expresión analítica que la representara y consiste en la concepción de una cantidad que depende de otra cantidad cambiante.

La noción de “relación funcional” asumida fue la dinámica: una cantidad que depende de otra cantidad cambiante. Esta concepción de una relación funcional está presente desde hace mucho tiempo, antes de que se introdujera cualquier expresión analítica que representara una relación funcional. Se consideró que al menos dos aspectos caracterizan una variable en relación funcional:

- un aspecto estático: cuando se considera la correspondencia puntual /estática entre dos cantidades;
- un aspecto dinámico: cuando dos cantidades se ven móviles y se percibe su relación global.

Suponemos que las variables están en una relación funcional cuando representan números cuyos valores se mueven dentro de un rango de valores unidos uno con el otro por una relación. El trabajar con variables en una relación funcional implica el trabajar con relaciones funcionales y con algunas nociones matemáticas no triviales en ellas, por ejemplo: dominio y rango de variación, monotonía, máximos y mínimos.

Esta parte del estudio está conformada por 24 problemas, en las que se utiliza la variable en una relación funcional. Estos problemas se diseñaron de manera que los alumnos deban trabajar con la idea de función y sus nociones fundamentales basados en la percepción visual de cambio y utilizando su respaldo aritmético, principalmente su experiencia con enteros y su orden.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente Tabla 4.3

Antes de las actividades			
Estudiante	**Contestó correcto**	**Contestó incorrecto**	**No contestó**
E1	43, 46-48, 57-59, 61, 62, 65	42, 44, 49-56, 60, 63, 64	
E2	43-48, 50, 55-57, 61, 62 65	42,49,51-54,58-60, 63, 64	
E3	43, 44, 46-49, 53, 54, 56, 58-62, 64	42,45,50,52,55,57,63	51,65
E4	43, 44, 46-48, 50, 53, 54, 57, 61	42,45,49,51,55,56	52,58-60,62-65
E5	42-46, 48-50,56, 58-62, 64, 65	47,51-55,57,63	
E6	43, 44, 46-49, 53, 54, 56, 58-62, 64, 65	42,45,50-52,55,57	63
Tabla 4.3			

Analizando los resultados tenemos:

En el problema 42 el planteamiento es erróneo pues se afirma que $12x + y = 300$, lo cual no corresponde al enunciado del problema: "Entre dos hermanos compran una bicicleta en $300. Encuentre la cantidad que aportó cada uno, si uno de ellos pagó $12 más que el otro. En el problema 44 la respuesta no está clara: ¿qué pasa con el valor de y cuando x varía (crece o decrece)? Y responde: corre inversamente.

El problema 45 pide la expresión general que represente la relación entre las variables de la tabla anterior pero hay dificultad para determinarla, a pesar de que en el problema siguiente se solicita la gráfica de la curva que se obtiene a partir de esos puntos y todos la graficaron correctamente.

Los problemas 49 y 50 se refieren a decir cuáles expresiones son funciones de x y cuáles no y claramente $y^2 = x$ no lo es, pues representa una parábola horizontal y por otro lado, $y = ax^2 + bx + c$ sí lo es.

En el problema 51 fallaron totalmente pues nadie lo contestó correctamente; se trata de manipulación algebraica para determinar la expresión que representa la variación inversamente proporcional entre y y x. Esta expresión es $y=36/x$, por lo que si $x=18$ entonces $y=2$. Lo mismo sucede en el problema siguiente, aunque el estudiante 2 estuvo muy cerca de la respuesta.

Los problemas 53 y 54 piden señalar constantes, variables dependientes e independientes en las fórmulas dadas y hubo dificultad para distinguirlas. Las expresiones son: $A = lw$, $t = d/r$ donde A,t son variables dependientes, l,w,d,r son independientes.

El problema 55 es muy semejante a 51 y 52: se pide expresar el área de un cuadrado de lado x en función de su diagonal D, lo que mediante manejo algebraico lleva a $A = D^2/2$, respuesta obtenida solamente por el estudiante 2.

Los problemas 56 y 57 son semejantes: en ambos la respuesta es 2. Si el lado de un cuadrado dobla su valor su perímetro es multiplicado por 2, así como si el radio de una circunferencia dobla su valor, su circunferencia (perímetro) también es multiplicada por 2.

Los problemas 58 y 59 están bastante sencillos, por lo que los errores son de omisión, es decir, respuestas incompletas que pueden considerarse por descuido. El problema 60 consiste en analizar la gráfica dada y obtener la expresión para P en términos de A; el comportamiento lineal permite asegurar que $P=(A/2)+ 110$, por lo que si se dice que $A = (25/40)A + 112.5$ es incorrecto.

El problema 63 también resultó ser de los que presentó mayor dificultad, pues de nuevo el manejo deficiente del álgebra no permitió a los estudiantes llegar a la expresión cuadrática que representa esta área total de manera que resolviéndola se encuentra el valor de $x = 3$.

Los problemas 62 y 63 no presentaron mayor dificultad y quienes no respondieron creemos que fue por falta de tiempo o de atención.

4.4.3.1 Análisis.

Dentro de los errores más comunes en esta parte del cuestionario se detectaron los siguientes:

- Nuevamente se observa que no está clara la diferencia entre constantes, variables dependientes e independientes en las fórmulas.
- La manipulación algebraica es bastante deficiente, lo que no permite un manejo adecuado de las expresiones algebraicas al momento de cambiar de variables.
- Por lo mismo, falta paciencia para hacer los cambios pertinentes. Al parecer, se prefiere que los cambios necesarios se den ya hechos.

4.5 Desarrollo de las Actividades.

4.5.1 Metodología.

Paralelamente, se diseñaron las actividades. Los obstáculos detectados nos pueden ayudar a guiar el diseño de actividades que necesariamente tendríamos que llevar al aula y experimentarlas. Podemos decir que nuestras actividades consisten en el desarrollo de materiales educativos para los alumnos, que los vaya guiando de manera coordinada y gradual a la consecución de nuestro propósito.

Con base en las respuestas obtenidas del cuestionario, nuestra experiencia propia y la discusión con el resto de los maestros que imparten esta materia y materias seriadas con ella en cuanto a los efectos que pueden tener estos errores en las aplicaciones que manejan, se diseñaron una serie de actividades encaminadas a guiar a los estudiantes en estos diferentes usos del concepto de variable en diversos contextos, pero también a relacionar e identificar estos usos de manera que puedan pasar de uno a otro sin mucho problema. Además, el programa de la materia de Algebra Lineal en sí mismo apoya el desarrollo de estas actividades pues varias de ellas forman parte de él.

Intentamos durante el desarrollo de la clase normal, dedicar 15 minutos durante uno o dos días de la semana a resolver problemas semejantes a los planteados en los cuestionarios como parte de la investigación y del mismo programa de la materia. En ocasiones pudimos aprovechar los conocimientos previos de Geometría Analítica y en otras los reforzamos, pues no estaban muy claros. Hay situaciones que permiten perfectamente ejemplificar el tránsito entre una forma de representación y otra y que son aplicables al Algebra Lineal. Aproximadamente utilizamos dos meses del semestre en estas actividades.

Por otro lado, con la finalidad de reducir la dificultad que se presente, se manejan diferentes esquemas de representación: algebraico, geométrico y numérico, que permitan visualizar lo que, en muchas ocasiones, es difícil interpretar en un esquema particular. Con base en la experiencia adquirida a lo largo de años de trabajo en la docencia a nivel superior, se ha encontrado que en caso de tener un dominio del contexto gráfico-visual será posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones; el problema didáctico estriba precisamente en la dificultad para adquirir maestría en el contexto geométrico.

Ahora analizaremos los resultados obtenidos después de la aplicación de las actividades diseñadas.

4.5.2 Resultados Posteriores a la Aplicación de las Actividades.

De acuerdo a las respuestas obtenidas del cuestionario y posterior al desarrollo de las actividades propuestas, se aplicó por segunda ocasión el cuestionario, con lo cual evaluamos cualitativamente la efectividad de estas actividades. En esta evaluación no se prestó mayor interés a una calificación numérica, sino que evaluamos el que el estudiante sea capaz de trabajar con la variable como un objeto matemático integrado cuando la emplea en una situación específica, que pueda pasar de uno a otro de sus aspectos de manera flexible y los integre como componentes de un mismo ente matemático.

4.5.2.1 Variable como Incógnita.

La muestra en la primera parte constó de 15 alumnos. En el transcurso de las actividades se hizo alusión a los errores más comunes cometidos y, al parecer, se tomó conciencia de ello, pues los resultados mejoraron.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente Tabla 4.4

Después de las actividades			
Estudiante	**Contestó correcto**	**Contestó incorrecto**	**No contestó**
E1	1-4,6-11,13-15,17,18,20,21,25, 29-31	5,12,16,23,24,26,27,28	19,22
E2	1,3-19,21-27, 29-31	2,28	20
E3	1-13,15,17,18, 21, 25, 28-31	14,16,19,22-24, 26,27	20
E4	1-4,7-11,13-15,18,20,21,27, 29-31	5,6,12,16,17,19,28	22-26
E5	1-18,20-24, 27-31	25,26	19
E6	1-4,7-11,13-15, 17-24, 27-31	5,6,12,16,25,26	

Tabla 4.4

Analizando los resultados tenemos:

En el problema 2 el estudiante afirma que en x + 6 = 7 x es también una constante, al parecer por el hecho de que sólo puede tomar un valor. En el problema 5 sucede que la respuesta está incompleta, pues se afirma que es falso que la variable es un número fijo no especificado pero no argumentan el por qué. Ambos problemas están muy relacionados en este sentido.

El problema 6 afirma que una función constante no tiene variables a lo que el estudiante 6 responde que esto es verdadero ya que una función constante siempre es igual, nunca varía siendo que como dice el estudiante 1 esto es falso, pues es diferente la función a la variable. Más correctamente, es diferente el valor de la variable dependiente al de la(s) independiente(s).

En el problema 12 se presentan dificultades para traducir expresiones algebraicas a oraciones verbales en estudiantes que habían respondido correctamente antes de la aplicación de las actividades. se describe la suma de un número más 2 por 3 es igual a 18, cuando la expresión es $3(y + 2) = 18$. Algo semejante sucede en el problema 14 y persiste en el 16: el triple de un número aumentado en 2 es lo mismo que el número aumentado en 8 corresponde a $3(x + 2) = x + 8$ y no a $3x + 2 = x + 8$.

El problema 19 pide interpretar el enunciado y representarlo mediante una expresión que resulta ser $37 + x = 3(x + 7)$. Algo semejante se pide en el problema 20.

En los problemas 22 al 26 se pide indicar cuántos valores (no cuáles) puede tomar la letra en cada expresión: en x + 5 = x + x sólo pude tomar un valor y no infinidad.

Los problemas 27 y 28 sí piden los valores que puede tomar la letra en la expresión, lo que puede obtenerse con procedimientos algebraicos: en 13x + 27-2x = 30 + 50x se obtiene que x = ½ y en $\frac{10}{1+x^2} = 2$ los valores son -2 y 2

4.5.2.1.1 Análisis.

Después de la aplicación de las actividades, en la mayoría de las ocasiones parece ser que los errores se deben al descuido o poca atención que se pone en el enunciado de los problemas y no al grado de complejidad de los mismos. De aquí que, en términos generales, mejoró el manejo del concepto de variable como incógnita.

4.5.2.2. Variable como Número General.

En la segunda parte la muestra fue de 18 alumnos. Los resultados mejoraron notablemente pues sólo se cometió error en tres problemas: 39, 40 y 41. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente Tabla 4.5

Después de las actividades.			
Estudiante	**Contestó correcto**	**Contestó incorrecto**	**No contestó**
E1	32-38	39-41	
E2	32-39,41		40
E3	32-39,41	40	
E4	32-38	39	40,41
E5	32-38,41		39,40
E6	32-38	39,41	40

Tabla 4.5

Analizando los resultados tenemos:

En el problema 39 ya se había visto que para pasar de la figura #m a la siguiente se necesita agregar 2m+1 puntos y en el 40 la fórmula pedida es 1+3+5+…+m=2m+1.

En el problema 41 hubo confusión al representar el término general de esta bien conocida y muy utilizada identidad trigonométrica: $1+2+\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$

4.5.2.2.1 Análisis.

Sigue sin contarse con habilidad para la generalización, a pesar de tratarse en ocasiones de identidades algebraicas bien conocidas y que se utilizan frecuentemente en muchas materias.

4.5.2.3 Variable como Relación Funcional.

Para la tercera parte la muestra fue de 17 alumnos; puede considerarse que las actividades cumplieron su cometido, pues los resultados mejoraron después de ellas.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente Tabla 4.6

Después de las actividades			
Estudiante	**Contestó correcto**	**Contestó incorrecto**	**No contestó**
E1	45,46-48,50-55,57-59,61,62, 65	42-44,49,56,60,63, 64	
E2	42,43,45-50,52-57,61, 62	44,58,59,63-65	51,60
E3	43,44,46,47,49,56-59,61,62,	42,48,50-55,63,65	45,60,64
E4	43-49,53,54,56,57, 60-63	42,50,51,58,59	52,55,64,65
E5	43-49,53,54,56-63	42,50-52,55	64,65
E6	43,46-49,51,53,54, 56-59,61,62	42,50,52,55,60,64,65	44,45,63
Tabla 4.6			

Analizando los resultados tenemos:

El problema 42 pide solamente una expresión que represente el enunciado, pero hay estudiantes que dan la solución del problema y no la expresión: $(12 + x) + y = 300$.

En el problema 44 no se explica adecuadamente qué sucede con y cuando x varía, cuando afirman que crece se toma como suficiente. Todavía en el problema 45 hay quien no obtiene la expresión que representa a la curva ni aún teniendo la curva graficada en el siguiente problema.

Los problemas 49 y 50 son parábolas horizontal y vertical, respectivamente, pero todavía hay error para determinar si son funciones de x o no. Los problemas 51, 52 y 55 aún presentan dificultad para el manejo algebraico: si la variación de y es inversamente proporcional a la de x, y si y=9 cuando x = 4, ¿qué valor tiene y cuando x = 18? Respondiendo $\frac{k}{y} = x$, y = 2.

En el problema 60 la mayoría de los alumnos no respondió y es material que se utiliza frecuentemente en matemáticas. El problema 63 ya pudo ser resuelto correctamente y quienes no lo resolvieron al menos hicieron el intento.

La mayoría de los alumnos no resolvieron completos los últimos problemas, 64 y 65, pero otros problemas que requerían más de álgebra sí los resolvieron.

4.5.2.3.1 Análisis.

Parece que después de las actividades los estudiantes recordaron algunos resultados y procedimientos algebraicos, aunque no lo suficiente para responder a todos los problemas.

A continuación presentamos una tabla donde resumimos los porcentajes de aciertos para cada pregunta antes y después de las actividades.

Tabla de porcentajes de aciertos para cada pregunta

No. de Prob.	Incógnita	No. de Prob	No. General	No. de Prob.	R.Funcional
1	66%, 100%	32	83%, 100%	42	16%, 16%
2	66%, 100%	33	83%, 100%	43	83%, 83%
3	66%, 100%	34	100%,100%	44	83%, 50%
4	66%, 83%	35	100%,100%	45	50%, 66%
5	83%, 50%	36	83%, 100%	46	100%,100%
6	50%, 66%	37	100%,100%	47	83%, 100%
7	100%, 100%	38	100%,100%	48	100%, 83%
8	100%, 100%	39	16%, 33%	49	50%, 83%
9	100%, 100%	40	0%, 0%	50	50%, 33%
10	83%, 100%	41	66%, 50%	51	0%, 33%
11	66%, 100%			52	0%, 33%
12	83%, 50%			53	50%, 83%
13	100%, 100%			54	50%, 83%
14	66%, 83%			55	16%, 33%
15	83%, 100%,			56	66%, 83%
16	50%, 33%			57	50%, 100%
17	66%, 83%			58	66%, 66%
18	100%, 100%			59	66%, 66%
19	16%, 33%			60	50%, 33%
20	83%, 66%			61	100%,100%
21	83%, 100%			62	83%, 100%
22	66%, 50%			63	0%, 33%
23	66%, 50%			64	50%, 0%
24	66%, 50%			65	66%, 16%
25	83%, 50%				
26	50%, 50%				
27	83%, 66%				
28	50%, 50%				
29	83%, 100%				
30	83%, 100%				
31	83%, 100%				

4.6 Comentarios Generales.

Algunos errores persistieron en la primera parte, aún después de la aplicación de las actividades. De las principales dificultades que presentan los estudiantes con la variable es el no distinguir el papel que éstas juegan en las expresiones, pues en ocasiones por el sólo hecho de que puedan tomar un solo valor (aunque sea desconocido) ya la consideran una constante.

Estos resultados sugieren que algunas de las dificultades que tienen, quienes se inician en álgebra, con la solución de una ecuación pueden tener su origen en la enseñanza tradicional que enfatiza herramientas manipulativas pero no refuerza la idea de incógnita específica como representación de un número particular que puede determinarse considerando las restricciones dadas en el problema.

Por otro lado, problemas que habían sido respondidos correctamente antes de las actividades se respondieron incorrectamente después o no se respondieron, pero por el trabajo mostrado durante la investigación podemos atribuirlo a descuido, exceso de confianza o posiblemente cansancio.

Cuando se diseñan actividades donde se utilice el concepto de variable como número general, es importante tomar en cuenta los siguientes argumentos considerados por Kruteskii (1976):

- la habilidad para generalizar está íntimamente relacionada con la habilidad para hacer distinciones y
- la habilidad para generalizar en Matemáticas aumenta gradualmente, desde el análisis de muchos ejemplos particulares para identificar sus aspectos conocidos y generales, hasta la habilidad para ir desde un ejemplo particular hasta lo que es desconocido y general.

Por esto mismo, si no se tiene la habilidad para distinguir no puede tenerse tampoco para generalizar y es lo que sucede con los estudiantes. También en esta segunda parte se presentaron errores en respuestas que con anterioridad habían sido correctas, por lo que podemos suponer también cansancio o descuido.

Una de las aplicaciones más importantes del álgebra es la resolución de problemas. La notación algebraica, tan clara y concisa, facilita grandemente esa resolución. La idea de usar letras para representar números es la primer gran idea en Álgebra y aunque es una idea extremadamente simple, tiene una influencia tremenda en el mundo actual.

La idea de números generales, o números con letras, es una de las ideas fundamentales en Matemáticas. Cuando alcance su completo significado, habrá dado el primer gran paso en el entendimiento y uso del Álgebra.

En lo referente a la variable como relación funcional: el estudio de la forma como varían las funciones con sus variables es una parte importante de la matemática. Las notaciones usadas para las variables en literatura matemática a menudo les rompen la cabeza a los estudiantes. En los casos más simples, las letras del alfabeto se usan como símbolos variables. Sin embargo, algunos enunciados matemáticos involucran varias variables.

Quienes inician en álgebra tienen problemas para entender la idea de cambio; la noción dinámica de una relación funcional está presente desde hace mucho tiempo, antes de que se introdujera cualquier expresión analítica que la representara y consiste en la concepción de una cantidad que depende de otra cantidad cambiante.

De aquí que en resumen, en la resolución de problemas una variable puede utilizarse de diferentes formas en momentos distintos dentro de un mismo problema, es decir puede tener distintas caracterizaciones, lo cual confunde en diferente medida a los estudiantes a pesar de contar con cierta experiencia por haber cursado ya algunas materias de matemáticas.

5. Conclusiones.

Las variables son uno de los instrumentos más poderosos para expresar las regularidades que se encuentran en matemáticas. El principal interés del uso de letras (variables) en matemáticas es que permiten expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz.

El tipo de experiencias que tienen los niños con la aritmética es importante para la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la "aritmética generalizada". El concepto matemático que hace posible esa generalización es el de variable. El uso de variables es un indicador clave de que la actividad matemática pasa de ser aritmética a algebraica. La enseñanza de la aritmética queda incompleta y deficiente si no se le imprime una orientación hacia la generalización.

La introducción de variables simbólicas es la culminación de un largo proceso histórico así como el punto de partida de una disciplina totalmente nueva. El término genérico "variable" incluye actualmente las nociones de incógnita, de número general, y las variables vinculadas a una relación funcional. Por consiguiente, el término "variable" como es usado hoy es un concepto multifacético que contiene el desarrollo histórico de incógnita específica, de número general y de cantidades relacionadas.

Una explicación plausible para el fracaso de los alumnos cuando son introducidos directamente al álgebra simbólica podría ser una falta de experiencia previa con todos esos diferentes usos de la variable en un nivel pre-algebraico. Este tipo de experiencia proveería a los alumnos de un entorno más rico en el cual el lenguaje algebraico podría inicialmente introducirse como una herramienta para manipular problemas que impliquen caracterizaciones diferentes de la variable.

Quienes inician en álgebra tienen problemas para entender la idea de cambio; la noción dinámica de una relación funcional está presente desde hace mucho tiempo, antes de que se introdujera cualquier expresión analítica que la representara y consiste en la concepción de una cantidad que depende de otra cantidad cambiante.

Aunque los diferentes usos de la variable están siempre presentes en cada uno de los cursos de matemáticas que se imparten a nivel universitario, los estudiantes no tienen la capacidad para interpretarlos, simbolizarlos y manipularlos de manera adecuada, lo que a su vez impide una comprensión del carácter multifacético de este concepto. Es notoria la fragilidad en la capacidad para distinguir entre los diferentes usos de la variable y la fuerte influencia que ejercen los temas que se están tratando en un momento dado en el salón de clase.

