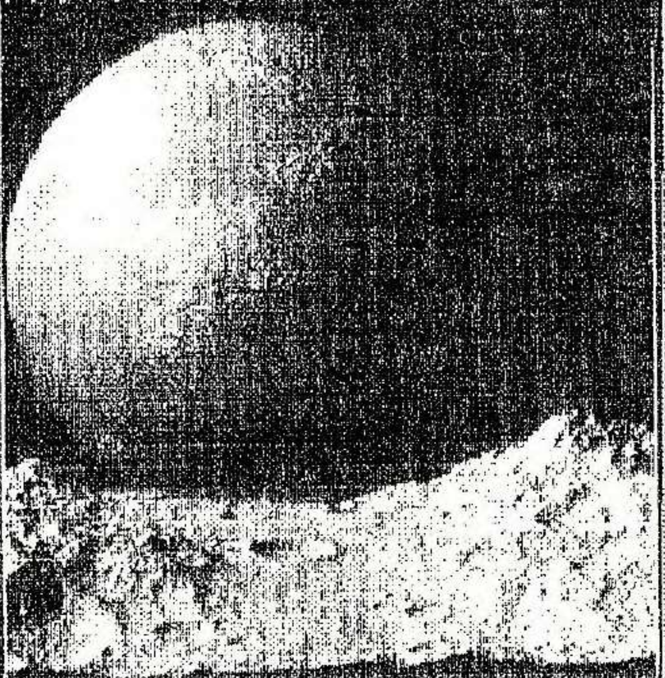
El concepto de función en el contexto de la matemática escolar no especializada



Tesis [illegible] para obtener el grado de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa

presenta

[illegible]

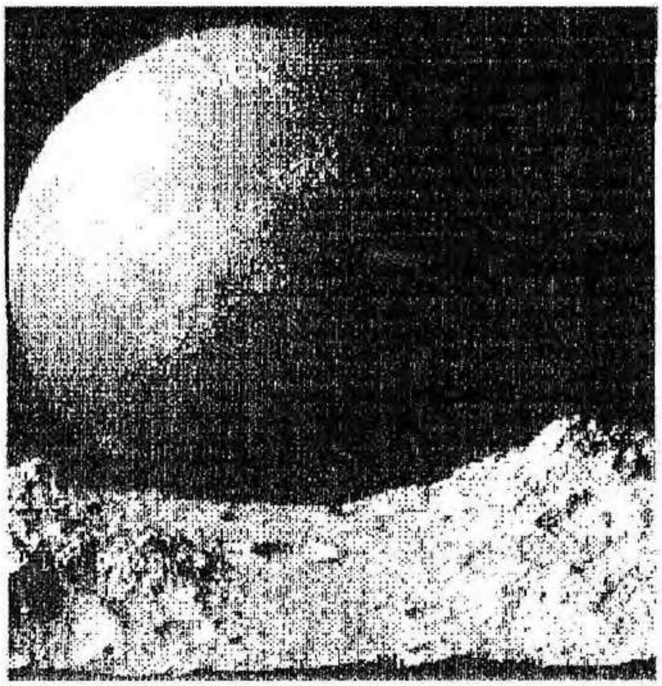
Universidad de Sonora

Departamento de Matemáticas

T7
MME
Ejem. # 1

Registro 185
Ejemplar: único

El concepto de función en el contexto de la matemática escolar no especializada



Tesis que para obtener el grado de Maestría
en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa
presenta

Víctor M. Hernández L.

2 DIC 1996

Universidad de Sonora

Departamento de Matemáticas

Tabla de contenidos

Introducción

Tesis

En este trabajo, se abordan dos tesis;

el concepto de función está subutilizado en el contexto de la matemática escolar en tanto se desdeñan extensiones del concepto pertinentes y factibles en los niveles educativos por la vía de recursos de representación complementarios al sintáctico lógico formal y la significación agregada por la articulación de éstos,

por otro lado,

la postulación del concepto de función como un substrato conceptual de la matemática escolar, lo que permite potenciar la formulación de nuevas estrategias operativas en el desarrollo del currículo matemático.

Génesis de la idea

La idea que se sustenta en este trabajo, tuvo su génesis en el contexto del trabajo docente y la necesidad de motivar a los estudiantes de un curso de cálculo diferencial e integral dirigido a estudiantes de la licenciatura en informática.

Este contexto resultó particularmente fecundo (de la manera que comento más extensamente en el Marco Teórico) en términos de que, por un lado, los lenguajes de programación son uno de los principales objetos de estudio de los estudiantes de ésta licenciatura y, por otro, soy un interesado de los correlatos entre las disciplinas lingüística y matemática.

Justificación

Creo que no hay duda en que uno de los objetivos centrales del trabajo docente en el currículo matemático, es el promover en los estudiantes la adquisición de ciertos niveles de pertinencia y competencia en el uso de los recursos matemáticos de representación en un sentido amplio.

Los recursos de representación de las disciplinas, en general acuden al código que desde el punto de vista de ellas mismas y de sus necesidades de interacción con otras, les resultan más adecuados para ilustrar la faceta de la realidad en la que, por su propia naturaleza, está interesada.

La matemática no está excluida del comentario en el parágrafo anterior.

¿Qué es lo que potencia las competencias en el uso de un código de representación?, ¿Cómo surgen las interpretaciones?, ¿Cuándo se afirma que alguien es competente en el uso de algún código?, ¿Cómo incrementar la competencia en el uso de algún código?, ¿Cómo se relaciona la competencia en el uso del código con la resolución de problemas?, ¿Qué es un problema?, ante la diversidad de formas y manifestaciones de los códigos existentes: ¿existe algún código que a manera de substrato me permita, apoyándome en él, moverme más conciente y deliberadamente en un código arbitrario?, al interior de la matemática: ¿existe algún código que a manera de substrato me permita, apoyándome en él, conducirme de una manera más competente?

Las anteriores, son algunas de las preguntas a cuya respuesta intenté acercarme en todas las dimensiones del trabajo, por lo que en él, habrán de encontrarse preguntas y, en todo caso, mi versión particular de cómo asomarse al ámbito de su dominio.

Organización

Para dar sustento a las tesis que se presentan, el material expuesto ha sido organizado en cuatro partes:

En la primera, hago una reseña del sistema general y temporal de creencias a manera de marco teórico que, a través de mi interacción virtual con algunos personajes académicos como Vygotsky L. S. , Piaget J., Hofstadter D. R., Radelli B., Wiener N., Bertalanffy L. V., Popper K. R., *Cassirer E., Habermas J., Huneeus F., Maturana H., Verhulst P. F., May R., Galileo G., Mandelbrot B., Fregoso A., Lomen D., Lovelock D., hemos venido conformando.*

***En la segunda parte**, hago una reseña -no exhaustiva- de las incidencias del concepto de función en los diferentes niveles educativos (básico, medio básico, medio superior y superior). Se explicita y se apuntala -por la vía del análisis de las incidencias del concepto- la(s) tesis que se sustenta.*

***La tercera parte**, está constituida por la reseña de algunas experiencias docentes desarrolladas durante aproximadamente 12 años, cuya intención es la de ilustrar -con ejemplos de diversos apartados de la matemática- la potenciación de las posturas didácticas a partir del concepto de función en calidad de substrato independiente del código. De esta manera, se abordan situaciones de temáticas tan aparentemente disímbolas como regresión, desigualdades, análisis numérico, sistemas dinámicos, probabilidad y cálculo diferencial. En adición a esto, se intenta dejar un registro sobre el cómo, la tecnología de cómputo puede cambiar la forma en la que enseñamos matemáticas propiciada por los cambios cualitativos que se pueden generar por esta vía.*

***En la cuarta parte**, he incluido las referencias complementarias a manera de Anexos (1,2,3) que, sin ser por ello menos importantes, no han sido integradas a las primeras tres por no desviar la atención del lector.*

vhernan@gauss.mat.uson.mx

Descripción

Se reconoce actualmente como una postura generalizada el que la resolución de problemas juega un papel fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, este reconocimiento no asegura el que las prácticas que de aquí se desprenden estén apoyadas en una y la misma concepción.

De esta manera, la función concreta que se asigne a la resolución de problemas en el aula, depende por una parte, del modelo epistemológico implícito en la noción de "problema" y, por otra, de lo que se crea que significa "enseñar" y "aprender matemáticas".

Sin embargo, para los efectos didácticos y de aprendizaje, no basta el sólo tener una versión psicogenética de la noción de "problema", puesto que lo que hay que hacer en ambos casos no es conceptuar la acción, sino concretarla.

De esta manera en el Marco Teórico del trabajo se aborda tanto una versión psicogenética de la noción de problema como una versión operativa del mismo.

En esta última se advierte al modelo simbólico en su papel de vínculo bidireccional de tránsito entre el estado inicial de la situación problema y el estadio que le significa a quien lo resuelve, la solución.

En este contexto, el concepto de función en calidad de instrumento modélico adquiere un papel central, y la articulación de sus representaciones numérica, gráfica y analítica cobran el papel de bujías que potencian la posibilidad de lograr nuevos arreglos sintácticos significativos, agregando con ello nuevos significados a los significados de los símbolos.

Se da una semblanza crítica y propositiva -aunque difícilmente exhaustiva- de las incidencias del concepto de función en los diferentes niveles educativos.

Finalmente, se reseñan algunas experiencias que a manera de ejemplos tratan de ilustrar la postura que se sustenta en la tesis.

Objetivos

En una primera parte del trabajo, se intenta mostrar en general, que todos los niveles educativos dejan, por decirlo así, "la mesa servida" pues es justo cuando el concepto de función permitiría organizar los conceptos relacionados con los problemas y, en todo caso realizar extensiones de éstos, cuando el abordaje de los contenidos del currículo parece detenerse.

En la segunda parte, se intenta establecer que de la coordinación de las diversas representaciones del concepto de función en su calidad de substrato conceptual, es posible lograr nuevas articulaciones significativas y potenciar estrategias operativas para el desarrollo del currículo escolar.

Alcances y limitaciones

Los alcances de una idea están en función de todo lo que dicha idea le permita al usuario hacer.

Me atrevo a sugerir que las ideas aquí plasmadas tienen la suficiente potencia para permear y potenciar el trabajo docente en educación matemática.

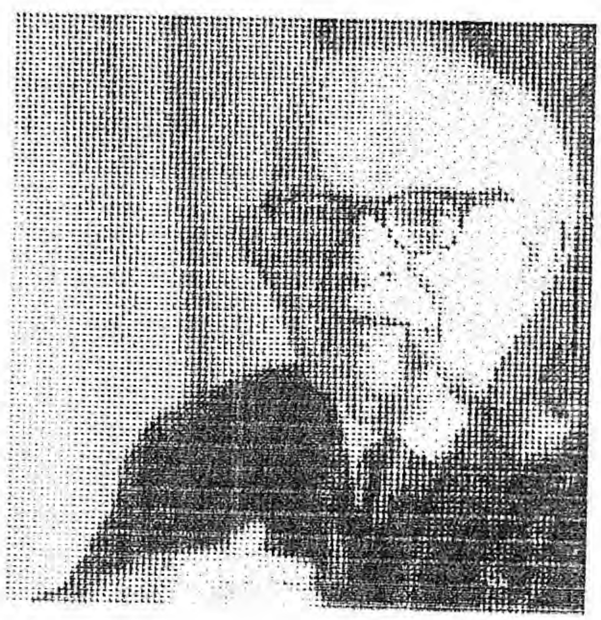
En cuanto a las limitaciones, debo decir, que este trabajo no es ni con mucho una monografía exhaustiva sobre la temática que en él se aborda, sino más bien un ensayo documentado -en la medida de lo posible- con experiencias y escritos tanto personales como ajenos.

Habrá que reconocer el hecho de que no se puede ser especialista sobre todas las cosas de las que se permite uno hablar, y aún siéndolo siempre existe la posibilidad de equivocarse, en todo caso he intentado, acompañar mis creencias con las creencias de otros, es decir, procurar cierta objetividad en términos de una cosubjetividad.

Por otro lado, no se puede perder de vista que tanto la matemática como la educación son labores ya de por sí complejas y que esta tesis versa sobre asuntos que abordan su conjunción, es decir sobre asuntos de matemática educativa. De esta manera resulta natural la confluencia conceptual en el trabajo de distintas vertientes conceptuales que tienen que ver con cuestiones sociológicas, psicológicas, epistemológicas, sistémicas, cibernéticas, lingüísticas, matemáticas, lógicas, filosóficas, etc..

Es así que la necesidad de confluencia de aportaciones disciplinares diversas lejos de proponer una limitación se convierte en un notabilísimo atributo de la matemática educativa y por ello en un campo fecundo para el trabajo de alto nivel intelectual.

L. S. Vygotsky



J. Piaget

Capítulo 1

"Any attempt to test the truth of what is known must itself be an act of knowing and hence subjective. Any knowledge of ``objective truth,'' therefore, is impossible. Constructivism cuts the Gordian knot by separating epistemology from ontology and arguing that a theory of knowledge should deal with the fit of knowledge to experience, not the match between knowledge and reality. The only reality we can know is the reality of our experience."

-- Kilpatrick, Jeremy. 1987.

Marco teórico

A Modo de Introducción

En este apartado comparto una serie de reflexiones sobre temas diversos, los que espero estén suficientemente interconectados para resultar inteligibles.

No tengo la pretensión de enunciar verdades para nadie. Lo escrito aquí constituye sólo el (mi) sistema temporal de creencias, desde el que intento apoyar un trabajo.

Reconozco el peligro de adentrarme en terrenos que oficialmente pertenecen a los lingüistas, a los cognitivistas y a los filósofos. Sin embargo, suele ocurrir que al incursionar en campos en donde no se es "especialista" resulta enriquecedor y fecundo, precisamente porque la falta de pre-juicios o de rutinas permiten ver las cosas de otro modo.

Valga lo anterior para justificarme, sobre todo porque voy a recurrir a la experiencia de cada cual en el sentido del epígrafe.

El ``Problema´´ y su Ámbito de Generación

Desde hace algún tiempo he venido admirando la forma en la que los humanos usamos nuestro lenguaje y, en particular, estoy interesado en la utilidad que la observación detenida de este uso podría reportar para los asuntos de educación en general y en particular para la educación matemática.

Uno de los aspectos que más me ha impresionado en éste admirar, es el haberme percatado de que, al parecer, cada quien posee un *Universo Semántico* o de significaciones particular; como producto, por un lado exógeno, esto es, del trabajo de interacción perceptual del individuo sobre su entorno; y por otro, endógeno, producto de las articulaciones conceptuales desarrolladas por él.

Algunas características advertidas del Universo Semántico al que hago referencia son:

- es desde luego, personal e intransferible, como lo es el acto de ``darse cuenta´´

- en él, están contenidos los correlatos cósmico-individuales que le permiten e impelen a relacionarse con su entorno cercano (íntimo) y su entorno mediato o aún lejano
- es también dinámico, en cuanto histórico y/o diacrónico; como estático en cuanto social y/o sincrónico
- éste se formaliza (sígnica o conceptualmente) sólo en tanto las exigencias de comunicación con otros individuos o consigo mismo y en cuanto la necesidad de acercamiento a una precisión descriptiva y argumentativa consensual se hacen patentes, pues hacerlo antes o en otro contexto se traduce en una pérdida de significatividad cognitiva, esto es; se puede salir del paso pero no se aprende

Por otro lado, hay en este universo semántico elementos y categorías que acaso jamás sean formalizados, no obstante jugar un papel en la interpretación; es decir en él están contenidos tanto los elementos racionales como los no racionales esto es razón e intuición; constituyentes en todo caso complementarios para la conjunción animal-racional llamada hombre, y los que eventualmente permiten al individuo la construcción del sentido de las representaciones y su significación.

Desde esta perspectiva el cosmos es desde luego, sólo una interpretación posible, más o menos co-subjetiva y más o menos arbitraria o personal e incomunicable en su totalidad -aunque no por ello menos influyente- en cuanto elemento o categoría no significada.

Es en este Universo en el que se dá la creación sígnica y conceptual, es también el ámbito en el que se da el evento -yo diría maravilloso- del nombrar, como satisfactor a la necesidad sincrónica (social) de comunicar, de manera más o menos precisa, la diferenciación advertida sobre algún aspecto del entorno.

Es también en este Universo en el que se rompe la cosificación lograda por los nombres a través de su praxis, de tal manera que como producto de estas rupturas hacen emergencia extensiones conceptuales y/o reconceptualizaciones de lo nombrado.

Es desde este Universo Semántico, que el individuo decide comprometer o no, el ejercicio de sus potencias físicas y/o intelectuales para el desarrollo de alguna actividad.

En mi opinión, la fuerza, el ímpetu, la convicción interna o nivel de compromiso con el que un individuo empeña sus potencias en alguna acción (concreta o conceptual) está en correlato -no único- con la ``distancia'' a la que ese individuo percibe el objeto (físico o conceptual) de su acción.

El patrón de comparación que permite al individuo la valoración subjetiva (en ocasiones co-subjetiva) de esta *distancia epistémica* está constituido de manera natural por su propio universo semántico. (ver *Fig. 1*)

Fig. 1

Desde esta óptica, propongo que un individuo *I* (ver *Fig. 2*) descartará muy frecuentemente como objetos de compromiso de acción física y/o epistémica tanto al Objeto 1 como al Objeto 2, al primero por considerarlo demasiado cercano o propio a su universo de significaciones (desdeñándolo) y al segundo como demasiado lejano o ajeno al mismo (abandonándolo).

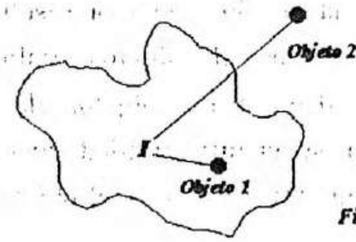


Fig 2

Sugiero como más probable el que un individuo decida comprometer sus potencias físicas o intelectuales, en el caso en que la ``distancia''a la que él percibe los objetos sea tal que ubique al objeto en la ``*frontera*'' de su universo semántico.

Afirmo en consecuencia que la ubicuidad del Objeto 3 (Ver *Fig. 3*) haría de él un candidato más probable (que los anteriores dos) a constituirse en un detonador de la potencia epistémica del individuo *I* que así lo percibe.

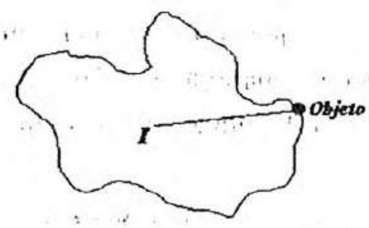


Fig 3

Son entonces la clase de objetos o situaciones que ubicadas en la frontera del universo semántico de un individuo *I*, a las que llamaré *Situaciones Problema*, considerando su ascenso al estadio de *Problema* sólo en el caso en que el individuo *I* decida internamente, comprometer su voluntad de acción (física y/o mental) para acercarse a ese objetivo.

Es en este sentido que eventualmente las Situaciones Problema emergen en problemas y se consituyen en lo que denomino un *Detonador Epistémico*.

En este contexto, la refutación resulta de ayuda invaluable para crear una tercera clase de objetos: Valiéndose de la refutación del sentido que desdeña a los objetos de la clase 1, es posible revitalizarlos en su significatividad, incrementando por esta vía la distancia (dificultad?) epistémica al objeto.

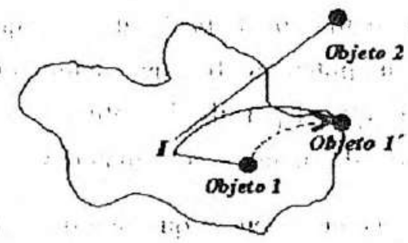


Fig 4

Por otro lado, lo que he llamado ``frontera del universo semántico´´, aparece en los diagramas anteriores como un linea bien definida sólo para efectos de simplificación modélica inicial, pues en realidad creo que ésta es más bien difusa, amorfa y de una caracterización compleja (Ver *Fig. 5*); lo que en todo caso propone las limitaciones y dificultades del modelo[1].

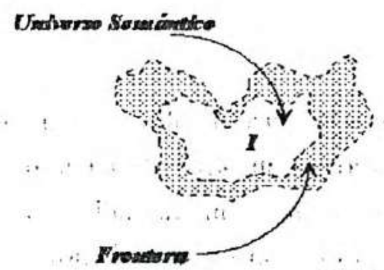


Fig. 5

Una caracterización de esta frontera, está consignada en la obra de Vygotsky con el nombre de ``zona de desarrollo próximo´´, como sigue:

[1] Vale aclarar que el concepto de Universo Semántico y el modelo geométrico de su frontera no son responsabilidad de Vygostsky, aunque la influencia de éste es evidente.

<< ... It is the distance between the actual development level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in colaboration with more capable peers >>[2].

En adición a esta conceptuación, es conveniente comentar que no es suficiente (aunque si necesario al parecer) que las situaciones planteadas sean percibidas en la frontera del universo semántico para que éstas sean introspectivamente consideradas como problemas por el individuo que así las percibe, faltaría ver si le da la gana atenderlas.

Es decir, el hecho de que un individuo perciba una situación a la distancia precisa para ser considerada como un detonador epistémico (problema) de sus capacidades, no asegura que éste explote en esfuerzos (para resolverlo) comprometiendo su voluntad en ello. Pues como es sabido, a pesar de que el detonador es el que inicia la explosión, ésta no se asegura cuando la pólvora está mojada.

Cerrando la postura, diré que a pesar de que se ubique a un individuo ante situaciones que a su propio juicio y en el sentido antes descrito éste pudiera considerarlas como problemas, no se asegura el que avance en la dirección de intento de solución.

Aun más; los problemas como detonador epistémico en todo caso, están en la posibilidad causal de comprometer la voluntad humana en la dirección que éstos proponen, pero no de determinarla, ni en su concreción ni en los resultados de la acción.

Por otro lado, el asunto de la motivación se me antoja demasiado espinoso, sin embargo parece ineludible comentar algo. Sólo diré que tiene lugar en el universo semántico del individuo, no surge

[2] Vygotsky, L.S. MIND IN SOCIETY. The development of higher Psychological processes. Edited by: Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, Ellen Souberman. Harvard University Press. Cambridge Massachusetts. London England. 1978. P. 86.

necesariamente como producto de una situación problemática propuesta desde el exterior, puede ser positiva o negativa, puede generar acción visible o bien un no-actuar como una forma de acción muy refinada -cuando se es conciente de ello-, etc., y en todo caso, los resultados de la motivación individual no están determinados.

Con todo y los problemas de determinación que ofrece la conceptuación expuesta en los parágrafos anteriores, creo que este acercamiento ofrece notables perspectivas prácticas para la investigación y/o el desarrollo de estrategias en la creación de espacios que propicien el desarrollo epistémico de un individuo.

Las disciplinas, la lengua materna y las matemáticas

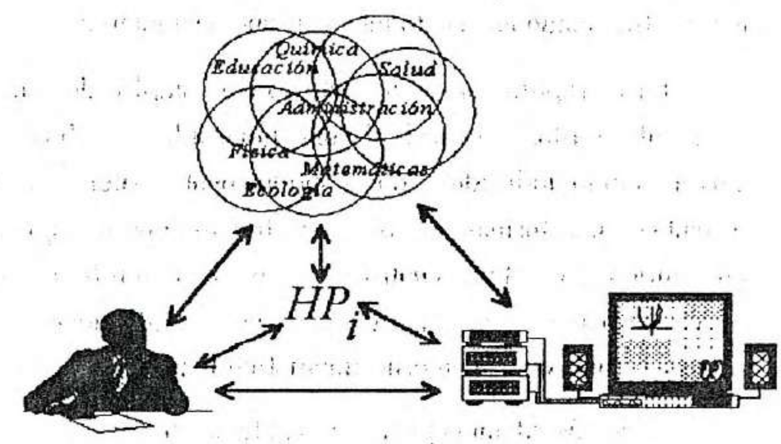
La idea expuesta en este apartado, tuvo su inspiración en el seno de un curso de cálculo diferencial e integral dirigido a estudiantes de la licenciatura en informática.

Al menos en aquella época (hace unos ocho años) y en aquella generación de estudiantes, era sensible que la mayoría de ellos no estaban muy interesados en la matemática y mi problema como profesor era interesarlos, así que tomé como punto de partida para ello, el realizar una conceptualización general de lo que desde mi punto de vista constituye el quehacer cotidiano de un profesional de la informática.

En el estudio de esta disciplina -les decía-, habrán de hacerse de varios lenguajes y/o herramientas de programación (Cobol, RPG, C, Lisp, C++,... etc., denotadas genéricamente por HP_i).

Cada una de las herramientas de programación (HP_i), tiene definida una *sintaxis* en cuanto conjunto de símbolos y reglas para generar combinaciones válidas de ellos, a las que habrá que hacer una asignación de significados constituyéndose de esta manera una *semántica*, todo esto, como producto de los modos de uso y/o aplicaciones de las herramientas de programación o lenguajes, constituyéndose así una *pragmática*.

Por otro lado, como parte de su ejercicio profesional les habrán de ser propuestas situaciones problema provenientes de las más diversas disciplinas o contextos (educación, administración, física, química, matemáticas, salud, ecología, política, etc) y su problema será el elegir su mejor herramienta de programación para construir un vínculo bidireccional (software interfase reversible) entre las condiciones de la situación problema original y la computadora.



Nótese que la situación problema original, al estar ubicada en algún campo disciplinar o contexto de procedencia, está permeada por la "jerga" lingüística que le es propia.

De esta manera, el ejercicio del profesional de la informática tiene mucho que ver con el conocimiento profundo (hasta un nivel funcional competente) de los aspectos pragmático, semántico y sintáctico de un buen número de herramientas de programación y la habilidad de identificar las que se adecuen al caso particular de una situación problema dada.

Así pues, el problema y la solución visto desde aquí, parece ser el de construirse una gran habilidad para investigar, usar, adaptar y operar con los aspectos pragmático, semántico y sintáctico de las herramientas de programación y de las correspondientes al campo de procedencia del problema.

En este contexto, la matemática pudo ser enfocada significativamente para los mencionados estudiantes, al enfatizar que ésta resulta ser el lenguaje natural para expresar las relaciones cuantitativas esenciales de una situación problema, de ahí que ellos (los estudiantes de informática) podrían y deberían considerar a la matemática como un asunto muy cercano a su interés.

La extrapolación a un contexto más amplio de esta primera idea me resultó bastante natural, al conceptuar a los estudiantes de cualquier carrera como individuos que continuamente están en la necesidad de descubrir las formas de uso y/o los modos de aplicación de los contenidos de las cuatro o cinco disciplinas que abordan semestralmente, y en general, al visualizar al humano que aborda la jerga y formas que su entorno lingüístico le proponen.

Aún más, algunos profesores solemos hacer "saltos "(Ver *Fig. 6*) de la jerga de un campo disciplinar a la de otro sin apenas un comentario al respecto, dejando la impresión de cierta maestría mágica en la que los profanos estudiantes no están aún iniciados.

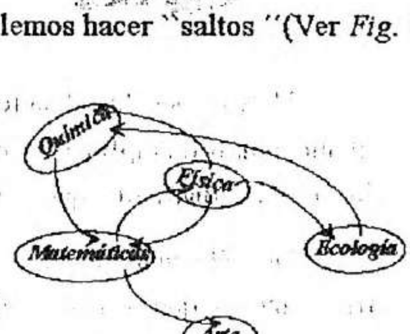


Fig. 6

El tipo de práctica ilustrado deja ocultos los recursos heurísticos de los que nos hemos auxiliado para llegar a esta clase de ``magia''.

En este -generalmente inconciente- ocultamiento de recursos, están incluidos los éxitos y los fracasos cometidos al ir depurando una técnica, personal e intransferible, para acercarse a la significación.

La ``magia'' se desvanece al exhibir (esta es la parte explicada) que la lengua materna ha servido -en todo caso- como la plataforma inicial y/o natural para la realización de *transferencias* o *mapeos* de las funciones lingüísticas (pragmática, semántica y sintaxis) de una jerga disciplinar, a la de otra (Ver *Fig. 7*).

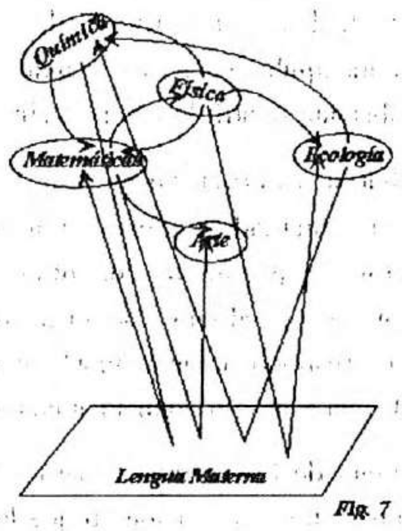


Fig. 7

Al principio, esta transferencia es realizada por imitación, después con un fuerte apoyo en la lengua materna y buscando los registros locales que las funciones lingüísticas de una jerga disciplinar hacen en la otra (mapeos).

Es sólo con la articulación de ``muchos'' mapeos que empiezan a darse emergencias significantes y significativas de los registros que hace una jerga en la otra, en virtud de haber conformado un isomorfismo[3] que potencia la interpretación significativa en y desde la lengua materna.

Corresponde el momento -después de su experimentación, uso y descubrimiento relacional- de formalizar aunque sólo sea localmente, la clase de correlatos de transferencia directa de una jerga a otra, que es a final de cuentas, lo que potencia la realización de los ``saltos ''.

De esta manera, lo que al principio se manifestaba, como imitación, lentos pivoteos sobre la lengua materna, experimentación, descubrimiento, uso, formalización (al menos local) de los mapeos de correspondencia entre una jerga y otra; se manifiesta en un estadio avanzado, en una forma sincrónica más acabada, que excluye los pivoteos sobre la lengua materna y de ser posible hasta los signos intermedios y manipulaciones, que a manera de andamiaje, ahora son retirados no obstante su utilidad en los primeros ``saltos''.

Sin embargo, es precisamente este desligarse de lo concreto, lo que potencia la velocidad en la expresión y en el movimiento cognitivo entre la morfología propia de los objetos de una disciplina, y la correspondiente a los objetos de otra (o aún de ella misma); no obstante, las correspondencias isomórficas particulares se han perdido en ganancia de una generalidad metasituacional.

Éste es uno de los recursos más usados y más poderosos de la matemática, pues en cada ocasión en que la morfología o la estructura

---

3 Hofstadter, Douglas R., GÖDEL, ESCHER Y BACH: UNA ETERNA TRENZA DORADA. Traducción de Mario Arnaldo Usabiaga Brandizzi. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. México. 1982. p. 59-62

...La palabra "isomorfismo" es utilizada cuando dos estructuras complejas pueden ser proyectadas una sobre otra, de tal modo que cada parte de una de ellas tiene su parte correspondiente en la otra: "correspondiente" significa que ambas partes cumplen papeles similares en sus respectivas estructuras....

...La percepción de un isomorfirmo entre dos estructuras ya conocidas es un avance significativo del conocimiento, y sostengo que tales percepciones son lo que genera significaciones en la mente humana.

...Es a partir de estos isomorfismos que se está en la posibilidad de interpretar, aunque no necesariamente de manera significativa, es decir no toda interpretación posible es significativa.

sintáctica (lógico formal) parece haber llegado a un nivel de saturación en su capacidad de representación, se emprende un nuevo orden de abstracción inventando símbolos cuya carga semántica está, por decirlo de alguna manera, más compacta; descargando en los del orden de abstracción anterior las significaciones "demasiado particulares" que los han saturado.

Es en este contexto, que la diversidad morfológica disciplinar y la pretensión de su estudio, parecen tener un recurso plausible, pues al reconocer como *elementos protolingüísticos*[4] a las funciones pragmática, semántica y sintáctica pivoteando sobre nuestra lengua materna, el problema se reduce -al menos teóricamente-, a proponer que cierta *competencia lingüística* puede obrar como un factor de transferencia importante entre las jergas lingüísticas particulares.

En articulación con lo anterior, la matemática ofrece como disciplina, la posibilidad casi única - frente a otras - de acercamiento a las estructuras lógico-formales del pensamiento.

En este acercamiento, la matemática cobra una función metalingüística al posibilitar el modelado y manipulación de gran cantidad de problemas.

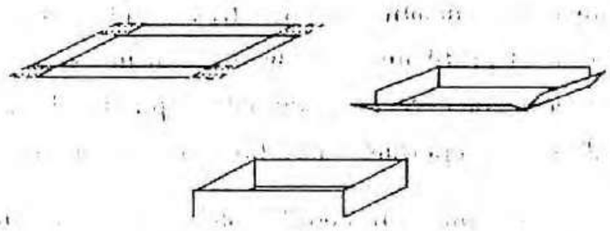
Las habilidades en esta función metalingüística potencian la transferencia del lenguaje especial de una disciplina, al lenguaje de otra, y en general potencian la significación que sobre los asuntos de la misma disciplina pudiera requerirse organizar, teniendo como pivote fundamental a la lengua materna y como substrato a las funciones lingüísticas pragmática, semántica y sintáctica.

En la matemática, la función metalinguística a la que se hace mención, parte desde un objeto relativamente concreto y del reconocimiento de un problema, hasta un nivel de abstracción de n-ésimo orden, para determinar la solución simbólicamente y

4 elementos lingüísticos invariantes

regresando luego al objeto inicial para realizar una aplicación de los resultados obtenidos.

Por ejemplo: tomemos una situación problemática planteada frecuentemente en los cursos de cálculo diferencial: se tiene una hoja de papel de -digamos- 21.6 cm de ancho por 27.8 cm de largo para construir una caja sin tapa con el máximo volumen posible, bajo el expediente de retirar un cuadrado en cada esquina y doblar las "cejas" que sobresalen, como sugiere la siguiente secuencia de figuras.



Ante la consigna de construir una caja con una hoja de papel tamaño carta (aproximadamente de 27.8 X 21.6 cm) bajo el procedimiento descrito y que cumpla con el requerimiento establecido en la situación problémica (...: con el máximo volumen posible...), el primer problema es por supuesto de orden semántico y luego pragmático, es decir: ¿Qué entender? y luego ¿Cómo operacionalizar en una intención concreta este requerimiento?

Aclarado el punto, de construir una caja cuyo volumen sea el mayor posible, en el sentido de construir una caja con la mayor capacidad posible, cada elemento en el grupo de participantes podría dar su opinión al respecto, construyendo una caja.

De la puesta en común de estas cajas (a manera de opiniones), lo más posible es que se tengan tantas opiniones diferentes como elementos del grupo, las que a su juicio personal cumplen con los requerimientos solicitados.

¿Quién ha construido con justeza la caja requerida?, acaso en el intercambio oral de opiniones alguien sugiera (como pudiera ser el caso del lector) que todas las cajas tienen la misma capacidad, aduciendo que cada una de las cajas fue construida con una hoja del mismo tamaño que las otras.

En cualquier caso, lo interesante aquí es disponerse a constrastar (tanto personal como colectivamente) la justeza de la opinión concreta en cada caja, es decir: ¿Cómo averiguar quién tiene la razón?

De manera natural -al menos en este caso-, el disponerse al contraste de las hipótesis conduce al cálculo. Pidamos ahora que cada opinión (cada caja) sea traducida a términos más operativos, pidiendo a cada participante que mida y a continuación multiplique largo, ancho y altura de la caja para obtener su capacidad, disponiéndose con ese dato a contrastar su opinión con la del resto del grupo.

El primer sorprendido será aquel que creyó que todas las cajas tendrían la misma capacidad, bajo el argumento de que todas ellas han sido construidas con hojas del mismo tamaño inicial, hipótesis que se viene por tierra al socializar las capacidades de las cajas construidas, pues queda claro que *en la muestra* (pues no han sido construidas todas las que es posible considerar) hay unas con mayor capacidad que otras.

Por supuesto, en la muestra es posible elegir la que tiene mayor capacidad de entre ellas, pero el problema subsiste pues, ¿Se corresponde la caja con la mayor capacidad elegida de esta muestra, con la que tiene mayor capacidad de entre todas las que es posible construir bajo las condiciones descritas en la situación problémica inicial?

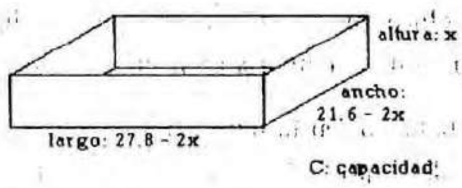
Esta dificultad adicional o refinamiento del problema, conlleva a una nueva necesidad, consistente en la elección *de entre todas* las que es posible considerar, la que tiene mayor capacidad.

Una breve reflexión o quizá varios intentos empíricos debieran bastar para convencernos de que no es posible (como lo fue con la muestra) escribir el listado de las capacidades de todas las cajas que es posible considerar pues este último es, desde luego, un conjunto infinito.

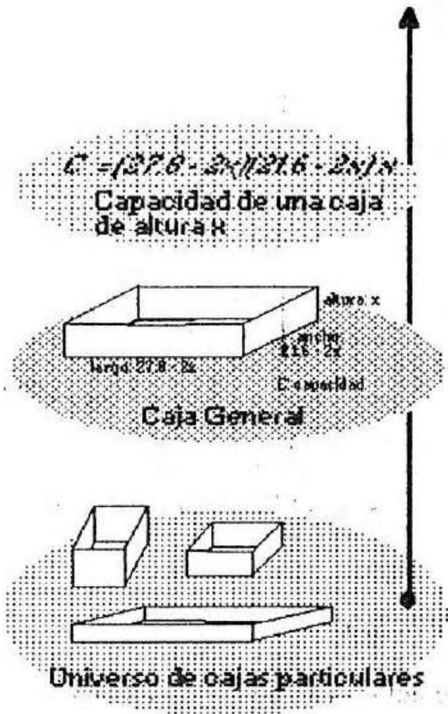
Así pues, estamos frente a un problema de representación, a saber: ¿Cómo representar las capacidades de todas las cajas que es posible considerar para elegir de entre ellas a la mayor?

Esto exige por supuesto otros niveles de abstracción, pues deben definirse asignaciones sígnicas a los elementos esenciales del problema y a las relaciones entre ellos, para en términos de éstas, sintetizar la infinidad de representaciones particulares de la capacidad de todas las cajas que es posible considerar.

Haciendo las convenciones que se indican en la figura siguiente, es posible construir una representación para la capacidad de las cajas que engloba todos los casos particulares: C = largo · ancho · altura, es decir $C = (27.8 - 2x)(21.6 - 2x)x$:



Esta construcción constituye no sólo la concreción de otro nivel de abstracción -aunque suene paradójico-, sino que por ello mismo constituye una construcción metalingüística en cuanto permite referirse a una característica como la capacidad (ya que pueden construirse representaciones de otras características geométricas como la superficie, o asociadas como el costo) de la caja representada en el dibujo, que a su vez, representa a una caja real, es decir, en la expresión: $C = (27.8 - 2x)(21.6 - 2x)x$ está condensado un ``nido'' de



representaciones sucesivas cada una a un nivel superior de abstracción en referencia a la anterior, situación a la que a mi vez, haré referencia con otra construcción como se muestra en la figura de enseguida:

Una de las características más notables de la expresión

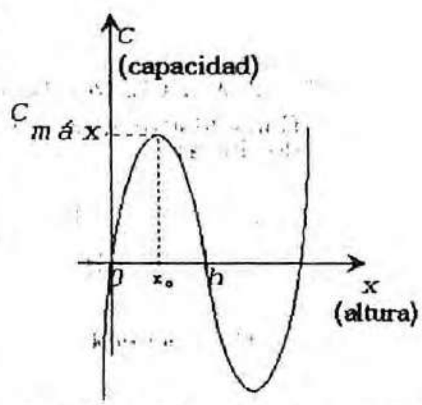
$$C = (27.8.2x)(21.6 - 2x)x$$

es que su manipulación sintáctica y/o gráfica, permiten el estudio tanto local como global del comportamiento de todos los casos particulares de la situación real sin la desventaja de las limitaciones físicas impuestas por los materiales para su construcción, los instrumentos con los que se cuenta y el tiempo empleado en su realización.

La posibilidad de estudio tanto local como global, resulta evidente en cuanto abordamos una representación alterna (gráfica) de la expresión para C (capacidad) en términos de x (la altura), en la que se exhibe el correlato entre las dos variables.

De esta manera, la gráfica permite visualizar la existencia de un valor particular ($x=x_0$) de la altura de la caja entre 0 y h con el que se tiene que la capacidad de la caja es máxima, es decir $C(x_0)$ es el máximo de todos los valores que puede tomar C para los que el modelo se adecua a la situación real.

Sin precisar en este escrito cómo es posible determinar el valor particular $x=x_0$ para el que C toma su valor máximo, sólo diré que el encontrarlo permite formular una consigna que concreta la solución del problema, en este caso:



$C(x)=(27.8-2x)(21.6-2x)x$

"para construir la caja con la máxima capacidad, córtese en cada esquina de la hoja, un cuadrado de lado $x=x_0$."

En este ejemplo debe hacerse notar tanto una profundización en el nivel de abstracción de las construcciones como un incremento en la "distancia" que las sucesivas construcciones van tomando del objeto real.

La "distancia" a la que se hace mención y la articulación de las sucesivas representaciones, es desde mi punto de vista, lo que potencia la formulación de estrategias de transformación y búsqueda de la solución, reduciéndose ésta a cero en dos momentos: cuando no se ha tomado todavía tal distancia y cuando las manipulaciones de las representaciones metalingüísticas sugieren el cómo construir una (o varias) consigna de acción sobre lo concreto, que resuelve el problema.

En este sentido se afirma que la función de admiración en tanto tomar "distancia" del objeto estudiado, cobra una particular relevancia en cuanto función propedéutica para la concepción y/o evolución conceptual.

Al interior de la matemática, también podemos encontrarnos con situaciones en las que disponiendo de varias "herramientas" matemáticas para abordar un problema, tengamos que elegir la que más se adecue a nuestro problema, para construir una (o varias) estrategia de solución mediante la manipulación de un modelo que, a manera de interfase bidireccional entre la situación original del problema y otros estadios que pudieran significar su solución, soluciones o aún, la ausencia de solución como solución, permita el contraste de nuestras estrategias.

Desde esta óptica, lengua materna y matemáticas están llamadas, a jugar un papel central en educación, pues mientras que la primera es el lugar común natural, la segunda permite construcciones más elaboradas en los ámbitos metalinguístico y lógico-formal.

Desde luego, las anteriores conjeturas abren al menos otro expediente de investigación: ¿Qué es y cómo se logra la competencia lingüística? ¿Cómo está relacionada ésta con la generación de estrategias para resolver problemas? ¿En qué sentido puede funcionar como un factor de transferencia entre los dialectos disciplinares?

Competencia Lingüística y Solución de Problemas

El reconocer que la morfología de las situaciones problema puede ser de lo más diverso en términos de las particularidades de las disciplinas, y el pretender abordarla, conduce sin lugar a duda, a un ámbito de estudio demasiado amplio y posiblemente infructuoso.

En cambio, el referirse a unas pocas de cosas como elementos invariantes o comunes a las diversas manifestaciones morfológicas de las situaciones problema (según su procedencia o entorno natural), podría simplificar el objeto de estudio y tener fuertes implicaciones sobre el diseño de situaciones prácticas.

Es en este sentido que me he referido antes a las funciones lingüísticas pragmática, semántica y sintáctica.

El reconocer a estas funciones como elementos protolingüísticos, permite entonces replantear el problema de la transferencia entre los diversas representaciones, pivoteando deliberadamente sobre la habilidad de uso, análisis y asignación de significados desarrollados en nuestra lengua materna, es decir, sobre la *Competencia Lingüística* lograda en nuestra lengua materna.

