Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Categorías de Demostración Enmarcadas en la Teoría de Van Hiele con Principios Constructivistas.
El Estudio de las Isometrías en el Plano

Tesis que presenta

Mario Alberto Quiñonez Ayala

Para obtener el Grado de:
Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis:

M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro

Hermosillo, Sonora, México.

Febrero 2011

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y hermano, Rosalba Ayala, Alejandro Quiñonez y Manuel Quiñonez, por su apoyo incondicional y los sacrificios hechos para hacer de mí lo que soy. Y les dedico este trabajo no sólo como un éxito profesional del que fueron iniciadores, sino como una forma de refrendar mi compromiso de nunca decepcionarlos y estar a la altura de una familia como ustedes.

A Dany, por su apoyo, ánimo y compañía en todo momento. Además de su valiosa ayuda para completar el trabajo, convirtiéndose en mí preciosa cuarta sinodal. Gracias por todo, Te amo y qtn**.**

A mi director de tesis, M.C. Jorge Ruperto Vargas, por la disposición para aportar su sabiduría y conocimientos en la realización de este trabajo.

A M.C. Martha Cristina Villalva Gutiérrez, M.C. Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez y M.C. Oscar Jesús San Martín Sicre, por los comentarios que me permitieron mejorar este escrito; así como el tiempo dedicado a la revisión del documento.

A todos mis Profesores, por su orientación y valiosas enseñanzas. Especialmente a Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos y Dr. Ramiro Ávila Godoy, quienes no sólo cooperaron en mi formación sino que me dieron palabras de aliento para completar el trabajo.

A mis compañeros: Evaristo, César, Maestra Gaby, Manuel, Tere, Jesús Manuel, Griselda, Carmen, Johan, Israel y Sara por facilitar mi trabajo mediante preguntas y sugerencias que me hacen crecer en conocimiento.

Y a todas aquellas personas que de una u otra forma, colaboraron o participaron en la realización de esta investigación, hago extensivo mi más sincero agradecimiento.

ÍNDICE

INTRODUCIÓN 4

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

ANTECEDENTES 7

CONSIDERACIONES CIENTÍFICAS (DISCIPLINA MATEMÁTICA) 7

CONSIDERACIONES ESCOLARES 9

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 11

JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS 14

CAPÍTULO 2. REFERENCIAS TEÓRICAS

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA 15

El proceso de exploración-conjetura-demostración *16*

El papel y las funciones de la demostración *17*

Estadíos de la demostración matemática 18

ELEMENTOS TEÓRICOS CONCRETOS 19

Teoría de Van Hiele 19

Características de los niveles de razonamiento de Van Hiele 22

Fases de Aprendizaje 23

Categorías de demostración 25

ELEMENTOS DE MODIFICACIÓN PROPUESTOS 29

CAPÍTULO 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

ESTRATEGÍAS PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO 33

Hojas de trabajo 34

Uso del software de geometría dinámica 38

UBICACIÓN DE LAS HOJAS DE TRABAJO POR NIVELES Y FASES

Nivel 1 39

Nivel 2 40

Nivel 3 42

Nivel 4 44

HERRAMIENTAS PARA LA RECOPILACIÓN DE INFORMACIÓN 45

CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y SELECCIÓN DE CASOS 47

CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS 50

ANÁLISIS DEL PRIMER NIVEL DE VAN HIELE 50

OBSERVACIONES DEL NIVEL 1 65

ANÁLISIS DEL SEGUNDO NIVEL DE VAN HIELE 66

OBSERVACIONES DEL NIVEL 2 86

ANÁLISIS DEL TERCER NIVEL DE VAN HIELE 87

OBSERVACIONES DEL NIVEL 3 131

ANÁLISIS DEL CUARTO NIVEL DE VAN HIELE 131

OBSERVACIONES DEL NIVEL 4 145

ANÁLISIS DEL EXAMEN FINAL 146

OBSERVACIONES DEL EXAMEN 165

ESTRATEGIAS DE ARGUMENTACIÓN 165

Caso A 167

Caso B 168

Caso C 169

Caso D 170

EVALUACIÓN FINAL SOBRE LAS DEMOSTRACIONES SOLICITADAS 172

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

CONCLUSIONES FINALES 175

FORMAS PLAUSIBLES DE CONTINUAR LA INVESTIGACIÓN 177

ANEXOS

TABLAS METODOLÓGICAS 180

HOJAS DE TRABAJO 185

REFERENCIAS 216

INTRODUCCIÓN

La disciplina matemática actual es poseedora de una estructura única, construida en torno a métodos específicos de razonamiento que privilegian la naturaleza "ideal" de los objetos con los que trabaja, sin que tal característica sea del conocimiento del resto de los usuarios de la disciplina. La intención de dicha disposición es el fruto de siglos de cambios y reorganizaciones del conocimiento matemático, con la finalidad de crear una ciencia ordenada, estable y sobre todo confiable (primeramente dentro de la comunidad de matemáticos y posteriormente fuera de ella). La demostración de las distintas afirmaciones en la ciencia matemática es parte vital en el desarrollo estructural antes mencionado, al ser la precursora del vínculo intrínseco de las Matemáticas y la Lógica.

Cuando hablamos de "Demostración", en la comunidad Matemática resulta natural el asociarlo con la formalidad y rigor propio de la disciplina actual, es por ello conveniente aclarar dos elementos relevantes: El primero es que la demostración en cada área científica varía según la ontología[1] de los objetos en los que se sustenta y los objetivos que persigue. El segundo punto a clarificar, y aún más relevante por las pretensiones del trabajo, es que los inicios de las matemáticas no se escaparon de la ingenuidad que sustentaba las bases del conocimiento de las sociedades antiguas. Los primeros 3000 años de la disciplina se caracterizaron por un motor basado en intereses pragmáticos, útiles en las problemáticas de medida y áreas, donde el uso de dichos conocimientos se respaldaba en los resultados coherentes y estables que arrojaba, marginando el *por qué* de los mismos.

En lo concerniente a las distintas formas de probar[2], es necesario hacer una distinción entre las ciencias fácticas y formales; las primeras tienen como objetivo el buscar la coherencia de los hechos con una explicación plausible de los mismos (entre sus principales exponentes están: la Física, Biología, Química, etc.),

[1] Una ontología define el vocabulario de un área mediante un conjunto de términos básicos y relaciones entre dichos términos, así como las reglas que los combinan y relaciones que amplían las definiciones dadas en el vocabulario.
[2] En este momento usaremos los términos probar y demostrar como sinónimos, pero aclararemos esta terminología más adelante.

encargándose de generar teorías para comprender el universo que habitamos a partir de los hechos (cosas que se perciben con los sentidos, directa o indirectamente). Las ciencias formales (Matemáticas, Lógica y otras), en cambio, se interesan por las formas de razonamiento y no solamente el contenido de los saberes, es por ello que el ideal metodológico se basa en un sistema axiomático formado por premisas (llamados *axiomas* dentro de la matemática), reglas de formación, reglas de transformación (*de inferencia*, en el caso particular de las Matemáticas y la Lógica) y teoremas. La estructura y el alcance de cada sistema axiomático están determinados por sus axiomas.

El segundo punto a clarificar es el inicio y transición de la demostración en matemáticas, con la firme convicción de obtener una congruencia entre los cambios en las pruebas aceptadas por la comunidad Matemática y las formas de argumentar utilizadas por los estudiantes, mientras avanzan en su formación escolar. La relación entre la evolución disciplinar y los argumentos en el salón de clases, se convierten en el motor del presente trabajo; incorporando el apoyo de distintas investigaciones de Matemática Educativa como facilitadores de la tarea asumida.

El trabajo ha sido organizado en cinco capítulos, los cuales se resumen a continuación:

CAPÍTULO 1. Se exponen los antecedentes que originaron la presente investigación (gestados en la disciplina matemática y con repercusiones en el ambiente escolar). Concluyendo con el planteamiento del problema, las preguntas de investigación, la justificación y los objetivos perseguidos en el trabajo.

CAPÍTULO 2. Donde se aclaran las referencias teóricas, tanto aquellas que aportan lineamientos específicos como las consideradas como antecedentes del trabajo. En las primeras partes del capítulo, se expone una visión en torno a lo que podemos entender por “Demostración Matemática” y sugerencias de su tratamiento en el aula. Finalmente, en un último apartado, se hace referencia a los elementos concretos que guían la investigación, enfatizando las aportaciones hechas por Van Hiele (1957) y Rodríguez (2006), las cuales respaldan nuestra postura durante la realización del trabajo.

CAPITULO 3. Se presentan los aspectos metodológicos, donde se describen las actividades realizadas para el desarrollo de la investigación y se da una breve explicación del por qué de cada una y los objetivos perseguidos. También se describen los instrumentos utilizados para obtener la información y las características de los individuos de prueba.

CAPÍTULO 4. Contiene el análisis de resultados, donde se presentan organizadas y detalladas todas las observaciones y reflexiones obtenidas. Los análisis elaborados se presentan en dos etapas: La primera representa un estudio del rendimiento de los estudiantes durante la realización de actividades diseñadas y, en una segunda instancia, se presenta un resumen de resultados y su interpretación para la investigación.

CAPÍTULO 5. Para terminar, se ofrecen resumidas conclusiones del trabajo y, en comparación con el capítulo anterior, en ésta sección se presentan los resultados globales y centrados en el objeto de interés. Además se incluye una revaloración de los objetivos alcanzados y recomendaciones para continuar la investigación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

ANTECEDENTES

La selección del tema y la problemática en general, obligan a tener en cuenta los diversos antecedentes, gestados en la disciplina matemática y con repercusiones en el ambiente escolar; de ahí la conveniencia de recrear el panorama global del escenario en el que se desenvuelve el tema de interés. El conocer el contexto que condicionó la evolución del concepto de prueba en matemáticas, nos permite revalorar la necesidad de argumentar, su papel en el plano científico y sus efectos en el salón de clases. Como cierre del capítulo, se relaciona el escenario con las razones para plantear el problema de investigación, su justificación y los objetivos perseguidos.

CONSIDERACIONES CIENTÍFICAS (DISCIPLINA MATEMÁTICA)

Como fruto de la concepción filosófica del “Círculo de Viena[3]”, la objetividad de los criterios de verificación y de confirmación en las ciencias toma un rol protagónico, al grado de que, tan pronto una teoría o explicación se convierte en conocimiento probado o confirmado, surge la nueva dificultad de justificar el método que da legitimidad a las inferencias realizadas.

En el ámbito de las ciencias, todo conocimiento que pretendemos sea respetado o que aspiremos a llamarlo “científico”, tiene la necesidad de estar apropiadamente fundamentado, en el sentido de que sus bases sean firmes y sus resultados

---

[3] Movimiento iniciado en Viena por Moritz Schilck, entre 1922-1936, interesado en distinguir lo que es una ciencia y lo que no, además de elaborar un lenguaje común a todas las ciencias. Las 4 tesis que definen el círculo son: La posibilidad de diferenciar al conocimiento científico o ciencia del resto de conocimientos, la capacidad de expresar una observación científica a través de símbolos y relacionarse con otras observaciones mediante el mismo lenguaje, la realidad es única para todos los conocimientos (crítica a la metafísica) y, por último, todo estudio científico se compone de fases de observación, procesamiento y conclusiones finales (o leyes generalistas).

consistentes. Aunque la fundamentación de cada conocimiento está condicionada por los lineamientos de la comunidad a la que está dirigido, realmente son los argumentos y pruebas las que determinarán si dicho saber perdura a través del tiempo.

El hablar de “pruebas” es un tema complejo, bajo la premisa que éstas son las transmisoras de la verdad y omitiendo el trasfondo filosófico de definir el significado de “verdad”, el simple hecho de discutir si alguna ciencia está ó no apropiadamente fundamentada a partir de los argumentos y pruebas en los que se basa, implica creer que nuestro razonamiento es inmune de perderse en el proceso de verificación. Aunque la confiabilidad y complejidad de las pruebas están condicionadas por la comunidad que se desea convencer, también podemos clasificar a las ciencias según el papel que desempeñan las pruebas, ya que los mismos objetivos que éstas persiguen varían según los intereses primarios de la disciplina en la que están inmersos. En la clasificación en ciencias fácticas y formales, presentada previamente, podemos distinguir un rol significativamente distinto de las pruebas, en las factuales por ejemplo, la confiabilidad de una prueba se basa en un control de parámetros de tipo experimental, ya que recordemos que sus intereses se concentran en crear teorías que expliquen de manera eficiente los fenómenos que nos rodean. En cambio, en las ciencias formales (dado la naturaleza de los objetos que las conforman y sus pretensiones), la forma de probar juega un papel aun más relevante, al no limitarse en el reconocimiento de la consistencia del saber que persigue sino, además, cuestionar los métodos de razonamiento utilizados para conseguir dicha estabilidad (analizando a las pruebas mismas).

Específicamente en el contexto matemático, las pruebas reconocidas como válidas reciben el nombre de “demostración” y es la comunidad de matemáticos, como fruto de un constante replanteamiento y fundamentación de la disciplina, la que delimita las características que deben contener. Entre las directrices fundamentales, podemos mencionar dos consideraciones necesarias para reconocer una prueba como demostración matemática: Primeramente, al razonamiento deductivo basado en los principios de la lógica aristotélica (al menos en sus orígenes y considerando la evolución de la lógica misma), y en segunda instancia, la naturaleza ideal de los objetos (la cuál es necesaria para no ser influenciados por los sentidos y la intuición).

El auge de las demostraciones matemáticas con este esquema se alcanzó en el siglo XX, bajo la escuela Bourbakí[4], donde el grupo se encargó de sistematizar las relaciones entre distintas teorías matemáticas, mediante el método axiomático y replanteando completamente la disciplina. El punto de partida fue la redacción de un tratado como herramienta indispensable para la comunidad matemática, con el objetivo de partir de una base común y lógicamente ordenada, la teoría de Conjuntos se convirtió en el elemento unificador, con la cual se esperaba conseguir la mayor generalidad y utilidad posible para los usuarios en distintas tareas, descartando por ello las referencias intuitivas de lo real. Es en 1938 que se elige el título de su obra: "*Éléments de Mathématique",* haciendo alusión a los Elementos de Euclides, omitiendo la letra "*s"* de *Mathématiques* para reafirmar el objetivo de unificar a la disciplina.

CONSIDERACIONES ESCOLARES

En los años cincuenta surgió un movimiento europeo, con la firme intención de introducir la nueva Matemática en la enseñanza escolar de los distintos niveles educativos, bajo la premisa que los cambios en la matemática se debían reflejar también en su enseñanza elemental. Estados Unidos fue el primero en América en interesarse por actualizar sus programas de matemáticas, deslumbrado por la precisión del lenguaje que ofrecían las llamadas "Matemáticas Modernas", publicando varios libros de texto y material educativo dirigidos a profesores de enseñanza media. Fue hasta los setentas cuando México se incorporó a la

[4] Pseudónimo de una sociedad de matemáticos franceses, responsables de la reestructuración de las Matemáticas durante el primer tercio del siglo XX, cuya aportación consistió en homogeneizar los fundamentos de las distintas ramas de la disciplina, mediante el apoyo de la teoría de conjuntos como una base común a todas.

corriente modernista, utilizando como material educativo una mezcla de los usados por la comunidad francesa y estadounidense, en sus respectivos países.

La reforma educativa se implementó en 1971, modificando considerablemente el currículo matemático escolar, con la intención de unificar el lenguaje y promover el formalismo adoptado por la disciplina a finales del siglo XIX. La transformación alcanzó los niveles de primaria y el medio superior, para después ser acogidos por instituciones privadas. La nueva prioridad en la matemática escolar era la comprensión de las relaciones entre los objetos ideales, bajo la premisa de que los estudiantes podrían aterrizar las estructuras abstractas en sus prácticas habituales.

Se necesitaron casi 20 años para reconocer que ni alumnos ni profesores estaban preparados para enfrentar la nueva propuesta curricular, las razones del fracaso pueden ser el desconocimiento de los docentes de la teoría de conjuntos y el rigor de su estructura, la cual estaba fuera del alcance del estudiante. Al fracasar los intentos unificadores, los Conjuntos y la Lógica, elementos importantes de la nueva concepción de las Matemáticas, mantuvieron su presencia en el currículo escolar pero se convirtieron en elementos aislados del resto de las ciencias.

Con la intención de corregir el rumbo y subsanar el daño de las Matemáticas Modernas en el ámbito escolar, aparece la reforma educativa de 1992 con el claro objetivo de reorientar el rumbo hacia una matemática aplicable en la vida real. En este periodo de transición en la matemática escolar, y como producto de la confrontación de las 2 reformas, la práctica mayoritaria en el salón de clases fue influenciada por alguno de los extremos, el formado por docentes que limita la capacidad formativa de la disciplina Matemática, reduciendo sus clases a un recetario de técnicas de resolución de problemas (de tipo algorítmico) o, en caso contrario, aquellos profesores que manejan una matemática lejos de la *zona de desarrollo próximo*[5] de sus estudiantes, priorizando la formalidad y convenciendo

[5] Entendida como la zona que separa el nivel real de un alumno y el nivel de desarrollo potencial, determinado por la capacidad del individuo de resolver un problema bajo la supervisión de un guía o de un compañero más capaz.

con ello al alumno de su imposibilidad de generar, de forma independiente, tales razonamientos.

Aunque el panorama se tornó menos gris y la modificación estaba dando resultados, la iniciativa federal sólo se preocupó por incluir en el movimiento a la educación pública, marginando a las escuelas privadas y la educación abierta. Los sectores privados utilizaron sus propios fondos para actualizar sus programas, mientras que la educación abierta mantiene a la fecha (2010), los programas implementados en los años 70´s.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Fruto de nuestro trabajo dentro del sistema abierto, bajo las condiciones globales antes mencionadas, aparecieron varias interrogantes relacionadas con la demostración y su relación con el movimiento de las Matemáticas Modernas. Tomando en cuenta que en los textos de preparatoria abierta aparece un apartado dedicado a las demostraciones, bajo los axiomas de los números reales y en su presentación formal (propio de la influencia Bourbakí), surgieron cuestionamientos como: ¿Está el alumno de preparatoria preparado para comprender la necesidad de la formalidad en las demostraciones matemáticas? ¿Qué requisitos (habilidades, conocimientos previos, capacidades argumentativas, competencias, etc.) son necesarios para que el estudiante pueda *aprender significativamente* el papel de las demostraciones matemáticas? Aterrizando éstas preguntas en la práctica profesional ¿Cuál es la metodología apropiada para presentar la demostración (implícita o explícitamente) en clase?

Es un acuerdo generalizado en la comunidad docente, la importancia de la “Demostración” en la formación matemática de los estudiantes (Crespo, 2007; p.18-21), pero es pertinente una aclaración sobre la variedad de significados asociados al término. En los niveles escolares previos a la formación profesional, incluso en esta última, podemos encontrar una concepción más abierta y menos rigurosa que la asignada dentro de la disciplina matemática, razón por la cual es necesario seleccionar modelos curriculares adecuados, (dadas las pretensiones del trabajo, que consideren necesario y relevante la comprensión del papel de las pruebas en matemáticas y avance en la complejidad de éstas, con el objetivo de alcanzar los requisitos de una “Demostración Matemática”).

Aunque el planteamiento original surge de la experiencia en el sistema abierto, no representa un escenario ideal por diversas complicaciones, tales como: Los tiempos asignados a tópicos complejos, la metodología implementada (autodidacta en la mayoría de los casos) y la propuesta educativa que lo sustenta; los resultados de una investigación con éstas limitantes, restringen la aplicación del trabajo a otros escenarios. La medida tomada consiste en adaptar las interrogantes a un modelo educativo que considere relevante el desarrollo de capacidades argumentativas y, además, implemente el uso de demostraciones formales.

Por la importancia de trabajar con instituciones que recurren al uso de demostraciones formales, la Licenciatura en Matemáticas es la opción idónea como escenario de trabajo, intentando mantener como filtro la experimentación con alumnos que inicien su formación matemática; ya que trabajar con estudiantes de semestres avanzados puede significar una contaminación en el tipo de pruebas que ellos consideran convincentes (por la alta influencia del formalismo en sus cursos). Una ventaja distinta, es el reconocimiento del tipo de argumentos que les resultaron satisfactorios durante su formación preparatoria (la cual es relevante por ser considerada como la etapa de transición entre la enseñanza intuitiva y racional).

Por las características del tipo de estudiantes y los intereses originales que motivaron este trabajo, las preguntas de investigación que se plantean como guía son las siguientes:

- **¿Qué tipo de pruebas aparecen en el salón de clases?**

- **¿Qué tipo de pruebas utilizan los estudiantes cuando aumenta la complejidad del contenido matemático?**
- **Relacionado con la pregunta anterior ¿Los métodos de validación utilizados por los estudiantes tienen un orden de transición?**

Las herramientas para estar en condiciones de plantear una respuesta a estas interrogantes, se apoyan en distintas investigaciones hechas por miembros de la comunidad de Matemática Educativa, éstas pueden ser clasificadas en dos tipos: Primeramente los trabajos de corte histórico, que permiten comprender el nacimiento y evolución de la demostración dentro de la disciplina matemática, con la intención de identificar los cambios de paradigma sobre las formas de argumentar, sus razones y características. Como segunda herramienta, está un contraste del análisis histórico con metodologías de diversas investigaciones dentro de un contexto escolar, con el fin de asociarlos apropiadamente para diseñar herramientas aplicables en el salón de clases.

Un riesgo latente en el trabajo sobre la "Demostración Matemática" consiste en el trabajo implícito que se le asigna dentro del salón de clases; limitando los requerimientos y la naturaleza lógica de las pruebas al desarrollo de hábitos en la forma de actuar de los estudiantes. Es por ello conveniente asignar un papel protagónico a la demostración matemática y sus características, centrando la atención en generar una toma de conciencia sobre los métodos de razonamiento utilizados. Aunque no es de interés del trabajo la discusión de alternativas para lograr tales objetivos, Murillo (2006) presenta varios métodos y los clasifica según el papel que desempeñan, el estudio de paradojas, por ejemplo, permite exteriorizar de manera evidente el razonamiento empleado, además de cooperar con el desarrollo de los procesos deductivos, implicaciones informales y las bases para la construcción de la noción de "consistencia", la cual es elemental en el estudio de sistemas axiomáticos.

JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

Al margen de la importancia de la argumentación en la vida cotidiana, uno de los intereses pretendidos en la formación escolar consiste en desarrollar en los estudiantes un pensamiento reflexivo y de carácter conjetural, pensando en generar un entrenamiento en la mentalidad crítica del individuo, capaz de cuestionar no sólo los fenómenos de su alrededor sino que, además, le permite estar en condiciones de exigir y adaptarse a los lineamientos de una nueva comunidad con mayor estatus académico y/o social. En el contexto matemático no es la excepción, y aunque la mayoría de los estudiantes no se convertirán en futuros matemáticos, es indispensable que las distintas formas de justificar, al igual que el resto de los conocimientos de la disciplina, se desarrollen de manera ascendente durante su formación escolar, permitiéndoles convertirse en usuarios competentes de la ciencia.

Concretamente, uno de los objetivos de la Licenciatura en Matemáticas es el desarrollo de la capacidad argumentativa del estudiante y su maestría en la construcción de demostraciones formales. La práctica docente, da por sentado que el alumno acepta las demostraciones matemáticas como contundentes e irrefutables, sin dedicar mucho tiempo a la descripción de las características que avalan tal afirmación. Una aplicación adicional del trabajo es contrastar la realidad con lo esperado por los docentes de la Licenciatura en Matemáticas, considerando el tipo de argumentos usados en las aulas y la influencia de la metodología de enseñanza aplicada por los maestros. Por lo anterior, los objetivos declarados en el trabajo son los siguientes:

- ***Identificar los métodos de validación utilizados por los estudiantes.***
- ***Analizar los cambios de las pruebas matemáticas utilizadas, considerando un avance en la complejidad del contenido matemático.***

CAPÍTULO 2

REFERENCIAS TEÓRICAS

En la primera parte del capítulo, se expone la visión en torno a lo que podemos entender por "Demostración Matemática", esta referencia se considera necesaria no sólo para dar claridad a nuestra investigación, sino para apoyar los análisis, observaciones y recomendaciones. En una segunda parte y con la intención de exponer los antecedentes teóricos del trabajo, se presentan de forma sintética distintos trabajos que nos han permitido crear una concepción propia sobre las argumentaciones en matemáticas y el papel que desempeñan en el salón de clases.

Finalmente en un tercer apartado, se hace referencia a los elementos particulares que guían la investigación, enfatizando las aportaciones de Van Hiele (1957) y Rodríguez (2006), las cuales respaldan nuestra visión sobre la demostración matemática y lineamientos a seguir para su tratamiento en el aula. Como conclusión de este apartado, se incluye una interpretación sobre la incorporación conjunta de tales aportaciones y su uso en la investigación.

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

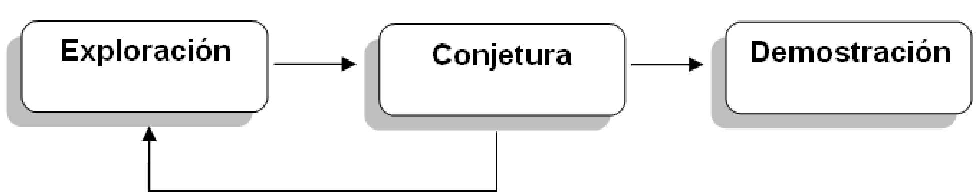
En cuanto al concepto de demostración, se asume la versión de N. Balacheff presentada por Acuña (2006, pp. 95) que dice: "*prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. En la comunidad matemática sólo pueden ser aceptadas como pruebas las explicaciones que adoptan una forma peculiar, son una serie de enunciados organizados según reglas determinadas, un enunciado se conoce como verdadero o bien se deduce de los que lo preceden a través de una regla de deducción tomada de un grupo de reglas bien definidas, llamamos demostración a estas pruebas*".

Pensando en los objetivos perseguidos por la investigación, es necesario tener claridad sobre dos conceptos que parecen entremezclase en el salón de clases: demostración y argumentación. La argumentación no es una demostración, su distinción se basa en el objetivo que persigue; mientras la argumentación pretende ser plausible y lograr convencer a los demás (presentándose por ello como una práctica discursiva espontánea, en la mayoría de los casos), una demostración tiene la intención de mostrar la veracidad de una proposición (de ahí proviene la necesidad de estar respaldado por pruebas con encadenamientos lógicos, por la validez implícita que conllevan).

La distinción de los términos, no sólo aportan precisión a la terminología; sino que además dan claridad en cuanto a los objetos de interés para el presente trabajo. Los argumentos se convierten en el antecedente relevante de las demostraciones matemáticas, siendo estas últimas el producto final esperado. En las siguientes secciones se presentan, de manera sintética, los antecedentes teóricos del trabajo; los cuales nos han permitido crear una concepción propia sobre las argumentaciones en matemáticas y el papel que desempeñan en el salón de clases.

Proceso Exploración-Conjetura-Demostración

Por la complejidad de las pruebas aceptadas en la comunidad Matemática, es conveniente asumir una postura sobre los elementos que entran en juego durante la construcción de las demostraciones. Trabajos de Acuña (1996) y Rodríguez (2006) consideran la no linealidad de la construcción de pruebas, identificando a la demostración como el producto final de un arduo proceso cognitivo. Una descripción común de los momentos que anteceden a la construcción de una demostración, es la presentada en el siguiente esquema:



El diagrama reconoce a las fases de Exploración y Conjetura como antecesoras de la construcción de demostraciones, además de considerar a la exploración como un apoyo recurrente que facilita el salto entre la elaboración de conjeturas y construcción de demostraciones.

Dependiendo de los objetivos perseguidos en clase o el nivel educativo, alguno de los momentos mencionados puede tomar un rol protagónico o, en su defecto, puede quedar excluido de las actividades promovidas; un ejemplo es la diferencia entre la educación media superior y las licenciaturas en ciencias exactas, considerando que en el nivel de preparatoria la matemática es una herramienta para resolver problemas, razón por la cual el interés está en las fases de exploración y conjetura de enunciados matemáticos, descartando la validez irrefutable de los mismos.

El papel y las funciones de la demostración

De Villiers (1993) considera distintas funciones de la demostración en el salón de clases, al no limitarla a procesos de *verificación*, asignada dentro de la disciplina matemática por sus lineamientos lógicos, o como metodología de *explicación* de resultados matemáticos, atribuida por los profesores durante su práctica laboral; además, considera la importancia de las demostraciones en el *descubrimiento* de nuevos resultados matemáticos (construidos por el estudiante), la *comunicación* de éstos entre los involucrados en la actividad escolar (maestro-alumno o, de mayor relevancia para nuestro estudio, alumno-alumno y alumno-maestro) y la *organización sistemática* de los resultados (propios de la influencia de Euclides).

Para realizar un trabajo que involucra demostraciones, es necesario rescatar los papeles relacionados al descubrimiento y comunicación de resultados matemáticos, intentando además identificar la organización sistemática utilizada por los estudiantes (explícita o implícitamente), permitiéndonos ver su concepción del conocimiento matemático (mediante el reconocimiento de los axiomas y lemas usados en la resolución de problemas). Aclarando la reflexión anterior, el manejo sugerido para el tratamiento de la demostración en el salón de clases, no debe omitir los papeles de verificación y explicación, usualmente trabajados, tan sólo no demeritar el resto de funciones de la *demostración matemática* en la formación escolar.

Estadios de la Demostración Matemática

Vargas (1998), plantea en su trabajo una visión retrospectiva del tipo de pruebas usadas en geometría, marcando tres grandes etapas de las demostraciones utilizadas por la comunidad matemática y claramente influenciadas por los objetivos perseguidos en cada momento histórico, las cuales son: Etapa intuitiva o ingenua (Siglo XXX al III A.C.), axiomática material (Siglo III A.C. al XIX D.C.) y axiomática formal (Siglo XIXC D.C. hasta hoy). Posteriormente, presenta argumentos convincentes para generalizar las etapas a distintas ramas de la Matemática, ejemplificando con el álgebra y la evolución de sus pruebas.

El criterio para la asignación de las fechas de corte entre las etapas, consiste en identificar los momentos claves de la disciplina que desembocaron en un cambio en los paradigmas de prueba aceptados. En un primer momento se hablan de pruebas empíricas, posteriormente aparece Euclides y la estructura deductiva influenciada por la intuición y el empirismo, y las últimas estrategias de prueba, mantenidas en la actualidad, son las utilizadas por la escuela Bourbaki, las cuales plantean una estrategia axiomática (leyes de inferencia a expresiones formales abstractas y sin contenido).

La forma de interpretar la evolución del concepto “demostración” se toma como influencia central de la presente investigación y las etapas como las fases prototipo para organizar un desarrollo plausible del tipo de demostraciones utilizadas por los estudiantes.

ELEMENTOS TEÓRICOS CONCRETOS

Las corrientes teóricas que podemos destacar son: La teoría de Van Hiele (1957) y las aportaciones de los tipos de demostración de Rodríguez (2006). Van Hiele presenta en su trabajo (traducido e interpretado por Ángel Gutiérrez) una descripción sobre distintos niveles de comprensión en geometría, a partir de habilidades medibles de los estudiantes. En la actualidad, la teoría de Van Hiele ha sido generalizada a otras ramas de la Matemática y enriquecida con diversos principios cognitivos de corrientes educativas modernas, particularmente nos interesa resaltar la versión de Chacara (2004), quien ha trabajado con los niveles de razonamiento con principios constructivistas y a partir de los cuales fundamentamos el esquema del trabajo, tanto para explicar los resultados de las actividades como para organizar una manera adecuada de presentarlas.

Rodríguez presenta, por su parte, tipos de demostración para diferenciar los argumentos de los estudiantes en escenarios de lápiz y papel y software de geometría dinámica, los cuales representan, implícitamente, un avance gradual y de gran utilidad como clasificación de pruebas matemáticas.

Teoría de Van Hiele (Van Hiele, 1957)

En el año de 1957 surge la teoría de Van Hiele, a partir de los trabajos de los esposos holandeses Pierre y Dina Van Hiele, en la cual aportan reflexiones sobre el por qué los alumnos tienen problemas para la comprensión de la geometría, sugerencias sobre el orden del contenido geométrico y las características de las actividades de aprendizaje de los alumnos. Las aportaciones más significativas de la teoría son: La distinción de cinco niveles de razonamiento por los que transita un estudiante durante el desarrollo de la comprensión geométrica y las fases de aprendizaje que permiten una apropiación de cada nivel.

A partir de las publicaciones originales, se presentaron varios trabajos donde se modificaba la versión tradicional del modelo, con la intención de hacer práctica su aplicación (Jaime, 1993; Gutiérrez et al, 1991), enriquecerlo con paradigmas propios de la época (Chacara, 2004) o generalizar su alcance a tópicos ajenos de la geometría (Navarro, 2002). Dado que consideramos que se rescatan los elementos fundamentales de la Teoría de Van Hiele, hemos decidido presentar la interpretación hecha por Chacara (2004), particularmente por la influencia del constructivismo que declara. Las características generales de cada nivel, son las siguientes:

Nivel 1 (Reconocimiento)

Los alumnos reconocen figuras visualmente por su apariencia global y se caracterizan por:

- Percibir los objetos en su totalidad y como unidades.
- Describir los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica con base a semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
- No reconocer explícitamente las componentes o propiedades de los objetos.
- A menudo usar propiedades visuales irrelevantes para identificar, comparar, clasificar o describir objetos.
- Una incapacidad para pensar en una variación infinita de un tipo particular de objetos (incapaces de generalizar resultados)
- Clasificar inconscientemente los objetos: por ejemplo, usando propiedades no comunes o irrelevantes para clasificarlos.
- Describir de manera incompleta a los objetos (en un intento de definir), como consecuencia de tomar condiciones necesarias (generalmente visuales) como condiciones suficientes.

Nivel 2 (Análisis)

Los alumnos comienzan a analizar las propiedades de los objetos y aprenden la terminología técnica apropiada para describirlos, pero no relacionan los objetos o las propiedades de éstos. Dentro de las características relevantes, los alumnos:

- Perciben los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifican las relaciones entre ellas.

- ❖ Pueden describir los objetos de manera informal mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.
- ❖ Deducen nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.
- ❖ Comparan explícitamente a los objetos en términos de sus propiedades.
- ❖ Evitan las inclusiones entre diferentes clases de objetos, con base en propiedades visuales.
- ❖ Clasificación de objetos únicamente en términos de una propiedad, por ejemplo, propiedades de los lados, ignorando otras propiedades como simetrías, ángulos y diagonales.
- ❖ Exhibición de un uso no económico de las propiedades de los objetos para describirlos (definirlos), en lugar de usar las propiedades suficientes.
- ❖ Un rechazo explícito de definiciones dadas por otros, por ejemplo el profesor o el libro de texto, en favor de sus propias definiciones.
- ❖ Un enfoque empírico para establecer la veracidad de una proposición, como el uso de la observación y la medición de diferentes dibujos.

Nivel 3 (Clasificación)

Los alumnos ordenan de manera lógica las propiedades de los objetos, utilizando cadenas cortas de deducción y comprenden las relaciones entre las figuras. El alumno de este nivel:

- ❖ Por medio del razonamiento informal, realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas.
- ❖ Describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta (incluso es capaz de transformar definiciones incompletas en definiciones completas o formular definiciones económicas y correctas para un objeto).
- ❖ Hace uso explícito de la forma lógica "*Si...entonces"* en la formulación y tratamiento de conjeturas, así como el uso implícito de reglas lógicas como el *modus ponendo ponens (*Comprende los pasos individuales de un

razonamiento lógico de forma aislada, pero sin comprender el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración*).*

- ❖ No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por tal motivo, tampoco puede comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- ❖ Acepta y usa de manera espontánea conceptos nuevos.

Nivel 4 (Deducción)

Los alumnos comienzan a desarrollar secuencias largas de proposiciones y comienzan a comprender el significado de la deducción, el rol de los axiomas, los teoremas y las demostraciones. El alumno de este nivel se caracterizan por:

- ❖ Ser capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
- ❖ Comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- ❖ Aceptar la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.)
- ❖ Producir conjeturas de manera espontánea y esfuerzos autónomos por verificarlas deductivamente.

En la descripción hecha por Van Hiele, se plantea la existencia de un quinto nivel, cuya principal característica es la capacidad para manejar, analizar y comparar distintos sistemas axiomáticos. La consideración del nivel 5 de Van Hiele fue descuidada por distintas investigaciones ya que sólo era del alcance de profesionales en matemáticas y algunos estudiantes adelantados, lo restrictivo del público hizo poco práctica su incorporación en algunos trabajos.

Características de los niveles de razonamiento de Van Hiele

Dentro de las consideraciones que deben tomarse en cuenta al utilizar la Teoría de Van Hiele como modelo metodológico, es necesario mencionar las siguientes:

- ❖ El orden de avance de los alumnos es fijo; es decir, no se puede alcanzar un determinado nivel sin antes haber pasado por el anterior*.*
- ❖ Para situarse en un determinado nivel de pensamiento, es necesario exteriorizar los elementos que se manejaban como internos en el nivel

anterior. En otras palabras, lo que era intrínseco en el nivel precedente se vuelve extrínseco en el nivel actual.

- Cada nivel tiene su propio lenguaje, tanto en símbolos lingüísticos como en el tipo de relaciones que conectan esos símbolos, esto complica el entendimiento entre dos personas que se encuentran en niveles diferentes.
- Aunque la intención de los niveles es clasificar, los 5 niveles son características generales de las capacidades de los estudiantes, lo cual no quiere decir que si dos alumnos se sitúan en un mismo nivel tengan el mismo conocimiento, sino que son capaces de entenderse por la similar forma de razonar.

Fases de Aprendizaje

Como recomendación prescriptiva para los profesores, en cada nivel de Van Hiele se presentan 5 fases de aprendizaje que apoyan la concreción del nivel, además de promover un avance gradual al interior de cada uno de ellos. Las fases representan un esquema para organizar la enseñanza, con la intención de facilitar el alcance de un nivel de razonamiento de Van Hiele superior. Las fases a las que nos referimos son:

- *Información:* En esta instancia el estudiante es informado sobre el panorama general de las actividades a realizar, es decir, se plantean los objetivos buscados en el tema, el campo de investigación y el tipo de problemas a resolver (en términos que el alumno comprenda). En cuanto al profesor, esta fase es útil para averiguar los conocimientos previos con los que cuentan los alumnos (o su nivel de razonamiento), para reconocer su capacidad de desenvolvimiento ante determinadas tareas.
- *Orientación dirigida:* Por medio de material suministrado por el profesor y una serie de instrucciones definidas, se promueven diversas actividades para que el estudiante explore y descubra ciertos conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio.
- *Explicitación:* Uno de los problemas de una exploración como la que se recomienda, es la variedad de símbolos y técnicas utilizadas, en esta instancia

es necesario acordar la simbología permitida y fomentar la expresión precisa de los alumnos. La fase 3 corresponde a la discusión grupal sobre la validez del trabajo hecho, es importante que la evaluación sea por parte de los alumnos con la menor interacción del profesor, ya que les permite reflexionar con mayor intensidad sobre la problemática en cuestión.

- *Orientación Libre:* Para afianzar y completar las reflexiones hechas, es necesaria la elaboración de tareas que pongan en juego los conocimientos adquiridos, este tipo de problemas son más libres que los planteados en la fase de *orientación dirigida*, con la finalidad de que los estudiantes apliquen sus nuevos conocimientos, además de aprender propiedades (más complejas) y que logren relacionarlas con otras.
- *Integración:* Con la finalidad de obtener una perspectiva global y uniforme en el salón de clases, el profesor debe solicitar un resumen de lo explorado (ya sea con discusiones, actividades o discursos propios) con la firme intención de lograr una integración completa de lo aprendido. Como su nombre lo indica, en esta fase se espera que el estudiante logre integrar los conocimientos adquiridos, marginando las propiedades que representen una novedad para los estudiantes; la pretensión de la fase es la acumulación global de lo trabajado.

Aunque las fases tienen un carácter cíclico; en otras palabras, son las mismas y siguen el mismo orden para cada uno de los niveles; existe una diferencia sustancial entre los contenidos, el lenguaje, los argumentos y los procedimientos de cada nivel (sugiriendo una metodología de trabajo, pero modificando el contenido involucrado en cada nivel).

Una vez descrita la teoría de Van Hiele, debemos recordar que la primera motivación del trabajo consistió en la identificación de tipos de argumentación (junto con una evolución implícita de los mismos), razón por la cual es necesario incorporar una corriente teórica auxiliar que no se oponga a las ideas de Van Hiele y, además, aporte reflexiones previas a la investigación y una amplia tipología de argumentos esperados por parte de los estudiantes.

Categorías de demostración (Rodríguez, 2006)

Pensando en promover un escenario que contemple el avance gradual de las formas de argumentar, hemos tomado como referencia las 3 grandes etapas históricas de argumentación en matemática: Empírica, Axiomática material y Axiomática formal (Vargas, 1998).

Un trabajo auxiliar para la investigación, es el presentado por Rodríguez (2006), donde define distintas categorías de demostración, las cuales han sido seleccionadas por dos razones: La primera es la congruencia entre las etapas históricas mencionadas y las categorías primarias de los tipos de demostración (empírica y deductiva, esta última a su vez, permite una distinción entre la axiomática material y formal). La segunda aportación es la diversidad de matices que se le asignan a los criterios de prueba en matemáticas, lo fino de estas clasificaciones nos permitirán precisar los argumentos usados por los estudiantes, bajo la premisa del salto intuitivo–racional que representa el nivel preparatorio (lo que implica esperar de ellos respuestas de este estilo). A modo de síntesis, se comentan las categorías de demostración mencionadas.

En una primera instancia se diferencian las demostraciones influenciadas por agentes externos a la propia persona y aquellos que son gestados en el interior del sujeto, en convicción externa y convicción propia respectivamente. La categoría de convicción externa podemos clasificarla a su vez, dependiendo del origen de la influencia, en:

Rituales	Cuando la fuente de convicción se basa en una cierta apariencia de los argumentos (plausibles).
Simbólicas	Cuando la convicción es fruto de manipulación simbólica de diversas expresiones.
Autoritarias	Cuando la creencia se basa en la autoridad asignada a otra persona, un libro de texto o cualquier otro elemento que represente un conocimiento superior.

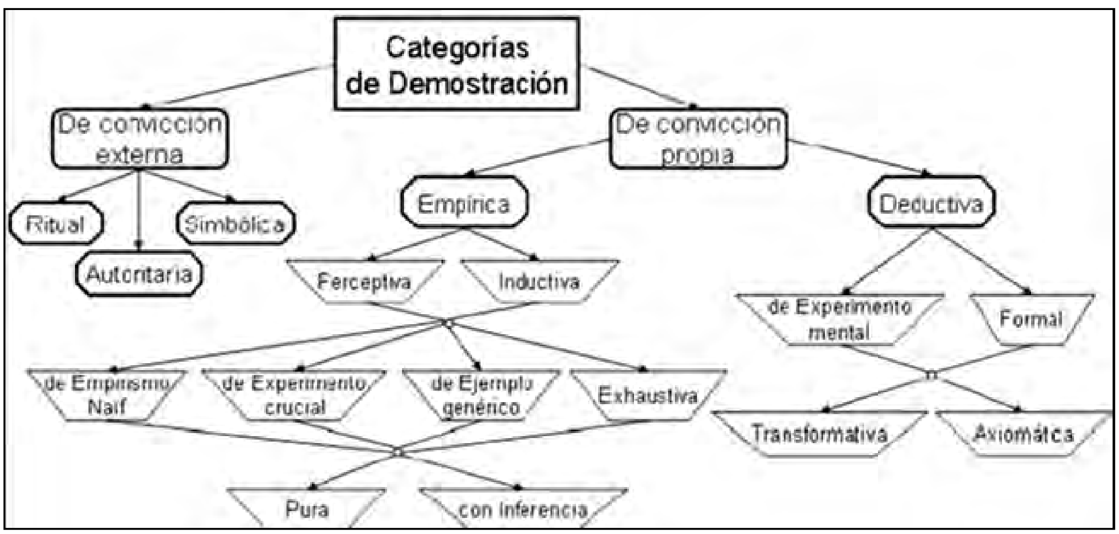
Los argumentos de convicción propia, a su vez, se clasifican en *empíricos* o *deductivos*. A los de tipo empírico podemos diferenciarlos dependiendo de la fuente de convicción entre los que provienen de ejemplos (*inductiva*), experiencias (*perceptiva*) o generalizaciones inductivas. Otros criterios para clasificarlas son según la forma de escoger los ejemplos representativos (*Empirismo naif, Experimento crucial, Ejemplo genérico* y *Exhaustivo.* La terminología es la utilizada en el trabajo original y será aclarada durante el avance del apartado) y el grado de abstracción involucrado (*Pura* o *Con inferencia*). A grosso modo ilustramos en la siguiente tabla, una explicación sobre las clasificaciones planteadas, con base en las características generales.

Según la forma de escoger los ejemplos	
Empirismo naif	Cuando la conjetura se verifica en algunos ejemplos seleccionados al azar y sin un criterio específico.
Experimento crucial	Si se verifica en un ejemplo escogido de manera que sea "lo menos particular posible".
Ejemplo genérico	Si se verifica en un ejemplo al que se le da el carácter de representante de su clase (genérico).
Exhaustivo	Si la conjetura hecha se verifica en todos los casos posibles (aplicable únicamente en conjuntos finitos).
Según el grado de abstracción	
Pura	Si la justificación consiste en realizar comprobaciones empíricas de que la propiedad se cumple.
Con inferencia	Cuando a pesar de seguir basándose en ejemplos, se realizan razonamientos más allá de las comprobaciones empíricas, como el uso de propiedades aceptadas o relaciones entre elementos matemáticos del ejemplo.

Las argumentaciones deductivas son fruto de una argumentación lógico-deductiva y, de modo similar, se puede realizar con base en dos aspectos: El uso o no de ejemplos (*Experimento mental* o *Formal*) y el tipo de razonamiento utilizado (*Transformativa* o *Axiomática*). Ilustrado en la siguiente tabla:

Según el uso o no de ejemplos	
Experimento mental	Si aún siendo deductiva y abstracta, está organizada con la ayuda de ejemplos.
Formal	Si la demostración está basada sin la ayuda de ejemplos.
Según el tipo de razonamiento involucrado	
Transformativa	Si está basada en operaciones mentales que producen una transformación del problema en otro equivalente.
Axiomática	Si para demostrar la tesis, se parte de los datos del problema, términos definidos y axiomas que se organizan en una cadena deductiva.

Como apoyo al lector y para ilustrar las relaciones entre las categorías, se presenta el esquema que aparece en Rodríguez (2006, pp.26).



Dado que la naturaleza de las clasificaciones se basa en aspectos independientes, podemos catalogar una demostración empírica en *inductiva de experimento crucial con inferencia* o una demostración deductiva en *experimento mental transformativa*.

Una reflexión importante de Rodríguez, relacionada con la tipología presentada, es que los alumnos no poseen una determinada categoría, sino que razonan influenciados por varias de ellas y utilizan una u otra en función de lo solicitado al elaborar una demostración o, simplemente, entender una que se les propone. Basados en la variedad de categorías a considerar, es conveniente definir modalidades de los esquemas de demostración según el papel que desempeñan, proponiéndose los siguientes:

- Esquema utilizado: Es el utilizado por el estudiante para resolver un problema.
- Esquema aceptado: Si un razonamiento presentado es aceptado como demostración.
- Esquema adherido: Si el estudiante, además de aceptar la demostración presentada, rechaza explícitamente las anteriores.
- Esquema declarado: Cuando un estudiante expone su interpretación de lo que significa demostrar.

Como última herramienta teórica, pensando en el proceso de exploración-conjetura-demostración, es conveniente aclarar los lineamientos para analizar los distintos momentos por los que transita un estudiante durante la resolución de problemas, considerando la observación de Marrades y Gutiérrez (2000), citada en Rodríguez (2006, p.27-28):

> *"Las diferentes clasificaciones de demostraciones descritas…asumen que los estudiantes trabajan de una forma lineal y coherente desde el principio hasta el final de la solución del problema. Sin embargo, la realidad es, en muchos casos, diferente. Normalmente, muchos estudiantes comienzan realizando comprobaciones empíricas y, cuando han entendido el problema y la manera de demostrar la conjetura, continúan escribiendo una justificación deductiva. También es habitual realizar varios saltos entre métodos empíricos y deductivos durante la resolución de un problema."*

Considerando la cita de Gutiérrez, se declaran dos posibles saltos en el proceso exploración-conjetura-demostración como herramientas de análisis del estadio en la resolución del problema, dependiendo del interés que persiguen, y son:

- Fase ascendente: Actividad que ayuda a entender el problema, generar conjeturas y verificarlas.
- Fase descendente: Actividad encaminada a construir una argumentación deductiva, desde la perspectiva del estudiante, sobre la conjetura elaborada.

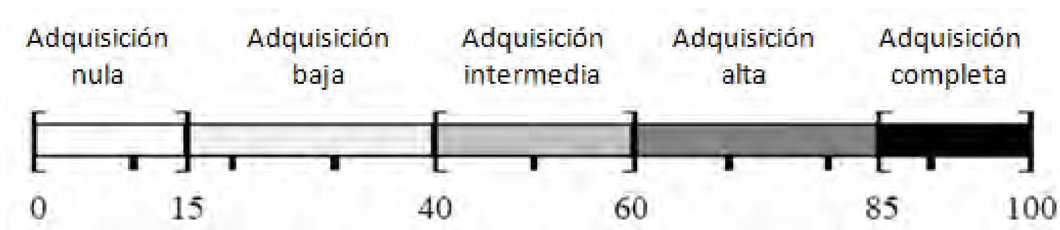
ELEMENTOS DE MODIFICACIÓN PROPUESTOS

En esta instancia ya hemos mencionado las 2 influencias centrales del trabajo, en el presente apartado se pretende hablar de las modificaciones necesarias para amalgamar ambas corrientes teóricas. Dentro de las consideraciones, está el uso de una metodología apropiada que permita asignar un nivel de Van Hiele. Una segunda consideración, es enfatizar las características de tipo lógico dentro de cada nivel de razonamiento, lo cual representa un vínculo implícito con las categorías de demostración presentadas por Rodríguez.

Ante la difusión del modelo de Van Hiele, diversos autores incorporaron consideraciones que hicieran práctico su uso. Se tomó como modelo metodológico la versión moderna de la Teoría de Van Hiele planteada por Ángel Gutiérrez, ya que nos permite fundamentar el cómo, cuándo y qué preguntar (útiles en el diseño de un problemario que capture las pruebas matemáticas), además de que sus investigaciones consideran mecanismos de evaluación de los niveles de razonamiento de Van Hiele y es compatible con el trabajo de Chacara (2004). En cuanto al uso de las categorías de demostración presentadas por Rodríguez (2006), han sido seleccionadas por los diversos matices que le asignan a las pruebas de tipo empírico y deductivo, lo fino de estas clasificaciones nos permitirá precisar los tipos de argumentos usados por los estudiantes.

Una de las razones para basarnos en la versión de Gutiérrez, es por su amplio trabajo al respecto y aportaciones relacionadas con métodos para evaluar la adquisición de los Niveles de razonamiento. El paradigma particular al que hemos recurrido defiende la existencia de subniveles, basados en la observación de respuestas de estudiantes donde aparecen influencias de distintos niveles de razonamiento (Gutiérrez, 1991, p. 237). Este tipo de descubrimientos hizo necesario una re-definición de las escalas para medir los niveles, con la finalidad de obtener una visión más completa del nivel real de razonamiento de cada estudiante y mantener una continuidad inherente de su avance.

La metodología para cuantificar la adquisición de cada subnivel, es posible ilustrarla con la representación de un segmento graduado de 0 a 100, asignando a los distintos intervalos un grado de dominio de cada nivel, sin la intención de considerar discontinuo el avance dentro de un nivel sino con el objetivo de facilitar la clasificación y su estudio.



El criterio para definir tal escala tiene su fundamento en el tipo de práctica realizada por los estudiantes durante la resolución de problemas, particularmente, un alumno que intenta pasar de un determinado nivel de razonamiento **N** al consecuente **N+1**, comienza sin una consciencia de la existencia o necesidad de métodos específicos de razonamiento propios del siguiente (en este caso, se dice que el estudiante tiene una *adquisición nula* del nivel de razonamiento "**N+1**").

Un escenario distinto, se da cuando los estudiantes están conscientes de la necesidad de nuevos métodos de resolución, ante la imposibilidad de resolver el problema con las herramientas conocidas, y al intentar diseñarlos o utilizarlos, su poca experiencia hace que fallen y se vean en la necesidad de trabajar de nuevo con las herramientas que resultaron ineficientes pero conocidas (el intento de avanzar hace que el estudiante tenga una adquisición parcial del siguiente nivel, pero por su desempeño y las características de este periodo se le asigna la etiqueta de *adquisición* baja).

Cuando los estudiantes cuentan con más práctica en la resolución de un campo de problemas, generan experiencia en el uso de nuevas herramientas (particularmente algunas pertenecientes al siguiente nivel de razonamiento), pero sin dejar de utilizar las ya conocidas del nivel anterior, a este periodo donde se utilizan indistintamente métodos de distintos niveles se asigna la *adquisición intermedia* del nivel.

Un siguiente paso, consiste en un dominio cada vez mayor de las herramientas del siguiente nivel de razonamiento y una necesidad cada vez menor de métodos de resolución utilizados en el nivel anterior, cuando el estudiante presenta este tipo de características diremos que ha logrado una *adquisición alta* del nivel.

Finalmente, los estudiantes reciben el título de *adquisición completa* si cuentan con una completa maestría en el nuevo nivel y no presentan dificultades que comprometan su dominio del mismo.

Para fines prácticos, presentamos la siguiente tabla con equivalencias que relacionan los niveles y subniveles de Van Hiele con las categorías de demostración:

Nivel de Van Hiele	**Adquisición de Nivel (Subnivel)**	**Categoría de Demostración**
1	Nula	Autoritaria
	Baja	Ritual
	Intermedia	Simbólica
	Alta	
	Completa	Perceptivo experimento naif puro
2	Nula	Perceptivo exhaustiva pura

	Baja	Perceptivo experimento crucial puro
	Intermedia	Perceptivo ejemplo genérico puro
	Alta	
	Completa	Inductivo puro
3	Nula	Perceptivo con inferencia
	Baja	Inductivo con inferencia
	Intermedia	
	Alta	
	Completa	De experimento mental Transformativa
4	Nula	
	Baja	
	Intermedia	Formal transformativa
	Alta	De experimento mental axiomática
	Completa	Formal axiomática

Por las distintas connotaciones del término “*fase*”, durante el análisis de resultados nos referiremos a la **fase ascendente** en los momentos de exploración y **fase descendente** para las asignaciones de las categorías de demostración.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La intención del siguiente apartado se concentra en dos direcciones: La primera, es la descripción general de los elementos utilizados para evaluar el pensamiento geométrico de los estudiantes, asignado con ello un subnivel de Van Hiele. El segundo foco de interés, contempla los medios para realizar el análisis de la información, las estrategias para recolectarla y los fines perseguidos por cada instrumento.

ESTRATEGIAS PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO

El interés de la investigación es identificar las pruebas usadas para justificar afirmaciones en matemáticas, es por ello conveniente una metodología de investigación con un enfoque cualitativo de los resultados, apoyada en un estudio de casos. La dinámica planteada es la elaboración e implementación de diversas hojas de trabajo, con el fin de conseguir información sobre la noción de prueba utilizada por los estudiantes.

Considerando que la herramienta de recopilación no se puede limitar a un examen o prueba (ya que nuestro interés no son las soluciones de los problemas sino las estrategias de resolución y los intentos para validar afirmaciones), fue necesario el diseño de distintas hojas de trabajo, que promuevan la elaboración de conjeturas concretas y la oportunidad de validarlas. Con la finalidad de evitar la monotonía y facilitar exploraciones, en algunas actividades se utilizaron hojas de plástico trasparente y archivos prediseñados en software de geometría dinámica (GeoGebra).

Hojas de trabajo

Para la temática de las hojas de trabajo se seleccionó el tópico de isometrías en el plano, por las familiaridades visuales que ofrece y el enfoque formal que permite abordar. Los problemas seleccionados se relacionan con la construcción del grupo de isometrías en el plano, mediante un acercamiento que permita al estudiante involucrarse en el proceso exploración-conjetura-demostración de distintas propiedades.

El diseño de las actividades imita el modelo de trabajo presentado por Chacara (2004), el cual esquematiza cuadros globales de cada nivel de razonamiento de Van Hiele (donde se detallan las fases de aprendizaje para temas concretos) y acordes a principios constructivistas (donde los estudiantes son activos en la realización de actividades y el uso de discusiones constantes para promover asimilaciones y reacomodos del conocimiento).

El tema que hemos seleccionado para trabajar es el grupo de isometrías en el plano, partiendo del concepto de traslación. Enseguida mostramos un par de tablas comparativas, donde la primera presenta el desarrollo del primer nivel para el tema de “Reflexión”, en los términos de Chacara; mientras que en la segunda, aparece el cuadro esquemático para el mismo primer nivel, pero sobre el tema de “traslación”, el cual es utilizado para definir nuestra propuesta.

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y principios del constructivismo.

TEMA: “Reflexión” (Nivel 1)

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 1	Fase 1	El estudiante se observa a través de un espejo. Sigue observándose en el espejo pero ahora haciendo algunos movimientos frente a él. Lo mismo hace utilizando otros objetos y figuras.
	Fase 2	El profesor pide a los alumnos otros ejemplos de objetos que parecieran reflejarse en un espejo (por ejemplo, el uso del papel carbón). Sin utilizar el espejo (sustituirlo por un marco con vidrio transparente) observarse entre parejas y hacer movimientos haciendo de cuenta que uno es la imagen del otro (frente al supuesto espejo).
	Fase 3	Los estudiantes discuten entre sí lo observado y cada uno escribe sus conclusiones.
	Fase 4	Se les da a los estudiantes una hoja con varias figuras. Los alumnos deben aparear las que pueden tomarse una como imagen reflejada de la otra, con respecto a un espejo imaginario. El alumno deberá justificar sus respuestas.
	Fase 5	El profesor induce que el estudiante resuma lo que se ha observado: - En qué forma están colocadas las figuras. - Qué características mensurables tienen los objetos y sus reflejos.

ISOMETRÍAS EN EL PLANO
Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele.
TEMA: “Traslación” (Nivel 1)

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 1	Fase 1	El estudiante manipula imágenes hechas sobre hojas de plástico transparente (y hojas blancas, en algunos casos), deslizando y reflexionando sobre las direcciones del desplazamiento.
	Fase 2	El profesor pide a los alumnos que manipulen las hojas de plástico, deslizándolas en distintas direcciones para identificar patrones de traslación, además de cuestionar sus observaciones.
	Fase 3	Los estudiantes discuten sobre estrategias para discriminar entre figuras trasladadas y no trasladadas, con la finalidad de identificar propiedades de manera visual.
	Fase 4	Mediante el uso de hojas de papel y figuras que teselan, se le pide a los estudiantes que completen el cuadro deslizando las hojas en distintas direcciones.
	Fase 5	El profesor induce al estudiante a resumir lo observado, enfatizando: - El uso de traslaciones para la construcción de figuras. - La conservación del tamaño y la forma de las figuras. - La capacidad de realizar traslaciones de manera directa, mediante el deslizamiento de acetatos y hojas. - Identificación y realización de traslaciones en distintas direcciones. - La utilización de la terminología básica: traslación, vector, recta, etc. - La diferenciación entre figuras trasladadas y no trasladadas (mediante justificaciones visuales).

El resto de cuadros esquemáticos fueron remitidos al anexo 1, las tablas son las correspondientes a los niveles 2, 3 y 4.

La evaluación del nivel de Van Hiele fue considerada en el diseño de las distintas actividades, con la clara finalidad de interpretar apropiadamente el modelo y generar un instrumento testigo de la actividad mental realizada por el estudiante. En la tabla que relaciona las corrientes teóricas centrales, es notorio encontrar varios vacíos que pueden ser interpretados como la inexistente correspondencia entre subniveles de Van Hiele y las categorías de demostración de Rodríguez; por ello aclaramos que los huecos serán llenados mediante los distintos matices observables en cada categoría de demostración.

El trabajo de Gutiérrez (1991) es usado como guía para la asignación de los subniveles de Van Hiele, la estrategia consiste en plantear actividades y catalogar las respuestas de los estudiantes con base en lo percibido en las mismas. Las distintas opciones esperadas son:

0. No se responde la pregunta o la respuesta no puede ser codificada (no se entiende).
1. La respuesta indica que el estudiante es principiante en la problemática y no da información de un nivel superior.
2. Trabajo insuficiente o erróneo para responder a la pregunta, en sus respuestas se perciben razonamientos y resultados reducidos o incorrectos.
3. Las respuestas son correctas pero el trabajo para resolverlas fue escaso, deja ver un nivel de razonamiento inferior al nivel esperado. Las explicaciones, procesos de razonamiento y resultados son insuficientes (incompletos).
4. Mezcla de respuestas correctas e incorrectas, que reflejan características de dos niveles de Van Hiele consecutivos (con procesos claros de razonamiento y justificaciones aceptables).
5. Sus respuestas son incorrectas, manteniéndose solamente en un nivel de razonamiento, las respuestas que presenta son razonamientos completos pero incorrectos o correctos que no llegan a la solución del problema indicado.
6. Las respuestas son correctas dentro de un nivel de razonamiento, pero con justificaciones escasas.
7. Las respuestas son correctas, completas y suficientemente justificadas, reflejando la apropiación de un nivel de razonamiento.