Los análisis realizados sugieren que algunos de los comportamientos erróneos pueden ser consecuencia directa de no tener claro el contexto en el cual se espera que se resuelva un problema; los estudiantes aprenden a manejar técnicas específicas y algoritmos, pero no a reflexionar sobre su utilidad y pertinencia. Es un aprendizaje memorístico que en lugar de favorecer su comprensión del concepto de variable, tiende a entorpecerlo. Parecería que la forma actual de enseñanza va en detrimento de la intuición matemática que tienen originalmente los alumnos y que, en todo caso, debieran desarrollar más.

Resultados de investigaciones sugieren que las dificultades que manifiestan los estudiantes parecen originarse en la manera como se tratan los distintos usos de la variable en los cursos: aunque se trabaja con ellos, no se hacen explícitas las características que los hacen diferentes. En los distintos cursos se hace énfasis en uno u otro uso de la variable de manera aislada y no se ayuda a los estudiantes a integrarlos y darse cuenta que se trata de un mismo concepto multifacético. Aún más, la matemática frecuentemente se aísla de otras disciplinas escolares.

Consideramos que una mala conceptualización de la variable puede ser una causa importante para las múltiples dificultades que suelen tener los estudiantes de cursos de matemáticas en distintos niveles de enseñanza media y superior. Es necesario por lo tanto repensar profundamente el contenido de los cursos así como las estrategias de enseñanza que actualmente se emplean y buscar acercamientos que favorezcan un aprendizaje significativo del concepto de variable. Desde el inicio, los estudiantes deberían trabajar de manera simultánea con los tres usos de la variable y además, muy importante, indicárseles de manera explícita cuáles características son las que las hacen diferentes. Asimismo, es necesario apoyar al estudiante a adquirir la capacidad de interpretar, simbolizar y manipular a las variables a través de diversas situaciones de creciente grado de complejidad.

De aquí que, por ejemplo, en la resolución de problemas una variable puede utilizarse de diferentes formas en momentos distintos dentro de un mismo problema, es decir puede tener distintas caracterizaciones, lo cual confunde en diferente medida a los estudiantes a pesar de contar con cierta experiencia por haber cursado ya algunas materias de matemáticas.

Por otro lado, una parte importante del proceso de enseñanza y aprendizaje son los textos que utilizan los profesores para los cursos que imparten; por supuesto que influyen en cierta medida en las dificultades que experimentan los estudiantes con su concepción propia de la variable, además de la manera como se tratan los distintos usos de la variable en los cursos, es decir, la forma en que aborden los profesores este concepto. En otras palabras, consideramos que las dificultades experimentadas por los estudiantes al enfrentarse con este concepto están fuertemente influidas por las prácticas docentes, el contenido de los cursos y la manera en que lo abordan los textos.

Hemos realizado en este trabajo un análisis del concepto de variable desde la perspectiva de la definición ofrecida del concepto en diversos textos, la que manejan los estudiantes universitarios y la que utilizan los profesores de diversos niveles educativos, es decir, presentamos un análisis de la definición tanto formal como personal del concepto matemático de variable, viendo determinadas implicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para esto, trabajamos en dos tipos de estudios diferentes: teórico y experimental. El primero incluye revisión bibliográfica: artículos de investigación, libros, investigaciones realizadas y consiste en el análisis de las concepciones históricas del concepto de variable, así como de los obstáculos epistemológicos presentes. La parte experimental corresponde al diseño de una encuesta, 2 cuestionarios base, 3 cuestionarios para aplicarse a los estudiantes y actividades destinadas a desarrollarse con los estudiantes.

En esta tesis se han desarrollado cuatro aspectos principales: el proceso histórico mediante el cual el concepto de variable llegó a su forma actual, la forma como se presenta la definición de variable en los textos escolares, el conocimiento de los profesores para la enseñanza de este concepto y la concepción de variable que tienen los estudiantes universitarios.

Los resultados nos muestran que el concepto de variable es en si mismo muy difícil de definir y esto se corrobora con los resultados del análisis de la presentación de la definición de 100 textos de matemáticas, 74 profesores y 126 estudiantes. Estos resultados muestran que existen muchas maneras de presentar el concepto de variable.

De aquí que es de tomarse en cuenta, dentro de la problemática que se presenta alrededor del concepto de variable, el hecho de que una gran cantidad de alumnos y profesores no tienen clara la definición de este concepto pues no son capaces de proporcionar una definición explícita, aunque coinciden con los textos en que el mayor uso que se hace de este concepto es en base al conjunto de reemplazo enfocado como un conjunto de números); en cuanto a su caracterización, los tres grupos coinciden en su mayoría en su enfoque: como incógnita.

Una primera reflexión es destacar como necesaria la existencia de equipos de trabajo de profesores investigadores que se planteen la realización conjunta de actividades en las que se aborde una secuenciación de distintas situaciones didácticas dirigidas a lograr una mejor comprensión del concepto de variable en los estudiantes. Se trata de eliminar el hecho, muy frecuente, de ir pasando la responsabilidad de la mala preparación del alumno que ingresa a la Universidad a los profesores de los niveles anteriores e intentar solucionar el problema.

Las respuestas dadas por los estudiantes a los problemas en los cuestionarios revela que la enseñanza del concepto de variable se centra fundamentalmente en el aprendizaje por parte de los alumnos de métodos algorítmicos y la caracterización de la variable como incógnita, pasando a segundo término la verdadera comprensión del concepto. Asimismo, se aprecian las dificultades que tienen los estudiantes para relacionar gráficas y expresiones analíticas y se comprueba que aunque realicen diversos ejercicios ligados con el concepto de variable, siguen teniendo obstáculos que les impiden una mejor comprensión del concepto.

Por otro lado, el análisis de los textos indica que no existe una definición formal de variable y que en las definiciones predomina fuertemente una conceptualización de la variable como incógnita, además de que en muchas ocasiones no se le presta la debida atención ni se le dedica espacio en ellos a este concepto.

El análisis de las respuestas de los profesores señala la incidencia que pueden tener sobre la instrucción de sus alumnos, de manera que así como el saber es el componente básico para poder enseñar, no es suficiente, es necesario también saber enseñar y este desconocimiento puede desembocar en grandes fracasos académicos para los estudiantes, enmascarándose en ocasiones ese desconocimiento en las viejas argumentaciones de “viene mal preparados”, “en mi época sabían más”, “les falta base” que, aunque tienen algo de verdad, no pueden explicar la enorme frustración de los estudiantes.

Sin embargo, a pesar de que en esta tesis se ha analizado la perspectiva de la definición ofrecida del concepto de variable en diversos textos, la que manejan los estudiantes universitarios y la que utilizan los profesores, no se ha planteado una propuesta didáctica en tal sentido. Por tanto, la elaboración de propuestas para estudiantes universitarios es un campo de investigación que puede enriquecerse.

PROYECTOS PROPUESTOS

Como se mencionó en el primer capítulo, a partir de este trabajo pueden derivarse variados e interesantes proyectos de investigación, como por ejemplo:

- Apoyar al estudiante a adquirir la capacidad de interpretar, simbolizar y manipular a las variables a través de diversas situaciones de creciente grado de complejidad.
- Analizar cómo se utiliza el concepto de variable a lo largo de todo un texto.
- Analizar el desarrollo histórico del concepto de variable en un texto en ediciones distintas.
- Trabajar con mayor profundidad con profesores

Estas propuestas están encaminadas al provecho de los estudiantes, para que logren una mejor comprensión del concepto de variable. Si este trabajo contribuye de alguna manera al desarrollo del proceso docente y promueve alguna propuesta didáctica en tal sentido, se habrá logrado una importante aportación y gran satisfacción personal.

6. Bibliografía.

Aebli, Hans. (1958). Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Kapeluz. Buenos aires.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14(3), 24-35.

Artigue, M. (1992). Function from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspect of Epistemology and Pedagogy (pp. 109-132). Mathematical Association of America, 25.

Artigue, M. (1997). Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. Educational Studies in Mathematics 33 No 2, 133-169.

Barnard, T. & Tall, D.O. (1997). Cognitive Units, Connections, and Mathematical Proof. In E. Pehkonen, (Ed.), Proceedings of the 21st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2 (pp. 41-48). Lahti, Finland.

Boyer, C.B. (1946) "Proportion, equation, function. Three steps in the development of a concept". Scripta Mathematics, 12, 5-13.

Boyer, C.B. (1968). A history of mathematics. New York: Wiley.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz et.al. (Eds.), Approaches to algebra (pp. 15–37). Dortrecht: Kluwer Academic Press.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Collette, Jean-Paul. (1986). Historia de las Matemáticas. Tomos I y II. Siglo XXI Editores. Segunda edición en español.

Collis, K. (1975). The development of formal reasoning. Newcastle, Australia: U. of Newcastle.

Cuevas A., Pluvinage, F. (2003). Les proyects D´action Practique, Éléments Dúne Engénierie Dénseignemet de Mathematiques. Annales de didactique et Sciences Cognitives, 8 : 975-999 IREM de Strabourg.

Díaz Gómez, José Luis. (2001). "Diseño y Construcción del Sistema Tutorial Inteligente: Función(x)." Tesis Doctoral. Universidad Autónoma del estado de Morelos..

Dolciani Mary P., (1967). William Wooton, E. F. Beckenbach, R. C. Jurgensen, and A. Donnelly. Algebra 1. Boston: Houghton Miffin Co.,.

Dormolen J. Van (1986). Textual Analysis, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). Perspectives on Mathematics Education, pp. 141-171. Dordrecht: Reidel.

Drijvers, P. and Herwaarden, O. Van. (2000). Instrumentation of ICT-tools: the case of algebra in a computer algebra environment. International Journal of Computers in Mathematics Education, 7 No 4, 255-275.

Edwards Jr., C. H. (1982). "Area, number and limit concepts in Antiquity". The Historical Development of the Calculus.. Springer Verlag. Págs. 1-13, 86-97.

Edwards, C. H. Jr. (1982). Inconmesurable magnitudes and geometric algebra, number and limit concepts in Antiquity. The Historical evelopment of the Calculus.. pp. 1-13.

Etten, B. van (1980). Variables in school mathematics. Nieuwe Wiskrant, 23, 15-18.

Even, R.:1993, ‘Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept.’ Journal for Research in Mathematics Education, (24)2, 94-116.

Filloy, Eugenio y Rojano, Teresa. “La aparición del lenguaje aritmético- algebraico”. Cuadernos de Investigación 1. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas.

Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do Textbooks Dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? American Educational Research Journal, 26(3), 403-421.

Freudenthal, H. (1973); Mathematics as an educational task, Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel, Dordrecht.

Furinghetti, F. and Paola, D. (1994). Parameters, unknowns, and variables: a little difference? In Da Ponte, J.P. and Matos, J.F. (eds.), Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol 2. University of Lisbon, Lisbon

García Blanco, M. y Llinares Ciscar, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. Qurriculum, No 10-11, pp. 103-115.

Grupo PRETEXTO. (1997). Rojas Garzón Pedro Javier, Rodríguez Bejarano Jorge, Romero Cruz Jaime Humberto, Mora Valbuena Luis Oriol, Castillo Echeverrie Eugenia. “La transición aritmética-álgebra”. Proyectos curriculares : Posgrado en Educación Matemática y Licenciatura en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas y COLCIENCIAS. Santa Fé de Bogotá, D. C.

Guin, D. and Trouche, L. (1998). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. International Journal of computers for Mathematical Learning, 3 No 3, 195-227.

Hall, R. (1999). Following mathematical practices in design-oriented work. In Hoyles, C. et al (eds.). Rethinking the mathematics curriculum. Studies in Mathematics Education Series, Vol. 10, Falmer Press, London.

Harper, Eon. (1987). “Ghosts of Diophantus”. Educational Studies in Mathematics 18. 75-90. D. Reidel Publishing Company.

Howson, G. (1995). Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 texts. Vancouver: Pacific Educational Press.

Janvier, Claude. (1984). “Constructing the Notion of Variable Using History and Bottles”. Proceeding of the VI Conference Annual of PME-NA, Madison, Wisconsin. Octubre: 57- 63.

Jourdain, Philipp E. B. (1983). “La naturaleza de las Matemáticas”. Sigma. El Mundo de las Matemáticas. Tomo 1., pág. 357.

Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic Transposition in Mathematics Textbooks. For the Learning of Mathematics, 12(1), 2-7.

Karian, Z.A. (ed.) (1992). Symbolic computation in undergraduate mathematics education. MAA Notes 24, Mathematical Association of America, Washington, D.C.

Kieran, C. (1989). "The Early Learning of Algebra: A Estructural Perspective". In Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, edited by Sigrid Wagner and Carolyn Kieran, 33-56. Reston, Va.: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1990). 'Cognitive processes involved in learning school algebra.' In P. Nesher and J. Kilpatrick (eds.) Mathematics and Cognition (pp. 96-112). Cambridge: University Press.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grouws, D.A. (ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. MacMillan, New York.

Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: the learning and teaching of algebra and functions. In Nunes, T. et al (eds.). Learning and teaching mathematics. Psychology Press, Hove.

Kieran, C. 1980. "Constructing meaning for non trivial equations". Paper presented at the AERA conference, Boston.

Klein, J. (1968). "Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra". The M.I.T. Press.

Kline, Morris. (1972). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press.

Krutetskii, V: (1976). The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: University of Chicago Press.

Kuchemann D.E., (1980). The meanings children give to letters in generalized arithmetic, in Cognitive development research in science and mathematics, Ed: Archenhold, Driver, Orton, Wood-Robinson, and Leeds: University of Leeds.

Kuchemann, D. (1987). Leaming and Teaching Ratio: A Look at some Current Textbooks. En P. Ernest (Ed.) Teaching and Learning Mathematics. Part 2. Perspectives 34. School of Education. University of Exeter.

Küchemann, D.E. (1980). The understanding of generalised arithmetic by secondary school children. Unpublished doctoral dissertation. Chelsea College, University of London..

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. In K.M. Hart (Ed.), Children's understanding of mathematics: 11-16 (pp. 102-119).

Kuchemann, Dietmar E. (1978). "Children's Understanding of Numerical Variables". Mathematics in School 7: 23-26.

MacGregor, M. and Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. Educational Studies in Mathematics, 33 No 1, 1-19.mathematics. Psychology Press, Hove.

Matz M. (1980).: "Towards a Computational Theory of Algebraic Competence", Journal of Mathematical Behaviour, 3(1) 93-166.

Matz M. (1982). Towars a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. and Brown, J.S. (eds.) Intelligent Tutoring Systems, London. Academic Press.

Mayes, R. (1997). Current state of research into CAS in mathematics education. In Berry, J. et al (eds.). The state of computer algebra in mathematics education. Chartwell-Bratt, Bromley.

Menger,K. (1956). What are x and y? The Mathematical Gazette, vol 40, pp. 246-255.

Osborne, George A. (1909). Differential and Integral Calculus. Boston: D.C. Heath & Co.,

Otte, M. (1986). What is a Text?, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). Perspectives on Mathematics Education, pp. 173-204. Dordrecht: Reidel.

Philipp, Randolph A. (1992). "Los usos de las variables algebraicas". Mathematics Teacher, vol. 85, No. 7. Octubre,.

Rasslan, S. & Vinner, S. (1997). Images and Definitions for the Concept of Even / Odd Function. Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4, 41-48. University of Helsinki. Lahti, Finland.

Remillard, J. (1990). Conceptions of Problem solving in commonly used and distinctive elementary Mathematics curricula. Paper of the Center for the Leaming and Teaching of Elementary Subjects. IRT, Michigan State University

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra, perspectives for research and teaching (pp. 55-62). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rosnick, Peter. (1981). Some Misconceptions concerning the Concept of Variable. Mathematics Teacher; v74 n6 p418-20.

Sanz, I. (1990). Comunicación, Lenguaje y Matemáticas. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) Teoría y Práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.

Schoenfeld, A.H. y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. Mathematics Teacher, 81 No 6, 420-427.

Sfard, A. and Linchevsky, L. (1994). The gains and pitfalls of reification - the case of algebra. Educational Studies in Mathematics, 26, 191-228.

Shulman, L. S.: (1986), 'Those who understand: Knowledge growth in teaching.' Educational Researcher, 15, 4-14.

Shulman, L. S.; (1986), "Those who understand: Knowledge growth in teaching." Educational Researcher, 15, 4-14.

Sierpinska, Anna. (1992). "On Understanding the Notion of Function." In The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, edited by Guershon Harel and Ed Dubinsky, pp. 25–58. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Spunde, W.G. and Neidinger, R.D. (1999). Sample Calculus. Mathematics Magazine, 72 No 3, 171-182.

Stacey, K. and MacGregor, K. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. Journal of Mathematical Behavior, 18 No 2, 149-167.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. Mathematics Teachers 90(2).

Tall, D., O. & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D.O. et al (2001). Symbols and the bifurcation between procedural andconceptual thinking. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology

Tonnenssen, Lowell H. (1981). “Measurement of the Levels of Attinment by College Students of the Concept Variable”. Ph. D. diss., University of Wisconsin-Madison,.

Torres Rengifo, Ligia Amparo. (1995). “Pertinencia de un Enfoque Histórico en la Investigación Didáctica de la Noción de Variable”. Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe. La Habana, Cuba. Agosto,: 331-336.

Trigueros, M. & Ursini, S. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación Matemática. Vol. 12 No. 2

Trigueros, M. & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates’ difficulties in working with different uses of variable. In Selden, A., Dubinsky, E., Harel, G., & Hitt, F. Eds. Research in Collegiate Mathematics Education. V. Providence, RI: AMS/MAA. p. 1-29

Trigueros, M. and Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolves through schooling? Proceedings of the XXIII PME Conference, Haifa, Israel pp 4-273 to 4-280.

Trigueros, M., Ursini, S. & Reyes, Al. (1996). College students’ conceptions of variable. Proceedings of the XX PME International Conference , Spaña, 1996

Upton, Clifford U. (1936). Practical Algebra- Introductory Course. New York: American Book Co.

Ursini Legovich, Sonia. (1993). “Pupils’ approaches to different characterizations of variable in Logo”. Thesis submitted in fulfilment of the requirement for the Ph. D. Degree of the University of London. December,.

Ursini, y Trigueros. (1997) Dificultades de los Estudiantes universitarios frente al concepto de Variable. Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamericana. p. 1-19.

Ursini,S. and Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. Proceedings of the XXI PME Conference, Lahti, Finland pp 4- 254 to 4-261.

Usiskin, Zalman. (1988). "Conceptions of School Algebra and Uses of Variables". In The 1.Ideas of Algebra, k-12, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Arthur F. Coxford and Albert P. Shulte, 8-19. Reston, Va.: The Council,

Vinner, S., (1983). Concept definition, concept image and the notion of function, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology vol. 14, pp. 293-305.

Vinner, S., 1991, The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, en Tall, D. (ed.), 1991, Advanced mathematical thinking (Kluwer, Dordrecht, Holanda), pp. 65-81.

Vinner, S.; Hershkowitz, R., 1983, On concept formation in geometry, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik vol. 83, n° 1, pp. 20-25.

Wagner, S., Rachlin, S.L. and Jensen, R.J. (1984). Algebra Learning Project – Final Report. University of Georgia, Department of Mathematics Education.

Wagner, Sigrid. (1981)."An Analytical Framework for Mathematical Variables". In Proceedings of the Fifth Conference of the Psychology of Mathematics Education, edited by C. Comiti and G. Vernaud, 165-70. Grenoble, France:

Wagner, Sigrid. (1983). "What Are These Things Called Variables?" Mathematics Teacher 76 (October 1983): 474-79

Wijers, M. et al (2000). Using ratio tables from mathematics in secondary school science. Paper presented at the 25th annual ATEE conference, Barcelona.

Youschkevitch, A. P. (1976/77). The concept of function up to the middle of the 19th century. Archive for History of Exact Sciences, 16, 37-85.

7. ANEXOS

ANEXO A.
DEFINICIONES DE VARIABLE DE LOS TEXTOS Y SU CLASIFICACION.

A1. LIBROS DE PRIMARIA.

