UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON
ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS DE BASE *e* MEDIANTE LA VINCULACIÓN DE REPRESENTACIONES.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:
GUADALUPE VILLASEÑOR GÁNDARA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RAMÓN JIMÉNEZ RODRÍGUEZ

JURADO:
Dr. José Carlos Cortés Zavala, Presidente
M.C. Ana Gpe. Del Castillo Bojórquez, Secretaria
M.C. Enrique Hugues Galindo
Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez

Hermosillo, Sonora, México. Octubre de 2011

Dedico este trabajo de tesis a mis hijos; Lupita, Felipe y Salma, que son parte de los cimientos de éste.

Agradezco…

A mi esposo por su comprensión y apoyo durante la realización de mis estudios de maestría y de este trabajo.

A mis padres por su ejemplo de perseverancia y constancia.

A mi director de tesis Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez por ser parte muy importante en mi formación en la matemática educativa. Por sus valiosas aportaciones, la confianza y el apoyo que me brindó para el desarrollo del presente trabajo.

A todos mis maestros, por compartir sus conocimientos, por su entusiasmo y por la motivación que me ofrecieron para llevar a cabo este trabajo.

Contenido

Presentación

El crecimiento y decaimiento exponenciales son características esenciales de fenómenos naturales cuyo estudio es demandado por diferentes especialidades de las ciencias y las ingenierías. En las matemáticas mismas, como es el caso del curso de Ecuaciones Diferenciales, en el cual las primeras aplicaciones que se presentan de manera tradicional son los modelos de crecimiento y decrecimiento que tienen asociados una función exponencial del tipo $N(t) = N_0 e^{kt}$, la falta de familiaridad con el comportamiento de estas funciones por parte de muchos estudiantes hace que el análisis e interpretación de los resultados prácticos descritos por el modelo no le sean significativos.

El conocimiento de este tipo de funciones se considera a tal grado importante que el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), ha recomendado la inserción en la currícula matemática del bachillerato de tópicos relacionados con las funciones exponenciales y su estudio en contextos reales: el comportamiento de las funciones exponenciales y el concepto de razón de cambio proporcional al valor de la función.

El número e se utiliza para modelar prácticamente la mayoría de los procesos naturales de crecimiento o decrecimiento, por medio de distintas funciones relacionadas con él (Gompertz, hiperbólicas, logística, etc.) y particularmente de las funciones exponenciales del tipo $N(t) = N_0 e^{kt}$.

El estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas está presente dentro de los cursos de matemáticas básicas de nivel superior en el Área de Ciencias e Ingeniería así como en el Área de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Sonora.

En el presente trabajo originalmente nos propusimos diseñar una secuencia didáctica para la introducción y desarrollo en el aula de la función exponencial con base e ($N(t) = N_0 e^{kt}$), utilizando como herramienta didáctica la calculadora *Voyage 200*. Este tratamiento resulta inalcanzable si no se involucra simultáneamente el estudio de las funciones logarítmicas. También, hemos considerado que antes de abordar el estudio de las funciones exponenciales con base e, con el fin de lograr que este sea significativo se recomienda en esta propuesta estudiar las funciones exponenciales con base arbitraria ($P(t) = P_0 a^t$) así como también las funciones logarítmicas de base arbitraria.

Por otro lado, un aspecto importante que hemos considerado se refiere a que los objetos matemáticos son susceptibles de representarse en diferentes modos, formas o sistemas. La noción de representación se utiliza sistemáticamente en Educación Matemática desde la década de los 80's. Existen distintos enfoques teóricos que permiten un acercamiento a la noción de representación: representaciones (Janvier, 1987), juegos de marcos (Douady, 1986), sistemas de notación (Kaput, 1992, 1994), registros de representación semiótica (Duval, 1998), entre otros.

Aunque los primeros tres puntos de vista mencionados anteriormente explican, cada uno a su manera, la relación que existe entre las representaciones y el aprendizaje de las matemáticas, en este trabajo nos hemos inclinado por el cuarto enfoque, conocido como Teoría de las Representaciones Semióticas, por las razones que se exponen más adelante en el Capítulo Dos.

Para el concepto de función existen al menos cuatro representaciones asociadas a éste: la representación analítica, la tabular, la gráfica y la verbal. La expresión analítica se relaciona con la capacidad simbólica, principalmente con el álgebra; la tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la gráfica se relaciona con las capacidades de visualización y tiene que ver con el pensamiento geométrico; finalmente, la expresión verbal se relaciona con la capacidad lingüística, fundamental tanto para interpretar y relacionar las otras representaciones, como para el planteamiento y discusión de un problema matemático, o la validación y comunicación de su solución.

Muchos investigadores, desde perspectivas teóricas distintas, afirman que las transformaciones entre los distintos sistemas de representación asociados a un objeto matemático pueden facilitar la emergencia de dichos objetos en los sujetos (Janvier, 1987; Douady, 1984; Kaput, 1992; Font, 2000, 2001, 2002: en Del Castillo, 2004) para Duval (1998) la conversión ente los distintos registros de representación semiótica es indispensable para la aprehensión de los objetos matemáticos.

Numerosas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas, a la construcción del concepto de función. Artigue (2000) sintetiza y presenta algunos resultados de investigaciones didácticas, y en lo que se refiere al concepto de función, encuentra que existen dificultades para relacionar los diferentes registros de representación semiótica (Duval, 1995): verbal, tabular, gráfica y expresión algebraica o analítica. La falta de habilidad y conocimiento de los estudiantes para realizar la conversión entre los diferentes registros de representación ha sido identificada como una de las principales dificultades para el aprendizaje de las matemáticas.

Como consecuencia de lo anteriormente descrito, la organización para el desarrollo de este trabajo de tesis la hemos clasificado en dos partes, una anterior al diseño y el diseño mismo, cada una de éstas corresponde a tareas muy diferentes, pero como se verá, necesarias para la realización del mismo. En la primera parte, con el fin de comprender con mayor profundidad el tema y rescatar significados que han desaparecido del discurso escolar investigamos en distintas fuentes (Maor, 2006; Ferrari, 2001; Confrey, 2000; Cantoral, 1983), el desarrollo histórico de los conceptos de logaritmo y función exponencial buscando los interrogantes y debates que se produjeron, las controversias que suscitaron, la evolución de sus desarrollos y su consolidación en la estructura matemática. Nuestro interés era identificar los momentos relevantes, significados y sentidos que pudieran haberse diluido y que nos proporcionan bases o elementos para nuestros diseños.

La segunda parte de nuestro trabajo, y propuesta central del mismo, consiste en el diseño de la secuencia de actividades didácticas para el tratamiento de las funciones exponenciales y logarítmicas, mediante la cual se pretende abordar el estudio de estas funciones a partir de problemas prácticos con el propósito de estimular el interés del estudiante y de que sea capaz de desarrollar modelos matemáticos en este contexto. Según Sierpinska (1992), la identificación de los cambios observados a nuestro alrededor como problemas prácticos a resolver y de las regularidades en las relaciones entre cambios, como una manera de tratar con ellos, constituyen los más importantes “actos de entendimiento” del concepto de función. Ignorarlos como condiciones necesarias para el desarrollo de esta noción en los estudiantes, significa estar frente a un obstáculo inherente a la concepción de las matemáticas, a su filosofía, pues implica considerar que a esta disciplina no le conciernen los problemas prácticos, lo cual evidentemente acarreará connotaciones didácticas a la hora de introducir y desarrollar este tema en el aula.

El diseño de nuestra secuencia pretende promover la articulación dinámica de los distintos registros de representación: verbal, tabular, gráfico y analítico, así como el realizar un tratamiento adecuado en cada registro de representación, utilizando como herramienta didáctica la calculadora `Voyage 200`. “Cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo” (Duval, 1998). Sin embargo, como antes se mencionó, esta articulación entre diferentes registros de representación no es espontánea, y debe por tanto ser objeto explícito de enseñanza.

Está claro que el estudio exhaustivo de los tratamientos y conversiones entre las diferentes representaciones de una noción matemática es una tarea demasiado complicada si se le aborda sin contar con el apoyo en algún recurso tecnológico. En la actualidad, la tecnología computacional existente hace posible la vinculación de distintas representaciones de los conceptos matemáticos y particularmente de las funciones. Las calculadoras simbólicas permiten la exploración dinámica de todas las conexiones entre los diferentes registros de representación. Esto da lugar a que el estudiante haga un análisis más detallado de los factores que intervienen en el problema que se esté analizando y de su significado, centrándose así en la interpretación de lo que está realizando y no en la ejecución de cálculos repetitivos y tediosos.

Los estudiantes que usan CAS (Computer Algebra System) pueden generar fácilmente representaciones gráficas de los problemas, manipular representaciones algebraicas y analizar representaciones numéricas. Esto puede ayudar a los estudiantes a construir articulaciones o interconexiones entre las diferentes formas de representación aumentando así su comprensión.

Capítulo I

Introducción

El presente documento constituye una Tesis de Maestría en Matemática Educativa en la modalidad de Desarrollo Docente. Las ideas iniciales que guiaron su elaboración surgieron durante el desarrollo del Diplomado "El Uso del Sistema de Cómputo Simbólico Voyage 200 como Recurso Didáctico", realizado durante los semestres 2003-2 y 2004-1, como parte del Programa de Actualización de Profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, un proyecto apoyado por CONACYT y Texas Instruments.

Uno de los trabajos que como participante realizamos durante este Diplomado consistió en el diseño de una secuencia didáctica cuyo propósito era promover la articulación de las diferentes formas de representación (verbal, tabular, gráfica y analítica) en el estudio de la variación exponencial con base arbitraria ($y(x) = a \cdot b^x$, con $b > 0$), utilizando como herramienta didáctica la calculadora Voyage 200. En estos diseños se privilegió que el análisis de la variación referida surgiera de manera natural de una situación problemática del mundo real, con el propósito de estimular el interés del estudiante y de que fuera capaz de desarrollar modelos matemáticos en este contexto.

Dicha secuencia constó de ocho actividades didácticas, cuatro de crecimiento y cuatro de decrecimiento exponencial, ya que se consideraron los siguientes cuatro casos: cuando la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante 1) una tabla de datos, 2) una descripción verbal, 3) una gráfica y 4) un modelo teórico, expresado mediante una fórmula. A través de cada uno de estos registros de representación se intentó promover la apropiación de técnicas matemáticas y computacionales que permitieran el cálculo de los parámetros que figuran en el modelo algebraico correspondiente a este tipo de variación. Por lo tanto, se pretendió que los estudiantes reconocieran la variación exponencial en cualquiera de los cuatro registros de representación, que fueran capaces de darle un tratamiento adecuado en cada uno de éstos, así como lograr la articulación de un registro de representación a otro apoyados en todo momento de la calculadora simbólica.

A partir de este trabajo surgieron otros dos trabajos similares. El primero de ellos fue una Tesis de Maestría en Matemática Educativa desarrollada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora (Rascón, 2007). El segundo fue una Tesis de Licenciatura en Matemáticas, opción Matemática Educativa, desarrollado en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas (Flores, 2009). Ambos trabajos consistieron básicamente en la adaptación, complementación y aplicación de una secuencia didáctica para el estudio de la variación exponencial (sin incluir el estudio de las funciones logarítmicas), tomando como base nuestro diseño del Diplomado. Su objetivo principal fue apoyar y guiar a los estudiantes para lograr la articulación de los diferentes registros de representación de la variación exponencial con el apoyo de la calculadora simbólica. El primero de ellos hizo hincapié en la articulación de las representaciones tabular y analítica, mientras que el segundo puso énfasis en la articulación de las representaciones verbal y analítica. En general los resultados obtenidos en ambos casos fueron favorables, ya que se logró que los estudiantes reconocieran la variación exponencial en cualquiera de sus registros de representación, así como que realizaran la conversión de un registro a otro.

El abordaje curricular de las funciones exponenciales como modelo de un tipo importantísimo de variación física, sin embargo, contiene un momento didácticamente conflictivo. Se trata de la introducción del número e. Este número se utiliza para modelar prácticamente la mayoría de los procesos naturales de crecimiento o decaimiento, por medio de distintas funciones relacionadas con dicho número (Gompertz, hiperbólicas, logística, etc.) y particularmente de las funciones exponenciales del tipo $N(t) = N_0 e^{kt}$.

En los enfoques didácticos tradicionales, la introducción del número e ocurre de una manera puramente formal, sin apoyo en ninguna motivación práctica o por lo menos de carácter lógico. A los estudiantes simplemente se les comunica que las funciones exponenciales son más fáciles de estudiar y de comprender si se reducen a una misma base, y que la base que para ese propósito resulta más adecuada es un número especial que se simboliza con la letra e y que está definido mediante un límite especial. Raramente, los estudiantes son puestos en contacto con una serie de experiencias y vivencias, por lo menos de carácter lógico, que les hagan sentir y apreciar la importancia y relevancia de este número en la matemática, y particularmente en el estudio de la variación exponencial.

Fue a partir de esta consideración que decidimos continuar nuestra propuesta didáctica sobre el estudio de la variación exponencial, con la finalidad de introducir de una forma significativa para los estudiantes la base e.

Habitualmente, la enseñanza tradicional trata de promover el desarrollo de las funciones exponenciales (tanto de base arbitraria como de base e) como modelos de fenómenos naturales, y utiliza a los logaritmos como la herramienta adecuada para resolver una ecuación exponencial que surge al plantear ciertas preguntas sobre tales fenómenos. Bajo esta concepción, los exponentes van en primer término, de mano con las funciones exponenciales, y los logaritmos vienen después, teniendo un papel secundario. Es precisamente este hecho lo que permite definir a los logaritmos como "exponentes especiales". Esta estrategia metodológica busca apoyarse generalmente sin mucho éxito, como muestra la práctica docente y como lo evidencian las investigaciones educativas (Trujillo, 1995; Ferrari, 2001) en el conocimiento que los estudiantes logran desarrollar sobre los exponentes, para luego elaborar a partir de él un nuevo conocimiento sobre los logaritmos, considerados éstos como una clase especial de exponentes (exponentes decimales, en una primera aproximación).

Esta estrategia, lógica y simple a primera vista, no está exenta de dificultades para los estudiantes. Un gran obstáculo que ellos encuentran se da en el paso del estudio de los exponentes naturales a los exponentes fraccionarios (Lezama, 1999). Cuando se estudian por primera vez los exponentes con números naturales, se desarrolla en los estudiantes el esquema de la "multiplicación reiterada abreviada", lo que permite que desarrollen un significado restringido para los exponentes, que no resulta aplicable en el caso de los números fraccionarios. Para evitar este conflicto se ha intentado, también sin mucho éxito, ubicar el paso de los exponentes naturales a los fraccionarios en el contexto del estudio de la variación exponencial, en los cursos de Precálculo o de Cálculo.

Por otro lado, y completamente por separado, el estudio de los logaritmos como exponentes ha sido abordado habitualmente en el contexto de los cursos de Álgebra. En este sentido, su introducción y estudio ha sido influido por algunos de los enfoques teóricos predominantes en la introducción al Álgebra: a) como generalización de la aritmética, b) como el estudio de procedimientos o algoritmos, c) como el estudio de las relaciones entre cantidades variables, y d) como el estudio de las estructuras algebraicas (Usiskin, 1988).

Cuando el Álgebra es considerada como una generalización de la Aritmética, las literales se usan para generalizar ciertos patrones numéricos. Por ejemplo, las relaciones $2 + 3 = 3 + 2$, $1 + 6 = 6 + 1$, etcétera, pueden ser generalizadas en la forma $a + b = b + a$. Aquí las letras a y b no representan variables o incógnitas, sino simples comodines que pueden ser sustituidos por números cualesquiera. Se supone que este nivel de comprensión del lenguaje algebraico por parte de los estudiantes puede servirles de apoyo para generalizar relaciones tales como $\log_3 2 + \log_3 4 = \log_3 8$, $\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$, y $\log_5 2 + \log_5 3 = \log_5 6$, mediante la regla $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, en la que las literales x y y no representan incógnitas sino más bien números generalizados.

Cuando el Álgebra es considerada como el estudio de procedimientos o algoritmos para resolver cierta clase de problemas, las literales representan incógnitas que deben ser encontradas. En el caso de los logaritmos, tales problemas frecuentemente no son planteados como problemas verbales en el sentido habitual, sino directamente como ecuaciones, por ejemplo: resolver $\log_2(x + 5) = 3$. El profesor puede auxiliar a los estudiantes parafraseando el problema: “3 es el exponente al que se debe elevar 2 para obtener 5 más un cierto número. ¿Cuál es ese número?”, en espera de que los alumnos realicen la conversión o traducción correspondiente, $2^3 = x + 5$, y que de ella puedan encontrar el valor de x.

Cuando el Álgebra es considerada como el estudio de relaciones entre cantidades o magnitudes, las literales pueden ser vistas como argumentos o como parámetros. Un cambio en una de dichas cantidades induce un cambio en la otra u otras. Los logaritmos también pueden ser estudiados de esta forma. Por ejemplo, a los estudiantes se les puede plantear el problema de explorar el comportamiento de $y = \log_2 x$ cuando x se aproxima a cero. Aquí no hay nada que resolver, de modo que x y y no pueden ser considerados como incógnitas.

Si bien el enfoque del Álgebra como el estudio de las estructuras algebraicas no es común en el nivel medio superior, muchos de los ejercicios relativos a los logaritmos pueden ser considerados bajo esta perspectiva. Por ejemplo, en el ejercicio “Simplificar la expresión $\log_a 32 - 2\log_a 4$”, o bien “Simplificar $\log_b \sqrt{b}$”, las literales a y b tienen que ser consideradas como objetos arbitrarios sujetos a unas ciertas reglas de manipulación previamente establecidas de una manera lógica y consistente.

Actualmente se tiene en claro que el Álgebra es mucho más que estos cuatro enfoques, y de allí la complejidad de su aprendizaje. Un punto importante que la investigación educativa en torno al aprendizaje del Álgebra ha evidenciado concierne a las dificultades que experimentan los estudiantes en relación con el uso correcto de notación algebraica compleja como “log” o “ln”, “sen” y “cos”. Es frecuente que los estudiantes perciban estas notaciones como objetos, y que cometan errores como reducir $\ln(7x-12)=2\ln x$ a la expresión $7x-12=2x$, o escribir $\ln(7x-12)=\ln 7x-\ln 12$. En la enseñanza tradicional estos símbolos se introducen tan arbitrariamente como se hace con el número e. Los estudiantes no desarrollan un significado adecuado para tales símbolos.

Cuando tomamos en cuenta las consideraciones que acabamos de exponer, tuvimos claro que nuestra propuesta original debía ser reformulada: no solamente debíamos abordar el problema de diseñar una secuencia didáctica que promoviera el paso de las funciones exponenciales de base arbitraria a las funciones exponenciales de base e, sino que además teníamos que incluir en ambos casos el tratamiento del concepto de logaritmo para promover una aprehensión conceptual en los estudiantes. Fue en este punto que nos percatamos de la necesidad de realizar un análisis del desarrollo conceptual de las nociones de exponente y logaritmo.

En este punto, una de las dificultades que abordamos durante el desarrollo del presente trabajo consistió en la notable escasez de literatura de investigación, tanto histórica como educativa, en torno a los conceptos de exponente y logaritmo *en conjunto*. Afortunadamente pudimos detectar algunos trabajos que nos aportaron elementos valiosos para fundamentar algunas de nuestras decisiones didácticas.

El estudio histórico que realizamos nos mostró la importancia que tuvo el Álgebra, pero también la Geometría y el Cálculo, en el desarrollo gradual, primero de manera aparentemente independiente, y posteriormente la fusión o integración de estos dos conceptos. Una conclusión que fue tomando cada vez más fuerza y claridad fue el hecho de que el desarrollo del concepto de logaritmo y de función logarítmica históricamente va de la mano con el correspondiente desarrollo del concepto de función exponencial. La idea clave que posibilita la integración de estas dos funciones resultó ser el concepto de base, y particularmente, el surgimiento de la base e. La implicación didáctica de esta conclusión histórica consiste en la necesidad de estudiar de manera conjunta ambos conceptos, el de función exponencial y el de función logarítmica, provocando su evolución conjunta de una manera semejante a lo que ocurrió en la historia.

El desarrollo conjunto de ambos conceptos, el de exponente y el de logaritmo, presenta al menos dos facetas importantes pero complejas. En primer lugar, ambos conceptos surgen y evolucionan como consecuencia de la comprensión conjunta de las estructuras aditivas y multiplicativas, y particularmente, de la relación que se manifiesta entre ciertas progresiones aritméticas y geométricas. En segundo lugar, ambos conceptos manifiestan una múltiple naturaleza. Por un lado, se presentan como *números* en el contexto de las progresiones aritméticas y geométricas. Por otro, resulta posible definirlos como *operaciones* aritméticas que permiten obtener ciertos valores, es decir, como herramientas de cálculo. En una etapa avanzada de su desarrollo, se les puede identificar como *funciones*, es decir, como modelos matemáticos que permiten describir el comportamiento de ciertos fenómenos naturales.

El trabajo de Tesis que aquí se presenta no ha pretendido abarcar a profundidad todos estos aspectos del significado de los conceptos de exponente y logaritmo, centrándose fundamentalmente en su sentido funcional, aunque se puede percibir en la secuencia didáctica un esfuerzo importante (aunque ciertamente insuficiente) para promover en la medida de lo posible estos tres significados. Más bien, su pretensión ha consistido en generar una “descomposición epistemológica” y una consiguiente “transposición didáctica” de los conceptos de función exponencial y función logarítmica, con la intención explícita de provocar en los estudiantes la génesis conceptual del número e. Otro aspecto importante que se ha tratado de considerar ha consistido en tratar de propiciar un balance entre la comprensión instrumental y la relacional (Skemp, 2005) de estos dos conceptos.

Capítulo II

Planteamiento de la Propuesta y Elementos Teóricos

II.1. Objetivos de la Propuesta.

Objetivo General.
Diseñar una secuencia de actividades didácticas para promover la aprehensión conceptual de las funciones exponenciales y logarítmicas de base *e* mediante la vinculación de representaciones semióticas, privilegiando algunas conversiones a partir del análisis de problemas prácticos y apoyándose en la calculadora `Voyage 200` como recurso didáctico.

A su vez, para que se lograra el objetivo que se propuso se plantearon los siguientes objetivos específicos:

Objetivos Específicos.

- Incorporar elementos históricos al planteamiento didáctico con el fin de dar mayor sentido al diseño de la secuencia y a su organización.
- Disponer de programas interactivos en la calculadora simbólica `Voyage 200` que sean apropiados para las actividades didácticas.
- Disponer de diseños específicos sustentados en el marco teórico propuesto, es decir con las características propias de los tratamientos y las conversiones de los diferentes registros de representación semiótica.

II.2. Elementos Teóricos

A continuación presentamos algunos elementos de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Raymond Duval, los cuales han servido como fundamento para las acciones de diseño, seriación y valoración de las actividades que conforman la secuencia didáctica que presentamos en este trabajo. Así mismo, estos elementos teóricos nos han permitido formular coherentemente nuestra propuesta, describir sus componentes y evaluar los resultados del pilotaje de la misma.

Nuestra elección del enfoque teórico de Duval se justifica por la manera precisa y sistemática en que analiza las representaciones semióticas de acuerdo con diversos criterios esenciales como: a) las actividades cognitivas que permiten realizar, b) la manera en que realizan ciertas funciones, c) las cualidades específicas de los distintos registros de representación, y d) por supuesto, por presentar una explicación clara y plausible de la relación que existe entre el uso de los registros de representación y el aprendizaje de las matemáticas. Estos criterios serán objeto de análisis en el presente Capítulo.

Siempre que hacemos matemáticas, inevitablemente usamos algún tipo de representación, ya sea a través del lenguaje natural o mediante los signos y gráficas propios de las matemáticas. Un texto o un discurso, una notación convencional, un cierto tipo de gráfica, las figuras geométricas, etcétera, son ejemplos de representaciones. Usamos todo ello con el fin de que el estudiante desarrolle un significado adecuado para un cierto objeto o concepto matemático. En este sentido, es precisamente el objeto lo que importa. Pero si es así, ¿podrían entonces resultar innecesarias o secundarias sus diferentes representaciones? ¿Podríamos eliminarlas de la enseñanza?

Ese sería el caso si los objetos matemáticos fueran directamente accesibles a la experiencia sensorial, como los objetos físicos. Pero desgraciadamente no es este el caso. Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a través de una experiencia intuitiva inmediata, como lo son los objetos comúnmente conocidos como "reales" ó "físicos". Los objetos matemáticos son abstractos. El conocimiento matemático tiene características propias que hacen que no sea posible acceder directamente a él, sin tener como recurso una variedad de representaciones. Cualquier acción sobre los objetos matemáticos tiene que ser realizada a través de sus representaciones. En la actividad matemática, y por tanto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el empleo de diversas representaciones para las ideas matemáticas es inevitable.

Es importante señalar que no se debe confundir al objeto matemático con su representación, ya que esta confusión provoca a mediano o largo plazo una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje, debido a que no se les recuerda o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren tratamiento alguno. La distinción entre un objeto y su representación es indispensable para la comprensión de las matemáticas (Duval, 1998).

La teoría de Duval sobre registros de representación semiótica considera que no hay conocimiento que pueda ser movilizado por un sujeto sin una actividad de representación, y que la utilización de varios sistemas de representación es esencial para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales. A continuación se describen los aspectos principales de esta teoría.

Duval (1998) define las **representaciones semióticas** como producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significación y de funcionamiento. Un enunciado en lengua natural, una figura geométrica, una gráfica, una expresión algebraica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Señala que para que un *sistema semiótico* pueda ser un *registro de representación*, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La **formación** de una representación identificable dentro de un registro dado. Por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etcétera. Esta formación debe respetar las reglas propias del registro semiótico en el cual se produce la representación, la función de estas reglas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como también la posibilidad de su utilización para los tratamientos.

2. El **tratamiento** de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna

equivalente en un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.
3. La **conversión** de una representación, que es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa.

Debido a la imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, la confusión es casi inevitable. ¿Cómo los estudiantes que están en el proceso de aprendizaje no van a confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas, si sólo se enfrentan a estas últimas? Y a la inversa ¿cómo pueden adquirir la habilidad en los procesos matemáticos necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya una aprehensión conceptual de los objetos representados? En consecuencia, estamos en presencia de lo que Duval llama **la paradoja cognitiva del pensamiento matemático** (Duval, 1998); por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual, y por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos.

En la enseñanza no se le presta atención a esta paradoja, probablemente debido a que se le da más importancia a las representaciones mentales que a las representaciones semióticas. Según Duval, las **representaciones mentales** abarcan al conjunto de imágenes y, en forma más general, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Por lo general, se considera a las representaciones semióticas como un medio de exteriorización de las representaciones mentales, para volverlas visibles o accesibles a otros. Este punto de vista es engañoso, ya que las representaciones semióticas son necesarias no solamente para fines de comunicación, sino que también son indispensables para la actividad cognitiva del pensamiento.

En efecto, las representaciones semióticas son indispensables para:

- **El desarrollo de las representaciones mentales**, ya que éste depende de una interiorización de las representaciones semióticas. Por lo cual no se puede proceder como si las representaciones semióticas están subordinadas a las representaciones mentales.
- **La realización de diferentes funciones cognitivas**, tales como la función de tratamiento, considerada una función cognitiva esencial, la cual no puede llevarse a cabo por las representaciones mentales, debido a que las actividades de tratamiento están directamente ligadas al uso de sistemas semióticos; por ejemplo, el álgebra.
- **La producción de conocimientos,** debido a que las representaciones semióticas permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida en que pueden hacer surgir sistemas semióticos totalmente diferentes (Benveniste, 1974; Bresson, 1987; citados en Duval, 1998). El desarrollo de las ciencias está ligado a un desarrollo de sistemas semióticos cada vez más específicos e independientes del lenguaje natural (Gragner, 1979; citado en Duval, 1998). Por lo

> cual se revela al funcionamiento cognitivo humano como inseparable de la existencia de una diversidad de registros de representación semiótica.

Duval llama **semiosis** a la aprehensión de las representaciones semióticas y **noesis** a la aprehensión conceptual de un objeto. Afirma que **no hay noesis sin semiosis,** lo cual significa que no hay acceso al objeto matemático sino a través de sus representaciones semióticas. Este hecho es la causa de la paradoja cognitiva del pensamiento matemático y las dificultades que de ella resultan para aprender este tipo de pensamiento, debido a que se quiere enseñar las matemáticas como si la semiosis fuera una operación despreciable con respecto a la noesis.

En la actividad matemática, la coordinación de varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc.) es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos; estas conversiones entre registros de representación semiótica es una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y para que también se les pueda reconocer en cada una de ellas. Esta es la clave para que una representación funcione verdaderamente como tal y proporcione el acceso al objeto matemático representado. Duval (1998) expone tres razones para justificar lo anterior:

1. La **conveniencia de tratamiento**; la existencia de varios registros permite hacer cambios entre ellos, y este cambio tiene como objetivo efectuar tratamientos de una manera más económica y potente.
2. La **complementariedad de los registros**; toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa, y de un registro a otro no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan.
3. La **conceptualización** implica una coordinación de registros de representación. La comprensión de un contenido conceptual se sustenta en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

En la enseñanza formal de las matemáticas, la actividad de conversión se considera como algo secundario o subordinado, ya que sólo se le percibe como necesaria para elegir el registro que se va a utilizar y proceder a efectuar los tratamientos debidos dentro de dicho registro, y se cree ingenuamente que ella tiene un carácter trivial, ya que al poder identificar un objeto en algún registro, el representarlo en otro registro no debería provocar ninguna dificultad. Sin embargo, como Duval mismo lo explica, la actividad de conversión en muchos casos está lejos de ser trivial, por al menos dos razones: a) la actividad de conversión no puede ser reducida a una simple traducción, ni mucho menos a un algoritmo o procedimiento estandarizado; b) toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa.

A partir de este postulado de la complementariedad se puede concluir que los métodos de enseñanza que se enfocan en o privilegian algún registro en particular, sin propiciar la *coordinación* entre los diversos registros en los que se puede representar el objeto estudiado, propician por ello un aprendizaje parcial o restringido de dicho objeto.

Si la formación de conceptos matemáticos implica de manera necesaria la coordinación de registros de representación, resulta entonces que el aprendizaje de las matemáticas no puede ser concebido como la automatización o mecanización de ciertas técnicas operatorias, sino que debe comprender también la coordinación de diferentes registros de representación. Según Duval, la coordinación de los registros de representación es fundamental para la cognición y, por lo tanto, es una condicionante para todos los aprendizajes básicos.

Numerosas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa (Hitt, 1995; Duval, 1995; Kieran, 1995; Stacey, 1995; Chick & Kendal, 2004; citado en Jiménez y Hitt, próxima publicación) nos permiten constatar que tal coordinación entre registros de representación no se da de manera natural en la mayoría de los estudiantes, ni aún después de una enseñanza que haya utilizado frecuentemente diferentes registros como recurso didáctico.

Para un aprendizaje que considere la estrecha relación entre la noesis y la semiosis, Duval propone que se asignen a los alumnos tareas específicas, una de éstas se describe a continuación:

> **Tareas de variaciones comparativas relativas a la significancia de las representaciones.**
> La aprehensión de las representaciones semióticas supone la *discriminación de las unidades significantes* en el registro mismo donde la representación se produce. El único medio para llegar a discriminar las unidades significantes de una representación es el de hacer que se realice *la observación*, por una parte, *de las variaciones de representación efectuadas sistemáticamente en un registro* y, por otro lado, *de las variaciones concomitantes de representación en otro registro.* Para poder proponer tales tareas de variación comparativa, es necesario que se hayan identificado previamente todos los factores de variación sistemática.

En lo concerniente al razonamiento, en sus formas más elaboradas, están la argumentación y la deducción; éstas son formas de razonamiento que no pueden desligarse del registro de la lengua natural, por lo que se considera a éste como un registro de partida. *La lengua natural debe ser considerada a la vez como un registro de partida y como uno de llegada.* Pero, y ese es el punto importante, esta conversión interna no se hace directamente sino que pasa por representaciones intermediarias no discursivas. La explicitación de las representaciones intermediarias no discursivas resulta ser una condición necesaria en el aprendizaje del razonamiento deductivo como en el del control de una argumentación (Duval, 1992; Duval & Egret, 1993; citado en Duval, 1998). Por lo anterior, no es posible descuidar o descartar la lengua natural en el marco de la enseñanza de las matemáticas, pues es un registro tan fundamental como los otros y, particularmente, como los que permiten tratamientos de tipo cálculo.

II.2.1. El tratamiento y la conversión de registros de representación.

Para ilustrar el enfoque teórico de Duval tomaremos como ejemplo la función exponencial del tipo $y = ka^x$. A continuación se muestra un sistema de representaciones múltiples para esta función exponencial.

REGISTRO DE REPRESENTACIÓN VERBAL

Representación V1

La magnitud variable **y** cambia un porcentaje constante a intervalos iguales de la magnitud variable **x**.

Representación V2

Siempre que el valor de la variable **x** cambia en una cierta cantidad fija, el valor correspondiente de la variable **y** es directamente proporcional al valor de **y** inmediatamente anterior, variando siempre con la misma proporción.

Representación V3

Siempre que los valores de la magnitud variable **x** formen una progresión aritmética, los valores de la magnitud variable **y** forman una progresión geométrica.

REGISTRO DE REPRESENTACIÓN TABULAR

Representación T1

(Valores de la variable independiente espaciados entre sí una unidad)

x	y
1	12
2	18
3	27
4	40.5
5	60.75
6	91.125

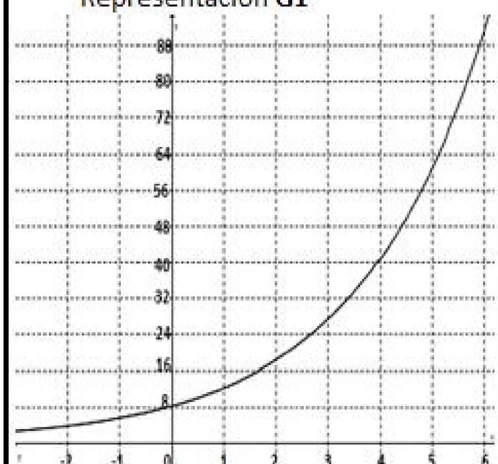
Representación T2

(Valores de la variable independiente igualmente espaciados)

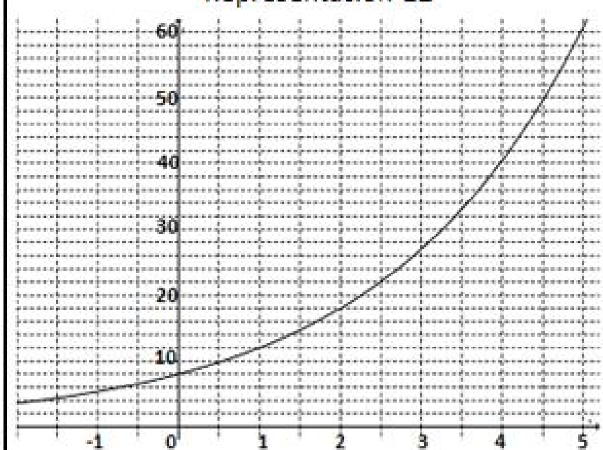
x	y
-3	2.37
0	8
3	27
6	91.125
9	307.55
12	1038

REGISTRO DE REPRESENTACIÓN GRÁFICO

Representación G1



Representación G2



REGISTRO DE REPRESENTACIÓN ANALÍTICO

Representación A1

Fórmula general: $y = y_0 a^x$

Donde a es el factor de cambio constante de y cada que x aumenta una unidad.

$$y = 8\,(1.5)^x$$

Representación A2

Fórmula alternativa (crecimiento):

$$y = y_0(1+r)^x$$

Donde r es la tasa porcentual,

$$r = \frac{\%}{100}$$

$$y = 8\,(1+\frac{50}{100})^x$$

Representación A3

Fórmula con base e:

$$y = y_0\, e^{kx}$$

Donde k es la tasa continua,

$$k = \ln a$$

$$y = 8\, e^{0.405x}$$

Figura 1. Un sistema de representaciones múltiples para la función exponencial.

En la Figura 1 se muestran los cuatro registros de representación asociados al concepto de función exponencial: verbal, tabular, gráfico y analítico. Para cada uno de estos tipos de registros de representación se muestran representaciones equivalentes dentro del mismo registro. Por ejemplo, se muestran dos representaciones las cuales denominamos G1 y G2 del registro gráfico; en la gráfica G1 se representa la situación en la que es posible "leer" con certeza directamente de la gráfica los valores de la función exponencial y=$f(x)$ en x = 0 y en algún otro punto, esta lectura proporciona información directa sobre el valor inicial de la función. En la gráfica G2 se ilustra la situación en la que es posible leer valores exactos de la función en varios puntos de abscisas x_1=1, x_2=2, x_3=3, entre otros, los cuales forman una progresión aritmética; con la lectura de estos otros puntos podemos saber si los correspondientes valores de $f(x)$ forman una progresión geométrica, si esto ocurre, podemos afirmar que $f(x)$ es una función exponencial y la razón constante de dicha progresión corresponde al parámetro a de la representación analítica ($y = ka^x$).

No está por demás señalar que las representaciones equivalentes de los diferentes registros de representación mostradas en la Figura 1, no agotan todas las posibilidades de representación y tratamiento en cada registro. Por ejemplo, en el registro de representación analítico es posible una representación adicional A4 como una relación de recurrencia: $y_{n+1} = 1.5y_n,\ y_0 = 8$.

En la teoría de Duval, el proceso de reformulación o tránsito de cualquiera de las representaciones equivalentes a cualquier otra de ellas constituye un *tratamiento* dentro del mismo registro de representación; por ejemplo, los tratamientos dentro del registro verbal, (donde se muestran tres representaciones equivalentes, las cuales denominamos, V1, V2 y V3) consistirían en la reformulación de V1 a V2 o V3 y viceversa, sin embargo ésta no es obvia ni fácil para una gran cantidad de estudiantes. La teoría de Duval, en este sentido, aporta un elemento teórico valioso para explicar las dificultades que experimentan los estudiantes en la comprensión conceptual: el trabajo exhaustivo dentro de los registros (el estudio de las diferentes operaciones de tratamiento) parece ser una condición necesaria para dicha comprensión profunda, y la enseñanza tradicional se desentiende de él (Jiménez & Hitt, en prensa).

Duval señala otra operación cognitiva importante y fundamental en la construcción del conocimiento matemático: la *conversión*, la cual consiste en el paso o traducción de una representación en un registro dado, a otra representación en otro registro diferente. Por ejemplo, el paso o traducción de cualquiera de las representaciones verbales V1, V2 y V3 a cualquiera de las representaciones tabulares T1 y T2 constituye una *conversión del registro verbal al tabular.* Algunas conversiones o transformaciones se consideran más difíciles de llevar a cabo que otras (por ejemplo, el paso de la gráfica a la expresión analítica), y ésta puede ser una de las causas por la que los diseños de enseñanza generalmente la dejen de lado. En este sentido, el enfoque de Duval nos permite explicar algunas de las dificultades que los estudiantes experimentan, relacionadas con la comprensión conceptual: las conversiones entre todos los registros de representación posibles parece ser una condición necesaria para el aprendizaje y la comprensión conceptual, e incluso para la transferencia de conocimientos.

La Figura 2 muestra los cuatro registros de representación en los que es posible estudiar un fenómeno concreto de variación exponencial del tipo $y = ka^x$: la eliminación de una droga por el organismo, además se muestra que son posibles un total de **doce** conversiones entre estos cuatro tipos de registros de representación. Estas doce conversiones son las siguientes (Jiménez y Hitt, en proceso de publicación):

1. *La conversión de la representación verbal a la representación tabular*: dado un problema verbal, construir una tabla de valores numéricos que represente a dicho problema;
2. Inversamente, *la conversión de la representación tabular a la representación verbal*: dada una tabla de valores numéricos que representan un cierto problema, describir verbalmente dicho problema, en correspondencia con el conjunto de valores numéricos contenidos en la tabla;
3. *La conversión de la representación tabular a la representación gráfica*: dada una tabla de valores numéricos que representa un cierto problema, construir la gráfica correspondiente;
4. Inversamente, *la conversión de la representación gráfica a la representación tabular*: dada una gráfica que representa un cierto problema, hacer lecturas específicas en dicha gráfica y concentrar dichas lecturas en forma de tabla de valores numéricos (sobre todo, desarrollar la habilidad para leer los puntos “especiales” o “claves”, que facilitan la interpretación de la gráfica como problema matemático);
5. *La conversión de la representación verbal a la representación gráfica*: dado un problema verbal, hacer un esbozo gráfico que refleje las características esenciales de dicho problema;
6. Inversamente, *la conversión de la representación gráfica a la representación verbal*: dada una gráfica que representa un cierto problema, describir verbalmente dicho problema, en correspondencia con las características esenciales de dicha gráfica;
7. *La conversión de la representación tabular a la representación analítica*: dada una tabla de valores numéricos que representa un cierto problema, encontrar una expresión algebraica adecuada para obtener con la mayor precisión posible (en el caso ideal, de manera exacta) todos los valores numéricos contenidos en la tabla;
8. Inversamente, *la conversión de la representación analítica a la representación tabular*: dada una expresión algebraica (o relación funcional) que representa un cierto problema, obtener una tabla de valores numéricos que ilustre dicho problema;
9. *La conversión de la representación analítica a la representación gráfica*: dada una expresión algebraica (o relación funcional) que representa un cierto problema, obtener una gráfica que ilustre dicho problema;
10. Inversamente, *la conversión de la representación gráfica a la representación analítica*: dada una gráfica que representa un cierto problema, encontrar una expresión algebraica (o relación funcional) adecuada a dicha gráfica, a partir de las características esenciales de la gráfica y del problema;
11. *La conversión de la representación verbal a la representación analítica*: dado un problema verbal, encontrar una expresión algebraica (o relación funcional) adecuada, que refleje las características esenciales de dicho problema;

12. Inversamente, *la conversión de la representación analítica a la representación verbal*: dada una expresión analítica (o relación funcional) que refleja las características esenciales de un cierto problema, formular verbalmente dicho problema, de acuerdo con la expresión algebraica dada.

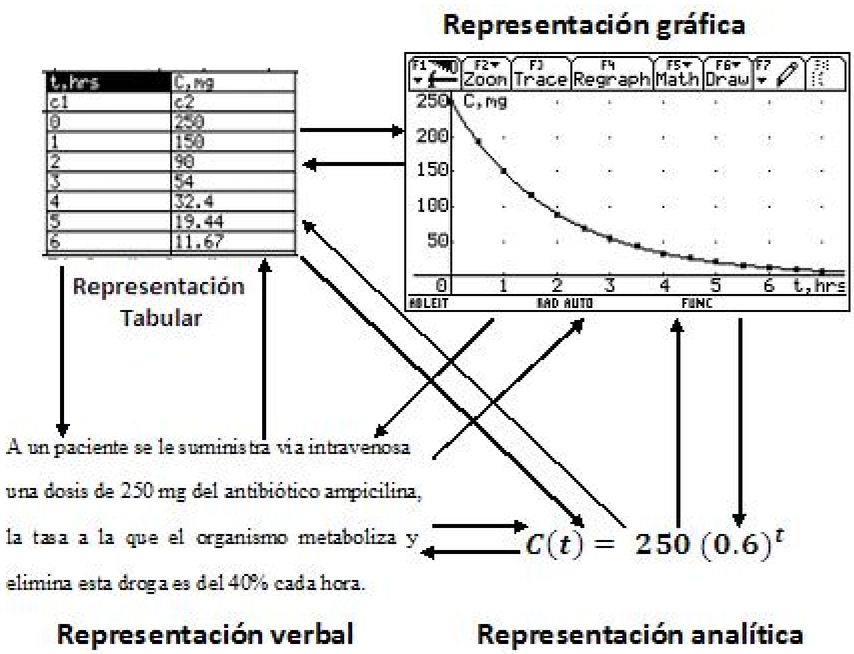


Figura 2. Los posibles registros de representación de un problema sobre variación exponencial y las doce posibles conversiones entre estos cuatro registros de representación.

Según la terminología de Duval, en una *articulación* ó *vinculación* se involucran dos registros de representación e implicaría las conversiones en ambos sentidos. Por ejemplo en la Figura 3 se muestra una articulación entre los registros tabular y gráfico.

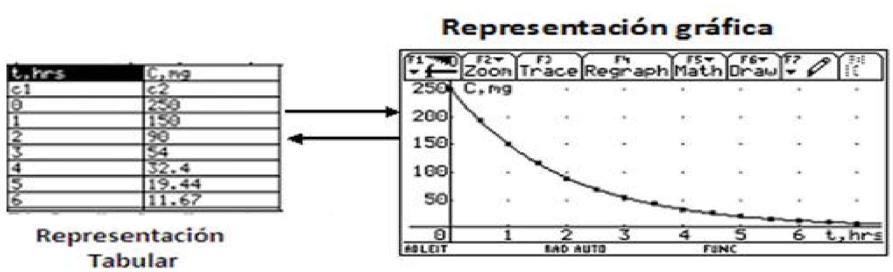


Figura 3. Articulación entre los registros tabular y gráfico.

La *coordinación* involucra más de dos registros de representación e implica las conversiones en ambos sentidos con cada uno de éstos. En la Figura 2 se muestra que son necesarias 12 diferentes *conversiones* para lograr una coordinación entre estos registros de representación. Todas estas conversiones tienen un gran valor epistémico, debido a que ayudan a comprender profundamente la naturaleza y esencia de los problemas abordados y de los conceptos matemáticos involucrados en ellos. Ya que, como mencionamos anteriormente, según Duval, la coordinación de los registros de representación es fundamental para la cognición y, por lo tanto, es una condicionante para todos los aprendizajes básicos.

II.2.2. Implicaciones didácticas

A partir del análisis realizado del enfoque teórico de Duval se deriva la siguiente implicación didáctica: el tipo y la naturaleza de las representaciones matemáticas usadas en la enseñanza influye en el tipo y nivel de comprensión o conceptualización que genera el alumno, y recíprocamente, el tipo y nivel de comprensión que desarrolla el alumno determina el tipo de representación que puede generar, utilizar o privilegiar al abordar un problema (Romero, 2010).

En esta hipótesis teórica se fundamenta la intención expresa de nuestra secuencia didáctica, de usar como ya hemos visto cuatro tipos de registros de representación diferentes: tabular, verbal, gráfico y analítico, precisamente en ese orden, para representar un fenómeno de variación exponencial del tipo $y = ka^x$, tanto para facilitar al alumno la comprensión conceptual como para que adquiera las habilidades para trabajar con los diferentes registros de representación. La tarea planteada al alumno consiste en desarrollar todas las demás representaciones a partir de aquella en que la situación-problema ha sido originalmente formulada. Más adelante presentamos una justificación detallada para este orden en que se presentan al estudiante las situaciones didácticas.

Justificaremos ahora la elección de solamente estos cuatro tipos de situaciones didácticas básicas. Como hemos visto previamente, son doce las posibles conversiones entre los cuatro tipos de registros de representación más comunes de un concepto matemático; parecerían entonces ser necesarias doce actividades didácticas para abordar un concepto matemático en su totalidad. Resulta evidente que un diseño tal resultaría sumamente abultado y fragmentado.

Según Jiménez - Hitt (en proceso de publicación), los diseñadores de secuencias didácticas que han empleado el enfoque teórico de Duval, lo han hecho de una manera simplificada, quizá para evitar la complejidad ya señalada, y con ello, no se han ajustado del todo al enfoque teórico duvaliano. Es probable que esta simplificación tenga como base una lectura apresurada o superficial de una frase del mismo Duval, en la que afirma que la comprensión conceptual reposa sobre la coordinación de ***al menos*** dos registros de representación, pero no dice que se requieran exclusivamente dos. Por otro lado, la ausencia de coordinación de diferentes registros no impide o excluye que se alcance cierta comprensión, aunque teóricamente ésta no podrá ser total ni coherente. Estos autores concluyen que es necesario buscar alternativas de diseño didáctico más económicas (en términos de la cantidad de actividades didácticas resultantes), pero que no sacrifiquen la puesta en juego de la articulación de todos los registros de representación. En este sentido, proponen cuatro casos de situaciones didácticas básicas, que satisfacen estas articulaciones, y que un diseño didáctico fielmente basado en el acercamiento teórico de Duval debería de incorporar:

Caso 1: La situación-problema es planteada mediante una serie de datos numéricos concentrados en una tabla.
Caso 2: La situación-problema es planteada en un formato de descripción verbal.
Caso 3: La situación-problema es planteada a través de una gráfica.
Caso 4: La situación-problema es planteada con un modelo teórico, expresado mediante una fórmula.

Tanto el diseño (por parte del profesor), como el desarrollo (por parte del estudiante) de cada una de estas situaciones-problema, conduce a establecer la articulación debida con las otras tres representaciones; lo más importante es que a partir de la representación inicial se promuevan y establezcan las articulaciones respectivas hacia las otras tres representaciones.

Como ya lo indicamos antes, estos cuatro tipos de situaciones problémicas básicas son presentadas al estudiante en el orden señalado anteriormente, tanto en el caso de las funciones exponenciales como en las logarítmicas. Esta decisión se basa en otra de las implicaciones didácticas derivadas del enfoque teórico de Duval: el registro de representación en el que se inicia el estudio de un objeto matemático influye de manera determinante en el nivel de comprensión conceptual que se puede llegar a tener de él, ya sea facilitando la formación en el estudiante de una conceptualización inicial adecuada o bien obstaculizándola (Romero, 2010).

Nos decidimos iniciar el estudio de estas funciones con Actividades cuya información inicial se da a través de una tabla de valores numéricos debido a las siguientes razones: el registro tabular nos permite realizar análisis numéricos muy significativos para este tipo de funciones, como son la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica, para el caso de las funciones exponenciales; el porcentaje constante de cambio y el factor constante de cambio, ambos fácilmente calculables en la tabla; además, por nuestra experiencia hemos observado que el trabajo en este tipo de registro de representación es el que se les facilita a los estudiantes para explorar las características propias de estos tipos de funciones.

II.2.3. Conversiones que promueve la secuencia didáctica.

A continuación se muestran explícitamente las conversiones que promueve la secuencia didáctica propuesta en este trabajo. Algunas de estas conversiones representan importantes habilidades profesionales, o juegan un papel importante en la aplicación del conocimiento matemático a los problemas del mundo real. Tal es el caso de la habilidad para encontrar una expresión analítica que ajuste de la manera más precisa posible los datos contenidos en una tabulación, así como también la habilidad para encontrar una expresión analítica que ajuste de la manera más precisa posible una gráfica dada. Y la razón de ello es debido a que, en el ejercicio profesional de las matemáticas o en las aplicaciones de las matemáticas a los distintos campos profesionales, es una situación común el que la información inicial sobre los problemas a abordar, estudiar o resolver esté dada en forma de tabulación o en forma de gráfica.

Para las funciones exponenciales:

a) *Conversión del registro de representación tabular al analítico.*

- Para identificar cuándo una función representada por una tabla de valores numéricos corresponde a una función exponencial de la forma $y = ka^x$, se deberá verificar en la tabla que siempre que los valores de la variable independiente x estén igualmente espaciados —o sea, que formen una progresión aritmética— entonces los valores correspondientes de la variable dependiente y deben formar una progresión geométrica. Si éste es el caso, entonces los valores numéricos de los parámetros k y a pueden ser obtenidos a partir de los números contenidos en la tabla, como se describe a continuación.

- El valor del parámetro k se puede obtener del valor correspondiente de y cuando $x = 0$

$$y_0 = ka^0 = k, \text{ es decir, } \quad k = y_0.$$

- Cuando no se dispone de estos valores $(0, \ y_0)$ en la tabla, se puede deducir el valor del parámetro k de la siguiente manera: una vez calculado el valor del parámetro a, se escoge de la tabla cualesquier par de valores de x y y respectivamente, entonces:

$$y_n = ka^{x_n}, \text{ por lo tanto; } \frac{y_n}{a^{x_n}} = k, \text{ o más bien, } \; k = \frac{y_n}{a^{x_n}}.$$

  De hecho, este cálculo puede ser realizado en cada renglón de la tabla, obteniéndose en todos los casos el valor del parámetro k.

- El valor del parámetro a se puede obtener directamente al calcular el cociente $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ (cuando $\Delta x = 1$)

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{ka^{x_{n+1}}}{ka^{x_n}} = \frac{a^{x_n+1}}{a^{x_n}} = a, \text{ es decir, } \quad a = \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

  Este cálculo puede ser realizado en cada renglón de la tabla, excepto el primero, que no tiene antecesor. En todos los renglones se obtiene un mismo valor numérico, correspondiente al parámetro a.

- Para el caso cuando $\Delta x \neq 1$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{ka^{x_{n+1}}}{ka^{x_n}} = \frac{a^{x_n+\Delta x}}{a^{x_n}} = a^{\Delta x}$$

  Y por lo tanto

$$a = \left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

  De nuevo, este cálculo puede ser realizado en cada renglón de la tabla, excepto el primero, por no tener antecesor.

b) *Conversión del registro de representación gráfico al analítico.*

- Primeramente, se deben analizar las características geométricas de la gráfica: tgconcavidad, asíntota horizontal, etc.

- Para obtener la representación analítica el tipo $y = ka^x$, se "lee" en la gráfica el valor de y cuando $x = 0$, que corresponde al valor del parámetro k ya que $y = ka^0 = k$.
- Para obtener el valor de la base a, se "lee" de la gráfica el valor de y cuando $x = 1$, ya que $y(1) = ka \Rightarrow a = \frac{y(1)}{k} = \frac{y(1)}{y(0)}$.

Debido a que cualitativamente el comportamiento de las funciones exponenciales crecientes y decrecientes se puede confundir con el de otro tipo de funciones, en la secuencia se guía al estudiante a realizar un análisis cuantitativo en la gráfica, como se muestra a continuación.

- Para identificar si la gráfica corresponde efectivamente a una función exponencial, debemos "leer" con certeza, directamente de la gráfica, puntos $(x_i,\ y_i)$ cuyas abscisas formen una progresión aritmética $(x_{i+1} = x_i + \Delta x)$, y luego verificar que los correspondientes valores de la función formen una progresión geométrica $\left(\frac{y_{i+1}}{y_i} = C\right)$; si esto sucede, la razón constante C de dicha progresión geométrica es necesaria para calcular el valor de la base a de la expresión analítica correspondiente, de acuerdo con el procedimiento descrito en el apartado a).
- El paso siguiente será leer de la gráfica la ordenada al origen y_0, y así deducir la fórmula de la función exponencial $y = y_0 a^x$ asociada a la gráfica.

c) *Conversión del registro de representación verbal al analítico.*

Al analizar una descripción en la lengua natural de un fenómeno de variación exponencial del tipo $y = ka^x$, debemos poner especial atención a palabras claves que nos pueden relacionar dicho fenómeno con este tipo de variación. Por ejemplo: porcentaje constante de cambio, factor constante de cambio, doble cada vez, triple cada vez, etc.; relación de valores de una progresión aritmética a los valores de una progresión geométrica; tasa porcentual; tasa continua; exponencial, entre otros. Una vez identificados estos vocablos, habrá que relacionarlos con los parámetros correspondientes de la representación analítica. Por ejemplo:

Porcentaje constante en el caso de crecimiento exponencial: $y = y_0(1 + \frac{\%}{100})^x$, y en el caso de un decrecimiento exponencial: $y = y_0(1 - \frac{\%}{100})^x$.

Tasa continua (k); si es un crecimiento, $y = y_0 e^{kx}$. Si es un decaimiento, entonces $y = y_0 e^{-kx}$.

Factor constante de cambio, si Δx=1, corresponde éste al valor de a. En el caso de que $\Delta x \neq 1$, entonces $a = (\text{factor constante de cambio})^{\frac{1}{\Delta x}}$. Este último cálculo se realiza con ayuda de la calculadora.

Para las funciones logarítmicas:

a) *Conversión del registro de representación tabular al analítico.*

- Para identificar cuándo una función representada por una tabla de valores numéricos corresponde a una función logarítmica del tipo $y = \log_b x$, se deberá verificar en la tabla que, siempre que los valores de la variable independiente x formen una progresión geométrica $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} = C\right)$, los valores correspondientes de la variable dependiente y formen una progresión aritmética $(y_{n+1} = y_n + \Delta y)$; si se cumple esta condición entonces se podrá afirmar que

  $y = \log_b x$, lo que también quiere decir que $b^y = x$.

  Esta verificación puede ser realizada en todos los renglones de la tabla, a excepción del primero, que no tiene antecesor. La tarea pendiente consiste en determinar el valor numérico de la base b de la función logarítmica, como se describe enseguida.

- Cuando $\Delta y = 1$, la razón constante C de la progresión geométrica corresponde a la base b del logaritmo:

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{y_n+1}}{b^{y_n}} = b = C$$

  Es decir

  $$b = C$$

- Cuando $\Delta y \neq 1$ pero es constante, si se puede leer directamente de la tabla el valor de x cuando $y = 1$, entonces dicho valor corresponde a la base del logaritmo (b), ya que $\log_b b = 1$:

  $$b = x_i | y(x_i) = 1$$

  Si no se dispone de esta información en la tabla, entonces se procede como sigue:

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{y_n+\Delta y}}{b^{y_n}} = b^{\Delta y}$$

  De donde se sigue que

  $$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{\Delta y}} = b$$

  Es decir

  $$b = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{\Delta y}}$$

Este cálculo puede ser realizado en todos los renglones de la tabla, a excepción del primero, que no tiene antecesor.

- Otra alternativa para deducir la fórmula correcta de la función logarítmica $y = \log_b x$ que se ajuste a los datos de la tabla, especialmente útil cuando los valores de la variable independiente x no forman una progresión geométrica, pero la gráfica de dispersión de los datos contenidos en la tabla sugiere un comportamiento logarítmico, es la siguiente. Se empieza proponiendo una función logarítmica de base arbitraria a, elegida a nuestro arbitrio (puede ser la base 10), del tipo:

$$y = k \log_a x$$

Para calcular k se elige un par de valores (x_n, y_n) de la tabla (un renglón cualquiera). Entonces resulta que

$$y_n = k \log_a x_n$$

De donde se sigue que

$$k = \frac{y_n}{\log_a x_n}$$

Si al realizar esta operación en todos los renglones de la tabla (incluido el primero) se obtiene efectivamente una constante, ello confirmará la suposición de que los datos de la tabla se ajustan a un comportamiento logarítmico. Entonces se puede proceder a calcular el valor de la base b "correcta" para los logaritmos, como sigue. La fórmula buscada es

$$y = \log_b x$$

mientras que la fórmula alterna encontrada es

$$y = k \log_a x$$

Usando la fórmula para el cambio de base de logaritmos

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

y sustituyéndola en la igualdad

$$\log_b x = k \log_a x$$

que expresa la equivalencia entre la función "correcta" (buscada) y la función alterna (propuesta), obtenemos que

$$k = \frac{1}{\log_a b}$$

de donde;

$$\log_a b = \frac{1}{k}$$

y por lo tanto;

$$b = a^{1/k}$$

b) *Conversión del registro de representación gráfico al analítico.*

- Primeramente, se deben analizar las características geométricas de la gráfica: concavidad, asíntota vertical, etc.
- Para identificar si la gráfica corresponde efectivamente a una función logarítmica, debemos "leer" con certeza, directamente de la gráfica, algunos puntos $(x_i,\ y_i)$ de tal manera que sus abscisas formen una progresión geométrica $\left(\frac{x_{i+1}}{x_i} = C\right)$, y luego verificar que los correspondientes valores y_i de la función formen una progresión aritmética $(y_{i+1} = y_i + \Delta y)$; si esto sucede, la razón constante C de la progresión geométrica es necesaria para calcular el valor numérico de la base b del logaritmo, de acuerdo con el procedimiento descrito en el punto a).
- El paso siguiente será leer de la gráfica la abscisa al origen x_0. Si $x_0 = 1$, entonces $y = \log_b x$, porque $0 = \log_b 1$, lo que quiere decir que $b^0 = 1$.
  Si $x_0 = p$, donde p es cualesquier número real positivo y diferente de 1, entonces $y = \log_b cx$ (donde c = constante), porque $0 = \log_b cp$, de donde $cp = 1$, por lo tanto, $c = \frac{1}{p}$.
- Otra manera de obtener la base de la función logarítmica del tipo $y = log_b x$ directamente de la gráfica, es "leer" el valor de x cuando $y = 1$ $ya\ que$:
  $y = log_b\ x$ quiere decir que; $b^y = x \Rightarrow b^1 = x = b$

II.2.4. Tareas de variación comparativa que promueve la secuencia didáctica.

Numerosos estudios (por ejemplo; Herscovics, 1980; Clement, 1985; citado en Duval, 1995) han mostrado las dificultades de lectura y de interpretación de las representaciones gráficas cartesianas. La razón profunda de estas dificultades no debe buscarse en los conceptos matemáticos ligados a las funciones afines, sino al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica (Duval, 1995).

El conjunto trazo/ejes forma una imagen que representa un "objeto" descrito por una ecuación algebraica. Toda modificación de esta imagen que ocasione una modificación en la escritura de la expresión algebraica correspondiente determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica. Por lo que es importante analizar todas las modificaciones conjuntas de la imagen y de la forma de su escritura algebraica. Esto se desprende de un análisis de congruencia entre dos registros de representación de un objeto o de una información. De esta manera se lleva a cabo una asociación "variable visual de la representación gráfica–unidad significativa de la expresión analítica", y es esta asociación la que favorece una interpretación global de las propiedades de las figuras.

Un análisis explícito y sistemático de las variaciones de las unidades visuales significativas no solamente centra la atención sobre la relación entre representación gráfica y analítica, sino que en ocasiones permite encontrar directamente la expresión analítica a partir de propiedades geométricas.

Duval (1995) afirma que la interpretación de las representaciones gráficas cartesianas depende de una identificación precisa de *todos los valores de las variables visuales pertinentes* y del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura simbólica que corresponden.

Las tareas de variación comparativas que promueve la secuencia didáctica, tanto para las funciones exponenciales como para las logarítmicas, consisten en hacer variar una unidad significativa de la representación analítica manteniendo constantes las otras, y analizar lo que sucede en la representación gráfica.

En la Tabla 1 se consignan las unidades significativas en la representación algebraica y su relación con las variables visuales en la representación gráfica, para el caso de la función exponencial simple $y = ka^x$. En la Tabla 2 se hace lo mismo para las representaciones algebraicas alternativas $y = k \cdot (1 + r)^x$ y $y = Ae^{kx}$.

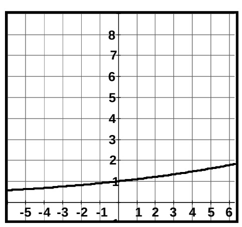
Tabla 1 Variables visuales y unidades significativas en la coordinación de las representaciones gráfica y analítica para la función exponencial $y = ka^x$.

Unidades significativas	Variables Visuales

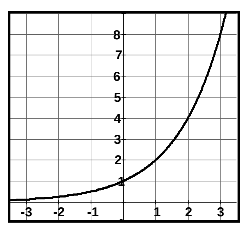
Parte A. Anular el efecto de k (hacer $k = 1$).

A1. $a > 1$

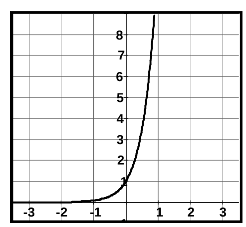
$a \to 0$
$a \to +\infty$



$f(x) = 1.1^x$



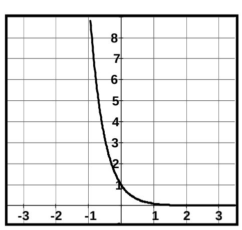
$f(x) = 2^x$



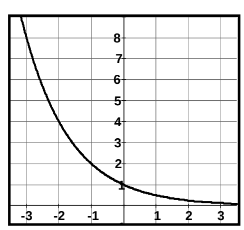
$f(x) = 12^x$

A2. $0 < a < 1$

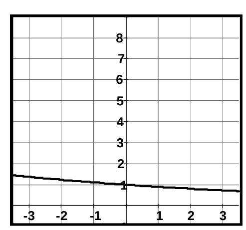
$a \to 0$
$a \to 1$



$f(x) = 0.1^x$



$f(x) = 0.5^x$



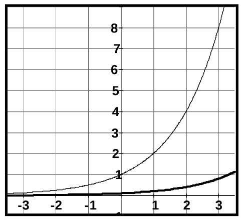
$f(x) = 0.9^x$

Parte B. Anular el efecto de a (fijar el valor de a).

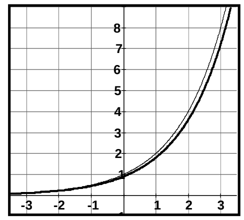
Caso 1. $a > 1$

B1. $k > 0$

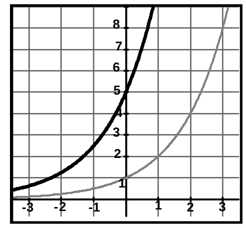
$k \to 0$
$k \to 1$
$k \to +\infty$



$f(x) = 0.1 \cdot 2^x$



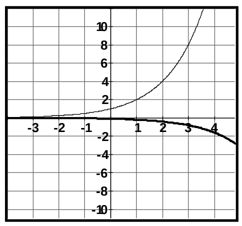
$f(x) = 0.9 \cdot 2^x$



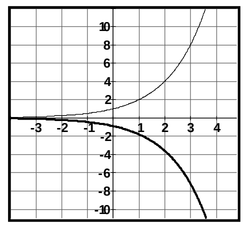
$f(x) = 5 \cdot 2^x$

B2. $k < 0$

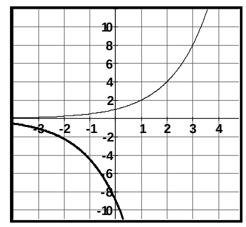
$k \to 0$
$k \to -1$
$k \to -\infty$



$f(x) = -0.1 \cdot 2^x$



$f(x) = -0.9 \cdot 2^x$

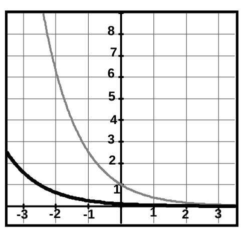


$f(x) = -9 \cdot 2^x$

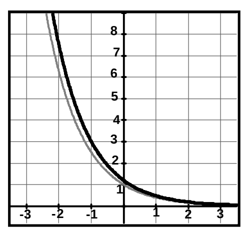
Caso 2. $0 < a < 1$

B3. $k > 0$

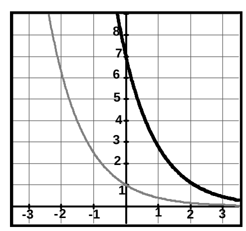
$k \to 0$
$k \to 1$
$k \to +\infty$



$f(x) = 0.1 \cdot 0.4^x$



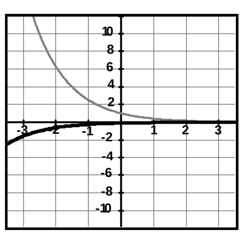
$f(x) = 1.2 \cdot 0.4^x$



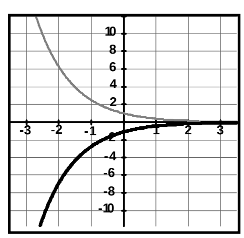
$f(x) = 7 \cdot 0.4^x$

B4. $k < 0$

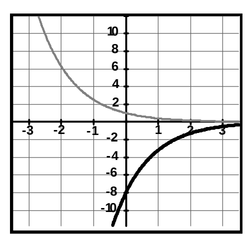
$k \to 0$
$k \to -1$
$k \to -\infty$



$f(x) = -0.1 \cdot 0.4^x$



$f(x) = -1.1 \cdot 0.4^x$



$f(x) = -8 \cdot 0.4^x$

La variación de las unidades significativas en el registro algebraico que se consignan en la Tabla 1, y el análisis de su efecto en las respectivas variables visuales de la representación gráfica, se promueven en las Actividades 1 a 9 del Bloque IV, para el caso de las funciones exponenciales del tipo $y = ka^x$.

Tabla 2 Unidades significativas de la representación analítica de la función exponencial

$y = k \cdot (1 + r)^x$	$y = A \cdot e^{kx}$
Parte A. Anular el efecto de k (hacer $k = 1$)	Parte A. Anular el efecto de A (hacer $A = 1$)
A1. $r > 0$	A1. $k > 0$
$r \to 0$	$k \to 0$
$r \to +\infty$	$k \to 1$
	$k \to +\infty$
A2. $-1 < r < 0$	A2. $k < 0$
$r \to 0$	$k \to 0$
$r \to -1$	$k \to -1$
	$k \to -\infty$
Parte B. Anular el efecto de r (fijar el valor de r)	Parte B. Anular el efecto de k (fijar el valor de k)
Caso 1. $r > 0$	Caso 1. $k > 0$
B1. $k > 0$	B1. $A > 0$
$k \to 0$	$A \to 0$
$k \to 1$	$A \to 1$
$k \to +\infty$	$A \to +\infty$
B2. $k < 0$	B2. $A < 0$
$k \to 0$	$A \to 0$
$k \to -1$	$A \to -1$
$k \to -\infty$	$A \to -\infty$
Caso 2. $-1 < r < 0$	Caso 2. $k < 0$
B3. $k > 0$	B3. $A > 0$
$k \to 0$	$A \to 0$
$k \to 1$	$A \to 1$
$k \to +\infty$	$A \to +\infty$
B4. $k < 0$	B4. $A < 0$
$k \to 0$	$A \to 0$
$k \to -1$	$A \to -1$
$k \to -\infty$	$A \to -\infty$

Para el caso de las funciones logarítmicas del tipo $f(x) = a\, log_b(cx) + d$, se identifican las unidades significativas correspondientes a los parámetros a, b, c y d. Las tareas de variación sistemática comparativas se promueven en las Actividades 10 a 13 del Bloque IV, éstas se realizan apoyadas por un programa en la calculadora `Voyage 200`, denominado `graflog( )`, seleccionando una de las opciones del menú. Por ejemplo, al seleccionar $|a| > 1$, se toman elementos de la familia $f(x) = a \log_3 x$, haciendo variar el parámetro a desde -6 hasta 6 con incrementos de 2 unidades. En la pantalla aparece una animación en la que la gráfica se dilata en dirección vertical un número determinado de veces, al tiempo que se presenta su expresión analítica correspondiente y la gráfica de la función básica de referencia, en este caso $f(x) = \log_3 x$. En la Figura 4 se muestra, de manera estática por supuesto, la secuencia de imágenes utilizadas en la animación, éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

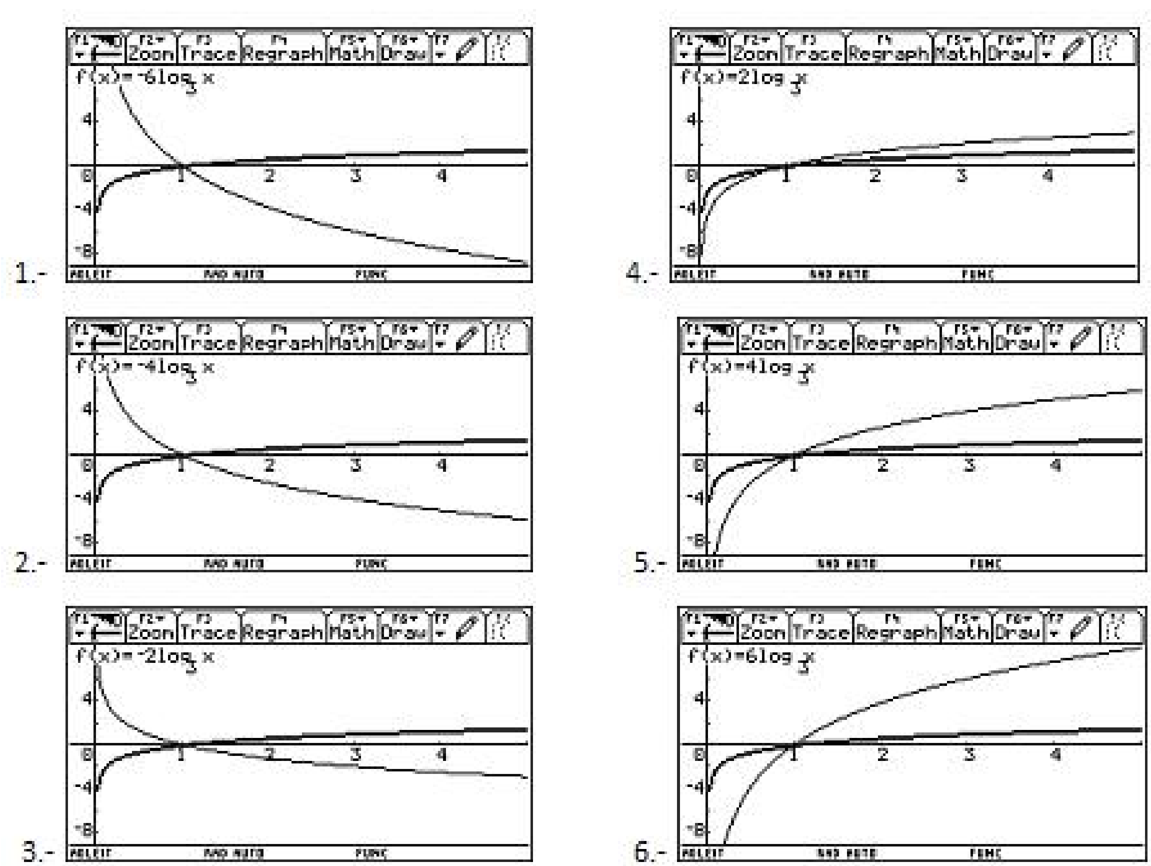


Figura 4. Dilataciones en sentido vertical de la función logarítmica.