Es notorio que las respuestas han sido enumeradas según el grado de satisfacción identificado, las cuales se relacionan con la adquisición de los niveles de Van Hiele de la siguiente manera: Tipo 0 y 1 para adquisición nula, 2 y 3 para la adquisición baja, el tipo 4 para representar la fase intermedia, 5 y 6 para la adquisición alta y el tipo 7 para la adquisición completa del nivel.

Software de Geometría Dinámica

Pensando en generar un ambiente apropiado para la elaboración de conjeturas, se optó por el uso de GeoGebra, con la intención de facilitar una exploración de numerosos ejemplos que permitan a los estudiantes desarrollar sus habilidades de visualización. Otra de las ventajas del uso del software consiste en la rapidez, comparada con escenarios de "lápiz y papel", para realizar las manipulaciones.

Dentro de las desventajas para la investigación, Romero (2010, pp. 21-22) menciona lo siguiente:

> *"Otro efecto secundario del uso de representaciones dinámicas es que al proveer a los estudiantes de evidencias muy directas de los hechos analizados, se inhibe la necesidad de demostraciones y argumentaciones. Es frecuente que los estudiantes, principiantes o avanzados, perciban muchas situaciones como evidentes por sí mismas y afirmen que éstas no necesitan demostración alguna ya que la proposición que se les pide demostrar* ***se ve en pantalla que es cierta****… [ ]… Los estudiantes suelen tomar como suficiente una exploración, muchas veces no sistemática, para decidir si una proposición es verdadera o no".*

Tomando en cuenta la afirmación de Romero, se optó por incluir como herramienta metodológica el uso de GeoGebra, con el propósito de facilitar las fases de exploración y conjetura, pensando en promover la búsqueda de los elementos necesarios para elaborar demostraciones.

UBICACIÓN DE LAS HOJAS DE TRABAJO POR NIVELES Y FASES

Nivel 1

Las hojas de trabajo 1 y 2 son actividades que se encuentran ubicadas en el primer nivel de razonamiento, representan a una primera etapa de exploración, en donde se promueve un acercamiento a las traslaciones mediante experiencias físicas (traduciendo la noción de traslación a deslizamientos en el plano). Durante la **Hoja de trabajo 2** se cuestiona al estudiante sobre características visuales (desde una perspectiva global), en un intento de describir las traslaciones y diferenciarlas de "otras" trasformaciones (o combinaciones de ellas). Las hojas de trabajo 1 y 2 tienen como objetivo que el alumno pueda observar:

- A los segmentos de recta como una forma manual de trasladar figuras, identificando a los segmentos como rieles que guían el deslizamiento.
- Las características mensurables entre los objetos y su traslación (enfatizando en el mantenimiento de la inclinación de las figuras y el orden de los elementos que las conforman).
- A las traslaciones como isometrías (mediante la conservación del tamaño y forma).

En cuanto a las fases del modelo de Van Hiele, podemos describirlas mediante el uso de la siguiente tabla. En la primera columna se menciona la hoja de trabajo a la que nos referimos y en la segunda hacemos una breve descripción de las fases trabajadas en cada hoja, así como los objetivos perseguidos (a partir de ahora utilizaremos una tabla para describir cada nivel).

HOJA DE TRABAJO	DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y FASES DE APRENDIZAJE
1	La hoja de trabajo 1 no habla de traslaciones, sin embargo presenta problemas sobre deslizamientos y cuestiona a los estudiantes sobre movimientos que permiten generarlos (haciendo alusión a traslaciones de manera implícita).

	Para esta sección las fases abordadas son las etiquetadas como 1, 2 y 3 (Aclarando que la fase de *explicitación* no se concluye, sino hasta el final de la **Hoja de trabajo 2**). En las últimas preguntas se espera que abonen en la *integración* (fase 5), registrando las bases por escrito de observaciones importantes.
2	Una vez concretadas las estrategias para identificar deslizamientos simples que generen traslaciones específicas, se ponen a prueba los métodos creados por los estudiantes e inician con el uso de notación y reflexión sobre características que permiten identificar las traslaciones visualmente. La hoja se corresponde con las fases 3, 4 y 5, dando seguimiento a las reflexiones de la **Hoja de trabajo 1** (en cuanto a las fases 3 y 5). Para la *orientación libre* (fase 4), se plantea el problema inverso a la primer hoja de trabajo, el cual consiste en diseñar un método de trasladar figuras a través de un vector dado (todo el trabajo está planteado para resolverse solamente con el uso de geometría sintética).

Nivel 2

Las hojas de trabajo 3, 4 y 5 (además de la actividad 5b, incorporada para verificar las conclusiones de las hojas anteriores) son actividades que se encuentran ubicadas en el segundo nivel de razonamiento y pretenden enfatizar las propiedades concretas de las traslaciones (las cuales fueron utilizadas implícitamente en las actividades anteriores), también se utiliza el GeoGebra con la intención de permitir al estudiante la elaboración de conjeturas sobre el papel del vector de traslación (a través de la manipulación libre en archivos diseñados y no limitando la exploración a trabajo de lápiz y papel) y cerrando con la introducción y desarrollo de notación matemática con mayor potencial para el desarrollo matemático de los estudiantes. Las hojas de trabajo 3, 4 y 5 tienen como objetivo que el alumno descubra la importancia del vector de traslación, y con ello:

- ❖ Descubra el paralelismo entre segmentos formados por cada punto P y su homologo P’ (de la figura trasladada) y la congruencia entre los segmentos y el vector de traslación.
- ❖ Confirme que la inclinación de las figuras no cambia, mediante un estudio del paralelismo de segmentos homólogos de un objeto y su traslación.
- ❖ Realice traslaciones mediante las coordenadas de un vector, además de composiciones de traslaciones. Identificando la conmutatividad de la composición.

HOJA DE TRABAJO	**DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y FASES DE APRENDIZAJE**
3	En la actividad, el estudiante confirma características básicas de las traslaciones como: La inclinación de las figuras es respetada por la transformación (ya que se solicita la atención del alumno al paralelismo de segmentos homólogos) y la autonomía del vector de traslación (omitiendo el trabajo práctico elaborado por el estudiante en el nivel anterior). Corresponde a las fases 1, 2, 3 y 4 del nivel 2 (con la aclaración de que las fases de *explicitación* y *orientación libre* se inician en el plano sintético y se concluyen en el plano cartesiano, para la finalidad de explorar y responder las interrogantes planteadas mediante el uso de una notación más apropiada).
4	En la mayor parte de la actividad se trabaja con geometría dinámica. El archivo de GeoGebra asociado, permite verificar las observaciones hechas en el plano sintético y redefinirlas mediante el uso de los valores numéricos del vector de

	traslación. Se trabaja la fase 4 del nivel con mayor profundidad, orientando las observaciones a características que puedan verificarse con el uso de la geometría analítica. Además, aporta reflexiones de la fase 3 y 5.
5	Se pone a prueba la identificación de traslaciones mediante el uso de las características solicitadas previamente, además de iniciarse en el análisis de la propiedad de cerradura para la composición de traslaciones. Se concluyen con las fases 3 y 4, además de orientar la etapa de *integración* (fase 5) en términos de geometría analítica.
5b	Por medio de la manipulación del archivo de GeoGebra, se concreta la fase 5 en dos direcciones: La primera es el uso de coordenadas para los vectores y la elaboración de conjeturas sobre la composición de traslaciones es una traslación.

Nivel 3

Para el nivel 3, se diseñaron 6 hojas de trabajo (de la número 6 a la 11) que comparten algunos elementos, tales como: la elaboración de conjeturas autónomas (fruto de exploraciones dirigidas), el poco trabajo en escenarios concretos, cuestionamientos de tipo teórico planteados a partir de ejemplos generales y el uso sistemático de software de geometría dinámica (GeoGebra) para la exploración de nuevos escenarios y verificación de conjeturas hechas previamente. Las hojas de trabajo tienen como objetivo que el alumno conozca las distintas transformaciones en el plano y descubra lo que permite caracterizar a cada una, con la intención de profundizar en:

- ❖ La capacidad de identificar vectores de traslación, ejes de reflexión o centros de giro (según sea el caso), además del efecto de alteraciones de dichos elementos en las transformaciones en el plano.
- ❖ La cerradura como propiedad del conjunto de traslaciones en el plano y la exploración de dicha propiedad en el resto de las trasformaciones, con la finalidad de promover la construcción de condiciones necesarias para que una transformación sea cerrada bajo la composición, o bien, la construcción de contraejemplos que no lo sean.
- ❖ El uso de justificaciones más elaboradas en sus observaciones (con respecto a las hechas previamente), además de expresarlas de una manera más formal. (Considerando los recursos del nivel).

HOJA DE TRABAJO	DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y FASES DE APRENDIZAJE
6	Se solicita una reflexión profunda sobre la cerradura de la composición de traslaciones, sin el uso de ejemplos. La presente hoja de trabajo es considerada como fase 1 del nivel por la pretensión de plasmar por escrito los antecedentes del estudiante, concluidos a partir de las hojas de trabajo anteriores. De manera similar a las hojas anteriores, aporta reflexiones que serán reutilizadas para fundamentar y enriquecer las fases 3 y 5.
7	Se presenta otro tipo de transformaciones, con la finalidad de hacer una depuración de aquellas que conservan tamaño y forma (isometrías). Las fases trabajadas son la 1 y 5.
8	Trabaja la transformación de rotación, enfatizando los elementos que la definen. Las fases contempladas para esta hoja de trabajo parten de la exploración de ciertos elementos (fase 2), culminando en la elaboración de una definición para la transformación, refinada de

	manera individual (fase 4) y grupal (fase 3). La hoja de trabajo culmina con la definición final que se asume para resolver el examen final (fase 5).
9	Trabaja la transformación de reflexión y el rol que juegan los elementos que la definen. Las fases contempladas para esta hoja de trabajo van desde aportar información que pueda ser utilizada como: Antecedente (fase 1), resumen para definir la transformación de reflexión (fase 5) y una exploración guiada (fase 2).
10	Representa la fase 4 por las intenciones de generar incertidumbre en los estudiantes a través del estudio de la composición de reflexiones en escenarios desconocidos para ellos.
11	Se generalizan las observaciones hechas sobre la composición de reflexiones en distintos escenarios y se espera que el estudiante sea capaz de resumir sus hallazgos con un lenguaje apropiado, la fase 5 es abordada por la hoja de trabajo 11; ya que pretende ser el punto de partida para el siguiente nivel.

Nivel 4

Por las características de este nivel, es necesario evaluar comprensiones generales de las transformaciones en el plano, razón por la cual se utiliza solamente una actividad para evaluar el nivel (hoja de trabajo 12). Dicha hoja de trabajo utiliza el concepto de grupo como unidad integradora de las transformaciones en el plano, las cuales habían sido trabajadas de manera aislada hasta el momento. Las preguntas hechas durante la actividad concentran su atención en la verificación de las propiedades que definen el concepto algebraico de Grupo, el cual es solicitado a los estudiantes como punto de partida para ser utilizado como guía de un análisis estructural. La hoja de trabajo 12 tiene como objetivo que el alumno profundice en el estudio de transformaciones en el plano, propiciando con ello:

- La vinculación de las isometrías en el plano mediante el concepto de Grupo, bajo la operación composición.
- La capacidad para definir las condiciones de cada transformación, las cuales permiten construir subgrupos del Grupo de Isometrías en el Plano.

HOJA DE TRABAJO	DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y FASES DE APRENDIZAJE
12	Las fases de aprendizaje trabajadas durante la resolución de la hoja de trabajo llevan un orden secuencial congruente con las preguntas planteadas a través de la misma. La primer pregunta tiene la intención de verificar el dominio requerido para resolver la hoja de trabajo (fase 1), las fases 2 y 4 se trabajan en las siguientes preguntas (por las instrucciones concretas dadas, en una primera instancia y la reflexión solicitada para la construcción de subgrupos), la fase 5 es contemplada en la pregunta sobre la verificación de las propiedades de Grupo en el conjunto de isometrías en el plano y la fase 3 se trabaja al enriquecer las conclusiones con la pregunta final de la actividad.

HERRAMIENTAS PARA LA RECOPILACIÓN DE INFORMACIÓN

Otras herramientas metodológicas, para recolectar y analizar la información (producto de la implementación del problemario), son las siguientes instrumentos:

- **Observación Directa:** El salón de clases es el medio ideal para observar y reflexionar sobre las acciones de los estudiantes con respecto al objeto de estudio. Como parte de la investigación se decidió hacer uso de la observación en un ambiente real y para verificar el punto de partida contemplado y desempeños no considerados en los objetivos del trabajo.

Sobre las características de la observación, se considera participativa, por diversas intervenciones para orientar las discusiones y cuestionamientos a estudiantes en específico (para obtener mayor claridad sobre sus respuestas), y estructurada, por enfatizar la observación en las distintas afirmaciones y comentarios al respecto.

- **Videograbaciones:** Con el fin de evaluar y revalorar el desempeño de los estudiantes durante la aplicación de las distintas hojas de trabajo se recurrió a videograbaciones. Su inclusión en el proyecto radica en la captura de acciones y actitudes no expresables en las hojas entregadas. Además resulta de gran utilidad para contrastar las respuestas por escrito con la fase 3 (explicitación), complementándolas y facilitando un análisis objetivo.

Una vez hecha la selección de la muestra, la aplicación de las distintas actividades y simultáneamente la recopilación de información, el análisis deberá considerar la interpretación y contrastación conjunta de la información ofrecida por todos los instrumentos.

Como parte importante de las acciones metodológicas y previas a las de observación, se incorporaron en el capítulo anterior (capítulo 3), referencias documentales en dos sentidos: El primero, de corte histórico, con la finalidad de identificar las características de los distintos tipos de argumentación empleados a través del tiempo (dentro de la disciplina matemática), con la intención de relacionar los estadíos con los niveles académicos transitados por el estudiante. Posteriormente, la revisión se concentró en las distintas concepciones de investigadores y profesores, en torno a la demostración y su papel en el salón de clases, con el objetivo de estar en condiciones de plantear una postura propia.

CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y CRITERIO DE SELECCIÓN DE CASOS

El estudio se realizó con los 8 alumnos de la clase de Geometría Moderna de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora (ciclo escolar 2010-2).

Con la finalidad de presentar un análisis representativo de la variedad de escenarios, se optó por un enfoque cualitativo de los resultados, apoyado en un estudio de casos. Para definir los casos concretos, con la aclaración que no se excluyeron al resto de los alumnos de las dinámicas planteadas en el grupo, se recurrió a los resultados de las hojas de trabajo (mediante la evaluación declarada en la metodología, utilizando los criterios señalados para asignar los subniveles de Van Hiele). La asignación de un subnivel específico a cada estudiante nos permitió generar estratos de acuerdo a su desempeño, eligiéndose 4 casos para la realización de un análisis detallado. Los criterios utilizados fueron los siguientes:

a) **Nivel de desempeño de los estudiantes para los dos primeros niveles del modelo de Van Hiele.** El escenario para la exploración nos podría predisponer al supuesto de que estudiantes de la licenciatura en matemáticas de 4to a 6to semestre se mueven con relativa facilidad entre los niveles 3 y 4 de Van Hiele, pero por los intereses de la investigación no era apropiado suponer tal afirmación, es por ello que se consideró necesario partir de una etapa propedéutica que valide el nivel de Van Hiele en el que se encuentra, al menos para los primeros dos niveles. Para consideramos dos opciones: La primera es que los estudiantes hayan realizado las hojas de trabajo asignadas a dichos niveles (abarcando desde la hoja de trabajo 1 hasta la hoja 5b) o en su defecto, que las hojas completadas muestren una adquisición completa de los niveles 1 y 2 (lo cual será interpretado como un dominio de los mismos y facilidad para abordar el nivel 3).

b) **Estratos basados en el desempeño.** Para que el panorama contemple las características de los distintos estudiantes que componen un grupo, se seleccionó un miembro de cada estrato (uno de bajo desempeño, uno de desempeño medio-bajo, uno de medio-alto y un último de alto desempeño), esperando facilitar la realización de análisis individuales y comparativos.

Decidimos omitir sus nombres, etiquetándolos con las letras A, B, C y D progresivamente.

CAPÍTULO 4

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para el presente capítulo describiremos tres elementos: Las asignaciones de los subniveles de Van Hiele, las categorías de demostración utilizadas por cada estudiante y una valoración global sobre la relación entre el subnivel de Van Hiele y las categorías de demostración usadas, incluyendo un resumen de los apartados anteriores (entre otros componentes).

Los análisis puntuales se presentarán a la par de la revisión de cada hoja de trabajo, haciendo notar que el objetivo central de las actividades fue la asignación de un determinado subnivel de Van Hiele. Los dos elementos de interés son: El subnivel asignado y el tipo de argumentación que aparece en la hoja de trabajo. En cuanto a la interpretación de la argumentación usada para validar las conjeturas, se utilizó la estrategia de contrastar las respuestas de las hojas de trabajo con la revisión de su postura durante las discusiones grupales (con el apoyo de las grabaciones de video y, en ocasiones, mediante cuestionamientos directos al estudiante sobre el argumento utilizado al final de la sesión, con la intención de no influir en la fase 3).

A manera de resumen, se incorpora una sección donde se ilustran los perfiles de los estudiantes seleccionados, con la intención de ampliar la panorámica del escenario y que la investigación logre ser de mayor utilidad para el lector. Entre las características de mayor relevancia, están las modificaciones de las formas de probar y argumentar usadas por los alumnos escogidos, así que aprovecharemos la sección final para integrar los distintos tipos de prueba, relacionándolos con los subniveles de Van Hiele durante el desarrollo de las actividades.

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

El mecanismo de exploración consistió en la aplicación de un examen diagnóstico (con el fin de hacer la selección de casos de la manera más objetiva posible), la realización de las 12 hojas de trabajo y un examen final (donde se solicitaban demostraciones de manera explícita). Para organizar los resultados obtenidos de la exploración, los presentaremos de la siguiente manera:

- Distribuimos 5 apartados de análisis, los primeros 4 abordan cada nivel de Van Hiele de manera independiente y el último se concentra en las demostraciones de las conjeturas hechas por los estudiantes, durante la resolución de las hojas de trabajo. Podemos afirmar que el análisis final es considerado el de mayor relevancia para la investigación, por el tipo de actividades que fueron solicitadas a los estudiantes.
- Para cada apartado, iniciamos con una breve descripción del tipo de actividades a realizar, observaciones sobre las respuestas obtenidas (grosso modo) y cerramos con una valoración individual sobre el rendimiento de cada caso (en esta sección se presenta la asignación de los subniveles y los tipos de argumentación utilizados).

ANÁLISIS DEL PRIMER NIVEL DE VAN HIELE
(Hojas de trabajo No.1 y No. 2).

El tipo de actividades solicitadas se limitan al manejo de la traslación como manipulación de figuras y la caracterización de la misma con base en elementos visuales. Las acciones concretas que se solicitan al estudiante son: La identificación de figuras e imágenes superpuestas que coinciden al hacer deslizamientos rectos y la discriminación entre parejas de figuras trasladadas y no trasladadas, en vías de caracterizar la transformación (mediante elementos de tipo visual). El papel de estas hojas de trabajo consiste en facilitar una primera percepción del concepto de traslación.

Entre las observaciones generales, podemos mencionar las pocas ocasiones en la que fue utilizado un lenguaje disciplinar, postura que era necesario asumir para ser congruentes con las exigencias del primer nivel de Van Hiele. Con respecto al rol asumido por los estudiantes, durante la resolución de las primeras hojas de trabajo, un par de estudiantes intentó mantener un lenguaje matemático (uno de ellos está entre los casos seleccionados, el cual corresponde al individuo etiquetado con la letra "C" y sus intervenciones las discutiremos posteriormente), pero desecharon esa postura al involucrarse en las discusiones grupales.

Para el primer nivel de Van Hiele, uno de los utilizados como filtro para la selección de los casos, se observó una variedad de respuestas pero sin una diferencia significativa entre las conclusiones a las que llegaron los estudiantes, lo cual tiene relación con la libertad de la exploración solicitada y el tipo de exigencias. En cuanto al análisis de esta sección y considerando la similitud de las respuestas, nos limitaremos a desglosar lo relacionado a las fases 3, 4 y 5 del nivel (las cuales corresponden a la hoja de trabajo No. 2).

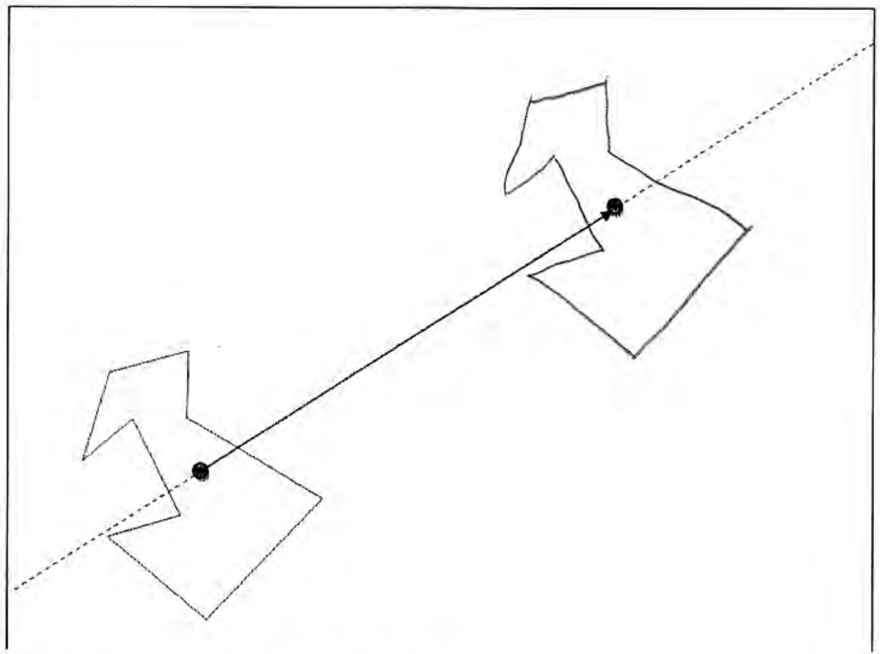
Para la realización de la hoja de trabajo No. 2, los estudiantes tenían la libertad de solicitar lo que consideraran necesario para cumplir con las actividades (dentro de las opciones escritas en sus hojas de trabajo), la actividad se llevó a cabo durante la tercera sesión y no fue necesario recurrir a tiempo adicional.

Caso A:

Fue el primer estudiante en presentarse y por ello inicio la actividad antes que el resto de sus compañeros, solicitó una regla hasta después que sus compañeros la pidieron (por los trazos elaborados, es evidente que completo la primera actividad sin el uso de este instrumento).

ACTIVIDADES:

- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

El metodo que mas me parecio es usar el vector y el punto ya que de ahi me guaba para saber si la traslacion estaba correcta.

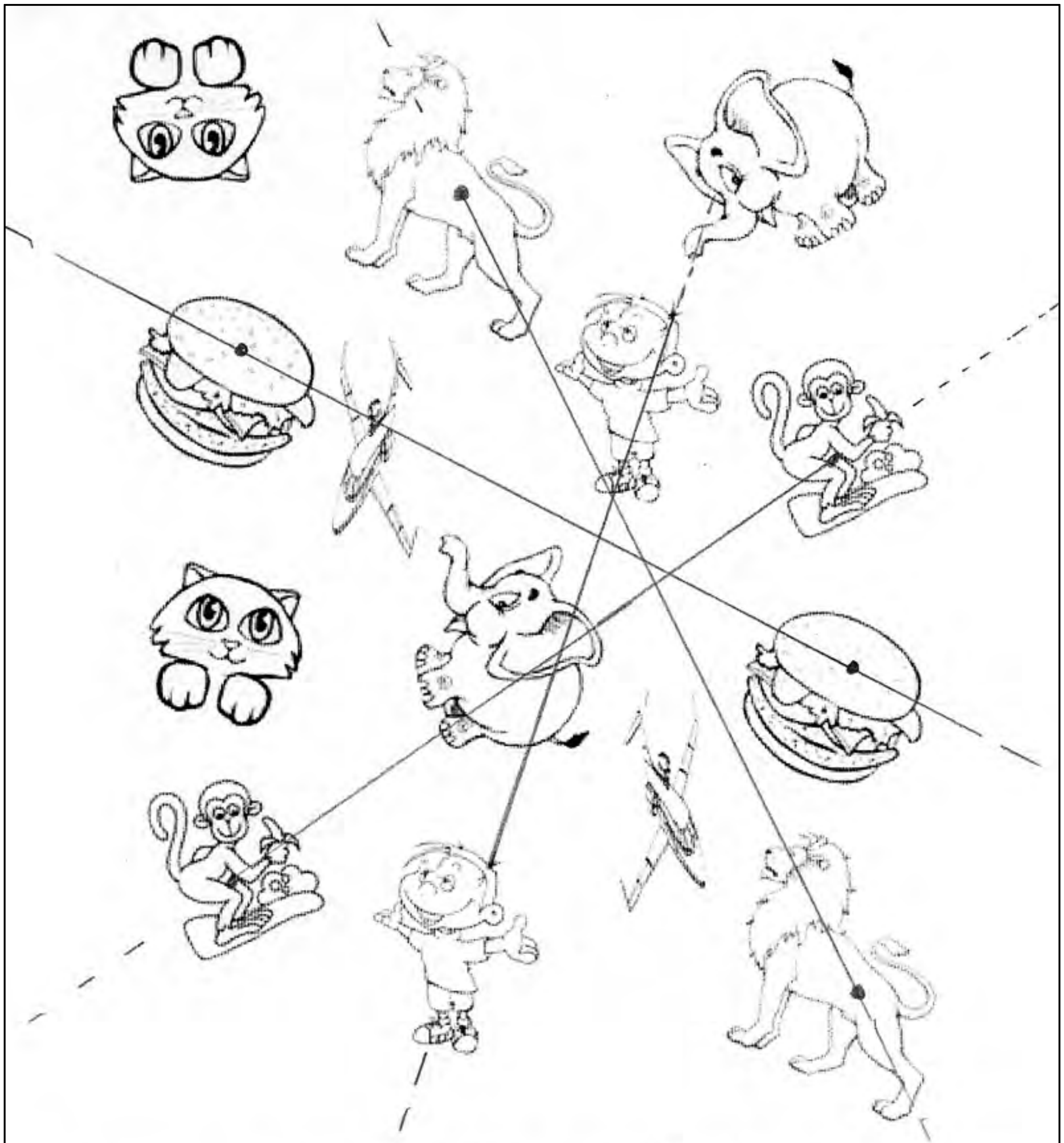
Fig. ***N1.A.1***[6]

La actividad 2 corresponde a experimentaciones adicionales de traslación (con escenarios similares a la actividad 1, pero incorporando trazos curvos), con la finalidad de que puedan desarrollar una estrategia manual para realizar la transformación.

[6] Para facilitar revisiones posteriores, se utilizará nomenclatura con el siguiente formato: **Nivel de Razonamiento**. **Caso de Estudio**. **Número de imagen**. Es decir; la figura N1.A.1 representa la primera figura del caso A, para el Nivel 1.

3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

Las otras figuras no resultaron traslacion ya que las lineas con misma dirección no coincidian.



4. Haz un resumen sobre las características que identifican a las traslaciones, es decir, ¿Cómo identificas que una figura es una traslación de otra (visualmente)? Justifica ampliamente.

con la misma dirección y trazando el vector con misma direccion.

Fig. ***N1.A.2***

La actividad final, la cual corresponde a la fase 5 del nivel, consistió en la clasificación de parejas de figuras entre traslaciones y no traslaciones. La estrategia usada como criterio para aparear las figuras es similar a la presentada en la primer actividad de la hoja de trabajo; podemos observar el uso de segmentos de recta punteados (los cuales representan la dirección del vector de traslación y un vector resaltado sobre el segmento, para evidenciar la magnitud y el sentido). Al observar las construcciones de los segmentos de recta (con los que se avalan las parejas de figuras trasladadas), es posible observar una estrategia recurrente, la cual consiste en la selección de puntos homólogos de manera intuitiva (es notorio en los puntos marcados para relacionar las imágenes del "león" y la "hamburguesa"), este método nos hace suponer que su discriminación de parejas no se basa en la construcción de los segmentos sino en la comparación global de las duplas de imágenes (el trazado de las rectas pretendía cumplir un papel de verificación, en un intento de imitar las herramientas utilizadas por el profesor y las planteadas en las hojas de trabajo).

El estudiante se mostró pasivo durante las discusiones grupales del nivel, pero sus estrategias para la resolución de las hojas de trabajo siguientes se vieron altamente influenciadas por comentarios de sus compañeros. En cuanto a los fases 4 y 5 (exploración libre e integración, respectivamente), se mantuvo apegado a los requisitos del nivel y no puso en juego herramientas propias de su formación, esto último puede ser interpretado de tres maneras; La primera opción es el cambio en la dinámica de clase utilizada (comparada con el trabajo tradicional en los cursos de la carrera), una segunda alternativa es que no cuenta con herramientas que faciliten las exploraciones propuestas o, en su defecto, las actividades fueron tan poco desafiantes que no demandaron el uso de métodos más complejos.

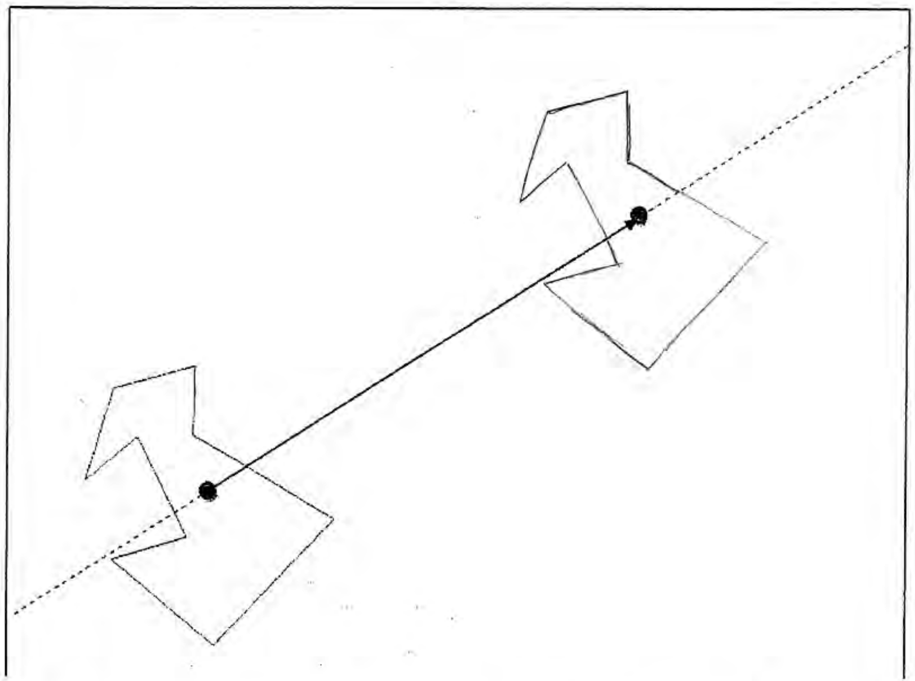
Como resumen, el estudiante cumple satisfactoriamente con las primeras hojas de trabajo (considerando los elementos que se evalúan), pero con algunos detalles de lenguaje que pueden complicar las discusiones grupales en niveles de razonamiento posteriores; por ejemplo, durante la discusión (y también lo declara en la respuesta a la pregunta 5) utilizó recurrentemente el término “*dirección*” para referirse a la inclinación de las figuras, ya que al momento de compartir su estrategia con el resto de sus compañeros, dijo que era necesario que “*los animales estuvieran en la misma dirección*” y cuando se le pidió que clarificara tal idea dijo: “*Es como si los animales vieran hacia el mismo lado*”, por ello podemos asumir que se refiere a la inclinación. En cuanto a las categorías de demostración, no habrá evaluación al respecto dado que no fue solicitada prueba alguna.

Caso B:

Para la resolución de la hoja de trabajo, solicitó regla y papel carbón (pensando en acelerar la exploración y el uso que le daría a la hoja de carbón, se le entregó una copia en blanco de su hoja de trabajo).

ACTIVIDADES:

- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



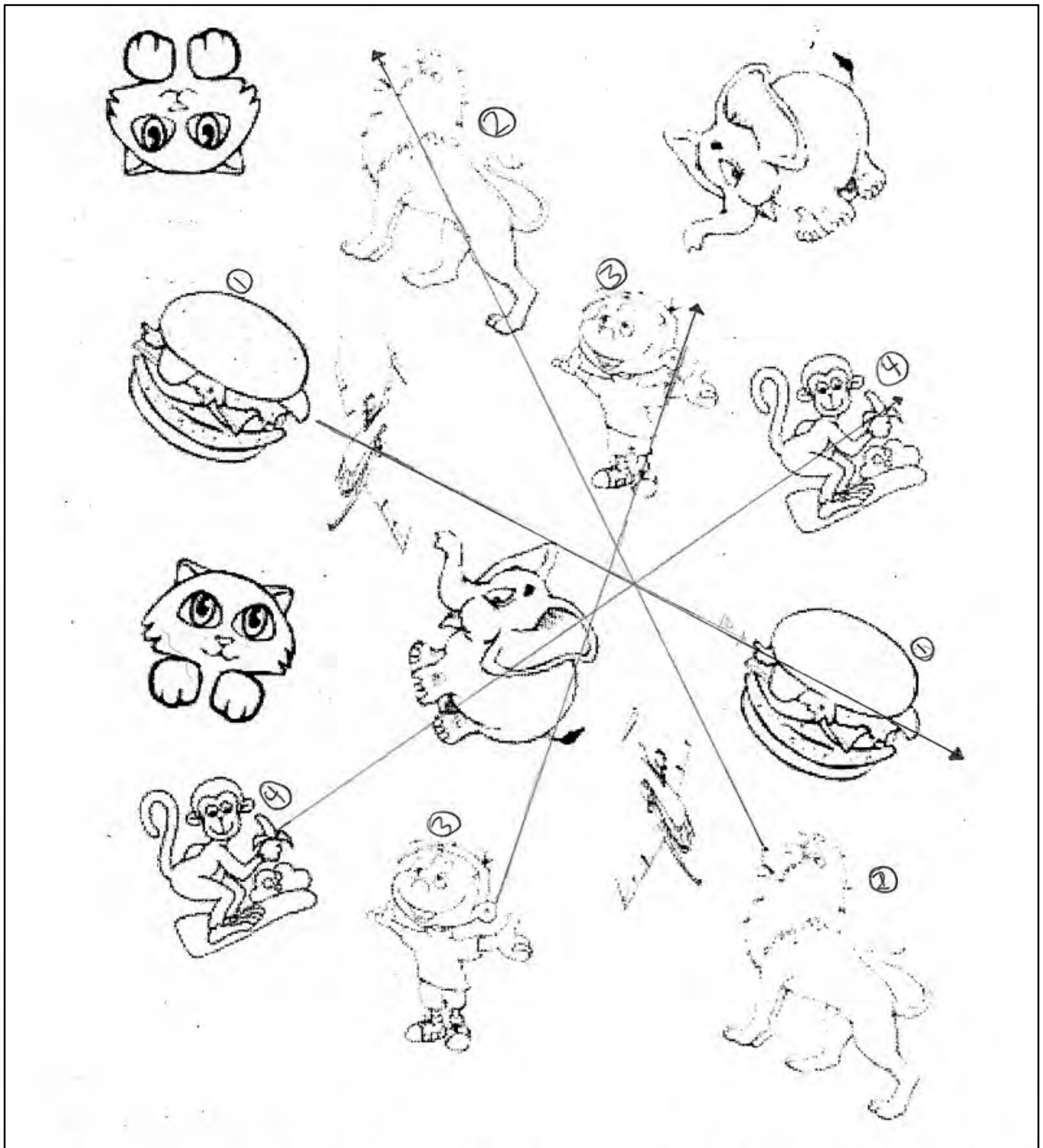
1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

Poner la Figura en otra hoja y luego colocarla debajo e irla dibujando en dónde se quiere trasladar.

Fig. ***N1.B.1***

3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

El gato y el elefante no tienen la misma dirección, por eso no son traslaciones, necesitaran ir a donde mismo.



4. Haz un resumen sobre las características que identifican a las traslaciones, es decir, ¿Cómo identificas que una figura es una traslación de otra (visualmente)? Justifica ampliamente.

Si dos figuras iguales tienen la misma dirección

Fig. ***N1.B.2***

En las actividades relacionadas con el apareamiento de figuras trasladadas y no trasladadas, notamos una confusión generalizada en cuanto al significado del término “dirección”, el cual es utilizado para referirse a la inclinación de las figuras trasladadas. Otro elemento recurrente es el impacto de la presentación de traslación como deslizamiento de figuras; para ejemplificar esta afirmación utilizaremos las respuestas del caso “B”, donde el estudiante elabora segmentos de recta (similares a los utilizados en la primera pregunta de la hoja de trabajo 2), pero la diferencia significativa consiste en el papel que desempeña en las afirmaciones del estudiante, ya que los segmentos no sustentan sus afirmaciones hechas y podemos comprobarlo al observar la construcción del vector que relaciona las imágenes de la “hamburguesa”, los segmentos de recta no están anclados en la figura y tan sólo pretenden modelar un movimiento tentativo para relacionarlas. De manera similar al caso “A”, el estudiante sustenta sus afirmaciones en las relaciones que percibe visualmente y, en una segunda instancia, utiliza los segmentos de recta para responder a la pregunta, sin que éstos últimos desempeñen un papel de peso en sus conclusiones.

El estudiante manifestó un perfil introvertido durante las sesiones, lo cual se vio reflejado en su poca participación durante las discusiones grupales. En lo concerniente a las siguientes fases de aprendizaje, la actividad logró mantenerla dentro los objetivos del nivel y aunque no se involucró demasiado en la fase 3, las discusiones fueron bastante enriquecedoras para su trabajo en las siguientes actividades.

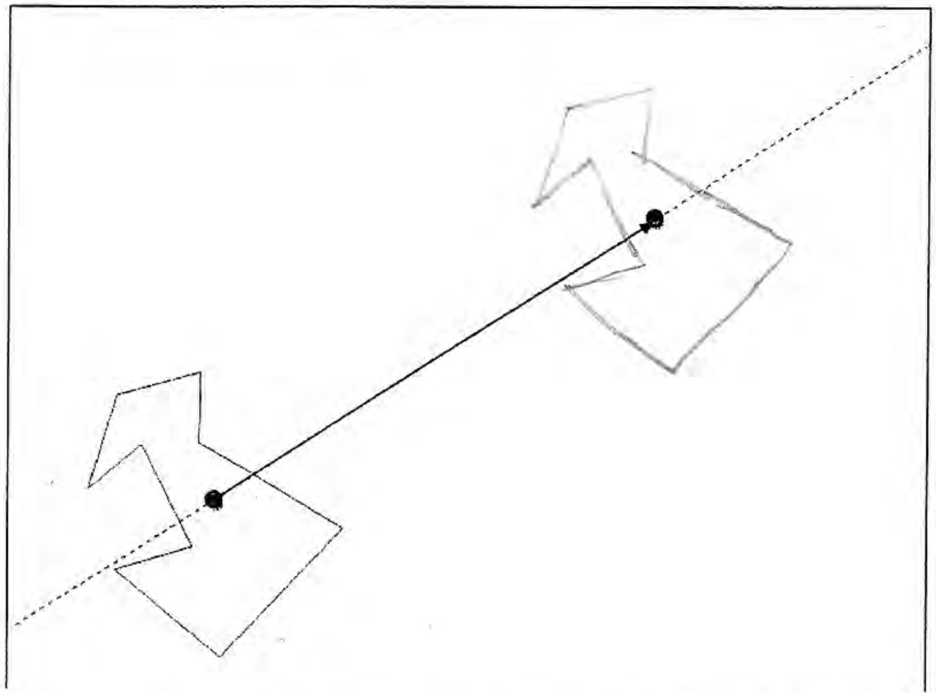
Revalorando su desempeño en las actividades, cumple con los objetivos de la hoja de trabajo, con respuestas apropiadas (considerando el nivel), pero de manera similar al Caso “A”, mostró estar altamente influenciado por elementos perceptivos y una revisión minuciosa de sus hojas de trabajo posteriores, permitirá evaluar el posible traslado de las confusiones observadas en sus respuestas.

Caso C:

El estudiante C, no utilizó regla y para sus construcciones sólo requirió copias de las hojas de trabajo.

ACTIVIDADES:

- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

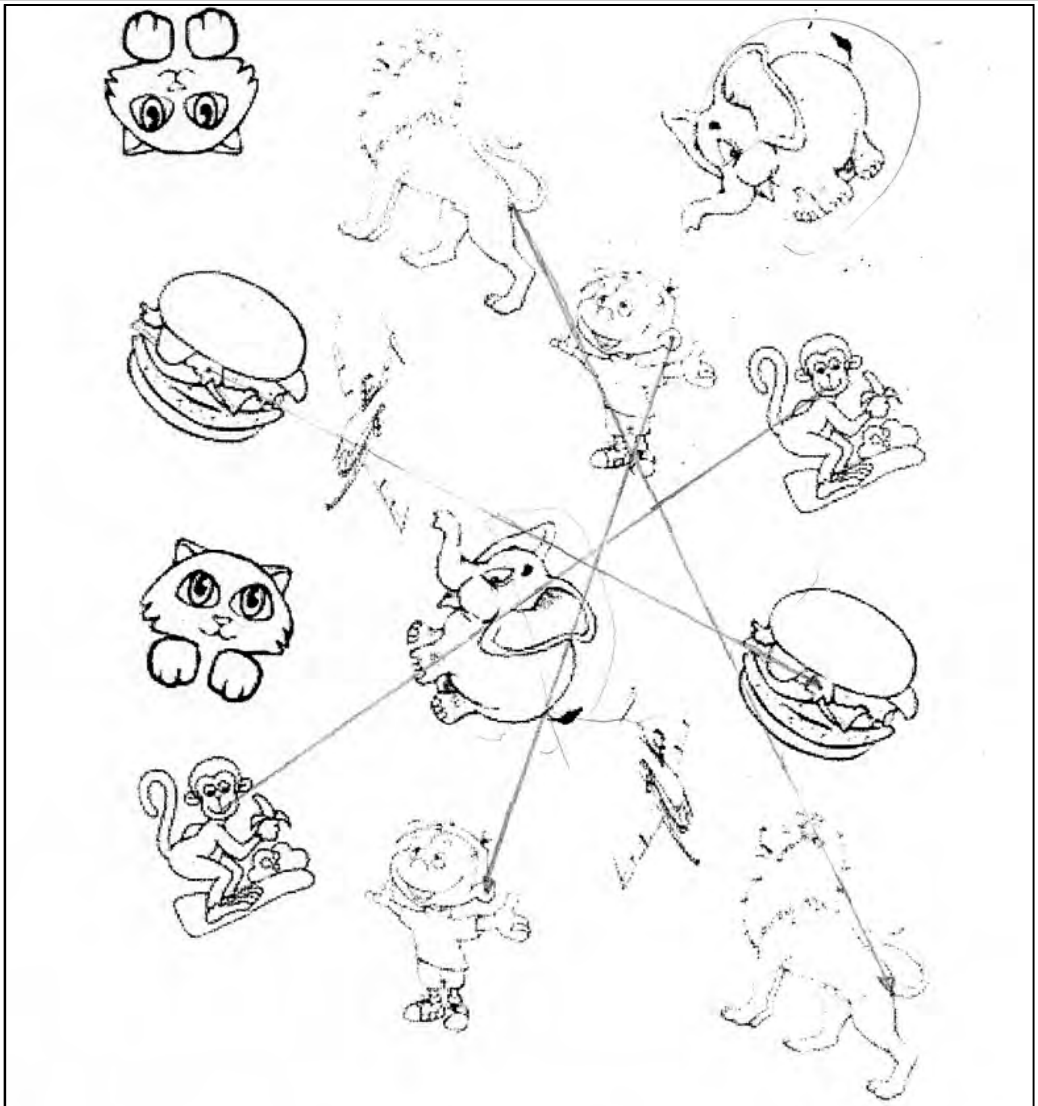
tomamos una imagen como centro de un plano cartesiano y trasladamos cada uno de los puntos a lo largo del vector con igual longitud e inclinación.

Fig. ***N1.C.1***

En cuanto a la estrategia utilizada, durante la discusión grupal se le pidió que compartiera el método para realizar las primeras tres actividades de la hoja de trabajo, pero la redacción de la pregunta a la pregunta uno deja ver que se confundió entre la estrategia utilizada y un método general. Sin embargo, la parte rescatable es que nos permite conocer sus técnicas de exploración (en este caso, aparentemente siente mayor comodidad en el plano analítico comparado con un escenario de geometría sintética).

3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

el gato es una reflección por eso no se puede trasladar
por medio de un vector, el elefante es una rotación
y el avion sería una rotación por eso no se
pueden trasladar por medio de un vector.



4. Haz un resumen sobre las características que identifican a las traslaciones, es decir, ¿Cómo identificas que una figura es una traslación de otra (visualmente)? Justifica ampliamente.

Usando varios puntos en la figura
original q' tendrían q' coincidir con los
de la traslación.

Fig. ***N1.C.2***

En cuanto a la selección de figuras trasladadas, fue el único en mencionar durante la discusión grupal a las transformaciones distintas de la traslación (en la pregunta 3 habla de reflexión y rotación), aunque de manera superficial y sin una solicitud de tal información.

Considerando el rol que asumió en las fases de aprendizaje, el estudiante manifestó las condiciones ideales de un alumno, mostrándose participativo en la discusión e interesado en los comentarios de sus compañeros, constantemente generando un ambiente de debate, uno de los cuales se centró en la estrategia para verificar que una figura es traslación de otra.

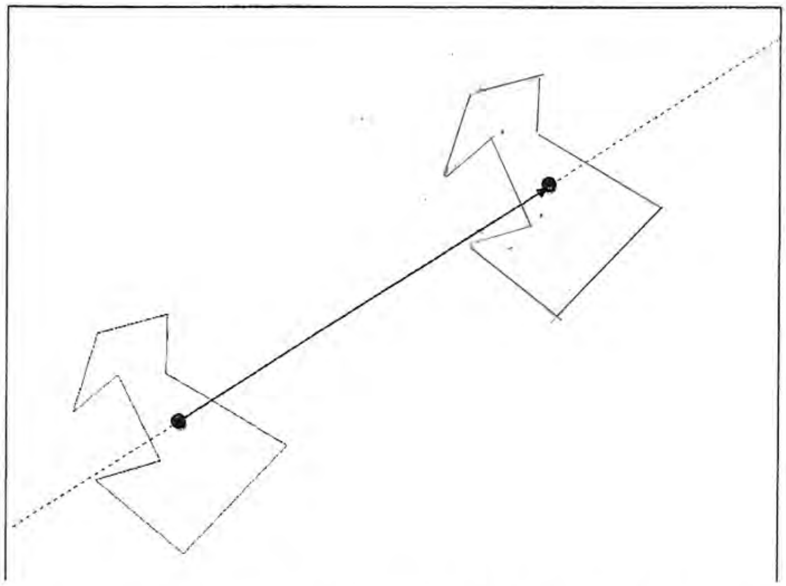
Evaluando sus respuestas de manera integral (considerando las distintas fases de aprendizaje), cumple con los objetivos del nivel y, aunque utilizó elementos puramente visuales en la discriminación de figuras, la fase de explicitación le permitió mostrar relaciones y propiedades de la transformación.

Caso D:

Utilizó regla y copias de las hoja de trabajo y constantemente se preocupó por la precisión de sus respuestas, en más de una ocasión no se retiró del salón hasta completar las hojas de trabajo (en los análisis posteriores será notorio el tiempo dedicado a sus respuestas).

ACTIVIDADES:

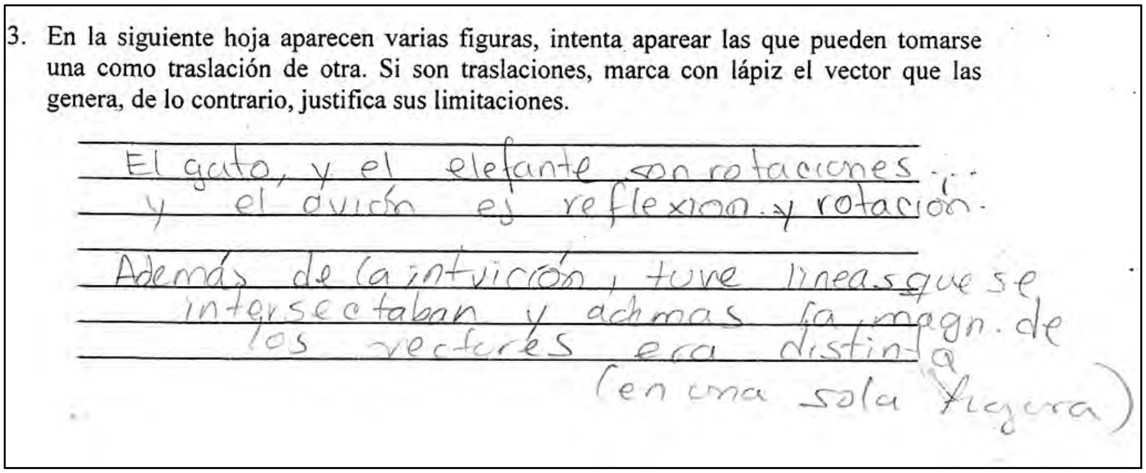
- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

Encajaba primero la linea (toda la linea).
y luego me deslizaba hasta que coincidiera el
punto sin salirme o desencajarme de la linea.

Fig. ***N1.D.1***



3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

El gato, y el elefante son rotaciones y el avión es reflexion y rotación.

Además de la intuición, tuve lineas que se intersectaban y ademas la magn. de los vectores era distinta (en una sola figura)

Fig. ***N1.D.2***

Al margen de su declaración sobre las transformaciones de las figuras que no son traslaciones, la respuesta tres incluye características de las traslaciones que distintos pares de figuras no contienen. Estas afirmaciones son mantenidas para hacer una discriminación de figuras trasladadas y están contempladas en la respuesta 4.

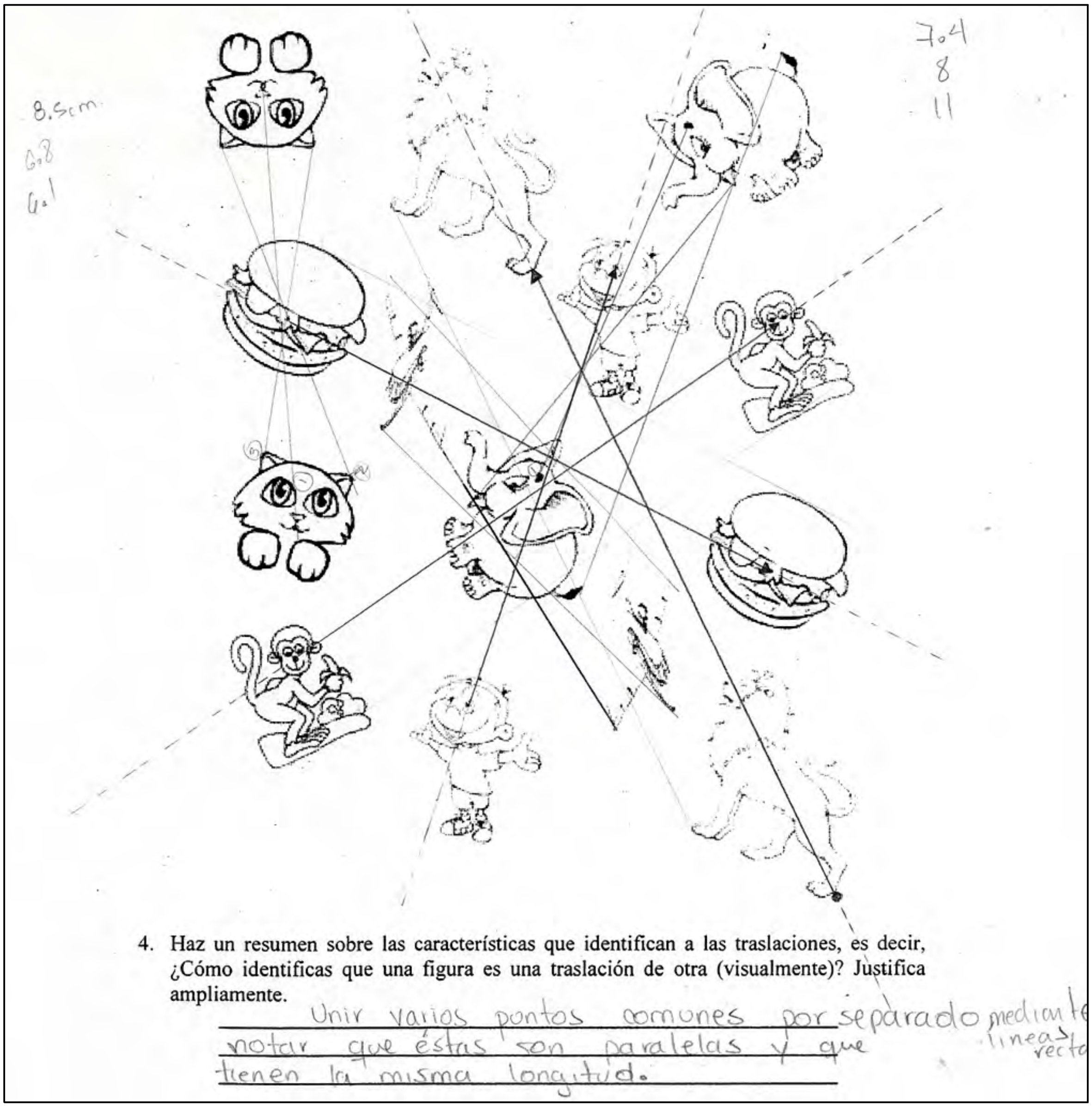


Fig. ***N1.D.3***

A diferencia del resto de compañeros, no sólo utiliza elementos visuales, además incorpora características que conoce de la transformación involucrada, los elementos evidentes son el paralelismo entre los segmentos formados por puntos homólogos y la longitud única de los mismos (en las esquinas superiores de la hoja aparecen tercias de números, los cuales parecen representar un segundo criterio para la discriminación), esto último relacionado con la magnitud del vector de traslación. Observando los segmentos utilizados como apoyo, se evidencia el uso de una estrategia perceptiva, ya que no aparecen los trazos auxiliares para describir a los pares de figuras que si son una traslación.

Durante la fase de explicitación, el estudiante estaba más interesado en escuchar las afirmaciones de sus compañeros que en compartir las propias, cuidaba que sus aportaciones fueran pertinentes, en los momentos en los que no contribuía, constantemente utilizaba gestos (muecas de aprobación, desaprobación, confusión, etc.). En lo concerniente a la fase de integración, involucró propiedades de manera explícita en sus respuestas, lo cual nos hace afirmar que no sólo cumplió con los objetivos del nivel sino que fueron superados.

OBSERVACIONES DEL NIVEL 1

Como estrategia didáctica y dado que la mayoría utilizó un sólo segmento para discriminar entre figuras trasladadas y no trasladadas (salvo el caso D), consideramos apropiado cuestionarlos sobre la posibilidad de que las figuras estuvieran inclinadas 1º, de tal manera que fuera imperceptible a la vista y cómo se verían afectadas sus respuestas al considerar tal reflexión. Durante la discusión grupal, los casos B y C hablaron (complementándose) sobre construir más de un segmento y usar el paralelismo (entre los segmentos formados por puntos homólogos), fue en este momento cuando el caso D compartió su estrategia, la cual fue aprobada por su practicidad.

Los casos seleccionados cumplieron con los requerimientos del nivel, todos son capaces de construir traslaciones mediante la manipulación de figuras (concretamente con el deslizamiento sobre una recta, una distancia dada) y de discriminar visualmente pares de figuras trasladadas de figuras no trasladadas. Considerando lo poco exigente de las pruebas solicitadas en las actividades, las categorías de demostración no tienen cabida en el apartado.

ANÁLISIS DEL SEGUNDO NIVEL DE VAN HIELE
(Hojas de trabajo No.3, No. 4, No.5 y No-5b).

Pensando en dar seguimiento a las hojas de trabajo anteriores y el cierre de la discusión grupal, sobre la necesidad de verificar para más de un segmento, las hojas correspondientes al segundo nivel de Van Hiele incorporan características aisladas de la traslación, con la intención de asignar un papel relevante al vector de traslación. Con la finalidad de reorientar la afirmación sobre deslizamientos para identificar traslaciones, se realizan exploraciones que pretenden encaminar al estudiante a descubrir distintas propiedades como: el paralelismo entre los segmentos formados por puntos homólogos, la inclinación de las figuras (utilizando el paralelismo de segmentos homólogos) y relación de las características con los elementos definitorios de los vectores en el plano.

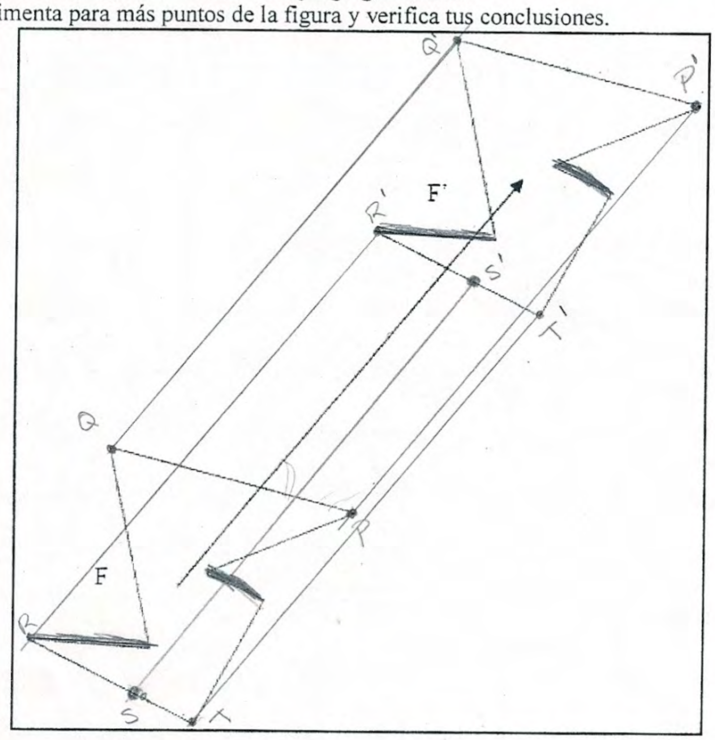
Por las expectativas del nivel, en algunas ocasiones se incorporan exploraciones dirigidas en un ambiente de geometría dinámica y con un lenguaje matemático más extenso. Dos de las actividades fueron realizadas en el centro de cómputo y el resto en el salón de clases, se incorporó una sesión adicional (posterior a la hoja de trabajo 5-b, para que los estudiantes tuvieran la oportunidad de construir una definición de traslación en el plano sintético).

Para responder a las hojas trabajadas en el salón de clases, a los estudiantes se les proporcionó una regla y hojas blancas. Considerando las actividades solicitadas en la presente sección, los elementos incorporados para el análisis se enfocan en las respuestas donde realiza alguna afirmación de peso o conjetura concreta, aclarando que la interpretación de las estrategias de argumentación usadas por los estudiantes son las observaciones de interés.

Caso A:

ACTIVIDADES:

- Utiliza el siguiente dibujo, donde se ilustra un polígono (F) y su traslación (F') a través del vector señalado, toma un punto de la figura original (utiliza lugares clave de la figura para no complicar la búsqueda como: los vértices del polígono, los puntos medios de los lados, etc.) y llámalo P. Posteriormente encuentra su correspondiente de la figura trasladada (etiquétalo con el símbolo P').
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- Responde las preguntas utilizando tu juego geométrico
- Experimenta para más puntos de la figura y verifica tus conclusiones.



Al segmento que trazaste le llamaremos PP'

1. Comparando la magnitud del segmento PP' y el vector de traslación (flecha que define la magnitud y dirección del movimiento). ¿Cómo son las longitudes de los segmentos?

las longitudes del segmento son iguales

Fig. ***N2.A.1***

Siguiendo las instrucciones, el estudiante mide los segmentos construidos y compara las longitudes con la magnitud del vector de traslación original (dado que la pregunta incide en la estrategia del estudiante, sería poco objetivo evaluar la argumentación en este momento).