Definición: Primaria	Referencia	Clasificación según los términos en los que se define	Clasificación según su caracterización
1P. Se hace uso de esquemas para representar operaciones: $7/\square + 11/\square + \square/\square = 20/2$. Se dice que dos cantidades son directamente proporcionales cuando las dos aumentan o disminuyen en la misma proporción. Las gráficas ayudan a identificar cuándo hay una relación de proporcionalidad entre las cantidades. No se define el concepto de variable.	Alicia Ávila Storer, Hugo Balbuena Corro, Irma Fuenlabrada Velázquez, Guillermina Waldegg Casanova. Matemáticas 5° grado. Ciclo escolar 2001-2002. SEP. Comisión Nacional de los libros de texto gratuitos. Págs. 21, 167	No define el concepto de variable; los esquemas que utiliza parecen guardalugares.	No define el concepto de variable. Cuando utiliza el concepto de variación parece encaminarse hacia la incógnita y la relación funcional.
2P. No se define el concepto de variable, sólo se dice que cuando al variar las cantidades de un conjunto, varían también las de otro conjunto, sucede con frecuencia que hay algo que no cambia. Cuando el cociente de cada par de cantidades es lo que no cambia, las cantidades son directamente proporcionales.	Hugo Balbuena Corro, David Block Sevilla, Irma Fuenlabrada Velázquez, Guillermina Waldwgg Casanova. Matemáticas. 6° grado. Ciclo escolar 2002-2003. SEP. Comisión Nacional de los libros de texto gratuitos. Pág. 158	No define el concepto de variable. Se refiere a proporcionalidad entre cantidades, elementos de conjuntos.	No se define el concepto de variable. Parece apuntar a la relación funcional.
3P. Maneja variación proporcional y no proporcional en base a ejemplos pero no la define, así como tampoco define el concepto de variable. Hace uso de letras en fórmulas geométricas para	Virginia Rosa Barreto Pérez, Félix Cerón Escobar, César Jiménez Espinosa, Juan Daniel	No define el concepto de variable, pero al utilizar fórmulas, resolver problemas de	No define el concepto de variable; parece dirigirse hacia la relación funcional.

perímetros, áreas, volúmenes. Resuelve problemas de proporcionalidad y representa gráficas de variación proporcional y no proporcional.	Castellanos Caro. Guía Escolar. 5° año. Editorial Santillana. Primaria. 2001.	proporcionalidad y gráficas, parece enfocarse a la relación funcional: 2b).	
4P. Area es la medida de la superficie de una figura y se calcula mediante fórmulas. Si varía la medida de los lados de una figura, también varía su área. Volumen es el espacio que ocupa un cuerpo y también se calcula mediante fórmulas. Existe variación proporcional directa cuando al comparar dos cantidades dadas, al aumentar una aumenta la otra o al disminuir la primera disminuye la segunda conservando la proporcionalidad. Una variación no proporcional se presenta cuando al comparar dos cantidades dadas, al aumentar una puede aumentar la otra o al disminuir una puede disminuir la otra, pero sin conservar la proporcionalidad.	Margarita Beltrán Martínez de Castro, Pedro Teobaldo Chávez González, Concepción Jiménez Alarcón, Daniel Robles Robles, Ana María Robles Robles. Guía Práctica 6. Conceptos básicos, ejercicios y actividades para los alumnos de sexto grado. Fernández editores. 2002. Págs. 128, 130, 144, 156, 159	No define el concepto de variable,pero se enfoca en gran medida a la variación: 2b).	No define el concepto de variable; parece dirigirse hacia la relación funcional.
5P. Variación proporcional. Variación directa: Ocurre cuando dadas dos cantidades, al aumentar una la otra se incrementa proporcionalmente, o viceversa. Variación inversa: Acontece cuando dadas dos cantidades, al aumentar una la otra disminuye proporcionalmente, o viceversa.	Daniel Robles Robles, Mª de Lourdes Minquini Castañeda. Nueva Guía 1000. Guía de estudios para aspirantes a la Educación Secundaria. Fernández Editores. 2003. Pág. 141	No define el concepto de variable, pero sí el de variación: 2b).	No define el concepto de variable, pero parece encaminarse hacia la relación funcional.
6P. Álgebra es la rama de las matemáticas en la que las cantidades desconocidas se pueden representar por letras, y nos ayudan a generalizar las ideas aritméticas.	Maestro. Mi compañero escolar. Enciclopedia. Ibalpe.	No define el concepto de variable, pero por el uso que le da cae en 2a).	No define el concepto de variable, pero utiliza la caracterización como incógnita y como

Lenguaje algebraico: es la expresión que relaciona cantidades mediante símbolos, letras, como en las fórmulas. Por ejemplo: Lenguaje algebraico Lenguaje verbal x un número cualquiera $x + y$ la suma de dos números x^2 el cuadrado de un número $2x$ el doble de un número			número general.
7P. Muchas veces solemos expresar un elemento genérico del conjunto inicial A con una letra, x (u otra). A dicha letra se le denomina variable independiente. A un elemento genérico del conjunto final B se le suele representar también mediante otra letra, y (u otra), cuyo valor depende, en general, de la variable independiente $y=f(x)$. Llamamos expresión algebraica a aquella en la que intervienen números, letras, operaciones y el signo de igualdad. Tenemos tres tipos distintos de expresiones algebraicas: fórmulas, que nos permitirán tener un valor concreto a partir de unos datos conocidos; ecuaciones, en las que obtendremos todos los números que cumplan el enunciado inicial que las determina; identidades, que son aquellas que se verifican para cualquier valor de las variables o letras, en ellas indicadas. Llamamos polinomio a una expresión algebraica de la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde cada término está formado por el producto de una letra a_i llamada coeficiente, y una x llamada indeterminada o variable, elevada a una potencia	Gran Enciclopedia TIME LIFE. Matemáticas. Computación. 2003.	2b) y también componente de otro concepto matemático: 4.	Da la definición clásica del Cálculo, como relación funcional, y en la clasificación de expresiones algebraicas incluye incógnita, número general: **A3, A4, B2, C4**

natural.			
8P. Algebra: Importante rama de las matemáticas, la cual se encarga de la resolución de ecuaciones algebraicas, así como de los medios abstractos necesarios para la solución de problemas. Ecuación: Igualdad condicional en la que existen cantidades conocidas y desconocidas o incógnitas, éstas últimas adquieren determinados valores. Incógnita: Cantidad desconocida necesaria para obtener la solución de una ecuación. Al proceso de determinarla se le llama despejar la incógnita y es necesario para poder resolver la ecuación planteada. Variable incógnita: Se refiere a la cantidad que no tiene valor constante. En expresiones matemáticas representa un valor desconocido	Miguel Angel Loya Flores. Matemáticas en primaria. Diccionario Ilustrado a Color. Editoriales Estudiantiles. 2004. Págs. 6, 17, 24, 43	Ya que puede tomar diferentes valores es 1b) y como representa un valor desconocido es 2a). También entra en 3, pues compara con el término constante.	Incógnita, número genera: **A2, A4**

A2. LIBROS DE SECUNDARIA.

Definición: Secundaria	Referencia	Clasificación según los términos en los que se define	Clasificación según su caracterización
1S. A las letras que usamos para escribir una fórmula se les llama variables. A expresiones como b+b+80=150 les llamamos ecuaciones. A la letra que usamos para representar el número que se desconoce en la ecuación le llamamos incógnita.	Alatorre Frenk, de Bengoechea Olguín, Cedillo Avalos, Mendiola Sanz, Santillán Nieto.1999. Matemáticas I. Educación Secundaria. SEP. Pág. 132	2a), pues la tratan como número desconocido.	Incógnita: **A1**
2S. Si en una expresión matemática aparece algún	Guillermina Waldegg,	La utilizan como incógnita	Incógnita: **A1, A4**

número desconocido, este número recibe el nombre de incógnita. En álgebra se utilizan algunas letras (como a,b,c o x,y,z) para denotar las incógnitas dentro de una relación matemática. El uso de estas letras permite hacer operaciones sin que sepamos cuál es su valor y, a partir de estas operaciones, es posible determinar ese valor. Se plantea una estrategia a seguir para resolver una ecuación de primer grado que tiene una incógnita. A veces se presentan problemas en los cuales no hay sólo una cantidad desconocida o incógnita, sino dos. Asimismo, al plantear el problema se pueden escribir dos ecuaciones que relacionan las dos incógnitas. Estas ecuaciones forman lo que se conoce como un sistema de ecuaciones, que en este caso son lineales porque ambas ecuaciones se pueden representar en un plano cartesiano como líneas rectas. Se ha llegado a representar toda la economía de un país con sistemas de hasta varios cientos de ecuaciones con igual número de variables. Se incluyen ejemplos de expresiones algebraicas, términos semejantes y grados de monomios en términos de variables. Se puede conocer el valor de un polinomio dándole valores a sus variables.	Roberto Villaseñor, Víctor García. 2001. Matemáticas en contexto. Aprendiendo Matemáticas a través de la resolución de problemas. Serie de textos para Secundaria. Segundo curso. Grupo Editorial Iberoamérica. SEP. Págs. 62, 76, 90, 94, 101	2a) y como parte de otro concepto matemático 4.	
3S. La palabra incógnita se deriva del latín y se refiere a lo que se desconoce. El uso de símbolos nos sirve, en primer lugar, para abreviar y, así, poder encontrar rápidamente relaciones entre los datos de un problema. En álgebra empleamos letras como símbolos o signos y con ellos operamos de la	Filloy, Rojano, Figueras, Ojeda, Zubieta. 2004. Matemática Educativa, Segundo Grado. Ed. McGraw-Hill. Pág. 98, 99, 100, 103	Uso de letras, 2a)	Incógnita: **A1, A4**

misma manera que lo hacemos con los números: los multiplicamos, sumamos, restamos, igualamos, etc. Una ecuación es una igualdad en la que aparecen **incógnitas**; es decir, elementos desconocidos. La resolución de una ecuación consiste en encontrar el valor de la incógnita para hacer verdadera la igualdad.			
4S. En una expresión algebraica hay valores constantes y variables. Una función es la regla de correspondencia entre variables, algunas de éstas son independientes y otras dependientes. Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que sólo se cumple para algunos valores de las incógnitas. Si la expresión contiene sólo una variable o incógnita con exponente 1, se llama ecuación lineal o de primer grado con una incógnita. Resolver una ecuación lineal es encontrar el valor de la incógnita para el cual se cumple la igualdad. Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consiste en encontrar los valores de las incógnitas que son soluciones de ambas ecuaciones simultáneamente.	Luis Alberto Briseño Aguirre, Julieta del Carmen Verdugo Díaz. Matemáticas 3. Editorial Santillana. Secundaria. Serie 2000. Págs. 24, 51, 53, 95	4, 2b), 2a)	En una relación funcional, incógnita: **A2, A4, C1**
5S. En matemáticas trabajarás con números desconocidos y constantes. La rama de las matemáticas relacionada con expresiones que contienen variables recibe el nombre de álgebra. La expresión 2xn recibe el nombre de expresión algebraica porque contiene variables, números y al menos una operación. Puedes valorar una	Glencoe. 1999. Matemáticas. Aplicaciones y Conexiones. Curso 2. Mc Graw Hill. Págs. 11, 12, 21, 243	1c), 1d)	Incógnita: **A1, A2, A3, A4**

expresión algebraica reemplazando la variable con un número y calculando el valor de la expresión numérica resultante. A menudo se usa la letra x como variable. Es común asimismo usar la primera letra del nombre de la variable que estás representando. Una variable es un símbolo, por lo general una letra, que se usa para representar números en expresiones o enunciados matemáticos. En 3 +a = 6, a es una variable. Una ecuación es un enunciado matemático que contiene el signo de igualdad. Algunas ecuaciones además contienen variables. La ecuación x+9=17 no es verdadera ni falsa hasta que x se sustituya con un número que la hace verdadera. Resuelves la ecuación cuando reemplazas la variable con un número que la hace verdadera. Una estrategia que se puede usar para resolver problemas de la vida real es resolver una ecuación. Debes escoger primero una letra que represente la incógnita del problema. Esto recibe el nombre de definición de variable.			

A3. LIBROS DE PREPARATORIA.

Definición: Bachillerato	Referencia	Clasificación según los términos en los que se define	Clasificación según su caracterización
1B. Las ecuaciones de primer grado (lineales) con una incógnita, son ecuaciones que se pueden reducir a la forma ax=b, donde a y b son números reales y	Oscar Esquer García, Nahun Franco Gómez. Matemáticas I. 1^{er}	4, 2a)	Incógnita: **A1, A2, A4**

$a \neq 0$. Una ecuación se caracteriza por contener algunos números de valor conocido y otros de valor desconocido llamados incógnitas (usualmente se emplean las letras x, y ó z, aunque puede ser cualquier letra). Resolver la ecuación significa encontrar el conjunto de números (puede ser uno, varios o ninguno) que al sustituirlos en la incógnita de la ecuación, hace que sus dos miembros sean iguales; y le llamamos conjunto solución (C.S.). Llamamos ecuaciones literales a aquellas en las que algunos o todos los coeficientes de las incógnitas, o las cantidades conocidas que figuran en la ecuación, están representadas por letras. Estas letras suelen ser a,b,c,d,m y n, y como de costumbre, a la incógnita se le representa con x.	Semestre. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Edición 2004. Págs. 64, 67		
2B. En los triángulos rectángulos la hipotenusa es el lado más largo y los catetos son los lados más cortos; generalmente se les representa con letras minúsculas y se puede usar cualquier letra en cada lado, ya que el teorema de Pitágoras se aplica a los lados y no a las letras. Para aplicar el teorema de Pitágoras, es importante que identifiques cuáles lados son los catetos y cuál es la hipotenusa, además fíjate bien cuál de los lados es del que se desconoce su longitud para que puedas usar los dos datos conocidos en la incógnita despejada del teorema. Para resolver problemas utilizando las funciones trigonométricas, es importante que analices el enunciado con la finalidad de identificar los datos conocidos y los valores desconocidos tratando de	Andrés Flores Valdéz, Joaquín Miranda Gil. Matemáticas 2. 2° Semestre. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Edición 2004. Págs. 75, 76, 81, 85, 92, 95, 105	No se define el concepto de variable, pero se introduce el uso de letras. Después se menciona como se anota en 4.	Incógnita, número general: **A4, B2**

relacionarlos por medio de una de las funciones. Cuando se comparan dos expresiones que son iguales entre sí, puede ocurrir que esa igualdad sea una ecuación o una identidad. Si al resolver la expresión resulta que el máximo número de posibles soluciones sea igual al exponente mayor entonces es una ecuación; por ejemplo, x^3-8=0. Cuando se tienen una infinidad de posibles soluciones, entonces se tiene una identidad; por ejemplo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab+b^2$. Analiza qué ocurre en la variación de los valores de cada una de las funciones trigonométricas. Despeja cada una de las variables en la ley de los senos y cada uno de los cosenos de los ángulos en la ley correspondiente. Identidad: Es aquella ecuación verdadera para todos los valores que puede tener la variable que la forma.			
3B. Relaciona conceptos geométricos (línea recta, circunferencia, elipse, hipérbola, parábola) con el concepto algebraico de ecuación.	Óscar Filiberto Núñez Lara, Hermenegildo Rivera Martínez. Matemáticas 3. 3er Semestre. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Edición 2004.	1e), pues no contienen una definición explícita del concepto de variable.	No define, pero establece la relación funcional: **6**
4B. Todas estas propiedades (aditiva, multiplicativa, etc.) son útiles para, entre otras cosas, resolver ecuaciones en las que la incógnita representa un número real cualquiera. Al igual que en una ecuación, en una desigualdad intervienen una o varias incógnitas y al resolverla, el valor obtenido	Guadalupe Borgo Valdéz, Alma Lorenia Valenzuela Chávez, Hermenegildo Rivera Martínez. Matemáticas 4. 4° Semestre. Colegio	2a), 2c)	Incógnita: **A2, A4**

satisface la expresión inicial. La solución de una desigualdad está formada por aquellos valores que dan como resultado una expresión verdadera. Cuando en una desigualdad el máximo exponente de la variable es 2 tenemos una desigualdad cuadrática. Funciones reales de variable real, relaciones entre números reales, gráficas.	de Bachilleres del Estado de Sonora. Edición 2004. Págs. 18, 21, 29, 59		
5B. Se hace uso de letras aplicadas a fórmulas para la realización de cálculos de índole financiero	Olga Eduviges Valenzuela Gutiérrez, Daniel Villa Aguilar. Matemáticas Financieras. 5° Semestre. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Edición 2004.	No se define el concepto, pero se utiliza dentro de variaciones: 2a) y 2b), 2c).	No define: **6**
6B. Es importante que en cada problema establezcas la dependencia de las variables, es decir, que determines cómo cambia una cantidad cuando varía otra, en otras palabras, cuándo una cantidad está en función de otra.	Guadalupe Borgo Valdéz, Alma Lorenia Valenzuela Chávez, Hermenegildo Rivera Martínez. Cálculo Diferencial. 6° Semestre. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Edición 2004. Pág. 16	Aunque no define el concepto de variable, la utiliza en relaciones de proporción: 2b).	No define, pero se utiliza como relación funcional: **5**

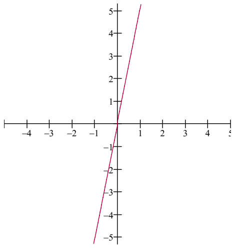
A3. LIBROS UNIVERSITARIOS.

		Clasificación según los	**Clasificación según su**

Definición: Nivel Superior. Álgebra	Referencia	términos en los que se define	caracterización
1U. Una variable es una literal que adquiere varios valores en un problema dado. Para nombrar a un miembro genérico de un conjunto de números se emplea una variable tal como x, y, z, m, n.	Gobran Alfonse. 1990. Algebra Elemental. Grupo Editorial Iberoamericana. Pág. 7	1b)	**Incógnita: A2**
2U. En general, una variable es un símbolo usado como sustituto de los elementos de un conjunto, cuando éste tiene dos o más elementos. Por otra parte, una constante es un símbolo que corresponde exactamente a un objeto. El símbolo 8 es una constante, ya que siempre corresponde al número 8.	Barnett R. 1984. Algebra. Editorial Mc Graw Hill. Pág. 3	1a), 1b)	**A2**
3U. En álgebra estamos interesado en sumas como x + 3. El número 3 en la suma se llama una constante puesto que su valor es fijo. La letra x en la suma se llama variable, puesto que x puede representar a cualquier número de un conjunto de números dado. Las letras tales como x, y, z. con frecuencia se utilizan como variables, pero cualquier símbolo se puede utilizar como variable.	Auvil. D. Poluga C. 1984. Elementary Algebra. Addison Wesley. Pág. 2	1b)	Número general: **B2**
4U. Cualquier expresión como $2x^2 + 3x + 5$ se llama un polinomio, y x se llama variable. En la ecuación $2x + 1 = 0$, llamamos a x incógnita porque buscamos un valor particular de x que no conocemos. En los polinomios llamamos a x variable por que la x varía su valor.	Kerr D. R. Jr. 1980. Elementary Algebra. Mc Graw Hill. Pág. 90	4	Incógnita: **A1, A4**
5U. En la fórmula del área de un rectángulo A = b x a, las letras A, a y b representan el área, la base y la altura del rectángulo respectivamente y se llaman variables. Una variable es un símbolo que representa números.	Oteyza, E. Hernández, C., Oznaya, E. 1996. Algebra. Págs. 2, 104	1b)	Número general: **B2**

6U. Una expresión algebraica es una colección de letras llamadas variables y números reales organizados de alguna manera utilizando sumas, restas, multiplicaciones, divisiones. y radicales. No define variable.	Larson, R, Hostetler R. 1985. Collage Algebra. D.C. Hearth and Company. Pág. 30	No define el concepto de variable, pero introduce el uso de letras. El enfoque corresponde a 1e) y 4	No define el concepto de variable: **6**
7U. Un término (llamado también monomio) es una expresión que está compuesta por una constante o un producto de constantes y variables elevadas a potencias positivas.	Peterson, Garg. 1985. College Algebra. Wadsworth Publishing Company. Pág. 11	No define el concepto de variable, pero introduce el uso de letras. El enfoque corresponde a 4	No define el concepto de variable: **6**
8U. Una de las características del álgebra es el uso de letras (o combinaciones de letras) para representar números. Las letras utilizadas para representar los números son llamadas variables y combinaciones de letras y números son llamadas expresiones algebraicas.	Larson, Roland E., Hostetler, Robert P.1992. College Algebra: Concepts and Models. Ed. Hearth and Company. Pág. 13.	1b)	Número general**: B2**
9U. Las ecuaciones 3x-5=x+3, x=x+1, $b^2=4$ contienen una letra como variable. Si reemplazamos la letra con un número, obtenemos una expresión que es falsa o verdadera. No define constante.	Thompson, R. 1976. Intermediate Algebra. Prindle, Weber and Schmidt, Incorporated. Pág. 38	Uso de letras como parte de ecuaciones 4, 1b), 2a)	Incógnita: **A3**
10U. Si 3x=12 y si $x \in \{1,2,3,4,5\}$, entonces $\{1,2,3,4,5\}$ es el conjunto de reemplazo y $\{4\}$ es el conjunto solución. No define variable, pero la usa al trabajar con polinomios.	Thweatt, E. 1984. Intermediate Algebra. West Publishing Company. Pág. 128	No define variable pero la usa al trabajar con polinomios, 1e),	No define variable, pero de acuerdo al ejemplo es incógnita: **5**
11U. Considera la ecuación racional $Q=\left\{\frac{a}{b} \middle\vert a,b\varepsilon\ \Re,\ b\neq 0\right\}$. Las letras a, b, son variables, esto es, representan diferentes números.	Tobey, J., Slater, J. 1991. Intermediate Algebra. Prentice Hall. Pág. 3	4, 1b)	Número general: **B2**
12U. No define variable, únicamente utiliza la palabra.	Stockton, D. 1979. Essential College	No define variable, únicamente utiliza la	No define variable, únicamente utiliza la