II.2.5. La elección de CAS como recurso didáctico.

Creemos que la enseñanza de las matemáticas debe aprovechar las ventajas del uso de la tecnología informática para apoyar a los estudiantes a avanzar en la comprensión de las ideas matemáticas, a transformarse en "pensadores poderosos y reflexivos", en buenos comunicadores y resolutores de problemas (Waits & Demana, 1997).

El estudio exhaustivo de los tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación de una noción matemática es una tarea demasiado complicada si se le aborda sin contar con el apoyo en algún recurso tecnológico. Los dispositivos portátiles CAS (calculadoras simbólicas) y los software CAS para computadoras, ofrecen amplias oportunidades para utilizar e integrar múltiples representaciones dinámicas del concepto de función a través de software de graficación, tabulación, de regresión, de geometría dinámica, etc. Gracias a esto es posible automatizar, facilitar y simplificar algunas de las posibles conversiones entre los diferentes registros de representación para el diseño de secuencias didácticas distintas a las tradicionales y de este modo, crear un medio en el que el estudiante puede explorar, conjeturar, analizar, verificar ideas, así como desarrollar habilidades y estrategias que le serán de gran ayuda a la hora de resolver problemas.

El uso didáctico más adecuado que se le puede dar a un dispositivo CAS consiste justamente en utilizarlo como herramienta para explorar la conexión dinámica entre las diferentes representaciones de un concepto matemático. El uso sistemático de los dispositivos CAS en los cursos de matemáticas debe tener esta intención explícita, debe plantearse el lograr dicha conexión en las mentes de los estudiantes como su principal objetivo (Jiménez & Hitt, próxima publicación). Además, en la Universidad de Sonora se dispone de tres laboratorios de calculadoras, equipados con calculadoras `Voyage 200`, dos de éstos en la División de Ingeniería y uno en el Departamento de Matemáticas.

Las Figuras 5a y 5b muestran un análisis de unidades significativas en los cuatro registros de representación del fenómeno de variación exponencial que hemos utilizado anteriormente, con la intención de mostrar el hecho de que los dispositivos CAS permiten realizar con facilidad dicho análisis.

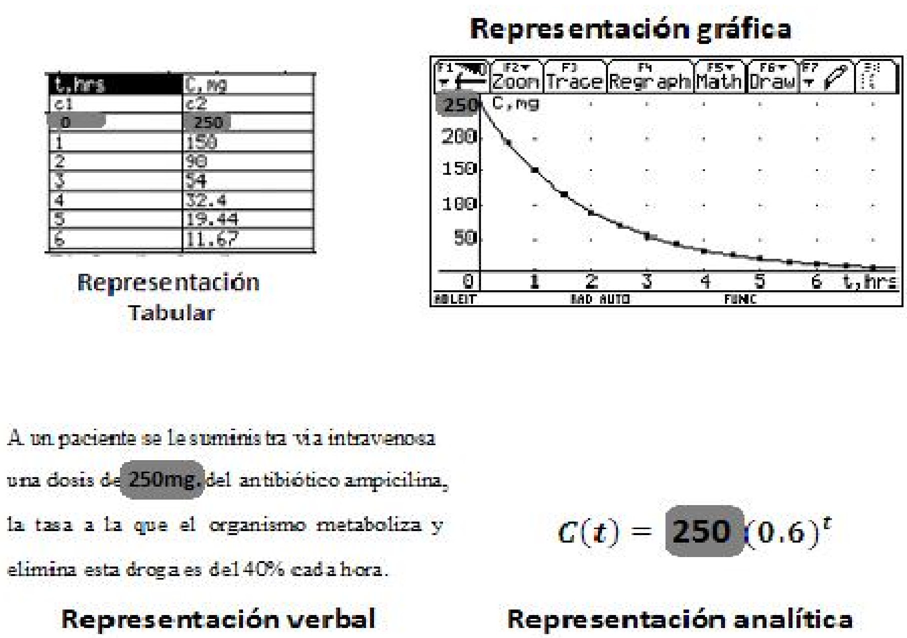


Figura 5a. El análisis en los cuatro registros de representación de una de las unidades significativas en la descripción del fenómeno estudiado: la concentración inicial.

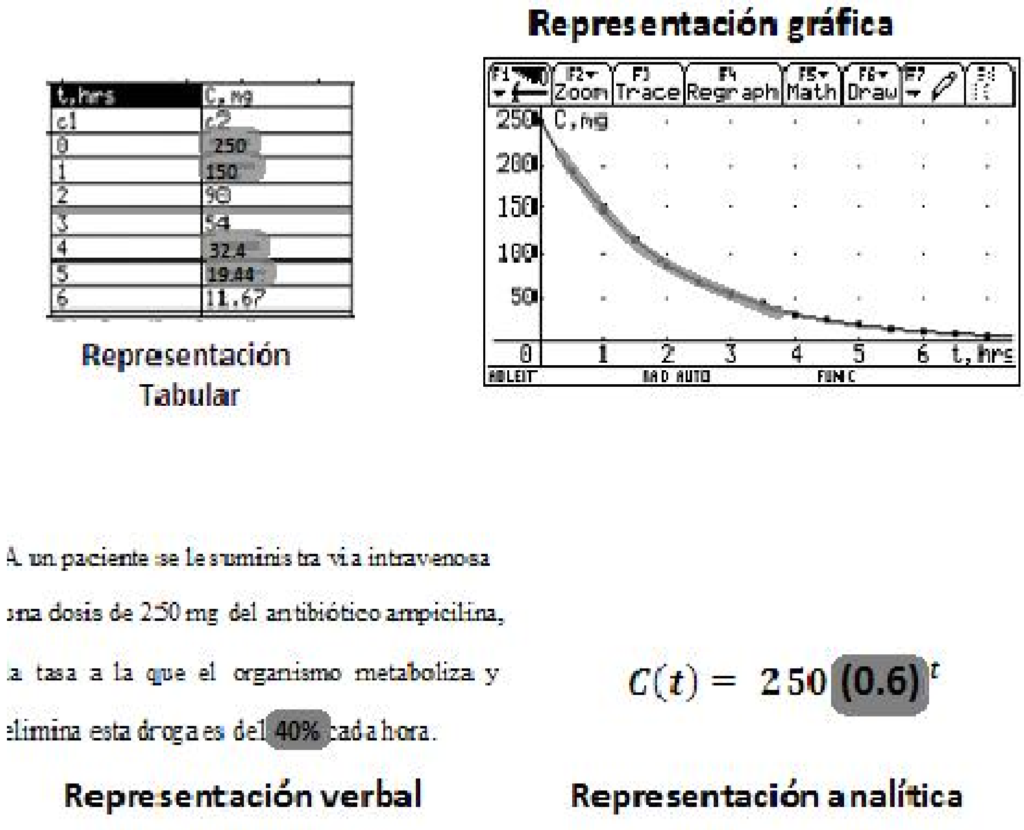
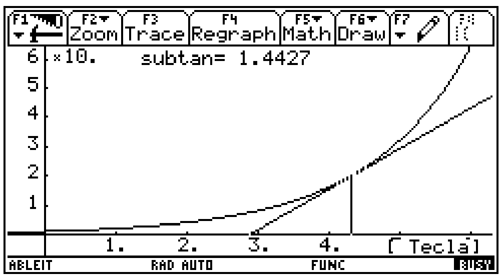


Figura 5b. El análisis en los cuatro registros de representación de otra de las unidades significativas: el factor constante de cambio.

Debido a la facilidad de los dispositivos CAS para generar fácilmente gráficas de funciones, así como el realizar análisis geométricos de éstas, en nuestra propuesta didáctica consideramos al registro de representación gráfico como aquél que permite crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número e. Tomando como eje central la característica geométrica de las gráficas (tanto de las funciones exponenciales como de las logarítmicas) de poseer una subtangente constante, se promueve una exploración, primeramente con las funciones exponenciales, propiciando en los estudiantes generar la hipótesis de que existe una base especial que hace que las gráficas de la función y de su derivada coincidan, diseñándose un programa en la calculadora `Voyage 200` con este fin, y en la Actividad correspondiente se formularon preguntas que impulsan a los estudiantes a razonar en esta dirección. También se analiza el caso de las funciones logarítmicas, en las que la gráfica de la función derivada "se asemeja" a la de la función $y = \frac{1}{x}$, y la coincidencia se logra cuando se toma como base del logaritmo al número e, diseñándose también un programa en la calculadora `Voyage 200` con este fin y su Actividad correspondiente. Las siguientes figuras muestran algunas pantallas de estos programas.

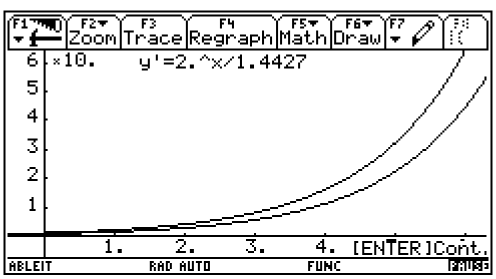
Para las funciones exponenciales:

Una de las opciones del menú de usuario muestra la gráfica de la función exponencial introducida y una animación en la cual se trazan líneas tangentes a la curva y las subtangentes correspondientes, apareciendo en pantalla el valor numérico de la subtangente.

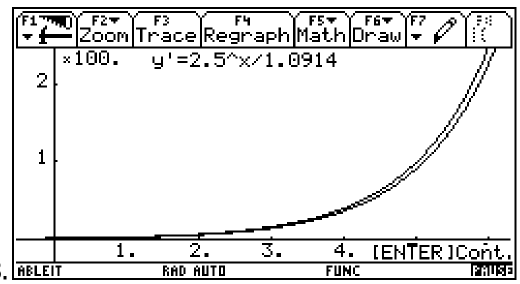
1. 

Subtangente de la función; $y = 2^x$

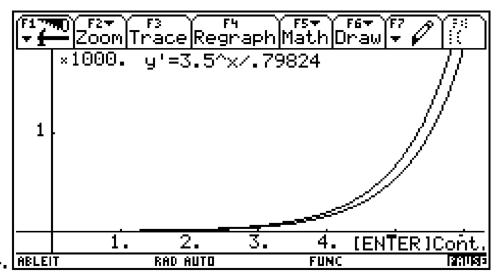
Otra opción del menú de usuarios traza la gráfica de la función y de su derivada.

2. 

$y = 2^x$ y su derivada.

3. 

$y = 2.5^x$y su derivada

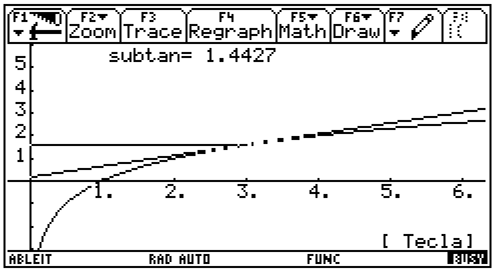
4. 

$y = 3.5^x$y su derivada

Figura 6. Pantallas del programa `deriexpo`.

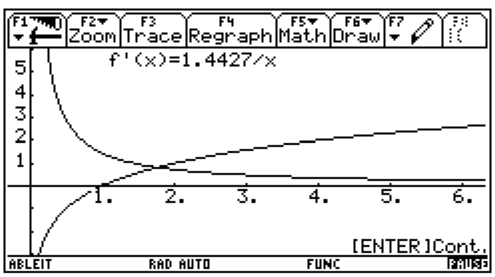
Para las funciones logarítmicas:

Una de las opciones del menú de usuario, muestra la gráfica de la función logarítmica introducida y una animación, en la cual se trazan líneas tangentes a la curva y las subtangentes correspondientes, apareciendo en pantalla el valor numérico de la subtangente.

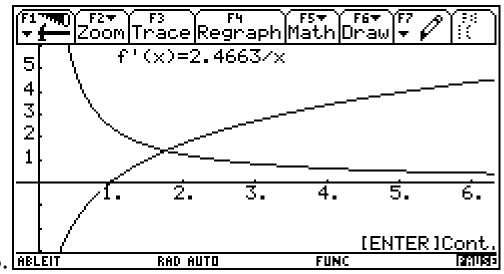
1.


Subtangente de la función; $f(x) = \log_2 x$

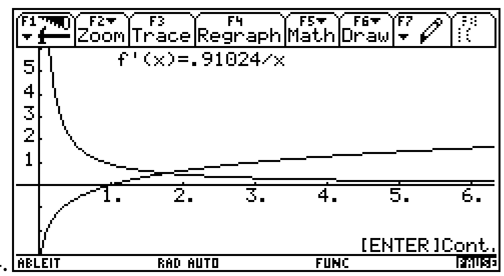
Otra opción del menú de usuarios traza la gráfica de la función y de su derivada.

2.


$f(x) = \log_2 x$ y su derivada.

3.


$f(x) = \log_{1.5} x$ y su derivada.

4.


$f(x) = \log_3 x$ y su derivada.

Figura 7. Pantallas del programa `derivlog`.

Capítulo III

Elementos Metodológicos y Descripción de la Secuencia Didáctica

III.1. Objetivos Generales de la Secuencia Didáctica.

- Que el estudiante reconozca la variación exponencial y logarítmica a partir del registro de representación en que se le presente: verbal, tabular, gráfico o analítico.
- Capacitar al estudiante para realizar la conversión de un registro de representación a otro, dándole el tratamiento adecuado, apoyado en todo momento de la calculadora simbólica.
- Capacitar al estudiante para ver e interpretar la variación exponencial y logarítmica como modelos de problemas del mundo real y que sea capaz de desarrollar modelos matemáticos en este contexto.
- Promover la apropiación de técnicas matemáticas y computacionales para la construcción del modelo matemático correspondiente, a partir de datos tabulares o bien lecturas apropiadas en la gráfica.
- Promover la apropiación del lenguaje técnico de las matemáticas para el estudio de la variación exponencial y logarítmica, y relacionar dicho lenguaje con tablas, gráficas y fórmulas.
- Aplicar diversos criterios para verificar si la solución encontrada es correcta.
- Promover en el estudiante el desarrollo de habilidades para expresarse y explicar tanto en forma oral como por escrito las matemáticas que ha aprendido.

III.2. Características de la Secuencia Didáctica.

La principal característica de nuestra secuencia didáctica consiste en promover las conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica, así como el realizar los tratamientos adecuados en cada registro de representación. La conversión entre los diferentes registros de representación: verbal, tabular, gráfico y analítico, está considerada como una de las dificultades persistentes en los estudiantes relacionada con el aprendizaje del concepto de función (Artigue, 2000), y según Duval (1998), cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, en suma, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo. Como ya se ha dicho, esta conversión entre diferentes registros de representación no es espontánea, y debe por tanto ser objeto explícito de enseñanza.

El utilizar la calculadora Voyage 200 como herramienta didáctica nos permite ampliar la posibilidad de un tratamiento más integral del tema, sobre todo por sus capacidades para manejar múltiples representaciones dinámicas, y por permitir el diseño de programas interactivos para el estudiante por medio de los cuales realiza diversas exploraciones en distintos registros de representación.

Del análisis histórico de los conceptos de logaritmo y función exponencial hemos rescatado dos significados que están fuera del discurso escolar actual, y que fueron de gran relevancia en el desarrollo histórico de tales conceptos. Uno de estos significados constituyó el eje central en el desarrollo de los logaritmos y consiste en la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética, el cual nosotros lo adoptamos también como eje central de nuestra propuesta didáctica. El otro significado que rescatamos del análisis histórico es la característica geométrica de las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas que consiste en poseer una subtangente constante, la cual fue clave para la incorporación en el registro geométrico de este tipo de curvas, el cual era considerado en el siglo XVII como la principal representación en matemáticas. En nuestra secuencia utilizamos esta característica geométrica de las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas como eje central para la exploración de la razón de cambio de ambos tipos de funciones, ya que esta es la causa fundamental de su importancia en las matemáticas y en las aplicaciones en otras ciencias, y particularmente cuando la base de estas funciones es el número e.

La incorporación de algunos elementos provenientes de la historia de las matemáticas en nuestra propuesta didáctica nos ayuda a explicar el papel de las matemáticas en la sociedad, al mostrar el desarrollo de las matemáticas como una actividad humana, y además puede contribuir a que el aprendizaje de las matemáticas sea una experiencia significativa. Al respecto, la postura del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) en su publicación ***El Plan de Estudios y Normas de Evaluación para las Matemáticas Escolares*** (NCTM, 1989), declaró que “los estudiantes deben tener numerosas y variadas experiencias relacionadas con la evolución cultural, histórica y científica de las matemáticas” (p. 6). Recomendaciones similares sobre el papel de la historia de las matemáticas se encuentran en los *Principios y Normas para las Matemáticas Escolares* del NCTM (2000) con el objetivo de desarrollar en los estudiantes una apreciación de las matemáticas como “uno de los mayores logros culturales e intelectuales de la humanidad” (p. 4).

Cuando los profesores usan los problemas históricos con los estudiantes para ejemplificar el esfuerzo humano, y particularmente el realizado por los matemáticos, “los estudiantes son pedagógicamente iluminados cuando se dan cuenta que tales problemas no se crean de la nada…, y que los matemáticos también cometen errores” (Liu, 2003, p. 419 en Clark, 2006). El reducir las contribuciones de los matemáticos (como por ejemplo, la invención de los logaritmos por John Napier) a una mera definición y algunas propiedades, sólo perpetúa la idea en los estudiantes que el estudio de las matemáticas se obtiene de la nada y no es el resultado de los logros culturales e intelectuales (Clark, 2006).

III.3. Organización de la Secuencia Didáctica con base en la teoría de las representaciones de Duval.

Basados en lo descrito en el apartado anterior, hemos organizado la secuencia didáctica en cinco bloques de Actividades.

Bloque I: La variación exponencial.
Propusimos este bloque de actividades didácticas como un primer acercamiento al estudio de la variación exponencial de base arbitraria ($f(x) = ka^x$ $donde$: $a > 0$ y $k > 0$), mediante la vinculación dinámica de sus distintas representaciones y el énfasis en las correspondientes conversiones en los diferentes registros de representación, utilizando como herramienta didáctica la calculadora Voyage 200.

En estos diseños se privilegió que el análisis de la variación surgiera de manera natural de una situación problemática del mundo real, con el propósito de estimular el interés del estudiante y de que fuera capaz de desarrollar modelos matemáticos en este contexto.

Dicha secuencia consta de nueve Actividades didácticas; las primeras cuatro tratan sobre fenómenos de variación que crecen exponencialmente, debido a que en concordancia con nuestro enfoque teórico se consideraron los siguientes cuatro casos.

1) *Problemas tabulares*, cuando la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante una tabla de valores numéricos. Nos decidimos iniciar con una Actividad de este tipo debido a que el registro tabular nos permite realizar análisis numéricos muy significativos para este tipo de funciones, como son la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, el porcentaje constante de cambio y el factor constante de cambio, los cuales son fácilmente calculables en la tabla. Además, por nuestra experiencia hemos observado que el trabajo en este registro de representación es el que se les facilita a los estudiantes para explorar las características propias de este tipo de variación.

2) *Problemas verbales*, cuando la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante una descripción verbal. Continuamos con esta Actividad con la intención que el estudiante identificara vocablos claves en la descripción verbal, relacionados con las propiedades esenciales que exploró en la Actividad anterior.

3) *Problemas gráficos*. Continuamos con una Actividad donde la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante una gráfica, con la intención de reforzar las exploraciones realizadas en las Actividades anteriores, para que se realizaran lecturas apropiadas en la gráfica y se identificaran las características que permiten deducir una fórmula para modelar dicho fenómeno de variación.

4) *Problemas analíticos*, cuando la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante un modelo teórico, expresado mediante la representación analítica. El objetivo de esta cuarta Actividad consistió en que el estudiante realizara algunas exploraciones que le permitieran tener un primer acercamiento intuitivo al número *e*.

Las cuatro Actividades siguientes representaron fenómenos de variación que decaen exponencialmente. Estas Actividades se presentaron en el mismo orden descrito anteriormente, de acuerdo al tipo de representación en que se plantea la información inicial del fenómeno, la justificación de dicho orden es similar.

En este bloque se presentó una Actividad diseñada para trabajar con un programa interactivo de la calculadora `Voyage 200` denominado `subtan()`, así como dos Notas Históricas. El resto de las Actividades fueron diseñadas para trabajar con la calculadora `Voyage 200` en las diferentes Aplicaciones de las que ésta dispone, como por ejemplo: el editor de funciones, tablas, gráficas, Editor de Datos y Matrices, etc.

Bloque II: Los logaritmos y sus propiedades.
El objetivo de este bloque consistió en que el estudiante comprendiera el concepto de logaritmo y sus propiedades mediante la exploración de progresiones aritméticas y geométricas, como una forma de emular el desarrollo histórico de éstos, así como también los obstáculos que se presentaron, como por ejemplo; la falta del concepto de base. Este acercamiento puede ayudar a los estudiantes a superar las dificultades habituales y permite que puedan comparar el valor de las técnicas modernas (Fauvel, 1991 en Clark, 2006).

Este bloque constó de diez Actividades didácticas, en todas éstas los estudiantes realizaron sus exploraciones dentro del registro numérico, comenzando con ideas intuitivas de “transformar” para facilitar operaciones, para que surgiera la definición y las propiedades de los logaritmos como herramienta facilitadora de ciertos cálculos. Se pretendió también traducir al registro algebraico las relaciones observadas. Al final de este bloque se presentó una Nota Histórica. A continuación se muestran las propiedades de los logaritmos que se pretenden promover en este Bloque de Actividades.

$$log_b(ac) = log_b(a) + log_b(c)$$

$$log_b({}^{a}/_{c}) = log_b(a) - log_b(c)$$

$$log_b(a^c) = c \cdot log_b(a)$$

$$log_b\left(a^{1/c}\right) = \frac{1}{c} \cdot log_b(a)$$

Bloque III: La variación logarítmica.
Si bien es cierto que los logaritmos han perdido su papel como pieza fundamental en los cómputos matemáticos, la función logarítmica permanece en el centro de casi todas las ramas de las matemáticas, puras o aplicadas. Aparece en un gran número de aplicaciones, desde la física y la química hasta la biología, la psicología, el arte y la música (Maor, 2006).

Este bloque constó de seis Actividades didácticas por medio de las cuales se propuso un primer acercamiento a la variación logarítmica, promoviendo exploraciones en los distintos registros de representación, que giraban en torno a las características esenciales de las funciones logarítmicas, mediante el uso explícito de la relación entre las progresiones geométrica y aritmética, a través de problemas prácticos y utilizando como herramienta la calculadora Voyage 200. El orden en el que se presentaron las Actividades fue de acuerdo al tipo de representación en el que se planteó la información inicial del fenómeno de variación, éste es similar al de las Actividades del Bloque I y las razones que justifican este orden también son similares.

Bloque IV: Análisis gráfico de las funciones exponenciales y logarítmicas.
En este bloque se proponen tareas de variación comparativa, ya que según Duval este tipo de tareas ayuda para promover un aprendizaje que considere la estrecha relación entre la noesis y la semiosis, a fin de que no se confunda al objeto matemático con sus representaciones. Por lo que es importante analizar todas las modificaciones conjuntas de la gráfica y de la forma de su representación analítica. De esta manera se llevó a cabo una asociación "variable visual de la representación gráfica"–"unidad significativa de la expresión analítica", esta asociación no solamente centra la atención sobre la relación entre representación gráfica y analítica, sino que en ocasiones permite encontrar directamente la expresión analítica a partir de propiedades geométricas.

La variación de las unidades significativas en el registro analítico y el análisis de su efecto en las respectivas variables visuales de la representación gráfica, se promovió mediante las Actividades de la 1 a la 9, para el caso de las funciones exponenciales del tipo $y = ba^x + d$, mientras que para el caso de las funciones logarítmicas del tipo $y = a\log_b cx + d$, esto mismo se hizo mediante las Actividades de la 10 a la 13, con apoyo del programa interactivo `graflog()`. En la Actividad 14 el estudiante trabajó con el programa interactivo `expolog()`, el cual tuvo el propósito de apoyar al estudiante en el análisis gráfico de las funciones exponenciales y logarítmicas como funciones mutuamente inversas.

Bloque V: Funciones exponenciales y logarítmicas con base e.
En este grupo de actividades didácticas, el estudiante exploró las características de las funciones exponenciales y logarítmicas de base e y el por qué de su importancia en las matemáticas y en las ciencias aplicadas, a partir del estudio de la razón de cambio de la función exponencial, y particularmente de la función $y = e^x$, ya que esta es la fuente de todas las propiedades de la función exponencial y la razón básica de su importancia en las aplicaciones. En este bloque se partió del registro de representación gráfico como aquél que permite crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número e, convencidos de que la visualización resulta ser un componente esencial del aprendizaje, debido a que ésta "no solo da a los datos disponibles una estructura significativa, sino que también constituye un factor importante como guía del desarrollo analítico de una solución" (Fischbein, 1987, p.101; citado en Arcavi & Hadas, 2000). Tomando como eje central la característica geométrica de las gráficas (tanto de las funciones exponenciales como de las logarítmicas) de poseer una subtangente constante, se promovió la exploración dinámica, primeramente con las funciones exponenciales, propiciando generar en los estudiantes la hipótesis de que existe una base especial que hace que las gráficas de la función y de su derivada coincidan, diseñándose un programa interactivo en la calculadora Voyage 200 con este fin, que denominamos `deriexpo()`, y en la Actividad 1 se formularon preguntas que impulsaron a los estudiantes a razonar en esta dirección. También se analizó el caso de las funciones logarítmicas, en las que la gráfica de la función derivada "se asemeja" a la de la

función $y = \frac{1}{x}$, y la coincidencia con ella se logra cuando se toma como base del logaritmo al número e, diseñándose con este fin un programa interactivo en la calculadora que denominamos `derivlog()` y la Actividad 4 correspondiente. En la Actividad 5 el estudiante exploró (apoyado en un software de geometría dinámica) el problema de la cuadratura de la hipérbola equilátera, debido a que pensamos que es pedagógicamente estimulante para los estudiantes trabajar en los mismos problemas en los que trabajaron matemáticos famosos y en los cuales tuvieron muchas dificultades para resolverlos. En este bloque se presentaron también dos Notas Históricas.

III.4. Descripción de las Actividades que conforman la Secuencia Didáctica.

En esta sección presentamos la descripción y el análisis de las Actividades que conforman la secuencia didáctica, la cual fue diseñada con el propósito de introducir de manera significativa las funciones exponenciales y logarítmicas de base ***e***. Esta secuencia pretende promover la articulación coherente entre los diferentes registros de representación semiótica: verbal, tabular, gráfico y analítico, utilizando la calculadora `Voyage 200` como herramienta didáctica. Todas estas Actividades se han incluido en el Anexo 2.

Consideramos importante aclarar la definición de base que se promueve en la secuencia didáctica tanto para las funciones exponenciales como para las logarítmicas: ***base*** es la razón constante de la progresión geométrica cuando la diferencia constante de la progresión aritmética es igual a 1 (para $y = kb^x$; $b = \frac{y_{n+1}}{y_n}$ si y solo si $x_{n+1} - x_n = 1$, para $y = \log_b x$; $b = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ si y solo si $y_{n+1} - y_n = 1$).

III.4.1. Bloque I: La variación exponencial.

Actividad 1 (Problema tabular) *Crecimiento de una población de bacterias*. Se plantea el crecimiento de una población de bacterias a través de una representación tabular.
Objetivos:

- Identificar cuándo una tabla de datos corresponde a un crecimiento exponencial; al analizar que cuando los valores numéricos de la variable independiente forman una sucesión aritmética, los correspondientes valores numéricos de la variable dependiente forman una sucesión geométrica creciente. Es importante también que los estudiantes observen esta característica para facilitar más delante la comprensión de la relación entre las funciones exponenciales y logarítmicas.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro tabular para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente.
- Analizar algunas características particulares del crecimiento exponencial como el factor constante de cambio, porcentaje de crecimiento y tiempo de duplicación.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal		Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Actividad 2 (Problema verbal) *La leyenda del ajedrez.* En esta Actividad la información inicial se presenta a través de una descripción verbal de la situación a analizar.

Objetivos:

- Identificar cuándo una descripción verbal de un problema planteado corresponde a un crecimiento exponencial.
- Analizar el comportamiento de la función exponencial creciente del tipo $y = ka^x$, que aunque empieza creciendo lentamente, al hacerlo en forma acelerada, termina creciendo extremadamente rápido.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	X
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro verbal → Registro numérico

Actividad 3 (Problema gráfico) *Crecimiento Poblacional.* La información inicial sobre este fenómeno de variación se da a través de una gráfica.

Objetivos:

- Identificar cuándo una representación gráfica corresponde a un crecimiento exponencial.
- Analizar características particulares del crecimiento exponencial; tiempo de duplicación, factor constante de cambio, porcentaje de crecimiento.
- Realizar lecturas apropiadas en la gráfica.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro gráfico → Registro numérico

Actividad 4 (Problema analítico) *Asuntos financieros.* En esta Actividad el fenómeno de variación se presenta por medio de la representación analítica; se trata de la fórmula del interés compuesto.

Objetivos:

- Identificar cuándo una fórmula corresponde a un crecimiento exponencial.
- Analizar las características particulares del crecimiento exponencial, como la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica, y el tiempo de duplicación.
- Reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula.
- Estimular la capacidad para examinar una representación analítica, con el fin de hacer una estimación general del patrón que surgiría en una representación tabular o gráfica.
- Identificar la necesidad de una herramienta matemática para calcular el tiempo de la inversión para un saldo dado (resolución de una ecuación exponencial).
- Experimentar un acercamiento intuitivo a la base ***e***, simulando lo que ocurre en la génesis de algunos objetos matemáticos, los cuales surgen de forma natural y comienzan a ser manipulados sin que se tenga conciencia plena de ellos.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	X

Conversión privilegiada: Registro analítico → Registro numérico

Después de esta Actividad se presenta una Nota Histórica sobre el número ***e***.

Actividad 5 (Problema tabular) *Restablecimiento del ritmo cardiaco.* La información inicial sobre este fenómeno de variación se presenta a través de una tabla de valores numéricos.

Objetivos:

- Identificar cuándo una tabla de datos numéricos corresponde a un decaimiento exponencial: al verificar el hecho de que cuando los valores numéricos de la variable independiente forman una sucesión aritmética, los valores numéricos de la variable dependiente forman una sucesión geométrica decreciente.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro tabular para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente.

- Analizar las características particulares del decaimiento exponencial, como factor constante de cambio y porcentaje de decaimiento.
- Realizar un análisis descriptivo del comportamiento de las familias de funciones exponenciales decrecientes.
- Reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	X
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Actividad 6 (Problema verbal) *Eliminación de contaminantes del combustible de aviones a reacción.* Esta Actividad inicia con una descripción verbal del fenómeno de variación.

Objetivos:

- Identificar cuándo una descripción verbal de un problema planteado corresponde a un decaimiento exponencial (identificar en la descripción verbal términos clave referidos al decrecimiento exponencial).
- Analizar las características particulares del decaimiento exponencial, como la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica, el factor de cambio constante y el porcentaje de decaimiento.
- Realizar un análisis descriptivo del comportamiento de las familias de funciones exponenciales decrecientes del tipo $y = ka^x$.
- Reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	X
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	X

Conversión privilegiada: Registro verbal → Registro analítico

Actividad 7 (Problema gráfico) *Eliminación de una droga por el organismo.* Este fenómeno de variación se presenta a través de una gráfica.

Objetivos:

- Identificar cuándo una representación gráfica corresponde a un decaimiento exponencial del tipo $y = ka^x$.
- Analizar algunas características particulares del decaimiento exponencial, tales como la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica y la vida media.
- Realizar lecturas apropiadas en la gráfica.
- Explorar el comportamiento de las subtangentes en diferentes tipos de funciones, y en especial en las funciones exponenciales.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro gráfico → Registro analítico

En esta Actividad se presenta una Nota Histórica sobre la importancia que tuvo la característica geométrica de este tipo de curvas de poseer una subtangente constante.

La exploración del comportamiento de las subtangentes se realiza con ayuda del programa `subtan()`, como se muestra a continuación. El propósito de este programa es que el estudiante explore el comportamiento de las subtangentes para diferentes tipos de funciones, con la intención de que observe el comportamiento singular de las subtangentes en las funciones exponenciales. Empezamos con el caso de una función cuadrática simple, $y = x^2$, definida en la ventana de graficación que se muestra en la siguiente pantalla del programa:

Figura 8.

En estas condiciones, al presionar ENTER aparecerá la pantalla gráfica y se trazará la gráfica de la función introducida.

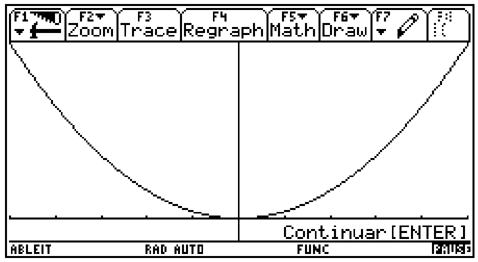


Figura 9.

Para continuar, se debe presionar ENTER, apareciendo de nuevo el menú de usuario, pero en la pantalla aparecerá también la representación analítica de la función graficada y el intervalo de graficación, además de que se activará una barra de herramientas.

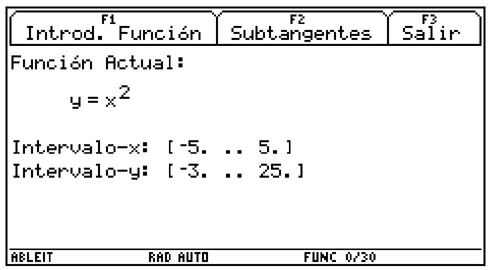
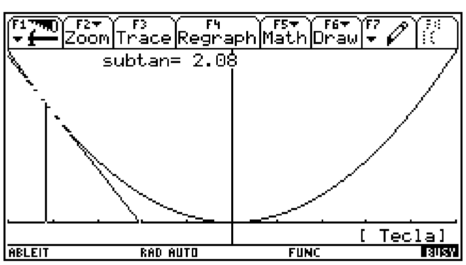
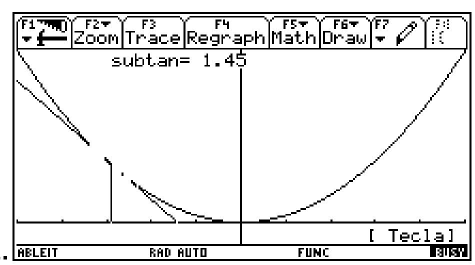
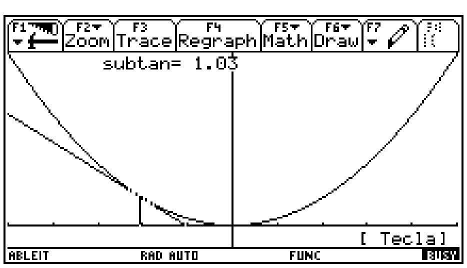


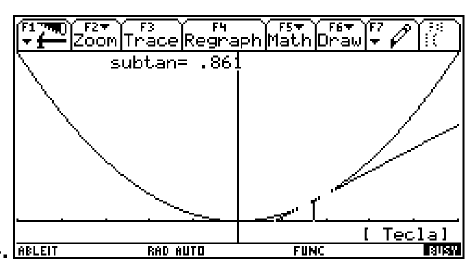
Figura 10.

Al seleccionar la opción Subtangentes con la tecla F2 de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente y se apreciará en pantalla una animación en donde se trazarán líneas tangentes a la curva y las correspondientes subtangentes, apareciendo también en pantalla el valor numérico de éstas. El estudiante puede detener la animación presionando la tecla de la letra S y hacer que ésta continúe presionando cualquier otra tecla. Enseguida se muestran (en forma estática, por supuesto) algunas pantallas de dicha animación.

1. 

2. 

3. 

4. 

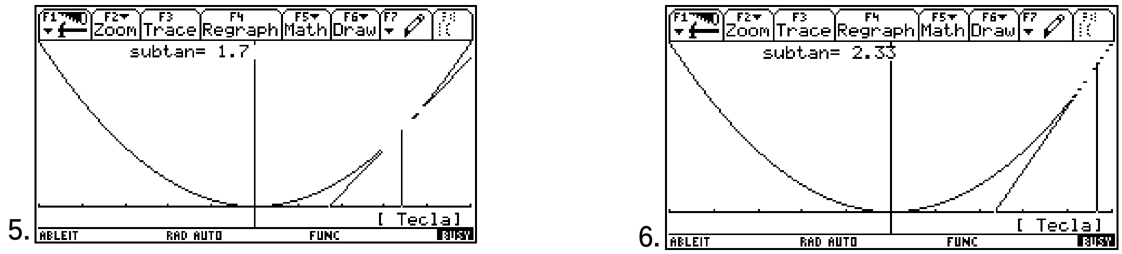


Figura 11. Pantallas correspondientes a la animación de la opción `Subtangentes` del programa `subtan( )`.

Una vez concluida la animación se debe presionar `ENTER` para regresar al menú de usuario, ya sea para introducir una nueva función o para salir del programa, seleccionando la opción `Salir` con la tecla `F3`, (ver figura 10).

A continuación se muestran diferentes pantallas del programa, para ejemplificar el caso de una función exponencial, que es uno de los propósitos principales de este programa: que el estudiante observe para estos casos el comportamiento de las subtangentes.

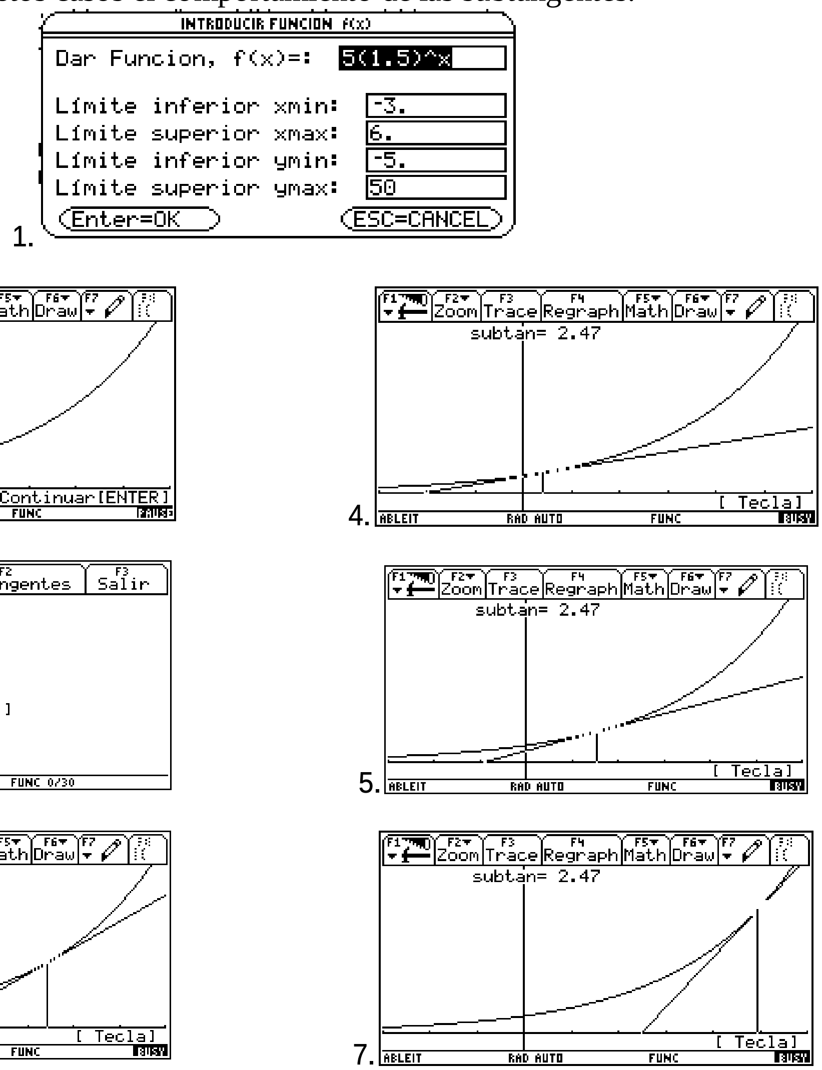


Figura 12. Pantallas del programa `subtan( )` para el caso de una función exponencial del tipo $y = ka^x$.

Actividad 8 (Problema analítico) *Disminución de la Presión Atmosférica.* En esta Actividad el fenómeno de variación se presenta a través de la representación analítica, donde la presión atmosférica P depende de la altura h sobre la superficie de la Tierra. Pero esta representación analítica es diferente a las que se había estado analizando en Actividades anteriores ($P = P_0 a^h$), en ésta se le presenta la representación analítica de una función exponencial decreciente con base e.

Objetivos:

- Identificar que este tipo de representación analítica también representa un decaimiento exponencial.
- Analizar la característica particular del decaimiento exponencial como es la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica.
- Identificar la necesidad de una herramienta matemática para calcular la altura sobre el nivel del mar para una presión atmosférica dada (resolución de una ecuación exponencial).

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro analítico → Registro gráfico

Actividad 9 (Problema tabular) *Tablas de funciones exponenciales.* En esta Actividad la información inicial se presenta a través de representaciones tabulares.

Objetivos:

- Establecer el siguiente criterio para identificar cuándo una tabla de datos numéricos corresponde a una variación exponencial: al verificar que cuando los valores numéricos de la variable independiente forman una sucesión aritmética, los valores numéricos de la variable dependiente forman una sucesión geométrica.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro tabular para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente, para los casos en que los intervalos de variación de la variable independiente registrados en la tabla sean diferentes de 1 ($\Delta x \neq 1$).

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

III.4.2. Bloque II: Los logaritmos y sus propiedades.

Actividad 1 (Problema tabular) *Exploración previa.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas numéricas.

Objetivos:

- Identificar las secuencias o sucesiones numéricas que se presentan en las tablas, como potencias sucesivas de un cierto número (α^n), y que a partir de dicha identificación el estudiante pueda continuar la secuencia tanto como desee, ya sea usando la calculadora o una hoja de cálculo como Excel. (En este caso $\alpha = 2, 3, 5$).

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro numérico → Registro analítico, Registro numérico → Registro verbal

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Actividad 2 (Problema tabular) *Introducción a los logaritmos.* La información inicial se presenta a través de una serie de tres tablas numéricas.

Objetivos:

- Formular los conceptos de *progresión aritmética* y *progresión geométrica*.
- Formular, primero en sus propias palabras y usando sus propios símbolos, y luego usando un lenguaje más técnico y una simbología más precisa, las reglas que definen las propiedades esenciales de los logaritmos, a saber:

$$E(\alpha_n \cdot \alpha_m) = E(\alpha_n) + E(\alpha_m)$$

$$E\left(\frac{\alpha_m}{\alpha_n}\right) = E(\alpha_m) - E(\alpha_n)$$

$$E({\alpha_n}^m) = m \cdot E(\alpha_n)$$

$$E\left({\alpha_n}^{1/m}\right) = \frac{1}{m} \cdot E(\alpha_n)$$

donde E representa al índice (o más precisamente, al exponente) del término de la sucesión que se indica entre paréntesis, y que numéricamente es igual al resultado de la(s) operación(es) involucrada(s).

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro numérico → Registro verbal, Registro numérico → Registro analítico, Registro verbal → Registro analítico

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro verbal

Actividad 3 (Problema tabular) *Extendiendo el poder de las tablas.* La información inicial se presenta a través de una serie de tres tablas de valores numéricos.

Objetivos:

- Expandir el poder de las tablas para poder calcular productos, cocientes, potencias y raíces de números que, si bien no están contenidos directamente en las Tablas numéricas, se pueden obtener a partir de ellas mediante su reescritura en la forma $\alpha_n \times 10^{-k}$.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro analítico → Registro numérico, Registro numérico → Registro verbal

Conversión privilegiada: Registro analítico → Registro numérico

Actividad 4 (Problema tabular) *Actividad previa.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas de valores numéricos.

Objetivos:

- Identificar las secuencias o sucesiones numéricas que se le presentan en las tablas, como potencias constantes de los números naturales n, y que a partir de dicha identificación pueda continuar la secuencia tanto como desee, ya sea usando la calculadora o una hoja de cálculo como Excel.
- Formular una representación del tipo n^{α} para generar los números de las Tablas (en este caso $\alpha = 2, 3, 5$).

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro numérico → Registro analítico, Registro numérico → Registro verbal

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Actividad 5 (Problema tabular) *¿Nuevas tablas de logaritmos?* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas de datos numéricos.

Objetivos:

- Formular el concepto de función potencia y correlacionarlo con el de progresión geométrica.
- Explicar por qué las reglas formuladas previamente para simplificar los cálculos en la Actividad 2 no se aplican en este caso.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro numérico → Registro verbal, Registro numérico → Registro analítico, Registro verbal → Registro analítico

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro verbal

Actividad 6 (Problema tabular) *Extendiendo el poder de las reglas.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas de valores numéricos.

Objetivos:

- Analizar el comportamiento de una progresión geométrica cuando el exponente es un número negativo.
- Verificar si las reglas formuladas previamente en la Actividad 2 para simplificar los cálculos se aplican en estos casos.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro numérico → Registro verbal, Registro analítico → Registro numérico

Conversión privilegiada: Registro analítico → Registro numérico

Actividad 7 (Problema tabular) *Verificando consistencia y precisión de las reglas logarítmicas.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas de valores numéricos.

Objetivos:

- Comprobar que las reglas formuladas previamente en la Actividad 2 se aplican para elementos de una misma progresión geométrica, y no se aplican para elementos de progresiones geométricas diferentes.
- Identificar una primera idea de la necesidad del concepto de base (o razón) para las progresiones geométricas.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro numérico → Registro verbal, Registro analítico → Registro verbal

Conversión privilegiada: Registro analítico → Registro verbal

Actividad 8 (Problema tabular) *Simbolización adecuada de las reglas de los logaritmos.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas numéricas.

Objetivos:

- Utilizar las reglas formuladas previamente en la Actividad 2 como herramienta para completar los datos que faltan en las tablas.
- Hacer más evidente la necesidad del concepto de base para las progresiones geométricas.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro analítico → Registro numérico, Registro numérico → Registro verbal

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro verbal

Actividad 9 (Problema tabular) *El concepto de logaritmo.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas numéricas.

Objetivos:

- Introducir el concepto y la notación moderna para los logaritmos.
- Expresar las propiedades básicas de los logaritmos, las cuales fueron formuladas en la Actividad 2, usando la notación moderna.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro numérico → Registro analítico, Registro analítico → Registro numérico

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Actividad 10 (Problema tabular) *Fórmula para el cambio de base.* La información inicial se presenta a través de tablas numéricas.

Objetivos:

- Analizar y generalizar la relación entre logaritmos de distintas bases.
- Establecer la fórmula para el cambio de base de los logaritmos.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:
Registro numérico → Registro analítico, Registro numérico → Registro verbal

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Al final de este Bloque de Actividades se presenta una Nota Histórica sobre los logaritmos.

III.4.3. Bloque III: La variación logarítmica.

Actividad 1 (Problema tabular) *El orden de magnitud.* La información inicial sobre el fenómeno de variación se presenta a través de una tabla de valores numéricos.
Objetivos:

- Identificar cuándo una tabla de datos numéricos representa una variación logarítmica: al verificar que cuando los valores numéricos de la variable independiente forman una sucesión geométrica, los valores numéricos de la variable dependiente forman una sucesión aritmética.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro tabular para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente.
- Analizar las características de la representación gráfica de esta función logarítmica.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para obtener la representación analítica de la función logarítmica como tratamiento “inverso” del caso exponencial.
- Mostrar la utilidad práctica de una escala logarítmica.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Actividad 2 (Problema gráfico) *La ley de crecimiento de un árbol.* En esta Actividad la información inicial sobre el fenómeno de variación se presenta a través de una gráfica.

Objetivos:

- Analizar las características de la representación gráfica de la función logarítmica.
- Hacer lecturas apropiadas en la gráfica.
- Identificar una característica esencial de la variación logarítmica, como es la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética, tanto en la representación tabular como en la representación gráfica.
- Realizar un análisis descriptivo del comportamiento de las familias de funciones logarítmicas.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro gráfico → Registro numérico

Actividad 3 (Problema analítico) *Multiplicación por una constante.* La información inicial se presenta a través de la representación analítica.

Objetivos:
- Visualizar en la gráfica el efecto de multiplicar por una constante (diferente de 1) una función logarítmica del tipo ($f(x) = c\ log_b x$).
- Visualizar en la gráfica el efecto de multiplicar por una constante diferente de 1, la variable independiente ($f(x) = log_b\ cx$).
- Realizar un análisis descriptivo del comportamiento de las familias de funciones logarítmicas.
- Deducir una fórmula para cambiar la base del logaritmo.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro gráfico → Registro analítico

Actividad 4 (Problema tabular) *Inversiones financieras.* La información inicial de la situación a analizar se presenta a través de la representación tabular.

Objetivos:
- Discriminar entre los datos de la tabla aquellos que le permitan identificar que se trata de una variación logarítmica.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para deducir la representación analítica correspondiente para la función logarítmica.
- Identificar una característica esencial de la variación logarítmica, como es la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Actividad 5 (Problema tabular) *Una dieta experimental.* La información inicial sobre el fenómeno de variación se presenta a través de una tabla de valores numéricos.

Objetivos:

- Concluir en este caso que los datos de la tabla no proporcionan información suficiente para afirmar que se trata de una variación logarítmica.
- Analizar los datos de la tabla en el registro gráfico.
- Utilizar la calculadora `Voyage 200` para calcular mediante regresión logarítmica la representación analítica que mejor se ajusta a los datos de la tabla.
- Identificar el tipo de logaritmo en la representación analítica que utilizó la calculadora `Voyage 200` para el ajuste de los datos (logaritmo base e).

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro numérico → Registro analítico

Actividad 6 (Problema analítico) *La Escala de Richter.* En esta Actividad la información inicial se presenta por medio de la representación analítica.

Objetivos:

- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para despejar las variables involucradas en la representación analítica de la función logarítmica.
- Identificar la característica esencial de la variación logarítmica, como es la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.
- Describir el comportamiento de la Escala de Richter a través de preguntas dirigidas en este contexto.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro analítico → Registro numérico

III.4.4. Bloque IV: Análisis gráfico de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Las Actividades de la 1 a la 9 fueron diseñadas para explorar el comportamiento gráfico de las funciones exponenciales, todas éstas tienen un formato de diseño similar, analizándose en cada una de ellas un caso diferente. Todas constituyen problemas gráficos.

Actividad 1. $f(x) = a^x$ cuando a= 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12.
Actividad 2. $f(x) = a^x$ cuando a= 1.1, 1.2, 1.3, …, 1.9.
Actividad 3. $f(x) = a^x$ cuando a= 0.1, 0.2, 0.3, …, 0.9.
Actividad 4. $f(x) = k\,a^x$ cuando k= 1, 2, 3, …, 9, y la función de referencia es 1.3^x.
Actividad 5. $f(x) = k\,a^x$ cuando k= 0.1, 0.2, 0.3,…, 0.9, y la función de referencia es 2^x.
Actividad 6. $f(x) = k\,a^x$ cuando k= -0.1, -0.2, -0.3, …, -0.9, y la función de referencia es 2^x.
Actividad 7. $f(x) = k\,a^x$ cuando k= -1, -2, -3, …, -9, y la función de referencia es 2^x.
Actividad 8. $f(x) = a^x + c$ cuando c= -1, -2, -3, …, -9, y la función de referencia es 1.4^x.
Actividad 9. $f(x) = a^x + c$ cuando c= 1, 2, 3, …, 9, y la función de referencia es 1.4^x.

Objetivos:

- Identificar las unidades significativas de la representación analítica y las variables visuales de la representación gráfica que cambian, así como también las que no cambian.
- Analizar el efecto en la gráfica de los diferentes parámetros involucrados en la representación analítica.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven en estas Actividades:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversiones privilegiadas: Registro gráfico → Registro analítico, Registro analítico → Registro gráfico

Las Actividades de la 10 a la 13 fueron diseñadas para ayudar al estudiante a explorar las representaciones gráficas y analíticas de las funciones logarítmicas. En estas Actividades se propone el uso del programa `graflog()`, especialmente diseñado para tal fin. Todas ellas son problemas gráficos.

Objetivos:

- Promover la articulación entre la representación gráfica y la representación analítica, a través del análisis de la secuencia de gráficas que constituyen la animación presentada por el programa, así como las representaciones analíticas correspondientes a cada imagen.
- Identificar la relación que existe entre ciertas transformaciones particulares de las gráficas y el valor del parámetro que está variando en la representación analítica.
- Identificar cuales parámetros de la representación analítica tienen un efecto similar en la representación gráfica.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven en estas Actividades:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversiones privilegiadas: Registro gráfico → Registro analítico, Registro analítico → Registro gráfico

El programa `graflog()`.

El objetivo de este programa es promover las tareas de variación sistemática comparativa para el caso de las funciones logarítmicas. El programa muestra representaciones gráficas y analíticas dinámicamente vinculadas de la familia de funciones $f(x) = a\, log_b(cx) + d$. Estas representaciones dinámicas se logran desplegando en pantalla una secuencia de imágenes relacionadas de manera especial, de modo que al aparecer automáticamente una tras otra, crean la ilusión de movimiento. Con esta puesta en correspondencia de las representaciones gráfica y analítica se busca favorecer la articulación de estos dos registros de representación.

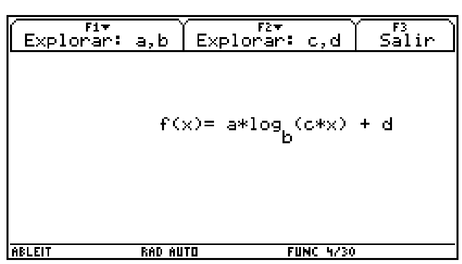


Figura 13.

Actividad 10. En esta Actividad se utiliza la opción `Explorar: a,b` del menú de usuario, y específicamente se consideran las opciones `1: b>1` y `2: 0<b<1` del submenú que se muestra al seleccionar dicha opción. Se pretende promover la articulación entre las representaciones gráficas presentadas en pantalla con la representación analítica del tipo $f(x) = log_b\, x$.
Al seleccionar la opción Explorar: *a,b*, presionando `F1`, aparecerá el siguiente submenú:

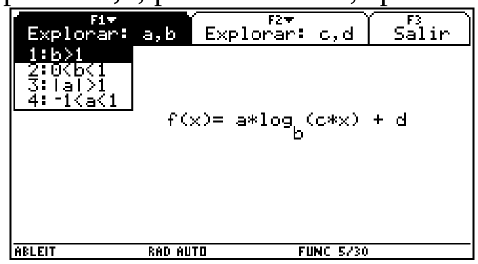
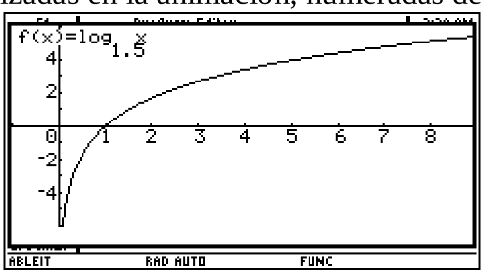
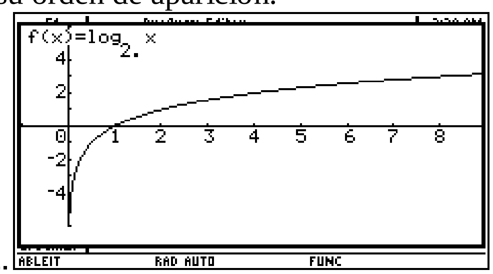
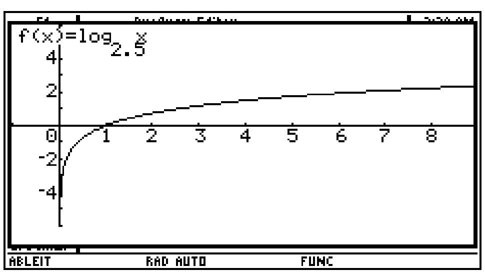


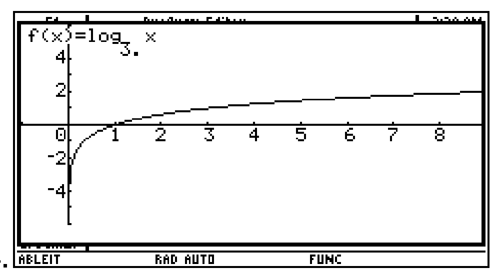
Figura 14.

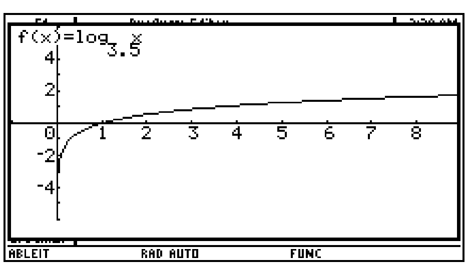
Opción 1: b>1. En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira y encoge en sentido vertical de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta su expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se tomaron elementos de la familia $f(x) = log_b x$, haciendo variar el parámetro b desde 1.5 hasta 4 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 6 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran (de manera estática por supuesto), las imágenes utilizadas en la animación, numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

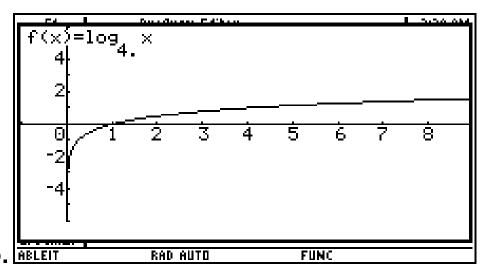
6. 

Figura 15. Familia $f(x) = log_b\, x$ donde $b > 1$.

Opción 2: 0<b<1. En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira y encoge en sentido vertical de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta su expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se tomaron elementos de la familia $f(x) = log_b x$, haciendo variar el parámetro b desde 0.1 hasta 0.7 con incrementos de 0.1, lo cual hace un total de 7 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran (de manera estática por supuesto), las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

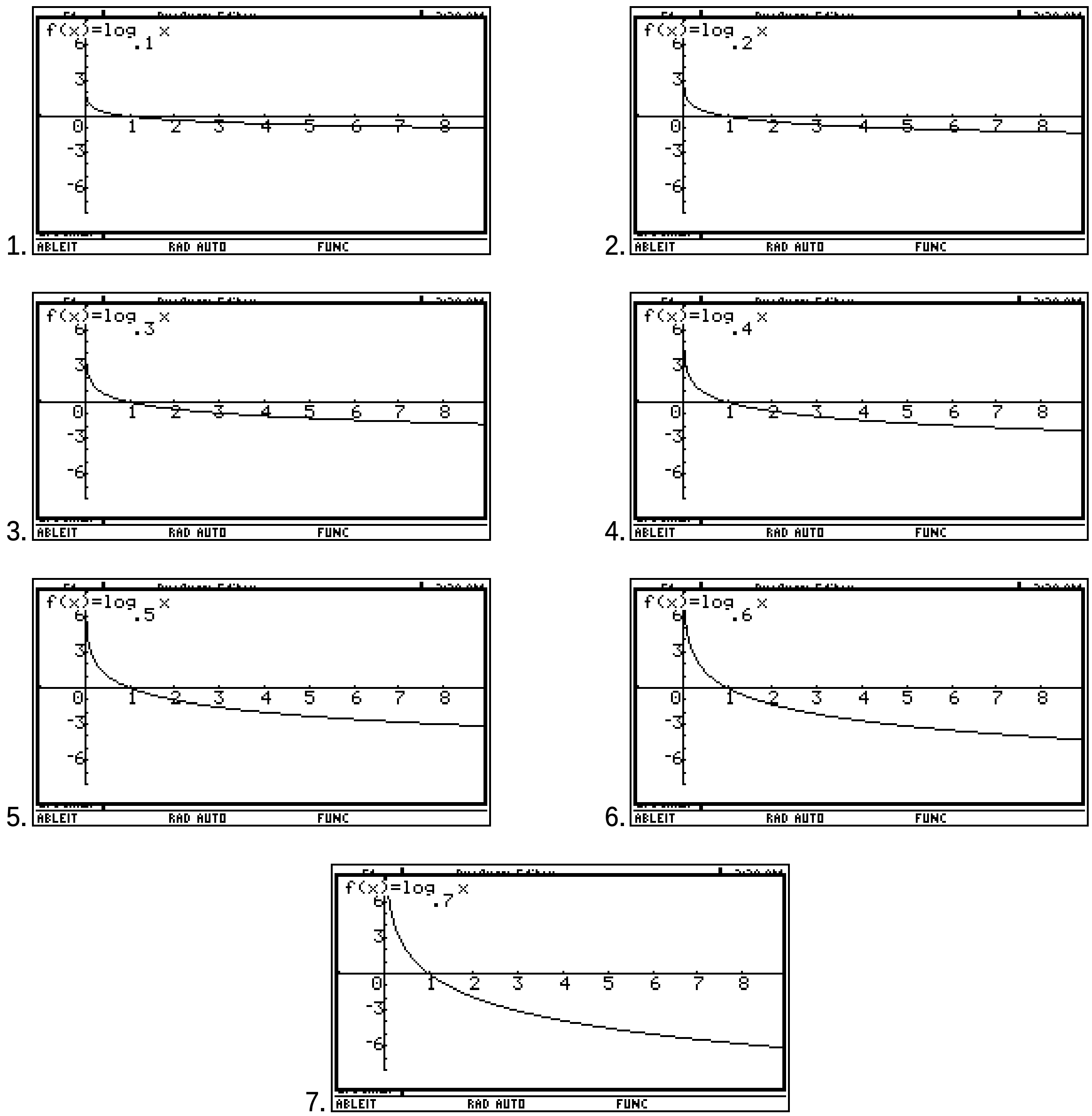


Figura 16. Familia $f(x) = log_b\ x$ donde $0 < b < 1$.

Actividad 11. En esta Actividad se usa la opción del menú `Explorar: a,b` y específicamente las opciones `3: |a|>1` y `4: -1<a<1` del submenú desplegado. Se pretende promover la articulación entre las representaciones gráficas presentadas en pantalla con la representación analítica del tipo $f(x)$ = a $log_3\, x$.

Opción 3: |a|>1. En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira en sentido vertical con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada, y en algunos casos además de estirarse verticalmente también se refleja con respecto al eje *x.* Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = log_3\, x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = a\, log_3\, x$, haciendo variar el parámetro a desde -6 hasta 6 con incrementos de 2, lo cual hace un total de 7 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran las imágenes utilizadas en la animación.

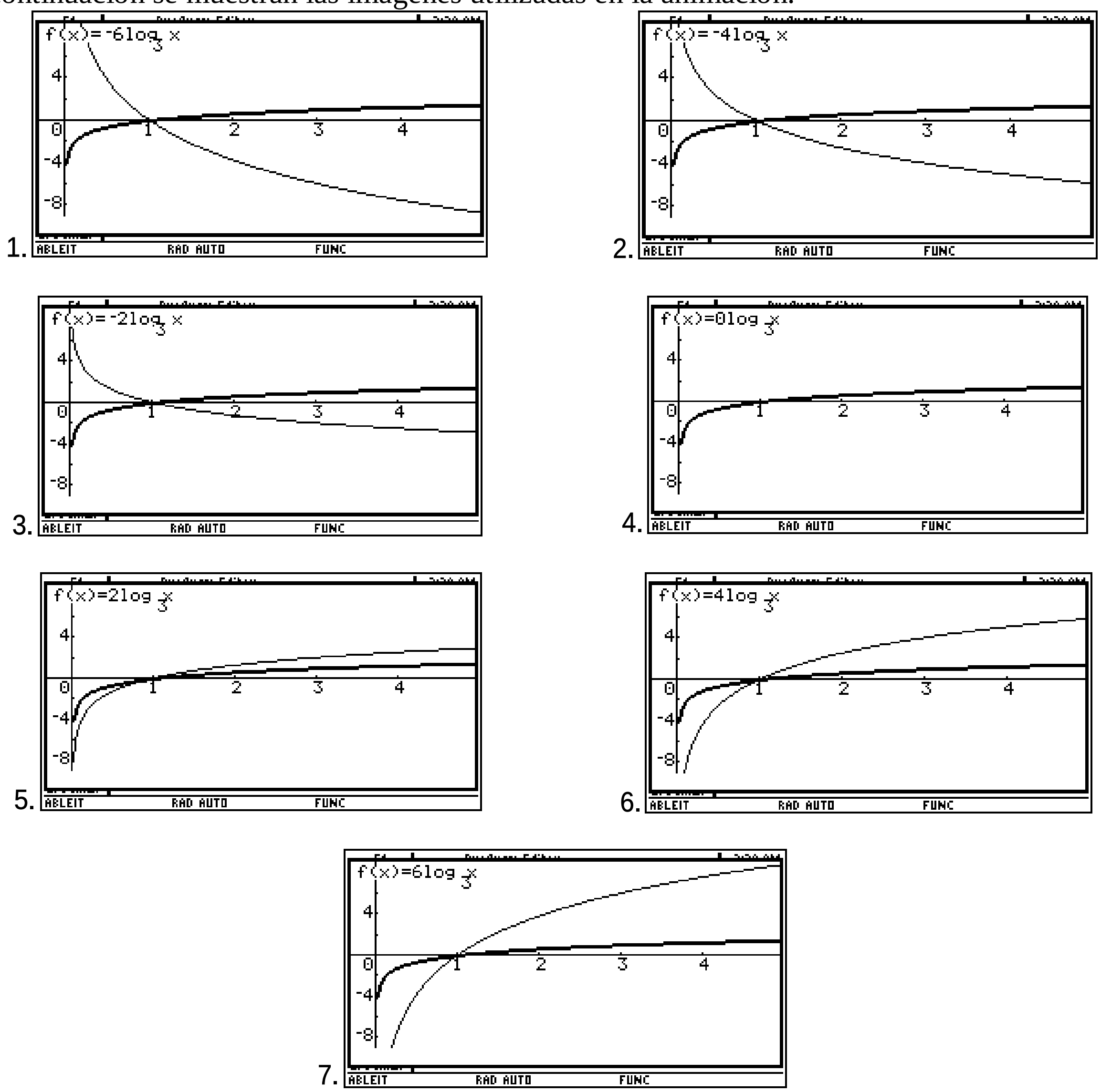


Figura 17. Familia $f(x) = a\, log_3\, x$ donde $|a| > 1$ y la función de referencia es $f(x) = log_3\, x$.

Opción 4: -1<a<1. En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se encoge en sentido vertical con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada, y en algunos casos además de encogerse verticalmente también se refleja con respecto al eje x. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = log_3\, x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = a\, log_3\, x$, haciendo variar el parámetro a desde -0.7 hasta 0.7 con incrementos de 0.2, lo cual hace un total de 8 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra (de manera estática por supuesto), la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

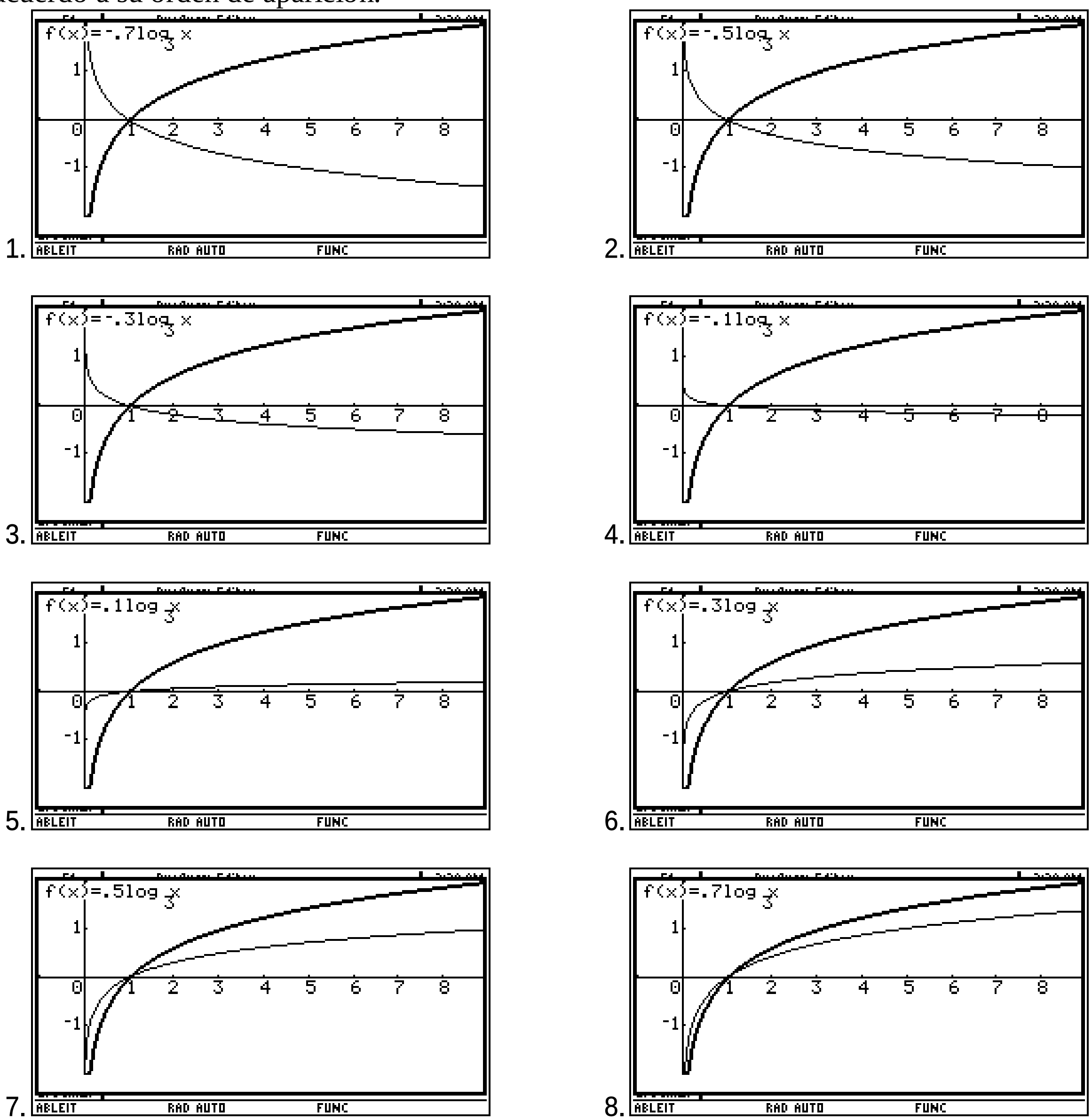


Figura 18. Familia $f(x) = a\, log_3\, x$ donde $-1 < a < 1$ y la función de referencia es $f(x) = log_3\, x$.

Actividad 12. En esta Actividad se emplea la opción del menú `Explorar: c,d` y específicamente las opciones `1: c>1` y `2: 0<c<1` del submenú desplegado. Se pretende promover la articulación entre las representaciones gráficas presentadas en pantalla con la representación analítica del tipo $f(x) = log_2\, cx$.

Al seleccionar la opción `Explorar: c,d` presionando `F2`, se tiene acceso al submenú mostrado en la siguiente pantalla.

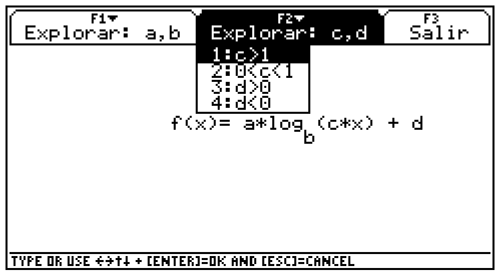


Figura 19.