Bruna Radelli[5] *(1994)* nos proporciona un acercamiento a la caracterización de este concepto, diciendo:

> *<< ... la competencia lingüística consiste, pues, en la capacidad de producir y reconocer estructuras sintácticas y de reconocer el significado que tiene cada una de ellas>>*

Así pues, el definir en qué consiste que una persona sepa su lengua, o sea que tenga competencia lingüística está en relación directa con los arreglos sintácticos y la significación que en ellos sea reconocida por el hablante.

En apariencia la aproximación resulta inocua, sobre todo cuando no se ha precisado que Radelli hace notar la diferencia entre comunicación y competencia lingüística, cuando afirma por ejemplo, que las frases:

"El niño querer comer"

"Los circulos es una figura geométrica"

[5] Radelli, Bruna., NATURALEZA DEL LENGUAJE Y PROBLEMAS PARA LA REHABILITACIÓN DE LOS NIÑOS SORDOS. Dirección de Lingüística del Instituto Nacional de Antropología e Historia. Servicios Educativos Integrados del Estado de México.

bien podrían servir para comunicarse hasta con un extranjero, aunque un hablante nativo puede identificarlas como no-oraciones u oraciones malformadas.

Esta precisión enfatiza que el hablante nativo percibe de manera inmediata una malformación sintáctica a pesar de que pueda servir para la comunicación.

En cambio, un hispanohablante podría sentirse incómodo con las frases

"La hormiga aplastó al elefante"

"El bebé mordió al tigre"

"Mi abuela tiene ruedas y es bicicleta"

"Los círculos son cuadrados"

a pesar de ser sintácticamente correctas, porque reconoce que no tienen mucho sentido en su mundo real, y también reconoce que son gramaticales e interpretables, aunque esto último no es derivable de su mundo real, en el cual no encuentra evidencias que las apoyen.

Su interpretabilidad tampoco es derivable del significado específico de las palabras usadas, pues estas no pueden dar cuenta del significado global de la oración como articulación de sus significados particulares.

En el ejemplo siguiente se usan las mismas palabras, con los mismos significados (por supuesto), para mostrar que diferentes articulaciones entre ellas, dan cuenta de significados globales totalmente distintos:

"Juan mató a Pedro"

"Pedro mató a Juan"

Así pues, esto muestra que las articulaciones sintácticas son generadoras y/o creadoras de significado, agregando significado a los significados de las palabras.

Podría pensarse que es posible observar el agregado de nuevos significados cambiando la articulación sintáctica, sólo cuando este hecho involucra permutaciones entre los elementos componentes de la expresión, lo que no es necesariamente cierto, pues por ejemplo las expresiones:

"Dame los libros y los cuadernos nuevos"

"Nadaba el pato en el agua y el gato sentado en su cola no se mojaba"

tienen por lo menos dos interpretaciones derivadas de diferentes articulaciones sintácticas, aunque estas articulaciones no han sido realizadas permutando componentes (como en las frases de Juan y Pedro), sino han sido derivadas directamente de lo que *Radelli* llamaría competencia lingüística, y yo agregaría que han sido realizadas en y desde el universo semántico del lector.

Por otro lado, cuando un individuo se enfrenta a un problema, esperaríamos que dependiendo de su madurez, abordara la visualización[6] de uno o más caminos a manera de estrategias para encontrar la solución del problema.

¿Qué es una estrategia en este contexto lingüístico? ¿Cómo y porqué se elige alguna de ellas?

Los problemas (no necesariamente escolares) están dados más por una situación que por un enunciado que los concreta y circunscribe.

[6] vizualización: estructuración de imágenes (no necesariamenta ancladas objetos físicos) prospectivas y/o retrospectivas de una situación, que para el caso de la estrategia de solución de un problema intenta concretar las intuiciones sobre los caminos o arreglos sintácticos que potencian el cambio de estado desde la situación advertida como problema, hasta el estadio reconocido como, o que habrá de significar, su solución.

En términos generales, quien acepta una situación como problema se enfrenta a tener que recuperar de ella o de su entorno los elementos que a su juicio resulten esenciales en cuanto significación y representatividad de la situación.

Estos elementos y sus interrelaciones, enunciados o nó, constituyen los signos que representan -a juicio de quien intenta la solución- la situación problema.

Estos signos pueden, por supuesto, ser articulados en compañía de otros, que experiencias previas han proporcionado, para construir diversas articulaciones sintácticas, cada una de ellas con un cierto nivel de significación en cuanto el universo semántico del individuo.

Así pues, resolver un problema querría decir realizar una -o varias- transformación en y desde la articulación sintáctica entre los elementos originales de la situación problema, hacia y hasta la articulación que le significa -a quien lo resuelve- el estado solución del problema.

En este contexto, se visualizan diversas secuencias de articulaciones que permitan la transformación de un estado a otro, las que para efectos de elección son evaluadas en el Universo Semántico del individuo y porteriormente contrastadas en su carácter hipotético de estrategia de solución.

Desde esta perspectiva formular, elegir y contrastar hipotéticas estrategias de solución a un problema disciplinar (en este caso matemático) tiene que ver directamente, con que el individuo posea cierto nivel de competencia lingüística-matemática, por hablar en los términos de la correspondiente a la lengua materna.

Vale comentar que, para resolver un problema, no es suficiente (aunque si necesario) que un individuo identifique y comunique correctamente todos los elementos esenciales para la solución del problema, ni de que domine todas las operaciones y significados de y entre los elementos del problema, si no posee la competencia que le permita construir las articulaciones sintácticas pertinentes y competentes entre elementos y operaciones que le habrán de significar la solución.

Esto último, es lo que desde mi punto de vista permite formular estrategias (como transformaciones sintácticas significantes y pertinentes que permiten el tránsito de un estado a otro), y finalmente, evaluar desde su universo semántico, la plausibilidad de alguna elección particular.

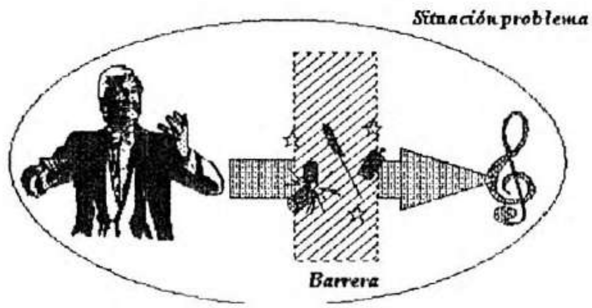
Se está ahora en la posición de disponerse al contraste de la estrategia, en cuanto intrumento que potencia el tránsito entre el estadio de una situación como problema y los estadios advertidos como solución.

En este momento se hace necesario dar una versión operativa al concepto psicogenético de *problema*, pues no es suficiente -ni para la enseñanza ni para el aprendizaje- abordar esta noción sólo hasta el nivel de su génesis psíquica y el papel que este juega en cuanto *detonador epistémico*.

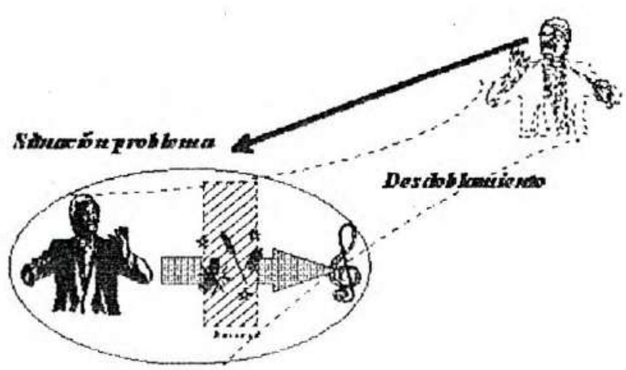
En articulación con ésta versión, han de proveerse de recursos que permitan concretar primero y luego transformar, los correlatos entre las variables esenciales de la situación aceptada como problema (en el sentido antes descrito) hasta un estadio de significación que satisfaga los requerimientos de los correlatos establecidos y los que correspondan a quien resuelve la situación que se aborda.

Para ello, se requiere que la forma de concreción elegida, tenga la característica especial de vínculo bidireccional, entre el estadio de una situación aceptada psíquicamente como problema y los estadios advertidos como solución, pues es precisamente este vínculo es el que nos dará la oportunidad de contrastar la adecuación de los últimos a los requerimientos de la primera.

En términos más operativos, diré que surge una situación problema cuando una *barrera* interfiere el curso natural de la acción ejercida por un ser humano en la dirección de acercamiento -de cualquier índole- a un objeto de interés para él.



La percepción de esta barrera es desde luego producto de haber cubierto la función de **admiración**, en tanto propedéutica de la acción transformadora. Esto es, la mera percepción de la *barrera* es un acto no trivial que desde mi punto de vista involucra una especie de desdoblamiento del pensamiento que permite *ver a distancia* -función de admiración- los detalles y singularidades de su propia acción.



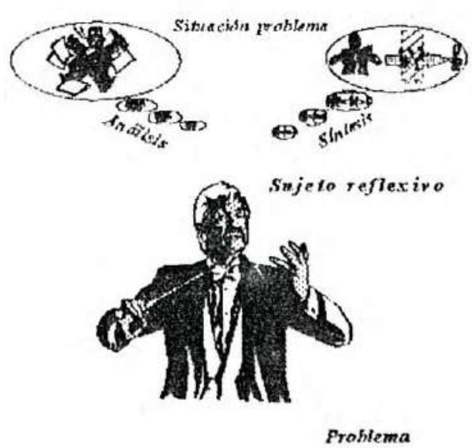
Este *desdoblamiento* y la percepción de la situación, es lo que permite detener la inercia de la acción y potenciar el que el pensamiento[7] actúe en otra dirección, en la dirección de transformar la situación problema percibida.

Para transformar la situación, el pensamiento recurre generalmente a la creación de un *modelo simbólico* de la situación problema, pues este será su instrumento para concretar, comunicar, modificar, comparar, etc., a la situación problema percibida.

Es en este sentido que un problema es la percepción de una situación problema y su simbolización modélica desde el universo semántico del individuo.

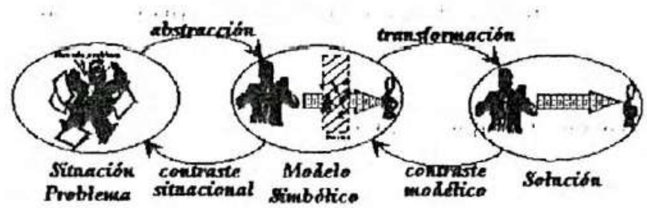
Es así que la percepción o interiorización de una situación problema (noción psíquica de problema) no es transferible, pues implica el acto personal de darse cuenta desdoblando el propio pensamiento.

De esta manera, un problema es incomunicable en su totalidad, a lo más a que podríamos aspirar es a comunicar la simbolización modélica construida por nosotros, la que desde luego, no es necesariamente significativa para nuestro interlocutor.



[7] diálogo interno

De esta manera, el modelo simbólico en su calidad de vínculo bidireccional entre los estadios extremos denominados *situación problema* y *solución*, cobra un papel de primera linea.



Todo esto conlleva, desde luego, a la apertura de nuevos expedientes de investigación, a saber: ¿Cómo se propicia la competencia lingüística? ¿Es posible abordar desde esta perspectiva la solución de cualquier problema? ¿Qué es un problema desde el punto de vista sintáctico-morfológico? ¿una enunciación o una situación de morfología abierta y no circuscrita al enunciado? ¿la propuesta de una transformación? ¿la propuesta de transformaciones abiertas? ¿qué es la solución? ¿Qué es un modelo? ¿De cuales tipos de modelos simbólicos puedo disponer? ¿Hay otros tipos de modelos?, etc..

Oralidad y Escritura

Quiero referirme ahora a uno de los recursos más importantes de los organismos, este es el de autoregulación; concepto al que diversas disciplinas le asignan otros nombres como: homeostasis, ciclo de retroalimentación o de control, reflejo, propioceptividad, monitoreo, etc.

Norbert Wiener[8] comenta:

<<...ciertas clases de máquinas y algunos organismos vivientes, particularmente los superiores, pueden modificar sus modos de conducta, basándose en la experiencia anterior, para obtener fines antientrópicos>> [p 45]

y un poco más adelante, afirma:

<< Esta teoría de la retrodlimentación en los grupos humanos, tiene un enorme interés sociológico y antropológico>> [p 46]

Por su lado, Ludwig Von Bertalanffy[9]

<<Pero la entropía, como ya sabemos es una medida del desorden; ...>> [p 42]

<<Otro concepto céntrico en la teoría de la comunicación es el de retroalimentación>> [p 43]

<< Hay, por cierto, gran número de fenómenos biológicos que corresponden al modelo de retroalimentación. Está, primero, lo que se llama homeostasia, ...>> [p 43]

[8] Wiener, Norbert., CIBERNÉTICA Y SOCIEDAD. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. México 1981. Título original: The human use of human beings. Cybernetic and society. Editorial Sudamericana, S.A. Buenos Aires, Argentina. 1969.

[9] Bertalanffy, Ludwig Von. , TEORÍA GENERAL DE LOS SISTEMAS Fundamentos. Desarrollo. Aplicaciones. Fondo de Cultura Económica S.A. de C.V. , Sexta reimpresión. 1987 Título original: *General System Theory; Foundations, Development, Aplications.*

Deriva un poco después en mención específica de la cibernética, diciendo:

<< *Gran variedad de sistemas tecnológicos y de la naturaleza viviente siguen, pues, el esquema de retroalimentación, y es bien sabido que Norbert Wiener creó una nueva disciplina, llamada cibernética para tratar estos fenómenos.*>> [p 44]

En Vigotsky[10] encontramos mención explícita de Piaget en cuanto al pensamiento reflexivo y el discurso interno:

<<Piaget and others have shown that reasoning occurs in a children's group as an argument intended to prove one's point of view before it occurs as an internal activity whose distinctive feature is that the child begins to perceive and check the basis of his thoughts. Such observations prompted Piaget to conclude that communications produces the need for checking and confirming thoughts, a process that is caracteristic of adult thought. In the same way that internal speech and reflective thougths arise from the interactions between the child and persons in her environment...>>

En un contexto epistémico, estos recursos de autoregulación o propioceptivos son de particular importancia, aún más, yo diría esenciales, para el desarrollo y la profundización en los detalles más finos de la producción cognitiva humana.

Empezaré por decir que el *diálogo* constituye una herramienta para la construcción de significantes y significaciones. Desde muy temprana edad, el humano empieza a asociar situaciones y respuestas (de agrado, desagrado, satisfacción, etc) con la producción de ciertos

10 Vygotsky, L.S. MIND IN SOCIETY. The development of higher Psychological processes. Edited by: Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, Ellen Souberman. Harvard University Press. Cambridge Massachusetts. London England. 1978. P. 89-90.

fonemas que aunque primitivos, le permiten iniciarse en la significación e interpretación de su entorno.

Este ``darse cuenta'' -admirar-, personal e intransferible al que antes he hecho referencia, tiene una finción propedéutica para la *producción* y *transformación* autoregulada de los signos (fonemas, señas, actitudes, etc.).

Esta producción , al principio parece ser aleatoria y es sólo en la medida en que el individuo recibe un número importante y cualitativamente diverso de respuestas , que empieza a aislar y elegir los signos (señas, fonemas, gestos, actitudes, etc.) para significar lo que *él* desea, como producto de un proceso más o menos largo, de afinación y pulimiento de los casos particulares con los que ha tenido contacto.

De esta manera, así como en la primera edad resulta un problema mayúsculo el desarrollar la propioceptividad o recursos autorregulatorios para la producción lingüística significante y significativa en un contexto educativo no sistematizado, en el contexto y edad escolar se tiene un problema análogo: el de desarrollar elementos que permitan una autorregulación cognitiva, a fin de potenciar la pertinencia de las acciones y manifestaciones personales en el nivel en el que una situación o entorno epistémico lo, sugieren o aún más, lo requieren.

En todo caso, el ejercicio de estos recursos o procesos recursivos de oralidad y escritura al actuar iteradamente sobre el producto de la acción anterior, van decantando la producción desde un desorden aparente e ininteligible hasta un nivel en el que se hace aparente un orden, manifiesto en una forma, un concepto, un esquema, etc.

Esto es, al ir afinando la representación como producto de un proceso recursivo, se hace más probable la concreción de una interpretación.

Parece ser entonces, que este tipo de procesos funcionan a manera de algoritmos que, usados de manera pertinente, optimizan (buscando su máximo) la probabilidad de lo adecuado de la representación y la interpretación significativa.

En este sentido, creo que la oralidad y la escritura constituyen recursos que potencian la autoregulación cognitiva, en cuanto dejan ''ver'' (tanto a uno mismo como a otros) el nivel de organización conceptual logrado por un individuo.

Aún más, la producción escrita permite, por su característica de objetividad sígnica, la manipulación transformadora y en este sentido se constituye en un recurso invaluable para decantar la precisión y finura deseada en los procesos de comunicación, descripción y argumentación que así lo requieran.

De esta manera se plantea una diferencia apenas esbozada, pero que vale la pena enfatizar: la diferencia entre el individuo que cree en lo que piensa y se somatiza con aquello que cree, sin ejercer una autoregulación cognitiva; y el individuo que ejerciendo la autoregulación es capaz de admirar[11] su expresión escrita, tanto en la posibilidad de confirmación, cuanto en la infinita posibilidad de refutación y en consecuencia, de transformación creadora.

El primero se estanca y posiblemente se mantiene "siguiendo la corriente", el segundo avanza cognitivamente en ciclos de creación y recreación iterada[12], sin negar por ello que "la corriente" tiene sus propios ciclos creativos, aunque la duración de la mayoría de ellos excede el ciclo vital humano.

---

[11] Admirar, en el sentido de tomar distancia del objeto a fin de poder "verlo". Esta función de admiración resulta ser propedéutica e insoslayable para abordar el problema de la acción transformadora del hombre sobre su entorno o sobre él mismo.

[12] recoge los pedazos producto del caos de la refutación y formula un nuevo orden temporal.

El primero cree y no abandona (eventualmente no socializa sus ideas), el segundo exhibe y critica su producción abandonando las posiciones refutables por él o por su entorno.

El primero sufre cada vez que le cuestionan -le resulta difícil abordar nuevos tópicos-, el segundo ve en cada refutación la oportunidad de conseguir un mejor sistema de creencias temporales.

La semblanza anterior exhibe, desde luego, extremos teóricos de la existencia y uso de los mecanismos autoreguladores de la producción cognitiva, y no pretenden, ni con mucho ser exhaustivos.

En cualquier caso, creo que la producción oral y escrita, se constituyen en excelentes elementos para la socialización y la consecuente regulación por este hecho, de la producción cognitiva; ya sea a nivel individual o colectiva.

En este sentido, la oralidad y la escritura permiten ``poner en la mesa de discusiones'' y en todo caso regular las eventuales arbitrariedades a que podría conducir la producción cognitiva de los individuos.

Entre la oralidad y la escritura, esta última tiene una mayor dificultad[13], aunque es desde luego la que ofrece mayores dividendos tanto a nivel personal como colectivo, pues permite por un lado, tener evidencias -si bien no exhaustivas- del nivel de organización conceptual alcanzado por el individuo[14], y por otro, desprendida de su manifestación objetiva, la posibilidad de transformación recursiva.

Por este hecho, postulo a la escritura como un elemento dialógico de investigación y desarrollo de la estructura cognitiva de un individuo,

[13] Como el tono de la voz y en general el lenguaje no verbal o corporal están excluidos, nos vemos obligados a usar muchas más palabras y de modo más exacto. De esta manera al no tener una base situacional y expresiva, la comunicación sólo puede ser lograda a través de una expresión más rigurosa. De esta manera, la producción lingüística escrita se constituye en la forma más elaborada de la producción cognitiva del individuo o colectividad.

[14] La diferencia entre el borrador y la copia final refleja la evolución del proceso mental.

sea que el diálogo esté dirigido a él mismo, o a los individuos en su entorno.

Es justo este diálogo recursivo y su potencia transformadora de los significantes y significados plasmados en la producción escrita, lo que posibilita el pulimiento y tránsito hacia estadios superiores del universo semántico de los individuos en una producción que por obra de la socialización, le es posible transitar desde una "aberrante" (por solipsista) sub-jetividad, hasta una co-subjetividad "aceptable" (por compartida).

En *Popper*[15] encuentro algunos elementos adicionales de apoyo, entre los que se postula a las funciones *descriptiva* y *argumentadora* [p 118] como a las creaciones humanas más importantes, tanto como las que tienen efectos de retroalimentación sobre nosotros mismos y en especial sobre nuestros cerebros.

En primer lugar, en el contexto de

<<...la función descriptiva del lenguaje humano emerge la idea reguladora verdad, es decir, la idea de una descripción que encaja con los hechos>>[16] [p 118]

en adición,

<<La función argumentadora del lenguaje humano presupone la función descriptiva, en cuanto los argumentos versan necesariamente sobre descripciones>> [17] [p 118]

En este punto aparece la necesidad de un lenguaje descriptivo exosomático y además escrito, que -a manera de herramienta- proporcione los objetos de discusión y argumentación críticas.

En segundo lugar,

---

15 Popper, Karl. R.. CONOCIMIENTO OBJETIVO. EDITORIAL TECNOS, S.A., 1982.

16 Op cit.

17 Op. cit.

<<nuestra humanidad, nuestra razón, se la debemos a este desarrollo de las funciones superiores del lenguaje, ya que nuestros poderes de razonamiento no son más que poderes de argumentación crítica>>[18] [p 118]

Es así que:

<<En la evolución argumentadora del lenguaje, la crítica se convierte en el instrumento fundamental del desarrollo ulterior.>>[19] [p 119]

Las funciones que en todo caso no poseen los lenguajes animales y que por ese hecho distinguen y posibilitan al humano su desarrollo y evolución cognitiva, son las funciones descriptiva y argumentadora.

Y aunque estas funciones

<< ... sean consecuencias involuntarias de nuestras acciones, como es natural, el desarrollo de estas funciones es cosa nuestra. La argumentación crítica y el conocimiento en sentido objetivo, sólo se hacen posibles dentro de un lenguaje enriquecido de este modo ...>>[20] [p 119]

Es de hacerse notar la coincidencia entre *Popper* y *Radelli*, aunque en tiempos, campos disciplinares y por razones distintas; ésta última en relación a la importancia secundaria que le concede a la función de expresión o comunicación frente al desarrollo de las habilidades que denotan una competencia lingüística.

En *Popper*, a las funciones de comunicación se las tipifica como **funciones inferiores**, en cuanto exentas de poder de discriminación entre los lenguajes animal y humano.

En ambos autores, se encuentra y precisa una razón que privilegia otros aspectos o funciones lingüísticas y/o epistémicas, por lo común

18 Op. cit.
19 Op. cit.
20 Op. cit.

no contempladas por la mayoría de los filósofos (a decir de *Popper*), y finalmente desembocan en la necesidad de elementos lingüísticos de descripción y análisis de la propia actividad y de la ajena en vias de potenciar mediante la oralidad y escritura (a decir mio), el desarrollo recursivo de estadios cognitivos superiores[21].

La Representación y la Evolución Cognitiva

Ya en Casirer[22] se afirma que

> *<<...toda determinación y dominio teóricos del ser dependen de que el pensamiento, en lugar de vérselas directamente con la realidad, elabore un sistema de signos y aprenda a utilizar estos signos como ``representantes'' de los objetos.>>*

Desde esta postura, no es posible transitar hacia estadios cognitivos más avanzados, si no se poseen elementos sígnicos susceptibles de transmutación y/o manipulación transformadora.

Esta manipulación habrá de darse sobre los signos que denotan las conjeturas y teorías formuladas lingüísticamente, consignado en *Popper*[23] [p 77] con el nombre de ``mundo 3'', esto es, el mundo de las

[21] Vygotsky, L.S. MIND IN SOCIETY. The development of higher Psychological processes. Edited by: Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, Ellen Souberman. Harvard University Press. Cambridge Massachusetts. London England. 1978. "The acquisition of language can provide a paradigm for the entire problem of the relation between learning and development. Language arises initially as a means of communication between the child and the people in his environment. Only subsequently, upon conversions to internal speech, does it come to organize the child's thought, that is, become an internal mental function" P. 89.

[22] Cassirer, Ernst. FILOSOFÍA DE LAS FORMAS SIMBÓLICAS. Traducción de Armando Morones. FONDO DE CULTURA ECONÓMICA. México. Primera Edición en español 1976.

[23] Op. cit.

Podemos llamar al mundo físico ``mundo 1'', al mundo de nuestras experiencias concientes, ``mundo 2'' y al mundo de los *contenidos* lógicos de los libros, bibliotecas, computadoras y similares, ``mundo 3''.

Tengo varias tésis acerca de este mundo 3:

(1) En el mundo 3 podemos descubrir nuevos problemas que estaban allí antes de ser descubiertos y antes de que se hiciecen conscientes; es decir antes de que en el mundo 2 apareciese algo correspondiente a ellos. Ejemplo descubrimos los números primos y de ahí se deriva el problema euclídeo de si la suceslón de los números primos es infinita.

(2) Por tanto, en algún sentido, el mundo 3 es *autónomo*: podemos hacer en este mundo descubrimientos teóricos del mismo modo que podemos hacer descubrimientos geográficos en el mundo 1.

representaciones sígnicas en su sentido más amplio, y en particular de las consignadas por escrito en algún medio físico o electrónico.

En el apartado anterior ya se ha esbozado que el tener un cierto nivel de competencia lingüística rebasa la estricta posibilidad de comunicación, y también, por otro lado, que la escritura es un elemento dialógico de investigación y desarrollo de la estructura cognitiva de un individuo.

Es decir, en la medida en que se logra la concreción de las ideas en lo escrito, se está en la posibilidad de manipulación objetiva sobre la representación de las ideas o conceptos. Así pues, las representaciones lingüísticas[24] en un sentido amplio, constituyen representaciones objetivas susceptibles de manipulación para la transmutación de sus significados e interpretaciones.

Siguiendo otra vez a Cassiret, es de hacerce notar que la función simbólica[25] no debiera circunscribirse al plano del conocimiento

(3) Tesis fundamental: casi todo nuestro conocimiento subjetivo (conocimiento del mundo 2) depende del mundo 3, es decir (al menos virtualmente), de las teorías *formuladas lingüísticamente*. Ejemplos: nuestra ``auto-conciencia inmediata`` nuestro ``conocimiento de nosotros mismos``, que es tan importante, depende en gran medida del mundo 3: de nuestras teorías acerca de nuestro cuerpo y su existencia continua cuando quedamos dormidos o estamos inconscientes; de nuestras teorías acerca del tiempo (su carácter lineal); de nuestra teoría según la cual podemos evocar experiencias pasadas con diversos grados de claridad, etc. Con estas teorías se hallan conectadas nuestras expectativas de despertar tras haber quedado dormidos. Propongo la tesis de que *la plena consciencia de sí mismo* depende de todas estas teorías (del mundo 3) y de que los animales, aunque sean capaces de tener sentimientos, sensaciones, memoria y, por tanto, conciencia, no poseen la plena conciencia de sí mismos que constituye uno de los resultados del lenguaje humano y el desarrollo del mundo 3 específicamente humano.

[24] Refiriéndome a ellas en un contexto amplio, es decir en cuanto los lenguajes naturales y no naturales o artificiales. Entre los primeros pueden contarse el español, el inglés, el alemán, el italiano, etc,. entre los segundos están la matemática, todos los lenguajes de programación, etc..

[25] Habría que considerar las limitaciones del enfoque, tomando en cuenta las reflexiones que al respecto de un programa de formación del espíritu hace Jürgen Habermas en su CIENCIA Y TÉCNICA COMO "IDEOLOGÍA" Notas sobre la Filosofía Hegeliana del Periodo de Jena., Red Editorial Iberoamericana México, S.A. de C.V., 1993 las que en extenso se leen: "... no puede menos que plantearse la cuestión de la *unidad de un proceso de formación*, que empieza estando determinado por tres tipos de formación heterogéneos. El problema de la conexión de estos <<medios>> se plantea con particular urgencia si tenemos en cuenta la influencia histórica de la filosofía de Hegel y cómo esta influencia ha dado lugar a interpretaciones divergentes, cada una de las cuales escoge como principio de interpretación uno de los tres tipos dialécticos fundamentales. *Cassirer* toma la dialéctica de la representación como hilo conductor de una interpretación hegelianizante de Kant, que a la vez se convierte en fundamento de una filosofía de las formas simbólicas; *Luckacs* interpreta el movimiento del pensamiento del pensamiento que separa a Hegel de Kant siguiendo el hilo conductor de la dialéctica del trabajo, que a la vez garantiza la unidad materialista del sujeto y objeto de un proceso de formación de la especie, que cubre la historia universal; finalmente, el neohegelianismo de *Theodor Litt* conduce a una concepción del autoescalonamiento del espíritu, que sigue el modelo de la dialéctica de la lucha por el reconocimiento. Es común a estas tres posiciones el método practicado por el hegelianismo de una apropiación de Hegel abandonando la identidad del espíritu y naturaleza que

conceptual o "abstracto", pues se perdería de vista la perpectiva sobre la totalidad de las dimensiones de la representación. Es decir, esta función no se corresponde a un solo estadio de la imagen teórica del mundo sino que condiciona y porta a la totalidad de ésta.

En esta perspectiva, el mundo de las imágenes del mito, las estructuras fonéticas del lenguaje y los signos de los cuales se sirve el conocimiento "exacto", determinan cada uno una dimensión propia de la representación.

Por otro lado, las manipulaciones dependen por supuesto, de la sintaxis propia del lenguaje o recurso en, o con el que se ha realizado la representación.

La asignación de significados o interpretaciones depende, por un lado, de la construcción de un isomorfismo entre la nueva estructura sintáctica y una o más de ellas realizadas antes, ya sea en la misma jerga lingüística o aún en otras y , por otro, del nivel de co-subjetividad logrado por la interpretación en el contexto social de su praxis.

En este sentido, la vertiente semántica o de asignación de significados, funciona como objeto a lograr tanto como herramienta para lograr otros significados, en una interacción dialéctico-recursiva.

Merece comentario especial la característica de recursiva, pues desde mi punto de vista es ella la que potencia la posibilidad de configuraciones cognitivas superiores, las que generalmente suelen tener configuraciones complejas y dinámicas; dos atributos deseables en el desarrollo cognitivo de un individuo.

En una entrevista realizada por Francisco Huneeus[26] , Humberto Maturana opina que:

supone el saber absoluto. Por lo demás, tienen tan poco en común, que lo único que hacen es dar testimonio de la divergencia de los tres planteamientos, esto es, de las concepciones de la dialéctica que les subyacen. ¿Cómo hay que pensar, pues, la unidad de un proceso de formación, que según la idea de las *lecciones de Jena* corre a través de la dialéctiva del lenguaje, del trabajo y la interacción?". P 35

26 Huneeus, Francisco. , LENGUAJE, ENFERMEDAD Y PENSAMIENTO, Cuatro Vientos

<<Yo pienso que el lenguaje surge y opera como un modo particular recursivo[27] *de coordinaciones conductuales en la convivencia. ... >>*

Siguiendo con la idea, creo que es precisamente esta característica de recursividad inherente a su desarrollo, la que no sólo es capaz de crear estructuras complejas y evidentemente dinámicas de pensamiento, sino que ejercida sistemáticamente, potencia también el tránsito bidireccional entre el caos y el orden cognitivo.

En un sentido, es posible el tránsito entre la miríada cuasi-aleatoria de concepciones o interpretaciones y la posibilidad siempre presente de lograr nuevas articulaciones sintácticas pertinentes y competentes lingüísticamente, agregando con ello nuevos significados globales a los significados.

En otro sentido, el ya conocido trabajo de Gödel en el que se evidencia la existencia de puntos oscuros en cualquier estructura lógico formal., en adición a esto, el trabajo de Verhulst, en el que la aplicación iterada de un algoritmo recursivo **determinista**, $X_{n+1} = cX_n(1 - X_n)$, conduce al caos[28] y los ejemplos colectados aquí y allá de variación aleatoria recursiva que conduce al orden y la explicación; me llevan a creer que la evolución cognitiva está generada por cuando menos un proceso recursivo (cuasi-aleatorio o cuasi-determinista?) y sugiero que éste es el de la producción lingüística alimentando de manera recursiva con este producto, al proceso cognitivo.

Editorial. Chile. Segunda Edición 1989. p. 156

27 Nota aclaratoria en la entrevista de Hunëeus acerca de la entrevista a Maturana: La recursión (neologismo) es la aplicación de una misma operación a las consecuencias de la operación. La retroalimentación es la aplicación de la consecuencia de la operación a la operación. La recursión es el proceso mediado por un algoritmo.

28 Robert May, un físico de Princeton que se ha dedicado a la biología, es una figura clave en la historia de cómo los científicos aprendieron acerca de lo que hoy se denomina "ruta hacia el caos mediante duplicación de períodos" y uno de los primeros en reconocer la importancia del estudio del proceso de Verhulst. Tan temprano como en 1976 él escribió:

> *No sólo en investigación, sino también en el mundo de todos los días de la política y la economía, todo hubiera sido mejor si más personas entendiéramos que un sistema simple no lineal no necesariamente posee propiedades dinámicas simples.*

Vista la cognición desde este punto de vista, quizá podría resultar natural el conceptuarla como un fractal[29], de lo que podríamos esperar por razones que les son inherentes -tanto a la cognición como a los fractales-, que sus manifestaciones morfológicas resultaran infinitas e insospechadas.

Por otro lado, la *dimensión* de los objetos que sería posible tratar -desde una tal concepción de la cognición- se amplía, en cuanto que ésta puede ser no necesariamente entera, es decir; la cognición conceptuada como un fractal pone a su alcance a objetos no necesariamente euclideanos, esto último en un sentido no trivial.

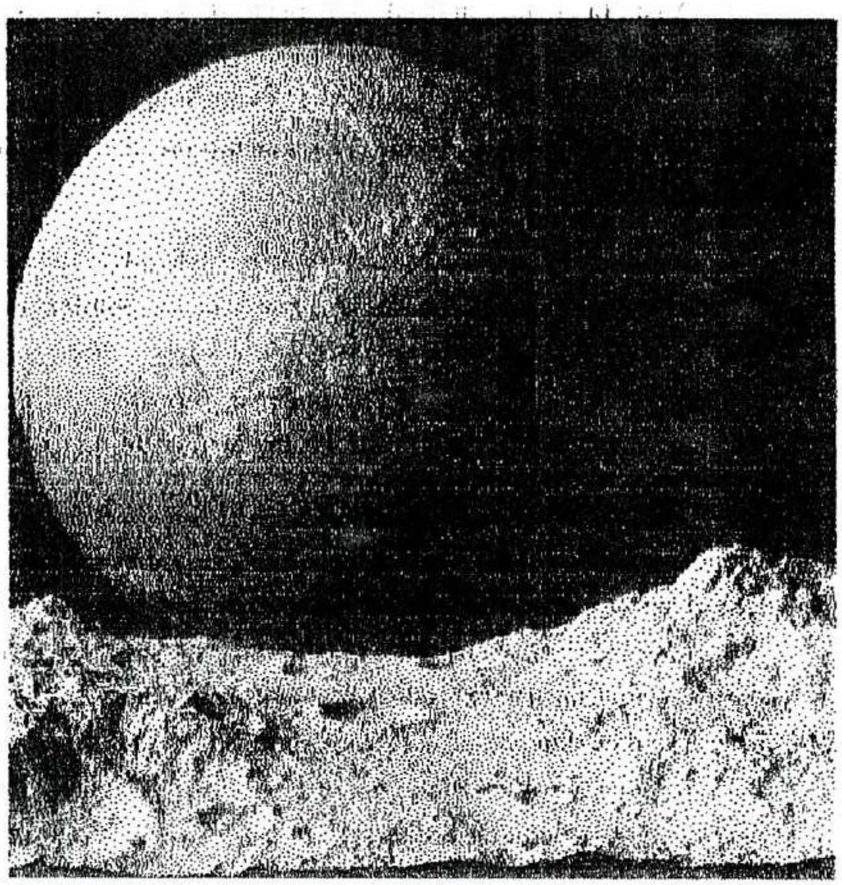
El carácter del sentido no trivial al que se hace alusión, estaría proporcionado no sólo por el cambio de alguno de los postulados euclideanos y la generación coherente de una colección de teoremas desprendiendo así, una u otra geometría no euclideana, aunque a final de cuentas construidas con elementos euclideanos (puntos, rectas, planos) de dimensión entera; sino, por elementos geométricos intrínsecamente diferentes y sin las restricciones dimensionales euclideanas, denominados fractales.

La falsificación que se presenta en la figura de siguiente, ha sido generada por computadora.

En ella se muestran tres figuras fractales, el paisaje del primer plano, su distribución de cráteres y la generalización del movimiento Browniano sobre una esfera naciente en el fondo, todas comparten la característica de auto-similitud.

La magnificación de subconjuntos de estas formas, son de nueva cuenta reminiscentes de la totalidad.

[29] término acuñado por Benoit Mandelbrot en 1975 del latín *fractus*.



El hecho de que estos fractales primitivos generados por computadora evoquen fuertemente las formas del mundo real, constituye una pista de su importancia en relación a las formas de la Naturaleza.

Según Galileo (1623),

> *La filosofía está escrita en ese gran libro -quiero decir el universo- el cual permanece continuamente abierto a nuestros sentidos, pero que no puede ser entendido a menos que se aprenda a comprender el lenguaje en el cual fue escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales sería humanamente imposible entender una simple palabra en él; sin esto, uno se encuentra en un laberinto oscuro.*

En esta cita, Galileo presenta varias de las tendencias básicas de la ciencia occidental.

En primer lugar, con el fin de entender o simular la naturaleza, uno debe conversar en su lenguaje.

En segundo lugar, el lenguaje de la Naturaleza son las matemáticas y la geometría es el lenguaje específico para describir, manipular y simular las formas.

Sin embargo, Galileo equivocó los términos del dialecto preferido de la naturaleza.

Es sólo de manera muy reciente que ha sido advertida la impotencia de los triángulos y círculos de la geometría Euclideana (el dialecto mencionado específicamente) para describir el mundo real.

Retrospectivamente; es obvio que,

> *"las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son círculos y que una corteza no es suave, así como la luz no viaja en línea recta".*
>
> *Mandelbrot*

Matemática Postmoderna

Existe, ahora un nuevo dialecto, una nueva rama de las matemáticas, que es más apropiada para modelar las formas irregulares del mundo real, la *geometría fractal*.

Algunas características distintivas entre los objetos euclideanos y los objetos fractales son resumidas en la siguiente tabla:

Geometría: Lenguaje matemático para describir, relacionar y manipular las formas	
Euclideana	Fractal
◆ Tradicional data de más de 2000 años	◆ Monstruos modernos aprox. 17 años
◆ Basada en escalas restringidas	◆ No tiene restricciones en su escala
◆ Se ajusta a las formas de objetos hechos por el hombre	◆ Son apropiadas para las formas naturales
◆ Los objetos son descritos por una fórmula	◆ Los objetos son descritos por un algoritmo recursivo

Una comparación de las Geometrías Euclideana y Fractal[1]

[1] Tomado de Peitgen, Otto, & Dietmar Saupe., The Stience of FRACTAL IMAGES., Springer-Verlag New York Inc., 1988. p. 27

El postular un nuevo tipo de geometría, permite especular desde luego sobre el nacimiento de nuevas físicas y con ello de nuevas interpretaciones cósmicas, es decir de nuevas formas de "ver" lo que nos rodea.

Por otro lado, si se piensa en que la enorme alegoría que constituye la matemática actual ha sido construida con elementos geométricos euclideanos de dimensión entera, ¿qué podríamos esperar de las construcciones cognitivas que es posible realizar con elementos no restringidos en sus escalas dimensionales?.

Desde luego, se desprenden de aquí vastísimos campos de investigación en matemáticas, en epistemología, en educación y en última instancia en la ontología generada por las nuevas formas de ver y las visiones proporcionadas por ellas.

El ser educados en una nueva forma de "ver", ciertamente que traería como consecuencia nuevas visiones.

Una de las que más me entusiasma, es la que se desprende de la existencia de objetos de dimensión no entera, pues me hace pensar en el problema de la densidad dimensional y más allá, en el *continuo dimensional* y la clase de "objetos" que podríamos usar para construir nuestras representaciones.

Ciertamente esto sería una nueva y hasta donde sé insospechada *ecología epistémica*[30].

Se tendrían como consecuencia nuevas formas de percepción y representación, pues en alguna medida creo yo casi determinante (y me alegro del "casi") nuestro aparato perceptual se desarrolla y/o se bloquea por la educación que nuestro entorno (no solo escolar) social nos proporciona.

Según advierto, a raíz de la postulación de la existencia de elementos geométricos cualitativamente diferentes a los euclideanos, estamos en víspera del abandono de ancestrales ropajes perceptuales, epistémicos, ontológicos y lingüísticos.

Desprendido de esto, se están generando, en este momento, nuevos conceptos y nuevas formas cognitivas de operar con ellos.

En suma, nuevas nociones en la concepción de lo que nos rodea, entre las que probablemente están incluidas:

- Interacción conciente entre orden y caos como formas naturales y complementarias de la manifestación cósmica
- Inclusión natural de concepciones tanto deterministas como no deterministas de un mismo objeto de conocimiento

[30] Quiero acuñar este término compuesto, *Ecología epistémica*, significando con él tanto a lo que antes he llamado Universo Semántico del Individuo como a su entorno de interacción cercano (íntimo) y lejano. Al respecto de la noción de cercanía o lejanía a su entorno, diré que a últimas fechas se tiene cada vez más conciencia de que para efectos de lo social y la configuración del individuo en ello, se están desmoronando nociones como etnia, comunidad y nacionalidad a raíz de la emergencia de una sociedad global que demanda nuevas formas de ser, de vivir, de trabajar, de actuar, de sentir, de pensar, de soñar, de imaginar y con ello, la reconceptualización o la existencia de nuevos problemas epistemológicos, ontológicos y lingüísticos .

- Nuevas formas de hacer ciencia y en particular nuevas formas de hacer matemáticas: ¿Qué tal una matemática cualitativa?
- Uso ineludible de los recursos de cómputo en el sentido global de los servicios que ésta tecnología ofrece, ya que resulta el medio ad-hoc, en el que esta nueva ecología epistémica habría de tener lugar
- Encuentro con la tan deseada *inter* y *trans* disciplinariedad en el desarrollo de las ciencias
- Generación y abordaje de problemas cualitativamente nuevos

En resumen, creo en la necesidad imperiosa de trabajar en la dirección de conformar una currícula de educación matemática cualitativamente distinta, en la que los asuntos matemáticos se aborden desde un punto de vista más global; tanto en los recursos tecnológicos de los que se eche mano, como en las relaciones contensiales intra y extramatemáticas.

Reflejos culturales y exigencias[31]

Quiero establecer como un reflejo fundamental de las consideraciones hechas en los parágrafos anteriores, el hecho de que la sociedad y las comunidades modernas exigen individuos con capacidades epistémicas cualitativamente novedosas y sustancialmente diferentes, es decir no individuos que posean grandes cúmulos de información sino individuos que tengan las habilidades para operar, comprender, interpretar y procesar objetos de distintos saberes para transferir lo aprendido a otros problemas y a otros campos.

[31] Para una referencia más extensa ver: Anexo 2: Reflejos Culturale s y Tecnología.