- Experimenta con más puntos. ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Si Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura y anota tus observaciones:

Que para cada punto de la figura original le corresponde un punto de la figura trasladada

Fig. ***N2.A.2***

De manera complementaria, se le solicita que verifique su afirmación para distintos puntos (sin tener acceso al software de Geometría Dinámica), la comprobación elaborada puede interpretarse como un primer acercamiento a la definición puntual de traslación. Las consideraciones expresadas por el alumno son abandonadas posteriormente durante la sesión destinada a la construcción de una definición de traslación por el salón (correspondientes a la fase 5 del segundo nivel).

2. ¿Qué ángulo forman el segmento PP' y el vector de traslación?

   0°

   - Nuevamente, experimenta con más puntos. ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?
   - Anota tus observaciones:

   Si, por que se observa la misma medida, ya que se toma el punto en el mismo lugar que en la figura original

3. Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

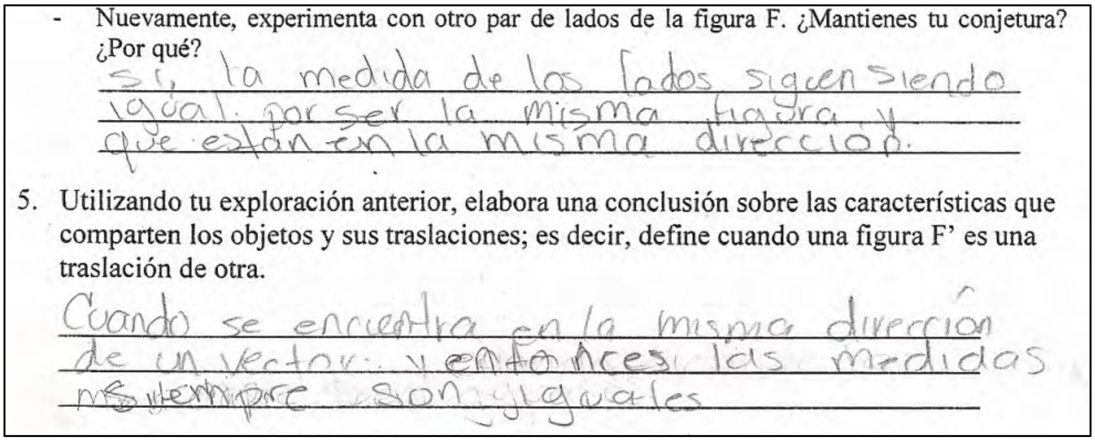
   Cuando F' tiene las mismas medidas y la misma dirección que la figura F

4. Señala (remarcando con tu lápiz) uno de los lados de la figura original (F), de igual manera indica el correspondiente "lado" de la figura trasladada (F'). ¿Qué ángulo forman los segmentos señalados?

   0°

   - Mide los lados señalados (el de la figura original y su correspondiente de la figura trasladada) y compara las medidas ¿Cómo son entre ellas?
   - Elabora una conclusión sobre los ángulos y medidas de lados homólogos

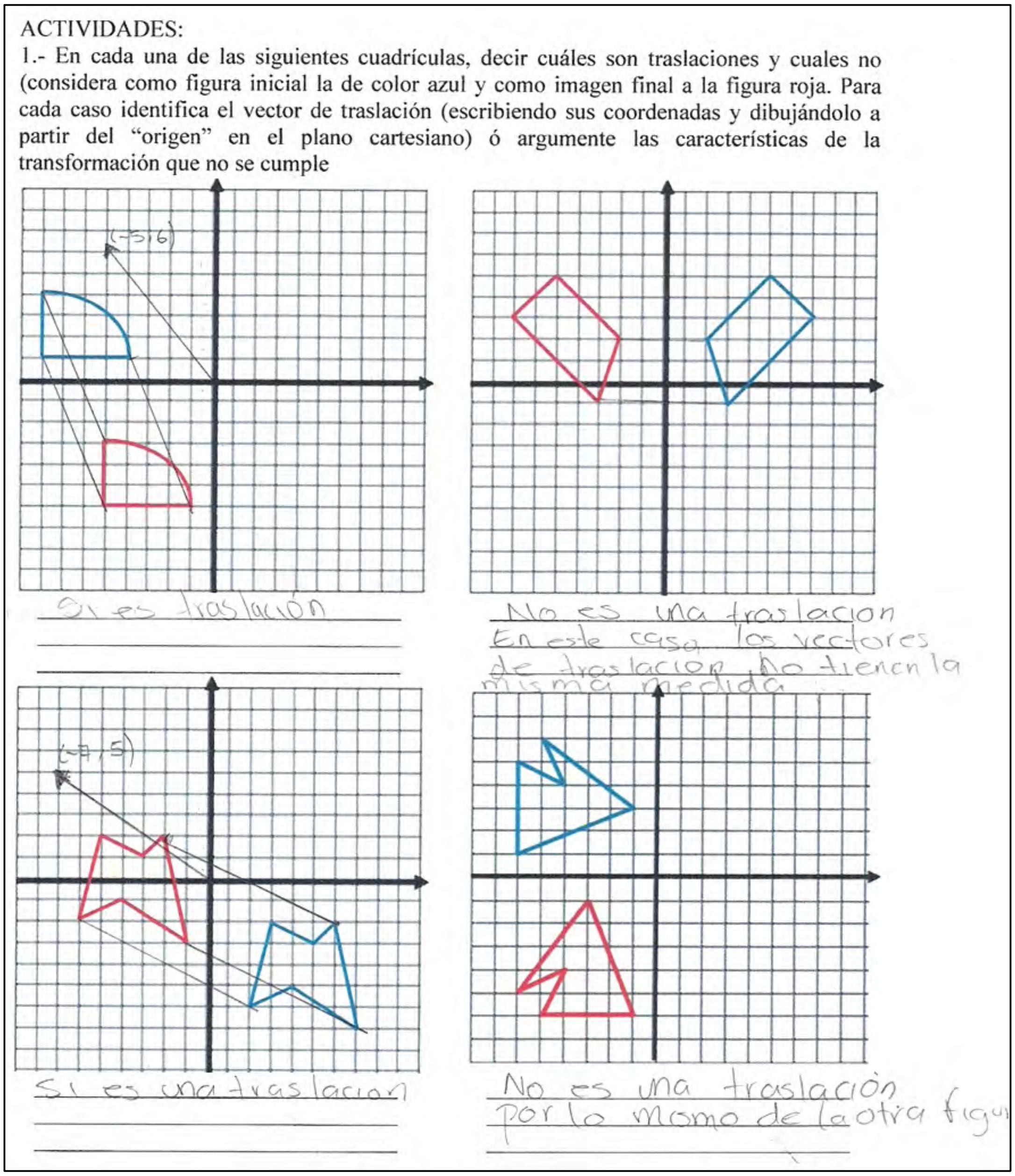
   Los lados son iguales


- Nuevamente, experimenta con otro par de lados de la figura F. ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?
  si, la medida de los lados siguen siendo igual. por ser la misma figura, y que están en la misma dirección.

5. Utilizando tu exploración anterior, elabora una conclusión sobre las características que comparten los objetos y sus traslaciones; es decir, define cuando una figura F’ es una traslación de otra.
   Cuando se encuentra en la misma dirección de un vector y entonces las medidas siempre son iguales

Fig. ***N2.A.3***

Nuevamente aparece la confusión con el término “*dirección*” (obsérvese las preguntas 3, 4 y 5). Al margen de la recurrencia de la confusión con el término, para la presente hoja de trabajo el estudiante declara dos afirmaciones de peso para la transformación de traslación, la cuales son: “*Los lados son iguales (*son congruentes*)”* y *“los lados[…] están en la misma dirección (*son paralelos*)*” reiterando la conclusión en el inciso final de la pregunta 4. Una aclaración sobre la estrategia de argumentación, es el uso de mediciones marcadas en su hoja de trabajo para redactar las conjeturas. En la terminología de Rodríguez aparece un argumento inductivo de ejemplo genérico, por basarse en mediciones y ejemplos específicos, tomados bajo la premisa de ser representativos (nuevamente se hace la aclaración de la influencia de la exploración guiada, así que asumiremos una postura de especulación hasta contrastar las afirmaciones con las respuestas obtenidas en el examen final).



ACTIVIDADES:

1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir cuáles son traslaciones y cuales no (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja. Para cada caso identifica el vector de traslación (escribiendo sus coordenadas y dibujándolo a partir del "origen" en el plano cartesiano) ó argumente las características de la transformación que no se cumple

Si es traslación

No es una traslacion
En este caso los vectores de traslacion no tienen la misma medida

Si es una traslacion

No es una traslación
por lo mismo de la otra figu

Fig. ***N2.A.4***

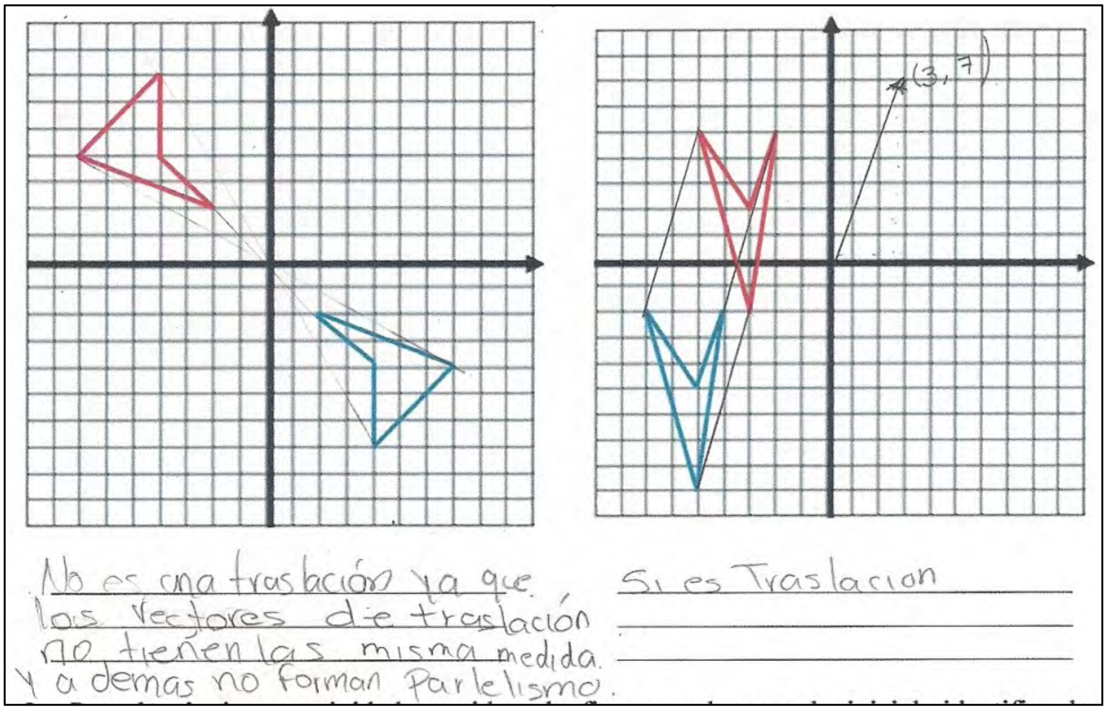


Fig. ***N2.A.5***

Al observar la hoja de trabajo 5, el estudiante elabora trazos auxiliares para verificar que una figura es traslación de otra. En los cuadros 1, 3 y 6 incorpora segmentos entre vértices representativos para realizar las comparaciones (utilizando la estrategia presentada por sus compañeros en la discusión grupal del primer nivel). En un par de ocasiones aparece una confusión sobre el sentido del vector de traslación, pero fue corregido durante la discusión grupal.

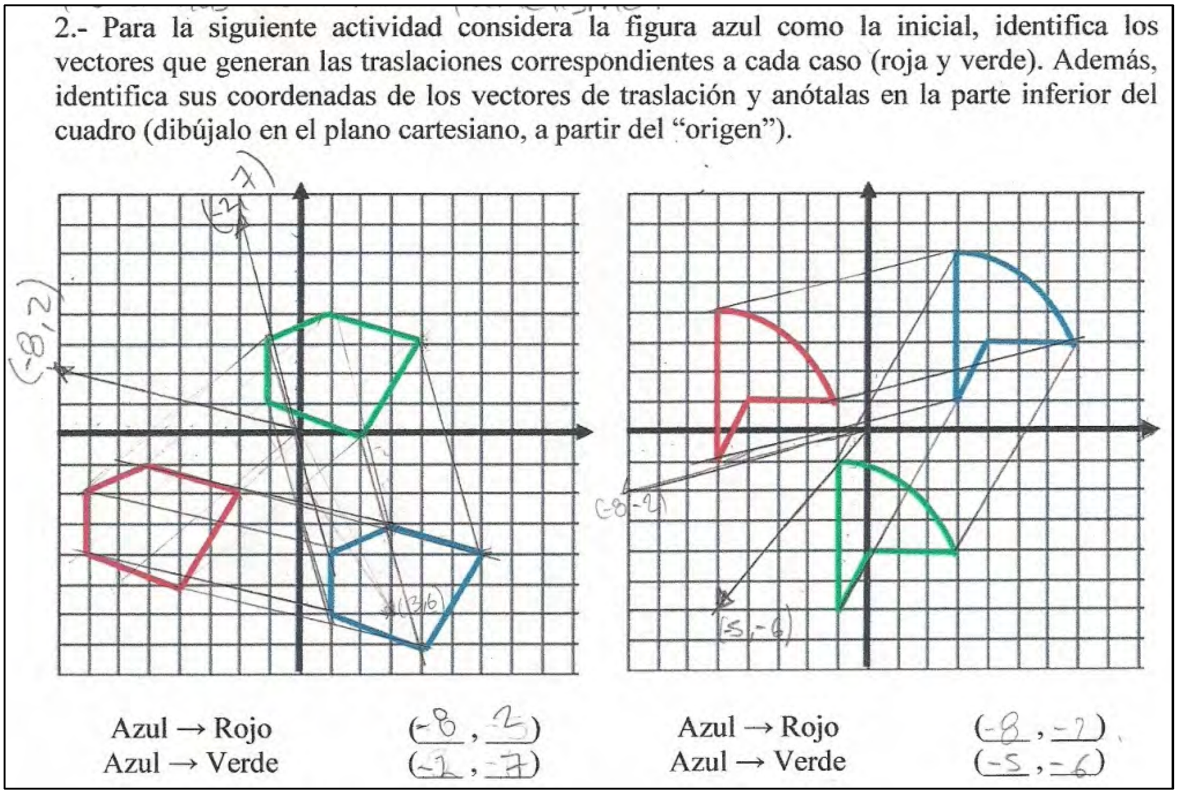


Fig. ***N2.A.6***

Incorporando una versión alternativa del tratamiento de la cerradura de traslaciones, la actividad 5 es considerada concluida hasta resolver la hoja de trabajo 5b, en la cual se relacionan los vectores de traslación de distintas figuras (con la intención de promover el uso de la composición de traslaciones para describir nuevas traslaciones).

Producto de tu experiencia con las actividades anteriores has generado algunas conclusiones sobre las propiedades que debe de cumplir una figura para ser la traslación de otra.

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Traslación 3", aparecen varios elementos.

- Intenta mover los elementos que aparecen. ¿Qué observas? ¿Cuáles son los objetos del archivo que puedes manipular?

  Los Vectores V y W y tambien la figura Azul si nosotros movemos cualquier vetice de la figura se observa q la figura roja y azul toman su misma forma, tambien vemos que si movemos completamente la fig. Azul se mueven la roja y verde en el mismo sentido

- Enlista los elementos que el software te permite mover y describe el efecto en el resto de los objetos al hacer dicha manipulación (para responder a ésta pregunta mueve un objeto a la vez).

  El vector V: si se alarga o se hace pequeño la figura roja se mueve junto con el vetor.
  Vector W: lo mismo pasa con este Vector y la figura Verde
  figura Azul: si movemos la figura azul se mueven las otras para el mismo lado.

- Utilizando el plano cartesiano, coloca los vectores V y W en cualquier posición del plano ¿Cuáles son las coordenadas seleccionadas para cada vector? ¿Qué objetos se movieron y cuál es el efecto de seleccionar tales coordenadas en ellos?

  V=(-5,2) y W=(5,3) y solo se mueven las figuras roja y Verde

- ¿Qué representa cada uno de los vectores del archivo (V, W y T)?

  el vector V representa la direccion de la figura roja y el W la direccion de la figura verde

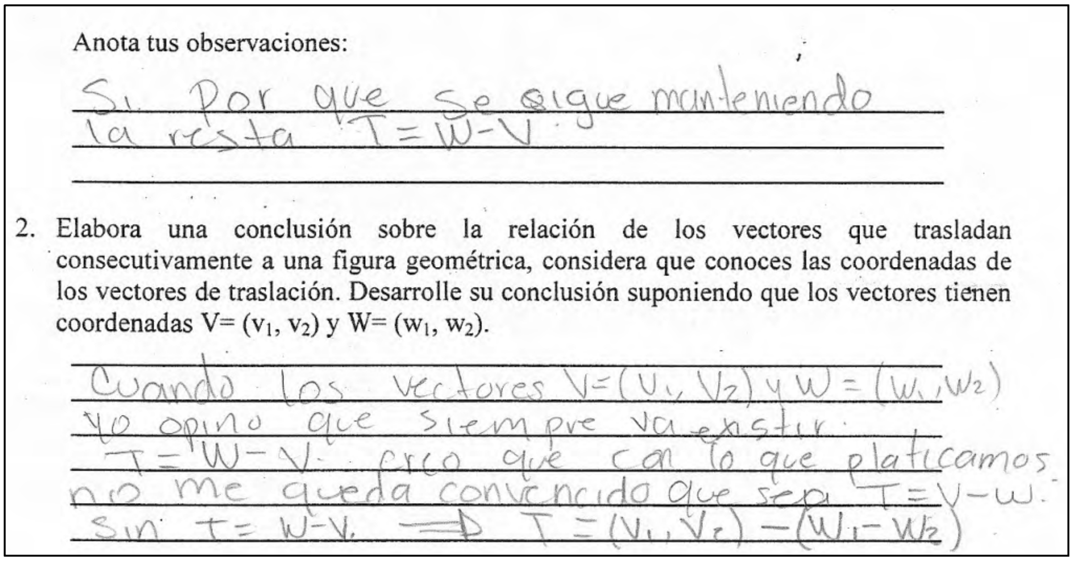
- ¿Cuál es la relación entre el vector T y los vectores V y W?

  No vi que si los tres vectores los pongo en el origen las 3 figuras quedan encimadas como si solo fuera una figura

  $T = W - V$

- Experimenta para distintos valores de V y W, ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?

Fig. ***N2.A.7***


Anota tus observaciones:

Si. Por que se sigue manteniendo la resta $T = W - V$

2. Elabora una conclusión sobre la relación de los vectores que trasladan consecutivamente a una figura geométrica, considera que conoces las coordenadas de los vectores de traslación. Desarrolle su conclusión suponiendo que los vectores tienen coordenadas V= (v_1, v_2) y W= (w_1, w_2).

Cuando los vectores $V=(V_1, V_2)$ y $W=(W_1, W_2)$ yo opino que siempre va existir. $T = W - V$. creo que con lo que platicamos no me queda convencido que sea $T = V - W$. sin $T = W - V$. $\Rightarrow T = (V_1, V_2) - (W_1 - W_2)$

Fig. ***N2.A.8***

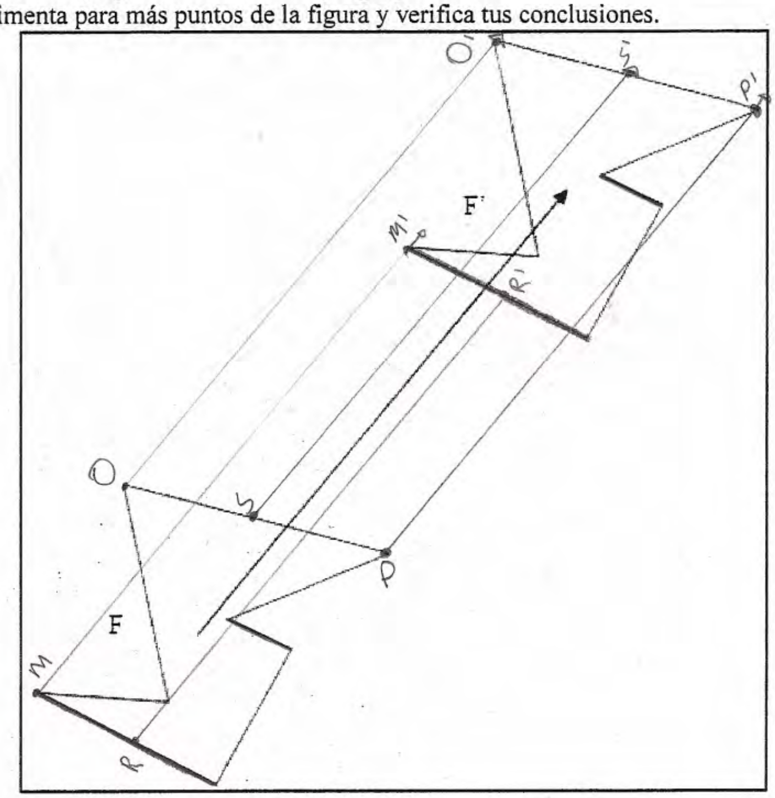
Las discusiones grupales del segundo nivel de razonamiento contaron con una mayor participación del estudiante, aunque el rol que asumió nuevamente fue pasivo y se limitaba a escuchar las estrategias usadas por sus compañeros, sin tener mucho interés en compartir las propias. No logró completar la fase de exploración libre en una sesión (correspondiente a la hoja de trabajo 5 y 5b), así que tuvo que recurrir a tiempo de la siguiente clase (la pérdida de la secuencia influyó considerablemente en sus conclusiones, esta afirmación es evidente al evaluar las respuestas 1 y 2, por lo contradictorio de las mismas). Para evaluar la fase 5, a los estudiantes se les planteó el desafío de diseñar una definición "correcta" de traslación, el estudiante "A" consideró las propiedades de paralelismo de segmentos entre puntos homólogos y la longitud de los trazos, resaltando en su definición elementos de tipo visual, pero sin el uso de herramientas que le permitan asegurarlas (particularmente con la propiedad de paralelismo). El argumento fuerte en el que sustenta la definición es de tipo perceptivo, sin llegar a enriquecerlo con el uso de mediciones.

Resumiendo el desempeño del caso "A", identificamos una adaptación en cuanto al lenguaje y una mejora significativa con respecto a las estrategias de exploración. Aunque no tenemos evidencia de que asimile los métodos de manera apropiada su uso es aceptable. Las respuestas son evaluadas de manera satisfactoria, considerando los requisitos del segundo nivel.

Caso B:

ACTIVIDADES:

- Utiliza el siguiente dibujo, donde se ilustra un polígono (F) y su traslación (F') a través del vector señalado, toma un punto de la figura original (utiliza lugares clave de la figura para no complicar la búsqueda como: los vértices del polígono, los puntos medios de los lados, etc.) y llámalo P. Posteriormente encuentra su correspondiente de la figura trasladada (etiquétalo con el símbolo P').
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- Responde las preguntas utilizando tu juego geométrico
- Experimenta para más puntos de la figura y verifica tus conclusiones.



Al segmento que trazaste le llamaremos PP'

1. Comparando la magnitud del segmento PP' y el vector de traslación (flecha que define la magnitud y dirección del movimiento). ¿Cómo son las longitudes de los segmentos?
iguales

- Experimenta con más puntos. ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Si Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura y anota tus observaciones:

Para los puntos O y O' el segmento que los une tiene la misma longitud que FF', igual para el segmento MM'

Fig. ***N2.B.1***

2. ¿Qué ángulo forman el segmento PP' y el vector de traslación?

0°.

- Nuevamente, experimenta con más puntos. ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?
- Anota tus observaciones:

sucede lo mismo, porque todos los demas segmentos son paralelos al vector FF'

3. Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

Cuano F' tiene las mismas medidas y la misma dirección que una figura F

4. Señala (remarcando con tu lápiz) uno de los lados de la figura original (F), de igual manera indica el correspondiente "lado" de la figura trasladada (F'). ¿Qué ángulo forman los segmentos señalados?

0°.

- Mide los lados señalados (el de la figura original y su correspondiente de la figura trasladada) y compara las medidas ¿Cómo son entre ellas?
- Elabora una conclusión sobre los ángulos y medidas de lados homólogos

-son iguales.
-los ángulos son 0, ya que los lados son paralela.

- Nuevamente, experimenta con otro par de lados de la figura F. ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?

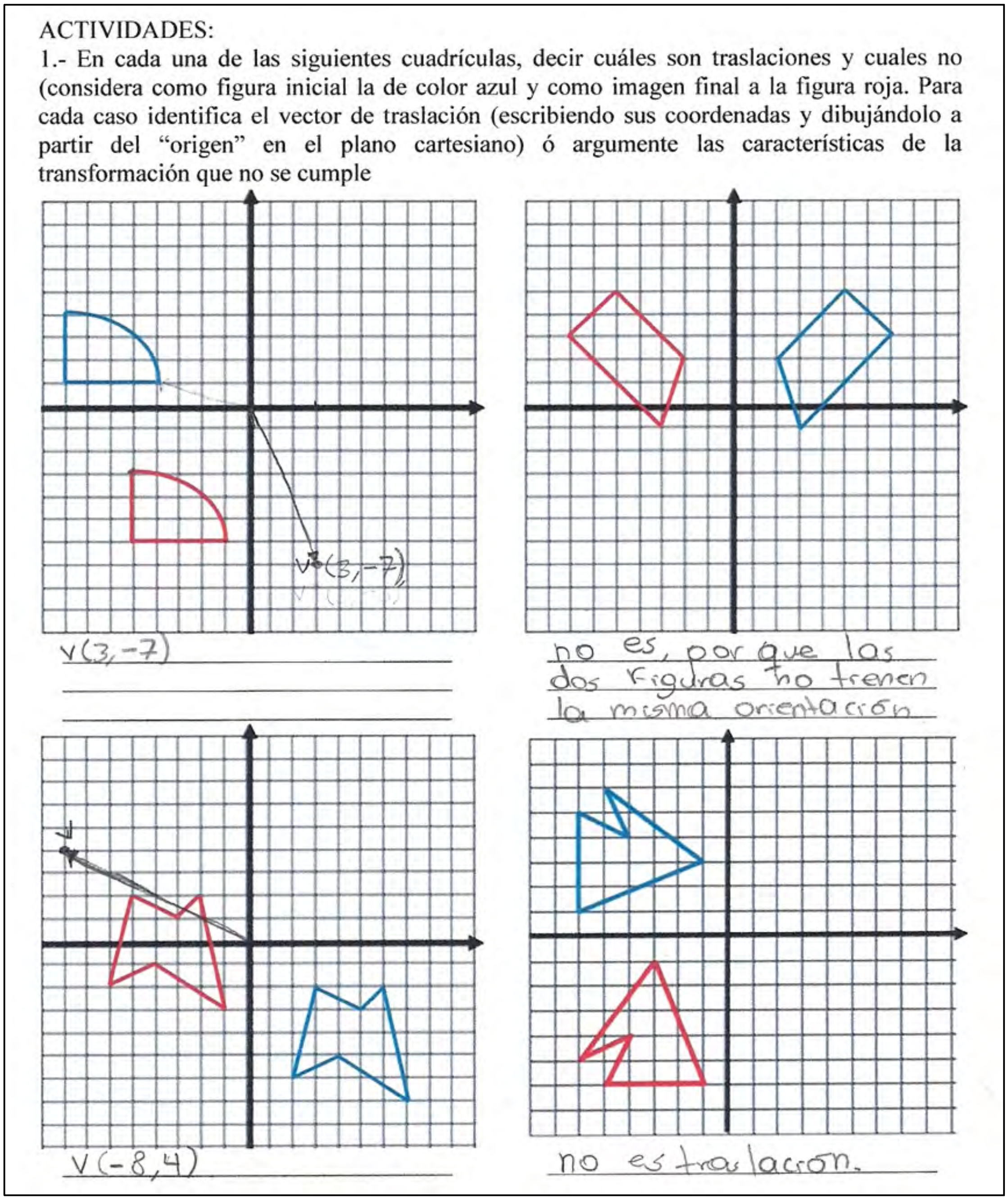
Si, por que todos los lados de la figura son paralelos a sus correspon-dientes en la traslacion.

5. Utilizando tu exploración anterior, elabora una conclusión sobre las características que comparten los objetos y sus traslaciones; es decir, define cuando una figura F' es una traslación de otra.

Cuando F' tiene las mismas medidas y la misma dirección que una figura F.

Fig. ***N2.B.2***

De manera similar al caso anterior, el estudiante resuelve la actividad mediante el uso de mediciones de los trazos elaborados, construyendo una conjetura aceptable sobre las características de los segmentos formados por puntos homólogos.



ACTIVIDADES:

1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir cuáles son traslaciones y cuales no (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja. Para cada caso identifica el vector de traslación (escribiendo sus coordenadas y dibujándolo a partir del "origen" en el plano cartesiano) ó argumente las características de la transformación que no se cumple

Fig. ***N2.B.3***

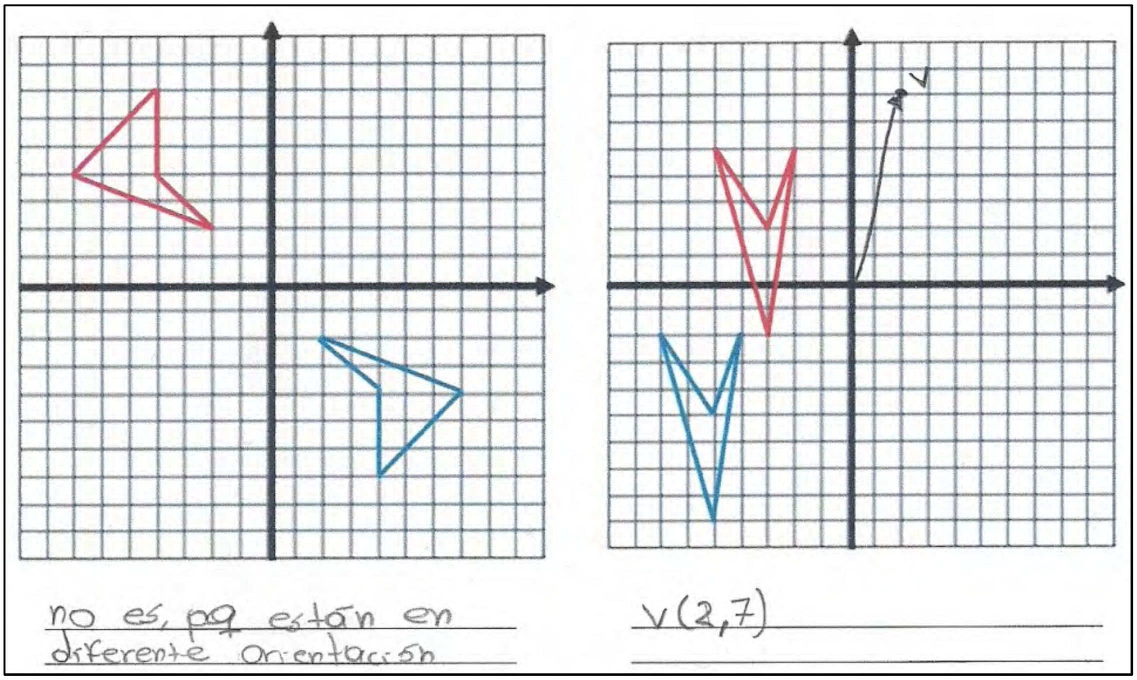


Fig. ***N2.B.3***

En la hoja de trabajo número 5 aparece una corrección en cuanto al término "*dirección*", sustituyéndolo por la palabra "*orientación*" al describir las transformaciones del segundo y quinto cuadro (nuevamente hacemos la aclaración sobre la interpretación del término "*orientación*", al ser utilizada para referirse a la inclinación de las figuras). La herramienta para asegurar que una figura es traslación de otra, consistió en marcar puntos homólogos y hacer conteos de las unidades en dirección vertical y horizontal, si los desplazamientos coincidían para al menos 2 puntos (y sus correspondientes homólogos) se tomaba como una traslación y se utilizaba un método similar para marcar el vector.

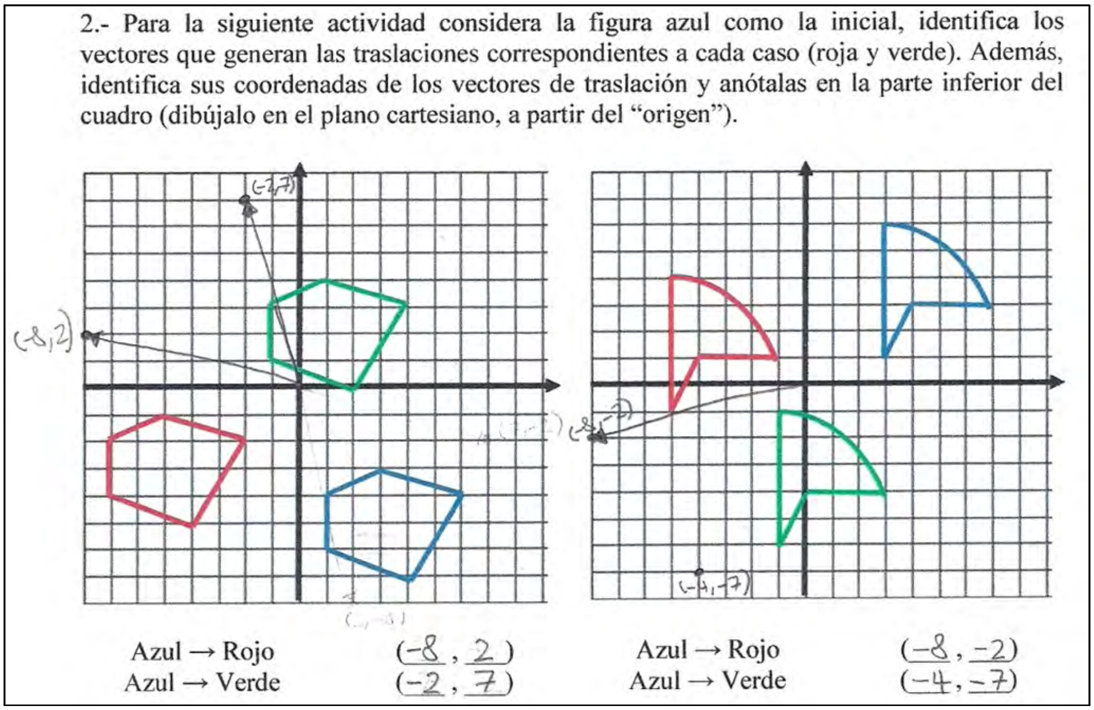


Fig. ***N2.B.4***

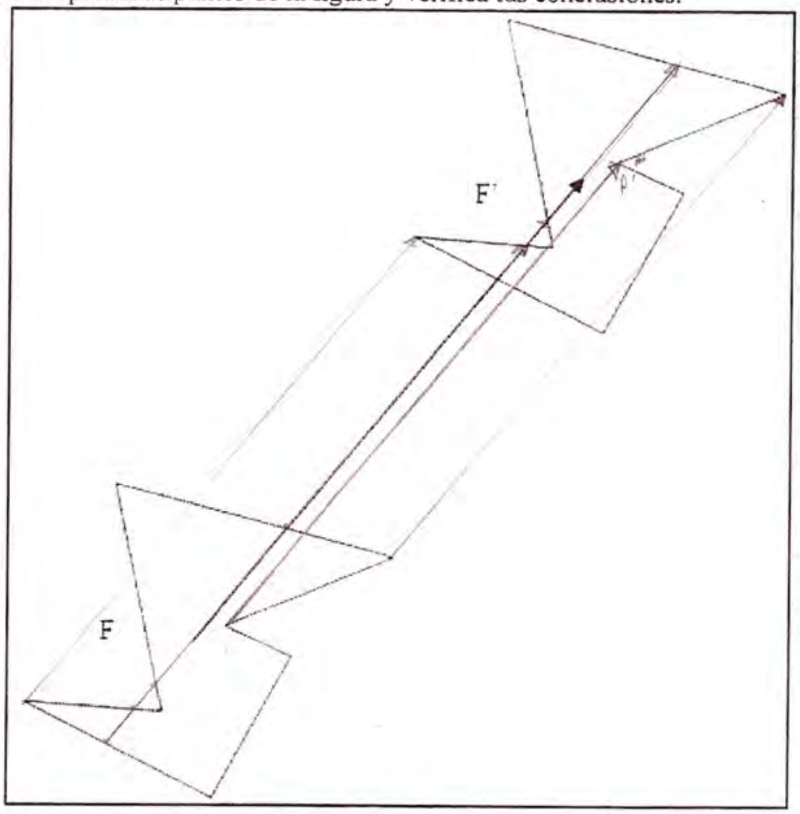
El estudiante no realizó la hoja de trabajo 5b, cumpliendo solamente con las fases 3 y 5, sin asumir un papel de peso en ninguna de ellas. Durante la última sesión, donde construyen la definición de traslación, fue la primera en llegar y por ello construyó una primera versión del término (el cual fue aprobado y asumido como propio por los estudiantes "A" y "C", este último lo enriqueció considerablemente en más de una ocasión), la definición tomaba como pilar a la inclinación de las figuras (manifestando constantemente como sinónimos a "orientación", "dirección" e "inclinación").

El desempeño del estudiante es aceptable, considerando que es capaz de identificar propiedades de manera parcial, sin relacionarlas apropiadamente, pero los elementos de su definición muestran una fuerte influencia perceptiva, además del traslado de confusiones en la terminología utilizada.

Caso C:

ACTIVIDADES:

- Utiliza el siguiente dibujo, donde se ilustra un polígono (F) y su traslación (F') a través del vector señalado, toma un punto de la figura original (utiliza lugares clave de la figura para no complicar la búsqueda como: los vértices del polígono, los puntos medios de los lados, etc.) y llámalo P. Posteriormente encuentra su correspondiente de la figura trasladada (etiquétalo con el símbolo P').
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- Responde las preguntas utilizando tu juego geométrico
- Experimenta para más puntos de la figura y verifica tus conclusiones.

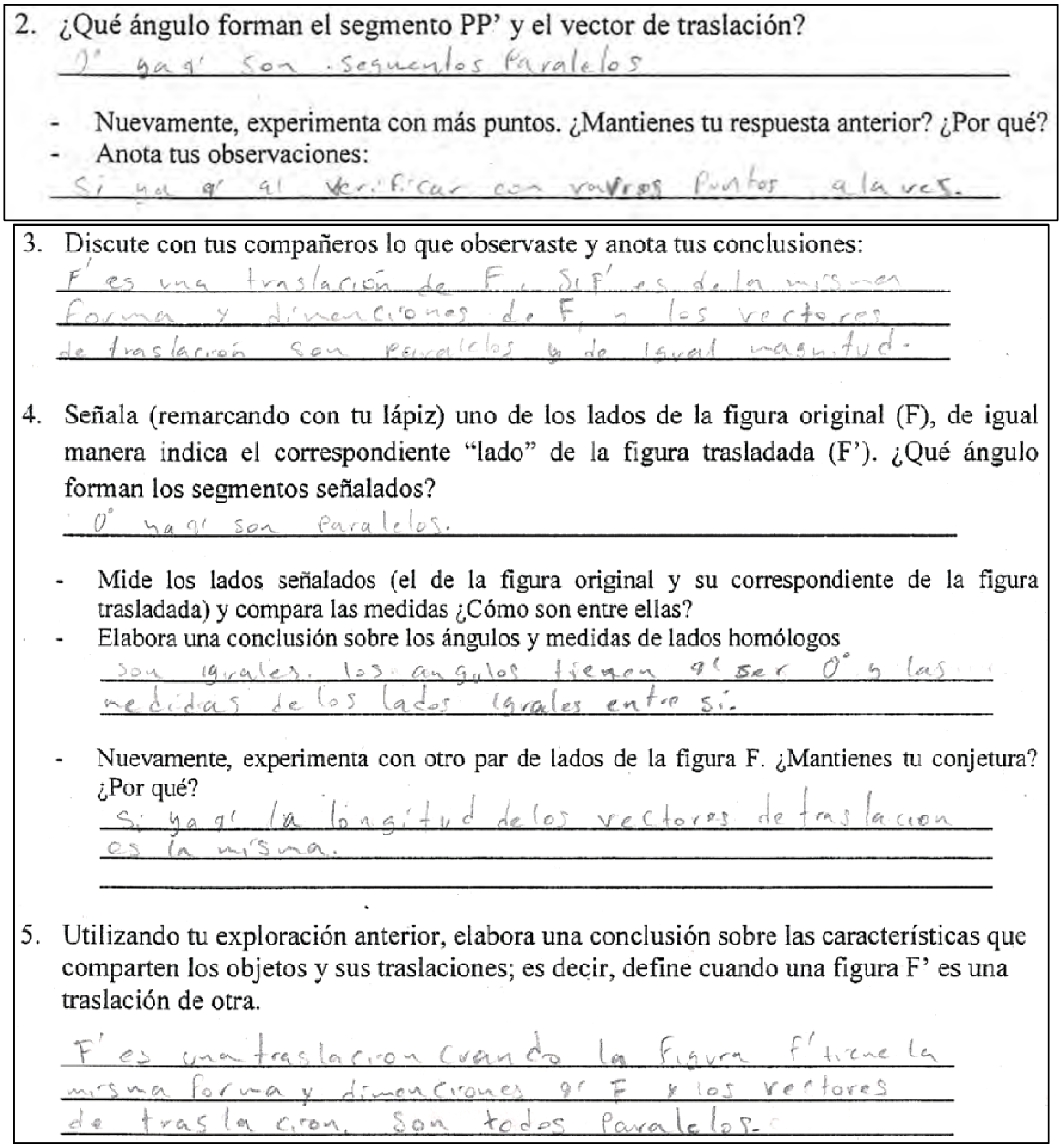


Al segmento que trazaste le llamaremos PP'

1. Comparando la magnitud del segmento PP' y el vector de traslación (flecha que define la magnitud y dirección del movimiento). ¿Cómo son las longitudes de los segmentos?
Son de igual longitud.

- Experimenta con más puntos. ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Sí Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura y anota tus observaciones:
todas las distancias son iguales ya q' es una traslacion a lo largo del vector.

Fig. ***N2.C.1***



2. ¿Qué ángulo forman el segmento PP' y el vector de traslación?

0° ya q' son segmentos paralelos

- Nuevamente, experimenta con más puntos. ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?
- Anota tus observaciones:

Si ya q' al verificar con varios puntos a la vez.

3. Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

F' es una traslación de F, si F' es de la misma forma y dimenciones de F, y los vectores de traslación son paralelos y de igual magnitud.

4. Señala (remarcando con tu lápiz) uno de los lados de la figura original (F), de igual manera indica el correspondiente "lado" de la figura trasladada (F'). ¿Qué ángulo forman los segmentos señalados?

0° ya q' son paralelos.

- Mide los lados señalados (el de la figura original y su correspondiente de la figura trasladada) y compara las medidas ¿Cómo son entre ellas?
- Elabora una conclusión sobre los ángulos y medidas de lados homólogos

son iguales. los angulos tienen q' ser 0° y las medidas de los lados iguales entre sí.

- Nuevamente, experimenta con otro par de lados de la figura F. ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?

Si ya q' la longitud de los vectores de traslacion es la misma.

5. Utilizando tu exploración anterior, elabora una conclusión sobre las características que comparten los objetos y sus traslaciones; es decir, define cuando una figura F' es una traslación de otra.

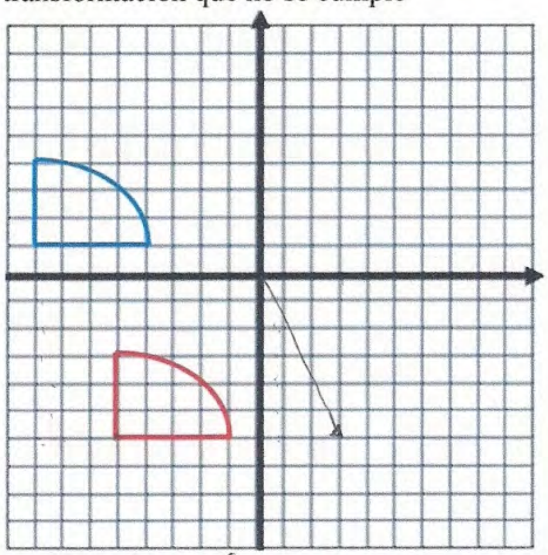
F' es una traslacion cuando la figura F' tiene la misma forma y dimenciones q' F y los vectores de traslacion son todos paralelos.

Fig. ***N2.C.2***

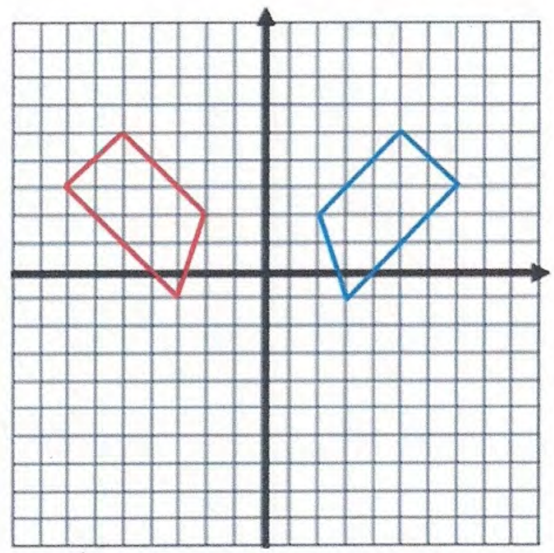
El la pregunta final de la hoja de trabajo 3, se les cuestiona sobre las características que comparten los elementos y sus traslaciones (con la intención de mejorar los criterios declarados en la actividad anterior). El estudiante "C" menciona el paralelismo de los vectores de traslación (en plural, manifestando una diferencia entre vectores al cambiar su punto de aplicación).

ACTIVIDADES:

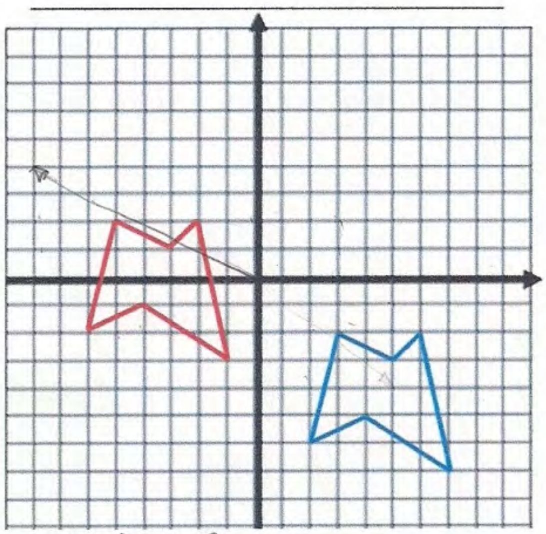
1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir cuáles son traslaciones y cuales no (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja. Para cada caso identifica el vector de traslación (escribiendo sus coordenadas y dibujándolo a partir del "origen" en el plano cartesiano) ó argumente las características de la transformación que no se cumple



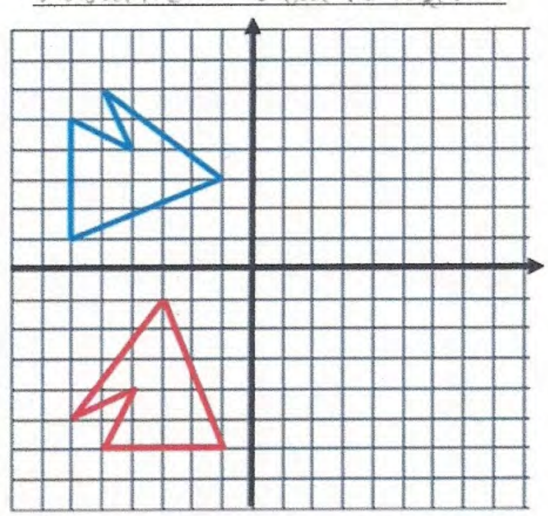
(3,-7) Sí



esta no es ya q' los vectores de traslacion son d' diferente magnitud. es una reflexion



(-8,4) Si



No es ya q' los vectores de traslacion son diferentes

Fig. ***N2.C.3***

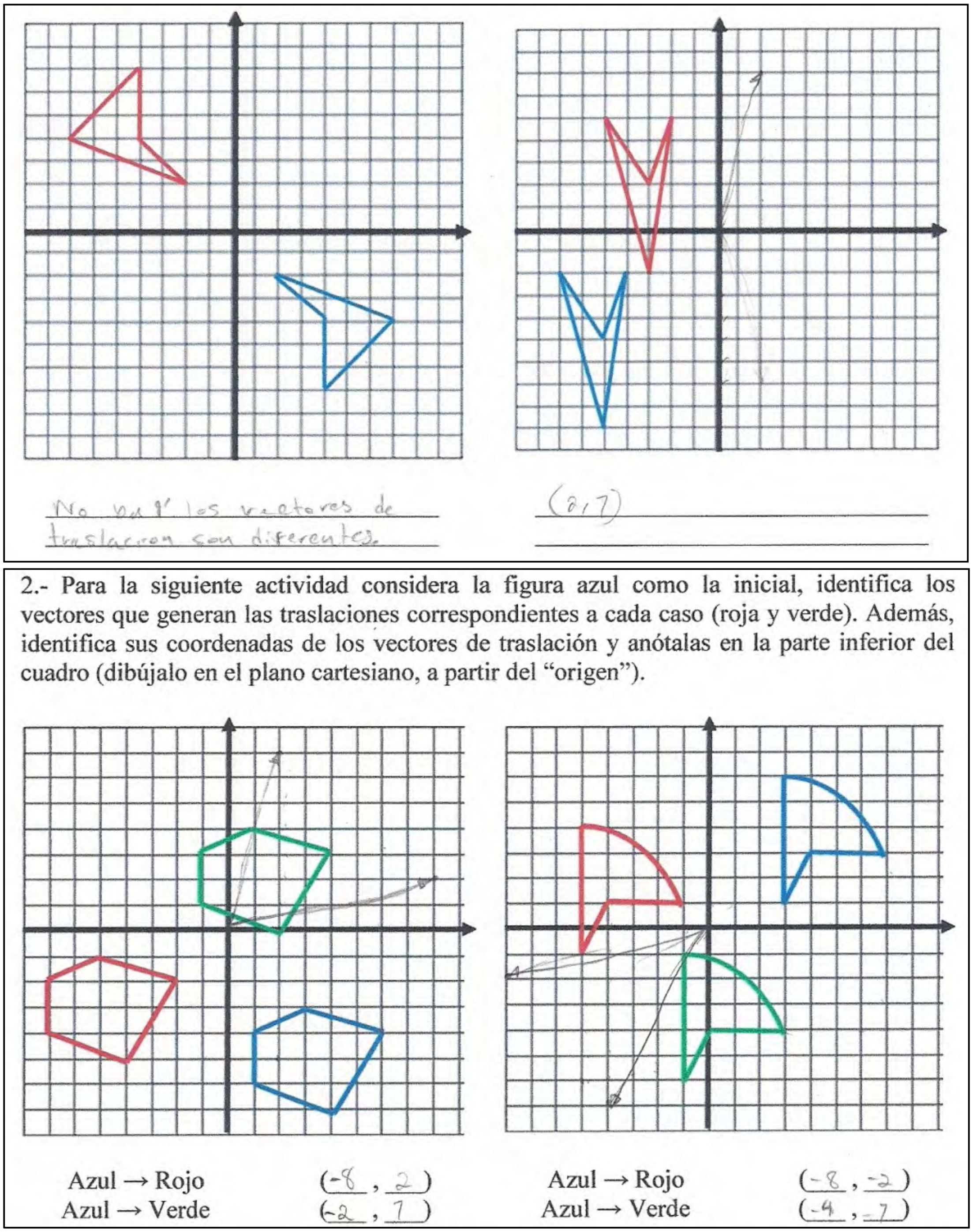


Fig. ***N2.C.4***

Reitera el criterio basado en el paralelismo de los vectores, para distinguir a las traslaciones. Esta postura se arraigóen las creencias del estudiante al grado de utilizarla como elemento definitorio para la transformación de traslación, a continuación se incluye la versión que redactó para referirse a la traslación:

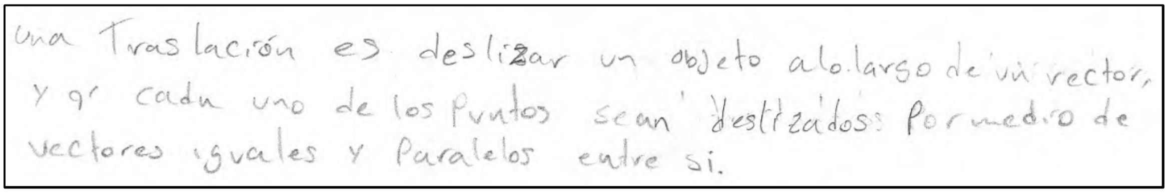

Una Traslación es deslizar un objeto alolargo de un vector, y q' cada uno de los Puntos sean deslizados Por medio de vectores iguales y Paralelos entre si.

Fig. ***N2.C.5***

El estudiante asocia de manera aislada distintas propiedades de la traslación, pero se siente en condiciones para elaborar una definición y presentarla para el consenso del grupo. La definición menciona propiedades, pero con una aparente inclinación al uso del paralelismo como elemento central (la aparente tendencia puede ser interpretada como redundante, ya que el hablar de “vectores iguales” implica el paralelismo), durante las discusiones enriqueció distintas definiciones de sus compañeros al incluir el paralelismo. El descuido constante del vector de traslación como propiedad definitoria no fue compartido por 3 de sus compañeros (entre los cuales destaca el caso D) y el escenario permitió construir dos equipos con la intención de refutar las definiciones elaboradas por el equipo contrario.

Las respuestas de la hoja de trabajo, muestran su conocimiento sobre propiedades de la transformación, aunque sin llegar a relacionarlas de manera apropiada (elemento central para el nivel 2). En cuanto a los sustentos de sus afirmaciones, por el peso de la propiedad de paralelismo y la omisión del papel del vector, muestran una categoría de inducción con ejemplo genérico pura. El estudiante se desenvolvió apropiadamente y se considera que cumple los requisitos para continuar con el siguiente nivel.

Caso D:

Aunque el estudiante tuvo repetidas faltas durante las actividades del segundo nivel, participó en la resolución de la hoja de trabajo 5-b y la sesión dedicada a la definición de traslación.

La definición presentada a la clase fue la siguiente y, a diferencia del caso C, construyó la transformación a través de la manipulación puntual (con esto ya no se consideraban la figuras como un todo, la cual se convirtió en una técnica usada de manera recurrente por algunos de sus compañeros).

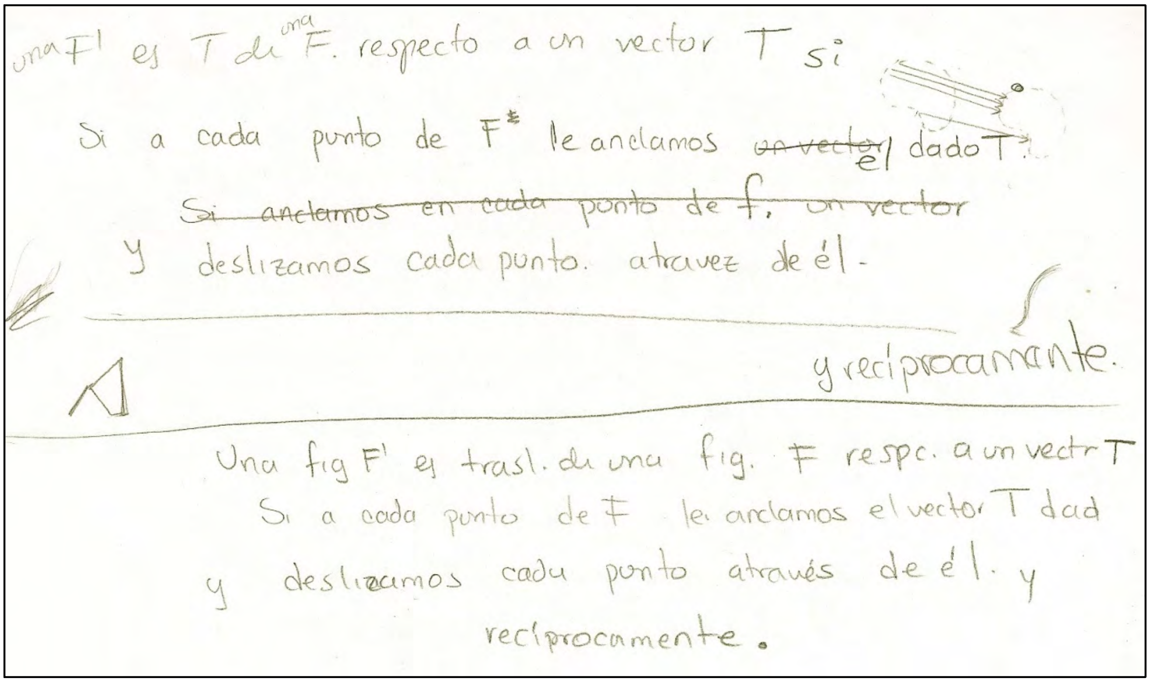

una F' es T de una F. respecto a un vector T si
Si a cada punto de F le anclamos ~~un vector~~ el dado T.
~~Si anclamos en cada punto de f, un vector~~
y deslizamos cada punto. atravez de él.
y recíprocamente.
Una fig F' es trasl. de una fig. F respc. a un vectr T
Si a cada punto de F le anclamos el vector T dad
y deslizamos cada punto através de él. y
recíprocamente.

Fig. ***N2.D.1***

Las hojas de trabajo son satisfactorias y aunque no se completaron todas las actividades, fue bastante eficiente y activo durante las fases 3 y 5. El estudiante asumió el papel de líder en el debate donde se compararon las definiciones creadas por dos equipos y su prioridad fue la consistencia de su definición (en la hoja que incluye su versión personal aparece, en la parte superior derecha, un dibujo que aparenta ser una verificación del enunciado). Comparando la definición con el “caso C”, en ésta versión podemos observar a la trasformación como una instrucción puntual, lo cual facilita su uso. Cuando se discutió sobre las diferencias entre los enunciados, el estudiante fue capaz de generar un contraejemplo convincente para refutar la definición basada en paralelismo.

El estudiante no sólo puso en evidencia la identificación de distintas propiedades, además fue capaz de relacionarlas apropiadamente y generar conclusiones más complejas, los componentes de sus afirmaciones muestran un razonamiento inductivo (por partir de experiencias dadas por ciertas).

OBSERVACIONES DEL NIVEL 2

Los casos C y D cumplieron con los requerimientos del nivel, todos son capaces de identificar traslaciones a través de características puntuales, en cuanto a los casos A y B discriminan apropiadamente, pero sus respuestas exhiben carencias heredadas del nivel anterior, o que nos hace suponer que siguen influenciados por los elementos del primer nivel (al grado de que mantienen sus confusiones originales).

En cuanto a la sesión dedicada a la definición de traslación fueron marcados dos equipos, el formado por los estudiantes que interpretaban a la traslación como una función (donde a cada punto se le asigna un correspondiente, con la ayuda de un vector fijo) y aquellos que consideraban necesario incorporar propiedades de la transformación (las más recurrentes fueron el paralelismo y la congruencia de los segmentos formados por puntos homólogos). Como cierre de la discusión y con la finalidad de generar polémica, se les cuestionó a ambos equipos sobre figuras con trazos curvos y las modificaciones que implicaría en sus definiciones, el equipo que usó los vectores en la definición no se vio afectado; mientras que el grupo que defendía el paralelismo como elemento central mantuvo su escrito pero replanteó la idea de paralelismo (hablando de paralelismo de curvas en términos de las rectas tangentes de puntos homólogos). El contraejemplo que dio por terminada la discusión fue aportado por el caso “D”, el cual hablo de figuras como una colección de puntos aislados (con la intención de omitir trazos continuos, que puedan ser relacionados con paralelismo), tal afirmación no logró ser refutada por el grupo contrario y se dio por terminada la sesión.

ANÁLISIS DEL TERCER NIVEL DE VAN HIELE
(Hojas de trabajo No.6, No. 7, No.8, No.9, No.10 y No.11).

Con miras de integrar las distintas transformaciones, se añaden hojas de trabajo donde se exploran distintas propiedades de la reflexión y rotación, además de sesiones destinadas a la construcción de sus respectivas definiciones. Los objetivos perseguidos por el tercer nivel, no sólo se limitan a la exploración y definición de las trasformaciones en el plano, sino que además pretenden evaluar la cerradura de la traslación de manera general (sin el uso de escenarios concretos y promoviendo una cambio en el tipo de pruebas permitidas).

De manera similar al nivel de razonamiento anterior, las hojas de trabajo incluían actividades para ser resueltas en el centro de cómputo, particularmente las hojas de trabajo 9 y 10 fueron elaboradas para implementarse con esos requisitos, pero complicaciones temporales obligaron a sustituirlas por un par de sesiones en el salón de clases.

Caso A:

1. Si la figura F es trasladada por el vector v y la imagen a su vez por el vector w ($T_w \circ T_v$). ¿Se puede simplificar la traslación a un sólo movimiento? Sin utilizar vectores, ¿Cómo puede determinar gráficamente el movimiento de dicha composición?