	Algebra. Houghton Mifflin Company.	palabra.	palabra: **6**
13U. Una variable es un símbolo al que podemos asignar valores. Con un ejemplo de una expresión algebraica define constante. Sea P+0.06P una expresión algebraica. Observa que la expresión incluye variables (P), constantes (0.06) y operaciones algebraicas...	Kolman, B. Levitan, M Shapiro, A. 1993. College Algebra. Saunders, College Publishing. Harcourt Brace. Pág. 18	Uso de símbolos y 1b)	Puede ser número general: **B2**
14U. Un número racional es uno que se escribe como p/q, donde p y q son enteros (q no es cero)... Estos símbolos pueden tomar más de un valor distinto... Los símbolos p y q se llaman variables, ya que se les puede asignar varios valores. Define constante igual que en el anterior.	Kolman, B., Shapiro, A. 1991. Algebra for College Students. Harcourt Brace. Janovich, Publications. Pág. 19	4, 1b)	Número general: **B2**
15U. Una variable en álgebra es una letra que representa cualquier número de un conjunto de números bajo discusión cuando el conjunto contiene más de un número. Así en y = 2 x , si x representa 1, entonces y representa 2… Una constante es cualquier letra o número que tiene un valor fijo que no cambia en toda la discusión. Así, 5 y π son constantes.	Rich, Barnett. 1960. Elementary Algebra. Schaum's. Págs. 234-247, 278-279.	1b)	Número general: **B2**
16U. Una letra que se usa para representar cualquier elemento de un conjunto dado se llama una variable. Las últimas letras del alfabeto tales como x,y,z, w,... se emplean a menudo como variables. Todos los símbolos para variables representan números reales.	Swokowski, E. 1978. Álgebra Universitaria. Ed. CECSA. Pág. 72	Uso de letras: 1a), 1b)	Número general: **B2**
17U. Consideremos la multiplicación de un número por sí mismo 5 veces. Esto se escribe algebraicamente como n·n·n·n·n= 5n Observe que no hay un signo de multiplicación entre el número 5 y	Donald E. Brook.1985. Elementary Algebra for today. Prentice Hall. Pág. 24	No define el concepto como en 4, pero se utiliza como en 2b)	No define, pero por el ejemplo utilizado puede ser número gen eral: **B2**

<table>
<tr><td>la letra (variable) n. Puesto que la variable n representa cualquier número, seleccionemos algunos valores arbitrarios para n y calculemos 5n. Los resultados se resumen en la tabla y la gráfica:

<table><tr><td>N</td><td>5n</td></tr><tr><td>½</td><td>5(1/2)= 5/2</td></tr><tr><td>1</td><td>5(1)=5</td></tr><tr><td>2</td><td>5(2)=10</td></tr><tr><td>3</td><td>5(3)=15</td></tr></table>
No define constante.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18U. Una expresión algebraica es un grupo de constantes y variables obtenido de aplicar un número finito de operaciones (como suma, resta, multiplicación, porcentajes diferentes de cero, extracción de raíces o cálculo de potencias racionales o enteras). En las últimas secciones utilizamos constantes (símbolos con un único valor posible, tales como 5,0,3,4 o π) y variables (símbolos como x, y, z, s o t representando un número no especificado seleccionado en un conjunto llamado dominio)</td><td>Karl J. Smith. 1994. College Algebra with graphing and problem solving. Brooks/Cole Publishing Company. Pág.11</td><td>1e), 1b)</td><td>No define exactamente variable, sino como parte del concepto de expresión algebraica: 4 Después A2</td></tr>
<tr><td>19U. Una expresión algebraica es una colección de letras llamadas variables y números reales organizados de alguna manera utilizando las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y radicales. El conjunto de valores admisibles que pueden ser asignados a la variable en una expresión algebraica se llama dominio de la variable.</td><td>Larson/ Hostetler.1989. College Algebra. D.C. Heath and Company. Págs. 30, 31</td><td>4, 1b)</td><td>No define exactamente variable, sino como parte del concepto de expresión algebraica: 4 Después A2</td></tr>
<tr><td>20U. Ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas</td><td>Baldor. 1983. Algebra. Publicaciones Cultural.</td><td>1c), 2 a), 2b)</td><td>Incógnita, relación funcional: A1, A2, C4</td></tr>
</table>

y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de la incógnita. Las incógnitas se representan por las últimas letras del alfabeto. Fórmula es la expresión de una ley o de un principio general por medio de símbolos o letras. Las fórmulas algebraicas son usadas en las ciencias, como Geometría, Física, Mecánica, etc. y son de enorme utilidad, pues: 1) Expresan brevemente una ley o un principio general. 2) Son fáciles de recordar. 3) Su aplicación es muy fácil, pues para resolver un problema por medio de la fórmula adecuada, basta sustituir las letras por sus valores en el caso dado. 4) Una fórmula nos dice la relación que existe entre las variables que en ella intervienen, pues según se ha probado en aritmética, la variable cuyo valor se da por medio de una fórmula es directamente proporcional con las variables (factores) que se hallan en el numerador del segundo miembro e inversamente proporcional con los que se hallan en el denominador, si las demás permanecen constantes.	Págs. 122, 271		
21U. Una variable es un símbolo que colocamos en lugar del nombre de cualquier elemento de un conjunto de sustitución.	Peter Schaaf. 1972. "Algebra; Un enfoque moderno". Ed. Reverté Mexicana, S.A. Pág. 29	1a)	No está clara: **6.** Falta definir conjunto sustitución
22U. En Älgebra se usan dos tipos de símbolos para representar números: variables y constantes. Una variable es un símbolo que puede reemplazarse por diferentes números en un problema particular. Generalmente, las últimas letras del alfabeto se	Dennis T. Christy. 1993. "College Algebra". 2nd edition. WCB Publishers.	1b). Clasifica fuertemente las constantes.	**A2**

utilizan para representar a las variables. Una constante es un símbolo que representa el mismo número a lo largo de un problema particular. Los números que nunca cambian de valor se llaman constantes absolutas. Si no conocemos el número fijo hasta que tenemos dada información específica acerca del problema, el símbolo se llama una constante arbitraria. Generalmente se utilizan letras del inicio del alfabeto como constantes.			
23U. Una variable es un símbolo (generalmente una letra minúscula) que representa un elemento no especificado de un conjunto que contiene 2 o más elementos.	Harry L. Nustad, Terry H. Wasner. 1985. “Principles of intermediate Algebra with applications”. WMC Brown Publishers.	1a)	Incógnita: **A1, A2**
24U. No incluye una definición, pero trabaja varios problemas lecto-escritos.	R. David Gustafson, Peter D. Frisk. 1984. “Intermediate algebra”. Publishing Co.	No define, pero en la solución de problemas la utiliza como 1c), 2 a)	No define, pero se utiliza como incógnita: **5**
25U. Una variable es un símbolo que representa a una cantidad que puede tomar diferentes valores dentro de un intervalo dado.	Rees y Sparks. 1959. Álgebra. Ed. Reverté, S.A. Pág. 76	1b)	**A2**
26U. Un símbolo que es usualmente una letra y puede representar a cualquier miembro de un conjunto especificado de objetos, es llamado una variable. Si el conjunto tiene tan sólo un miembro, el símbolo es llamado una constante.	Fuller, Gordon. 1971. Álgebra Elemental. CECSA. Pág. 14	1a)	Ninguna, pero si el conjunto se refiere a números, puede ser número general: **5**
27U. Una ecuación es un enunciado de dos números que son iguales. Este enunciado puede no ser cierto.. La letra x se llama variable y un número que, cuando	Linda L. Exley-Vincent K. Smith. 1993. College Algebra.	2a)	Incógnita: **A3**

lo sustituimos por la variable, hace que el enunciado sea válido se llama una solución o raíz.	Ed. Prentice Hall. Pág. 75		
28U. Si observamos, por ejemplo, la expresión $3x^2-2$, se ve inmediatamente que su valor numérico depende del que se asigna a la variable x. En cambio, los valores de x no han dependido de ninguna otra cantidad, por lo cual se dice que x es una variable independiente. Por el contrario, los diversos valores de la expresión $3x^2-2$ se han debido a las variaciones de x. Esta expresión cuyos valores dependen de x, se llama variable dependiente. La variable dependiente se denomina función: Función es una cantidad variable ligada con otra, llamada variable independiente, tal que a toda variación de ésta corresponde una variación de la primera. Ecuación de primer grado es aquella en que, después de efectuadas todas las reducciones posibles, el exponente de la incógnita es 1. Una de las aplicaciones más importantes del Álgebra es la resolución de problemas: problema es toda cuestión en que se tiene que hallar una o más cantidades desconocidas, relacionadas con otras que se conocen. A éstos se les llama datos, y a las primeras, incógnitas. Lo primero que debe hacerse para resolver un problema, es representar la incógnita por una de las últimas letras del alfabeto, generalmente la x, y luego expresar la relación que hay entre los datos y las incógnitas por medio de ecuaciones.	Agustín Anfossi. 1959. Curso de Álgebra. Editorial Progreso, S.A. Págs. 6, 137	4, 2a), 2b)	Relación funcional, incógnita: **A1, C4**
29U. Un símbolo que, a lo largo de una discusión no cambia su valor, se llama constante. Un símbolo que puede cambiar su valor durante una discusión, se	Paul R. Rider. 1947. College Algebra. Alternate Edition. The	1d), aunque se basa en variación	**A2**

llama variable.	MacMillan Company. Pág. 13		
30U. Cantidades que cambian o varían juntas, como en W=80h sucede con W y h, se llaman variables; las cantidades que no cambian en valor se llaman constantes	Daymond J. Aikens, Kenneth B. Henderson. 1950. Algebra: It's big ideas and basic skills. Book 1. McGraw-Hill Book Company, Inc. Pág. 128	2b)	**B2**
31U. En álgebra a menudo usamos letras como a,b,x,y para representar números. Una letra que se utiliza para representar un número se llama variable. Las expresiones verbales pueden a menudo simbolizarse por breves expresiones algebraicas que contienen variables.	Johnson / Steffensen. 1985. Elementary Algebra. Scott, Freesman and Company.	1b)	No está claro: **6**
32U. Una letra que puede reemplazarse por diferentes números se llama variable.	Mervin L. Keedy, Marien L. Bittinger. 1983. Introductory Algebra. Addison, Wesley. Pág. 12	Tal vez 1b)	**A2**
33U. Un símbolo que representa un valor fijo se llama una constante; un símbolo que puede representar diferentes valores se llama una variable. El conjunto de valores que puede tomar una variable se llama el dominio de la variable. Hay dos tipos de constantes: absolutas y parámetros. Una constante absoluta es aquella que en todos los problemas tiene siempre el mismo valor, por ejemplo, 2 y π. Un parámetro es una constante que conserva el mismo valor en un problema particular o situación determinada, pero que puede tener un valor diferente	Charles H. Lehmann. 1979. Álgebra. Editorial Limusa.	Enfatiza el concepto de constante; 1b)	**A2**

en otro problema o situación, por ejemplo en la expresión ax+b, x puede tomar diferentes valores, pero a y b son constantes para cada caso; luego, a y b son parámetros.			
34U. Una variable es un símbolo, generalmente una letra, tal como x, y o z que se usa para representar cualquier número desconocido. Una expresión algebraica es una colección de números, variables, símbolos para operaciones y símbolos de agrupamiento (como paréntesis). Las variables se usan para cambiar frases expresadas con palabras en expresiones algebraicas.	Lial / Miller. 1981. Beginning Algebra/ 4th edition. Scott, Foresman and Company. Pág. 14	Uso de letras; 2a)	**A1, A2**
35U. Una constante es un número que nunca cambia, o que no lo hace en el curso de la discusión de un problema particular. Una variable es un número que cambia arbitrariamente o de acuerdo a alguna ley. El número que expresa la velocidad de un automóvil que va avanzando es una variable; la velocidad de un cuerpo en caída libre cambia de instante en instante y se expresa por una variable. De hecho, las medidas de casi todas las cosas materiales varían en condiciones cambiantes: la longitud de un riel varía con la temperatura; una roca expuesta al ambiente pierde peso.	Palmer and Miser. 1965. College Algebra. 2nd Edition. McGraw Hill, Company.	Indudablemente, la define en base a variación, como en 1b), 1c)	**A2, B2**
36U. Llámase variable toda cantidad que en un problema o en una investigación es susceptible de recibir diferentes valores.	Wentworth y Smith. 1945. Elementos de Álgebra. Ginn y Cía.	1b)	**A2**
37U. Una letra (usada más comúnmente x,y o z) se llama una variable si nombra un número que pertenece a un conjunto dado de números, pero cuyo valor no está especificado.	Vienan Shaw Greza. 1981. College Algebra. Saunders College.	1b), 2a)	Incógnita: **A1, A2**

38U. Cuando discutimos acerca de un elemento individual en un conjunto, generalmente lo denotamos por una letra minúscula, tal como a,b,c,x,y o z. Cuando tales símbolos se usan para representar un elemento no especificado de un conjunto que contiene más de un miembro, tales símbolos se llaman variables. Si el conjunto dado, llamado el conjunto reemplazo de la variable, es un conjunto de números, entonces la variable representa un número.	Wooton and Deodyan. Intermediate Algebra. 2nd alternate edition. Wadsworth Publishing Company, Inc. Pág. 3	1b)	**A2**
39U. Supóngase que nos interesa alguna propiedad en particular de los elementos de un conjunto dado. Es más fácil escribir y hablar sobre esta cuestión haciendo que una sola proposición tome el lugar de varias. Escribamos x y pensemos que es reemplazado por cada uno de los elementos del conjunto. La letra x se llama variable y el conjunto R cuyos elementos la reemplazan se llama conjunto satisfactor. Cada vez que se usa una variable, debe uno saber cuál es el conjunto satisfactor. Nótese que x es reemplazada, por turno, por cada elemento del conjunto y no sólo por aquellos que hacen verdadera la proposición. De este modo se puede decir que x representa a cualquier elemento del conjunto. La proposición con variable se llama proposición abierta y es una proposición que carece de significado hasta que x es reemplazada por un elemento del conjunto, con lo cual resulta verdadera o falsa. Los símbolos que representan al mismo número durante una exposición se llaman constantes. En la proposición “x es menor que 4”, 4	Lovaglia, F. M. 1978. Álgebra. Harla. Págs. 8, 9, 16	1b)	**A2**

es una constante. Un enunciado general no necesita tener una letra como variable, sino que una palabra o frase puede desempeñar el papel de la variable.			
40U. En álgebra, con frecuencia se utilizan letras para resumir bastante información en un enunciado simple; estas letras se denominan variables. Para conocer cuál es la información dada en una proposición conteniendo una variable, se necesita conocer el dominio de esta variable, es decir, el conjunto cuyos elementos consisten de aquellos números que una variable puede representar. Un numeral es un símbolo que se usa como el nombre de un número. Una letra, generalmente x, y o z se llama una variable si nombra un número no especificado en un conjunto que contiene más de un número.	Michael Erant. 1972. Fundamentos de Álgebra Elemental. Centro Regional de Ayuda Técnica.	1b), 2 a)	**A2**
41U. En Álgebra se acostumbra usar las últimas letras del alfabeto como guarda-lugar, incógnitas o variables. Una variable es un símbolo que puede reemplazarse por algún número en un cierto conjunto. Usamos las letras x,y,z en álgebra porque son <u>raramente</u> usadas en lenguaje ordinario.	Ignacio Bello. 1985. Contemporary Introducting Algebra. Harper and Row, Publishers, New York	1b), 1d), 2a)	Incógnita: **A2**
42U. Por una variable queremos decir un símbolo que puede representar diferentes números en el problema al que se refiere. Una variable puede contrastarse con una constante, que es un símbolo que tiene el mismo valor a lo largo de un problema. Frecuentemente es conveniente representar a las constantes con las primeras letras del alfabeto-a,b,c,...- y a las variables con las últimas-x,y,z,...	H. T. Davis. 1941. College Algebra. Prentice Hall, Inc.	1b), y como lo contrasta con el concepto de constante, también 3	**A2**

43U. Una variable es un símbolo que representa, durante una discusión, cualquier elemento de un conjunto dado, y el conjunto de valores permisibles para la variable x es el dominio de la variable. Como un importante caso especial, un símbolo que se usa para denotar el miembro de un conjunto que sólo lo contiene a él se llama constante.	Milton D. Eulenberg, Theodore S. Semko, Howard A. James. 1972. Intermediate Algebra: A College Approach. John Wiley & Sons, Inc. Págs. 3,31	1a), 1b)	**A2**
44U. Una variable o incógnita es una letra que tiene permitido tomar diferentes valores (esto es, es válido para diferentes números) durante la misma discusión. Una constante es un símbolo que tiene permitido ser válido sólo para un número particular durante la discusión, aún si no especificamos para cuál número lo es.	M. Richardson. 1958. College Algebra. Prentice Hall Inc.	2 a), 1b)	**A2**
45U. Las matemáticas son un lenguaje; cualquier lenguaje consiste de frases y oraciones con nombres, pronombres y verbos. Los enunciados matemáticos en Álgebra no son diferentes; en el idioma inglés se utilizan pronombres como she, he o it para tomar el lugar de los nombres; en álgebra se usan símbolos como x,y,z,a,b,c y así sucesivamente para tomar el lugar de números.	Robert A. Nowlan. 1978. Lessons in College Algebra. Harper and Row Publishers.	No define el concepto de variable, pero introduce el uso de letras en lugar de números.	No está claro: **6**
46U. Los nombres que se usan en Álgebra son llamados variables, ya que pueden variar en el sentido de que el mismo nombre puede representar diferentes valores en diferentes momentos. Esta habilidad para variar distingue un nombre como x de un símbolo como 5, el cual siempre representa el mismo valor y se llama, por lo tanto, constante. Es interesante notar que las variables en álgebra	Kenneth E. Imerson. 1972. Algebra. An algoritmic Treatment. Addison-Wesley Publishing Company.	No es bastante explícito, por lo puede clasificarse como 1e)	**A2**

corresponden a los pronombres en inglés.			
47U. Una cantidad o símbolo numérico es una variable si, en un problema, es libre de tomar uno o más cualesquiera de un cierto conjunto de valores. También una variable puede no cambiar en valor. Por ejemplo, cuando estudiamos la temperatura de un congelador durante un período de 24 horas, podríamos encontrar que la temperatura no cambió del todo. Sin embargo, deberíamos considerar la temperatura como una variable, ya que no asumimos que su valor fuera fijo.	Raymond W. Brink. 1951. College Algebra. 2nd Edition. Appleton-Century-Crofts, Inc.	1b), 2b), 2c)	**A2**
48U. En aritmética, las operaciones básicas están desarrolladas para números definidos. En álgebra, estas operaciones básicas también se desarrollan en símbolos- generalmente letras del alfabeto- que son válidas para números. Estas letras usadas en lugar de números a veces se llaman variables y a veces constantes. En general, una variable es un símbolo que aparece en una expresión matemática y que puede reemplazarse por cualquier miembro de un conjunto especificado de 2 o más números llamado dominio o conjunto reemplazo de la variable. Una constante es un símbolo que es válido para un número fijo en una expresión matemática.	Andrew Demetropoulos y Kenneth C. Wolff. 1985. Intermediate Algebra. MacMillan Publishing Company.	1b)	**A2**
49U. Una letra que se utilice para representar cualquier elemento de un conjunto dado se llama variable. Un símbolo que representa a un elemento especifico se llama constante…Las variables representan números reales.	Swokowski, Earl W. 1986. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericana. Pág. 23	1a), 1b)	**A2**