Opción 1: c>1. En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia arriba con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = log_2\, x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = log_2\,(cx)$, haciendo variar el parámetro c desde 2 hasta 5 con incrementos de 1, lo cual hace un total de 4 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra de manera estática por supuesto, la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

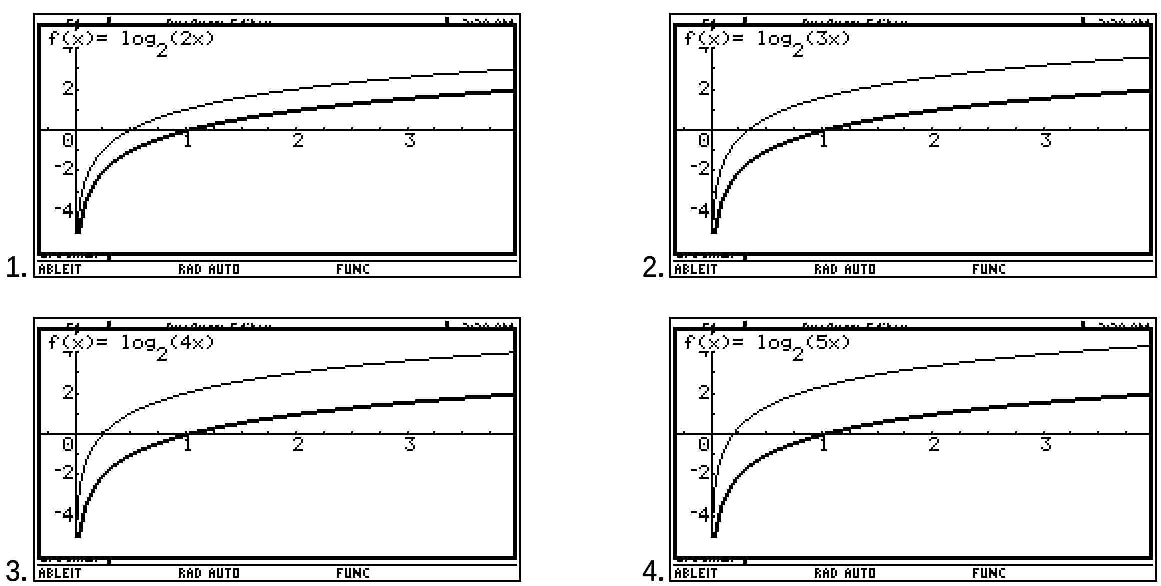


Figura 20. Familia $f(x) = log_2\,(cx)$ donde $c > 1$ y la función de referencia es $f(x) = log_2\, x$.

Opción 2: 0<c<1. En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia abajo con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = log_2 x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = log_2(cx)$, haciendo variar el parámetro c desde 0.1 hasta 0.5 con incrementos de 0.1, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra de manera estática por supuesto, la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

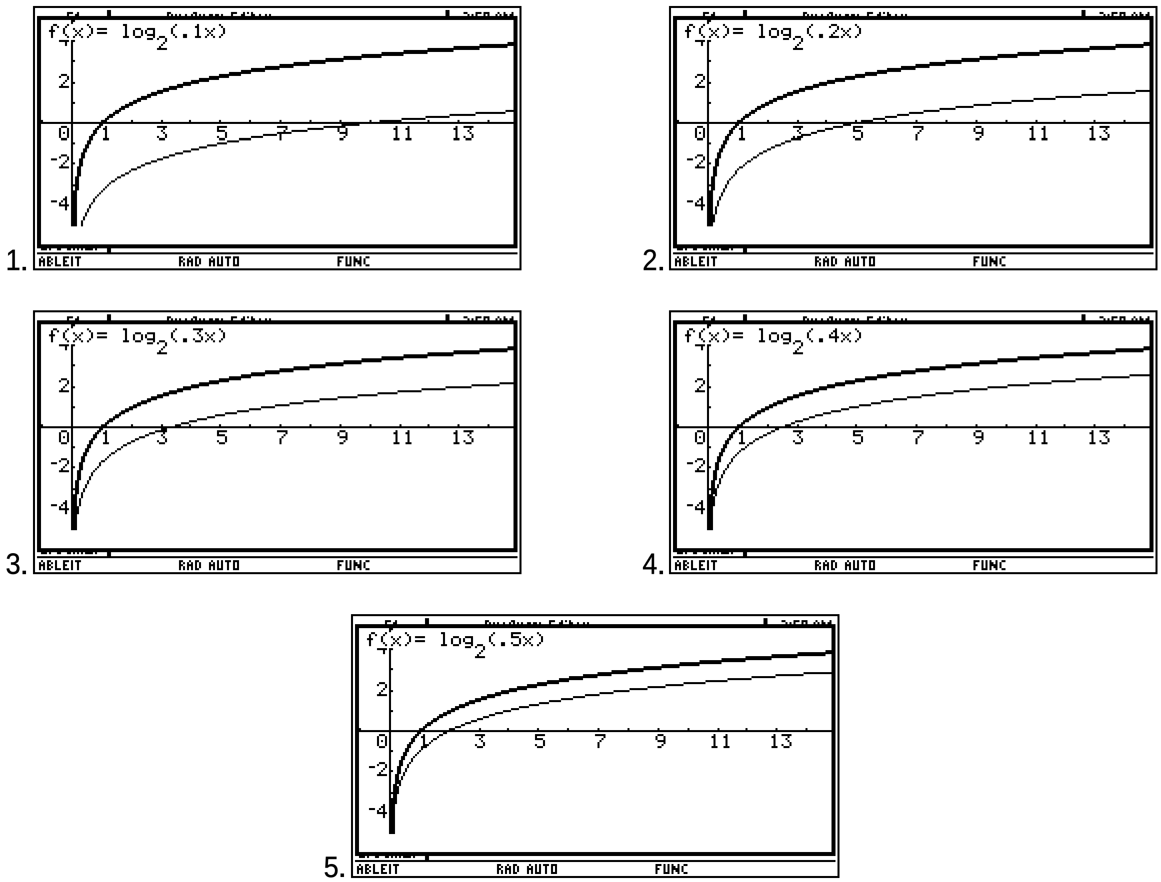


Figura 21. Familia $f(x) = log_2(cx)$ donde $0 < c < 1$ y la función de referencia es $f(x) = log_2 x$.

Actividad 13. En esta Actividad se emplea la opción del menú Explorar: c,d y específicamente las opciones 3: d>0 y 4: d<0 del submenú respectivo. Se pretende promover la articulación entre las representaciones gráficas presentadas en pantalla con la representación analítica del tipo $f(x) = log_3 x + d$.

Opción 3: d>0. En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia arriba con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = log_2\, x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = log_2\, x + d$, haciendo variar el parámetro d desde 0.5 hasta 3 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran de manera estática las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

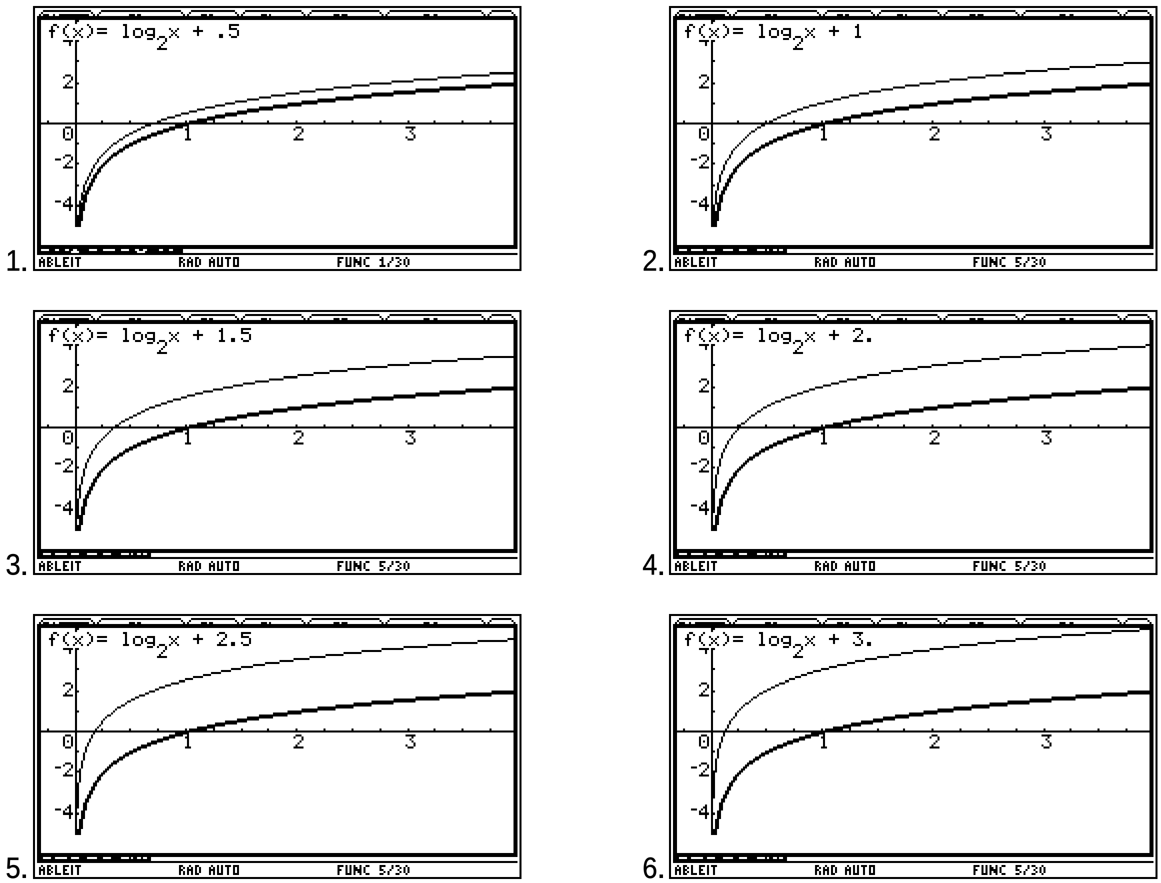


Figura 22. Familia $f(x) = log_2\, x + d$ donde $d > 0$ y la función de referencia es $f(x) = log_2\, x$.

Opción 4: d<0. En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia abajo con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = log_2\, x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = log_2\, x + d$, haciendo variar el parámetro d desde -3 hasta -0.5 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran de manera estática las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

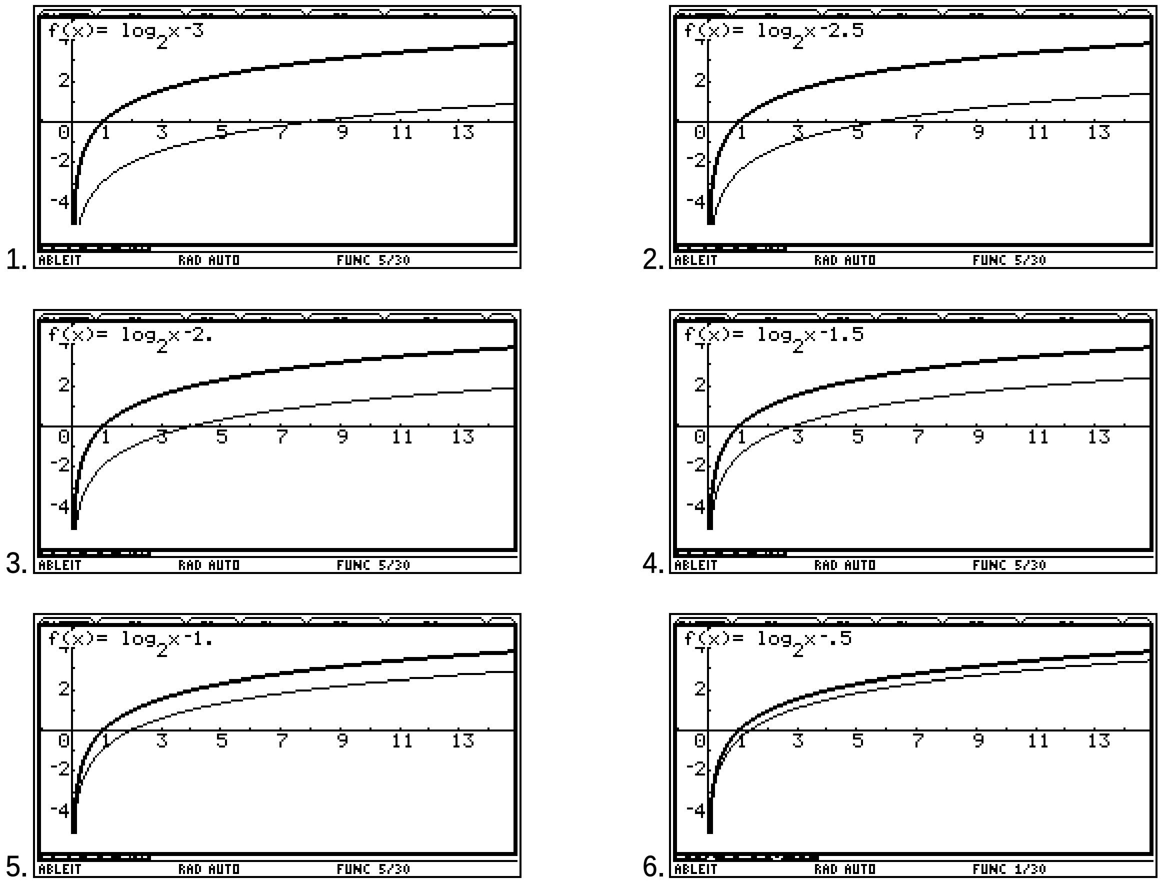


Figura 23. Familia $f(x) = log_2 x + d$ donde $d < 0$ y la función de referencia es $f(x) = log_2 x$.

Actividad 14. *Explorando las representaciones gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas.* Para esta Actividad se propone el uso del programa `expolog( )`.

Objetivos:

- Analizar el comportamiento gráfico (simetría, reflexión de puntos) de las funciones exponenciales y logarítmicas de la forma; $f(x) = log_b x$ y $g(x) = b^x$, en los mismos ejes y cuyo valor de la base en ambas funciones es igual.
- Identificar a las funciones exponenciales y logarítmicas como funciones inversas.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro analítico → Registro gráfico

El programa `expolog()`.
El propósito de este programa es que el estudiante explore algunas características gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas cuando los valores de las bases de ambas funciones son iguales y éstas son graficadas en los mismos ejes coordenados. En este programa se cuidó que las escalas de los ejes fueran iguales y de igual tamaño, ya que éstas son condiciones indispensables para que se aprecie la simetría entre ambas representaciones gráficas, así como la reflexión de puntos de una función en la otra con respecto a la recta $y = x$.

Para que el programa pueda trazar las gráficas correspondientes, es necesario que se introduzca un número positivo y diferente de uno como valor para la base, como se muestra en la siguiente pantalla.

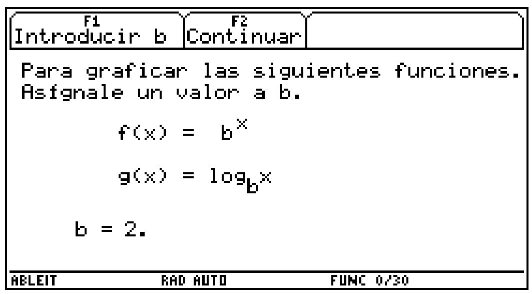


Figura 24.

Al presionar la opción del menú Continuar `F2`, aparecerá la pantalla gráfica en la que se aprecian los ejes con su respectiva cuadrícula y el trazado de ambas funciones, al terminar éste aparecerá con estilo remarcado la gráfica de la línea $y = x$ y una traza, la cual puede moverse a través de cualquiera de las gráficas trazadas con las teclas del cursor ◄,►así como por medio del teclado numérico, asignándole un valor a x, y también pasar de una función a otra con las teclas del cursor ▲y▼.

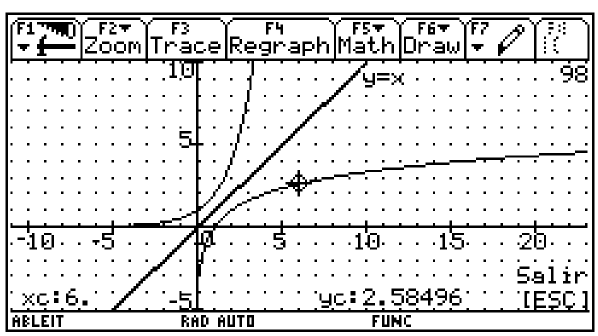


Figura 25.

III.4.5. Bloque V: Funciones exponenciales y logarítmicas con base *e*.

Actividad 1 (Problema gráfico) *La derivada de la función exponencial ($y = a^x$).* Este tema se aborda desde una perspectiva diferente a como la abordan los libros de Cálculo tradicionales, que consiste en el desarrollo de un límite bastante complicado (desde el punto de vista cognitivo) y carente de significado para los estudiantes. En esta propuesta aprovechamos las ventajas de los dispositivos CAS como la `Voyage 200`, los cuales nos facilitan acercamientos geométricos para abordar esta problemática. En esta Actividad se propone el uso del programa `deriexpo()`.

Objetivos:

- Utilizar el registro gráfico para crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número ***e***.
- Explorar el comportamiento de las subtangentes en las funciones exponenciales.
- Promover una exploración que propicie generar la hipótesis de que existe una base especial que hace que las gráficas de la función y de su derivada coincidan, y estimar el valor concreto de dicha base.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para deducir la representación analítica de la derivada de la función exponencial ($y = a^x$).

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversiones privilegiadas: Registro gráfico → Registro analítico, Registro numérico → Registro analítico

Después de esta Actividad se presenta una Nota Histórica de la función $y = e^x$.

El programa `deriexpo()`.

El propósito de este programa es que el estudiante explore el comportamiento de la derivada o razón de cambio de las funciones exponenciales simples, particularmente cuando la base es el número ***e***.

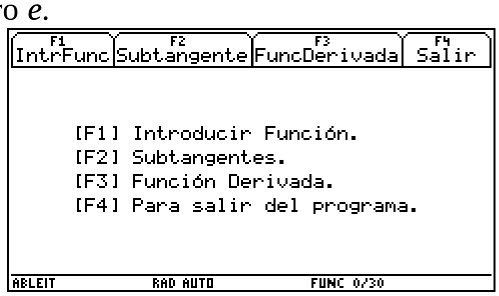


Figura 26.

El estudiante deberá elegir la opción `Introducir Función`, presionando `F1`, ya que las opciones `Subtangentes`, `[F2]` y `Función Derivada`, `[F3]` no están disponibles si no se introduce la función primero.

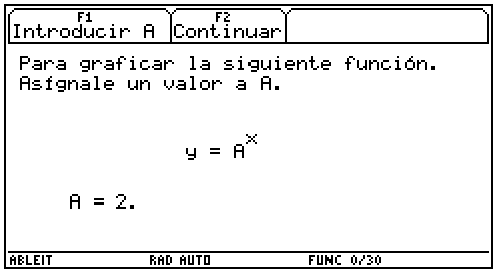


Figura 27.

Al presionar la opción del menú `Continuar` con la tecla `F2`, aparecerá la pantalla gráfica donde se trazará la gráfica correspondiente; una vez trazada ésta se deberá presionar `ENTER` para continuar.

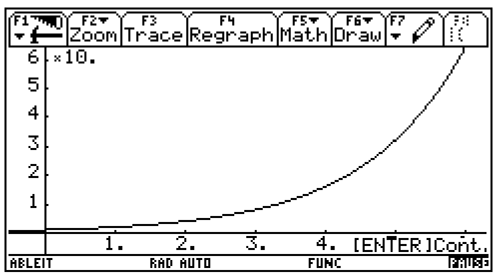


Figura 28.

Aparecerá de nuevo el menú principal y también se mostrará en pantalla la expresión analítica de la función graficada. Una vez introducida la función, todas las opciones del menú de usuario estarán disponibles.

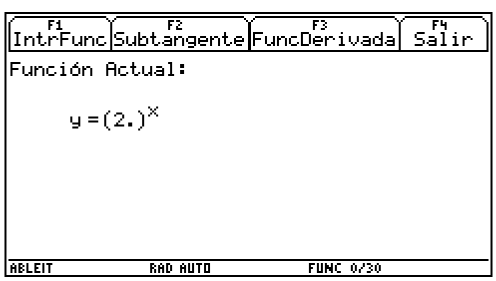


Figura 29.

Al seleccionar la opción `Subtangentes` con la tecla `F2` de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente, y se apreciará en pantalla una animación donde se trazarán líneas tangentes a la curva y las correspondientes subtangentes, mostrándose también en pantalla el valor numérico de éstas. Durante la animación, el estudiante tendrá la opción de detenerla, presionando la tecla de la letra S, y continuarla al presionar cualquier otra tecla. Enseguida se muestran algunas pantallas de esta animación.

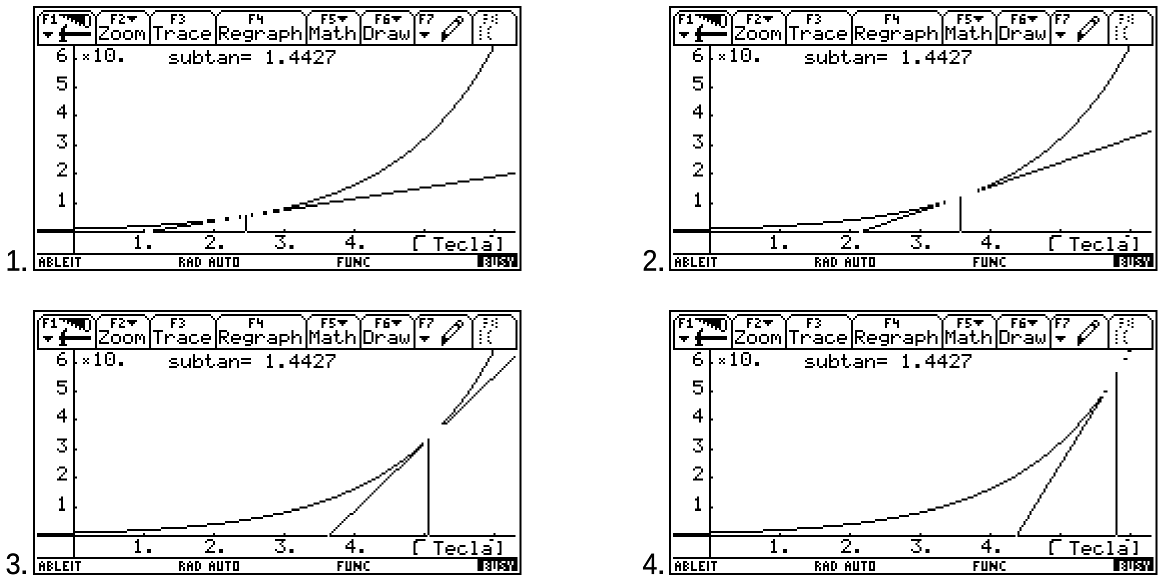


Figura 30. Pantallas correspondientes a la animación de la opción Subtangente del programa `deriexpo()`.

Una vez concluida dicha animación, se deberá presionar ENTER para volver al menú principal, (ver figura 29). Después de haber explorado la opción `Subtangente`, el estudiante puede elegir cualquiera de las opciones del menú anterior.

Al seleccionar la opción `Función Derivada` con la tecla F3, aparecerá la gráfica de la función trazada previamente y comenzará a trazarse la gráfica de su función derivada; una vez concluida ésta, aparecerá en pantalla la expresión analítica de la función derivada.

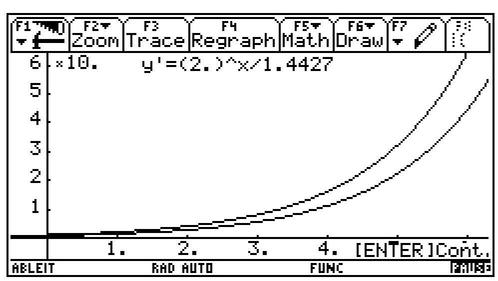


Figura 31.

Al presionar ENTER aparecerá de nuevo el menú principal (ver figura 29), donde el estudiante podrá repetir las exploraciones anteriores con otra función, seleccionando de nuevo la opción `Introducir Función` con la tecla F1, o salir del programa presionando la tecla F4.

Actividad 2 (Problema analítico) *Transformando una función de la forma* $\boldsymbol{y = A\, a^x}$ *a una función exponencial simple con base e y viceversa.* En esta Actividad la información inicial se presenta a través de la representación analítica.

Objetivos:

- Promover una exploración para analizar tanto en el registro gráfico como en el registro tabular el hecho de que dos representaciones analíticas diferentes representan una misma función.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para transformar una expresión analítica de la forma $y = Aa^x$ a una de la forma $y = Ae^{kx}$ y viceversa.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Se fomenta el tratamiento en el registro analítico.

Actividad 3 (Problema verbal) *Contaminación radiactiva.* La información inicial sobre este fenómeno de variación se presenta a través de una descripción verbal.

Objetivos:

- Reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula.
- Identificar la característica esencial tanto de las funciones exponenciales como de las logarítmicas, como es la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para despejar las variables involucradas en la expresión analítica respectiva.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal		Registro verbal → Registro analítico	X

Conversión privilegiada: Registro verbal → Registro analítico

Actividad 4 (Problema gráfico) *La derivada de la función logaritmica.* Al igual que en la Actividad 1, este tópico se aborda desde una perspectiva geométrica. En esta Actividad se propone el uso del programa derivlog( ).

Objetivos:

- Utilizar el registro gráfico para crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número *e*.
- Explorar el comportamiento de las subtangentes en las funciones logarítmicas.
- Promover una exploración para analizar la función derivada de la función logaritmo, y particularmente cuando la base del logaritmo es el número *e*.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para deducir la expresión analítica de la derivada de la función logarítmica ($y = \log_b x$).

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversiones privilegiadas: Registro gráfico → Registro analítico, Registro numérico → Registro analítico

El programa derivlog( ).

El objetivo de este programa es que el estudiante explore el comportamiento de la derivada de las funciones logarítmicas del tipo $y = \log_b x$ particularmente cuando la base del logaritmo es el número *e*.

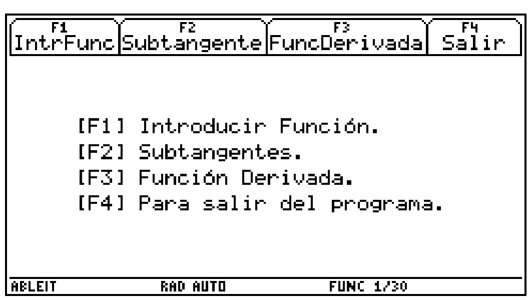


Figura 32.

El estudiante deberá elegir la opción `Introducir Función` con la tecla `F1`, ya que las opciones `Subtangentes` [`F2`] y `Función Derivada` [`F3`] no estarán disponibles si primero no se introduce la función.

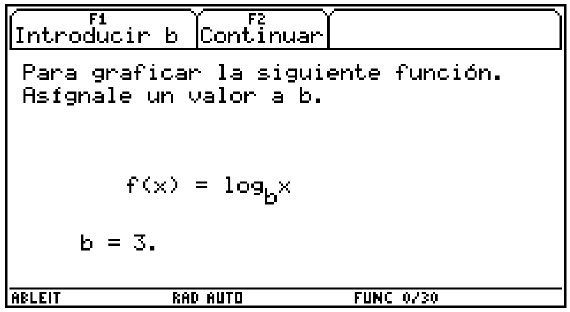


Figura 33.

Al presionar la opción del menú `Continuar` con la tecla `F2`, aparecerá la pantalla gráfica donde se trazará la gráfica correspondiente, una vez trazada ésta se deberá presionar `ENTER` para continuar.

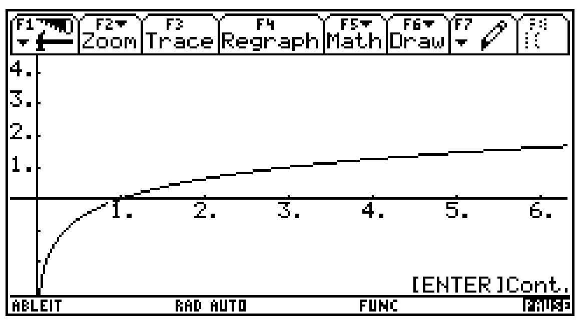


Figura 34.

Aparecerá de nuevo el menú principal y también la representación analítica de la función graficada. Una vez introducida la función, todas las opciones del menú estarán disponibles.

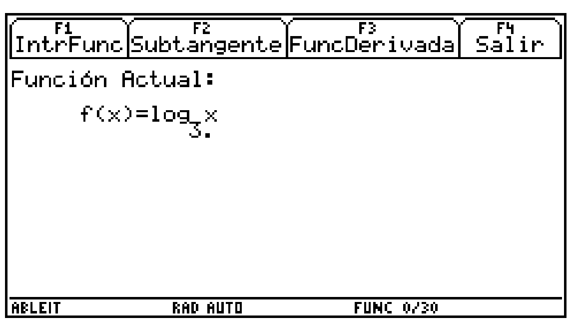


Figura 35.

Al seleccionar la opción `Subtangente` con la tecla `F2`, de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente y se apreciará en pantalla una animación donde se trazarán líneas tangentes a la curva y las correspondientes subtangentes, mostrándose también el valor numérico de éstas. En el transcurso de la animación, el estudiante puede detener ésta, presionando la tecla de la letra `S`, y al presionar cualquier otra tecla, la animación continuará. A continuación se muestran algunas pantallas de esta animación. Las subtangentes se grafican en el eje vertical, para que éstas sean constantes.

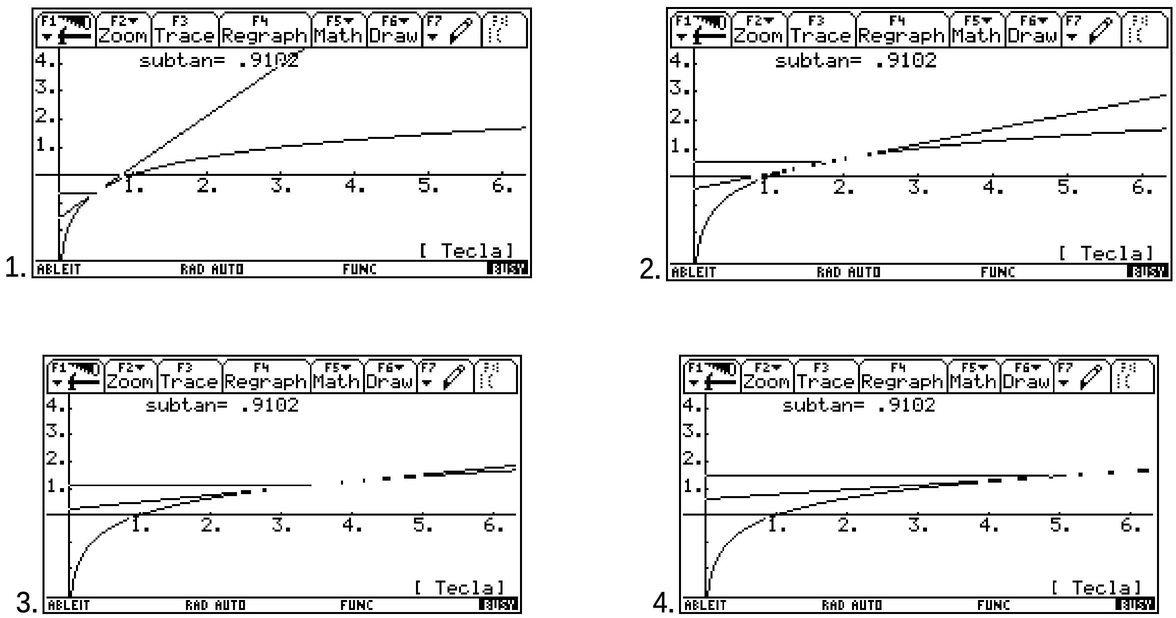


Figura 36. Pantallas correspondientes a la animación de la opción `Subtangente` del programa `derivlog()`.

Una vez concluida dicha animación se deberá presionar `ENTER` para volver al menú principal (ver figura 35). Después de haber explorado la opción `Subtangente`, el estudiante podrá elegir cualquiera de las opciones del menú anterior.

Al seleccionar la opción `Función Derivada`, con la tecla `F3`, aparecerá la gráfica de la función trazada previamente y comenzará a trazarse la gráfica de su función derivada, una vez concluida ésta, aparecerá en pantalla la expresión analítica de la función derivada.

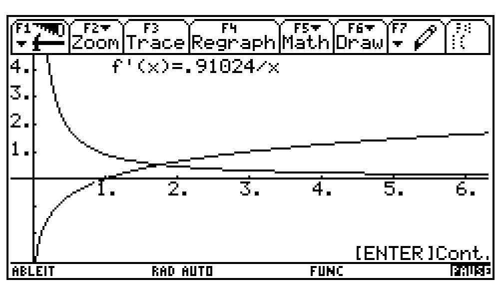


Figura 37.

Al presionar ENTER aparecerá de nuevo el menú principal (ver figura 35) donde el estudiante podrá repetir las exploraciones anteriores con otra función, seleccionando de nuevo la opción Introducir Función con la tecla F1, o salir del programa presionando la tecla F4.

Actividad 5 (Problema gráfico) *La cuadratura de la hipérbola rectangular.* Un elemento importante y ausente en las clases de matemáticas es el quiebre en el patrón de cuadratura para las funciones potencia, y el consecuente desafío de encontrar la cuadratura de la hipérbola equilátera. Ferrari (2001) considera como elemento fundamental para incorporar en un diseño cuyo propósito es dotar de significado a la función logaritmo esta situación que se aborda en esta Actividad, cuya resolución demandó que varios de los más grandes matemáticos de todos los tiempos la encararan. Esta idea admite el trabajo en varios registros de representación y toma como eje la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética. La importancia de los logaritmos en el desarrollo histórico del Cálculo radica en la vinculación de los logaritmos con la cuadratura de la hipérbola equilátera; esta vinculación también fue la causa de que los logaritmos se despegaran de sus orígenes aritméticos para hallar cabida en otros registros como el geométrico-gráfico, considerado en el siglo XVII la principal representación en matemáticas. Por estas razones consideramos incluir esta Actividad en la secuencia, y justamente en este lugar.

Antes de iniciar la Actividad se presenta una Nota Histórica con el propósito de dar sentido a este problema. En esta Actividad el estudiante realiza las exploraciones apoyado en un software de geometría dinámica (GeoGebra).

Objetivos:

- Utilizar el registro gráfico para crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número *e*.
- Promover una exploración para identificar la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para deducir la expresión analítica para calcular el área bajo la hipérbola equilátera.

Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Conversión privilegiada: Registro gráfico → Registro numérico

III.5. Metodología para la organización del trabajo de los estudiantes con la secuencia didáctica.

La metodología propuesta es la siguiente:

- Se organiza el grupo para trabajar en equipos de 3 ó 4 estudiantes.
- Se procede a la resolución de la hoja de trabajo por equipos.
- Se solicita el registro escrito del trabajo realizado en los equipos, y se asignan tareas individuales, para dar la oportunidad de que el alumno pueda reflexionar sobre lo que se hizo en el equipo y tenga a su vez la oportunidad de tomar decisiones personales.
- El papel del profesor durante el desarrollo de la actividad consiste en facilitar las discusiones de los estudiantes en el equipo o en lo personal.
- Después de cada bloque de Actividades es necesario un debate con el grupo completo, para la institucionalización de los procedimientos adecuados y los conceptos aprendidos.

Capítulo IV

Resultados del Pilotaje

IV.1. Aspectos generales del Pilotaje.

La aplicación de las Actividades del Bloque I correspondientes a la variación exponencial, se llevó a cabo en el semestre 2010-2 con un grupo de estudiantes universitarios inscritos en un curso de Cálculo Diferencial e Integral I del Área de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora, Unidad Centro, que siguió una innovación curricular, la cual consiste en la realización sistemática de actividades didácticas cuyos diseños son teóricamente fundamentados, y que involucran el uso de la calculadora simbólica. Vale la pena aclarar que este grupo de estudiantes se distinguió durante todo el semestre por su dedicación, responsabilidad y entusiasmo, además cuando se aplicaron estas Actividades, ya habían adquirido las habilidades para un excelente manejo de la calculadora Voyage 200. Antes de iniciar este pilotaje, y como resultado de la organización para el trabajo en su curso, los estudiantes ya habían formado equipos de trabajo; en total eran 9 equipos de 3 estudiantes y 3 equipos de 2 estudiantes.

La exploración de este Bloque de Actividades por parte de los estudiantes, fue su primer acercamiento al estudio de la variación exponencial, el tiempo de realización de las primeras dos Actividades fue mayor que el de las subsecuentes, el Bloque completo (8 Actividades) lo terminaron en una semana de clases (5 horas, 1 hora diaria), el maestro titular y el investigador estuvieron presentes en el transcurso de ésta, para mediar las discusiones entre los integrantes de los equipos, así como también guiarlos cuando éstos se lo requirieran. Todos los equipos entregaron resueltas en forma escrita todas las Actividades.

Por lo mismo, a la hora de seleccionar los equipos para realizar el análisis de las respuestas a las Actividades, nos encontramos con que el desempeño de todos los equipos era muy similar, por lo que optamos por seleccionar para dicho análisis al grupo completo.

IV.2. Análisis de resultados de las Actividades del Bloque I.

Actividad 1: *El crecimiento de una población bacteriana.*
En esta Actividad la información inicial se presentó en una tabla de valores numéricos.
En el *Apartado 1,* a los equipos se les pidió que dibujaran una gráfica que ilustrara el crecimiento del número de bacterias con respecto al tiempo. Cuatro de los equipos localizaron los puntos en la cuadrícula, pero no los unieron, además de que no señalaron ninguna escala para los ejes, por lo que consideramos que en estos casos no realizaron una conversión correcta del registro tabular al gráfico.

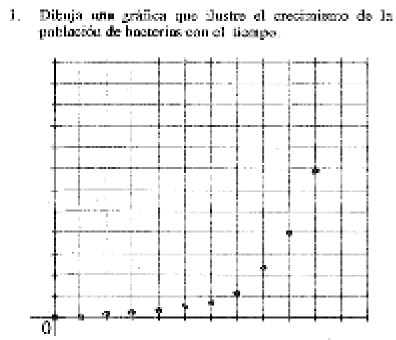


Figura 38.

Los equipos restantes seleccionaron correctamente las escalas para los ejes (aunque no los etiquetaron) y trazaron la gráfica en forma correcta por lo que consideramos que estos equipos realizaron la conversión del registro numérico al gráfico correctamente.

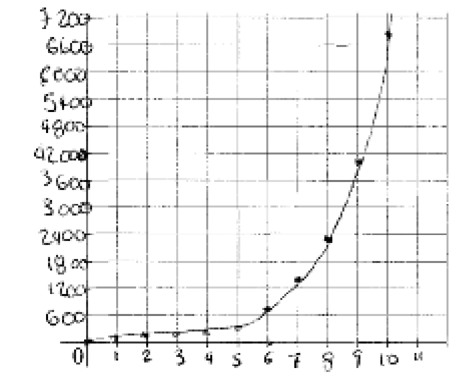


Figura 39.

Apartado 2. Todos los equipos contestaron de manera similar a la pregunta planteada, afirmando que la cantidad de bacterias crece de forma acelerada, la intención de esta pregunta era que observaran dicha característica.

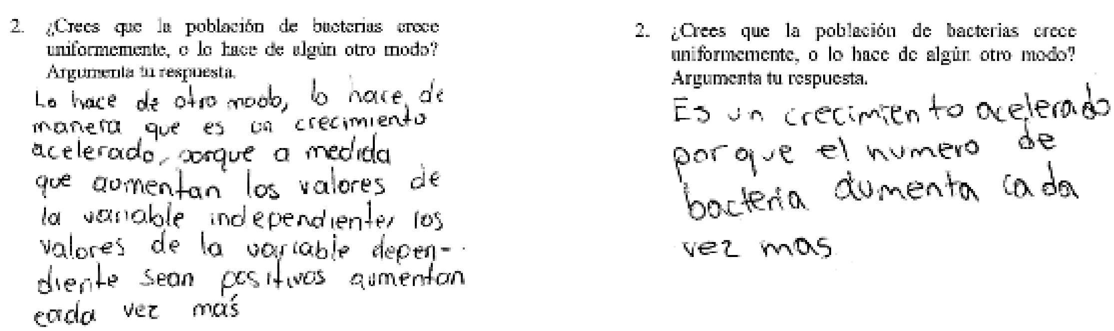


Figura 40.

Apartado 3. Todos los equipos completaron correctamente la tabla donde se les pidió que calcularan la relación del número de bacterias de cada hora entre el número de bacterias de la hora anterior. Mediante la observación pudimos percatarnos que estos valores los obtuvieron utilizando la Aplicación de Datos y Matrices de la calculadora, generando una nueva columna para obtenerlos, no tuvieron dificultades para esto.

3. Completa la tabla siguiente dividiendo el número de bacterias de cada hora entre el de la hora anterior. (Usa el modo aproximado para estos cálculos).

Tabla 2

	Relación
0 a 1	1.74
1 a 2	1.749
2 a 3	1.743
3 a 4	1.748
4 a 5	1.748
5 a 6	1.739
6 a 7	1.739
7 a 8	1.739
8 a 9	1.739
9 a 10	1.725

Figura 41.

En el *Apartado 4* se les solicitó una explicación sobre los valores obtenidos en la tabla anterior, las respuestas de 5 de los equipos fueron excelentes.

4. ¿Puedes explicar los números obtenidos en esta tabla?
Es el numero por el que se multiplican las bacterias cada hora; es la razón constante en la que se multiplican

4. ¿Puedes explicar los números obtenidos en esta tabla?
es lo que cambia en proporción c/hora el numero de bacterias

4. ¿Puedes explicar los números obtenidos en esta tabla?
Nos da como resultado una cierta constante, lo que nos dice que el número de bacterias entre horas aumenta de manera proporcional

5. Al analizar la Tabla 1, probablemente advertiste

Figura 42.

Las respuestas de los 7 equipos restantes fueron similares a las que se muestran en la Figura 42, siendo éstas las que se esperaba que contestaran, observamos que algunos equipos tuvieron cierto conflicto en aceptar que los valores obtenidos en la Tabla 2 son iguales.

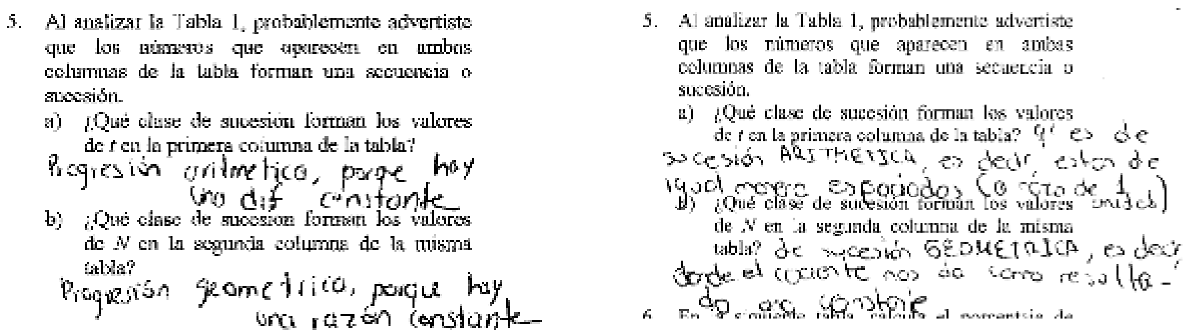
4. ¿Puedes explicar los números obtenidos en esta tabla?
Los numeros pareciera ser una constante

4. ¿Puedes explicar los números obtenidos en esta tabla?
Los numeros de relación en la tabla anterior son constantes.

4. ¿Puedes explicar los números obtenidos en esta tabla?
q' los numeros obtenidos apartir de la division de los bacterias cada hrs / la hrs anterior, parecieron ser una cierta constante

Figura 43.

Apartado 5. En éste se les preguntó sobre el tipo de sucesión que forman los valores del tiempo y los valores del número de bacterias, consignados en la Tabla inicial. Con estas preguntas nos dimos cuenta que ninguno de los equipos conocía los conceptos de sucesión aritmética y sucesión geométrica, sin embargo 6 de los equipos contestaron correctamente a éstas preguntas; esto se debió a que pidieron apoyo ya sea al maestro o al investigador, quienes les proporcionaron los nombres de estos tipos de sucesión, pero sólo en los casos en que los equipos ya habían identificado el patrón de comportamiento de estas sucesiones.

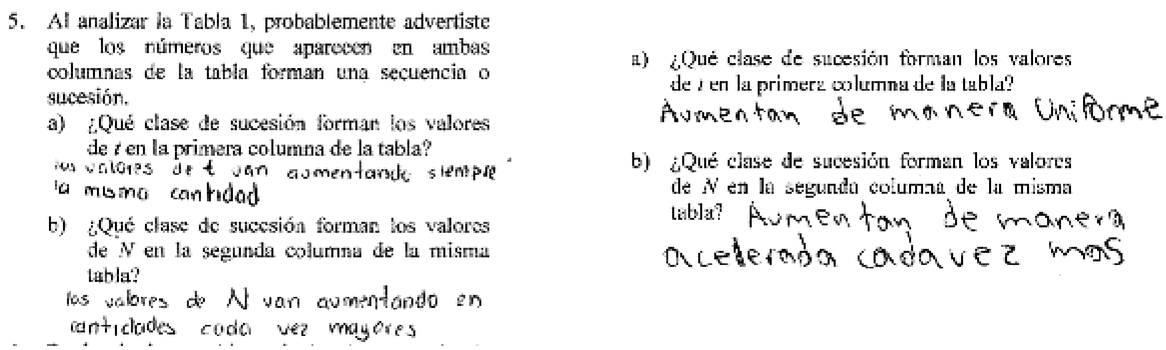


5. Al analizar la Tabla 1, probablemente advertiste que los números que aparecen en ambas columnas de la tabla forman una secuencia o sucesión.
   a) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de t en la primera columna de la tabla? Progresión aritmetica, porque hay una dif constante
   b) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de N en la segunda columna de la misma tabla? Progresión geometrica, porque hay una razón constante

5. Al analizar la Tabla 1, probablemente advertiste que los números que aparecen en ambas columnas de la tabla forman una secuencia o sucesión.
   a) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de t en la primera columna de la tabla? q' es de sucesión ARITMETICA, es decir, estan de igual manera espaciados (o sea de 1 unidad)
   b) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de N en la segunda columna de la misma tabla? de sucesión GEOMETRICA, es decir donde el cociente nos da como resultado una constante

Figura 44.

Los seis equipos restantes reportaron respuestas similares a las siguientes.



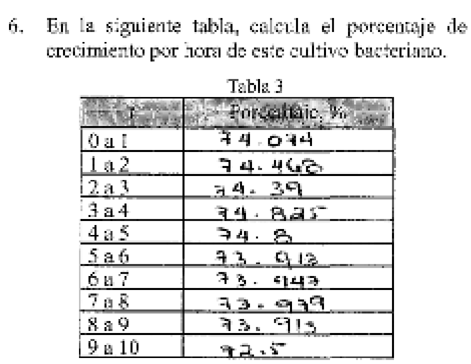
5. Al analizar la Tabla 1, probablemente advertiste que los números que aparecen en ambas columnas de la tabla forman una secuencia o sucesión.
   a) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de t en la primera columna de la tabla? los valores de t van aumentando siempre la misma cantidad
   b) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de N en la segunda columna de la misma tabla? los valores de N van aumentando en cantidades cada vez mayores

a) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de t en la primera columna de la tabla? Aumentan de manera Uniforme

b) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de N en la segunda columna de la misma tabla? Aumentan de manera acelerada cadavez mas

Figura 45.

En el *Apartado 6* se les pidió completar una tabla. Debieron calcular el porcentaje de crecimiento por hora del cultivo bacteriano. Al igual que la Tabla 2, estos valores los calcularon generando una nueva columna en la tabla de datos de la Aplicación de Datos y Matrices.



6. En la siguiente tabla, calcula el porcentaje de crecimiento por hora de este cultivo bacteriano.

Tabla 3

t	Porcentaje, %
0 a 1	74.044
1 a 2	74.468
2 a 3	74.39
3 a 4	74.825
4 a 5	74.8
5 a 6	73.912
6 a 7	73.943
7 a 8	73.939
8 a 9	73.915
9 a 10	72.5

Figura 46.

Dos equipos contestaron de forma similar incorrectamente.

Tabla 3

t	Porcentaje %
0 a 1	174.074
1 a 2	174.468
2 a 3	174.390
3 a 4	174.825
4 a 5	174.8
5 a 6	173.913
6 a 7	173.947
7 a 8	173.976
8 a 9	173.913
9 a 10	172.25

Figura 47.

En el *Apartado 7* se les pidió una interpretación de los valores obtenidos en la tabla 3. Todos los equipos contestaron en forma correcta; en las respuestas que se muestran a continuación, se puede observar que dos de estos equipos no parecen aceptar que los valores que obtuvieron en la Tabla 3 son iguales.

7. Interpreta los valores obtenidos en la Tabla 3.

El porcentaje de crecimiento pareciera ser una constante

7. Interpreta los valores obtenidos en la Tabla 3.

Es el porcentaje de aumento de las bacterias con respecto a una hora anterior, el cual parece ser una constante

7. Interpreta los valores obtenidos en la Tabla 3.

El porcentaje de crecimiento en todas las horas es el mismo

Figura 48.

La pregunta del *Apartado 8* referente a la relación que existe entre la razón constante, calculada en la Tabla 2 y el porcentaje de crecimiento por hora de las bacterias, calculado en la Tabla 3, ningún equipo la contestó correctamente, algunas respuestas representativas son las siguientes:

8. ¿Cómo puedes relacionar la razón constante encontrada en la Tabla 2 con el porcentaje de crecimiento por hora de este cultivo bacteriano, calculado en la Tabla 3?

Es ela misma razón; solamente que en la tabla se presenta como porcentaje

8. ¿Cómo puedes relacionar la razón constante encontrada en la Tabla 2 con el porcentaje de crecimiento por hora de este cultivo bacteriano, calculado en la Tabla 3? Los valores de la tabla 3 son el producto de los valores de la tabla 2 por una constante 100 para convertirlo en un porcentaje, y a este se le restan 100 unidades para que resulte el porcentaje de crecimiento

8. ¿Cómo puedes relacionar la razón constante encontrada en la Tabla 2 con el porcentaje de crecimiento por hora de este cultivo bacteriano, calculado en la Tabla 3? Es el mismo, solo que en la tabla 2 se toma el número total de bacterias que hay en cada hora mientras que en la tabla 3 se toma el número de bacterias que incrementan de una ora a otra

8. ¿Cómo puedes relacionar la razón constante encontrada en la Tabla 2 con el porcentaje de crecimiento por hora de este cultivo bacteriano, calculado en la Tabla 3? Tienen una cierto relacion debido a que los valores obtenidos en la tabla 2 y tabla 3 ~~son~~ cambian de una manera constante

Figura 49.

Los *Apartados 9* y *10* tenían el propósito de que el estudiante completara una tabla, en la cual se le sugería que realizara tratamientos en el registro numérico con el fin de que generalizar estos datos numéricos, para deducir la expresión analítica que modela este crecimiento bacteriano, la cual se solicitó en el *Apartado 11*.
Los resultados obtenidos en estos *Apartados* son los siguientes: 6 equipos completaron ambas columnas de la Tabla 4 correctamente, identificaron el patrón de repetición, por lo cual pudieron generalizar y deducir la representación analítica correcta.

9. En la segunda columna de la siguiente tabla expresa el número de bacterias en términos de la razón constante que obtuviste en la Tabla 2.

Tabla 4

t (hrs.)	# Bacterias ($\times 10^3$)	# Bacterias ($\times 10^3$)
0	27	**27**
1	27×(1.790)	**27×**(1.74)
2	47×(1.744)	**27×**(1.74)^2
3	82×(1.743)	27×(1.74)^3
4	143×(1.748)	27×(1.74)^4
5	250×(1.748)	27×(1.74)^5
6	437×(1.799)	27×(1.74)^6
7	760×(1.738)	27×(1.74)^7
8	1322×(1.739)	27×(1.74)^8
9	2300×(1.739)	27×(1.74)^9
10	4000×(1.739)	27×(1.74)^{10}

10. En la tercera columna de la Tabla 4 expresa el número de bacterias en términos de la **razón constante** y de la **cantidad inicial** de bacterias.

11. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de bacterias y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

$N(t) = 27 \times (1.74)^x$

x = horas (t)

Figura 50.

Dos equipos completaron la segunda columna de la Tabla 4 correctamente, aunque no siguieron las instrucciones indicadas para completar la tercera columna, pero los valores numéricos reportados en ésta son correctos. La fórmula que se pide en el *Apartado 11* es correcta, hubiera sido interesante preguntarles cómo la obtuvieron (a juzgar por el formato de la respuesta parece que la obtuvieron por regresión exponencial con la calculadora).

Tabla 4

t (hrs.)	# Bacterias ($\times 10^3$)	# Bacterias ($\times 10^3$)
0	27	27
1	27×(1.74)	27×(1.74)
2	47×(1.74)	27×(3.03)
3	82 * 1.74	27 x 5.29
4	143 * 1.74	27 x 9.25
5	250 * 1.74	27 x 16.185
6	437 * 1.74	27 x 28.148
7	760 * 1.74	27 x 48.96
8	1322 * 1.74	27 * 85.185
9	2300 * 1.74	27 * 148.138
10	4000 * 1.74	27 * 225.555

11. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de bacterias y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

$\hat{f}(x) = 27 * 1.742014 \wedge x$, donde

$x \geq 0$

Figura 51.

Los cuatro equipos restantes no completaron la tabla 4 correctamente y todo parece indicar que la fórmula que escribieron la obtuvieron por regresión exponencial con la calculadora.

Tabla 4

t (hrs.)	# Bacterias ($\times 10^3$)	# Bacterias ($\times 10^3$)
0	27	27
1	27×(1.74)	27×(1.74)
2	47×(1.74)	27×(2*1.74)
3	82 * (1.74)	27 * (3 * 1.74)
4	143 * (1.74)	27 * (4 * 1.74)
5	250 * (1.74)	27 * (5 * 1.74)
6	437 * (1.74)	27 * (6 * 1.74)
7	760 * (1.74)	27 * (7 * 1.74)
8	1322 * (1.74)	27 * (8 * 1.74)
9	2300 * (1.74)	27 * (9 * 1.74)
10	4000 * (1.74	27 * (10 * 1.74)

11. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de bacterias y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

$Y = a \cdot b \wedge x$ $\quad$ $Y = 27.072 * 1.7420$

$a = 27.072$

$b = 1.7420$ $\quad$ $N = 27.072 * 1.7420 \wedge t$

Tabla 4

t (hrs.)	# Bacterias ($\times 10^3$)	# Bacterias ($\times 10^3$)
0	27	27
1	27×(1.745)	27×(.7434)
2	47×(1.744)	27×(.744)
3	143	20.085
4	250	20.205
5	437	20.196
6	760	19.957
7	1322	19.966
8	2300	19.974
9	4000	19.957
10	6900	19.575

11. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de bacterias y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

$y = 27.072857 * (1.742014)^x$

y= variable dependiente

x= 〃 independiente

Figura 52.

En el *Apartado 12* se les preguntó qué podían hacer para verificar que la fórmula que encontraron es correcta. Once equipos eligieron verificar en el registro algebraico, sólo un equipo eligió el registro gráfico. Esto nos muestra las prácticas de los estudiantes, el privilegiar el registro algebraico, consecuencia de los procesos previos de enseñanza.

12. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?
Sustituyendo los valores del tiempo de la tabla en la ecuación y observando si corresponden a los valores del num. de bacterias.

12. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?
Graficando la fórmula y verificando que se empalmen.

Figura 53.

Los *Apartados 13* y *14* tuvieron el propósito de que el estudiante identificara que la cantidad de bacterias se duplica cada cierto período de tiempo. Ninguno de los equipos observó esta situación, debido a esto, se modificó posteriormente el formato del *Apartado 13.* Contestaron correctamente el *Apartado 13* utilizando la fórmula que obtuvieron anteriormente, pero en el *Apartado 14* no contestaron lo que se esperaba.

13. ¿Cuál será el tamaño de la población de bacterias al cabo de:

1.25 hrs 54.0353   8.1 hrs 2150.57

2.5 hrs 108.146   9.35 hrs 4843.91

3.75 hrs 216.43   10.6 hrs 9694.18

24 hrs 16,466,570.1   48 hrs 10,043,515.96 $\times 10^6$

¿Cómo lo supiste?
Sustituyendo las horas en la variable independiente "x"

14. De acuerdo con los resultados obtenidos en el punto 13, ¿puedes explicar qué está sucediendo?
El número de bacterias depende del valor inicial de bacterias, la razón constante y el número de horas transcurridas.

Figura 54.

Actividad 2: *El problema del tablero de ajedrez.*

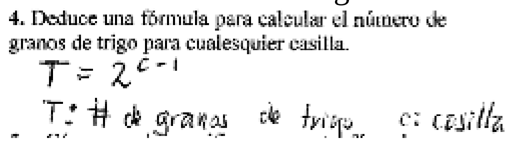
En esta Actividad la información inicial se presentó a través de una descripción verbal del fenómeno de variación.

Todos los equipos realizaron la conversión del registro de representación verbal al registro de representación numérico.

Casilla: c	Número de granos de trigo: g
1	1
2	2
3	(2)(2)=4
4	(2)(2)(2)=8
5	$2^4 = 16$
6	$2^5 = 32$
7	$2^6 = 64$
8	$2^7 = 128$

Figura 55.

Lo mismo sucedió con la conversión del registro de representación tabular al registro de representación gráfico. Para el caso de la conversión del registro numérico al analítico, 9 equipos reportaron expresiones analíticas como la siguiente.

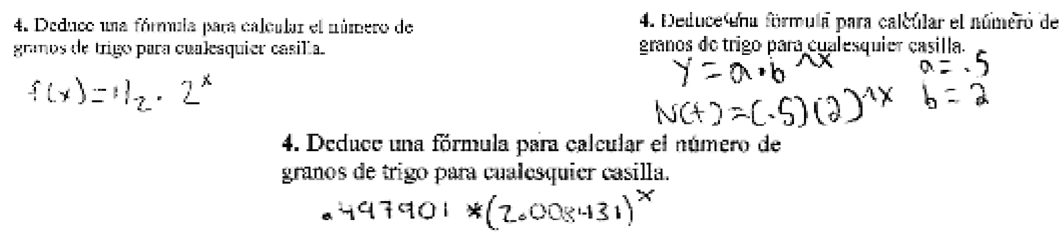

4. Deduce una fórmula para calcular el número de granos de trigo para cualesquier casilla.

$T = 2^{c-1}$

T: # de granos de trigo c: casilla

Figura 56.

Los tres equipos restantes reportaron las siguientes expresiones (Figura 57) lo cual nos sugiere que utilizaron la calculadora (regresión exponencial) para obtenerlas. Observamos también en estas respuestas que, las letras asignadas a las variables no son las correctas.


4. Deduce una fórmula para calcular el número de granos de trigo para cualesquier casilla.

$f(x) = 1/2 \cdot 2^x$

4. Deduce una fórmula para calcular el número de granos de trigo para cualesquier casilla.

$Y = a \cdot b$ ^X $a = .5$

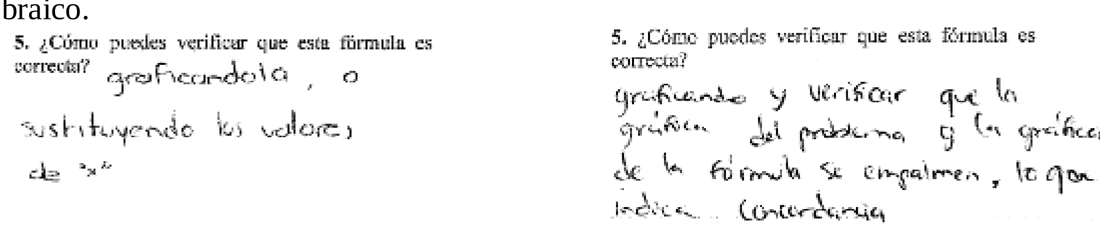
$N(t) = (.5)(2)$^X $b = 2$

4. Deduce una fórmula para calcular el número de granos de trigo para cualesquier casilla.

$.497901 * (2.008431)^x$

Figura 57.

Cuando se les solicitó la forma en que podrían verificar si la fórmula obtenida es correcta, sólo 2 equipos eligieron el registro gráfico, el resto de los equipos eligió el registro algebraico.


5. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta? graficandola, o sustituyendo los valores de "x"

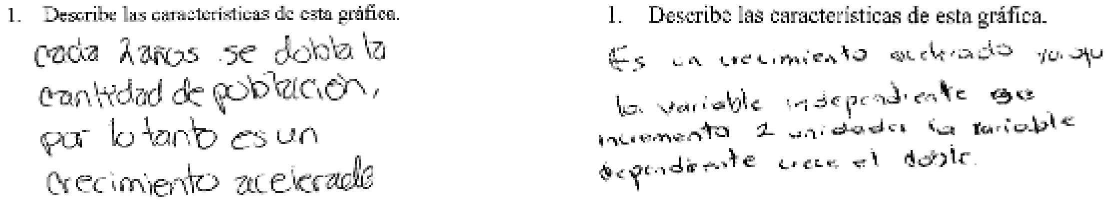
5. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

graficando y verificar que la gráfica del problema y la gráfica de la fórmula se empalmen, lo que indica concordancia

Figura 58.

Actividad 3. *Crecimiento poblacional.*

La información inicial se presentó a través de una gráfica. Todos los equipos describieron esta gráfica como un crecimiento acelerado, pero dos de estos equipos fueron más específicos en su descripción.


1. Describe las características de esta gráfica.

cada 2 años se dobla la cantidad de población, por lo tanto es un crecimiento acelerado

1. Describe las características de esta gráfica.

Es un crecimiento acelerado porque la variable independiente que incrementa 2 unidades la variable dependiente crece el doble.

Figura 59.

En el *Apartado 3* se les pidió completar una tabla haciendo una lectura de la gráfica, todos los equipos seleccionaron los puntos adecuados de la gráfica, como se muestra a continuación.

3. Haciendo una lectura de la gráfica, completa la tabla siguiente.

Tiempo (años)	Población (Hab.)
0	5000
2	10000
4	20000
6	40000
8	80,000

Figura 60.

Nueve equipos realizaron la conversión del registro de representación tabular al registro de representación analítico, aunque no describieron el procedimiento por el cual la realizaron, debido a que no se les solicitó (esta pregunta se modificó posteriormente).

4. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación que existe entre el número de habitantes y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

$P = 500(1.414214)^t$

P: población (Hab)
t: tiempo (años)

Figura 61.

Los 3 equipos restantes, reportaron una expresión analítica similar, la cual es incorrecta. Probablemente los estudiantes no tradujeron de manera adecuada el resultado de la calculadora.

4. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación que existe entre el número de habitantes y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

$p = \sqrt{2 \wedge t}\,(5000) =$

t: tiempo en años
p = Población (Hab)

Figura 62.

En el *Apartado 6* se les preguntó por el porcentaje de crecimiento anual de la población, en esta parte 7 equipos contestaron correctamente y en forma similar al ejemplo que se muestra a continuación.

6. ¿Puedes calcular el porcentaje de crecimiento anual de esta población? ¿Cuál es y cómo lo obtuviste? Si, a partir de la razón constante (1.4142) se multiplica por 100 los decimales y ese es el porcentaje (41.42%)

Figura 63.

A continuación se muestran las respuestas representativas de los 5 equipos que no respondieron acertadamente.

6. ¿Puedes calcular el porcentaje de crecimiento anual de esta población? ¿Cuál es y cómo lo obtuviste? 141.4142135623731 %, se obtuvo multiplicando el índice de crecimiento por 100.

6. ¿Puedes calcular el porcentaje de crecimiento anual de esta población? ¿Cuál es y cómo lo obtuviste? 50% por que si en 2 años aumenta 100% el 1 aumenta la mitad.

6. ¿Puedes calcular el porcentaje de crecimiento anual de esta población? ¿Cuál es y cómo lo obtuviste? 29.28 %

Tomamos parejas seguidas de años, después restamos a la mayor, la menor y lo dividimos entre la población mas alta de ellas

7. ¿Cuál será tiempo de duplicación de esta

Figura 64.

Once equipos identificaron el tiempo de duplicación de esta población; de éstos, 5 equipos lo obtuvieron a partir de la gráfica y los equipos restantes a través de la tabla.

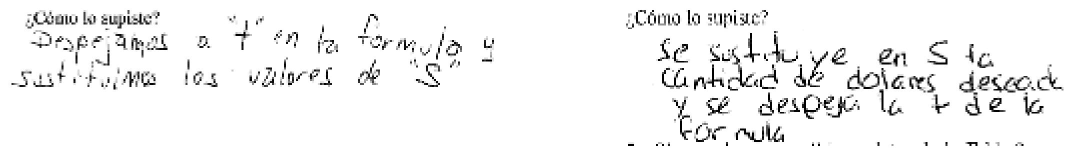
7. ¿Cuál será tiempo de duplicación de esta población? ¿Cómo lo supiste? Cada 2 años se va duplicando esto se puede observar a partir de la lectura de la gráfica.

Figura 65.

Actividad 4. *Asuntos Financieros.*

En esta Actividad la información inicial se proporcionó a través de la representación analítica (la fórmula del interés compuesto). Todos los equipos realizaron la conversión del registro de representación analítico al registro de representación tabular, al igual que la conversión del registro tabular al gráfico; eligieron adecuadamente las escalas de los ejes y trazaron la gráfica uniendo los puntos obtenidos en la gráfica de dispersión generada por la tabla, la cual describieron como un crecimiento acelerado.

En el *Apartado 4* se les pidió completar una tabla, pero en esta ocasión debieron calcular el tiempo de inversión para ciertos saldos dados. Todos los equipos completaron la tabla correctamente; cuando se les preguntó cómo obtuvieron esos valores, hubo dos tipos de respuestas, las cuales se muestran a continuación:


¿Cómo lo supiste?
Despejamos a "t" en la formula y sustituimos los valores de "S"

¿Cómo lo supiste?
Se sustituye en S la cantidad de dolares deseada y se despeja la t de la formula

Figura 66.

Durante nuestra observación de los estudiantes en la clase tuvimos especial atención en esta parte; los estudiantes primero trataron de despejar la variable tiempo manualmente, dándose cuenta de que no podían, por lo que optaron por utilizar la calculadora (con el comando `solve(ecuación, var)`). Por esto, consideramos que uno de los propósitos de esta tabla se cumplió, al concientizar al estudiante de la necesidad de una herramienta matemática para despejar la variable, que se localiza en el exponente de la representación analítica. Otro propósito de esta tabla era que el estudiante analizara los últimos cuatro renglones de ésta, con la intención de que descubriera el tiempo de duplicación de la inversión, logrando que nueve equipos identificaran tal situación, mostrándose a continuación las respuestas representativas.


5. Observa los cuatro últimos datos de la Tabla 2.
¿Qué es lo que ocurre?
Los dos variables aumentan ; la variable independiente tiempo aumenta de forma constante; alrededor de 6.11 años ; y la variable dependiente aumenta el doble

5. Observa los cuatro últimos datos de la Tabla 2.
¿Qué es lo que ocurre?
El capital en dólares se duplica cada 6.116 años.

Figura 67.

Las respuestas de dos de los equipos restantes nos indicaron que sólo se fijaron en los valores calculados del tiempo de inversión y no los relacionaron con los saldos respectivos, como se muestra en la Figura 68.


5. Observa los cuatro últimos datos de la Tabla 2.
¿Qué es lo que ocurre?
va aumentando 6.1

5. Observa los cuatro últimos datos de la Tabla 2.
¿Qué es lo que ocurre?
permanece un crecimiento constante.

Figura 68.

La respuesta del equipo restante fue completamente diferente a las anteriores e incorrecta.

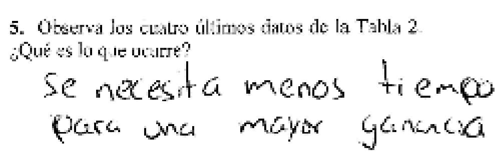

5. Observa los cuatro últimos datos de la Tabla 2.
¿Qué es lo que ocurre?
Se necesita menos tiempo para una mayor ganancia

Figura 69.

Los *Apartados* restantes de esta Actividad tenían el propósito de que el estudiante realizara exploraciones para promover un primer acercamiento al número ***e***. Primeramente a través de una tabla, la cual tenía la finalidad de analizar el efecto en el saldo (*S*) para diferentes períodos de conversión (n). Ningún equipo tuvo dificultades para completar esta tabla. En la pregunta correspondiente referente a los resultados de dicha tabla, las respuestas obtenidas mostraron que cinco equipos contestaron que el período de conversión no era un factor decisivo; esta respuesta era la esperada.

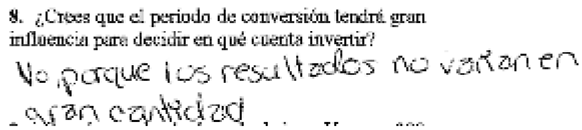
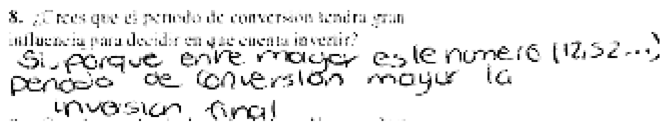

8. ¿Crees que el periodo de conversión tendrá gran influencia para decidir en qué cuenta invertir?
No, porque los resultados no varían en gran cantidad

Figura 70.

Los siete equipos restantes contestaron lo contrario; de éstos, cinco equipos explicaron su decisión con argumentos similares a los siguientes:


8. ¿Crees que el periodo de conversión tendrá gran influencia para decidir en qué cuenta invertir?
Si, porque entre mayor es le numero (12, 52...) periodo de conversion mayor la invesion final

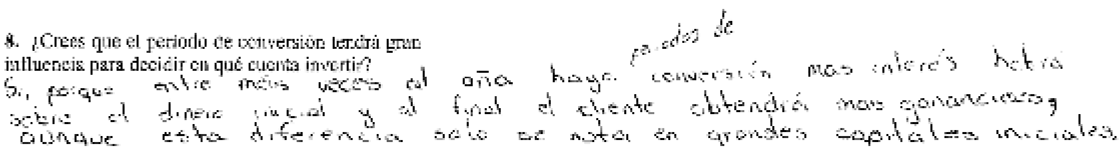
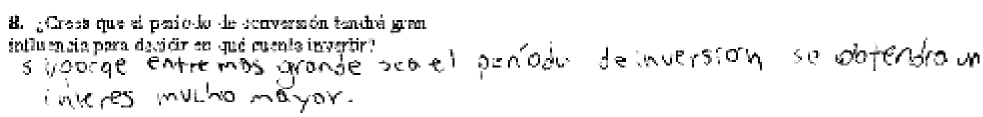

8. ¿Crees que el periodo de conversión tendrá gran influencia para decidir en qué cuenta invertir?
Si, porque entre más veces al año haya periodos de conversión mas interés habrá sobre el dinero inicial y al final el cliente obtendrá mas ganancias, aunque esta diferencia solo se notará en grandes capitales iniciales

Figura 71.

Estas respuestas son correctas, aunque la intención de la pregunta era otra. Los otros dos equipos aparentemente no entendieron la pregunta, así como tampoco el significado de los parámetros involucrados en la fórmula.


8. ¿Crees que el periodo de conversión tendrá gran influencia para decidir en qué cuenta invertir?
Si porque entre más grande sea el período de inversion se obtendra un interes mucho mayor.

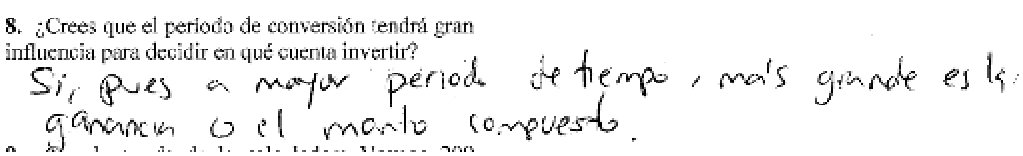

8. ¿Crees que el periodo de conversión tendrá gran influencia para decidir en qué cuenta invertir?
Si, pues a mayor period de tiempo, más grande es la ganancia o el monto compuesto.

Figura 72.

En la siguiente parte se le planteó al estudiante una situación especial, con la intención de que explorara el comportamiento del saldo compuesto (S); para esto, debió completar una tabla donde tenía que calcular el valor de la expresión $(1 + \frac{1}{n})^n$ para valores de n cada vez mayores, obteniéndose una aproximación al número e. Todos los equipos completaron esta tabla de forma correcta.

Tabla 5

n	$(1+1/n)^n$
1	2
5	2.48832
10	2.59374246
50	2.69158803
100	2.70481383
1000	2.71692393
10000	2.71814593
100000	2.71826824
10000000	2.71828167
100000000	2.71828181
1000000000	2.71828183

Figura 73.

En cuanto a la descripción de los resultados de la tabla anterior, encontramos que todos los equipos coincidieron; algunas respuestas representativas se muestran a continuación:

15. Describe los resultados obtenidos en la Tabla 5.

A medida que los valores de la variable independiente aumentan de manera constante, los valores de la variable dependiente aumentan cada vez menos con un crecimiento desacelerado.

15. Describe los resultados obtenidos en la Tabla 5.

a medida que crecen las veces al año que se efectúa la composición, el monto o el saldo crece cada vez menos.

Figura 74.