La postulación anterior, refleja la inherente necesidad actual de diseño y realización de una nueva *ecología epistémica* para lo que podríamos disponer de adelantos tecnológicos como las calculadoras y las computadoras, instrumentos que permiten realizar con gran economía de tiempo y energía psíquica para los docentes -estudiantes y profesores-, cantidades masivas de cálculos y procedimientos mecanicistas de repetición, dejando el tiempo y la energía economizados, para una construcción intelectual más relevante.

La superespecialización de las disciplinas y el consecuente correlato de ello en los lenguajes especiales, pone de relieve la urgente necesidad de una cultura lingüística más amplia que la que el patrimonio social nos lega de manera natural.

Las grandes ausentes de las actividades docentes sistematizadas suelen ser las relacionadas con el cultivo de las habilidades lingüísticas de **oralidad** y **escritura**.

La situación se hace desesperada cuando se advierte que cada una de las disciplinas tiene por así decirlo, su propio lenguaje y, además, que éste, es no natural.

En esta situación, es insoslayable la urgente necesidad de asumir sistémicamente la tarea de habilitar a nuestros estudiantes en el uso de su lengua materna hasta un nivel funcional y en una gama de habilidades lingüísticas, necesarias para el desempeño de estos en su interacción con otros lenguajes.

Podría decirse que la competencia de un individuo en su expresión oral y/o escrita, asegura y garantiza la competencia en el nivel de organización conceptual alcanzado por este.

Por otro lado, la oralidad y la escritura competentes son instrumentos o habilidades de acción-investigación sobre las construcciones intelectuales, de donde, podemos afirmar que un individuo sabe algo sobre algún objeto de conocimiento cuando es capaz de hablar o escribir -con ciertas características como claridad, concreción, consistencia lógica, estilo literario, etc.- sobre ello.

En un nivel jerárquico de aplicación subordinada, están las habilidades desprendidas de los lenguajes particulares de las disciplinas, refiriéndome con ello a las particularidades propias del discurso en cada disciplina.

Este renglón es también motivo de desatención lingüístico funcional generalizada en nuestro sistema educativo, puesto que en las actividades docentes no se abordan explícita y sistemáticamente las particularidades lingüísticas propias de cada una de las disciplinas objeto de estudio.

Este hecho no es casual, sino el resultado -por un lado- de una inconciencia colectiva relacionada con las componentes lingüísticas básicas y -por otro- de la relativa facilidad que se obtiene al hacerlo de manera sintáctica, dejando de lado una componentes semántica y por supuesto, una pragmática, ya que es poco probable realizar esta última -al menos de manera competente y autónoma- cuando no se sabe de qué se habla o se escribe.

De esta manera, el aprendizaje de las regularidades y diferencias propias de las disciplinas en el uso de las funciones lingüísticas como medios para acercarse a un objeto de conocimiento especial, quedan ocultos en las limitaciones del discurso docente, que como antes indiqué, está generalmente limitado a la componente sintáctica en la mención y uso de las concepciones, categorías, procedimientos y técnicas de las disciplinas que se abordan.

La enseñanza de los métodos debiera darse en el ejercicio de la oralidad y escritura en los diversos campos disciplinares, buscando el uso de los lenguajes especiales y materno en una dirección abarcante de sus componentes, a saber: pragmática, semántica y sintáctica.

Es así, que podría postularse el que los fines y compromisos de las organizaciones e instituciones educativas tuvieran una tarea quizá más modesta pero realista y no menos importante: la de asegurar el que las actividades docentes de profesores y estudiantes se desarrollen en un entorno lingüísticamente diverso y rico (competente) y/o en contacto con el mayor número de sistemas y/o formas de representación.

Capítulo 2

La función en el contexto de la matemática escolar no especializada

En este trabajo, se abordan dos tesis;

el concepto de función está subutilizado en el contexto de la matemática escolar en tanto se desdeñan extensiones del concepto pertinentes y factibles en los niveles educativos, por otro lado,

el reconocimiento de que el concepto de función actuando en su calidad de substrato conceptual de la matemática escolar, permite potenciar la formulación de nuevas estrategias operativas en el desarrollo del curriculo matemático escolar por la via de recursos de representación complementarios al sintáctico lógico formal y la significación agregada por la articulación de éstos.

El concepto de función en el contexto escolar

Es ineludible reconocer que el concepto de función ha tenido una evolución en la historia de la humanidad y en particular de la matemática, por lo que en la actualidad se dispone de diversas manifestaciones del concepto, las que contribuyen -sin lugar a dudas- a conformarlo.

Las manifestaciones a las que se hace mención son: como *registro de datos* (en tablas) en las antigüas culturas babilónica y egipcia, como *razones y proporciones* en la cultura griega, como la *representación gráfica* del correlato de la intentio vs extensio (aprox. 1300- 1400), como *lugares geométricos* con Descartes y Fermat, como *expresión analítica* con Euler (siglo XVIII), y más recientemente se tienen versiones más formalizadas del concepto como *correspondencias,* como *conjuntos de parejas ordenadas* y *definiciones contemporaneas* que atienden a la llamada teoría de categorías.

En la reforma curricular de 1971, llegó a México la llamada *Matemática Moderna*[1] en la que se contemplaba el concepto de función desde el punto de vista de correspondencias entre elementos de conjuntos, lo que lejos de significar un avance en la conformación escolarizada del concepto y sus posibilidades de aplicación a la resolución de problemas, significó el recrudecimiento del privilegio sintáctico en la práctica docente

[1] la que impactó de una manera muy severa al quehacer docente, pues ocurrió lo que desde mi punto de vista fue un trasplante poco cuidadoso, al suponer que la mera revelación o abordaje de las *estructuras fundamentales* de la matemática, traería como consecuencia natural el hacer factible que a partir de éstas, los estudiantes articularan la estructura conceptual pertinente, competente y significativamente para abordar la resolución de los problemas propuestos por la matemática escolar.

Nivel de Educación Básico

Desde mi punto de vista, el concepto de función en primaria debiera abordarse hasta el nivel del gérmen seminal constituido por la variación lineal y la distinción de sus tipos.

De la sanidad de estas *semillas* y la de sus manifestaciones primeras, dependen en gran medida la formación matemática futura de los estudiantes y sus posibilidades de extensión y formalización de este concepto medular.

Me parece interesante dar una breve reseña del trabajo de Saiz, Irma. & Block, David (1984)[2], pues en él se conjuntan de manera notable, tanto una metodología[3] para el acercamiento de los contenidos matemáticos, como el hecho también notable de cómo fue posible abordar el concepto de función y su simbolización con un nivel alto de formalización.

En este trabajo reseñado, se reporta una secuencia de diez clases en las que se aborda como situación problema el construir el lenguaje cartesiano a partir de la tarea de transmitir un mensaje describiendo una figura en un geoplano, para que otro niño o equipo la reproduzca.

No obstante sus objetivos, el trabajo mencionado muestra la factibilidad de arribo a estadios superiores: percepción de la variación, aislamiento de las variables, identificación del correlato existente entre ellas, su abstracción simbólica y su representación.

Dos ideas centrales en el trabajo: el que los niños fueran los "inventores" de la geometría cartesiana y además, que los mismos niños establecieran las convenciones de significación al nivel de las exigencias dinámicas de su socialización, y no que éstas fueran

[2] Saiz, Irma. & Block, David., EL GEOPLANO. Un recurso didáctico para explorar el mundo de la geometría elemental., Laboratorio de Psicomatemática N° 2., DIE-CINVESTAV. México., Marzo de 1984

[3] Búsqueda de invariantes, en un proceso lingüístico recursivo que duró diez ciclos (clases), lo que se pone en evidencia cuando se inquiere por lo que se dió en llamar la "propiedad común" de los puntos en el geoplano, logrando su simbolización abstracta en una expresión simbólica auxiliada por las convenciones propias del sistema de referencia desarrollado.

aportadas por el maestro como convenciones universalmente establecidas.

Fueron de interés también los siguientes aspectos:

- *posibilitar la expresión, tanto a nivel oral como gráfico, de las formulaciones que van construyendo los niños, postergando la adopción de símbolos convencionales.*
- *fomentar la participación de los alumnos en la construcción de sus conocimientos, organizando actividades y discusiones a dos niveles de intersección: en equipos y colectivos.*
- *generar situaciones didácticas significativas para los alumnos y cuyo curso los lleve a elaborar determinados conocimientos como solución a los problemas que la propia situación les plantea.*
- *organizar debates para que los alumnos confronten sus opiniones y lleguen a conclusiones sobre un tema.*

Los comentarios finales de la experiencia superan, desde mi punto de vista cualquier expectativa:

> *La secuencia de 10 clases que acabamos de analizar se desarrolló a fines del años escolar. A principios de 6º grado volvimos al tema de coordenadas cartesianas y descripción de figuras; lo niños recordaron los acuerdos tomados y pudimos retomar el trabajo dejado 3 meses antes sin clases de revisión o repaso como se acostumbra hacer al inicio de cada año escolar. Podemos señalar aquí la diferencia entre un trabajo de memorización de algoritmos y reglas que no "resisten" 3 meses sin practicarlos y este trabajo que en realidad fue total construcción de los niños. ... Pasamos posteriormente a graficar rectas en el geoplano y representarlas simbólicamente. Este trabajo se organizó en forma similar a lo anterior, pidiendo a los niños que construyeran la recta en el geoplano y redactaron un mensaje para que otro equipo pudiera reproducirla. ... En posteriores descripciones de rectas se empezó a analizar cual es la* ***propiedad común*** *de los puntos que pertenecen a una recta dada. ... El maestro daba la propiedad común y los niños construían la recta o bien el*

maestro daba la recta y los niños buscaban la propiedad común. Frecuentemente este trabajo se realizaba con intercambios de mensajes entre los niños. ... Todas las escrituras fueron criticadas y analizadas y finalmente el maestro proporcionó la forma convencional de nombrar las coordenadas ... y por tanto la "propiedad común" que adquirió un sinónimo en "ecuación de la recta" pasó a escribirse así:

Propiedad común:

La segunda coordenada es igual a la mitad de la primera coordenada

$$y = \frac{1}{2}x$$

Ecuación de la recta:

$$x = y \cdot 2$$

Aparecieron rectas que no pasan por el origen como $y = x + 3$, rectas que "van para el otro lado" como $y = -x + 3$, etc. ... Al tratar el tema de proporcionalidad y el de función, los niños no tuvieron dificultad en utilizar representaciones de rectas en un plano cartesiano."

Este trabajo constituye sin duda, una muestra de que es posible abordar la solución de problemas didácticos *relevantes* echando mano de recursos materiales económicos como *el geoplano* e intelectuales como el de la oralidad y la escritura, con tal y que el ingenio del profesor esté atento a sacar partido de las oportunidades que ofrece la socialización recursiva de los productos parciales que se van generando en el transcurso de la actividad docente.

Para concluir con la reseña, en el apartado de geometría del reporte de Saiz & Block (1984), se abordan otros problemas didácticos importantes como son las reflexiones, rotaciones, simetrías, propiedades de los polígonos derivadas de la simetría, reproducción a escala, invarianza y/o proporcionalidad ante transformaciones, mediciones, correlatos entre vértices y diagonales de un polígono, conteo y búsqueda de patrones númericos entre elementos poligonales, perímetro, área, búsqueda de algoritmos de cálculo. En todo ello, está involucrado también el concepto de función, incluso en ocasiones con más de una variable (/) por ejemplo: la fórmula para el cálculo del área de un rectángulo: $A(b,h) = b \times h$

En cuanto al uso que en el nivel primaria pudiera tener los resultados de este reporte, creo que son inmediatos, pues en este nivel, está contemplado (como se indica en el reporte) el tema de variación proporcional (directa e inversa), cuya indiscutible fecundidad potencia el abordaje de una gran cantidad de situaciones problematizadoras y el derivar de ellas estrategias específicas de acción; entre las que pueden contarse la identificación de variables y los correlatos existentes entre ellas, así como su representación en forma tabular, gráfica y analítica siempre que esto último sea posible.

Es mi punto de vista que en el nivel de educación básica, es posible y necesario abordar la noción de la variación por la vía de la *comparación*, y con ello sembrar la simiente de un concepto más general -el de función- cuya utilidad teórico-práctica habrá de extenderse longitudinalmente en la formación matemática global de cualquier individuo.

Examinemos más de cerca los rudimentos de lo que podría ser la génesis de este concepto -el de función-:

Sin duda, el recurso técnico por excelencia para constrastar una hipótesis de variación es la *comparación* del estado de lo observado en al menos dos estadios sucesivos; en donde los parámetros de la comparación dependen del código de representación elegido o bien del código natural en el que lo observado se presenta.

De esta manera, podemos comparar formas o apariencias (acercamiento global) inclinado, recto, grande, pequeño, plano, curvo, rugoso, liso y/o características específicas -o medidas- de éstas (acercamiento local) ángulos, largo, ancho, alto, área, capacidad, volumen, dimensión; gracias a la percepción subjetiva que tenemos de cada una de las formas o apariencias o bien gracias a las medidas que podamos realizar de las características locales que "objetivan" a las anteriores.

En el tránsito entre el acercamiento global y local a un objeto, hay un escalamiento en el nivel de abstracción requerido no sólo para proponer aspectos más finos de él, sino también para identificar, aislar, modelar o representar y medir los números o variables relevantes para la caracterización requerida.

Es en ese tránsito y las tensiones generadas en él, que la *comparación* asume técnicas cada vez más objetivas, pues a pesar de que la comparación puede ser resultado de un instrumento tan subjetivo como alguno de los recursos del cuerpo humano, éste tiene rangos perceptuales que no le permiten ir más alla; digamos hasta la cuantificación de una eventual variación, e incluso, cuando los rangos de ésta son o muy pequeños o muy grandes, no es posible siquiera su percepción.

De esta manera, a pesar de que el cuerpo humano está en la posibilidad perceptual de *comparar* (pesos, luminosidad, calor, distancia, etc.), no está sin embargo en la posibilidad de cuantificarlas, de ahí la necesidad instrumental externa.

Con todo y ello, la noción de que dos objetos tienen un peso distinto al ponerlos sobre una balanza simple de platillos, no permite dar respuesta a ninguna de las preguntas: ¿cuántos unidades es más pesado uno que otro? ni ¿cuántas veces un objeto es más pesado que otro?. En cualquier caso, tendría que usarse un instrumento de medición más elaborado para cuantificar el peso de ambos objetos.

Conseguidos los números que denotan el peso de cada uno de los objetos habría que obtener la diferencia entre ellos para dar respuesta a la primera pregunta del parágrafo anterior o el cociente entre ellos para dar respuesta a la segunda.

Los recursos técnicos fundamentales para la comparación aritmético algebráica (según el nivel educativo) son la diferencia y el cociente entre números (aritmético) o entre variables (algebráico).

Es así que cada uno de ambos recursos nos permiten realizar comparaciones de manera especial; y así, establecer no solo si efectivamente hubo variación, sino también el cuantificarla con una significación asociada al recurso de comparación usado.

Por razones que les son intrínsecas, los algoritmos de resta y división, ambos recursos de comparación, se encuentran ligados en el tipo de variación denominado directa o proporcional.

Por ejemplo, al disponer de \$25.00 pesos para comprar cuadernos y percatarnos de que cada uno de ellos cuesta \$3.00 pesos, la pregunta natural es, ¿cuántos podré comprar?.

Una forma de llegar a la respuesta, sería proceder aditivamente (3 + 3 + 3 + ...) e ir calculando las sumas parciales hasta completar el número de pesos más cercano a 25 sin excéderse de él, otro proceso puede ser sustractivo (25 - 3 - 3 - 3 -...) e ir calculando los restos parciales hasta el que sea menor que 3.

Estos dos procedimientos básicos tienen asociados dos procesos que constituyen correspondientemente su abstracción, el producto (en el primer caso) y el cociente (en el segundo), con el primero de ellos se puede recitar la tabla del 3 hasta obtener el producto más cercano y no excedente a 25 y con el segundo, realizar el cociente de 25 por 3 hasta obtener un residuo menor que 3.

El tipo de variación proporcional directa implícito en esta situación, está representado en las primeras dos columnas de la siguiente tabla:

Nº de Cuadernos x	Costo Asociado y
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
7	21
8	24
9	27

Tabla 1. En esta tabla se muestra la relación entre el costo asociado (y) en pesos y el número de cuadernos (x).

Cociente entre Costo Asociado y Nº de Cuadernos y/x	Diferencia entre costos sucesivos $y_x - y_{x-1}$
3	
3	3
3	3
3	3
3	3
3	3
3	3
3	3
3	3

en la que que el recurso para evidenciar la existencia y el tipo de correlato en la variación son el cociente y la diferencia entre números.

Nótese que la variación proporcional directa puede caracterizarse mediante la razón siguiente:

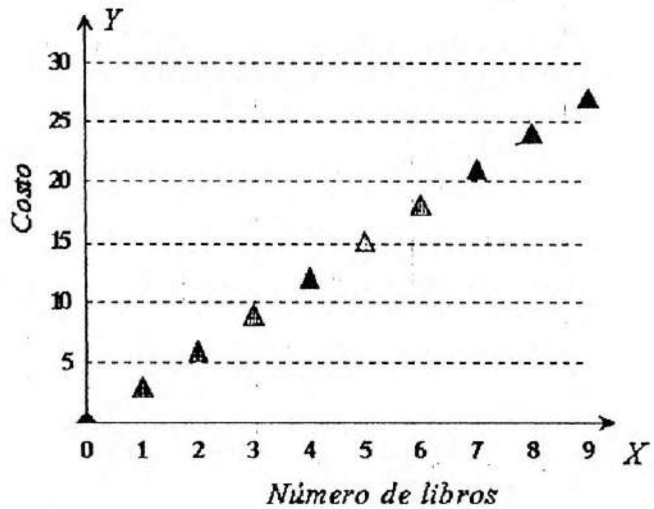
$$\frac{y}{x} = k$$

expresión en la que y denota el costo asociado según el número de cuadernos, x el número de cuadernos y k la llamada constante de proporcionalidad (en el ejemplo $k=3$).

Otro razgo característico de este tipo de variación, es que la diferencia entre los precios asociados a números consecutivos de cuadernos es también k, es decir

$$y_{(x)} - y_{(x-1)} = k.$$

Una representación gráfica de la variación proporcional directa entre el costo y el número de libros presentada en el ejemplo anterior, es la siguiente:



En la caracterización de la variación proporcional directa entre dos magnitudes, debe incluirse, desde luego, el caso o situación en el que la constante de proporcionalidad es un número negativo.

Por ejemplo, si observamos que en cada vuelta "a tomar agua" de los niños a la cocina, cada uno de los cinco toma una galleta, ¿cuántas galletas habrán consumido después de 3 vueltas a la cocina? ¿y después de 5 vueltas? .

Suponiendo que al inicio de la observación había 100 galletas, ¿qué tipo de relación hay entre los siguientes pares de magnitudes:

a) *galletas sustraidas* vs *vueltas a la cocina*?

b) *galletas restantes* vs *vueltas a la cocina*?

vhernan@gauss.mat.uson.mx

Podemos hacer una tabla que evidencie el comportamiento de la relación entre las parejas de magnitudes propuestas antes:

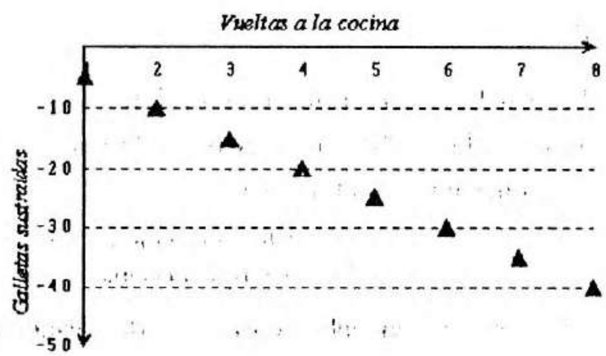
Vueltas a la cocina x	Total de galletas sustraídas y
1	-5
2	-10
3	-15
4	-20
5	-25
6	-30
7	-35
8	-40

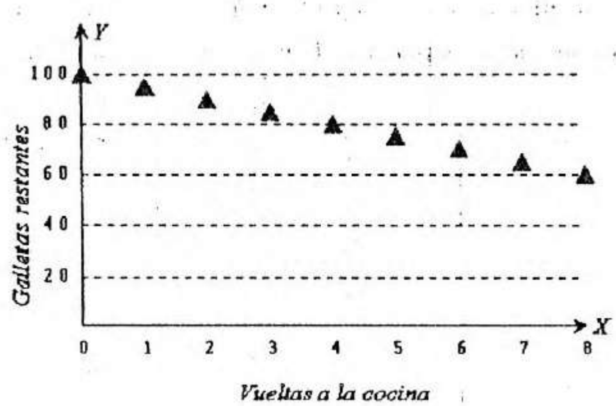
Tabla 2. Se muestra la relación entre el total de galletas sustraídas y el número de vueltas a la cocina.

Vueltas a la cocina x	Galletas restantes (de 100 que había) y
1	95
2	90
3	85
4	80
5	75
6	70
7	65
8	60

Tabla 3. Se muestra la relación existente entre las galletas restantes (de 100 iniciales) y el número de vueltas a la cocina.

cuyas gráficas correspondientes son las siguientes:





En el primer caso, tenemos un correlato de variación proporcional directa *Galletas sustraidas* vs *Vueltas a la cocina,* situación que puede identificarse al comparar con un cociente los sucesivos valores de las variables implicadas, en el que se cumple que:

$$\forall i,\ \frac{\text{Galletas sustraidas}}{\text{Vueltas a la cocina}} = \frac{y_{(x_i)}}{x_i} = k,$$

donde $k = -5$.

En cambio, este tipo de correlato de variación proporcional directa no es observable en el caso de *Galletas restantes* vs *Vueltas a la cocina*, pues no se cumple que

$$\forall i,\ \frac{\text{Galletas restantes}}{\text{Vueltas a la cocina}} = \frac{y_{(x_i)}}{x_i} = k$$

Sin embargo, en ambos correlatos de variación se observa que

$$y_{(x)} - y_{(x-1)} = -5$$

Esta observación da pie a la caracterización de un tipo de variación más general, el denominado como *variación lineal*, del que ambas situaciones anteriores son casos particulares:

$$\text{Variación lineal} \begin{cases} \text{Proporcional directa:} & \frac{y}{x} = k \\ \text{Aditiva:} & \frac{y-b}{x} = k \end{cases}$$

De esta manera se muestra, que el afirmar que la razón entre dos magnitudes es una constante, puede incluir situaciones de variación proporcional directa con una casuística amplia, según el valor de la constante sea positivo o negativo, y también, que es posible el realizar extensiones aditivas lo que permite extender los correlatos variacionales de proporcionalidad directa a la variación lineal.

Por otro lado, si consideramos al cociente como la *operación inversa* del producto y hacemos una extensión de las ideas anteriores, tenemos que la variación proporcional inversa entre las magnitudes y y x podría ser caracterizada por una relación del tipo

$$yx = k.$$

A manera de ejemplos[4], se incluyen cuatro tablas en las que se presentan relaciones numéricas entre dos variables con la intención de identificar el tipo de variación que se presenta en cada una de ellas y a continuación se presentan las gráficas correspondientes.

Días	# de Carros
30	600
60	1,200
15	300
10	200
20	400

Tabla 4. Se muestra la relación entre la cantidad de carros que se ensamblan en una fábrica y los días que se lleva hacerlo.

Edad de Juan	Edad del hermano
4	12
5	13
6	14
7	15
8	16

Tabla 5. Se muestra la edad de Juan y la relación que guarda con la de su hermano mayor.

[4] tomados de SEP., Guía para el Maestro de Sexto Grado de Educación Primaria. SEP, México., 1992. Respectivamente en orden de aparición: Variación proporcional directa ($k=20$), Variación aditiva ($k=1$ y $b=8$), Variación prorcional inversa ($k=72$) y Variación proporcional inversa ($k=20$).

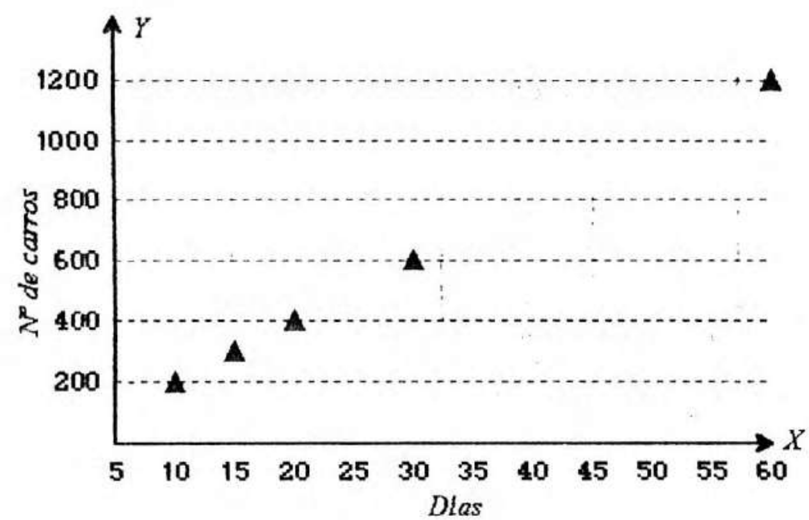
Número de personas	Cantidad en Kg. para cada una
2	36
3	24
4	18
6	12

Tabla 6. Se muestra el número de kg de carne que le toca a cada persona si el número de ellas aumenta y la cantidad total de carne se mantiene fija.

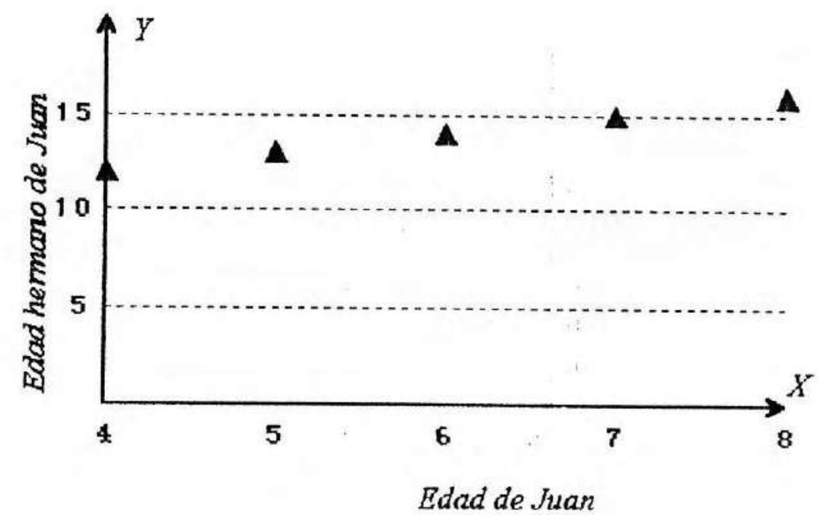
Cantidad de vasos diaria	Días que alcanza el agua
1	20
2	10
1/2	40
1/4	80

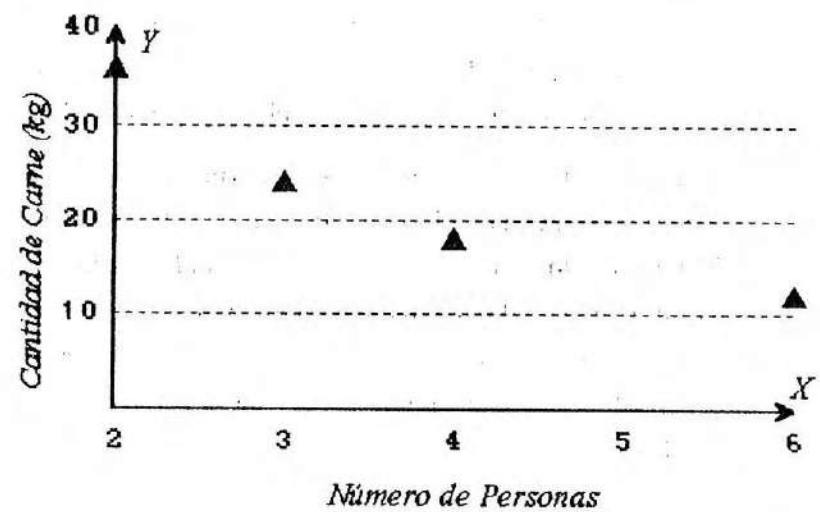
Tabla 7. Se muestra la relación entre el número de días que le dura el agua a un náufrago y la cantidad diaria de vasos que toma.

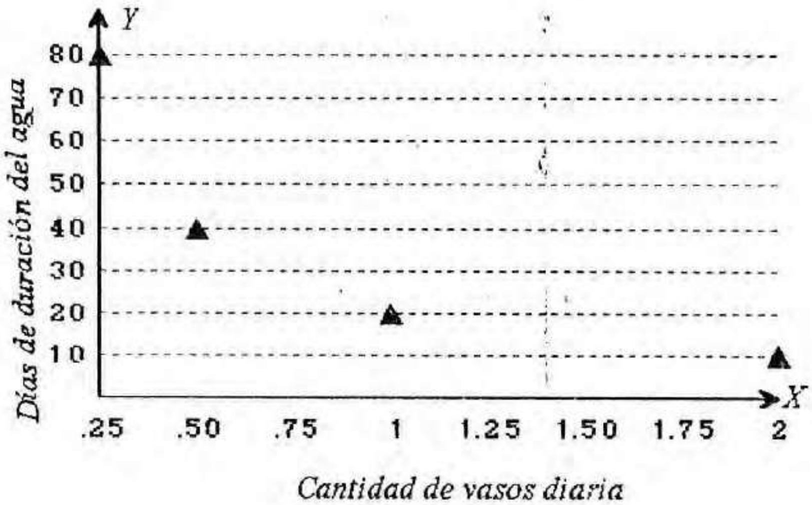
Las gráficas correspondientes a cada situación, son:



vhernan@gauss.mat.uson.mx


Y
Edad hermano de Juan
15
10
5
X
4
5
6
7
8
Edad de Juan


40
Y
Cantidad de Carne (kg)
30
20
10
X
2
3
4
5
6
Número de Personas



Del estudio de la variación (de algún tipo) mediante los recursos técnicos básicos de tomar la diferencia y/o el cociente para evidenciarla, conduce al concepto más general de relación entre magnitudes o variables, emergiendo así la relevancia fundamental de éstos recursos, pues ellos no sólo permiten evidenciar la medida de la variación según hemos visto, sino también, la cualidad o tipo de ella.

Por cierto es de particular importancia el orden en el que la diferencia, el cociente y la combinación de estos tendría que hacerse en cada uno de los niveles educativos tomados como contexto[5] de la práctica, pues en educación básica hay algunas cosas que son absurdas, aunque en educación media las mismas pueden resultar naturales y hasta indispensable examinar, mientras que otras serán pertinentes sólo hasta el nivel superior[6].

[5] En el caso, por ejemplo, de la educación básica como contexto, sería absurdo (positivamente) el considerar diferencias en las que el sustraendo sea mayor que el minuendo, pues no hay en él -según el currículo del nivel- soporte para los números negativos, por la misma circunstancia del nivel, resulta absurdo también el proponer *razones* que sean números negativos; no obstante se requiere que ambas situaciones sean examinadas en el nivel medio básico de educación, contexto escolar en el que ya se tiene soporte curricular y epistémico para ello.

[6] No obstante lo indicado en el párrafo, la formulación conceptual emprendida en algún nivel educativo (incluido el primario) debe ser realizado de tal forma, que no se constituya posteriormente en un obstáculo (por omisión, por fijación prematura o aún por una grave deformación) para su extensión y

Comentemos ahora algunos aspectos que sobre el tema, fueron publicados en el documento *La enseñanza de las MATEMÁTICAS en la escuela primaria. Taller para maestros. 2 Segunda parte.* SEP. Programa Nacional de Actualización Permanente. México. 1995.

En el recuadro enfático de la pág. 109, a manera de resumen conceptual de la actividad sobre Variación proporcional y no proporcional de la pág. 104, se lee:

> *"Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una cantidad, la otra aumenta en la misma proporción"*

y aunque en el siguiente párrafo se indica

> *"También se puede decir que dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre dos magnitudes correspondientes es siempre constante"*

toda la actividad está enfocada para apoyar la (primera) versión -yo diría mnemotécnica de la variación proporcional-, no así a la (segunda) versión en términos de la razón entre cantidades correspondientes, sin restringir el signo que deba tener esta razón.

Se podría argumentar quizá que el "*También se puede decir*" que encabeza al segundo párrafo indica la equivalencia entre las dos versiones, afirmación que es correcta aunque injusta; pues la segunda versión incluye en su casuística situaciones no contempladas en la primera. Tampoco se abordan ejemplos que pudieran extender el concepto.

De esta manera, asistimos a la deformación -por limitaciones en el tratamiento- de un concepto medular en matemáticas, y cuyas repercusiones habrán de sentirse longitudinalmente en todos los niveles de la vida académica de nuestro país.

conformación ulterior, una vez experimentada con suficiencia su manifestación morfológica.

Puede decirse quizá, que para la educación primaria de las jóvenes generaciones de estudiantes esto podría ser suficiente, pero no hay razones válidas para restringir la formación conceptual del profesor de educación básica, sólo porque se desempeña laboralmente en ese contexto, ni para abrir la posibilidad de que esta limitación conceptual permee en algún momento la formación matemática de las jóvenes generaciones.

Se desaprovecha también, la oportunidad de extender la variación proporcional directa ($\frac{y}{x} = k$) con la variación del tipo aditivo ($\frac{y-b}{x} = k$), que como antes indiqué, consituyen una manera de conformar correlatos más generales como la variación lineal.

La conformación en extenso de la variación lineal, deviene en un asunto de fundamental importancia, pues a este nivel de educación se aborda la estrategia algorítmica de cálculo de la *cuarta proporcional* ("regla de tres" elementos conocidos en una proporción en la que hay que determinar el cuarto término) para la resolución de problemas, que sólo es aplicable al caso de un correlato de variación proporcional directa entre las variables, pero que en los niveles subsecuentes será fuente de muchos errores al creer que ésta también es aplicable al caso de variación aditiva, que es otro tipo de variación lineal.

Sugiero entonces, que en este nivel se aborde la variación lineal en un sentido abarcante de sus manifestaciones, hasta el nivel de diferenciación de la variación lineal directamente proporcional y la aditiva, así como entre la variación lineal y la inversamente proporcional, esto es:

$$\text{Variación}\begin{cases}\text{Lineal}\begin{cases}\text{Proporcional Directa:} & \frac{y}{x} = k\\[2ex] \text{Aditiva:} & \frac{y-b}{x} = k\end{cases}\\[4ex] \text{No lineal}\ \left\{\ \text{Proporcional Inversa:}\ yx = k\right.\end{cases}$$

Propongo entonces, construir una simiente sólida al abordar la diversidad morfológica de los correlatos variacionales básicos: *proporcional directa, aditiva* y *proporcional inversa*, las dos primeras conformando al correlato de variación lineal, distinguiéndolas por sus ámbitos de aplicación y la tercera en distinción de la lineal, usando en todos ellos -para su descubrimiento y caracterización- los recursos técnicos de comparación proporcionados por la difemcia y el cociente.

Renglón aparte, cuando ya se han abordado las fracciones en diferentes connotaciones: relaciones, operaciones y contextos (razón, operador multiplicativo, partes de la unidad, división de enteros, repartos, equivalencia, relaciones de orden, suma, resta, etc.) no veo por qué en *La enseñanza de las MATEMÁTICAS en la escuela primaria. Taller para maestros. 2 Segunda parte*[7]*.*, SEP. Programa Nacional de Actualización Permanente. México.1995. p.163, se empieza el Capítulo IV, La predicción y el azar, indicando a los profesores al final del párrafo introductorio, que:

> *"Este tipo de situaciones permite realizar una introducción a la probabilidad, sin llegar a cuantificarla"*

cuando es precisamente ésto, la cuantificación y asignación de éstas a los elementos del espacio muestral de un experimento, lo que permite tomar una decisión (aún en un contexto lúdico) respecto a la incertidumbre provocada por una variable aleatoria.

La determinación de los elementos del espacio muestral, S, de un experimento y la cuantificación y asignación de la probabilidad correspondiente a los valores del rango, R_X, de una variable aleatoria definida sobre S, es decir el establecimiento de la fimción de probabilidades, se corresponde exactamente con dos pretensiones establecidas en un recuadro enfatizado en la pág. 174, en el que se lee:

---

7 Ver también el libro: Secretaría de Educación Pública., Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos., Matemáticas., Sexto Grado. México. 1994. págs. 111-112.

"La probabilidad proporciona una excelente oportunidad a los alumnos de matematizar ...... Es importante que durante los años de la escuela se enseñe a los niños a discutir, argumentar sus predicciones y a contrastarlas con lo que realmente sucede ...:"

Las referidas pretensiones en el contexto de La predicción y el azar, no pueden concretarse sin la asignación de medidas de probabilidad correspondiente a cada uno de los elementos del espacio muestral de un experimento, pues es precisamente esto lo que constituye la matematización de una situación no determinista y también, la fuente de información para el ejercicio de la descripción y la argumentación.

En resumen, para poder tomar decisiones sobre los posibles resultados del experimento consistente en *lanzar un par de dados y avanzar tantos cuadritos como la suma de los puntos obtenidos en ambos dados*, es necesario:

- establecer el espacio muestral correspondiente al experimento y
- a cada uno de los valores del rango de la variable aleatoria definida sobre él, asignar una medida de la confianza que podríamos tener de que éste ocurra[8].

De esta manera al obtener (mediante la comparación) las correspondientes medidas de la significación que cada evento particular tiene en el espacio muestral que le corresponde como contexto, podemos decidir sobre la conveniencia de jugar tal o cual "juego", o en su defecto proponer concientemente un juego alterno.

El establecer el espacio muestral asociado a un experimento como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento dado, puede constituirse en un ejercicio formidable de combinatoria y de expresión escrita, ejercicio que puede graduarse con el experimento propuesto.

[8] bajo el simple expediente de construir una razón que compara el "tamaño del evento" correspondiente con el "tamaño del espacio muestral" que le sirve de contexto.

vhernan@gauss.mat.uson.mx

El espacio muestral, S, del experimento E_1 *lanzar un par de dados* es

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)
2	(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 3)	(2 , 4)	(2 , 5)	(2 , 6)
3	(3 , 1)	(3 , 2)	(3 , 3)	(3 , 4)	(3 , 5)	(3 , 6)
4	(4 , 1)	(4 , 2)	(4 , 3)	(4 , 4)	(4 , 5)	(4 , 6)
5	(5 , 1)	(5 , 2)	(5 , 3)	(5 , 4)	(5 , 5)	(5 , 6)
6	(6 , 1)	(6 , 2)	(6 , 3)	(6 , 4)	(6 , 5)	(6 , 6)

en este contexto, según cada uno se los resultados del experimento podemos proponer el avanzar tantos cuadritos como la variable aleatoria X: *suma de los puntos obtenidos en ambos dados*, cuyo rango es, desde luego,

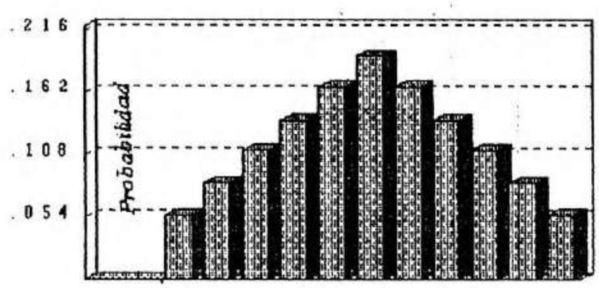
$$R_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

En referencia al contexto proporcionado por el espacio muestral, es posible advertir por ejemplo, que de los 36 posibles resultados del experimento sólamente 3 permitirían obtener 10 puntos, por lo que una medida de la confianza que podríamos poner en la ocurrencia del evento - *Obtener 10 puntos* - es la proporcionada por la razón que nos significa el *peso relativo* que tiene obtener diez puntos *en el contexto* general que le es propio, es decir $\frac{3}{36}$.

De manera análoga, mediante el establecimiento de las razones correspondientes es posible formular el modelo matemático para la variable no determinista o aleatoria implicada en este experimento, a saber la *suma de los puntos obtenidos al lanzar dos dados*, como se indica:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

con la riqueza de que al hacerlo, podemos explotar de nueva cuenta el ambiente de la representación gráfica de la relación entre magnitudes



Suma de los puntos al lanzar dos dados

y aún más, este noble ejemplo permite concretar la expresión analítica[9] del *comportamiento* estocástico de la variable:

$$P[X=x]=\begin{cases} \frac{x-1}{36} & si \quad x=2,3,4,5,6,7 \\ \frac{13-x}{36} & si \quad x=8,9,10,11,12 \\ 0 & si \;\; x \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

De nueva cuenta, el concepto de función tiene un papel de primera línea en el tratamiento de situaciones no deterministas, contexto en el que cobra vida y significación el concepto de variable aleatoria que no es otra cosa que una función definida sobre el espacio muestral de un experimento a cuyos valores son asociados -mediante otra función- los correspondientes a su probabilidad.

9 lo que no siempre es posible.

Nivel de Educación Medio Básico

En el nivel medio básico, los contenidos curriculares han sido organizados para su estudio alrededor de cinco ejes: Aritmética, Algebra, Geometría, Presentación y Tratamiento de la Información y Probabilidad.

En relación a la temática asociada con Razones, Proporciones y Variación, en el LIBRO PARA EL MAESTRO de educación media básica, se menciona el Razonamiento Proporcional (págs. 107-123) y su estrecha relación con el estudio de la variación lineal (directamente proporcional y aditiva) en una casuística de aplicaciones abundante y rica en manifestaciones, hasta el nivel de la expresión más general

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

expresión en la que implícitamente se tiene un cociente de diferencias lineales, los que se abordan más de cerca en el tema de funciones al que luego haré referencia.

En la obra mencionada (pág. 110) se establece que:

> *En muchas situaciones interesantes el incremento relativo o tasa de crecimiento de una variable es proporcional al incremento de la otra y se tiene:*
>
> $$\frac{y-y_0}{y} = k(x - x_0)$$
>
> *Esta relación define*[10] **(sic)** *las funciones exponenciales y logarítmicas que, después junto con las funciones lineales, constituyen la familia de funciones más importantes de las matemáticas.*
>
> *Para ver un ejemplo, consideremos el caso de un cultivo de laboratorio en que se duplica el número de bacterias cada 25 horas en promedio. Si llamamos N_0 al número de bacterias al inicio, la situación al cabo de 1, 2, 3, ... periodos de 25 horas está representada en el siguiente diagrama:*

10 Cfr. SEP., Libro para el Maestro., Educación Secundaria. México. 1994. P. 110

$$No \xrightarrow{\times 2} 2No \xrightarrow{\times 2} 4No \xrightarrow{\times 2} 8No \xrightarrow{\times 2} 16No \xrightarrow{\times 2}$$

Incremento	**+No**	**+2No**	**+4No**	**+8No**	**+16No**
Incremento relativo (tasa de crecimiento)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Nada impide dar una presentación a la observación en el párrafo anterior que permita evidenciar lo que se propone en ella.

El tipo de variación que se indica en el ejemplo, puede consignarse en una tabla:

x	P(x)
0	N_0
1	$2N_0$
2	$4N_0$
3	$8N_0$
4	$16N_0$
.	.
.	.
.	.

Es relativamente sencillo concluir que la relación entre las variables indicadas en la tabla, es del tipo

$$P(x) = 2^x N_0,$$

o bien, de manera alternativa, que

$$P(x) = (1+1)^x N_0$$

expresión en la que se muestra que la tasa de crecimiento que aparece en el primer factor es de 100 %, es decir, en cada ciclo del proceso, la población se duplica.