50U. En esta sección trabajaremos con expresiones literales y proposiciones en lugar de sólo con números. Utilizaremos letras (llamadas variables) y números al formar las expresiones y proposiciones con las que operaremos. Una expresión algebraica es una colección de variables y números reales (llamados constantes) organizados de alguna manera utilizando sumas…	Larson, R., Hostetler, R, 1985. Algebra y Trigonometría. D.C. Heath and Company. Pág. 40	4	No define: **6**
51U. Una variable es un símbolo al que se le puede asignar un conjunto de valores. Una constante es un símbolo al que solo se le puede asignar un valor. Para representar las variables se emplean las letras finales del alfabeto: x, y, z, u, v, w y para las constantes se emplean las primeras: a, b, c.	Spiegel, Murray R.1969. Álgebra Superior. Schaum´s, McGraw Hill. Pág. 75	1b)	**A2**
52U. La ecuación y=f(x) puede considerarse como equivalente al enunciado de una ley de dependencia entre x e y. Las literales x e y se llaman variables, y se distinguen entre ellas la variable independiente y la variable dependiente. La variable independiente es aquella que puede tomar cualquier valor que queramos asignarle, mientras la variable dependiente correspondiente tiene un valor determinado tan pronto como se haya escogido el valor de la variable independiente. (No define constante)	Hall y Knight 1972 Algebra Superior UTHA Pag. 113	4 y también como variación, 2b), 2c)	Relación funcional: **C4**
53U. Las fórmulas y las ecuaciones establecen relaciones entre combinaciones de números explícitos y literales. Los números explícitos representan valores que nunca cambian, números que no cambian durante una discusión, números que toman cualquier valor entre dos valores dados o	Rees y Sparks. 1962. Álgebra y Trigonometría. McGraw Hill. Pág. 73	4, 2b)	**A2**

números que pueden tomar cualquier valor. Si un símbolo tiene un valor que no cambia se llaman constante, y si puede tomar cualquier valor de un conjunto de números se llama variable.			
54U. Llamaremos expresión algebraica a cualquier combinación de símbolos consistentes de números reales fijos llamados constantes, y letras, que representan números reales, llamadas variables, relacionadas entre sí por las operaciones fundamentales de suma, resta, mutilplicación, división, exponenciación y radicación.	Calero, E. 1990. Algebra Superior. Arzola de Calero. Pág. 45	4, 2b)	Lo que define es expresión algebraica: **4**
55U. Se define una variable como un símbolo junto con un conjunto de objetos que se llamará su dominio. Si el dominio consta de un solo objeto, al símbolo se le llamará una constante.	Albert.1961. "Algebra Superior" Ed. UTHEA. Pág. 208	1a)	No define: **6**
56U. Una función es un conjunto de pares ordenados de números reales (x,y) en el que no hay dos pares ordenados distintos que tengan el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x es el dominio de la función y el conjunto de todos los valores resultantes de y es el contradominio (o ámbito) de la función. En esta definición, la restricción de que no haya dos pares ordenados con el mismo primer número asegura que y es única para un valor específico de x. Los números x y y son variables. Puesto que a x se le asignan valores y como el valor de y depende de la selección de x, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.	Leithold, Louis. 1994. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Ed. Harla. Pág. 194	4, 2b)	No define: **6**
57U. Las variables son símbolos que ocupan un lugar en una expresión u oración que puede	Keedy, Griswold, Schacht, Mamay. 1967.	1a), 1b)	**A2**

sustituirse por los nombres de cualquiera de los miembros de un conjunto específico, llamado conjunto reemplazo. El tipo de símbolo más usual para una variable es una letra. Por ejemplo, en la expresión y+2, la letra y es una variable. En este caso, guarda un lugar en el que pueden sustituirse varios numerales. En la oración b-π= c+2, las letras b y c son variables, mientras que π es una constante. Usualmente el contexto dejará claro si una letra es una variable o una constante.	Algebra and Trigonometry. Ed. Rimhort Winston. Pág. 6		
58U. Notacionalmente, una variable es una letra en una expresión matemática, elegida usualmente de las últimas letras del alfabeto, como x, y o z. Esto se hace así para distinguirlas de las constantes, que se representan por las primeras letras del alfabeto. Como su nombre lo implica, una variable generalmente representa más de un número; de hecho, puede representar a cualquiera de los miembros de un conjunto general llamado conjunto reemplazo. Este conjunto está compuesto generalmente por todos los elementos del conjunto universal para los cuales están definidas las expresiones matemáticas comprendidas en la ecuación.	Ronald D. Janison. 1976. Modern College Algebra with applications. Harcourt Brace Jovanovich, Inc.	1b), 1c)	**A2**
59U. Una constante es una cantidad que permanece fija en valor durante cualquier discusión. Una variable denota una cantidad que durante una discusión puede tomar cualquier valor de un conjunto de valores admisibles.	Spitzhart y Bardell. 1955. College Algebra and plane trigonometry. Addison- Wesley Publishing Company. Pág. 44	1b)	**A2, A3**
60U. Una variable es un número literal que puede	Wells and Hart. 1933.	1b)	**A2**

tomar cualquiera de varios valores aritméticos durante una discusión particular.	Modern Higher Algebra. D.C. Heat and Company.		
61U. Consideremos un conjunto cualquiera, A, tomemos cualquier objeto o elemento de su colección, x. Por definición, A le asigna a x una identificación por medio de una condición S(x). Bajo estos términos podemos decir que A es el conjunto de todas las x tales que cumplen la condición S(x). Pero esta condición la pueden hacer cierta algunos conjuntos, y falsa otros. Esto se utiliza cuando se resuelven desigualdades.	Programa de formación y actualización de profesores de matemáticas. 1985-86. Teoría de conjuntos. SEP. Pág. 9	No define el concepto de variable	No define el concepto de variable: **6**
62U. Un símbolo que guarda un lugar para nombres de objetos, como en una oración abierta, se llama una variable o un guardalugar.	Robert L. Johnson and Charles R. McNerney. 1974. Arithmetic Mathematics. MacMillan Publishing Co., Inc.	Guardalugar: 1d)	Ninguna de las tres: **7**
63U. Algunas ecuaciones contienen letras, llamadas variables, que representan números.	Margaret F. Willerding. 1980. A first course in College Mathematics. Ed. Prindle, Weber & Schmidt. 4th edition. Pág. 216	Hace uso de las letras, pudiera entrar en 1b)	No está claro: **6**
64U. Una variable es un símbolo que representa uno cualquiera de los números de un conjunto dado, que aquí se supone de números reales. Si el conjunto sólo tiene un elemento, el símbolo que lo representa se dice una constante.	Aires Frank, J.R. 1969. Fundamentos de las Matemáticas Superiores. Mc Graw-Hill. Pág. 16	1b)	**B2**
65U. Una variable es un símbolo que puede ser reemplazado por cualquiera de un conjunto de	Ernest F. Haeossler, Jr./Richard S. Paul.	1b)	**A2**

diferentes números.	1983. Introductory Mathematical Analisis. Prentice Hall. Pág. 34		
66U. Las variables que se encuentran en cursos de Álgebra Superior usualmente se toman sobre sistemas de números; esto es, se intenta que estas variables sean válidas para números reales, números racionales o quizás sólo para enteros. Sin embargo, los símbolos variables a menudo se usan en otros contextos. Por ejemplo, los símbolos *l* y *m* en el enunciado: "si *l* y *m* son dos líneas diferentes no paralelas, entonces *l* y *m* tienen exactamente un punto en común" son variables, y representan líneas arbitrarias en un plano. En todos los casos, una variable es un símbolo que representa un miembro no especificado de alguna colección definida de objetos, como números, puntos o líneas. La colección dada se llama el rango de la variable y un objeto particular en el rango se llama un valor de la variable.	Ross A. Beaumont and Richard S. Pierce. 1963. The algebraic fundations of Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.	1a), 1b)	**A1, A2**
67U. Una variable es una letra o símbolo que representa cualquier número de algún conjunto. Variable dependiente: es la variable de salida de una ecuación, generalmente y. Variable independiente: es la variable de entrada de una ecuación, generalmente x.	Alice Kaseberg. Álgebra elemental. Un enfoque justo a tiempo. 2ª edición. 2001. Thomson Editores. Págs. 19, 139	1b), posiblemente 2b) y 2c)	**A2**
68U. Usa letras para indicar componentes de proposiciones. Una expresión algebraica es una representación de las operaciones básicas de suma, resta, mutiplicación o división (excepto entre cero), o la extracción de	Charles D. Miller, Vern E. Heeren, E. John Hornsby. Jr. Matemática: Razonamiento y	1e)	**4**

raíces sobre cualquier conjunto de variables y números. Una ecuación lineal en una variable incluye sólo números reales y una variable, como en ax=b, donde a,b,c son números reales, con a≠0. La solución de un problema en álgebra con frecuencia depende del uso de un enunciado matemático o fórmula, en la que se utiliza más de una letra para expresar una relación. En algunas aplicaciones la fórmula necesaria se resuelve para una de sus variables.	Aplicaciones 8ª edición. 1999. Addison Wesley Longman. Págs. 319, 325		
69U. Puesto que usaremos en esta sección y en las demás de este capítulo las expresiones algebraicas llamadas polinomios, escribiremos P(x) en lugar de la proposición: un polinomio en la variable x...	Castro, Gustavo y colegas. Álgebra I.1987. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. Pág. 77	1e)	No define: **6**

Definición: Nivel Superior. Cálculo	Referencia	Clasificación según los términos en los que se define	Clasificación según su caracterización
70U. Dada la expresión $3x^2$, x es llamada variable porque puede asumir diferentes valores y 3 es llamado coeficiente de x. … No define constante.	Edward T. Dawling. 1992. Cálculo. Schaum Pág. 4	1b)	**B2**
71U. No define variable, ni tampoco utiliza la palabra en el texto.	Lang Serge. 1990. Cálculo. Addison Wesley. Pág. 15	No define variable, ni tampoco utiliza la palabra en el texto	No define variable, ni tampoco utiliza la palabra en el texto: **6**
72U. Utiliza las variables sin definirlas (hasta que definen variable dependiente e independiente), para	Purcell, E y Varberg. D. Cálculo.1998.	1e)	**6, C4**

resolver desigualdades y definir intervalos.	Prentice Hall.		
73U. Utiliza las variables sin definirlas (hasta que definen variable dependiente e independiente), para resolver desigualdades y definir intervalos.	Steward, J. 1994. Cálculo. Grupo Editorial Iberoamérica.	1e)	**6, C4**
74U. A las letras que se usan para representar a un elemento arbitrario de un conjunto dado se le llama variable. En este texto las variables representarán números reales, a menos que se diga otra cosa.	Swokowski, E. 1979. Cálculo. Wadsworth Int. Iberoamérica. Pág. 6	1b)	Número general: **B2**
75U. Las letras tales como "a", "b", ... que pueden representar cualquier elemento (definido, pero no especificado) de un conjunto (este conjunto puede estar formado por cualquier tipo de objetos: personas, números, funciones, etc.) se llaman variables. Al contrario, los símbolos tales como "2", "π",...,"+" que indican determinados entes o relaciones, se llaman constantes.	Masani, P.R., Patel, R.C., Patil, D.J. 1968. Cálculo Diferencial e Integral. Publicaciones Cultural, S.A. Pág. 34	1a), 1b)	Número general: **A1, B2**
76U. Constantes son símbolos con solo un valor posible (tales como 5, 11, 0, 0.5, π) y variables son símbolos (como x, y, z) utilizados para representar números no especificados relacionados de un conjunto llamado dominio.	Karl J. Smith. 1988. Calculus with applications. Brooks/Cole Publishing Company. Pág. 343	1b)	Número general: **A1, A2**
77U. Utiliza las variables sin definirlas (hasta que definen variable dependiente e independiente), para resolver desigualdades y definir intervalos.	Zill, D. 1987. Cálculo. Grupo Editorial Iberoamérica.	1e)	**6, C4**
78U. Variable discreta: variable que representa unidades restringidas a números enteros. Variable continua: variable que representa unidades tomadas en los números reales.	Larson, R., Hostetler R., Edwards, B. 1991. Brief Calculus with applications. Pág. 161	No define explícitamente, pero pudiera ser 1b)	**A2, B2**
79U. Una variable es un símbolo que se utiliza para representar cualquier elemento de un conjunto dado	Louis Leithold. 1988. Cálculo para Ciencias Administrativas,	1a)	**A2**

	Biológicas y Sociales. Ed. Harla.		
80U. En álgebra, a menudo usamos letras para representar números. Algunas veces usamos letras para representar números fijos (llamados constantes) y en otras ocasiones lo hacemos para representar una colección de números, en cuyo caso se llaman variables.	Demana/ Waits/ Clemens.1993. Precalculus.Functions and Graphs. 2nd edition. Addison Wesley Publishing Company.	1b)	Número general: **B2**
81U. Ahora bien, ¿qué aspecto tiene en matemáticas una proposición abierta? He aquí algunas: $\begin{cases} 2+\square=7 \\ 3xn<12 \\ 6-\triangle=2 \\ x+2>5 \end{cases}$ En estos casos, no podemos decir si las afirmaciones son verdaderas o falsas hasta que hayamos reemplazado los símbolos □, n, Δ y x por números. Los símbolos □, n, Δ y x que aparecen en los ejemplos anteriores desempeñan el mismo papel que los pronombres, en ese caso sujetos, "él" y "ella" juegan en las proposiciones abiertas en castellano...En matemáticas se les llama variables. Nota: utiliza el término conjunto de reemplazamiento como el conjunto de números que puede tomar la variable y como conjunto de verdad o conjunto solución al conjunto de números del conjunto de reemplazamiento que hacen verdadera la proposición.	NCTM. 1972. Gráficas, Relaciones y Funciones. Editorial Trillas. Págs.13, 14	1d), aunque se utiliza el enfoque 1b)	**A2, A3**

ANEXO B
DEFINICIONES DE VARIABLE DE LOS PROFESORES Y SU CLASIFICACION.

Definición Profesores	Nivel en que se labora	Clasificación según los términos en los que se define	Clasificación según su caracterización
1M. Letra o símbolo cuyo valor cambia o varía según la situación planteada. Puede tomar cualquier valor dependiendo de la ciencia o campo del conocimiento donde se aplique		1b), 8	Incógnita, número general
2M. Valor numérico que hay que calcular en una expresión algebraica	Bachillerato	2a)	Incógnita
3M. Letra que adquiere diferentes valores	Bachillerato	1b)	Incógnita
4M. Donde el valor es inconstante	Bachillerato	3	Incógnita
5M. Incógnita	Bachillerato	2a)	Incógnita
6M. Término cambiante	Bachillerato	8	Puede ser incógnita o relación funcional
7M. Valores no constantes	Bachillerato	3, 8	Puede ser incógnita
8M. Letra para representar un número	Bachillerato	1c)	Puede ser incógnita
9M. Cambiante	Bachillerato	No está clara, 1e)	Ninguna
10M. Valor que cambia aplicado a una receta	Bachillerato	1b), 8	Puede ser incógnita o relación funcional

11M. Símbolo que indica cambios	Bachillerato	1d)	Ninguna
12M. Cantidad que puede cambiar en la resolución de un problema	Bachillerato	1b)	Incógnita
13M. Es una función que depende de otra	Bachillerato	8	Sugiere relación funcional
14M. Son aquellas literales que modifican su valor	Bachillerato	8	Puede ser incógnita
15M. Valor que puede tomar una literal dentro de un problema algebraico	Bachillerato	1c), 2a)	Pudiera ser incógnita
16M. Símbolo matemático que da la idea de cambio	Bachillerato	8	6
17M. Aquel valor que cambia que toma una literal	Bachillerato	1b), 8	Puede ser incógnita
18M. Valor que toma determinada expresión	Bachillerato	1c)	Puede ser incógnita
19M. Es una literal que está cambiando, dependiendo de los valores que tome	Bachillerato	1b), 8	Puede ser incógnita
20M. Es una expresión literal que puede tomar diferentes valores	Bachillerato	1b)	Incógnita
21M. Se representa por medio de literales, a las cuales se les puede dar cualquier valor	Bachillerato	1b)	Número general
22M. No común	Bachillerato	7: Ninguna	7: Ninguna

23M. Es algo que cambia (pudiéndose mantener constante) a través de cierta medida de tiempo	Bachillerato	8	Puede ser incógnita o relación funcional
24M. Expresión que en el curso de un proceso puede tomar diferentes valores	Secundaria	1b)	Incógnita
25M. Ente matemático que puede tomar diferentes connotaciones: variable fija (constantes preestablecidas), variable "variable", parámetros. Nos sirven para modelar procesos	Secundaria	Definición completa: incluye todas las definiciones: 1c), 2 a), 2b), 2c)	Incluye las tres caracterizaciones: Incógnita, número general, relación funcional
26M. Magnitud que puede tomar diferentes valores; varía en razón de algo. Generalmente se representa con letras	Secundaria	1b), 8	Incógnita, relación funcional
27M. Puede ser independiente o dependiente. Cantidad que puede variar en la resolución de un problema		1b), 8, 2b), 2c)	Relación funcional, incógnita
28M. Relación independiente entre las variables matemáticas y su conjunto relación, el cual depende del contexto		2 a), 2b), 2c)	Relación funcional

29M. Considérese como variable, dentro del lenguaje algebraico, a una o varias letras mismas a las que en su momento se les puede asignar un determinado valor, ya sea en forma directa o en razón de determinadas operaciones. Cuando se le asigna el valor en forma directa a una de ellas y existe en la expresión alguna otra, a la primera se le nombra variable independiente y a la segunda variable dependiente. Usualmente son utilizadas las últimas letras del alfabeto		1b), 2 a), 2b), 2c)	Incógnita, relación funcional
30M. Cuando se necesita señalar el comportamiento de un elemento de nuestro conjunto universal y que se tiene la obligación de establecer comparaciones entre ellos, ha llevado a la comunidad mundial a definir dos campos puntuales de referencia, uno de ellos se le llama elementos que siempre "son los mismos" y el otro es aquel que	Bachillerato	3, 8	Puede ser incógnita

generalmente cambian de valor, debido a que nuestro propio universo cambia segundo a segundo. Y para generalizar tales estados de cambio constante se le ha denominado variable y que además tiene unas literales con las que se le puede identificar			
31M. Letra o símbolo que representa una cantidad la cual puede cambiar dependiendo de las circunstancias del problema	Bachillerato	1b), 8	Incógnita
32M. Es una literal que puede adquirir diversos valores	Bachillerato	1b)	Incógnita
33M. Variable en álgebra.- Es el nombre que se le da a aquella expresión matemática que cambia de valor pero después de realizar algunas operaciones se le puede adjudicar o llega a adquirir uno o varios valores posibles; las variables en álgebra se representan por letras del alfabeto		2a)	Incógnita
34M. Es el valor que adquiere una situación en relación a otra		No está clara	No está clara

35M. Provienen de variar, varios, 2 o más cosas. Usando este término nos referimos a una cantidad o número que cambiará ascendente o descendentemente en su valor		1b), 8	Puede ser incógnita
36M. Es una expresión algebraica a la que se le da valores diferentes para encontrar los valores de otra variable. Generalmente se representa con letras		1b)	Relación funcional
37M. Es el valor asignado a una función que puede o no ser de valor propio o de relación en base a otra	Bachillerato	Pudiera ser 1c)	Tal vez relación funcional
38M. Es una letra o símbolo que adquiere valores que pueden variar durante el desarrollo de un proceso	Bachillerato	1b), 8	Incógnita
39M. Es la representación de un parámetro que en un momento dado puede cambiar	Bachillerato	1b), 8	Incógnita
40M. Expresión matemática que se representa con un símbolo (literal), que se utiliza para representar cierta cantidad, la cual		1b), 8	Puede ser incógnita o número general

puede variar			
41M. Es la literal que se puede sustituir por un valor cualquiera. En una ecuación, la variable es la literal que se sutituye para encontrar su valor	.	1b), 2a)	Incógnita
42M. Es una literal que puede tomar el valor indeterminado que se le pueda dar al sustituirse		2a)	Incógnita
43M. Símbolo literal (letra) que puede representar en un momento dado uno o varios valores distintos. Cuando el valor de una letra dependa del valor que tenga otra con la cual se relaciona en un problema dado, se le conoce como variable dependiente y cuando el valor de una literal no está sujeta a ninguna restricción de relación y ésta pueda tener cualesquier valor se le conoce a dicha literal como variable independiente		1b), 1c)	Relación funcional, incógnita
44M. Es el nombre que se le da generalmente al uso de letras en ecuaciones en las que el valor que se les asigne puede		1b)	Relación funcional

cambiar dependiendo de las opciones que se les de, y de cómo se estructure			
45M. Se le llama así a toda cantidad que varía su valor de acuerdo a la situación. Ej.: 3x =π, x=variable, π= constante, 3=constante		2a)	Incógnita
46M. Es un símbolo que utilizamos para representar valores que podemos cambiar y que están bajo ciertas circunstancias		1b), 8	5: puede ser incógnita o relación funcional
47M. Es la parte de una expresión algebraica que puede tomar cualquier valor de un conjunto dominio preestablecido		1b)	5: puede ser relación funcional
48M. Es algo que no tiene un valor constante	Bachillerato	3	5: puede ser incógnita
49M. Término algebraico que puede adoptar diferentes valores en una función	Bachillerato	1b)	Alude directamente a relación funcional
50M. Es el término algebraico cuyo valor, dentro de una función algebraica, puede cambiar, estos valores pueden ser aleatorios, y tendrán	Bachillerato	1b), 8	Relación funcional

una correspondencia con otra			
51M. Se conoce con este nombre a la asociación de una o más literales con sus exponentes, donde las literales representan a una cantidad a la cual se le desconoce su valor. Normalmente las literales se representan por letras minúsculas		2a)	Incógnita
52M. Es la parte literal que aparece en cualquier expresión algebraica, la cual puede tener diferentes valores numéricos		1b)	Incógnita
53M. Algo que no podemos decir que se mantiene sin cambios		1d), 3	7: Ninguna
54M. Es una magnitud cuantitativa cuyo valor puede determinarse arbitrariamente o dependiendo de otra que la determina		2 a), 2b), 2c)	Incógnita, relación funcional
55M. Es la expresión algebraica que cambia constantemente		8	6: no está clara
56M. Algebraicamente se le llama variable a		1b)	Incógnita, relación funcional

una expresión (literal) que puede tener varios o diferentes valores. Existen variables dependientes e independientes			
57M. Elemento de una igualdad, ecuación o fórmula que puede depender o no de otra		2 a), 2b), 2c)	Incógnita, relación funcional
58M. Se designa así a una magnitud que durante el proceso de cálculo de una ecuación, puede adquirir diversos valores. Aparte de una ecuación, también se puede aplicar a algún modelo algebraico ya establecido		1b), 2 a)	Incógnita, relación funcional
59M. Al asignarle valor a una literal. Si depende de otra, dependiente. Si es una constante, se llama independiente		1b)	Relación funcional, incógnita
60M. Es una proposición abierta, puesto que puede tomar cualquier valor. La variable puede ser dependiente o independiente. La variable independiente toma el valor por sí sola, la dependiente toma el valor según la variable		1b), 1d)	Relación funcional

independiente			
61M. Literal que puede dársele un valor determinado en una expresión, o sea puede cambiar su valor. Por ejemplo: $5 + a = 5, a=0$ $3a+1=7, a=2$ $a^2=9, a=3$		2a)	Incógnita
62M. Es un símbolo que se representa con letra, cuyo valor numérico se desconoce, ya que este varía de manera positiva o negativa (su valor algebraico)		2a)	Incógnita
63M. Es la representatividad de una cantidad que puede cambiar su valor; está representada por una literal		1b), 2 a)	Incógnita
64M. Generalmente se representa por un literal o símbolo que representa a una cantidad que varía en su valor		1b), 2 a)	Incógnita
65M. Es una literal la cual nos puede indicar diferentes valores numéricos		1b)	Incógnita
66M. Es aquella literal que puede tomar una serie de valores numéricos diferentes entre sí		1b)	Incógnita

67M. Es una representación algebraica que puede tomar diversos valores. Puede ser una variable dependiente o una variable independiente. A la variable independiente se le van asignando valores y a la dependiente se le calculan sus valores en función de los que toma la otra variable (independiente)	Bachillerato	1b)	Relación funcional
68M. Es un valor o un factor que puede cambiar en forma dependiente de las condiciones que se proponen	Bachillerato	1b)	Incógnita, relación funcional
69M. Generalmente letra que puede ser sustituida por cualquier número $\Re$		Conjunto sustitución 1b)	Número general
70M. Es el símbolo al que no se le asocia con un único valor, es decir, en un momento dado puede adquirir distintos valores		1b)	Incógnita, relación funcional
71M. Elementos de una ecuación o fórmula que pueden tomar todos los valores de su dominio en un problema		1b)	Relación funcional

72M. Literal, en especial, x,y en la cual toma valores distintos dependiendo de cada caso. Ejemplo: en las funciones del tipo $y=ax+b$, $y=ax^2+bx+c$, etc., Universo=U		1b), 2 a), 2b), 2c)	Relación funcional
73M. Son números que representan distintos valores (que varían de valor)		1b)	Incógnita
74M. Es una expresión algebraica que se toma para representar cualquier cantidad numérica, y que puede variar en el momento que se requiera		1b)	Número general

ANEXO C.
DEFINICIONES DE VARIABLE DE LOS ESTUDIANTES Y SU CLASIFICACION.