Con relación al último *Apartado* de esta Actividad, donde se pretendió que escribiera la fórmula del interés compuesto continuo, el cual se describió previamente en qué consistía, sólo un equipo reportó la fórmula que se esperaba (ver Figura 75).

16. ¿Cómo queda entonces la fórmula para calcular ***S*** para el caso en que el interés anual es del 100% compuesto continuamente?

$S = C(2.718281)^t$

t: numero de años. $t \geq 0$

c: Capital inicial. $c > 0$

Figura 75.

Los demás equipos no realizaron con éxito esta conversión del registro de representación tabular al registro de representación analítico. A continuación se muestran las respuestas representativas de estos equipos.

16. ¿Cómo queda entonces la fórmula para calcul... ***S*** para el caso en que el interés anual es del 100... compuesto continuamente?

$S = C(1 + 1/n)^n$

$n \to \infty$

16. ¿Cómo queda entonces la fórmula para calcular ***S*** para el caso en que el interés anual es del 100% compuesto continuamente?

$S = (1 + 1/n)^n$

Figura 76.

Actividad 5. *El problema del restablecimiento del ritmo cardiaco.*
A partir de esta Actividad inició la exploración de fenómenos de variación exponencial decrecientes particularmente en esta Actividad se presentó la información inicial a través de una tabla de valores numéricos.

Todos los equipos coincidieron con las respuestas del *Apartado 1*, como se muestra en las siguientes respuestas representativas.


1. ¿Crees que el número de latidos por minuto disminuye uniformemente, o lo hace de algún otro modo? Argumenta tu respuesta. NO. el tiempo aumenta de manera constante, mientras que la variable independiente decrece cada vez menos.

1. ¿Crees que el número de latidos por minuto disminuye uniformemente, o lo hace de algún otro modo? Argumenta tu respuesta. No disminuye de una forma uniforme, más bien parece disminuir de una forma desacelerada, osea, cada vez menos

Figura 77.

Todos los equipos realizaron la conversión del registro de representación tabular al registro de representación gráfico; eligieron las escalas correctamente, obtuvieron la gráfica de dispersión a partir de los datos de la tabla y unieron los puntos resultantes.

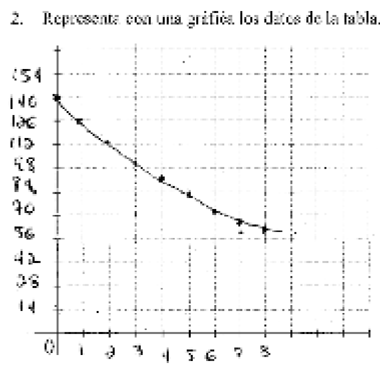


Figura 78.

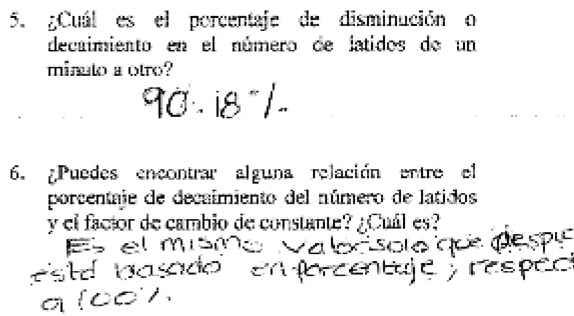
Cuando se les preguntó por el tipo de sucesión que forman los valores numéricos del tiempo (*t*) y del número de latidos (*L*), diez de los equipos respondieron que se trataba de una sucesión aritmética y geométrica respectivamente, y describieron las características de éstas. Los dos equipos restantes identificaron la característica de una sucesión aritmética pero no la reconocieron como tal, además tuvieron dificultades para identificar la característica de la sucesión geométrica.


3. a) ¿Qué tipo de sucesión forman los valores numéricos de *t* de la Tabla 1? Aumenta una constante

b) ¿Qué tipo de sucesión forman los valores numéricos de *L* de la Tabla 1? disminuyen de forma desacelerada

Figura 79.

Todos los equipos calcularon el factor de cambio constante en forma correcta. Con respecto al porcentaje de disminución, sólo tres equipos lo calcularon en forma incorrecta, por lo que la pregunta siguiente también la respondieron incorrectamente, como se muestra en la figura 80.


5. ¿Cuál es el porcentaje de disminución o decaimiento en el número de latidos de un minuto a otro?

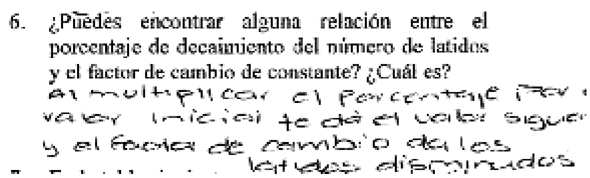
90.18 %

6. ¿Puedes encontrar alguna relación entre el porcentaje de decaimiento del número de latidos y el factor de cambio de constante? ¿Cuál es?

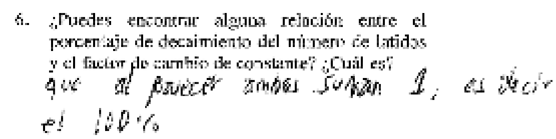
Es el mismo valor solo que despues, está basado en porcentaje, respecto al 100%.

Figura 80.

En el *Apartado 6* ningún equipo respondió correctamente, lo cual indicó que aunque calcularon bien el porcentaje de decaimiento y el factor constante de cambio, no encontraron la relación entre ellos, como se muestra a continuación.


6. ¿Puedes encontrar alguna relación entre el porcentaje de decaimiento del número de latidos y el factor de cambio de constante? ¿Cuál es?

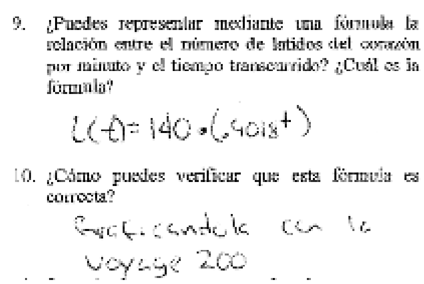
al multiplicar el porcentaje por valor inicial te da el valor siguiente y el factor de cambio de los latidos disminuidos


6. ¿Puedes encontrar alguna relación entre el porcentaje de decaimiento del número de latidos y el factor de cambio de constante? ¿Cuál es?

que al parecer ambos suman 1, es decir el 100%

Figura 81.

En los *Apartados 7* y *8* completaron correctamente la tabla sin ninguna dificultad. En los *Apartados 9* y *10* tampoco hubo problemas, reportaron en forma correcta la expresión analítica, por lo que realizaron la conversión del registro numérico al registro analítico; y en cuanto a la verificación de la expresión analítica, diez equipos coincidieron en que se deben sustituir distintos valores del tiempo y que los resultados deben coincidir con los datos de la tabla, sólo un equipo prefirió el registro gráfico para verificar (Figura 82).


9. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de latidos del corazón por minuto y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

$L(t) = 140 \cdot (.9018^{t})$

10. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

Graficandola con la voyage 200

Figura 82.

Los *Apartados* del *11* al *16* tenían la intención de reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula, así como también que los estudiantes visualizaran el efecto de éstos en la gráfica. Todos los equipos completaron correctamente las tablas que se les indicaron y dedujeron una expresión analítica para cada una de ellas, asimismo, dibujaron correctamente las gráficas correspondientes. Al analizar estas gráficas nos dimos cuenta que once de los equipos seleccionaron el mismo dominio: [0,10]. Por lo que nos surgió la duda; ¿será que estaban pensando en el contexto? ó ¿será porque son los valores asignados en las tablas? Al analizar la respuesta de uno de los equipos (figura 86) parece indicar que si tomaron en cuenta el contexto, pero las respuestas de los demás equipos no lo especifican. A continuación se muestra una de estas gráficas.

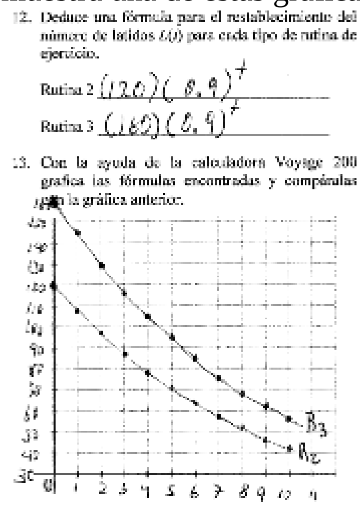


Figura 83.

Sólo un equipo reportó gráficas como las siguientes:

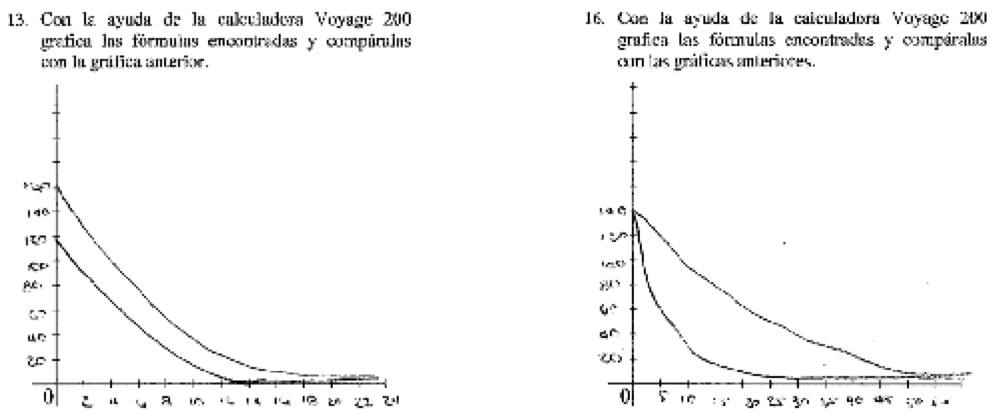
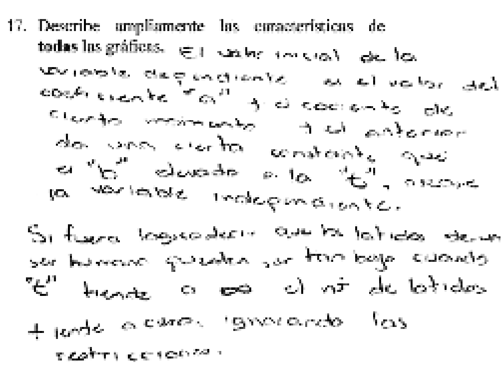


Figura 84.

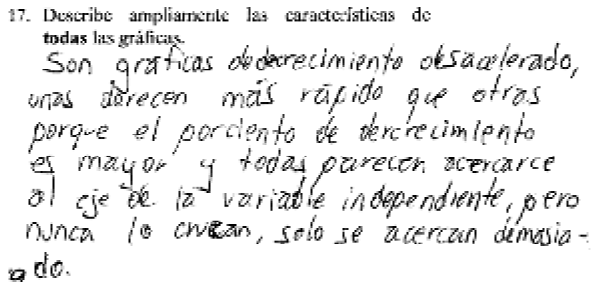
Este mismo equipo en el *Apartado 17* expuso las siguientes razones para las gráficas trazadas.



Transcripción: El valor inicial de la variable independiente es el valor del coeficiente "*a*", el cociente de cierto momento y el anterior da una cierta constante que es "*b*" elevado a la "*t*", osease la variable independiente.
Si fuera lógico decir que los latidos de un ser humano pueden ser tan bajo cuando "*t*" tiende a ∞ el no. de latidos tiende a cero, ignorando las restricciones.

Figura 85.

Los equipos restantes coincidieron en la respuesta del *Apartado 17,* al afirmar que todas las gráficas describen un decrecimiento desacelerado. A continuación se muestra una de estas respuestas, que corresponde al equipo que trazó la gráfica de la Figura 83.


17. Describe ampliamente las características de **todas** las gráficas.

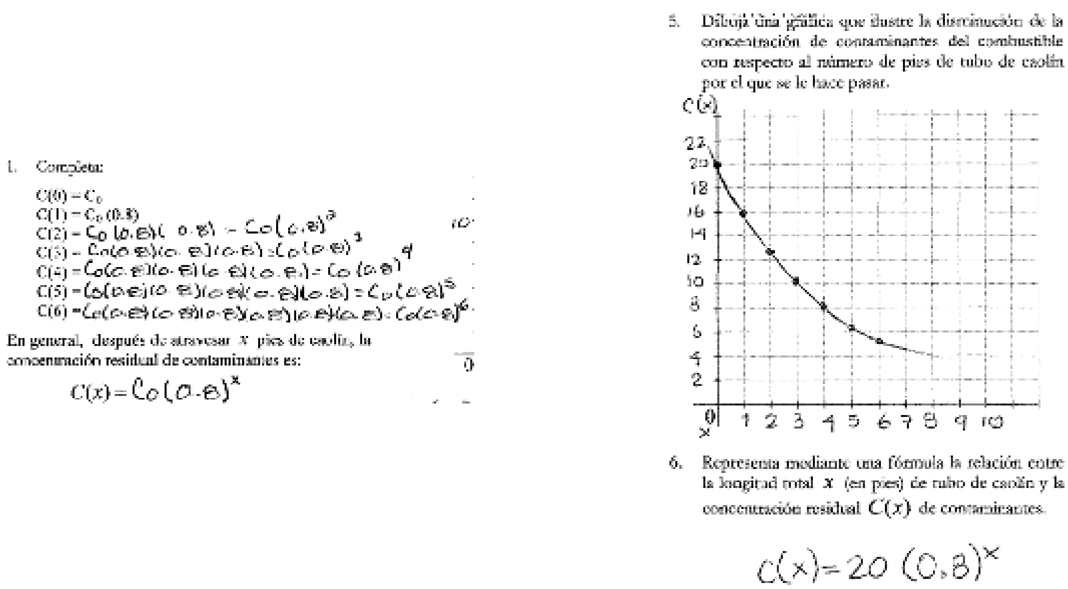
Son gráficas de decrecimiento desacelerado, unas decrecen más rápido que otras porque el porciento de decrecimiento es mayor y todas parecen acercarce al eje de la variable independiente, pero nunca lo cruzan, solo se acercan demasiado.

Figura 86.

Actividad 6. *Eliminación de contaminantes del combustible de aviones a reacción.*

Al analizar los resultados de esta Actividad reportados por los equipos, se observó con mayor claridad su avance en la identificación de las características de este tipo de variación, así como en el desarrollo de las habilidades de conversión entre los diferentes registros de representación.

A partir de la descripción verbal del fenómeno de variación, todos los equipos completaron correctamente la tabla o sea que realizaron la conversión del registro verbal al registro numérico, trazaron la gráfica correspondiente en forma correcta (conversión del registro numérico al registro gráfico) y obtuvieron la expresión analítica adecuada (conversión del registro numérico al registro analítico).


1. Completa:

$C(0) = C_0$
$C(1) = C_0\,(0.8)$
$C(2) = C_0(0.8)(0.8) = C_0(0.8)^2$
$C(3) = C_0(0.8)(0.8)(0.8) = C_0(0.8)^3$
$C(4) = C_0(0.8)(0.8)(0.8)(0.8) = C_0(0.8)^4$
$C(5) = C_0(0.8)(0.8)(0.8)(0.8)(0.8) = C_0(0.8)^5$
$C(6) = C_0(0.8)(0.8)(0.8)(0.8)(0.8)(0.8) = C_0(0.8)^6$

En general, después de atravesar x pies de caolín, la concentración residual de contaminantes es:

$C(x) = C_0(0.8)^x$

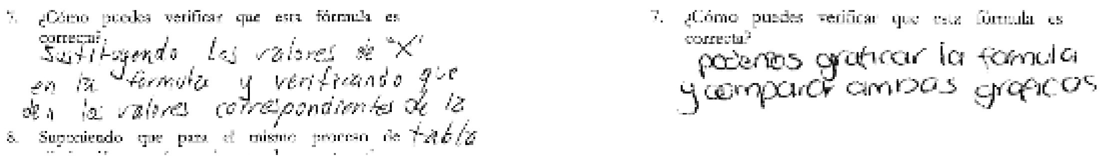
5. Dibuja una gráfica que ilustre la disminución de la concentración de contaminantes del combustible con respecto al número de pies de tubo de caolín por el que se le hace pasar.

6. Representa mediante una fórmula la relación entre la longitud total x (en pies) de tubo de caolín y la concentración residual $C(x)$ de contaminantes.

$c(x) = 20\,(0.8)^x$

Figura 87.

En cuanto a la verificación de la fórmula, se siguió observando que sólo cuatro equipos seleccionaron el registro gráfico para realizarla, aunque este número ha ido en aumento, los demás se inclinaron por el registro analítico.

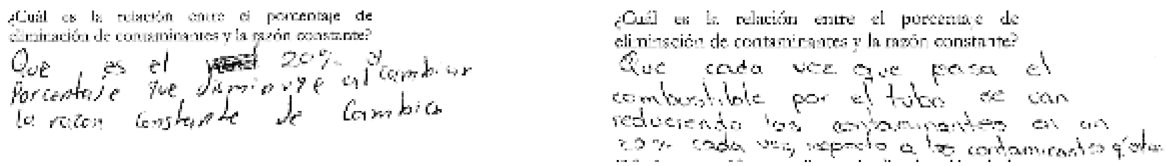

7. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta? Sustituyendo los valores de "X" en la fórmula y verificando que den los valores correspondientes de la tabla

8. Suponiendo que para el mismo proceso de

7. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta? podemos graficar la formula y comparar ambas graficas

Figura 88.

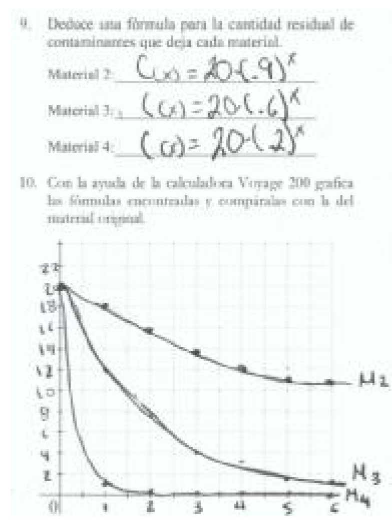
Todos los equipos tuvieron dificultades para encontrar la relación entre el factor constante de cambio y el porcentaje de cambio, como se muestra en la Figura 89.


¿Cuál es la relación entre el porcentaje de eliminación de contaminantes y la razón constante? Que es el 20% al cambiar porcentaje que disminuye el la razon constante de cambio

¿Cuál es la relación entre el porcentaje de eliminación de contaminantes y la razón constante? Que cada vez que pasa el combustible por el tubo se van reduciendo los contaminantes en un 20% cada vez respecto a los contaminantes que

Figura 89.

Los *Apartados* del 8 al *14* tenían la intención de reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula, así como visualizar el efecto de éstos en la gráfica. Todos los equipos completaron correctamente las tablas que se les pedían y dedujeron una expresión analítica para cada una de ellas; asimismo, dibujaron correctamente las gráficas correspondientes. Analizando estas gráficas nos dimos cuenta que 7 equipos seleccionaron el dominio de [0,6], que coincide con los valores asignados a las tablas; los 5 equipos restantes seleccionaron un dominio mayor.


9. Deduce una fórmula para la cantidad residual de contaminantes que deja cada material.

Material 2: $C(x) = 20(.9)^x$

Material 3: $C(x) = 20(.6)^x$

Material 4: $C(x) = 20(.2)^x$

10. Con la ayuda de la calculadora Voyage 200 grafica las fórmulas encontradas y compáralas con la del material original.

12. Deduce una fórmula para cada tipo de combustible.

Combustible 2: $C(x) = 100(.8)^x$

Combustible 3: $C(x) = 50(.8)^x$

Combustible 4: $C(x) = 100(.8)^x$

13. Con la ayuda de la calculadora Voyage 200 grafica las fórmulas encontradas y compáralas con las del combustible original.

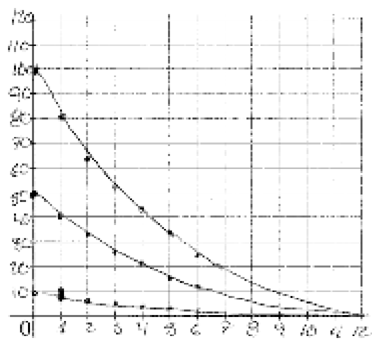


Figura 90.

Actividad 7. *Eliminación de una droga por el organismo.*

En esta Actividad la información inicial se presentó a través de la representación gráfica.

En los primeros dos *Apartados* los alumnos debieron describir las características de la gráfica, así como la forma en que disminuye la concentración de ampicilina. Todos los equipos coincidieron en afirmar que se trata de una gráfica de decrecimiento desacelerado, tres equipos hicieron una descripción más detallada, como se observa en la figura 91.

1. Describe las características de esta gráfica.
El eje x es asintota de la grafica Presenta un fenomeno de variacion decreciente desacelerado. interseccion con el eje Y es 250.

2. ¿De qué forma crees que está disminuyendo la concentración de ampicilina? Argumenta tu respuesta. conforme los valores en el eje x van aumentando la concentracion disminuye cada vez menos

Figura 91.

Todos los equipos realizaron lecturas apropiadas en la gráfica.

Tabla 1

Tiempo t (hrs.)	Conc. ampicilina C. (mg)
0	250
.25	220
.05	190
1	150
2	90
5	20
6.25	10

Figura 92.

Por lo datos reportados, todo parece indicar que para completar la tabla, algunos equipos utilizaron también la fórmula (ver Figura 93).

3. Haciendo una lectura de la gráfica, completa la siguiente tabla.

Tabla 1

Tiempo t (hrs.)	Conc. ampicilina C_t (mg)
0	250
1	149.05
2	90
3	55.29
4	33.67
5	20
6	12.48
7	7.76

Figura 93.

Todos los equipos reportaron la fórmula en forma correcta y coincidieron también en la forma de verificar la veracidad de ésta.

5. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

Sustituyendo los valores de t en la formula y verificando con la tabla y grafica.

Figura 94.

Todos los equipos completaron la Tabla 2 correctamente y señalaron que lo hicieron utilizando la fórmula. Con respecto a esta tabla, se les preguntó el tipo de sucesión que forman los valores numéricos de las variables *t* y *C*, ocho equipos identificaron que se trataba de una sucesión aritmética y geométrica respectivamente. En la Figura 95 se muestra una respuesta representativa de los tres equipos restantes.

7. Analiza los valores de t de la Tabla 2. ¿Qué tipo de sucesión forman estos valores?

~~[illegible]~~ Creciente Uniforme

8. Analiza los valores de C de la Tabla 2. ¿Qué tipo de sucesión forman estos valores?

Decreciente Desacelerado

Figura 95.

También de la Tabla 2 se les preguntó sobre lo que observaban que estaba sucediendo, con la intención que identificaran la vida media de este medicamento. Sólo un equipo identificó tal situación (ver Figura 96).

9. De acuerdo con los resultados que encontraste en la Tabla 2, ¿puedes explicar qué está sucediendo? conforme los valores de la variable independiente varían con una cierta constante los valores de la variable dependiente disminuyen aparentemente la mitad

Figura 96.

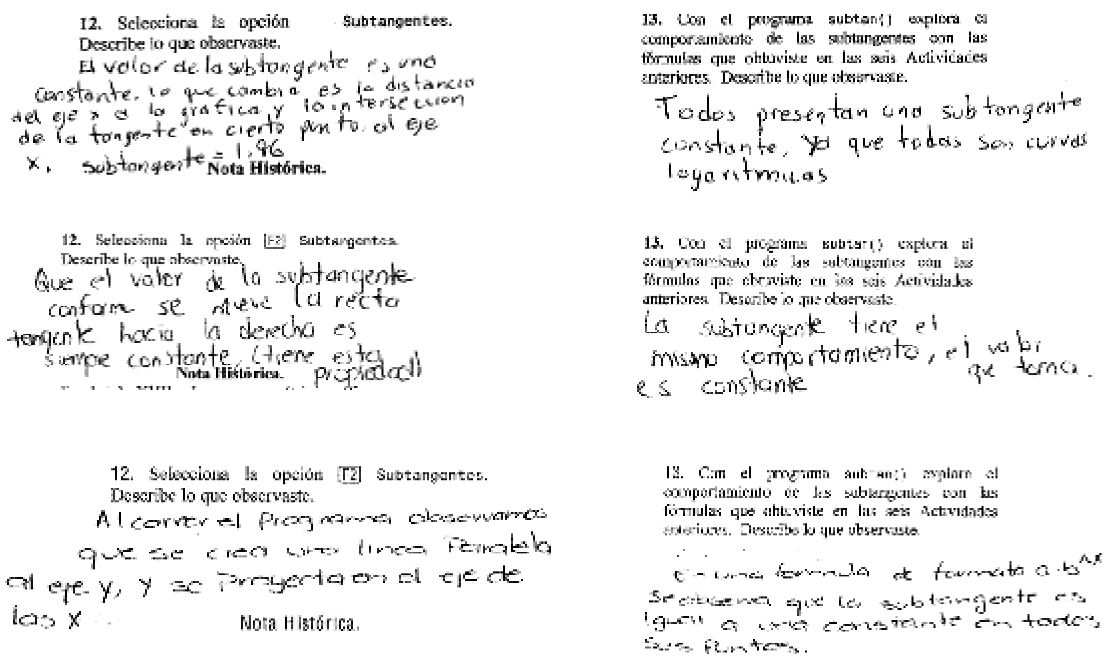
Las respuestas reportadas por los equipos restantes son similares a las que se muestran en la Figura 97.


9. De acuerdo con los resultados que encontraste en la Tabla 2, ¿puedes explicar qué está sucediendo?
Que la eliminacion de la droga se hace cada vez mas lenta

9. De acuerdo con los resultados que encontraste en la Tabla 2, ¿puedes explicar qué está sucediendo? Conforme aumentan los valores de t disminuyen los valores de C

Figura 97.

El *Apartado 10* se asignó como tarea extraclase; el estudiante debió investigar el significado del concepto subtangente. Sólo seis equipos reportaron los resultados de lo investigado. A partir de esta parte de la Actividad el estudiante realizó sus exploraciones apoyado en el programa interactivo llamado `subtan( )`.
Los *Apartados 12* y *13* tenían el propósito de que el estudiante explorara el comportamiento constante de las subtangentes en las funciones exponenciales. En la Figura 98 se muestran las respuestas representativas de los equipos que investigaron sobre la subtangente (que llamaremos grupo 1).


12. Selecciona la opción Subtangentes. Describe lo que observaste.
El valor de la subtangente es una constante, lo que cambia es la distancia del eje x a la gráfica y la intersección de la tangente en cierto punto al eje x, subtangente = 1.96
Nota Histórica.

13. Con el programa subtan( ) explora el comportamiento de las subtangentes con las fórmulas que obtuviste en las seis Actividades anteriores. Describe lo que observaste.
Todos presentan una subtangente constante, ya que todas son curvas logaritmicas

12. Selecciona la opción F2 Subtangentes. Describe lo que observaste.
Que el valor de la subtangente conforme se mueve la recta tangente hacia la derecha es siempre constante (tiene esta propiedad)
Nota Histórica.

13. Con el programa subtan( ) explora el comportamiento de las subtangentes con las fórmulas que obtuviste en las seis Actividades anteriores. Describe lo que observaste.
La subtangente tiene el mismo comportamiento, el valor que toma es constante

12. Selecciona la opción F2 Subtangentes. Describe lo que observaste.
Al correr el Programa observamos que se crea una linea Paralela al eje y, y se Proyecta en el eje de las x
Nota Histórica.

13. Con el programa subtan( ) explora el comportamiento de las subtangentes con las fórmulas que obtuviste en las seis Actividades anteriores. Describe lo que observaste.
En una formula de formato a·b^x se observa que la subtangente es igual a una constante en todos sus puntos.

Figura 98.

A continuación se muestran las respuestas de los equipos que no realizaron la tarea de investigar (grupo 2), las cuales nos indicaron que no visualizaron las subtangentes en la gráfica.

12. Selecciona la opción [F2] Subtangentes.
Describe lo que observaste.

Me salio el valor de las subtangentes y me sale cada vez más grande con un angulo recto.

Nota Histórica

13. Con el programa subtan() explora el comportamiento de las subtangentes con las fórmulas que obtuviste en las seis Actividades anteriores. Describe lo que observaste.

se formo un triangulo rectangulo, mostrando el aumento en la subtangente de modo que queda más grande el triangulo, pero con el mismo angulo

14. Explora con el mismo programa el

12. Selecciona la opción [F2] Subtangentes.
Describe lo que observaste.

Aparece una curva de decrecimiento desacelerado; y el movimiento de la subtangente es hacia la derecha y es cada vez más chica

13. Con el programa subtan() explora el comportamiento de las subtangentes con las fórmulas que obtuviste en las seis Actividades anteriores. Describe lo que observaste.

Aparece la gráfica de la función y la subtangente va desplazandose hacia la derecha; y como son fenómenos de decrecimiento desacelerado, los valores son cada vez mas pequeños

12. Selecciona la opción [F2] Subtangentes.
Describe lo que observaste.

que la subtangente se movía hacia la derecha mientras su pendiente se iba haciendo mas grande.

13. Con el programa subtan() explora el comportamiento de las subtangentes con las fórmulas que obtuviste en las seis Actividades anteriores. Describe lo que observaste.

En todas las actividades se obtiene una grafica decreciente desacelerada en los cuales las distancias de la curva al eje x son cada vez menores, mientras los del eje y se mantienen.

Figura 99.

Por último, en el *Apartado 14* el estudiante exploró el comportamiento de las subtangentes para otros tipos de funciones, con el propósito de que identificara que éstas no son constantes. En la Figura 100 se muestran respuestas representativas del grupo 1.

14. Explora con el mismo programa el comportamiento de las subtangentes con fórmulas de funciones que no sean exponenciales.

En funciones cuadraticas la subtan no es una constante, ni en las funciones lineales.

14. Explora con el mismo programa el comportamiento de las subtangentes con fórmulas de funciones que no sean exponenciales.

lo que pasa es que el valor de la subtangente conforme se mueve la tangente no es constante, toma valores distintos cuando las funciones no son exponenciales.

Figura 100.

A continuación se muestra una respuesta representativa del grupo 2.

14. Explora con el mismo programa el comportamiento de las subtangentes con fórmulas de funciones que no sean exponenciales.

Según sea la formula la subtangente muestra un comportamiento diferente; en las lineales es igual siempre. Y en las cuadraticas la subtangente se comporta como la tangente de la curva, osea la derivada.

Figura 101.

IV.3. A manera de conclusión.

De acuerdo con estos resultados, identificamos que estos estudiantes desconocían los conceptos de sucesión aritmética y sucesión geométrica, y en consecuencia las relaciones entre éstas, por lo que consideramos promover en todas las Actividades de este Bloque, que el estudiante explore las características de estas sucesiones numéricas, para que cuando explore las relaciones entre estas progresiones en el Bloque II, ya no tenga dificultades para identificarlas. Además, buscamos promover que el estudiante identificara la relación entre este tipo de variación y el hecho de que cuando los valores de la variable independiente forman una progresión aritmética en la tabla, los valores de la variable dependiente forman una progresión geométrica.

También a partir de estos resultados consideramos que antes de que los estudiantes realicen las exploraciones con el programa `subtan( )`, debe haber una discusión con el grupo completo para clarificar el concepto de subtangente y se pueda lograr la identificación de ésta en la gráfica, a fin de que al trabajar con dicho programa, éste cumpla con el objetivo para el cual fue diseñado: que el estudiante identifique el comportamiento constante de las subtangentes en las funciones exponenciales.

Después de este análisis, se decidió incluir una nueva Actividad (la Actividad 9), la cual tiene el propósito de promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro numérico para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente, para los casos cuando los intervalos de variación de la variable independiente registrados en la tabla sean diferentes de 1 ($\Delta x \neq 1$).

También se detectó que algunas de las Actividades requerían ciertas modificaciones (de redacción, de formato, agregar nuevas preguntas). Por ejemplo:

De la Actividad 1 se reportó un análisis del pilotaje más detallado debido a que ésta es la primera de la secuencia; también fue a la que se le realizaron más modificaciones, las cuales consistieron en:

- Se eliminó el último renglón de la Tabla 1, que contiene la información inicial, para que los datos se ajusten mejor a una variación exponencial del tipo $y = ca^x$, aunque esto no provocó un conflicto en este grupo de estudiantes.
- En el *Apartado 12*, se agregó una pregunta con el propósito de que el estudiante observe la ubicación de la variable independiente en la representación analítica.
- Se cambió el formato del *Apartado 13* y se agregaron dos nuevas preguntas, con la intención que el estudiante se percate de que la cantidad de bacterias se duplica cada cierto período de tiempo, y que no importa cuándo se inicia el conteo, transcurrido dicho período de tiempo, la cantidad de bacterias se duplica.
- Se agregaron nuevas tablas para que el estudiante las complete, algunas apoyado en la fórmula y otras a partir de lecturas en la gráfica. También se agregaron las preguntas correspondientes del análisis de estas tablas, con la intención de que el estudiante identifique el hecho de que cuando los valores de la variable

independiente forman una progresión aritmética, los valores de la variable dependiente forman una progresión geométrica.

En general, consideramos que durante el desarrollo de este Bloque de Actividades, los estudiantes realizaron las conversiones y los tratamientos que se promovieron, observando con esta experimentación que los estudiantes adquirieron habilidades para identificar la variación exponencial del tipo $y = ca^x$ en cualesquier registro de representación que se les presente.

Capítulo V

Conclusiones

El propósito de este trabajo ha consistido en diseñar una secuencia didáctica para el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas, y en particular, para promover la introducción de una manera intuitiva para los estudiantes de la base e en ambos tipos de funciones, apoyado este diseño desde una perspectiva teórica basada en la Teoría de las Representaciones Semióticas de Raymond Duval y utilizando como herramienta didáctica la calculadora Voyage 200.

Para lograr este propósito nos planteamos la tarea de investigar el desarrollo histórico de los conceptos de logaritmo y función exponencial, con el propósito de conocer con mayor profundidad el tema, así como también rescatar significados que pudieran haberse diluido del discurso escolar actual, dicha tarea nos proporcionó elementos fundamentales para la realización de nuestro diseño. Éstos son los siguientes:

- La relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica; esta relación constituyó el eje central en el desarrollo de los logaritmos, la cual nosotros adoptamos también como eje central de nuestra propuesta didáctica.
- La característica geométrica de las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas de poseer una subtangente constante; dicha característica fue clave para la incorporación al registro geométrico de este tipo de curvas, el cual era considerado en el siglo XVII la principal representación en matemáticas. En nuestra secuencia utilizamos esta característica geométrica de las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas como eje central para la exploración de la razón de cambio (derivada) de ambos tipos de funciones, ya que ésta es la causa fundamental de su importancia en las matemáticas y en las aplicaciones en otras ciencias, particularmente cuando la base de estas funciones es el número e.

Debido a esto y de acuerdo al enfoque teórico que sustenta esta propuesta (Teoría de las Representaciones Semióticas) se organizó la secuencia didáctica en cinco bloques de Actividades:

- **Bloque I:** La variación exponencial.
  Propusimos este bloque de Actividades didácticas como un primer acercamiento al estudio de la variación exponencial del tipo ($y = ca^x$ donde: $a > 0$ y $c > 0$).
- **Bloque II:** Los logaritmos y sus propiedades.
  El objetivo de este bloque consistió en que el estudiante comprendiera el concepto de logaritmo y sus propiedades, mediante la exploración de progresiones aritméticas y geométricas, como una forma de emular el desarrollo histórico de éstos, así como también algunos de los obstáculos que se presentaron en su evolución, como por ejemplo la falta del concepto de base.
- **Bloque III:** La variación logarítmica.
  Por medio de este bloque de Actividades didácticas se propuso un primer acercamiento a la variación logarítmica, promoviendo exploraciones en los distintos registros de representación, que giran en torno a descubrir las características

logarítmicas, mediante el uso explícito de la relación entre las progresiones geométrica y aritmética, a través de problemas prácticos y utilizando como herramienta la calculadora Voyage 200.

- **Bloque IV:** Análisis gráfico de las funciones exponenciales y logarítmicas.
  En este Bloque se llevó a cabo una asociación "variable visual de la representación gráfica–unidad significativa de la expresión analítica" tanto para las funciones exponenciales como para las logarítmicas. Esta asociación no solamente centra la atención sobre la relación entre representación gráfica y representación analítica, sino que en ocasiones permite encontrar directamente la expresión analítica a partir de propiedades geométricas.
- **Bloque V:** Funciones exponenciales y logarítmicas con base e.
  Tomando como eje central la característica geométrica de las gráficas (tanto de las funciones exponenciales como de las logarítmicas) de poseer una subtangente constante, se promueve una exploración, primeramente con las funciones exponenciales, propiciando en los estudiantes generar la hipótesis de que existe una base especial que hace que las gráficas de la función y de su derivada coincidan. También se analiza el caso de las funciones logarítmicas, en las que la gráfica de la función derivada "se asemeja" a la de la función $y = \frac{1}{x}$, y la coincidencia se logra cuando se toma como base del logaritmo al número e.

En las Actividades que conforman la secuencia didáctica se promueven todas las conversiones posibles entre los diferentes registros de representación: verbal, gráfico, numérico y analítico, con el fin de que el estudiante logre coordinar éstos. Sin embargo se privilegian algunas de estas conversiones como son; la conversión del registro numérico al registro analítico y la conversión del registro gráfico al analítico, la razón de esto es debido a que éstas juegan un papel importante en la aplicación del conocimiento matemático a los problemas del mundo real ya que en el ejercicio profesional de las matemáticas o en las aplicaciones de las matemáticas a los distintos campos profesionales, es una situación común el que la información inicial sobre los problemas a abordar, estudiar o resolver esté dada en forma de tabulación o en forma de gráfica.

Se llevó a cabo el pilotaje de las Actividades del Bloque I con un grupo de estudiantes universitarios inscritos en un curso de Cálculo Diferencial e Integral I del Área de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora, que siguió una innovación curricular, la cual consiste en la realización sistemática de actividades didácticas cuyos diseños son teóricamente fundamentados, y que involucran el uso de la calculadora simbólica. A través de este pilotaje pudimos identificar que los estudiantes realizaron los tratamientos y las conversiones que se promovieron en estas Actividades, por lo que consideramos que los estudiantes lograron una aprehensión de los conceptos promovidos en este Bloque, al observar que desarrollaron habilidades para identificar la variación exponencial del tipo $y = ca^x$ en cualesquier registro de representación que se les presente. Este pilotaje nos ayudó también para darnos cuenta de ciertos cambios que requerían algunas Actividades con el fin de mejorarlas. Esto sugiere que el proceso de diseño de secuencias didácticas es iterativo, pues con cada implementación, existe la posibilidad de detectar nuevos conflictos, lo cual sugiere una modificación, adaptación ó reorganización de la secuencia, lo que nos lleva a diseños cada vez mejor fundamentados, pero siempre perfectibles. Para realizar el análisis del pilotaje nos basamos en las respuestas que los estudiantes escribieron en sus hojas de trabajo (Actividades), pero consideramos que para una mejor interpretación de estas respuestas, hizo falta una etapa de entrevistas con ellos, con la intención de preguntarles sobre ciertas respuestas que reportaron y saber realmente lo que quisieron expresar o lo que entendieron.

El estudio exhaustivo de los tratamientos y conversiones entre las diferentes representaciones de una noción matemática es una tarea demasiado complicada si se le aborda sin contar con el apoyo en algún recurso tecnológico. El utilizar la calculadora `Voyage 200` como herramienta didáctica nos permitió automatizar, facilitar y simplificar algunas de las posibles conversiones entre los diferentes registros de representación que se promueven en la secuencia didáctica, con el propósito de crear un medio en el que el estudiante pueda explorar, conjeturar, analizar, verificar ideas, así como desarrollar habilidades y estrategias que le serán de gran ayuda a la hora de resolver problemas. También, debido a la facilidad de los dispositivos CAS para generar fácilmente gráficas de funciones, así como el realizar análisis geométricos de éstas; en nuestra propuesta didáctica consideramos al registro de representación gráfico como aquél que permite crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número e. Durante la experimentación llevada a cabo, pudimos constatar que la calculadora simbólica efectivamente actuó como una herramienta didáctica, cumpliendo con los propósitos anteriormente mencionados, por lo que comprobamos las ventajas de utilizar éste recurso tecnológico en la enseñanza de las matemáticas.

Consideramos que resultaría interesante un trabajo de investigación posterior con el propósito de investigar cómo evolucionan las actuaciones de los estudiantes en el análisis y resolución de las Actividades de esta secuencia didáctica, así como también identificar las modificaciones requeridas de ésta, con el fin de mejorarla y que se logre el objetivo para el cual fue diseñada.

Como diseñadores de esta secuencia de Actividades y conscientes de las dificultades para adaptar ésta a los tiempos asignados a estas nociones en un curso tradicional de matemáticas, proponemos una selección de Actividades de cada uno de los Bloques. Se recomienda que los estudiantes trabajen con Actividades de cada uno de los bloques, en el orden en que éstos están numerados.

Actividades del Bloque I: 1, 6, 7, 4. El criterio de selección de estas Actividades consistió en escoger cuatro Actividades en las cuales la información inicial se presenta a través de; una tabla de datos, una descripción verbal, una gráfica y una expresión analítica, presentándose en este orden debido a la justificación dada en el Capítulo III. De estas Actividades, dos representan un crecimiento exponencial y las otras dos representan un decrecimiento exponencial. En este Bloque se incluyeron dos Notas Histórica, una de éstas referente a la importancia que tuvo en el siglo XVII la característica geométrica de este tipo de curvas de poseer una subtangente constante, la otra Nota Histórica es referente al número e.

Actividades del Bloque II: 2, 7, 8, 9. Consideramos que al seleccionar estas Actividades, el estudiante va a explorar características importantes y necesarias para la construcción del concepto de logaritmo como herramienta facilitadora de operaciones, las cuales fueron de gran relevancia en su desarrollo histórico. Al final de estas Actividades se presenta una Nota Histórica sobre los logaritmos.

Actividades del Bloque III: 1, 2, 3. En la primera de estas Actividades seleccionadas la información inicial se presentó por medio de una tabla de datos, y las dos Actividades restantes la información se presentó a través de una representación gráfica. Consideramos que el análisis de estos dos registros de representación es indispensable para la aprehensión del carácter funcional de los logaritmos.

Actividades del Bloque IV: 1 – 14. En este Bloque se seleccionaron todas las Actividades debido a que las tareas de variación comparativa que se promueven en éstas, tanto para las funciones exponenciales como para las logarítmicas, son necesarias para analizar las modificaciones conjuntas de la gráfica y de la forma de su representación analítica y para que dichas tareas cumplan su objetivo: promover un aprendizaje que considere la estrecha relación entre la noesis y la semiosis, a fin de que no se confunda al objeto matemático con sus representaciones.

Actividades del Bloque V: 1, 2, 4. En las Actividades 1 y 4 se explora la razón de cambio de las funciones exponenciales y de las funciones logarítmicas respectivamente, surgiendo en ambas exploraciones la base e. En la Actividad 2 se exploran para las funciones exponenciales los tratamientos en el registro analítico para transformar una expresión analítica con base arbitraria ($y = Aa^x$) a una de base e ($y = Ae^{kx}$) y viceversa. En este Bloque se presenta una Nota Histórica sobre la función $y = e^x$.

Consideramos conveniente enlistar algunos aspectos del estudio de estas nociones los cuales el presente trabajo no ha pretendido promover:

- Todos los aspectos del significado de las funciones exponenciales y logarítmicas.
- La definición rigurosa del número e, ni mucho menos investigar o establecer sus propiedades analíticas (número irracional, número trascendente).
- En el caso particular de las funciones y expresiones logarítmicas, no se ha pretendido promover una comprensión profunda de ellas, en particular algunos aspectos de la comprensión instrumental, para lo cual habría que discutir tareas como las siguientes:

Simplificar: $log_3 54 - log_3 8 + log_3 4$

Resolver: $log_{12}(3 - x) + log_{12}(2 - x) = 1$

¿Qué es mayor, 25^{625} ó 26^{620}? ¿Por qué?

Referencias

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Compute Mediated Learning: An Example of an Approach. *International Journal of Computers for Mathematics Learning* , 5: 25-45.

Artigue, M. (2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones y los cambios curriculares? En R. Cantoral, *El futuro del cálculo infinitesimal* (págs. 93-115). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), pp. 33-115. En Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* Tesis de maestría. CINVESTAV-IPN. México.

Cantoral, R., Farfán, R., Hitt, F., & Rigo, M. (1983). *Historia de los conceptos de logaritmo y exponencial.* México: Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa.

Clark, K. (2006). *Investigating Teachers Experiences with the History of Logarithms: a Collection of Five Case Studies* . Dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park, in partial fullfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. .

Confrey, J., & Dennis, D. (2000). La creación de los exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y de la epistemología de John Wallis. . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* , 3(1), pp.5-31.

Del Castillo, A. G. (2004). *Obtención de expresiones analíticas a partir de gráficas: el caso de las funciones senoidales.* Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.

Duval, R. (1995). *Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros.* Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg, Francia.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa II* (págs. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* Tesis de maestría. CINVESTAV-IPN: México.

Fischbein, E. (1987). Intuition and Science and Mathematics: An Educational Approach. *Reidel*, pp.101.

Flores, J. (2009). *Exploración de una secuencia didáctica basada en la vinculación de representaciones para el estudio de la variación exponencial simple* . Tesis de Licenciatura en Matemáticas con Especialidad en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Zacatecas.

Jiménez, J., & Hitt, F. (2010). El diseño didáctico del aprendizaje de las matemáticas bajo el enfoque representacional. *Presentado a la Revista Digital Matemática, Educación en Internet. Aceptado para publicación* .

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial.* Tesis de maestría, Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Liu, P. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher*, 96(6), pp. 416-421.

Maor, E. (2006). *e: Historia de un número.* México: Conaculta. pp. 105-113.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, USA: NCTM.

Pierce, R. (January 1977). A Brief History of Logarithms. *The Two-Year College Mathematics Journal (Mathematical Association of America)*, pp. 22-26.

Rascón, J. (2007). *Un enfoque basado en representaciones dinámicas y calculadoras simbólicas para el estudio de la variación exponencial simple.* Tesis de maestría en Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.

Romero, C. (2010). *Una Introducción Gráfica al Concepto de Transformación Lineal Usando Geogebra.* Tesis de maestría en Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.

Sierspinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky, & G. Harel, *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, págs. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and Instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico.* Tesis de maestría , Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN , México.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford, & A. Shulte, *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook* (págs. 8-19). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics .

Waits, B., & Demana, F. (1977). *The Merging of Calculators and Computers: A Look to the Future of Technology Enhanced and Learning.* ICTMT 3, Koblenz, Germany.

Anexo 1

Resumen histórico del desarrollo de los conceptos de función exponencial y función logarítmica

"Todo objeto matemático, para consolidarse como tal, necesariamente pasa por varias etapas o momentos. Comienza por ser utilizado sin mayor conciencia de su presencia, siendo manipulado, extendido, formulado, dotado de representaciones y significados más precisos hasta ser insertado en una teoría con características propias" (Brousseau, 1986).

Las dificultades que se presentan, tanto en la apropiación de la noción de función en general, como la de logaritmo y la exponencial en particular, pueden explicarse indagando sobre la génesis de tales conceptos. Con este fin investigamos en distintas fuentes el desarrollo de los conceptos de logaritmo y exponente, con el fin de lograr una comprensión cabal de las dificultades relacionadas con su aprendizaje.

La importancia del análisis epistemológico de los conceptos matemáticos consiste en que nos permite comprender con mayor profundidad el tema estudiado y rescatar significados que hayan desaparecido del discurso escolar y que eventualmente pudieran proporcionar elementos para enriquecer la presencia y tratamiento de dicho tema en el aula.

Consideramos que la importancia de este análisis recae en la posibilidad de dar un significado más amplio a las nociones de interés, en este caso, de las funciones exponencial y logarítmica, en la búsqueda de los interrogantes y debates que produjeron, de las controversias que suscitaron, de los ires y venires de sus desarrollos y consolidación en la estructura matemática.

En el caso específico de las funciones exponenciales y logarítmicas, hemos identificado diez etapas o momentos notables en su desarrollo histórico, que a continuación describimos de manera sucinta.

1. Establecimiento en la Grecia Antigua del "Postulado de Arquímedes", que señala una propiedad fundamental de las progresiones geométricas. Esta propiedad puede ser enunciada en el lenguaje moderno como sigue: en una progresión geométrica, el producto de un número de rango n por otro número de rango m da como resultado el número de rango $n + m$. En la notación moderna, este postulado es equivalente a la identidad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Arquímedes enunció esta propiedad en el *Arenario*. Ilustraremos su utilidad práctica mediante un ejemplo. Tomemos las siguientes dos sucesiones de números consignados en una tabla:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**

La primera sucesión de números (renglón superior) corresponde a una progresión aritmética; en ésta la diferencia entre términos sucesivos es constante, en este caso igual a 1. La segunda sucesión de números (renglón inferior) corresponde a una progresión geométrica, que consiste en una sucesión de números con una razón fija entre términos sucesivos, en este caso particular la razón común es 2.
Para calcular 8×32 haciendo uso de estas sucesiones se suma $3 + 5 = 8$ y debajo del 8 que figura en el primer renglón se tiene el resultado de la multiplicación, 256.

Otro ejemplo un poco más complicado. Para calcular 243×81 dada la tabla de abajo, se suman 5+4=9, por lo tanto el resultado es 19683.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
3	**9**	**27**	**81**	**243**	**729**	**2187**	**6561**	**19683**

En el siglo XVI el matemático alemán Miguel Stifel refinó la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas desde una perspectiva aritmética. Stifel publicó en 1544 “la primera tabla de logaritmos” que existe, aunque en forma muy rudimentaria. Contiene sólo los números enteros desde -3 hasta 6, y las correspondientes potencias de 2:

-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1/8	**1/4**	**1/2**	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**

A los números de la sucesión superior Stifel los denominó *exponentes.*

En estas ideas de Arquímedes y Stifel se encuentra el germen de los conceptos de exponente y logaritmo. En nuestra secuencia didáctica las hemos recuperado para iniciar el estudio de ambos tipos de funciones, exponenciales y logarítmicas.

2. El descubrimiento de las reglas de la “prosthapheresis”.

El conocimiento y uso de estas reglas ayudó y facilitó la tarea de realizar elaborados cálculos requeridos en la Astronomía del siglo XVI.

La palabra *prostaféresis* proviene de las raíces griegas *prosthesis:* adición, agregado y *apheresis:* sustracción, resta, reducción. Estas reglas utilizan identidades trigonométricas que relacionan productos de funciones trigonométricas con sumas o restas, tales como las siguientes:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$
$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$
$$\cos A \sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

En estas reglas observamos la transformación de un producto en la mitad de una suma o resta, un cálculo relativamente más sencillo, a condición de conocer los sumandos correspondientes.

Por ejemplo, para multiplicar 105 por 720 utilizando la segunda de estas reglas se puede proceder como sigue.

1. **Escalar las cantidades dadas, desplazando el punto decimal** de ambas a la izquierda o a la derecha hasta que estén comprendidas entre -1 y 1.
   0.105 y 0.720
2. **Obtener el arcocoseno correspondiente.** Con una tabla de arcocosenos, se procede a buscar dos ángulos cuyos respectivos cosenos sean los valores dados. Si sólo se dispone de una tabla de cosenos, se puede emplear para calcular los arcocosenos mediante el procedimiento de buscar el ángulo con el valor del coseno más próximo al que se tiene.

   cos (84°) es aproximadamente 0.105, cos(44°) es aproximadamente 0.720.

3. **Suma y diferencia**: Realizar la suma y la diferencia de los dos ángulos.

   84 + 44 = 128, 84 - 44 = 40

4. **Obtener la media de los cosenos**. Evaluar los cosenos del ángulo suma y del ángulo diferencia con una tabla de cosenos; después, calcular la media de estos cosenos.

   $\frac{1}{2}[\cos(128°) + \cos(40°)]$ es aproximadamente igual a $\frac{1}{2}[-0.616 + 0.766]= 0.075$

5. **Reescalar**. Desplazar de nuevo el punto decimal tantos lugares como se hizo en el primer paso para cada uno de los factores, pero ahora en sentido inverso. Como antes se desplazó el punto tres lugares a la izquierda para cada uno de los factores, ahora se debe hacerlo 6 lugares a la derecha. El resultado final es 75000, bastante cercano al producto real, 75060.

Si se quiere obtener el producto de los cosenos de los dos valores iniciales (un dato útil para algunos de los cálculos astronómicos de la época) basta con seguir los pasos 3 y 4.

Es posible emplear la prostaféresis para realizar divisiones. Se necesita una tabla de secantes para estos cálculos. Para dividir 3746 entre 82.05, se reducen los números a 0.3746 y 8.205. El primero es aproximadamente el coseno de 68 grados, y el segundo la secante de 83 grados. Sabiendo que la secante se define como la inversa del coseno, el procedimiento es análogo al empleado para multiplicar: calcular la suma de los ángulos, 151, así como la diferencia de éstos, -15, después calcular la media de los cosenos de estos ángulos:

$\frac{1}{2}[\cos(151°) + \cos(-15°)]$ es aproximadamente igual a $\frac{1}{2}[-0.875 + 0.966] = 0.046$

Ahora basta con reescalar apropiadamente para obtener un resultado aproximado de 46.

Los procedimientos que usan las demás fórmulas son similares, pero cada uno requiere de tablas distintas; seno, arcoseno, coseno y arcocoseno.

Es importante entender que la "cultura calculista" generada por estas fórmulas realmente preparó el terreno para la búsqueda de otros métodos más simples y exactos para realizar ese mismo tipo de cálculos. Por lo mismo, también es importante observar la similitud existente entre este algoritmo y el procedimiento de multiplicar mediante logaritmos, ya que este último consiste en escalar, tomar logaritmos, sumar, tomar la inversa del logaritmo y volver a escalar. No es ninguna sorpresa que quienes desarrollaron el cálculo con logaritmos hubieran utilizado previamente las reglas de la prostaféresis de manera intensiva.
Por tratarse de un procedimiento relativamente complicado y que no proporciona un alto grado de precisión, y que tampoco contribuye sustancialmente al desarrollo de los conceptos que nos interesan, la prostaféresis no está incorporada a nuestro diseño didáctico.

3. La invención de los logaritmos por Napier.

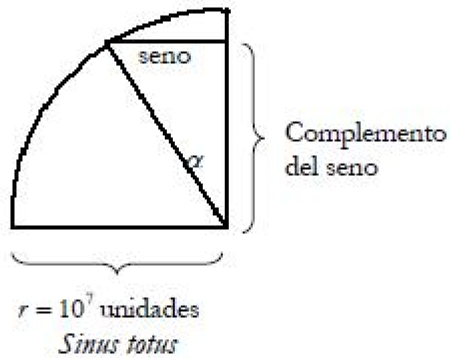
Basado en la idea de "hacer continua la serie geométrica" como una estrategia de cálculo similar a la prostaféresis, pero presumiblemente más exacta y sencilla.

Napier definió y construyó sus tablas a partir de un exhaustivo estudio de las relaciones entre las series geométrica y aritmética asociadas, ideando un modelo cinético que le permitiera "hacer continua" su tabla, utilizando los valores discretos que el proceso anterior le proporcionaba. Podemos observar que esta idea surge en el contexto aritmético pero con auxilio del geométrico y del físico para establecer significados.

En una primera aproximación, el problema de "hacer continua la serie" se puede abordar de dos maneras: usando exponentes fraccionarios, o eligiendo como base un número suficientemente pequeño tal que sus potencias crezcan suficientemente despacio. Los exponentes fraccionarios, definidos como $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, no eran todavía plenamente comprendidos en la época de Napier, por lo que él no tuvo más opción que la segunda. ¿Pero una base qué tan pequeña? Tras años de luchar con este problema, Napier se decidió por la cantidad $1 – 10^{-7}$, o 0.9999999 (Maor, 2006).

¿Pero por qué esta elección en especial? La respuesta parece estar en la preocupación de Napier de minimizar el uso de fracciones decimales. Como su principal objetivo era reducir el tremendo trabajo manual involucrado en los cálculos trigonométricos, siguió la práctica utilizada entonces en trigonometría de dividir el radio de una círculo unitario en 10 000 000 o 10^7 partes. Por lo tanto, si restamos de la unidad su 10^7-ésima parte, obtenemos el número más cercano a 1 en este sistema, $1 – 10^{-7}$ o 0.9999999. Ésta fue, entonces, la razón común ("proporción", en sus propias palabras) que utilizó Napier para construir su tabla.

Además, en esta época las funciones trigonométricas no eran consideradas estrictamente como razones, sino que el seno, por ejemplo, era la semicuerda de un círculo, en tanto que su radio era llamado *sinus totus,* y al cual Napier escogió como 10^7 por las razones antes mencionadas, elección que redundó directamente en la cantidad de cifras significativas de sus cálculos.



De este modo, Napier introdujo los logaritmos mediante una concepción cinemática, cuyo origen según él se imaginaba, era un movimiento sincrónico, una especie de fluctuación entre dos sucesiones. El modelo al que ingeniosamente recurrió involucra el desplazamiento de un punto que se mueve con velocidad constante, es decir, recorriendo espacios iguales en tiempos iguales, describiendo por tanto una progresión aritmética, en correspondencia con el movimiento de otro punto, el cual se mueve con velocidad proporcional al desplazamiento, en progresión geométrica.

El término *logaritmo* tiene sus raíces etimológicas en los vocablos griegos "*logos*" (razón) y "*arithmos*" (número), es decir, se refiere a una razón numérica.

Hay que enfatizar la ambigüedad que en esa época tenía el concepto de logaritmo, al no precisar una base en específico. Todos los números que se generaran bajo la idea de continuar la serie geométrica eran considerados logaritmos, y por lo tanto un mismo número podía tener muchos logaritmos, dependiendo de la serie geométrica que se tomara como referencia. En este sentido, los logaritmos eran percibidos como algo circunstancial, no necesariamente relacionado con cada número en particular. Más que nada, en esta etapa los logaritmos eran considerados como un simple truco, como una herramienta facilitadora de operaciones aritméticas que resultaban engorrosas mediante el procedimiento habitual que hoy denominamos "de lápiz y papel", es decir, mediante el cálculo directo. Específicamente se trataba de la multiplicación división y extracción de raíces de números.

Como es sabido, esta idea original de Napier fue retomada por Bürgi y perfeccionada por Briggs, quien se decidió por tomar como base el número 10, dando lugar a los llamados logaritmos decimales. En notación moderna, los logaritmos empleados por cada uno de ellos se expresarían como sigue:

Napier (1614) $N=10^7 (1 - 10^{-7})^{\mathbf{L}}$
Bürgi (1620) $N= 10^8 (1 + 10^{-4})^{\mathbf{L}}$
Briggs (1624) $N= 10^{\mathbf{L}}$

Un punto fundamental en el desarrollo de la idea de logaritmo reside en el hecho de que las propiedades de las series numéricas para simplificar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces de números que forman parte de esas series se cumplen sólo cuando la serie misma es geométrica. El análisis de esta idea está incluido en una Actividad específica de nuestra secuencia didáctica.

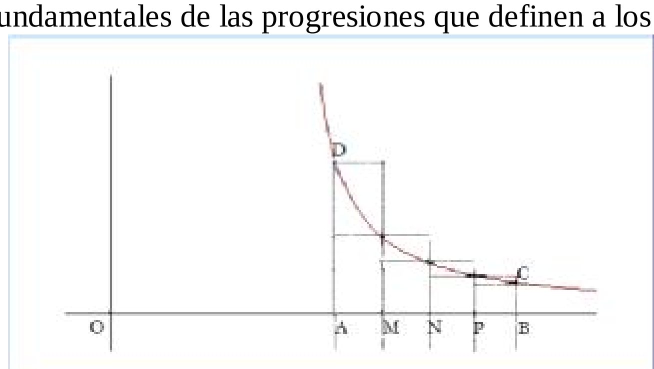
Un avance importante en el desarrollo del concepto de logaritmo sucedió cuando Halley hizo notar que los logaritmos obtenidos a partir de diferentes series geométricas (es decir, usando diferentes bases, según la terminología moderna) son proporcionales, esto es, se obtienen unos de otros mediante la multiplicación por un factor constante. De hecho, Halley intuyó la fórmula para el cambio de base de los logaritmos. Esta idea quisimos rescatarla en nuestra secuencia didáctica, incluyendo una Actividad que pretende hacer tomar conciencia a los estudiantes de esta notable propiedad descubierta por Halley, e incluso de formularla en el lenguaje algebraico.

4. El "descubrimiento" de la curva logarítmica.

La gráfica de la función logarítmica no fue producto de la tabulación de sus valores, sino tema de variadas exploraciones en el contexto geométrico.

Es interesante señalar el hecho de que este descubrimiento se realizó aún sin contar con la noción de base, es decir, bajo esa idea ambigua del concepto de logaritmo, a través de las propiedades geométricas fundamentales de la curva, expresadas en el problema de "encontrar una curva que tenga una subtangente constante". La solución de este problema, atribuida a Descartes, es la curva hoy conocida como curva logarítmica. Descartes no asoció dicha curva con los logaritmos, su interés se centró en determinar sus propiedades, encontrando que admitía una asíntota y que su subtangente es constante. Esta curva es tal, que si la abcisa de un punto que se mueve sobre ella se incrementa en progresión aritmética, su ordenada lo hace en progresión geométrica. En este caso podemos decir que las abcisas son los logaritmos de las ordenadas.

Las más importantes investigaciones que realizó Torricelli sobre este tema fueron el trazado y estudio de la curva logarítmica y de la espiral logarítmica. El trazado de la curva lo realizó a la manera antigua, inspirándose en la idea intuitiva que en esa época se tenía de los logaritmos. Sobre un eje trazó segmentos iguales (AM=MN=NP=...), y en consecuencia las longitudes AM, AN, AP, ... crecen en progresión aritmética. Por los puntos A, M, N, P,... levantó las perpendiculares al eje AD, ME, NF,... que decrecen en progresión geométrica. Esta construcción respeta las relaciones fundamentales de las progresiones que definen a los logaritmos.



Concluyó entonces, respecto a la curva, que es cóncava, que admite una rama infinita que se aproxima asintóticamente al eje AB, por lo que le denominó "*hemyperbola*" y que su subtangente es constante. (Ferrari, 2001)

Torricelli se dedicó a estudiar las características de una *curva logarítmica* pero en realidad exploró la curva que hoy conocemos como *exponencial*. Eso se debe a que los matemáticos del siglo XVII denominaban genéricamente *curva logarítmica* a aquella que relaciona progresiones aritméticas y geométricas, sin realizar la distinción que hoy hacemos entre estas dos curvas.

Actualmente se entiende que ambas curvas, la exponencial y la logarítmica, comparten la propiedad común de poseer una subtangente constante, por supuesto, referida a diferentes ejes. Esta propiedad geométrica está considerada en nuestro diseño, incluyendo en la secuencia didáctica una Actividad que se propone auxiliar al estudiante a explicitar esta propiedad para ambas curvas.

5. La resolución del problema de la cuadratura de la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$ o $xy = 1$. Más generalmente, el problema de la cuadratura de la hipérbola $xy = a$.

Desde el siglo XIV, el problema de encontrar el área bajo una curva había cobrado importancia debido a que las curvas representan las magnitudes de las velocidades en el tiempo. El área bajo una curva representa, entonces, el cambio total en cuanto a la posición y por tanto se torna una herramienta importante en la física matemática que comenzaba entonces a desarrollarse. Las exploraciones respecto a la cuadratura de la hipérbola no parecen originarse en ideas físicas sino geométricas, tal como se observa en el trabajo de Saint Vincent.

En la resolución de este problema jugó un papel importante el “postulado de Saint Vincent”: “si las paralelas de una asíntota son trazadas entre la hipérbola y la otra asíntota, de tal forma que las áreas sucesivas de los cuadriláteros mixtilíneos así formados sean iguales, entonces las longitudes de tales paralelas forman una progresión geométrica”.

Este postulado puede traducirse en otra equivalente: “Si las abcisas de una hipérbola equilátera crecen en progresión geométrica, las áreas de las superficies determinadas por las ordenadas correspondientes crecen en progresión aritmética”.

Si bien Saint Vincent no asoció sus postulados con las propiedades logarítmicas, sentó bases importantes para el desarrollo de estas nociones en el marco geométrico gráfico, considerado en el siglo XVII según Confrey (2000) como la principal representación en matemáticas.

Retomada por varios matemáticos, entre ellos Fermat y Torricelli, la exploración de la cuadratura de la hipérbola dio lugar al descubrimiento y formulación de nuevas características de la función logaritmíca en el campo de la geometría, que enriquecieron su significado. Los logaritmos se despegaron entonces de sus orígenes aritméticos y se les consideró desde un enfoque geométrico.

6. La invención de los “hiperlogaritmos” e “hipologaritmos”.

Mengoli le confirió a los logaritmos un nuevo significado, pues postuló que, utilizando solamente conocimientos aritméticos, se pueden definir, mediante series de fracciones, números que cumplan con las características de los logaritmos. Construyó para ello un modelo utilizando dos elementos fundamentales, los hiperlogaritmos "*hyperlogarithme*" (que aquí simbolizaremos Hyl) y los hipologaritmos "*hypologarithme*" (simbolizados mediante hyl), definiéndolos de la siguiente manera:

$$\mathrm{Hyl}_n\ a = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{na-1}$$

$$\mathrm{hyl}_n\ a = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{na-1} + \frac{1}{na}$$

Estos números satisfacen la relación

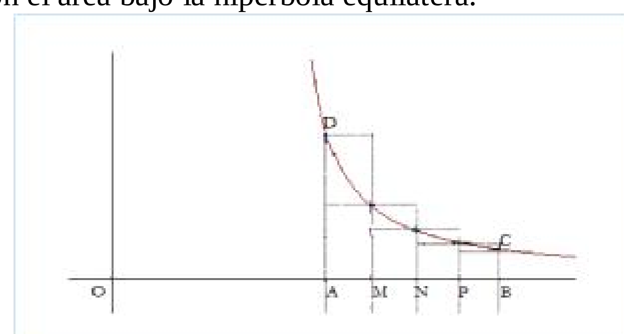
$$\mathrm{Hyl}_n\ a - \mathrm{hyl}_n\ a = \frac{1}{n} - \frac{1}{na} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a-1}{a}$$

y por lo tanto, su diferencia tiende a cero cuando n crece indefinidamente. De aquí se infiere la existencia de un límite que satisface la relación:

$$\mathrm{hyl}_n\ a < A < \mathrm{Hyl}_n\ a$$

donde $A = \log a$.

Esto llevó a Mengoli a la siguiente definición: "el logaritmo es aquél número hacia el cual tienden los hiperlogaritmos disminuyendo continuamente unos después de los otros y los hipologaritmos en aumento sin cesar unos después de los otros", o lo que es lo mismo, que "es el más grande de los hipologaritmos y el más pequeño de los hiperlogaritmos". Este desarrollo permite una analogía con el área bajo la hipérbola equilátera.



Sean OA=4, OB=8, AM=MN=NP=PB=1. Entonces la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos a la curva es, utilizando notación moderna

$$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 0.759524 \rightarrow S_4 = \mathrm{Hyl}_4\ 2$$

mientras que la suma de las áreas de los rectángulos inscritos bajo la curva es

$$S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = 0.634524 \rightarrow S_4 = \mathrm{hyl}_4\ 2$$

Según la definición de Mengoli, el área ABCD es el logaritmo de 2. Aunque en esta época no se conocía el concepto de base, sí se tenía conocimiento de las propiedades esenciales de los logaritmos.

$$\text{Area ABCD} = \log 8 - \log 4 = \log \frac{8}{4} = \log 2$$

Para n=8, lo cual significa que OA=8, OB=16, y dividiendo el segmento AB en 8 segmentos de longitud 1 tenemos que las sumas de las áreas de los ocho rectángulos, en cada caso, son las siguientes:

$$S_8 = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} = 0.725372 \rightarrow S_8 = \text{Hyl}_8\, 2$$

$$S_8 = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} = 0.662872 \rightarrow S_8 = \text{hyl}_8\, 2$$

Cuando n=50, OA=50, OB=100, si el segmento AB se divide en 50 segmentos de longitud 1, obtenemos lo siguiente:

F1	F2 Plot Setup	F3 Cell	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat
DATA	n=50		Hyl2			hyl2
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	50	1/50	.6982	51	1/51	.6882
2	51	1/51		52	1/52	
3	52	1/52		53	1/53	
4	53	1/53		54	1/54	
5	54	1/54		55	1/55	
6	55	1/55		56	1/56	
7	56	1/56		57	1/57	

c3=sum(approx(c2),1,50)

ABLEIT RAD AUTO FUNC

Observamos que entre mayor es el valor de *n*, los valores del hiperlogaritmo e hipologaritmo convergen al valor del logaritmo natural de 2 (ln2 = 0.693147).

Utilizando el modelo de Mengoli, si queremos calcular el área ABCD, cuando OA=3 y OB=9, que correspondería al log 3:

$$\text{Área ABCD} = \log 9 - \log 3 = \log \frac{9}{3} = \log 3$$

En este caso n=3, y dividiendo el segmento AB en 6 segmentos de longitud 1 obtenemos:

$$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = 1.217857 \rightarrow S_3 = \text{Hyl}_3\, 3$$

$$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 0.995635 \rightarrow S_3 = \text{hyl}_3\, 3$$

Cuando n=100, OA=100, OB=300, si el segmento AB se divide en 200 segmentos de longitud 1, entonces obtenemos que:

F1	F2 Plot Setup	F3 Cell	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat
DATA	n=100		Hyl3			hyl3
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	100	1/100	1.102	101	1/101	1.095
2	101	1/101		102	1/102	
3	102	1/102		103	1/103	
4	103	1/103		104	1/104	
5	104	1/104		105	1/105	
6	105	1/105		106	1/106	
7	106	1/106		107	1/107	

c4=seq(n,n,101,300)

ABLEIT RAD AUTO FUNC

Observando que los valores del hiperlogaritmo y del hipologaritmo (calculados en c3 y c6 respectivamente) convergen al valor del ln3.

Esta definición de logaritmo es quizás una de las primeras veces en donde se evidencia que el logaritmo está en función del número. Una conclusión importante de todo esto es que ¡los logaritmos son simplemente unos números que tienen unas propiedades especiales!

Dado que las nociones de hipologaritmo e hiperlogaritmo no resultan simples y no aportan algo esencial para la comprensión de los conceptos de exponente y logaritmo, no han sido incluidos en nuestra secuencia didáctica, consignándolos aquí solamente como una curiosidad histórica, que contribuyó a afianzar la comprensión de los logaritmos como números con pleno derecho.

7. Los logaritmos como modelos de fenómenos de la naturaleza.

Otra aportación importante de Mengoli consistió en el estudio de las vibraciones del tímpano mediante el empleo de los números conocidos hasta entonces como logaritmos, mientras que Huyghens y Newton estudiaron la caída de los cuerpos en un medio con resistencia empleando la misma herramienta. Aquí los logaritmos resultaron un instrumento útil para "arrancarle secretos a la naturaleza". Galileo afirmaba que tales secretos estaban escritos en el lenguaje de las matemáticas. El uso de los logaritmos para modelar fenómenos de la naturaleza reforzó el estatus de dichos números al interior de la matemática, abriendo el camino al desarrollo de la noción de función logarítmica. Esta fase está incluida en nuestra secuencia didáctica, en donde un bloque de Actividades pretende modificar la imagen que los estudiantes se habían estado formando sobre los logaritmos como números, para que pasen a concebirlos como variables en un contexto funcional.

8. La expansión en serie para los logaritmos.

Esta etapa transcurrió en dos pasos. En el primero, Mercator y Newton por separado extendieron el algoritmo de la división aritmética a la algebraica:

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots$$

En el segundo paso, al extender Newton la expansión de $(a+b)^n$ para valores de n negativos, se comprendió que para estos casos la expansión involucraba una infinidad de términos, se transformaba en una serie infinita. Para ver esto tenemos el triángulo de Pascal en forma "escalonada".

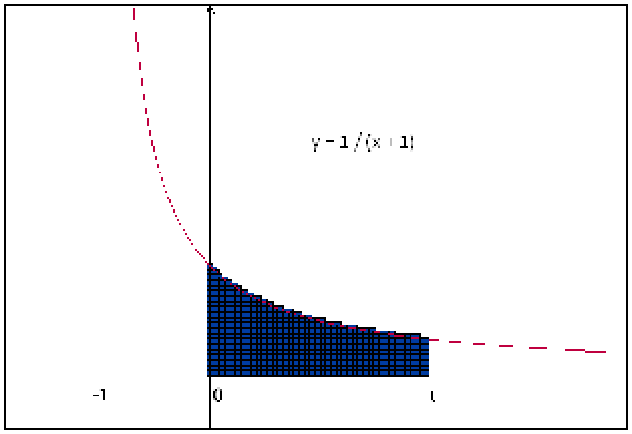
n = -4	1	-4	10	-20	35	-56	84…
n = -3	1	-3	6	-10	15	-21	28…
n = -2	1	-2	3	-4	5	-6	7…
n = -1	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**1…**
n = 0	1	0	0	0	0	0	0…
n = 1	1	1	0	0	0	0	0…
n = 2	1	2	1	0	0	0	0…
n = 3	1	3	3	1	0	0	0…
n = 4	1	4	6	4	1	0	0…

Si utilizamos estos coeficientes para expandir la expresión $(1+x)^{-1}$ en potencias de x, obtenemos la serie infinita:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Observamos que la división algebraica se convirtió en una serie geométrica infinita, con término inicial igual a 1 y razón común $-x$. El álgebra elemental nos dice que, asumiendo que la razón común está entre -1 y 1, la serie converge precisamente a $1/(1 + x)$.