Si

Deslizando la figura.

Fig. ***N3.A.1***

La pregunta estaba orientada a describir a la composición de traslaciones como la diagonal de un paralelogramo, omitiendo la versión analítica de los vectores con el fin de agotar los elementos que la geometría sintética nos ofrece para el tratamiento de las transformaciones. Considerando la respuesta del estudiante, podemos suponer que no comprendió la pregunta (lo cual es bastante probable, ya que varios estudiantes mostraron confusión sobre lo que se solicitaba).

2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas u= (u_1, u_2), v= (v_1, v_2), w= (w_1, w_2). ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

Si, se pueden simplificar a una sola coordenada

$T_u \circ T_v \circ T_w = (U_1 + V_1 + W_1, U_2 + V_2 + W_2)$

3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?

Si, pero la solución no es unica. por que igual la podemos descomponer en producto de mas de dos traslaciones

4. Dada una traslación T_v, donde v=(v_1, v_2) ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que w=(w_1, w_2) y z=(z_1, z_2) son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

de muchas maneras y debe cumplir que se encuentre en la misma dimencion

Fig. ***N3.A.2***

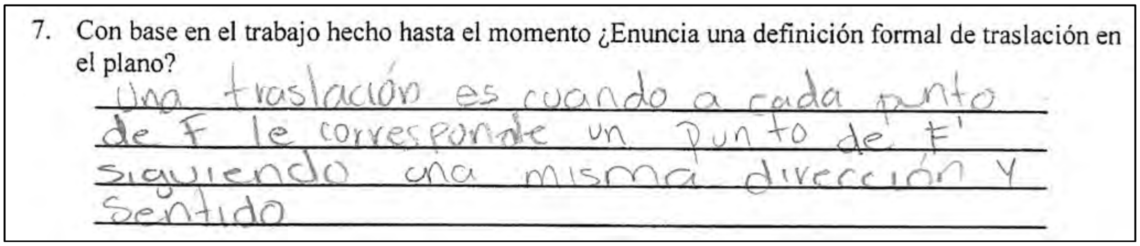
Las preguntas omiten casos particulares y están dirigidas a promover la relación de los vectores en la composición de traslaciones. En las respuestas presentadas son notorias las reflexiones sobre casos generales, particularmente en la pregunta 2 muestra una prueba deductiva de experimento mental. La etiqueta se asigna después de considerar el comportamiento del estudiante durante la fase 3 del nivel, ya que usaba flechas (refiriéndose a ellas como vectores) para ejemplificar su afirmación.

5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

Una sola solucion para cada caso.

Fig. ***N3.A.3***

Considerando la respuesta de la pregunta dos, donde verifica la relación entre la composición de traslaciones y los valores de los componentes de vectores asociados, la afirmación a la pregunta 5 resulta confusa y la justificación con el uso de la suma de los componentes de los vectores no fue requerida.

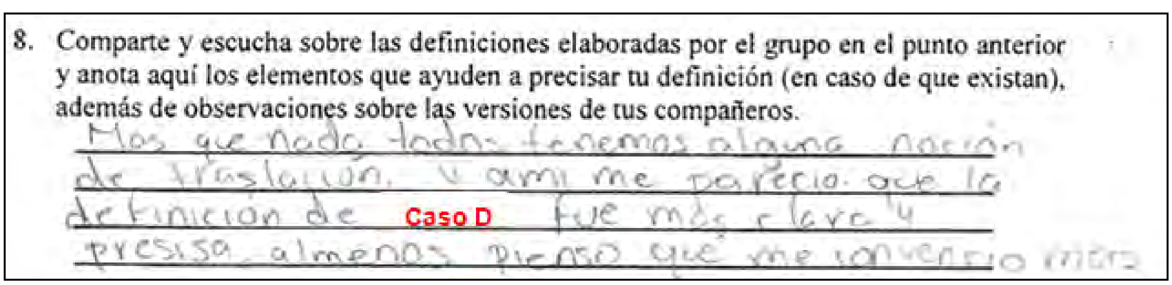

7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

Una traslación es cuando a cada punto de F le corresponde un punto de F' siguiendo una misma dirección y sentido

Fig. ***N3.A.4***

Entre las preguntas de las primeras hojas de trabajo del nivel, se solicita el diseño de una definición final para traslación (considerando que la actividad de cierre del nivel de razonamiento anterior correspondía a la discusión conjunta para crear una versión grupal), para la construcción del enunciado se otorgó la libertad para incorporar elementos de geometría sintética o analítica. En la definición se observa una influencia de la instrucción puntual elaborada por el caso D, aunque sin mencionar el término vector y sustituirlo al mencionar algunas de sus componentes (de manera incompleta).

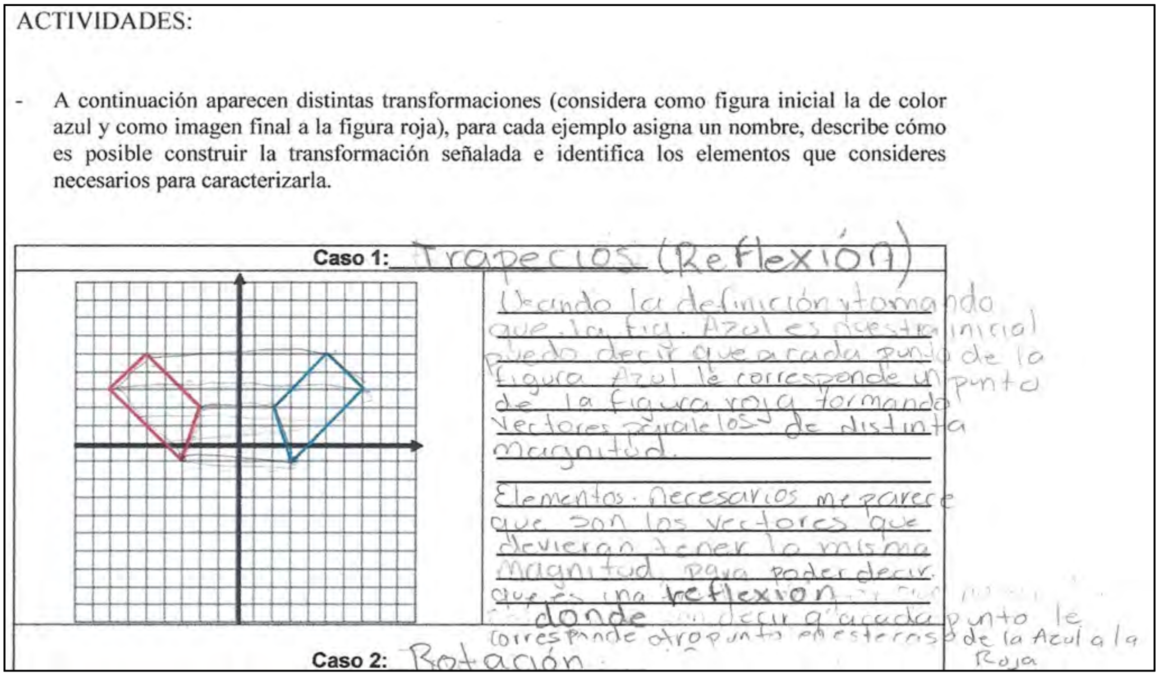
En otro orden de ideas, en la redacción de la pregunta aparece la indicación "*Enuncia una definición formal de la traslación en el plano*" entre signos de interrogación y aunque el error es significativo en cuanto a lo solicitado, no generó confusión entre los compañeros (aparentemente pasó desapercibido durante la resolución de la hoja de trabajo). Relacionado con la misma actividad, el enunciado contiene la palabra "**formal**"; este dato resulta irrelevante para el estudiante y pasa inadvertido ó, al menos, no es considerado como relevante.


8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

Mas que nada todos tenemos alguna noción de traslación, y a mi me parecio que la definicion de Caso D fue más clara y presisa almenos pienso que me convencio más

Fig. ***N3.A.5***

Al completar la fase 3 (explicitación) comenta de manera explícita[7] la influencia del caso D, basta ver la respuesta a la *pregunta 8* donde da las razones que consideró para aprobar su versión. A partir de las siguientes hojas de trabajo, se deja de lado la exploración de traslaciones y se abordan las transformaciones de rotación y reflexión, con los siguientes resultados:



ACTIVIDADES:

- A continuación aparecen distintas transformaciones (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja), para cada ejemplo asigna un nombre, describe cómo es posible construir la transformación señalada e identifica los elementos que consideres necesarios para caracterizarla.

Caso 1: Trapecios (Reflexión)

Usando la definición y tomando que la fig. Azul es nuestra inicial puedo decir que a cada punto de la figura Azul le corresponde un punto de la figura roja formando vectores paralelos de distinta magnitud.

Elementos necesarios me parece que son los vectores que devieran tener la misma magnitud para poder decir que es una reflexión donde decir q' a cada punto le corresponde otro punto en este caso de la Azul a la Roja

Caso 2: Rotación

Fig. ***N3.A.6***

La primera actividad corresponde a la identificación de elementos que caracterizan a distintas transformaciones (equivalente al papel que desempeñan los vectores en la traslación). En el cuadro inicial aparecen trazos de apoyo, los cuales se mencionan como vectores, el papel que desempeñan en la trasformación no resulta muy claro. Durante la discusión grupal se le pidió al estudiante una versión más amplia de respuesta, en sus aportaciones habló de cómo era su estrategia de verificación, la cual consistía en construir vectores (entre puntos homólogos) y comparar su inclinación. En este caso en particular mencionó que el paralelismo se mantenía y era suficiente para definir la trasformación.

[7] La redacción original incluía el nombre del estudiante asignado al "caso D", pero fue editada por cuestiones de confidencialidad.

Ante la postura del estudiante se le presentó un escenario hipotético, donde desconoce la imagen de la figura azul bajo la transformación (la figura roja), y no logró concretar una respuesta durante el resto de la sesión (aproximadamente 15 minutos), terminando por asumir la respuesta del caso C. La exploración del caso A, se interpreta por inductiva por ejemplo genérico puro (en este caso, los ejemplos "genéricos" son los puntos representativos que seleccionó para la verificación).

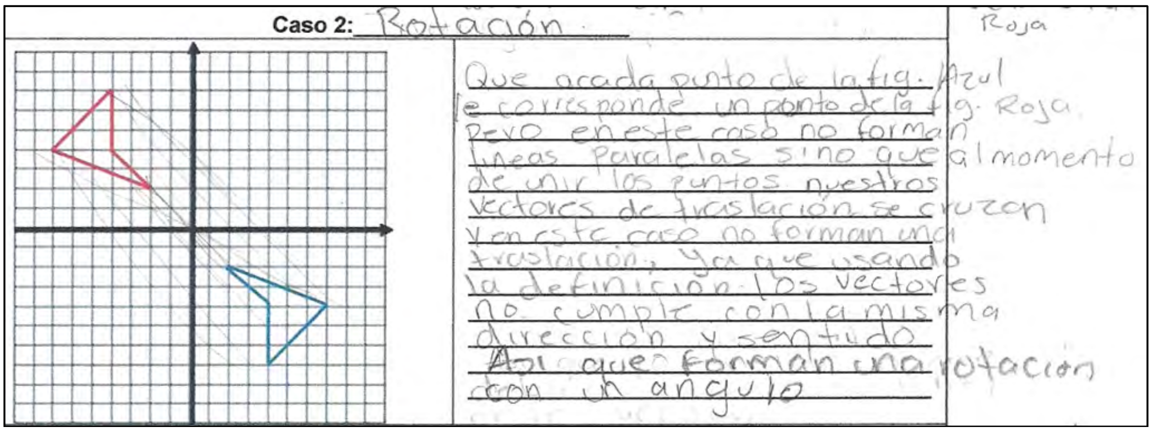


Fig. ***N3.A.7***

Nuevamente recurre a la construcción de segmentos entre puntos "homólogos", pero de manera errónea (salvo para el vértice que se encuentra más cercano al origen), dado que su estrategia no fue de mucho apoyo, opta por hablar de rotación sin ninguna exploración que lo avale (tan sólo lo perceptivo).

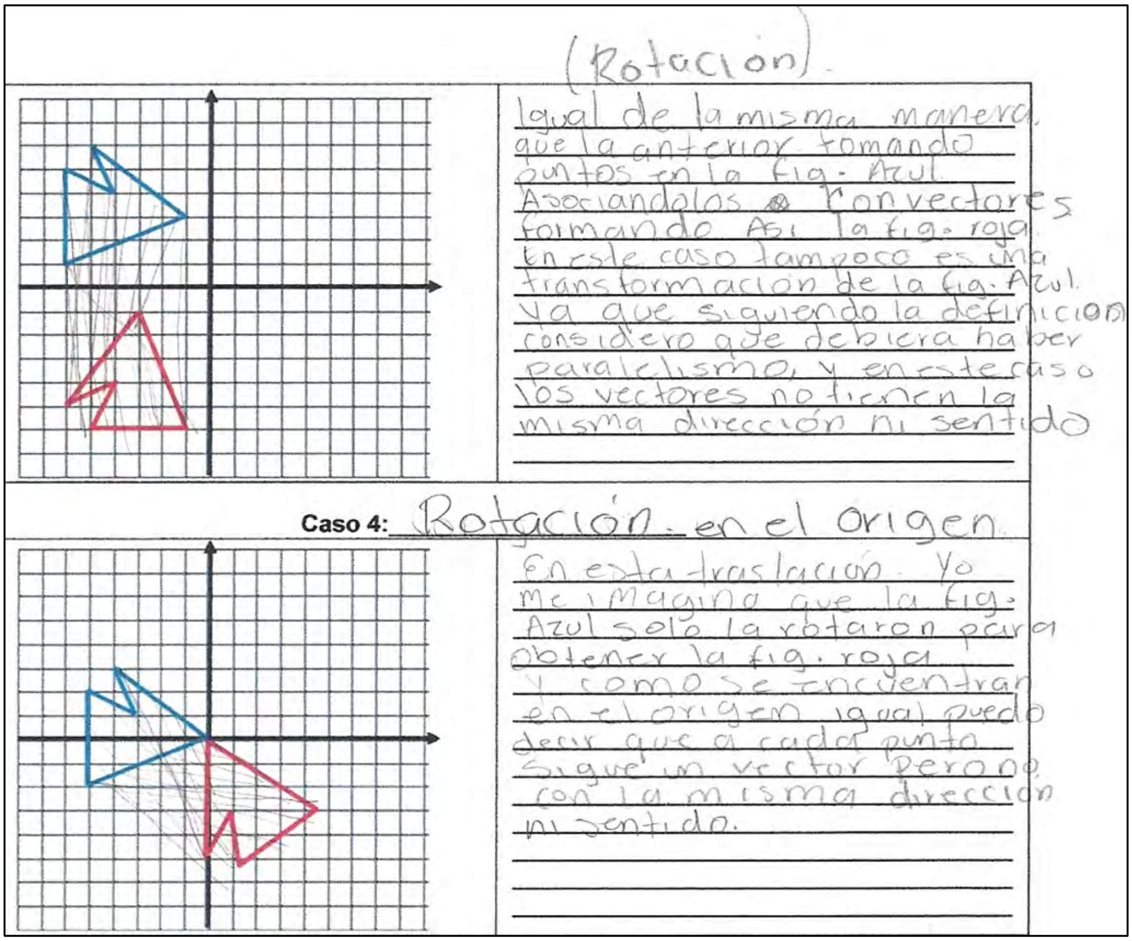


Fig. ***N3.A.8***

Al describir las transformaciones siguientes muestra una confusión importante, el estudiante asume que las imágenes (con las transformaciones) son contra-ejemplos de traslaciones (esto es notorio en las 3 transformaciones finales, las cuales son rotaciones y no respetan ni el paralelismo de segmentos formados por puntos homólogos ni la magnitud de los mismos). La confusión del estudiante se presenta en sus palabras en el caso 4 de la hoja de trabajo, ya que inicia con la frase "*en esta traslación […]*". Considerando su desempeño en las hojas de trabajo anterior, es normal suponer que sus respuestas fueron afectadas por las hojas de trabajo previas, aparentemente la hoja 7 representó un cambio brusco de la linealidad de las actividades.

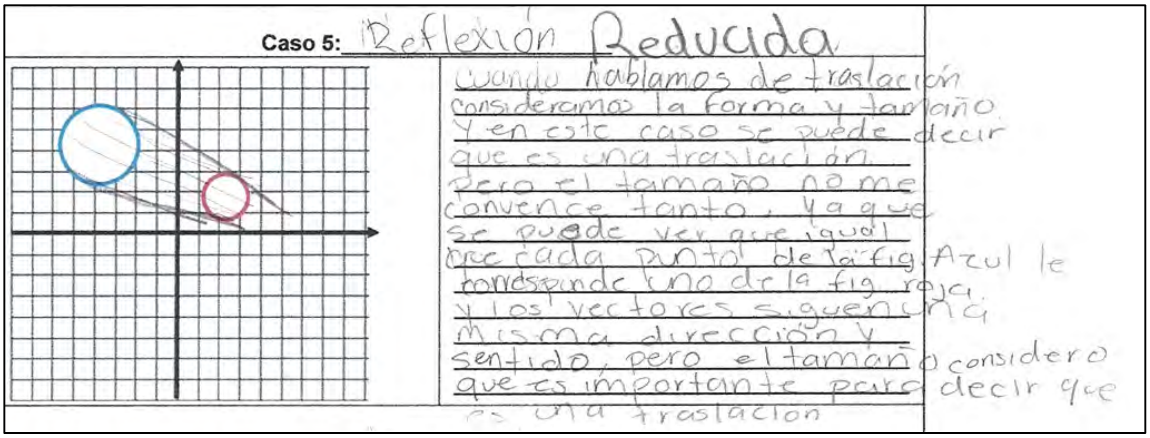


Fig. ***N3.A.9***

Nuevamente expresa un comparativo con la traslación, y en su respuesta menciona los elementos que no comparte la trasformación presentada con la traslación. Durante la discusión grupal, el estudiante participó sólo para aclarar dudas sobre las estrategias utilizadas por sus compañeros, por una aparente desconfianza de sus afirmaciones.

Una característica fundamental de la traslación es que respeta tamaño y forma ¿Qué otras transformaciones conservan estas propiedades?

Las Reflexiones y Rotaciones.

Discute con tus compañeros sobre sus respuestas en el punto anterior y anota aquí tus conclusiones

Todos coincidimos con las respuestas, ya que por el momento solo decimos que, Las Rotaciones y Reflexiones Respetan tamaño y forma

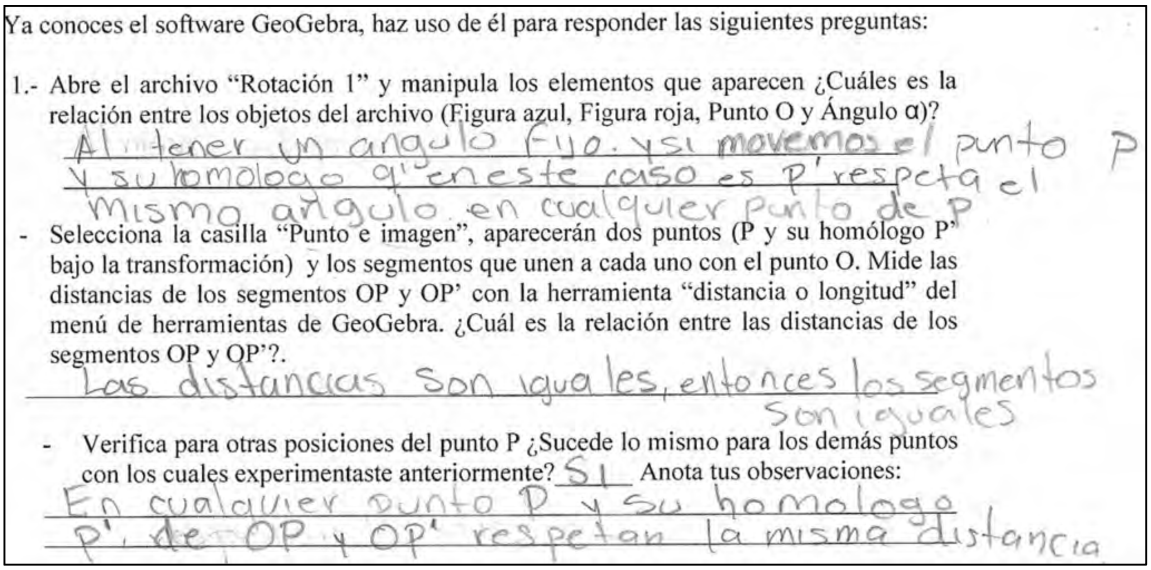
Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma.

Transformasiones Isometricas, Isomorficas y Amorficas.

Fig. ***N3.A.10***

Para enriquecer la fase 3 y considerando que la sesión anterior no fue suficiente para terminar la hoja de trabajo 7, se inició la siguiente clase con la discusión grupal, apoyados en un archivo GeoGebra con las distintas transformaciones construidas. El objetivo era enriquecer las estrategias de los estudiantes al considerar elementos dinámicos y contrarrestando con lo limitado del estudio de la versión estática, en las que se trabajó previamente. El apoyo del archivo generó un mejor ambiente de discusión, tanto para afirmar como para refutar las respuestas de los estudiantes.

Las preguntas finales de la hoja de trabajo cumplen su labor al presentar la relación entre traslaciones, rotaciones y reflexiones (isometría), procediendo con ello al estudio individual de cada transformación.



Ya conoces el software GeoGebra, haz uso de él para responder las siguientes preguntas:

1.- Abre el archivo "Rotación 1" y manipula los elementos que aparecen ¿Cuáles es la relación entre los objetos del archivo (Figura azul, Figura roja, Punto O y Ángulo α)?

Al tener un angulo Fijo. y si movemos el punto P y su homologo q' en este caso es P' respecta el mismo angulo en cualquier punto de P

- Selecciona la casilla "Punto e imagen", aparecerán dos puntos (P y su homólogo P' bajo la transformación) y los segmentos que unen a cada uno con el punto O. Mide las distancias de los segmentos OP y OP' con la herramienta "distancia o longitud" del menú de herramientas de GeoGebra. ¿Cuál es la relación entre las distancias de los segmentos OP y OP'?.

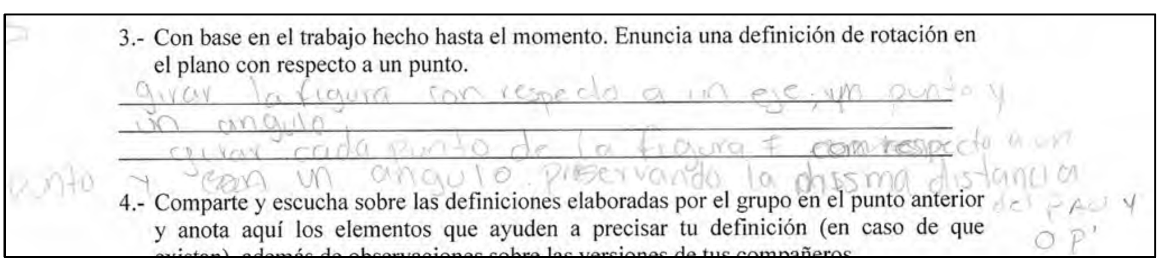
Las distancias son iguales, entonces los segmentos son iguales

- Verifica para otras posiciones del punto P ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Si Anota tus observaciones:

En cualquier punto P y su homologo P', de OP y OP' respetan la misma distancia

Fig. ***N3.A.11***

La exploración dirigida promueve la identificación de ciertas propiedades de rotación, con la finalidad de estar en condiciones de elaborar una definición mediante el uso de sus construcciones e intentando omitir aspectos visuales de la trasformación (aprovechando el trabajo dedicado a los niveles 1 y 2, en la traslación). Las respuestas muestran un desempeño aceptable del caso "A", aunque constantemente redacta de manera incompleta sus respuestas.



3.- Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.

girar la figura con respecto a un eje, un punto y un angulo

girar cada punto de la figura ~~F con respect~~ con respecto a un punto y con un angulo. preservando la ~~misma~~ misma distancia del P A O y O P'

4.- Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que

Fig. ***N3.A.12***

En la pregunta donde se pide una definición, menciona “un eje” para la construcción, y las definiciones fueron tan variadas que se tomó la decisión de incluir una sesión adicional para ampliar la discusión sobre las definiciones. Durante la clase dedicada a unificar las definiciones, el estudiante mantiene la afirmación sobre el eje, pero es hasta que sus compañeros comparten sus afirmaciones personales, éste opta por realizar modificaciones. La primera versión que presentó en la discusión grupal fue la siguiente:

“Girar una figura con respecto a ***un eje****, punto y ángulo”*

La corrección más significativa, como fruto de los comentarios fue la omisión del eje en la definición, fue entonces cuando el estudiante dio su versión final y la escribió en el pizarrón de la siguiente forma:

“Girar cada punto (P) de F, con respecto a un punto y un ángulo, preservando la distancia de P a O.”

Durante la discusión grupal se utilizaron distintas terminologías, en un afán de facilitar el debate se incorporó una terminología común, donde “*P*” representa puntos, “*F*” a una figura que los contiene, “*O*” al centro de giro y “α” al ángulo de rotación. Evaluando solamente la definición final, la cual incluye modificaciones por observaciones de sus compañeros, notamos un enunciado superficial y poco representativo de la transformación. La primer carencia es el uso de la palabra “*Girar*”, ya que el término es un sinónimo de rotación y resulta redundante el usarlo en ésta definición (el caso B también usó el término de manera similar y durante la discusión grupal se les hizo la observación, aparentemente no fue considerado como relevante). Una segunda observación es la apariencia de los enunciados; la versión del caso “A” se asemeja más a una descripción de la transformación que a una definición representativa, tomando como precedente la discusión grupal previo a la hoja de trabajo 6 (donde se construyó la definición de traslación) y los elementos aprobados por el consenso, tales como: Una instrucción puntual para construir la transformación, la inclusión de los elementos definitorios en el previo al enunciado, consistencia y economía de las afirmaciones.

Como se mencionó en la descripción del nivel, las hojas de trabajo 9 y 10 fueron sustituidas por sesiones en el salón de clases (en contra del diseño original), la dinámica consistió en explorar la reflexión, con la intención de generar una estrategia para construir los puntos homólogos de una figura, a partir de la imagen original y el eje de reflexión. El estudiante no asistió a la sesión y su inasistencia sería contraproducente en su rendimiento posterior.

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Reflexión 2", donde aparecen varios elementos manipulables. En el archivo podrás explorar de manera general tu conjetura sobre la composición de reflexiones, hecha en la actividad anterior.

- Manipula las rectas: roja y verde (las cuales representan el primer y segundo eje de reflexión respectivamente).

Al momento de mover o mas bien rotar los ejes se observa que la figura P' y P'' se mueven cuando movemos el eje rojo se mueve la Fig. P' y P'' y cuando movemos el otro eje solo se mueve la figura P.

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

La transformacion que yo considero es como una doble reflexión.

Fig. ***N3.A.13***

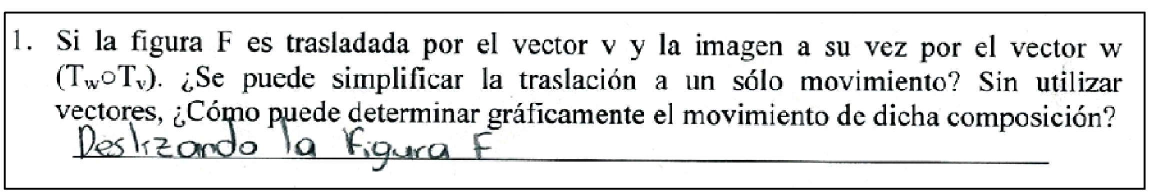
Como actividad de cierre para el nivel, se realiza una exploración sobre la composición de reflexiones y el estudiante no logra identificar una transformación familiar, incluso durante la discusión grupal mostró confusión sobre las afirmaciones de sus compañeros. Cabe aclarar que los elementos que aparecen en el archivo GeoGebra utilizado, se platicaron con los estudiantes (incluyendo la forma de construirlo), incluso se declaró que las figuras eran el producto de la composición de reflexiones, con los ejes marcados (visibles en pantalla).

Durante la realización de las distintas hojas de trabajo, el estudiante mostró confusiones constantes y requirió de mayor tiempo que sus compañeros para completar las actividades. Sus participaciones en la fase 3 bajaron considerablemente, comparando su desempeño en los niveles anteriores, y sus conclusiones y definiciones (fase 5) resultan incompletas.

Las estrategias de argumentación son variadas, pero se apoya de manera recurrente en elementos preceptivos (por el enfoque visual que planteó en su definición y la discriminación de transformaciones con los mismos medios) o en mediciones y generalizaciones a partir de éstas (inductivo de ejemplo genérico puro).

El desempeño del estudiante no es suficiente para considerarlo como candidato de la evaluación del nivel 4, sus respuestas fueron erróneas o insuficientes en varias preguntas; indicando que el estudiante es principiante en la problemática y por ello se le etiqueta con un nivel 3 con adquisición baja. La evaluación del estudiante lo descarta para darle continuidad a su trabajo y realizar la hoja de trabajo 12, pero si solicitarle la resolución del examen final.

Caso B:

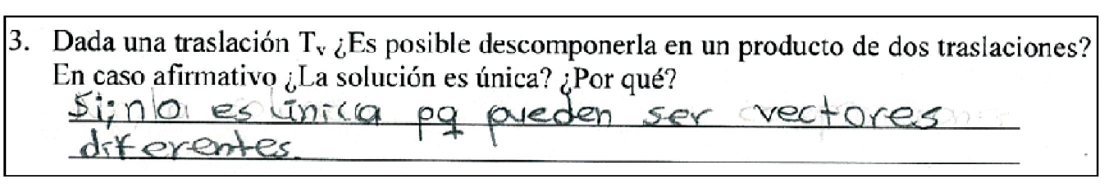


1. Si la figura F es trasladada por el vector v y la imagen a su vez por el vector w ($T_w \circ T_v$). ¿Se puede simplificar la traslación a un sólo movimiento? Sin utilizar vectores, ¿Cómo puede determinar gráficamente el movimiento de dicha composición?

Deslizando la figura F

Fig. ***N3.B.1***

Nuevamente aparece una confusión con la pregunta 1 y es respondida de manera similar al caso anterior, el problema aparente es el significado de la palabra “*movimiento*” y la restricción del uso de vectores, los que generan una redacción confusa.



3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?

Si; no es única pq pueden ser vectores diferentes

4. Dada una traslación T_v, donde $v=(v_1, v_2)$ ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que $w=(w_1, w_2)$ y $z=(z_1, z_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

De muchas.. Los vectores deben tener dos componentes, estar en $\mathbb{R}^2$. y ser diferentes de V.

5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

muchas, pq tendra vectores diferentes.

6. Comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros y utiliza el siguiente espacio para redactar tu conclusión final, producto de la discusión grupal.

Deslizar la figura F por un vector que sea la suma de los vectores

Fig. ***N3.B.2***

La sección donde se aborda la composición de traslaciones en casos generales se responde apropiadamente, pero sin una justificación apropiada para el nivel. Los elementos de mayor influencia fueron comentarios de sus compañeros durante la fase dos (exploración dirigida), donde exteriorizaron algunas confusiones y estrategias. Las justificaciones hechas consideran ejemplos genéricos, pero sin una forma clara de organizarlos y, por lo tanto, no es objetivo asignar una categoría de demostración particular, sino una influencia perceptiva e inductiva.

7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

Deslizar una figura por un vector a otro lugar

Fig. ***N3.B.3***

Para finalizar la hoja de trabajo 6, se solicita la versión personal de traslación (recordando que el cierre del nivel de razonamiento anterior incluía la construcción de una definición grupal del término). La definición del estudiante no considera las aportaciones de sus compañeros durante la discusión previa y se limita a describir la transformación mediante una estrategia visual para identificarla, lo cual resulta poco práctica y ambigua.

8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

Deslizar la figura sobre un vector que sea la suma de los otros vectores, y que hay una infinidad de soluciones.

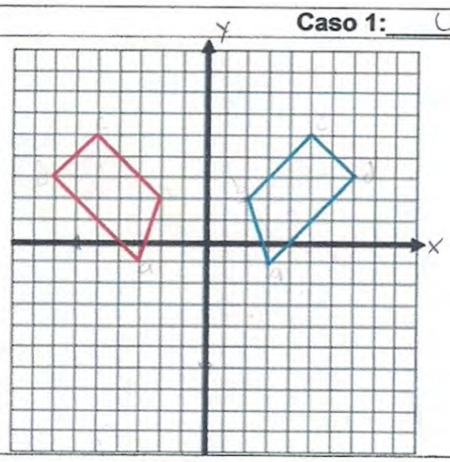
Fig. ***N3.B.4***

En la pregunta final de la hoja de trabajo 6, equivalente a la fase 5, el estudiante sigue respondiendo apropiadamente pero sin mostrar un antecedente claro de sus afirmaciones.

ACTIVIDADES:

- A continuación aparecen distintas transformaciones (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja), para cada ejemplo asigna un nombre, describe cómo es posible construir la transformación señalada e identifica los elementos que consideres necesarios para caracterizarla.

Caso 1: Uno



Reflejamos la figura sobre el eje y, cada punto está a la misma distancia del eje.

Fig. ***N3.B.5***

El primer escenario de las transformaciones es abordado aceptablemente y, además, el estudiante incluye una estrategia puntual para realizar la construcción a partir de la figura original y el eje de reflexión (el cual se presenta de manera implícita como el eje y).

.

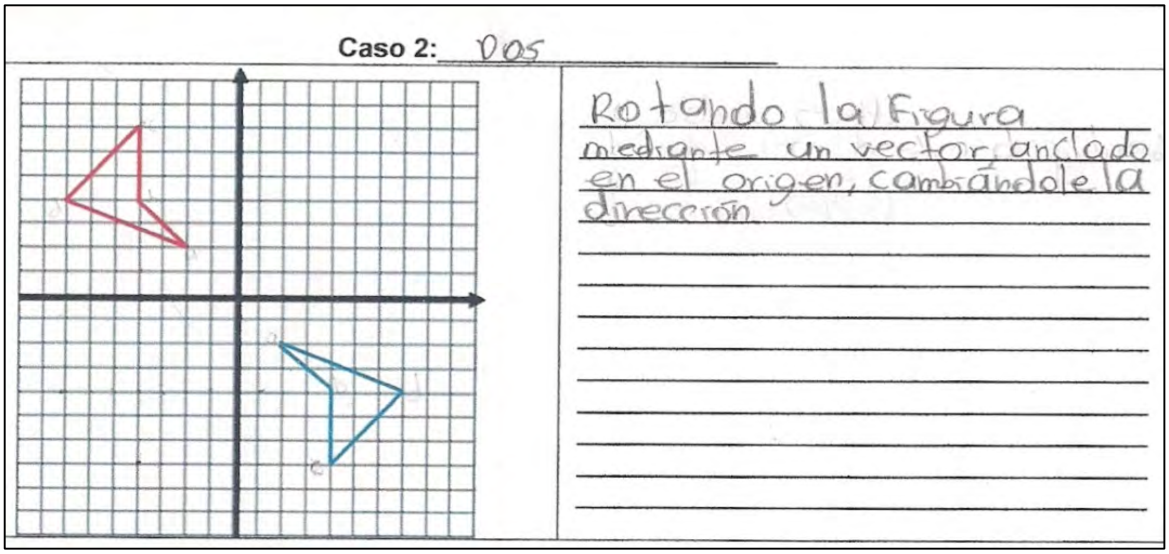


Fig. ***N3.B.6***

El hablar de vectores sin mencionar la magnitud, dirección o sentido resulta confuso, pero dio mayor claridad a sus métodos durante la discusión grupal. Cuando se le solicitó explicar su respuesta (estrategia), construyó en el pizarrón el vector $\overrightarrow{OP}$ (donde O es el origen del plano cartesiano y P es un punto arbitrario de la figura azul) e identificó el punto homólogo a P (P') mediante el cambio de sentido del vector y el uso del Origen como punto de partida; lo cual clarifica el significado de la frase *"…cambiándole la dirección"* como el cambio en el sentido del vector original.

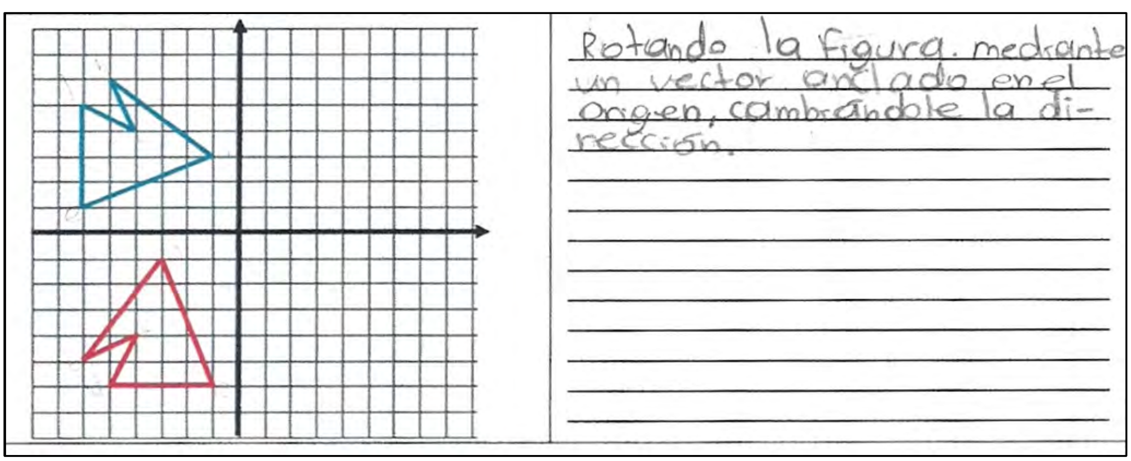


Fig. ***N3.B.7***

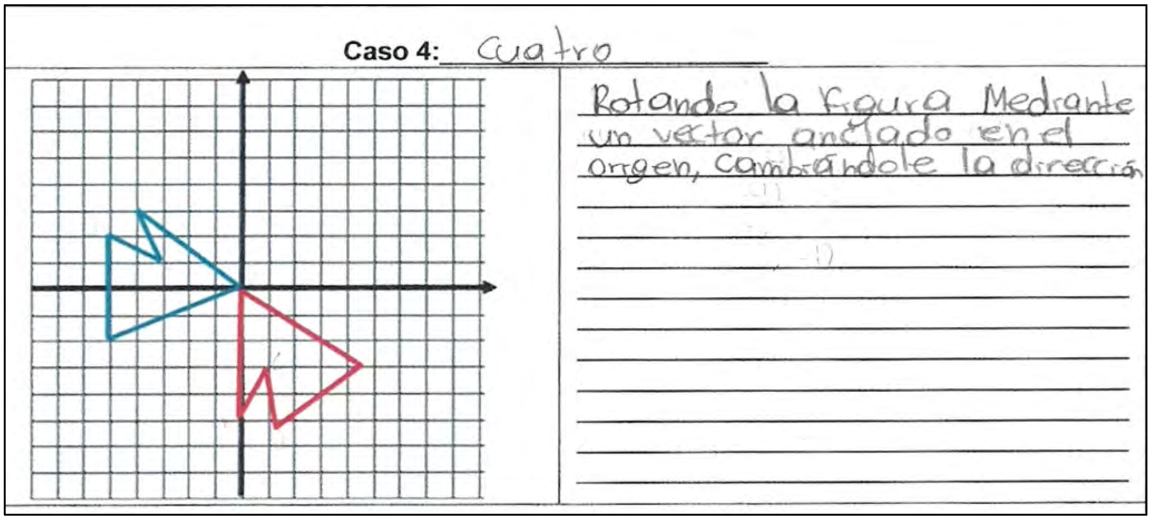
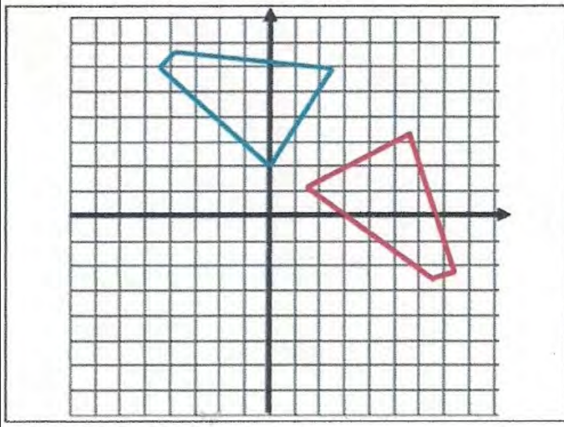


Fig. ***N3.B.8***

Para las rotaciones distintas de 180º (los casos 3 y 4), el estudiante declara una repetición de la misma estrategia del caso anterior, pero sin detallar el significado que cobra la expresión: *“cambiándole la dirección”*. En el contexto alternativo, el estudiante no logró reproducir una explicación equivalente de la estrategia presentada para el caso 2, al no lograr definir con claridad el método para construir la imagen bajo la transformación de la figura azul con apoyo de vectores, la complicación principal se adjudica a la dirección (y sentido) de los vectores auxiliares.

Considerando las limitaciones de los casos expuestos, el estudiante asume una categoría de demostración basada en elementos inductivos puros, donde el error radica en usar un ejemplo poco representativo de las rotaciones en el plano (giro de 180º).



Rotando la Figura.

- Una característica fundamental de la traslación es que respeta tamaño y forma ¿Qué otras transformaciones conservan estas propiedades?

La reflexión, rotación.

Fig. ***N3.B.9***

El último caso de transformación fue resuelto sobre el final de la sesión, así que el estudiante no logró percibir la reflexión visualmente, en un primer intento, ni diseñar una estrategia de verificación (la diferencia significativa entre la reflexión presentada en el caso 1 y la del cuadro anterior es el eje de reflexión no vertical). Se omite el caso 6 de la transformación, donde aparece una transformación homotética, ya que no fue respondida por el estudiante.

3.- Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.

Girar una Figura mediante un punto y un ángulo.

Fig. ***N3.B.10***

En la hoja de trabajo 8 solamente respondió a la pregunta 3, donde se solicita una definición de rotación, debido a un retardo para llegar a clase. Como consecuencia, la poca exploración fue notoria en la sesión dedicada a la discusión de definiciones (programada para el día siguiente). Al iniciar la siguiente clase y sin el apoyo de las versiones hechas el día anterior, el estudiante redactó la siguiente definición de rotación:

“Cambiar el sentido y la posición de una figura, mediante un punto y un ángulo”

De manera similar al caso A, muestra una influencia de elementos perceptivos y poca claridad sobre el papel de la frase *“Cambiar el sentido y posición de una figura […]”*, ante los cuestionamientos de sus compañeros sobre el significado de la frase, opta por modificar su enunciado de la siguiente manera:

“Girar una figura mediante un punto y un ángulo”

La nueva expresión aparenta ser una descripción de la transformación más que una definición, al no mostrar el papel que cumple cada elemento mencionado (ángulo y punto, este último se refiere al centro de giro). Nuevamente se menciona el término “*girar*” como pilar del enunciado, sustituyendo la construcción puntual en las definiciones aprobadas para traslación y la practicidad de las mismas.

Un cambio considerable se da durante la sesión dedicada a la construcción grupal de la definición de reflexión. En la fase de explicitación, el estudiante sugirió el uso de vectores de igual magnitud y dirección pero con sentido contrario, anclados en el eje de reflexión; la estrategia resultó efectiva y convincente para la mayoría de los compañeros pero fueron incapaces (incluso el caso B) de usar la estrategia para redactar la definición. El método se sustenta en inducción a través de ejemplos genéricos con inferencia (relacionando las propiedades de los vectores), pero sin mucha claridad para mejorarlo.

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Reflexión 2", donde aparecen varios elementos manipulables. En el archivo podrás explorar de manera general tu conjetura sobre la composición de reflexiones, hecha en la actividad anterior.

- Manipula las rectas: roja y verde (las cuales representan el primer y segundo eje de reflexión respectivamente).

Los puntos de P y P' están a la misma distancia del Eje1 y son deslizados por una circunferencia de radio igual a la distancia P o P' al eje. Lo mismo para P' y P'', con respecto al eje2 (verde)

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

Una doble reflexión
Reflejar la figura P mediante el eje1, y así reflejar P' mediante el eje2

- En el mismo archivo, experimenta cuando los ejes de reflexión son paralelos, activando la celda "Recta paralela`" (este botón limita las posiciones de la recta de color verde, permitiendo sólo rectas paralelas al eje de reflexión rojo y que pasan por el punto C). ¿Qué isometría trasforma la figura F en F''? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

Una traslación.

Fig. ***N3.B.11***

Al presentar las conjeturas sobre la composición de reflexiones, el estudiante mostró confusiones similares a las planteadas por el caso A (cuando la composición de reflexiones es con ejes de reflexión no paralelos), salvo que en esta ocasión logró reorientar el rumbo durante la discusión grupal. Durante la explicitación, el estudiante fue el primero en compartir sus resultados, se le cuestiono por su respuesta en el segundo inciso y, observando la imágenes en la pantalla de la computadora, comentó "*parece una rotación*", fue entonces cuando se le preguntó sobre el centro de giro y el ángulo de rotación sin obtener una respuesta de su parte.

Aunque es normal que la percepción represente la primera justificación para los incisos 2 y 3, sería más apropiado llamarlos como una estrategia de exploración y restringir el término de categoría de demostración a la asumida para validación final del enunciado. Con esta aclaración, el estudiante B se limita a construir una conjetura sin un interés en transformarla en teorema o sin herramientas para hacerlo.

La pregunta final, donde se cuestiona sobre el resultado de la composición de reflexiones con ejes paralelos, el estudiante responde "*Es una traslación*" y al solicitarle el vector de traslación o sus componentes, no fue capaz de responder. En ésta ocasión, si es posible asegurar que la justificación perceptiva fue la considerada como suficiente para avalar la conjetura. En un intento de organizar la idea planteada, se le solicitó al estudiante redactar una conjetura completa sobre la composición de reflexiones con ejes paralelos, pero no concretó la tarea y requirió el apoyo del caso C (aportando sugerencias y una redacción tentativa). Al margen de eso, la versión durante la discusión grupal fue:

> *"La composición de reflexiones con ejes paralelos equivale a una traslación de magnitud igual al doble de la distancia entre los ejes de reflexión, sentido del primer eje al segundo y dirección perpendicular a los ejes."*

Como resumen del desempeño en este nivel, el estudiante dejó en blanco varias preguntas de las hojas de trabajo y mantuvo una postura perceptiva para la construcción de las definiciones. Durante la fase 3 tuvo altibajos en sus participaciones, mostrándose pasivo en las sesiones dedicadas a la construcción de definiciones. Las categorías de demostración que utilizó son de tipo perceptivo o inductivo (en ambos casos se realizan generalizaciones a partir de exploraciones con ejemplos representativos, al menos en apariencia).

El estudiante exhibió un desempeño aceptable durante la exploración de composiciones de reflexiones (fase 5), mostrando mayor eficiencia en la discusión grupal. Sin embargo, el factor que hace cuestionable la apropiación del nivel es la cantidad de preguntas que no fueron respondidas y las justificaciones perceptivas para las conjeturas de la hoja de trabajo 11. El estudiante muestra una mezcla de distintos niveles de razonamiento, aunque las características del segundo aparecen con mayor frecuencia; las principales capacidades que ha mostrado son las siguientes:

- ❖ Percepción de objetos como un todo y formados por propiedades aisladas.
- ❖ Comparación de objetos mediante propiedades específicas.
- ❖ Enfoques empíricos de la veracidad de las proposiciones.

En contraparte el estudiante no mostró su habilidad para construir definiciones económicas (además de identificar definiciones equivalentes) y la transformación de definiciones incompletas en completas. La evaluación del estudiante puede dividirse en dos facetas; la asumida durante la exploración y elaboración de definiciones, y la presentada para la elaboración de conjeturas sobre las composiciones de reflexiones (donde fue capaz de generar nuevas propiedades a partir de las conocidas anteriormente, al menos de manera visual). La construcción de definiciones evidenció carencias en las estrategias de exploración, al grado de presentar hojas de trabajo incompletas, en cambio, el desempeño de la hoja de trabajo 11 fue aceptable, aunque con respuestas incompletas o escasas. En general, el desempeño del estudiante es considerado dentro del nivel 3, y por las generalizaciones perceptivas exhibidas se le asignó un grado de adquisición baja del nivel, el resultado excluye al estudiante de la continuidad de las hojas de trabajo y la resolución la actividad 12.

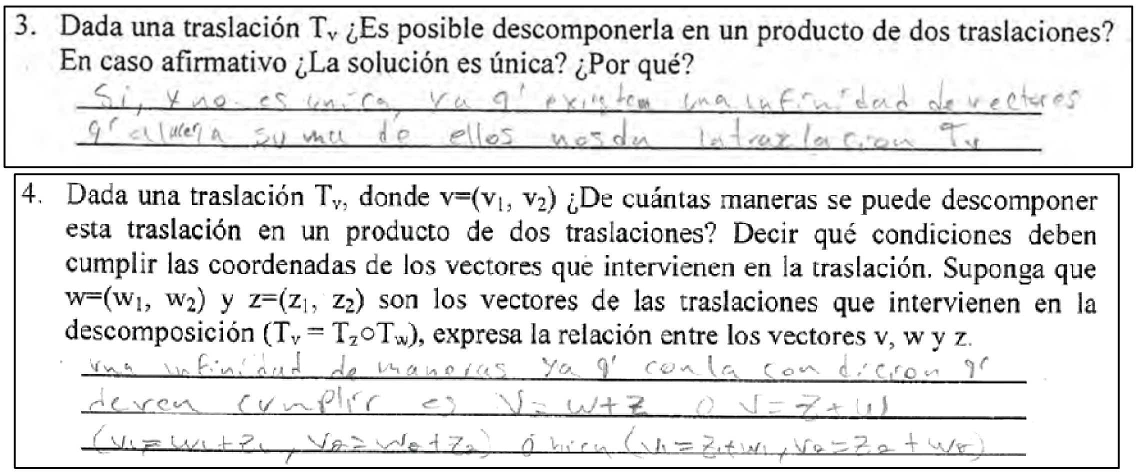
Caso C:

2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas u= (u_1, u_2), v= (v_1, v_2), w= (w_1, w_2). ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

Sí. el movimiento sería T_u, T_v y T_w esto se arrea sacar la resultante de la resta de $u-v = (u_1-v_1, u_2-v_2) = \vec{g}$ vector y al vector g le aplicamos T_w y el vector $\vec{\gamma} = (\vec{g} - w)$ $= ((u_1-v_1)-w_1, (u_2-w_2)-w_1)$ esto sería el vector de traslación g' de Fine todo el movimiento en una sola traslación.

Fig. ***N3.C.1***

El primer acercamiento a la composición de traslaciones muestra una influencia de la hoja de trabajo 5b, donde las relación identificada se presentó como una resta de vectores. Previo a la discusión grupal, incluso durante la fase de 2 (exploración dirigida), el estudiante mencionó su respuesta y el caso D corrigió su método (dirigiéndose al profesor).



3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?

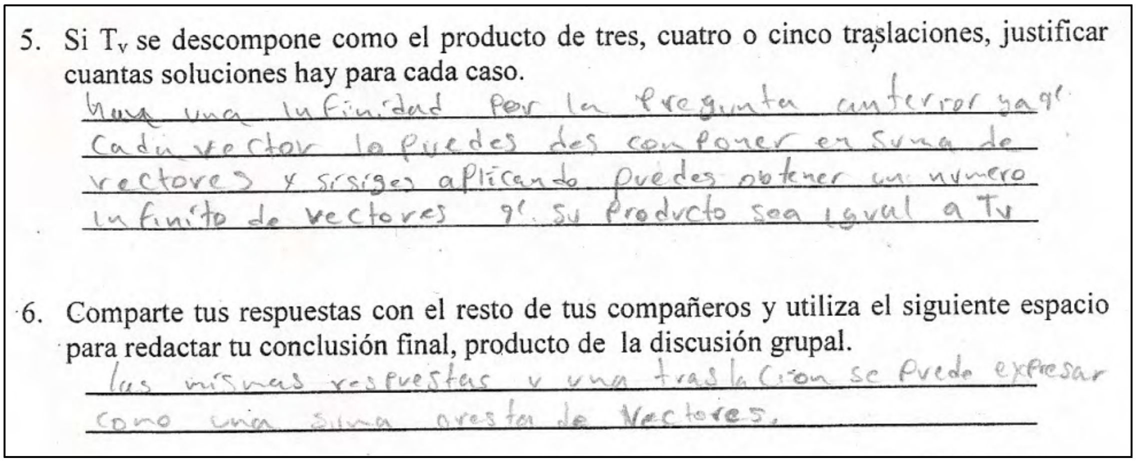
Si, y no es única, ya q' existen una infinidad de vectores q' cualquiera suma de ellos nos da la traslación T_v

4. Dada una traslación T_v, donde $v=(v_1, v_2)$ ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que $w=(w_1, w_2)$ y $z=(z_1, z_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

una infinidad de maneras ya q' con la condición q' deven cumplir es $V = W+Z$ ó $V = Z+W$ $(v_1=w_1+z_1, v_2=w_2+z_2)$ ó bien $(v_1=z_1+w_1, v_2=z_2+w_2)$

Fig. ***N3.C.2***

Los comentarios del caso “D” durante la exploración dirigida se perciben en las respuestas siguientes, donde se muestra una relación en términos de la suma de vectores explícitamente (pregunta 4). El argumento original tuvo una influencia inductiva y la confusión entre el escenario de la hoja 5b y la actividad 6, pero en esta ocasión aparecen elementos deductivos, sin despegarse del ejemplo que lo genera y con una modificación del ambiente a partir del cual realiza sus inferencias (sustituyendo el registro Geométrico por el escenario Analítico). Los elementos sugieren una categoría de demostración “de experimento mental transformativa”.



5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

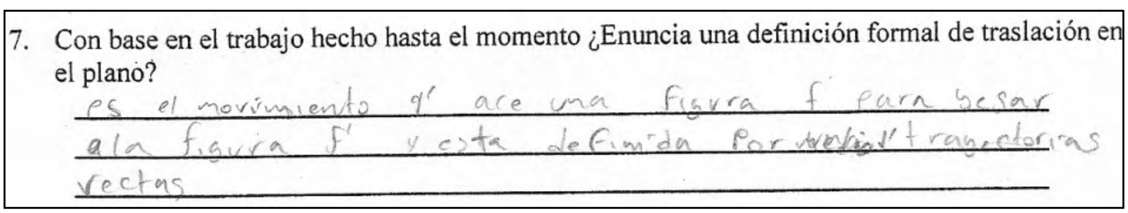
hay una infinidad por la pregunta anterior ya q' cada vector lo puedes descomponer en suma de vectores y si siges aplicando puedes obtener un numero infinito de vectores q' su producto sea igual a Tv

6. Comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros y utiliza el siguiente espacio para redactar tu conclusión final, producto de la discusión grupal.

las mismas respuestas y una traslacion se puede expresar como una suma o resta de vectores.

Fig. ***N3.C.3***

Las siguientes respuestas se plantean en un escenario general y, en la pregunta 6, exhibe a los vectores como los elementos centrales de la transformación, incorporando su postura sobre la resta de vectores para describir composiciones (aunque sin aportar mucha información al respecto, ni métodos para discriminar el uso de sumas ó restas).

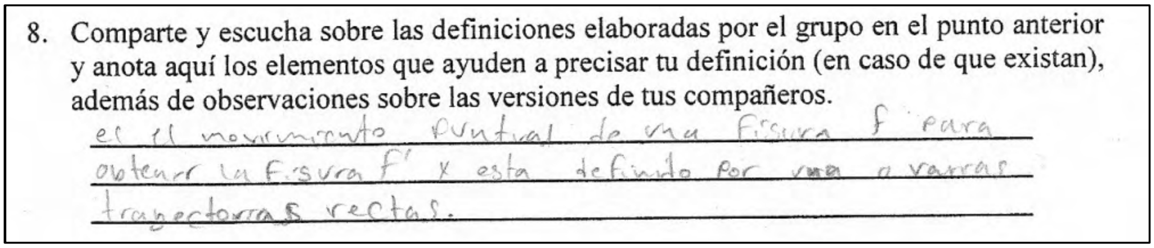


7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

es el movimiento q' ace una figura f para besar a la figura f' y esta definida por ~~vector~~ trayectorias rectas

Fig. ***N3.C.4***

La propuesta para definición formal de traslación incorpora, aunque de manera incompleta, el papel de los vectores en la transformación; incluso tacha la palabra *"vector"* y opta por referirse a ellos como *"trayectorias rectas"*. El enunciado muestra una influencia perceptiva y, de manera similar a los casos A y B, pueden ser considerados superficiales, pero representa un intento de definición puntual de la transformación (comentario hecho a todos durante la discusión grupal). El estudiante incorpora las observaciones e intenta precisar su definición, respondiendo a la pregunta 8 de la siguiente manera:

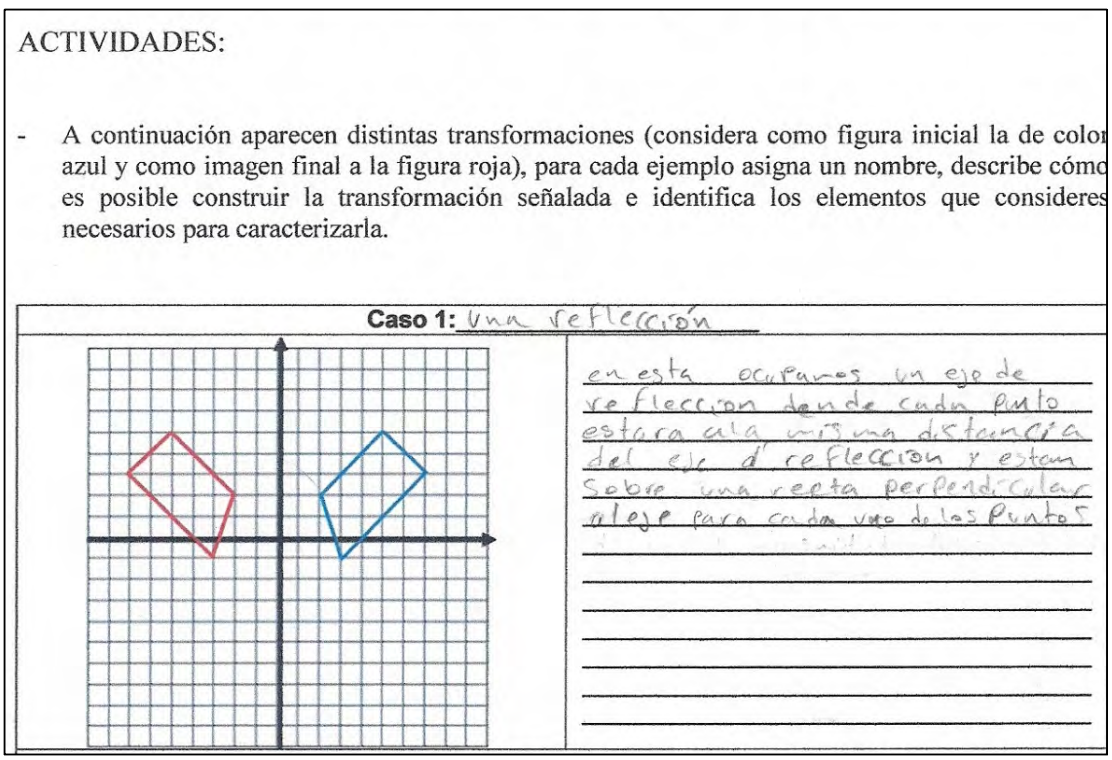


8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

es el movimiento puntual de una figura f para obtener la figura f' y esta definido por una o varias trayectorias rectas.

Fig. ***N3.C.5***

La modificación posterior a la fase 3, es el análisis de la transformación punto a punto (pero sin aportar mucha información sobre su aplicación). Podemos considerarla como una definición incompleta, donde la mayor confusión es por hablar de "trayectorias rectas", lo cual puede ser interpretado erróneamente al usar el enunciado.



ACTIVIDADES:

- A continuación aparecen distintas transformaciones (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja), para cada ejemplo asigna un nombre, describe cómo es posible construir la transformación señalada e identifica los elementos que consideres necesarios para caracterizarla.

Caso 1: Una reflección

en esta ocupamos un eje de reflección donde cada punto estara a la misma distancia del eje de reflección y estan sobre una recta perpendicular al eje para cada uno de los puntos

Fig. ***N3.C.6***

En la hoja de trabajo 7 el estudiante asumió un rol más participativo y presentó varias estrategias para definir las transformaciones, las cuales resultaron convincentes para los casos A y B. Las componentes de traslación mencionadas fueron: El eje de reflexión y algunas propiedades relacionadas a la construcción (perpendicularidad de los segmentos formados por puntos homólogos, equidistancia entre el eje y puntos correspondientes). Durante la discusión grupal utilizó herramientas de geometría sintética para justificar sus argumentos (experimento mental transformativo).