Definición: Alumnos de la Universidad	Clasificación según los términos en los que se define	Clasificación según su caracterización
1A. Es una letra que toma el valor de un número para utilizarla en una ecuación y así resolverla.	1c), 2 a)	A1
2A. Son el conjunto de letras x,y,z que se encuentran en alguna ecuación, las cuales pueden tener valores diferentes	1b)	A2
3A. Es una letra que tiene diversos valores numéricos dependiendo de una letra que tenga un valor numérico constante	1b)	C4
4A. Expresión, que puede ser alfabética, la cual no tiene un valor asignado viéndolo por primera vez, sino que su valor puede variar	2a)	A2, B2
5A. Es una letra o literal que utilizamos en operaciones aritméticas como suma, resta, multiplicación, radicación o potenciación y se combinan con números	4	B3
6A. Es algo que representa un valor no constante	1b), 3	B2
7A. Es algo que no tiene un valor constante, algo que varía o que puede tomar diferentes valores	1b), 3	A2, B2
8A. Son representaciones o letras que pueden tomar valores distintos o variables dentro de una ecuación o expresión algebraica	1b)	A2, B2
9A. Es un valor que cambia	8	B2
10A. Es una expresión que utiliza las letras, es una constante, ésta no sufre cambios, como con los números	3	Esto es una constante: 7

11A. Es cuando tienes una operación a realizar y van cambiando los términos, dentro de ella el resultado	1b)	Tiene una confusión acerca de lo que es una variable: 5
12A.Una expresión que puede tomar diferente valor	1b)	A2
13A. Se refiere a un número representado por una letra que toma diferentes valores dependiendo de la operación o expresión algebraica y su desarrollo	1b)	A1
14A. Es una expresión como x o y que puede variar su valor, o sea el valor no siempre va a ser el mismo	2 a)	A2
15A. Se caracteriza por las letras x, y, z,... que conforman una cierta cantidad en una mínima expresión	2 a)	A2
16A. En la expresión se dice variable a x, y, z ya que éstas pueden cambiar o tomar un valor o pueden estar cambiando	1b), 1c)	A2
17A. Es una incógnita o una respuesta en un problema que está en constante cambio, dependiendo de cómo varían los valores afuera de ella, es decir, si los valores cambian en el problema ella cambia también	2 a)	A2
18A. Números o letras que dependen una de otra si cambia una cambia la otra	2b), 2c)	C4
19A. Es una letra que puede tomar cualquier valor en una ecuación	1b)	B2
20A. Expresión que representa un valor	1c)	A2
21A. Que cambia de valor o posición, “va cambiando”	8	A2
22A. Es cuando en una ecuación encontramos una letra la cual tenemos que encontrar	2 a)	A1
23A. Una letra o símbolo que representa cualquier número que puede variar	1b)	B2
24A. Símbolo que puede representar	1b)	B2

cualquier valor		
25A. Es un valor que cambia, no es constante	2 a), 3	A2
26A. Es un valor que no es constante, que varía de acuerdo a distintos factores	3, 8	A2
27A. Son letras que desconocemos su valor, lo podemos encontrar y pueden tomar cualquier valor	2 a)	A1, A2
28A. El valor de una incógnita que puede variar dependiendo de las condiciones en que se encuentre	2 a)	A2
29A. Es un valor, en una expresión que cambia constantemente	1b)	A2
30A. Son todas las letras como a, b, c, x, y, z, que se pueden conjugar con los números reales, y al hacerse esto se complica más la forma de realizar ecuaciones ya que varían	4	B3
31A. Es la letra x, y, z por lo regular son las últimas letras del alfabeto	6: No es definición	6: No es definición
32A. Cambio. Es un valor que no es fijo, y pueden ser de cualquier tipo; existen dos tipos: dependiente e independiente, esto es que la independiente se puede manipular porque la dependiente cambie.	2b), 2c)	C1
33A. Dependiente. Que un valor depende de otro o está en función de otro, por ejemplo, $y=x^2$ la "y" depende del valor que se le asigne a "x" y se eleve al cuadrado, el valor de "y" será x^2	2b), 2c)	C1
34A. Número. Es un número que se busca conocer mediante fórmulas y cálculos algebraicos	1c)	A4
35A. Cambiante. Es una cifra o número o componente que no se conoce y que puede tener varios valores o más bien diferentes valores	1b), 2 a)	A2
36A. Variabilidad. Algo que varía, ya sea	2 a)	A2

una cantidad, movimiento.		
37A. Variante. Es aquello que crea cambios donde se aplica	8: Variación	6: No está clara
38A. Incógnita. Un dato o cantidad que puede ser diferente dependiendo de diversos factores, tiempo, posición, etc. según sea el caso.	1b)	A2
39A. Cambiante. Es un valor que puede variar. Puede estar dentro de un rango; por ejemplo, la x varía de -5 a 3. x sería la variable y puede tener valores de -5 a 3	1b)	A2
40A. Incógnita, valor dependiente, valor independiente. Es el valor desconocido que se puede calcular a través de una función. Existen variables dependientes y variables independientes. Se le pueden asignar valores ya establecidos para conseguir un resultado	1b)	A4
41A. Cambiante. Es algo que puede tomar diferentes valores, que no permanece constante.	1b)	A2
42A. Cambiante. Una variable es algo que puede llevar distintos valores o sea que varía, por ejemplo y=x. La variable es x o sea puede llevar distintos valores como [1,2,3,4]	1b), 2b)	A2
43A. Cambio. Que cambia mucho	8: Variación	6: No define
44A. Cambio. Es lo que cambia de un lado a otro, o de un lugar a otro diferente que varía su estado, también que cambia de una posición a otra. En general, es todo lo que cambia ya sea de posición o de estado	8: Variación	6: no está clara
45A. Cambio. Es algo que puede ser cambiable de una u otra forma pero al final puede tener varios cambios	8: Variación	7: Ninguna
46A. Incógnita. Una variable es una incógnita que para sacar su valor depende de otro.	2a)	A2

47A. Cambio. Una variable es el cambio y que puede llevar diferentes valores	2 a)	A2
48A. Que cambia. Son las diferentes opciones de número y que siempre puede cambiar	1b)	A2
49A. Incógnita. En una función se representa con cualquier letra que no tiene un valor fijo y es ésta la que estará haciendo variar una función	1b)	A2
50A. Incógnita. Una variable es un término o número que en un problema matemático no es constante, sino que depende de algo más para cambiar	2 a)	A4
51A. Función. Una variable es una expresión matemática que se le asigna un número, el cual no está definido y depende de otro para definirlo	1c)	A2, A4
52A. Cambiante, indefinido, dependiente. Es algo que puede tener diferentes resultados debido a distintas causas	8: Variación	A2
53A. Letra. Son distintas operaciones para llegar a un resultado	6: No define: uso de letras	6: No define
54A. Constante. Es concepto que abarca desde números, letras, etc. para definir un resultado	3	7: Ninguna
55A. Incógnita, valores. Es un símbolo, una letra cualquiera, no tiene un valor fijo, se le pueden asignar valores	1b), 3	A2
56A. Cambio, no constante. Es aquello que cambia durante alguna medición y/o comparación, de dos cosas. Algo que no es lo mismo todo el tiempo	3, 8	6: No está clara
57A. Cambiante. Variable es un elemento que puede tomar diferentes valores en función o no en función de otros elementos	1b)	A2
58A. Elemento. Es un número, pero podría ser un elemento, que es	1c)	A3

dependiente de otro; ejemplo 4+2=6		
59A. No constante. Es aquello que depende de alguna condición,más bien es que no todo va a ser constante. No se mantiene donde mismo	3	A2
60A. Cambio. Una variable es algo que no es fijo, sino que cambia en ciertas condiciones y algunas dependen de otras	3	A2, A3
61A. Cambio. Es algo que no siempre va a ser lo mismo, que va a estar en constante cambio, que no será estable por siempre	3	A2
62A. Incógnita. Los datos que se pueden cambiar dentro de una función	1b)	A3
63A. Cambio. Es un cambio que sufre al variar una ecuación o número c/sig	2 a)	Incógnita
64A. Cambia, varía. Algo que está cambiando, algo que varía	8: variación	7: Ninguna
65A. Cambio. Es un cambio que se lleva a cabo en distintos problemas, como puede ser una ecuación	2 a)	A3
66A. Cambio. Algo que está en cambio. En matemáticas, una función que nos va a conducir a un resultado: a resolver una incógnita	2 a)	A4
67A. Cambio o cambiante. Cambio constante	8: Variación	6: No define
68A. Cambio. Una variable es un número que cambia constantemente en una ecuación	2 a)	A2
69A. Cambio. Una variable es algo a lo que se le puede dar diferentes valores y puede servir para graficar algo	1b)	A2
70A. Cambio. Puede ser un número o una letra que está en cambio constante	Uso de letras, variación: 8	A2
71A. Cambio. La variable es un número que se modifica, dependiendo del resultado que se busca y normalmente es	1b), 8	A3

representado por las letras a,b,c,...		
72A. Valor, datos. Es el valor que buscamos en un problema	2 a)	A3
73A. Número, letra, incógnita. Es cualquier letra o representación en el que puede tener varios valores, para realizar operaciones	1b)	A2
74A. Letras. Son las letras que están en la ecuación 2x + 8y = 14	6: sólo uso de letras	6: No define
75A. Incógnita. Una incógnita que puede adquirir cualquier valor	2a)	B2
76A. Cambio. Es un conjunto de letras que representan una cantidad o un número y pueden estar en constante cambio	1c), 8	A2
77A. Cambiante. Es una letra o símbolo que nos representa un número que puede variar dependiendo a las condiciones a las que se sujete	2 a), 2b), 2c)	A2
78A. Cambio. Un valor que puede cambiar que sería una variable dependiente de otro valor. O también puede ser un valor constante y éste sería una variable independiente	2b), 2c)	Relación funcional
79A. Cambio. Es un término que puede adquirir diversos valores en la realización de alguna ecuación, en la que debe variar los valores	1b)	A2
80A. Cambio. Una variable es aquella literal que toma valores diferentes	1b)	A2
81A. Incógnita. Es un valor buscado que depende de él otro lado de la ecuación	2 a)	A4
82A. Incógnita. Es aquello que tiene un valor que depende de lo que le rodea	2 a)	A4
83A. Multivalores. Una variable es una expresión que tiene muchos valores	1b)	A2
84A. Cambia. Es un valor que no	2 a)	A2

permanece fijo, su valor varía, cambia		
85A. Inconstante. Es un dato que puede tomar distintos valores	1b)	A2
86A. Conjunto. Es cuando en una operación se le pueden dar diferentes valores para llegar a varios resultados que pueden ser en algunos casos iguales	1b)	A3
87A. Letra cualquiera. Es el conjunto de letras cualesquiera que le asignamos a determinadas ecuaciones algebraicas	6: No define, uso de letras	6: No define
88A. Diferente. Es un símbolo que puede tomar cualquier valor numérico	1b)	B2
89A. Incógnita. Es una letra o símbolo que representa cierta cantidad o número el cual no se sabe su valor	2 a)	A1
90A. Incógnita. Es algo que puede tomar cualquier valor que cumpla con los requisitos que se le establecen, puede tener uno o muchos valores	1b), 1c), 2 a)	A3
91A. Cambia. Un valor que nunca es el mismo (no es constante)	3	A2, B2
92A. Varía. Es algo que no tiene un valor constante, es cambiante. Algunas son independientes, que pueden ser cualquiera y las dependientes su valor se va a dar por otra	2, 2 a), 3	Incógnita, relación funcional
93A. Cambia. Que constantemente cambia el número sin tener un número fijo	2	A2, B2
94A. Cambiante. Es algo que no tiene un valor fijo, puede tener varios	2 a)	A2
95A. Dependiente. Es una condición o elemento de alguna expresión la cual puede ser sustituida o alternada con varios valores satisfaciendo la ecuación de acuerdo a sus restricciones	1b)	A3
96A. Número. Un número representado en una ecuación	1c)	A1

97A. Cambiar. Es el conjunto de números que se pueden representar por letras, como x,y,a,b, etc.	Uso de letras, 1b)	A2, B2
98A. Valor. Una letra con coeficiente numérico que representa un valor desconocido	Uso de letras, 2a)	A1
99A. Valor. Es un valor o elemento el cual varía dentro de un conjunto de datos, que puede o no estar sujeto a una restricción	1b)	A2, A3
100A. Cambiable. Cualquier cosa, objeto, número que representa algo	2 a)	A1
101A. Incógnita. Es una literal en forma de incógnita, ya que puede tomar cualquier valor pero éste puede variar	Uso de letras, 2a)	A2, B2
102A. Una cambiante. En una ecuación es la cifra o cantidad que cambia (varía). No tiene un valor definido	2 a)	A2, A4
103A. Cambiante. Son los posibles valores que se le puede asignar a una letra en una ecuación	1b)	A2
104A. Cambiante. Es un término utilizado en matemáticas para definir a un número que cambia dependiendo de la ecuación	2 a)	A2
105A. Valor. Una variable es un número que se diferencia en una ecuación para obtener cierto resultado	2 a)	Incógnita
106A. Un valor, diferencia. Número o valor que varía	8	A2
107A. Diferentes, cambiantes. Un número o puntos en una gráfica son diferentes a una constante	3	Puede ser relación funcional
108A. Cambiante, dato, número. Es alguna cosa, cualquiera que pueda ser de una manera u otra, no que cambie, sino que sea lo mismo pero diferente.	2 a)	A2
109A. Valor. Es una letra del alfabeto	1b)	A2

que se encuentra en una ecuación y esa letra puede obtener muchos valores diferentes		
110A. Resultante. Una variable es el resultado de una constante, que posiblemente va a ocupar un lugar en la gráfica de la ecuación	3	Tiene una confusión acerca de lo que es una variable: 5
111A. x. Es una letra o símbolo que se le puede asignar cualquier valor	1b)	B2
112A. Cambio. Es un cambio constante que sus números varían según la cantidad de valor que se le aplique pero es el mismo nada más aumenta o disminuye su número	1b)	Relación funcional
113A. Ecuación, valores. Como en una ecuación donde hay dos incógnitas (ejemplo, x,y) y a ellas les puedes dar los valores que quieras para poder resolverla	2 a)	A3
114A.Constante. Es algo con un determinado valor, y ese valor es constante o varía dependiendo de distintas cosas	2 a), 3	A2
115A. Número, letra. Es cualquier letra o representación que puede tener diferentes valores	1b)	A2
116A. Desconocido. Es un valor desconocido que puede tener distintas soluciones, y se pueden obtener con varias ecuaciones. Y se representa con letras, por ejemplo: x,y,etc.	2 a)	A4
117A. Incógnita. Una variable es una incógnita, en este caso en una ecuación , donde debemos encontrar el valor de ésta	2 a)	A4
118A. Letra. Es una letra que tiene valores diferentes, como 1,2,3,...	1b)	A2
119A. Una letra. Es un valor que puede cambiar y se representa mediante una letra	2 a)	A2
120A. Una letra. Es una letra a la cual se	Uso de letras, 1b)	B2

le puede dar cualquier valor		
121A. Letra. Es una letra que tiene un valor	1c)	A3
122A. Determinado. Es un valor determinado que no va a cambiar durante un proceso	1c)	7: Ninguna
123A. Incógnita. Es el número (s) que no conocemos y lo obtenemos por medio de ecuaciones en donde hay que despejar dichas variables	2 a)	A4
124A. Cambiante o dependiente. Es una letra que puede tomar distintos valores	1b)	A2
125A. Cambio. Una variable es cualquier cosa que puede tomar cualquier valor	1b)	B2
126A. Valor. Cualquier número o valor que nos sirve para realizar una operación	1c)	B2

ANEXO D.
TABLAS DE TOTALES
D1. TEXTOS.

Clasificación	Número de libros
1a)	12
1b)	49
1c)	5
1d)	5
1e)	10
2a)	18
2b)	14
2c)	5
3	2
4	22
Incógnita: A1 A2 A3 A4	 14 44 5 10
Número general: B1 B2 B3 B4	 0 19 0 0
Relación funcional: C1 C2 C3 C4 C5 C6	 1 0 0 7 0 0
No lo define, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización: 5	4
No define o no está claro: 6	21
Ninguna: 7	1

1a) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas**: 12 libros
1b) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de números**: 49 libros
1c) **La variable se reemplaza por un único número**: 5 libros
1d) **Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c)**: 5 libros
1e) **Textos que no tienen una definición explícita de variable**: 10 libros
2a) **Variables que no varían**: 18 libros
2b) **Variables discretas**: 14 libros
2c) **Variables continuas**: 5 libros
3 **En términos de constantes**: 2 libro
4 **Como componente de otro concepto matemático**: 22 libros
5 **No define variable, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización** : 4 libros

6 **No define ni utiliza la palabra variable en el texto**: 21 libros
7 **Ninguna**: 1 libro
8 **Clasificación de acuerdo al uso:**

a) Como **Incógnita**, 73 libros. b) Como **Número General**, 19 libros;
c) Como **Relación Funcional**, 8 libros.

D2. ALUMNOS

Clasificación	Número de alumnos
1a)	0
1b)	46
1c)	12
1d)	0
1e)	0
2a)	42
2b)	5
2c)	5
3	16
4	2
Incógnita: A1 A2 A3 A4	 9 57 16 12
Número general: B1 B2 B3 B4	 0 18 2 0
Relación funcional: C1 C2 C3 C4 C5 C6	 3 0 0 3 0 0
No lo define, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización:5	2
No define o no está claro: 6	23
Ninguna: 7	8

1a) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas**: 0 alumnos
1b) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de números**: 46 alumnos
1c) **La variable se reemplaza por un único número**: 12 alumnos
1d) **Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c)**: 0 alumnos
1e) **Alumnos que no tienen una definición explícita de variable**: 0 alumnos
2a) **Variables que no varían**: 42 alumnos

2b) **Variables discretas**: 5 alumnos
2c) **Variables continuas**: 5 alumnos
3 **En términos de constantes**: 16 alumnos
4 **Como componente de otro concepto matemático**: 2 alumnos
5 **No define variable, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización** : 2 alumnos
6 **No define o no lo hace claramente**: 23 alumnos
7 **Ninguna**: 8 alumnos
8 **Clasificación de acuerdo al uso:**
a) Como **Incógnita**, 94 alumnos. b) Como **Número General**, 20 alumnos; c) Como **Relación Funcional**, 6 alumnos.

D3. MAESTROS

Clasificación	Número de profesores
1a)	0
1b)	43
1c)	6
1d)	3
1e)	1
2a)	19
2b)	7
2c)	7
3	5
4	0
Incógnita: A1 A2 A3 A4	 3 43 4 12
Número general: B1 B2 B3 B4	 0 10 0 0
Relación funcional: C1 C2 C3 C4 C5 C6	 9 1 0 0 0 0
No lo define, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización: 5	0
No define o no está claro: 6	12
Ninguna: 7	5

1a) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas**: 0 profesores
1b) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de números**: 43 profesores
1c) **La variable se reemplaza por un único número**: 6 profesores

1d) **Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c)**: 3 profesores
1e) **Alumnos que no tienen una definición explícita de variable**: 1 profesor
2a) **Variables que no varían**: 19 profesores
2b) **Variables discretas**: 7 profesores
2c) **Variables continuas**: 7 profesores
3 **En términos de constantes**: 5 profesores
4 **Como componente de otro concepto matemático**: 0 profesores
5 **No define variable, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización** : 0 profesores
6 **No define o no lo hace claramente**: 12 profesores
7 **Ninguna**: 5 profesores
8 **Clasificación de acuerdo al uso:**
a) Como **Incógnita**, 62 profesores. b) Como **Número General**, 10 profesores; c) Como **Relación Funcional**, 10 profesores.

Anexo E

C U E S T I O N A R I O S

E1. CUESTIONARIO: VARIABLE COMO INCÓGNITA

En las siguientes expresiones, ¿cuáles símbolos son variables?, ¿cuáles son constantes?