Sin embargo, resulta difícil llegar a ello a partir de la expresión que antecede el ejemplo, la que en mi opinión debiera escribirse como:

$$\frac{y_{x_n} - y_{x_{n-1}}}{y_{x_n}} = k(x_n - x_{n-1})$$

vhernan@gauss.mat.uson.mx

para indicar que la razón de cambio que permite averiguar la tasa de crecimiento, es la relacionada con los cambios registrados por ciclo unitario del proceso, y no en intervalos de longitud arbitraria como se aparenta en

$$\frac{y-y_0}{y} = k(x - x_0)$$

Considerando la importancia que reviste el proponer materiales de estudio para los profesores, valdría la pena que este tipo de afirmaciones fueran más claramente expuestas, pues en el ejemplo que lo ilustra, debe realizarse un esfuerzo de interpretación notable para concluir que lo indicado en el párrafo anterior es correcto.

Se abordan también, las aplicaciones que pudieran tener los cocientes en diferencias lineales, al aproximar linealmente el valor de una función no lineal, aspecto por demás importante en la preparación de un concepto central como el de derivada de una función que habrá de examinarse en el nivel medio superior y superior.

En la página 111, encontramos:

Por ejemplo, supóngase que se quiere calcular $\sqrt{115}$. *Observemos primero que* $\sqrt{115}$ *está entre* $10 = \sqrt{100}$ *y* $11 = \sqrt{121}$ *y que al pasar de* $\sqrt{100} = 10$ *a* $\sqrt{121} = 11$, *el radicando se incrementa en 21 y la raiz en 1. Entonces la pregunta es: ¿En cuánto se incrementa la raiz si el radicando sólo se incrementa en 15?*

Para obtener aproximadamente ese valor, se realiza la regla de tres:

$$12 \to 1$$

$$15 \to x$$

$$x = \frac{15}{21} = 0.714...$$

de donde se obtiene:

$$\sqrt{115} = 10 + 0.714... = 10.714...$$

que como puede verse no está lejos de la raíz buscada (el valor exacto es $\sqrt{115}$ = 10.723...).

Este es un ejemplo de cuya importancia para el currículo matemático no es posible dudar, pues están implícitos *los cocientes en diferencias lineales*, el concepto de *aproximación lineal* y el concepto de derivada.

Sin embargo, con el tratamiento que les han dado en el ejemplo, estos conceptos han quedado ocultos.

No hay ninguna dificultad ni impedimento en el nivel que no permita representar la variación a la que se hace mención, en forma tabular y plantear la interrogante propuesta en esos términos:

x	$y = \sqrt{x}$
100	10
115	?
121	11

Por otro lado, el establecer (como se hace en el párrafo anterior al ejemplo) que:

...en muchas situaciones la relación entre dos cantidades no es ni lineal ni exponencial, pero se puede suponer que para valores pequeños de los incrementos, el incremento de y es proporcional al incremento de x...

permite representar inmediatamente la interrogante en la tabla como sigue:

$$\frac{y-10}{x-100} = \frac{11-10}{121-100}$$

vhernan@gauss.mat.uson.mx

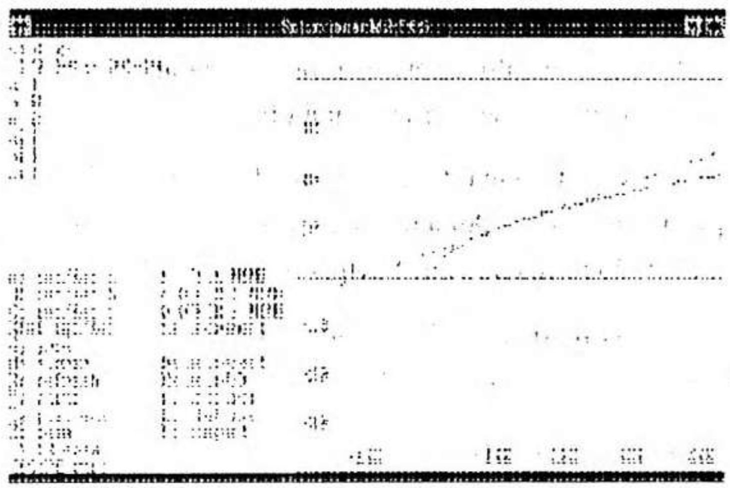
expresión en la que, queda claro, al despejar y, que:

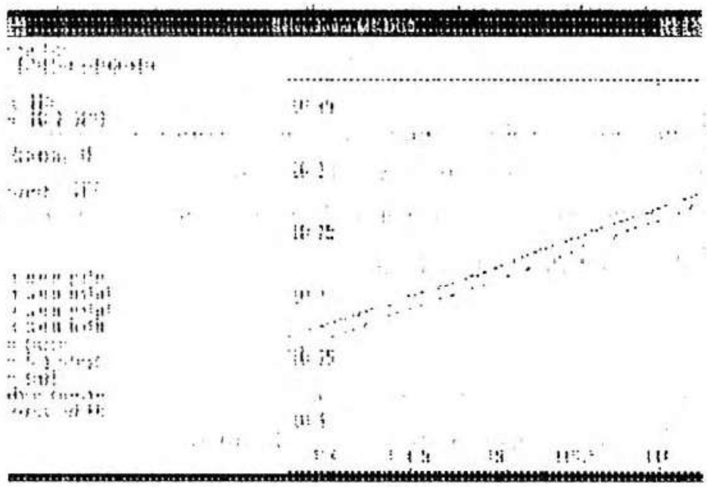
$$y = \frac{1}{21}(x - 100) + 10$$

que no se trata de una variación proporcional directa, contexto propio de una regla de tres, y además, que siendo $y = \sqrt{x}$, entonces la expresión anterior que correponde a una recta, permite aproximar el valor de esta última, en la forma

$$\sqrt{x} \cong \frac{1}{21}(x - 100) + 10$$

Por otro lado, una forma de argumentar de manera plausible sobre la bondad de la aproximación es el mostrar las gráficas de ambas expresiones, es decir las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y la de $y = \frac{1}{21}(x - 100) + 10$, como se muestra enseguida:





Colateralmente, estamos también abordando los primeros pasos de lo que podría ser una *cultura del análisis gráfico* y los correlatos existentes y/o posibles entre representaciones tabulares, gráficas, analíticas, icónicas, analógicas, simbólicas, etc.

Un aspecto notable en el nivel, es la inclusión del estudio incipiente de la modelación con procesos recursivos en diversos ámbitos de la formación matemática de este nivel.

En **Aritmética**, ver: el problema *Historia de dos tiendas* (pág. 69)[11] y *Raíz Cuadrada* (págs.134-141).

Historia de dos tiendas

En un poblado con 1000 clientes potenciales hay dos tiendas: "La Michoacana" y "La Flor de Michoacán". Cada mes, el 85% de los clientes que compra en "La Michoacana" queda satisfecho y vuelve a comprar en la misma tienda, mientras que el otro 15% cambia de tienda y compra en "La Flor de Michoacán". En cambio, de los clientes de "La Flor de Michoacán" sólo el 75% regresa a comprar ahí, mientras que el restante 25% se va a comprar a "La Michoacana". Al principio del año

[11] Op. cit.

500 clientes en "La Michoacana" y 500 en "La Flor de Michoacán". ¿Qué pasará al cabo de 1,2,3,... meses? Investiga lo que ocurre si al principio eran 750 clientes los que compraban en "La Michoacana" y 250 los que compraban en "La Flor de Michoacán". Investiga también lo que ocurre para otros valores iniciales.

Yo inscribiría a la situación descrita, como un excelente ejemplo de introducción tanto a los procesos recursivos y su modelación como a los sistemas dinámicos.

Por otro lado, es también de hacerse notar que el medio natural para la explotación del tipo de situaciones que, como ésta, involucran procesos recursivos y cantidades industriales de operaciones aritméticas, es el uso de recursos tecnológicos como las calculadoras y computadoras.

De manera natural, éstos permiten como en la siguiente tabla, tener una panorámica muy rápida de lo que está ocurriendo en la situación descrita en la Historia de dos tiendas

La Michoacana:		Mo=500		
La Flor de Michoacán:		Fo=500		
Mes	.85Mn	.25Fn	Mn+1=.85Mn+.25 Fn	Fn+1=.75Fn+.15Mn =(Mo+No)-Mn+1
1	425	125	550	450
2	467.5	112.5	580	420
3	493	105	598	402
4	508.3	100.5	608.8	391.2
5	517.48	97.8	615.28	384.72
6	522.988	96.18	619.168	380.832
7	526.2928	95.208	621.5008	378.4992
8	528.27568	94.6248	622.90048	377.09952
9	529.46541	94.27488	623.740288	376.25971
10	530.17924	94.064928	624.2441728	375.75583
11	530.60755	93.938957	624.54650368	375.4535
12	530.86453	93.863374	624.727902208	375.2721

13	531.01872	93.818024	624.8367413248	375.16326
14	531.11123	93.790815	624.90204479488	375.09796
15	531.16674	93.774489	624.94122687693	375.05877
16	531.20004	93.764693	624.96473612616	375.03526
17	531.22003	93.758816	624.97884167569	375.02116
18	531.23202	93.75529	624.98730500542	375.01269
19	531.23921	93.753174	624.99238300325	375.00762
20	531.24353	93.751904	624.99542980195	375.00457
21	531.24612	93.751143	624.99725788117	375.00274
22	531.24767	93.750686	624.9983547287	375.00165
23	531.2486	93.750411	624.99901283722	375.00099
24	531.24916	93.750247	624.99940770233	375.00059
25	531.2495	93.750148	624.9996446214	375.00036
26	531.2497	93.750089	624.99978677284	375.00021
27	531.24982	93.750053	624.9998720637	375.00013
28	531.24989	93.750032	624.99992323622	375.00008
29	531.24993	93.750019	624.99995394293	375.00005
30	531.24996	93.750012	624.99997236576	375.00003
31	531.24998	93.750007	624.99998341946	375.00002
32	531.24999	93.750004	624.99999005167	375.00001
33	531.24999	93.750002	624.999994031	375.00001
34	531.24999	93.750001	624.9999964186	375

y aún incursionar en la investigación de otros escenarios proporcionando diferentes condiciones iniciales, entrando con ello en el campo de la simulación, de la conjetura y la necesidad eventual de validar a estas últimas.

Raíz Cuadrada

Existen muchos métodos para calcular la raíz cuadrada de un número y la mayoría son más comprensibles y eficientes que el método tradicional de la "casita", aunque para algunas necesidades este método puede ser el más conveniente. Paradójicamente, el método más eficiente es el más simple de explicar, como veremos a continuación:

El Método babilónico.

Este método está basado en el hecho de que obtener la raíz cuadrada de un número N equivale a encontrar cuánto mide el lado de un *cuadrado de área N. Para llevar adelante este cálculo se comienza con cualquier rectángulo de área N y, a partir del mismo, se construye una sucesión de rectángulos de la misma área, pero con lados cada vez más parecidos entre sí, es decir, una sucesión de rectángulos cada vez más parecidos a un cuadrado.*

Ilustraremos este método mediante el cálculo de la raíz cuadrada de 2. Así no sólo se simplificarán los cálculos, sino que veremos un ejemplo muy importante desde el punto de vista histórico.

Paso 1

Comenzamos tomando un rectángulo de área 2, por ejemplo, el rectángulo cuyos lados miden 1 y 2, respectivamente.

Paso 2

Para obtener un rectángulo de lados más parecidos entre sí, tomamos un rectángulo cuya base sea el promedio de 1 y 2. Esto es:

$$\text{base}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1.5$$

Como el área del rectángulo tiene que ser 2, tenemos que:

$$\text{altura}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}=1.333...$$

Es fácil verificar que:

$$\frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$$

o lo que es lo mismo

$$1.333...<\sqrt{2}<1.5$$

Paso 3

Si queremos obtener un rectángulo de lados aún más parecidos entre sí, tomamos uno cuya base sea el promedio de los lados del rectángulo que se obtuvo en el paso anterior:

$$\text{base}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}=1.416...$$

Como el área tiene que ser 2, tenemos:

$$\text{altura}=\frac{2}{\frac{17}{12}}=\frac{24}{17}=1.411...$$

y se verifica que:

$$\frac{24}{17}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}$$

o equivalentemente:

$$1.411...<\sqrt{2}<1.416..$$

Paso 4

Procediendo como en los pasos anteriores se obtiene:

$$\frac{816}{577}<\sqrt{2}<\frac{577}{408}$$

o equivalentemente

$$1.414211...<\sqrt{2}<1.414215.$$

Lo que quiere decir que, hasta la quinta cifra decimal, se tiene:

$$\sqrt{2}=1.41421..$$

Si se continúa en la misma forma se verá que en el siguiente paso se obtienen más de diez cifras decimales exactas; en el siguiente más de veinte y así sucesivamente. De hecho, a partir del paso siguiente, se obtienen más cifras decimales de las que pueden observarse en la pantalla de la calculadora.

Una forma distinta de ver el método ....

Este ejemplo es una conjunción de procesos recursivos, geometría, aritmética, relaciones de orden, criterios de aproximación y casos límite, todo en el mismo paquete. Ejemplos como éste, no debieran desaprovecharse en su riqueza y aún, buscar la producción de otros.

En **Álgebra**, ver: *Simbolización de la regla* (pág. 156) y Funciones recursivas (pág. 185-187).

Simbolización de la regla.

Podemos motivar a los alumnos a que simbolicen la regla que sigue una secuencia, si les pedimos que encuentren términos muy avanzados de la misma , por ejemplo, el término que aparece en el lugar 20 o en el lugar 45, o si les presentamos situaciones más complejas, como la siguiente:

Este ejemplo es una excelente entrada para la búsqueda inductiva de patrones, para progresiones geométricas, para la función exponencial, para conceptos como *autosimilitud* a diferentes escalas, dimensiones no enteras y sin lugar a dudas la geometría fractal.

Funciones recursivas

La popularización de las computadoras ha hecho que los tratamientos numéricos de ciertas situaciones y problemas resulten accesibles y, por lo tanto, que las funciones definidas recursivamente se vuelvan muy importantes.

Por esto conviene que haya actividades para que los alumnos conozcan este tipo de funciones. Por ejemplo, al momento de estudiar el método babilónico para calcular raíces cuadradas se puede introducir o pedir a los alumnos que encuentre la fórmula de recurrencia correspondiente:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2+N}{2x_n} \end{cases}$$

Otros ejemplos

1. En 1993, la población de la República Mexicana era de alrededor de 82 millones de habitantes y crece a una tasa del 2.2% anual aproximadamente, ¿Cuál será la población al cabo de 1,2,3,... años?.

Solución

......

En general, se tiene la fórmula de recurrencia

$$P_{n+1} = (1.022)P_n$$

2. Considera la siguiente fórmula de recurrencia

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = b \\ x_{n+1} = \frac{x_n+x_{n-1}}{2} \end{cases}$$

Calcula varios valores tomando a=1 y b=2. Haz lo mismo tomando a=2 y b=1. Ensaya con otros valores y comenta con tu profesor y compañeros lo que observas.

3. Una caja de ahorros ofrece un interés de p% mencual. Una persona deposita N nuevos pesos todos los meses. ¿Cuánto tendrá ahorrado al cabo de 1,2,3,... meses?

Solución

Si llamamos A_0 al depósito inicial y $A_1, A_2, A_3,\ldots$ a lo que tiene ahorrado al cabo de 1, 2, 3, meses, la fórmula de recurrencia es:

$$\begin{cases} A_0 = N \\ A_{n+1} = (1+p)A_n + N \end{cases}$$

En **Presentación y Tratamiento de la Información**, ver: *Crecimiento exponencial* (pág. 357).

De esta manera al parecer en los libros de texto para la formación de los profesores a nivel medio básico, están dados una buena cantidad de pilares conceptuales y metodológicos, los que a mi parecer no se están explotando por inadvertencia de su riqueza.

Otro aspecto, a mi juicio inadvertido, es el papel central que juega el concepto de función, al que reiteradamente he hecho referencia en situaciones deterministas y no deterministas, numéricas, geométricas estándar y no estándar, etc..

A pesar de que en estos ejes es posible desarrollar con profusión a los procesos recursivos, los grandes ausentes en su inclusión son los ejes conceptuales de **Geometría** y el de **Probabilidad**, aunque los ejemplos *Raíz cuadrada* (Aritmética) y *Simbolización de la regla* (Álgebra) están inmersos en un contexto esencialmente geométrico.

Por otro lado, es de lamentarse que en **Álgebra**, cuando se abordan las funciones y sus gráficas, se considere el problema de partir de los datos de observación (como ocurre en los problemas reales) para construir el modelo matemático correspondiente a la situación sólo de manera muy incipiente.

En cuanto a la significatividad conceptual, no es raro ni casual que los estudiantes aun a nivel superior quieran resolver muchos problemas de variación, usando una "regla de tres", porque (hipótesis...!) el tema de razones, proporciones y sus aplicaciones, es uno de los pocos temas a los que se les dió la atención pertinente en el nivel básico y medio básico hasta un nivel funcional al resolver gran cantidad de problemas prácticos con él.

Con lo anterior no me estoy pronunciando por una versión utilitarista del currículum matemático, sólamente estoy estableciendo la terrible escasez de momentos en los que el currículo puede resultar significativo en términos concretos, sin excluir con ello, el que lo abstracto tenga también un lugar de primera linea en la formación matemática integral de un estudiante.

Al respecto de la competencia en el tratamiento de la temática de la variación, es de recordarse la limitación con la que se aborda, a mi parecer, en los libros de texto para la formación de profesores de los niveles básico y medio básico. Se señala este hecho como una de las posibles causales de la impertinente aplicación de la "regla de tres" a una casuística que aunque lineal, está fuera del contexto que le es propio, este es, el de la variación proporcional directa.

Por otro lado, el avance logrado en el nivel básico en la temática de variación proporcional se malogra de cierta manera, pues al no abordar -en este nivel- el concepto de función en una variedad importante de manifestaciones morfológicas (tabular, gráfica, analítica cuando son posibles) y contextuales reales (mediciones, poblaciones, costos, temperaturas, fuerza, ...) se desperdicia la oportunidad en *todo un nivel educativo* de dar continuidad, extensión y profundidad al trabajo emprendido en el nivel inmediato anterior y de cubrir su declarado propósito[12] fundamental: *el desarrollo de las habilidades operatorias, de comunicación y de descubrimiento en los alumnos.*

Desde mi punto de vista, no es tan importante la mera inclusión en el currículo escolar de las diferentes formas de representación del concepto de función, como lo es el articular las significaciones en una

12 Cfr: SEP., Libro para el Maestro., Educación Secundaria., México 1994, Pág. 12

concepción integral de lo que está ocurriendo con la situación representada.

Así pues, a pesar de que en este nivel la "mesa está servida", el concepto de función es abordado de una manera inconexa no sólo en lo relacionado a sus aplicaciones para resolver problemas reales, sino también en sus formas de representación, sin explotar al parecer, la posibilidad de concretar patrones más generales cuando menos de los tipos correspondientes al nivel, como: $y = ax + b$, $y = a(x - c)^2 + b$ $y = ab^{cx}$, en donde *a*, *b* y *c* son parámetros.

Una de las limitaciones más comunes en el estudio de las relaciones cuantitativas es el abordar en momentos muy distantes e inconexos, las instancias tricotómicas ($y < f(x)$, $y = f(x)$, $y > f(x)$), cuando el hacerlo puede sugerir potentes y diversas estrategias para resolver problemas y aún, para diseñarlos.

Otro de los aspectos que es posible abordar en el nivel y que no se hace, es el relacionado con el modelar seriamente situaciones problema no deterministas. Lo que se hace comúnmente, es poner un énfasis excesivo en la combinatoria y en los problemas de conteo[13] que generan, en el mejor de los casos, cuasialgoritmos para ello, dejando de lado las ideas más importantes como son la de variable aleatoria[14] y la de función de probabilidad.

Para concluir con los comentarios en este nivel, sólo diré que las funciones trigonométricas, están tratadas de una manera estática; en cuanto que con ellas se aborda la determinación de los elementos de triángulos rectángulos particulares, e inconexa con el concepto de función -a pesar de que se les denomina de esa manera- pues su estudio se limita como tales, a considerarlas como razones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, sin abordar el contexto de los

[13] esta forma de proceder es común incluso a los cursos universitarios de probabilidad

[14] Ver: Hernández L., Víctor M., Una Introducción al Estudio de las Variables Aleatorias., UNISON., A/FOMES 90-27-03, PA/MAT Nº 149., Hermosillo, Sonora., 1990.

situaciones dinámicas y fenómenos periódicos que les dieron necesidad y razón de ser[15], entre las que podemos incluir asuntos tan cotidianos como la variación de la temperatura en un día del mes de abril en Hermosillo, Sonora.

Me permito establecer la estricta necesidad de que en este nivel y el inmediato anterior -ambos denominados como básicos- se generen las ideas seminales (de variación) en estricto apego a su corrección matemática, procurando con ello, que en su calidad -seminal- se constituyan en bases sanas y fuertes para el desarrollo de las etapas más avanzadas en el currículo integral de los estudiantes.

En este sentido, no se requiere tanto la profusión de *semillas* como de su excelente constitución y vitalidad.

Nivel de Educación Medio Superior

Este nivel es bastante más difícil de caracterizar en cuanto al uso que en él se hace del concepto de función, pues por un lado, la génesis y evolución histórica[16] de este nivel de estudios en México es de por sí accidentada, y por otro, el Estado no tiene a su cargo -como en los niveles antecedentes- la homogeneidad de los contenidos y enfoques metodológicos del mismo.

En Ortiz de Thomé[17] (1991) encontramos el reporte de que en 1981 se tenían 187 modalidades diferentes de planes de estudio para el bachillerato, un par de años después, en Bolaños Martínez[18] (1993)

[15] Para simulaciones que permitan ilustrar de manera dinámica a las funciones trigonométricas, recomiendo ampliamente el Software Matemático de la Universidad de Arizona.

[16] Ver: Ortiz de Thomé, Consuelo., Algunas Notas Acerca del Bachillerato Universitario., Revista de la Educación Superior. Vol. XX., Núm 1 (77), Enero- Marzo de 1991. ANUIES. México.

[17] Op. cit.

[18] Bolaños Martínez, Víctor Hugo., El Bachillerato ¡Tierra de Nadie! Artículo: El Financiero, Sección:Sociedad., pág. 46., Junio 28 de 1993., México. reporta: "... sin considerar siquiera la disposición de la SEP sobre el diseño programático de los bachilleratos, hoy coexisten en todo el país no menos de 70 planes de estudio diferentes, lo cual se agrava cuando todavía se conservan algunas

encontramos otra referencia a este hecho, en la que se consigna un número menor -aunque no todo lo que se quisiera- de planes de estudio, a saber 70.

Este solo hecho pone en evidencia la gran dispersión que podríamos esperar en la preparación de los bachilleres y la indefinición de los objetivos del nivel o en todo caso la desviación de los originales.

Para los efectos de este escrito, consideraré los trabajos de revisión del plan y programas de estudio para el área de matemáticas, realizados en el Colegio de Ciencias y Humanidades[19], por un lado, porque en mi opinión es uno de los esfuerzos de diseño curricular más documentados, por otro, porque a través de sus publicaciones internas se advierte una referencia explícita a organizar los contenidos bajo un criterio diferente a las ramas de la matemática y finalmente, por el uso de la resolución de problemas como metodología de acercamiento a los conceptos matemáticos.

En los CCH, se han tomado como criterios para la elección y organización de los contenidos matemáticos a los llamados *bloques de contenidos* en lugar de la configuración tradicional en términos de las *ramas de la matemática*, cuando se afirma:

> *"En vez de realizar, para la enseñanza de la matemática, una selección y organización de contenidos que atienda -como generalmente se hace- a la configuración de las ramas tradicionales de esta ciencia, se propone aglutinar los conocimientos en bloques de contenidos.*

---

instituciones que imparten sólo dos grados o cuatro semestres de estudios, mientras la gran mayoría adoptó el esquema de tres grados o seis semestres."

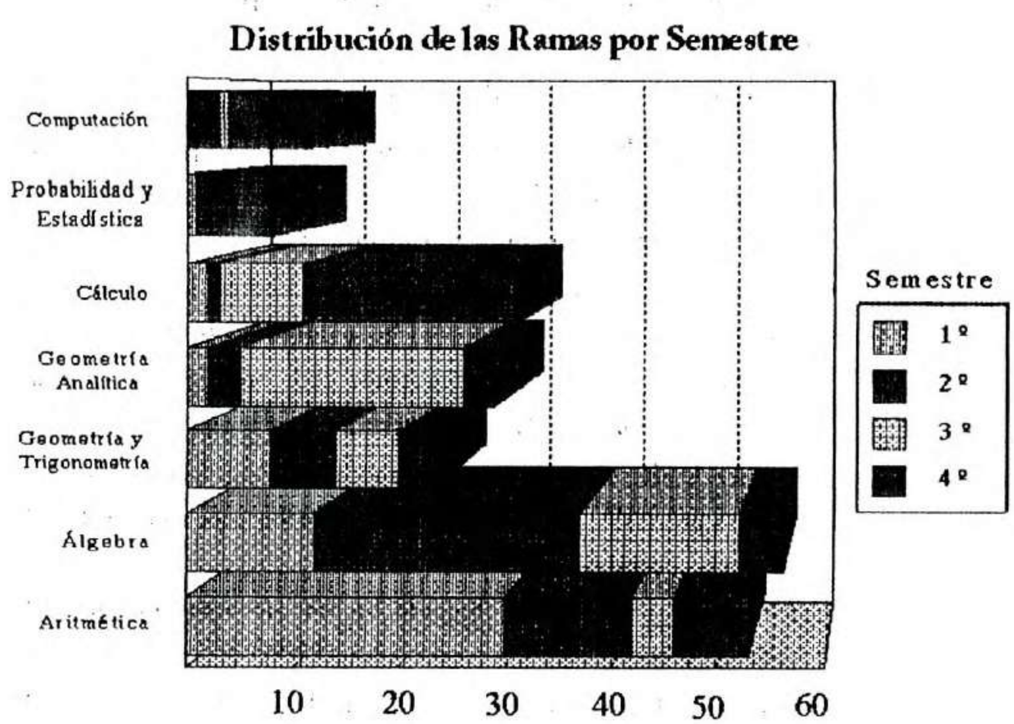
[19] todas las referencias relacionadas con el CCH, están apoyadas en los documentos: Comisión del Área de Matemáticas., SEGUNDA APROXIMACIÓN A LA REVISIÓN DEL PLAN DE ESTUDIOS DEL BACHILLERATO DEL CCH., Cuadernillo Nº 14 del 23 de Abril de 1993., SINTESIS Y PRECISIÓN DE ALGUNOS ASPECTOS DE LA PROPUESTA DE LA COMISIÓN PARA LA REVISIÓN DEL PLAN Y LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS DEL BACHILLERADO DEL CCH Cuadernillo Número 18 del 1° de Septiembre de 1993.

"Los bloques de conocimiento que se proponen para la enseñanza de contenidos de la matemática en el bachillerato del Colegio se denominan: ***Desarrollo de la idea de número, El lenguaje del álgebra, La probabilidad y el tratamiento de datos, Las técnicas de calcular, Lógica y computación, Conceptos geométricos y su representación, Las gráficas y sus ecuaciones, La matemática del cambio.*** *.... Los diferentes bloques a su vez quedan interrelacionados a través de lineas conceptuales y metodológicas de la matemática. Cada línea está constituida por un concepto, -por ejemplo razón, variable, función- o método de esta disciplina -como aproximación, inducción, exhaución-, que estructura conocimientos matemáticos de diversa índole (aritméticos, algebraicos, geométricos, etcétera)."*

En cambio, cada rama de la matemática ha sido distribuida transversalmente a cada uno de los semestres de estudio, según se muestra en la tabla de ponderaciones y gráfica[20] siguientes:

	Total de Contenidos por Semestre				
RAMA	1°	2°	3°	4°	TOTAL
Aritmética	30	12	4	7	53
Álgebra	12	25	15	4	56
Geometría y Trigonometría	8	6	6	3	23
Geometría Analítica	2	3	21	3	29
Cálculo	2	1	8	20	31
Probabilidad y Estadística	1	7	0	0	8
Computación	0	3	1	7	11
Total:	55	57	55	44	211

[20] Para los efectos de ilustración en este trabajo, me he permitido cambiar la orientación de las barras que en el documento original aparecen verticalmente.



De esta manera los ocho *bloques de conocimiento*[21] en los que se han aglutinado siete *ramas de la matemática*[22] están organizados de manera tal que en cada semestre (con excepción posible del primero) se abordan cada uno de aquellos y cada una de estas, y así, todos los estudiantes abordan el estudio de un núcleo básico de conocimientos que atraviesa a lo largo de todos los cursos, los que se diferencian por los niveles de complejidad, rigor y naturaleza de las aplicaciones; logrados a través de las lineas metodológicas y conceptuales.

Los estudiantes vuelven una y otra vez sobre los conceptos, los métodos y sus aplicaciones, avanzando de acuerdo a sus posibilidades y profundizando un poco más en cada ciclo.

[21] Desarrollo de la idea de número, El lenguaje del álgebra, La probabilidad y el tratamiento de datos, Las técnicas de calcular, Lógica y computación, Conceptos geométricos y su representación, Las gráficas y sus ecuaciones, La matemática del cambio.

[22] Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo, Probabilidad y Estadística, Computación.

En resumen, podemos dar cuenta en esta propuesta, de que los CCH proponen los siguientes cambios en la selección, organización de los contenidos y en el trabajo docente consecuente:

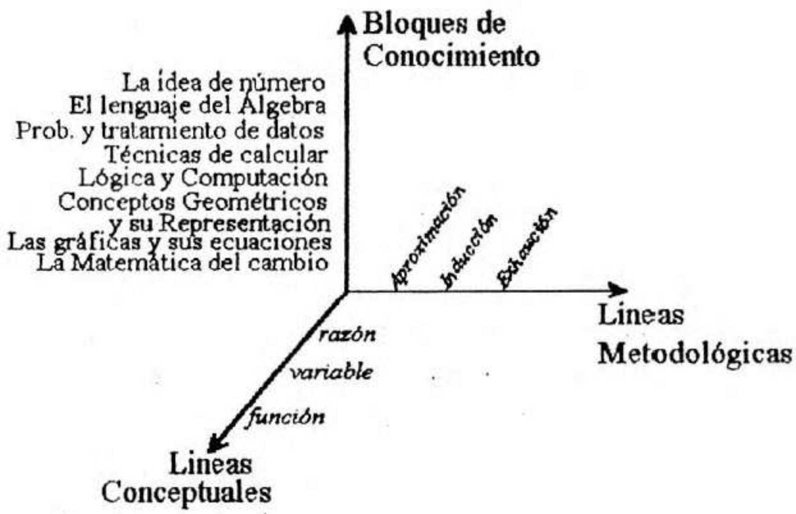
- Los contenidos se presentan en grandes bloques, y no por ramas separadas de la matemática como suele hacerse habitualmente en los cursos tradicionales.
- Se hace necesario el trabajar conjuntamente a los distintos campos matemáticos, esto es, la aritmética, la geometría, el álgebra, el azar, los principios del análisis, etc.; para potenciar una visión globalizadora de las matemáticas poniendo de relieve la relación existente entre sus conceptos y la riqueza de los métodos para abordar una realidad cada vez más compleja.
- La estructuración está basada en un eje metodológico de solución de problemas que incluyen hechos, fenómenos, aspectos de la realidad con el fin de construir a partir de ellas experiencias didácticas que impliquen, en el plano de los contenidos conceptuales y metodológicos, una propuesta de sistematización, profundización y búsqueda de explicaciones por parte de los estudiantes.
- Se hace necesaria la consideración del nivel de madurez conceptual de los estudiantes y la correspondencia entre sus estructuras cognitivas y los objetos de estudio propuestos de forma tal que estos se constituyan en verdaderos problemas matemáticos para ellos.
- Se propone trabajar los contenidos del Área a través de un *curriculum central y abierto*[23], que posibilite integrar, en un plano, los conceptos y métodos de la matemática y en una

[23] Central en cuanto a que todos los estudiantes tengan acceso a los mismos contenidos matemáticos a lo largo de todo el ciclo de estudios, y abierto en cuanto se hace posible la integración de los contenidos matemáticos considerando las necesidades e intereses individuales de los estudiantes.

dirección, entrecruzada con éste, los diferentes campos de estudio matemático.

- En cada clase y curso, será posible volver una y otra vez sobre los conceptos, los métodos y sus aplicaciones, avanzando y profundizando un poco más en cada ciclo, abordando de esta manera sucesivos niveles de rigor y formalización en la medida de las exigencias planteadas por el problema estudiado.

Me atrevo a dar una interpretación gráfica de la forma de organización propuesta, en la que quizá sean más evidentes algunos de los elementos de organización antes descritos:



Con más precisión ahora, puede afirmarse que se trata de una basta infraestuctura de organización contensial, en la que no se advierte fácilmente la ventaja práctica que podría tener el hacerlo.

Sin embargo, desde mi punto de vista, lo que está a la vista en el diagrama anterior, es la existencia de un *Espacio de Estrategias*[24] para diseñar acercamientos específicos a los contenidos propuestos por las ramas de la matemática.

En este sentido afirmo que lo propuesto por los Colegios de Ciencias y Humanidades:

"En vez de realizar, para la enseñanza de la matemática, una selección y organización de contenidos que atienda -como generalmente se hace- a la configuración de las ramas tradicionales de esta ciencia, se propone aglutinar los conocimientos en bloques de contenidos.

no es el sustituir la forma de organización en *ramas de la matemática* por otra que atienda a *bloques de contenidos*, como pudiera leerse a primera vista, sino el establecer un espacio de estrategias de acción que apoyándose en dos tipos de líneas -conceptuales y metodológicas- permita abordar grandes bloques de conocimiento que sin embargo entrañan habilidades relativamente comunes.

Como ejemplos de lineas conceptuales proponen los conceptos de *razón*, *variable* y *función*.

Una de las tesis que se sostienen en este trabajo es precisamente que el concepto de función constituye un elemento conceptual que actua como substrato a las diferentes ramas de la matemática, el que bajo diferentes lineas metodológicas de acercamiento a él, es capaz de generar las diferencias morfológicas que conforman a las ramas de la matemática, como se verá apartado correspondiente al nivel superior.

[24] Hernández, Víctor M., Villalba, Martha C., Un proyecto de investigación: "El curso de Cálculo Diferencial I del nivel superior, con apoyo en la computadora", memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa., San José Costa Rica., Julio de 1989., pág. 406

Por otro lado, en mi opinión, es precisamente la elección de una metodología basada en la resolución de problemas para la conducción de las actividades de aprendizaje, lo que llevará a desembocar, por un lado, en el reconocimiento del concepto de función como substrato conceptual independiente de la rama de la matemática que se trate, y por otro, en el uso de tecnología como recurso que potencia la articulación de sus formas de representación, agregando con ello, significados a los significados.

Precisando un poco: en el comentario anterior no se niega que cada rama de la matemática tenga en sí cierta autonomía y razón de ser, pues sería tanto como negar el sentido y la importancia que tiene, en general, el análisis como un recurso metodológico de estudio.

En cambio, si se afirma que el poner especial énfasis en el reconocimiento del concepto de función como un substrato y en articular las diferentes representaciones de él, en relación con los problemas matemáticos escolares, potencia el enriquecimiento de la significación de su estudio facilitando el tratamiento didáctico de los contenidos y con ello la de lograr cierta competencia lingüístico matemática.

No obstante haber comentado el trabajo de los Colegios de Ciencias y Humanidades en su carácter de avanzada (según mi punto de vista) en cuanto a organización curricular del área de matemáticas se refiere, advierto la necesidad de hacer algunas otras consideraciones de carácter más general.

Así pues, renglón aparte, merecen comentario especial algunas ideas relacionada con el uso del concepto de función en este nivel, haciendo notar que en la medida en que se avanza en los niveles educativos, se hace cada vez más permisible[25] el uso irrestricto de

[25] Por alguna razón parece que en los niveles básicos de educación no lo es.

tecnología para el aprendizaje, esto es, para los fines, intereses y significatividad de las actividades de los estudiantes.

El Cálculo constituye sin duda, el momento se síntesis y correlación articulada de buena parte de los contenidos matemáticos escolares, pues en él se intenta dar satisfacción -a estas alturas casi inevitable- a la ya crónica promesa de que las matemáticas sirven para algo, cuando tienen como muestra y referente casi único de ello (como antes comenté), a la "regla de tres".

Desafortunadamente, para muchos de los estudiantes el momento de significatividad de una tal síntesis, ya ha pasado o bien, se emprende de una manera demasiado localizada en este curso.

En este sentido, el haber acreditado un curso parece ser la autorización para olvidarse de él, y es sólo hasta el cálculo en donde se retoman los hilos y andamiajes de todo tipo: conceptuales, algorítmicos, estratégicos, metodológicos, etc.[26].

Probablemente la razón fundamental para introducir la matemática en la enseñanza, reposa en el hecho de que nos proporciona instrumentos de interacción con los problemas que nuestra realidad advertida nos propone.

Esta actividad de resolver problemas propuestos por el mundo *real*, está en la base misma de la creación de la matemática y ha sido fuente de inspiración y renovación de sus métodos, quizá porque al ser producto de una actividad humana conlleva a su propia naturaleza problematizadora, esto es, el Hombre en su interacción cósmica y su afan de conocer, resuelve problemas en donde los advierte y los inventa donde no son del todo aparentes.

[26] En esta situación, me parece que todos los elementos de la comunidad matemática debiéramos aportar a la solución del problema de darle consistencia, continuidad y unidad a los contenidos del *currículo matemático escolar global*, esto es el que en su vida académica le toca examinar a cualquiera de nuestros compatriotas: Inscribo este trabajo en ese esfuerzo.

Sin exageración, puede decirse que las estructuras más abstractas de la matemática, fueron creadas para resolver problemas y que el grado de permanencia y validez de una estructura matemática, podría medirse, quizá, por la multiplicidad de problemas o situaciones (no necesariamente provenientes del exterior de la matemática) que permite atender, cuyos origenes y motivaciones son propuestas por el mundo real y cuyas eventuales *soluciones* reflejan una mejor comprensión de lo que nos rodea.

De las razones anteriores que pertenecen a la naturaleza misma de la matemática, se deduce que la mejor manera de enseñarla y aprenderla es a través de problemas, los que deberán ser simples (no irrelevantes) en el caso de la matemática escolar y complejos e incluso abiertos en el caso de la matemática especializada y de investigación.

Por otro lado, se advierte una excesiva diferenciación en "ramas" -aunque no por razones intrínsecas de los contenidos matemáticos-, al punto de que cuando menos en los cursos generalizados de Álgebra, Geometría y Trigonometría y Geometría Analítica, no parece haber un elemento conceptual integrador, a tal punto, que no se reconoce ni la necesidad de interrelación ni la posibilidad real de hacerlo, incluyendo en esto a un buen número de autores de libros de texto.

Ante esta situación, en este trabajo he tratado de ir abundando en ejemplos que permitan postular al concepto de función en el papel de substrato conceptual para el currículo matemático escolar, considerando que si se generaliza -como parece estar sucediendo- el tomar a la solución de problemas como metodología para acercarse a la matemática, éste concepto -el de función- ocupa un lugar central, lo que de suyo avala su postulación.

De esta manera, los cursos de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica pueden abordarse tomando al concepto de función como substrato conceptual, y en particular a tres funciones fundamentales y operaciones entre ellas, a saber:

$$y = ax + b,\ y = aSen(x - c) + b \text{ y } y = ab^{c(x-d)},$$

pues con ellas es posible modelar una cantidad importante de fenómenos euclideanos de la matemática escolar a este nivel y en buena medida del siguiente, cubriendo con ellas, las variaciones lineales o producto de operaciones entre ellas, las situaciones de variación periódica y los fenómenos de crecimiento.

Estas formas de variación, al cubrir una cantidad importante de situaciones problema, se constituyen en recursos didácticos para la motivación. En adición, la función como modelo potencia la transformación de una situación problema hasta el conjunto de sus soluciones, constituyéndose en un vínculo bidireccional entre ellos.

En particular, las cónicas constituyen una extensión de las funciones siguientes:

$$y = a\sqrt{r^2 - (x-c)^2} + b,$$

$$y = a\sqrt{r^2 + (x-c)^2} + b \quad \text{y}$$

$$y = a\sqrt{(x-c)^2 - r^2}.$$

Cabe la observación de que esto no es todo lo que hay que hacer en este curso, lo que es desde luego correcto, sin embargo, la postura que se sustenta es que con el recurso del concepto de función es relativamente sencillo tener un panorama general (a manera de mapa conceptual) del tipo trabajo en esta disciplina, esto es, la correspondencia bidireccional entre los *lugares geométricos* y *las expresiones algebraicas que los definen analíticamente* en diversos *sistemas de referencia.*

La Geometría Sintética, merece un comentario especial: en mi opinión debiera integrarse a todos los cursos de matemáticas como un recurso metodológico para abordar los problemas, explotándola en sus recursos de visualización y para la organización de los elementos esenciales -susceptibles de ello- en una situación problema.

Sin embargo, este trabajo no debiera limitarse al aspecto instrumental, pues tiene de suyo invaluables recursos para potenciar la formación matemática de los estudiantes, ofreciendo elementos que en la parte instrumental sirven como referentes concretos para la organización de las ideas, pero que en sus vertientes lógico formal y relacional se puede avanzar a niveles de abstracción insospechados.

Por otro lado hay, desde luego, forma de integrar la geometría euclidiana al quehacer cotidiano de cada una de las "ramas" de la matemática y aún de integrarla a esta propuesta en donde se toma al concepto de función como substrato conceptual, abordándola desde el punto de vista del *Programa de Erlangen* de Klein, en el que se propone que:

> *"... la geometría euclidiana es realmente una combinación de dos geometrías más básicas, o sean, la geometría métrica plana euclidiana y la geometría plana equiforme, siendo cada una de ellas la teoría de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones relacionado."*[27]

y por este hecho, ponerla en conexión directa con los conceptos que anidan en el corazón de la matemática: el concepto de grupo y el de función.

Me parece advertir en los programas y libros de matemática escolar, cierta tibieza en la adopción organizada del Programa pues los criterios para abordar el problema de la validación de afirmaciones relacionadas con longitudes, áreas, congruencias, puntos medios, paralelismo, perpendicularidad, colinealidad de puntos y concurrencia de rectas oscilan entre un criterio axiomático deductivo y el uso de

27 Eves, Howard , Estudio de las Geometrías, Tomo II, Pág. 140

transformaciones, y en esta indefinición metodológica, se oscurece el panorama docente relacionado con la disciplina y sus objetivos en el contexto de la matemática escolar.

Como comentario final, puede decirse que a estas alturas de la corriente metodológica problémico-modélica de acercamiento a los contenidos matemáticos escolares, es insoslayable -dada la propuesta conceptual e instrumentación tecnológica de la tesis- el abordar sin demora, el estudio de los procesos recursivos por dos razones fundamentales:

- son la entrada natural para la geometría fractal, que como he afirmado en el marco teórico, parece ser un recurso de modelación intrínseco a la naturaleza, o por lo menos hasta ahora, ha mostrado serlo.
- en la geometría fractal confluyen notablemente la tecnología de cómputo y con ella la necesidad de uso de recursos numéricos de cálculo recursivo y ecuaciones en diferencias, los modelos deterministas y no deterministas, el álgebra abstracta y el análisis

constituyéndose de esta manera en un campo fértil para un desarrollo curricular integral.