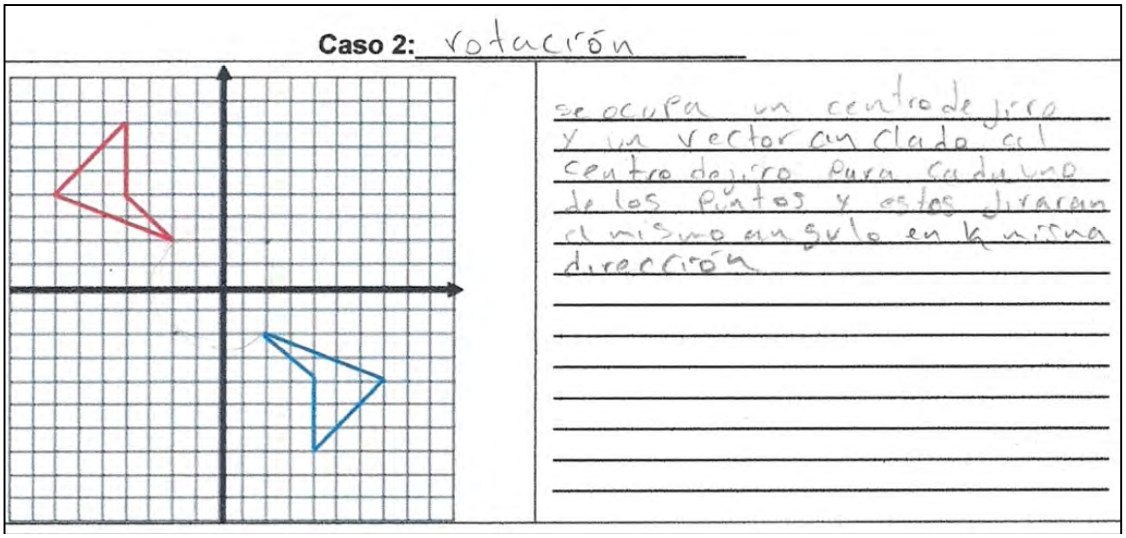


Fig. ***N3.C.7***

Para explicar la rotación durante la fase de explicitación, construyó circunferencias con el foco en el centro de giro (exteriorizando la consideración) y radio de magnitud igual al segmento que une al centro de giro y un punto P arbitrario. Para marcar al correspondiente P’ utilizó la intersección de la circunferencia con la figura (depurando de manera intuitiva). Posteriormente, el profesor realizó la construcción en un archivo de GeoGebra, para comprobar la consistencia de la misma (verificando en distintos puntos P y siguiendo las instrucciones del estudiante). Los alumnos escucharon los comentarios del caso C y no hubo replicas sobre su trabajo. Por la estrategia utilizada, nuevamente tenemos una demostración inductiva con ejemplo genérico con inferencia, donde pone en juego las propiedades implícitas que asigna a la construcción.

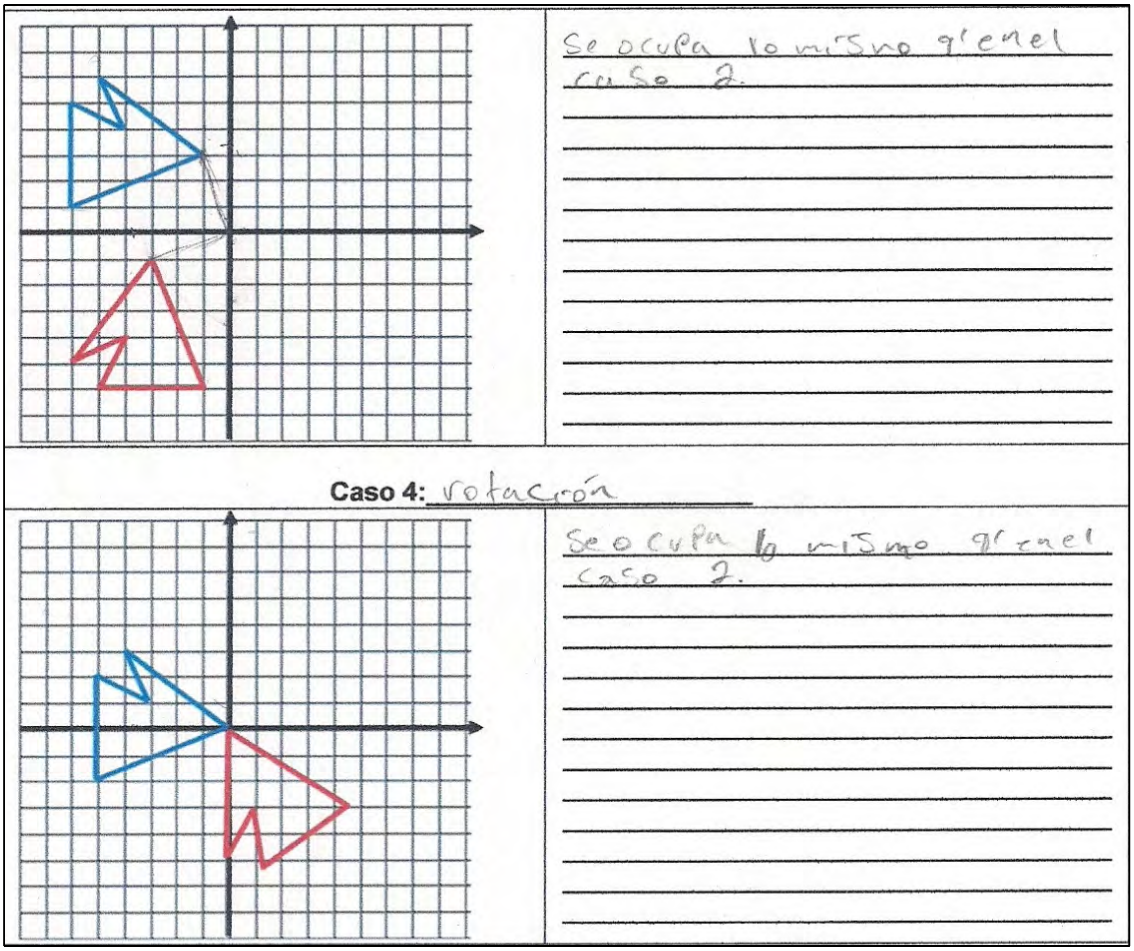


Fig. ***N3.C.8***

No consideró necesario ampliar su respuesta en los escenarios que identifica rotaciones, extrapolando la estrategia diseñada.

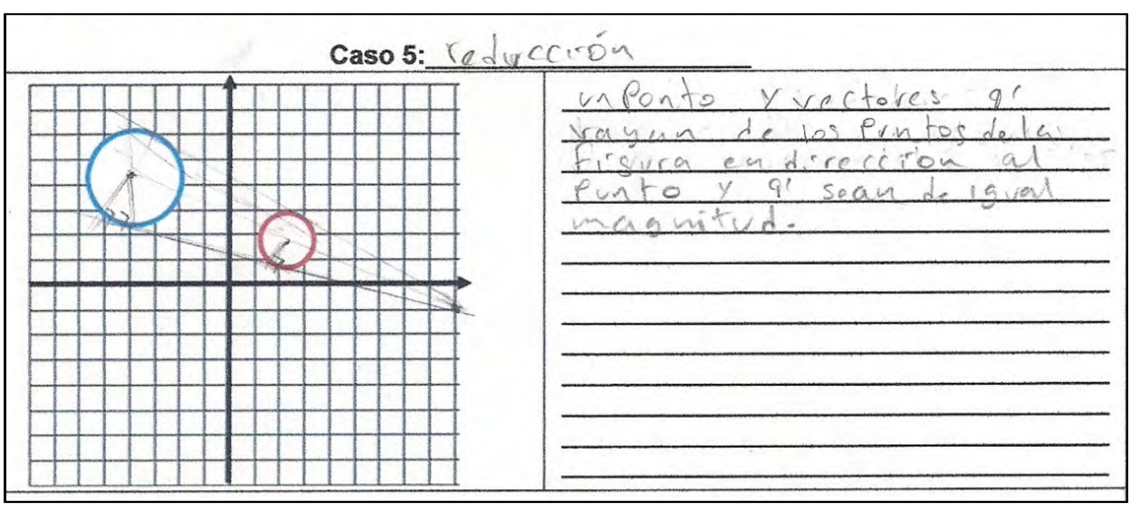


Fig. ***N3.C.9***

La transformación incluida en la hoja de trabajo que no representa una isometría fue abordada por el estudiante, en su respuesta habla de *“puntos y vectores”* como indispensables para definir la transformación, pero sin mucha claridad de su papel. En el ambiente geométrico muestra una relación homotética, la cual no logró ser concretada ni aprovechada en su respuesta final. La categoría se basa en la percepción de relaciones geométricas, con inferencia y ejemplo genérico.

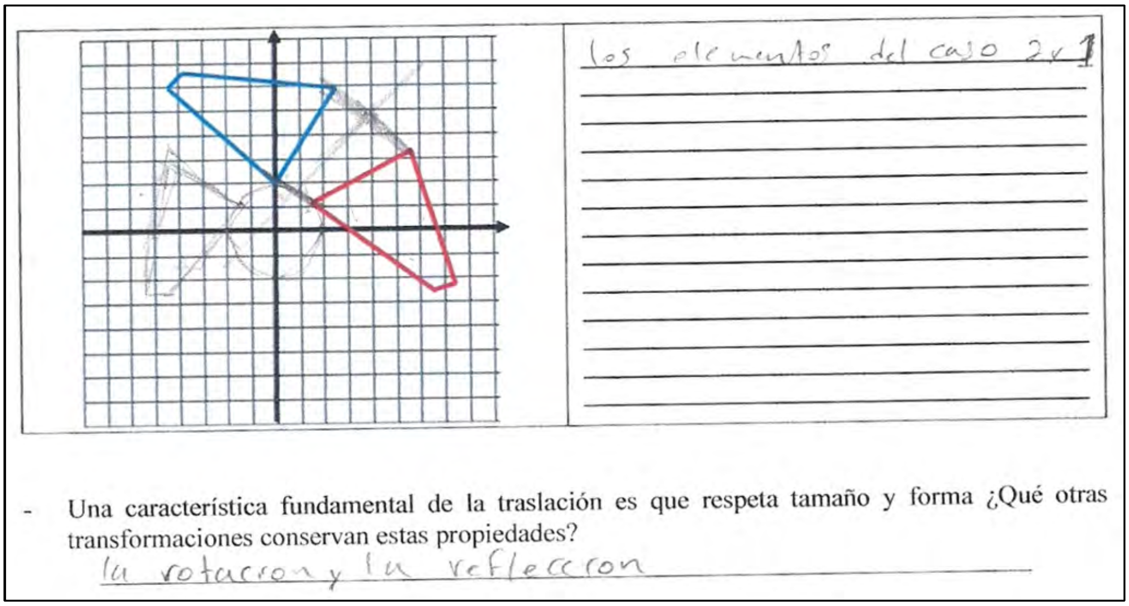


Fig. ***N3.C.10***

En el último caso, aparece una confusión entre la reflexión y rotación; el estudiante realiza algunos trazos de apoyo y durante la discusión grupal comentó que el caso 6 puede ser definido como una rotación o una reflexión. Atribuimos el desconcierto a la primera impresión de la imagen y el uso incorrecto de su estrategia original. Cabe señalar, que la discusión lo hizo reconsiderar su respuesta y optó por desecharla.

Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma.

Isometrias

Fig. ***N3.C.11***

Las isometrías es un término que aparece en las respuestas de los estudiantes, posiblemente por incluirlo en el examen diagnóstico realizado previo a las actividades.

Ya conoces el software GeoGebra, haz uso de él para responder las siguientes preguntas:

1.- Abre el archivo "Rotación 1" y manipula los elementos que aparecen ¿Cuáles es la relación entre los objetos del archivo (Figura azul, Figura roja, Punto O y Ángulo α)?
la figura roja rota un angulo α sobre el punto O y respeta la forma y dimencion de la figura azul

- Selecciona la casilla "Punto e imagen", aparecerán dos puntos (P y su homólogo P' bajo la transformación) y los segmentos que unen a cada uno con el punto O. Mide las distancias de los segmentos OP y OP' con la herramienta "distancia o longitud" del menú de herramientas de GeoGebra. ¿Cuál es la relación entre las distancias de los segmentos OP y OP'?.
es la misma distancia

- Verifica para otras posiciones del punto P ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? si Anota tus observaciones:
estos dos puntos se encuentran en una circunferencia de radio igual a la distancia del segmento OP ó OP'

Fig. ***N3.C.12***

Durante las exploraciones de la hoja de trabajo 8, incorporó su estrategia para definir transformaciones como justificación (hablando de *"circunferencia"* en el segundo inciso de la pregunta 1).

2.- Selecciona la casilla "Marcar ángulo" ¿Qué elemento aparece? ¿Cómo se relaciona con el ángulo α?
el recorrido del segmento OP' y es el mismo angulo que α

- Verifica para otras posiciones del punto P y para distintos ángulos α ¿Mantienes tu respuesta anterior? si Anota tus observaciones:
ya que el segmento OP' esta girado sobre la circunferencia de radio OP en un angulo α

3.- Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.
es girar la figura a lo largo de una circunferencia * un cierto angulo.
* con centro en punto O y el radio igual a la distancia del punto O a la figura.

Fig. ***N3.C.13***

Su estrategia de construcción de rotaciones sigue influenciando las respuestas de la hoja de trabajo 8, inclusive es notorio en la definición que plantea. Con respecto al enunciado que presenta, añade los elementos de construcción de la circunferencia.

La siguiente sesión se dedicó a la discusión sobre las definiciones y, el estudiante mantuvo su postura de incluir a la circunferencia para enfatizar la construcción puntual de la transformación, la versión presentada fue la siguiente:

"Girar la figura a lo largo de la circunferencia de centro O y radio r=OP, cada uno de los puntos (un cierto ángulo)"

Al observar su trabajo, fue conveniente hablar con el salón sobre el problema técnico de usar la palabra *"girar"* en la definición. Además, una observación puntual para el estudiante fue la sugerencia de sustituir el papel de la circunferencia por las propiedades que avalan su inclusión en la definición. El estudiante "E"[8], añadió las observaciones sugeridas para el caso C y presentó la siguiente versión:

"Mover la figura un ángulo α respecto a un punto O, respetando las distancias entre los puntos de la figura y O"

El caso C compartió la versión del estudiante E, entonces les fue solicitada una versión formal de su definición, usando la siguiente oración: *"¿Cómo creen que aparecería en un libro de geometría?, de los usados en la licenciatura"*, los estudiantes se sentaron juntos por unos minutos (mientras el resto de compañeros hablaba de sus definiciones) y presentaron la siguiente definición para el consenso del salón:

"Sean F, O y α. F' será una rotación de F con respecto a O, si: $\forall P \in F$ entonces OP=OP' y α es igual al ángulo entre los segmentos OP y OP'"

Con el afán de aprovechar el avance presentado en la definición, se les dio la

[8] El caso E no se encuentra dentro de los casos seleccionados por su constante inasistencia, pero tuvo importantes aportaciones en el nivel 1 y 3.

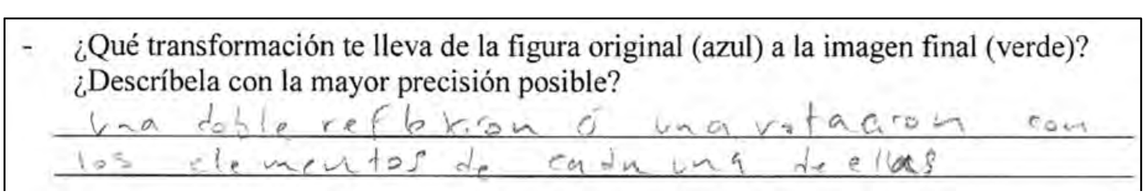
sugerencia de sustituir la afirmación sobre la igualdad de α con el ángulo formado por los segmentos por el enunciado *“$\alpha=POP'$”*, la propuesta no resultó problemática y se aprobó como versión grupal. Un par de observaciones sobre la definición sugerida son: La biyección de la transformación no es contemplada y la falta de información sobre el punto P’ (interpretado como la imagen del punto P bajo la transformación), este último cumple el rol central en el enunciado. La definición cuenta con una justificación aparentemente formal transformativa, pero con carencias de estructura, como la afirmación de existencia de P’. Una versión corregida implica usar la existencia de P’ como criterio para cumplir con el enunciado (*$\forall P \in F$ entonces $\exists P'$, tal que $OP=OP'$ y $\alpha=POP'$*).

Un escenario similar se dio durante la definición grupal de reflexión, en este caso el estudiante incorporó la estrategia de construcción de reflexiones; al incluir un punto auxiliar “X” formado por la intersección entre el eje de reflexión y el segmento PP’ (donde P’ es la imagen de P bajo la transformación). Por cuestiones de tiempo, se le solicitó para el día siguiente una versión más económica de su definición, e influenciado por el trabajo en la rotación, presentó lo siguiente:

“Sean F y l. F’ será una reflexión de F con respecto a l, si:
$\forall P \in F$ entonces $d(l,P)=d(l,P')$ y $l \perp PP'$”

La estructura formal de la definición no es completa (de manera similar a la presentada en la construcción de la definición de rotación), pero representa un acercamiento significativo, con influencias más apegadas a un experimento mental transformativo.

La hoja de trabajo 11, también capturó un buen desempeño del estudiante durante las fases 2 y 3; realizando exploraciones sistemáticas que le facilitaron la generación de conjeturas y modificaciones constantes para perfeccionar su redacción.


- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

Una doble reflexión ó una rotación con los elementos de cada una de ellas

- En el mismo archivo, experimenta cuando los ejes de reflexión son paralelos, activando la celda "Recta paralela`" (este botón limita las posiciones de la recta de color verde, permitiendo sólo rectas paralelas al eje de reflexión rojo y que pasan por el punto C). ¿Qué isometría trasforma la figura F en F''? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

es una doble reflexion o una traslacion con los elementos necesarios para cada una de ellas.

Fig. ***N3.C.13***

La pregunta relaciona con la composición de reflexiones fue respondida apropiadamente y durante la discusión grupal fue el segundo en compartir sus respuestas (el caso B fue su antecesor) y logró precisar su respuesta (en cuanto al centro de giro y el ángulo de rotación). El enunciado completo, redactado por el estudiante en el pizarrón, durante la discusión grupal, fue el siguiente:

> *"La composición de reflexiones con ejes no paralelos, son una rotación con centro de giro en el cruce de los ejes y un ángulo de rotación igual al doble del formado por los ejes de reflexión."*

Para redactar la versión final, fue necesaria la medición de los distintos ángulos que aparecen en un archivo GeoGebra, diseñado para la exploración y discusión de dudas tales como: *¿Dónde se encuentra el centro de giro? ¿Existe uno distinto al anterior? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de α para este caso?,* etc.

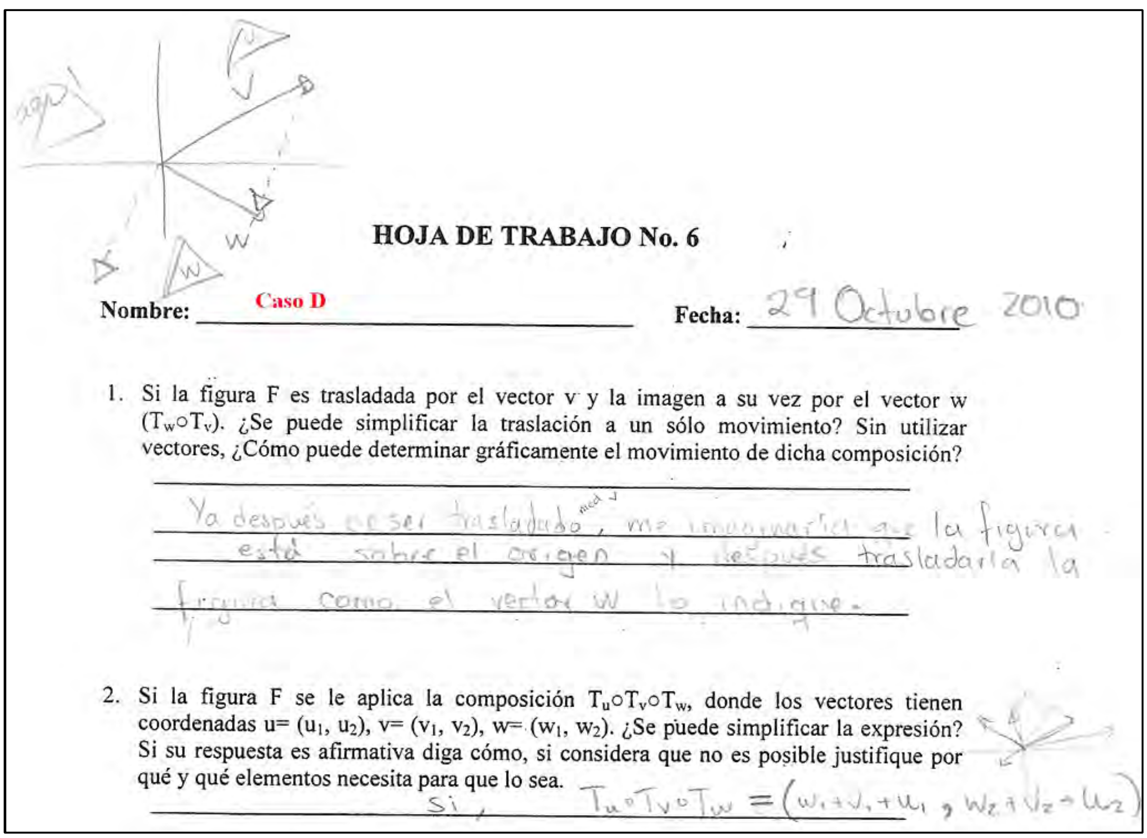
La conjetura sobre la composición de reflexiones con ejes paralelos, no fue redactada por el estudiante, pero se involucró en la redacción al realizar sugerencias constantes (apoyando al caso B). Las comprobaciones que realizó para justificar ambas afirmaciones fue la medición de segmentos, ángulos y consideraciones perceptivas.

El estudiante mostró disposición para abordar las problemáticas del nivel, sus respuestas muestran exploraciones concretas y un arraigo de estrategias personales. Tuvo mayor participación durante la fase de explicitación y realizó aportaciones significativas para el avance de la discusión grupal. Las categorías de demostración fueron inductivas con ejemplos genéricos, experimento mental transformativo y algunos intentos de construir una afirmación formal transformativa, las justificaciones de este estilo resultaron incompletas y el estudiante utilizó las pruebas que domina para compensar las limitantes.

Las definiciones son presentadas como construcciones puntuales, pero en ocasiones los enunciados resultaron poco económicos. Las actividades adicionales asignadas al estudiante, relacionadas con la economía de las definiciones, fueron abordadas apropiadamente, ya que modificó sustancialmente sus respuestas.

El estudiante cumple con los requerimientos del nivel, siendo capaz de describir nuevas propiedades a partir de otras ya conocidas (informalmente) y construir definiciones aceptables. Las habilidades mostradas lo convierten en candidato para realizar la hoja de trabajo 12 (correspondiente al cuarto nivel de Van Hiele) y no sólo alel examen, como los casos A y B.

Caso D:



HOJA DE TRABAJO No. 6

Nombre: Caso D

Fecha: 29 Octubre 2010

1. Si la figura F es trasladada por el vector v y la imagen a su vez por el vector w ($T_w \circ T_v$). ¿Se puede simplificar la traslación a un sólo movimiento? Sin utilizar vectores, ¿Cómo puede determinar gráficamente el movimiento de dicha composición?

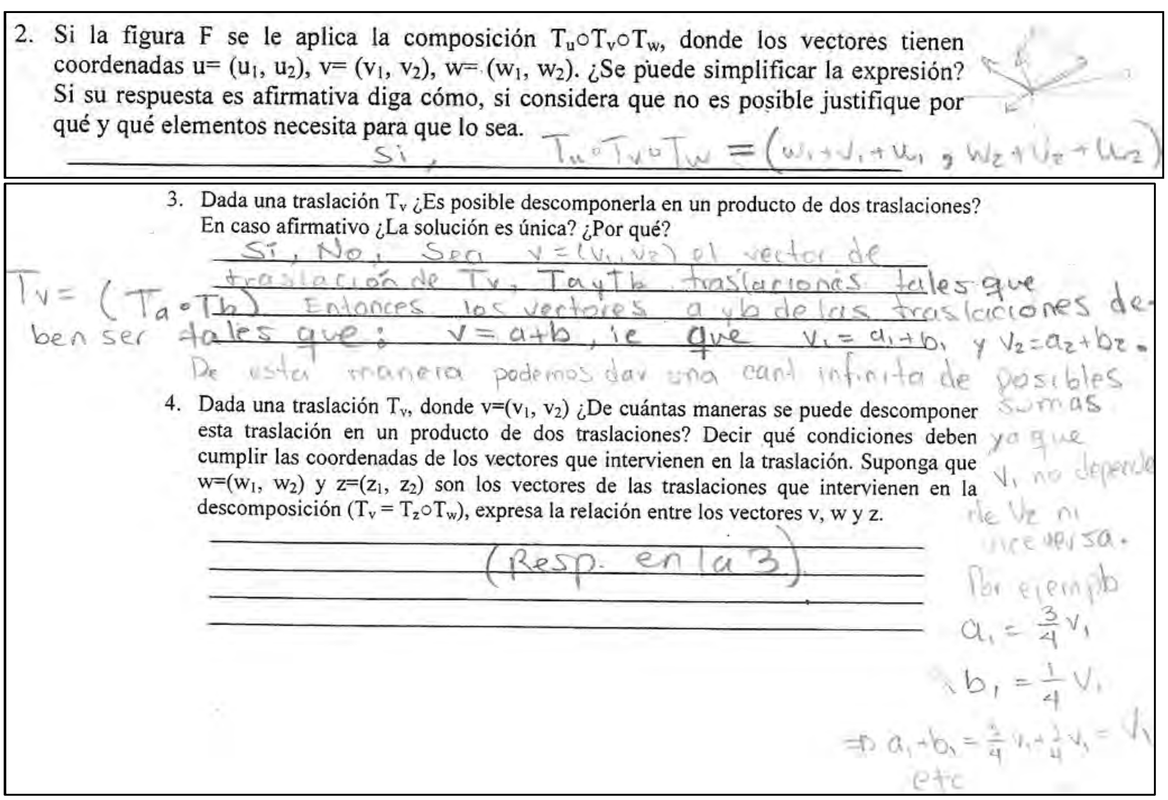
Ya después de ser trasladado, me imaginaría que la figura está sobre el origen y después trasladarla la figura como el vector w lo indique.

2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas u= (u_1, u_2), v= (v_1, v_2), w= (w_1, w_2). ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

Si, $T_u \circ T_v \circ T_w = (w_1 + v_1 + u_1 , w_2 + v_2 + u_2)$

Fig. ***N3.D.1***

De acuerdo a la respuesta de la pregunta 1 (sobre la composición de traslaciones), el estudiante muestra una confusión distinta a la observada en el resto de sus compañeros, el caso D asocia la palabra *“movimiento”* con una descripción de la composición en términos de los deslizamientos asociados a cada vector (con consideraciones adicionales como el acomodo de los vectores y las figuras involucradas, con el fin de precisar la instrucción), para responder a la pregunta, el estudiante apoyó su construcción en el dibujo que aparece en la parte superior izquierda de la página (donde reproduce la información del archivo utilizado en la hoja de trabajo anterior y rescata información del mismo). En la pregunta No. 2, en cambio, aprovecha la herramienta de vectores para justificar el producto de la composición de traslaciones y utiliza su estrategia para replicar la respuesta del Caso “C” (influyendo de manera positiva en el rendimiento de este último, con la distinta información mencionada).


2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas $u=(u_1, u_2)$, $v=(v_1, v_2)$, $w=(w_1, w_2)$. ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

Si, $T_u \circ T_v \circ T_w = (w_1 + v_1 + u_1,\ w_2 + v_2 + u_2)$

3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?

Si, No, Sea $v=(v_1, v_2)$ el vector de traslación de T_v, T_a y T_b traslaciones tales que $T_v = (T_a \circ T_b)$ Entonces los vectores a y b de las traslaciones deben ser tales que: $v = a+b$, ie que $v_1 = a_1 + b_1$ y $v_2 = a_2 + b_2$.

De esta manera podemos dar una cant infinita de posibles sumas ya que v_1 no depende de v_2 ni viceversa.

Por ejemplo $a_1 = \frac{3}{4} v_1$

$b_1 = \frac{1}{4} v_1$

$\Rightarrow a_1 + b_1 = \frac{3}{4} v_1 + \frac{1}{4} v_1 = v_1$

etc

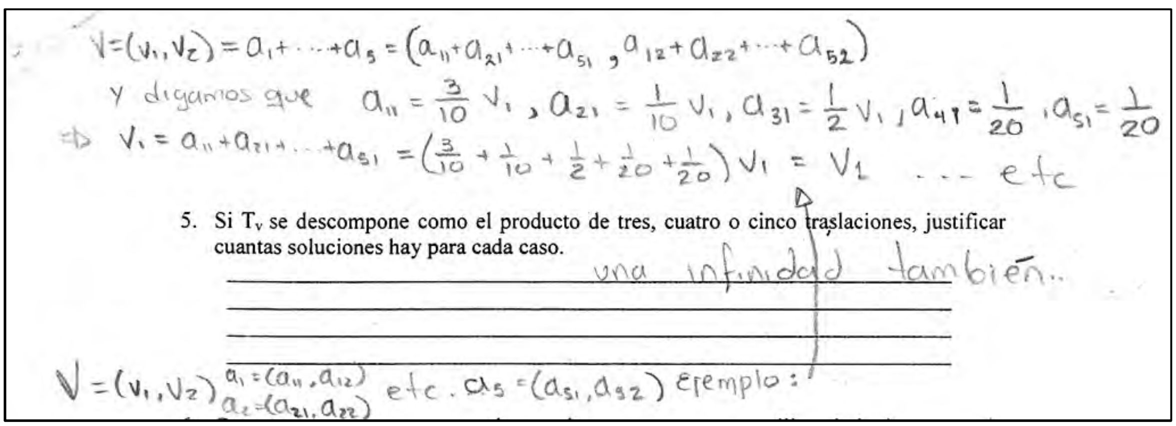
4. Dada una traslación T_v, donde $v=(v_1, v_2)$ ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que $w=(w_1, w_2)$ y $z=(z_1, z_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

(Resp. en la 3)

Fig. ***N3.D.2***

Considerando su trabajo anterior, el estudiante sigue utilizando a los vectores y sus propiedades para justificar sus observaciones. Las pruebas manejadas por el caso D, parten de métodos perceptivos y culminan en justificaciones deductivas (en la parte superior derecha observamos un dibujo de apoyo, utilizado para justificar la afirmación de las preguntas 2, 3 y 4).

Los argumentos presentados en la hoja de trabajo sugieren una categoría de demostración “formal transformativa”; ya que parten de la definición de traslación declarada por el estudiante en las distintas oportunidades (de manera implícita) e infiere conclusiones sin apoyarse en ejemplos (al menos en la mayoría de los casos). Sin embargo, las justificaciones no alcanzan la condición de “Axiomática” por la abstracción parcial que muestra al realizar trazos de apoyo o dibujos para plantear las afirmaciones complejas.



$V=(v_1,v_2)=a_1+\cdots+a_5=(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{51},\ a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{52})$

y digamos que $a_{11}=\frac{3}{10}v_1,\ a_{21}=\frac{1}{10}v_1,\ a_{31}=\frac{1}{2}v_1,\ a_{41}=\frac{1}{20},\ a_{51}=\frac{1}{20}$

$\Rightarrow\ v_1=a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{51}=\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)v_1=v_1$ ... etc

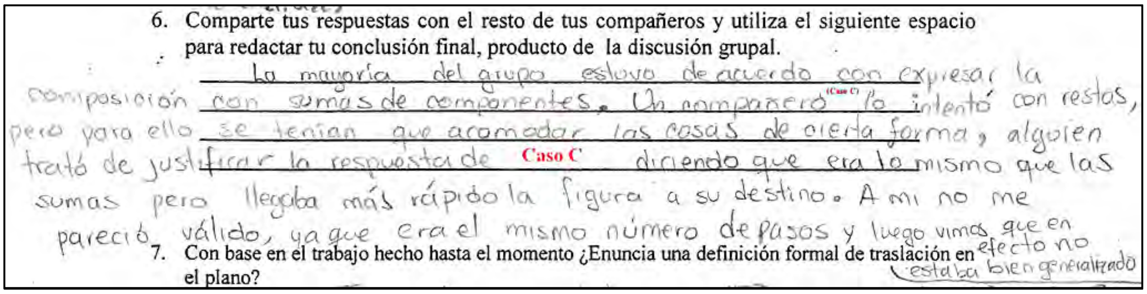
5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

una infinidad también..

$V=(v_1,v_2)$ $a_1=(a_{11},a_{12})$ $a_2=(a_{21},a_{22})$ etc. $a_5=(a_{51},a_{52})$ ejemplo:

Fig. ***N3.D.3***

El estudiante responde de manera general en las preguntas que así lo solicitan; particularmente en la respuesta 3, la justificación es tan amplia que su conclusión se usa como referencia para las preguntas siguientes.

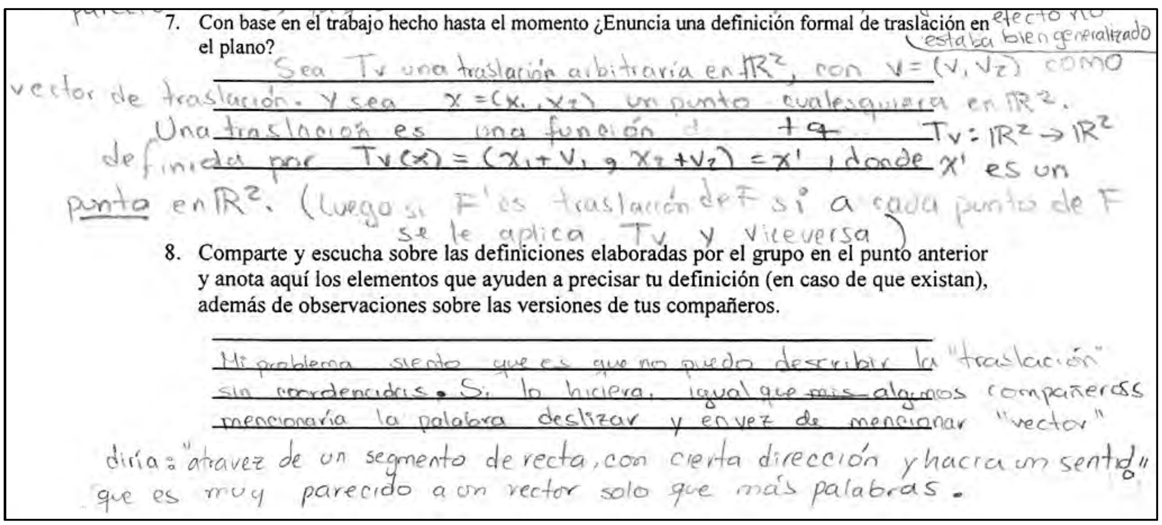

6. Comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros y utiliza el siguiente espacio para redactar tu conclusión final, producto de la discusión grupal.

La mayoría del grupo estuvo de acuerdo con expresar la composición con sumas de componentes. Un compañero (Caso C) lo intentó con restas, pero para ello se tenían que acomodar las cosas de cierta forma, alguien trató de justificar la respuesta de Caso C diciendo que era lo mismo que las sumas pero llegaba más rápido la figura a su destino. A mi no me pareció válido, ya que era el mismo número de pasos y luego vimos que en efecto no estaba bien generalizado

7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

Fig. ***N3.D.4***

Aunque el estudiante no deja de lado las actividades solicitadas, muestra una influencia en su respuesta por parte del caso C; al grado de compartir su versión de la discusión grupal (ya mencionada en los apartados anteriores).


7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

Sea T_v una traslación arbitraria en $\mathbb{R}^2$, con $v=(v_1,v_2)$ como vector de traslación. Y sea $x=(x_1,x_2)$ un punto cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. Una traslación es una función ~~d~~ ~~tq~~ $T_v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T_v(x)=(x_1+v_1,\ x_2+v_2)=x'$, donde x' es un punto en $\mathbb{R}^2$. (Luego si F' es traslación de F sí a cada punto de F se le aplica T_v y viceversa)

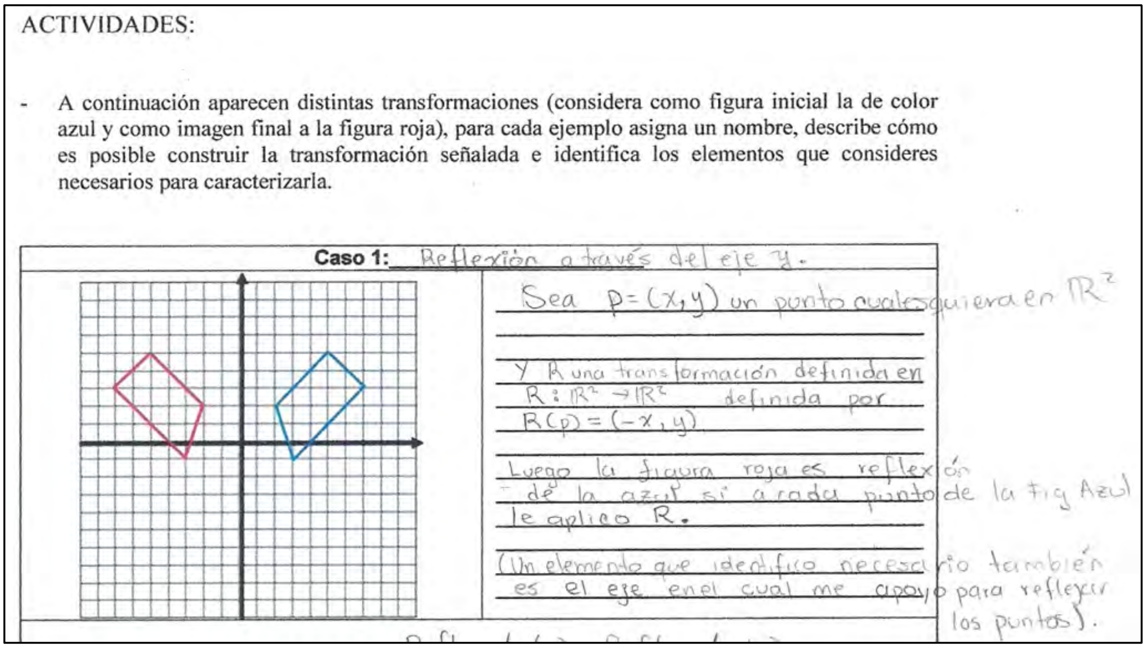
8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

Mi problema siento que es que no puedo describir la "traslación" sin coordenadas. Si lo hiciera, igual que ~~mis~~ algunos compañeros mencionaría la palabra deslizar y en vez de mencionar "vector" diría: "atravez de un segmento de recta, con cierta dirección y hacia un sentido" que es muy parecido a un vector solo que más palabras.

Fig. ***N3.D.5***

El caso D redacta una definición de traslación con un lenguaje formal, que considera las observaciones planteadas durante las sesiones anteriores y la siguiente (posterior a las discusiones grupales de la hoja de trabajo). Incluyendo, no sólo su respuesta, sino que además plantea los problemas percibidos en las versiones de sus compañeros. Las respuestas 7 y 8, muestran la importancia que el estudiante asigna al vector de traslación en la redacción de la definición y un intento de construir una definición equivalente con el uso de las coordenadas del vector (aunque el mismo estudiante percibe una versión descriptiva de los vectores, que mantiene las propiedades necesarias en la definición).

Las estrategias utilizadas en las justificaciones, muestran conclusiones directas a partir de las propiedades conocidas de la transformación (deductivas) y planteando un escenario general (descartando ejemplos concretos), lo cual es suficiente para asignar una categoría de demostración “formal transformativa”.



ACTIVIDADES:

- A continuación aparecen distintas transformaciones (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja), para cada ejemplo asigna un nombre, describe cómo es posible construir la transformación señalada e identifica los elementos que consideres necesarios para caracterizarla.

Caso 1: Reflexión a través del eje y.

Sea $p=(x,y)$ un punto cualesquiera en $\mathbb{R}^2$

y R una transformación definida en $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $R(p)=(-x,y)$

Luego la figura roja es reflexión de la azul si a cada punto de la fig Azul le aplico R.

(Un elemento que identifico necesario también es el eje en el cual me apoyo para reflexar los puntos).

Fig. ***N3.D.6***

Para responder a la siguiente hoja de trabajo, el estudiante utiliza un lenguaje funcional (presentando, en algunos casos, la “regla de correspondencia” que vincula la figura original y su imagen). En el caso 1, lo define como una reflexión y menciona al **eje de reflexión** como *“un elemento necesario”* para elaborar la construcción (equivalente al papel de los vectores en la construcción de traslaciones). Las justificaciones parten de exploraciones perceptivas, pero se presentan con una apariencia deductiva; todo esto surgió al reorganizar la información recopilada en la fase 2 con la construcción **función** analítica que vincula a las figuras del cuadro presentado.

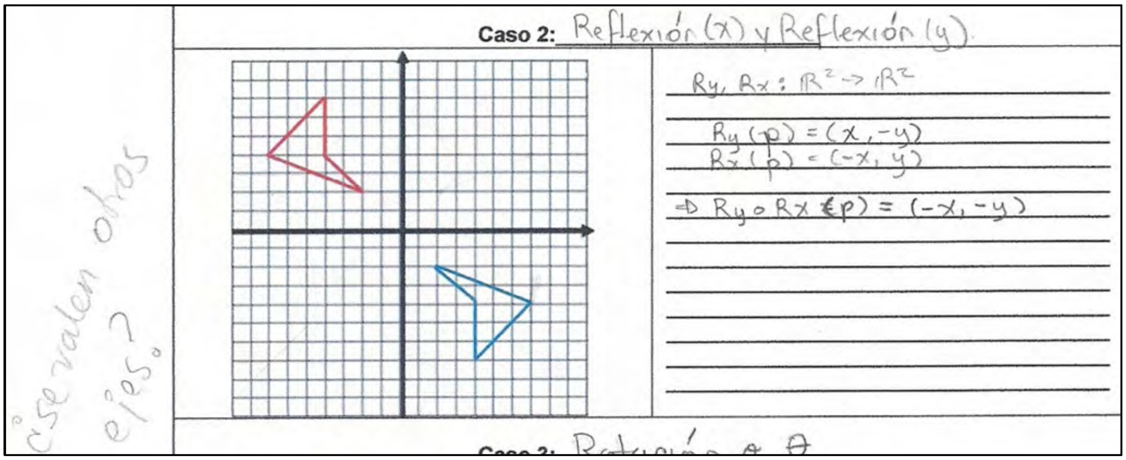


Fig. ***N3.D.7***

Para el “caso 2” se percibió un adelanto considerable en cuanto a la organización de las actividades; en la imagen presentada aparece una rotación de 180º con centro de giro en el origen, la mayoría de los estudiantes percibió la transformación con este modelo (o muy cercano a él), el caso D en contraparte, describió la transformación como una composición de reflexiones (donde los ejes de reflexión son los ejes cartesianos) y redacta en la parte izquierda de la hoja una interrogante personal: “*¿Se valen otros ejes?*” haciendo alusión a ejes de reflexión distintos a los ejes del plano; tal interrogante fue compartida durante la discusión grupal y el estudiante concluyó que “*los ejes deberían estar a 90º*”. Cuando se le pregunto sobre el efecto de no tener ángulos rectos entre los ejes de reflexión no logró concretar una respuesta.

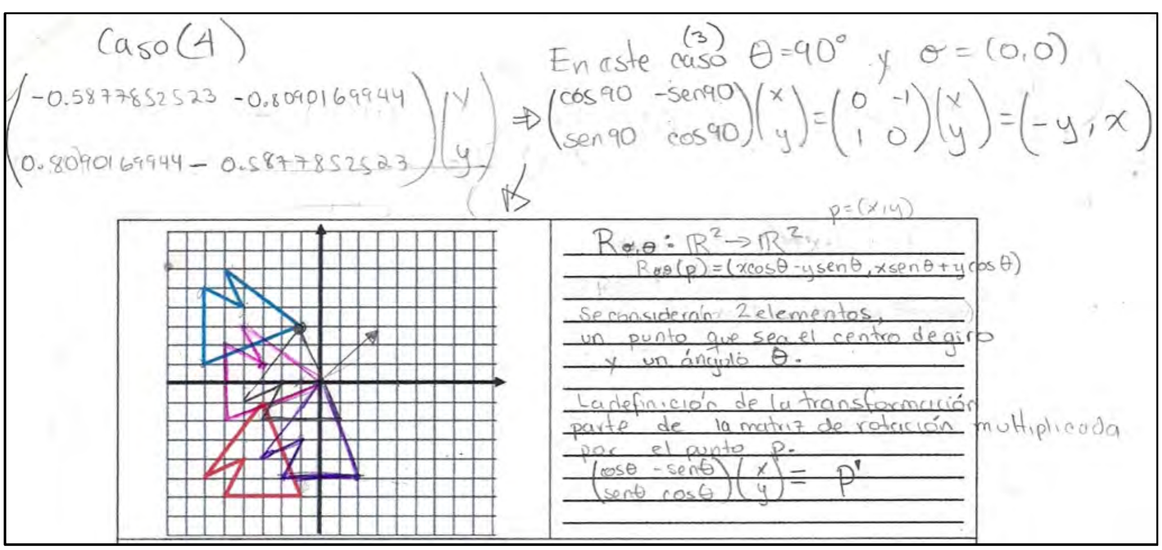


Fig. ***N3.D.8***

Para resolver los casos 3 y 4 utiliza las matrices de rotación como método de justificación; aunque originalmente realiza las exploraciones con herramientas perceptivas. El caso 3, particularmente, muestra un primer intento de manipulación de las figuras dentro del plano (respaldado con construcciones intuitivas) e incluso explica la trasformación durante la discusión grupal mediante la composición de una rotación y una traslación (en el plano aparece un vector auxiliar que representa la traslación tentativa), este acercamiento fue desechado por el estudiante y optó por usar la matriz de rotación en los casos siguientes (la explicación con matrices aparece en la parte superior de la hoja, respondiendo a los casos 3 y 4).

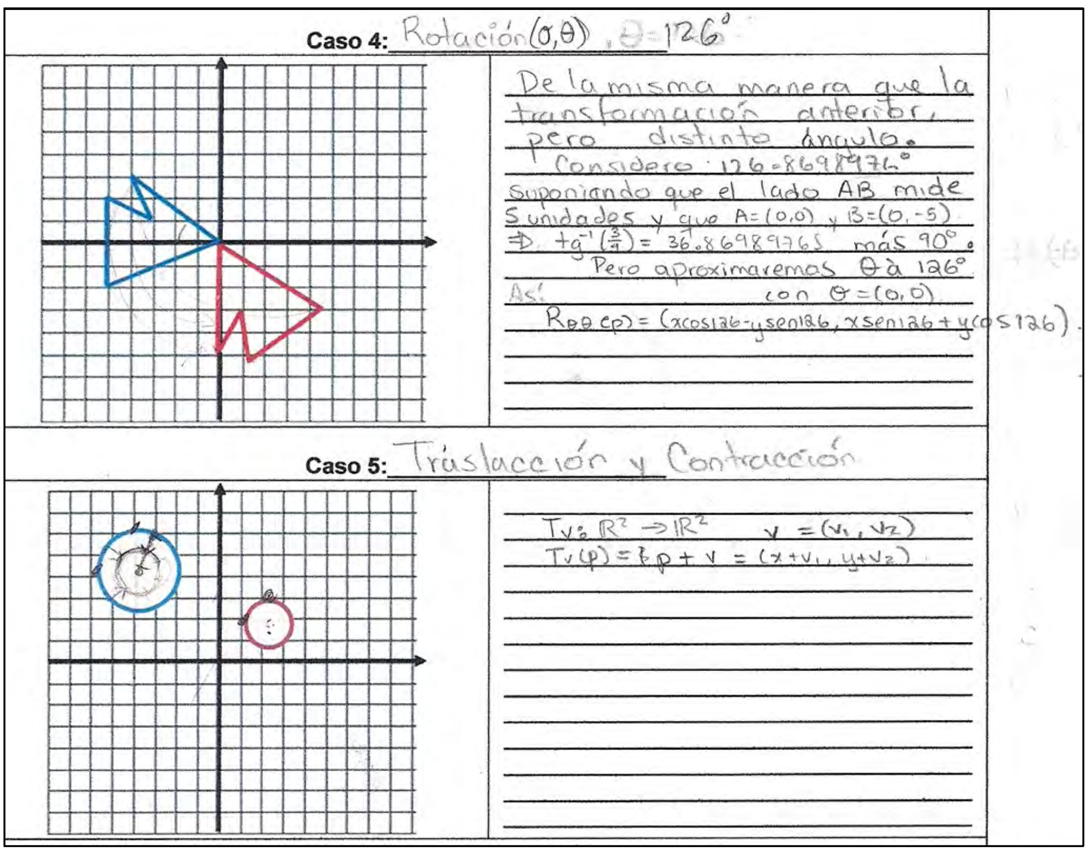
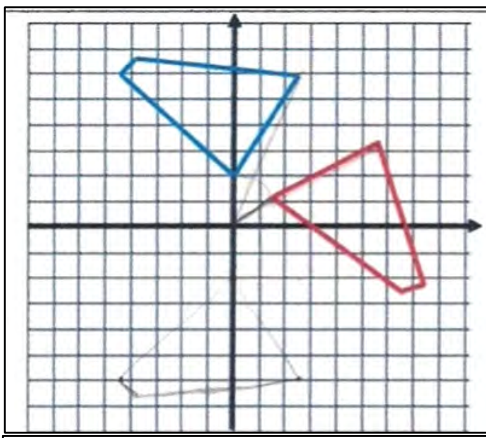


Fig. ***N3.D.9***

Para el caso 4 realiza mediciones de lados claves del polígono, con la intención de identificar el ángulo de rotación y generaliza la observación a la figura completa; los cálculos que aparecen en los renglones los utiliza para justificar el por qué del ángulo utilizado en la matriz de rotación. El primer argumento que aparece en la transformación es de tipo perceptivo, ya que se deduce el ángulo de 126º a partir de la selección de vértices aparentes del polígono y el cálculo de las pendientes de las rectas que los contienen, completando la respuesta con la presentación de la transformación de manera analítica a partir del trabajo sobre la matriz de rotación. La organización de las pruebas elaboradas, se interpretan como una demostración transformativa de experimento mental; donde se realiza una conversión del ambiente geométrico al analítico, con una referencia de peso sobre los segmentos de la figura presentada y culminando en la matriz de rotación declarada como pilar del argumento.

Para el caso 5, la representa como la composición de una traslación y una contracción (en ese orden), pero sus dudas y comentarios durante la fase 3 mostraron poca claridad sobre los elementos requeridos, incluso deja incompleta su respuesta final en la hoja de trabajo.



De la misma manera que el caso 3 y 4
Con aproximadamente un
$45° < \theta < 90°$
y tmb aprox en $\theta = (0,0)$.

Una característica fundamental de la traslación es que respeta tamaño y forma ¿Qué otras transformaciones conservan estas propiedades?

la rotación y la reflexión (y las composiciones de éstas)

Discute con tus compañeros sobre sus respuestas en el punto anterior y anota aquí tus conclusiones

Hubo una compañera que se quedó con la idea de que todo se hacía con vectores (ya que hicimos mucho énfasis en la F de traslación).

Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma.

Traslación, Giro o Rotación, Simetría Axial, y la Simetria con Deslizamiento que como mencioné anteriormente, las composiciones tambien presevan tamano y forma.

Fig. ***N3.D.10***

La última transformación permite observar una confusión en el caso 6 y donde, de manera similar al caso C, el estudiante no percibe el cambio de orientación de la figura y redacta en su versión final una rotación erróneamente. Las respuestas describen la impresión del trabajo del caso A y una explicación plausible del por qué de su rendimiento *(“una compañera que se quedó con la idea de que todo se hacía con vectores”*). La respuesta final fue obtenida de internet durante la fase 3 y, contrario a sus compañeros, incluye la **reflexión con deslizamiento**; refiriéndose a ella como “*simetría con deslizamiento*”.

Ya conoces el software GeoGebra, haz uso de él para responder las siguientes preguntas:

1.- Abre el archivo “Rotación 1” y manipula los elementos que aparecen ¿Cuáles es la relación entre los objetos del archivo (Figura azul, Figura roja, Punto O y Ángulo α)?

La figura roja es la transformación de la azul bajo la Transf de Rotación, y el ángulo α nos dice el ángulo que se usa en la rotación para obtener P'

- Selecciona la casilla “Punto e imagen”, aparecerán dos puntos (P y su homólogo P’ bajo la transformación) y los segmentos que unen a cada uno con el punto O. Mide las distancias de los segmentos OP y OP’ con la herramienta “distancia o longitud” del menú de herramientas de GeoGebra. ¿Cuál es la relación entre las distancias de los segmentos OP y OP’?.

OP = 17 , OP' = 17 Son los mismos,
OP = 24 , OP' = 24 Así, OP = OP' y podríamos decir que O es el centro de una circunferencia de radio mayor donde P y P' son puntos de la circunferencia

- Verifica para otras posiciones del punto P ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Sí Anota tus observaciones:

2.- Selecciona la casilla “Marcar ángulo” ¿Qué elemento aparece? ¿Cómo se relaciona con el ángulo α?

Aparece una sombra roja indicando el ángulo α que hay entre POP'

- Verifica para otras posiciones del punto P y para distintos ángulos α ¿Mantienes tu respuesta anterior? Sí Anota tus observaciones:

Incremento la sombra entre POP' cuando aumente α en la fig auxiliar (la circunferencia) y ~~para~~ después de mover P también se mantuvo α.

Fig. ***N3.D.11***

Las observaciones de la hoja de trabajo 8 las podemos resumir a la relación de una circunferencia ***imaginaria*** con la transformación de rotación; lo cual aparece implícitamente en el segundo inciso de la pregunta 1, donde el estudiante elabora la siguiente conjetura:

> *"OP=OP'. Así que podríamos decir que O es el centro de una circunferencia de radio r=OP=OP' donde P y P' son puntos de la circunferencia"*

Reconsiderando lo solicitado en la pregunta 2, el estudiante explica la congruencia de los segmentos formados por OP y OP' mediante la construcción de la circunferencia, considerando a la rotación como un movimiento a través de circunferencias de distinto radio (una estrategia muy similar a la utilizada por el estudiante "C"). Aunque la conclusión es antecedida por mediciones concretas de segmentos, éstas parecieran solo ser utilizadas como recurso de exploración; ya que considerando la conclusión, las mediciones son explicadas como "*aparentes*" propiedades de la transformación, es por ello que la categoría de demostración asignada es deductiva de experimento mental.

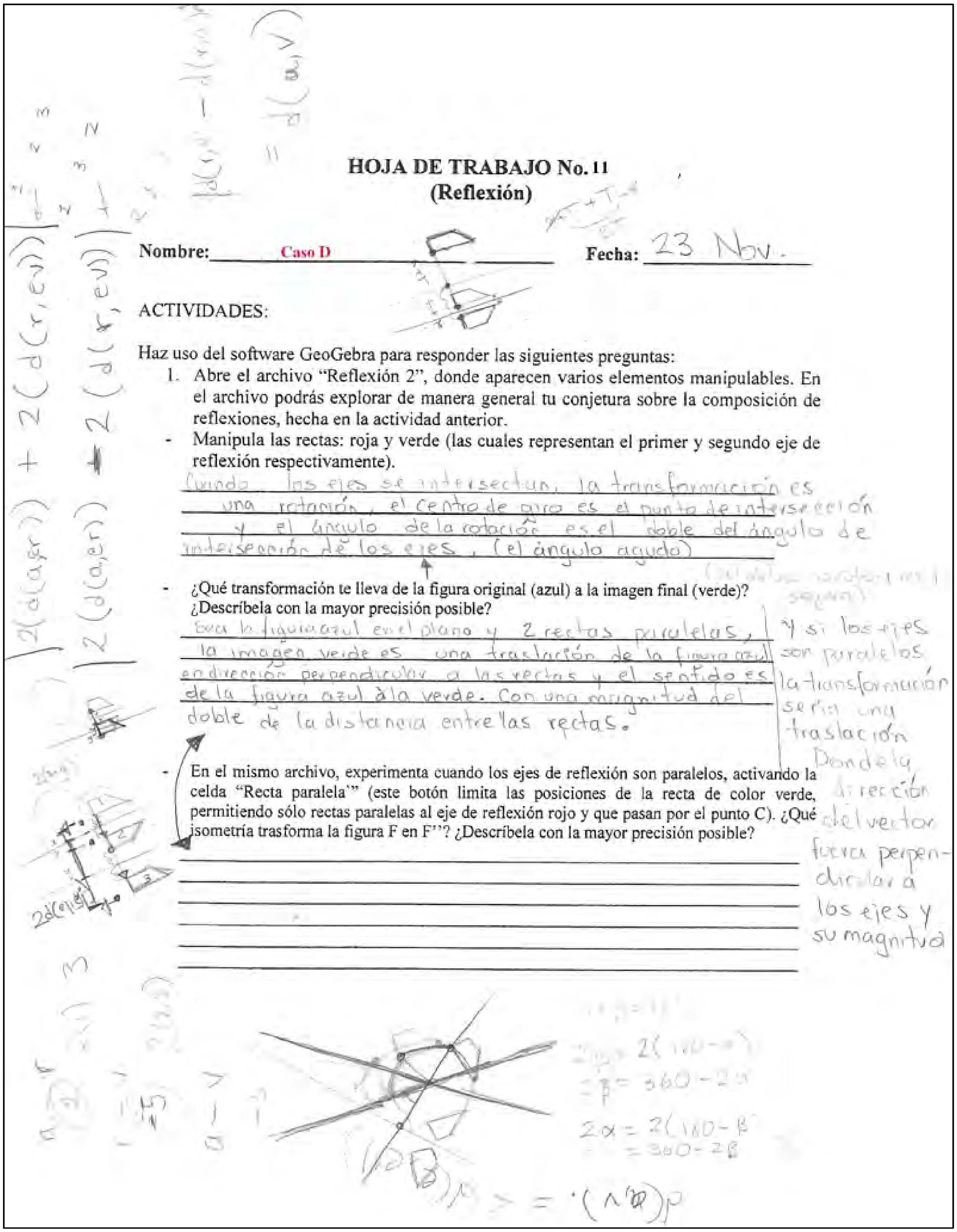
3.- Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.

que para transformar el punto P=(x,y) a P' [illegible] respecto a un punto O, se requiere que las distancias d(OP) = d(OP'). cuando apliquemos la rotación respecto a un ángulo θ dado.

Fig. ***N3.D.12***

La pregunta final solicita una definición de la transformación, donde el alumno menciona la condición de equidistancia de los puntos homólogos y el centro de giro, pero sin incluir información sobre el ángulo de rotación, ni su papel en la transformación. Las siguientes sesiones, donde se comparten y discuten las definiciones de rotación y reflexión no contaron con la participación del caso D (por inasistencia).

Como consideraciones del escenario para la resolución de la hoja de trabajo 11, el estudiante llegó tarde al inicio de la sesión y contó con poco tiempo para construir las conjeturas, al grado de no concretarlas; es por ello que las respuestas presentadas fueron elaboradas al final de la discusión grupal y no a la par de sus compañeros. En cuanto al papel del estudiante durante la fase 3, fue bastante activo y sus intervenciones se orientaron a aportar algunas propiedades que observaba durante la exploración grupal (particularmente en el caso de reflexiones con ejes paralelos) y precisar las respuestas de sus compañeros (considerando posibles contraejemplos de sus afirmaciones). La hoja de trabajo presentada fue la siguiente:



HOJA DE TRABAJO No. 11
(Reflexión)

Nombre: Caso D **Fecha:** 23 Nov.

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Reflexión 2", donde aparecen varios elementos manipulables. En el archivo podrás explorar de manera general tu conjetura sobre la composición de reflexiones, hecha en la actividad anterior.

- Manipula las rectas: roja y verde (las cuales representan el primer y segundo eje de reflexión respectivamente).

Cuando los ejes se intersectan, la transformación es una rotación, el centro de giro es el punto de intersección y el ángulo de la rotación es el doble del ángulo de intersección de los ejes, (el ángulo agudo)

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

Sea la figura azul en el plano y 2 rectas paralelas, la imagen verde es una traslación de la figura azul en dirección perpendicular a las rectas y el sentido es de la figura azul a la verde. Con una magnitud del doble de la distancia entre las rectas.

Y si los ejes son paralelos la transformación sería una traslación Donde la dirección del vector fuera perpendicular a los ejes y su magnitud

- En el mismo archivo, experimenta cuando los ejes de reflexión son paralelos, activando la celda "Recta paralela'" (este botón limita las posiciones de la recta de color verde, permitiendo sólo rectas paralelas al eje de reflexión rojo y que pasan por el punto C). ¿Qué isometría trasforma la figura F en F''? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

$2\alpha = 2(180-\beta)$
$= 360 - 2\beta$

Fig. ***N3.D.13***

Para analizar las actividades realizadas, el interés se concentra en el significado de los “garabatos” que aparecen alrededor de las respuestas planteadas (considerando a éstas últimas como el producto terminado de la exploración). Así que a continuación se reorganizan e interpretan elementos auxiliares utilizados por el estudiante.