La gráfica de la ecuación y = $1/(1 + x)$, es la hipérbola mostrada en la siguiente figura, es idéntica a la gráfica de y = $1/x$, pero trasladada una unidad hacia la izquierda. Al estar enterado Newton del descubrimiento de Saint-Vincent de que el área acotada por la hipérbola y = $1/x$, el eje x y las ordenadas x=1 y x=t era log t, no le resultó difícil concluir que el área acotada por la hipérbola y = $1/(1 + x)$, el eje x y las ordenadas x=0 y x=t es log (t+1).



A diferencia de Mercartor que analizó el caso particular de la hipérbola equilátera, Newton desarrolló su método utilizando también la expresión más general de una hipérbola, $y = \frac{aa}{b+x}$ que al dividir en fracciones decimales es:

$$y = \frac{aa}{b+x} = \frac{aa}{b} - \frac{aa}{bb}x + \frac{aa}{b^3}xx - \frac{aa}{b^4}x^3 + \ \ldots$$

Mediante su teoría de fluxiones para la determinación de áreas, y aplicando a cada término de la serie la fórmula de Fermat $x^{n+1}/(n + 1)$ (en lenguaje moderno, integrando término a término), y considerando el resultado como una igualdad entre áreas, Newton obtuvo la notable serie:

$$\log(b + x) = \frac{1}{b}x - \frac{1}{2b^2}x^2 + \frac{1}{3b^3}x^3 - \frac{1}{4b^4}x^4 + \cdots \quad \text{si} \ \ a = 1$$

Aunque este desarrollo en serie de potencias contribuyó a enriquecer el concepto de logaritmo como función durante el siglo XVII, no está incluido en nuestra propuesta didáctica.

9. Las exploraciones realizadas por Leibniz y Bernoulli sobre las relaciones entre exponentes y logaritmos.

Estos grandes científicos del siglo XVII comenzaron a explorar la vinculación entre los exponentes y los logaritmos, en una época en la cual se empezaba a pensar en la posibilidad de expresar los exponentes como variables. Las consideraciones respecto a tal uso de los exponentes se profundizaron con Chuquet y Wallis. Comenzó así a aceptarse como natural que el exponente pueda ser cualquier número, por tanto aparecieron en el seno del lenguaje algebraico las expresiones del tipo a^x y x^x.

En el siglo XVIII con Euler inició una nueva etapa, en la cual se vinculó claramente a los logaritmos con la función exponencial, se les definió como funciones inversas una de la otra y se les relacionó con el modelaje de fenómenos de la naturaleza. Ambas funciones se erigieron como fundamentales en el desarrollo de nuevos entes matemáticos, como las ecuaciones diferenciales, las exploraciones de números complejos, el estudio de las funciones de variable compleja, entre otros. Se les incorporó al campo de las funciones analíticas, es decir, aquellas que se pueden expresar mediante series de potencias.

Podríamos considerar a esta etapa como de *simbolización* debido a que se estabilizó el aparato algorítmico-simbólico para el tratamiento de los exponentes y logaritmos como variables.

10. Las ideas de Cauchy sobre exponentes y logaritmos y su formalización, en su *Curso de Análisis*.

Esta es una etapa de rigurosidad, de *formalismo*, donde las funciones exponenciales jugaron un papel relevante en la descripción de variados problemas vinculados con la naturaleza, así como también dentro del abstracto aparato matemático para darle coherencia. Los logaritmos se incorporaron definitivamente al aparato matemático, volviéndose un objeto matemático formalmente definido con un espacio propio en la teoría matemática, aunque quizás en algunos momentos opacados por las funciones exponenciales.

Resumen

A manera de resumen sobre el desarrollo histórico de los exponentes y logaritmos, hemos observado cómo los logaritmos en particular encontraron un lugar en cada registro de representación. Se adecuaron a la aritmética en sus orígenes facilitando cálculos laboriosos al transformar multiplicaciones en sumas y divisiones en restas. Sobrevivieron al cálculo integro-diferencial hallando en la cuadratura de la hipérbola equilátera otra manera de ser representados. Se adecuaron y hallaron características propias en la geometría al poseer una subtangente constante. Adquirieron el estatus euleriano de función al admitir ser desarrollados en series de potencias. Se convirtieron en una herramienta importante para la descripción de fenómenos físicos y lograron ser incluidos en la estructura matemática de hoy al soportar una definición rigurosa y abstracta que respeta sus características esenciales.

A partir de este análisis histórico, observamos que las relaciones entre series aritméticas y geométricas se convirtieron en el eje central del desarrollo de los logaritmos, debido a que éstas están presentes en las diferentes exploraciones de los logaritmos en distintos contextos y registros. Estas relaciones son la idea clave de la definición de los logaritmos de Napier; son las que permiten determinar la cuadratura de la hipérbola equilátera lograda por Saint Vincent y su discípulo Sarasa; son las que posibilitaron la descripción de fenómenos físicos realizadas por Mengoli, Newton y Huygens; son las que permitieron distinguir y reconocer de entre otras construcciones la gráfica de una curva como logarítmica; las que evidenciaron que el desarrollo en serie, utilizando el método de fluxiones para la cuadratura de la hipérbola equilátera, determinan una curva logarítmica.

Todos estos argumentos y exploraciones, que giran en torno a descubrir las características logarítmicas en distintos contextos, mediante el uso explícito de la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica, está absolutamente fuera del discurso matemático escolar de nuestros días. Hemos intentado recuperar algunas de estas diferentes visiones en nuestro diseño didáctico.

Otro elemento importante y también ausente en las clases de matemáticas es el análisis de la característica geométrica de las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas de poseer una subtangente constante; dicha característica fue clave para la incorporación al registro geométrico de este tipo de curvas, el cual era considerado en el siglo XVII la principal representación en matemáticas. Estos análisis permiten un acercamiento geométrico a la razón de cambio (derivada) de ambos tipos de funciones, ya que ésta es la causa fundamental de su importancia en las matemáticas y en las aplicaciones en otras ciencias, particularmente cuando la base de estas funciones es el número e.

Anexo 2

La Secuencia Didáctica

BLOQUE 1
El estudio de la variación exponencial

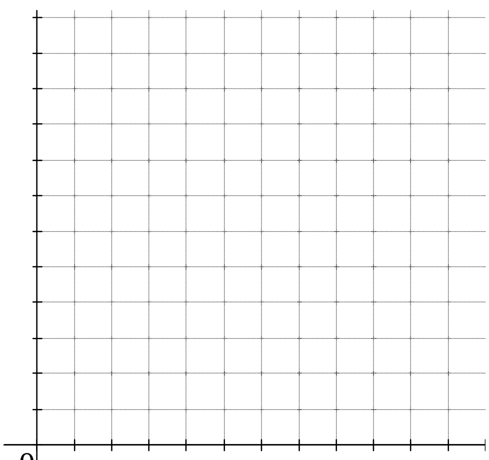
ACTIVIDAD No. 1
El crecimiento de una población de bacterias

Bajo condiciones ideales de laboratorio, el número de bacterias en un cultivo crece con el tiempo como se indica en la siguiente tabla.

Tabla 1

Tiempo t, hrs	**Número de bacterias** $N, \times 10^3$
0	27
1	47
2	82
3	143
4	250
5	437
6	760
7	1322
8	2300
9	4000

1. Dibuja una gráfica que ilustre el crecimiento de la población de bacterias con el tiempo.



0

2. ¿Crees que la población de bacterias crece uniformemente, o lo hace de algún otro modo? Argumenta tu respuesta.

3. Completa la tabla siguiente dividiendo el número de bacterias de cada hora entre el de la hora anterior. (Usa el modo aproximado para estos cálculos).

Tabla 2

	Relación
0 a 1	
1 a 2	
2 a 3	
3 a 4	
4 a 5	
5 a 6	
6 a 7	
7 a 8	
8 a 9	

4. ¿Puedes explicar los números obtenidos en la Tabla 2?

5. Al analizar la Tabla 1, probablemente advertiste que los números que aparecen en ambas columnas de la tabla forman una secuencia o sucesión.
   a) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de t en la primera columna de la tabla?

   b) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de N en la segunda columna de la misma tabla?

6. En la siguiente tabla, calcula el porcentaje de crecimiento por hora de este cultivo bacteriano.

Tabla 3

t	Porcentaje, %
0 a 1	
1 a 2	
2 a 3	
3 a 4	
4 a 5	
5 a 6	
6 a 7	
7 a 8	
8 a 9	

7. Interpreta los valores obtenidos en la Tabla 3.

8. ¿Cómo puedes relacionar la razón constante encontrada en la Tabla 2 con el porcentaje de crecimiento por hora de este cultivo bacteriano, calculado en la Tabla 3?

9. En la segunda columna de la siguiente tabla expresa el número de bacterias en términos de la razón constante que obtuviste en la Tabla 2.

Tabla 4

t (hrs.)	# Bacterias ($\times 10^3$)	# Bacterias ($\times 10^3$)
0	27	27
1	27×( )	27×( )
2	47×( )	27×( )
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

10. En la tercera columna de la Tabla 4 expresa el número de bacterias en términos de la **razón constante** y de la **cantidad inicial** de bacterias.

11. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de bacterias y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

12. a) ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

b)¿En qué parte de esta fórmula se ubica la variable independiente?

13. ¿Cuál será el tamaño de la población de bacterias al cabo de:

Tabla 5

t (hrs.)	B (10^3)
1.25	
2.5	
3.75	
5.0	

Tabla 6

t (hrs.)	B (10^3)
8.10	
9.35	
10.60	

14.- Analiza los valores de las variables **t** y **B** de las tablas 5 y 6, contesta:

a) ¿Qué tipo de sucesión forman los valores numéricos de **t**?

b) ¿Qué tipo de sucesión forman los valores numéricos de **B**?

15.- De acuerdo con los resultados obtenidos en las tablas 5 y 6 ¿Puedes explicar qué está sucediendo?

16.- Utiliza la fórmula que obtuviste que modela este crecimiento bacteriano, para completar las siguientes tablas:

Tabla 7

t (hrs.)	B (10^3)
0	
3	
6	
9	

Tabla 8

t (hrs.)	B (10^3)
1.5	
3.0	
4.5	
6.0	
7.5	
9.0	

17.- Con la calculadora `Voyage 200`, selecciona la aplicación; Editor de Funciones, edita la fórmula anterior y grafícala, una vez trazada ésta, elige la opción del menú `[F3]`, aparecerá una traza, la cual utilizarás para completar las siguientes tablas:

Tabla 9

t (hrs.)	B (10^3)
0	
2	
4	
6	
8	

Tabla 10

t (hrs.)	B (10^3)
0.5	
1.0	
1.5	
2.0	
2.5	
3.0	

18.- Realiza un análisis de los valores obtenidos en las tablas 7, 8 ,9 y 10 y contesta:

a) ¿Qué tipo de sucesión son los valores numéricos de la variable **t** de cada una de las tablas?

b) ¿Qué tipo de sucesión son los valores numéricos de la variable **B** de cada una de las tablas?

c) Describe tus observaciones de estos análisis que realizaste.

ACTIVIDAD No. 2
El problema del tablero de ajedrez

La Leyenda del Ajedrez

La invención del ajedrez se ha atribuido a los hindúes, árabes, persas, egipcios, chinos, griegos, entre otros. Las lagunas históricas respecto a su origen contribuyeron al florecimiento de diversas leyendas y entre ellas podemos destacar la del joven Sissa.

Cuenta esa leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: el ajedrez. En pocas horas después de explicarle las reglas, el soberano comenzó a jugar fascinado por el nuevo pasatiempo. En determinado momento el rey hizo notar, con gran sorpresa, que la posición de sus piezas parecía reproducir la batalla en la que murió su hijo. Intervino entonces Sissa para decirle:
—Piensa que para el triunfo es imprescindible que sacrifiques este alfil, pero te has empeñado inútilmente, Señor, en defenderlo y conservarlo. Con esta aguda observación el monarca comprendió que, en ciertas circunstancias, la muerte de un príncipe es una fatalidad que puede conducir a la libertad y la paz de un pueblo.

Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara. Éste rechazó esa recompensa, pero el rey insistió y Sissa pidió lo siguiente:

—Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro del tablero, dos, en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante.

El rey se sorprendió bastante con la petición creyendo que era una recompensa demasiado pequeña para tan importante regalo y aceptó. Mandó a los calculistas más expertos de la corte que calcularan la cantidad exacta de granos de trigo. ¡Cuál fue su sorpresa cuando éstos le comunicaron que no podía entregar esa cantidad de trigo!

El rey se quedó sorprendido. Pero en ese momento Sissa renunció al obsequio. Tenía suficiente con haber conseguido que el rey volviera a estar feliz y además les había dado una lección matemática que no se esperaban.

1. Completa la siguiente tabla.

Tabla 1

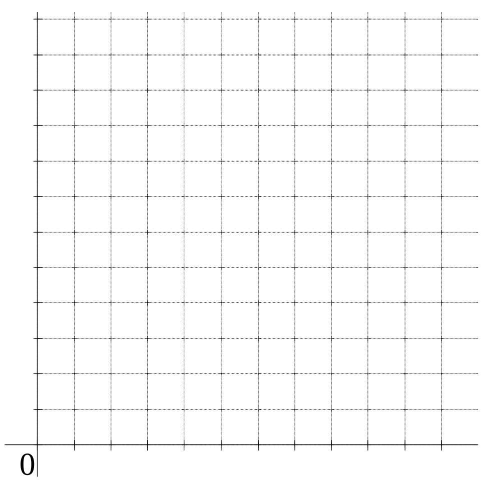
Casilla, *c*	**Número de granos de trigo, *T***
1	**1**
2	**2**
3	**(2)(2)=4**
4	**(2)(2)(2)=8**
5	
6	
7	
8	

2. Analiza los valores numéricos de la Tabla 1 y contesta:

a) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de *t* en la primera columna de la tabla?

b) ¿Qué clase de sucesión forman los valores de *N* en la segunda columna de la misma tabla?

3. Traza la gráfica utilizando los datos de la tabla anterior.



4. Describe las características de la gráfica.

5. Deduce una fórmula para calcular el número de granos de trigo para cualesquier casilla.

6. a) ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

b) ¿En qué parte de esta fórmula se ubica la variable independiente?

7. Asume que el número aproximado de granos de trigo por kilo es de 21,000. Completa la siguiente tabla.

Tabla 2

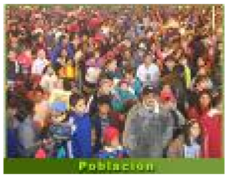
c	***T***	**Kg. Aprox.**
10		
20		
30		
40		
50		
60		
64		

8. ¿Podrías calcular la masa de todo el trigo sobre el tablero de ajedrez? ¿Cuál es?

9. ¿Cómo la obtuviste?

10. Si el rendimiento de la cosecha de trigo por hectárea es de 3.5 Ton., ¿cuántas hectáreas se requieren sembrar para pagarle la recompensa a Sissa?

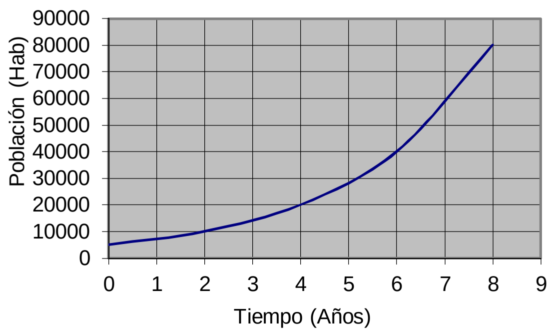
Este ejemplo nos ilustra el comportamiento esencial de este tipo de funciones, que empiezan creciendo lentamente, pero luego lo hacen en forma acelerada y terminan creciendo extremadamente rápido.



BLOQUE 1
El estudio de la variación exponencial

ACTIVIDAD No. 3
Crecimiento poblacional

En la gráfica siguiente se representa el crecimiento poblacional de determinada región geográfica.



1. Describe las características de esta gráfica.

2. ¿De qué forma crees que está creciendo la población? Argumenta tu respuesta.

3. Haciendo una lectura de la gráfica, completa la tabla siguiente.

Tiempo, t (años)	Población, P (Hab.)

4. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación que existe entre el número de habitantes y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula y cómo la obtuviste?

5. a) ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

b) ¿En qué parte de esta fórmula se ubica la variable independiente?

6. ¿Puedes calcular el porcentaje de crecimiento anual de esta población? ¿Cuál es y cómo lo obtuviste?

7. ¿Cuál será tiempo de duplicación de esta población? ¿Cómo lo supiste?

BLOQUE 1
El estudio de la variación exponencial

ACTIVIDAD No. 4
Asuntos financieros

Un concepto central en cualquier consideración monetaria es el de *interés*, o el dinero pagado sobre una inversión.

Un tipo de *interés* es el *interés compuesto*; el cual se obtiene cuando al capital que se ha invertido se le suman periódicamente los intereses producidos. Así, no solo el capital devenga un interés, sino también el *interés* del capital, de ahí su nombre de *interés compuesto.*

En el sector bancario uno encuentra muchos tipos de esquemas de composición: anual, semestral, cuatrimestral, mensual, etc.

La siguiente fórmula es la base de prácticamente todo cálculo financiero, ya sea que se aplique a cuentas bancarias, préstamos, hipotecas o inversiones. Un capital *C* después de t años rendirá un total de:

$$S = C\,(1 + r/n)^{nt}$$

Donde:
***S*- Monto o Saldo Compuesto.**
***C*- Capital inicial.**
***r*- tasa de interés anual (% interés anual / 100).**
***n*- veces al año que se efectúa la composición (período de conversión).**
***t*- años, entonces *nt* es el número de períodos de conversión.**

1. Supóngase que se han invertido 100 dólares en un banco de ahorro, el cual paga un interés compuesto anualmente, a una tasa del 12% anual. ¿Cuál será el saldo en la cuenta después de…? Completa la siguiente tabla. Escribe la fórmula que utilizarás para estos cálculos.

S = ____________________

***t* años**	**Inversión 1 *S* (dólares)**
0	
5	
10	
15	
20	
25	
30	

Tabla 1

2. ¿Qué tipo de sucesión forman los valores de S y t respectivamente?

3. Representa con una gráfica la información anterior.

4. Describe las características de la gráfica trazada.

5. ¿Cuál debe ser el plazo de la inversión para que los $100.00 dlls se conviertan en…? Completa la siguiente tabla.

***S* (dólares)**	***t* (años)**
130	
150	
180	
250	
500	
1000	
2000	

Tabla 2

¿Cómo lo supiste?

6. Observa los cuatro últimos datos de la Tabla 2. ¿Qué es lo que ocurre?

ACTIVIDAD No. 4
Asuntos financieros

7. Sería interesante comparar los totales de dinero que rendirá un cierto capital después de un año para diferentes períodos de conversión. Para esto, completa la siguiente tabla. Asume que la tasa de interés anual es del 5% y el capital inicial es de 10000 dólares.

Tabla 3

Período de conversión	***n***	***r/n***	**Fórmula de *S***	***S*(1)**
Anual				
Semestral				
Trimestral				
Mensual				
Semanal				
Diario				

8. ¿Crees que el período de conversión tendrá gran influencia para decidir en qué cuenta invertir?

9. Ahora vas a explorar con más detalle el por qué de los resultados anteriores. Considera el caso cuando el interés anual es del 100%, entonces $r = 1$, seguramente ningún banco ha aparecido nunca con una oferta tan generosa como ésta. Para simplificar esta exploración asume que $C = \$1$ y $t = 1$ año. Entonces la fórmula queda:

$$\boldsymbol{S = (1 + 1/n)^n}$$

El objetivo es investigar el comportamiento de esta fórmula para valores crecientes de *n*. Para esto completa la siguiente tabla. Configura la calculadora Voyage 200 para que en pantalla aparezcan 8 cifras decimales.

Tabla 5

n	$(1 + 1/n)^n$
1	
5	
10	
50	
100	
1000	
10000	
100000	
10000000	
100000000	
1000000000	

10. Describe los resultados obtenidos en la Tabla 5.

Como se mencionó anteriormente, existen en la industria bancaria muchos tipos de esquemas de composición; uno de éstos muy particular es el ***interés compuesto continuo:*** el interés compuesto devengado por un capital ***C*** a la tasa de interés ***r*** cuando el número de veces al año que se efectúa la composición (***n***) es muy grande y puede suponerse infinito.

11. ¿Cómo queda entonces la fórmula para calcular ***S*** para cualesquier tiempo ***t***, para el caso en que el interés anual es del 100% compuesto continuamente?

S = ____________________

NOTA HISTÓRICA
El número e. Parte 1.

Desde tiempos inmemoriales los asuntos monetarios han estado en el centro de las inquietudes humanas. A principios del siglo XVII, hubo un enorme crecimiento en el comercio internacional, por lo que proliferaron las transacciones financieras de toda clase; como resultado se le dedicó mucha atención a la ley del interés compuesto, y es posible que el número e recibiera su primer reconocimiento en este contexto, por lo que tuvo que haber sido una sorpresa para un anónimo matemático, o tal vez un comerciante o un prestamista haber notado el hecho curioso de que, dado un capital inicial C compuesto n veces al año a una tasa de interés anual r invertido durante t años, si se permite que n crezca indefinidamente, el monto final de dinero S, obtenido de la fórmula $S = C(1 + \frac{r}{n})^{nt}$, parece aproximarse a un cierto límite. Este límite, para $C = 1$, $r = 1$ y $t = 1$, es aproximadamente 2.7182. Este descubrimiento debe haber sorprendido a los matemáticos de la época, para los cuales el concepto de límite aún no era conocido. Sin embargo, otro problema, relacionado con el cálculo del área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, condujo independientemente al número e, lo que deja el origen de éste cubierto de misterio.

El papel mucho más familiar de e como la base "natural" tuvo que esperar hasta que el trabajo de Leonhard Euler en la primera mitad del siglo XVIII hizo de la función exponencial uno de los protagonistas del Cálculo. Es tan numerosa la notación matemática actual que le debemos a Euler, que no sorprende descubrir que la notación e para este número se la debemos a él. Euler hizo varios descubrimientos relacionados con el número e, con la publicación en 1748 de *Introductio in Analysis Infinitorum*, en el que dio un tratamiento completo a las ideas alrededor de e. Demostró que:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

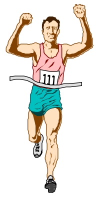
Además, demostró que:

$$e = 1 + {}^{1}/_{1!} + {}^{1}/_{2!} + {}^{1}/_{3!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Euler demostró también que todo número racional puede escribirse como una fracción continua finita, y a la inversa. Luego, una fracción continua infinita siempre representa a un número irracional. Descubrió muchas fracciones continuas infinitas que involucran a e, una de éstas es

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cdots}}}}}$$

Hermite demostró en 1873 que e es un número trascendente, lo que significa que no es un número algebraico (un número real que satisface una ecuación polinómica con coeficientes enteros).



BLOQUE 1
El estudio de la variación exponencial

ACTIVIDAD No. 5
El problema del restablecimiento del ritmo cardiaco

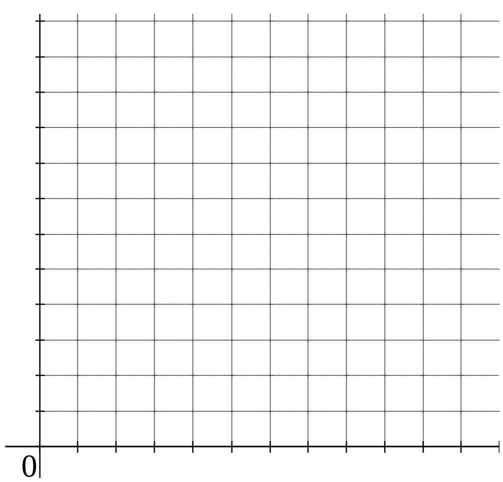
Al practicar algún ejercicio o someter al organismo a un esfuerzo prolongado, el ritmo normal del corazón se altera, aumentando considerablemente. La tabla siguiente muestra datos relativos al restablecimiento de los latidos del corazón a su valor normal de una persona que realiza ejercicio físico regularmente, después de una determinada rutina de ejercicios.

Tabla 1

Tiempo transcurrido t, min	**Rutina 1 *L*, Latidos por minuto**
0	140
1	126
2	113
3	102
4	92
5	83
6	75
7	68
8	61

1. ¿Crees que el número de latidos por minuto disminuye uniformemente, o lo hace de algún otro modo? Argumenta tu respuesta.

2. Representa con una gráfica los datos de la tabla.



3. a) ¿Qué tipo de sucesión forman los valores numéricos de *t* de la Tabla 1?
   b) ¿Qué tipo de sucesión forman los valores numéricos de *L* de la Tabla 1?

4. ¿Existe un factor de cambio constante al dividir el número de latidos de un minuto entre el número de latidos del minuto anterior?

   Si la respuesta es afirmativa ¿Cuál es?

5. ¿Cuál es el porcentaje de disminución o decaimiento en el número de latidos de un minuto a otro?

6. ¿Puedes encontrar alguna relación entre el porcentaje de decaimiento del número de latidos y el factor de cambio de constante? ¿Cuál es?

7. En la tabla siguiente expresa en la segunda columna el número de latidos en términos del factor constante que obtuviste.

Tabla 2

t (min.)	**# Latidos, *L***	**# Latidos, *L***
0	140	140
1	140( )	140( )
2	126( )	140( )
3		
4		
5		
6		
7		
8		

8. En la tercera columna de la tabla anterior expresa el número de latidos en términos del factor constante y del número inicial de latidos.

ACTIVIDAD No. 5
El restablecimiento del ritmo cardiaco

9. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre el número de latidos del corazón por minuto y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

10. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

11. Suponiendo que se somete a la misma persona a diferentes rutinas de ejercicio, completa la tabla siguiente.

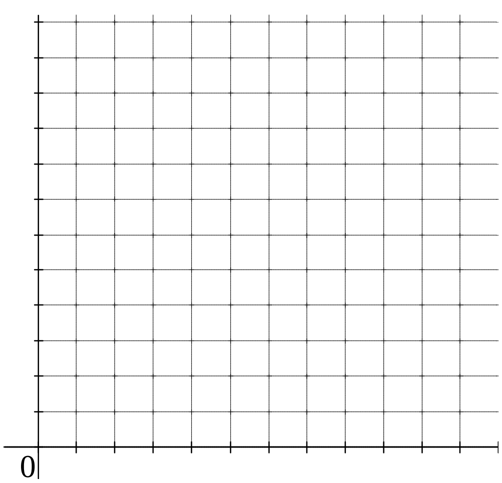
t (min.)	**Rutina 2 # Latidos, *L***	**Rutina 3 # Latidos, *L***
0	120	160
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

12. Deduce una fórmula para el restablecimiento del número de latidos $L(t)$ para cada tipo de rutina de ejercicio.

Rutina 2 ______________________________

Rutina 3 ______________________________

13. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` traza las gráficas del número de latidos en función del tiempo para estas rutinas.



14. Completa la tabla siguiente con los valores correspondientes del número de latidos con respecto al tiempo de dos personas con diferente capacidad de recuperación del ritmo cardiaco: un deportista de alto rendimiento y una persona sedentaria.

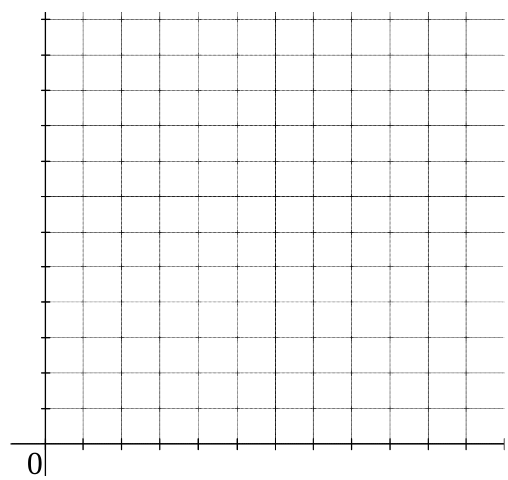
t (min.)	**Deportista Decae 20% #latidos/min**	**Sedentaria Decae 5% #latidos/min**
0	140	140
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

15. Deduce una fórmula para $L(t)$ para cada uno.

Deportista:_____________________

Sedentaria:_____________________

16. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` traza las gráficas del número de latidos en función del tiempo para estas personas.



17. Describe ampliamente las características de **todas** las gráficas.

BLOQUE 1
El estudio de la variación exponencial

ACTIVIDAD No. 6 Eliminación de contaminantes del combustible de aviones a reacción.

Para que el queroseno se pueda usar como combustible en los motores a reacción, los Reglamentos Federales de los E.U. establecen que se le deben eliminar contaminantes haciéndolo pasar a través de un material poroso llamado caolín. Supondremos que el caolín está depositado en un tubo y que cada pie (aprox. 30.5 cm.) de tubo elimina el 20% de los contaminantes que le lleguen. Por consiguiente, de cada pie de tubo sale 80% de la contaminación. Si C_0 es la cantidad inicial de contaminantes que contiene el queroseno y $C(x)$ es la cantidad de contaminantes que le queda después de pasar por x pies de tubo, entonces:

1. Completa:

   $C(0) = C_0$
   $C(1) = C_0\,(0.8)$
   $C(2) =$
   $C(3) =$
   $C(4) =$
   $C(5) =$
   $C(6) =$

En general, después de atravesar x pies de caolín, la concentración residual de contaminantes es:

$$C(x) =$$

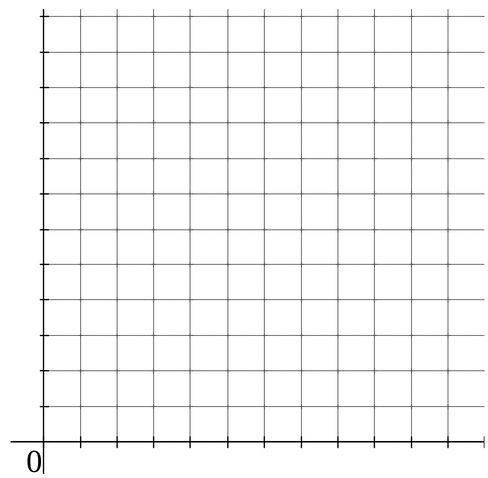
2. Suponiendo que $C_0 = 20$ mg/ft^3, completa la tabla siguiente.

Cantidad de pies de tubo, x	**Concentración residual de contaminantes $C(x)$, mg/ft^3**
0	20
1	
2	
3	
4	
5	
6	

3. Describe qué clase de sucesiones numéricas forman los valores de x y los valores de $C(x)$, respectivamente.

4. ¿Cuál es la relación entre el porcentaje de eliminación de contaminantes y la razón constante?

5. Dibuja una gráfica que ilustre la disminución de la concentración de contaminantes del combustible con respecto al número de pies de tubo de caolín por el que se le hace pasar.



6. Representa mediante una fórmula la relación entre la longitud total x (en pies) de tubo de caolín y la concentración residual $C(x)$ de contaminantes.

7. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

ACTIVIDAD No. 6
Eliminación de contaminantes

8. Suponiendo que para el mismo proceso de eliminación se está experimentando con otros tipos de materiales porosos, los cuales tienen eficiencias diferentes, completa la tabla siguiente.

x (# pie)	**Material 2 c/pie elimina 10% de contam.**	**Material 3 c/pie elimina 40% de contam.**	**Material 4 c/pie elimina 80% de contam.**
0	20	20	20
1			
2			
3			
4			
5			
6			

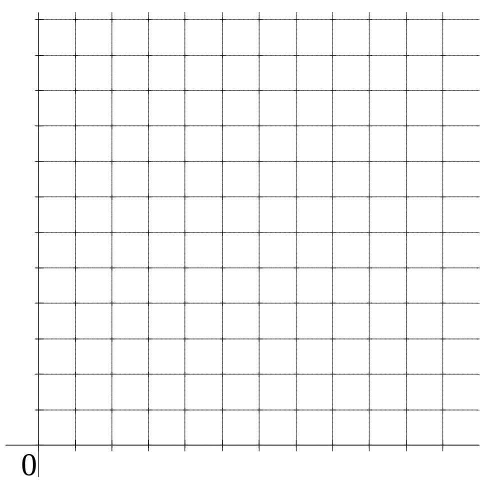
9. Deduce una fórmula para la cantidad residual de contaminantes que deja cada material.

Material 2:____________________________

Material 3:____________________________

Material 4:____________________________

10. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` grafica las fórmulas encontradas y compáralas con la del material original.



11. Describe ampliamente las características de las gráficas.

12. Suponiendo que, de acuerdo con el tipo de combustible elegido (querosén, turbosina, etc.), la cantidad inicial de contaminantes puede variar, completa la tabla siguiente (en todos los casos el material poroso es caolín).

x (# pie)	**Comb. 2 C(x) mg/ft^3**	**Comb. 3 C(x) mg/ft^3**	**Comb. 4 C(x) mg/ft^3**
0	10	50	100
1			
2			
3			
4			
5			
6			

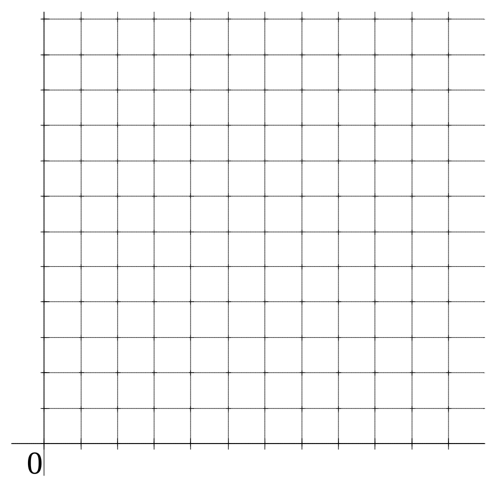
13. Deduce una fórmula para cada tipo de combustible.

Combustible 2: ________________________

Combustible 3: ________________________

Combustible 4: ________________________

14. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` grafica las fórmulas encontradas y compáralas con las del combustible original.

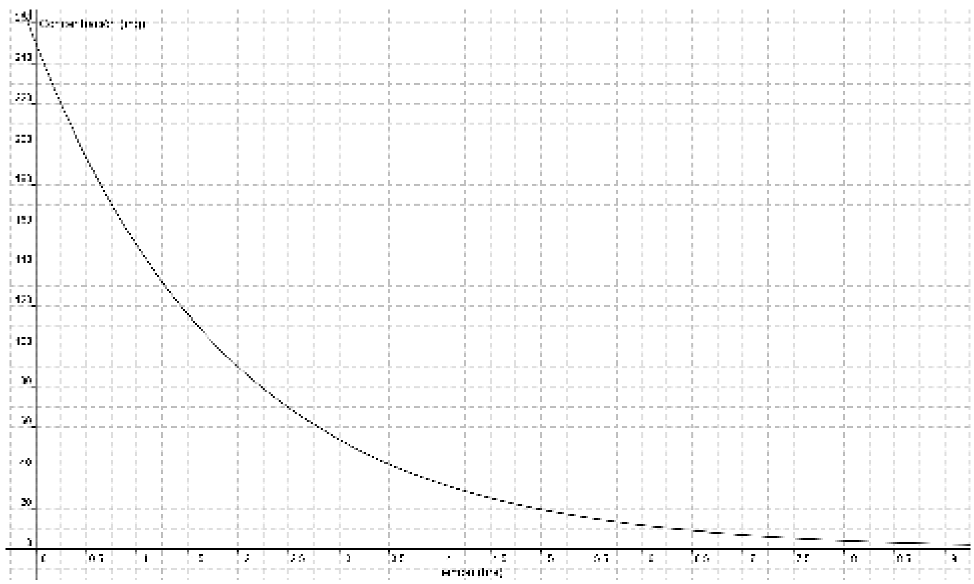


15. Describe ampliamente las características de las gráficas.

BLOQUE 1
El estudio de la variación exponencial

ACTIVIDAD No. 7
Eliminación de una droga por el organismo

Cuando a un paciente se le suministra una droga, ésta entra al torrente sanguíneo. La gráfica siguiente muestra para el caso del antibiótico ampicilina, cómo el organismo la metaboliza y elimina en el transcurso del tiempo, a un paciente al que le fueron suministrados mediante una inyección 250 mg. de dicha droga.



1. Describe las características de esta gráfica.

2. ¿De qué forma crees que está disminuyendo la concentración de ampicilina? Argumenta tu respuesta.

3. Haciendo una lectura de la gráfica, completa la siguiente tabla.

Tabla 1

Tiempo ***t*** **(hrs.)**	**Conc. ampicilina** ***C*,** **(mg)**

4. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre la concentración de ampicilina y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

5. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

6. ¿Qué cantidad de droga permanecerá en la sangre después de:

Tabla 2

t **(hrs.)**	***C*** **(mg.)**
0.4	
1.8	
3.2	
4.5	

¿Cómo lo supiste?

7. Analiza los valores de *t* de la Tabla 2. ¿Qué tipo de sucesión forman estos valores?

8. Analiza los valores de *C* de la Tabla 2. ¿Qué tipo de sucesión forman estos valores?

9. De acuerdo con los resultados que encontraste en la Tabla 2, ¿puedes explicar qué está sucediendo?

`Antes de continuar, vas a investigar lo que significa el término “subtangente”. Describe lo que encontraste.`

10. Presiona la tecla 3 y asegúrate que las siguientes opciones de configuración estén seleccionadas.

```
a. Current Folder   CALCI_G3
b. Language         English
```

11. Ejecuta en la pantalla `HOME` el programa `subtan()`. En la pantalla aparecerá un menú de usuario. Selecciona `F1` para introducir la fórmula que encontraste en el apartado 4. Introduce además los siguientes valores de: `xmin=-0.1`, `xmax=6`, `ymin=-20`, `ymax=250`

12. Selecciona la opción `F2 Subtangentes`. Describe lo que observaste.

Nota Histórica.

En el siglo XVII, el marco geométrico-gráfico era considerado como la principal representación en matemáticas, ya que tanto la aritmética como el álgebra eran consideradas como las formas de lenguaje escrito para la discusión de la verdad geométrica. En esa época existía un gran interés por explorar y determinar tangentes, puntos singulares y áreas bajo curvas, así como el trazado de las mismas.

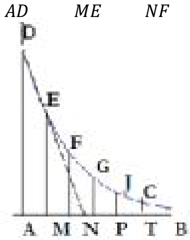
Las subtangentes eran estudiadas para el análisis de la simetría y de la invariancia cuando un punto se mueve a lo largo de la curva. Estos análisis desempeñaron un papel muy importante tanto en el estudio de las curvas, como en el desarrollo del concepto de función.

La gráfica de las funciones exponenciales no fue producto de la tabulación de sus valores, como las hemos generado en estas Actividades, ya que no existían este tipo de funciones, no se concebía la posibilidad de que la potencia fuera una variable. Este tipo de gráficas fue tema de variadas exploraciones.

El comportamiento de las subtangentes en las curvas exponenciales, que observaste con el programa `subtan()`, fue un resultado importante de las investigaciones que realizó Torricelli sobre este tema.

Torricelli realizó el trazado de la curva de la siguiente manera: sobre un eje trazó segmentos iguales (AM=MN=NP=…) y donde las longitudes de AM, AN, AP,… crecían en progresión aritmética. Por los puntos A, M, N, P, … levantó las perpendiculares al eje AD, ME, NF, … que decrecen en progresión geométrica. Explicó la relación entre coordenadas de la siguiente manera: ME= kAD; NF= kME= k^2AD; PG= kNF= k^3AD

etc. Por tanto; $\frac{ME}{AD} = \frac{NF}{ME} = \frac{PG}{NF} = \cdots = k$



Concluyó que esta curva es cóncava hacia arriba, que admite una rama infinita que se aproxima asintóticamente al eje AB y que su subtangente es constante. A estas curvas les llamaban logarítmicas, después descubrirás el por qué.

13. Con el programa `subtan()` explora el comportamiento de las subtangentes con las fórmulas que obtuviste en las seis Actividades anteriores. Describe lo que observaste.

14. Explora con el mismo programa el comportamiento de las subtangentes con fórmulas de funciones que no sean exponenciales.

BLOQUE 1
El estudio de la variación exponencial

ACTIVIDAD No. 8
Disminución de la presión atmosférica

La presión atmosférica, *P*, disminuye en función de la altura *h* sobre la superficie de la tierra, de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$P = P_0\, e^{-0.00012h}$$

en la que P_0 es la presión atmosférica a nivel del mar y *h* está en metros.

Analiza la fórmula anterior y contesta:

a) ¿En qué parte de la fórmula se ubica la variable independiente?

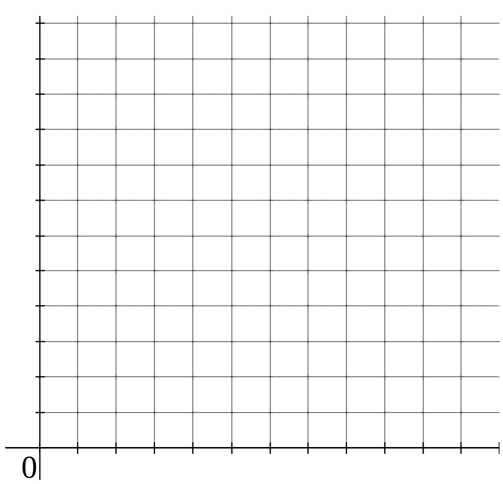
b) ¿Cuál es el valor de la base de esta representación analítica?

1. Con la fórmula anterior completa la tabla siguiente:

Tabla 1

	h (mts.)	*P*, Presión Atmosférica (mmHg)
Bahía Kino	0	760
Hermosillo	250	
Cd. México	2243	
Pico de Orizaba	5747	
Monte McKinley	6198	
Monte Everest	8848	

2. Represente con una gráfica la información anterior.



3. Describe las características de la gráfica trazada.

4. ¿Cuál será la altura sobre el nivel del mar en lugares donde se tienen la siguiente presión atmosférica:

Tabla 2

Presión Atmosférica (mmHg)	*h* (mts.)
700	
630	
560	

¿Cómo lo supiste?

5. Representa estos datos en la gráfica.

6. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de *P* de la Tabla 2?

7. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de *h* en esa misma Tabla?

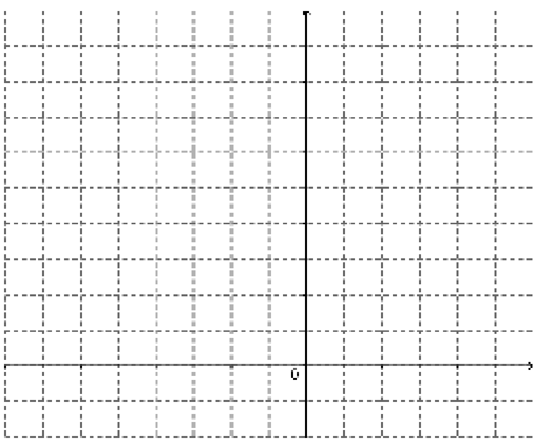
BLOQUE 1
El estudio de la variación exponencial

ACTIVIDAD No. 9
Tablas de funciones exponenciales

Considera la siguiente tabla de valores de cierta función $f(x)$.

x	$y = f(x)$
-6	94.06
-4	76.19
-2	61.72
0	50
2	40.50

1. Traza la gráfica de esta función en la siguiente cuadrícula.



2. ¿Cómo crees que está variando $f(x)$?

3. Deduce una fórmula de $f(x)$ para cualesquier valor de x.

$f(x) =$

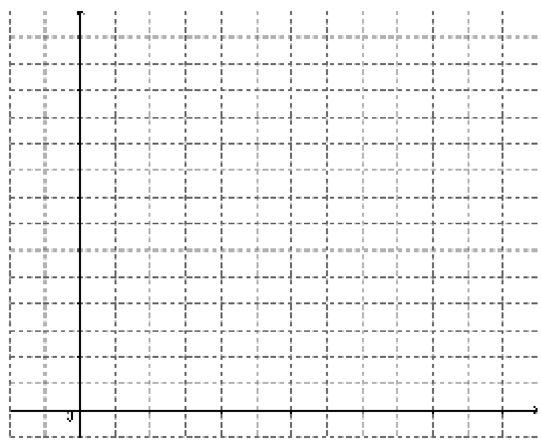
4. Escribe los argumentos que respaldan la fórmula que obtuviste.

5. ¿Cómo puedes verificar que la fórmula anterior es correcta?

A continuación se presenta la siguiente tabla de valores de cierta función $g(x)$.

x	$y = g(x)$
3.5	315.87
4.0	468.51
4.5	694.91
5.0	1030.73
5.5	1528.81

6. Traza la gráfica de esta función en la siguiente cuadrícula.



7. ¿Cómo crees que está variando $g(x)$?

8. Deduce una fórmula de $g(x)$ para cualesquier valor de x.

$g(x) =$

9. Escribe los argumentos que respaldan la fórmula que obtuviste.

10. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

BLOQUE 2
Introducción al estudio de los logaritmos

ACTIVIDAD No. 1
Exploración previa.

Analiza los datos numéricos que aparecen concentrados en las tres siguientes tabulaciones y complétalas, agregando los datos faltantes.

Tabla A

n	$a(n)$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Tabla B

n	$b(n)$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049
11	177147
12	531441
13	1594323
14	4782969
15	14348907
16	43046721
17	129140163
18	387420489
19	1162261467
20	3486784401
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Tabla C

n	$c(n)$
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125
8	390625
9	1953125
10	9765625
11	48828125
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125
16	152587890625
17	762939453125
18	3814697265625
19	19073486328125
20	95367431640625
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Explica cómo obtuviste los datos faltantes. ¿Estás seguro que no es una mera casualidad? Argumenta tu explicación.

BLOQUE 2
Introducción al estudio de los logaritmos

ACTIVIDAD No. 2
Introducción a los logaritmos.

Considera los datos numéricos que aparecen concentrados en las tres siguientes tabulaciones.

Tabla A

n	$a(n)$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

Tabla B

n	$b(n)$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049
11	177147
12	531441
13	1594323
14	4782969
15	14348907
16	43046721
17	129140163
18	387420489
19	1162261467
20	3486784401
21	10460353203
22	31381059609
23	94143178827
24	282429536481
25	847288609443
26	2541865828329
27	7625597484987
28	22876792454961
29	68630377364883
30	205891132094649

Tabla C

n	$c(n)$
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125
8	390625
9	1953125
10	9765625
11	48828125
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125
16	152587890625
17	762939453125
18	3814697265625
19	19073486328125
20	95367431640625
21	476837158203125
22	2384185791015625
23	11920928955078125
24	59604644775390625
25	298023223876953125
26	1490116119384765625
27	7450580596923828125
28	37252902984619140625
29	186264514923095703125
30	931322574615478515625

Por supuesto que sería posible continuar agregando más datos a cada una de estas tabulaciones. Seguramente ya sabes cómo hacerlo. Al trabajar con estas tabulaciones advertiste que los números en cada columna forman una secuencia o sucesión.

¿Qué clase de sucesión forman los números n de la primera columna en cada Tabla?

¿Qué clase de sucesión forman los números $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$de la segunda columna en cada Tabla?

EXPLORACIÓN No. 1 Multiplicaciones

Junto con tu(s) compañero(s) de equipo, analiza y discute las tareas de exploración que más delante se te indican. Trata de formular respuestas claras y concisas a lo que se te pregunta. De ser posible, trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para dar más claridad y precisión a tus respuestas.

1.1 Escribe una fórmula que permita generar todos los valores numéricos de las secuencias $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$.

$$a(n) =$$
$$b(n) =$$
$$c(n) =$$

1.2 Escoge algunos pares de números de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ y multiplícalos, usando la calculadora. ¿Es el producto de dos cualesquiera de los términos de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ un término de la misma secuencia? ¿Por qué? Proporciona una justificación clara a tu respuesta. (Es probable que tengas que extender las secuencias para verificar tus conclusiones. En ese caso, usa la calculadora).

1.3 Suponiendo que las Tablas A, B y C pudieran ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados, ¿podrían ser usadas por separado como tablas de multiplicación? ¿De qué modo? ¿Cuáles serían las instrucciones para usarlas?

1.4 Trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para resumir las instrucciones que formulaste en el punto anterior. Igualmente, usa dicho lenguaje para explicar por qué dichas instrucciones funcionan.

Ya hemos examinado las relaciones entre las dos secuencias de números en las Tablas, cuando el producto de dos términos cualesquiera de las sucesiones es también un término de dicha sucesión. Veamos ahora qué pasa si intentamos con otras operaciones.

EXPLORACIÓN No. 2 Divisiones

2.1 Trabajando con tu(s) compañeros de equipo, toma dos términos cualesquiera de las sucesiones$a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, y divide el término mayor entre el menor, usando la calculadora. El resultado de la división, ¿es también un término de la sucesión correspondiente $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta.

2.2 Al igual que en la Exploración No. 1, supongamos que las Tablas A, B y C pueden ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados. ¿Podrían ser usadas por separado como tablas de división? ¿De qué modo? ¿Bajo qué condiciones? ¿Cuáles serían las instrucciones para usarlas?

2.3 Trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para resumir las instrucciones que formulaste en el punto anterior. Igualmente, usa dicho lenguaje para explicar por qué dichas instrucciones funcionan.

EXPLORACIÓN No. 3 Potencias

3.1 Trabajando con tu(s) compañeros de equipo, toma un término cualesquiera de las sucesiones$a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, y elévalo a un exponente natural, usando la calculadora. El resultado de la potenciación, ¿es también un término de la sucesión correspondiente$a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta.

3.2 Al igual que en las Exploraciones No. 1 y 2, supongamos que las Tablas A, B y C pueden ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados. ¿Podrían ser usadas por separado como tablas de potencias? ¿De qué modo? ¿Bajo qué condiciones? ¿Cuáles serían las instrucciones para usarlas?

3.3 Trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para resumir las instrucciones que formulaste en el punto anterior. Igualmente, usa dicho lenguaje para explicar por qué dichas instrucciones funcionan.

EXPLORACIÓN No. 4 Raíces

4.1 Trabajando con tu(s) compañero(s) de equipo, toma un término cualesquiera de las sucesiones$a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, y calcula su raíz cuadrada o cúbica (o cualquier otra, si te es posible), usando la calculadora. El resultado de la radicación, ¿es también un término de la sucesión correspondiente$a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta.

4.2 Al igual que en las Exploraciones anteriores, supongamos que las Tablas A, B y C pueden ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados. ¿Podrían ser usadas por separado como tablas de raíces? ¿De qué modo? ¿Bajo qué condiciones? ¿Cuáles serían las instrucciones para usarlas?

4.3 Trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para resumir las instrucciones que formulaste en el punto anterior. Igualmente, usa dicho lenguaje para explicar por qué dichas instrucciones funcionan.

SUMARIO

En las cuatro Exploraciones anteriores has investigado cómo multiplicar, dividir, elevar a un exponente natural y extraer raíz a términos de una misma sucesión del tipo $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$. Suponiendo que no tuvieras acceso a una calculadora o computadora, sino solamente a Tablas de valores numéricos de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ como las que has estado usando en estas Exploraciones, describe cómo tendrías que usar estas Tablas para realizar los cálculos referidos:

a) Multiplicación:

b) División:

c) Potenciación:

d) Radicación:

Cada una de las operaciones aritméticas que has explorado se reduce a una anterior en la jerarquía de las operaciones, disminuyendo en gran medida la dificultad de los cálculos numéricos.

BLOQUE 2

Introducción al estudio de los logaritmos

ACTIVIDAD No. 3
Extendiendo el poder de las Tablas.

Apóyate en las siguientes tabulaciones que ya has estado usando, para resolver algunos ejercicios de cálculos más complicados.

Tabla A

n	$a(n)$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	1638
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

Tabla B

n	$b(n)$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049
11	177147
12	531441
13	1594323
14	4782969
15	14348907
16	43046721
17	129140163
18	387420489
19	1162261467
20	3486784401
21	10460353203
22	31381059609
23	94143178827
24	282429536481
25	847288609443
26	2541865828329
27	7625597484987
28	22876792454961
29	68630377364883
30	205891132094649

Tabla C

n	$c(n)$
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125
8	390625
9	1953125
10	9765625
11	48828125
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125
16	152587890625
17	762939453125
18	3814697265625
19	19073486328125
20	95367431640625
21	476837158203125
22	2384185791015625
23	11920928955078125
24	59604644775390625
25	298023223876953125
26	1490116119384765625
27	7450580596923828125
28	37252902984619140625
29	186264514923095703125
30	931322574615478515625

En los siguientes ejercicios sobre cálculos, usa solamente lo que ya has aprendido sobre el manejo de las Tablas (y también un poco de ingenio!) para obtener los resultados que se te piden. Explica la estrategia que usaste para ampliar el poder de las tabulaciones, de modo que te permita obtener nuevos resultados. Usa la calculadora solamente para verificar que tu estrategia es correcta.

1. Multiplicaciones

$1.28 \times 137.072 =$	$7.29 \times 59.049 =$	$6.25 \times 78.125 =$
$102.4 \times 2097.152 =$	$177.147 \times 4782.969 =$	$781.25 \times 9765.625 =$
$335.54432 \times 8.192 =$	$3486.784401 \times 159.4323 =$	$61035.15625 \times 19.53125 =$

2. Divisiones

$\frac{8.192}{5.12} =$	$\frac{531.441}{59.049} =$	$\frac{78.125}{6.25} =$
$\frac{1048.576}{102.4} =$	$\frac{4304.6721}{65.61} =$	$\frac{4882.8125}{156.25} =$

3. Potencias

$(32.768)^2 =$	$(7.29)^3 =$	$(6.25)^5 =$
$(1.28)^4 =$	$(478.2969)^2 =$	$(976.5625)^2 =$

4. Raíces

$\sqrt{6710.8864} =$	$\sqrt{7.29} =$	$\sqrt{15.625} =$
$\sqrt[3]{134217.728} =$	$\sqrt[3]{531.441} =$	$\sqrt[3]{1953.125} =$
$\sqrt[4]{26843.5456} =$	$\sqrt[4]{34.86784401} =$	$\sqrt[4]{1525.87890625} =$

¿Cuáles son las ventajas y limitaciones de estas Tablas?

ACTIVIDAD No. 4
Actividad previa.

Analiza los datos numéricos que aparecen concentrados en las tres siguientes tabulaciones y complétalas, agregando los datos faltantes.

Tabla A

n	$a(n)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Tabla B

n	$b(n)$
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Tabla C

n	$c(n)$
0	0
1	1
2	32
3	243
4	1024
5	3125
6	7776
7	16807
8	32768
9	59049
10	100000
11	161051
12	248832
13	371293
14	537824
15	759375
16	1048576
17	1419857
18	1889568
19	2476099
20	3200000
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Explica cómo obtuviste los datos faltantes. ¿Estás seguro que no es una mera casualidad?

ACTIVIDAD No. 5
¿Nuevas tablas de logaritmos?

Considera los datos numéricos que aparecen concentrados en las tres siguientes tabulaciones.

Tabla A

n	$a(n)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400
21	441
22	484
23	529
24	576
25	625
26	676
27	729
28	784
29	841
30	900

Tabla B

n	$b(n)$
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000
21	9261
22	10648
23	12167
24	13824
25	15625
26	17576
27	19683
28	21952
29	24389
30	27000

Tabla C

n	$c(n)$
0	0
1	1
2	32
3	243
4	1024
5	3125
6	7776
7	16807
8	32768
9	59049
10	100000
11	161051
12	248832
13	371293
14	537824
15	759375
16	1048576
17	1419857
18	1889568
19	2476099
20	3200000
21	4084101
22	5153632
23	6436343
24	7962624
25	9765625
26	11881376
27	14348907
28	17210368
29	20511149
30	24300000

Por supuesto que sería posible continuar agregando más datos a cada una de estas tabulaciones. Seguramente ya sabes cómo hacerlo. Al trabajar con estas tabulaciones advertiste que los números en cada columna forman una secuencia o sucesión.

¿Qué clase de sucesión forman los números n de la primera columna en cada Tabla?

¿Qué clase de sucesión forman los números $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$ de la segunda columna?

EXPLORACIÓN No. 1 Multiplicaciones

Junto con tu(s) compañero(s) de equipo, analiza y discute las tareas de exploración que más delante se te indican. Trata de formular respuestas claras y concisas a lo que se te pregunta. De ser posible, trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para dar más claridad y precisión a tus respuestas.

1.1 Escribe una fórmula que permita generar todos los valores numéricos de las secuencias $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$.

$$a(n) =$$
$$b(n) =$$
$$c(n) =$$

1.2 ¿Es el producto de dos cualesquiera de los términos de $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$ un término de la misma secuencia? ¿Por qué? Proporciona una justificación clara a tu respuesta. (Es probable que tengas que extender las secuencias para verificar tus conclusiones. En ese caso, usa la calculadora).

1.3 ¿Qué operaciones aritméticas tendrías que realizar para obtener el producto de dos términos cualesquiera de $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$, sin tener que multiplicar directamente tales términos? ¿Se trata de operaciones más simples que la multiplicación?

1.4 Suponiendo que las Tablas A, B y C pudieran ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados, ¿podrían ser usadas como tablas de multiplicación? ¿Por qué sí o por qué no?

EXPLORACIÓN No. 2 Divisiones

2.1 Trabajando con tu(s) compañeros de equipo, toma dos términos cualesquiera de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, y divide el término mayor entre el menor, usando la calculadora. El resultado de la división, ¿es también un término de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta.

2.2 ¿Qué operaciones aritméticas tendrías que realizar para obtener el cociente de dos términos cualesquiera de $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$, sin tener que dividir directamente tales términos? ¿Se trata de operaciones más simples que la división?

2.3 Al igual que en la Exploración No. 1, supongamos que las Tablas A, B y C pueden ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados. ¿Podrían ser usadas como tablas de división? ¿Por qué?

EXPLORACIÓN No. 3 Potencias

3.1 Trabajando con tu(s) compañeros de equipo, toma un término cualesquiera de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, y elévalo a un exponente natural, usando la calculadora. El resultado de la potenciación, ¿es también un término de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta.

3.2 ¿Qué operaciones aritméticas tendrías que realizar para obtener la potencia de un término cualquiera de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, sin tener que calcular directamente tal potencia? ¿Se trata de operaciones más simples que la potenciación?

3.3 Al igual que en las Exploraciones No. 1 y 2, supongamos que las Tablas A, B y C pueden ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados. ¿Podrían ser usadas como tablas de potencias? ¿Por qué?

EXPLORACIÓN No. 4 Raíces

4.1 Trabajando con tu(s) compañero(s) de equipo, toma un término cualquiera de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, y calcula su raíz cuadrada o cúbica (o cualquier otra, si te es posible), usando la calculadora. El resultado de la radicación, ¿es también un término de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta.

4.2 ¿Qué operaciones aritméticas tendrías que realizar para obtener la raíz de u término cualquiera de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, sin tener que calcular directamente tal raíz? ¿Se trata de operaciones más simples que la radicación?

4.3 Al igual que en las Exploraciones anteriores, supongamos que las Tablas A, B y C pueden ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados. ¿Podrían ser usadas como tablas de raíces? ¿Por qué?

ACTIVIDAD No. 6
Extendiendo el poder de las reglas.

Considera los datos numéricos que aparecen concentrados en las tres siguientes tabulaciones.

Tabla A

n	$a(n)$
-10	1/1024
-9	1/512
-8	1/256
-7	1/128
-6	1/64
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576

Tabla B

n	$b(n)$
-10	1/59049
-9	1/19683
-8	1/6561
-7	1/2187
-6	1/729
-5	1/243
-4	1/81
-3	1/27
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049
11	177147
12	531441
13	1594323
14	4782969
15	14348907
16	43046721
17	129140163
18	387420489
19	1162261467
20	3486784401

Tabla C

n	$c(n)$
-10	1/9765625
-9	1/1953125
-8	1/390625
-7	1/78125
-6	1/15625
-5	1/3125
-4	1/625
-3	1/125
-2	1/25
-1	1/5
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125
8	390625
9	1953125
10	9765625
11	48828125
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125
16	152587890625
17	762939453125
18	3814697265625
19	19073486328125
20	95367431640625

4.1. Describe qué es lo que sucede con los valores de $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$ para valores enteros negativos de n más pequeños que los considerados en las Tablas de la Actividad anterior.

4.2. ¿Existe algún valor de n para el cual el valor de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ sea cero? Argumenta tu respuesta.

4.3. ¿Existe algún valor de n para el cual el valor de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ sea negativo? Argumenta tu respuesta.

4.4. Junto con tus compañeros de equipo explora si las reglas que obtuviste en la Actividad No. 10 para las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación, se cumplen también cuando los valores de n son negativos. (Se recomienda el uso de la calculadora Voyage 200 configurada en el modo exacto). Es probable que tengas que extender las secuencias para verificar tus conclusiones, en ese caso, usa la calculadora. Escribe el resultado de tus exploraciones.

BLOQUE 2
Introducción al estudio de los logaritmos

ACTIVIDAD No. 7
Verificando consistencia y precisión de las reglas logarítmicas.

Considera los datos numéricos que aparecen concentrados en las tres siguientes tabulaciones.

Tabla A

n	$a(n)$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

Tabla B

n	$b(n)$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049
11	177147
12	531441
13	1594323
14	4782969
15	14348907
16	43046721
17	129140163
18	387420489
19	1162261467
20	3486784401
21	10460353203
22	31381059609
23	94143178827
24	282429536481
25	847288609443
26	2541865828329
27	7625597484987
28	22876792454961
29	68630377364883
30	205891132094649

Tabla C

n	$c(n)$
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125
8	390625
9	1953125
10	9765625
11	48828125
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125
16	152587890625
17	762939453125
18	3814697265625
19	19073486328125
20	95367431640625
21	476837158203125
22	2384185791015625
23	11920928955078125
24	59604644775390625
25	298023223876953125
26	1490116119384765625
27	7450580596923828125
28	37252902984619140625
29	186264514923095703125
30	931322574615478515625

EXPLORACIÓN No. 1 Multiplicaciones

Escoge algunos pares de números de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$de tal modo que el primero de estos números sea de una de las Tablas y el segundo de una Tabla diferente y multiplícalos, usando la calculadora. ¿Es el producto de dos cualesquiera de los términos de estas secuencias un término de alguna de las tres secuencias? ¿Este producto se puede calcular usando las Tablas por medio de las reglas que formulaste en la Actividad No. 10? ¿Por qué? Proporciona una justificación clara a tu respuesta. (Es probable que tengas que extender las secuencias para verificar tus conclusiones. En ese caso, usa la calculadora).

EXPLORACIÓN No. 2 Divisiones

Trabajando con tu(s) compañeros de equipo, toma dos términos cualesquiera de distintas sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, y divide el término mayor entre el menor, usando la calculadora. El resultado de la división, ¿es también un término de alguna de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Este cociente se puede calcular usando las Tablas por medio de las reglas que formulaste en la Actividad No. 10? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta.

EXPLORACIÓN No. 3 Potencias y raíces

Realiza exploraciones análogas con los términos de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$ para las operaciones de potenciación y radicación. ¿Se pueden realizar estas operaciones con los números de las Tablas usando las reglas formuladas en la Actividad 10?

¿Qué condiciones es necesario precisar para una correcta formulación de las reglas?

ACTIVIDAD No. 8
Simbolización adecuada de las reglas de logaritmos.

Considera los datos numéricos que aparecen concentrados en las tres siguientes tabulaciones. Completa los datos que faltan en las celdas de color.

Tabla A

n	$a(n) = 2^n$
0	1
1	2
2	4
3	8
	10
4	16
5	32
6	64
	100
7	128
8	256
9	512
	1000
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
	10000
14	16384
15	32768
16	65536
	100000
17	137072
18	262144
19	524288
	1000000
20	1048576
21	2097152
22	4194394
23	8388608
	10000000
24	16777216
25	33554432
26	67108864
	100000000
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

Tabla B

n	$b(n) = 3^n$
0	1
1	3
2	9
	10
3	27
4	81
	100
5	243
6	729
	1000
7	2187
8	6561
	10000
9	19683
10	59049
	100000
11	177147
12	531441
	1000000
13	1594323
14	4782969
	10000000
15	14348907
16	43046721
	100000000
17	129140163
18	387420489
19	1162261467
20	3486784401

Tabla C

n	$c(n) = 5^n$
0	1
1	5
	10
2	25
	100
3	125
4	625
	1000
5	3125
	10000
6	15625
7	78125
	100000
8	390625
	1000000
9	1953125
10	9765625
	10000000
11	48828125
	100000000
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125

Al completar los datos faltantes en las Tablas de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$, llegaste a obtener los siguientes resultados importantes:

Tabla A

$E(10) =$
$E(100) =$
$E(1000) =$
$E(10000) =$
$E(100000) =$
etcétera.

Tabla B

$E(10) =$
$E(100) =$
$E(1000) =$
$E(10000) =$
$E(100000) =$
etcétera.

Tabla C

$E(10) =$
$E(100) =$
$E(1000) =$
$E(10000) =$
$E(100000) =$
etcétera.

¿No crees que esto es algo confuso? Trata de completar lo siguiente:

$$E(1000000) =$$

$$E(100000000) =$$

¿Podrías proponer algo para evitar la confusión?

ACTIVIDAD No. 9
El concepto de logaritmo.

Al desarrollar todas las Actividades previas, en las que usaste las sucesiones $a(n) = 2^n$, $b(n) = 3^n$ y $c(n) = 5^n$, llegaste a obtener los siguientes resultados importantes:

Notación exponencial	Notación coloquial previa	Notación moderna
$2 = 2^{\mathbf{1}}$ $3 = 3^{\mathbf{1}}$ $5 = 5^{\mathbf{1}}$	$E(2) = \mathbf{1}$ $E(3) = \mathbf{1}$ $E(5) = \mathbf{1}$	$\log_2 2 = \mathbf{1}$ $\log_3 3 = \mathbf{1}$ $\log_5 5 = \mathbf{1}$
$4 = 2^{\mathbf{2}}$ $9 = 3^{\mathbf{2}}$ $25 = 5^{\mathbf{2}}$	$E(4) = \mathbf{2}$ $E(9) = \mathbf{2}$ $E(25) = \mathbf{2}$	$\log_2 4 = \mathbf{2}$ $\log_3 9 = \mathbf{2}$ $\log_5 25 = \mathbf{2}$
$8 = 2^{\mathbf{3}}$ $27 = 3^{\mathbf{3}}$ $125 = 5^{\mathbf{3}}$	$E(8) = \mathbf{3}$ $E(27) = \mathbf{3}$ $E(125) = \mathbf{3}$	$\log_2 8 = \mathbf{3}$ $\log_3 27 = \mathbf{3}$ $\log_5 125 = \mathbf{3}$

1. Completa los dos renglones vacíos de la Tabla de arriba con algunos ejemplos a fin de que empieces a usar la notación moderna para los logaritmos.

2. Usa los resultados que obtuviste en la Actividad 14 para completar las siguientes igualdades.

$\log_2 \frac{1}{2} =$ $\log_2 \frac{1}{128} =$	$\log_3 \frac{1}{9} =$ $\log_3 \frac{1}{243} =$	$\log_5 \frac{1}{125} =$ $\log_5 \frac{1}{78125} =$

3. Completa las siguientes igualdades y explícalas. ¿Hay alguna lógica en ellas?

$\log_2 1 =$	$\log_3 1 =$	$\log_5 1 =$

4. Usando la notación moderna, expresa las propiedades básicas de los logaritmos que ya has advertido a lo largo de las Actividades previas. Enuncia estas propiedades de manera general.

a) El logaritmo de un producto.

$$\log_b \alpha \cdot \beta =$$

b) El logaritmo de un cociente.

$$\log_b \frac{\alpha}{\beta} =$$

c) El logaritmo de una potencia.

$$\log_b \alpha^m =$$

d) el logaritmo de una raíz.

$$\log_b \sqrt[m]{\alpha} =$$

ACTIVIDAD No. 10
Fórmula para el cambio de base.

Considera la siguiente tabla de logaritmos de diferentes bases, tomadas con cinco decimales.

x	$\log_2 x$	$\log_3 x$	$\log_5 x$	$\log_{10} x$
1	0	0	0	0
2	**1**	0.63093	0.43068	0.30103
3	1.58496	**1**	0.68261	0.47712
4	2	1.26186	0.86135	0.60206
5	2.32193	1.46497	**1**	0.69897
6	2.58496	1.63093	1.11328	0.77815
7	2.80735	1.77124	1.20906	0.84509
8	3	1.89279	1.29203	0.90309
9	3.16993	2	1.36521	0.95424
10	3.32193	2.09590	1.43068	**1**

Usa esta tabla para realizar los siguientes cálculos en todos los renglones (cuando sea posible).

$$\frac{\log_3 x}{\log_2 x} = \qquad \frac{\log_2 x}{\log_3 x} = \qquad \frac{\log_2 x}{\log_5 x} =$$

$$\frac{\log_5 x}{\log_2 x} = \qquad \frac{\log_5 x}{\log_3 x} = \qquad \frac{\log_3 x}{\log_5 x} =$$

$$\frac{\log_{10} x}{\log_2 x} = \qquad \frac{\log_{10} x}{\log_3 x} = \qquad \frac{\log_{10} x}{\log_5 x} =$$

Los valores que obtuviste al realizar estos cálculos, ¿se corresponden con alguno de los valores contenidos en la Tabla de logaritmos?

Sin realizar ningún cálculo y usando solamente la Tabla de Logaritmos, ¿podrías decir cuál es el resultado de las siguientes operaciones?

$$\frac{\log_2 x}{\log_{10} x} = \qquad \frac{\log_3 x}{\log_{10} x} = \qquad \frac{\log_5 x}{\log_{10} x} =$$

En general, ¿qué se puede afirmar en relación con los siguientes cocientes de logaritmos?

$$\frac{\log_a x}{\log_b x} = \qquad \frac{\log_b x}{\log_a x} =$$

NOTA HISTÓRICA
Breve historia de los logaritmos.

El siglo XVI y el principio del XVII vieron una enorme expansión del conocimiento científico en todas las áreas. La geografía, la física y la astronomía, liberadas al fin de antiguos dogmas, cambiaron rápidamente la percepción humana del universo. El sistema heliocéntrico de Copérnico finalmente comenzó a encontrar aceptación. La circunnavegación del globo en 1521 por Fernando de Magallanes y Juan Sebastián Elcano inauguró una nueva era de exploración de los mares que difícilmente dejó un rincón del mundo sin ser visitado. En 1569 Gerhard Mercator publicó su mapa del nuevo mundo, un acontecimiento que tendría un impacto decisivo en el arte de la navegación. En Italia, Galileo Galilei sentaba los fundamentos de la mecánica y en Alemania Johannes Kepler formulaba sus tres leyes del movimiento planetario, liberando a la astronomía de una vez por todas del universo geocéntrico de los griegos. Estos desarrollos involucraban cantidades de datos numéricos cada vez mayores, forzando a los científicos a dedicar mucho tiempo a tediosos cómputos numéricos.

Estos grandes descubrimientos geográficos propiciaron una gran expansión económica y comercial, permitiendo que algunos puertos de Europa se convirtieran en pequeñas capitales financieras y bancarias. Por consiguiente, había una necesidad social de facilitar las operaciones con magnitudes grandes; el escocés John Napier y el suizo Jobst Bürgi enfrentaron este reto por separado: crear una herramienta para facilitar los cálculos.

Tanto Napier como Bürgi inventaron los logaritmos antes que el uso de la actual notación exponencial se hubiera consolidado en el álgebra de la época. No utilizaron la notación exponencial ni se familiarizaron con el concepto de exponencial, el cual juega hoy un papel fundamental en el desarrollo de la teoría logarítmica.

Las reglas que descubriste en las Actividades anteriores sobre la relación existente entre los términos de una progresión geométrica y los exponentes correspondientes de la razón común, para las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación, ya eran conocidas en esta época. Esta relación entre una progresión geométrica y una aritmética es la idea clave detrás de la invención y desarrollo de las tablas de logaritmos. Como has observado, para que estas tablas sean útiles para simplificar la tarea de realizar las operaciones aritméticas con números grandes, se deben de llenar los amplios huecos entre las entradas de nuestras tablas; ésta también fue una de las ideas de Napier, "hacer continua la serie geométrica".