Nivel de Educación Superior

Un elemento importante para una aproximación a la parte explicada del estado actual más o menos generalizado del currículum estudiantil en el nivel superior es, desde luego, el tipo de trabajo docente que se está proponiendo y en todo caso el trabajo que se está haciendo en los niveles antecedentes.

En adición al problema pragmático y conceptual al que -bajo el análisis de los niveles antecedentes- hemos podido tener un acercamiento está, sin lugar a duda, el problema del pésimo papel de vínculo que parece estar jugando el nivel medio superior, en términos de su diversidad en planes y programas de estudio y en términos también de la ramificación contensial.

Pensemos en las típicas "ramas" de la matemática que suelen figurar en la currícula matemática común del nivel superior -álgebra, álgebra lineal, geometría analítica, trigonometría, cálculo diferencial e integral, probabilidad, estadística y ecuaciones diferenciales- para tratar de caracterizar[28] someramente su objeto de estudio.

Álgebra. Estudia las llamadas estructuras algebraicas que determinan una o varias operaciones en un conjunto, esto es, las propiedades de las operaciones que son funciones del tipo: $\circ : A \times A \to A$

Álgebra lineal. Estudia estructuras algebraicas llamadas "espacios vectoriales", así como el comportamiento de "funciones lineales", es decir, aquellas cuyo dominio y contradominio son espacios vectoriales y que, además, tienen la propiedad de ser lineales.

Trigonometría. Estudia a manera de síntesis de los correlatos entre las longitudes de los lados de un triángulo general, las funciones llamadas trigonométricas.

El Cálculo Diferencial. Estudia las funciones a través del concepto de "límite", del cual surgen los conceptos de "continuidad" y "derivabilidad".

El Cálculo Integral. Estudia las funciones a través del concepto de "medida" denominado como "integral de una función"

[28] Esta caracterización es debida a la obra de: Fregoso, Arturo., LOS ELEMENTOS DEL LENGUAJE DE LA MATEMÁTICA. Nº 2. funciones., Edit. Trillas, S.A. de C.V., México, 1986. Pág. 27

La Probabilidad. Estudia de hecho el mismo problema anterior, sólo que desde un punto de vista más amplio; es decir, estudia las funciones bajo distintos conceptos de medida llamados "probabilidad".

Ecuaciones Diferenciales. Estudian ecuaciones como las que estudiamos desde la escuela primaria, en las cuales en vez de intervenir únicamente números (funciones constantes) intervienen también -como incógnitas de la ecuación- funciones y sus funciones derivadas.

Geometría. Las distintas geometrías estudian las propiedades de una relación de incidencia del estilo $\rho : P \times L \to \{sí\ , no\}$, según la cual una recta $l \in L$ y un punto $p \in P$ de dicha geometría inciden o no; es decir según la cual $p \in l$ o $p \notin l$.

Al elaborar esta relación de ramas de la matemática escolar, se advierte que todas ellas se dedican al estudio de las funciones.

La pregunta inmediata es: ¿Qué es entonces lo que provoca las diferencias morfológicas advertidas entre las ramas, si todas se dedican al estudio del mismo concepto?

En mi opinión, es sólo que el concepto de función se está usando en cada rama de la matemática para representar el comportamiento de distintos aspectos del mundo circundante.

Este hecho, no es por lo general sensible en cuanto los nexos con las situaciones concretas que han generado estas formas de representación, se han perdido al proponer en la escuela el estudio de *objetos* matemáticos que responden a una cierta denominación formal.

Así pues, puede afirmarse que en general, el estudio de las funciones constituye un invariante ante el estudio de cualquier rama de las matemáticas -escolares no especializadas-, mientras que la especificidad de éstas en términos del acercamiento conceptual que se propone o la visión teórico-algorítmica para su manipulación, se constituye en el generador de la morfología propia de la rama de que se trate.

La comunidad global de educadores en matemáticas parece estar acercándose a la postura descrita en el parágrafo anterior, para ello obsérvese el movimiento que se está dando en la enseñanza del Cálculo[29], y las salidas que esto parece estar teniendo: hacia el abandono de la casi exclusividad de criterios de búsqueda sintácticos lógico-formales y alternativamente, la adopción generalizada de acercamientos gráficos y numéricos -en articulación al analítico- de las funciones abstraidas a título de modelos de las condiciones esenciales de un problema.

Más aún, la factibilidad de los acercamientos numéricos y gráficos generados por el uso de tecnología de cómputo, parece estar generando movimiento no sólo en los criterios de búsqueda, sino también en sus criterios de validación (de momento en el aula), pero que en no demasiado tiempo podría permear otros estrados de la matemática, lo que a mi ver establecería nuevas formas de hacer matemáticas.

En todo esto se tiene una perspectiva cada vez más clara, en la que el problema y su resolución juegan un importante papel en calidad de medios para el acercamiento a los contenidos del currículo matemático, y para los que el concepto e instrumento tecnológico fundamentales son, respectivamente: el de función y los recursos de cómputo.

En todo esto, no se pretenden negar las bondades metodológicas para el análisis de los contenidos matemáticos que brindan las ramas de la matemática, sino redescubrir el substrato que les es inherente y desde esta esencia y con ella, la posibilidad de potenciar nuevas

[29] Para una referencia más amplia ver: Hughes-Hallet, Deborah, M. Gleason, Andrew, et al., Calculus. Preliminary Edition., Harvard Consortium and National Science Foundation., John Willey Sons, Inc., USA., 1992.

significaciones y nuevas sugerencias sobre el hacer de la matemática escolar, desprendidas de la articulación entre las diversas formas de representación del concepto.

Desde este punto de vista, se pretende trascender la frecuente confusión entre el análisis como una metodología de aproximación a los contenidos y los sustratos que constituyen su esencia.

Este ejercicio de redescubrimiento de un substrato conceptual a la matemática escolar como el de función, permite llegar a la conciencia de que se está ante un todo conexo y articulado de maneras insospechadas y no ante un todo fragmentado o encapsulado en *ramas* que no permiten ver la configuración completa del árbol cuando la atención y el privilegio están puestos en ellas.

Es en el ánimo de ejercitar desde esta tesis, que me propongo en el próximo capítulo abordar ejemplos de diversas ramas de la matemática abordando los asuntos planteados en ellas, en formas cualitativamente novedosas, particularmente potentes y ricas en significación.

vhernan@gauss.mat.uson.mx

Capítulo 3

Algunas experiencias a manera de ejemplos

En este capítulo quiero compartir algunas experiencias que en la dirección de la tesis me han llevado a formularla y la ejemplifican, por lo que en las páginas siguientes me he permitido abordar algunos temas tradicionales y no tradicionales en el currículo escolar, tomando como concepto director de la acción, en su calidad de substrato, al concepto de función.

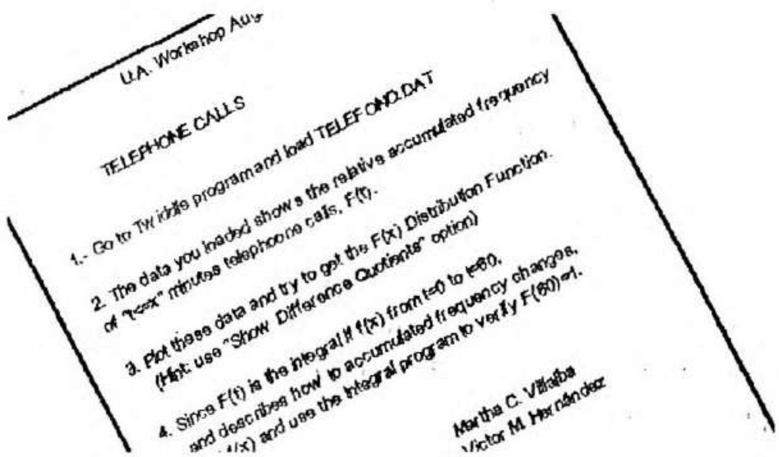
Otro propósito de este capítulo es el dejar un registro sobre el cómo, la tecnología de cómputo puede cambiar la forma en la que enseñamos matemáticas propiciada por los cambios cualitativos que se pueden generar por esta vía.

Regresión

Encontrar la función de regresión asociada a un conjunto de datos experimentales, es desde luego un problema de particular relevancia en cualquier disciplina o situación problema.

Una de las primeras experiencias sobre cómo la tecnología puede influir en el diseño de las actividades docentes, me tocó realizarla en el seno del taller "Enhancing Mathematical Education Using Technology", en el que diseñamos[1] una actividad que al desarrollarla, permitió ajustar una función (la de distribución de probabilidades) de regresión a partir de datos[2], establecer mediante diferenciación la función de densidad de probabilidades correspondiente verificando via integración lo justo de su caracterización como tal.

En aquella ocasión proporcionamos a los participantes un guión que permitió organizar nuestra actividad docente:


U.A. Workshop Aug

TELEPHONE CALLS

1.- Go to Twiddle program and load TELEFONO.DAT

2. The data you loaded shows the relative accumulated frequency of "t<=x" minutes telephone calls, F(t).

3. Plot these data and try to get the F(x) Distribution Function. (Hint: use "Show Difference Quotients" option)

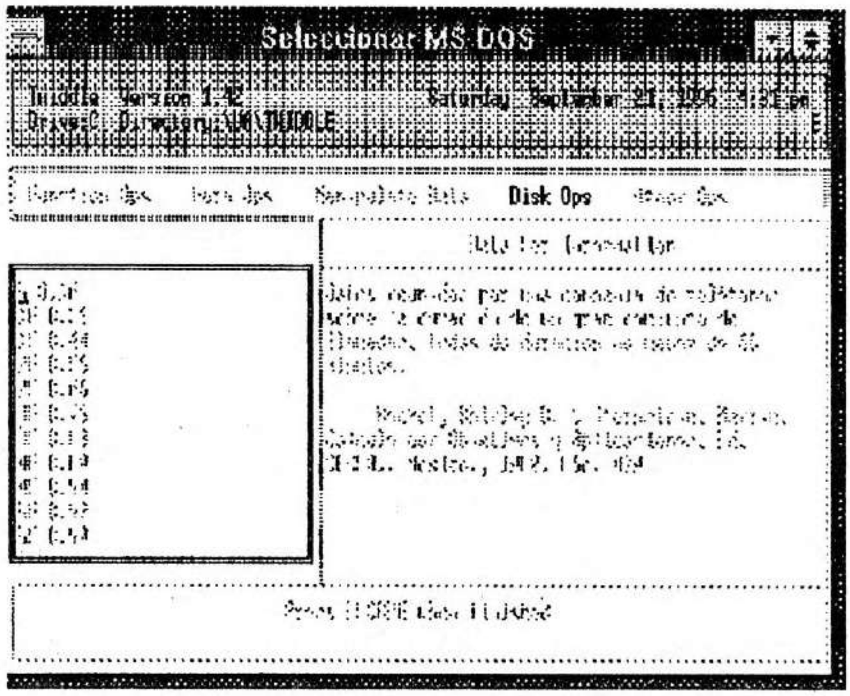
4. Since F(t) is the integral if f(x) from t=0 to t=60, and describes how to accumulated frequency changes, f(x) and use the integral program to verify F(60)=1.

Martha C. Villalba
Victor M. Hernández

[1] Hernández L., Victor M. & Villalba Martha C., Telephone Calls, University of Arizona Workshop., Aug. 1992.

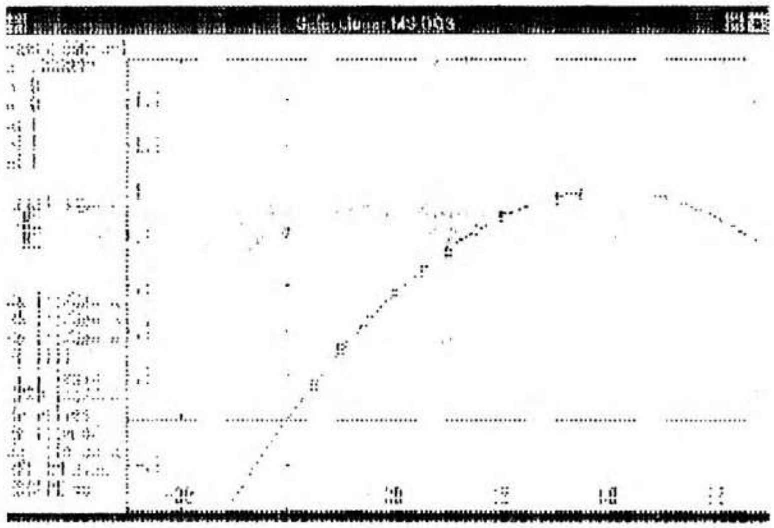
[2] Tomados de Hockett, Shirley O. & Sternstein, Martin., Cálculo por Objetivos y Aplicaciones., Editorial CECSA. México., 1982. Pág. 479

Se trataba de datos reunidos por una compañía de teléfonos sobre la duración de un gran conjunto de llamadas, todas de duración no mayor de 60 minutos,

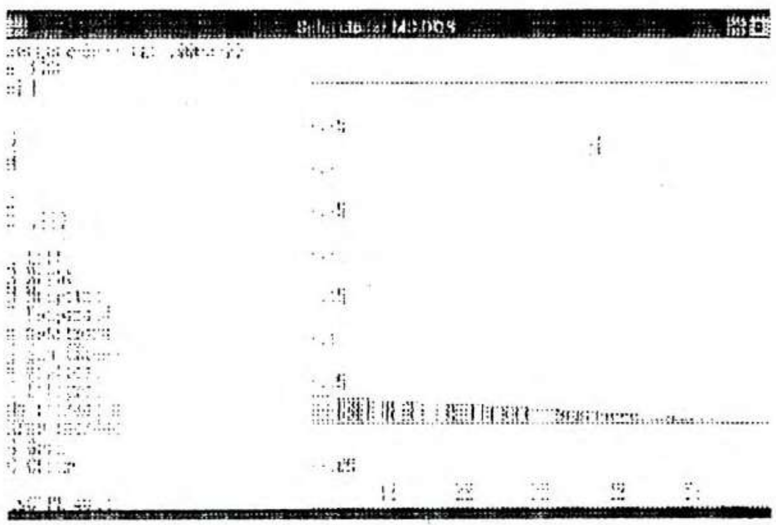


El encontrar que los segundos cocientes en diferencias valen aproximadamente cero, nos permitió apoyar la hipótesis de que la función de distribución *F(t)* era una función cuadrática de la forma $F(t) = a(t-c)^2 + b$, en la que por las condiciones del problema, debe ocurrir que $b=1$ y que $c=60$. El parámetro a fue ajustado manualmente en $a = -.000277$ hasta conseguir un error mínimo cuadrado de .01, al proponer a $F(t) = -0.000277(t-60)^2 + 1$ como candidato hipotético de regresión.

El ajuste conseguido a los datos puede verse en la siguiente gráfica:



Determinamos entonces que la función de densidad de probabilidades correspondiente, sería la derivada de $F(t) = -0.000277(t-60)^2 + 1$, es decir $f(x) = 2(-0.0002777)(x-60)$, función que en el intervalo $[0, 60]$ debía cumplir con que $\int_0^{60} (2(-0.000277)(x-60))dx = 1$, lo que fue posible realizar de manera expedita usando el programa "Integral".



En este ejemplo me resultó clara la necesidad de tránsito entre las diferentes representaciones de la función así como de la coordinación entre ellas con el fin de poder lograr una articulación competente para la solución de un problema, pues a mi juicio, no es un problema escolar trivial el establecer la función de distribución de probabilidades, determinación que pudo realizarse con relativa facilidad,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ -0.000277(t-60)^2 + 1 & si \quad 0 \leq t < 60 \\ 1 & si \quad 60 < t \end{cases}$$

para luego encontrar la función de densidad de probabilidades,

$$f(x) = \begin{cases} -0.000554(x-60) & si \quad 0 \leq x < 60 \\ 0 & si \quad x \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Estas funciones, desde luego permiten dar respuesta a cualquier declaración de probabilidad sobre la variable aleatoria, X, número de minutos que tarda una llamada telefónica en el estrato de las consideradas en el problema.

Esta experiencia de diseño, ha servido para construir muchas otras, atendiendo a estudiantes y a profesores de los cursos universitarios, teniendo como substrato de la discusión al concepto de función y sus diversas representaciones, lo que en la medida en que esto es posible, permite la conformación de estrategias pertinentes y competentes para la solución y diseño de problemas.

Desigualdades

La propiedad de tricotomía es pocas veces explotada en su extensión en todos los niveles educativos, esto es, casi siempre se abordan las igualdades y las desigualdades como si fueran asuntos inconexos y no una manifestación natural y obvia[3] hasta cierto punto, resultante de la comparación ordinaria entre dos números.

En el momento en que se abordan situaciones problema y su modelado mediante una expresión del tipo $y = f(x)$, es posible dar respuesta a ciertas preguntas, las propias del tipo de relación establecida.

Este momento es generalmente desaprovechado para formular preguntas que aborden la consideración de un contexto relacional más amplio, las preguntas desprendidas de la situación en que la igualdad no se dá, aprovechando que (aún sin quererlo) en el momento en que se establece la casuística de la igualdad, también se está -complementariamente- estableciendo la correspondiente a la desigualdad.

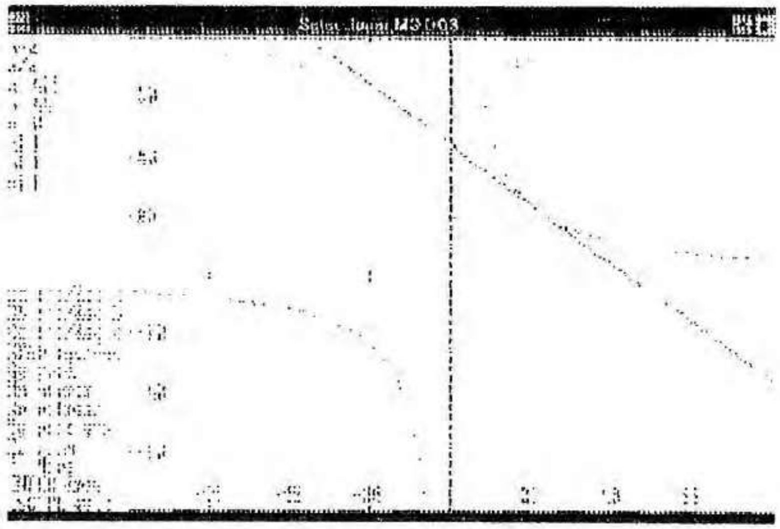
Una situación problema típica del nivel medio de educación, puede ser: "Un terreno rectangular tiene un perímetro de 88 m y un área de 475 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Esta situación da lugar a dos funciones que se desprenden de manera natural de las condiciones del problema:

$$y = 44 - x\ ;\ y = \frac{475}{x}$$

3 Lo obvio no está excento de dificultad conceptual.

cuyas gráficas correspondientes son,

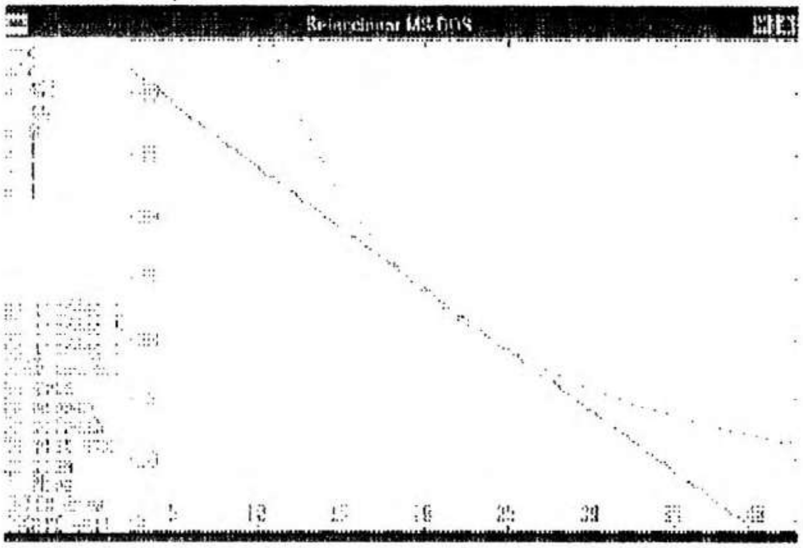


en donde desde luego, los valores 44 y 475 son valores particulares de los parámetros de las expresiones más generales $y = b - x$ y $y = \frac{a}{x}$, aclarándose por este solo hecho, que la situación planteada por el problema es sólo una situación particular entre la casuística infinita que es posible considerar, en donde el perímetro y el área del terreno dependen de su ancho.

Continuando con el ejemplo, una pregunta inmediata es, ¿en qué localidad(es) de la gráfica que se presenta está localizada la conjunción de ambas condiciones del problema?

Una vez localizada la respuesta a la primera, las siguientes preguntas, podrían ser: ¿cómo determinar la solución?, ¿la solución es única?

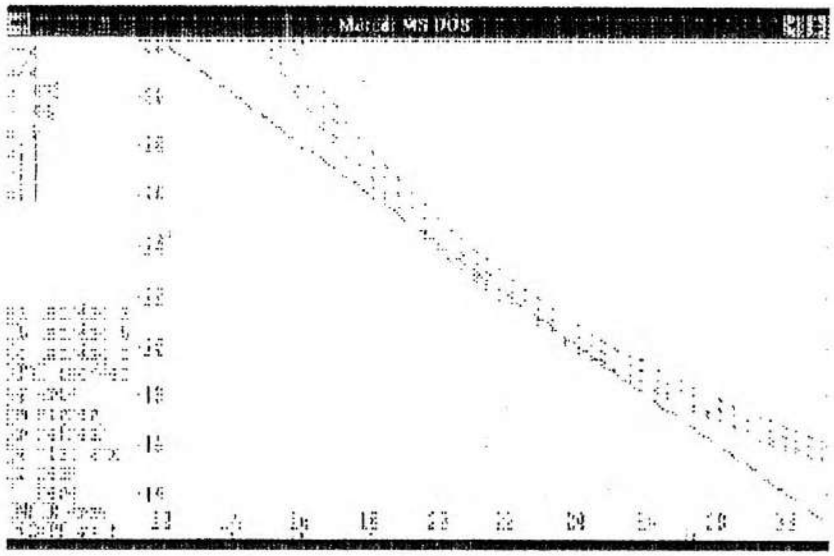
Al respecto de esta última convendría hacer un acercamiento (*Zoom In*) sobre la gráfica en la región de interés,



lo que permite visualizar la existencia de dos soluciones (que habría que determinar), pero en el mismo momento podemos también preguntarnos ¿porqué otros valores del ancho (digamos "x") del terreno no podrían dar satisfacción a las condiciones del problema?, o aún más, dejando fijo el perímetro, ¿para qué valores del área es posible asegurar una solución única del problema?, o la pregunta alterna dejando fija el área, ¿para qué valores del perímetro es posible asegurar una solución única del problema?, ¿para qué valores del área el problema no tiene solución?.

La búsqueda de respuesta a este tipo de preguntas introduce en una casuística no trivial -de hecho permite desarrollar habilidades para el diseño de preguntas problema- pero que con auxilio del computador es relativamente sencillo visualizar y plantearse una estrategia para resolverla.

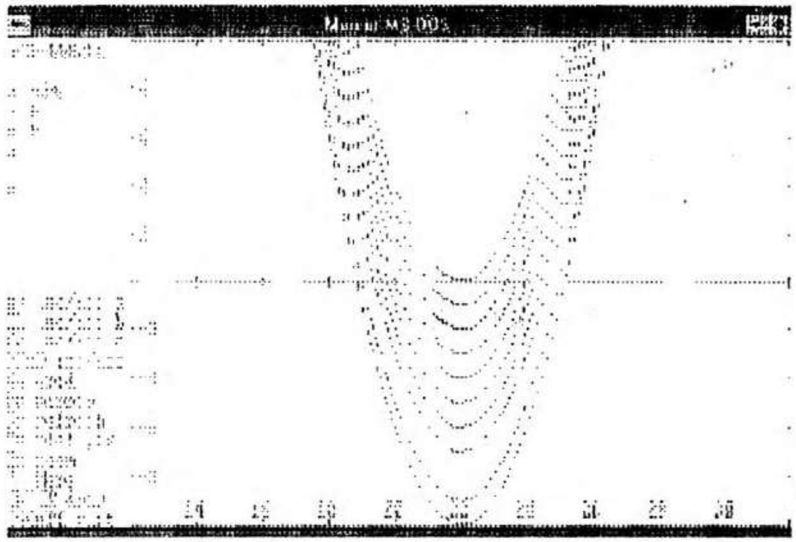
Por ejemplo, veamos qué ocurre para diferentes valores del parámetro a que representa al área del rectángulo, cuando éste asume diferentes valores, digamos *475, 480, 490* y *500* cuyos efectos se advierten en la gráfica de la hipérbola, respectivamente de izquierda a derecha,



en donde se advierte que debe existir un valor del parámetro a de tal forma que la intersección tenga un único punto, estaríamos entonces preguntándonos el valor de a para el que la solución de $x^2 - 44x + a = 0$, es única.

Por supuesto, la ecuación planteada inmediatamente antes, es también susceptible de un análisis dinámico, graficando la función

$y = x^2 - 44x + a$ para diferentes valores de a y de paso abordar la significación de las raíces de un polinomio de grado 2, etc., etc., ...



De esta manera la situación original planteada por el problema, permite abordar abordar conceptos como el de existencia y unicidad de la solución, análisis de casos límite y establecer la necesidad concreta de cierto tipo de estrategias, que luego se desarrollan de manera cuasialgorítmica inconsciente y memorista, cuando se dice, por ejemplo: "*hay que sustituir el despeje de una variable en la otra ecuación para obtener una ecuación con una sola incógnita y resolverla* (¿para qué? la significación que conduce a hacerlo es por lo general poco explotada), esto es,

$$\frac{475}{x} = 44 - x$$

expresión que se transforma en la expresión cuadrática equivalente ;

$$x^2 - 44x + 475 = 0$$

de donde las soluciones para la ecuación que representa las condiciones particulares del problema ($b=44$ y $a=475$) son $x_1 = 19$ y $x_2 = 25$, es decir si el ancho del terreno es 19, el largo tendrá que ser $y = 44 - 19 = 25$, o bien, si el ancho del terreno 25, el largo tendrá que ser $y = 44 - 25 = 19$, por lo que se tienen dos parejas de soluciones $(19, 25)$ y $(25, 19)$, lo que era de esperarse de alguna manera ya que la condición que representa el área del rectángulo es una hipérbola.

El ejemplo anterior constituye un ejemplo del papel que pueden jugar las gráficas de las funciones, al sugerirnos el cómo encontrar la solución de una desigualdad por la vía de resolver una igualdad. En adición a ésto, el resolver el problema desde la perspectiva de representaciones gráficas del concepto de función y los significados que en el contexto del problema éste tomó, permite no sólo su resolución sino el contacto con una insospechadamente amplia casuística desprendida de un problema convencional del nivel medio.

Este papel de asignación de nuevos significados, ya lo habíamos reportado en 1991[4], año en que tomando como substrato al concepto de función, abordamos el problema de proporcionar una forma alternativa para la pesadísima casuística sintáctica relacionada con el tema de desigualdades.

Así pues, el uso del concepto de función como substrato en el caso de las desigualdades como contenido temático, nos permitió la

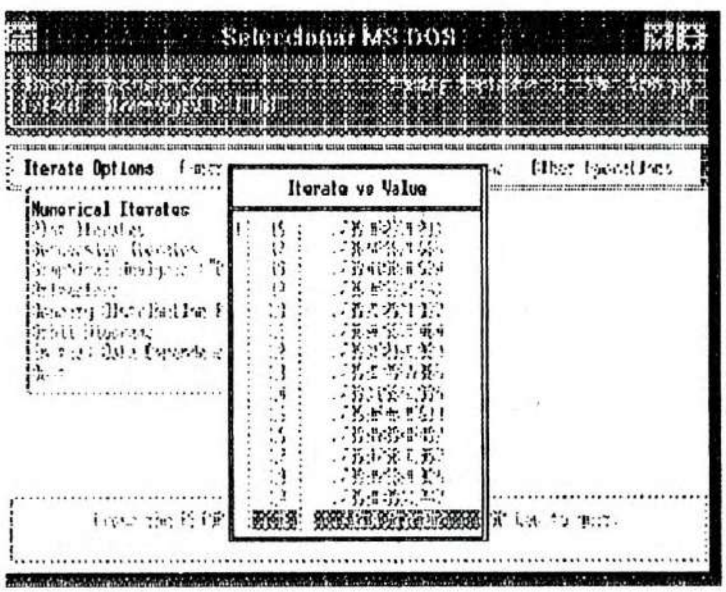
[4] Hernández, L., Víctor M., & Villalba, Martha C., Él Papel Semántico de la Graficación de Funciones como Apoyo para la Solución de Desigualdades., Maestría en Matemática Educativa., UNISON., 1991.

elaboración de estrategias alternativas competentes para la resolución de desigualdades.

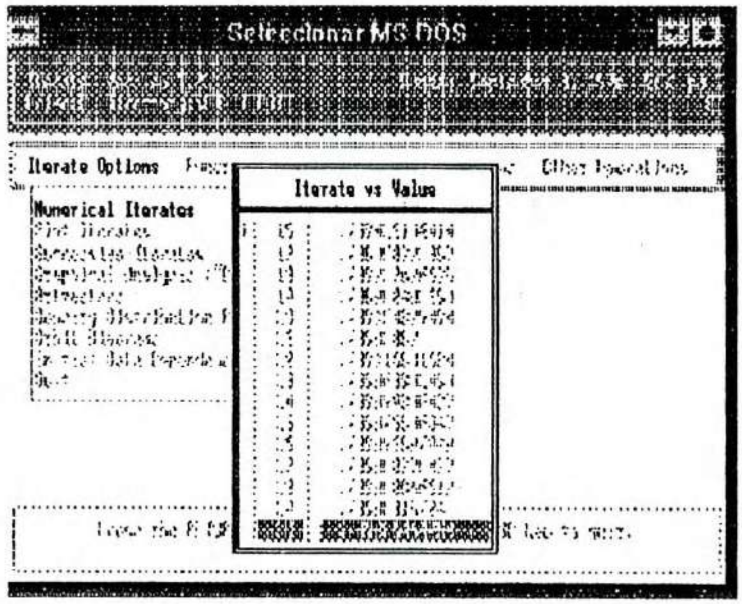
Análisis Numérico

En análisis numérico, nos encontramos una extraña forma de "preguntarse" por cuál podría ser la solución de una ecuación.

Tomemos por ejemplo, -22.2222 como número inicial para evaluar recursivamente a la función $y = Cos\ x$, tenemos:



Empecemos ahora con 10.345,



de nueva cuenta, después de evaluar recursivamente a la función $y=Cosx$, llegamos al número $.73908...$. La pregunta es ¿qué raro secreto tiene ese número?

Lo único que lo observado quiere decir, es que el número $.73908...$ tiene la propiedad de que, sin importar con qué número empecemos a evaluar recursivamente a la función $y=Cosx$, a partir de cierta etapa del proceso, siempre llegamos a que:

$$Cosx = x$$

Por lo que, hemos descubierto una extraña forma de preguntarse y de encontrar la solución de la ecuación $Cosx - x = 0$.

Así pues, en este proceso recursivo, hemos tomado cualquier valor, para x_0, como "entrada" al proceso,

$$x_{r+1} = F(x_r), \text{ con } r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

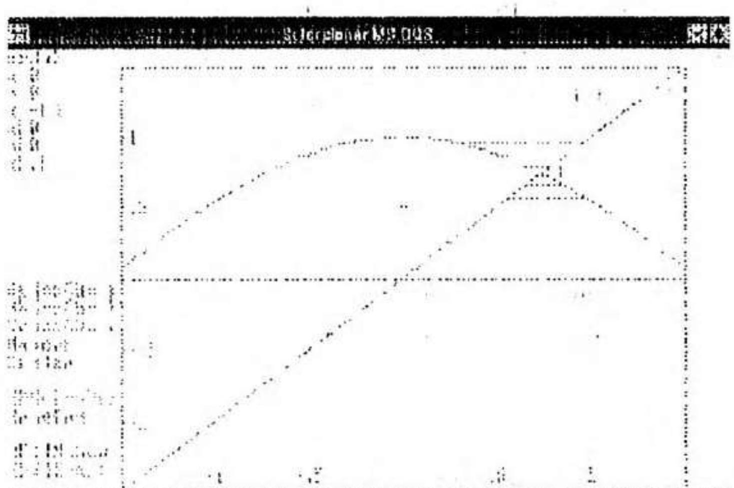
para una función F particular.

Al realizar este proceso recursivamente, hemos llegado a un estado del proceso en el que x_{r+1}, no se distingue de x_r incluso para una diferencia arbitrariamente prefijada, por lo que establecemos que ese valor es una raíz de la ecuación

$$x = F(x)$$

En el fondo, lo que se tiene es una aplicación importantísima de la composición de funciones y de los procesos recursivos, la que al representar gráficamente permite dar un sentido concreto al secreto del número en cuestión, pues no hay más que un sitio en el que $x = Cos x$.

Se muestra a continuación, la gráfica del proceso recursivo empleado con la función $y = Cos x$ en el que se advierte el proceso de convergencia hacia la solución de la ecuación $x = Cos x$.



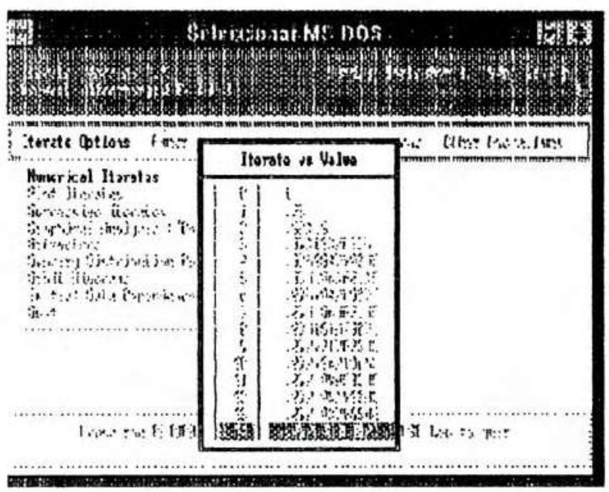
El pequeño "descubrimiento" ilustrado en el ejemplo, encierra sin embargo muchas sorpresas, intentemos aplicarlo a la solución de la ecuación $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

Según hemos visto antes, nos preguntaríamos si en alguna etapa del proceso recursivo

$$x_{r+1} = \tfrac{1}{2}x_r^2 + \tfrac{1}{4}$$

podemos considerar que x y $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ son iguales.

Dando inicio al proceso con $x_0 = 1$, se tiene:



en catorce iteraciones, una raiz de la ecuación es $x = .292893...$.

Como es fácil determinar usando la fórmula por radicales correspondiente, las soluciones de esta ecuación son $1 \pm \sqrt{0.5}$, esto es,

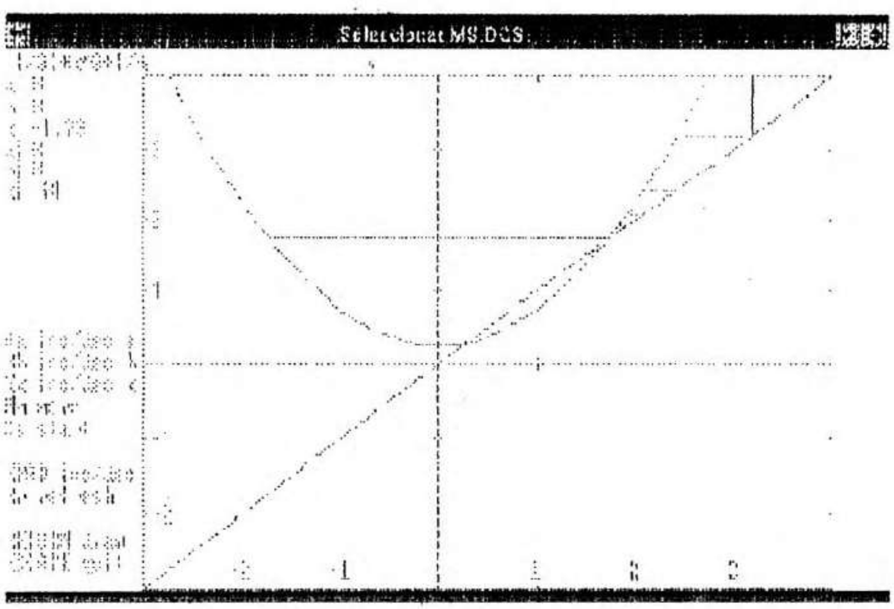
$$x_1 = 1 + \sqrt{0.5} = 0.292893219...$$

y

$$x_2 = 1 - \sqrt{0.5} = 1.707106781...$$

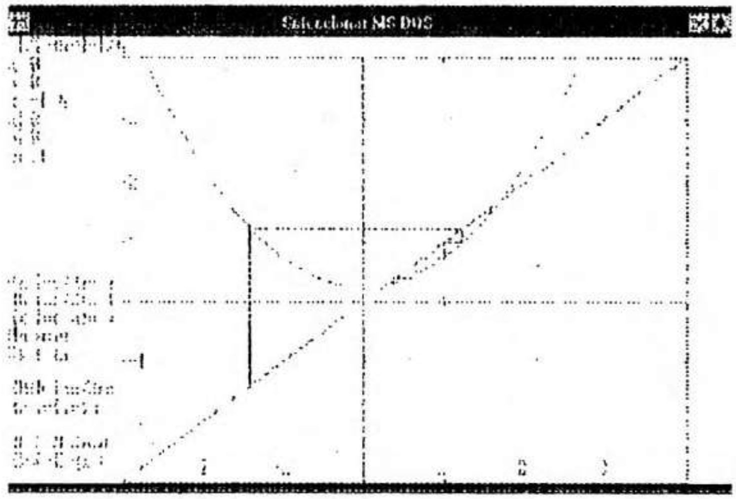
Sin embargo, iniciando el proceso con diversos valores de x, es posible conjeturar que,

- cuando $x \in (-\infty, -x_2) \cup (x_2, +\infty)$ el proceso diverge a $+\infty$



y en cambio

- cuando $x \in (-x_2, x_2)$, el proceso converge a x_1



a menos que se dé inicio exáctamente cuando $|x| = x_2$, lo cual es del todo improbable.

Sin notarlo, estamos inmersos dentro de uno de los aspectos más interesantes en todos los niveles de la matemática actual: el relacionado con la modelación de fenómenos dinámicos.

Para ello, el uso de los procesos recursivos y la computadora o en su caso la calculadora constituyen dos recursos insoslayables.

A pesar de que se incluyen procesos recursivos y la calculadora en la currícula matemática, no parece haber una corriente que proporcione a los primeros el ambiente natural de la segunda, con el fin de incursionar en una *matemática viva*, interesante y actual, no limitada al uso de la calculadora (o computadora en su caso) como una simple colección de tablas de valores, sino como un poderoso recurso de búsqueda, investigación y contraste de hipótesis, y muy frecuentemente, como recurso para la generación de otras.

No es difícil abordar conceptos como: órbita, puntos fijos, puntos fijos atractores, puntos fijos repulsores, órbitas estables e inestables, etc., usando una calculadora de bolsillo.

En este ejemplo, se ha realizado un paseo por tres formas de representación del concepto de función, y en ese paseo, unas formas de representación han generado nuevas significaciones a las que se desprendían originalmente de otras, de esta manera creo que el abordar una misma situación desde distintas posturas de representación, es lo que permite enriquecer las significaciones, realizar nuevas construcciones sintácticas y asignarles nuevos significados.

De nueva cuenta, el concepto de función ha permitido aglutinar a gran cantidad de contenidos de apariencia morfológica disímbola y generar situaciones de competencia lingüístico matemática en términos del agregado de nuevos significados propiciados por las articulaciones sintáctico conceptuales generadas por las diferentes formas de representación del concepto.

El proceso de Verhulst

El crecimiento demográfico es un tema que interesa a la Biología, a la Ecología, a la Epidemiología, pero también a los matemáticos, pues detrás de las fórmulas engañosamente simples del crecimiento demográfico, se oculta una rica y variada conducta que va desde el orden más simple hasta el caos.

La historia abunda en poblaciones fuera de control: la liberación de una pequeña colonia de conejos en Australia cuyos descendientes se expandió por todo el mundo; la conquista del nordeste de los Estados Unidos por la oruga de la "lagarta" que escapó de un laboratorio en Boston; la marea migratoria de abejas asesinas, las oleadas de gripe que parecen dormir durante años y luego atraviesan el globo como epidemias, sólo para agonizar antes del siguiente ciclo.

Algunas poblaciones se multiplican de prisa, otras se extinguen rápidamente, algunas más crecen y decrecen con periodicidad regular, otras se comportan de acuerdo con las leyes de atractores de diversa índole y aún caótica.

Tomemos como ejemplo el estudio demográfico de un parásito que vive en verano y muere con el frio después de poner los huevos.

Dando por sentado que un porcentaje similar de larvas de lagarta se empollan y sobreviven cada año, el tamaño de una colonia de larvas de este año está relacionado con la cantidad de larvas que se metamorfosearon en mariposas y desovaron el año anterior.

Supongamos que el tamaño de una colonia es de 100 lagartas y que la colonia se duplica cada año. Si el tamaño de la colonia es de 200 para el segundo año, para el siguiente será de 400, etc..., es decir

$$X_{n+1} = 2X_n$$

Desde luego, no todas las poblaciones se duplican, algunas pueden crecer con mayor velocidad.

De esta manera si denominamos N a la tasa de natalidad, cada colonia es N veces mayor este año que el año anterior, es decir

$$X_{n+1} = NX_n$$

En 1845, P.F. Verhulst, un científico interesado en la matemática del crecimiento demográfico, introdujo un nuevo término para describir el modo en que una población se desarrolla en una zona cerrada.

En vez de la simple ecuación demográfica

$$X_{n+1} = NX_n$$

él añadió el factor de corrección, $(1 - X_n)$; de esta manera el lado derecho de la ecuación contiene ahora dos términos rivales:

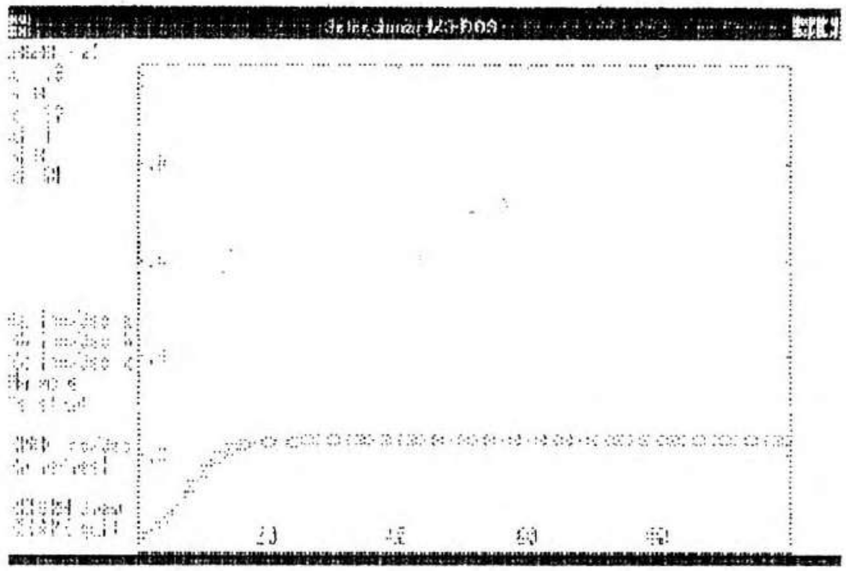
$$X_{n+1} = NX_n(1 - X_n), \text{ donde } 0 \leq x \leq 1$$

El asunto importante es que la modificación de Verhulst ha encontrado aplicaciones a un rango bastante más amplio que el originalmente concebido.