Dado que las respuestas se redactaron durante la discusión grupal, la construcción de figuras y cálculos se convierten en un intento de validar las conjeturas elaboradas durante la sesión. Durante la fase 3, el estudiante declaró que cuando los ejes de reflexión son paralelos entonces la composición es “*una traslación*”; pero se mostró incrédulo ante su propia afirmación y cuestionándola, como estrategia de exploración optó por hacer un análisis por casos (usando como criterio la posición de la figura original y su imagen con respecto a los ejes de reflexión).

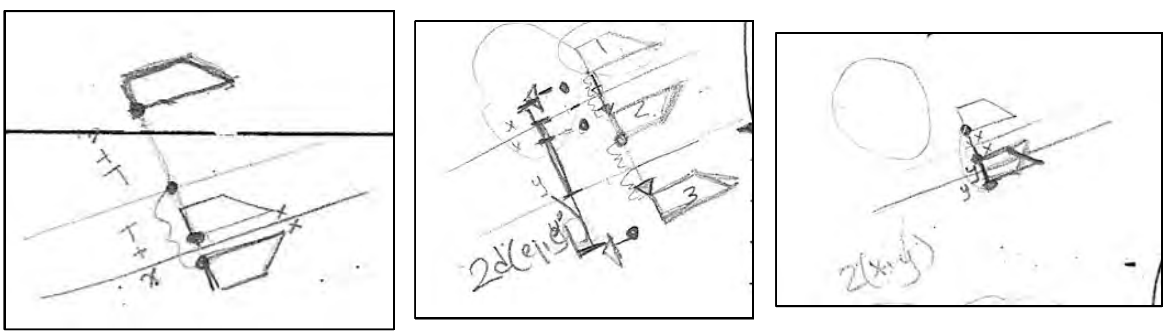


Fig. ***N3.D.14***

En las comprobaciones con herramientas del plano sintético, se relaciona los puntos homólogos de las reflexiones (mediante la equidistancia al eje de reflexión) y las diferencias entre las tres construcciones muestran una selección de casos; en el primer cuadro aparece la imagen inicial entre los ejes de reflexión, en un segundo intento se construye por encima de ambos ejes y en el cuadro final aparece un caso extremo al sobreponer la imagen con respecto al primer eje de reflexión. En los tres escenarios realiza las comparaciones de las medidas y, no conforme con la exploración, realiza intentos de justificación en el registro analítico.

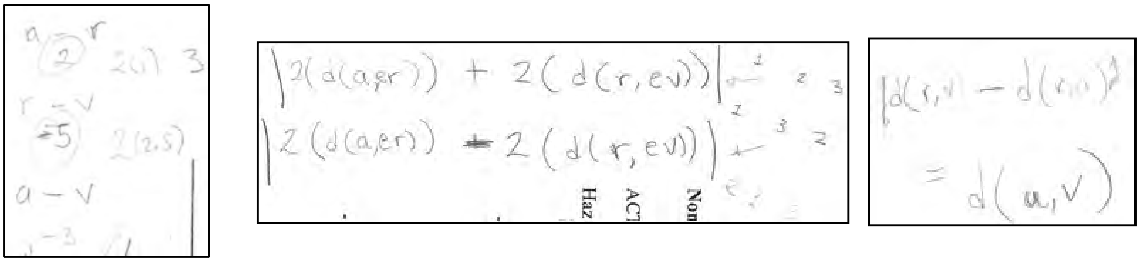


Fig. ***N3.D.15***

En los cuadros siguientes se realizan cálculos algebraicos para longitudes específicas (primer cuadro) y son utilizados para reorganizar los distintos acomodos de las transformaciones. En la imagen central aparecen tres triadas de números, los cuales representan el acomodo de las figuras, señalando el orden de las transformaciones. En el cuadro final aparece la conclusión de “*d(v,r)-d(v,a)=d(a,v)*” y es consecuencia de un error en el acomodo de la información. Al margen de los resultados, es notorio el cambio de rol en cuanto a la función de la demostración (al menos al utilizado por el estudiante en las actividades anteriores). Las características de las justificaciones no permiten asignar una categoría de demostración deductiva con experimento mental transformativa.

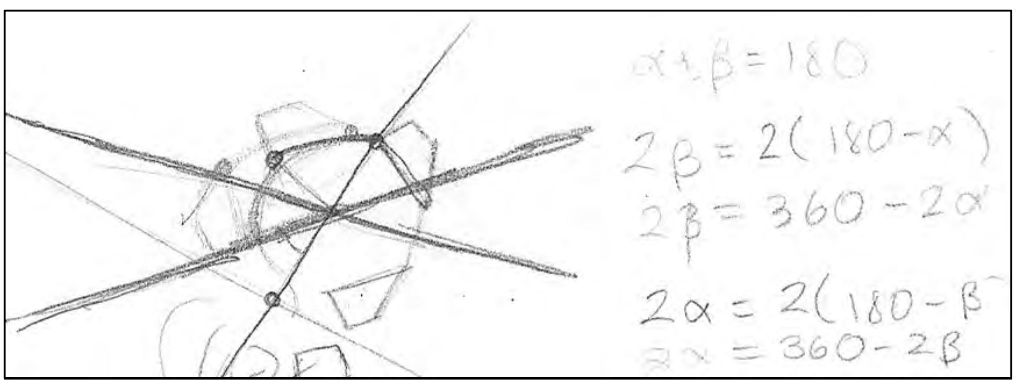


Fig. ***N3.D.16***

Para la composición de reflexiones con ejes no paralelos realiza una comprobación de experimento mental transformativa. Con el fin de facilitar la construcción marca la circunferencia auxiliar (mencionada en la hoja de trabajo 8), pero la relación de los ángulos que utiliza como punto de partida no le permite avanzar de manera significativa en la prueba.

Como resumen del desempeño del estudiante, se observan exploraciones y demostraciones inductivas con ejemplos genéricos, experimento mental transformativo (con mayor recurrencia) y deductivas formales transformativas. Aunque la construcción de definiciones no fue completada, el estudiante presenta construcciones puntuales como guía y enunciados económicos, además de la transformación de definiciones incorrectas en correctas. Las respuestas y las habilidades mostradas lo convierten en candidato para darle seguimiento al nivel 4 (con la hoja de trabajo 12).

OBSERVACIONES DEL NIVEL 3

Los criterios de evaluación marcan a los estudiantes C y D como candidatos para continuar con la secuencia de actividades, en cambio los estudiantes A y B no cumplen con los requisitos del tercer nivel; por lo tanto, se opta por omitirlos como elementos de estudio para la hoja de trabajo 12. Entre las carencias de los estudiantes A y B está la construcción de definiciones poco económicas e incompletas (influenciadas por elementos preceptivos y enfoques empíricos) además de respuestas influenciadas por niveles distintos. Esto último resultó definitorio para la asignación de los subniveles.

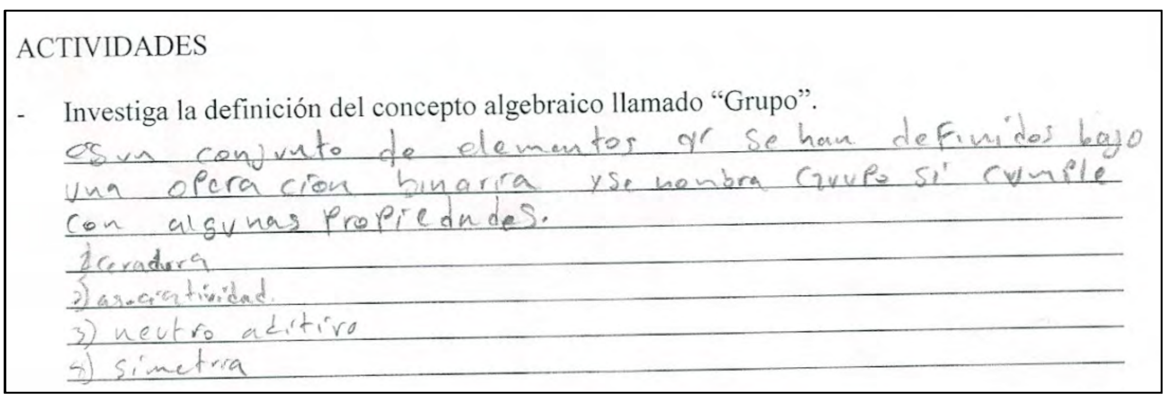
En cuanto a los estudiantes C y D, muestran un avance significativo en las técnicas de exploración y presentación de resultados, además de cumplir con los requerimientos matemáticos para la resolución de la hoja de trabajo siguiente. Una medida apropiada para la continuación de las actividades es la incorporación de herramientas analíticas para la resolución de las hojas de trabajo, razón por la cual se suspende la secuencia y durante las siguientes sesiones se abordan las transformaciones con métodos analíticos.

ANÁLISIS DEL CUARTO NIVEL DE VAN HIELE
(Hoja de trabajo No.12).

Contemplando la variedad de elementos necesarios para trabajar apropiadamente el cuarto nivel, el seguimiento de las hojas de trabajo perdió continuidad, con la intención de promover un recordatorio de elementos de álgebra lineal, álgebra moderna y geometría analítica necesarios para evaluar la estructura de grupo de las isometrías en el plano. Previo a la aplicación de la hoja de trabajo No. 12, los estudiantes trabajaron la versión analítica de las transformaciones, en el caso de la rotación se profundizó en el tema de la matriz de rotación, su construcción y las consideraciones a incluir si la rotación tiene como centro de giro a un punto distinto del origen. Otro elemento del contexto para la aplicación de la actividad es que solo fueron requeridos los estudiantes que superaron los primeros 3 niveles de Van Hiele, eso nos limita a estudiar las respuestas de 2 de los casos seleccionados (C y D).

A los estudiantes se les citó fuera del horario de clases, ambos tenían a la mano una computadora con GeoGebra instalado y acceso a internet, para realizar consultas en caso de que lo considerarán necesario.

Caso C:

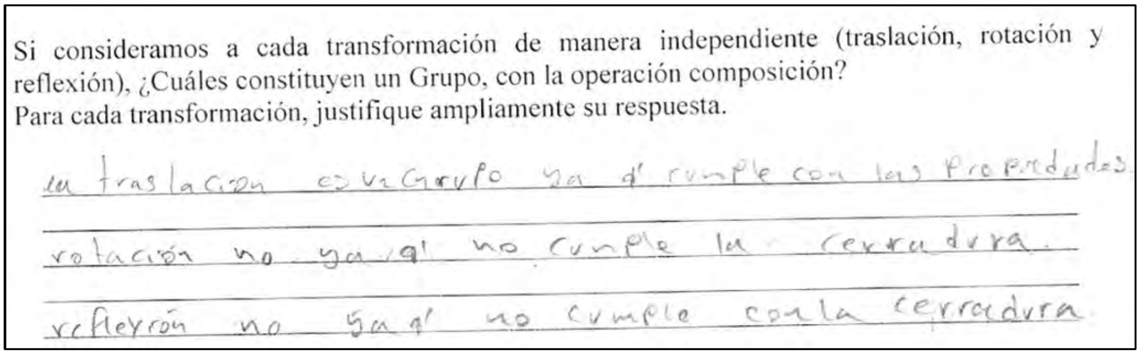

ACTIVIDADES

- Investiga la definición del concepto algebraico llamado “Grupo”.

es un conjunto de elementos q' se han definidos bajo una operacion binaria y se nombra Grupo si cumple con algunas propiedades.
1) cerradura
2) asociatividad
3) neutro aditivo
4) simetria

Fig. ***N4.C.1***

El estudiante confesó no recordar la definición de “Grupo”, por lo cual se le permitió consultar fuentes de internet (convicción externa) y, previo a responder a la pregunta uno, revisó un par de páginas web, para después realizar su redacción.

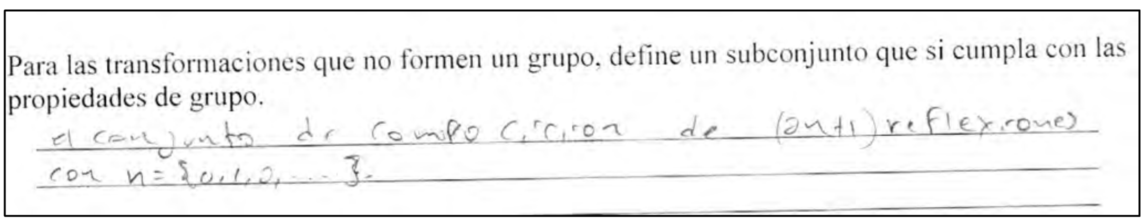


Si consideramos a cada transformación de manera independiente (traslación, rotación y reflexión), ¿Cuáles constituyen un Grupo, con la operación composición?
Para cada transformación, justifique ampliamente su respuesta.

La traslación es un Grupo ya q' cumple con las propiedades
rotación no ya q' no cumple la cerradura.
reflexión no ya q' no cumple con la cerradura

Fig. ***N4.C.2***

Para cubrir lo referente a la estructura de Grupo, el estudiante se limitó a utilizar la cerradura como definitoria. Mientras que para el tipo de transformaciones que no satisfacen la cerradura bajo la composición (rotación y reflexión) manejó una estrategia de contraejemplos. El escenario contrastante, es cuando asegura que el conjunto de traslaciones forman un Grupo al evaluar solamente la propiedad de cerradura.



Para las transformaciones que no formen un grupo, define un subconjunto que si cumpla con las propiedades de grupo.

el conjunto de composición de (2n+1) reflexiones
con n={0,1,2,...}.

Fig. ***N4.C.3***

El reconocimiento de estructura de grupo se evalúa en la pregunta siguiente, en la cual se solicita a los estudiantes la definición de un subconjunto de elementos, para cada transformación, donde se cumplan las condiciones de grupo. En el caso de las reflexiones, el estudiante define a:

“*Composición de (2n+1) reflexiones*”

Considerando los valores *n* como cualquier número Natural, al profundizar en la respuesta del estudiante, éste declara durante la fase 3: “*los elementos del conjunto son todas reflexiones impares de un (*con respecto a…*) eje de reflexión*” y construye su conjunto en el pizarrón; dibujando una figura inicial y la imagen de la misma después de 2 reflexiones sobre un eje particular (los objetos construidos son figuras superpuestas a la original). Las indicaciones señaladas para la construcción, muestran una confusión sobre la operación definida en el Grupo (la reflexión, en este caso) y un desconcierto en cuanto a los elementos de interés, siendo de mayor relevancia las figuras transformadas que los elementos que definen a la transformación.

Para la construcción del subconjunto de Rotaciones, el estudiante explora con ayuda de un archivo de GeoGebra, pero durante la sesión se limita a especular sobre la composición (evaluando la propiedad de cerradura) y omite una respuesta al respecto.

- Bajo la operación composición, el conjunto formado por las transformaciones isométricas (rotación, reflexión y traslación) es llamado "Grupo de isometrías". Verifica que efectivamente es un Grupo, justificando ampliamente tu respuesta.

  Si ya q' la refleccion se puede ver como una traslación o una rotacion en diferentes caso, y la rotación como una doble reflexion o traslacion, y la traslación porsi sola ez "Grupo de isometrias"

Fig. ***N4.C.4***

Para la pregunta final se solicita una justificación para el término "Grupo de Isometrías", al responderla el estudiante requiere replantear la respuesta anterior (relacionada con la composición de rotaciones) y no logra construir una respuesta aceptable. Al hablar de la composición de rotaciones menciona "*la traslación*" y "*la doble reflexión*", esta última representa una transformación no permitida en el grupo (o al menos no permite asegurar la cerradura del grupo bajo la operación composición).

Las categorías de demostración usadas para responder a las distintas actividades del nivel se pueden separar en dos conjuntos: primeramente, las inductivas de ejemplo genérico con inferencia (asumidas como fruto de las exploraciones de las hojas de trabajo anteriores) y las perceptivas, éstas últimas usadas al interpretar a las transformaciones como movimientos aparentes de figuras geométricas.

Las distintas respuestas no muestran una visión estructural de las transformaciones; el estudiante se limita a explorarlas con el apoyo de figuras concretas, no permitiendo concebirlas como objetos independientes con respecto a los elementos que transforman. Durante la fase 3 el estudiante mostró confusiones relacionadas con ésa visión estructural, particularmente en el inciso 3; donde se solicita la construcción independiente de subgrupos para cada transformación. Cabe señalar, que en más de una ocasión fue necesario replantear las actividades en términos del efecto en las figuras. Un ejemplo relacionado con sus desconciertos se da durante la construcción del subgrupo de reflexión, donde preguntó cómo podría asegurar la existencia de un elemento neutro, dando lugar a la intervención del caso D diciéndole: *"tienes que encontrar una **reflexión** que deje inmóvil a cualquier figura en el plano"*, esta respuesta fue interpretada erróneamente y el estudiante confundió la existencia del elemento neutro con la existencia de inversos bajo la composición[9].

Las fases consecuentes fueron afectadas por las distintas confusiones acarreadas y el desempeño durante la hoja de trabajo 12 fue significativamente inferior al mostrado en los niveles antecesores, sus resultados muestran una mezcla de respuestas correctas e incorrectas; además de razonamientos y resultados escasos. Las actividades requerían la comprensión de la estructura axiomática de las transformaciones y ser capaz de realizar comprobaciones formales; sin embargo, no apareció evidencia suficiente del dominio del estudiante en tales aspectos. Por lo tanto, el desenvolvimiento del caso C indica un dominio parcial del cuarto nivel de razonamiento y, siendo congruentes con lo percibido en las respuestas, se le asigna una adquisición baja-intermedia del nivel.

Caso D:

El estudiante recurrió al uso de la máquina sólo para explorar sobre la composición de rotaciones.

[9] La conversación de los estudiantes fue indispensable para interpretar la respuesta del tercer inciso de la hoja de trabajo 12; considerando que la redacción resultó insuficiente y poco ilustrativa.

ACTIVIDADES

1 - Investiga la definición del concepto algebraico llamado "Grupo".

Grupo es un conjunto de elementos que bajo una operación binaria tiene una estructura algebraica que cumple con lo siguiente:

$(G, \bullet)$ G es el conjunto y $\bullet$ será la operación binaria, es decir que tomamos 2 elementos de G y nos da otro de G

$G \bullet G \to G$.

Así, si g_1, g_2, g_3 elementos arbitrarios en G,

1) $g_1 \cdot g_2 \in G$
2) $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
3) $\exists\, e \in G$ tq $g \cdot e = g = e \cdot g$ $\forall\, g \in G$.
4) Para cada $g \in G$ $\exists\, g' \in G$ tq $gg' = e = g'g$.

Fig. ***N4.D.1***

Cuando el caso C recurrió a la investigación en páginas de internet para responder a la pregunta, el estudiante D comentó estar inscrito en la materia de Algebra Moderna (elemento a considerar al evaluar la variedad de herramientas matemáticas y la maestría en el uso de algunas de ellas).

2 - Si consideramos a cada transformación de manera independiente (traslación, rotación y reflexión), ¿Cuáles constituyen un Grupo, con la operación composición? Para cada transformación, justifique ampliamente su respuesta.

Traslación: Digamos que $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ son los vectores asociados a las transf de traslación $T_v(p)$ y $T_w(p)$. luego, si $p = (x, y)$, $T_v(p) = (x+v_1, y+v_2)$ y $T_w(p) = (x+w_1, y+w_2)$.

Así, sea "T" el conj. de las traslaciones en el plano, $T_v, T_w \in$ "T", $(T_v \cdot T_w)(p) = T_v(T_w(p))$

$= T_v(x+w_1, y+w_2)$

$= ((x+w_1)+v_1, (y+w_2)+v_2)$; dado que x, y, w_1, w_2, v_1 y $v_2 \in \mathbb{R}$ y la asociatividad en $\mathbb{R}$.

$= (x+(w_1+v_1), y+(w_2+v_2))$.

y si $u = (u_1, u_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$ tq $u_1 = w_1+v_1$ y $u_2 = w_2+v_2$

$\Rightarrow\ = (x+u_1, y+u_2)$

y Así: $= T_u(p)$.

y como u es un vector que al igual que v y w están en $\mathbb{R}^2$, podemos decir que $T_u \in$ "T".

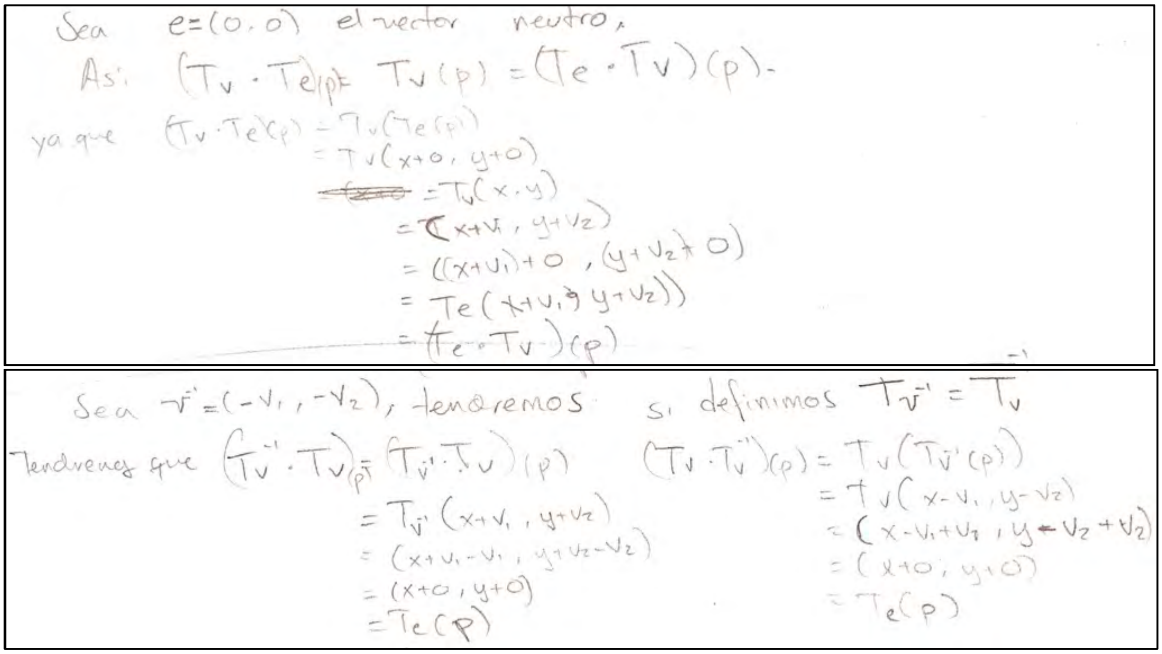
Continuación de la 2:

$(T_v \cdot (T_u \cdot T_w))(p) = (T_v \cdot T_u) \cdot T_w(p)$

ya que al final tomaremos en cuenta la asociatividad en los Reales, donde éstos serán las componentes de los vectores asociados.

Fig. ***N4.D.2***

La definición de traslación en términos de vectores fue capitalizado en la organización de su respuesta para el inciso 2, para verificar la cerradura elabora un trabajo considerando los vectores como pieza y hereda a la transformación la propiedad de asociatividad, a partir de los números reales.



Sea $e=(0,0)$ el vector neutro,

Así $(T_v \cdot T_e)(p) = T_v(p) = (T_e \cdot T_v)(p)$.

ya que
$$\begin{aligned}(T_v \cdot T_e)(p) &= T_v(T_e(p)) \\ &= T_v(x+0, y+0) \\ &= T_v(x, y) \\ &= (x+v_1, y+v_2) \\ &= ((x+v_1)+0, (y+v_2)+0) \\ &= T_e(x+v_1, y+v_2) \\ &= (T_e \cdot T_v)(p)\end{aligned}$$

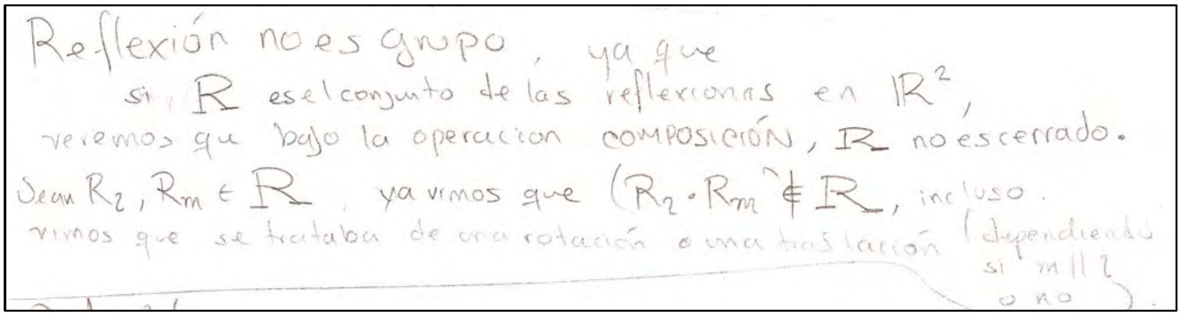
Sea $-\vec{v}' = (-v_1, -v_2)$, tendremos si definimos $T_{\vec{v}'} = T_v^{-1}$

Tendremos que
$$\begin{aligned}(T_v^{-1} \cdot T_v)(p) &= (T_{\vec{v}'} \cdot T_v)(p) \\ &= T_{\vec{v}'}(x+v_1, y+v_2) \\ &= (x+v_1-v_1, y+v_2-v_2) \\ &= (x+0, y+0) \\ &= T_e(p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_v \cdot T_v^{-1})(p) &= T_v(T_{\vec{v}'}(p)) \\ &= T_v(x-v_1, y-v_2) \\ &= (x-v_1+v_1, y-v_2+v_2) \\ &= (x+0, y+0) \\ &= T_e(p)\end{aligned}$$

Fig. ***N4.D.3***

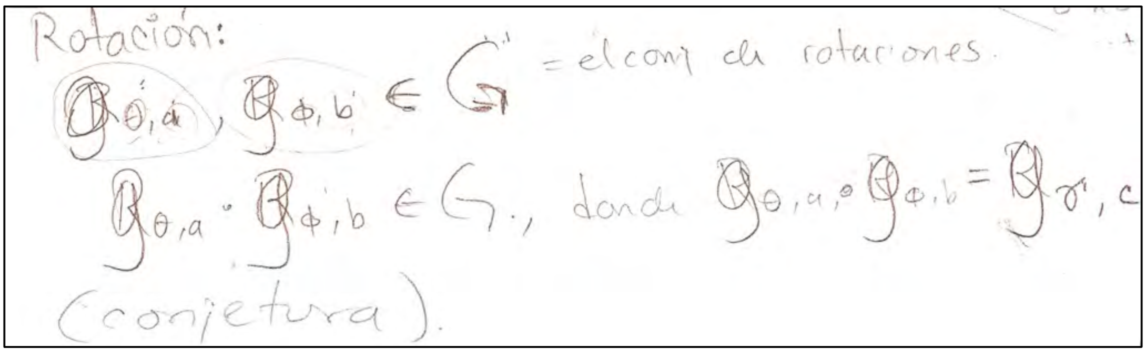
Considerando la afirmación sobre los axiomas de los números reales y su conocimiento al respecto, resulta confuso el por qué el estudiante no recurre a ellos para evidenciar las propiedades siguientes (tal y como lo hizo para la asociatividad). En ésta ocasión, construye y organiza deductivamente la existencia del elemento neutro y los inversos para cada traslación del conjunto, presentando la información en un lenguaje analítico (siendo este ambiente, donde el estudiante muestra mayor comodidad) y con demostraciones formales transformativas (no se asigna el grado de axiomática por recurrir a postulados de los números reales de manera explícita, tal consideración limita el alcance en geometrías alternativas).



Reflexión no es grupo, ya que
si R es el conjunto de las reflexiones en $\mathbb{R}^2$,
veremos que bajo la operación COMPOSICIÓN, R no es cerrado.
Sean $R_l, R_m \in R$ ya vimos que $(R_l \circ R_m) \notin R$, incluso
vimos que se trataba de una rotación o una traslación (dependiendo si $m \parallel l$ o no).

Fig. ***N4.D.4***

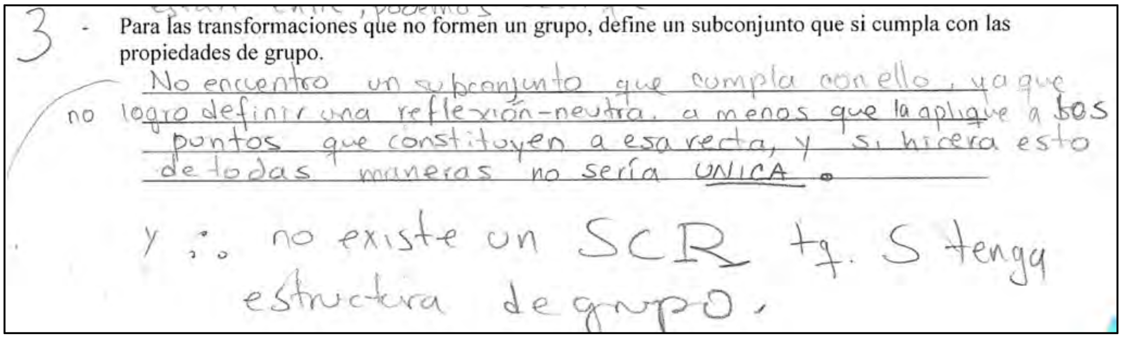
Para refutar la estructura de grupo para la reflexión, el estudiante evoca los resultados de la hoja de trabajo anterior.



Rotación:
$\mathcal{R}_{\theta,a}, \mathcal{R}_{\phi,b} \in G$ = el conj de rotaciones.
$\mathcal{R}_{\theta,a} \circ \mathcal{R}_{\phi,b} \in G$, donde $\mathcal{R}_{\theta,a} \circ \mathcal{R}_{\phi,b} = \mathcal{R}_{\gamma,c}$
(conjetura).

Fig. ***N4.D.5***

La poca exploración dedicada a la composición de rotaciones es evidente en las respuestas de los estudiantes C y D, la única diferencia radica en el poco riesgo que asume el caso D al responder entre paréntesis la palabra "*conjetura*" (en la parte baja de la hoja de trabajo mostrada anteriormente), haciendo alusión a lo superficial de su exploración y el poco peso que asigna a su propia afirmación. Las justificaciones elaboradas resultan insuficientes, incluso para el alumno. Una posible conclusión al respecto, es la forma en que el estudiante demerita su resultado al no lograr estructurar una respuesta con los lineamientos usados para la evaluación de traslación.



3 - Para las transformaciones que no formen un grupo, define un subconjunto que si cumpla con las propiedades de grupo.

No encuentro un subconjunto que cumpla con ello, ya que no logro definir una reflexión-neutra, a menos que la aplique a los puntos que constituyen a esa recta, y si hiciera esto de todas maneras no sería UNICA.

y ∴ no existe un $S \subset R$ tq. S tenga estructura de grupo.

Fig. ***N4.D.6***

El comentario hecho por el estudiante para disipar la confusión del caso C, muestra su antecedente en la respuesta del tercer inciso; donde el alumno afirma la no existencia de un subconjunto de reflexiones que formen un grupo. El fundamento parte de la inexistencia de un elemento neutro, lo cual implica la evaluación de las trasformaciones de manera independiente a las figuras o imágenes que transforman (en contraste a la versión del caso C, para la misma pregunta).

La exploración sobre rotaciones no es incluida en la respuesta, posiblemente por el desconocimiento del resultado de la composición de rotaciones y las pocas herramientas para abordarlo. En el anverso de la hoja siguiente aparece un intento de expresar el resultado de la composición de rotaciones mediante el uso de matrices, pero fue *tachado* por el estudiante por lo poco ilustrativo de la respuesta obtenida.

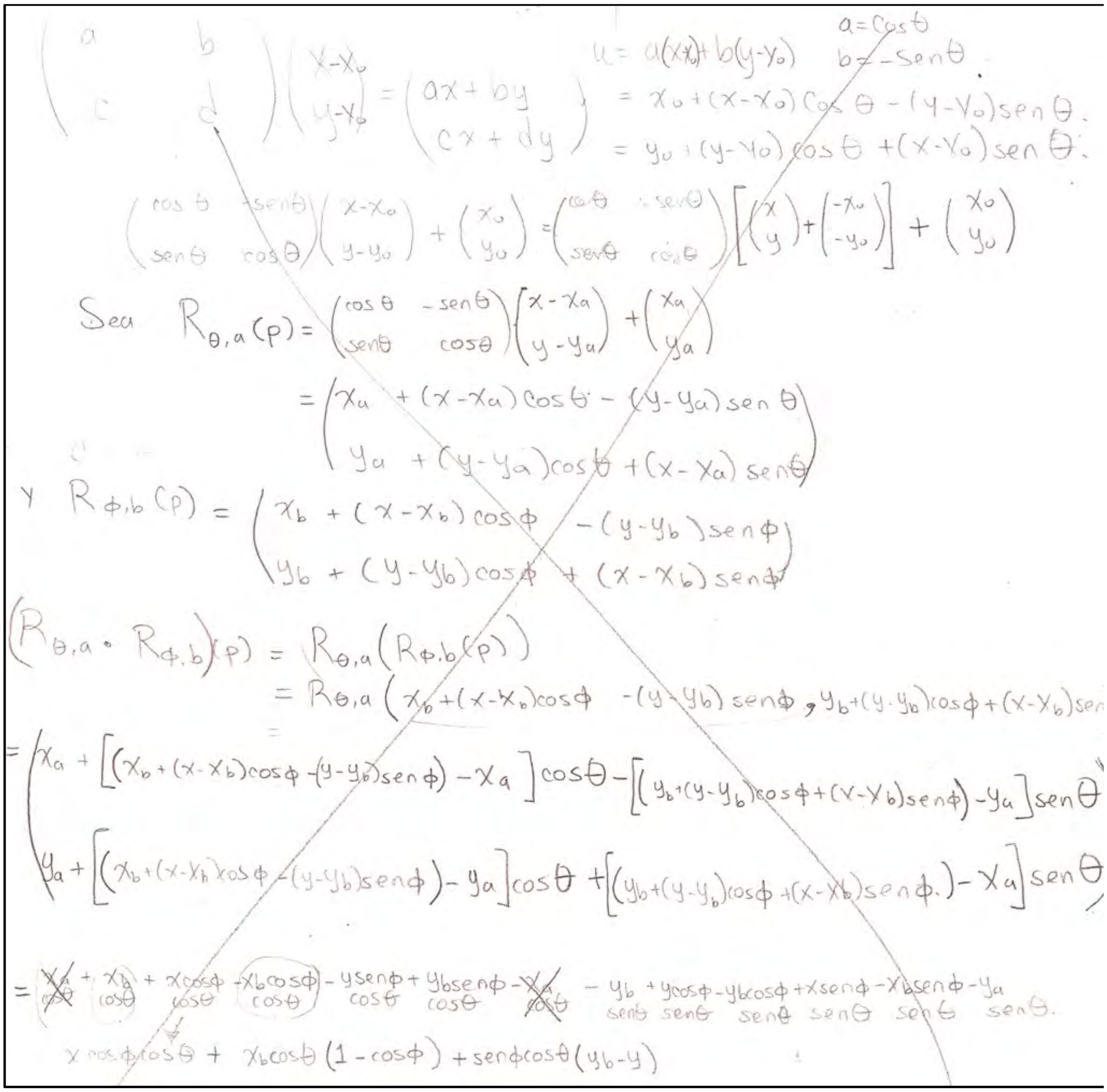
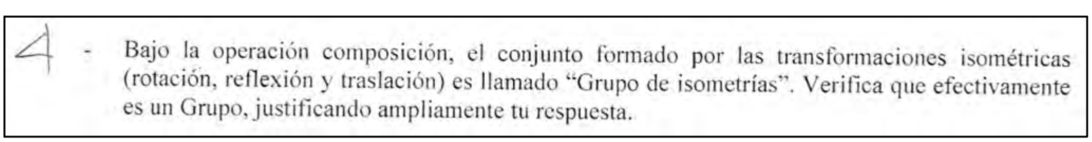


Fig. ***N4.D.7***

Al final de la sesión, el estudiante preguntó sobre identidades trigonométricas que pudieran ser de utilidad para abordar la pregunta, evidenciando lo poco claro de la respuesta obtenida e intentando recuperar el trabajo avanzado en el ambiente analítico.



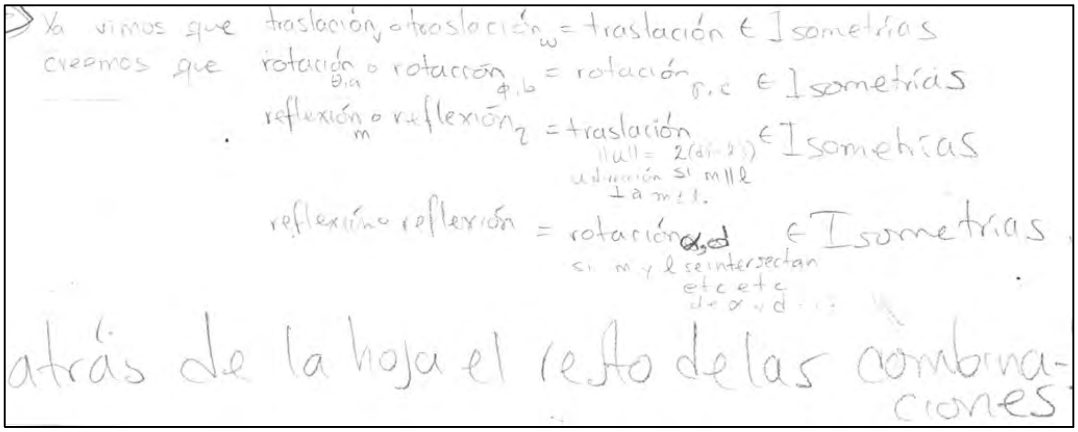

Ya vimos que traslación o traslación = traslación ∈ Isometrías
creemos que rotación o rotación = rotación ∈ Isometrías
reflexión o reflexión = traslación ∈ Isometrías
si m‖l
reflexión o reflexión = rotación ∈ Isometrías
si m y l se intersectan
etc etc
atrás de la hoja el resto de las combinaciones

Fig. ***N4.D.8***

La pregunta final de la hoja de trabajo, solicita al estudiante justificaciones del término “Grupo de Isometrías”, para responder a la actividad, el caso D afirma realizar comprobaciones independientes para cada propiedad de Grupo. La primera en verificarse es la **cerradura**; para la cual separa las composiciones vistas anteriormente de las no exploradas (al menos durante la clase).

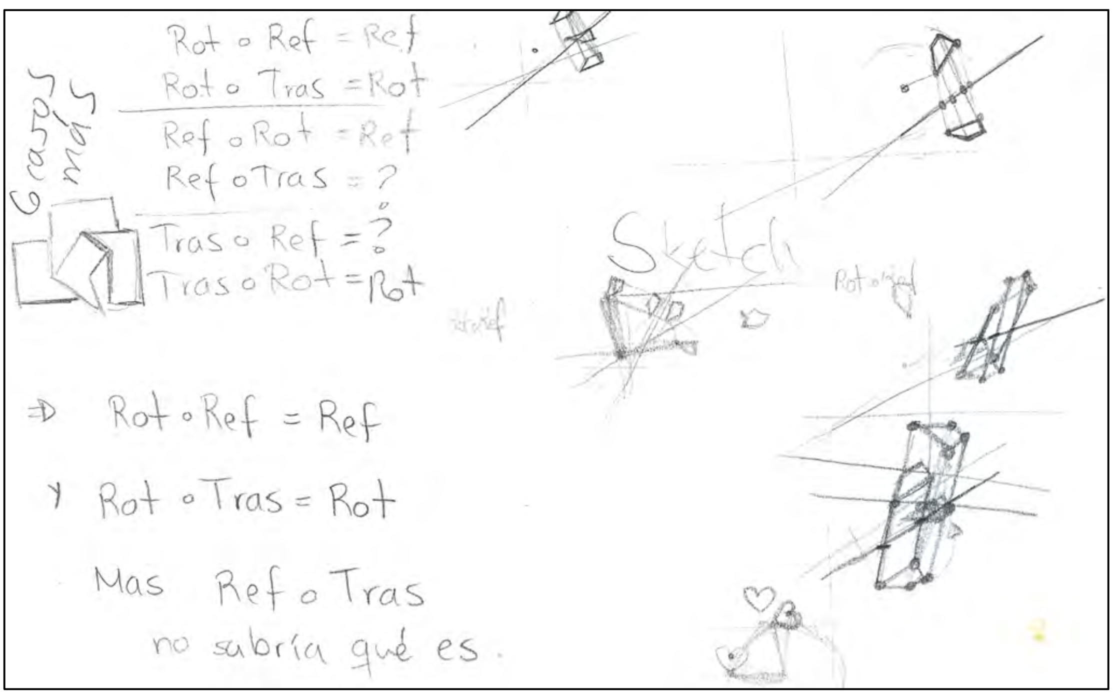


Fig. ***N4.D.9***

Las categorías de demostración usadas para afirmar la cerradura son de tipo perceptivo, al ser producto de exploraciones en GeoGebra (e incluso las redactadas en la imagen anterior, donde inicia el párrafo diciendo “*ya vimos que…*”, son sólo conjeturas de la actividad No. 11 y producto de las exploraciones en los archivos correspondientes).

Las distintas composiciones son apoyadas con trazos y construcciones en “SketchPad”[10], evidenciando el tratamiento empírico de las afirmaciones; al grado de resultar insuficiente para describir la composición de reflexión y traslación.

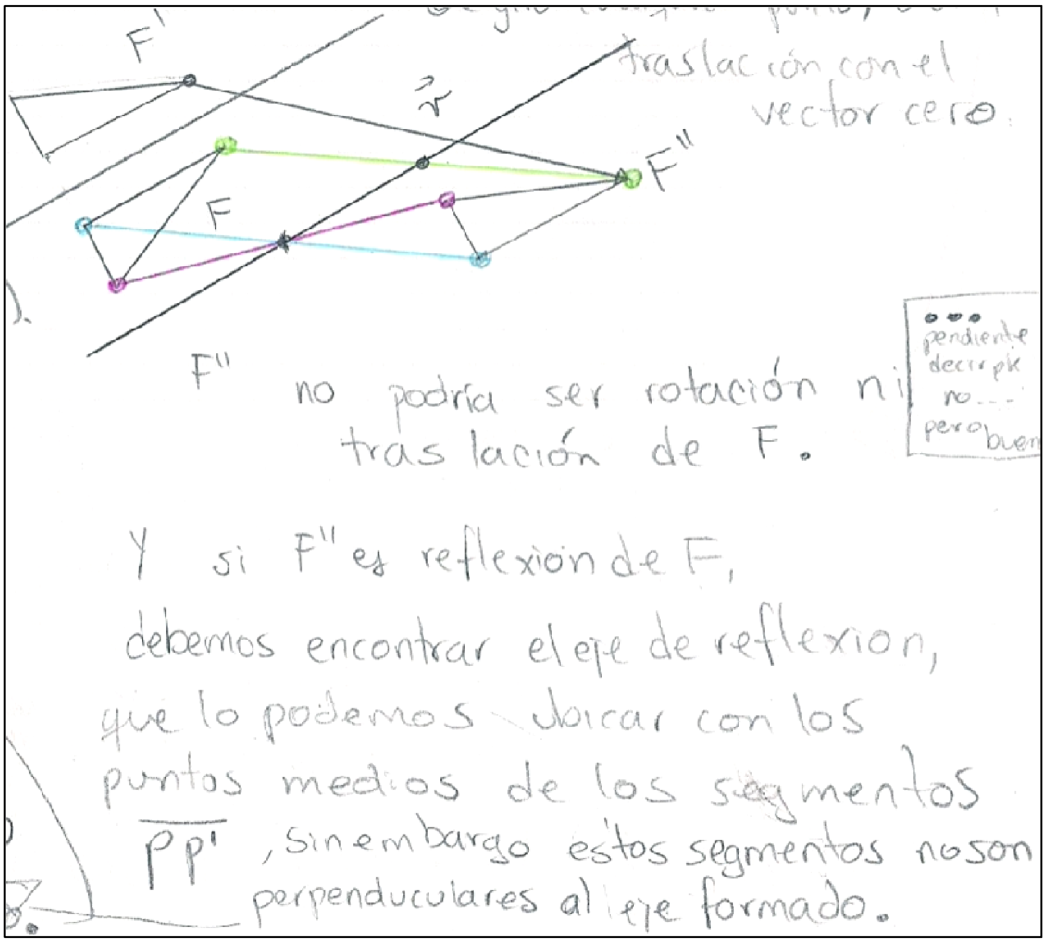


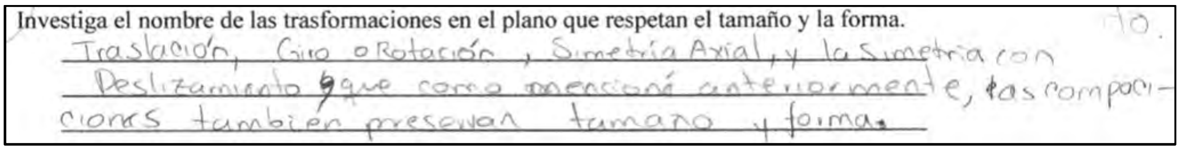
Fig. ***N4.D.10***

Dentro de la valoración de cerradura, el estudiante profundiza en la composición de reflexión y traslación, al usar un ejemplo genérico e involucrar las propiedades

[10] El software de Geometría dinámica estaba instalado en la maquinas del centro de cómputo y la preferencia del estudiante está influenciada por la maestría en su manejo, el profesor titular de la clase utilizó la paquetería de manera recurrentemente en sesiones anteriores al pilotaje.

de la trasformaciones (demostración inductiva de ejemplo genérico con inferencia), llegando a la conclusión de que “No es un Grupo” y evita entrar en especulación al respecto. Las construcciones del estudiante no fueron compartidas durante la fase 3 y las exteriorizó fuera del horario de clases, por una aparente curiosidad.

Antes de continuar con las generalidades en las que se vio involucrado el caso D, es conveniente recordar una de sus respuestas de la hoja de trabajo 7.


Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma.

Traslación, Giro o Rotación, Simetría Axial, y la Simetría con Deslizamiento que como mencioné anteriormente, las composiciones también preservan tamaño y forma.

Fig. ***N4.D.11***

Ésta respuesta diferencia al estudiante del resto de sus compañeros, al ser el único en incluir 4 transformaciones distintas (en contraste con el resto de los alumnos, quienes se limitan a mencionar rotación, reflexión y traslación), la transformación adicional fue la reflexión con deslizamiento, misma que no fue usada como una explicación de la “no cerradura” del conjunto de transformaciones.

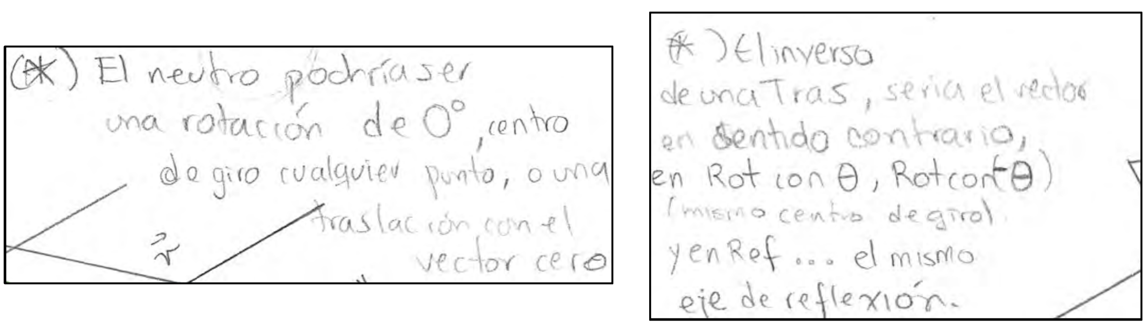


Fig. ***N4.D.12***

Para asegurar la propiedad de existencia del elemento neutro, el estudiante se apoya en la rotación y traslación y, a diferencia del caso C, describe los elementos inversos para cada transformación de manera global y sin requerir del uso de figuras concretas para relacionar las transformaciones.

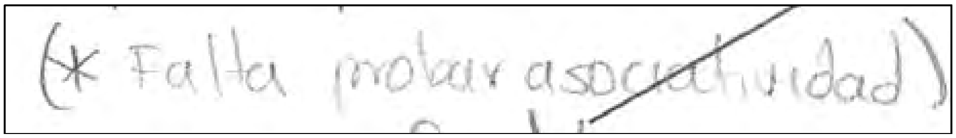


Fig. ***N4.D.13***

El estudiante se mostraba consciente de la ausencia de información relevante, manifestando que no estaba en condiciones de continuar con sus afirmaciones hasta asegurar la cerradura.

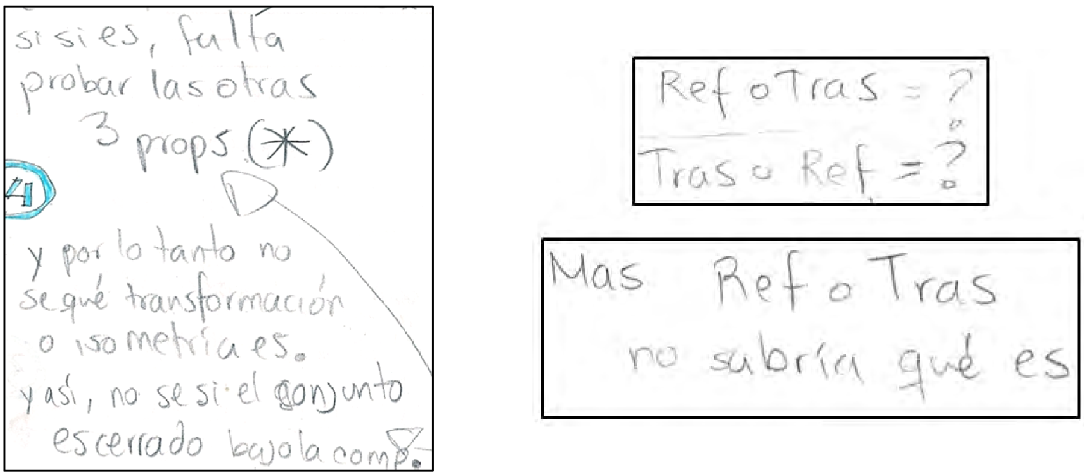


Fig. ***N4.D.14***

El avance es parcial y la confusión del caso D, se puede atribuir a la redacción de la pregunta misma, la cual dice:

> *Bajo la operación composición, el conjunto formado por las transformaciones isométricas (rotación, reflexión y traslación) es llamado "Grupo de isometrías". **Verifica que efectivamente es un Grupo**, justificando ampliamente tu respuesta.*

En la parte final de la pregunta se afirma la estructura de Grupo para el conjunto de transformaciones, lo cual puede inhibir las respuestas originales del estudiante (al influir en la redacción por presentarse una respuesta de manera autoritaria en la pregunta). Al margen de la respuesta, el estudiante no indaga al respecto y no utiliza la transformación adicional que declara en la hoja de trabajo 7 (reflexión con deslizamiento).

Evaluando las prácticas hechas por el caso analizado, el estudiante utiliza de manera sistemática categorías de demostración deductivas y las afirmaciones con antecedentes empíricos no las considera válidas. En varias hojas de trabajo, cuestionó las conjeturas de sus compañeros, mediante el uso de contraejemplos (casos extremos generalmente), ó intentó validarlas con encadenamientos deductivos.

Aunque aparecen algunas confusiones relacionadas al término “Grupo de isometrías” (comentadas anteriormente), el estudiante muestra un dominio de las propiedades de Grupo y su tratamiento. Las dudas planteadas por el estudiante fueron exteriorizadas después de culminadas las actividades; como una aparente curiosidad matemática, afectando el alcance de las fases 4 y 5 (al no tener un objetivo concreto a cual dirigirse). La integración fue la más disminuida en cuanto a potencial, ya que el tipo de demostraciones tomó un giro considerable, con respecto al tipo de trabajo presentado con anterioridad.

Las respuestas de las hojas de trabajo son correctas, pero no llegan a la solución del problema indicado o cuenta con justificaciones escasas. Considerando el nivel de razonamiento y las facultades mostradas, se asigna un nivel 4 con adquisición alta (sin llegar a ser completo).

OBSERVACIONES DEL NIVEL 4

En las hojas de trabajo anteriores al nivel 4, los estudiantes C y D mostraron un desempeño por encima del rendimiento de sus compañeros; asumiendo un rol protagónico y guía para el resto del salón (ya sea por la iniciativa durante las exploraciones sugeridas o por la precisión en las afirmaciones, mostrados por los casos C y D respectivamente). En cuanto a lo percibido en la hoja de trabajo 12, el caso C muestra carencias, que pueden estar relacionadas con las pocas exploraciones promovidas o complicaciones relacionadas con la concreción de las exploraciones previas, en un ambiente de mayor generalidad. Por otro lado, el caso D se ve menos afectado por el tipo de actividades, aprovechando su aparente dominio de tópicos de Álgebra Moderna para el estudio de la estructura de Grupo, las complicaciones a las que se enfrenta son promovidas por la redacción de la Hoja de trabajo 12 y confusiones encadenadas a las preguntas iniciales.

Considerando las categorías de demostración, los estudiantes utilizan métodos similares de exploración, pero sin asignar un peso similar a las conclusiones obtenidas; el caso C por ejemplo, usa exploraciones inductivas para responder a las distintas actividades y el caso D las restringe como comprobaciones, utilizándolas solamente para organizar el material en una demostración deductiva (al menos en los casos que cuenta con la exploración suficiente).

En un afán de contrastar las categorías de demostración utilizadas durante la resolución de las distintas hojas de trabajo, la actividad siguiente consistió en la aplicación de un examen final, donde se solicitan (explícitamente) demostraciones de las conjeturas elaboradas durante las distintas actividades.

ANÁLISIS DE EXAMEN
(Hoja final)

Durante la realización de las primeras hojas de trabajo fue notoria la irrelevancia que los estudiantes asignaron a la justificación de sus afirmaciones, en una primera instancia no fue un problema para la investigación (considerando la variedad de respuestas de las primeras actividades y la libertad proporcionada para las exploraciones). La medida tomada, con un exceso de optimismo, consistió en dar el beneficio de la duda y esperar que las justificaciones de los estudiantes asumieran un rol protagónico en las afirmaciones de mayor complejidad. Al ver que las hojas no lograban capturar los argumentos utilizados, se optó por incorporar, como actividad final, la resolución de un examen, donde se solicitan de manera explícita las afirmaciones hechas por los estudiantes durante la resolución de las distintas hojas de trabajo.

La aplicación del examen contrasta con el mecanismo usado de las hojas de trabajo, éstas últimas tienen un seguimiento natural y están influenciadas por un trabajo de grupo o atendidas por el profesor. El examen en cambio, fue una especie de concreción de los resultados trabajados y fue aplicado de manera individual (los estudiantes B y C lo resolvieron de manera conjunta por iniciativa propia), pero el poco tiempo restante obligó a permitir su entrega en los siguientes días.

En un afán de presentar un análisis minucioso sobre los métodos de argumentación, para cada caso de estudio se presenta una interpretación de las categorías de demostración usadas en cada pregunta. La hoja final, entregada a los estudiantes, fue la siguiente:

Examen

Nombre: ______________________________ **Fecha:** ________________

1.- Fruto de tu exploración, descubriste distintas propiedades de las traslaciones en el plano. Demuestra las siguientes conjeturas, utilizando la definición de traslación elaborada en clase (entiéndase T_V como la traslación a través del vector v):

- Si l es una recta (o segmento de recta) en el plano, entonces $T_V(l) \parallel l$
- Demuestra que el conjunto de Traslaciones en el plano es cerrado bajo la composición.

2.- Una transformación φ es una isometría (en el plano) si:

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \forall\, p, q \in \mathbb{R}^2 : d(p,q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$$

Siendo $d(p,q)$ la distancia euclidiana. Demuestra que cada una de las transformaciones vistas en clase (traslación, rotación y reflexión) son isometrías, utilizando las definiciones elaboradas.

3.- Enuncia una conjetura (completa) sobre la composición de reflexiones con respecto a ejes no paralelos y las rotaciones en el plano. Demuéstrala.

4.- Enuncia una conjetura (completa) sobre la composición de reflexiones con respecto a ejes paralelos y las traslaciones en el plano. Demuéstrala.

Caso A:

El caso A no entrego la hoja correspondiente al examen final.

Caso B:

La revisión de los exámenes muestra una similitud en las respuestas de los estudiantes B y C, así que el análisis se hará bajo el supuesto de que la elaboración del examen fue de manera conjunta. La medida tomada consistió en la evaluación de los resultados de manera independiente y en enfatizar las diferencias en la redacción (las cuales muestran elementos personales que cada estudiante considera necesario incluir en una demostración).

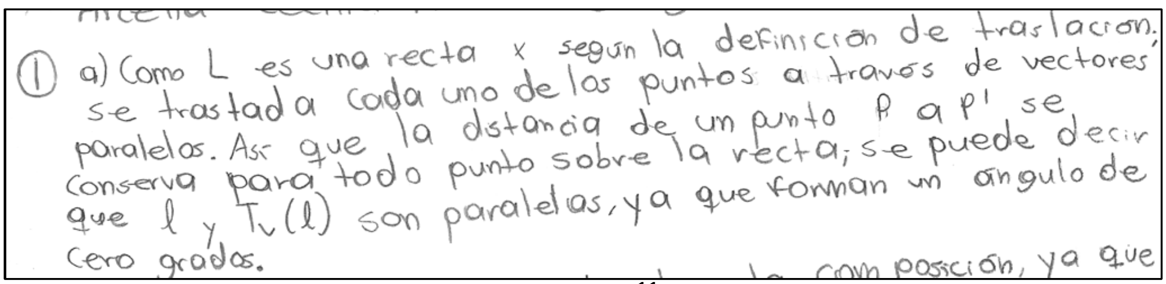

① a) Como L es una recta y según la definición de traslación;
se traslada cada uno de los puntos a través de vectores
paralelos. Así que la distancia de un punto P a P' se
conserva para todo punto sobre la recta; se puede decir
que l y $T_v(l)$ son paralelas, ya que forman un ángulo de
cero grados.

Fig. ***E.B.1***[11]

Las afirmaciones relacionadas con la traslación se presentaron en 2 incisos, en la primer sección se hace alusión al paralelismo de vectores y en un segundo momento se pide la comprobación de cerradura de la transformación de traslación. Para responder al primer apartado, el estudiante recurre al enunciado "*la distancia de un punto P a P' se conserva para todo punto sobre la recta"*, deducido a partir de declarar la existencia de vectores paralelos (aunque solamente hace uso del concepto de magnitud, asociado con los vectores). El cierre de la demostración habla de paralelismo de l y T_V(l), partiendo de la premisa de que P y P' se encuentran a la misma distancia, por lo tanto, la definición de paralelismo utilizada se podría redactar como:

[11] En este momento, el análisis ya no esta ordenado por Niveles de razonamiento, es por ello que el nuevo formato para enumerar las figuras es: **Examen. Caso de Estudio. Número de Imagen**

Las rectas l_1y l_2 son paralelas si:

$\forall\ P\ y\ Q\ tal\ que\ P \in l_1\ y\ Q \in l_2 \Longrightarrow$ *d(P, l_2)=d(Q, l_1)*

Las justificaciones presentadas en el primer inciso resultan incompletas y, por las inferencias presentadas sin un encadenamiento deductivo explícito, asumimos que el argumento está influenciado por la exploración promovida en la hoja de trabajo 3, razón por la cual se asigna una demostración inductiva de ejemplo genérico con inferencia (esto último al considerar las distintas propiedades declaradas, relacionadas de manera implícita).