Se puede hacer lo anterior de dos maneras: usando exponentes fraccionarios, o eligiendo como razón común (base) un número suficientemente pequeño tal que sus potencias crezcan suficientemente despacio. Los exponentes fraccionarios, definidos como $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, no eran todavía plenamente comprendidos en la época de Napier, por lo que él no tuvo más opción que la segunda. ¿Pero qué tan pequeña debe ser esta razón? Si es *demasiado* pequeña, sus potencias crecerían demasiado lentamente, de nuevo haciendo al sistema de poca utilidad práctica. Parece que un número cercano a 1, pero no demasiado cercano, sería una posición intermedia razonable. Tras años de luchar con este problema, Napier se decidió por $1 - 10^{-7}$, o 0.9999999. Ésta fue, entonces, la razón común ("proporción", en sus propias palabras) que utilizó Napier para construir su tabla.

NOTA HISTÓRICA
Breve historia de los logaritmos.

Y entonces se impuso la tarea de hallar, mediante tediosas restas, los términos sucesivos de su progresión. Ésta debió haber sido una de las tareas menos creativas que haya enfrentado un científico: Napier dedicó veinte años a completar el trabajo. Una vez completada esta monumental tarea a Napier le faltaba bautizar su creación, y decidió adoptar la palabra griega *logaritmo*, compuesta por los vocablos *logos* (razón o cociente) y *arithmos* (número), es decir, número de razones.

El descubrimiento de los logaritmos es un claro ejemplo de lo habituales que resultan las duplicidades en las innovaciones. Hoy se sabe que el relojero y constructor de instrumentos suizo Jobst Bürgi se hallaba en posesión de este conocimiento antes que Napier, incluso se afirma que concibió la idea del logaritmo ya en el año 1586, pero, según se dice, fue por falta de tiempo que no lo publicó.

Las tablas de logaritmos de Napier, aparecidas en 1614, causaron un gran impacto en toda Europa, pero especialmente en Henry Briggs, profesor de geometría de Oxford. Briggs visitó a Napier en Edimburgo y, después de una discusión, llegaron a la conclusión de que el logaritmo de 1 debía ser igual a 0, mientras que el logaritmo de 10 debía ser igual a 1. Así nacen los logaritmos de "base común" o *logaritmos de Briggs*.

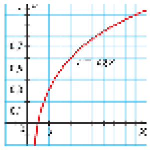
No solamente la definición de logaritmo de Napier es diferente en muchos aspectos de la definición moderna introducida por Leonhard Euler en 1728, sino que también la noción de base es inaplicable a su sistema. Euler introdujo el concepto de logaritmo diciendo que, si $a > 1$, el logaritmo de x en base a es el exponente z tal que $a^z = x$, siendo esta la primera vez que se presentaba el logaritmo interpretado como un exponente.

$$\log_a x = z \text{ es lo mismo que } a^z = x.$$

Algunos innovadores comprendieron que podía construirse un instrumento mecánico para efectuar los cálculos con los logaritmos. La idea de utilizar dos escalas logarítmicas que pudieran ser movidas una a lo largo de la otra se originó con William Oughtred (1574-1660), el cual fue el inventor de la "Regla de cálculo".

La "Regla de cálculo", en sus múltiples variantes, sería la fiel compañera de todo científico e ingeniero por los siguientes 350 años. A principios de la década de 1970, las primeras calculadoras electrónicas de mano aparecieron en el mercado, y en los siguientes diez años la "Regla de cálculo" se volvió obsoleta.

Pero si los logaritmos han perdido su papel como pieza fundamental en los cómputos matemáticos, la función logarítmica permanece en el centro de casi todas las ramas de las matemáticas, puras o aplicadas. Aparece en un gran número de aplicaciones, desde la física y la química hasta la biología, la psicología, el arte y la música.



BLOQUE 3
Variación logarítmica

ACTIVIDAD No. 1
Orden de Magnitud.

En la naturaleza se dan situaciones en que se tienen que utilizar medidas de órdenes muy diferentes. Por ejemplo, si hablamos del peso de los seres vivos:

Un hombre puede pesar 90 kg. = 90000 gr.

Un rotífero (el animal pluricelular más pequeño) pesa 0.00000000603 gr.

Una ballena (el más grande de todos los animales) pesa 120Ton.= 120 000 000gr.

Así pues, si tenemos que referirnos a diferentes animales por sus pesos o hacer una gráfica con los mismos, es un gran inconveniente que haya tan enormes diferencias entre unos y otros valores numéricos. Para evitar tal inconveniente, se le asigna a cada animal el *orden de magnitud* correspondiente a su peso.

En la siguiente tabla se muestra para algunos casos, de acuerdo con el peso del animal, el orden de magnitud que le corresponde.

Peso, *p* [gr]	**Orden de Magnitud, *M***
0.01	-2
0.1	-1
1	0
10	1
100	2

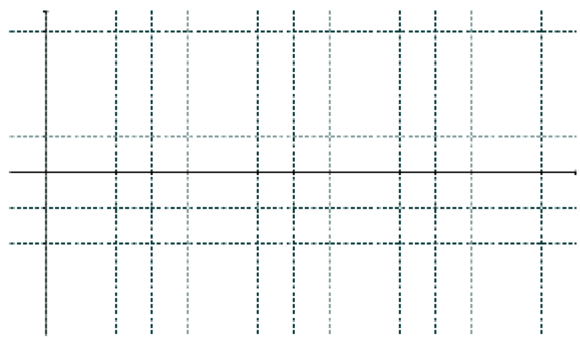
Tabla 1

1. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores del peso, p?

2. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores del orden de magnitud, M?

3. ¿Cuál es la relación entre el orden de magnitud M y el peso p del animal? Argumenta tu respuesta.

4. En la cuadrícula siguiente traza una gráfica con los datos de la Tabla 1.



5. Describe ampliamente las características de esta gráfica.

6. ¿Podrías deducir una fórmula para calcular el orden de magnitud M para cualesquier peso p? ¿Cuál es la fórmula?

7. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

8. Completa la siguiente Tabla.

Animal	**Peso, *p* [gr]**	**Orden de Magnitud, *M***
Rotífero	0.00000000603	
Globio (pez más pequeño)	0.001995	
Escarabajo gigante (insecto más grande)	100	
Hombre	90 000	
Cocodrilo	1 778 280	
Ballena	120 000 000	

Tabla 2

9. Completa la siguiente Tabla.

Animal	**Orden de Magnitud, *M***	**Peso, *p* [gr]**
Mosca	-5.30	
Pájaro mosca (ave más pequeña)	0.30	
Langosta	4.19	
Avestruz	5.20	
Elefante	6.99	

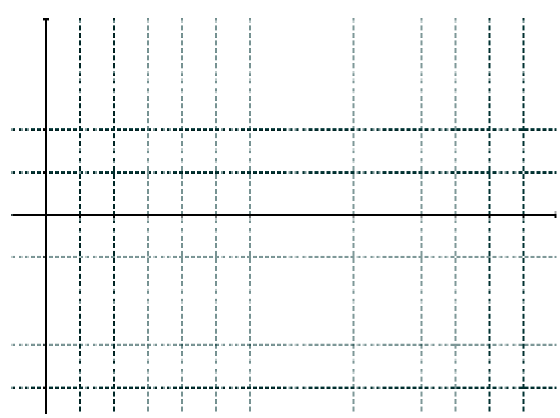
Tabla 3

10. ¿Cómo obtuviste el peso en cada caso?

11. El hecho de que el orden de magnitud del peso de una ballena sea 8 y el de una langosta sea 4, ¿significa que la ballena pesa el doble que la langosta? Argumenta tu respuesta.

12. ¿Cuál es la diferencia en el peso de un animal de orden 3 y otro de orden 2?

13. Ahora ya podemos hacer una escala con los pesos de todos los animales que no sea complicada. El orden de magnitud del peso de cada animal será un número entre -8 y 8, esto es lo que se llama una **escala logarítmica**. En un rango pequeño, en este caso de -8 a 8, se consigue expresar realidades muy diferentes. Usando esta escala, representa gráficamente la información contenida en las Tablas 2 y 3.



ACTIVIDAD No. 2
Ley de crecimiento de un árbol.

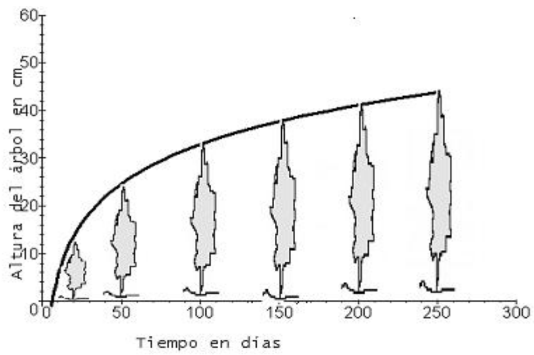


Figura 1

Se determinó la ley de crecimiento de un árbol con base en varias mediciones de su altura realizadas en un período de 250 días, para diferentes tipos de árboles. De esta manera que se logró obtener una representación gráfica de la variación de la altura del árbol y el tiempo transcurrido. Considera a t como el tiempo transcurrido en días y A la altura del árbol en dm. La gráfica de la Figura 2 muestra el crecimiento de un cierto tipo de pino.

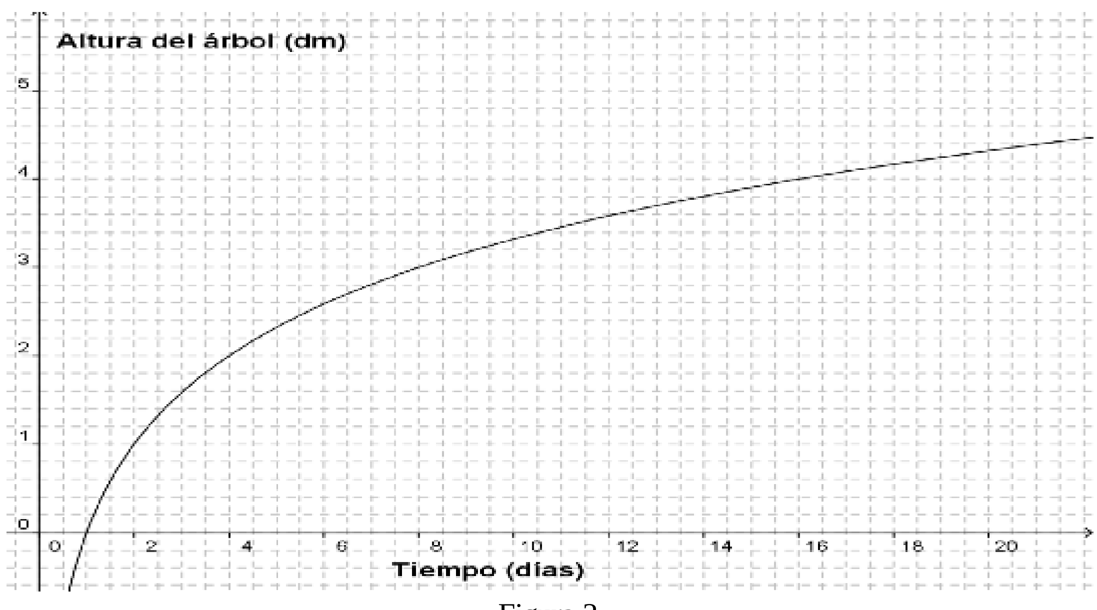


Figura 2

1. Describe las características de esta gráfica.

2. Utilizando la gráfica de la Figura 2, completa la siguiente tabla.

Tiempo, t (días)	**Altura del árbol, A (dm)**
1	
2	
4	
8	
16	

3. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores del tiempo, t?

4. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de la altura, A?

5. ¿De qué forma crees que está aumentando la altura de éste pino? Argumenta tu respuesta.

6. ¿Puedes representar por medio de una fórmula la relación entre la altura del pino y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

7. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

La siguiente gráfica muestra el crecimiento de una benjamina.

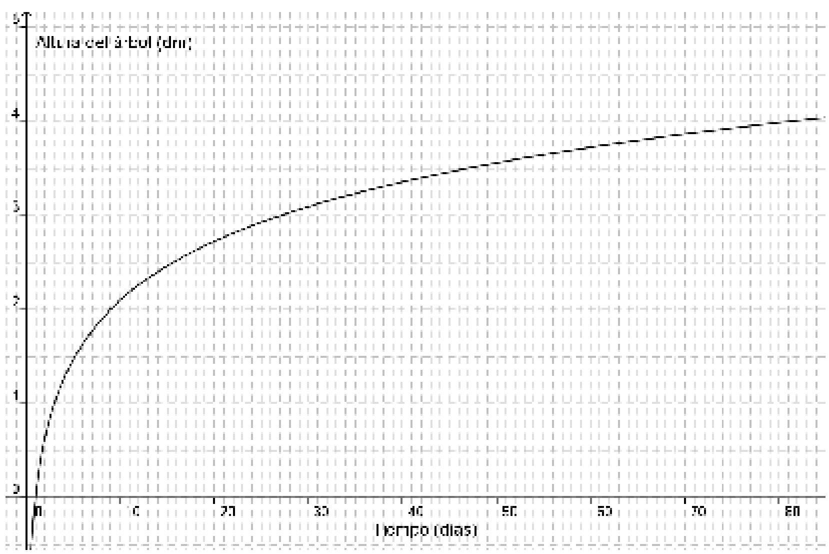


Figura 3

8. Utilizando la gráfica de la Figura 3, completa la siguiente tabla.

Tiempo, t (días)	**Altura del árbol, A (dm)**
1	
3	
9	
27	
81	

9. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores del tiempo, t?

10. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de la altura, A?

ACTIVIDAD No. 2
Ley de crecimiento de un árbol.

11. ¿De qué forma crees que está aumentando la altura de la benjamina? Argumenta tu respuesta.

12. ¿Puedes representar por medio de una fórmula la relación entre la altura de éste árbol y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

13. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

14. Con la fórmula que encontraste completa la siguiente tabla.

Tiempo, t (días)	Altura del árbol, A (dm)
1	
2	
4	
8	
16	

15. ¿Qué tipo de sucesiones numéricas forman los valores de t y de A?

La siguiente gráfica muestra el crecimiento de un mezquite.

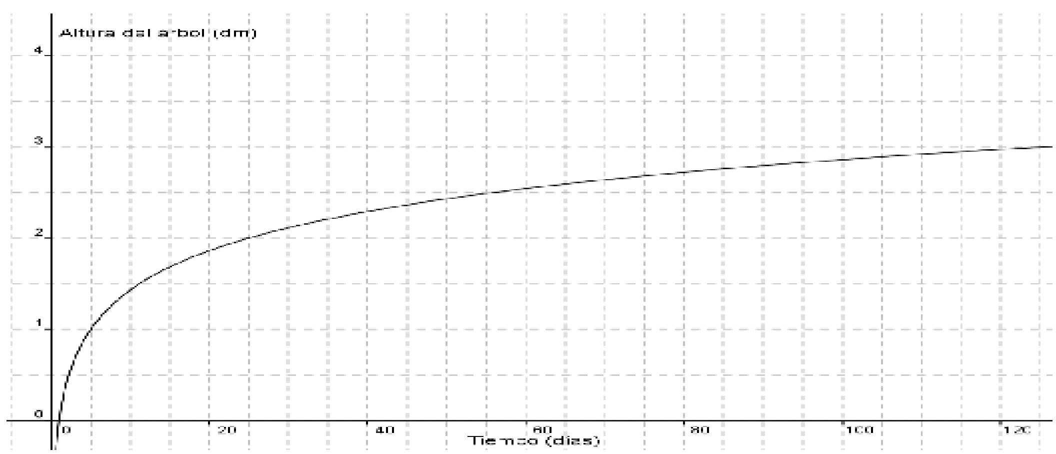


Figura 4

16. Utilizando la gráfica de la Figura 4, completa la siguiente tabla.

Tiempo, *t* (días)	**Altura del árbol, *A* (dm)**

17. ¿De qué forma crees que está aumentado la altura del mezquite? Argumenta tu respuesta.

18. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre la altura del mezquite y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

19. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

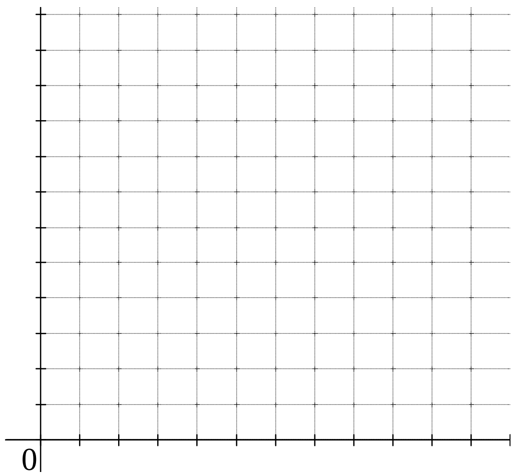
20. Con la fórmula que encontraste completa la siguiente tabla.

Tiempo, *t* (días)	**Altura del árbol, *A* (dm)**
1	
2	
4	
8	
16	

21. ¿Qué tipo de sucesiones numéricas forman los valores de t y de A?

22. ¿Podrías hacer alguna conjetura acerca de cómo se comportan los cambios en y en las funciones logarítmicas, y explicar bajo qué circunstancias eso ocurre?

23. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` grafica en los mismos ejes las expresiones analíticas que modelan el crecimiento de estos tres tipos de árboles. Traza las gráficas.



24. Describe las características comunes de estas gráficas.

25. Si durante un año se les dieron los cuidados necesarios a estos tres tipos de árboles, contesta lo siguiente.

a) ¿Cuál de estos árboles tendrá una mayor altura al cabo de un año, y por qué?

b) ¿Cuál tendrá una menor altura y por qué?

ACTIVIDAD No. 3
Multiplicación por una constante.

A manera de recordatorio.

Cuando una función $f(x)$ se multiplica por una constante $k > 1$, ¿qué le sucede a la gráfica de $f(x)$?

Cuando una función $f(x)$ se multiplica por una constante $0 < k < 1$, ¿qué le sucede a la gráfica de $f(x)$?

1. ¿Crees que aplicando esta operación a la gráfica de $\log_3 t$ se le puede transformar en la gráfica de $\log_2 t$?

2. Para este caso en particular: $\log_2 t = k \cdot \log_3 t$, ¿cómo debe de ser el valor de k?

3. Calcula el valor de k.

$$\log_2 t = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \log_3 t$$

4. Con la calculadora `Voyage 200` grafica ambas funciones en los mismos ejes. Describe la gráfica resultante.

5. Analiza con la calculadora `Voyage 200` la tabla de valores de las funciones graficadas. Describe los valores de la tabla.

6. Para transformar la gráfica de $\log_2 t$ en la gráfica de $\log_5 t$, ¿cómo debe de ser el valor de k?

7. Calcula el valor de k.

$$\log_5 t = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \log_2 t$$

8. Con la calculadora `Voyage 200` grafica ambas funciones en los mismos ejes y analiza la tabla de valores de estas funciones. Describe tus observaciones.

Continúa explorando el comportamiento de estas funciones a partir de una visualización gráfica. Enseguida vas a explorar el efecto que produce el multiplicar la variable independiente x por una constante $k \neq 1$: $y = \log_a(kx)$, donde a es la base del logaritmo.

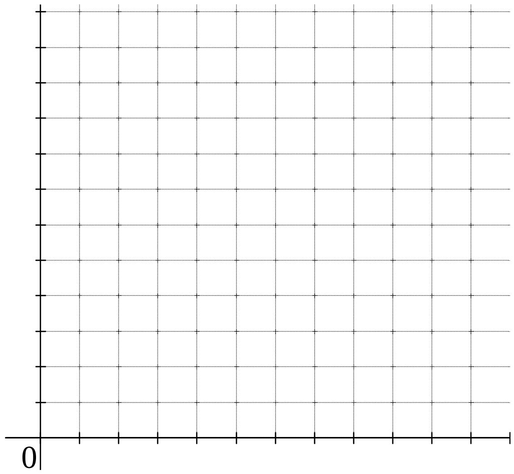
9. Considera los siguientes casos:

a) $y = \log_2 x$

b) $y = \log_2 2x$

c) $y = \log_2 4x$

Con la calculadora `Voyage 200` grafica estas tres funciones en los mismos ejes. Traza las gráficas.



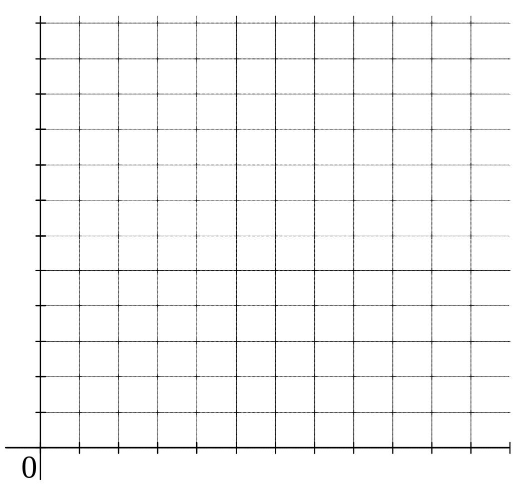
10. Describe las características de las gráficas anteriores.

11. Con la calculadora `Voyage 200` grafica las siguientes funciones en los mismos ejes y traza las gráficas.

a) $y = \log_2 x$

b) $y = \log_2\left(\frac{1}{3}x\right)$

c) $y = \log_2\left(\frac{1}{8}x\right)$

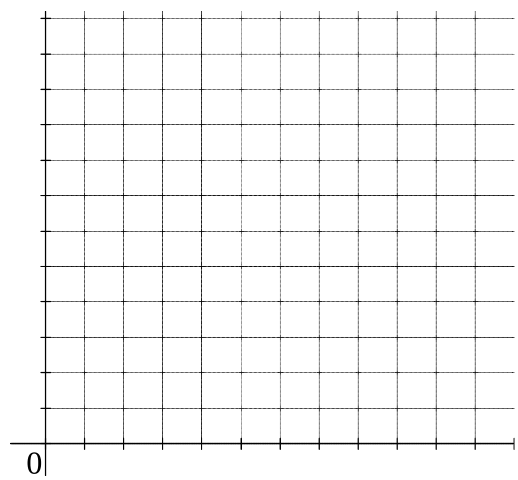


12. Describe las características de estas gráficas.

13. Realiza una lectura de la gráfica de la Figura 1 de la Actividad 2 y completa la siguiente tabla.

Tiempo, *t* (días)	**Altura del árbol, *A* (cm)**

14. Utiliza la aplicación `Data/Matrix Editor` de la calculadora `Voyage 200`. Introduce los datos de la tabla anterior y grafícalos.



15. Deduce una fórmula que modele el crecimiento de este árbol.

$A(t) =$ ____________________

16. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

17. Para finalizar, completa el siguiente cuadro con el respectivo valor de k.

	$k \cdot \log_2 x$	$k \cdot \log_3 x$	$k \cdot \log_5 x$
$\log_2 x =$	**1**		
$\log_3 x =$		**1**	
$\log_5 x =$			**1**

En general:

$$\log_a x = k \log_b x$$

donde $k =$ ____________

ACTIVIDAD No. 4
Inversiones financieras.

Una persona desea invertir cierta cantidad de dinero a plazo fijo en un banco, para lo cual solicitó información sobre cómo va a aumentar su capital y por cuánto tiempo tiene que dejar su dinero en el banco. El banco le ha presentado dos planes de inversión, proporcionándole una tabla de valores en la que se le indica la cantidad a invertir, el saldo en su cuenta y el tiempo necesario para obtenerlo.

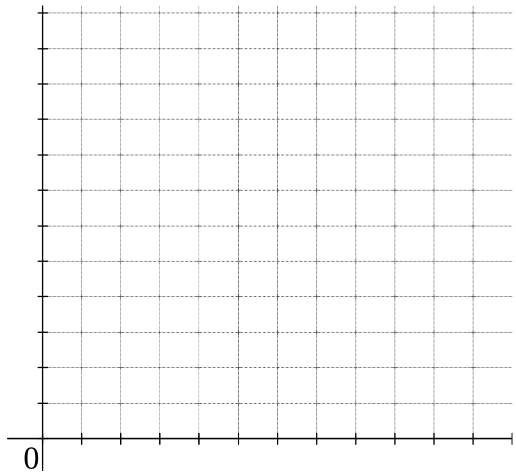
Opción 1.

Saldo en la cuenta de inversión, ***S*** (miles de pesos)	**Tiempo de la inversión, *t* (meses)**
1	**0**
2	**9**
2.5	**12**
4	**18**
5	**21**
8	**27**
10	**30**
16	**36**
20	**39**
23.5	**41**
29.5	**44**
32	**45**
35.5	**46**
40	**48**
47	**50**
69	**55**

Tabla 1

1. ¿Cuál es el capital inicial que se invierte?

2. En la Aplicación `Data/Matrix Editor` de la calculadora `Voyage 200`, introduce los datos de la Tabla 1 y grafícalos; en el eje x a los valores del saldo y en el eje y el tiempo de inversión requerido para obtener dicho saldo. Traza la gráfica.



3. ¿En qué forma crees que está aumentando el tiempo requerido de inversión con relación al saldo en la cuenta? Argumenta tu respuesta.

4. ¿Qué valores de la Tabla 1 te ayudan para asegurar que el tiempo está variando de la forma que crees?

Saldo en la cuenta de inversión, S (miles de pesos)	**Tiempo de la inversión, t (meses)**

Tabla 2

5. ¿De qué manera escogiste los valores de la Tabla 2 y por qué?

6. Deduce una fórmula para el tiempo de inversión requerido en función del saldo en la cuenta.

$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{S})$ = ____________________

7. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

La otra opción que el banco le ofrece al cliente es la siguiente.

Opción 2.

Saldo en la cuenta de inversión, S (miles de pesos)	**Tiempo de la inversión, t (meses)**
2	**0**
4	**7**
5	**9**
6	**11**
8	**14**
10	**16**
12	**18**
15	**20**
16	**21**
20	**23**
24	**25**
30	**27**
40	**30**
45	**31**

Tabla 3

8. ¿Cuál es el capital inicial que se invierte?

9. Para identificar si en esta opción el tiempo de la inversión está variando con respecto al saldo de la misma forma que en la opción anterior, ¿qué valores de la Tabla 3 te ayudan para determinar si es que se trata de un comportamiento de este mismo tipo?

Saldo en la cuenta de inversión, S (miles de pesos)	**Tiempo de la inversión, t (meses)**

Tabla 4

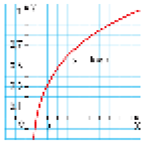
10. ¿De qué manera escogiste los valores de la Tabla 4 y por qué?

11. Deduce una fórmula para el tiempo de inversión requerido en función del saldo en la cuenta para esta segunda opción de inversión financiera.

$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{S})$ = ____________________

12. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

13. ¿Cuál de estas dos opciones le aconsejarías a esta persona que aceptara para invertir su dinero y por qué?



BLOQUE 3
Variación logarítmica

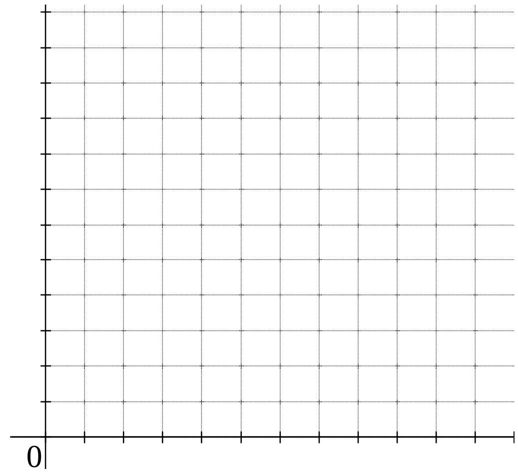
ACTIVIDAD No. 5
Una dieta experimental.

Se realizó un experimento en el que cinco grupos de ratas se mantuvieron con una dieta deficiente en vitamina A, y después se les proporcionaron raciones suplementarias de esta vitamina en forma de aceite de hígado de bacalao. La dosis de aceite de hígado de bacalao suministrada a cada grupo de ratas y el aumento promedio de peso correspondiente, se muestra en la siguiente tabla.

Dosis, *d* (mg)	**Aumento de peso, *A* (gr)**
0.25	**-10.8**
1.00	**13.5**
1.50	**20.2**
2.50	**29.7**
7.50	**50.3**

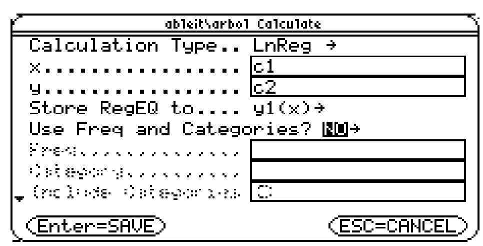
1. Analiza los datos de la tabla anterior, ¿Podrías afirmar que el aumento promedio de peso de estas ratas con relación a la dosis de aceite de hígado de bacalao suministrado, corresponde a una variación logarítmica? Argumenta tu respuesta.

2. En la Aplicación Data/Matrix Editor de la calculadora Voyage 200 introduce los valores de la tabla y grafícalos. Traza la gráfica.



3. ¿Crees que los puntos graficados se pueden ajustar a una curva logarítmica? Argumenta tu respuesta.

4. De nuevo en la Aplicación `Data/Matrix Editor` de la calculadora `Voyage 200` selecciona la opción `F5 Calc`, para que la calculadora ajuste automáticamente los puntos graficados a una curva logarítmica. Completa el cuadro de diálogo de la siguiente manera y para continuar oprime `ENTER`.



5. Escribe en el siguiente espacio los datos desplegados en la pantalla de la calculadora.

6. Para ajustar estos puntos a una curva logarítmica, ¿qué base para los logaritmos utilizó la calculadora?

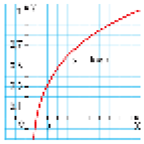
7. ¿Podrías explicar por qué la calculadora automáticamente utiliza este tipo de logaritmos para el ajuste automático?

8. La fórmula anterior quedó grabada en el editor de funciones como `y1(x)`, despliega la pantalla gráfica para que se trace la gráfica de esta función. Describe tus observaciones.

Al conocer el tipo de variación al cual se ajustan los datos experimentales podemos describir el comportamiento esperado de las variables involucradas.

Con la expresión analítica podemos predecir el valor numérico de la variable dependiente para valores de la variable independiente con los cuales no se realizó la experimentación, y si ésta se lleva a cabo, comprobar si dicho modelo sigue siendo válido.

9. Como parte del equipo de investigadores, escribe aquí un reporte de análisis de los resultados de este trabajo de experimentación.



ACTIVIDAD No. 6
La Escala de Richter.

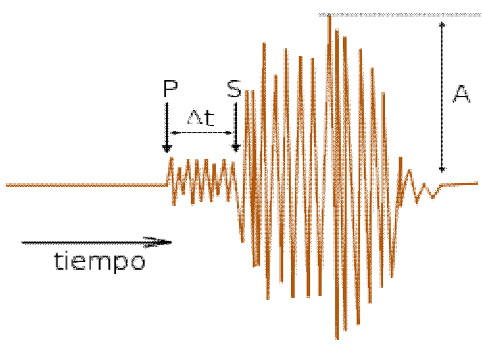
La aplicación más conocida de las escalas logarítmicas a fenómenos naturales es la escala de Richter, utilizada para medir la intensidad de los terremotos.

El gran mérito de su inventor, el Dr. Charles F. Richter, consistió en asociar la magnitud del terremoto con la "amplitud" de la onda sísmica (llamada "S"), lo que redunda en propagación del movimiento en un área determinada.

Richter desarrolló su escala en la década de 1930. Calculó que la magnitud de un terremoto o sismo puede ser medida conociendo el tiempo transcurrido entre la aparición de las ondas P (Primarias) y las ondas **S** (Secundarias), y la amplitud máxima de éstas últimas. Las ondas **P** hacen vibrar el medio en la misma dirección que la del desplazamiento de la onda; son ondas de compresión y dilatación, su velocidad de propagación es muy rápida (5 a 11 Km/hr), y son las primeras que aparecen en un sismograma. A continuación llegan las ondas **S**, ondas de cizalla, que hacen vibrar el medio en sentido perpendicular a la dirección de su desplazamiento. Basándose en estos hechos, Richter desarrolló la siguiente ecuación:

$$M = \log A + 3\log(8\Delta t) - 2.92$$

donde M es una magnitud arbitraria pero constante para terremotos que liberan la misma cantidad de energía, A es la amplitud de las ondas **S** en milímetros, medida directamente en el sismograma, y Δt el tiempo en segundos desde el inicio de las ondas **P** al de las ondas **S**. Dado que llega a haber diferencias enormes entre unos y otros casos, se define la magnitud ***M*** del terremoto o sismo utilizando logaritmos. De manera que cada unidad que aumente ***M*** puede significar un aumento diez o más veces mayor de la amplitud de las ondas (vibración de la Tierra).



Como se muestra en esta reproducción de un sismograma, las ondas **P** se registran antes que las ondas **S**, el tiempo transcurrido entre ambos instantes es **Δt**; este valor y el de la amplitud máxima (**A**) de las ondas **S**, le permitieron a Richter calcular la magnitud de un terremoto.

La *Magnitud de Escala Richter M* se expresa en números arábigos y se basa en el registro sismográfico. Aunque cada terremoto tiene una magnitud única, su efecto variará grandemente según la distancia al epicentro, la condición del terreno, los estándares de construcción y otros factores. A continuación se describen los efectos típicos de los sismos de diversas magnitudes, cerca del epicentro.

Magnitud en Escala Richter	Efectos del terremoto
Menos de 3.5	Generalmente no se siente, pero es registrado
3.5 - 5.4	A menudo se siente, pero sólo causa daños menores
5.5 - 6.0	Ocasiona daños ligeros a edificios
6.1 - 6.9	Puede ocasionar daños severos en áreas muy pobladas.
7.0 - 7.9	Terremoto mayor. Causa graves daños
8 o mayor	Gran terremoto. Destrucción total a comunidades cercanas.

Resulta más útil catalogar cada terremoto según su energía intrínseca. Esta clasificación debe ser un número único para cada evento, y este número no debe verse afectado por las consecuencias causadas, que varían mucho de un lugar a otro. Se mide la energía liberada en un terremoto de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\log E = 1.5M - 1.74$$

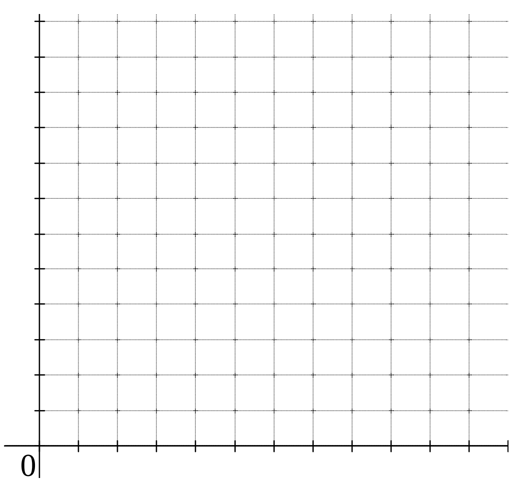
donde $\boldsymbol{E}$ es la energía liberada y $\boldsymbol{M}$ es la magnitud del sismo.

1. Calcula la energía liberada E para sismos de diferentes magnitudes M. Completa la tabla siguiente.

$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{E}$
2	
3	
4	
5	
6	

2. ¿Cómo crees que está variando E con respecto a M? Argumenta tu respuesta.

3. Traza en la siguiente cuadrícula la gráfica de la energía E liberada por un sismo dependiendo de la magnitud M de éste.



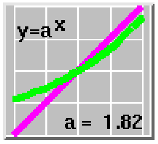
4. Describe las características de la gráfica trazada.

5. Por cada unidad que aumenta la magnitud en escala Richter de un sismo, ¿cuánto aumenta la energía liberada por éste? Argumenta tu respuesta.

6. ¿Cuántas veces es más intenso un sismo de magnitud 4 en la escala de Richter que un sismo de magnitud 2? ¿Por qué?

7. Con ayuda de imágenes satelitales, la NASA ha podido comprobar que el terremoto ocurrido el 11 de marzo del 2011 en Japón, de magnitud 9 en la escala de Richter, pudo haber movido la isla japonesa aproximadamente 2.4 metros, y alteró el eje terrestre en aproximadamente 10cm. ¿Cuántas veces fue más intenso el mayor terremoto que ha podido ser medido, ocurrido en la ciudad de Valdivia, Chile, el 22 de mayo de 1960, el cuál alcanzó una magnitud de 9.5? Argumenta tu respuesta.

8. El terremoto ocurrido en México el 19 de Septiembre de 1985 registró una magnitud de 8.1 en la escala Richter. Una de las diversas apreciaciones en cuanto a la energía que se liberó en dicho movimiento fue su equivalente a 1114 bombas atómicas de 20 kilotones cada una. Suponiendo que otro terremoto ocurrido es la mitad de poderoso que el de México en 1985, ¿cuál hubiera sido su magnitud en la escala Richter? Argumenta tu respuesta.



BLOQUE 4
Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

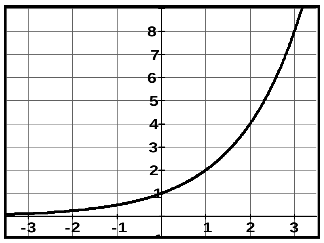
ACTIVIDAD No. 1

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 1.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

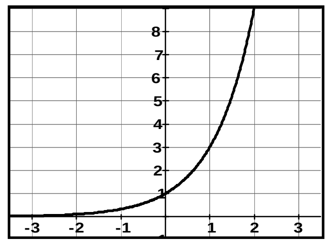
EJEMPLO 1

$$f(x) = 2^x$$



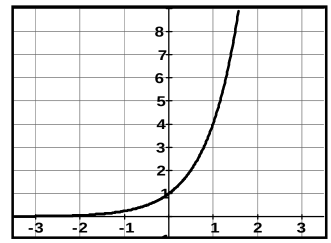
EJEMPLO 2

$$f(x) = 3^x$$



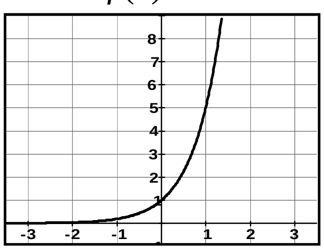
EJEMPLO 3

$$f(x) = 4^x$$



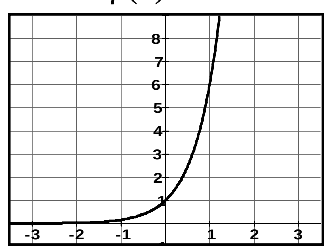
EJEMPLO 4

$$f(x) = 5^x$$



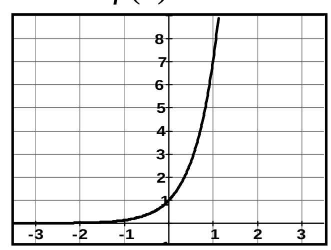
EJEMPLO 5

$$f(x) = 6^x$$



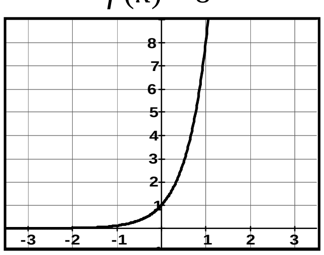
EJEMPLO 6

$$f(x) = 7^x$$



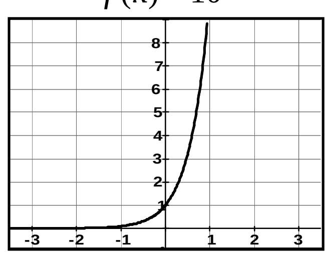
EJEMPLO 7

$$f(x) = 8^x$$



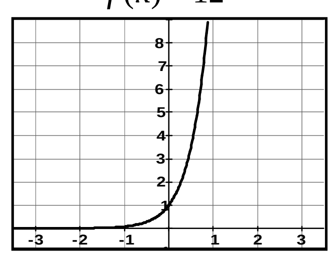
EJEMPLO 8

$$f(x) = 10^x$$

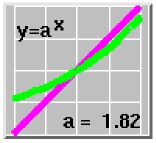


EJEMPLO 9

$$f(x) = 12^x$$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



BLOQUE 4
Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

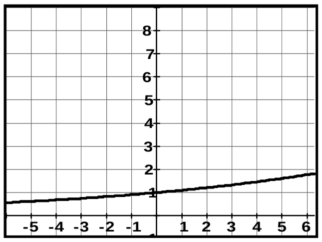
ACTIVIDAD No. 2

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 2.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

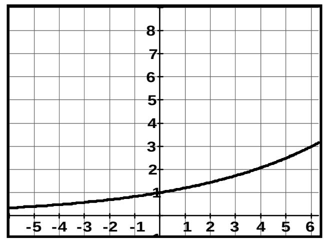
EJEMPLO 1

$$f(x) = 1.1^x$$



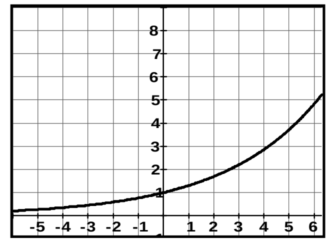
EJEMPLO 2

$$f(x) = 1.2^x$$



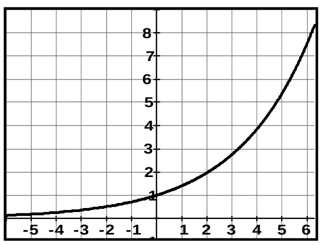
EJEMPLO 3

$$f(x) = 1.3^x$$



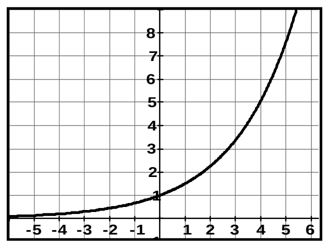
EJEMPLO 4

$$f(x) = 1.4^x$$



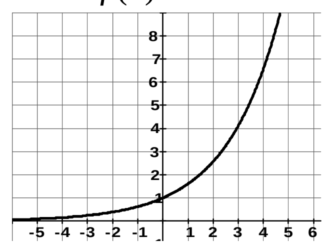
EJEMPLO 5

$$f(x) = 1.5^x$$



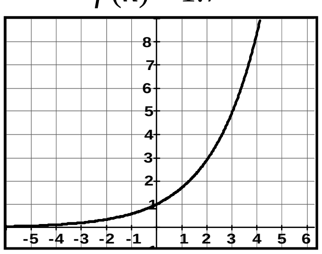
EJEMPLO 6

$$f(x) = 1.6^x$$



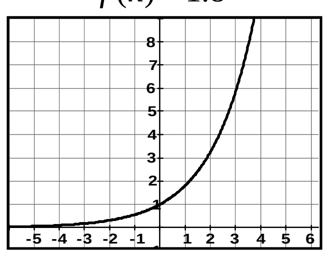
EJEMPLO 7

$$f(x) = 1.7^x$$



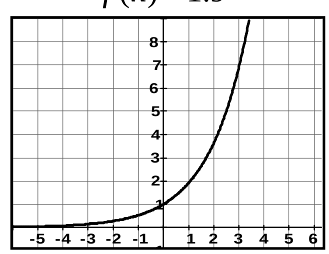
EJEMPLO 8

$$f(x) = 1.8^x$$

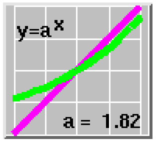


EJEMPLO 9

$$f(x) = 1.9^x$$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



BLOQUE 4
Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

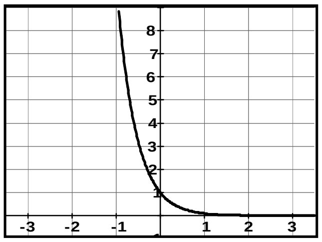
ACTIVIDAD No. 3

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 3.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

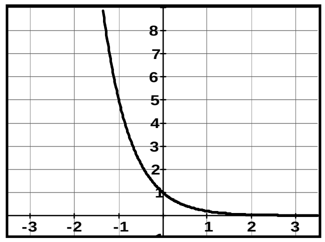
EJEMPLO 1

$$f(x) = 0.1^x$$



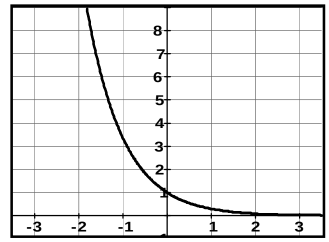
EJEMPLO 2

$$f(x) = 0.2^x$$



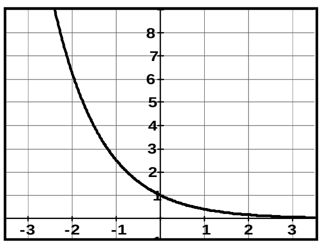
EJEMPLO 3

$$f(x) = 0.3^x$$



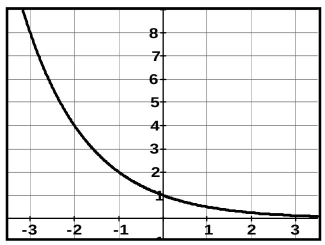
EJEMPLO 4

$$f(x) = 0.4^x$$



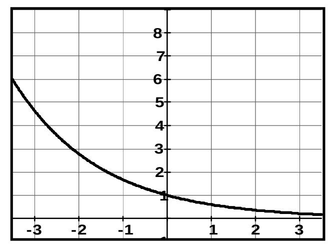
EJEMPLO 5

$$f(x) = 0.5^x$$



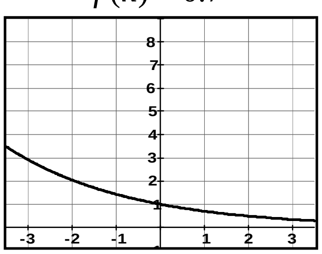
EJEMPLO 6

$$f(x) = 0.6^x$$



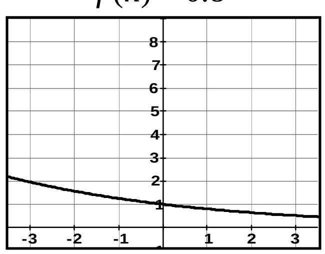
EJEMPLO 7

$$f(x) = 0.7^x$$



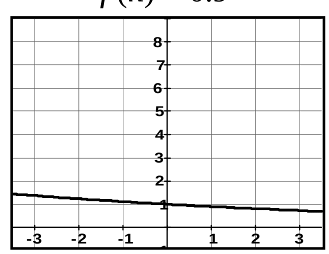
EJEMPLO 8

$$f(x) = 0.8^x$$

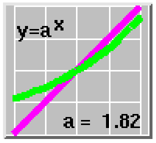


EJEMPLO 9

$$f(x) = 0.9^x$$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



BLOQUE 4
Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

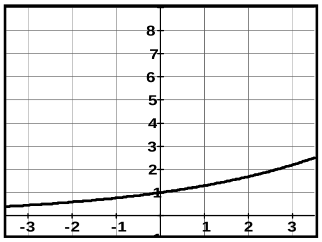
ACTIVIDAD No. 4

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 4.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

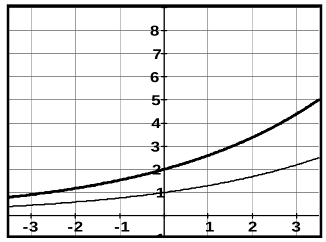
EJEMPLO 1

$f(x) = 1.3^x$



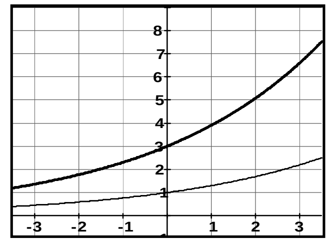
EJEMPLO 2

$f(x) = 2 \cdot 1.3^x$



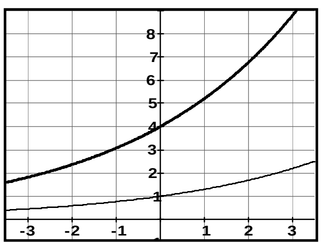
EJEMPLO 3

$f(x) = 3 \cdot 1.3^x$



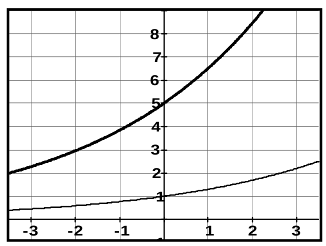
EJEMPLO 4

$f(x) = 4 \cdot 1.3^x$



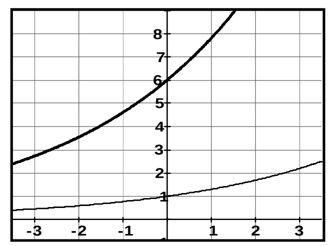
EJEMPLO 5

$f(x) = 5 \cdot 1.3^x$



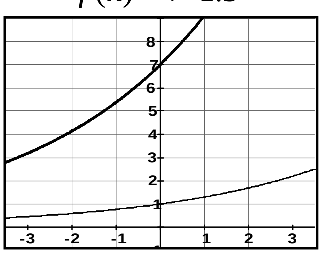
EJEMPLO 6

$f(x) = 6 \cdot 1.3^x$



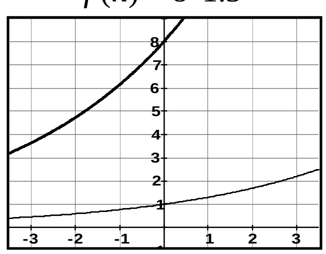
EJEMPLO 7

$f(x) = 7 \cdot 1.3^x$



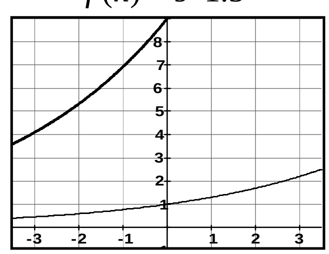
EJEMPLO 8

$f(x) = 8 \cdot 1.3^x$

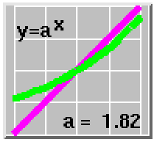


EJEMPLO 9

$f(x) = 9 \cdot 1.3^x$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



BLOQUE 4
Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

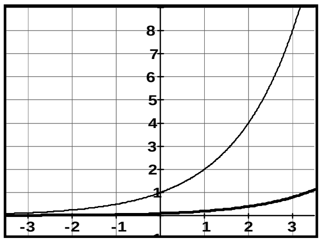
ACTIVIDAD No. 5

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 5.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

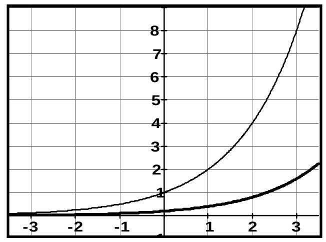
EJEMPLO 1

$$f(x) = 0.1 \cdot 2^x$$



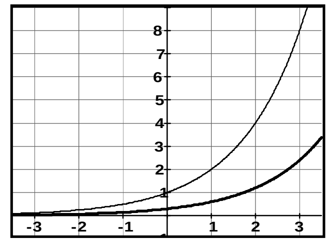
EJEMPLO 2

$$f(x) = 0.2 \cdot 2^x$$



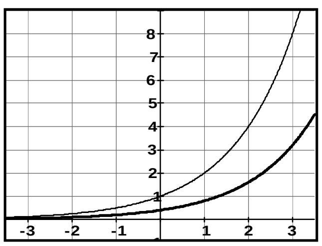
EJEMPLO 3

$$f(x) = 0.3 \cdot 2^x$$



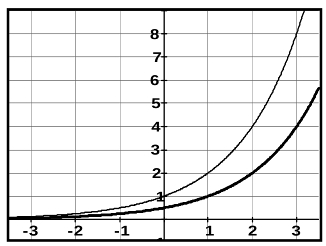
EJEMPLO 4

$$f(x) = 0.4 \cdot 2^x$$



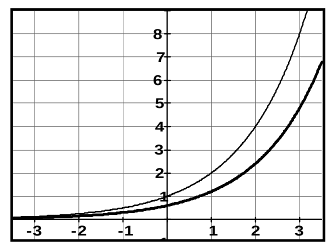
EJEMPLO 5

$$f(x) = 0.5 \cdot 2^x$$



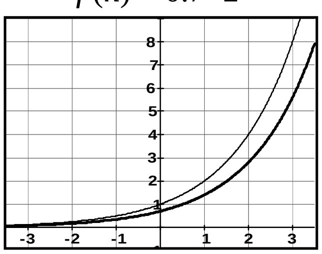
EJEMPLO 6

$$f(x) = 0.6 \cdot 2^x$$



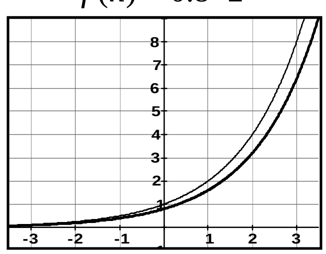
EJEMPLO 7

$$f(x) = 0.7 \cdot 2^x$$



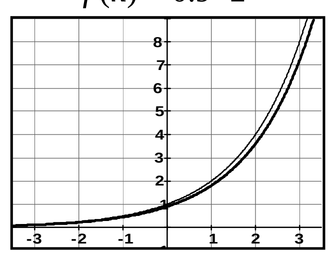
EJEMPLO 8

$$f(x) = 0.8 \cdot 2^x$$

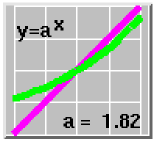


EJEMPLO 9

$$f(x) = 0.9 \cdot 2^x$$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



BLOQUE 4
Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas

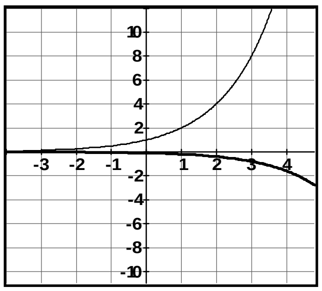
ACTIVIDAD No. 6

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 6.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

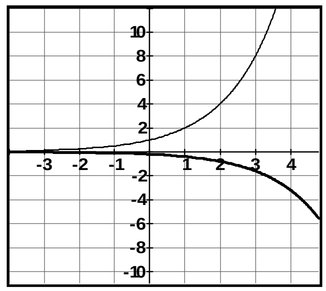
EJEMPLO 1

$f(x) = -0.1 \cdot 2^x$



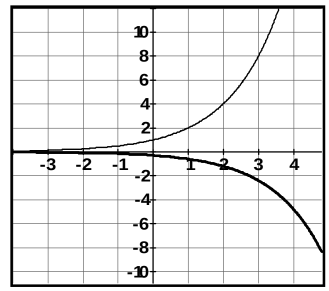
EJEMPLO 2

$f(x) = -0.2 \cdot 2^x$



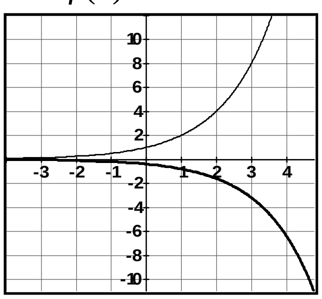
EJEMPLO 3

$f(x) = -0.3 \cdot 2^x$



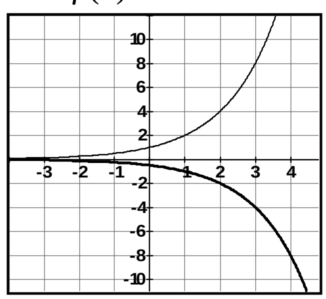
EJEMPLO 4

$f(x) = -0.4 \cdot 2^x$



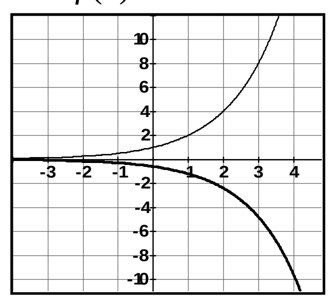
EJEMPLO 5

$f(x) = -0.5 \cdot 2^x$



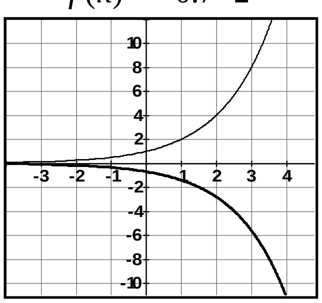
EJEMPLO 6

$f(x) = -0.6 \cdot 2^x$



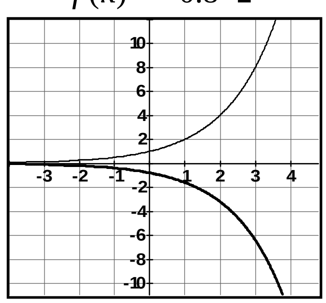
EJEMPLO 7

$f(x) = -0.7 \cdot 2^x$



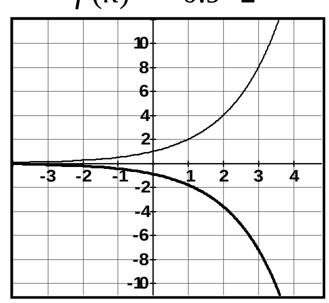
EJEMPLO 8

$f(x) = -0.8 \cdot 2^x$

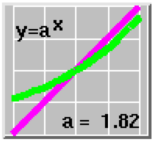


EJEMPLO 9

$f(x) = -0.9 \cdot 2^x$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



BLOQUE 4
Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas

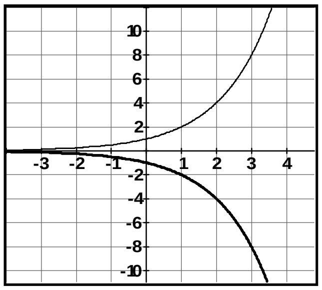
ACTIVIDAD No. 7

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 7.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

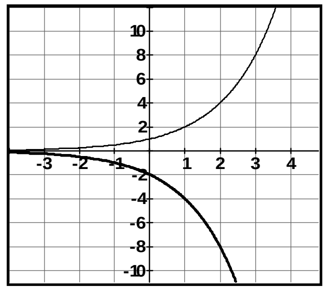
EJEMPLO 1

$f(x) = -1 \cdot 2^x$



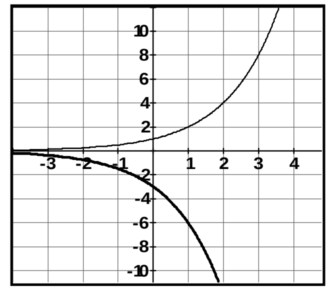
EJEMPLO 2

$f(x) = -2 \cdot 2^x$



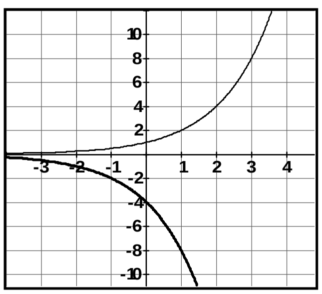
EJEMPLO 3

$f(x) = -3 \cdot 2^x$



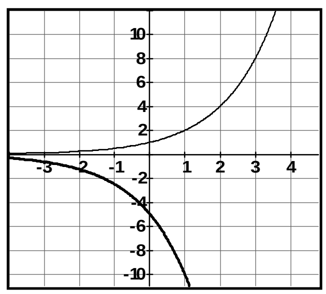
EJEMPLO 4

$f(x) = -4 \cdot 2^x$



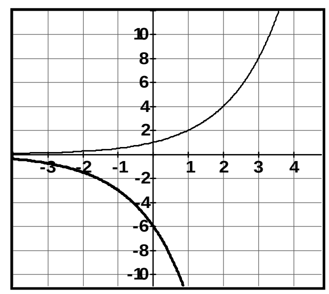
EJEMPLO 5

$f(x) = -5 \cdot 2^x$



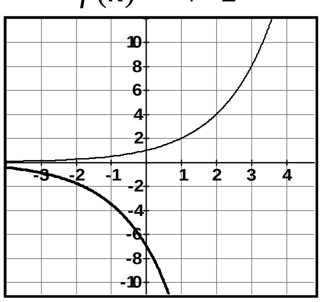
EJEMPLO 6

$f(x) = -6 \cdot 2^x$



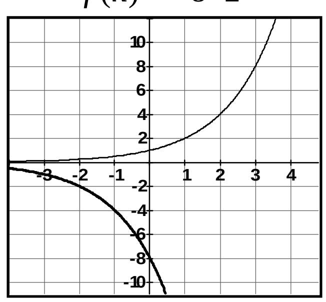
EJEMPLO 7

$f(x) = -7 \cdot 2^x$



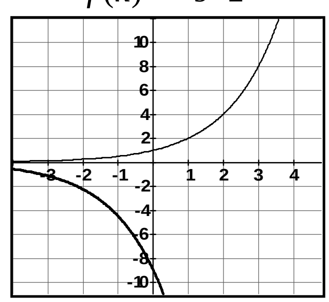
EJEMPLO 8

$f(x) = -8 \cdot 2^x$

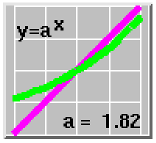


EJEMPLO 9

$f(x) = -9 \cdot 2^x$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



BLOQUE 4
Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas

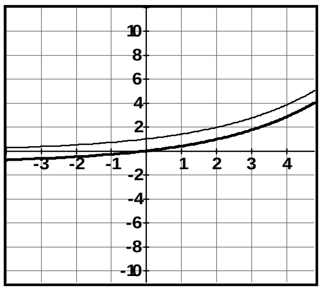
ACTIVIDAD No. 8

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 8.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

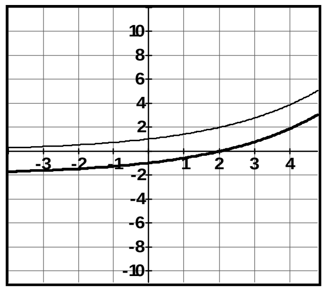
EJEMPLO 1

$$f(x) = 1.4^x - 1$$



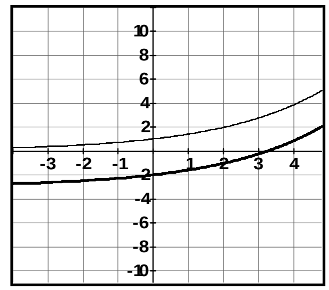
EJEMPLO 2

$$f(x) = 1.4^x - 2$$



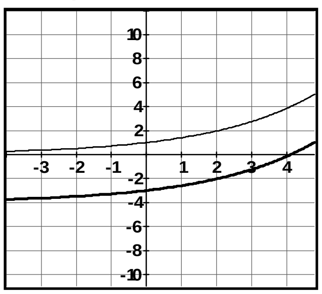
EJEMPLO 3

$$f(x) = 1.4^x - 3$$



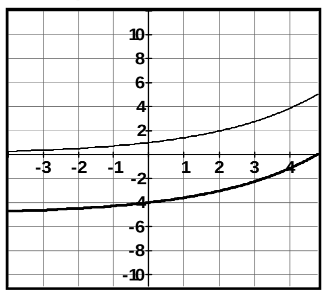
EJEMPLO 4

$$f(x) = 1.4^x - 4$$



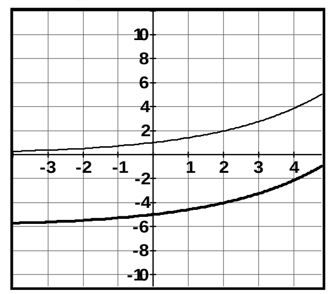
EJEMPLO 5

$$f(x) = 1.4^x - 5$$



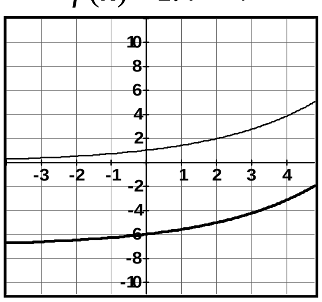
EJEMPLO 6

$$f(x) = 1.4^x - 6$$



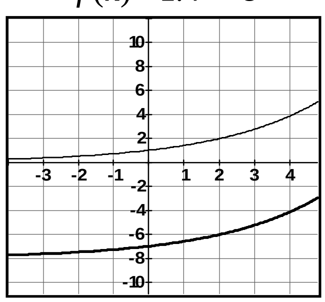
EJEMPLO 7

$$f(x) = 1.4^x - 7$$



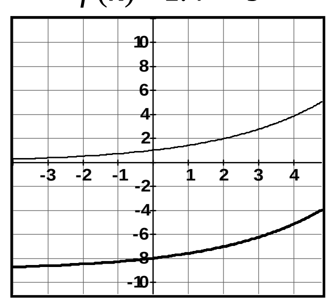
EJEMPLO 8

$$f(x) = 1.4^x - 8$$

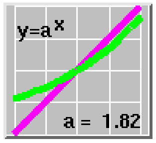


EJEMPLO 9

$$f(x) = 1.4^x - 9$$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



BLOQUE 4
Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas

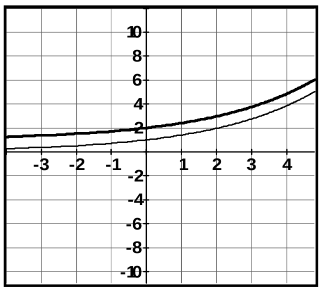
ACTIVIDAD No. 9

Comportamiento gráfico de una función exponencial. Caso 9.

INSTRUCCIONES. Analiza atentamente cada una de las gráficas que se presentan en esta Hoja. ¿Qué tienen en común todas ellas, desde el punto de vista de su comportamiento matemático? Intenta dar una respuesta lo más concreta posible.

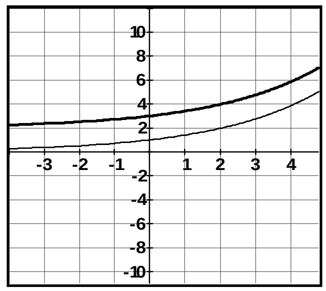
EJEMPLO 1

$$f(x) = 1.4^x + 1$$



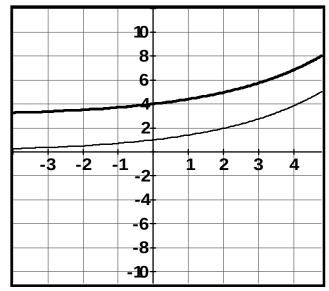
EJEMPLO 2

$$f(x) = 1.4^x + 2$$



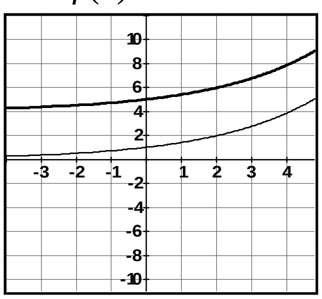
EJEMPLO 3

$$f(x) = 1.4^x + 3$$



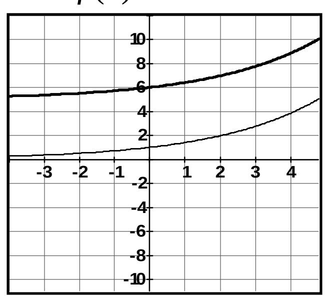
EJEMPLO 4

$$f(x) = 1.4^x + 4$$



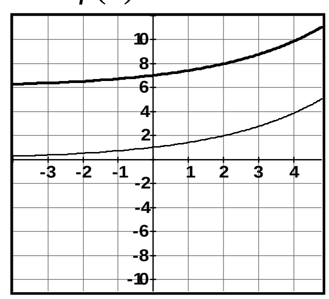
EJEMPLO 5

$$f(x) = 1.4^x + 5$$



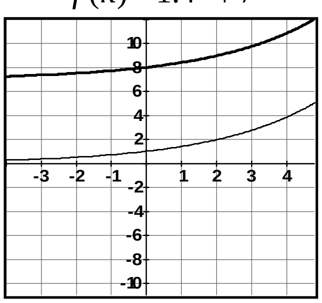
EJEMPLO 6

$$f(x) = 1.4^x + 6$$



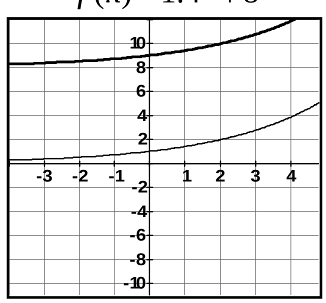
EJEMPLO 7

$$f(x) = 1.4^x + 7$$



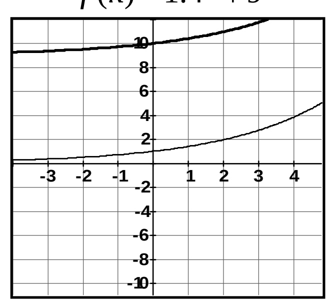
EJEMPLO 8

$$f(x) = 1.4^x + 8$$

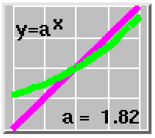


EJEMPLO 9

$$f(x) = 1.4^x + 9$$



¿Qué tienen en común todas las gráficas de las funciones en los ejemplos anteriores? Expresa las propiedades generales y el comportamiento de cada una de las funciones anteriores mediante una *caracterización general*.



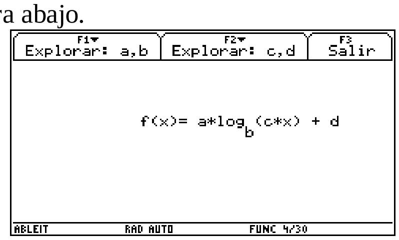
BLOQUE 4
Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas

ACTIVIDAD No. 10

Explorando las representaciones gráfica y analítica de las funciones logarítmicas.

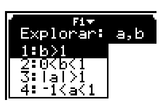
NOTA: Antes de iniciar esta Actividad ejecuta en la pantalla `HOME` **el programa** `creagraf()`.

1. Ejecuta en la pantalla `HOME` el programa `graflog()`, aparecerá la fórmula general de la función logarítmica y un menú de usuario como se muestra abajo.



2. En esta Actividad vas a explorar el comportamiento de la familia de funciones $\boldsymbol{f(x) = \log_b x}$. Para esta familia, ¿cuál es el valor de los otros parámetros de la fórmula general? a =___________, c =__________ y d =____________. Estos valores permanecerán constantes.

3. Del menú `F1 Explorar:a,b` selecciona la opción `1:b>1`, observa la secuencia de gráficas en pantalla y contesta lo siguiente.



a) Describe las características de estas gráficas.

b) ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?

c) ¿Qué permanece sin cambio?

4. Selecciona nuevamente la opción `1:b>1` y observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:

a) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el valor de b?

b) ¿Cómo explicas este hecho?

c) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme el valor de **b** se acerca a 1?

d) ¿Cómo explicas este hecho?

5. Del menú `F1 Explorar:a,b` selecciona la opción `2:0<b<1`, observa la secuencia de gráficas en pantalla y contesta:

a) Describe las características de estas gráficas.

b) ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?

c) ¿Qué permanece sin cambio?

6. Selecciona nuevamente la opción `2:0<b<1`, observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:

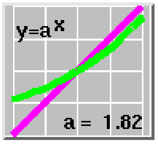
a) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el valor de b (acercándose a 1)?

b) ¿Cómo explicas este hecho?

c) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme el valor de **b** se acerca a 0?

d) ¿Cómo explicas este hecho?

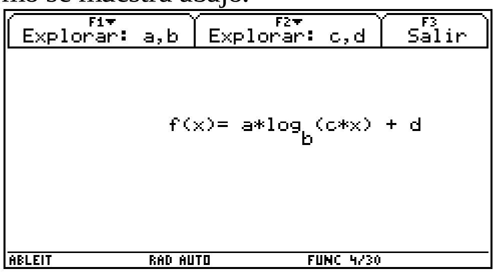
7. Explica ampliamente lo que aprendiste en esta Actividad.



ACTIVIDAD No. 11

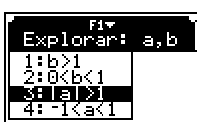
Explorando las representaciones gráfica y analítica de las funciones logarítmicas.

1. Ejecuta en la pantalla `HOME` el programa `graflog()`, aparecerá la fórmula general de la función logarítmica y un menú de usuario como se muestra abajo.



2. En esta Actividad vas a explorar el comportamiento de la familia de funciones $\boldsymbol{f(x) = a\log_3 x}$. Para esta familia, ¿cuál es el valor de los otros parámetros de la fórmula general? b =___________, c =___________ y d =____________. Estos valores permanecerán constantes.

3. Del menú `F1 Explorar:a,b` selecciona la opción `3:|a|>1`. Observa la secuencia de gráficas en pantalla; en ésta aparecerá como función de referencia una gráfica remarcada que corresponde a $\boldsymbol{y = \log_3 x}$, en la cual a =__________. Contesta lo siguiente:



a) ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?

b) ¿Qué permanece sin cambio?

4. Selecciona nuevamente la opción `3:-1>a>1`, observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:

a) ¿Cómo cambia la gráfica cuando $a > 1$?

b) ¿Cómo explicas este hecho?

c) ¿Cómo cambia la gráfica cuando $a < -1$?

d) ¿Cómo explicas este hecho?

5. Del menú `F1 Explorar:a,b` selecciona la opción `4:-1<a<1`, observa la secuencia de gráficas en pantalla; la gráfica remarcada corresponde a la misma función de referencia. Contesta lo siguiente:

a) ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?

b) ¿Qué permanece sin cambio?

6. Selecciona nuevamente la opción `4:-1<a<1`, observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:

a) ¿Cómo cambia la gráfica cuando $0 < a < 1$?

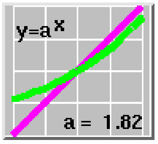
b) ¿Cómo explicas este hecho?

c) ¿Cómo cambia la gráfica cuando $-1 < a < 0$?

d) ¿Cómo explicas este hecho?