1. $C = 2\pi r$ 2. $x+6=7$ 3. $A= ½\ bh$ 4. $A= ½\ h(b+b_1)$

Diga si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas y explique el por qué:

5. "Una variable es un número fijo, no especificado"
6. "Una función constante no tiene variables".

En los problemas siguientes, relacione las ecuaciones que son traducciones de los enunciados dados:

a) x+3=15 b) 2x-5=15 c) x-3=15.

7 La suma de tres más algún número es igual a 15. __________________

8 Cuando 3 se substrae de algún número, la diferencia es 15. __________________

9 Cuando 5 se substrae de dos veces un cierto número, la diferencia es 15. _________

Traducir cada una de las proposiciones abiertas siguientes en una oración verbal:

10. 3x+2 = x+10 ____
11. 4(y+5) = 17 ____
12. 3(y+2) = 18 ____

Traducir cada uno de los siguientes enunciados a símbolos:

13. El producto de 9 por el doble de un número. _____________
14. El cuadrado de la suma de un número más 10 veces el mismo número. ____________
15. La suma de un número y 3 al multiplicarla por dos nos da 14. ____________
16. El triple de un número aumentado en 2 es lo mismo que el número aumentado en 8. ___________

Escriba la siguiente oración verbal como proposición abierta y determine tres parejas de números que al sustituir N y k por ellos, la proposición resulte cierta:

17.- Si a un número natural N se le suma 1 y después se divide por 5, el resultado dado será otro número natural k. ________________________________

18.- El área de un rectángulo de base b y altura a, está dada por la fórmula A=ba. ¿De qué es función A:

a) de la base b solamente,
b) o sólo de la altura,
c) o bien de ambas a la vez?

19. **Interprete los siguientes problemas y represéntelos mediante una expresión (con una variable) que los resuelva. No resuelva:**

19.- Un señor de 37años tienen un hijo de 7. ¿Dentro de cuántos años tendrá el padre el triple de la edad de su hijo?

20.- Hallar tres números cuya suma es 54, sabiendo que el primero es igual al doble del segundo más 4 y que el tercero es igual al doble del primero.

Para cada una de las siguientes expresiones, ¿cuántos valores puede tomar la letra?

21. $x+2 = 2+x$ ______________________

22. $x+5= x+x$ ______________________

23. $7x^2 = 2x - 5$ ________________________

24. $\frac{x}{x^2 - 4} = 3$ ______________________

25. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ______________________

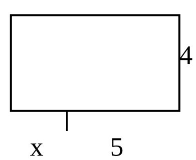
26. $4 + x^2 = x(x+1)$ ______________________

Para cada una de las siguientes expresiones escriba los valores que puede tomar la letra:

27. $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$ ______________________

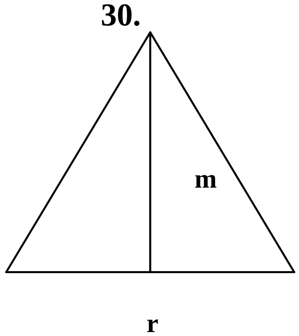
28. $\frac{10}{1 + x^2} = 2$ ______________________

29.- El perímetro de una figura se calcula sumando la longitud de sus lados. Escriba la fórmula que expresa el perímetro de la siguiente figura:

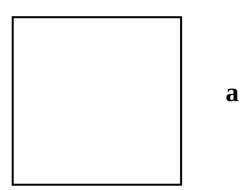


Escriba una fórmula para calcular el área de las siguientes figuras:

30.



31.



E2. CUESTIONARIO: VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL

32.- En la siguiente figura, el polígono no es completamente visible. Debido a que no sabemos cuántos lados tiene el polígono en total, diremos que tiene N lados. Cada lado mide 2 cm. de longitud. Escriba una fórmula para calcular el perímetro del polígono.

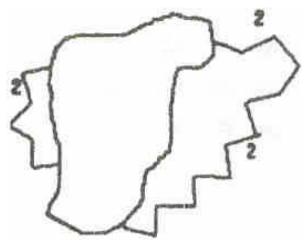


FIGURA 1

33.- Una pista está dividida en 16 partes de igual longitud. Cada parte mide X kilómetros. a) Escriba una fórmula para expresar la longitud total de la pista.

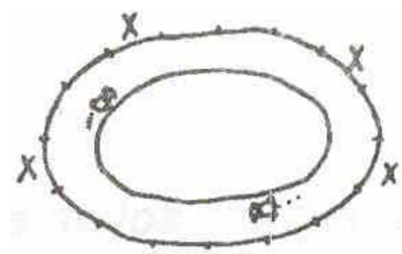


FIGURA 2

b) Escriba una fórmula para expresar cuántos kilómetros se moverá un auto si viaja tres veces alrededor de la pista. ________________________

Observe las siguientes figuras**:**

		Número de puntos
Figura #1	•	**1**
Figura #2	• • • •	**4**
Figura #3	• • • • • • • • •	**9**

34.- ¿Cuántos puntos hay en la figura # 4? _________________

35- Dibuje las figuras # 5 y # 6 y dé el número total de puntos:

#5 No. de puntos _______ #6 No. de puntos _______

36.- Imagine que puede seguir dibujando figuras hasta la figura #m. ¿Cuántos puntos en total tendrá la figura #m? ____

Si para hacer las figuras de los ejercicios anteriores se van agregando puntos:

37.- ¿Cuántos puntos se agregan para pasar de la figura #1 a la #2? ____________
38.- ¿Cuántos puntos se agregan para pasar de la figura #2 a la #3? ____________
39.- ¿Cuántos puntos se agregan para pasar de la figura #m a la siguiente? ____________
40.- Escriba una fórmula que muestre cómo se van agregando puntos hasta llegar a la figura #m ____________________

41.- Observe las siguientes igualdades y complete:

$$1 + 2 + 3 = \frac{(3 \times 4)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{(4 \times 5)}{2}$$

$$\cdots$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n =$$

E3. CUESTIONARIO: VARIABLE COMO RELACIÓN FUNCIONAL

Represente el siguiente problema mediante una expresión que los resuelva (introduciendo más de una variable); no resuelva:

42.- Entre dos hermanos compran una bicicleta en \$300. Encuentre la cantidad que aportó cada uno, si uno de ellos pagó \$12 más que el otro.

____

____

____

Considere la siguiente tabla:

X	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	6	1	-2	-3	-2	1	6

43.- ¿Para qué valor de X, alcanza Y el menor valor? _______________

44- ¿Qué pasa con el valor de Y cuando X varía (crece o decrece)? ___________

45.- ¿Cuál será la expresión general que represente la relación entre las variables X e Y? _____________________

46.- Si consideramos cada pareja de valores (X,Y) como las coordenadas de un punto y se representan gráficamente todas las parejas de valores que aparecen en la tabla, ¿cuál es la gráfica que se obtiene cuando unimos esos puntos por medio de una línea?

¿Cuáles de las siguientes expresiones son funciones de x y cuáles no lo son?

		Si	**No**
47.	$y = x$	________	________
48.	$y = x^2$	________	________
49.	$y^2 = x$	________	________
50.	$y = ax^2 +bx+c$	________	________

51.- Si la variación de y es inversamente proporcional a la de x, y si y=9 cuando x=4, ¿qué valor tiene y cuando x=18? _______________

52.- Exprese el área A de un círculo como una función de su circunferencia C: _________________

En las siguientes fórmulas señale la(s) constante(s) (si existen), la variable dependiente, y la(s) variable(s) independiente(s):

		Constantes	Variable Dependiente	Variable(s) Independiente(s)
53.	$A = l\,w$	__________	____________________	_____________________
54.	$t = d/r$.	__________	____________________	_____________________

55.- Expresar el área de un cuadrado de lado x en función de su diagonal D: _______________

56.- Si el lado de un cuadrado dobla su valor, el perímetro es multiplicado por ______.

57.- Si el radio de un círculo dobla su valor, la circunferencia es multiplicada por _______.

Muchos de los progresos alcanzados en el desarrollo de nuestra moderna civilización se han debido a la habilidad de científicos, ingenieros y otros para observar hechos e interpretarlos; esto es, para ver relaciones. En los ejemplos siguientes descubra la relación existente; después, determine el valor de x e y en cada serie:

58 4,16,18,20,x,__,y _______________________________________

59 a,3a,5a,x,__,__,y _______________________________________

60.- Haga un análisis de la gráfica y escriba la ecuación o fórmula para P en términos de A.

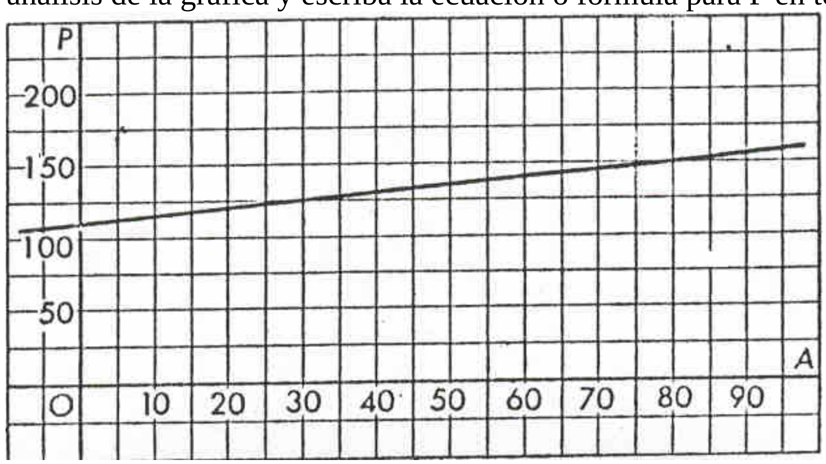


FIGURA 3

De las siguientes dos expresiones: n+2 y 2n:

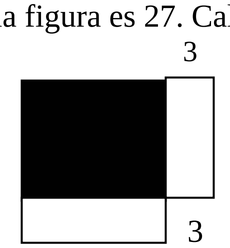
n	**n+2**	**2xn**

61.- ¿Cuál es más grande? __________________

62.- Justifique su respuesta. ____
____
____
____

Escriba una fórmula para resolver el siguiente problema:

63.- El área total de la figura es 27. Calcule el lado del cuadrado sombreado.



Dada la expresión $40 - 15x - 3y = 17y - 5x$:

64.- Para que el valor de **y** esté entre 1 y 5, ¿entre qué valores debe estar **x**? ___________

65.- Suponga que **x** toma valores entre –5 y 5, ¿para qué valor de **x** alcanza **y** su máximo valor? __________________.

ANEXO F

A C T I V I D A D E S

F1. CARACTERIZACIÓN DE LA VARIABLE COMO INCOGNITA

En álgebra a menudo usamos letras como a, b, x, y para representar números. Una letra que se usa para representar un número se llama variable. Las expresiones verbales pueden a menudo simbolizarse por breves expresiones algebraicas que contienen variables, como puede verse en los siguientes ejercicios:

Relacione las ecuaciones con los enunciados correspondientes, que representan sus traducciones:

a) 3x+15=21 b)3x-15=21 c) 12+2x=21.

1. La suma de tres veces un número y 15 es igual a 21. ______________
2 .La suma de 12 y dos veces un número es igual a 21. ______________

Expresar cada una de las proposiciones siguientes en una oración verbal:

3. 2y+3 = y+12 ____
4.4(x+5)=17 ____

Expresar en símbolos cada uno de los siguientes enunciados :

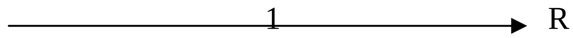
5. Si a 16 le restamos tres veces un número, el resultado es 7. _______________
6. El triple de un número aumentado en 2 es o mismo que el número aumentado en 8. _________________

Obsérvese que en estos ejemplos el concepto de variable utilizado como incógnita puede representarse en dos esquemas distintos: algebraico, como una expresión algebraica, y escrito, como un enunciado verbal que representa su traducción.

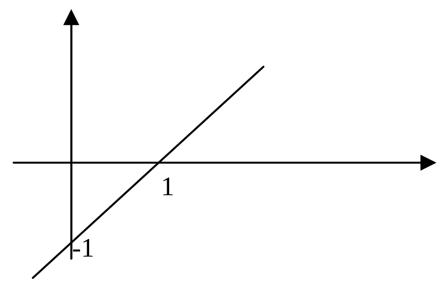
La utilización de letras en álgebra frecuentemente se hace con la finalidad de resumir bastante información en un enunciado simple. Para conocer cuál es la información dada en una proposición que involucra una variable, se necesita conocer el dominio de esta variable, es decir, el conjunto cuyos elementos consisten en aquellos números que una variable puede representar. Por ejemplo, en el último problema se tiene que el único valor que puede tomar la variable es x=1, es decir, 1 es el único número que puede representar la variable x. Con esto, tenemos a la variable x representada en otro esquema diferente: el numérico, donde se da la solución de la ecuación. Pero si la solución no es única se da origen a un nuevo esquema de representación: como un conjunto de números cuyos elementos corresponden a las soluciones de esta ecuación y que se conoce como conjunto solución. En este caso,

$$S = \{x \,/\, 3(x+2) = x+8\}.$$

Esta representación, también en esquema numérico, es una generalización del caso de solución única. Además, de acuerdo a este nuevo enfoque, si podemos referirnos sin problema al concepto de dominio de la variable, pudiéramos intentar obtener una interpretación geométrica de la situación que se presenta en este problema. Por ejemplo, ya que S es el conjunto de números reales que representan una solución a la expresión algebraica planteada, entonces podemos visualizar a S como un subconjunto de **R** e ilustrarlo en la recta real. En este caso, el único valor posible a tomar por la variable es 1, por lo que puede verse como sigue:



Por otro lado, si la expresión 3(x+2)=x+8 la sustituimos por la expresión y = 2x – 2, más aún, por la expresión y = x –1, nótese que las expresiones son equivalentes, ya que tienen la misma solución: x=1. La ventaja es que esta nueva expresión la podemos representar en el plano y entonces podemos obtener mucha más información sobre la expresión, de acuerdo al comportamiento geométrico que presente. En este mismo ejemplo, la gráfica correspondiente es:



En el momento que se relacione esta expresión con el enunciado de un problema verbal, de tal manera que su planteamiento se corresponda con ella, podemos interpretar distintas situaciones que se presentan en el problema de acuerdo a los datos geométricos.

Quienes inician en Álgebra pueden conceptualizar una incógnita específica cuando se les pide resolver problemas verbales muy simples en los cuales se pide explícitamente determinar su valor, y también son capaces de resolver ecuaciones en un paso. Pero cuando en las ecuaciones se involucran varias combinaciones de operaciones, números y términos literales, esto es, cuando se encuentran con ecuaciones que no pueden resolver en un paso, tienen grandes dificultades. Esto puede deberse a que no se refuerza la idea de incógnita específica como representación de un número particular que puede determinarse considerando las restricciones dadas en el problema.

Veamos los siguientes ejercicios:

Para la siguiente expresión, ¿cuántos valores puede tomar la letra (no resuelva)?

7. $\frac{x}{x^2 - 4}=3$ ____________________________

En la siguiente expresión escriba los valores que puede tomar la letra:

8. $\frac{10}{1 + x^2}=2$ ____________________________

Una de las aplicaciones más importantes del álgebra es la resolución de problemas. La notación algebraica, tan clara y concisa, facilita grandemente esa resolución.

Problema es toda cuestión en que se tienen que hallar una o más cantidades desconocidas, relacionadas con otras que se conocen. A éstos se les llama datos, y a la primera incógnita. Lo primero que debe hacerse para resolver un problema es representar la incógnita por medio de una de las últimas letras del alfabeto, generalmente la x, y luego expresar la relación que hay entre los datos y las incógnitas por medio de ecuaciones.

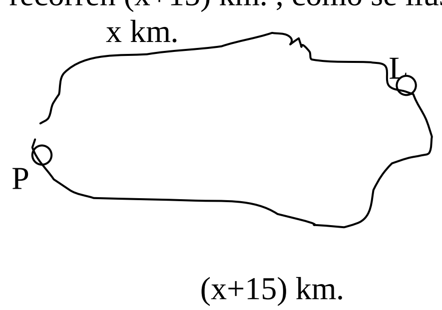
La estrategia a seguir al resolver problemas verbales o aplicados puede describirse en base a los siguientes pasos:

1. Esté seguro de entender la información dada en el problema y lo que se va a descubrir al resolverlo.
2. De ser posible, dibuje una ilustración que describa los elementos físicos del problema y después traduzca la información dada al lenguaje matemático, usando esta ilustración como guía. Generalmente, es esencial en este paso descubrir una o más ecuaciones (o desigualdades) que describan o satisfagan las condiciones dadas en el problema y que contienen variables (las incógnitas a describirse). Estos son los elementos claves del modelo matemático.
3. Aplique técnicas aritméticas y algebraicas a las ecuaciones resolviendo, de ser posible, para las incógnitas. Encuentre el conjunto solución de las ecuaciones.
4. Interprete correctamente los elementos del conjunto solución en términos de la información dada y la naturaleza del problema.

Ahora, practiquemos la estrategia de solución de problemas en los siguientes ejercicios:

9. Un pescador fue hasta un lago y luego regresó por otro camino que era 15 km. más largo que el de ida. Si en total recorrió 265 km., encuentre la distancia recorrida en cada camino.

Solución.- Primero interpretemos el problema e intentemos representarlo mediante una expresión (con una variable). Si tomamos x= distancia recorrida en cada camino (medida en km.), entonces tenemos que del punto P al punto L se recorren x km., y del punto L al punto P se recorren (x+15) km. , como se ilustra en la figura.



Se sabe además que en total se recorrieron 265 km., de donde podemos establecer la ecuación siguiente :

$$x + (x + 15) = 265.$$

Esto es, $2x + 15 = 265$

de donde $x = \dfrac{265 - 15}{2} = 125$

Esto significa que la distancia recorrida del punto P al punto L es de 125 km., y en el camino de regreso se recorrieron 140 km.

10. El numerador de cierta fracción es 5; el numerador de una segunda fracción es 3 unidades mayor que el doble del denominador de la primera. Si el denominador de la segunda fracción es 18 y las dos fracciones son iguales, ¿cuáles son las fracciones?

11. Un señor de 37 años tiene un hijo de 7¿dentro de cuántos años tendrá el padre el triple de la edad de su hijo?

En este trabajo se asume que la idea de variable como incógnita tiene las siguientes características básicas:

- Una incógnita representa un valor específico no arbitrario.
- El valor de una incógnita puede calcularse.
- Para calcular el valor de una incógnita deben considerarse las restricciones de los datos.

F2. CARACTERIZACIÓN DE LA VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL

Supóngase que nos interesan varias propiedades de los elementos de un conjunto; por ejemplo, sea R={1,2,3,4,5} y que nos interese la propiedad de ser menores que 4. Es más fácil escribir y hablar de esta cuestión mediante una proposición: "x es menor que 4" y pensemos que x es reemplazado, uno por uno, por cada uno de los elementos de R. De este modo, la letra x se llama variable, y el conjunto R, cuyos elementos la reemplazan se llama conjunto satisfactor.

Las variables son símbolos que ocupan un lugar en una expresión u oración que puede sustituirse por los nombres de cualquiera de los miembros de un conjunto específico. El tipo de símbolo más usual para una variable es una letra. Por ejemplo, en la expresión y+2, la letra y es una variable. En este caso, guarda un lugar en el que pueden sustituirse varios numerales. En la expresión $b-\pi = c+2$, las letras b y c son variables, mientras que π es una constante. Usualmente, el contexto dejará claro si una letra es una variable o una constante.

Ejercicios.-

1. Sea R = {1,2,3,4,5}. Escriba una proposición abierta para representar las proposiciones siguientes: 1 es un número impar, 2 es un número impar, 3 es un número impar, 4 es un número impar, 5 es un número impar.

Sea S={2,4,6,8,10}.

2. Escribir las seis proposiciones que representan la proposición abierta con variable: x<10.

---

3. Hallar el conjunto verdad para x<10.

Es más fácil y más claro expresar relaciones en el lenguaje del álgebra que en el que normalmente hablamos y escribimos, aunque claro está que no se puede hablar y pensar en álgebra sin conocer y entender los términos y expresiones involucradas.

El álgebra es un lenguaje simplificado; la habilidad para traducir expresiones del idioma común en lenguaje algebraico es fundamental. Se debe estar seguro de que se entiende lo que se lee, y que se dice en álgebra precisamente lo que se dice en idioma común.

Una expresión matemática es una colección de números, variables, símbolos para operaciones y símbolos de agrupamiento; las variables se usan para cambiar frases expresadas con palabras en expresiones algebraicas.

Ejercicios.-

Represente mediante una expresión algebraica los elementos de los siguientes conjuntos:

4. Los números naturales impares entre 10 y 30. __________________
5. Los números naturales entre 2 y 10 que son divisibles por 9. __________________

Expresar en símbolos cada uno de los siguientes enunciados :

6. El producto de un número natural por el siguiente. ________________________
7. El producto de 3 menos que el doble de un número y 3 más que el doble del mismo número. ________________________

La introducción de símbolos literales en una discusión matemática hace posible inmensos ahorros de esfuerzo mental. Nos permite construir otra expresión haciendo uso de las propiedades de la variable dada y desarrollar operaciones matemáticas en las expresiones. Esto nos lleva a dos aplicaciones muy importantes del álgebra: la formulación de enunciados generalizados y la determinación de valores específicos que satisfagan las condiciones prescritas en situaciones problemáticas. El concepto de expresión algebraica es fundamental en estas aplicaciones.