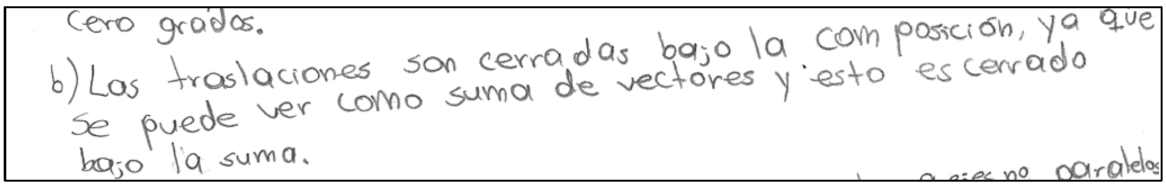
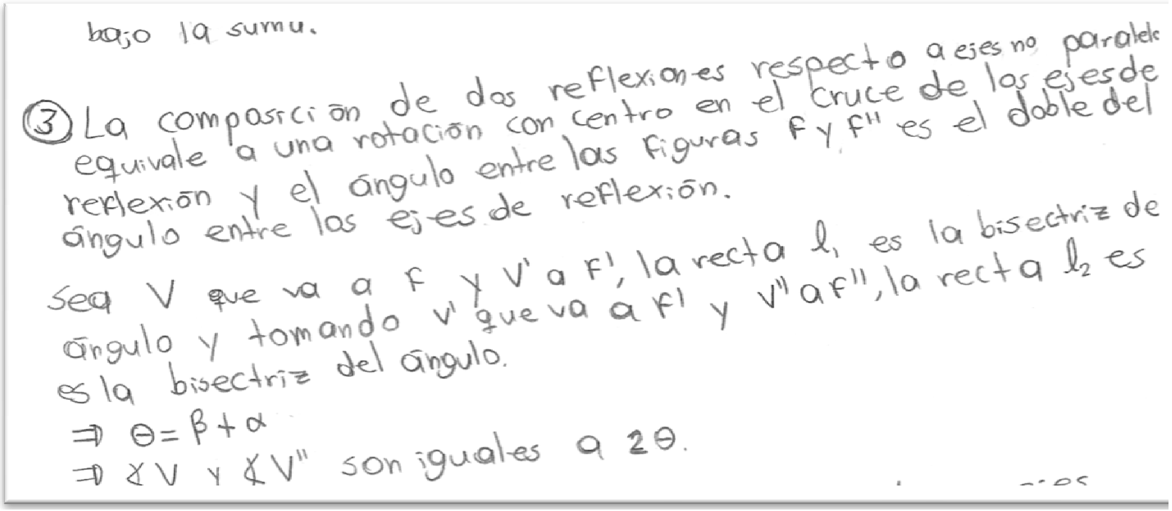

Cero grados.
b) Las traslaciones son cerradas bajo la composición, ya que se puede ver como suma de vectores y esto es cerrado bajo la suma.

Fig. ***E.B.2***

Para el inciso b), el estudiante se apoya en una afirmación de álgebra lineal, al parecer le resulta natural el manejo de la composición de traslaciones como la suma de los vectores que las definen. Ante el uso del teorema auxiliar para validar la conjetura sería inapropiado asignar una categoría de demostración con estas condiciones (aunque se desconozcan las razones para incorporar elementos de naturaleza distinta).

La pregunta 2 exige al estudiante un tratamiento de las transformaciones como isometrías y la hoja entregada por el caso B no muestra intento alguno para resolverlo.



bajo la suma.

③ La composición de dos reflexiones respecto a ejes no paralelo equivale a una rotación con centro en el cruce de los ejes de reflexión y el ángulo entre las figuras F y F'' es el doble del ángulo entre los ejes de reflexión.

Sea V que va a F y V' a F', la recta l_1 es la bisectriz de ángulo y tomando V' que va a F' y V'' a F'', la recta l_2 es la bisectriz del ángulo.

$\Rightarrow \Theta = \beta + \alpha$

$\Rightarrow \measuredangle V$ y $\measuredangle V''$ son iguales a 2Θ.

Fig. ***E.B.3***

Las conjeturas de cierre de la hoja de trabajo 11 se replantean en el examen, con la intención de evaluar el tipo de justificaciones que aparecen en un escenario de mayor exigencia (comparado con una sesión de clases convencional). Para responder a la relación de la composición de reflexiones (ejes no paralelos) y las rotaciones en el plano, el estudiante evoca características perceptivas, pero sin un interés en validarlas apropiadamente (a partir de las definiciones hechas o propiedades verificadas); por ejemplo, parte del supuesto de que los ejes de reflexión son las bisectrices de los ángulos POP' (donde P y P' son los puntos correspondientes bajo la transformación y O el punto donde se intersectan los ejes). Al margen de lo fuerte de la afirmación y lo improvisado de su inclusión en la demostración, el estudiante no cuenta con una exploración que lo sustente, por lo cual se basa en elementos visuales (perceptivos).

Evaluando la organización de la respuesta en el examen, el caso B presenta un intento de demostración de experimento mental transformativa; por lo tanto, se asigna la categoría de experimento mental, debido a la omisión de información de los elementos que utiliza como premisas (V, F, V', F', l_1, l_2, las transformaciones que los relacionan, etc.) para lo cual parte de una imagen mental del objeto en un ambiente geométrico. Otra carencia del trabajo, es que no relaciona su conclusión con los elementos definitorios de la rotación en el plano; atendiendo parcialmente el ángulo de rotación y excluyendo la equidistancia de puntos homólogos con el centro de giro.

$\Rightarrow \measuredangle V$ y $\measuredangle V$ son ...

(4) La composición de dos reflexiones respecto a ejes paralelos, equivale a una traslación con respecto al vector cuya dirección es perpendicular a los ejes, su magnitud es el doble de la distancia entre los ejes y el sentido al del eje$_1$ al eje$_2$ y su punto de aplicación es un punto de la figura inicial.

Sea d la distancia de P al eje l_1 usando la definición de traslación

$d(P, l_1) = d(P', l_2)$

y la $d(P', l_2) = d(P'', l_2)$

$\Rightarrow d(P', l_1) + d(P', l_2) = d(l_1, l_2)$, y como

$d(P, l_1) = d(P_1', l_1)$ y $d(P', l_2) = d(P'', l_2)$

$\Rightarrow d(P, P'') = 2(d(l_1, l_2))$

Fig. ***E.B.4***

La pregunta final del examen solicita una justificación para la conjetura sobre composición de reflexiones con ejes paralelos. De manera similar a la pregunta 3, el estudiante realiza una comprobación parcial, partiendo de la propiedad de equidistancia de puntos homólogos con respecto al eje de reflexión y, en esta ocasión, sin recurrir a teoremas auxiliares (como la bisección de ángulos).

La presentación de su respuesta, se identifica como un intento de demostración de experimento mental transformativa (por razones similares a la respuesta de la pregunta 3) y la consideramos inconclusa por la información nula sobre el vector de traslación asociado a la composición de reflexiones.

Considerando lo incompleto de las respuestas presentadas, el estudiante sigue influenciado por las exploraciones promovidas en las hojas de trabajo; utilizando de manera recurrente elementos visuales (no demostrados, ni mencionados durante las sesiones).

Caso C:

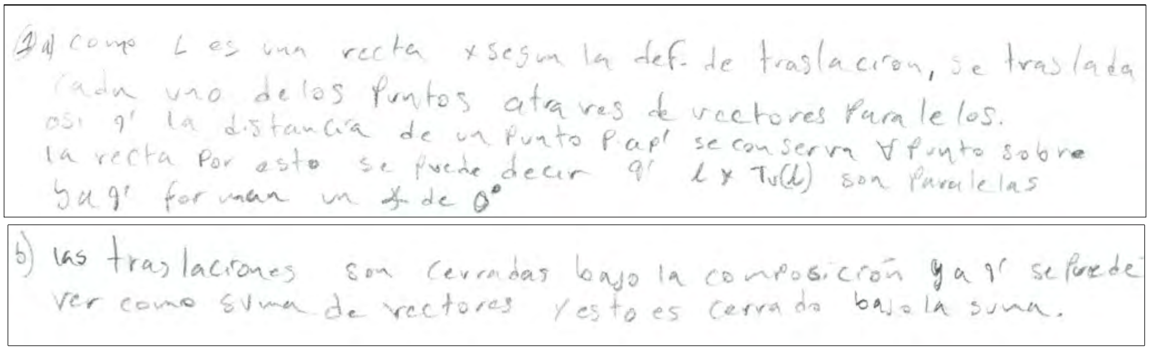


Fig. ***E.C.1***

Las respuestas a los primeros dos incisos del examen son idénticos al caso B, incluso en los elementos mencionados para la redacción. Las categorías de demostración asignadas para el caso C fueron perceptivos de ejemplo genérico con inferencia, pero disfrazados con un intento de experimento mental transformativo (no concluido apropiadamente). La pregunta 2 del examen, donde se abordan las transformaciones mediante su relación con el concepto de isometría tampoco es respondida.

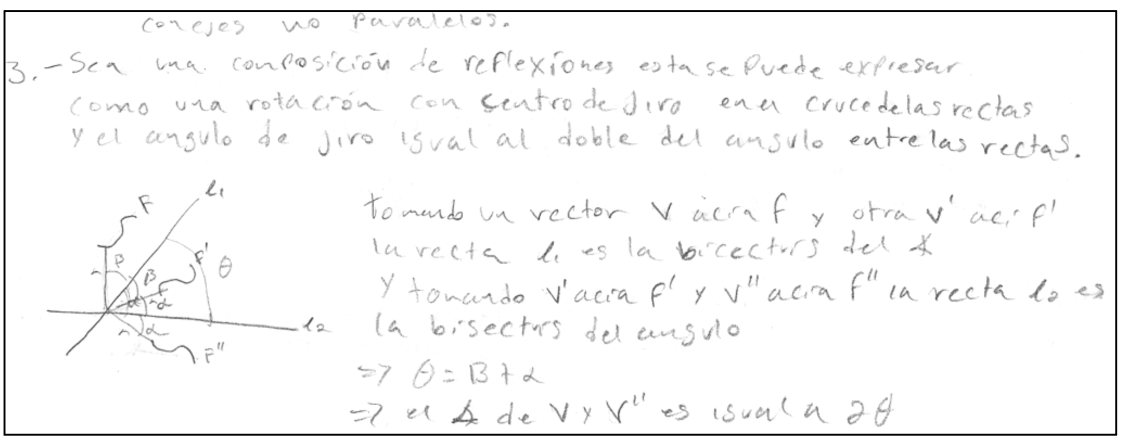


Fig. ***E.C.2***

La primer diferencia entre los casos B y C se da en la respuesta de la pregunta 3, donde el caso C incluye un dibujo que ilustra el significado de los elementos utilizados (el caso B se limitó a mencionarlo en la redacción sin un antecedente claro de su significado). Aunque incluye componentes adicionales en su respuesta, los trazos auxiliares no representan un antecedente claro de la afirmación de la bisectriz (para la composición de ejes de reflexión no paralelos, los ejes de reflexión son la bisectriz del ángulo POP’, donde P y P’ son puntos homólogos bajo la transformación y O es el punto de cruce de los ejes). La categoría de demostración establecida es perceptiva de ejemplo genérico con inferencia; por utilizar la propiedad de los ángulos como apoyo (aunque sin elementos para afirmarla) y por no realizar mediciones concretas, limitándose a la aparente igualdad de los ángulos involucrados.

4. Sea una composicion de reflexiones con ejes paralelos
esta se puede expresar como una traslacion con el vector
en sentido de el primer eje acia el segundo eje y de magnitud
igual al doble de la distancia entre los ejes y de direccion
perpendicular a los ejes.

sea d= a la distancia de P a el eje l_1 usando la definicion de traslacio

$d(P,l_1) = d(P',l_1)$

y la $d(P',l_2) = d(P'',l_2)$

$\Rightarrow d(P',l_1) + d(P',l_2) = d(l_1,l_2)$

y como $d(P,l_1) = d(P',l_1)$ y $d(P',l_2) = d(P'',l_2)$

$\Rightarrow d(P,P'') = 2(d(l_1,l_2)$

Fig. ***E.C.3***

La respuesta final representa un experimento mental transformativo, por modificarse la pregunta original a un problema de álgebra (sin desprenderse del ambiente gráfico, al mencionar la relación del sentido de los ejes con el orden de la operación). La respuesta no recurre a propiedades definitorias de reflexión, ni concluye su respuesta con los detalles del vector de traslación; es por ello que aparece una demostración perceptiva de ejemplo genérico con inferencia (al incluir la propiedad distancia de la reflexión), pero con una apariencia de experimento mental transformativo (el cual es incompleto).

Caso D:

P.D

1 Si l es una recta en el plano $\Rightarrow T_v(l) \parallel l$.

Tenemos que cada punto $p=(x,y)$ que se encuentra en la recta cumple con la siguiente ecuación.

$$Ax+By+C=0$$ que es la ec. de la recta l.

Luego si $v=(v_1,v_2) \Rightarrow p'=(x+v_1, y+v_2)$, y $T_v(l)$ son todos los puntos en l transformados bajo T_v, i.e. $T_v(p)=p'$

Luego la ec. de la recta también se puede expresar como

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$, donde $-\frac{A}{B}$ es la pendiente de la recta.

Entonces, los puntos como p' que constituyen $T_v(l)$ esta recta tiene por ecuación: $A(x+v_1)+B(y+v_2)+C=0$

luego $Ax+Av_1+By+Bv_2+C=0$

los valores A, B, C, v_1 y v_2 están fijos, $\therefore$ Av_1, Bv_2 y C son constantes

$$\Rightarrow Ax+By+(Av_1+Bv_2+C)=0$$

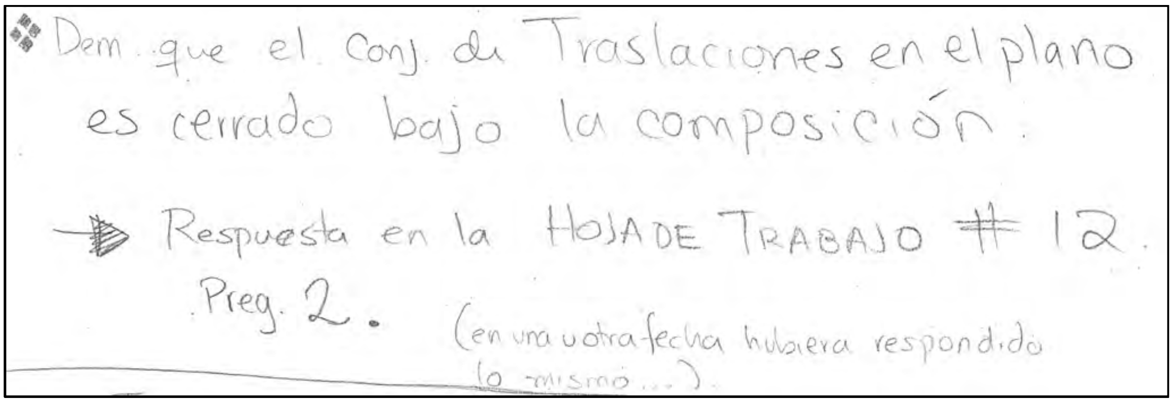
y $\Rightarrow$ $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{(Av_1+Bv_2+C)}{B}$$

Así, podemos ver que la recta tiene la misma pendiente $-\frac{A}{B}$, pero la ordenada al origen es $-\frac{(Av_1+Bv_2+C)}{B}$ en vez de $-\frac{C}{B}$.

$$\therefore T_v(l) \parallel l.$$

Fig. ***E.D.1***

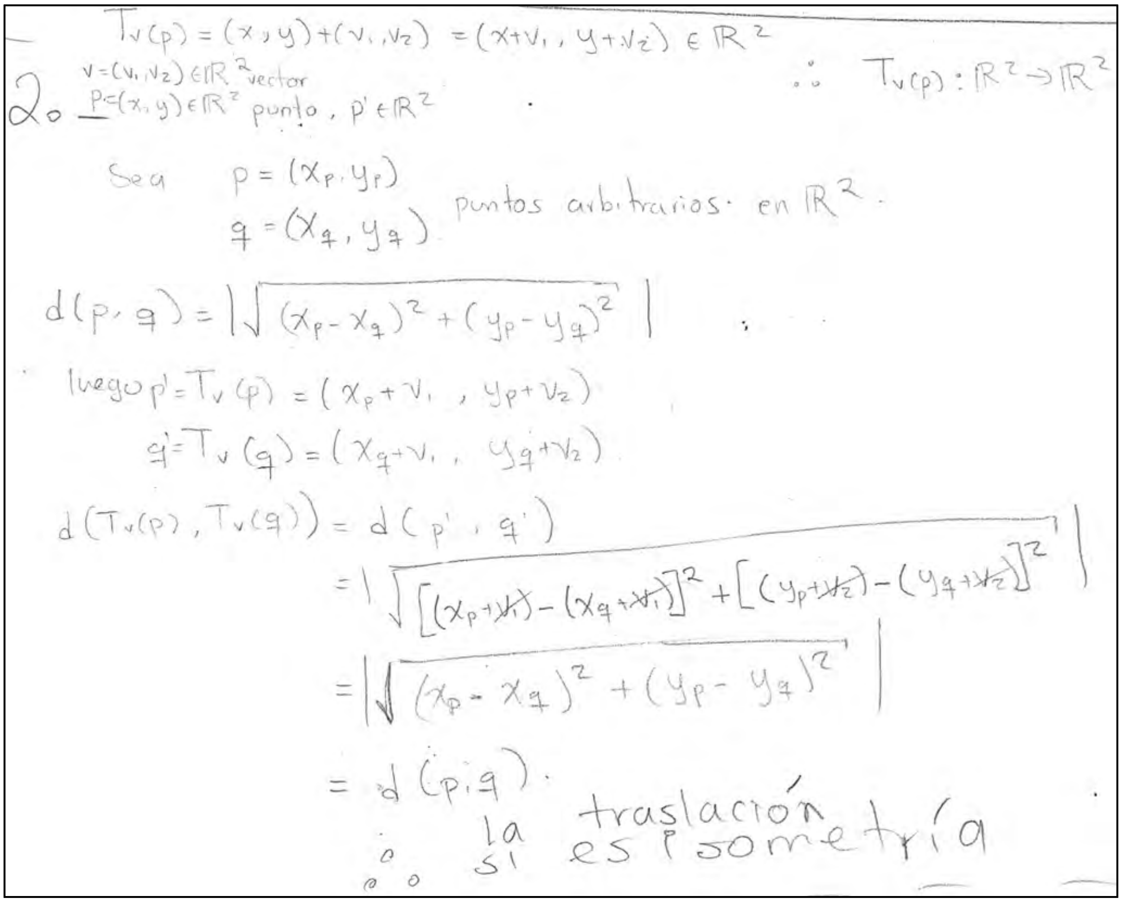
El paralelismo de segmentos homólogos bajo la traslación se demuestra mediante el uso de herramientas de geometría analítica mediante el uso de la definición de la transformación en términos de vectores, respondiendo al problema al comparar las pendientes de los segmentos, antes y después de ser trasladados. Dado que no utiliza una imagen gráfica del problema para organizar su argumento, se considera una demostración formal transformativa; considerando que no recurre al apoyo de imágenes o modelos geométricos de la traslación y el tratamiento no es puramente axiomático (al utilizar la referencia visual del plano y las pendientes de la recta).


Dem. que el Conj. de Traslaciones en el plano es cerrado bajo la composición.

→ Respuesta en la HOJA DE TRABAJO # 12.
Preg. 2.
(en una u otra fecha hubiera respondido lo mismo...).

Fig. ***E.D.2***

La comprobación de que la traslación es cerrada bajo la composición solicita la revisión de la hoja de trabajo 12, la cual fue asignada como una demostración formal transformativa.


$T_v(p) = (x,y)+(v_1,v_2) = (x+v_1,\ y+v_2) \in \mathbb{R}^2$

2. $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ vector

$P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ punto, $p'\in\mathbb{R}^2$

$\therefore\ T_v(p):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

Sea $p=(x_p,y_p)$

$q=(x_q,y_q)$ puntos arbitrarios en $\mathbb{R}^2$.

$d(p,q)=\left|\sqrt{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2}\right|$

luego $p'=T_v(p)=(x_p+v_1,\ y_p+v_2)$

$q'=T_v(q)=(x_q+v_1,\ y_q+v_2)$

$$d(T_v(p),T_v(q)) = d(p',q')$$
$$=\left|\sqrt{[(x_p+\cancel{v_1})-(x_q+\cancel{v_1})]^2+[(y_p+\cancel{v_2})-(y_q+\cancel{v_2})]^2}\right|$$
$$=\left|\sqrt{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2}\right|$$
$$=d(p,q).$$

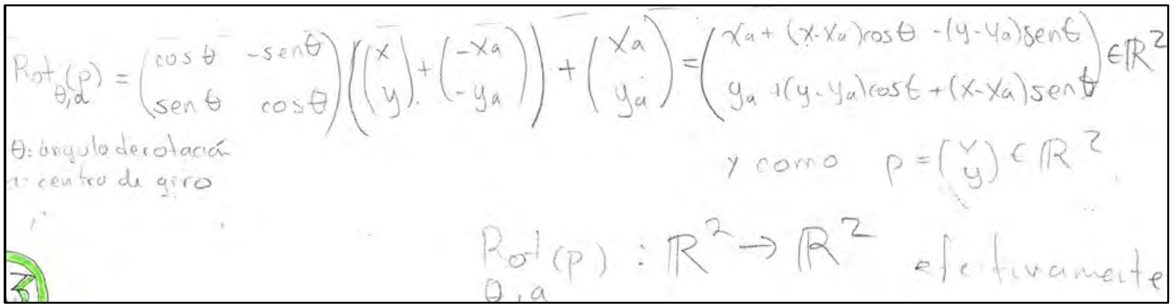
la traslación

$\therefore$ sí es isometría

Fig. ***E.D.3***

De los 8 estudiantes a los que se les entregó el examen, fue el único en abordar la pregunta 2; utilizando las versiones analíticas de las transformaciones. La sugerencia del uso de la distancia euclidiana fue utilizada por el estudiante.

Para la traslación, se confirma que cumple con la definición de isometría calculando la distancia para un par de puntos arbitrarios en el plano; las etiquetas utilizadas son P=(x_p, y_p), Q=(x_q, y_q) y sus correspondientes puntos homólogos T_V(P) y T_V(Q). La resolución del problema se concluye al asegurar la igualdad de las distancias mediante manipulaciones algebraicas, haciendo uso de una demostración formal transformativa.



$$Rot_{\theta,a}(p) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x_a\\-y_a\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}x_a\\y_a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_a+(x-x_a)\cos\theta-(y-y_a)sen\theta\\ y_a+(y-y_a)\cos\theta+(x-x_a)sen\theta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

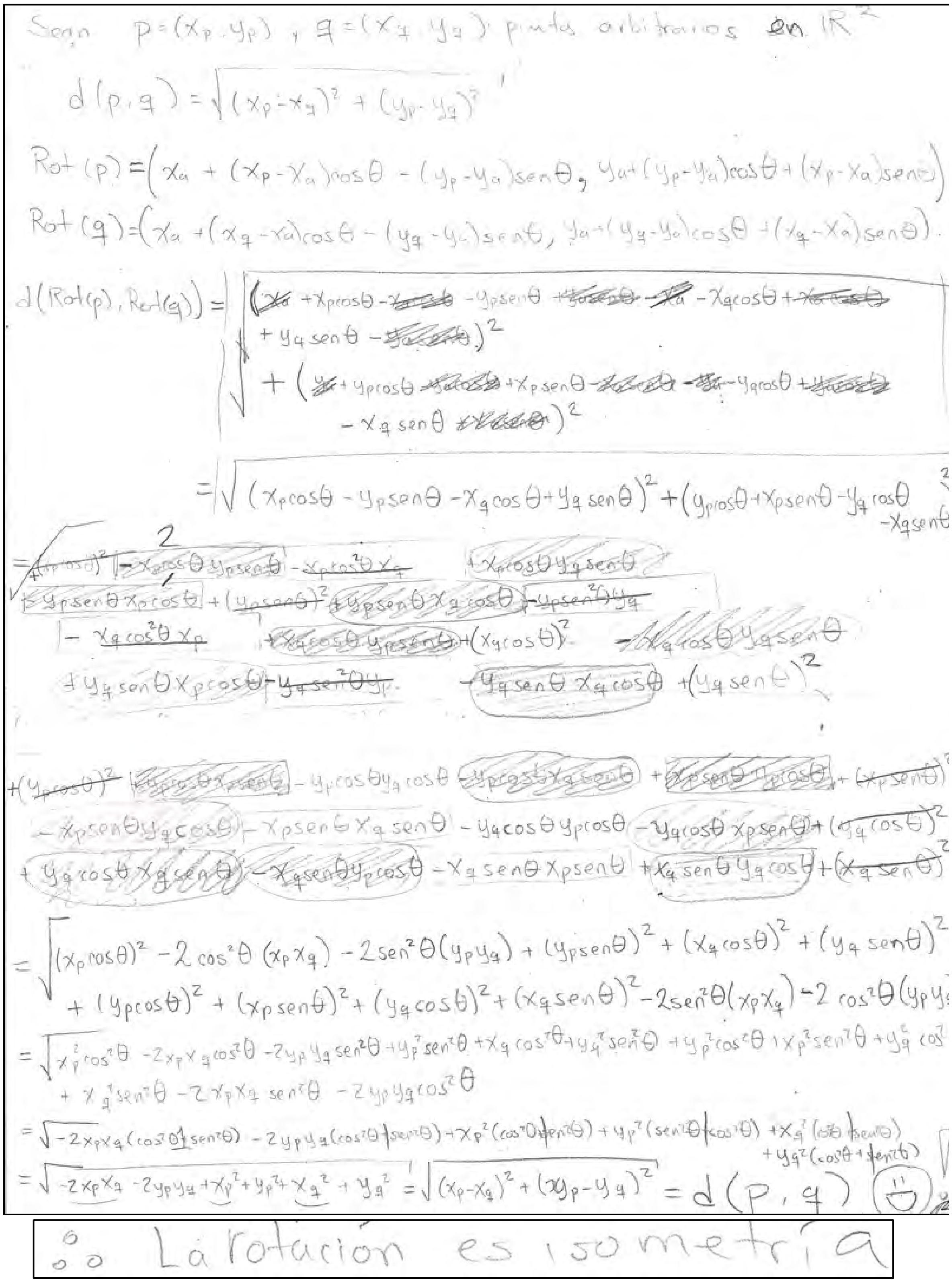
θ: ángulo de rotación

a: centro de giro

y como $p=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

$Rot_{\theta,a}(p):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ efectivamente

Fig. ***E.D.4***



Sean $p=(x_p, y_p)$ y $q=(x_q, y_q)$ puntos arbitrarios en $\mathbb{R}^2$

$$d(p,q)=\sqrt{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2}$$

$$Rot(p)=\left(x_a+(x_p-x_a)\cos\theta-(y_p-y_a)\operatorname{sen}\theta,\ y_a+(y_p-y_a)\cos\theta+(x_p-x_a)\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$Rot(q)=\left(x_a+(x_q-x_a)\cos\theta-(y_q-y_a)\operatorname{sen}\theta,\ y_a+(y_q-y_a)\cos\theta+(x_q-x_a)\operatorname{sen}\theta\right).$$

$$d(Rot(p),Rot(q))=\sqrt{\left(\cancel{x_a}+x_p\cos\theta-\cancel{x_a\cos\theta}-y_p\operatorname{sen}\theta+\cancel{y_a\operatorname{sen}\theta}-\cancel{x_a}-x_q\cos\theta+\cancel{x_a\cos\theta}+y_q\operatorname{sen}\theta-\cancel{y_a\operatorname{sen}\theta}\right)^2+\left(\cancel{y_a}+y_p\cos\theta-\cancel{y_a\cos\theta}+x_p\operatorname{sen}\theta-\cancel{x_a\operatorname{sen}\theta}-\cancel{y_a}-y_q\cos\theta+\cancel{y_a\cos\theta}-x_q\operatorname{sen}\theta+\cancel{x_a\operatorname{sen}\theta}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(x_p\cos\theta-y_p\operatorname{sen}\theta-x_q\cos\theta+y_q\operatorname{sen}\theta)^2+(y_p\cos\theta+x_p\operatorname{sen}\theta-y_q\cos\theta-x_q\operatorname{sen}\theta)^2}$$

$$=\sqrt{(x_p\cos\theta)^2-x_p\cos\theta\, y_p\operatorname{sen}\theta-x_p\cos^2\theta\, x_q+x_p\cos\theta\, y_q\operatorname{sen}\theta-y_p\operatorname{sen}\theta\, x_p\cos\theta+(y_p\operatorname{sen}\theta)^2+y_p\operatorname{sen}\theta\, x_q\cos\theta-y_p\operatorname{sen}^2\theta\, y_q-x_q\cos^2\theta\, x_p+x_q\cos\theta\, y_p\operatorname{sen}\theta+(x_q\cos\theta)^2-x_q\cos\theta\, y_q\operatorname{sen}\theta+y_q\operatorname{sen}\theta\, x_p\cos\theta-y_q\operatorname{sen}^2\theta\, y_p-y_q\operatorname{sen}\theta\, x_q\cos\theta+(y_q\operatorname{sen}\theta)^2}$$

$$+(y_p\cos\theta)^2+y_p\cos\theta\, x_p\operatorname{sen}\theta-y_p\cos\theta\, y_q\cos\theta-y_p\cos\theta\, x_q\operatorname{sen}\theta+x_p\operatorname{sen}\theta\, y_p\cos\theta+(x_p\operatorname{sen}\theta)^2-x_p\operatorname{sen}\theta\, y_q\cos\theta-x_p\operatorname{sen}\theta\, x_q\operatorname{sen}\theta-y_q\cos\theta\, y_p\cos\theta-y_q\cos\theta\, x_p\operatorname{sen}\theta+(y_q\cos\theta)^2+y_q\cos\theta\, x_q\operatorname{sen}\theta-x_q\operatorname{sen}\theta\, y_p\cos\theta-x_q\operatorname{sen}\theta\, x_p\operatorname{sen}\theta+x_q\operatorname{sen}\theta\, y_q\cos\theta+(x_q\operatorname{sen}\theta)^2$$

$$=\sqrt{(x_p\cos\theta)^2-2\cos^2\theta(x_px_q)-2\operatorname{sen}^2\theta(y_py_q)+(y_p\operatorname{sen}\theta)^2+(x_q\cos\theta)^2+(y_q\operatorname{sen}\theta)^2+(y_p\cos\theta)^2+(x_p\operatorname{sen}\theta)^2+(y_q\cos\theta)^2+(x_q\operatorname{sen}\theta)^2-2\operatorname{sen}^2\theta(x_px_q)-2\cos^2\theta(y_py_q)}$$

$$=\sqrt{x_p^2\cos^2\theta-2x_px_q\cos^2\theta-2y_py_q\operatorname{sen}^2\theta+y_p^2\operatorname{sen}^2\theta+x_q^2\cos^2\theta+y_q^2\operatorname{sen}^2\theta+y_p^2\cos^2\theta+x_p^2\operatorname{sen}^2\theta+y_q^2\cos^2\theta+x_q^2\operatorname{sen}^2\theta-2x_px_q\operatorname{sen}^2\theta-2y_py_q\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{-2x_px_q(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)-2y_py_q(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)+x_p^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)+y_p^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+x_q^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)+y_q^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}$$

$$=\sqrt{-2x_px_q-2y_py_q+x_p^2+y_p^2+x_q^2+y_q^2}=\sqrt{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2}=d(p,q)$$

$\therefore$ La rotacion es isometria

Fig. ***E.D.5***

La definición de las transformaciones como función es información que aparece de manera recurrente para la pregunta 2, inclusive mencionando la regla de correspondencia (con el aparente fin de justificar el método para obtener la imagen de los puntos arbitrarios). El tratamiento para comprobar la isometría de la rotación es similar al utilizado para la comprobación en la traslación, la diferencia sustancial es lo arduo de la manipulación algebraica utilizada para este caso. El primer paso es la construcción de la matriz de rotación para casos generales; replanteando el problema geométrico como un problema algebraico, posteriormente se verifica la igualdad de las distancias mediante las comparaciones con puntos arbitrarios y sus respectivas imágenes bajo la transformación (similar a la traslación). La conclusión requirió el uso de identidades trigonométricas (simples, pero no utilizadas hasta el momento), y se percibe una demostración formal transformativa.

Reflexión: ecuación recta ℓ : $Ax + By + C = 0$; $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

$p = (x_p, y_p)$, $q = (x_q, y_q)$.

$\cancel{Ref_{\ell}(p)}$

$y = mx + b$

$$Ref_{\ell}(p) = \left(\frac{(1-m^2)x_p + 2m(y_p - b)}{m^2+1} , \frac{(m^2-1)y_p + 2(mx_p + b)}{m^2+1} \right) \in \mathbb{R}^2$$

donde $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$.

y $p \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow Ref_{\ell}(p): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Luego: $d(p,q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$

$$d(Ref_{\ell}(p), Ref_{\ell}(q)) = \sqrt{\frac{\left((1-m^2)x_p + 2m(y_p-b) - (1-m^2)x_q - 2m(y_q-b)\right)^2}{m^4+2m^2+1} + \frac{\left((m^2-1)y_p + 2(mx_p+b) - (m^2-1)y_q - 2(mx_q+b)\right)^2}{\cancel{m^4+2m^2+1}}}$$

Fig. ***E.D.6***

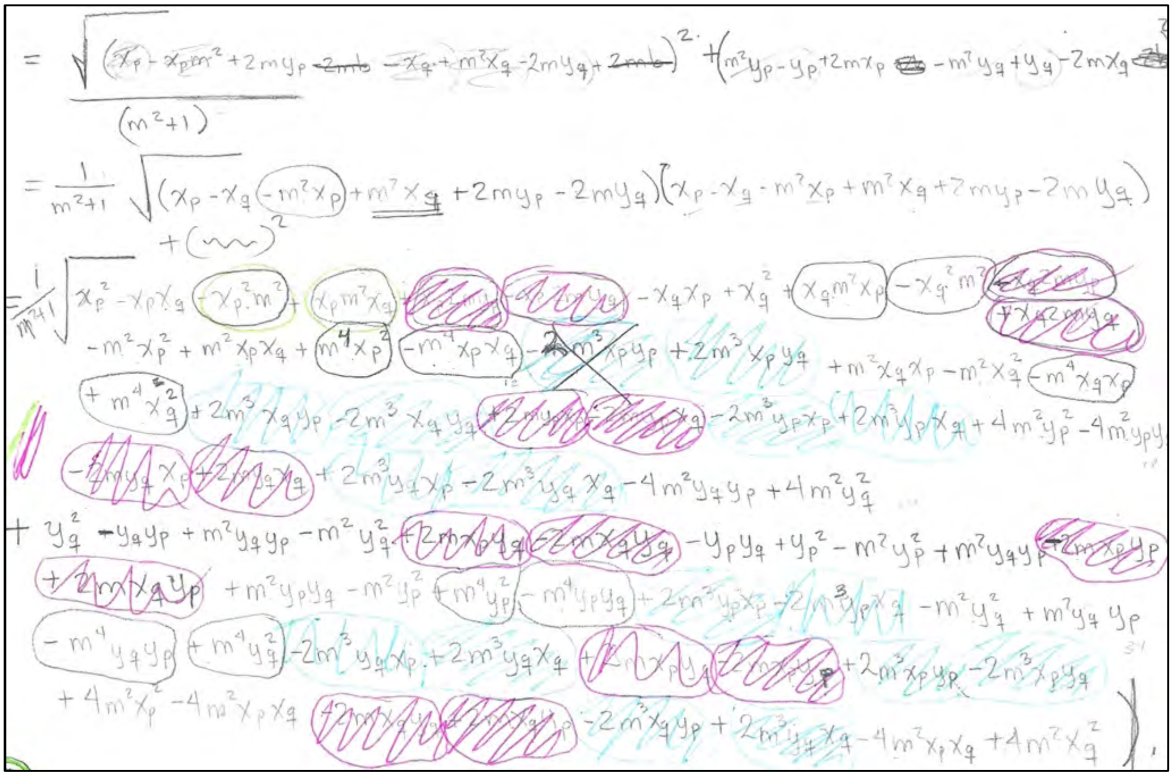


Fig. ***E.D.7***

La respuesta para la reflexión es similar a sus antecesores, las complicaciones adicionales son la manipulación de un mayor número de términos en la matriz de reflexión. Los cálculos se llevan de manera adecuada en la primera hoja de respuestas, pero el estudiante no realiza las cancelaciones apropiadas.

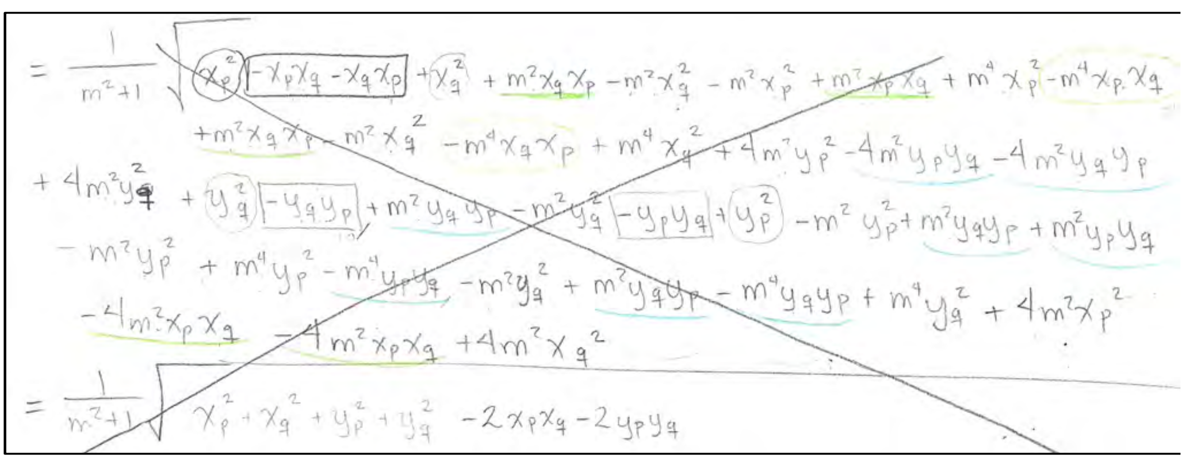


Fig. ***E.D.8***

Lo poco claro de su resultado lo obliga a replantear la estrategia y en la parte final de la hoja redacta lo siguiente:

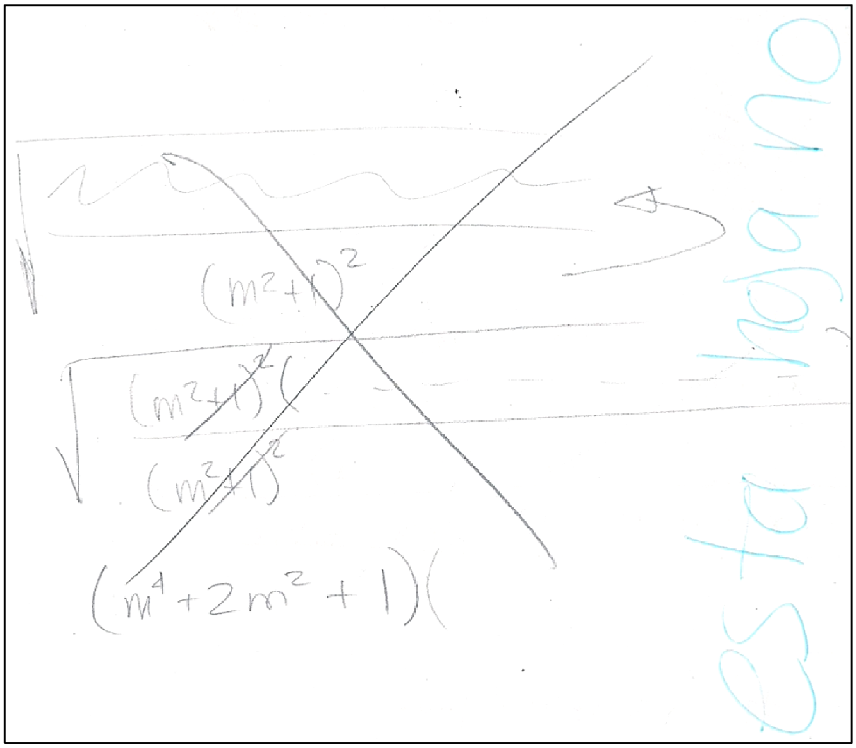


Fig. ***E.D.9***

El estudiante replantea el problema y en esta ocasión identifica los coeficientes que tentativamente debe obtener para la cancelación correcta, esta nueva estrategia es puesta en práctica en la hoja siguiente y obtiene una respuesta que le resulta satisfactoria.

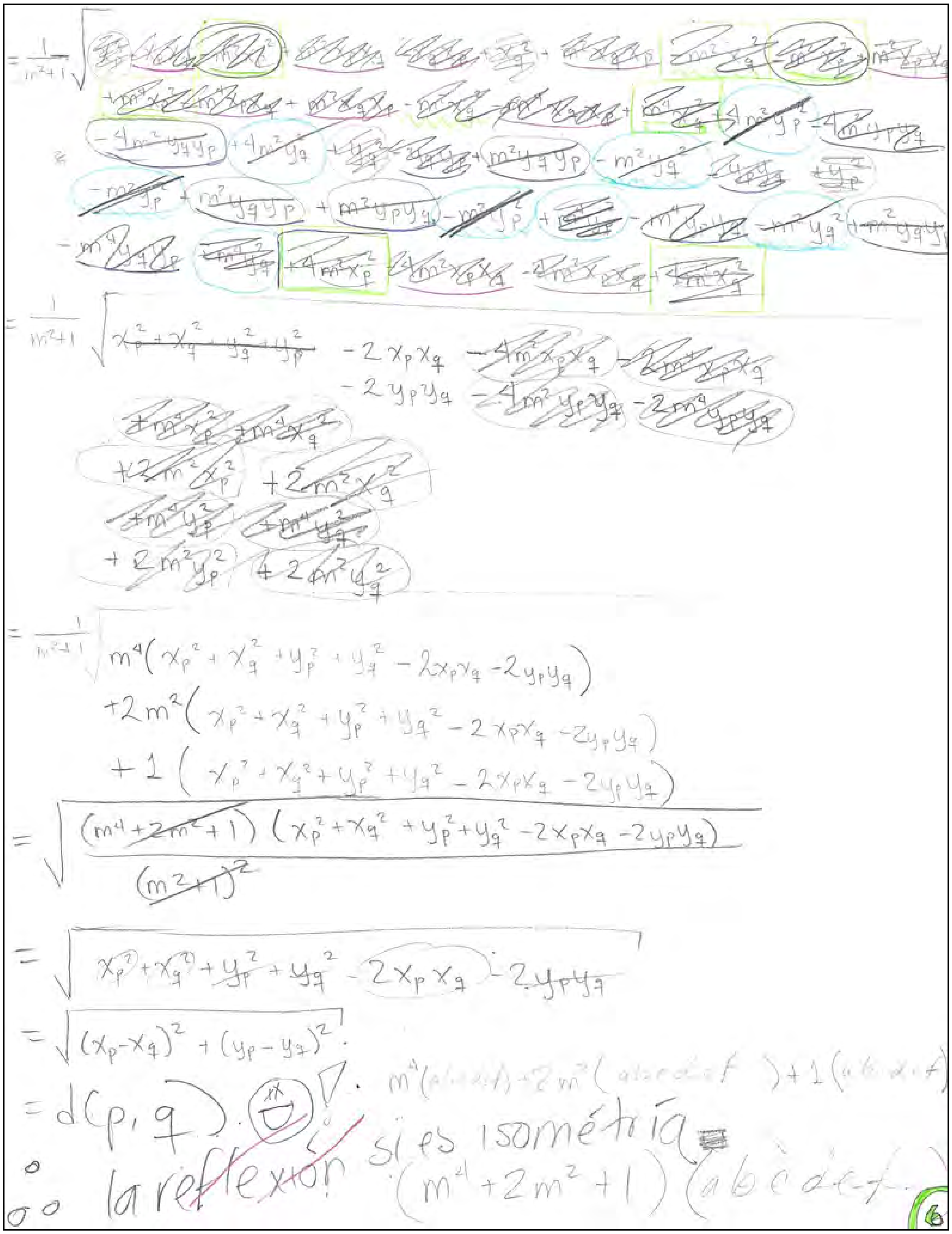


Fig. ***E.D.10***

Observando las respuestas a la pregunta 2, el método de resolución es constante; podemos describirlo como una manipulación simbólica de las versiones analíticas de las transformaciones (el registro utilizado aparenta ser el de mayor comodidad para el estudiante, al menos para organizar sus afirmaciones) y se etiqueta como una demostración formal transformativa.

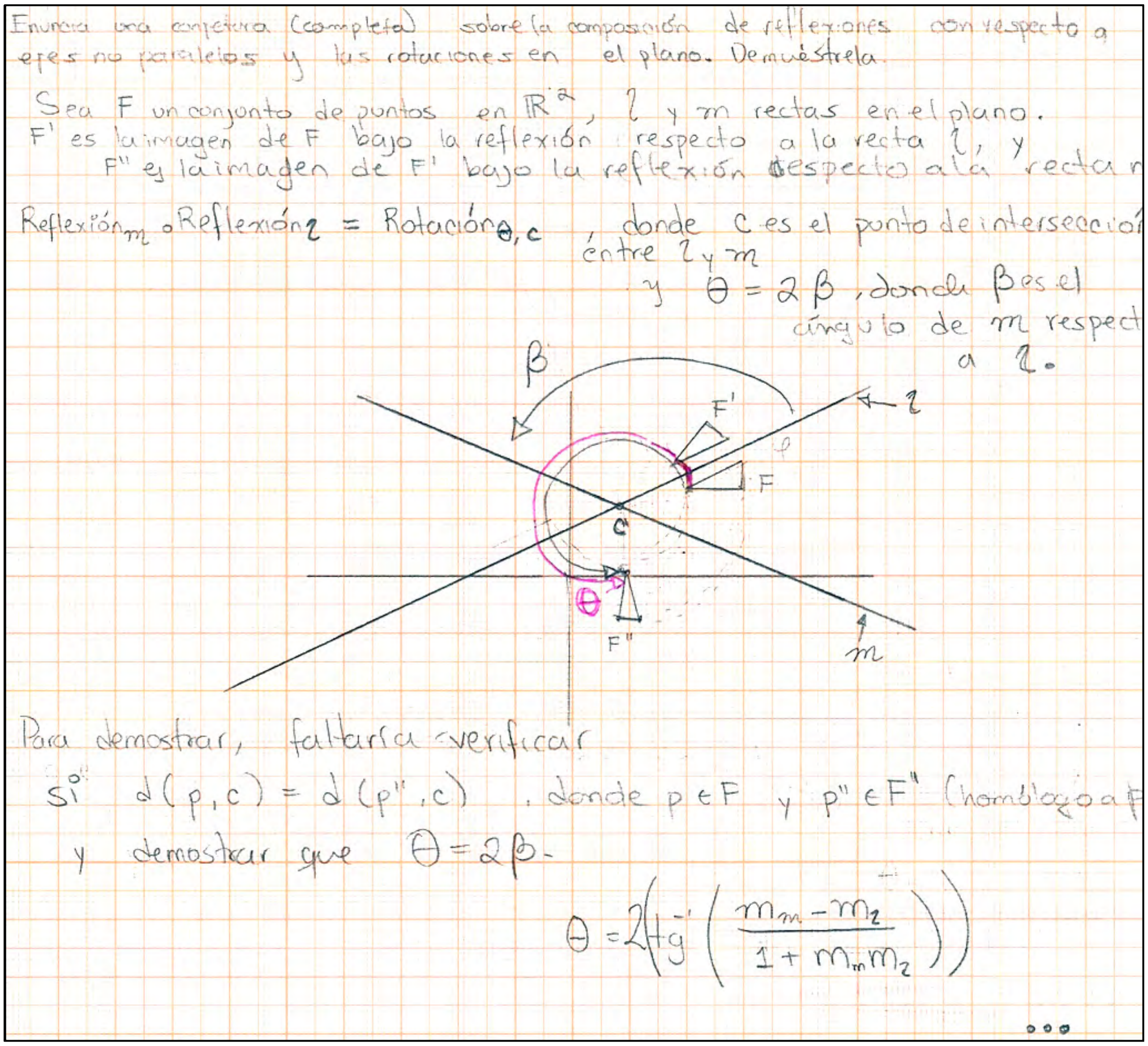


Fig. ***E.D.11***

Las preguntas 3 y 4 del examen, solicitan una justificación sobre la composición de reflexiones. Para el caso de ejes no paralelos, nuevamente recurre al plano analítico, donde elabora un escenario genérico y de donde surgen los elementos en los que basa su justificación. Comparando la estrategia con las utilizadas anteriormente, aquí se observa una intento de demostración de experimento mental transformativa (sin concretarse) y con respecto a sus compañeros, el estudiante parece tener claridad sobre los elementos faltantes (declarado en el enunciado “*faltaría verificar*[…]”) y desconocemos el por qué de su omisión.

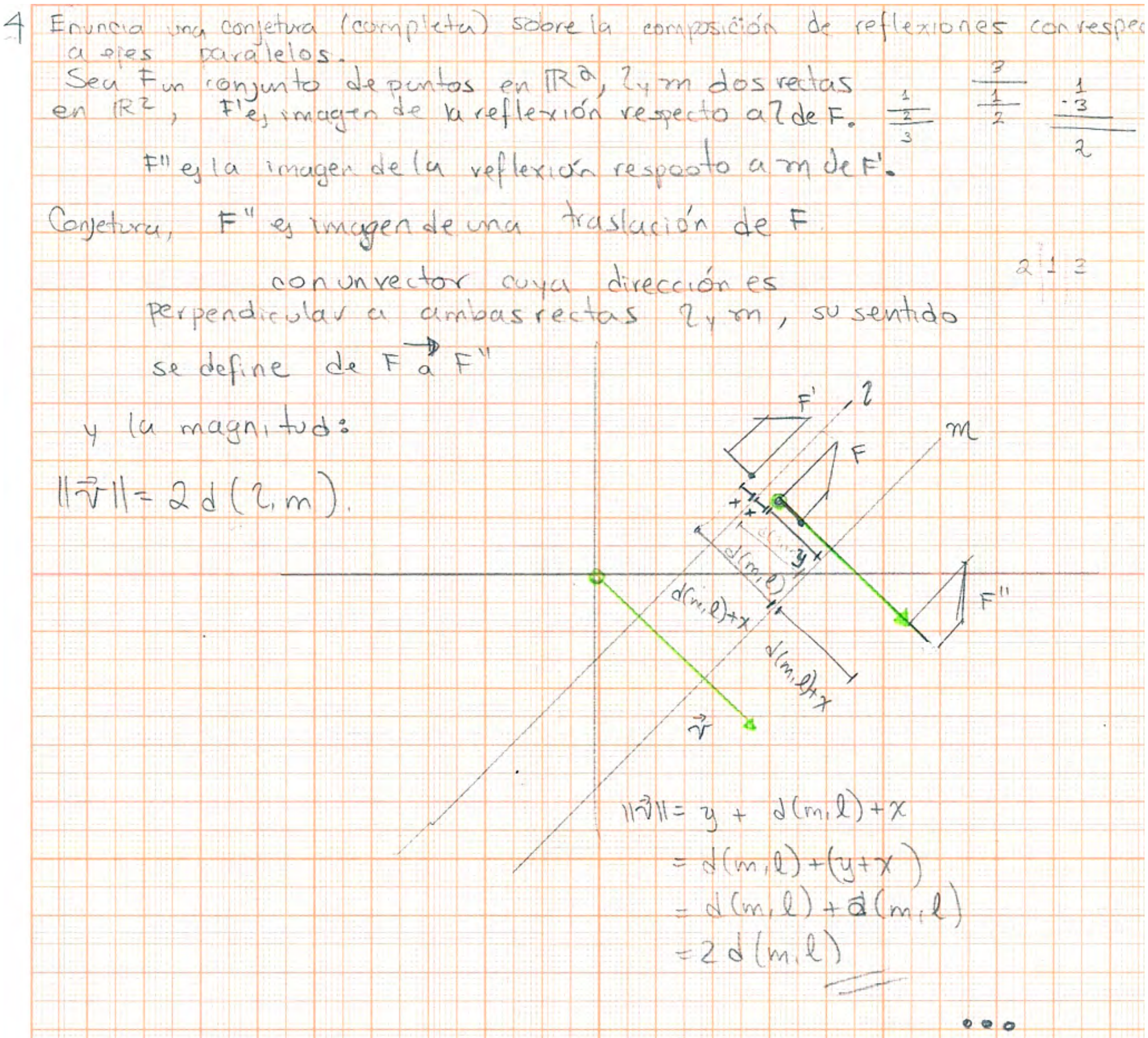


Fig. ***E.D.12***

En cuanto a la composición de reflexiones con ejes paralelos, el estudiante plantea una demostración que no parte de la definición de reflexión y sólo se limita a utilizar la propiedad de equidistancia de puntos homólogos al eje de reflexión. La justificación es incompleta al no incluir información sobre la dirección y sentido del vector de traslación (al menos no explícitamente), de manera similar a los casos B y C, se asigna una categoría de perceptiva de ejemplo genérico con inferencia, pero con una presentación de experimento mental transformativa.

El rendimiento del estudiante se clasifica en dos etapas, la primera es la evaluación de las preguntas 1 y 2 del examen; donde muestra interés en la precisión y generalidad de sus resultados. La segunda etapa se da en las preguntas 3 y 4, donde realiza una comprobación parcial (mencionando los elementos faltantes y sin un interés en culminar el trabajo). Al margen del contraste de los momentos, el estudiante respondió todo el examen con herramientas analíticas; convirtiéndose el registro donde muestra mayor comodidad.

OBSERVACIONES DEL EXAMEN

Las categorías de demostración usadas por los tres alumnos (B, C y D) son cualitativamente superiores a las usadas en las hojas de trabajo; los casos B y C específicamente, organizan sus afirmaciones con categorías deductivas (contrastando con las influencias empíricas utilizadas durante la resolución de las hojas de trabajo), las cuales aparecen de manera parcial e incompleta en la mayoría de los casos. Para el caso D, la presentación de las respuestas es la misma que la usada en las hojas de trabajo, con categorías deductivas en la mayoría de las preguntas.

La presentación deductiva de las demostraciones elaboradas, es un comportamiento explicado por Rodríguez (2006) mediante los esquemas de demostración; los cuales muestran una diferencia marcada entre los esquemas adheridos (influenciados en gran parte por la formación académica) y utilizados.

ESTRATEGIAS DE ARGUMENTACIÓN

Los análisis de las hojas de trabajo representan una descripción del contexto en el cual fueron respondidas las actividades. En el siguiente apartado nos limitamos al uso de las categorías de demostración y la incorporación con los niveles de Van

Hiele.

Los criterios para la relación de las demostraciones de Rodríguez con los niveles de Van Hiele, consisten en una comparación entre las categorías utilizadas por los estudiantes (ya mencionadas en el apartado anterior) y las categorías esperadas, estas últimas por la influencia del tipo de exploraciones propuestas y la redacción de las preguntas en las hojas de trabajo. En el siguiente cuadro, aparecen las categorías de demostración promovidas en el diseño de cada hoja de trabajo. Para facilitar la lectura de la tabla, se incluye en las primeras columnas el Nivel de Van Hiele y la hoja de trabajo correspondiente.

Nivel de Van Hiele	**Hoja de trabajo**	**Categorías de demostración esperadas**
1	**1**	Perceptivo empirismo Naif puro
	2	Perceptivo de experimento crucial puro
2	**3**	Inductivo de experimento crucial puro Inductivo de ejemplo genérico puro Inductivo de ejemplo genérico con inferencia
	4	Perceptivo de ejemplo genérico con inferencia Inductivo de ejemplo genérico con inferencia
	5	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia
	5b	
3	**6**	Experimento mental transformativa
	7	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa
	8	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa
	9	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa
	10	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa
	11	Inductiva de empirismo Naif con inferencia* Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa Formal transformativa
4	**12**	Formal transformativa Formal axiomática
1-2-3	**Examen**	**LIBRE**

(*****) Categorías de demostración de apoyo (utilizadas para exploraciones)

Para usar la tabla como herramienta de análisis, es conveniente diferenciar entre las categorías de demostración y las técnicas de exploración en preguntas concretas, con la expectativa de generar incertidumbre en las conclusiones de los estudiantes y la construcción de una categoría de demostración apropiada para el nivel.

Considerando la organización de las demostraciones, los estudiantes tienen un desempeño distinto para cada Nivel. Siendo consistentes con los análisis de las hojas de trabajo, a continuación se presentan los resúmenes de las categorías de demostración usadas por los estudiantes y comparadas con las categorías pre-establecidas; además se incluye información sobre los perfiles de los alumnos y comportamientos sistemáticos, con la intención de ampliar la panorámica del trabajo y presentar una investigación de mayor utilidad para el lector.

Caso A

El estudiante fue asignado con adquisición baja del nivel 3, las categorías de demostración utilizadas fueron de tipo empírico, salvo una plasmada en el nivel anteriormente mencionado (Experimento mental transformativo). Una actitud sistemática del estudiante durante la fase tres de cada nivel, fue lo poco participativo y las modificaciones constantes de las técnicas de exploración. Relacionado con éste comportamiento, el estudiante imitaba de manera recurrente las estrategias de exploración utilizadas por sus compañeros, sin una claridad en cuanto a la pertinencia de su uso ni las limitantes que implicaban. Las categorías de demostración usadas en cada nivel, las podemos organizar de la siguiente manera:

<table>
<tr><td rowspan="3">CASO
A</td><td>**Nivel 1**</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico puro*</td></tr>
<tr><td>**Nivel 2**</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico puro*
Inductivo de ejemplo genérico puro</td></tr>
<tr><td>**Nivel 3**</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico puro*
Experimento mental transformativa
Inductiva de ejemplo genérico puro*
Inductiva de ejemplo genérico con inferencia</td></tr>
</table>

	Nivel 4	**EXCLUIDO DE LA EXPLORACIÓN**
	Examen	**NO ENTREGÓ**

(*****) Categorías de demostración no promovidas en el Nivel
(******) Categorías utilizadas parcialmente, iniciadas y no concretadas

Las categorías muestran la inclinación hacia el trabajo de tipo empírico y la no entrega del examen nos impide contrastar su trabajo en un escenario de mayor exigencia.

Caso B

El estudiante fue el más afectado por la grabación de las sesiones, ya que en la mayoría de las ocasiones prefería esconderse tras sus compañeros o utilizando objetos (hojas de papel, mochilas, etc.), su inhibición es una posible justificación del bajo rendimiento en la fase 3. Las discusiones grupales contaron con poca participación del estudiante (sobre todo en las sesiones destinadas a la construcción de definiciones). Por lo tanto, para evaluar el comportamiento del alumno, sería conveniente observarlo en una sesión ordinaria.

El caso B fue asignado con adquisición baja del nivel 3, sus demostraciones son de tipo empírico durante la resolución de las hojas de trabajo. El desempeño del estudiante se vio modificado al responder el examen final, ya que el tipo de pruebas muestra intentos superiores a los usados en las hojas de trabajo, pero sin dejar de ser influenciado por sus respuestas originales. El tipo de pruebas para cada nivel (y el examen), fueron las siguientes:

CASO **B**	**Nivel 1**	Perceptivo de ejemplo genérico puro
	Nivel 2	Perceptivo de ejemplo genérico puro***** Inductivo de ejemplo genérico puro
	Nivel 3	Perceptivo de ejemplo genérico puro***** Inductiva de ejemplo genérico puro***** Inductiva de ejemplo genérico con inferencia
	Nivel 4	**EXCLUIDO DE LA EXPLORACIÓN**
	Examen	Perceptivo de ejemplo genérico con inferencia Experimento mental transformativo******

(*****) Categorías de demostración no promovidas en el Nivel
(******) Categorías utilizadas parcialmente, iniciadas y no concretadas

Durante el examen, evidencia la diferencia entre los esquemas adheridos y usados, reservando la organización deductiva y la declaración de implicaciones como necesarias en una "*Demostración*". Éste papel posiblemente se debe a la influencia de sus cursos avanzados de licenciatura (durante la exploración era estudiante activo de " Análisis Matemático 1").

Caso C

El estudiante se mostró interesado en las actividades, constantemente participativo y con la mejor disposición para completar las hojas de trabajo. En la mayoría de las discusiones grupales asumía el rol de líder, involucrándose tanto para compartir sus respuestas como para comprender las usadas por sus compañeros.

Las pruebas usadas en la resolución de las hojas de trabajo y el examen fueron las siguientes:

<table>
<tr><td rowspan="5">CASO
C</td><td>Nivel 1</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico puro</td></tr>
<tr><td>Nivel 2</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico puro*
Inductivo con ejemplo genérico puro</td></tr>
<tr><td>Nivel 3</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico con inferencia*
Experimento mental transformativa
Inductiva de ejemplo genérico puro*
Inductiva de ejemplo genérico con inferencia
Formal transformativa**</td></tr>
<tr><td>Nivel 4</td><td>Autoritarias-Rituales (internet)*
Perceptivo de ejemplo genérico puro*
Inductivas de ejemplo genérico con inferencia*</td></tr>
<tr><td>Examen</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico con inferencia
Experimento mental transformativo**</td></tr>
</table>

(*****) Categorías de demostración no promovidas en el Nivel
(******) Categorías utilizadas parcialmente, iniciadas y no concretadas

Su característica en el desarrollo de las hojas de trabajo es lo sistemático de sus exploraciones y la iniciativa ante los desafíos; incluso asumía las preguntas hechas al grupo como propias. La constante exploración y los resultados satisfactorios obtenidos, influyó en las categorías de demostración presentadas en las hojas de trabajo y, de manera similar al caso B, en su examen organiza sus pruebas de manera contrastante e inconclusa por las influencias de las exploraciones, o la no interiorización de éstas.

Aunque alcanzó una adquisición baja-media del nivel 4, las exploraciones (empíricas en su mayoría) eran la base de sus afirmaciones, pero con una variedad de estrategias considerable.