7. Explica ampliamente lo que aprendiste en esta Hoja de Trabajo.

8. Compara el efecto que tienen en las gráficas los parámetros a y b**.** Describe ampliamente tus observaciones.

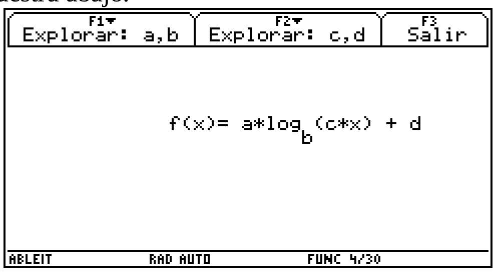


BLOQUE 4
Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas

ACTIVIDAD No. 12

Explorando las representaciones gráfica y analítica de las funciones logarítmicas.

1. Ejecuta en la pantalla `HOME` el programa `graflog()`, aparecerá la fórmula general de la función logarítmica y un menú de usuario como se muestra abajo.



2. En esta Actividad vas a explorar el comportamiento de la familia de funciones $\boldsymbol{f(x) = \log_2 cx}$. Para esta familia, ¿cuál es el valor de los otros parámetros de la fórmula general? a =___________, b =__________ y d =____________. Estos valores permanecerán constantes.

3. Del menú `F2 Explorar:c,d` selecciona la opción `1:c>1`, y observa la secuencia de gráficas en pantalla; en ésta aparecerá como función de referencia una gráfica remarcada que corresponde a $\boldsymbol{y = \log_2 x}$, en la cual c =__________. Contesta lo siguiente:

a) ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?

b) ¿Qué permanece sin cambio?

4. Selecciona nuevamente la opción `1:c>1`, observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:

a) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el valor de c?

b) ¿Cómo explicas este hecho?

5. Del menú `F2 Explorar:c,d` selecciona la opción `2:0<c<1` y observa la secuencia de gráficas en pantalla; la gráfica remarcada corresponde a la misma función anterior de referencia. Contesta lo siguiente:

a) ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?

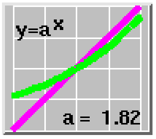
b) ¿Qué permanece sin cambio?

6. Selecciona nuevamente la opción `2:0<c<1`, observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:

a) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el valor de c (acercándose a 1)?

b) ¿Cómo explicas este hecho?

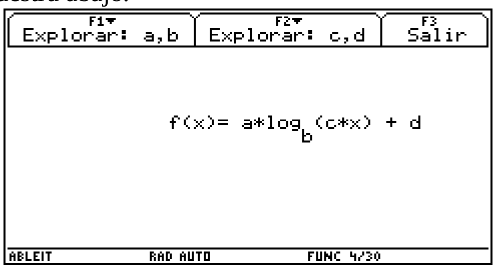
7. Explica ampliamente lo que aprendiste en esta Actividad.



ACTIVIDAD No. 13

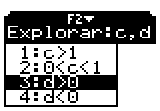
Explorando las representaciones gráfica y analítica de las funciones logarítmicas.

1. Ejecuta en la pantalla `HOME` el programa `graflog()`, aparecerá la fórmula general de la función logarítmica y un menú de usuario como se muestra abajo.



2. En esta Actividad vas a explorar el comportamiento de la familia de funciones $\boldsymbol{f(x) = \log_2 x + d}$. Para esta familia, ¿cuál es el valor de los otros parámetros de la fórmula general? a =___________, b =__________ y c =____________. Estos valores permanecerán constantes.

3.- Del menú `F2 Explorar:c,d` selecciona la opción `3:d>0`, y observa la secuencia de gráficas en pantalla; en ésta aparecerá como función de referencia una gráfica remarcada que corresponde a $\boldsymbol{y = \log_2 x}$, en la cual d =__________. Contesta lo siguiente:



a) ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?

b) ¿Qué permanece sin cambio?

4. Selecciona nuevamente la opción `3:d>0`, observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:

a) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el valor del parámetro d?

b) ¿Cómo explicas este hecho?

5. Del menú `F2 Explorar:c,d` selecciona la opción `4:d<0`**,** y observa la secuencia de gráficas en pantalla; la gráfica remarcada corresponde a la misma función anterior de referencia. Contesta lo siguiente:

a) ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?

b) ¿Qué permanece sin cambio?

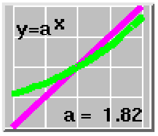
6. Selecciona nuevamente la opción `4:d<0`, observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:

a) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme el valor del parámetro d disminuye?

b) ¿Cómo explicas este hecho?

7. Explica ampliamente lo que aprendiste en esta Hoja de Trabajo.

8. Compara el efecto que tienen en las gráficas los parámetros c y d. Describe tus observaciones.

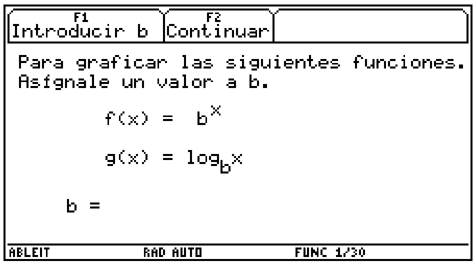


BLOQUE 4
Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas

ACTIVIDAD No. 14

Explorando las representaciones gráfica y analítica de las funciones exponenciales y logarítmicas.

1. Ejecuta en la pantalla `HOME` el programa `expolog()`, aparecerá en pantalla información de lo que hace este programay un menú de usuario como se muestra abajo.



2. Selecciona la opción `F1 Introducir b`, y asígnale el valor `b=2`. Enseguida selecciona la opción `F2 Continuar`, para que se grafiquen $f(x)$ y $g(x)$; aparecerá también en pantalla una gráfica remarcada que corresponde a la línea $y = x$.

3. Describe las escalas de los ejes.

4. Describe las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ que aparecen en pantalla.

5. ¿Observas alguna simetría entre ellas?

6. Observa detenidamente el lugar geométrico que ocupan los siguientes puntos:

Localiza con la traza el punto (1,0) de la función logarítmica, con la tecla del cursor ▲, mueve la traza a la función exponencial y localiza el punto (0,1).

Explora también con los siguientes pares de puntos, pero antes escribe el valor de la ordenada de cada uno de ellos.

$g(x) = \log_2 x$	$f(x) = 2^x$.
(2,)	(1,)
(4,)	(2,)
(8,)	(3,)

7. ¿Qué características numéricas y geométricas tienen estos pares de puntos?

8. Ejecuta de nuevo en la pantalla `HOME` el programa `expolog()`, pero esta vez asigna el valor `b=0.5`.

9. Describe las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ que aparecen en pantalla.

10. ¿Observas alguna simetría entre ellas?

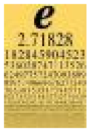
11. Observa detenidamente el lugar geométrico que ocupan los siguientes puntos, pero antes escribe el valor de la ordenada de cada uno de ellos.

$g(x) = \log_{0.5} x$	$f(x) = 0.5^x$.
(8,)	(-3,)
(4,)	(-2,)
(2,)	(-1,)
(1,)	(0,)

12. ¿Qué características numéricas y geométricas tienen estos pares de puntos?

13. Asígnale otros valores a la base b y explora si lo que observaste anteriormente se cumple también para otros casos. Escribe tus observaciones.

14. Explica lo que aprendiste en esta Actividad..



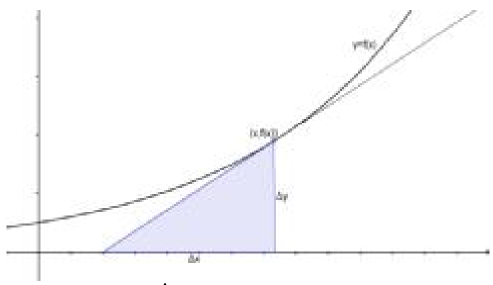
BLOQUE 5
El número e

ACTIVIDAD No. 1

La derivada de la función exponencial ($y = A^x$).

1. En la `Actividad 7` del `Bloque I` exploraste una característica geométrica de las gráficas de las funciones exponenciales, relacionada con la subtangente. Describe tus observaciones al respecto.

2. Una de las aplicaciones del análisis de las subtangentes es que nos permite calcular la pendiente de la recta tangente (derivada), a partir del *triángulo característico*.



Donde: $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ observa que para cualesquier valor de x, la magnitud de Δy =______________ y la magnitud de Δx corresponde al valor de ________________________.

Por lo tanto: $f'(x)$ =______________

3. Ejecuta en la pantalla `HOME` de la calculadora `Voyage 200` el programa `deriexpo()`. Elige la opción `F1 Introducir función`, e introduce un valor de la base A=2. Enseguida se trazará la gráfica de la función $y = 2^x$. Contesta lo que sigue.

a) ¿Qué comportamiento tiene la función?

b) ¿Qué signo tienen los valores de las derivadas?

c) ¿Qué concavidad tiene la función?

d) ¿Qué comportamiento tiene la derivada?

4. Elige la opción `F2 Subtangente` para explorar las subtangentes de la función $y = 2^x$ y calcular la derivada en los siguientes puntos. Completa la tabla:

x	$f'(x)$	Operaciones que realizaste para obtener $f'(x)$
1		
2		
3		
4		

Tabla 1

5. Analiza los valores de la Tabla 1 y contesta:

a) ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de x?

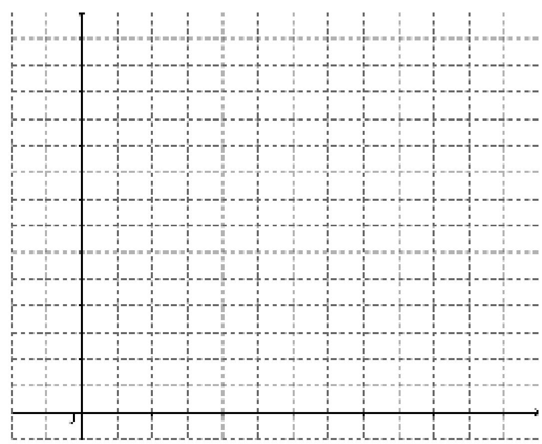
b) ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de $f'(x)$?

c) ¿Cómo está variando $f'(x)$ con respecto de x? Argumenta tu respuesta.

d) En general, para cualesquier valor de x, la derivada de $y = 2^x$ es:

y' =___________

6. En la cuadrícula siguiente traza la gráfica de $f'(x)$ a partir de los datos de la Tabla 1.



7. Describe las características de la gráfica anterior.

8. Con la ayuda del programa `deriexpo()` vas a explorar el comportamiento de la función derivada de las siguientes funciones exponenciales. Completa la tabla.

A	$y = A^x$	Subtangente	Fórmula de y'	La gráfica de y' está arriba o debajo de $y = A^x$
1.5				
2				
3				
4				

Tabla 2

9. Analiza los resultados de la Tabla 2 y contesta.

a) ¿Habrá alguna base A para la cual la gráfica de $y = A^x$ y de su derivada sean iguales, es decir, $\frac{dA^x}{dx} = A^x$?

b) ¿Cuál debe ser el valor de la subtangente para que suceda lo anterior?

c) Con la ayuda del programa `deriexpo()` trata de encontrar esta base (por tanteo, por ejemplo).

A=_______________

$$\frac{d}{dx}(\qquad\qquad)^x = (\qquad\qquad)^x$$

10. Observa que para cada valor de la base A existe un solo valor de la subtangente. Vas a explorar a continuación la relación que existe entre A y la subtangente constante. Completa la siguiente tabla.

A	$\frac{1}{subtangente} = k$
1.2	
2.4	
4.8	
9.6	

Tabla 3

11. Analiza los valores obtenidos en la Tabla 3 y contesta:

a) ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de A?

b) ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de k?

c) De acuerdo a lo que observaste, ¿cómo crees que está variando la constante k con relación a A? Argumenta tu respuesta.

12. Ahora vas a investigar la base del logaritmo que relaciona a A y k. Contesta lo siguiente:

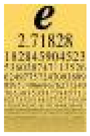
$\log_2 2 =$ __________________
$\log_3 3 =$ __________________
$\log_5 5 =$ __________________
$\log_b b =$ __________________

Entonces, ¿cuál es la base de este logaritmo y porqué?

13. En general, para cualquier función exponencial $y = A^x$, la fórmula de su derivada será:

$y' =$ _____________________

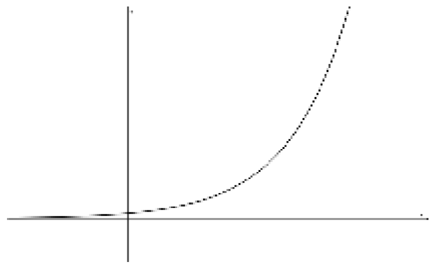
14. De lo anterior, ¿qué puedes decir de la función derivada de la función exponencial?



NOTA HISTÓRICA Parte 2

El número e.

La gráfica que se muestra abajo es la típica gráfica de todas las funciones exponenciales del tipo $y = kb^x$, sin importar sus bases (si la base es un número entre 0 y 1, la gráfica es una imagen reflejada en el eje y de la que se muestra). Su simplicidad es sorprendente: carece de muchos de los rasgos comunes a las funciones algebraicas, tales como intersecciones con el eje x, puntos máximos y mínimos, y puntos de inflexión. Además la gráfica no tiene asíntotas verticales. De hecho, es tan simple la gráfica de una exponencial que casi podríamos considerarla como exenta de interés si no fuera por una característica que la hace única: su razón de cambio.



En la `Actividad` anterior exploraste el comportamiento de la derivada de la función exponencial, concluyendo que *la derivada de una función exponencial del tipo $y = b^x$ es proporcional a la función misma.*

$$\text{Si } y = b^x, \text{ entonces } \frac{dy}{dx} = kb^x = ky$$

El número e es la base con la cual esa constante de proporcionalidad resulta igual a 1. Por lo tanto, si el número e es elegido como base, la función exponencial es igual a su propia derivada.

$$\text{Si } y = e^x, \text{ entonces } \frac{dy}{dx} = e^x$$

Pero hay más sobre este resultado. No sólo la función e^x es igual a su propia derivada, sino que es la *única* función (a excepción de sus múltiplos por una constante) que posee esta propiedad. El papel protagónico de esta función, en las matemáticas y en otras ciencias, es una consecuencia directa de este hecho.

Euler en su obra *Introductio in Analysis Infinitorum* publicada en 1748, llamó por primera vez la atención sobre el protagonismo del número e y de la función e^x en el Análisis. Hasta la época de Euler la función exponencial era considerada como la función inversa de la función logarítmica, poniendo éste a ambas funciones en un plano de igualdad, definiéndola como:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Euler utilizó la definición anterior para desarrollarla en una serie de potencias infinita.

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Es a partir de esta serie que por lo general se obtienen valores numéricos de e^x ; los primeros términos suelen ser suficientes para obtener la precisión buscada ya que los denominadores crecen rápidamente y hacen que la serie converja velozmente.

BLOQUE 5
El número e

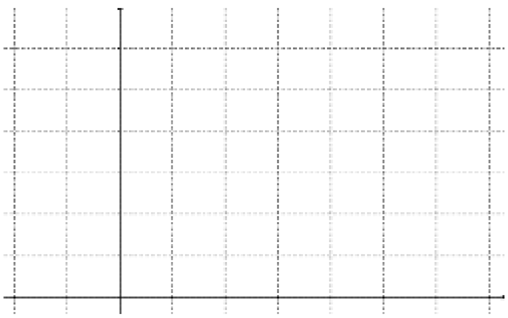
ACTIVIDAD No. 2

Transformando una función de la forma $\boldsymbol{y = A \cdot a^x}$ a una función exponencial de base $\boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{y = Ae^{kx}}$), y viceversa.

1. Contesta las siguientes preguntas:
a) ¿Cómo identificas que una fórmula del tipo $y = A \cdot a^x$ representa un crecimiento?

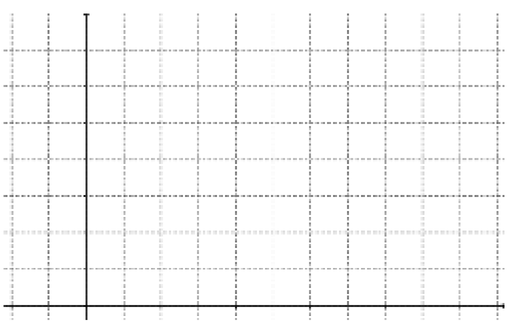
b) ¿Cómo identificas que una fórmula del tipo $y = A \cdot a^x$ representa un decaimiento?

2. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` traza en la siguiente cuadrícula la gráfica de $y = e^{0.5x}$



3. Describe las características de la gráfica trazada.

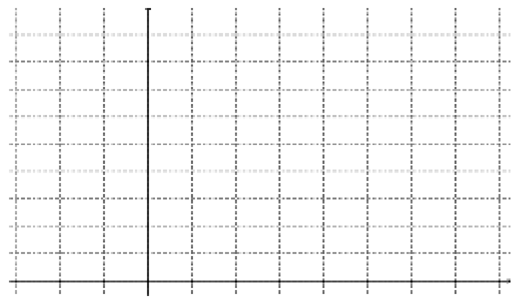
4. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` traza en la siguiente cuadrícula la gráfica de $y = e^{-0.2x}$



5. Describe las características de la gráfica trazada.

6. En el editor de funciones (◆W) de la calculadora introduce las siguientes funciones para graficarlas en los mismos ejes, y traza las gráficas en la cuadrícula de abajo:

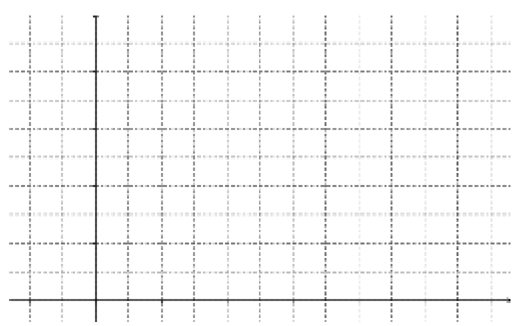
i) $y = 20(1.1^x)$ *ii*) $y = 20e^{0.09521x}$



7. En la Aplicación `Table` (◆Y) de la calculadora, analiza los valores numéricos de estas dos funciones. Describe tus observaciones.

8. En el editor de funciones (◆W) de la calculadora introduce las siguientes funciones para graficarlas en los mismos ejes, y traza las gráficas en la cuadrícula de abajo:

i) $y = 50(0.55)^x$ *ii*) $y = 50e^{-0.597837x}$



9. En la Aplicación `Table` (◆Y) de la calculadora, analiza los valores numéricos de ambas funciones. Describe tus observaciones.

10.- De acuerdo a lo anterior, se puede demostrar que cualquier representación analítica de la función exponencial de la forma $y = A \cdot a^x$ se puede transformar en una representación analítica también exponencial, pero cuya base es el número e. O sea que:

$$A \cdot a^x = A(e^k)^x$$

Lo que sugiere que: $a =$_________
y, de acuerdo a la definición de logaritmo:

$k =$ _______________
donde k es una constante llamada *tasa continua*. Por ejemplo, $k = 0.3$ corresponde a una tasa continua de 3%.

11. Convierte las siguientes funciones a la forma $P = P_0 a^t$ ¿Cuáles representan un crecimiento y cuáles un decaimiento exponencial? Completa la tabla.

$P = P_0 e^{kt}$	$P = p_0 a^t$	**Representa**
$15e^{0.25t}$		
$79e^{-2.5t}$		
$10e^{0.917t}$		
$7e^{-\pi t}$		

12. ¿Cómo puedes verificar que estas transformaciones son correctas?

13. Convierte las siguientes funciones a la forma $P = P_0 e^{kt}$. Completa la tabla.

$P = p_0 a^t$	$P = P_0 e^{kt}$
$25(1.5)^t$	
$174(0.9)^t$	
$4(0.6)^t$	
$10(2.7)^t$	

14. ¿Cómo puedes verificar que estas transformaciones son correctas?

ACTIVIDAD No. 2

Transformando una función de la forma $y = A \cdot a^x$ a una función exponencial de base e ($y = Ae^{kx}$), y viceversa.

BLOQUE 5
El número e

ACTIVIDAD No. 3

Contaminación radiactiva.

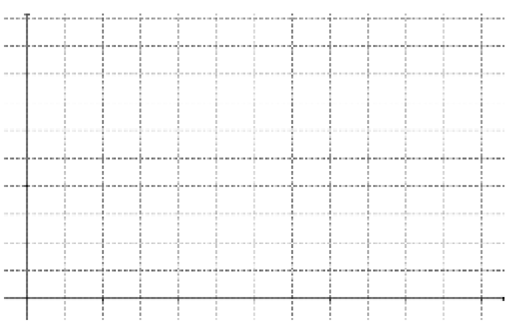
La Agencia de Protección Ambiental (APA) de Estados Unidos investigó recientemente un derrame de yodo radiactivo. El nivel de radiación en el sitio era de aproximadamente 2.4 milirrems/hora (cuatro veces más el límite máximo aceptable de 0.6 milirrems/hora), por lo que la APA ordenó una evacuación del área circundante. Se sabe que el nivel de radiación de una fuente de yodo decrece a una tasa continua por hora de $k = -0.004$.

1. Deduce una fórmula para calcular el nivel de radiación ($\boldsymbol{R}$, milirrems/hora) en función del tiempo ($\boldsymbol{t}$, hrs.)

$\boldsymbol{R}$ = ________________

2. Escribe los argumentos por los cuales obtuviste la fórmula anterior.

3. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` traza en la siguiente cuadrícula la representación gráfica de la fórmula que obtuviste.



4.- Describe las características de la gráfica.

5. Calcula el nivel de radiación para el tiempo dado. Completa la tabla.

***t*, hrs.**	***R*, milirrems/hr.**
0	
6	
12	
18	
24	

Tabla 1

6. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de t de la Tabla 1?

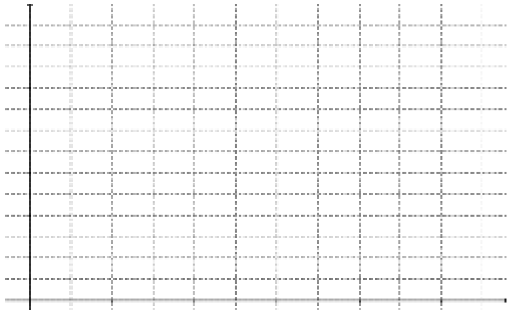
b) ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de R de la Tabla 1?

7. Deduce una fórmula para calcular el tiempo que tiene que transcurrir para un nivel de radiación dado.

$\boldsymbol{t}$ = ____________________

8. Escribe los argumentos y el procedimiento por los cuales obtuviste la fórmula anterior.

9. Con la ayuda de la calculadora `Voyage 200` traza en la siguiente cuadrícula la representación gráfica de la fórmula que obtuviste.



10. Describe las características de la gráfica.

11. Calcula el tiempo que tiene que transcurrir para el nivel de radiación dado. Completa la tabla:

***R*, milirrems/hr.**	***t*, hrs.**
2.40	
1.20	
0.60	
0.30	
0.15	

Tabla 2

12.- Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de R de la Tabla 2?

b) ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de t de la Tabla 2?

13. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que el nivel de radiación haya alcanzado el límite máximo aceptable y los habitantes puedan regresar?

14. ¿Cómo calculaste este valor? Argumenta tu procedimiento.

15. ¿Cuál es la vida media de este material radiactivo? Argumenta tu respuesta.

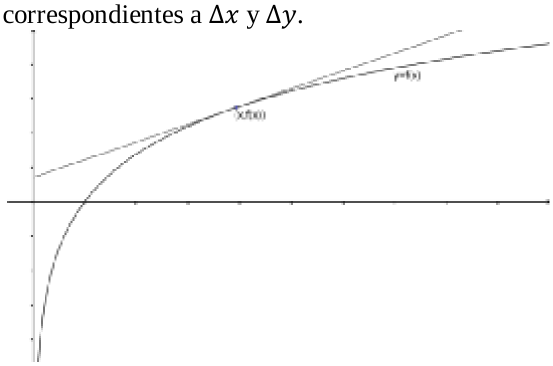
ACTIVIDAD No. 4

BLOQUE 5
El número e

La derivada de la función logarítmica (y = $\log_b x$).

1. Ejecuta en la pantalla `HOME` de la calculadora `Voyage 200` el programa `derivlog()`. Elige la opción `F1 Introducir Función` e introduce el valor b=2 para la base del logaritmo. Una vez trazada la gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$, elige la opción `F2 Subtangente`. Describe ampliamente lo que observaste.

2. A continuación se muestra la gráfica de una función logarítmica y la línea tangente a un punto de ésta, cuya pendiente representa la derivada o razón de cambio de la función en ese punto. Traza en la gráfica la subtangente y señala, en el triángulo característico formado, las magnitudes correspondientes a Δx y Δy.



3. De acuerdo a la gráfica anterior, contesta:

Para cualesquier punto sobre la gráfica de la función logarítmica, se tiene que la magnitud de Δx =_____________ y la magnitud de Δy _________________________. Estas magnitudes nos permiten calcular la pendiente de la línea tangente,

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

4. Para la función $f(x) = \log_2 x$, completa la tabla siguiente.

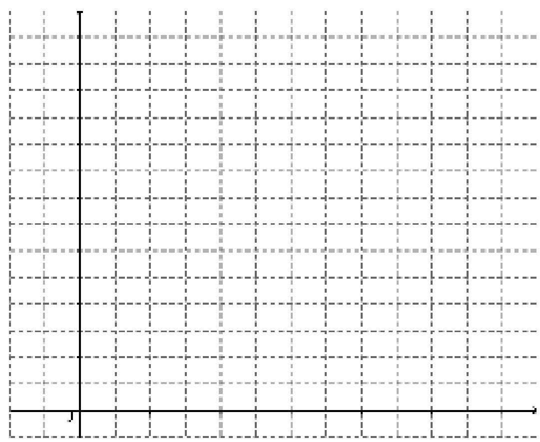
x	$f'(x)$	Operaciones que realizaste para obtener $f'(x)$
0.5		
1		
1.5		
2		
3		
4		
5		

Tabla 1

Por lo tanto, la función derivada de $f(x) = \log_2 x$ es:

$f'(x)$= ______________________

5. En la siguiente cuadrícula traza la gráfica de $f'(x)$ a partir de los datos de la Tabla 1.



6. Describe las características de la gráfica anterior.

7. Explora con la ayuda del programa `derivlog()` diferentes funciones logarítmicas. Completa la siguiente tabla.

b	$f(x)=\log_b x$	**Subtangente**	**Fórmula de $f'(x)$**
1.5			
2			
4			
8			

Tabla 2

8. a) ¿Habrá algún valor de la base del logaritmo (b) para el cual la subtangente sea igual a 1?

b) Si esto sucede, entonces

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

c) Con la ayuda del programa `derivlog()` encuentra esa base.

$$\frac{d}{dx}\log_{\_\_\_\_\_\_} x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

9. Deduce la relación que existe entre la base del logaritmo y la subtangente. ¿Cuál es? Argumenta tu respuesta.

10. En general, la derivada de la función logarítmica simple es:

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

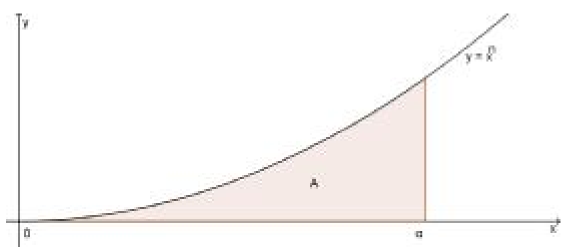
ACTIVIDAD No. 5

La cuadratura de la hipérbola equilátera.

Nota Histórica. El problema de encontrar el área de una figura cerrada plana es conocido históricamente como *cuadratura.* La palabra se refiere a la esencia misma del problema: expresar un área en términos de unidades de área, esto es cuadrados. Para los griegos esto significaba que la figura dada debía ser transformada en una equivalente cuya área pudiera encontrarse mediante principios fundamentales. La cuadratura de cualquier polígono se obtiene de inmediato, porque un polígono siempre puede disectarse en triángulos. Con el transcurso del tiempo, este aspecto exclusivamente geométrico del problema de la cuadratura dio paso a una versión más computacional.

En el siglo XIV con Oresme, el problema de cómo hallar el área bajo una curva había cobrado importancia debido a que las curvas representaban las magnitudes de las velocidades en el tiempo. El área bajo una curva representaba, entonces, el cambio total en cuanto a la posición y por tanto se torna una herramienta importante en la física matemática que comenzaba a desarrollarse.

Alrededor del año 1640, el matemático francés Pierre de Fermat obtuvo la fórmula para calcular el área bajo curvas cuya ecuación general es $y = x^n$ (donde n es un entero positivo), entre los puntos $x = 0$ y $x = a$.



Fórmula de Fermat:

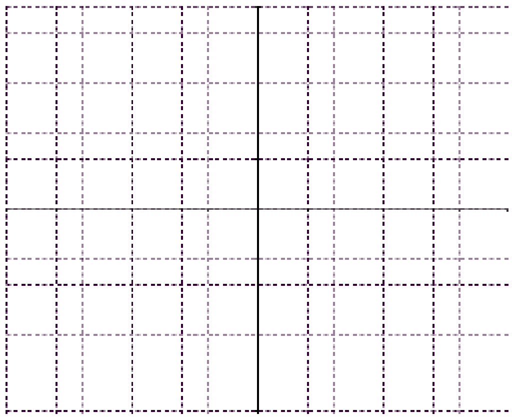
$$A = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$$

El trabajo de Fermat fue un descubrimiento significativo porque logró la cuadratura no solo de una curva, sino de una familia entera de curvas. Además, con una pequeña modificación de su procedimiento, Fermat mostró que la fórmula anterior continúa siendo verdadera para potencias negativas, asumiendo que ahora se toma el área desde $x = \propto$ (donde $\propto > 0$) hasta infinito. Cuando la potencia es un entero negativo, se tiene la familia de curvas $y = x^{-n}$, llamadas a menudo hipérbolas generalizadas. Que la fórmula de Fermat funcionara incluso en este caso es notable, ya que las ecuaciones $y = x^n$ y $y = x^{-n}$, pese a su aparente similitud, representan tipos de curvas bastante distintos.

Ah, pero había un inesperado obstáculo. La fórmula de Fermat fallaba para la curva de la cual la familia entera tomaba su nombre: la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Esto es así porque, para $n = -1$, el denominador $n + 1$ de la fórmula se hace 0.

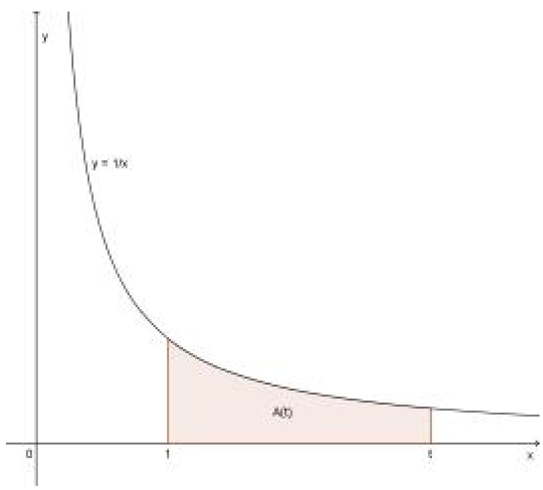
Entre las figuras que obstinadamente habían resistido todos los intentos de cuadratura estaba la hipérbola equilátera. Fué el jesuita belga Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) el primero en resolver este inflexible caso excepcional.

1. En la siguiente cuadrícula traza la gráfica de la función $y = 1/x$.



2. Describe ampliamente las características de la gráfica.

Antes de continuar debemos aclarar qué significa la cuadratura para este caso de la hipérbola equilátera.



La figura muestra una rama de la hipérbola $y = 1/x$. En el eje de las x se marca un punto fijo ($x = 1$) y un punto arbitrario $x = t$. Por ***área bajo la hipérbola*** entendemos el área entre la gráfica $y = 1/x$, el eje x y las líneas verticales $x = 1$ y $x = t$. Por supuesto que el valor numérico de esta área dependerá de nuestra elección de t, y por lo tanto será una función de t. El problema de cuadrar la hipérbola consiste en encontrar esta función, esto es, expresar el área como una fórmula que involucre la variable t.

3. Abre el archivo `hiperbola[1].ggb`. En la pantalla verás la gráfica de la hipérbola rectangular. "Arrastra" el punto **t** del deslizador y describe lo que sucede.

4. Completa las siguientes tablas con el apoyo de este archivo.

t	**Área, $A(t)$**
1	
2	
4	
8	
16	

t	**Área, $A(t)$**
1	
3	
9	
27	

5. Abre el archivo `hiperbola[2].ggb`. "Arrastra" el punto **t** del deslizador y completa la siguiente tabla.

t	**Área, $A(t)$**
1	
1.5	
2.25	
3.375	

Analizando las tablas anteriores, contesta:

6. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de t?

7. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores del área?

8. De acuerdo a lo que observaste, ¿cómo crees que está variando el área bajo la hipérbola con relación a t?

Ahora vas a investigar el tipo de logaritmo que está relacionado con esta área.

9. Contesta lo siguiente:

$\log_2 2 =$ ___________

$\log_3 3 =$ ___________

$\log_5 5 =$ ___________

$\log_a a =$ ___________

10. Abre el archivo `hiperbola[3].ggb`. "Arrastra" el punto **t** del deslizador y explora para encontrar cuál es la base de este logaritmo.

11. ¿Cuál es la base del logaritmo?

12. ¿Cómo lo supiste?

13. Escribe la fórmula para calcular el área bajo la hipérbola rectangular.

$A(t)$ = ______________________

14. ¿Cómo puedes verificar que esta fórmula es correcta?

Anexo 3

Descripción de los programas interactivos para la calculadora Voyage 200

El programa `subtan( )`.

El propósito de este programa es que el estudiante explore el comportamiento de las subtangentes para diferentes tipos de funciones, con la intención de que observe el comportamiento singular de las subtangentes en las funciones exponenciales.

Operación de programa.

Para iniciar la corrida de este programa se escribe `subtan()` en la línea de comando de la pantalla principal `HOME`, cuidando que el fólder actual sea aquél en que se encuentra almacenado dicho programa, como se muestra a continuación.

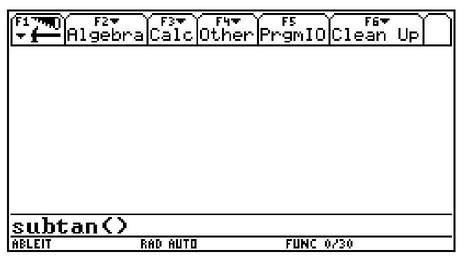


Figura 1.

Al presionar `ENTER` aparecerá la siguiente pantalla, que describe brevemente lo que hace el programa.

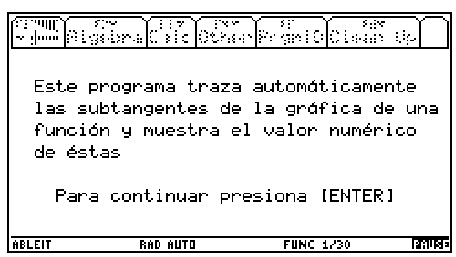


Figura 2.

Al presionar `ENTER` aparecerá un menú de usuario como se muestra en la siguiente pantalla.

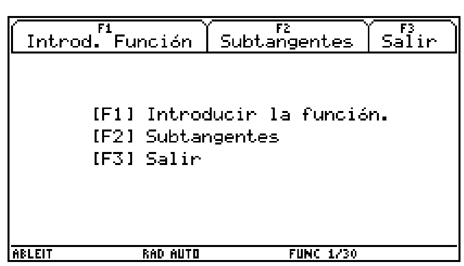


Figura 3.

El estudiante deberá seleccionar la opción `Introducir función` con la tecla [`F1`], debido a que la opción `Subtangentes` [`F2`] no estará disponible si primero no se introduce la función. En este caso, al presionar `F2` aparecerá el siguiente mensaje.

Figura 4.

Al presionar `F1` aparecerá una ventana de diálogo como la que se muestra abajo, para que el estudiante introduzca la fórmula de la función que desea graficar y los extremos de los intervalos de x y y que definirán la ventana de graficación.

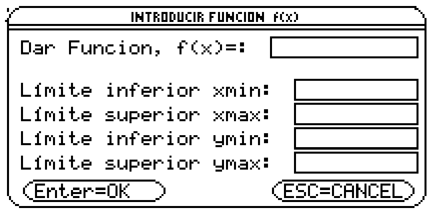


Figura 5.

Este es un punto delicado del programa, pues debe tratar de preverse cualquier situación anómala en la introducción de los datos, y controlarla para evitar la interrupción del programa. Lo que se espera es que se introduzca la expresión analítica de una función cuya variable sea x. Sin embargo, puede suceder que, orientado por el contexto de la situación que se analice, el estudiante introduzca una expresión analítica cuya variable sea diferente de x, o también puede suceder que introduzca una serie de símbolos extraños a los que no pueda asignárseles ningún sentido adecuado al contexto, como se ilustra en las siguientes pantallas.

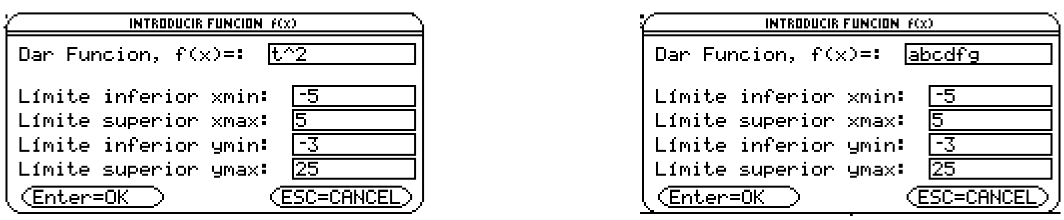


Figura 6.

En éstos casos aparecerá el mensaje de error que se muestra en la siguiente figura.

Figura 7.

El estudiante también deberá introducir los valores de los extremos de los intervalos de x y y, para definir las dimensiones de la ventana de graficación. En este caso consideramos los siguientes posibles errores, por ejemplo: introducir un número negativo presionando la tecla de la operación de resta seguida del número.

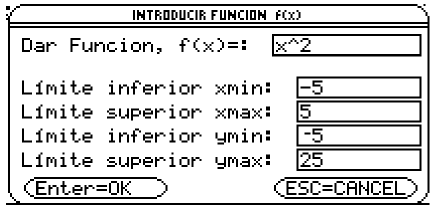


Figura 8.

Cuando lo anterior suceda, aparecerá el mensaje de error que se muestra en la siguiente figura.

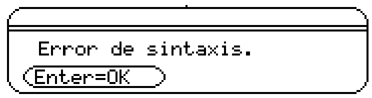


Figura 9.

Otros casos de situaciones anómalas que se consideraron fueron los siguientes.

Figura 10.

En estos casos aparecerá el siguiente mensaje de error.

Figura 11.

Para que el programa pueda graficar la función correspondiente, es necesario que se introduzca su expresión analítica cuya variable independiente sea x, y que los extremos de los intervalos (dominio y rango) sean escritos correctamente, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 12.

En estas condiciones, al presionar ENTER aparecerá la pantalla gráfica y se trazará la gráfica de la función introducida.

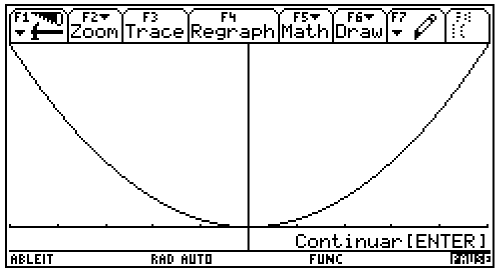


Figura 13.

Para continuar, se deberá presionar ENTER, apareciendo de nuevo el menú de usuario, pero en la pantalla aparecerá también la expresión analítica de la función graficada y el intervalo de graficación, además de que se activará una barra de herramientas.

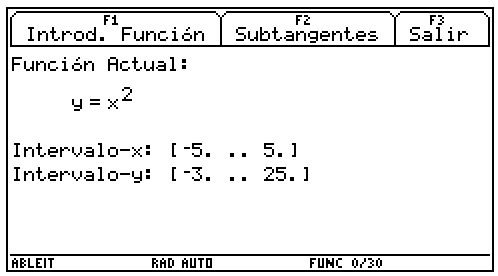
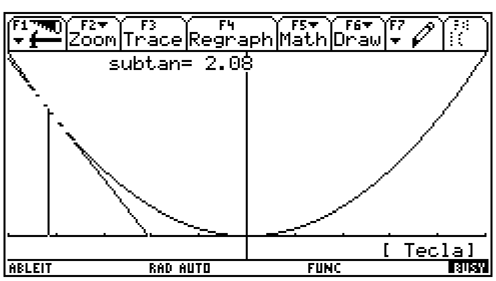
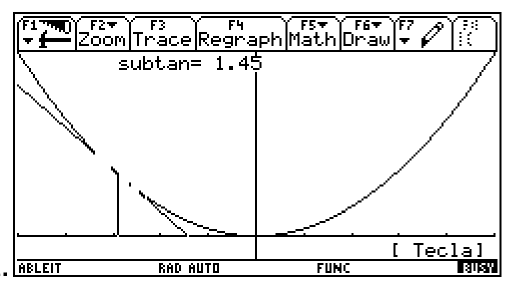
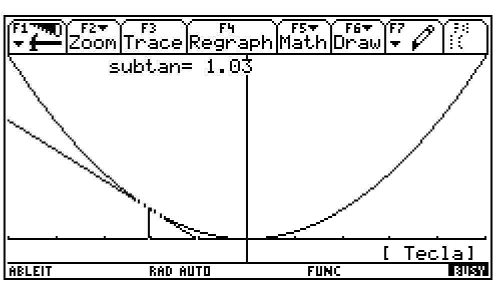


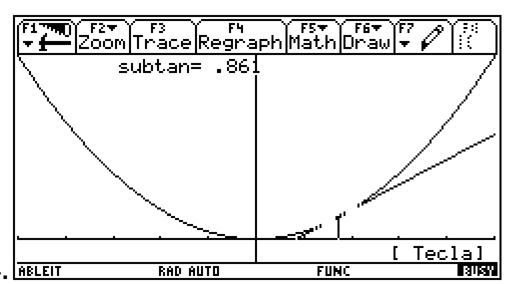
Figura 14.

Al seleccionar la opción Subtangentes con la tecla F2 de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente y se apreciará en pantalla una animación en donde se trazarán líneas tangentes a la curva y las correspondientes subtangentes, mostrándose también el valor numérico de éstas. El estudiante podrá detener la animación presionando la tecla de la letra S, y hacer que continúe presionando cualquier otra tecla. Enseguida se muestran (en forma estática, por supuesto) algunas pantallas de dicha animación.

1. 

2. 

3. 

4. 

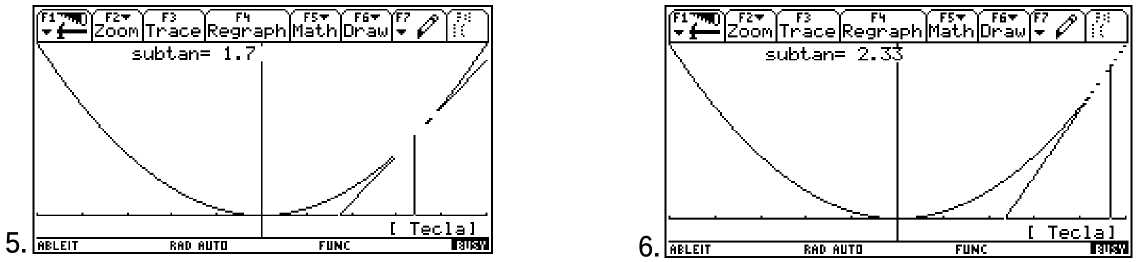


Figura 15. Pantallas correspondientes a la animación de la opción `Subtangente` del programa `subtan( )`.

Una vez concluida la animación se deberá presionar `ENTER` para regresar al menú principal, ya sea para introducir una nueva función o para salir del programa, seleccionando la opción `Salir` con la tecla `F3` (ver figura 20).

A continuación se muestran diferentes pantallas del programa, para ejemplificar el caso de una función exponencial simple, que es uno de los propósitos principales de este programa: que el estudiante observe para estos casos el comportamiento de las subtangentes.

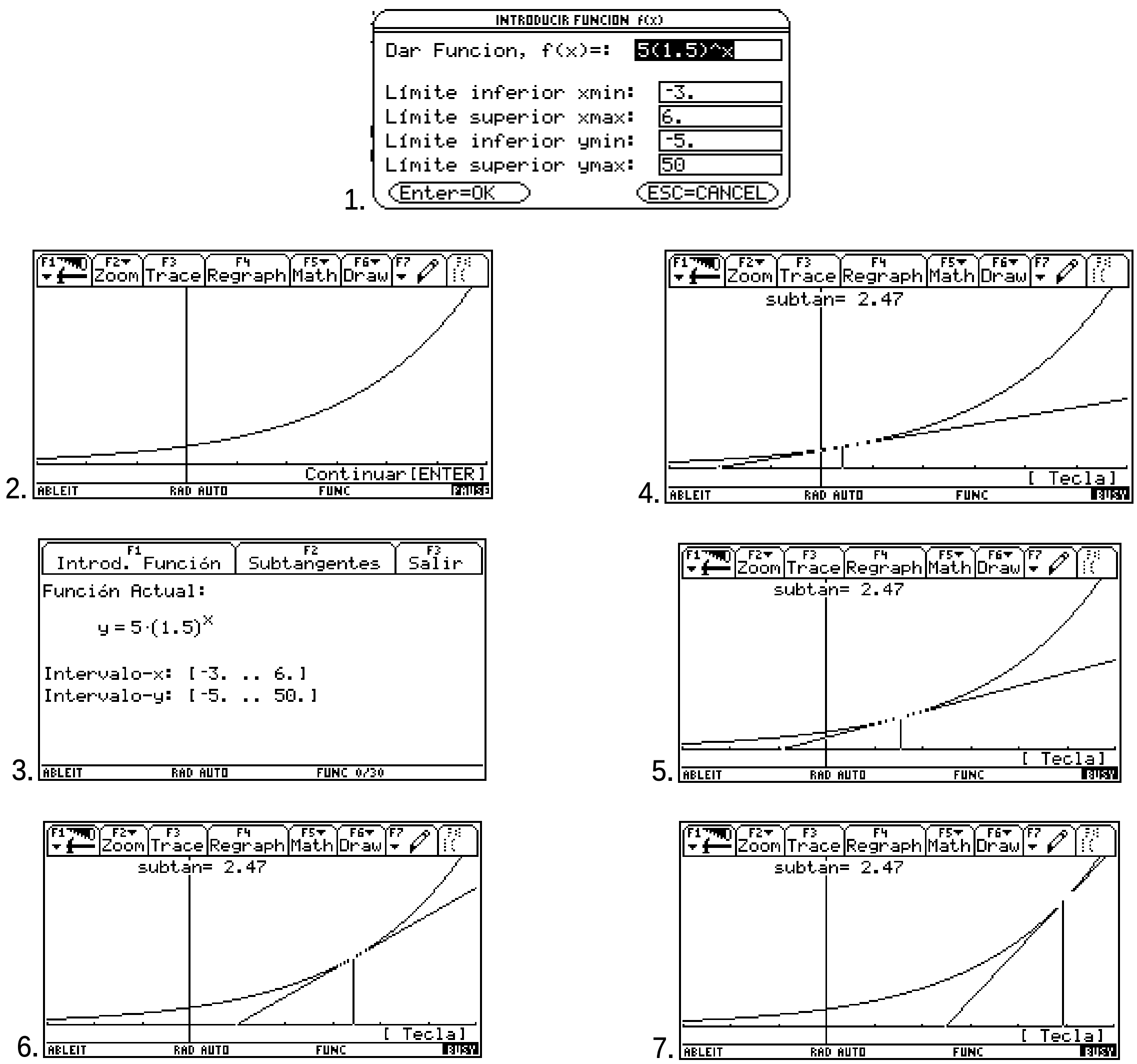


Figura 16. Pantallas del programa `subtan()` para el caso de una función exponencial simple.

El programa `deriexpo()`.

El propósito de este programa consiste en auxiliar al estudiante en la exploración del comportamiento de la derivada o razón de cambio de las funciones exponenciales simples, particularmente cuando su base es el número e.

Operación del programa.

Para iniciar la corrida de este programa se deberá escribir `deriexpo()` en la línea de comando de la pantalla principal `HOME`, cuidando que el fólder actual sea el mismo en que se encuentra almacenado el programa, como se muestra a continuación.

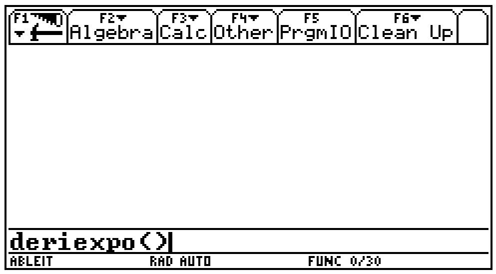


Figura 17.

Al presionar `ENTER` aparecerá un menú de usuario, como se muestra enseguida.

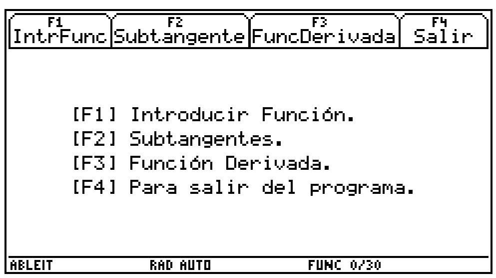


Figura 18.

El estudiante deberá elegir la opción `Introducir Función` presionando `F1`, ya que las opciones `Subtangentes` `[F2]` y `Función Derivada` `[F3]` no estarán disponibles si no se introduce la función primero. Si el estudiante no elige dicha opción, aparecerá el siguiente mensaje.

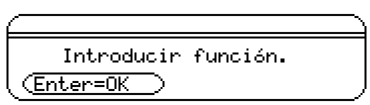


Figura 19.

Al presionar `F1` aparecerá la siguiente pantalla.

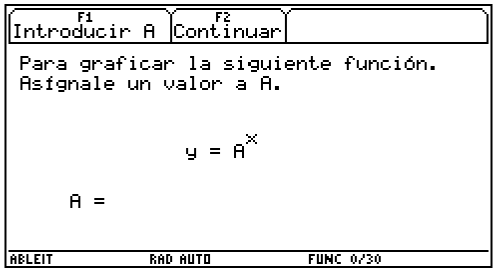


Figura 20.

En esta parte el estudiante deberá introducir un valor para la base `A`, siendo ésta la parte delicada del programa, pues deben preverse las situaciones anómalas en la introducción de este dato, y controlarlas para evitar la interrupción del programa. Para introducir este dato se deberá seleccionar la opción del menú `Introducir A` con la tecla `F1`, apareciendo en pantalla un cuadro de diálogo como se muestra a continuación.

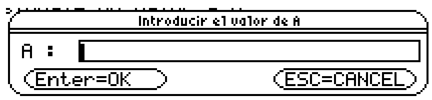


Figura 21.

El estudiante deberá introducir el valor numérico de `A`, el cual debe estar sujeto a las restricciones `A`>0 y `A`≠1. En el caso de que introduzca un valor que no cumpla con estas características, como se muestra en las siguientes pantallas, por ejemplo:

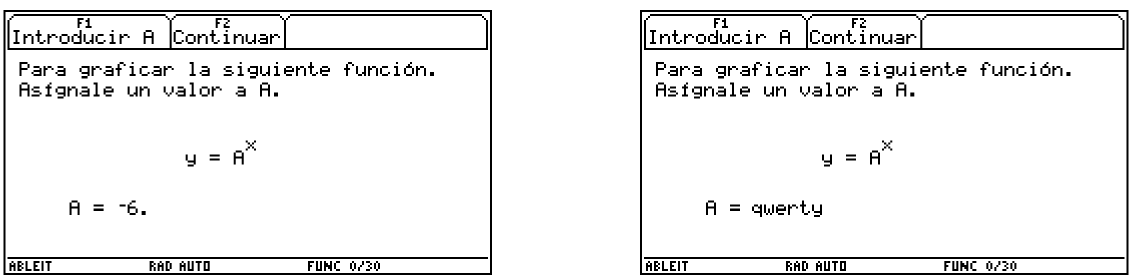


Figura 22.

al presionar la opción `Continuar` [`F2`], aparecerá el siguiente mensaje de error:

Figura 23.

Otra situación anómala considerada es cuando se introduce un número negativo o positivo y se presiona la tecla de la operación de resta o suma respectivamente, seguida del número. En las siguientes pantallas se muestra dicha situación, así como también el mensaje de error desplegado.

Figura 24.

Para que el programa pueda trazar la gráfica, es necesario que se introduzca un número mayor que cero y diferente de uno, como se muestra en la pantalla siguiente.

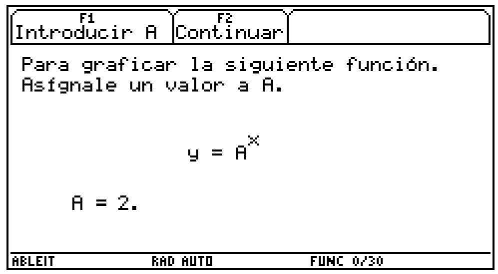


Figura 25.

Al presionar la opción del menú `Continuar` con la tecla `F2`, aparecerá la pantalla gráfica donde se trazará la gráfica correspondiente; una vez trazada ésta se deberá presiona `ENTER` para continuar.

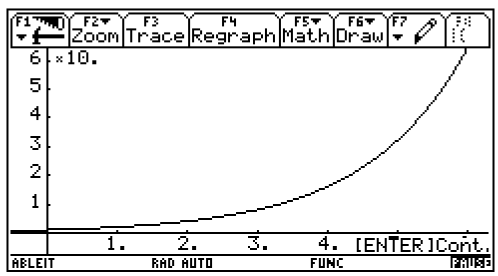


Figura 26.

Aparecerá de nuevo el menú principal y también se mostrará en pantalla la expresión analítica de la función graficada. Una vez introducida la función, todas las opciones del menú estarán disponibles.

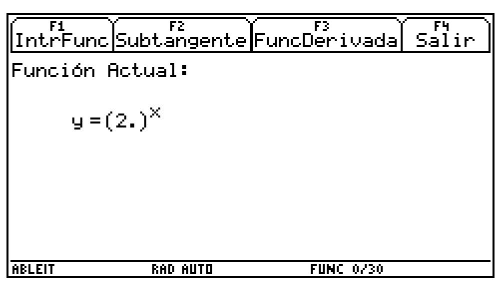


Figura 27.

Al seleccionar la opción `Subtangentes` con la tecla `F2`, de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente, y se apreciará en pantalla una animación donde se trazarán líneas tangentes a la curva y las correspondientes subtangentes, mostrándose también el valor numérico de éstas. Durante la animación, el estudiante tendrá la opción de detenerla, presionando la tecla de la letra S, y al presionar cualquier otra tecla, la animación continuará. Enseguida se muestran algunas pantallas de esta animación.

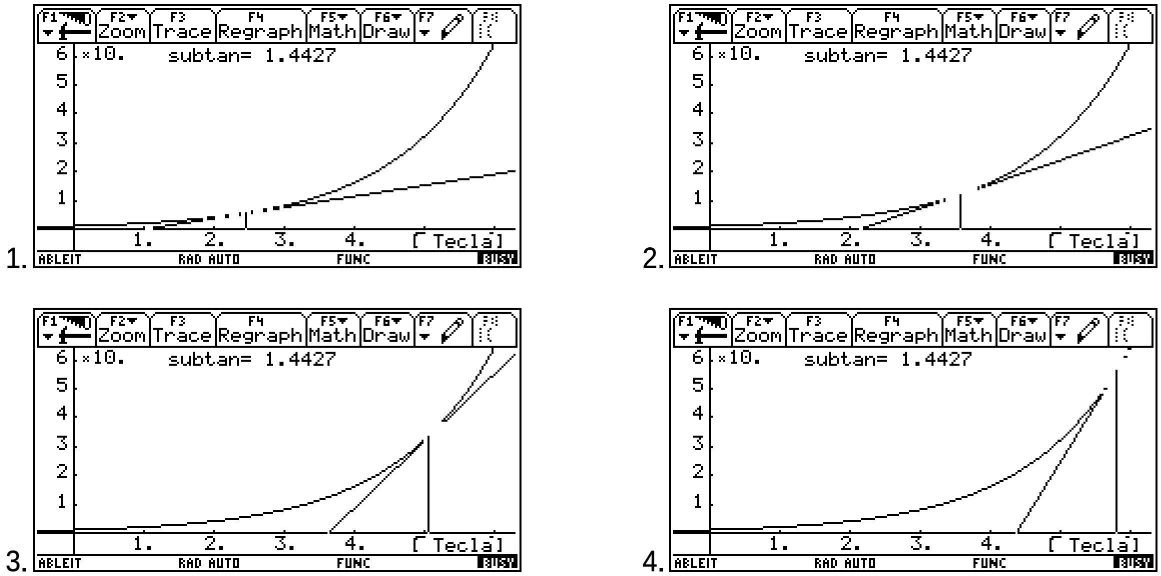


Figura 28. Pantallas correspondientes a la animación de la opción Subtangente del programa deriexpo().

Una vez concluida dicha animación, se deberá presionar ENTER para volver al menú principal (ver figura 27). Después de haber explorado la opción Subtangentes, el estudiante podrá elegir cualquiera de las opciones del menú anterior.

Al seleccionar la opción Función Derivada con la tecla F3, aparecerá la gráfica de la función trazada previamente y comenzará a trazarse la gráfica de su función derivada; una vez concluida ésta, aparecerá en pantalla la expresión analítica de la función derivada.

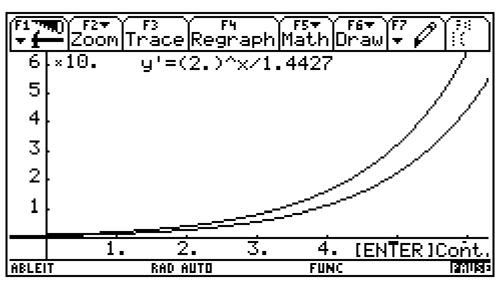


Figura 29.

Al presionar ENTER aparecerá de nuevo el menú principal (ver figura 18), donde el estudiante podrá repetir las exploraciones anteriores con otra función, seleccionando de nuevo la opción Introducir Función con la tecla F1, o salir del programa presionando la tecla F4.

El programa derivlog( ).

El objetivo de este programa es que el estudiante explore el comportamiento de la derivada de las funciones logarítmicas simples, particularmente cuando la base del logaritmo es el número e.

Operación del programa.

La operación de este programa por parte del estudiante es similar a la del programa deriexpo(). Para iniciar la corrida de este programa se deberá escribir derivlog() en la línea de comando de la pantalla principal HOME, cuidando que el fólder actual sea el mismo en que se encuentra almacenado el programa, como se muestra en la siguiente pantalla.

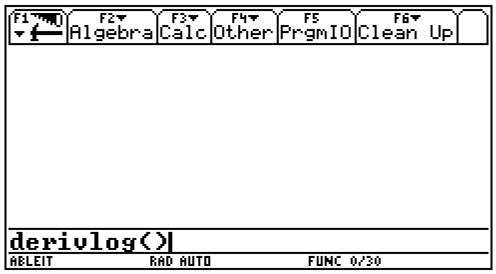


Figura 30.

Al presionar ENTER aparecerá un menú de usuario, como se muestra a continuación.

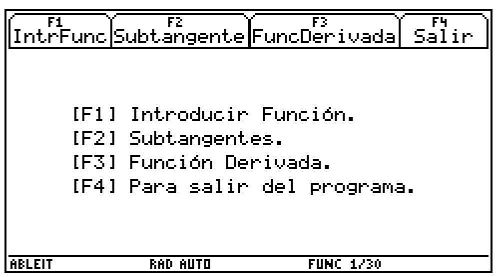


Figura 31.

El estudiante deberá elegir la opción Introducir Función con la tecla F1, ya que las opciones Subtangentes [F2] y Función Derivada [F3] no estarán disponibles si no se introduce la función primero. Si el estudiante no elige dicha opción, aparecerá el siguiente mensaje.

Figura 32.

Al presionar F1 aparecerá la siguiente pantalla.

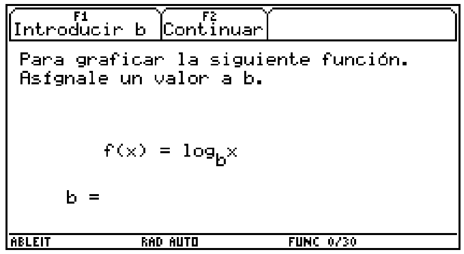


Figura 33.

En esta parte el estudiante deberá introducir un valor para la base del logaritmo `b`, siendo ésta la parte delicada del programa, pues deberán preverse las situaciones anómalas en la introducción de este dato, y controlarlas para evitar la interrupción del programa. Para introducir este dato se deberá seleccionar la opción del menú `Introducir b` con la tecla `F1`, apareciendo en pantalla un cuadro de diálogo, como se muestra a continuación.

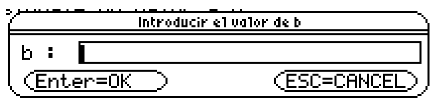


Figura 34.

El estudiante deberá introducir el valor numérico de `b`, el cual debe de estar sujeto a las restricciones `b`>0 y `b`≠1. En caso de que el alumno introduzca un valor que no cumpla con estas características, como se muestra en las siguientes pantallas:

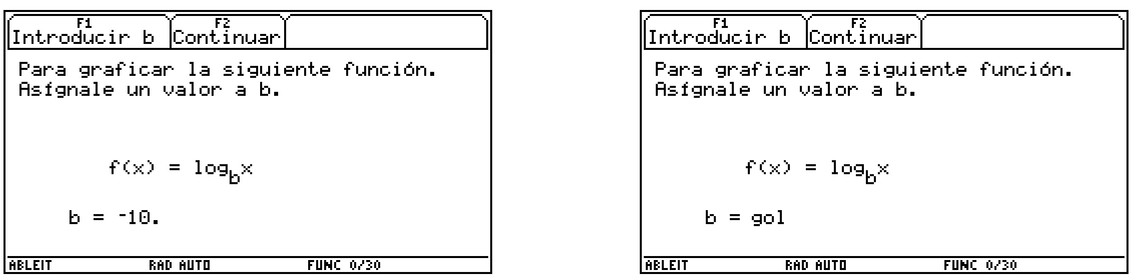


Figura 35.

ocurrirá que al presionar la opción del menú `Continuar` con la tecla `F2`, aparecerá el siguiente mensaje de error:

Figura 36.

Otra situación anómala considerada es cuando se introduce un número negativo o positivo y se presiona la tecla de la operación de resta o suma respectivamente, seguida del número. En las siguientes pantallas se muestra dicha situación, así como también el mensaje de error desplegado.

Figura 37.

Para que el programa pueda trazar la gráfica, es necesario que se introduzca un número mayor que cero y diferente de uno, como se muestra en la pantalla siguiente.

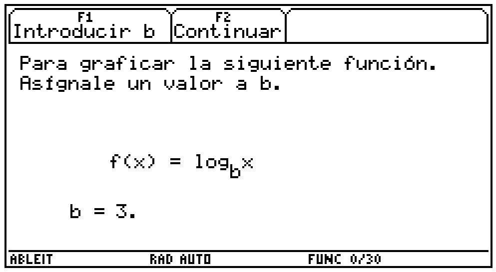


Figura 38.

Al presionar la opción del menú `Continuar` con la tecla `F2`, aparecerá la pantalla gráfica donde se trazará la gráfica correspondiente; una vez trazada ésta se deberá presionar `ENTER` para continuar.

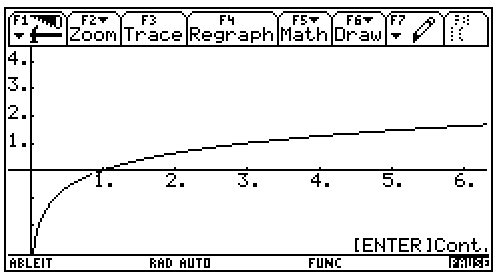


Figura 39.

Aparecerá de nuevo el menú principal y también la expresión analítica de la función graficada. Una vez introducida la función, todas las opciones del menú estarán disponibles.

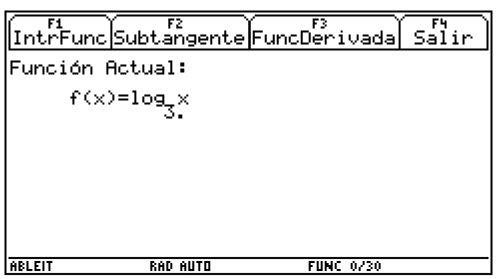


Figura 40.

Al seleccionar la opción `Subtangentes` con la tecla `F2`, de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente y se apreciará en pantalla una animación donde se trazarán líneas tangentes a la curva y las correspondientes subtangentes, mostrándose también el valor numérico de éstas. En el transcurso de la animación, el estudiante la podrá detener presionando la tecla de la letra `S`, y al presionar cualquier otra tecla la animación continuará. Enseguida se muestran algunas pantallas de esta animación. Las subtangentes se grafican en el eje vertical, lo que se corresponde con el hecho de que la función logarítmica es la inversa de la exponencial.

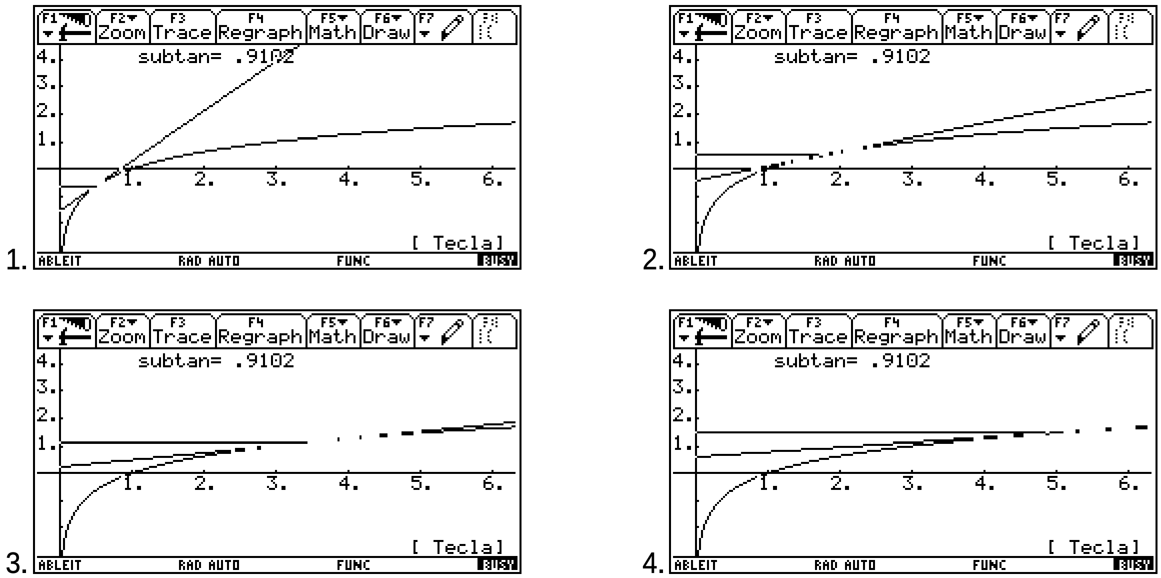


Figura 41. Pantallas correspondientes a la animación de la opción `Subtangente` del programa `derivlog()`.

Una vez concluida dicha animación se deberá presionar `ENTER` para volver al menú principal (ver figura 40). Después de haber explorado la opción `Subtangentes`, el estudiante podrá elegir cualquiera de las opciones del menú anterior.

Al seleccionar la opción `Función Derivada` con la tecla `F3`, aparecerá la gráfica de la función trazada previamente y comenzará a trazarse la gráfica de su función derivada; una vez concluida ésta, aparecerá en pantalla la expresión analítica de la función derivada.

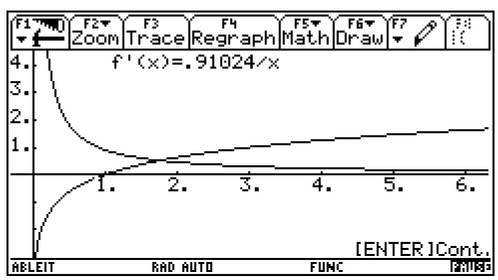


Figura 42.

Al presionar `ENTER` aparecerá de nuevo el menú principal (ver figura 31), donde el estudiante podrá repetir las exploraciones anteriores con otra función, seleccionando de nuevo la opción `Introducir Función` con la tecla `F1`, o salir del programa presionando la tecla `F4`.

El programa `graflog( )`.

El objetivo de este programa es promover las tareas de variación sistemática para el caso de las funciones logarítmicas. El programa muestra representaciones gráficas y analíticas dinámicamente vinculadas de la familia de funciones $f(x) = a\log_b(cx) + d$. Estas representaciones dinámicas se logran desplegando en pantalla una secuencia de imágenes relacionadas de manera especial, de modo que al aparecer automáticamente una tras otra, crean la ilusión de movimiento. Con esta puesta en correspondencia de las representaciones gráficas y analíticas se busca favorecer la articulación de estos dos registros de representación.

Este programa requiere de varias secuencias de imágenes gráficas, las cuales deben ser creadas antes de que el programa sea utilizado por primera vez. Para ello se emplea un programa auxiliar llamado `creagraf()`, que debe de estar en el mismo fólder que el programa `graflog( )`.

Operación del programa.

Para iniciar la corrida de este programa se escribe `creagraf( )` en la línea de comando de la pantalla principal `HOME` y se presiona `ENTER`. A continuación se construirán y guardarán automáticamente una a una las gráficas para las animaciones. Este proceso tarda algo de tiempo. Sólo se necesitará correr de nuevo el programa `creagraf()` en el caso de que las imágenes sean borradas.

Una vez creadas las gráficas, el programa `graflog()` puede ser utilizado. Para el inicio de éste, se escribe `graflog()` en la línea de comando de la pantalla principal `HOME`, como se muestra a continuación.

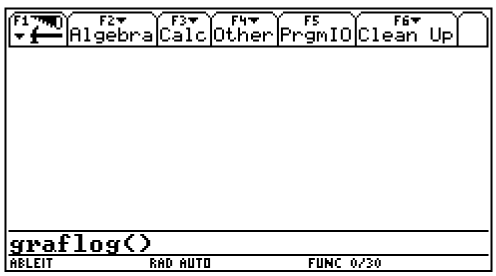


Figura 43.

Al presionar `ENTER` aparecerá la siguiente pantalla, que describe brevemente lo que hace el programa.

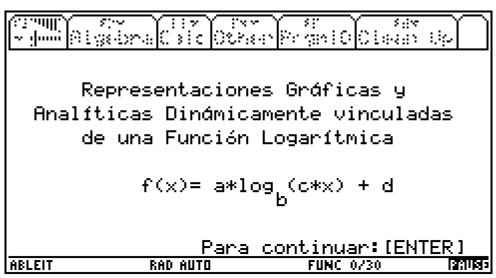


Figura 44.

A continuación, al presionar `ENTER` aparecerá la siguiente pantalla, que muestra la expresión analítica general de la función logarítmica, y el menú principal del programa.

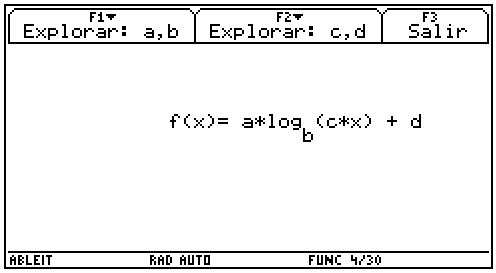


Figura 45.

La opción `Explorar: a,b`

Al seleccionar la opción `Explorar: a,b` presionando `F1`, se tendrá acceso al submenú mostrado en la siguiente pantalla.

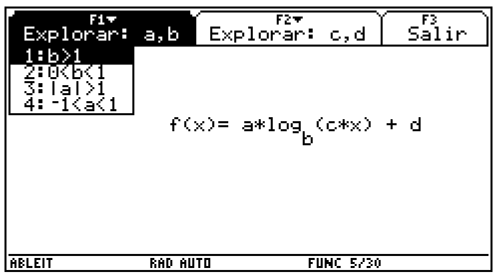
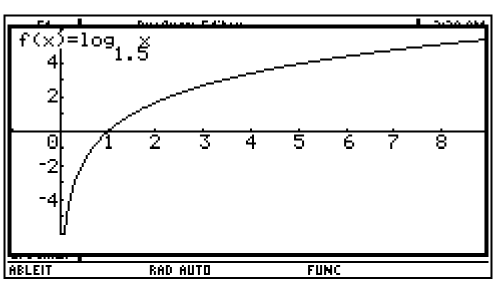
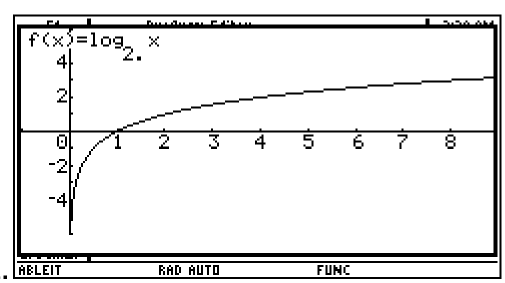


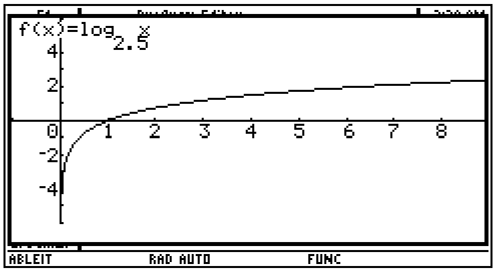
Figura 46.