Los entomólogos han recurrido a ella para computar el efecto de las plagas en los huertos y los genetistas la usan para calibrar el cambio de frecuencia de ciertos genes en una población.

Se le ha aplicado también al modo en que se difunde un rumor: al principio un rumor se expande exponencialmente hasta que casi todos lo han oído. Luego la tasa decae velozmente, a medida que más personas dicen: "Si hombre, ya sé que a fulanito .... "

La ecuación de Verhulst también ha sido aplicada a las teorías del aprendizaje. El aprendizaje primero aumenta, pero al cabo de un cierto tiempo el estudiante se satura, de modo que los nuevos esfuerzos sólo producen resultados mínimos.

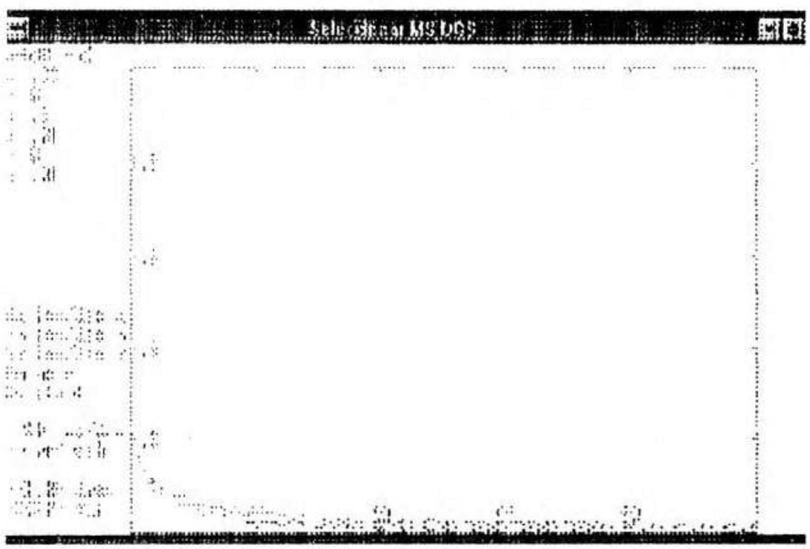


Edward N. Lorenz, un metereologista del MIT, descubrió en 1963 que precisamente la ley de Verhulst es capaz de describir ciertos aspectos en el flujo de turbulencias, particularmente cuando su tasa de crecimiento es alta. Desde entonces, los trabajos teóricos en la física del laser, hidrodinámica y la cinética de las reacciones química han mostrado el carácter paradigmático de esta ley, y los escenarios previstos por ella han sido verificados experimentalmente.

En todas las situaciones en las cuales es aplicable la ecuación demográfica, acecha el potencial del Caos.

Por ejemplo, empecemos con una población de larvas de lagarta a la cual se ha impuesto una forma de control de la natalidad, por ejemplo rociándola con insecticida.

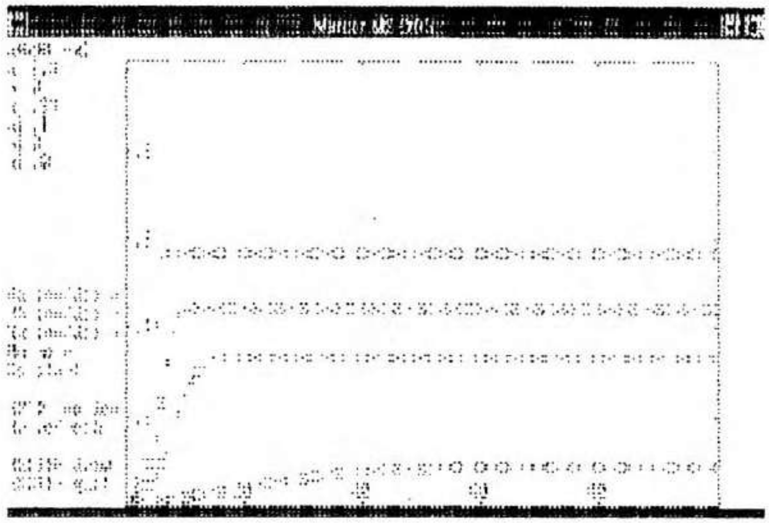
Dando por sentado que estas criaturas no sufran mutaciones, la población de cada año disminuirá un poco respecto de la del año anterior. Si la tasa de natalidad N es *0.99*, aún una población muy numerosa llegará eventualmente a cero. Esto es la colonia termina por perecer.



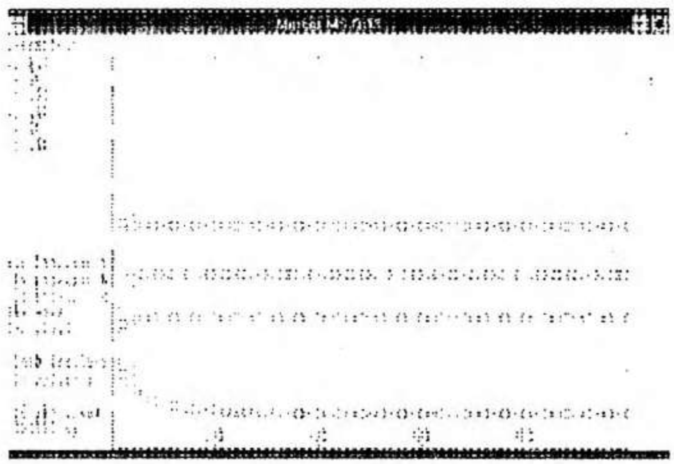
¿Pero qué ocurre cuando la tasa de natalidad es superior a *1*?

Dado el factor no lineal de Verhulst, una población grande al principio declinará pero luego se acomodará en un valor constante de $\frac{2}{3}$ o *66* por ciento de su tamaño original conforme la tasa de natalidad se incrementa.

En la gráfica siguiente se muestra lo que ocurre para una población inicial del 99% de la colonia original para diferentes tasas de crecimiento, (en el programa $a=1.1$, 1.5, 1.8, 2.3 con $x=.99$)



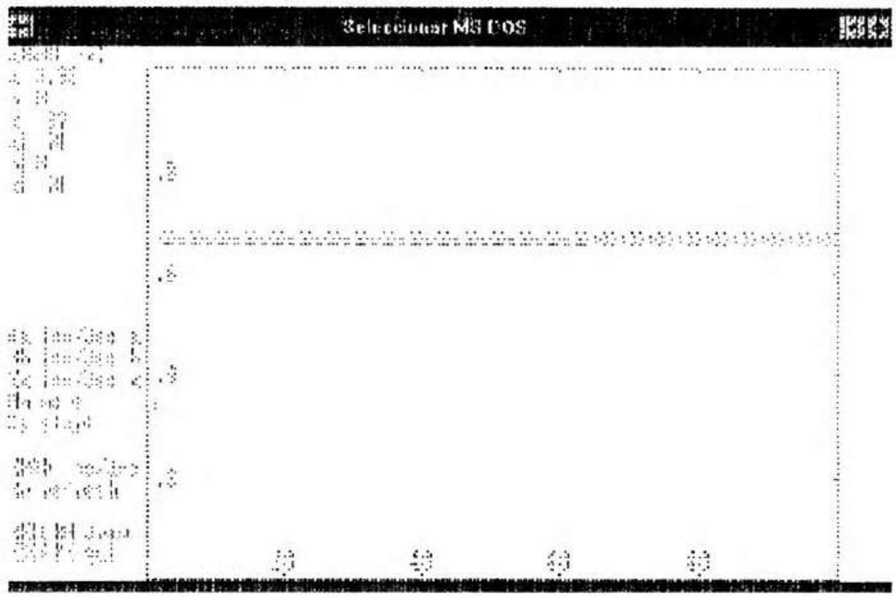
Asimismo, una población inicial muy pequeña crecerá hasta el mismo límite de $\frac{2}{3}$ con en la gráfica siguiente para las mismas tasas de crecimiento que en el caso anterior iniciando con un 28% de la población original.



Cuando *N* (tasa de natalidad) es igual a *2.5*, la ecuación muestra una ligera oscilación cuando los dos términos demográficos rivales entran en oposición, pero, después de eso, regresa la misma cifra constante de población. Parece que la cifra de 66 por ciento se ha convertido en un atractor.

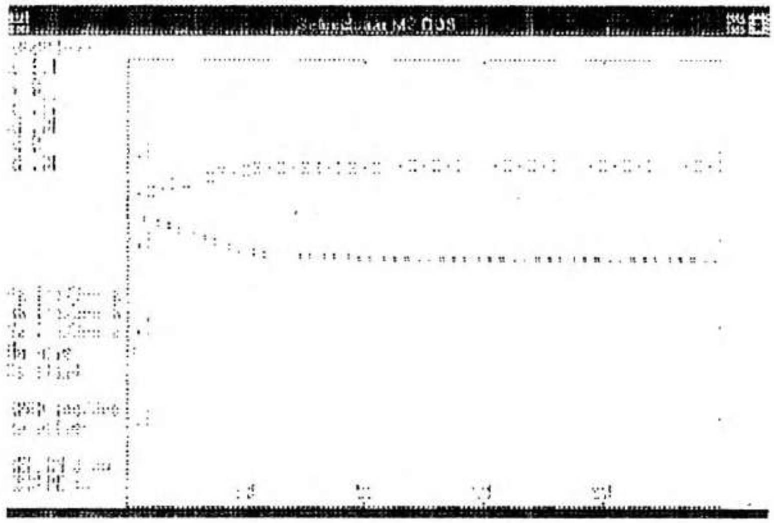
Subamos N a 2.98. ¿Qué ocurre ahora?

La oscilación continua por más tiempo pero eventualmente la población se acomoda en un 66 por ciento de su tamaño original: de vuelta al atractor.



Elevemos aún más el valor de N, la tasa de natalidad. Las oscilaciones duran cada vez más, pero eventualmente la población llega a un estable 0.66.

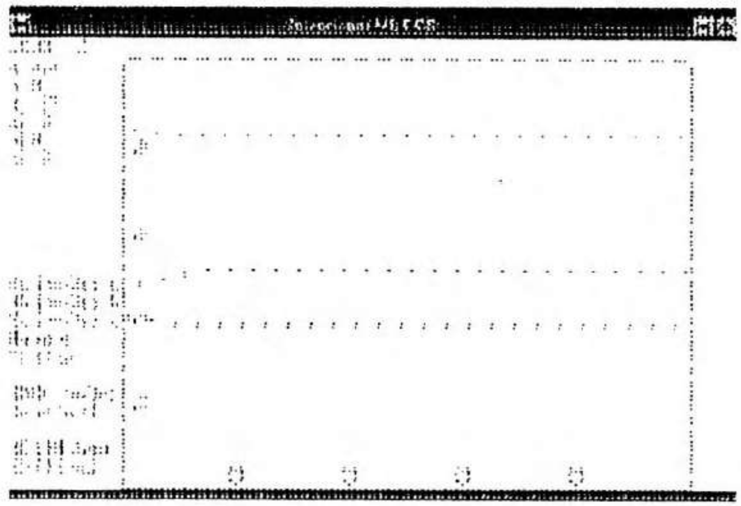
Sin embargo, cuando la tasa de natalidad alcanza el valor crítico 3.0, algo nuevo ocurre. El atractor se vuelve inestable en 0.66 y se divide en dos. Ahora la población comienza a oscilar alrededor de dos valores estables en vez de uno.



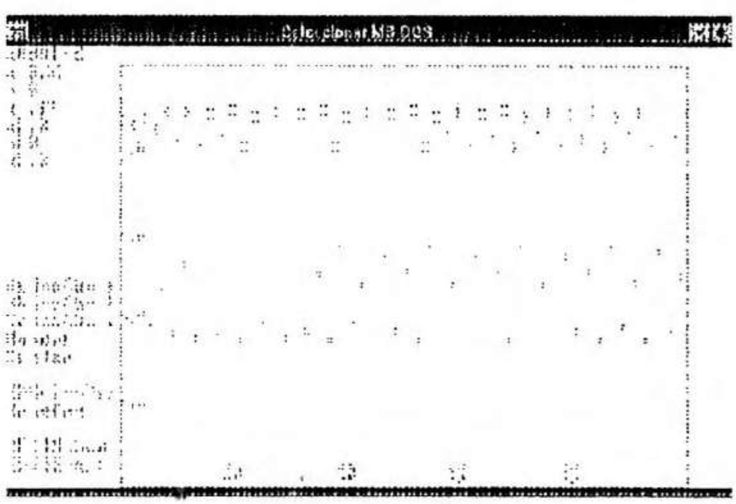
Traducido a términos reales, esto significa que la pequeña población de lagartas se reproduce fanáticamente, dejando una gran provisión de huevos para la próxima temporada. Pero en la temporada siguiente la región está excesivamente poblada, lo cual crea un efecto de reducción, de modo que los escasos insectos que sobreviven dejan pocos huevos para el próximo año. La población sube y baja entre valores altos y bajos. La conducta del sistema se ha vuelto más compleja.

Cuando elevamos la tasa de natalidad por encima de *3.4495*, los dos puntos fijos se vuelven inestables y se bifurcan para producir una población que oscila ahora alrededor de cuatro valores.

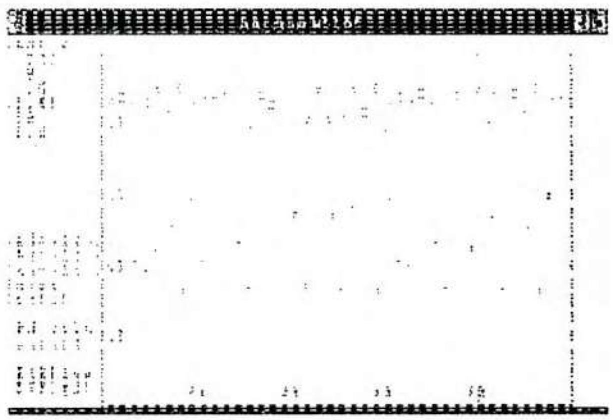
Ahora la población de larvas es radicalmente diferente en cada uno de cuatro años sucesivos.



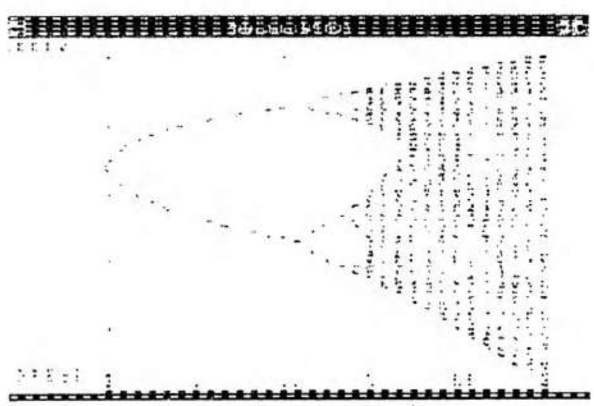
Cuando la tasa de natalidad llega a *3.56* las oscilaciones se vuelven nuevamente inestables.



En *3.596* tenemos otra bifurcación, esta vez con dieciséis atractores. En este punto es casi imposible ver algún orden en el ascenso y descenso de la población de larvas de nuestro jardín. Año a año el número brinca de modo cuasi-aleatorio y no podemos discernir el patrón.



Finalmente, cuando la tasa de natalidad llega a *3.5699* , el número de atractores ha aumentado hasta el infinito.



Robert May, un físico de Princeton que se ha dedicado a la biología, es una figura clave en la historia de cómo los científicos aprendieron acerca de lo que hoy se denomina "ruta hacia el caos mediante duplicación de períodos". Un período es el tiempo que un sistema tarda en regresar a su estado original.

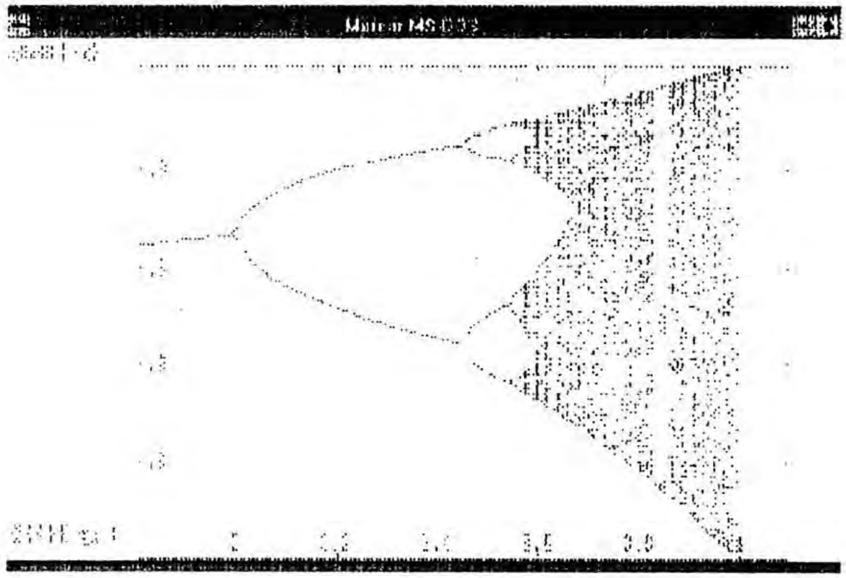
A principios de la década de 1970 May usó un modelo basado en la fórmula de Verhulst que le permitía aumentar o reducir la tasa de natalidad alterando el suministro de alimentos.

May descubrió que el tiempo que tardaba el sistema en volver a su punto de partida se duplicaba en ciertos valores críticos de la ecuación.

Al cabo de varios ciclos de período duplicado, la población de insectos de su modelo variaba al azar, al igual que las poblaciones de insectos reales, y no revelaba nigún período previsible para regresar a su estado original.

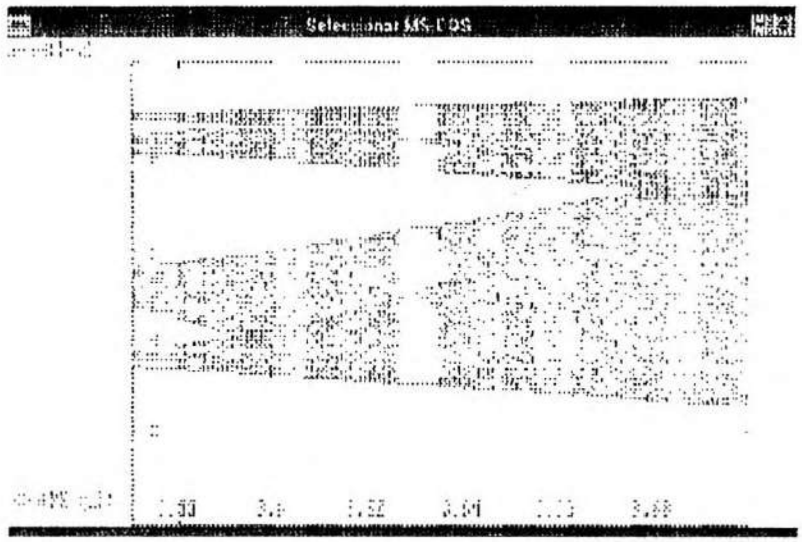
Pero, al menos matemáticamente, la historia no termina allí. Los científicos han aprendido que esta extraña ruta hacia el caos contiene todo un circo de órdenes antes inimaginables.

Varios son evidentes en la figura siguiente, un gráfico que representa las iteraciones sucesivas de la ecuación demográfica no lineal de Verhulst.



El gráfico anterior revela la estructura subyacente del caos, otra imágen de un extraño atractor.

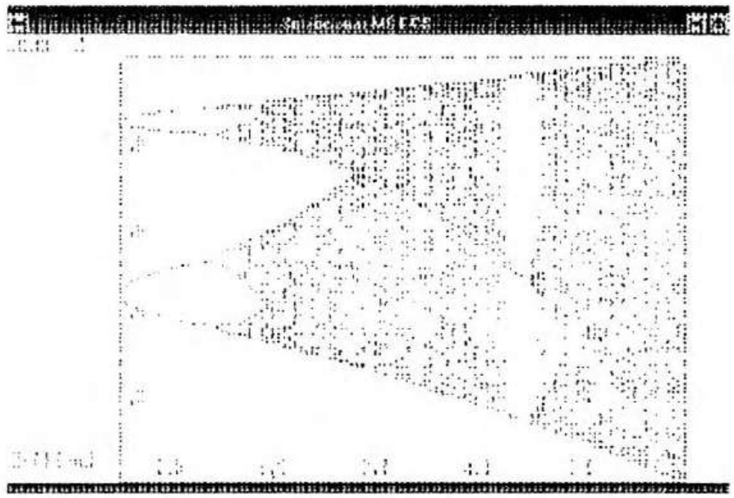
Ante todo, reparemos en las regiones oscuras llenas de puntos que representan la virtual infinitud de lugares donde se puede encontrar el sistema. en la gama de la tasa de natalidad que va desde *3.56999* a *3.7* el sistema (cantidad anual de larvas) fluctúa inprevisiblemente dentro de cuatro amplias regiones de atracción y luego de dos.



Estas regiones oscuras se aproximan hasta encontrarse aquí, en el orden del *3.7*, la población (cantidad de larvas del jardín) podría tener casi cualquier valor, desde muy cerca de 0 hasta una cifra muy alta (representada en el diagrama por *1.0*), y de año a año la población brinca de manera local e imprevisible. Sin embargo, sólo se llena la totalidad del espacio de fases cuanto la tasa de natalidad llega a *4.0*.

El modo en que el gráfico se despliega en el cuadro sugiere que el caótico proceso mediante el cual se rellena el espacio de fases es en realidad extrañamente ordenado.

Segundo, reparemos en que las líneas oscuras forman parábolas dentro del abanico del caos. Estas líneas representan valores donde hay una probabilidad más alta de encontrar el sistema. Otra forma de orden dentro del caos.



Tercero, reparemos en las bandas verticales esparcidas a través de la expansiva sombra del caos. Se trata de regiones -los físicos las llaman "ventanas"- donde el sistema se vuelve estable. Alrededor de *3.8* , por ejemplo, justo en el medio de este caos en expansión, la población se vuelve nuevamente previsible y aumenta en dos años sucesivos y decrece en el tercero. Pero si la tasa de natalidad (suministro de alimentos) se eleva un poco, la ventana se abre y vuelve al caos. Estos períodos de estabilidad y previsibilidad en medio de la fluctuación aleatoria reciben el nombre de "intermitencia".

Cabe comentar que toda la riqueza que se puede obtener con este ejemplo, está sustentada en el producto de dos factores lineales y en la recursividad, por lo que está totalmente al alcance de los escolares desde el nivel medio de educación.

De esta manera se advierte cómo el concepto de función (en manifestaciones tan modestas como dos factores lineales) en combinación con los procesos recursivos permiten abordar situaciones sumamente novedosas y tan complejas como del orden del caos.

Otro comentario pertinente parece ser el que en el ejemplo se ilustra una forma de tránsito desde el determinismo hasta el caos de un comportamiento estocástico; sin embargo, el tránsito desde el caos de un proceso recursivo estocástico a una apariencia totalmente ordenada también es posible, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Intente el siguiente experimento.

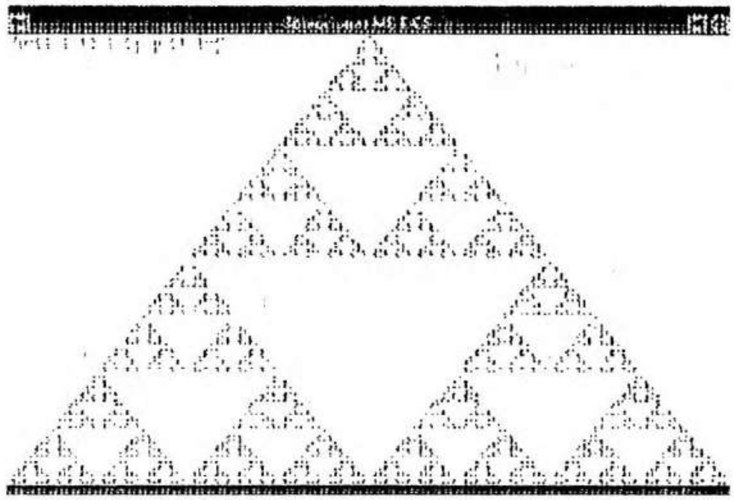
Pinte un triángulo equilátero y aleatoriamente seleccione un punto sobre uno de los tres lados y únalo formando un segmento con cualquiera de los vértices.

Trace el punto medio del segmento y elija ahora, aleatoriamente uno de los vértices del triángulo para trazar un nuevo segmento.

Repita el proceso algunos miles de veces más, consistente en elegir el punto medio y aleatoriamente cualquiera de los vértices para volver a trazar otro segmento, etc... .

¿Qué parte del triángulo cree usted que resultará cubierta por los puntos elegidos por esta construcción?

Como a mano difícilmente se tendrá la paciencia de hacerlo, he aquí el resultado de la realización del proceso algunos miles de veces, empleando un computador para realizar la simulación :



Sorprendente!, ¿No?

1. Trate de explicar la apariencia del resultado.
2. ¿Es significativo el que se parta de un triángulo equilátero?
3. ¿Es significativo el hecho de que sea usado el punto medio del segmento?
4. Estime el tamaño del área no tocada por estos puntos.
5. ¿Qué podría usted esperar como resultado si el polígono regular inicial tuviera más de tres lados'

Sin duda, el tipo de situaciones en este apartado, conllevan de manera natural a reconsiderar[5] tanto nuestra geometría, como las nociones de procesos deterministas y no deterministas, pues: ¿qué tan

[5] Ver: Hernández L., Víctor M., Algunas Nociones sobre Geometría de Fractales., VI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas., UNISON., Departamento de Matemáticas., 1995.

determinista es el determinismo y qué tan aleatorio es el resultado de un proceso estocástico recursivo?.

En el fondo me estoy preguntando por el tipo de asignaciones de significados que se pueden hacer si partimos desde una punta o de la otra, es decir por los valores que puede tomar una función epistémica y la relatividad de sus concepciones.

Probabilidad

Los problemas en esta área siempre resultan interesantes en cuanto permitan tomar decisiones con bases de incertidumbre, es decir, calcular probabilidades por sí mismas no tiene ningún sentido.

Por ejemplo[6], se ha encontrado que la cantidad de pan (en cientos de kilogramos) que cierta panadería es capaz de vender en un día, es una variable aleatoria con una función de densidad de probabilidades $f_X(x)$, dada por la expresión:

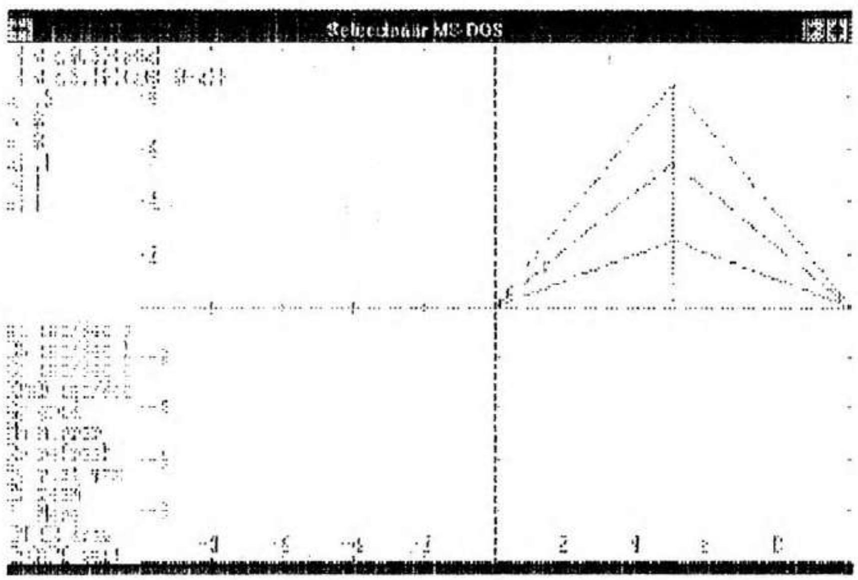
$$f_X(x) = \begin{cases} Ax & ; \quad \text{si } 0 \leq x < 5 \\ A(10-x) & ; \quad \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 0 & ; \quad \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

1. Encuentre el valor de A que hace a $f_X(x)$ una función de densidad de probabilidades.
2. Grafique la función de densidad de probabilidades.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de kilogramos de pan que será vendido mañana sea: (a) mayor de 500, (b) menos de 500, (c) entre 250 y 750 kilogramos?

[6] Ver: Hernández L., Víctor M., Una Introducción al Estudio de las Variables Aleatorias, UNISON., Mmes 90-27-03, DAMAT. Nº 149., Hermosillo, Sonora., 1991., Pág. 116

4. Denote respectivamente, por A, B y C, los eventos consistentes en que el número de kilogramos de pan vendidos en un día sea (a) mayor de 500, (b) menos de 500, (c) entre 250 y 750 kilogramos. Encuentre $P(A/B)$, $P(A/C)$. ¿Son A y B independientes? ¿Son A y C independientes?

La sola inclusión de parámetros en la expresión para la función del problema induce de por sí una situación dinámica, que en principio hay que ajustar a la situación especifica del problema, es decir precisamente determinar el valor de A que proporciona sentido a la expresión en el contexto que le es propio.

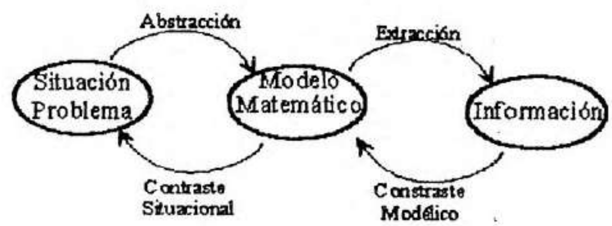


Aunque el problema puede ser resuelto sin Cálculo Integral, resultara conveniente que los estudiantes lo usen, no por la dificultad del cálculo sino por la oportunidad de verificar rápidamente la respuesta.

Desde luego, una vez determinado el modelo, pueden diseñarse preguntas que permitan contrastar o generar tensiones para el contraste de las respuestas. De nueva cuenta, el concepto de finción es el núcleo.

Cálculo Diferencial

Sin lugar a duda, el concepto de finción es un concepto medular para el cálculo. Como ya he indicado en otro sitio[7], las finciones tienen un papel central en el quehacer del cálculo (y en general en cualquier otra rama de la matemática escolar) como se indica:



Este sólo hecho abre la necesidad de que el estudiante desarrolle, a lápiz y papel, con auxilio de una calculadora gráfica o de un computador, lo que en un trabajo anterior[8] he llamado un cuasialgoritmo de graficación de finciones, mediante dos niveles de acercamiento: Global y Local.

Para el nivel de acercamiento global, trabajé formando inicialmente lo que llamé un catálogo de "finciones madre" o básicas, como: $y = x, y = x^2, ..., y = x^n$ con n par e impar , de manera análoga,

[7] Hernández L., Víctor M., Una Opinión y una Experiencia en la Enseñanza del Cálculo., Revista de Matemáticas. , UNISON., Boletín del Departamento de Matemáticas., Vol. 2 Nº 12., Enero de 1989.

[8] Hernández L., Víctor M., Seis Prácticas de Graficación de Funciones (Por parámetros)., ITH-MICROSEP., Hermosillo, Sonora., Septiembre de 1988.

tomando a la colección $y = \frac{1}{x^n}$ también con n par o impar, $y = \sqrt{x}$ y $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$, $y = Sen(x)$, $y = Cos(x)$, $y = e^x$ y $y = \ln x$.

Estas funciones sirvieron como generadoras (o madres de cada familia) al estudiar el efecto sobre la gráfica de cada una de ellas cuando se les aplicaban sucesivos valores de los parámetros a, b y c, primero en las expresiones por separado $y = af(x)$, $y = f(x) + b$, y $y = f(x - c)$ hasta descubrir el patrón correspondiente, para luego integrar el cuasialgoritmo conceptual para la graficación esquemática, a nivel de bosquejo rápido, de la expresión más general $y = af(x - c) + b$, en donde $f(x)$ era alguna de las funciones generadoras básicas.

En la etapa siguiente -acercamiento local-, se ampliaba el cuasialgoritmo abordando la construcción gráfica de la suma, diferencia, producto y cociente de las gráficas de las funciones componentes en cada caso, las que podían estar entre las funciones generadoras (madres de familia) o aún corresponderse con algún elemento de la familia.

La reflexión sobre la recta $y = x$ y la composición de funciones permiten ampliar notablemente al cuasialgorimo, caracterizando con los recursos mencionados a las gráficas de las funciones inversas.

Las habilides logradas en el manejo de familias de funciones tienen un uso también inmediato en el curso de cálculo integral y el de ecuaciones diferenciales.

El hacer esto con lápiz y papel ha entrado en desuso, pero sigue siendo de particular relevancia que el estudiante desarrolle un cuasialgoritmo de graficación de funciones, no importa de qué recursos se valga para ello.

A manera de comentario, creo que todas las ideas para abordar los conceptos matemáticos expuestas aquí tuvieron de alguna u otra forma, su génesis en el trabajo reseñado en este último ejemplo.

Epílogo

En este apartado se intenta dar una visión retrospectiva, tanto como una prospectiva del trabajo que se presenta.

En la parte retrospectiva, se intenta fundamentalmente restablecer los vínculos entre los extremos del trabajo, es decir, entre el marco teórico (Capítulo 1) y la postura didáctica (Capítulo 3).

En la parte prospectiva, se hace una visualización, de algunas formas en las que podría evolucionar el desarrollo del currículo matemático escolar no especializado, con algún comentario derivado hacia el currículo matemático especializado.

Visión retrospectiva

En resumen ... se repite la historia

Mi problema (versión psicogenética) en esta tesis fué el percibir que la diversidad de dialectos disciplinares en educación matemática puede convertirse en un obstáculo docente para la recuperación del substrato que potencia la competencia en el código y eventualmente la transferencia entre ellos.

Mi problema (versión operativa) fué el realizar la búsqueda, identificación y modelado de un substrato, lingüístico general y luego particular de la matemática, que cubriera tanto los requerimientos de la versión psicogenética del problema como los propuestos por mis propias aspiraciones en el transcurso del trabajo.

De todo esto, tengo que el concepto de función constituye un substrato conceptual, al menos, de la matemática escolar no especializada, con la importante propiedad de que a partir de la articulación de sus diferentes representaciones es posible lograr nuevas significaciones de los contenidos matemáticos, desarrollando con ellas formas novedosas de acercarse a los mismos.

Respecto a la tesis de que:

el concepto de función está subutilizado en el contexto de la matemática escolar en tanto se desdeñan extensiones del concepto pertinentes y factibles en los niveles educativos por la vía de recursos de representación complementarios al sintáctico lógico formal y la significación agregada por la articulación de éstos,

puede comentarse que al hacer la revisión -no exhaustiva- de la incidencia del concepto de función en el contexto escolar, no sólo se encontraron muestras de subutilización del concepto.

En adición, al examinar los libros de texto de los programas de capacitación para los profesores en los niveles básico y medio básico se encontraron incorrecciones conceptuales en el manejo del concepto de variación proporcional directa.

Esto es particularmente grave, si consideramos que en estos niveles se cultivan las ideas seminales de lo que en los niveles subsecuentes habrá de realizarse. En adición a ello, el concepto de variación en general y su tipificación en términos de el análisis de los cocientes en diferencias constituye sin lugar a dudas la génesis de un concepto vertebral y/o medular en la formación matemática global de los individuos: el concepto de función.

Por otro lado, el bachillerato -en términos generales- parece no estar desempeñando un papel satisfactorio en cuanto a la continuidad de los contenidos en el currículo matemático debido quizá a la enorme diversidad de planes y programas de estudios, normatividad a la que ANUIES y otras organizaciones han podido acercarse sólo a nivel de recomendaciones.

En cuanto a que:

> *la postulación del concepto de función como un substrato conceptual de la matemática escolar, permitiría potenciar la formulación de nuevas estrategias operativas en el desarrollo del currículo matemático.*

he expuesto una variedad de ejemplos procurando que al menos de entrada resultaran inconexos, mostrando que, en realidad, todos ellos exhiben al concepto de función como substrato conceptual y operativo, retomando fuertemente la versión operativa de la noción de problema que se sustenta en el Marco Teórico.

En adición a esto, se dan muestras de que efectivamente el referirse a un substrato conceptual, en este caso el concepto de función, ha permitido tanto la reinterpretación de la situación problema como el potenciar nuevas formas de abordar el problema.

La reinterpretación ha permitido abordar desde una casuística enormemente más amplia, aún partiendo de un problema aparentemente simple como el de las dimensiones de un terreno rectangular, hasta sistemas dinámicos, que no por tener como génesis a elementos aparentemente sencillos como un par de factores lineales, proponen problemas triviales de conceptualización y búsqueda.

En todo ello se ha puesto especial énfasis en el papel modélico del concepto de función en la versión operativa de problema, que es la que finalmente permite realizar las manipulaciones pertinentes y competentes de las relaciones entre las variables implicadas en el problema.

Estas manipulaciones del modelo, -de índole diversa como simbolización, manipulación algorítmica, graficación, etc..- son las que permiten el tránsito bidireccional entre el estadio de la situación reconocida como problema y el estadio relacional de la misma que significa su solución.

Comentarios consecuentes

Por la relevancia advertida del concepto de función en el currículo matemático escolar y las ideas expuestas en este trabajo:

- Sugiero la necesidad de poner un especial cuidado y atención a la discusión de la temática de variación su tipificación y el concepto de función, en los foros en los que se tenga contacto con profesores de todos los niveles, en particular con los de nivel de educación básico, pues es en ese nivel en el que se desarrolla la simiente del concepto de función y sus manifestaciones.
- Me permito sugerir la necesidad de que el currículo matemático escolar global, pudiera ser organizado tomando en consideración al concepto de función como substrato conceptual y como bujía para potenciar -por la vía de la producción oral y escrita- niveles superiores de competencia lingüístico matemática.
- Se advierte la necesidad de abordar los contenidos del currículo matemático escolar desde un punto de vista cualitativamente distinto y particularmente enfocado a lograr por la vía de la resolución de problemas en los que se

manejen datos experimentales reales, la articulación de las diversas formas de representación del concepto de función. No es posible que el trabajo docente continue haciendo matemáticas de "salón", con problemas tomados exclusivamente de los libros y números decentes (enteros) pero alejados de la realidad planteada por el más humilde de los problemas prácticos.

- No se trata de un enfoque utilitarista de la matemática escolar, sino de integrar articuladamente las funciones lingüístico matemáticas pragmática, semántica y sintáctica, a fin de poder estar en la posibilidad de rebasar el pobre -pero muy difundido esquema- de la educación como un problema de comunicación, de una comunicación que no enriquece pero si empobrece nuestras habilidades descriptivas y argumentativas.
- Para ello, la oralidad y la escritura deben cobrar el papel que les corresponde en este contexto, es decir el papel de herramientas de acción-investigación, tanto a nivel individual como colectivo, del grado de organización del pensamiento.

Prospectiva

En esta dirección, es insoslayable el dar satisfacción a la necesidad de apoyar las actividades docentes con tecnología de cómputo, pues es evidente que ésta constituye un recurso para abordar de una forma cualitativamente distinta, el espacio y el tiempo.

Con la posibilidad que ofrece la geometría fractal y los recursos de cómputo para la generación de "mundos virtuales", se abre la posibilidad inmediata de generación de nuevos paradigmas explicativos en todos los ámbitos.

Uno de los ámbitos que me interesa comentar en este documento es el relacionado con la matemática y sus criterios de validación. Debido a la necesidad y la posibilidad real de hacer cálculos y representaciones conceptuales de una manera cada vez más rápida y eficiente (debido a la tecnología de cómputo), se abre la posibilidad de abordar la búsqueda al interior de la disciplina matemática en formas insospechadamente distintas, tanto como la de rescatar antiguos cánones de búsqueda y validación que en su momento se vieron limitados por la escasez de recursos de cálculo.

¿Todo esto conduce hacia una nueva matemática?, ¿Habrá manera de realizar una correspondencia tal que permita *traducir* el problema de la validación matemática al correspondiente en un ambiente de cómputo?, despues de todo, a ambas disciplinas les subyace la lógica bivalente y la geometría euclideana.

vhernan@gauss.mat.uson.mx

Anexo 1

Bibliografía

Bazán Levy, José., Revista de la Educación Superior, Vol XX., Núm. 1 (77). Enero-Marzo 1991., ANUIES, 1991., México. Tesis Acerca del Bachillerato Mexicano en 1991, p. 95-108.

Bertalanffy, Ludwig Von., Teoría General de los Sistemas., Fondo de Cultura Económica., Sexta reimpresión., México.1987.

Bolaños, Martínez, Víctor Hugo., El Financiero., sección: Sociedad., El Bachillerato ¡Tierra de Nadie!., p. 46., junio 28 de 1993., México.

Braun, Eliezer., El saber y los sentidos., Fondo de Cultura Económica S.A. de C.V., México 1988.

Briggs, John & Peat, F. David., Espejo y Reflejo: del Caos al Orden., Conacyt, Editorial gedisa., México., 1991.

Cassirer, Ernst., Filosofía de las formas simbólicas III., fenomenología del reconocimiento., Fondo de Cultura Económica., 1976., México.

Cassirer, Ernst, Esencia y efecto del concepto de símbolo., Fondo de Cultura Económica, 1989, México.

Chomsky, Noam & Miller, George A., El análisis formal de los lenguajes naturales., trad. de Carlos Piera., edición original: *Handbook of Mathematical Psichology*., Wiley & Sons., New York., 1963., Edit. Comunicación Serie B., Madrid España, 1972.

Coriat, Benjamín., Revista Mexicana de Ciencias Políticas y Sociales., No 121, Del Sistema Taylor al Taller en Serie Robotizado., p. 11-21

Devaney, Robert L., Chaos, Fractals, and Dynamics. Computer Experiments in mathematics., Addison-Wesley Publishing Company., 1990., U.S.A.

Díaz Barriga, Angel, Perfiles Educativos., Problemas y Retos del Campo de la Evaluación Educativa., No. 37 CISE, UNAM., 1987., México., p. 4-5

Eco, Umberto., Tratado de Semiótica General, Trad. Carlos Manzano., Barcelona: Editorial Lumen., 1977

Eco, Umberto., Los Límites de la Interpretación, Editorial Lumen, S.A., 1992., México.

Faure, E. et al., Aprender a Ser., Alianza Universidad - UNESCO., 13ª reimpresión., 1991., España.

Filloy, E., 1992., Diseño y Desarrollo Curricular para la Enseñanza de las Matemáticas, Gopher de la Universidad Autónoma de México., condor.dgsca.unam.mx.

Fregoso, Arturo., Los elementos del lenguaje de la matemática 1., Lógica y teoría de conjuntos., Edit. Trillas S.A., Segunda Edición., México., 1980.

Fregoso, Arturo., Los elementos del lenguaje de la matemática 2., Funciones., Edit. Trillas S.A., Primera reimpresión., México., 1986.