Ejercicio.-

Escriba la siguiente oración verbal como proposición y determine tres parejas de números tales que al sustituir N y k por ellos, la proposición resulte cierta:

12. Si un número natural N se divide por 4, el resultado es otro número natural k.

____

____

____

____

Para la siguiente expresión, ¿cuántos valores puede tomar la letra?

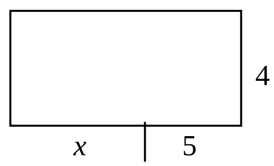
13. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ______________________________

La idea de usar letras para representar números es la primer gran idea en Álgebra. Aunque es una idea extremadamente simple, tiene una influencia tremenda en el mundo actual. Sin esta idea las matemáticas no habrían avanzado desde un estado primitivo de desarrollo, y sin la matemática moderna el mundo, como lo conocemos hoy en día, probablemente no existiría. Por ejemplo, automóviles, radio, aeroplanos, grandes puentes y otros desarrollos tecnológicos modernos que involucran muchas matemáticas, es imposible imaginar cómo se habrían construido sin matemáticas.

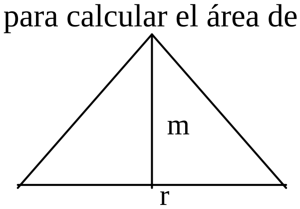
Con el uso de variables es posible expresar propiedades de los números en una forma muy simple; leyes básica de operación, como $x+y=y+x$ y $x+(y+z)=(x+y)+z$ pueden enunciarse sin el uso de las variables x,y,z, pero los enunciados resultantes pierden la claridad de estas identidades algebraicas. Por ejemplo, el enunciado “el producto de un número por la suma de otros dos números es igual a la suma del producto del primer número por el segundo con el producto del primer número por el tercero” se expresa más simple y claramente con la identidad $x\bullet(y+z)= (x\bullet y)+(x\bullet z)$. Leyes más complicadas serían casi imposibles de enunciar sin usar variables.

Ejercicios.-

14 El perímetro de una figura se calcula sumando la longitud de sus lados. Escriba la fórmula que expresa el perímetro de la siguiente figura:



15. Escriba una fórmula para calcular el área de la figura siguiente:



En álgebra frecuentemente se desea poder referirse a algún elemento de un conjunto de números sin tener que especificar su valor. Algunas veces esto puede ser sólo por conveniencia, pero cuando estamos trabajando con una cantidad cuyo valor o es desconocido o está cambiando, entonces es absolutamente necesario. En tales casos, se usan varias letras a manera de símbolos para representar cantidades numéricas. Así, s puede representar la distancia a la tierra de un objeto en caída libre, n puede representar el número de bacterias en un cultivo en un cierto tiempo, o x puede representar alguna cantidad medible en una situación problemática. Tales símbolos se denominan variables y su dominio es el conjunto de elementos por el que pretende sustituirse x.

Las letras, cuando se usan para representar números, se conocen como números generales. Los números aritméticos están definidos en valor, mientras que los números generales, o letras numéricas, pueden estar definidos en valor o no.

Las variables que se encuentran en cursos de álgebra superior usualmente se toman sobre sistemas de números; esto es, se intenta que estas variables sean válidas para números reales, números racionales o quizás sólo para enteros.

Ejercicios.-

Interprete lo que a continuación se pide:

16. Si $-x$ es un entero, ¿qué es x? ____

____

17. Si x e y son enteros, ¿qué representa $x+(-y)$? ____________________________

____

El álgebra es una extensión de la aritmética: desarrollamos las mismas cuatro operaciones fundamentales, pero generalmente con una combinación de números generales y aritméticos. Los negocios y la industria del mundo actual no existirían sin las matemáticas, y las matemáticas tendrían menos significado sin la idea de números generales.

Cuando los alumnos se enfrentan con expresiones algebraicas que involucran variables como números generales, tienen dificultades para considerarlas como representantes de un rango de valores y tienden a interpretarlas como números desconocidos. Un número general es más que una letra que represente un rango de valores: representa el objeto general de un método general.

En este estudio asumimos que una variable es usada como un número general cuando representa un número indeterminado involucrado en un método general.

Ejercicios.-

Observe las siguientes figuras y los números de cuadrados respectivos:

Figura	Número de cuadrados
□	1
□ □ □ □ □	3 + 2 = 5
□ □ □ □ □ □ □ □ □	5 + 4 = 9
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	7 + 6 = 13

18.- Dibuje la figura que sigue a las anteriores:

19.- En la figura que dibujó:

a) ¿Cuántos cuadrados hay en la línea horizontal? ____________
b) ¿Cuántos cuadrados hay en la línea vertical? ______________
c) ¿Cuántos cuadrados hay en total? _____________________

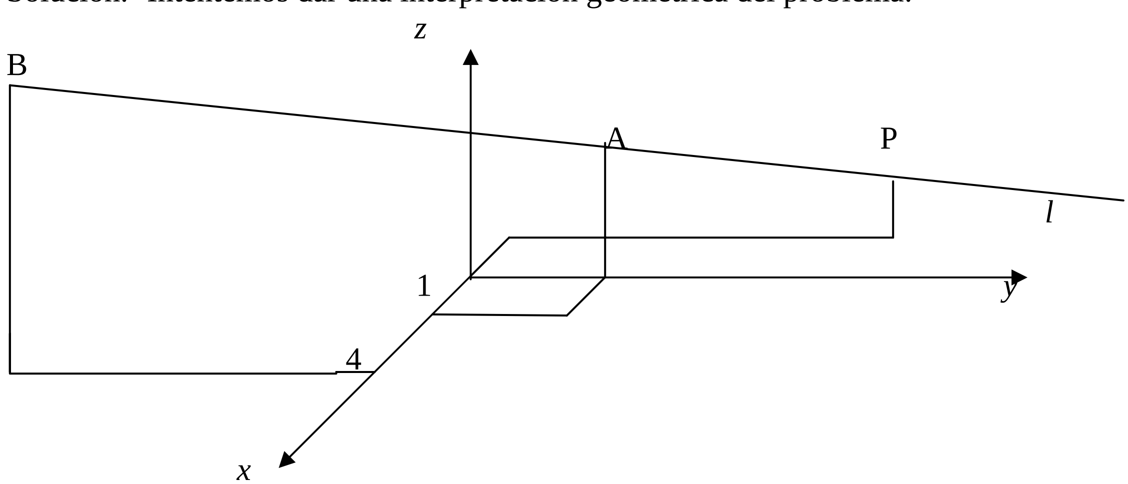
20.- Imagine que puede seguir dibujando hasta que tenga P cuadrados en la línea horizontal. En la figura resultante:

a) ¿Cuántos cuadrados hay en la línea horizontal? _____________
b) ¿Cuántos cuadrados hay en la línea vertical? _______________
c) ¿Cuántos cuadrados hay en total? _______________________

Veamos ahora un ejercicio geométrico donde empleemos los distintos esquemas de representación que hemos definido, además de caracterizar de distinta manera el concepto de variable:

21.- Determine las ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de la recta *l* en el espacio que pasa por los puntos A(1,2,3) y B(4,-7,6). Diga, además, si el punto P(-1,8,1) se encuentra en esta recta y determine otro punto en ella. Además, determine las restricciones del parámetro de manera que se describa el segmento de recta que va desde el punto (-1,8,1) al punto (4,-7,6).

Solución.- Intentemos dar una interpretación geométrica del problema:



Necesitamos determinar la "pendiente" de esta recta en $\mathbf{R}^3$**.** Como este concepto en el espacio no está definido, podemos conocer la posición de esta recta en el espacio definiendo a su **vector director**; tomemos al vector V= B-A=(2,-1,4)-(1,2,3)=(1,-3,1) y al punto P_0 (1,2,3). Si $t \in \mathbf{R}$, entonces tV representa a la recta generada por V, es decir, es la *ecuación vectorial* de la recta que tiene la misma dirección que V y que pasa por el origen: tV = t(1,-3,1) = (t, -3t, t)

Si ahora tomamos esta recta y la trasladamos a que pase por el punto P_0 , algebraicamente significa que tomemos al vector tV y le sumemos el vector P_0 para cada valor de t; nótese que los extremos son puntos de la recta *l* que pasa por el punto P_0 y tiene la dirección de V. Entonces la expresión $l = P_0 + tV$ es la *ecuación vectorial* de dicha recta: l = (1,2,3) + (t, -3t, t) = (1+t, 2-3t, 3+t).

Ahora bien, si (x,y,z) son todos los puntos de la recta *l*, V =(v_1, v_2, v_3) y $P_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces *l* = P_0 + tV se puede escribir como

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3),$$

esto es,

$$x = x_0 + tv_1 = 1+t$$
$$y = y_0 + tv_2 = 2-3t$$
$$z = z_0 + tv_3 = 3+t,$$

que son las <u>*ecuaciones paramétricas de l*</u>, de donde

$$t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

son las <u>*ecuaciones simétricas de l*</u> y que en este caso son:

$$t = \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}.$$

La ecuación vectorial de la recta es la correspondiente a la ecuación de punto-pendiente de la recta en el plano. Para verificar ahora si el punto P(-1,8,1)$\in l$ necesitamos comprobar si las coordenadas de este punto satisfacen las ecuaciones paramétricas de la recta; esto es:

$$-1 = 1 + t \Rightarrow t = -2$$
$$8 = 2 - 3t \Rightarrow t = -2$$
$$1 = 3 + t \Rightarrow t = -2$$

de donde concluimos que el punto P(-1,8,1) sí pertenece a la recta. En este momento, nótese que para la variable t necesita determinarse su valor, es decir, juega en este momento el papel de incógnita. Para determinar otro punto que pertenezca a esta recta, podemos darle valores arbitrarios a la variable t, digamos si t = 1, entonces x=2, y=-1, z=4 es decir, el punto (2,-1,4) también está sobre la recta. En este momento, la variable t juega el papel de parámetro o número general.

De este ejemplo podemos concluir que una variable puede utilizarse de diferentes formas en momentos distintos dentro de un mismo problema, es decir puede tener distintas caracterizaciones.

Cuando se diseñan actividades donde se utilice el concepto de variable como número general, es importante tomar en cuenta los siguientes puntos:

- la habilidad para generalizar está íntimamente relacionada con la habilidad para hacer distinciones y
- la habilidad para generalizar en Matemáticas aumenta gradualmente, desde el análisis de muchos ejemplos particulares para identificar sus aspectos conocidos y generales, hasta la habilidad para ir desde un ejemplo particular hasta lo que es desconocido y general.

La idea de números generales, o números con letras, es una de las ideas fundamentales en Matemáticas. Cuando alcance su completo significado, habrá dado el primer gran paso en el entendimiento y uso del Álgebra.

F3. CARACTERIZACIÓN DE LA VARIABLE COMO RELACIÓN FUNCIONAL

Si observamos, por ejemplo, la expresión $3x^2$ -2, se ve inmediatamente que su valor numérico depende del que se asigna a la variable x. En cambio, los valores de x no han dependido de ninguna otra cantidad, por lo cual se dice que x es una variable independiente. Por el contrario, los diversos valores de la expresión $3x^2 - 2$ se han debido a las variaciones de x. Esta expresión cuyos valores dependen de x, se llama variable dependiente. La variable dependiente se denomina función. Así, puede darse la siguiente definición:

Función es una cantidad variable ligada con otra, llamada variable independiente, tal que a toda variación de ésta corresponda una variación de la primera.

Una constante es un número que nunca cambia, o que no lo hace en el transcurso de la discusión de un problema particular. Una variable es un número que cambia arbitrariamente o de acuerdo a alguna ley. El número que expresa la velocidad de un automóvil que está ganando terreno es una variable, la velocidad de un cuerpo en caída libre cambia de instante en instante y se expresa por una variable. De hecho, las medidas de casi todas las cosas materiales varían en condiciones cambiantes: la longitud de un riel varía con la temperatura; una roca expuesta al ambiente pierde peso.

Hay dos tipos de constantes: absolutas y parámetros. Una constante absoluta es aquella que en todos los problemas tiene siempre el mismo valor, por ejemplo, 2 y . Un parámetro es una constante que conserva el mismo valor en un problema particular o situación determinada, pero que puede tener un valor diferente en otro problema o situación, por ejemplo, en la expresión ax+b, x puede tomar diferentes valores, pero a y b son constantes para cada caso; luego, a, b son parámetros.

El estudio de la forma como varían las funciones con sus variables es una parte importante de la matemática. Provee a matemáticos, científicos e ingenieros de un medio poderoso para resolver muchos de sus problemas más complicados y difíciles.

Ejercicios.-

1.- Una pista está dividida en 16 partes de igual longitud. Cada parte mide X kilómetros. Escriba una fórmula para expresar la longitud total de la pista.

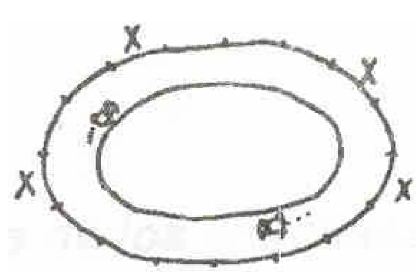


FIGURA 2

2.- Escriba una fórmula para expresar cuántos kilómetros se moverá un auto si viaja tres veces alrededor de la pista.

Cuando se introduce de manera formal la idea de función, definida por una regla de correspondencia entre dos conjuntos, aún los estudiantes que ya cuentan con cierta experiencia algebraica tienen dificultades para entenderla, al igual que sus nociones fundamentales.

Las variables que se encuentran en cursos de álgebra superior usualmente se toman sobre sistemas de números; esto es, se intenta que estas variables sean válidas para números reales, números racionales o quizás sólo para enteros. Sin embargo, los símbolos variables a menudo se usan en otros contextos. Por ejemplo, los símbolos *l* y *m* tienen exactamente un punto en común: son variables y representan líneas arbitrarias en un plano. En todo caso, una variable es un símbolo que representa un miembro no especificado de alguna colección definida de objetos, como números, puntos o líneas.

Ejercicios.-

¿Cuáles de las siguientes expresiones son funciones de x y cuáles no lo son?

		Si	No
3	$y^2 = x$	________	________
4	$y = ax^2 + bx + c$	________	________

Las notaciones usadas para las variables en literatura matemática a menudo rompen la cabeza de los estudiantes. En los casos más simples, las letras del alfabeto se usan como símbolos variables. Sin embargo, algunos enunciados matemáticos involucran un número muy grande de variables.

Los pasos a seguir al resolver problemas verbales o aplicados son:

1. Lea el problema varias veces para analizar los hechos dados. ¿Qué información se da? ¿Qué es lo que se pregunta? Ocasionalmente, una gráfica o diagrama ayudará a visualizar los hechos del problema.
2. Seleccione una variable para indicar una cantidad que debe encontrarse, y escriba una oración que diga lo que la variable representa. Escriba todas las otras cantidades mencionadas en el problema como expresiones que involucran esta única variable.
3. Organice los datos y encuentre una forma para expresar una cantidad en dos diferentes formas.
4. Escriba una ecuación mostrando que las dos cantidades del paso 3 son iguales.
5. Resuelva la ecuación.
6. Compruebe la respuesta en términos del problema.

Quienes inician en álgebra tienen problemas para entender la idea de cambio; para favorecer a los alumnos en este aspecto, es conveniente ayudarlos a entender esta idea. Por lo tanto, es conveniente no introducir la idea de función de una manera formal, sino diseñar actividades donde los alumnos deban trabajar con ella y sus nociones fundamentales basados en la noción de cambio y utilizando su respaldo aritmético, principalmente su experiencia con enteros y su orden.

Ejercicios.-

5 Complete la siguiente tabla:

X	Y
5	9
	12
3.5	7.5
	9.5

6. Escriba la regla general que relaciona a la variable X con la variable Y.

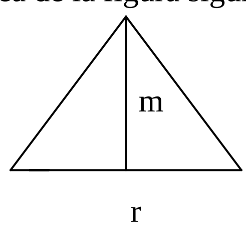
____

____

Suponemos que las variables están en una relación funcional cuando representan números cuyos valores se mueven dentro de un rango de valores unidos uno con el otro por una relación.

Ejercicios.-

7. Escriba una fórmula para calcular el área de la figura siguiente:



La noción dinámica de una relación funcional está presente desde hace mucho tiempo, antes de que se introdujera cualquier expresión analítica que la representara y consiste en la concepción de una cantidad que depende de otra cantidad cambiante.

Ejercicios.-

8.- Si el radio de un círculo dobla su valor, la circunferencia es multiplicada por _______.

Observe los datos siguientes:

X	Y
0	0
10	100
-15	225
25	625
20	400
-10	100
15	225
-20	400

9. Determine qué pasa con el valor de Y cuando el valor de X va creciendo.

____

____

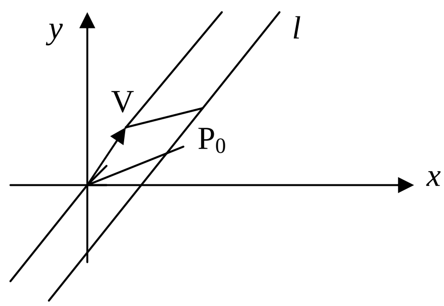
10. Escriba la regla general que relaciona a la variable X con la variable Y.

11. Si queremos que el valor de Y esté entre 256 y 10000, ¿entre qué valores tiene que estar X?

12. Si X toma valores entre –2 y 26, ¿entre qué valores estará Y?

En geometría plana, una forma de determinar la ecuación de las rectas es mediante la ecuación de punto-pendiente, pero podemos también darle un enfoque vectorial utilizando operaciones definidas entre vectores e interpretando su significado geométrico. Si $V=(v_1,v_2)$ es un vector en el plano y $t \in R$, entonces tV representa a la recta generada por V, es decir, es la *ecuación vectorial* de la recta en la dirección de V que pasa por el origen.

Si para cada valor de t sumamos al vector tV el vector P_0 , es decir, obtenemos los vectores $tV + P_0$ nótese que los extremos son puntos de la recta *l* que pasa por el punto P_0 y tiene la dirección del vector V. Entonces la expresión $l = P_0 + tV$ es la *ecuación vectorial* de dicha recta.



Si X (x,y) son todos los puntos de la recta *l*, $V = (v_1,v_2)$ y $P_0\,(x_0,y_0)$, entonces $l = P_0 + tV$ se puede escribir como

$$(x,y) = (x_0,y_0) + t\,(v_1,v_2) = (\, x_0 + tv_1,\ y_0 + tv_2),$$

esto es

$$x = x_0 + tv_1$$
$$y = y_0 + tv_2\ ,$$

que son las *ecuaciones paramétricas de l* , de donde $t = \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}$, que son las *ecuaciones paramétricas de l*.

De aquí:

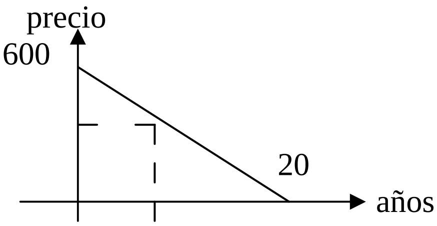
$$y - y_0 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0) = m\,(x - x_0),$$

donde $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ es la pendiente del vector V y, por lo tanto, de la recta. Dicha expresión es la forma de punto-pendiente de la ecuación de la recta.

Resolvamos ahora el ejercicios siguiente, donde hacemos uso de distintas caracterizaciones del concepto de variable en los diferentes esquemas de representación estudiados.

13. En 1968 una compañía compró una propiedad con valor de$750: el valor de la tierra era de $150 y el de la construcción de $600. La construcción se depreció de manera lineal sobre 20 años, ¿cuál era el valor de la construcción en 1976?

Solución.- Los datos proporcionados en el problema permiten establecer una relación precio-año de manera que 1978, que es el año de la compra, es el momento de partida y 20 años después la construcción había perdido todo valor, siguiendo una depreciación lineal. Podemos tener una visión geométrica de este problema, estableciendo un sistema coordenado como sigue:



Tenemos dos puntos, a saber: (0,600) y (20,0), con los cuales podemos determinar la ecuación de la recta que pasa por ellos, utilizando la ecuación general de la recta:

$$y = y_0 + m\,(x - x_0).$$

Necesitamos encontrar el valor de m, que representa la depreciación del precio de la construcción, que debe, por lo tanto, ser negativa: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 600}{20 - 0} = -30.$

Esto significa que cada año el precio de la construcción disminuyó $30. De aquí, si $(x_0, y_0) = (20,0)$, entonces sustituyendo en la ecuación general de la recta tenemos:

$$y = 0 - 30\,(x-20) = -30x + 600.$$

De donde, si x = 8 (es decir, 1976 = 8 años después) tenemos:

$$y = -30(8)+600 = -240 + 600 = \$360.$$

Nótese que en esta relación establecida, el precio de la construcción va disminuyendo a medida que pasa el tiempo; en particular, al resolver el problema la variable independiente x juega el papel de parámetro (número general). Así, podemos determinar el precio que tendrá la construcción en cualquier año, a partir de su compra hasta que pierda totalmente su valor.

Al menos dos aspectos caracterizan una variable en relación funcional:

- un aspecto estático: cuando se considera la correspondencia puntual /estática entre dos cantidades;
- un aspecto dinámico: cuando dos cantidades se ven móviles y se percibe su relación global.