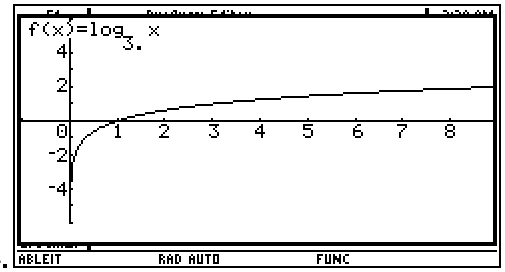
A continuación se describen cada una de las opciones de este submenú, las cuales se seleccionan con las teclas del cursor ▲, ▼.

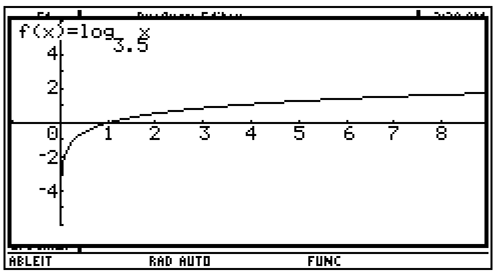
- `Opción 1: b>1`. Para seleccionar esta opción se señala ésta con el cursor, seguido de `ENTER` (ver figura 51). En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira y encoge en sentido vertical de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se muestra su expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se tomaron elementos de la familia $f(x) = \log_b x$, haciendo variar el parámetro b desde 1.5 hasta 4 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 6 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran (de manera estática por supuesto), las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición. Para la construcción de estas imágenes se utiliza el subprograma `grafb()`, el cual es llamado por el programa `creagraf()`.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

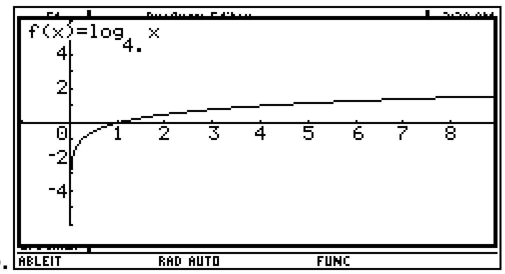
6. 

Figura 47. Familia $f(x) = \log_b x$ donde $b > 1$.

- `Opción 2: 0<b<1`. Para seleccionar esta opción se señala ésta con el cursor, seguido de `ENTER` como se muestra en la siguiente figura.
-

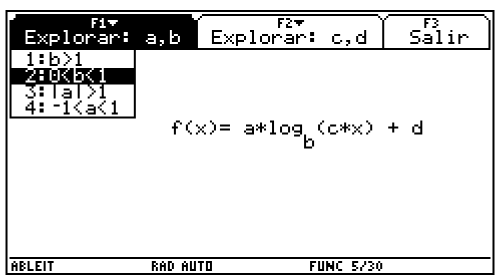


Figura 48.

En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira y encoge en sentido vertical de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se muestra su expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se tomaron elementos de la familia $f(x) = \log_b x$, haciendo variar el parámetro b desde 0.1 hasta 0.7 con incrementos de 0.1, lo cual hace un total de 7 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran (de manera estática, por supuesto) las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición. Para la construcción de estas imágenes se utiliza el subprograma `grafb2()`, el cual es llamado por el programa `creagraf()`.

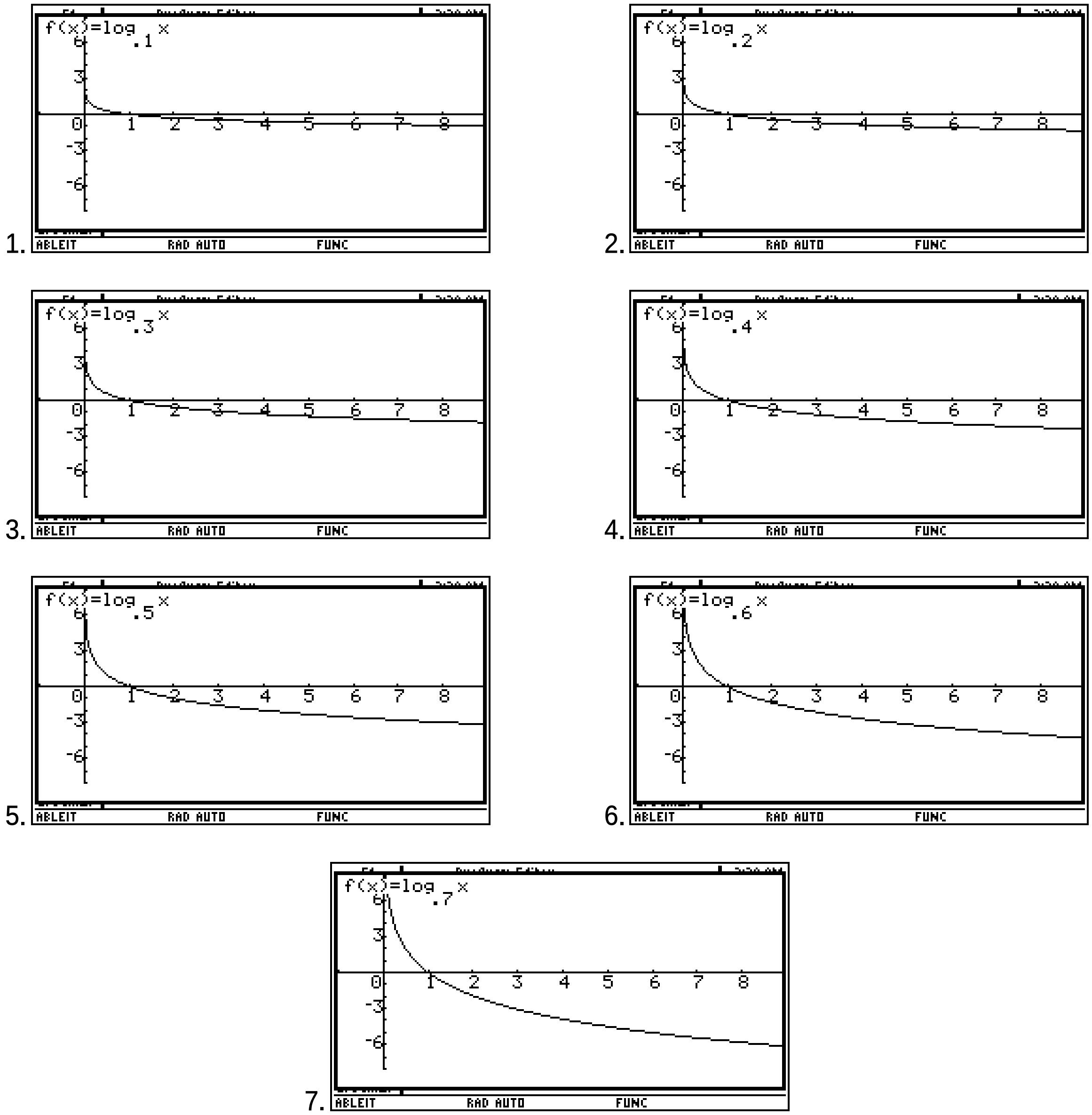


Figura 49. Familia $f(x) = \log_b x$ donde $0 < b < 1$.

- `Opción 3: |a|>1`. Para seleccionar esta opción se señala ésta con el cursor, seguido de ENTER como se muestra en la siguiente figura.

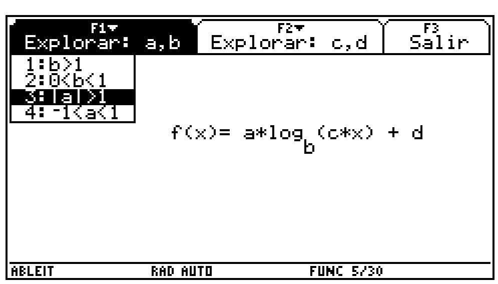


Figura 50.

En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira en sentido vertical con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada, y en algunos casos, además de estirarse verticalmente también se refleja con respecto al eje x. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se muestra la expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = \log_3 x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = a \log_3 x$, haciendo variar el parámetro a desde -6 hasta 6 con incrementos de 2, lo cual hace un total de 7 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran (de manera estática, por supuesto) las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición. Para la construcción de estas imágenes se utiliza el subprograma `grafa()`, el cual es llamado por el programa `creagraf()`.

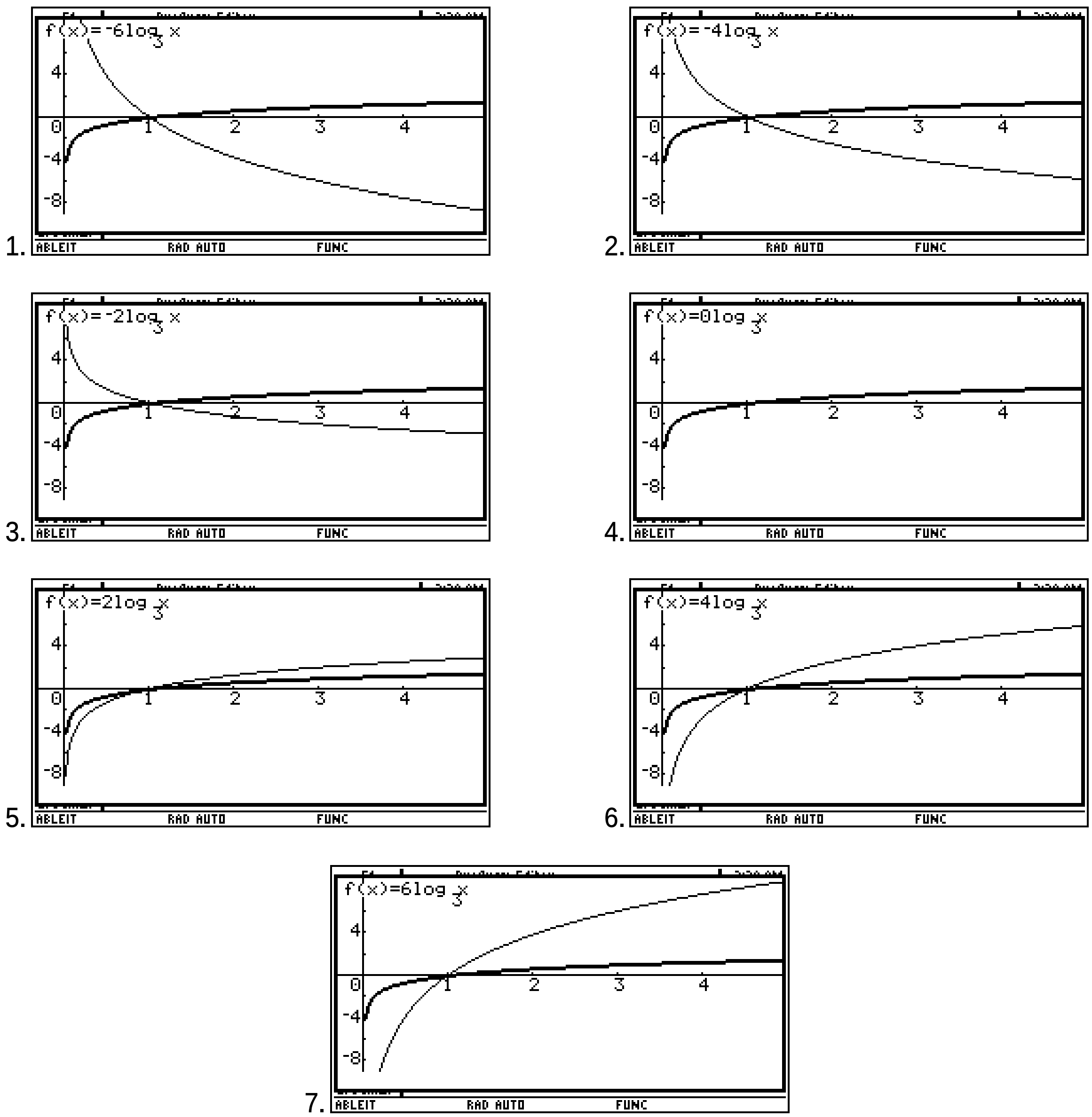


Figura 51. Familia $f(x) = a \log_3 x$ donde $|a| > 1$ y la función de referencia es $f(x) = \log_3 x$.

- `Opción 4: -1<a<1`. Para seleccionar esta opción se señala ésta con el cursor, seguido de `ENTER` como se muestra en la siguiente figura.

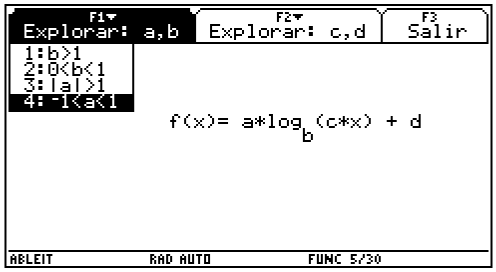
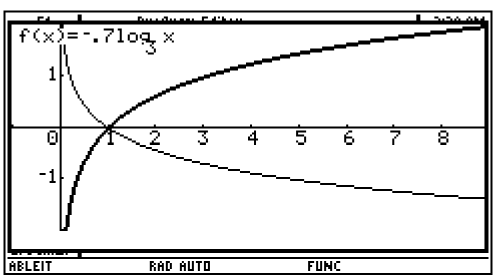
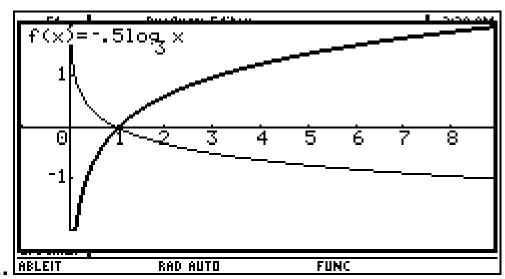
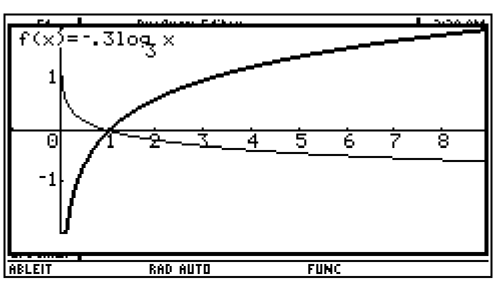


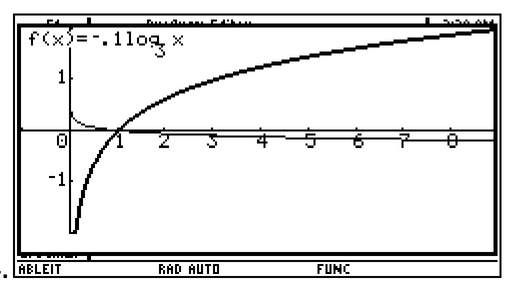
Figura 52.

En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se encoge en sentido vertical con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada, y en algunos casos, además de encogerse verticalmente también se refleja con respecto al eje x. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se muestra la expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = \log_3 x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = a \log_3 x$, haciendo variar el parámetro a desde -0.7 hasta 0.7 con incrementos de 0.2, lo cual hace un total de 8 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra (de manera estática, por supuesto) la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición. Para la construcción de estas imágenes se utiliza el subprograma `grafa2()`, el cual es llamado por el programa `creagraf()`.

1. 

2. 

3. 

4. 

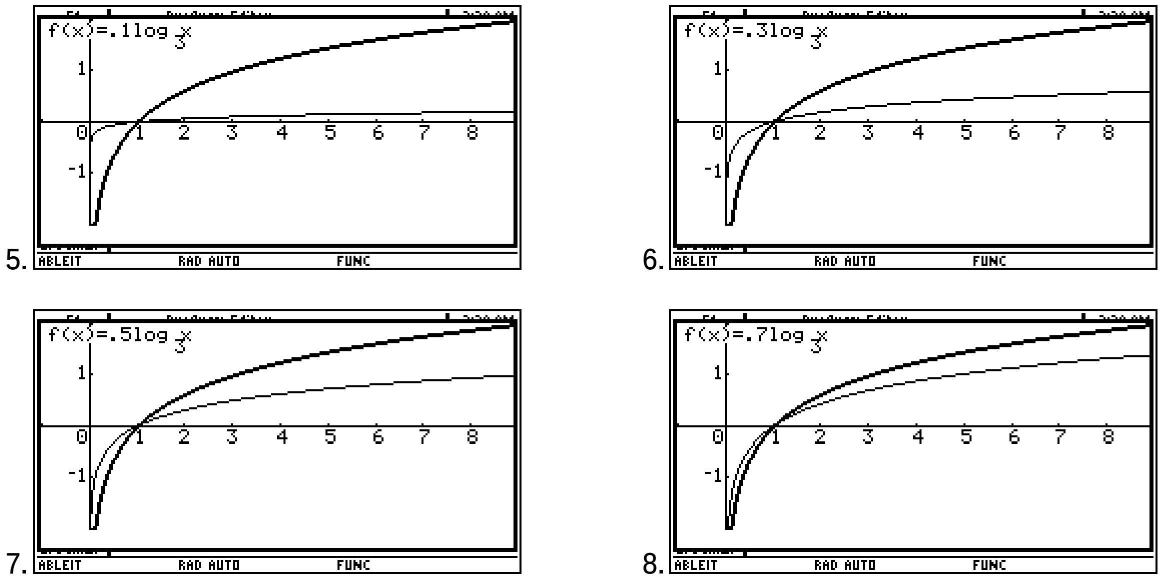


Figura 53. Familia $f(x) = a \log_3 x$ donde $-1 < a < 1$ y la función de referencia es $f(x) = \log_3 x$.

La opción `Explorar: c,d`

Al seleccionar la opción `Explorar: c,d` presionando `F2`, se tiene acceso al submenú mostrado en la siguiente pantalla.

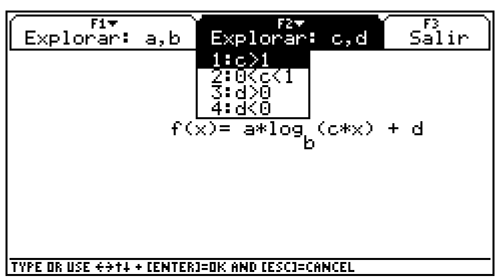


Figura 54.

A continuación se describen cada una de las opciones de este submenú, las cuales se seleccionan con las teclas del cursor ▲,▼.

- `Opción 1: c>1`. Para seleccionar esta opción se señala ésta con el cursor, seguido de `ENTER` (ver figura 59). En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia arriba con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se muestra la expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = \log_2 x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = \log_2 (cx)$, haciendo variar el parámetro c desde 2 hasta 5 con incrementos de 1, lo cual hace un total de 4 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra (de manera estática, por supuesto) la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición. Para la construcción de estas imágenes se utiliza el subprograma `grafc()`, el cual es llamado por el programa `creagraf( )`.

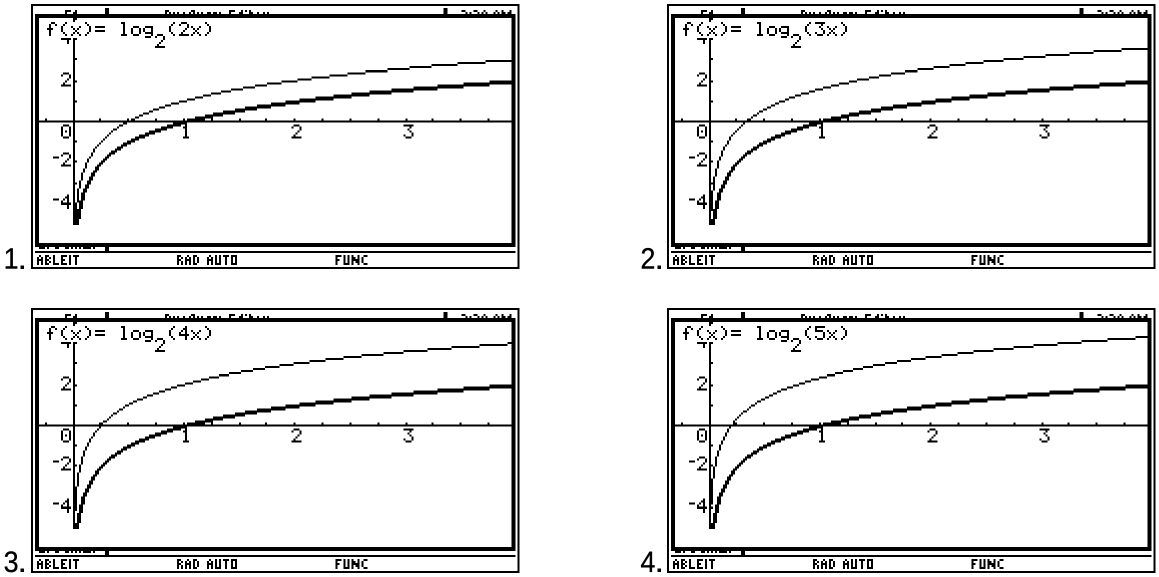


Figura 55. Familia $f(x) = \log_2 (cx)$ donde $c > 1$ y la función de referencia es $f(x) = \log_2 x$.

- `Opción 2: 0<c<1`. Para seleccionar esta opción se señala ésta con el cursor, seguido de `ENTER` como se muestra en la siguiente figura.

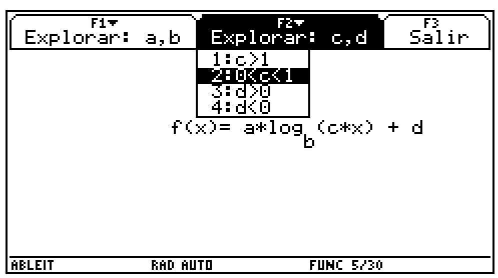


Figura 56.

En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia abajo con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se muestra la expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = \log_2 x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = \log_2 (cx)$, haciendo variar el parámetro c desde 0.1 hasta 0.5 con incrementos de 0.1, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra (de manera estática, por supuesto) la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición. Para la construcción de estas imágenes se utiliza el subprograma `grafc2()`, el cual es llamado por el programa `creagraf()`.

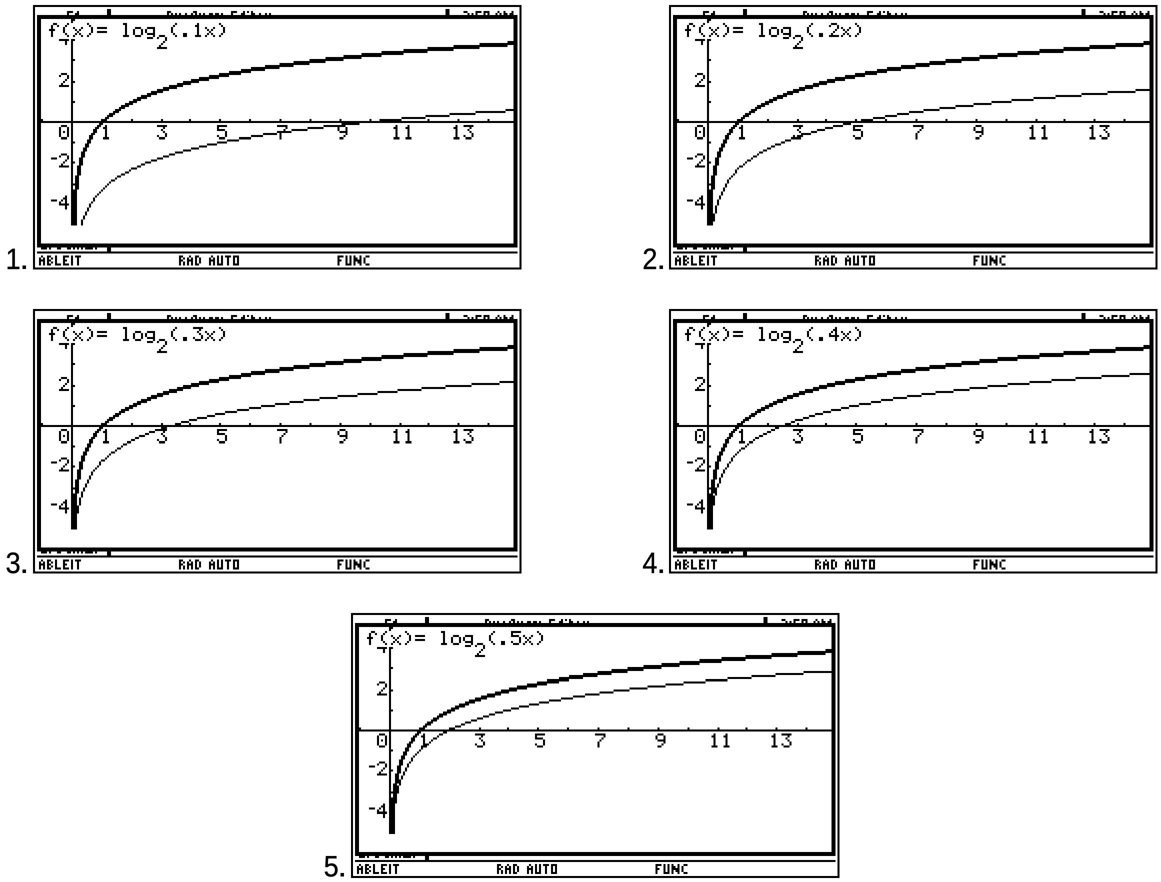


Figura 57. Familia $f(x) = \log_2(cx)$ donde $0 < c < 1$ y la función de referencia es $f(x) = \log_2 x$.

- `Opción 3: d>0`. Para seleccionar esta opción se señala ésta con el cursor, seguido de ENTER como se muestra en la siguiente figura.

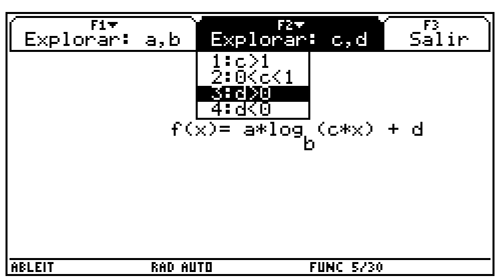
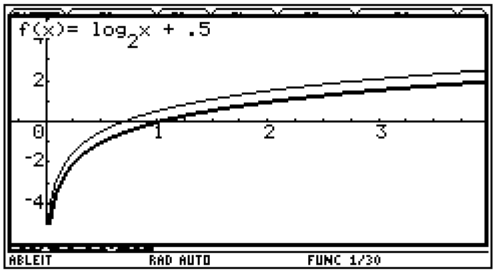
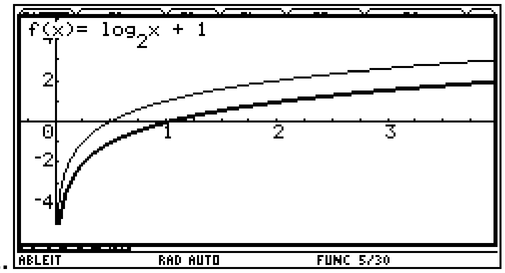
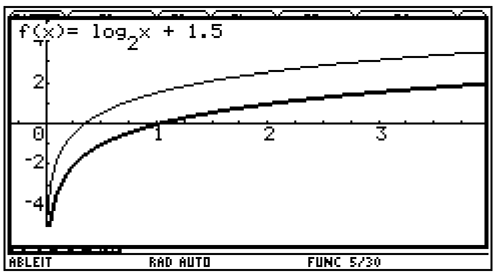


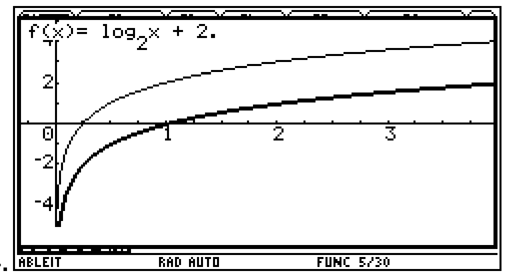
Figura 58.

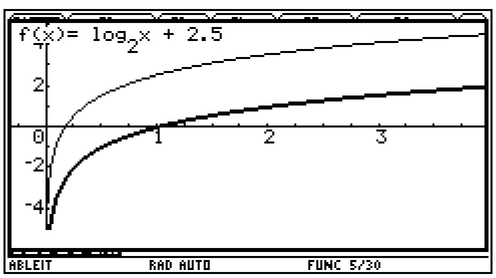
En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia arriba con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se muestra la expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = \log_2 x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = \log_2 x + d$, haciendo variar el parámetro d desde 0.5 hasta 3 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran de manera estática las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición. Para su construcción se utiliza el subprograma `grafd()`, el cual es llamado por el programa `creagraf()`.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

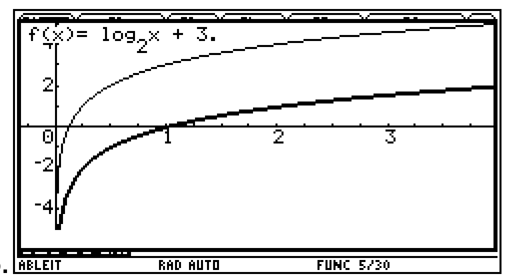
6. 

Figura 59. Familia $f(x) = \log_2 x + d$ donde $d > 0$ y la función de referencia es $f(x) = \log_2 x$.

- `Opción 4: d<0`. Para seleccionar esta opción se señala ésta con el cursor, seguido de ENTER como se muestra en la siguiente figura.

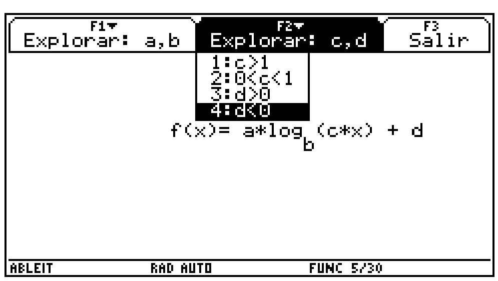


Figura 60.

En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia abajo con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se muestra la expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a $f(x) = \log_2 x$ y se tomaron elementos de la familia $f(x) = \log_2 x + d$, haciendo variar el parámetro d desde -3 hasta -0.5 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran de manera estática las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición. Para su construcción se utiliza el subprograma `grafd2()`, el cual es llamado por el programa `creagraf()`.

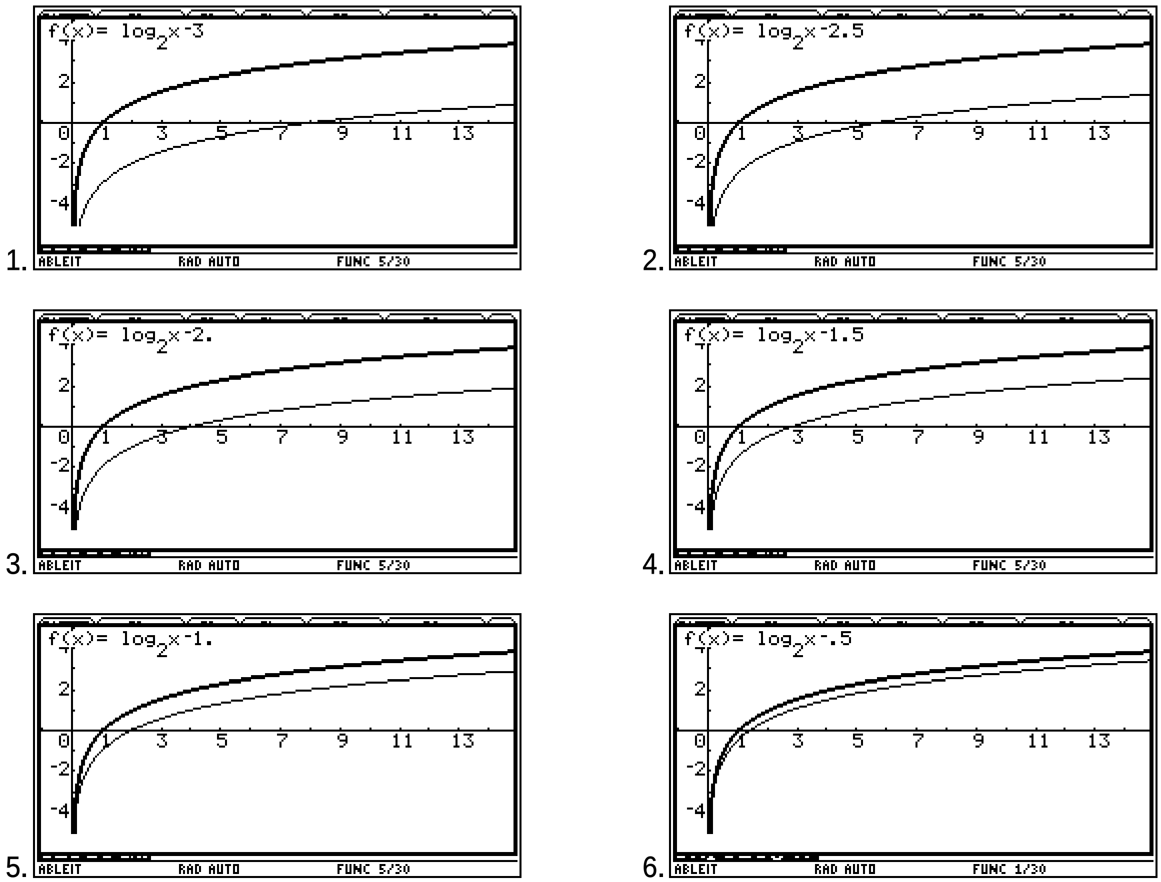


Figura 61. Familia $f(x) = \log_2 x + d$ donde $d < 0$ y la función de referencia es $f(x) = \log_2 x$.

Para terminar la ejecución del programa deberá elegirse la opción del menú principal `Salir` con la tecla `F3`, como se muestra a continuación, y se volverá automáticamente a la línea de comando de la pantalla `HOME`.

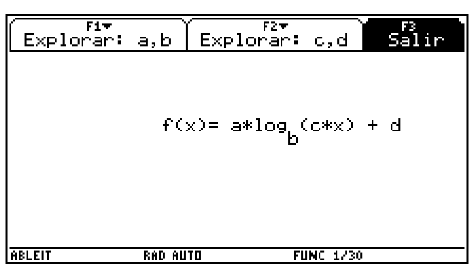


Figura 62.

El programa `expolog()`.

El propósito de este programa consiste en auxiliar al estudiante en la exploración de algunas características gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas, cuando los valores de las bases de ambas funciones son iguales y éstas son graficadas en los mismos ejes coordenados. En este programa se cuidó que las escalas de los ejes fueran de igual tamaño, ya que es una condición indispensable para que se aprecie la simetría entre ambas gráficas, así como la reflexión de puntos de una función en la otra con respecto a la recta $y = x$.

Operación del programa

Para iniciar la corrida de este programa se deberá escribir `expolog()` en la línea de comando de la pantalla principal `HOME`, cuidando que el fólder actual sea el mismo en el que se encuentra guardado el programa, como se muestra a continuación.

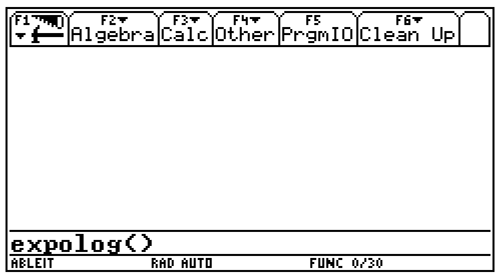


Figura 63.

Al presionar `ENTER` aparecerá en pantalla un menú de usuario y unas breves instrucciones de lo que se debe hacer para que el programa continúe.

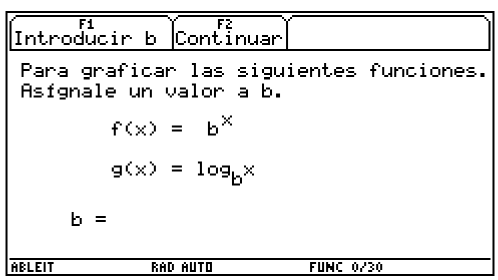


Figura 64.

Al seleccionar el estudiante la opción del menú `Introducir b` presionando `F1`, aparecerá la ventana de diálogo que se muestra abajo, para que éste introduzca un valor para la base `b`, a efecto de que se grafiquen ambas funciones. Ésta es la parte delicada del programa, pues se debe controlar cualquier situación anómala en la introducción del dato para evitar la interrupción del programa.

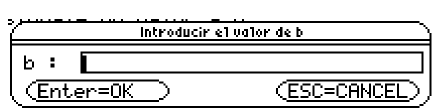


Figura 65.

Lo que se espera es que se introduzca un valor numérico positivo y diferente de uno. En el caso de que el estudiante introduzca un dato que no cumple con las características anteriores, como se muestra por ejemplo en las siguientes pantallas:

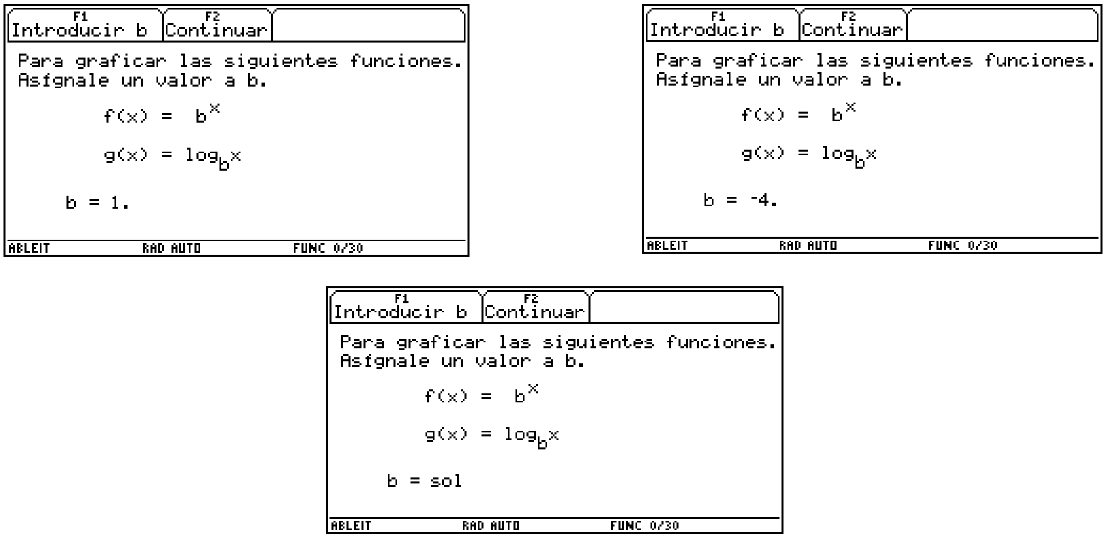


Figura 66.

ocurrirá que al presionar la opción `Continuar` con la tecla `F2` aparecerá el siguiente mensaje de error:

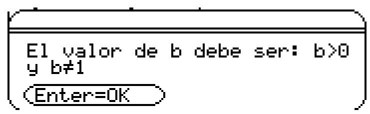


Figura 67.

Otra situación anómala considerada es cuando se introduce un número negativo o positivo y se presiona la tecla de la operación de resta o suma respectivamente, seguida del número. En las siguientes pantallas se muestra dicha situación, así como también el mensaje de error desplegado.

Figura 68.

Para que el programa pueda trazar las gráficas correspondientes, es necesario que se introduzca un número positivo y diferente de uno, como se muestra en la siguiente pantalla.

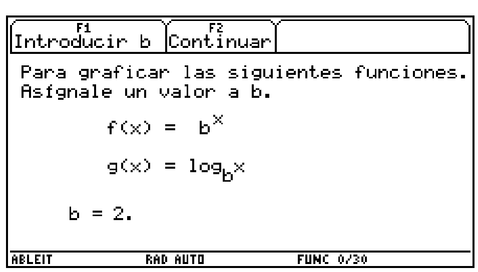


Figura 69.

Al presionar la opción del menú `Continuar F2`, aparecerá la pantalla gráfica en la que se aprecian los ejes con su respectiva cuadrícula y el trazado de ambas funciones; al terminar éste aparecerá con estilo remarcado la gráfica de la línea $y = x$ y una traza, la cual puede moverse a través de cualquiera de las gráficas con las teclas del cursor ◄,►así como por medio del teclado numérico, asignándole un valor a x, y también pasar de una función a otra con las teclas del cursor ▲y▼.

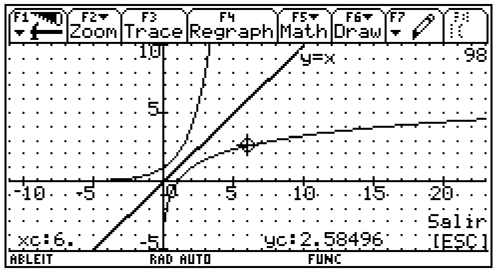


Figura 70.

Para salir del programa se deberá presionar `ESC` y se regresará automáticamente a la línea de comando de la pantalla `HOME`.

Anexo 4

Códigos de los programas para la calculadora Voyage 200

A continuación se presenta el código del programa `subtan( )`, así como también se presentan los códigos de los subprogramas `introfun( )` y `subtg( )`.

El programa `subtan( )`.

```
subtan()
Prgm

¨ Limpieza
FnOff
PlotsOff
ClrGraph
ClrDraw
ClrIO
setMode("Display Digits","FLOAT
3")
setMode("Exact/Approx","AUTO")
setMode("Graph","FUNCTION")
setMode("Exponential
Format","Normal")
setMode("Angle","Radian")
setMode("Complex Format","Real")
setMode("Pretty Print","On")
setMode("Split Screen","Full")

setGraph("coordinates","rect")
setGraph("Grid","Off")
setGraph("Axes","On")

Disp ""
Disp "  Este programa traza
automáticamente"
Disp "  las subtangentes de la
gráfica de una"
Disp "  funciÓn y muestra el
valor numérico"
Disp "  de éstas"
Disp ""
Disp "    Para continuar presiona
[ENTER]"
Pause
ClrIO

Lbl s
ClrIO
If getType(f)="FUNC" Then
 Disp "Función Actual:"
 Output 15,30,glch
 Disp ""
 Disp "Intervalo-x:
["&string(xmin)&" ..
"&string(xmax)&"]"
 Disp "Intervalo-y:
["&string(ymin)&" ..
"&string(ymax)&"]"
 Else
 Disp ""
 Disp ""
 Disp "       [F1] Introducir la
función."
 Disp "       [F2] Subtangentes"
 Disp "       [F3] Salir"
 EndIf

 Toolbar
  Title " Introd. Función ",h1
  Title " Subtangentes ",h2
  Title " Salir ",h3
  EndTBar
Goto s

Lbl h1
introfun():Goto s

Lbl h2
If getType(f)="FUNC" Then
subtg()
Else
Text "  Introducir función."
EndIf
Goto s

Lbl h3
FnOff
ClrIO
ClrHome
ClrDraw
ClrGraph
setMode("Split 1 App","Home")
DelVar f,fu,glch
DispHome

EndPrgm
```

El programa `introfun( ).`

```
introfun()
Prgm

ClrGraph:ClrHome
Local xmi,xma,ymi,yma
string(xmin)»xmi:string(xmax)»xma
string(ymin)»ymi:string(ymax)»yma
Lbl deri
DelVar f
Dialog
 Title "INTRODUCIR FUNCION  f(x)"
 Request "Dar Funcion, f(x)=",fu
 Text ""
 Request "Límite inferior
xmin",xmi
 Request "Límite superior
xmax",xma
 Request "Límite inferior
ymin",ymi
 Request "Límite superior
ymax",yma
 EndDlog

If ok=0:Goto fin
If fu="":Goto fin

Try
expr(fu)»f(x)
expr(xmi):expr(xma):expr(ymi):exp
r(yma)
Else
 If errornum≠0 Then
  ClrErr
  Text " Error de sintaxis."
  DelVar fu
  Goto deri
  EndIf
EndTry

Try
expr(fu)»f(x):y=f(x)»glch
expr(xmi)»xmin:expr(xma)»xmax
expr(ymi)»ymin:expr(yma)»ymax
Else
If getType(xmi)≠"NUM" Then
ClrErr
Text "Error de dominio"
Goto deri
EndIf

If getType(xma)≠"NUM" Then
ClrErr
Text "Error de dominio"
Goto deri
EndIf

If getType(ymi)≠"NUM" Then
ClrErr
Text "Error de dominio"
Goto deri
EndIf

If getType(yma)≠"NUM" Then
ClrErr
Text "Error de dominio"
Goto deri
EndIf

EndTry


If xmaxœxmin or ymaxœymin Then
 Text " Error de dominio."
Goto deri
EndIf


Try
Graph f(x)
Else
ClrErr
Text " La variable debe ser x."
DelVar fu
Goto deri
EndTry

PxlText "Continuar[ENTER]",95,142
Pause
PxlText "                ",95,142

Lbl fin
EndPrgm
```

El programa `subtg( ).`

```
subtg()
Prgm

Local x1,m_,xe,st,i,k,tx,pa,px
10»px:150»pa

PxlText "[S]Parar",95,185
For x1,xmin,xmax,(xmax-
xmin)/238*px

 Try
  limit(¶(f(x),x),x,x1,ª1)
 Else
  If errornum≠0:Cycle
 EndTry

 limit(¶(f(x),x),x,x1,ª1)»m_

x1-f(x1)/m_»xe
abs(x1-xe)»st

 "              "»tx
 PxlText tx,2,50
 "subtan=
"&string(round(st,3))»tx
 PxlText tx,2,50

If f(x1)≥0 Then

If m_<0 and xeœxmax Then
Line xmin,f(x1)+(xmin-
x1)*m_,xe,0,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

If m_>0 and xe≥xmin Then
Line xe,0,xmax,f(x1)+(xmax-
x1)*m_,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

 For i,1,pa:EndFor
 getKey()»k
 If k=115 Then
  PxlText "[ Tecla]",95,185
  0»k
  While k=0:getKey()»k:EndWhile
  PxlText "[S]Parar",95,185
 EndIf

If m_<0 and xeœxmax Then
Line xmin,f(x1)+(xmin-
x1)*m_,xe,0,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf
If m_>0 and xe≥xmin Then
Line xe,0,xmax,f(x1)+(xmax-
x1)*m_,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

EndIf


If f(x1)<0 Then

If m_<0 and xe≥xmin Then
Line xe,0,xmax,f(x1)+(xmax-
x1)*m_,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

If m_>0 and xeœxmax Then
Line xmin,f(x1)+(xmin-
x1)*m_,xe,0,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

 For i,1,pa:EndFor
 getKey()»k
 If k=115 Then
  PxlText "[ Tecla]",95,185
  0»k
  While k=0:getKey()»k:EndWhile
  PxlText "[S]Parar",95,185
 EndIf

If m_<0 and xe≥xmin Then
Line xe,0,xmax,f(x1)+(xmax-
x1)*m_,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

If m_>0 and xeœxmax Then
Line xmin,f(x1)+(xmin-
x1)*m_,xe,0,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

EndIf

EndFor


"             "»tx
PxlText tx,2,50

PxlText "[ENTER]Cont.",95,170
DelVar stpx,stpa:Pause
PxlText tx,95,170
EndPrgm
```

Se presenta a continuación el código del programa `deriexpo( )` y del subprograma `subta( )`.

El programa `deriexpo( ).`

```
deriexpo()
Prgm

¨ Limpieza
ClrHome

Lbl reg
FnOff
PlotsOff
ClrGraph
ClrDraw
ClrIO
setMode("Display Digits","FLOAT
5")
setMode("Exact/Approx","AUTO")
setMode("Graph","FUNCTION")
setMode("Complex Format","Real")
setMode("Pretty Print","On")
setMode("Split Screen","Full")

setGraph("coordinates","rect")
setGraph("Grid","Off")
setGraph("Axes","On")


Lbl s
ClrIO
If getType(f)="FUNC" Then
Disp "FunciÓn Actual:"
Output 20,30,fpp
Else
Disp ""
Disp ""
Disp "     [F1] Introducir
FunciÓn."
Disp "     [F2] Subtangentes."
Disp "     [F3] FunciÓn
Derivada."
Disp "     [F4] Para salir del
programa."
EndIf

 Toolbar
  Title "IntrFunc",h1
  Title "Subtangente",h2
  Title "FuncDerivada",h3
  Title " Salir",h4
 EndTBar
Goto s

Lbl h1
ClrGraph
ClrIO
Output 1,5,"Para graficar la
siguiente funciÓn."
Output 11,5,"AsÍgnale un valor a
A."
Output 38,118,"x"
Output 45,70,"   y = A"
Output 70,30,"A = "

Lbl tbar1
Toolbar
Title "Introducir A ",introda
Title "Continuar",nxt
EndTBar

Lbl introda
Dialog
Title " Introducir el valor de A"
Request "A ",strna
EndDlog

Try
expr(strna)»coefa
Else
If errornum≠0 Then
ClrErr
Text "  Error de sintaxis"
DelVar strna
Goto h1
EndIf
EndTry

Output 70,53,approx(coefa)
Goto tbar1

Lbl nxt
approx(coefa)»aa

If getType(aa)≠"NUM" Then
ClrErr
Text "A debe ser: A>0 y A?1"
DelVar aa
Goto h1
EndIf

If aaœ0 or aa=1 Then
 Text "A debe ser: A>0 y A?1"
 DelVar aa
```

```
 Goto h1
 EndIf

¨ Definir funcion
aa^x»f(x)
1/(ln(aa))»la
y=f(x)»fpp

¨ Dimensionar la pantalla
If aa≥1.45 Then
ª.5»xmin
6.3»xmax
1»xscl
f(6)»ymax
ªint(ymax/9)»ymin
dim(string(int(exact(f(6)))))-
1»dimy
10^dimy»yscl
EndIf

If 1<aa<1.45 Then
ª1»xmin
20.5»xmax
2»xscl
f(20)»ymax
ªint(ymax/9)»ymin
dim(string(int(exact(f(20)))))-
1»dimy
10^dimy»yscl
EndIf

If .5œaa<1 Then
ª.5»xmin
7.3»xmax
1»xscl
ª.5»ymin
1.1»ymax
1»yscl
EndIf

If 0<aa<.5 Then
ª.2»xmin
3»xmax
1»xscl
ª.5»ymin
1.1»ymax
1»yscl
EndIf

Graph f(x)

int(xmax/xscl)»numx
For i,1,numx
PtText string(i*xscl),i*xscl-
5*„x,ª2*„y
EndFor
int(ymax/yscl)»numy

For i,1,numy
PtText
string(i),ª8*„x,i*yscl+5*„y
EndFor
PtText
"³"&string(yscl),3*„x,ymax-„y

PxlText "[ENTER]Cont.",95,170

string(aa)»para
Pause
"               "»tex
PxlText tex,95,170
Goto s


Lbl h2
If getType(f)="FUNC" Then
subta()
Else
Text "   Introducir función."
EndIf
Goto s


Lbl h3
If getType(f)="FUNC" Then
Graph ¶(f(x),x)
"y'="&string(f(x))&"/"&string(rou
nd(la,5))»deri
PxlText deri,2,65
PxlText "[ENTER]Cont.",95,170
Pause
PxlText tex,95,170
PxlText tex,2,65

Else
Text "   Introducir función."
EndIf

DelVar f,fpp
Goto s

Lbl h4
FnOff
ClrIO
ClrHome
ClrDraw
ClrGraph
setMode("Split 1 App","Home")
DelVar para,fpp,aa,f,deri
DispHome

EndPrgm
```

El programa `subta( )`.

```
subta()
Prgm

Local x1,m_,xe,st,i,k,tx,pa,px
13»px:150»pa

PxlText "[S]Parar",95,185
For x1,xmin,xmax,(xmax-
xmin)/238*px
 Try
 limit(¶(f(x),x),x,x1,ª1)
 Else
 If errornum?0:Cycle
 EndTry

limit(¶(f(x),x),x,x1,ª1)»m_
x1-f(x1)/m_»xe
abs(x1-xe)»st

 "                ">tx
 PxlText tx,2,65
 "subtan=
"&string(round(st,4))»tx
 PxlText tx,2,65

If m_<0 and xeœxmax Then
Line xmin,f(x1)+(xmin-
x1)*m_,xe,0,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

If m_>0 and xe≥xmin Then
Line xe,0,xmax,f(x1)+(xmax-
x1)*m_,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

 For i,1,pa:EndFor
 getKey()»k
 If k=115 Then
 PxlText "[ Tecla]",95,185
 0»k
 While k=0:getKey()»k:EndWhile
 PxlText "[S]Parar",95,185
 EndIf

If m_<0 and xeœxmax Then
Line xmin,f(x1)+(xmin-
x1)*m_,xe,0,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

If m_>0 and xe≥xmin Then
Line xe,0,xmax,f(x1)+(xmax-
x1)*m_,ª1
Line x1,f(x1),x1,0,ª1
EndIf

EndFor

"               "»tx
PxlText tx,2,65
PxlText "[ENTER]Cont.",95,170
Pause
PxlText tx,95,170
EndPrgm
```

A continuación se presenta el código del programa `derivlog( )` y del subprograma `subtg2( )`.

Programa `derivlog( )`.

```
derivlog()
Prgm

¨ Limpieza
ClrHome

Lbl reg
FnOff
PlotsOff
ClrGraph
ClrDraw
ClrIO
setMode("Display Digits","FLOAT
5")
setMode("Exact/Approx","AUTO")
setMode("Graph","FUNCTION")
setMode("Complex Format","Real")
setMode("Pretty Print","On")
setMode("Split Screen","Full")
```

```
setGraph("coordinates","rect")
setGraph("Grid","Off")
setGraph("Axes","On")


Lbl s
ClrIO
If getType(f)="FUNC" Then
Disp "FunciÓn Actual:"
Output 15,30,"f(x)=log x"
Output 22,77,parab
Else
Disp ""
Disp ""
Disp "     [F1] Introducir
FunciÓn."
Disp "     [F2] Subtangentes."
Disp "     [F3] FunciÓn
Derivada."
Disp "     [F4] Para salir del
programa."
EndIf


 Toolbar
  Title "IntrFunc",h1
  Title "Subtangente",h2
  Title "FuncDerivada",h3
  Title " Salir",h4
 EndTBar
Goto s


Lbl h1
ClrGraph
ClrIO
Output 1,5,"Para graficar la
siguiente funciÓn."
Output 11,5,"AsÍgnale un valor a
b."
Output 50,50,"f(x) = log x"
Output 55,110,"b"
Output 75,30,"b = "


Lbl tbar1
Toolbar
Title "Introducir b ",introdb
Title "Continuar",nxt
EndTBar


Lbl introdb
Dialog
Title " Introducir el valor de b"
Request "b ",strnb
```

```
EndDlog

Try
expr(strnb)»coefb
Else
If errornum≠0 Then
ClrErr
Text " Error de sintaxis"
DelVar strnb
Goto h1
EndIf
EndTry

Output 75,53,approx(coefb)
Goto tbar1


Lbl nxt
approx(coefb)»bb

If getType(bb)≠"NUM" Then
ClrErr
Text "El valor de b debe ser: b>0
y b?1"
DelVar bb
Goto h1
EndIf

If bbœ0 or bb=1 Then
Text "El valor de b debe ser: b>0
y b?1"
DelVar bb
Goto h1
EndIf

¨ Definir funcion
log(x,bb)»f(x)

¨Dimensionar pantalla
If 1.3œbbœ3 Then
ª.3»xmin
6.3»xmax
1»xscl
ª3»ymin
4.5»ymax
1»yscl
EndIf

If 0<bb<1.3 Then
ª.3»xmin
6.3»xmax
1»xscl
ª6»ymin
10»ymax
3»yscl
EndIf
```

```
If bb>3 Then
ª1»xmin
20.5»xmax
2»xscl
ª1.5»ymin
2.6»ymax
1»yscl
EndIf

Graph f(x)
int(xmax/xscl)»numx
For i,1,numx
PtText string(i*xscl),i*xscl-
5*„x,ª2*„y
EndFor

int(ymax/yscl)»numy

For i,1,numy
PtText
string(i*yscl),ª12*„x,i*yscl+5*„y
EndFor

PxlText "[ENTER]Cont.",95,170
string(bb)»parab
Pause
"              "»tex
PxlText tex,95,170
Goto s


Lbl h2
If getType(f)="FUNC" Then
subtg2()
Else
Text "  Introducir función."
EndIf
Goto s


Lbl h3
If getType(f)="FUNC" Then
Graph ¶(f(x),x)
approx(¶(f(x),x))»deri
PxlText
"f'(x)="&string(deri),2,50
PxlText "[ENTER]Cont.",95,170
Pause
PxlText tex,95,170
PxlText tex,2,50

Else
Text "  Introducir función."
EndIf
DelVar f
Goto s


Lbl h4
FnOff
ClrIO
ClrHome
ClrDraw
ClrGraph

setMode("Split 1 App","Home")
DelVar parab,bb,f,deri
DispHome

EndPrgm
```

El programa `subtg2( ).`

```
subtg2()
Prgm

Local
x1,xmi,m_,ye,st,i,k,tx,pa,px
15»px:150»pa
0.5»xmi

PxlText "[S]Parar",95,185
For x1,xmi,xmax,(xmax-
xmin)/238*px

Try
 limit(¶(f(x),x),x,x1,ª1)
 Else
 If errornum?0:Cycle
 EndTry

limit(¶(f(x),x),x,x1,ª1)»m_
f(x1)-x1*m_»ye
abs(f(x1)-ye)»st

 "                "»tx
 PxlText tx,2,50
 "subtan=
"&string(round(st,4))»tx
 PxlText tx,2,50
```

```
If m_<0 and yeœymax and
f(x1)≥ymin Then
Line 0,ye,x1+(ymin-
f(x1))/m_,ymin,ª1
Line 0,f(x1),x1,f(x1),ª1
EndIf

If m_>0 and ye≥ymin and
f(x1)œymax Then
Line 0,ye,x1+(ymax-
f(x1))/m_,ymax,ª1
Line 0,f(x1),x1,f(x1),ª1
EndIf

 For i,1,pa:EndFor
 getKey()»k
 If k=115 Then
 PxlText "[ Tecla]",95,185
 0»k
 While k=0:getKey()»k:EndWhile
 PxlText "[S]Parar",95,185
 EndIf
```

```
If m_<0 and yeœymax and
f(x1)≥ymin Then
Line 0,ye,x1+(ymin-
f(x1))/m_,ymin,ª1

Line 0,f(x1),x1,f(x1),ª1
EndIf

If m_>0 and ye≥ymin and
f(x1)œymax Then
Line 0,ye,x1+(ymax-
f(x1))/m_,ymax,ª1
Line 0,f(x1),x1,f(x1),ª1
EndIf

EndFor

"                "»tx
PxlText tx,2,50
PxlText "[ENTER]Cont.",95,170
Pause
PxlText tx,95,170

EndPrgm
```

Se muestra a continuación el código del programa `graflog( ).`

```
graflog()
Prgm

ClrDraw
ClrGraph
ClrIO
PlotsOff
FnOff
setMode("Graph","FUNCTION")
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Complex Format","Real")
setMode("Pretty Print","On")
setGraph("coordinates","rect")
setGraph("Axes","Off")

Disp ""
Disp "      Representaciones
Gráficas y"
Disp "  AnalÍticas Dinámicamente
vinculadas"
Disp "      de una Función
Logarítmica"
Disp ""
Disp "           f(x)= a*log
(c*x) + d"
```

```
Output 67,133,"b"
Disp ""
Disp "                Para
continuar:[ENTER]"
Pause
ClrIO


Lbl s
ClrDraw
Output 30,80,"f(x)= a*log (c*x) +
d"
Output 37,146,"b"
 Toolbar
  Title " Explorar: a,b "
   Item "b>1",h1
   Item "0<b<1",h2
   Item "|a|>1",h3
   Item "ª1<a<1",h4
  Title " Explorar: c,d "
   Item "c>1",h5
   Item "0<c<1",h6
   Item "d>0",h7
   Item "d<0",h8
  Title "  Salir ",h9
```

```
 EndTBar

Lbl h1
 ClrDraw
 ClrIO
 CyclePic "base",6,1.7,3,ª1
 Goto s

Lbl h2
 ClrDraw
 ClrIO
 CyclePic "base2",7,1.7,3,ª1
 Goto s

Lbl h3
 ClrDraw
 ClrIO
 CyclePic "dilat",7,1.7,3,ª1
 Goto s

Lbl h4
 ClrDraw
 ClrIO
 CyclePic "contrac",8,1.7,3,ª1
 Goto s

Lbl h5
 ClrDraw
 ClrIO
 CyclePic "trasl",4,1.7,3,ª1
 Goto s

Lbl h6
 ClrDraw
 ClrIO
 CyclePic "trasl2",5,1.7,3,ª1
 Goto s

Lbl h7
 ClrDraw
 ClrIO
 CyclePic "trasl3",6,1.7,3,ª1
 Goto s

Lbl h8
 ClrDraw
 ClrIO
 CyclePic "trasl4",6,1.7,3,ª1
 Goto s

Lbl h9
 ClrDraw
 ClrIO
 DelVar
para,parb,parc,pard,pard2,i,a,b,c
,d2,d3,a2,b2,d,para2,parb2,parc2
 setGraph("Axes","On")
 DispHome
EndPrgm
```

Programa `creagraf( )`. Este programa se utiliza para la construcción de las gráficas que se utilizan en las animaciones del programa `graflog( )`, utiliza varios subprogramas los cuales se incluyen a continuación.

El programa `creagraf()`.

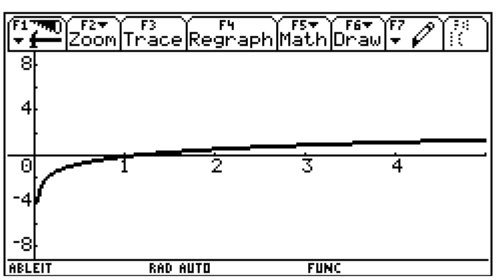
```
creagraf()
Prgm

ClrHome
ClrDraw
ClrGraph
ClrIO
PlotsOff
FnOff
setMode("Graph","FUNCTION")
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Complex Format","Real")
setMode("Pretty Print","On")
setGraph("coordinates","rect")
setGraph("Axes","Off")
grafa()
grafa2()
grafb()
grafb2()
grafc()
grafc2()
grafd()
grafd2()

setGraph("Axes","On")
DispHome

EndPrgm
```

El programa `grafa( ).`

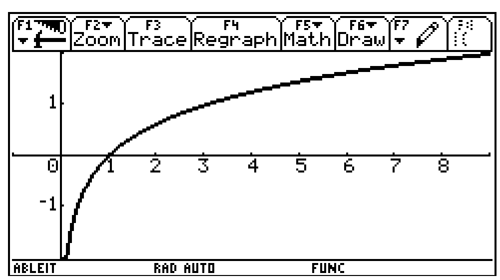
```
grafa()
Prgm

Local i
ª.3»xmin
5»xmax
ª9»ymin
9»ymax
ClrDraw
ClrGraph
PlotsOff
FnOff
ClrIO
se*tmode("Split Screen","FULL")
setMode("Graph","FUNCTION")
0»i
 For a,ª6,6,2
 ClrDraw
 ClrGraph
 Graph a*log(x,3),x
 DispG
RclPic dibh3
 a»para
 PxlText
"f(x)="&string(para)&"log x",2,3
 PxlText "3",8,60
 i+1»i
 StoPic #("dilat"&string(i))
 Archive #("dilat"&string(i))
 EndFor
EndPrgm
```

El programa `grafa2( ).`

```
grafa2()
Prgm

Local i
ª1»xmin
9»xmax
ª2»ymin
2»ymax
ClrDraw
ClrGraph
PlotsOff
FnOff
ClrIO
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Graph","FUNCTION")
0»i
 For a2,ª.7,.7,.2
 ClrDraw
 ClrGraph
 Graph a2*log(x,3),x
 DispG
 RclPic dibh4
 a2»para2
 PxlText
"f(x)="&string(para2)&"log x",2,3
 PxlText "3",8,66
 i+1»i
 StoPic #("contrac"&string(i))
 Archive #("contrac"&string(i))
 EndFor
EndPrgm
```



dibh3



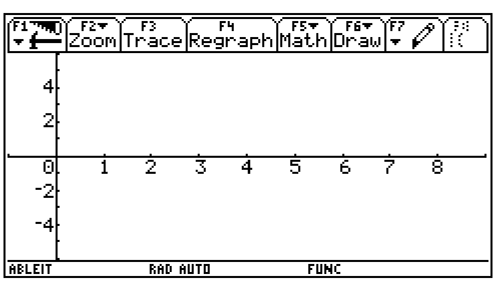
dibh4

El programa grafb( ).

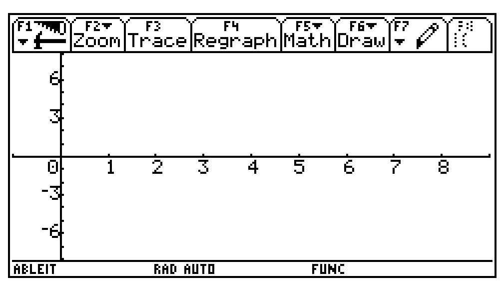
```
grafb()
Prgm

Local i
ª1»xmin
9»xmax
ª6»ymin
6»ymax
ClrDraw
ClrGraph
PlotsOff
FnOff
ClrIO
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Graph","FUNCTION")

 0»i
 For b,1.5,4,.5
 ClrDraw
 ClrGraph
 Graph log(x,b),x
 DispG
 RclPic dibh2
 b»parb
 PxlText "f(x)=log  x",2,3
 string(parb)»parab
 PxlText parab,9,50
 i+1»i
 StoPic #("base"&string(i))
 Archive #("base"&string(i))
 EndFor
EndPrgm
```

El programa grafb2( ).

```
grafb2()
Prgm

Local i
ª1»xmin
9»xmax
ª8»ymin
8»ymax
ClrDraw
ClrGraph
PlotsOff
FnOff
ClrIO
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Graph","FUNCTION")

 0»i
 For b2,.1,.7,.1
 ClrDraw
 ClrGraph
 Graph log(x,b2),x
 DispG
 RclPic dibh1
 b2»parb2
 PxlText "f(x)=log  x",2,3
 string(parb2)»parab2
 PxlText parab2,9,49
 i+1»i
 StoPic #("base2"&string(i))
 Archive #("base2"&string(i))
 EndFor
EndPrgm
```



dibh2



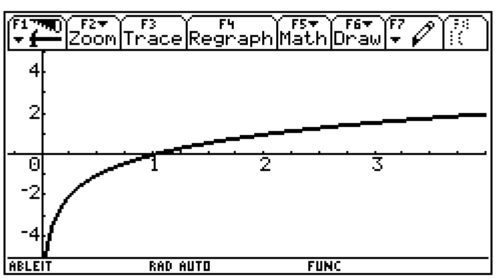
dibh1

El programa `grafc( ).`

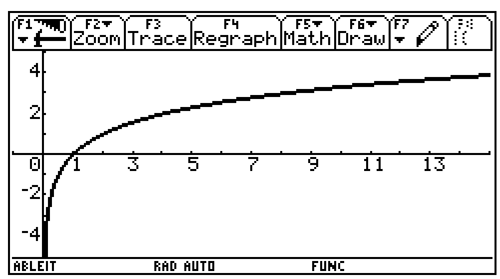
```
grafc()
Prgm

Local i
ª.3»xmin
4»xmax
ª5»ymin
5»ymax
ClrDraw
ClrGraph
PlotsOff
FnOff
ClrIO
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Graph","FUNCTION")
0»i
 For c,2,5,1
 ClrDraw
 ClrGraph
 Graph log(c*x,2),x
 DispG
 RclPic dibh5
 c»parc
 PxlText "f(x)= log
("&string(parc)&"x)",2,3
 PxlText "2",8,57
 i+1»i
 StoPic #("trasl"&string(i))
 Archive #("trasl"&string(i))
 EndFor
EndPrgm
```

El programa `grafc2( ).`

```
grafc2()
Prgm

Local i
ª1»xmin
15»xmax
ª5»ymin
5»ymax
ClrDraw
ClrGraph
PlotsOff
FnOff
ClrIO
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Graph","FUNCTION")
0»i
 For d,.1,.5,.1
 ClrDraw
 ClrGraph
 Graph log(d*x,2),x
 DispG
 RclPic dibh6
 d»parc2
 PxlText "f(x)= log
("&string(parc2)&"x)",2,3
 PxlText "2",8,57
 i+1»i
 StoPic #("trasl2"&string(i))
 Archive #("trasl2"&string(i))
 EndFor
EndPrgm
```



dibh5



dibh6

El programa grafd( ).

```
grafd()
Prgm

Local i
ª.3»xmin
4»xmax
ª5»ymin
5»ymax
ClrDraw
ClrGraph
PlotsOff
FnOff
ClrIO
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Graph","FUNCTION")
0»i
 For d3,0.5,3,0.5
 ClrDraw
 ClrGraph
 Graph log(x,2)+d3,x
 DispG
 RclPic dibh5
 d3»pard
 PxlText "f(x)= log x +
"&string(pard),2,3
 PxlText "2",8,57
 i+1»i
 StoPic #("trasl3"&string(i))
 Archive #("trasl3"&string(i))
 EndFor
EndPrgm
```

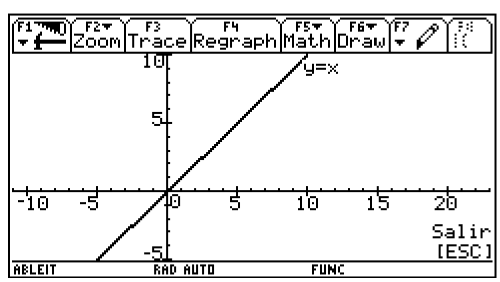
El programa grafd2( ).

```
grafd2()
Prgm

Local i
ª1»xmin
15»xmax
ª5»ymin
5»ymax
ClrDraw
ClrGraph
PlotsOff
FnOff
ClrIO
setMode("Split Screen","FULL")
setMode("Graph","FUNCTION")
0»i
 For d2,ª3,ª0.5,0.5
 ClrDraw
 ClrGraph
 Graph log(x,2)+d2,x
 DispG
 RclPic dibh6
 d2»pard2
 PxlText "f(x)= log
x"&string(pard2),2,3
 PxlText "2",8,57
 i+1»i
 StoPic #("trasl4"&string(i))
 Archive #("trasl4"&string(i))
 EndFor
EndPrgm
```

Código del programa expolog( ).

```
expolog()
Prgm

¨ Limpieza
ClrHome

Lbl reg
FnOff
PlotsOff
ClrGraph
ClrDraw
ClrIO
setMode("Display Digits","FLOAT
6")
setMode("Exact/Approx","AUTO")
setMode("Graph","FUNCTION")
setMode("Complex Format","Real")
setMode("Pretty Print","On")
setMode("Split Screen","Full")

setGraph("coordinates","rect")
setGraph("Grid","On")
```

```
setGraph("Axes","On")

ª11»xmin
23»xmax
ª5»ymin
10»ymax

¨ Introducir función

Lbl intfn
ClrIO

Output 1,5,"Para graficar las
siguientes funciones."
Output 11,5,"AsÍgnale un valor a
b."

Output 25,105,"x"
Output 30,50,"f(x) = b"

Output 50,50,"g(x) = log x"
Output 55,110,"b"
Output 75,30, "b = "

Lbl tbar1
Toolbar
Title "Introducir b ",introdb
Title "Continuar",nxt
EndTBar

Lbl introdb
Dialog
Title " Introducir el valor de b"
Request "b",strnb
EndDlog

Try
expr(strnb)»coefb
Else
If errornum≠0 Then
ClrErr
Text " Error de sintaxis"
DelVar strnb
Goto intfn
EndIf
EndTry

Output 75,53,approx(coefb)
Goto tbar1

Lbl nxt
approx(coefb)»bb

¨ Definir funciones
bb^x»y99(x)
log(x,bb)»y98(x)

If getType(bb)≠"NUM" Then
ClrErr
Text "El valor de b debe ser: b>0
y b≠1"
DelVar bb
Goto intfn
EndIf

If bbœ0 or bb=1 Then
 Text "El valor de b debe ser:
b>0 y b≠1"
 DelVar bb
 Goto intfn
 EndIf

RclPic grafeje4

¨ Dimensionar la pantalla
ª11»xmin
23»xmax
1»xscl
ª5»ymin
10»ymax
1»yscl

DispG
Trace
Goto fin

Lbl fin
FnOff
ClrIO
ClrHome
ClrDraw
ClrGraph
setGraph("Grid","Off")
setMode("Split 1 App","Home")

EndPrgm
```



grafeje4