Fregoso, Arturo., Los elementos del lenguaje de la matemática 3., Sistemas numéricos bien ordenados., Edit. Trillas S.A., México., 1980.

Fridman, Lev M., Metodología para enseñar a los estudiantes del nivel medio superior a resolver problemas de matemáticas (Cómo enseñarse a resolver problemas)., Trad. del ruso por José Ramón Jiménez Rodríguez., Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, Secretaría de Educación y Cultura del Gobierno del Estado de Sonora., Hermosillo, Sonora, México., 1993.

Greimas, A.J., Semiotics and Language. An Analytical Dictionaryu. Trad. Carlos Manzano., Bloomington: Indiana University Press., 1982

Habermas, Jürgen., Ciencia y técnica como "Ideología"., título original en alemán: *Technik und Wissenschaft als <<Ideologie>>. 1968.*, Red Editorial Iberoamericana México., S.A., de C.V., México., 1993.

Heinz-Otto, Peitgen & Dietmar Saupe (Editors)., The Science of Fractal Images, Barnsley, M.F., Devaney, R. L., Mandelbrot, B. B., Peitgen, H.O.., Saupe, D., Voss, Richard, et al., Springer-Verlag New York Inc., 1988., U.S.A.

Hernández L., Víctor M., Una opinión y una experiencia en la Enseñanza del Cálculo., Revista de Matemáticas., Boletín del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora., Vol. 2., Nº 12, Enero de 1989.

Hernández L., Víctor M., Seis Prácticas de Graficación de Funciones (Por parámetros)., ITH-MICROSEP., Hermosillo, Sonora, Septiembre de 1989.

Hernández L., Víctor M., Propuesta para la Organización de un Modelo Educativo bajo un Paradigma Lingüístico, Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Sonora., 1994, México.

Hernández L., Víctor M., Algunas Nociones sobre Geometría de Fractales, Universidad de Sonora., Departamento de Matemáticas., México., 1995

Hernández L., Víctor M., Una Introducción al Estudio de las Variables Aleatorias, Universidad de Sonora., A/FOMES 90-27-03., DA/MAT., Nº 149., Hermosillo, Sonora., 1991.

Hernández L., Victor M. & Villalba, Martha C., Un proyecto de Investigación: "El Curso de Cálculo Diferencial I del Nivel Superior, con Apoyo en la Computadora"., Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa., San José de Costa Rica., 1989.

Hernández L., Victor M & Villalba, Martha C., El Papel Semántico de la Graficación de Funciones como Apoyo para la Solución de Desigualdades., Maestría en Matemática Educativa., Universidad de Sonora., 1991.

Hernández L., Victor M. & Villalba, Martha C., Telephone Calls., University of Arizona Workshop., Aug., 1992.

Hocket, Shirley O. & Sternstein, Martin., Cálculo por Objetivos y Aplicaciones., Editorial CECSA., México, 1982.

Hugues-Hallet, Deborah., Gleason, Andrew M., et al., Calculus. Preliminary Edition., Produced by the Consortium based at Harvard and funded by a National Science Foundation Grant., John Wiley & Sons, Inc., 1992., USA.

Huneeus, Francisco., Lenguaje, Enfermedad y Pensamiento., Cuatro Vientos Editorial., Santiago de Chile., 1989.

Jakobson, Roman., Ensayos de Lingüística General. Trad. Josep M. Pujos y Jem Cabanes., 1975.,Barcelona: Seix Barral.

Janvier, Claude., Problems of representation in the teaching and learning of mathematics., Lawrence Erlbaum Associates, Publishers., USA., 1987.

Kilpatrick,J., 1987., What Constructivism Might Be in Mathematics Education., University of Georgia., Paper prepared for the 11th Intl. Meeting of Psychology of Mathematics Education., Montreal, 1987.

Moll, Luis et al., "Funds of Knowledge for Teaching: Using a Qualitative Aproach to Connect Homes and Classrooms"., Theory into Practice, Vol. XXXI, Nº 2, Spring.

Ortiz de Thomé, Consuelo, Revista de la Educación Superior, Vol XX., Núm. 1 (77). Enero-Marzo 1991., ANUIES, 1991., México. Algunas notas acerca del Bachillerato universitario, p. 33-41.

Papert, Seymour A., La Estética de la Ciencia, editado por Judith Weschler, Fondo de Cultura Económica (Breviarios), El inconsciente matemático, 1982., México.

Pike, Kenneth L., Language in Relation to a Unified Theory of The Structure of Human Bahavior., The Hague: Mouton & Co., 1967

Popper, Karl R., Conocimiento Objetivo., Un enfoque evolucionista., Editorial Tecnos., 1982., Madrid, España.

Saiz, Irma & Block, David., El Geoplano. Un recurso didáctico para explorar el mundo de la geometría elemental., Laboratorio de Psicomatemática Nº 2., DIE-CINVESTAV., México., Marzo de 1984

Scraton, R.E., Métodos Numéricos Básicos, Introducción a las matemáticas numéricascon base en la microcomputadora., Trad. de María de Lourdes Fournier G., McGraw-Hill., México., 1986.

SEP., La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, Lecturas, Secretaría de Educación Pública., México., 1995.

SEP., Matemáticas. Segundo grado, Secretaría de Educación Pública., México., 1994.

SEP., La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, Lecturas, Secretaría de Educación Pública., México., 1995.

SEP., La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, Taller para maestros 1., Primera parte., Secretaría de Educación Pública., México., 1995.

SEP., Libro para el Maestro., Matemáticas., Educación secundaria., Secretaría de Educación Pública., México., 1994.

SEP., Matemáticas. Cuarto grado, Secretaría de Educación Pública., México., 1994.

SEP., La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, Material Recortable, Secretaría de Educación Pública., México., 1995.

SEP., La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria, Guía de Estudio, Secretaría de Educación Pública., México., 1995.

SEP., Matemáticas. Tercer grado, Secretaría de Educación Pública., México., 1994.

SEP., Matemáticas. Primer grado, Secretaría de Educación Pública., México., 1994.

SEP., La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, Taller para maestros 2., Segunda parte., Secretaría de Educación Pública., México., 1995.

SEP., Matemáticas. Quinto grado, Secretaría de Educación Pública., México., 1994.

SEP., Plan y Programas de Estudio 1993, Educación básica secundaria., Secretaría de Educación Pública., México., 1993.

SEP., Matemáticas. Sexto grado, Secretaría de Educación Pública., México., 1994.

Sinclair, H., Constructivism and the Psychology of Mathematics., University of Geneva., Paper prepared for the 11th Intl. Meeting of Psychology of Mathematics.,Montreal.,1987.

Tomassini Bassols, Alejandro., El pensamiento del último Wittgenstein, problemas de filosofía contemporánea., Editorial Trillas S.A. de C.V., México, 1988.

Vygostsky, Lev Semenovich., Mind in Society, The Development of Higuer Psychological Processes, Harvard University Press, 1978, U.S.A.

Wiener, Norbert., Cibernética y Sociedad., Título original: The human use of human beings. Cybernetics and society., Editorial Sudamericana, S.A., Buenos Aires, Argentina, 1969., Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México 1981.

Anexo 2

Reflejos Culturales y Tecnología

En un primer apartado de este capítulo, se presentan someramente algunos antecedentes que intentan caracterizar de manera muy general a nuestra contemporaneidad.

En el siguiente apartado, se abordan los reflejos culturales de esta contemporaneidad y las exigencias que éstos plantean sobre un proyecto de desarrollo humano y/o educativo.

En la tercera parte, se describe al Software Matemático de la Universidad de Arizona -a manera de muestra- del tipo de recursos tecnológicos que cuyo uso adecuado -en cuanto una metodología constructivista- representa una invaluable ayuda para el trabajo docente.

Finalmente, se presentan ejemplos concretos sobre el uso de algunos de estos programas para el apoyo de actividades docentes.

Algunos antecedentes

Siempre resulta importante considerar las peculiaridades de la cultura de nuestro tiempo y la forma en que estas podrían influir en la educación de nuestro país. Por tanto, en este apartado habremos de abordar aspectos que compartidos desde una perspectiva mundial también influyen en México y en particular en nuestra región.

La especialización científica

Desde el punto de vista de la Teoría General de los Sistemas[1]

La ciencia moderna se caracteriza por la especialización siempre creciente, impuesta por la inmensa cantidad de datos, la complejidad de las técnicas y de las estrategias teóricas de cada campo. De esta manera, la ciencia está escindida en innumerables disciplinas que sin cesar generan subdisciplinas nuevas. En consecuencia, el físico, el biólogo, el psicólogo y el científico social están, por así decirlo, encapsulados en sus universos privados, y es difícil que pasen palabras de uno de estos compartimentos a otros.

Al repasar la evolución de la ciencia moderna topamos con un fenómeno sorprendente: han surgido problemas y concepciones similares en campos muy distintos, independientemente. [p 30]

Así, existen modelos, principios y leyes aplicables a sistemas generalizados o a subclases, sin importar su particular género, la naturaleza de sus elementos componentes y las relaciones que imperan entre ellos. Parece legítimo pedir una teoría no ya de sistemas de clase más o menos especial, sino de principios universales aplicables a los sistemas en general. De aquí que adelantemos una nueva disciplina llamada Teoría general de los sistemas. [p 32]

Quizá pueda resumirse como sigue la función integradora de la teoría general de los sistemas. Hasta aquí se ha visto la unificación de

[1] BERTALANFFY, LUDWIG VON. Teoría General De Los Sistemas. Fondo de Cultura Económica México. Sexta reimpresión, 1987, Cap. II pág. 30-53.

la ciencia en la reducción de todas las ciencias a la física, en la resolución final de todos los fenómenos en acontecimientos físicos. Desde nuestro punto de vista la unidad de la ciencia adquiere un aspecto más realista. Una concepción unitaria del mundo puede basarse no ya en la esperanza -acaso fútil y de fijo rebuscada- de reducir al fin y al cabo a todos los niveles de la realidad al de la física, sino mejor en el isomorfismo de las leyes en diferentes campos. Hablando segun lo que se ha llamado el modo <<formal>> -es decir, contemplando las construcciones conceptuales de la ciencia- esto significa uniformidades estructurales en los esquemas que estamos planteando. En lenguaje <<material>>, significa que el mundo, o sea la totalidad de los acontecimientos observables, exhibe uniformidades estructurales que se manifiestan por rastros isomorfos de orden en los diferentes niveles o ámbitos. [p 49]

Esto pone de manifiesto las metas de la teoría general de los sistemas:

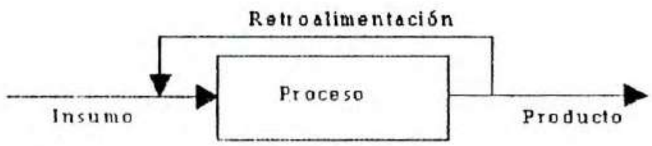
1. *Hay una tendencia general hacia la integración en las varias ciencias, naturales y sociales.*
2. *Tal integración parece girar en torno a una teoría general de los sistemas.*
3. *Tal teoría pudiera ser un recurso importante para buscar una teoría exacta en los campos no físicos de la ciencia.*
4. *Al elaborar principios unificadores que corren <<verticalmente>> por el universo de las ciencias, esta teoría nos acerca a la meta de la unidad de la ciencia.*
5. *Esto puede conducir a una integración, que hace mucha falta, en la instrucción científica.* [p 37- 38]

A decir del propio Bertalanffy,

...la idea de la postulación del programa y nombre de la teoría general de los sistemas fue presentada por primera vez en 1937, en el seminario filosófico de Charles Morris en la Universidad de Chicago. Sin embargo, en aquel entonces era mal visto teorizar en biología, y temí lo que el matemático Gauss llamaba <<el clamor de los beocios>>. De modo que guardé mis notas en un cajón y no fue sino hasta después de la guerra cuando aparecieron mis primeras publicaciones sobre el asunto. **[p 93]**

Probablemente y a raíz de la dinámica de producción impuesta por la II Guerra Mundial, fue que la teoría postulada por Bertalanffy empezó a tener aplicaciones fabriles inmediatas, tanto como de la Cibernética, basada en el principio de retroalimentación o de lineas causales circulares, que proporciona mecanismos para la persecución de metas y el comportamiento autocontrolado de los sistemas, emergiendo de ellas términos como: *insumo, producto, retroalimentación, caja negra,* etc.

De esta manera, los procesos fabriles pueden ser esquematizados como sigue:



en donde la retroalimentación del proceso de producción pudiera interpretarse como un proceso de control de calidad o de ajuste del sistema de producción, consistente en contrastar las características generalmente físicas como largo, ancho, resistencia a la tensión, a la torsión, a la compresión, etc., contra un listado de valores de las mismas variables, previamente especificado como las características deseables del producto.

El derrumbe ideológico.

Basta recordar la caída del muro de Berlín o las transformaciones de los países del Este europeo y la más reciente crisis del socialismo con el derrumbe de la URSS como sistema socio-político, para

vhernan@gauss.mat.uson.mx

reconocer la crisis del ideal de que desarrollar la humanidad con apoyo de un paradigma científico, conduciría indefectiblemente hacia el progreso como especie. Es claro de esta manera, el fracaso no de una nación, sino de un proyecto de desarrollo humano .

La crisis generalizada del socialismo y el consiguiente triunfo actual del sistema liberal, no significan -sin embargo- el arribo de la historia al término de la injusticia.

El así llamado derrumbe ideológico parece tener que ver con una necesidad cada vez más generalizada de diferenciación y de afirmación de los razgos particulares que con la ausencia de ella. Por ello, la expresión ``derrumbe ideológico´´ no debiera ser tomada en el sentido de ausencia ideológica, sino en cuanto la búsqueda y proliferación ideológica provocada por la necesidad de diferenciación de las colectividades.

La transformación de los valores

De manera paralela a como estos cambios a nivel mundial se suceden, la difusión de ellos y su conciencia colectiva propiciada por los medios masivos de comunicación, genera nuevas y más relajadas formas de ver y enfrentarse con el hecho cotidiano, y lo que hasta no hace demasiado tiempo era considerado como escandaloso, actualmente pudiera ser una actitud socialmente aceptada.

De esta manera, cambian también aceleradamente las formas en el vestir, en el comer, en las relaciones familiares, de divertirse y de jugar, de vivir y de morir, sin que podamos afirmar que estos cambios se reflejen necesariamente en mejorías.

Por otro lado, los medios masivos de comunicación generan sin duda percepciones globales o cosmovisiones que no son del todo nocivas, como por ejemplo: la concepción de la tierra como un organismo vivo de cuyo estado de salud somos responsables como especie y las acciones ecológicas derivadas de ella, la percepción global de la miseria y los movimientos sociales, políticos y económicos derivados de ello; etc., provocan la necesidad de replantear el correlato cósmico individual y colectivo.

En esta dirección puede decirse que conceptos como el de individuo, comunidad, nacionalidad y sociedad exigen un replanteamiento en el concierto socioeconómico global, y con ello, la conceptualización del individuo y su quehacer en él, pensando más en un individuo societal que social, esto es en un ciudadano de la comunidad global o ciudadano del mundo.

Lo antes mencionado, fomenta y permite la tendencia a la integración entre naciones o al menos entre comunidades cada vez más amplias, en virtud del arribo a una conciencia cada vez más global en la que no hay lugar para el aislamiento ni físico ni conceptual, conciencia a la que parece podríamos y deberíamos integrarnos en un futuro previsible.

El limitado y persistente intento de hacerlo en el caso de México, estuvo vinculado recientemente con el Tratado de Libre Comercio, del que podemos afirmar ha traido inevitables nuevas emergencias en las formas de pensar y actuar generalizadas y compartidas; al menos, por aquellos que no sean expulsados del concierto de esa nueva forma macro-socio-económica, por alguno de los mecanismos también macro-excretores del nuevo sistema propuesto.

La Computación

En los últimos años, todos hemos asistido a la contundente -casi podríamos decir- avalancha con que las computadoras han permeado el ámbito de nuestras actividades cotidianas, es decir: en los medios de comunicación, en la elaboración de revistas, en la televisión, en los negocios, en las oficinas públicas y privadas, en los bancos, y por supuesto la educación no es la excepción.

Aceptando entonces, que el computador es una poderosa herramienta tanto para la investigación científica como para las operaciones tecnológicas, postulamos la existencia de fuertes implicaciones de su uso sobre la enseñanza y el aprendizaje.

Usándolas de forma tal que los computadores pudieran considerarse como prolongaciones de la mente humana, es decir, como extensiones sensoriales que ofrecen la posibilidad de explorar en un sentido cualitativa y cuantitativamente diferente el tiempo y el espacio; se contempla la posibilidad factible de realizar construcciones intelectuales que van más allá de las que actualmente se hacen.

Por otro lado, es de hacerse notar el papel que está jugando la comunicación y la difusión de los resultados de la proliferación ideológica -vía los servicios de cómputo global de los que se dispone actualmente-, ubicándonos no sólo en un contexto más amplio, sino también en un contexto notablemente más complejo en cuanto insospechadas nuevas formas diferenciadas, tal que el sólo conocimiento de su existencia, hace pensar en la posibilidad factible de nuevas articulaciones y emergencias cualitativas, tanto en lo epistemológico como en lo ontológico.

Como ejemplo de esto, baste la consideración sobre los resultados que un grupo de insurgentes como el EZLN con apoyo de numerosos activistas de Organizaciones No Gubernamentales (ONG's) mexicanas y trasnacionales, han obtenido al generar en México la revolución prototipo del siglo XXI consistente fundamentalmente en una *guerra de red*, social y transnacional[2].

Conviene también pensar en el computador no sólo como un recurso de comunicación y lo que de ello es posible desprender -ver párrafo anterior- sino también en las emergencias provocadas por la posibilidad de abordar nuevas formas de representación y validación de hechos y actos, en los que forma, distancia y contenidos han cambiado radicalmente como argumentos y/o descripciones.

Reflejos culturales y exigencias

Examinaremos ahora algunos reflejos y exigencias que desde el somero examen de los razgos culturales actuales me es posible advertir.

Reflejos

Curiosamente, muchos de los términos usados actualmente en educación, tienen su génesis en el ámbito de la producción fabril y, aún más, fueron inventados antes del nacimiento de las llamadas Ciencias de la Educación.

A decir de Díaz Barriga[3],

2 RONFELD, DAVID. Nexos. Batallitas Mexicanas en Internet. Diciembre de 1995. p 47

3 DÍAZ BARRIGA, ANGEL. Perfiles Educativos. Problemas y Retos del Campo de la Evaluación

Henry Fayol es quien, en su Administración general e industrial (1916), *establece los principios generales de la administración, que pasan a figurar rápidamente como principios didácticos. De esta manera, en la actualidad se dice que los tres elementos fundamentales para el trabajo docente son: planear, realizar y evaluar. Esta afirmación se fundamenta en los cinco pasos que establece el autor para la administración del trabajo: previsión, organización, dirección, coordinación y control.*

y un poco más adelante afirma:

El control de tiempos y movimientos dio pauta a la génesis de la noción de objetivos de aprendizaje y a la incorporación de la evaluación como logro de resultados. Los estudios sobre los rendimientos de los obreros instauraron por primera vez en la pedagogía la discusión sobre el aprendizaje y la formación del estudiante en términos de ``rendimientos´´ académicos. El paso del control de la empresa a la evaluación escolar se realizó de manera imperceptible.

Años después de la *Administración General e Industrial* de Henry Fayol, la Teoría General de los Sistemas y la Cibernética hacen aportaciones conceptuales generales, las que fueron adoptadas por gran cantidad de disciplinas.

De esta manera, en educación no sólo se han ``pedido prestados´´[4] los términos sino también las formas de organización y -por ejemplo- con la noción de insumos, pueden identificarse recursos materiales,

Educativa. No. 37, CISE, UNAM. México, D.F., 1987. Pág. 4-5

[4] El fenómeno se sigue dando, recientemente encontramos en: Latapí, Pablo., EN DEFENSA DE LA IMPERFECCIÓN , Proceso 997, 11 de Diciembre de 1995., "...hoy se predica una excelencia perversa: se transfiere a la educación, con asombrosa superficialidad, un concepto empresarial de "calidad", el cual puede ser una técnica exitosa para producir más tornillos por hora y venderlos a quien los necesite (y a quien no también), pero no es ni puede ser una filosofía del desarrollo humano. Bajo este leme se han introducido en las universidades aspiraciones paranoicas de perfección; "excelente" conlleva el halo del superlativo gramatical; con el término se cuelan varias deformaciones humanas que, por serlo, son también perversiones educativas: la aventura pedagógica se racionaliza en forma extrema, el aprendizaje se vuelve "producción de conocimientos", la escuela se convierte en fábrica eficiente, al alumno se le enseña a no tolerarse fallas ... "

profesores y alumnos; el proceso, está constituido por la enseñanza-aprendizaje; el control de calidad, por la evaluación diagnóstica, formativa y sumativa; la retroalimentación, con el seguimiento de egresados con el que se pretende restablecer el grado de correspondencia entre las habilidades profesionales de los egresados y las especificaciones prefijadas de estas en un documento que las concreta y que comúnmente es llamado perfil del egresado.

En todo este devenir, no es criticable el *pedir prestado* elementos conceptuales generados en una disciplina para construir o a otra, en todo caso, lo criticable podría ser el transplante poco cuidadoso de ellos, generando extensiones de aplicación en las que eventualmente se ha perdido el *espíritu* primigenio.

La especialización ha permeado también la actividad docente de los profesores y estudiantes, resultando muy común encontrarse con profesores que no desean hacerse cargo de una asignatura a la que no están acostumbrados y con instituciones que lo avalen, de tal manera que el especialista de la misma puede no tener idea del proceso completo a causa de su enclaustramiento conceptual, reflejo de su enclaustramiento laboral.

Por otro lado, los estudiantes tampoco tienen idea del peso relativo ni de la contribución que hace para su carrera, cada una de las disciplinas que estudian en la estructura curricular en la que han empeñado sus esfuerzos de formación intelectual.

Así pues, la organización para la *producción de intelectos* en las instituciones educativas, parece estar perfectamente bien organizada en la dirección de la producción fabril, hecho que por otro lado, pudiera no ser del todo criticable en cuanto permite -después de todo- una

vhernan@gauss.mat.uson.mx

forma de organización, pero sí en cuanto que parece no haberse tenido en cuenta que los ``objetos'' de la transformación en el proceso educativo, somos Humanos.

Es también criticable la aplicación sistemática de los principios fabriles en educación pues, subyacente a ello, está una concepción reduccionista del Hombre, que pese a ser llamado ``animal de costumbres'' no es ni con mucho algo que pueda ser predeterminado, no obstante la sistematización de las actividades docentes de enseñanza.

No me opongo, sin embargo, a que el proceso o evento educativo pudiera ser conceptuado desde un punto de vista sistémico, es decir como un sistema en el que los objetos de transformación son Humanos, aunque agregaría al sustantivo *sistema*, un par de adjetivos como *complejo* y *dinámico*.

En el correlato descriptivo de la variable de interés de un evento respecto a otra variable comúnmente llamada independiente, uno pudiera esperar que a pequeños cambios en esta última, correspondieran también pequeños cambios en el comportamiento de la variable estudiada, dando por resultado un comportamiento que en términos generales podríamos denominar ``suave''.

Esto no es necesariamente cierto en los *sistemas complejos* en los que, pequeños cambios en la variable independiente pueden generar catástrofes en la variable de interés.

En este tenor, inscríbase la posición influyente de los profesores y el correlato de esta influencia en el estudiante. El simple comentario de un profesor puede entonces generar una catástrofe (armónica o desordenada), en el Ser de un estudiante.

La característica de *dinámica* es más clara, pues en cuanto manifestación humana, adquiere su manifestación sincrónico-social desde su diacronía histórica.

En otra dirección, la especialización de las disciplinas ha provocado también, una especialización de los lenguajes, lo que trae consigo que los profesionales que las sustentan eventualmente no se entiendan o, al menos, no les sea fácil interrelacionarse.

Es decir, la forma en la que las disciplinas científicas han pretendido dar explicación a los eventos que nos rodean ha ido tradicionalmente en la dirección de una ramificación abierta, en cada una de cuyas puntas encontramos un especialista, con los resultados antes descritos.

Como consecuencia de ello, no parece suceder que la ciencia -en la dirección de la especialización- esté cada vez más cerca de explicaciones y/o recursos que permitan al individuo en general o cuando menos al estudioso, una interacción más sencilla con lo que le rodea.

Otra de las consecuencias de la especialización de las disciplinas es el cúmulo de información generado por ellas, de las que podríamos decir que en los sistemas electrónicos de información se pueden cuantificar por decenas y aún en centenas diarias de *megas*, entre reportes de investigación, artículos y ensayos especulativos; lo que hace humanamente imposible el mantenerse *informado,* del diario acontecer en la disciplina que -a título personal- hemos elegido.

De esta manera, podemos afirmar que comparando la acumulación de información en el área disciplinar de nuestro interés con la parte de la que estamos enterados, resulta que somos, por estudiosos que seamos, cada vez más ignorantes.

El corolario anterior tiene relación directa con dos cosas: el volúmen de información disciplinar generado diariamente y la complejidad inherente a ella, de las que podríamos afirmar no sólo que son crecientes, sino que además, tienen una tasa de crecimiento creciente.

Si como antes he afirmado, la información disciplinar crece y se desarrolla con grados de complejidad creciente, con tasas de crecimiento también crecientes y asumimos la imposibilidad humana de mantenerse actualizado en los más recientes informes y aportaciones de la especialidad elegida como el campo disciplinar en el que habremos de desarrollarnos intelectualmente, resulta claro que: estamos ante un problema de elección tanto de los fines de la educación como de los contenidos y recursos de los que habremos de valernos para ello.

De esta manera, es ilusorio tratar de enseñar de todo al estudiante, incluso si nos propusieramos el enseñar un todo tan pequeño como podría ser lo relacionado con alguna especialidad disciplinar.

Aún más, en el caso en que fuera posible abordar el conocimiento del todo -cualquiera que fuera su tamaño-, el mero abordaje desde una perspectiva sumativa, no asegura necesariamente la articulación de los contenidos en una dirección pertinente y competente.

Este hecho resulta bastante claro cuando examinamos los problemas que tienen las empresas con los profesionales que en ella laboran, al presentarse la necesidad de innovar sus formas de organización para el trabajo, sus formas de interrelación laborales y administrativas, etc., entre los que es posible advertir como el principal problema, la relativa lentitud del personal -frente a la urgencia de la empresa- para aprender las nuevas formas de organización.

Frente a este problema grandes empresas se han derrumbado en la imposibilidad de sus trabajadores para aprender a aprender de una manera continua y autónoma, a pesar de que la práctica tiene, con mucho, superioridad lógica sobre una formación teórica escolar en la que usualmente no se promueve el uso práctico de los conocimientos adquiridos.

Quiero establecer como un reflejo fundamental de las consideraciones hechas en los parágrafos anteriores, el hecho de que la sociedad y las comunidades modernas exigen individuos con capacidades epistémicas cualitativamente novedosas y sustancialmente diferentes, es decir no individuos que posean grandes cúmulos de información sino individuos que tengan las habilidades para operar, comprender, interpretar y procesar objetos de distintos saberes para transferir lo aprendido a otros problemas y a otros campos.

La postulación anterior, refleja la inherente necesidad actual de diseño y realización de una nueva *ecología epistémica* para lo que podríamos disponer de adelantos tecnológicos como las calculadoras y las computadoras, instrumentos que permiten realizar con gran economía de tiempo y energía psíquica para los docentes -estudiantes y profesores-, cantidades masivas de cálculos y procedimientos mecanicistas de repetición, dejando el tiempo y la energía economizados, para una construcción intelectual más relevante.

Exigencias advertidas

- **Habilidades de acción-investigación intelectual.**

La superespecialización de las disciplinas y el consecuente correlato de ello en los lenguajes especiales, pone de relieve la urgente necesidad de una cultura lingüística más amplia que la que el patrimonio social nos lega de manera natural.

Es un hecho que en nuestro país no hay una tradición de lecto-escritura generalizada y que el patrimonio lingüístico de la mayoría de nuestros estudiantes suele ser muy pobre, de tal forma que el suponer como en la mayoría de los casos se hace: que estos poseen un gran vocabulario, costumbre de leer libros, habilidades para abstraer conceptos a partir de una lectura, habilidad para extraer información a partir de un texto dado resulta del todo inadecuado, pues se está partiendo de una suposición infundada, motivo por el cual -entre otros- tenemos tan bajos rendimientos escolares.

Las grandes ausentes de las actividades docentes sistematizadas suelen ser las relacionadas con el cultivo de las habilidades lingüísticas de **oralidad y escritura**.

Las consecuencias de esto se hacen sentir en el aula y en lo cotidiano cuando se intenta una socialización mínima de las ideas, conceptos, inquietudes, etc., recibiendo como interlocución una oralidad paupérrima y una escritura, que más pareciera la foto-estática de algunos fragmentos de pizarrones, que la expresión genuina e inédita -hasta ese momento- del grado de maduración y organización conceptual alcanzado por el estudiante que la sustenta.

La situación se hace desesperada cuando se advierte que cada una de las disciplinas tiene por así decirlo, su propio lenguaje y, además, que éste, es no natural.

No obstante, el recurso primigenio para interactuar con cada uno de ellos es sin duda la lengua materna, de cuyo nivel de competencia depende con mucho el correspondiente a la interacción con otros lenguajes especiales o no naturales.

Es observable que el problema de la capacitación en las habilidades lingüísticas no se aborda de manera sistemática y son dejadas más bien al gusto y/o a las casualidades socioculturales, resultando más en la miseria que en el enriquecimiento, en lo dialectal que en lo general, en lo superficial e inmediato que en lo abstracto.

En esta situación, es insoslayable la urgente necesidad de asumir sistémicamente la tarea de habilitar a nuestros estudiantes en el uso de su lengua materna hasta un nivel funcional y en una gama de habilidades lingüísticas, necesarias para el desempeño de estos en su interacción con otros lenguajes.

Algunas de estas habilidades son: leer y comprender diversos tipos de textos (científicos, literarios, políticos, etc.); uso adecuado de obras de consulta como diccionarios diversos, prontuarios, mapas, etc.; rescatar información de los centros especializados como las bibliotecas y de una manera más general de los bancos de información, lo que supone algunas otras habilidades subordinadas como el uso de software especializado para el acceso a ellos o bien sobre el uso de tecnología diversa como CD-ROM, consultas en hipertexto en Internet, o algunas otras de uso más generalizado como consultar ficheros, seleccionar lecturas a partir de la información propia para ello como los índices, texto de las solapas, introducción, etc.; de tomar notas, de resumir y esquematizar los contenidos de una lectura para efectos de la exposición oral; de elaborar fichas de contenidos, reseñas y ensayos; de comprender y elaborar cuadros estadísticos; del manejo de los diferentes cuadros retóricos para la producción de escritos escolares en lo inmediato y más delante escritos relacionados con su interacción social como cartas, discursos, anuncios, comunicados, recados, etc..

A estas alturas reitero que la *oralidad* y la *escritura* constituyen sin lugar a duda, instrumentos poderosísimos para la investigación personal y colectiva del grado de organización conceptual alcanzado por un individuo o colectivo de trabajo.

Podría decirse que la competencia de un individuo en su expresión oral y/o escrita, asegura y garantiza la competencia en el nivel de organización conceptual alcanzado por este.

Por otro lado, la oralidad y la escritura competentes son instrumentos o habilidades de acción-investigación sobre las construcciones intelectuales, de donde, podemos afirmar que un individuo sabe algo sobre algún objeto de conocimiento cuando es capaz de hablar o escribir -con ciertas características como claridad, concreción, consistencia lógica, estilo literario, etc.- sobre ello.

- **Habilidades para la demarcación y métodos de trabajo disciplinares.**

En un nivel jerárquico de aplicación subordinada, están las habilidades desprendidas de los lenguajes particulares de las disciplinas, refiriéndome con ello a las particularidades propias del discurso en cada disciplina.

Este renglón es también motivo de desatención lingüístico funcional generalizada en nuestro sistema educativo, puesto que en las actividades docentes no se abordan explícita y sistemáticamente las particularidades lingüísticas propias de cada una de las disciplinas objeto de estudio.

Por otro lado, en la mayoría de las actividades docentes se aborda el uso del lenguaje especializado de una manera muy pobre en lo que se refiere a sus componentes lingüísticas, a decir, sólo en la componente sintáctica.

Este hecho no es casual, sino el resultado -por un lado- de una inconciencia colectiva relacionada con las componentes lingüísticas básicas y -por otro- de la relativa facilidad que se obtiene al hacerlo de esta manera, dejando de lado una componentes semántica y por supuesto, una pragmática ya que es poco probable realizar esta última -al menos de manera competente y autónoma- cuando no se sabe de qué se habla o se escribe.

El no tener en cuenta estos invariantes lingüísticos y las diferencias morfológicas propias de los lenguajes especiales de las disciplinas, trae como corolario natural en la práctica docente un abordaje por demás inadecuado de los contenidos propios de cada disciplina, pues no es posible estudiar del mismo modo matemáticas que literatura; por otro lado, es todavía menos probable el hacer transferencias de un lenguaje disciplinar a otro, como por ejemplo es necesario hacer entre la conceptuación desde el punto de vista de la física respecto a un fenómeno y la expresión matemática que lo modela.

Aprender a aprender desde esta perspectiva, supone una competencia lingüística -tanto de la lengua materna como de los lenguajes disciplinares especiales-, constituyéndose el ejercicio continuo de la oralidad y escritura en estrategias de acción-investigación para el aprendizaje y la propioceptividad del evento constituido por el propio aprendizaje o bien, como un elemento de exo-referencia.

En relación a los métodos de trabajo disciplinares podemos afirmar, que como producto de no abordar sistemáticamente el estudio de los invariantes lingüísticos y las diferencias morfológicas propias de las disciplinas, no hay una exhibición de los recursos de los que un estudiante puede hechar mano para construir su discurso.

De esta manera, el aprendizaje de las regularidades y diferencias propias de las disciplinas en el uso de las funciones lingüísticas como medios para acercarse a un objeto de conocimiento especial, quedan ocultos en la miseria del discurso docente, que como antes indiqué, está generalmente limitado a la componente sintáctica en la mención y uso de las concepciones, categorías, procedimientos y técnicas de las disciplinas que se abordan.

En resumen, la enseñanza de los métodos debiera darse en el ejercicio de la oralidad y escritura en los diversos campos disciplinares, buscando el uso de los lenguajes especiales y materno en una dirección abarcante de sus componentes, a saber: sintáctica, semántica y pragmática.

Finalmente, el aprendizaje individual de los métodos se logra bajo las condiciones del párrafo anterior, en cuanto se logran explicaciones conceptuales y/o categoriales; en cuanto se es capaz de plantear y resolver problemas propios del nivel escolar; en cuanto se es capaz de reportar los diferentes momentos del trabajo de investigación, experimental en el laboratorio, bibliográfica o de campo: en cuanto a definir condiciones y requerimientos de un problema, de formular hipótesis, conjeturas, de demarcar un problema conceptualmente, de verificar y/o evaluar la validez de un resultado y defenderlo con una argumentación; en suma cuando se es capaz de comunicar y argumentar oralmente y por escrito de una manera competente, transformando en este saber y hacer su ecología epistémica.

Es así, que podría postularse el que los fines y compromisos de las organizaciones e instituciones educativas tuvieran una tarea quizá más modesta pero realista y no menos importante: la de asegurar el que las actividades docentes de profesores y estudiantes se desarrollen en un entorno lingüísticamente rico (competente) y/o en contacto con el mayor número de lenguajes posible.

Software Matemático de la Universidad de Arizona

Los antecedentes, reseña y descripción de mi contacto con este software tiene que ver con la necesidad de compartir la existencia de un

yhernan@gauss.mat.uson.mx

recurso tecnológico que en mi opinión, puede resultar de invaluable ayuda para la docencia en matemáticas en todos los niveles educativos.

Antedecentes

En Agosto de 1992, la Universidad de Arizona ofreció dentro del programa auspiciado por la National Science Foundation para la introducción de tecnología en apoyo a la enseñanza de las matemáticas, un primer taller para dar a conocer y compartir el Software creado y probado por esa universidad a otras universidades en el Consorcio de la Universidad de Harvard y colegios de Estados Unidos de Norteamérica así como de las regiones aledañas.

Entre las regiones aledañas se encuentra Sonora, siendo en esa ocasión invitada especial la Universidad de Sonora , a la que asistí como uno de los dos representantes de ésta última y desde entonces en auxilio de los Dres. David Lovelock y David Lomen en la difusión de este software al interior de nuestro país.

A la fecha se ha participado en la organización de dos talleres al interior de nuestra universidad y auxiliado a los autores en presentaciones en el Centro de Supercómputo del Instituto Politécnico Nacional, en el Centro de Ciencias de Sinaloa y en la Universidad Autónoma de Yucatán.

Descripción

Filosofía

La intención de los autores no ha sido crear un "gran paquete" que pueda hacer muchas cosas sino el crear un conjunto de programas independientes tales que aunque cada uno de ellos sólo permita abordar una temática específica, ésta sea atendida de manera realmente amplia y eficiente.

Otro de los aspectos especialmente atendidos es el relacionado con la presentación de la interfase gráfica de interacción con el usuario en menús homogéneos, de tal manera que basta invertir entre treinta y cuarenta y cinco minutos en la capacitación de interacción con uno de ellos para que el usuario pueda explorar de manera autónoma cualquier otro programa de la colección.

Las dos ideas anteriores tienen su motivación en el problema que se tiene con los grandes paquetes multiusos en los que se emplea demasiado tiempo en aprender sus comandos, sólo para que en la próxima ocasión se nos hayan olvidado y tengamos que consultar el manual.

En el desarrollo de estos programas, los autores han puesto especial énfasis en que las temáticas puedan ser abordadas en la medida de lo posible, atendiendo en las representaciones a través de los programas, lo que ellos llaman la **regla de tres**: representación gráfica, numérica y analítica.

Por otro lado las tareas elegidas como problemas de realización de software adicional o características especiales para alguno de los programas ya hechos, se obtienen invariablemente de las necesidades planteadas por los profesores: a raiz de un problema docente relevante o a partir de una idea prometedora para impulsar tal o cual conceptuación en el aula.

Es así, que el Software Matemático de la Universidad de Arizona, compila la solución de gran cantidad de problemas docentes de representación y cómputo matemático.

Programas

A la fecha, este software cuenta con alrededor de cincuenta programas que permiten apoyar el trabajo de enseñanza y aprendizaje.

En su organización general podemos precisar tres grandes apartados: **ARE YOU READY?, SLIDE SHOWS y TOOLKITS;** los cuales se describen a continuación:

- ARE YOU READY?

El propósito de este apartado es el poner a disposición de los estudiantes una colección de programas de cómputo para que revisen aquellos materiales de los cursos anteriores que son esenciales para el éxito en el curso que actualmente están llevando. Aún más, los programas identifican las áreas débiles y recomiendan una acción apropiada (usualmente referenciadas a la colección Schaum, ya que son obras de fácil acceso económico y además porque permanecen más o menos estables).

- SLIDE SHOWS

Esta es una colección de imágenes pregrabadas accesibles a cualquiera que lo desee, o imágenes de funciones que usualmente es difícil o imposible graficar en el pizarrón. Algunas de ellas están animadas y algunas otras hacen acercamientos (``Zoom'') sobre la gráfica de la función.

- TOOLKITS

Estos son programas que permiten apoyar el trabajo de los profesores y los estudiantes tanto al interior como al exterior de las clases. Algunos de ellos alientan el trabajo autónomo proponiendo actividades. Todos ellos tiene menús de cortina y están documentados en sí mismos con ayudas en línea sensibles al contexto.

Algunos Ejemplos De Uso

Fortune

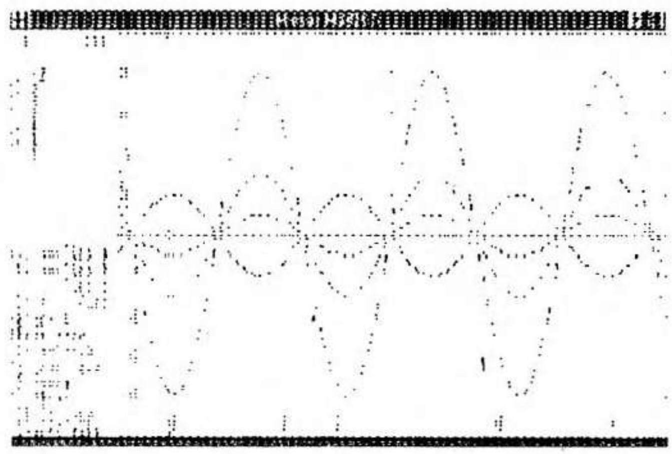
Uno de los programas más útiles en el Software Matemático de la Universidad de Arizona es el denominado *Fortune.*

Su nombre es la contracción de dos palabras del habla inglesa, *Formula-Tune,* de tal manera que atendiendo al sentido que esta contracción pudiera tener, el nombre habla de la posibilidad real de "sintonizar" fórmulas.

Lo antes descrito permite abordar con éxito el problema de la determinación de patrones generales de representación gráfica, usando el recurso de tomar como *semilla generadora* a la gráfica de una función $y = f(x)$ y a continuación estudiar el patrón de los efectos que sobre la gráfica de esta semilla son generados por los parámetros a, b y c.

En esta dirección, es posible introducir hasta un máximo de dos funciones a manera de semillas generadoras y estudiar los efectos que sobre sus gráficas realizan los cambios en los valores de los parámetros a, b y c.

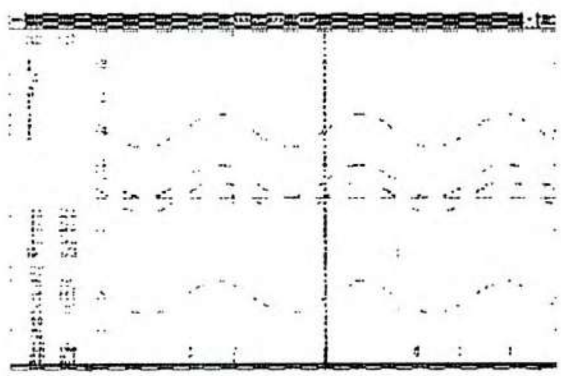
En resumen, a partir de la gráfica de $y = f(x)$, es posible estudiar el patrón de efectos sobre la gráfica de ésta, a través del estudio dinámico sobre los parámetros de la expresión $y=a*f(x-c)+b$.

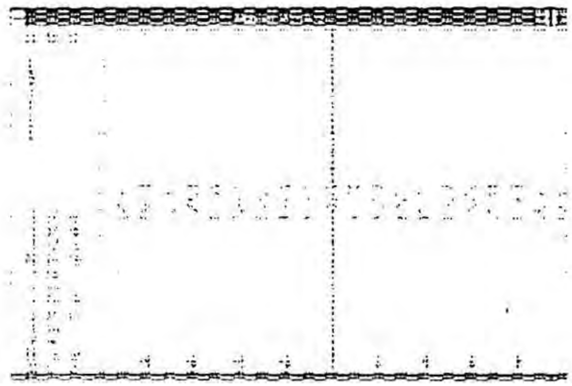


En el cuadro anterior, la función que actuó como *semilla generadora* fue la función $y = sen\ x$ a la que se ha cambiado de manera aislada los valores de a, haciendo que el valor de b y c sea nulo en la expresión $y = a*sen(x - c) + b$.

De manera análoga es posible "aislar" el efecto de b haciendo que $a = 1$ y el de $c = 0$, y finalmente para el caso de c, haciendo que $b = 0$ y $a = 1$.

En las siguientes dos pantallas se presenta lo antes descrito:

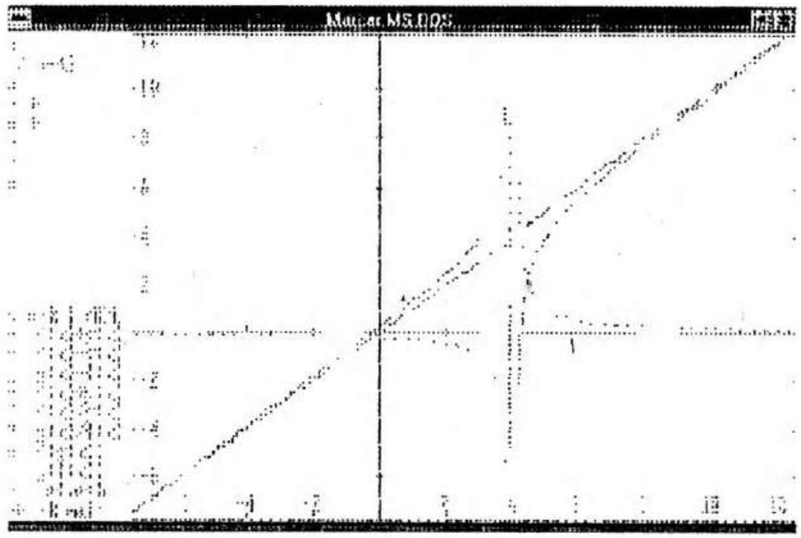




En general, de esta manera es posible desarrollar en los estudiantes un cuasialgoritmo de graficación de funciones, por la vía de tomar como *semillas generadoras* a las gráficas de una colección amplia de funciones, $y = f(x)$, e investigar el efecto tanto local como global que ejerce cada uno de los parámetros a, b y c sobre la gráfica de $y = f(x)$ en la expresión general: $y = a*f(x-c)+b$.

Otra de las características notables de este programa, es la posibilidad de estudiar operaciones entre funciones desde un punto de vista gráfico. Esto permite también abordar la creación en el estudiante, de otro cuasialgoritmo de graficación de funciones, el correspondiente a la graficación de funciones a partir de las operaciones propuestas entre ellas.

Como antes se indicó, el programa acepta en memoria la definición de un máximo de dos funciones. En una parte del menú del programa, es posible elegir alguna de las operaciones entre las dos funciones cuya definición ha aceptado, como se ilustra enseguida:



en donde aparecen las gráficas de $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x-4}$ y la de $f(x) - g(x) = x - \frac{1}{x-4}$.

Nótese el menú en el que es posible hacer elecciones, que incluyen los casos de conmutación de la diferencia y el cociente así como la composición gráfica de funciones.

Cabe comentar que el desarrollo de cuasialgoritmos de graficación no es posible sin la observación de gran cantidad de casos y la posibilidad de interacción con ellos en un corto tiempo.

En este tipo de actividad la computadora resulta de ayuda invaluable, pues al reallizar la "aritmética" de valuación de las funciones y su representación en el plano, tenemos tiempo de usar el cerebro para atender asuntos más relevantes.

Otra de sus características de uso es la relacionada con el uso de los parámetros para modelar gráficamente el comporamiento límite de los cocientes diferenciales, por ejemplo:

Grafique $f(x) = \frac{Sen(x+a)-Sen(x)}{a}$ para diferentes valores de a entre -1 y 1, excluyendo el 0. Cuando el valor de a es muy cercano a 0, ¿A qué función se parece la gráfica en la pantalla?. Valiéndose de esta construcción, graficar la derivada de x^3.

En resumen, con este programa es posible desarrollar actividades tendientes al abordaje del efecto de los parámetros, identidades, desigualdades, derivadas, funciones inversas, aproximación de funciones, etc.

Para concluir, a pesar -por ejemplo- de que el programa no proporciona la derivada de la función propuesta por uno, es posible abordar el concepto de límite y el de derivada. ¿cómo? abordando el problema de su construcción.

Así pues, en este (y en cualquiera del apartado Toolkits) programa del Software Matemático de la Universidad de Arizona, no basta pedir cosas: la mayoria de las veces hay que construirlas, y lo importante (a mi juicio) es que con ellos, es posible.

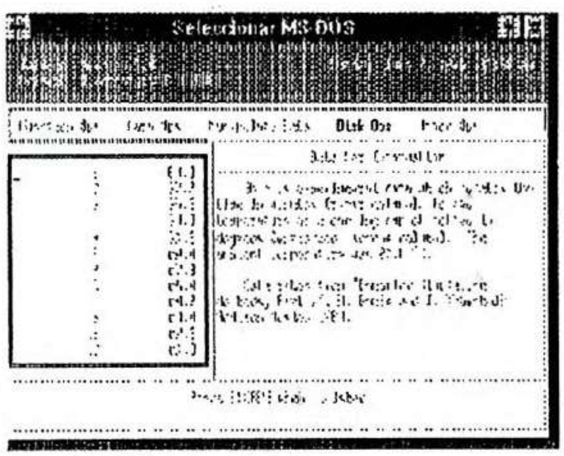
Twiddle

Este programa permite, al igual que *Fortune*, graficar $y=a*f(x-c)+b$. La diferencia reside en que *Twiddle* acepta datos experimentales.

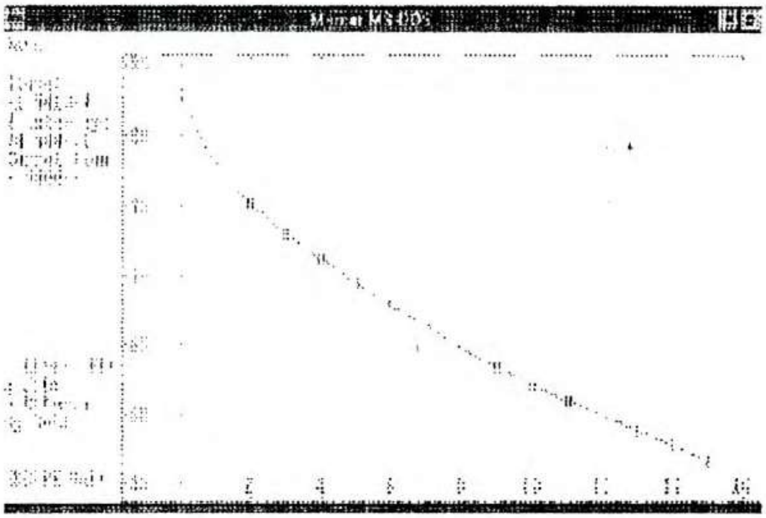
Es posible introducir los datos manualmente o a través de una interfase electrónica entre los sensores -que permiten medir distancia, temperatura, PH, luminosidad, etc.- y la computadora.

Este programa permite hacer análisis tanto gráfico como analítico, lo que permite formular una hipótesis sobre el modelo funcional que podría tener el compórtamiento proporcionado por los datos experimentales y verificarlo gráficamente. En resumen, permite ajustar una función a un conjunto de datos.

En el siguiente cuadro aparecen los datos experimentales relacionados con la temperatura de una taza de café conforme transcurre el tiempo. En el cuadro aparece también un comentario que permite recordar la procedencia de los datos y las condiciones de realización del experimento.



Una vez "cargados" los datos, es posible representarlos en un sistema de coordenadas con el fin de tener una primera impresión de los mismos y explorar la posibilidad de formular una hipótesis acerca del "modelo" de comportamiento.



De entrada, la opción **join** (une los puntos con segmentos rectilineos) me permite descartar la hipótesis de un modelo lineal, puesto que me proporciona una poligonal.

Sin embargo quedan por explorar -al menos- la posibilidad de ajuste de una hipérbola, de una parábola o de una exponencial. A juzgar por el tipo de datos que estamos intentando modelar (temperatura de una taza de café conforme pasa el tiempo) no podría ser una parábola (concavidad positiva), pues no esperaríamos que dejando enfriar una taza de café, su temperatura se incrementara pasado un cierto tiempo.

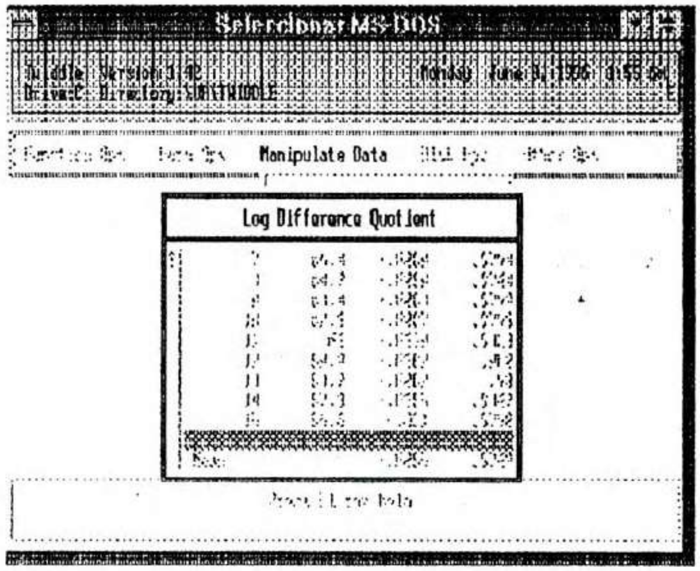
Más bien, se esperaría un comportamiento asintótico a la temperatura ambiente conforme transcurre el tiempo, es decir esperaríamos que el modelo tuviera una asíntota horizontal a la altura de 22° C, por lo que quedan como candidatos una hipérbola o una exponencial.

Para este efecto, es posible manipular los datos y analizar los primeros los primeros dos cocientes de diferencias tanto de los datos tal y como han sido introducidos, como bajo cualquier otra transformación sobre ellos, ya que es posible manipular los de ambas variables.

Consideremos entonces que los datos se comportan de acuerdo al modelo hipotético $y = ae^{-bx} + c$.

De los tres parámetros que concurren en la expresión anterior, el más sencillo de determinar es posiblemente c, ya que como antes hemos dicho, por la naturaleza del correlato estudiado (*temperatura* vs *tiempo*), es de esperarse que tenga un comportamiento asintótico horizontal en $c = 22$ (la temperatura ambiente), por lo que ya no nos preocuparemos por él.

Si los datos experimentales se comportan según un modelo del tipo $y = ae^{-bx}$, entonces los primeros cocientes de diferencias del correlato $\log y$ *v.s.* x, deben acusar un comportamiento más o menos constante, lo que es posible verificar inmediatamente, como se muestra:



Así pues, dado el comportamiento aproximadamente constante de los primeros cocientes de diferencias del correlato *logy* vs x, nos permite apoyar la hipótesis de que el comportamiento de general de los datos es de la forma $y = ae^{bx} + c$, en la que como antes indicamos c debe ser igual a 22 por la naturaleza de los datos.

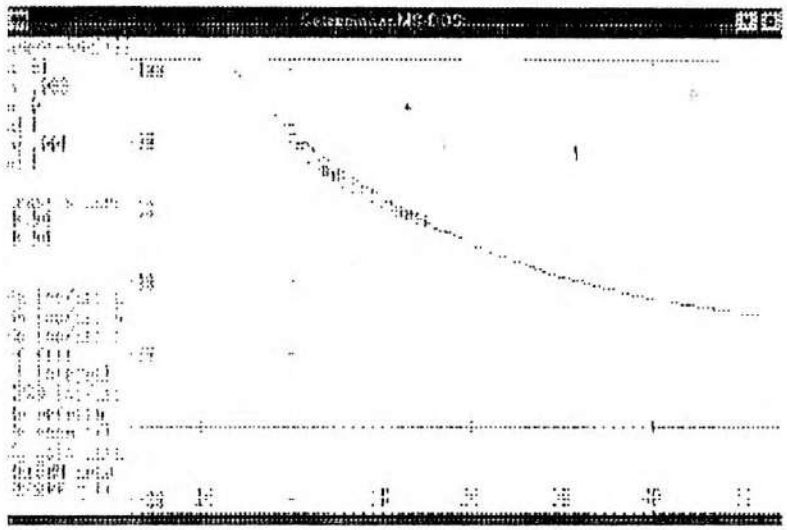
Por otro lado, en $x = 0$, y debe ser igual a *83* según los datos, por lo que tenemos que $a = 61$.

Para encontrar el valor del parámetro b, basta sustituir cualquiera de las parejas de datos y los valores de los parámetros a y c. De donde al sustituir x y y por 14 y 57.8 respectivamente, obtenemos que b = *-0.038*.

De aquí que se proponga como modelo de comportamiento de los datos experimentales, el proporcionado por la función $y = 61e^{-0.038x} + 22$. Con este modelo en mente, podemos definir la

vhernan@gauss.mat.uson.mx

función y graficarla simultáneamente a los datos experimentales para visualizar el nivel de ajuste logrado por el modelo propuesto, como se muestra enseguida.



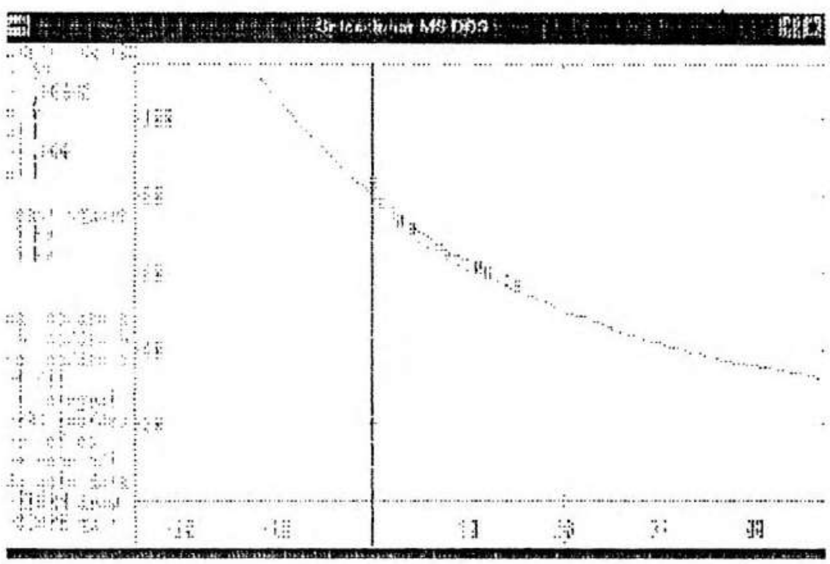
Esta primera aproximación se puede mejorar si en lugar de introducir el valor de los parámetros calculados algorítmicamente, introducimos la expresión general $y = ae^{-bx} + c$, y aprovechando que ya conocemos de manera muy aproximada sus valores, podemos menearlos (twiddle them) y obtener un mejor ajuste.

Esto último lo podemos juzgar por la medida del error cuadrático medio que aparece a la izquierda de la pantalla, mismo que en la gráfica anterior ha sido cuantificado en 8.94.

La siguiente gráfica fué ajustada manualmente, aunque tomando como guía los valores antes calculados, y el modelo obtenido fue

$$y = 58e^{-.03645x} + 22,$$

para la que el error cuadrático medio fué cuantificado por el propio programa en 4.09.



De donde juzgamos que, este modelo proporciona un mejor ajuste general que el anteriormente propuesto con base en cálculo algorítmico y que, sin lugar a dudas pueden obtenerse mejores.

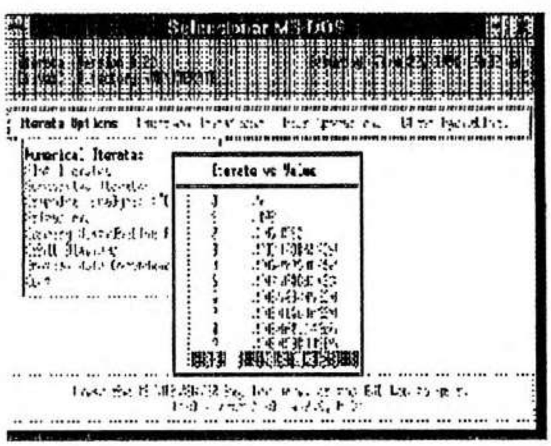
Los programas antes reseñados, permiten desarrollar modelos matemáticos funcionales para gran cantidad de situaciones problema. Lo que es mejor, ya es posible transitar desde la captura de datos experimentales hasta la función que modela ese comportamiento, para luego dar respuesta (usando el modelo) a las preguntas que nos hagamos en relacion con las variables de interés en el experimento.

Iterate

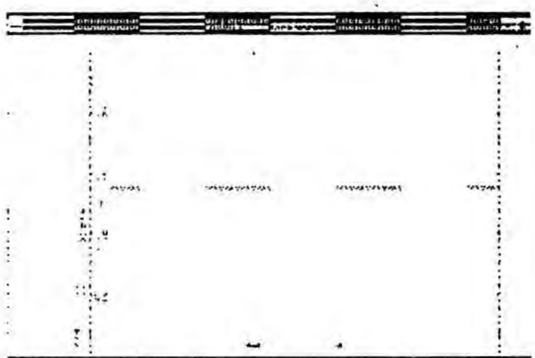
Inicialmente debe ser introducida una función a la memoria de la computadora, lo que supone el que la función $f(x)$ sea definida, proporcionando el valor de x que va a servir como semilla de la iteración del proceso, proporcionadndo el valor máximo y mínimo que se desea examinar, y , si la definición de $f(x)$ incluye a o b, se espera que usted proporcione sus valores. Por ejemplo; si usted define la función $f(x) = ax(1 - x)$, podría indicar a $x = .9$, como el valor inicial, el valor mínimo de $y = 0$, el máximo $y = 1$ y el valor inicial de $a = 2.2$.

El programa dispone de ocho rutinas de iteración, llamadas *Numerical Iterates, Plot Iterates, Successive Iterates, Graphical Analysis, Attractors, Density Distribution Analysis, Initial Data Dependence* y *Orbit Diagrams.*

Numerical Iterates. Esta rutina genera los valores de las recursiones del proceso definido por $f(x)$, empezando con el valor de x propuesto como semilla inicial.



Plot Iterates. Esta rutina construye una gráfica del correlato entre la n-ésima iteración de $f(x)$ valuada en x_0 denotada comúnmente por $f^n(x_0)$ y x. En ella, las cruces representan las coordenadas de $(n, f^n(x_0))$. Para la función ejemplificada antes, es sencillo mostrar que después de un cierto número de iteraciones, las siguientes convergen a un valor entre $.5$ y $.6$.

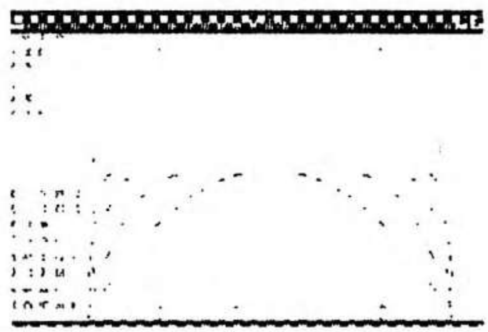


A continuación pueden construirse las gráficas corespondientes a grupos sucesivos de cien en cien iteraciones. Los valores de x, a y b, pueden ser cambiados y obtener la nueva gráfica. En particular, si cambiamos el valor de a a 3.2 y repetimos este proceso, tenemos un ejemplo de duplicación de periodo.

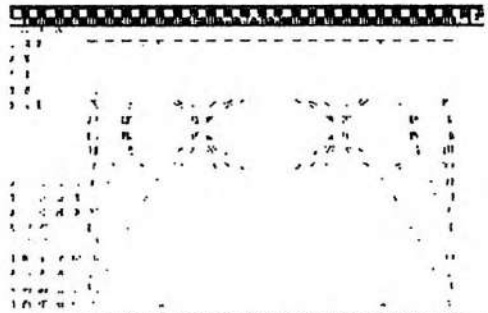
vhernan@gauss.mat.uson.mx

Successive Iterates. Esta es una rutina que construye la gráfica de $f(x)$ donde el rango y el dominio han sido seleccionados automáticamente. El valor incial de $x = x_0$, no es usado. Superimpuesta a esta gráfica estarán las gráficas de las sucesivas composiciones de $f(x)$.

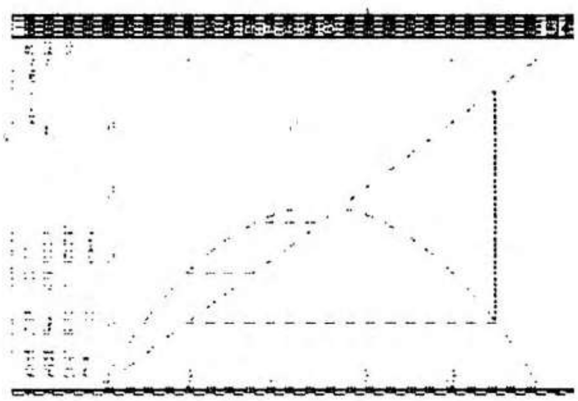
Para la función en el ejemplo, se puede observar fácilmente que la parábola inicial está siendo "achatada" más y más, estabilizándose la "mesa" a la altura de un valor entre $.5$ y $.6$. Para la gráfica de las iteraciones sucesivas fue usado el valor inicial de $x = .9$.



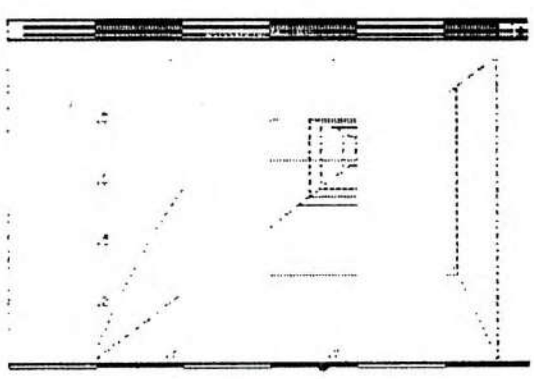
Finalmente si cambiamos $a = 3.2$ y repetimos este proceso, tenemos otra representación visual de un ejemplo de duplicación de periodo.



Graphical Analysis. Esta rutina construye una gráfica inicial de $f(x)$, donde el rango ha sido seleccionado automáticamente igual al dominio y superimpuesto a todo esto la gráfica de la línea $y = x$. Su valor inicial es usado ahora para generar la suceción de composiciones de $f(x)$, usando un diagrama de "telaraña" (*cobweb-like diagram*). Para la función del ejemplo, la "telaraña" converge rápidamente a un número entre *.5* y *.6*.



Si cambiamos $a = 3.2$ y repetimos este proceso, la rutina nos proporciona otra representación de la duplicación de periodo.



vhernan@gauss.mat.uson.mx

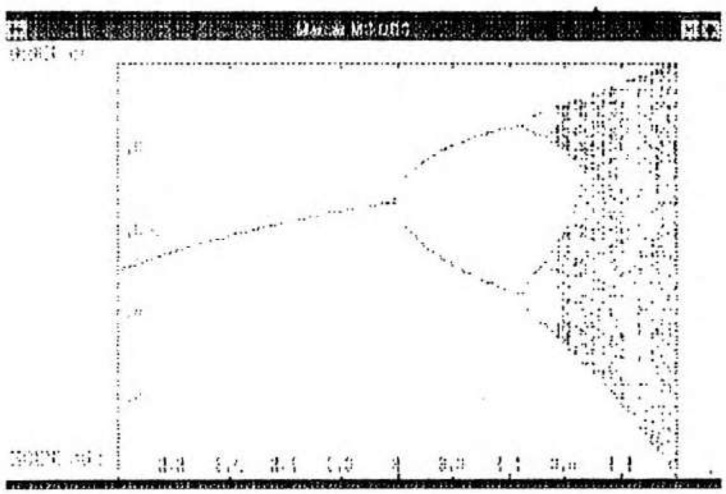
Attractors. Esta rutina grafica los "atractores" de una función, esto es, una gráfica de x (horizontalmente) vs $f(x)$ (verticalmente). Da inicio con los valores inciales de a y x, itera 200 veces la función y luego grafica los siguientes 50 valores de la iteración en la pantalla.

Density Distribution Analysis. Esta rutina grafica la "densidad de la distribución" usando el valor inicial x_0. El usuario es requerido por el número de subintervalos que desea usar (de 2 a 250). Conforme cada iteración es calculada, esta es puesta en los subintervalos del dominio construyendo de esta manera un histograma. Esta operación continúa hasta que uno de los subintrevalos contiene 200 datos. Después de que el histograma es construído, usted puede iterar un conjunto de puntos tomado de esta distribución.

La computadora cuenta el número de puntos que hay en cada uno de los subintervalos. Enseguida hace una iteración sobre estos puntos, donde cada punto es tomado de los subintervalos originales en proporción a la altura de cada barra en los subintervalos. En la parte media superior se muestra el histograma viejo y el la mitad inferior se muestra el histograma iterado. Esto es usado para ilustrar el concepto de invariancia de la medida.

Initial Data Dependence.. Esta rutina está diseñada para demostrar la "sensitividad" a las condiciones iniciales. Se espera que usted proporcione dos valores iniciales (x_1 y x_2) y entonces estos y sus iteraciones son graficadas una contra otra.

Orbit Diagrams. En esta rutina, si la función definida contiene al parámetro a, le será requerido el valor mínimo y máximo de a. El valor inicial de a será ignorado. A continuación se obtiene una gráfica de y contra a (a lo largo del eje x). Empezando con su valor inicial de x, son calculadas las primeras 200 iteraciones pero no se grafican sino las siguientes 50 para cada valor de a. Si para la función del ejemplo, usted escoge a desde 2 hasta 4, se puede ver en la gráfica que en *2.2* las 50 iteraciones están todas en el mismo punto, entre *.5* y *.6.*, mientras que en *3.2* oscilan entre dos valores diferentes.



Otras ramas del Menú principal

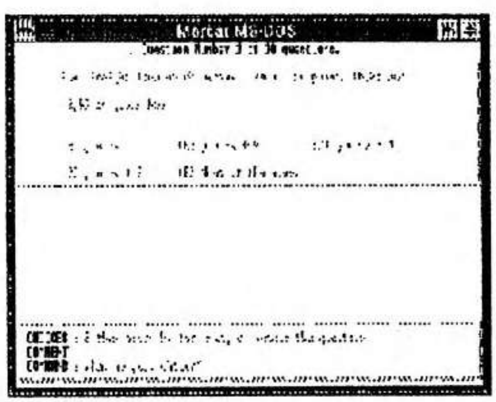
Los programas que hasta aquí han sido someramente comentados, corresponden a la opción **a. Toolkits** en el menú principal del Software Matemático de la Universidad de Arizona.

La segunda opción en ese menú, **b.Are You Ready?**, agrupa a ocho programas que ponen a prueba al estudiante al proporcionarle una batería de diez cuestiones en el formato de opción multiple, con el fin de que auxiliandose de lápiz y papel elija alguna de las respuestas propuestas. Los programas son denominados genéricamente **"R U Ready For"**, y los hay para: **Intermediate Algebra?, College**

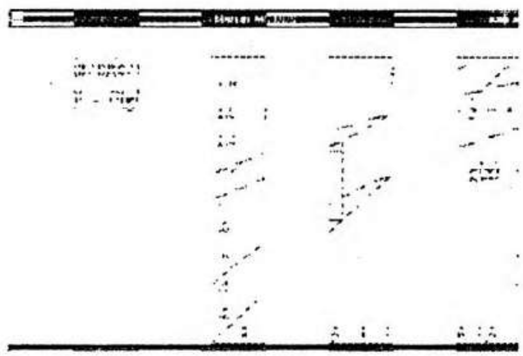
Algebra?, Calculus I?, Bussines Calculus?, AP Calculus (AB)?, Calculus II?, Calculus III?, ODEs?.

La pantalla carátula, típica para esta sección de programas, es como la que se muestra enseguida en la que aparece desde una frase célebre para inspirar al trabajo hasta un menú de opciones para emprenderlo.

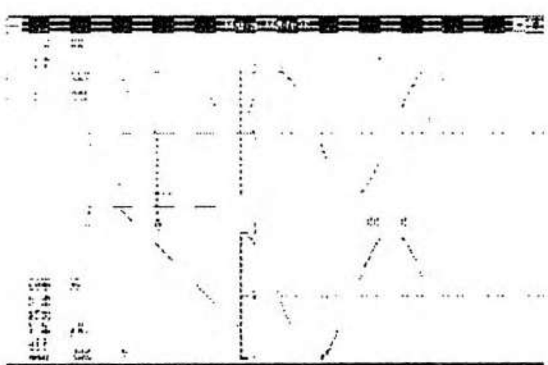
La siguiente pantalla corresponde al formato típico de las preguntas que se hacen, en este caso de Calculo III, en su opción de funciones.



En la opción **c. Slide Shows** del menú principal, se encuentran pregrabadas (es decir no interactivas) algunas demostraciones de algunos temas frecuentes en educación matemática. Entre ellos podemos encontrar la exhibición de una argumentación gráfica plausible para la regla de la cadena. En la siguiente figura, desafortunadamente se ha perdido el sentido dinámico de la demostración.



En la opción **d. Teacher Aids**, encontramos algunas demostraciones interactivas, entre las que se cuenta la demostración dinámica de la variación de los valores del seno y el coseno conforme varía el angulo central en un un círculo unitario.



vhernan@gauss.mat.uson.mx

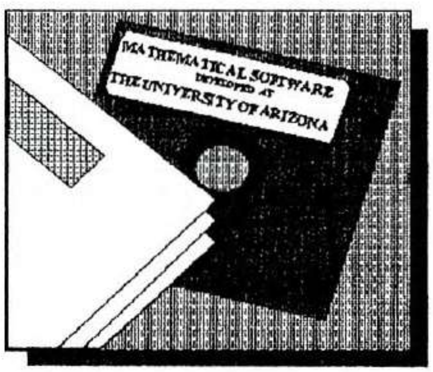
No obstante mi esfuerzo, la riqueza de lo dinámico se ha perdido en la figura estática anterior, así que lo mejor es que el lector consiga y use el programa.

Comentarios

En este capítulo se han mostrado argumentos que evidencian tanto la necesidad de nuevos recursos tecnológicos en educación matemática, como la existencia de satisfactores para esta necesidad.

En esta situación en la que necesidad y satisfactores están identificados en su existencia y factibilidad, queda pendiente la existencia del eslabón que les daría sentido a ambas cosas: el usuario.

Anexo 3



THE UNIVERSITY OF
ARIZONA
TUCSON ARIZONA

Software matemático de la Universidad de Arizona

Podemos ubicarlo dentro de tres apartados: **ARE YOU READY?; SLIDE SHOWS y TOOLKITS.**

ARE YOU READY?

El propósito de estas series es el poner a disposición de los estudiantes una colección de programas de cómputo para que revisen aquellos materiales de los cursos anteriores que son esenciales para el éxito en el curso que actualmente están llevando. Aún más, los programas identifican las áreas débiles y recomiendan una acción apropiada (usualmente referenciadas a la colección Schaum, ya que son obras de fácil acceso económico y además porque no son revisadas periódicamente). Programas disponibles:

ARE YOU READY FOR INTERMEDIATE ALGEBRA?

ARE YOU READY FOR COLLEGE ALGEBRA?

ARE YOU READY FOR CALCULUS?

ARE YOU READY FOR BUSINESS CALCULUS?

ARE YOU READY FOR AP CALCULUS (AB)?

ARE YOU READY FOR CALCULUS II?

ARE YOU READY FOR CALCULUS III?

ARE YOU READY FOR ODES?

SLIDE SHOWS

Esta es una colección de imágenes pregrabadas accesibles a cualquiera que lo desee. Estas son imágenes de funciones que usualmente es difícil o imposible graficar en el pizarrón. Algunas de estas están animadas y algunas otras hacen acercamientos ("Zoom") sobre la gráfica de la función: Programas disponibles:

vhernan@gauss.mat.uson.mx

FUNCTIONS. Este consiste de gráficas de funciones usadas frecuentemente en cálculo, tales como Sen(1/x), xSen(1/x), Sen x/x, y aquel viejo discurso de una función continua en todas partes pero no diferenciable en parte alguna.

TROUBLE. Este programa demuestra el peligro asociado al graficar una función mediante el recurso de ubicar un número ``suficiente'' de puntos y luego juntarlos con una línea.

NEWTON'S METHOD. Muestra la aplicación del Método de Newton gráficamente. Algunas imágenes muestran como funciona, mientras que otras ejemplifican casos donde se obtienen errores.

TAYLOR SERIES (SLIDE SHOW). Se muestran imágenes de las expansiones polinomiales de varios grados correspondientes a exp x, Sen x, Cos x, etc. Contiene también algunas demostraciones visuales de convergencia y divergencia.

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. Contiene ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, incluyendo una familia uniparamétrica de curvas, la población de US y el crecimiento logístico, el enfriamiento del café y la ley de Newton, los métodos de Euler y Runge Kutta y su fiabilidad, vibraciones no amortiguadas, construyendo una función a partir de su serie de soluciones y funciones de Bessel.

SERIES DE FOURIER (SLIDE SHOW). Se muestran las sumas parciales de Series de Fourier para la onda triangular, la onda cuadrada, la onda de dientes de sierra, la expansión en cosenos del Sen x, y una onda cuadrada interrumpida. Se muestran el fenómeno de Gibbs y otros de convergencia no uniforme.

VIBRATING STRING. Este es un conjunto animado de imágenes que muestran cómo se genera una onda estacionaria a partir de dos ondas que se desplazan.

PDE1, PDE2 Y PDE3 (Tres discos). Se muestra la solución exacta de una ecuación de onda para tres condiciones iniciales diferentes. (PDE1 una joroba suave, PDE2 una función escalón, PDE3 una joroba triangular). A continuación son superimpuestas varias aproximaciones numéricas sobre la solución exacta de tal forma que pueden ser vizualizadas la precisión y estabilidad del esquema numérico.

TOOLKITS.

Estos son programas que permiten apoyar el trabajo docente de los profesores y los estudiantes tanto al interior como al exterior de las clases. Algunos de ellos alientan el trabajo autónomo proponiendo actividades. Todos ellos tiene menús de cortina y están documentados en sí mismos con ayudas en línea que son sensibles al contexto.

BAYES´S THEOREM. Tiene que ver con probabilidades, con probabilidades condicionales y con el Teorema de Bayes y cómo pueden ser usados para la Búsqueda y Rescate de un individuo perdido en un ambiente hostil.

COMPLEX NUMBERS. Despliega gráficamente la suma, el producto, el cociente, el conjugado, etc., de números complejos. También posee un apartado lúdico para probar el entendimiento del usuario sobre estos conceptos.

CONICS. Este programa proporciona las gráficas de las cónicas como casos particulares de la ecuación general de segundo grado. Las constantes que se usan usualmente en esta fórmula, pueden ser cambiadas y las curvas pueden serexhibidas de nueva cuenta. Contiene también demostraciones que muestran la construcción de las cónicas.

DIVISION ALGORITHM. El usuario propone polinomios reales con coeficientes enteros. Este paquete le ayudará a encontrar el MCD, y también a ejecutar el algoritmo de Sturm y la identidad de Bezout. Los coeficientes de todos los polinomios son almacenados y mostrados como números racionales.

FEURBACH'S THEOREM. Le permite experimentar con el tamaño de un triángulo y ver los círculos inscritos, excritos, circumscritos y el círculo de los nueve puntos. Está diseñado para dar una representación pictórica del Teorema de Feurbach.

FINDPOLY. Le proporciona al estudiante cualquier información acerca del polinomio seleccionado (su gráfica, su derivada, sus ceros, su valor) excepto cuál polinomio es. El estudiante tiene que identificar el polinomio. Diseñado para Cálculo I.

FORTUNE. Este paquete permite ver simultáneamente las gráficas de f(x) y de g(x) con parámetros a, b y c. Enseguida los parámetros pueden ser sintonizados (``tuned'') y las gráficas reconstruidas con los nuevos valores de los parámetros. Contiene algunas actividades.

FOURIER SERIES (TOOLKIT). Construye los primeros 20 ``polinomios'' de Fourier de las series de Fourier de f(x). El programa computa los coeficientes de Fourier numéricamente o bien, el usuario puede proporcionarlos explícitamente.

HISTOGRAM. Calcula la media, mediana y desviación estándar de un conjunto de datos. Genera también un histograma, una gráfica de barras, una gráfica de caja y bigotes (box and whisker plot) y una gráfica de tallo y hojas (stem and leaf plot).

IDENTIFY. Un programa que permite probar cuándo un estudiante puede identificar funciones polinomiales, funciones racionales, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas. La computadora proporciona la gráfica de una función elegida del banco de funciones del programa. El estudiante debe identificar esta función. Diseñado para pre-cálculo.

IMPLICIT FUNCTIONS. Proporciona la gráfica de las funciones implícitas de la forma f(x,y)=0 y las curvas de nivel para superficies de la forma z=f(x,y).

INTEGRAL. Ejecuta la integración numérica de f(x) usando varias técnicas (extremo izquierdo, extremo derecho, punto medio, trapezoidal, Simpson, Romberg, Gauss y Monte Carlo).

INTERPOL. Puede ser introducido un conjunto de datos y entonces pueden ser superimpuestas las gráficas de diversas interpolaciones (incluyendo la interpolación de Lagrange y la de tiras cubicas [cubic splines]).

ITERATE. Proporciona iteraciones de f(x) definidas hasta con dos parámetros a y b. El programa proporciona respuesta numérica y gráfica. Permite graficar los diagramas de órbitas y el análisis gráfico. Contiene actividades con algunas ideas.

LIMITS. Este programa permite evaluar (por abajo, por arriba y bilateralmente) el límite de f(x) a medida que x toma valores más cercanos a un número dado o a medida que x crece sin límite.

LINALG. Este es un paquete amplio de álgebra lineal que permite realizar manipulaciones de vectores u matrices. Contiene actividades e ideas.

LINEINT. Este programa permita crear trayectorias en el plano xy y evaluar numéricamente integrales de linea a lo largo de las trayectorias definidas.

LINSYS. Permite resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Diseñado para College Algebra.

OLDES. Este programa permite graficar las soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias de 1^0 y 2^0 orden con parámetros

vhernan@gauss.mat.uson.mx

a, b y c. Entonces estos parámetros pueden ser sintonizados (``tuned'') y la gráfica reconstruida.

POLAR EQUATIONS. Este programa permite graficar ecuaciones polares y ecuaciones paramétricas bidimensionales que continene parámetros a, b y c. A continuación estos parámetros pueden ser sintonizados (``tuned'') y la gráfica reconstruida.

ROOTFIND. Este programa calcula las raíces reales de f(x) usando varias técnicas (bisección, Newton, secante, falsa posición). También proporciona la gráfica de f(x) de tal forma que la raíz pueda ser determinada `` a ojo''.

SEQUENCE. Este programa despliega los valores de la sucesión a(n) y sus sumas parciales, ambas numéricamente y gráficamente. Contiene un demo de la prueba del Teorema del nuevo arreglo de Riemann.

SIMPLEX. Este programa ejecuta el Método Simplex en tres modos diferentes, a saber: la computadora ejecuta el método y muestra la respuesta, la computadora ejecuta el método y muestra los pivotes o el usuario ejecuta el método paso a paso usando la computadora.

SLOPES. Este programa permite graficar los campos direccionales y las curvas integrales (por el Método de Euler o el de Runge Kutta 4) para ecuaciones diferenciales de primer orden, dy/dx=F(x,y)/G(x,y).

SYSTEMS. El programa grafica las soluciones numéricas de un sistema de hasta 6 ecuaciones diferenciales ordinarias con parámetros. Estos parámetros pueden ser sintonizados (``tuned'') y la gráfica de la solución reconstruida. También pueden ser graficados una expresión y un conjunto de datos proporcionados por el usuario.

TAYLOR POLYNOMIALS (TOOLKIT) El programa permite graficar los primeros 20 polinomios de las series de Taylor de la función f(x) alrededor de x=0. El usuario proporciona los coeficientes explícitamente.

TRUTH TABLES. Este programa permite desplegar en pantalla las tablas de verdad de expresiones construidas a partir de proposiciones simples p, q y r con las operaciones: or, and, not e implies.

TWIDDLE. Este programa permite graficar f(x) con parámetros a, b y c. A continuación, estos parámetros pueden ser ``meneados'' (``twiddled'') y lagráfica de la función reconstruida con los nuevos valores. Permite ajustar una función a un conjunto de datos. Contiene actividades con ideas.

TWODMAPS. Este programa está dedicado a las transformaciones afines bidimensionales. El usuario puede experimentar con fractales, encontrar eigen valores ``a ojo'', mostrar los efectos de un mapeo sobre un conjunto de puntos y muestra la solución de un conjunto de dos ecuaciones lineales.

UNITS. Este es un paquete numérico que permite convertir unidades de un sistema a otro.

VENN DIAGRAMS. Este programa despliega gráficas de uniones, intersecciones, complementos, etc., de las expresiones proporcionadas por el usuario. También posee características lúdicas que permiten probar el entendimiento del usuario sobre estos conceptos.

VOTE. Este programa permite experimentar con cuatro diferentes métodos de voto: el Método de Pluralidad, el Método de Conteo Borda, el Método de Pluralidad con Eliminación y el Método de Comparación de Parejas.

vhernan@gauss.mat.uson.mx

A continuación se listan algunos cursos y se identifican los paquetes (toolkits) en los que podrían apoyarse:

ÁLGEBRA: Complex Numbers, Fortune, Implicit, Identify, Iterate, Linalg, Linsys, Rootfind, Twiddle, Units, Venn.

TRIGONOMETRÍA: Fortune, Polar, Twiddle.

CÁLCULO 1: Findpoly, Fortune, Identify, Implicit, Integral, Interpol, Iterate, Limits, Linalg, Oldes, Rootfind, Slopes, Twiddle, Units.

CÁLCULO 2: Fortune, Fourier, Implicit, Integral, Polar, Sequence, Taylor, Twiddle.

CALCULO VECTORIAL: Implicit, Lineint, Polar.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS: Fortune, Implicit, Integral, Oldes, Rootfind, Slopes, Systems, Taylor, Twiddle.

ALGEBRA LINEAL: Linalg, Linsys, Simplex, TwoDMaps.

MATEMÁTICAS FINITAS Y DISCRETAS: Linalg, Simplex, Venn.

CÁLCULO AVANZADO: Fourier, Sequence, Taylor.

ANÁLISIS NUMÉRICO: Fourier, Implicit, Integral, Oldes, Rootfind, Slopes, Taylor, Twiddle.

MATEMÁTICAS ELEMENTALES PARA PROFESORES: Complex Numbers, Division Algorithm, Interpol, Venn.

COMENTARIOS GENERALES.

Cada uno de los paquetes relacionados en este documento han sido instalados en módulos independientes por lo que es posible accesar al directorio de interés para el usuario y copiarlo directamente desde el servidor a su diskette para su uso personal. Se transcribe a continuación la leyenda que aparece en el documento original en el que se autoriza a cualquier usuario a copiar libremente el software además de algunas especificaciones relacionadas con los requerimientos técnicos para correr los programas.

All software runs under MS-DOS (IBM compatible) version 3.1 or greater, and usually requires 640 K and a CGA card. You may distribute this software freely as long as there is no charge involved other than a reasonable duplication and medias costs (not to exceed $8).

For further information contact:

Mathematical Software,

Department of Mathematics,

University of Arizona,

Tucson, AZ 85721.

(602) 621-6892.

Este documento es una traducción del documento de nombre SOFTWARE, que ha sido cargado en el servidor al momento de la instalación del Software Matemático de la Universidad de Arizona.