Caso D

La variedad de herramientas matemáticas y el compromiso constante de precisión fueron sus características centrales en las distintas sesiones, el estudiante no se limitaba al tipo de herramientas requeridas en las hojas de trabajo e incorporaba herramientas de mayor alcance o de niveles de razonamiento superior. Las discusiones grupales no contaron con mucha participación, pero cuando fue requerida lo hacía de manera aceptable y muy atinada, dándole claridad al resto de sus compañeros.

El alcance de su trabajo fue etiquetado como adquisición alta de nivel 4 y su desempeño fue bastante prometedor desde la aplicación del examen de diagnóstico. Las exploraciones eran planteadas en un ambiente gráfico (con trazos de apoyo o dibujos ilustrativos), pero el estudiante plasmaba sus resultados en demostraciones deductivas, en su mayoría. Las categorías utilizadas fueron las siguientes:

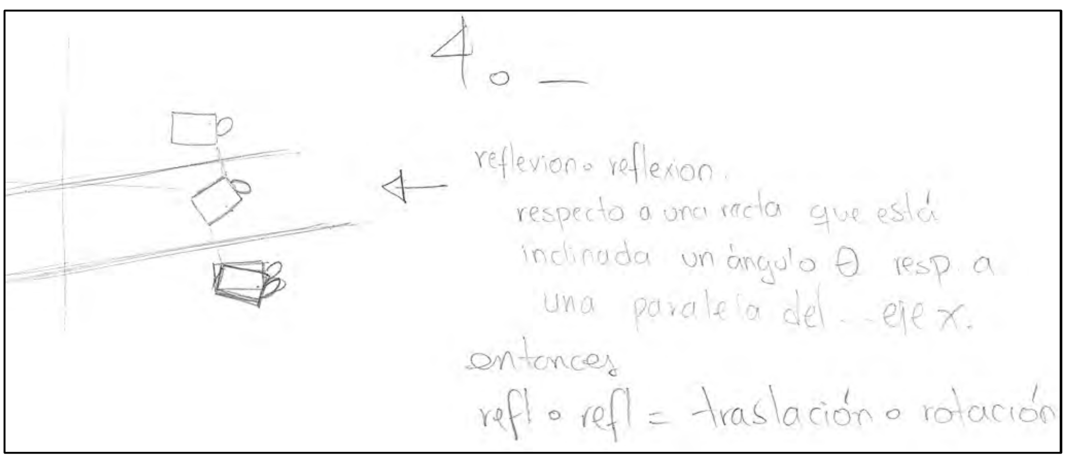
CASO **D**	**Nivel 1**	Perceptivo con ejemplo genérico puro Inductiva de ejemplo genérico con inferencia*****[12]
	Nivel 2	Inductivo con ejemplo genérico con inferencia

[12] La categoría de demostración es superior a la requerida para responder a la hoja de trabajo

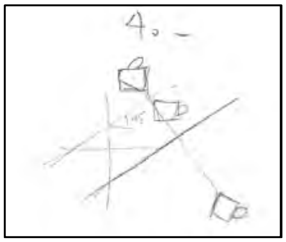
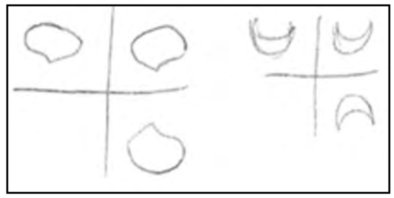
	Nivel 3	Perceptivo con ejemplo genérico puro***** Experimento mental transformativa Inductiva de ejemplo genérico con inferencia****** Formal transformativa
	Nivel 4	Perceptivo de ejemplo genérico puro***** Inductiva de ejemplo genérico con inferencia***** Formal transformativa
	Examen	Perceptiva de ejemplo genérico con inferencia Formal transformativa Experimento mental transformativa******

(*****) Categorías de demostración no promovidas en el Nivel
(******) Categorías utilizadas parcialmente, iniciadas y no concretadas

El estudiante fue el único en utilizar demostraciones formales transformativas y muy cerca de manejar axiomáticas (categoría de mayor complejidad, entre las opciones). El rendimiento del caso D fue superior a sus compañeros en la mayoría de las sesiones, inclusive durante el diagnóstico aplicado. Su aprovechamiento en el examen y las aportaciones en las primeras discusiones grupales fueron determinantes para incluirlo como objeto de estudio (considerando los criterios de selección de casos). A continuación se incluyen algunas conjeturas redactadas en el examen diagnóstico.



La composición de reflexiones se trabaja de manera visual y relacionada con el eje de abscisas. El caso D fue el único estudiante en identificar dicha composición (e inclusive utilizarla en la hoja de trabajo 7), con apoyo de distintas construcciones.

Los trazos se mantienen durante la aplicación de la secuencia, pero sólo en el examen de diagnóstico el estudiante usa argumentos de naturaleza perceptiva como suficientes.

EVALUACIÓN FINAL SOBRE LAS DEMOSTRACIONES SOLICITADAS

Las categorías de demostración utilizadas en los primeros Niveles de razonamiento, fueron consistentes con las esperadas, previo a la aplicación de la secuencia. El cambio surgió a partir del Nivel 3, donde los estudiantes mostraban mayor comodidad con las pruebas empíricas, sin importar la modificación de la redacción de las hojas de trabajo. El caso D fue el único en superar las expectativas sobre las categorías de demostración, con incorporaciones constantes de propiedades de las transformaciones y herramientas matemáticas ajenas al trabajo propuesto. El resto del salón limitaba sus justificaciones a las exploraciones sugeridas.

A partir del tercer Nivel de razonamiento, se observa una diversificación entre las categorías de demostración, relacionadas con el manejo de las herramientas matemáticas y la discriminación de su uso. Aunque las exploraciones parten de categorías de demostración similares, solamente el caso D recurrió a argumentos deductivos para concretar sus respuestas (el estudiante estaba en mejores condiciones por la variedad de objetos matemáticos con los que dispone y mostraba preferencia hacia los métodos analíticos). Por otra parte, el desempeño de los casos A, B y C, se vio afectado por las pocas herramientas matemáticas y la poca claridad de las que dispone.

Particularmente, la hoja de examen mostró variedades de lenguaje, ya que durante la resolución del examen combinaron encadenamientos puramente deductivos (axiomática material y formal, en ocasiónes indistintamente con experiencias de la exploración (equivalente a argumentos plausibles, muy similares a los usados durante las discusiones grupales o para compartir sus exploraciones). Ante la variedad de la naturaleza de los argumentos, resulta complejo diferenciar las demostraciones de las exploraciones (para el estudiante) .

En la terminología de Rodríguez (2006) el problema se describe como una diferencia entre los esquemas de demostración, particularmente el esquema adherido y el utilizado. El estudiante con mejor desempeño (caso D), es el único en mostrar una similitud entre dichos esquemas; mientras que los casos B y C utilizaron categorías deductivas solamente en las actividades del examen, recurriendo a estrategias empíricas para responder en las hojas de trabajo. El cambio de rol del tipo de estrategias y organización está relacionado con el peso que los estudiantes le asignaron a la palabra "*demostración*", lo cual influye directamente en el tipo de tarea que realizan y el cómo es validada (un explicación plausible es la formación escolar de la Licenciatura en Matemáticas y el tipo de pruebas que han asumido como válidas en sus distintos cursos).

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

En el siguiente apartado resumiremos lo realizado durante la investigación, con la intención de presentar elementos para enunciar las conclusiones del trabajo.

Iniciamos cuestionándonos sobre la variedad de métodos de justificación y la posibilidad de identificar un encadenamiento de éstos, mediante la reflexión sobre la evolución de las pruebas en matemáticas. Considerando el hecho de que la comunidad Matemática modificó el tipo de pruebas aceptables a través del tiempo, la investigación realizada pretendió identificar las pruebas utilizadas por los estudiantes en el salón de clases y analizar los cambios en las estrategias de validación (equivalente a un estudio de la evolución de las pruebas usadas en un ambiente escolar).

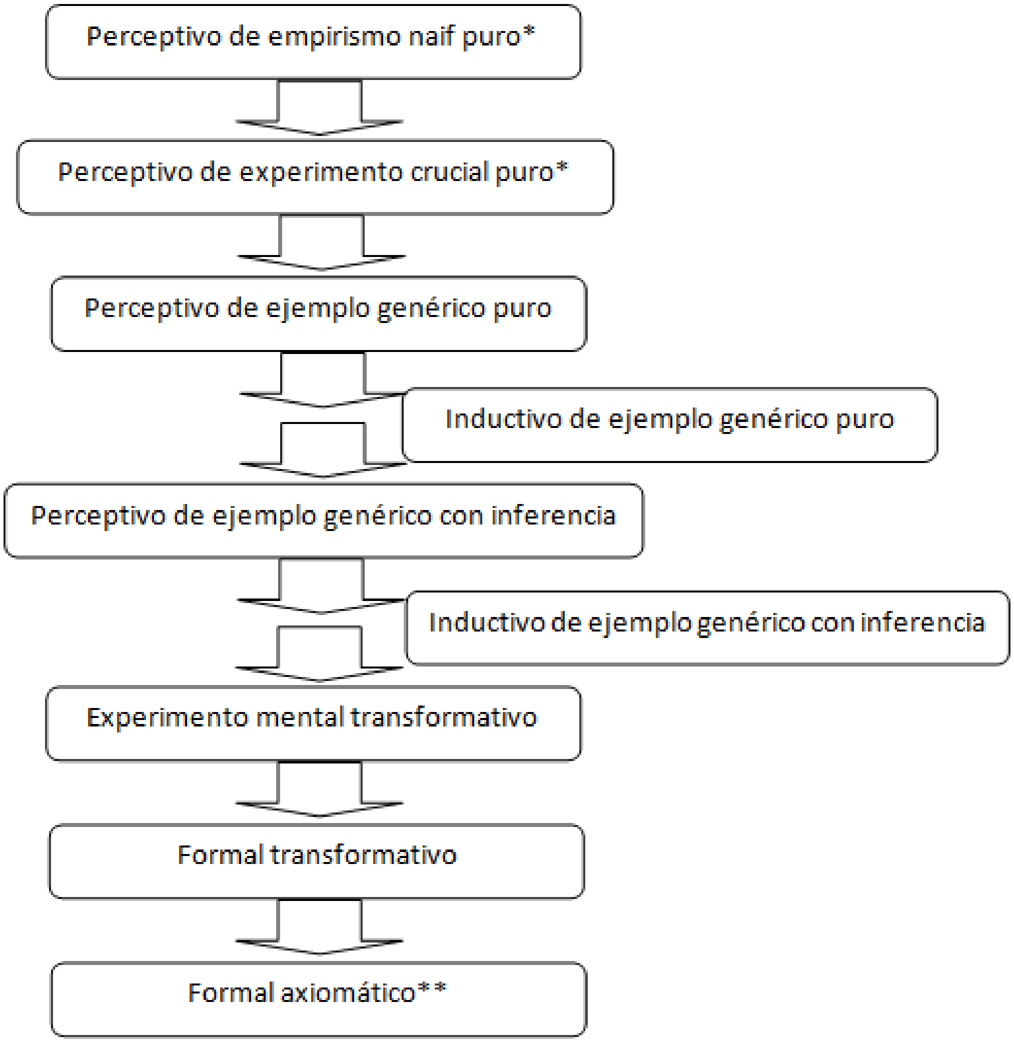
Una vez ubicado el contexto de interés, la investigación consistió en la identificación de los argumentos utilizados por los estudiantes ante tópicos cada vez más complejos (imitando el avance gradual de la disciplina matemática) y el estudio de estos.

Como parte de la comunidad de Matemática Educativa, requerimos del uso de herramientas teóricas provistas por la disciplina. En ese sentido, el apoyo fue extraído de la Teoría de Van Hiele, como pilar de diseño y metodología en clase; además de los constructos teóricos planteados por Rodríguez en su categorización de los métodos de argumentación (con la finalidad de diferenciar las estrategias de justificación arraigadas en los estudiantes). Ambas teorías nos indicaron las acciones a seguir para alcanzar los objetivos declarados: La selección y diseño de actividades (incorporando el avance gradual y diversas formas de justificación), la evaluación de los resultados y la síntesis de los productos de análisis.

En la presente investigación, los resultados obtenidos no son suficientes para asegurar una evolución en las formas de argumentación, pero sí para caracterizar las estrategias de argumentación de los estudiantes, particularmente en el cambio de las formas de exploración.

Las estrategias de búsqueda y exploración de conjeturas evolucionan, ganando precisión y veracidad. Los estudiantes con los que se trabajó muestran cambios en el tipo de pruebas a las que recurren (en ocasiones erráticos), pero todos tienen una categoría que no logran superar. La categoría límite de cada estudiante está condicionada por las herramientas matemáticas de las que dispone y la consciencia del momento exploración-conjetura-demostración en el que se encuentran (equivalente a la discriminación consciente entre los esquemas de demostración planteados por Rodríguez).

Al margen de las diferencias entre los niveles de razonamiento de los estudiantes, en todos los niveles aparecen exploraciones empíricas, las cuales se modifican para tener un mayor alcance; inclusive el estudiante D (asignado con una adquisición alta del cuarto nivel), parte de exploraciones con estas características y posteriormente organiza sus afirmaciones en un escenario deductivo (utilizando categorías intermedias para identificar elementos adicionales de sus pruebas). El comportamiento observado nos da razones para inferir una modificación sistemática de las pruebas, donde algunas categorías de demostración se utilizan como métodos auxiliares o con algún fin concreto. Por el papel que juegan las distintas categorías de demostración utilizadas, una organización sugerida para la elaboración de los diseños de actividades sería el que aparece en el siguiente esquema:



En el diagrama se observan los saltos en las formas de argumentación de los estudiantes, además de categorías de demostración autónomas, pero que fueron utilizadas como exploraciones auxiliares (al no presentarse en la evaluación final); éstas son las demostraciones inductivas y su ausencia en el examen está relacionada con el convencimiento en los estudiantes de realizar afirmaciones para “casos genéricos”. Un complemento del esquema es la incorporación de tres categorías que no aparecen en los resultados de la investigación (empirismo naif, experimento crucial y formal axiomática), estos se incorporan al considerar tanto a estudiantes ajenos a la disciplina matemática o que la usan como herramienta (*) como a aquellos matemáticos que pretenden alcanzar la categoría de mayor complejidad (**); por ejemplo, estudiantes de posgrado en Matemáticas o con características similares.

FORMAS PLAUSIBLES DE CONTINUAR LA INVESTIGACIÓN

El trabajo realizado, se convierte en una aportación metodológica para el estudio de las pruebas en matemáticas, incorporando algunos elementos para facilitar la elaboración de diseños didácticos. Considerando el contexto de la investigación y lo acotado del escenario seleccionado, es posible identificar algunas directrices en las que podría continuarse con el presente trabajo (sin ser exhaustivo). Algunos de ellas serían:

- Realizar las correcciones en las distintas hojas de trabajo, con el fin de contrastar los resultados con los ofrecidos en la presente investigación. Entre las modificaciones, debemos destacar: El uso de la palabra "producto" como sinónimo de "composición" (generando algunas confusiones durante la exploración) y mayor precisión al referirnos a tratamientos geométricos (como en la pregunta 1 de la hoja de trabajo 6).
- Aplicar la investigación a tópicos alternativos, diseñando nuevas secuencias de actividades. El alcance de investigaciones con este perfil puede extenderse a distintas ramas de las matemáticas, tan sólo invitando al lector a realizar una depuración apropiada de las categorías de demostración presentadas en el trabajo; ya que la investigación utilizada como guía fue diseñada para análisis en escenarios de geometría.
- Realizar un estudio más profundo de las formas de argumentación, considerando adaptaciones de los temas matemáticos superiores al nivel de Van Hiele que los estudiantes muestran durante las sesiones. Una exploración con estas condiciones pondría a prueba las estrategias de exploración y resolución, permitiéndonos observar una modificación significativa en los esquemas de demostración usados.
- La re-valoración de la secuencia de actividades presentada en el anexo 1 y

posibles modificaciones para utilizarlas como actividades didácticas. Dentro de las pretensiones del trabajo, el papel de la secuencia presentada se limitó a promover conjeturas concretas del tema matemático y como estrategia para asignar un "subnivel de Van Hiele". Un proyecto alternativo sería replantear las actividades considerando las características de los elementos de prueba (desechando una exploración de algún nivel concreto de Van Hiele o, en su defecto, incorporando un análisis más profundo de niveles específicos). Incluso es viable modificar las hojas de trabajo mediante el uso de influencias teóricas alternativas.

- Contrastar los resultados de la exploración con estudiantes de distintas carreras o niveles previos (este último caso sólo es factible en el estudio del antecedente inmediato, nivel preparatoria, y con adecuaciones en las hojas de trabajo para facilitar la comprensión de las actividades). Exploraciones con estas características pueden permitir un análisis de los argumentos construidos por los estudiantes para validar sus conjeturas, es de esperarse que las exigencias que los alumnos imponen a sus pruebas varían mientras avanzan en su formación escolar o en la especialización que su carrera requiere; sin embargo, es conveniente preguntarnos en qué medida lo son.
- Relacionado con el punto anterior y considerando un aprovechamiento común (y no sólo para los fines de la investigación), las condiciones ideales del escenario serían con estudiantes de distintos semestres de una carrera en matemáticas o afín, con la intención de afectar en menor medida los tiempos asignados a tópicos matemáticos declarados en su plan de estudios y las expectativas generales que se tienen sobre sus habilidades de argumentación y el desarrollo de las mismas.
- Dentro de los puntos más ambiciosos, podemos destacar un estudio sobre las equivalencias de los niveles de Van Hiele y los niveles escolares (desde primaria hasta la formación profesional), pensando en diseñar metodologías de exploración y argumentación, con el fin de desarrollar tales capacidades en los estudiantes de cada nivel y siendo congruentes con las expectativas escolares.

A partir de las investigaciones propuestas en los puntos señalados, sería posible el diseño de secuencias didácticas para distintos destinatarios y temáticas, acordes con las formas de argumentar que se esperan de los estudiantes involucrados.

ANEXO 1

Tablas Metodológicas

ISOMETRÍAS EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele.

TEMA: “Traslación” (Nivel 1)

IVEL	FASE	ACTIVIDAD
	Fase 1	El estudiante manipula imágenes hechas sobre hojas de plás trasparente (y hojas blancas, en algunos casos). Deslizando reflexionando sobre las direcciones del desplazamiento.
	Fase 2	El profesor pide a los alumnos que manipulen los artefactos, desliza en distintas direcciones las hojas de plástico para identificar patrone traslación, además de cuestionar sus observaciones.
	Fase 3	Los estudiantes discuten sobre estrategias para discriminar entre fig trasladadas y no trasladadas, con la finalidad de identificar propieda de manera visual.
ivel 1	Fase 4	Mediante el uso de hojas de papel y figuras que teselan, se le pide a estudiantes que construyan cuadros deslizando las hojas en disti direcciones.
	Fase 5	El profesor induce al estudiante a resumir lo observado, enfatizando: - El uso de traslaciones para la construcción de figuras. - La conservación del tamaño y la forma de las figuras. - La capacidad de realizar traslaciones de manera directa, mediant deslizamiento de acetatos y hojas. - Identificación y realización de traslaciones en distintas direcciones. - La utilización de la terminología básica: traslación, vector, recta, etc - La diferenciación entre figuras trasladadas y no trasladadas (medi justificaciones visuales).

ISOMETRÍAS EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele.

TEMA: "Traslación" (Nivel 2)

IVEL	FASE	ACTIVIDAD
ivel 2	Fase 1	El profesor deberá informarse sobre la capacidad de sus alumnos p deslizar figuras (en dirección y magnitud específica), así como descripción de movimientos simples (bajo los mismos términos), co sin el uso de materiales físicos concretos. El profesor deberá t información sobre el conocimiento de los alumnos en la identificac trazado y propiedades de rectas paralelas y sus habilidades en tratamiento de vectores en el plano.
	Fase 2	El profesor pide a los alumnos que elaboren métodos para const traslaciones, a partir de la manipulación de artefactos y la superposi de imágenes, cuestionando sus observaciones y orientándolas hacia propiedades de traslación. En una segunda etapa se les solicita identifiquen visualmente a las traslaciones, orientando sus observacio al plano analítico (plano cartesiano).
	Fase 3	Los estudiantes discuten sobre métodos para construir traslaciones distintas imágenes y las propiedades que rigen a estas transformacio Reforzando las conjeturas mediante el uso de la geometría analítica, la finalidad de promover la utilización de notación vectorial y el uso las coordenadas de los vectores de traslación para facilitar la explora de nuevas características.
	Fase 4	Se les pide a los estudiantes que describan las características visuales permiten identificar a las traslaciones, además de identificar propied geométricas de las mismas.
	Fase 5	El profesor induce al estudiante a resumir lo observado, enfatizando: - Identificación de elementos homólogos de una figura y su trasla correspondiente (vértices, lados, puntos visualmente relevantes, etc.). - El descubrimiento de las propiedades de paralelismo entre segmentos formados por cada par de puntos homólogos y la congrue de dichos segmentos con el vector de traslación. - Utilización de la notación y el vocabulario matemático para referir los puntos, traslaciones, vectores, etc. (P, P´, v, T_v, etc.). - La afirmación de la cerradura de traslaciones, es decir, la composi de traslaciones es una traslación.

ISOMETRÍAS EN EL PLANO
Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele.
TEMA: "Traslación" (Nivel 3)

IVEL	FASE	ACTIVIDAD
ivel 3	Fase 1	El profesor deberá informarse sobre la comprensión de la traslac específicamente con el uso de vectores, las propiedades y sus conjet sobre la composición de traslaciones. Otro interés de la primera fase evaluar la capacidad de los estudiantes para identificar las propieda del resto de transformaciones en el plano (reflexión y rotación).
	Fase 2	El profesor propicia la reflexión sobre la conmutatividad de la trasla en un plano general, con la intención de promover un ambi deductivo. Simultáneamente, se presentan las trasformaciones reflexión y rotación, con la finalidad de ampliar la visión de estudiantes acerca de las transformaciones en el plano y con un tra previo que aporta elementos de análisis, el cual facilita la comprensió dichas transformaciones.
	Fase 3	Los estudiantes discuten sobre sus observaciones y métodos "genera para justificar sus conjeturas. Durante el desarrollo de esta fase promueve el uso del software de geometría dinámica (GeoGebra), ya tiene potencial como medio de argumentación o incluso para conjet sobre propiedades que pasaron desapercibidas anteriormente.
	Fase 4	El profesor solicita a los estudiantes la resolución de diversas activida separadas de ejemplos concretos. En ésta instancia los alumnos enfrentan a problemáticas generales que no utilizan figuras ni escena específicos. También se discute sobre las relaciones y diferencias de transformaciones en el plano (traslación, reflexión y rotación), co finalidad de caracterizarlas de manera adecuada.
	Fase 5	El profesor induce al estudiante a resumir lo observado, enfatizando: - Las propiedades necesarias para caracterizar las trasformaciones e plano: traslación (vector de traslación), reflexión (eje de reflexión o imaginario, enfatizando en los elementos que permiten identificarl rotación (centro de giro, sentido y magnitud). - La característica de cerradura que posee la traslación, propiedad ú entre las isometrías en el plano (reflexión y rotación). Para el resto de trasformaciones, se desea identificar contraejemplos del por qu propiedad no se cumple y el resultado de tales composiciones. -El uso de justificaciones para sus planteamientos y observacio además de expresarlos de una manera más formal (considerando recursos de este nivel).

ISOMETRÍAS EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele.

TEMA: “Traslación” (Nivel 4)

IVEL	FASE	ACTIVIDAD
ivel 4	Fase 1	El profesor deberá informarse sobre el dominio de los estudiantes concepto de Grupo, ya que será el elemento unificador en trasformaciones isométricas vistas, así como las propiedades caracterizan a las distintas isometrías.
	Fase 2	El concepto de Grupo se utiliza de manera particular para cada isom (en una primera instancia, para familiarizarse con el término y características de cada trasformación de forma local), posteriorment concepto es utilizado para homogeneizar las trasformacione relacionarlas globalmente (en esta instancia hablamos de un aná estructural de la composición de transformaciones).
	Fase 3	Diálogo entre los alumnos sobre la relación del concepto de Grupo y transformaciones en el plano. Un segundo momento, contempl intercambio de estrategias para satisfacer la definición de Grupo.
	Fase 4	Dadas las capacidades de los estudiantes en este nivel, se espera puedan realizar demostraciones que permitan utilizar un tratami simultáneo de las isometrías. Dadas las intenciones de definir el concepto de Grupo de isometrías e plano, es conveniente demostrar que: Toda isometría tiene una transformación identidad y las conjeturas s la composición de traslaciones y reflexiones son válidas (además de características del producto de dicha composición en términos de elementos que la componen).
	Fase 5	El profesor induce al estudiante a resumir lo observado, enfatizando: - La relación de las isometrías bajo la operación composición, medi el concepto de Grupo que las vincula. - La exclusión total de figuras para ilustrar sus aseveracione justificaciones, además de una terminología formal que utilizan trasformaciones como elementos básicos (omitiendo partes especí como sus propiedades). Un requisito para evaluar satisfactoriamente esta fase es el tra complementario en distintos registros, condición que aporta facilid para el nivel 5.

ANEXO 2

Hojas de trabajo

Describe lo que entiendes por una “Isometría en el plano”.

Da dos ejemplos de isometrías en el plano y dos ejemplos de transformaciones en el plano que no son isometrías.

CUESTIONARIO BÁSICO

Nombre: ____ **Fecha: ________**

1.- ¿Qué significa que un punto P’ sea la traslación de un punto P, mediante un vector v? Descríbelo de la manera más precisa que te sea posible.

2.- Escribe la lista de todos los distintos tipos de isometrías en el plano.

3.- ¿Qué relación existe entre el resultado de hacer una composición de reflexiones con respecto a ejes no paralelos y las rotaciones en el plano?

4.- ¿Qué relación existe entre el resultado de hacer una composición de reflexiones con respecto a ejes paralelos y las traslaciones en el plano?

5.- Si P’ es la reflexión del punto P=(x, y), con respecto a la recta en el plano definida como Ax+By+C=0. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P’?

6.- Ejemplifica un conjunto de isometrías del mismo tipo que sea cerrado bajo la composición.

7.- Ejemplifica un conjunto de isometrías del mismo tipo que no sea cerrado bajo la composición.

8.- ¿Qué significa que el conjunto de isometrías en el plano formen un grupo bajo la composición (Una seguida de la otra)?

HOJA DE TRABAJO No. 1

Nombre: ____ **Fecha: ________**

1. ¿Qué imágenes aparecen en las hojas blancas y de plástico transparentes? (Describa los objetos que aparecen y su acomodo)

   ____

   ____

   ____

2. ¿Cuál es la dirección en las que aparentan moverse las aves del cuadro?

   ____

   ____

ACTIVIDADES:

- Manipula las hojas de plástico transparente, entregados por el profesor, sobreponiéndolos y deslizándolos en distintas direcciones.
- Responde las preguntas.

3. Encima las hojas proporcionadas por el profesor y sobreponlas de tal manera que coincidan las imágenes ¿Cuál es el color generado en la figura?

   ____

   ____

4. Desliza el acetato superior en distintas direcciones, hasta que generes nuevamente una imagen parecida a la original, con los colores que identificaste anteriormente (recuerda que los cuadros con el dibujo sólo representan una parte de la imagen) ¿Qué hiciste para lograr la coincidencia?

   ____

   ____

5. Elige un movimiento que te parezca el “más simple” para lograr dicha coincidencia. ¿Cómo puedes describir tal movimiento (Utiliza una regla para medir la distancia del deslizamiento y una dirección particular)?

   ____

   ____

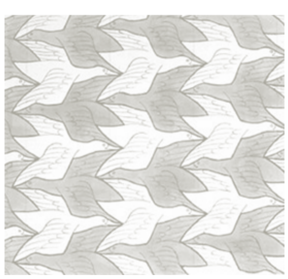
6. ¿Puedes encontrar una dirección (y/o magnitud) distinta a la planteada en la respuesta anterior? _____ Si la respuesta es **SI**, diga cuál(es) y si tu respuesta es **NO**, justifica a que se debe.

7. Utiliza el siguiente cuadro para marcar las distintas direcciones de movimientos encontradas en las preguntas anteriores y que cumplan con la condición de producir una imagen similar a la original (Elabora flechas que partan del punto negro, y con la punta en la dirección encontrada).

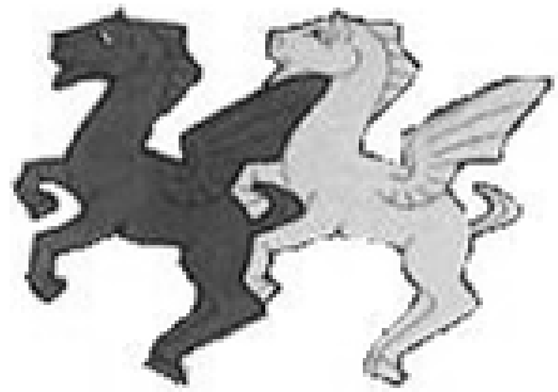
8. Reúnete en equipos, de no más de 3 personas, y compartan las respuestas encontradas hasta el momento. Utiliza el siguiente espacio para hacer tus comentarios o aclaraciones fruto de la discusión

9. Discutan las respuestas encontradas con los equipos, particularmente lo relacionado a las direcciones de desplazamientos encontradas por el salón y redacta aquí tus correcciones y conclusiones sobre los movimientos solicitados.

10. .Utilizando tu experiencia anterior, imagina que necesitamos completar los cuadros del anexo 2, de tal manera que las figuras embonen correctamente y se parezcan a las siguientes imágenes:



Para facilitar la construcción del cuadro usa como apoyo las siguientes imágenes.



11. Describe brevemente el procedimiento utilizado para realizar la tarea anterior (incluye el rol que jugaron las imágenes del punto “10”, la dirección del deslizamiento para cada caso y comenta las complicaciones a las que te hayas enfrentado).

____
____
____
____

12. Haz un resumen, tomando en cuenta las siguientes preguntas: ¿Cuántas imágenes “distintas” necesitas para construir los cuadros anteriores? ¿Cuándo se dice que dos imágenes son “distintas”? ¿Qué características en cuanto a tamaño y forma tienen las figuras hechas a partir de las imágenes dadas? ¿Cómo puedes verificar dichas características?

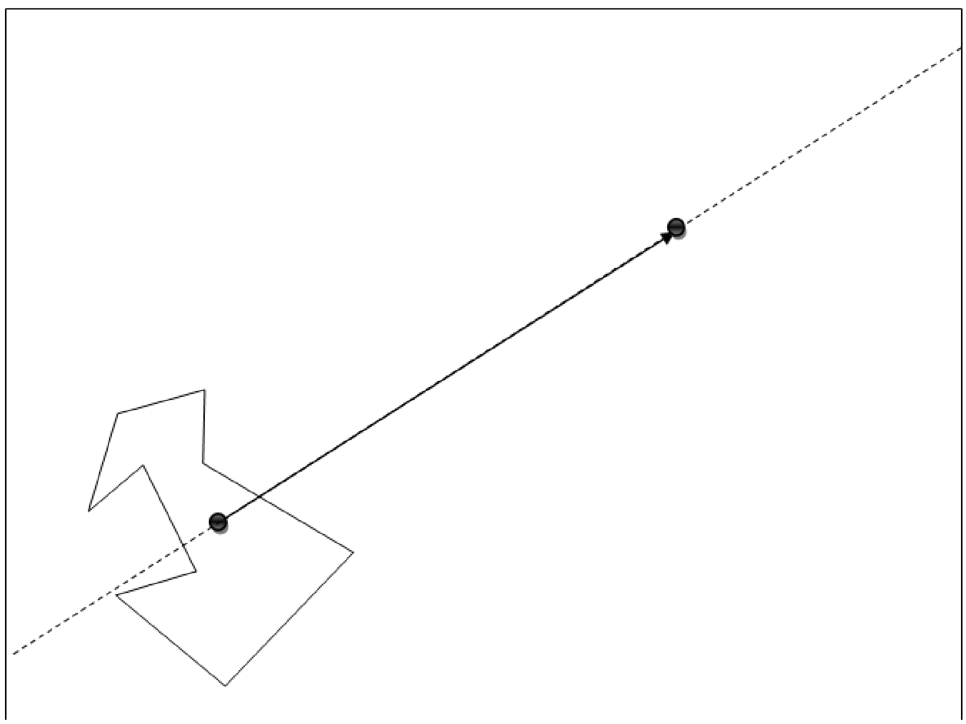
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO No. 2

Nombre:______________________________________ Fecha: ___________________

ACTIVIDADES:

- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

____

____

____

____

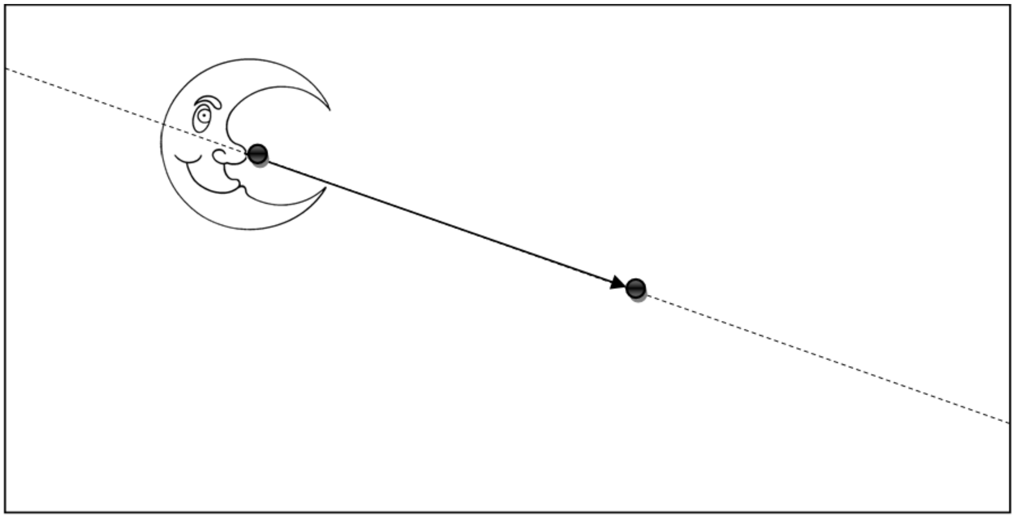
____

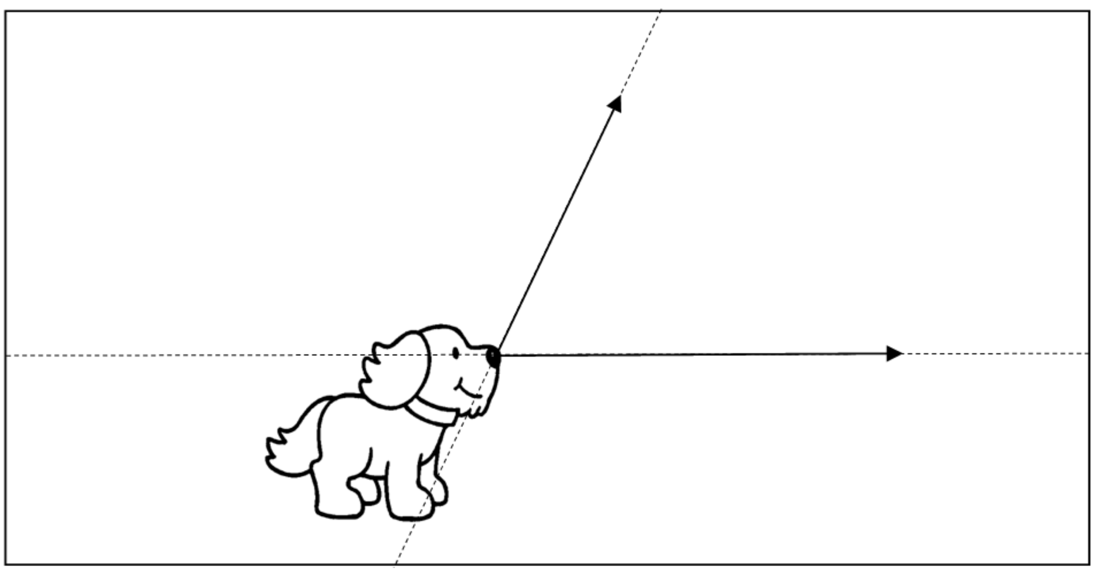
____

____

____

2. Utilizando un método de la pregunta anterior, traslada cada figura (en la dirección y magnitud dada para cada caso).





3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

4. Haz un resumen sobre las características que identifican a las traslaciones, es decir, ¿Cómo identificas que una figura es una traslación de otra (visualmente)? Justifica ampliamente.

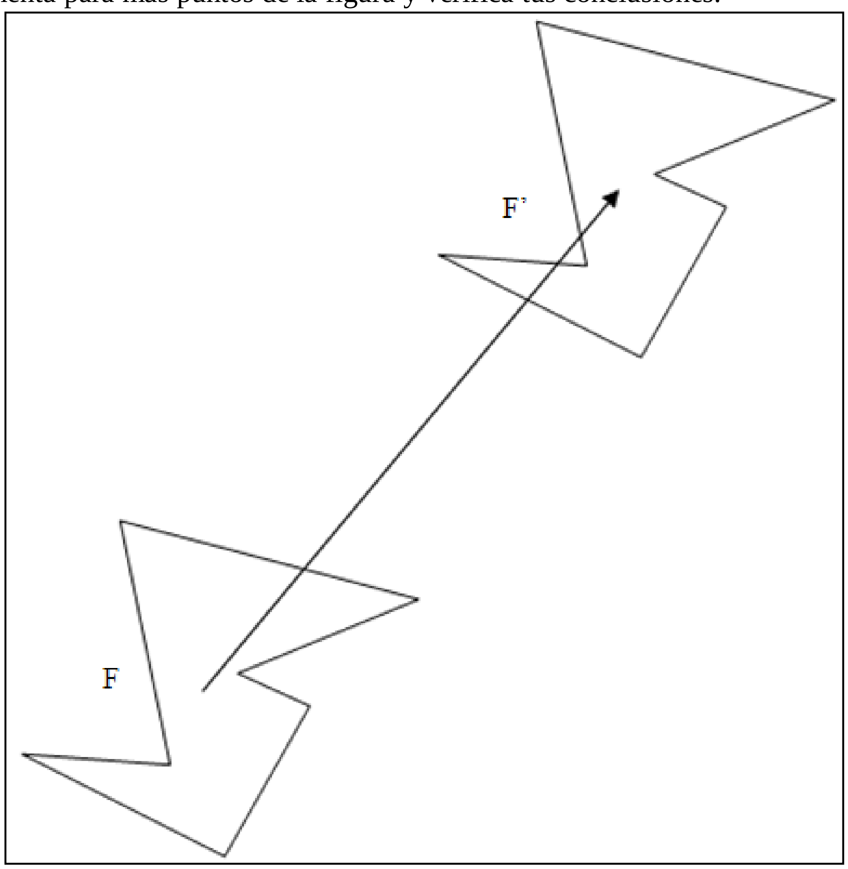
____
____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO No. 3

Nombre:_________________________________ **Fecha:** ________________

ACTIVIDADES:

- Utiliza el siguiente dibujo, donde se ilustra un polígono (F) y su traslación (F') a través del vector señalado, toma un punto de la figura original (utiliza lugares clave de la figura para no complicar la búsqueda como: los vértices del polígono, los puntos medios de los lados, etc.) y llámalo P. Posteriormente encuentra su correspondiente de la figura trasladada (etiquétalo con el símbolo P').
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- Responde las preguntas utilizando tu juego geométrico
- Experimenta para más puntos de la figura y verifica tus conclusiones.



Al segmento que trazaste le llamaremos PP'

1. Comparando la magnitud del segmento PP' y el vector de traslación (flecha que define la magnitud y dirección del movimiento). ¿Cómo son las longitudes de los segmentos?
____
____

- Experimenta con más puntos. ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente?______ Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura y anota tus observaciones:

____
____
____

2. ¿Qué ángulo forman el segmento PP’ y el vector de traslación?

____

- Nuevamente, experimenta con más puntos. ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?
- Anota tus observaciones:

____
____

3. Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

____
____
____

4. Señala (remarcando con tu lápiz) uno de los lados de la figura original (F), de igual manera indica el correspondiente “lado” de la figura trasladada (F’). ¿Qué ángulo forman los segmentos señalados?

____

- Mide los lados señalados (el de la figura original y su correspondiente de la figura trasladada) y compara las medidas ¿Cómo son entre ellas?
- Elabora una conclusión sobre los ángulos y medidas de lados homólogos

____
____

- Nuevamente, experimenta con otro par de lados de la figura F. ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?

____
____
____

5. Utilizando tu exploración anterior, elabora una conclusión sobre las características que comparten los objetos y sus traslaciones; es decir, define cuando una figura F’ es una traslación de otra.

____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO No. 4

Nombre:____________________________________ **Fecha:** _________________

ACTIVIDADES:
Ya conoces el software GeoGebra y tienes algunas conclusiones sobre las propiedades que debe de cumplir una figura para ser la traslación de otra (debido a tus experiencias en las actividades anteriores).

Haz uso de ese software para responder las siguientes preguntas:

1.- Abre el archivo "Traslación 1", aparece un punto P y su homólogo P'.

- Intenta mover los elementos que aparecen (P, P', V). ¿Qué observas? ¿Cuáles son los objetos del archivo que puedes manipular?

  ____
  ____
  ____

- Utilizando el plano cartesiano, coloca el punto P en (1,3) y el vector V en las coordenadas (2,6) ¿Cuáles son las coordenadas del punto P'?

  ____

- ¿Qué relación encuentra entre el valor de P' y los valores dados (P y V)?

  ____
  ____
  ____

- Experimenta para distintos valores de P, sin modificar las coordenadas (2,6) del vector V. ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?
- Anota tus observaciones:

  ____
  ____
  ____
  ____

- Verifica tu respuesta utilizando coordenadas distintas del vector V. ¿Qué observas?

  ____
  ____
  ____
  ____

2.- Abre el archivo "Traslación 2", en esta ocasión se observan dos polígonos (ABCD y A'B'C'D') y un vector V.

- Intenta mover los elementos que aparecen. ¿Qué observas? ¿Cuáles son los objetos del archivo que puedes manipular?

  ____
  ____

- ¿Cuál es la relación entre los polígonos?

- Si conoces las coordenadas del polígono original (azul) ¿Puedes identificar la posición (coordenadas de los vértices) del polígono trasladado (rojo)? ¿Cómo?

- Verifica tu respuesta utilizando coordenadas distintas del polígono azul y del vector V. ¿Qué observas?

3.- Elabora una conclusión sobre el procedimiento para trasladar figuras geométricas, si se conocen las coordenadas del vector de traslación. Digamos que el vector de traslación tiene coordenadas (v_1, v_2).

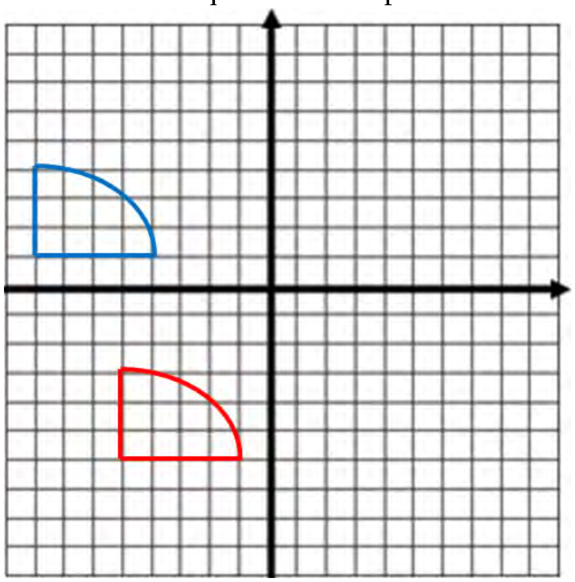
4.- Comparte con tus compañeros el procedimiento elaborado y anota aquí tus observaciones y modificaciones.

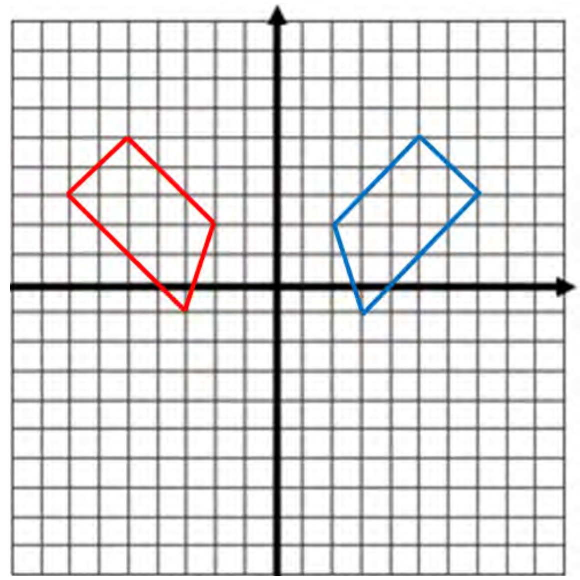
HOJA DE TRABAJO No. 5

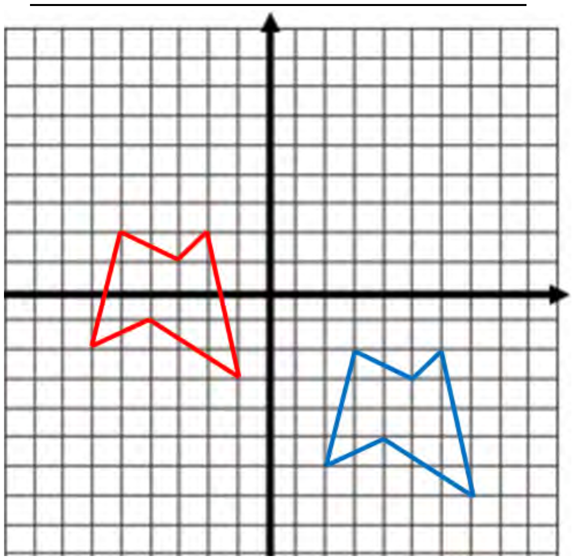
Nombre:_______________________________________ **Fecha:** ___________________

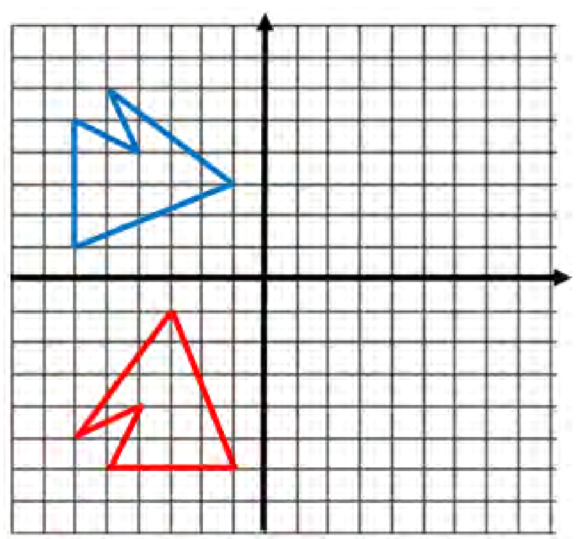
ACTIVIDADES:

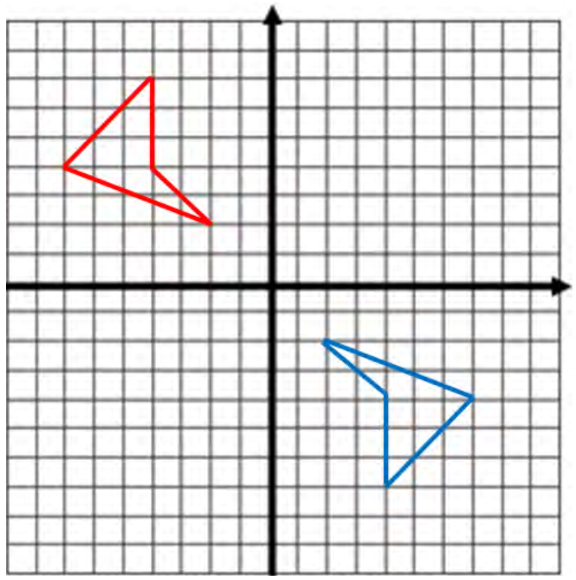
1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir cuáles son traslaciones y cuales no (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja. Para cada caso identifica el vector de traslación (escribiendo sus coordenadas y dibujándolo a partir del "origen" en el plano cartesiano) ó argumente las características de la transformación que no se cumple

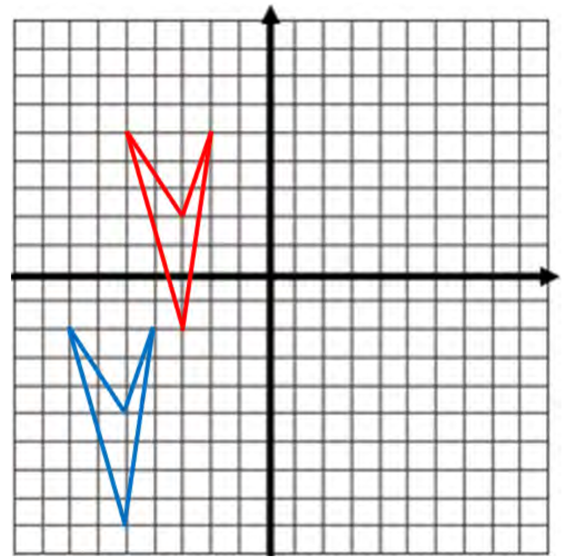






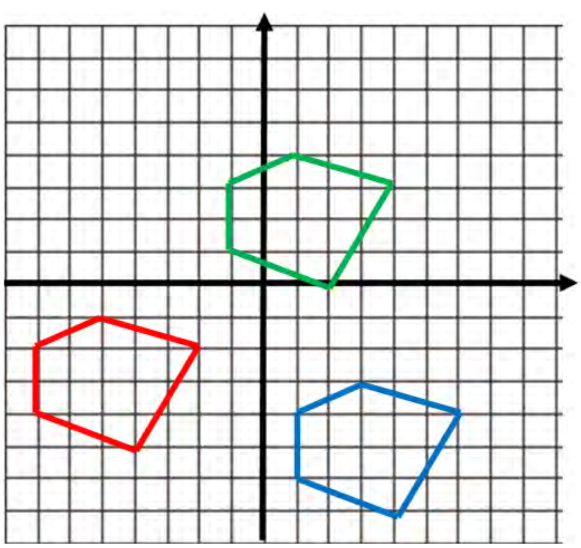


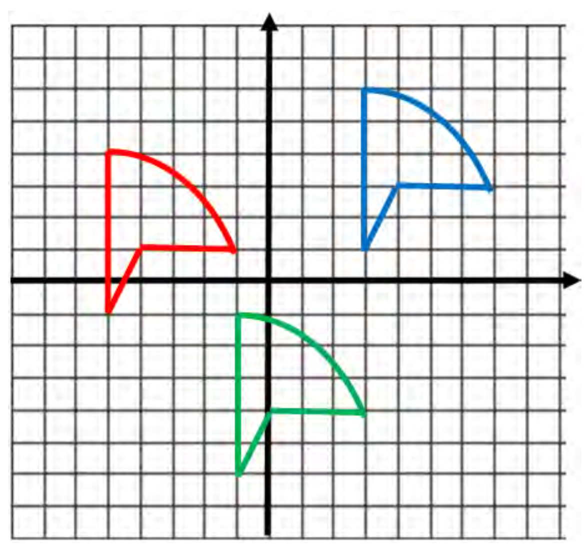




_________________________________ _________________________________
_________________________________ _________________________________
_________________________________ _________________________________

2.- Para la siguiente actividad considera la figura azul como la inicial, identifica los vectores que generan las traslaciones correspondientes a cada caso (roja y verde). Además, identifica sus coordenadas de los vectores de traslación y anótalas en la parte inferior del cuadro (dibújalo en el plano cartesiano, a partir del "origen").





Azul → Rojo (___ , ___) Azul → Rojo (___ , ___)
Azul → Verde (___ , ___) Azul → Verde (___ , ___)

3.- En la pregunta anterior se te pidió que identificaras los vectores de traslación (2 en cada caso), a continuación identifica los vectores que trasladan la figura roja en la verde, para cada caso. ¿Qué relación tienen las coordenadas de este vector con las encontradas en la pregunta anterior?

____

____

____

4.- Reúnete en equipos, de no más de 3 personas, para compartir sus respuestas. Utiliza el siguiente espacio para hacer comentarios o aclaraciones fruto de la interacción del equipo.

____

____

____

____

5.- Comenta la respuesta con tus compañeros y anota aquí tus conclusiones finales.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

HOJA DE TRABAJO No. 5-b

Nombre:______________________________________ **Fecha: ___________________**

Producto de tu experiencia con las actividades anteriores has generado algunas conclusiones sobre las propiedades que debe de cumplir una figura para ser la traslación de otra.

ACTIVIDADES:
Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Traslación 3", aparecen varios elementos.

- Intenta mover los elementos que aparecen. ¿Qué observas? ¿Cuáles son los objetos del archivo que puedes manipular?

  ____
  ____
  ____

- Enlista los elementos que el software te permite mover y describe el efecto en el resto de los objetos al hacer dicha manipulación (para responder a ésta pregunta mueve un objeto a la vez).

  ____
  ____
  ____
  ____
  ____

- Utilizando el plano cartesiano, coloca los vectores V y W en cualquier posición del plano ¿Cuáles son las coordenadas seleccionadas para cada vector? ¿Qué objetos se movieron y cuál es el efecto de seleccionar tales coordenadas en ellos?

  ____
  ____
  ____

- ¿Qué representa cada uno de los vectores del archivo (V, W y T)?

  ____
  ____
  ____

- ¿Cuál es la relación entre el vector T y los vectores V y W?

  ____
  ____
  ____

- Experimenta para distintos valores de V y W, ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?

Anota tus observaciones:

____
____
____

2. Elabora una conclusión sobre la relación de los vectores que trasladan consecutivamente a una figura geométrica, considera que conoces las coordenadas de los vectores de traslación. Desarrolle su conclusión suponiendo que los vectores tienen coordenadas $V = (v_1, v_2)$ y $W = (w_1, w_2)$.
____
____
____
____
____
____
____

3. Comparte con tus compañeros el procedimiento elaborado y anota aquí tus observaciones y modificaciones.
____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO No. 6

Nombre: ___________________________________ Fecha: _________________

1. Si la figura F es trasladada por el vector v y la imagen a su vez por el vector w ($T_w \circ T_v$). ¿Se puede simplificar la traslación a un sólo movimiento? Sin utilizar vectores, ¿Cómo puede determinar gráficamente el movimiento de dicha composición?

   ____

   ____

   ____

   ____

2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas $u= (u_1, u_2)$, $v= (v_1, v_2)$, $w= (w_1, w_2)$. ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?

   ____

   ____

   ____

   ____

4. Dada una traslación T_v, donde $v=(v_1, v_2)$ ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que $w=(w_1, w_2)$ y $z=(z_1, z_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

   ____

   ____

   ____

   ____

5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

____
____
____
____

6. Comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros y utiliza el siguiente espacio para redactar tu conclusión final, producto de la discusión grupal.

____
____
____
____

7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

____
____
____
____

8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

____
____
____
____

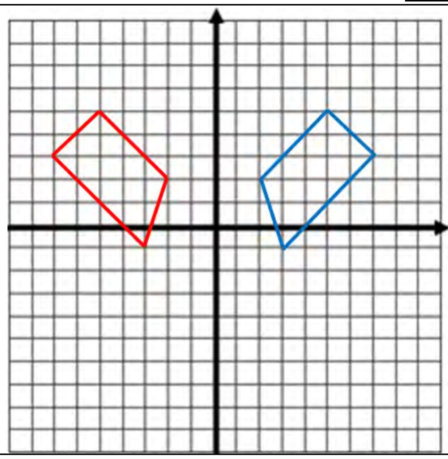
HOJA DE TRABAJO No. 7

Nombre:_______________________________________ **Fecha: ___________________**

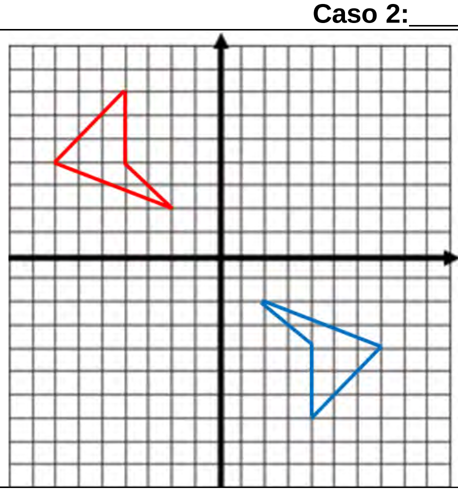
ACTIVIDADES:

- A continuación aparecen distintas transformaciones (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja), para cada ejemplo asigna un nombre, describe cómo es posible construir la transformación señalada e identifica los elementos que consideres necesarios para caracterizarla.

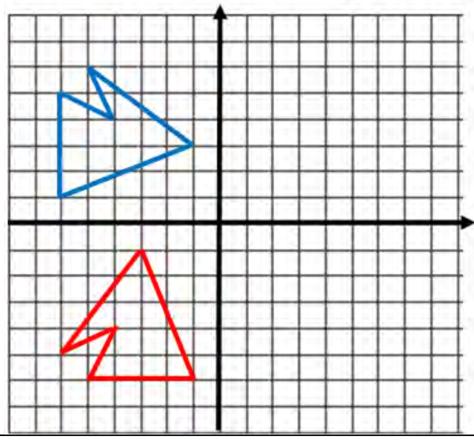
Caso 1:_______________________



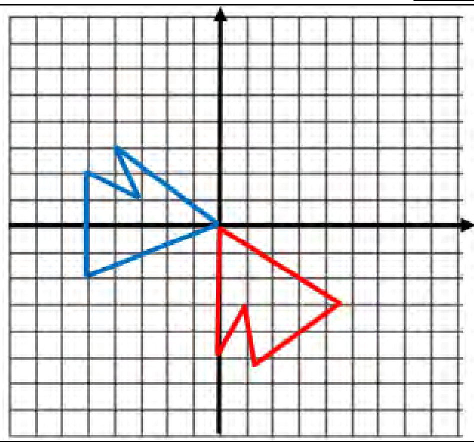
Caso 2:_______________________



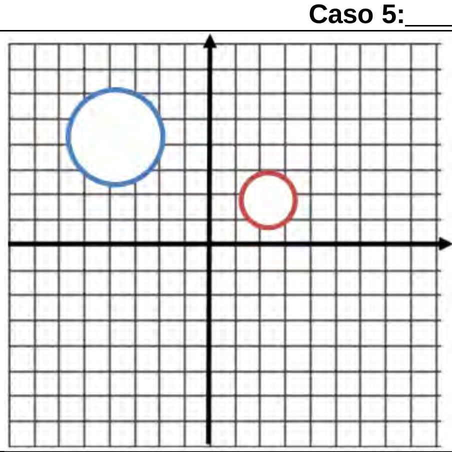
Caso 3:_______________________



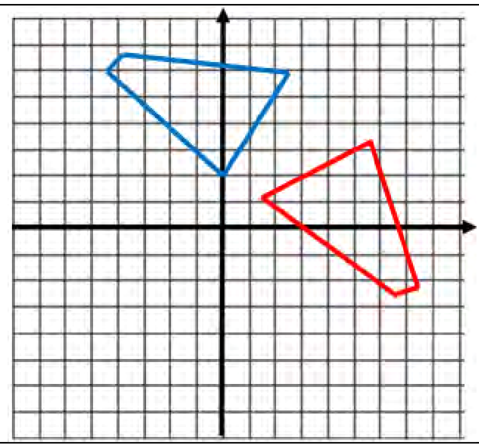
Caso 4:_______________________



Caso 5:_______________________



Caso 6:_______________________



- Una característica fundamental de la traslación es que respeta tamaño y forma ¿Qué otras transformaciones conservan estas propiedades?

- Discute con tus compañeros sobre sus respuestas en el punto anterior y anota aquí tus conclusiones

- Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma.

HOJA DE TRABAJO No. 8
(Rotación)

Nombre:___________________________________ Fecha: _________________

Ya conoces el software GeoGebra, haz uso de él para responder las siguientes preguntas:

Abre el archivo “Rotación 1” y manipula los elementos que aparecen ¿Cuáles es la relación entre los objetos del archivo (Figura azul, Figura roja, Punto O y Ángulo α)?

____

____

- Selecciona la casilla “Punto e imagen”, aparecerán dos puntos (P y su homólogo P’ bajo la transformación) y los segmentos que unen a cada uno con el punto O. Mide las distancias de los segmentos OP y OP’ con la herramienta “distancia o longitud” del menú de herramientas de GeoGebra. ¿Cuál es la relación entre las distancias de los segmentos OP y OP’?.

____

- Verifica para otras posiciones del punto P ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente?______ Anota tus observaciones:

  ____

  ____

Selecciona la casilla “Marcar ángulo” ¿Qué elemento aparece? ¿Cómo se relaciona con el ángulo α?

____

____

- Verifica para otras posiciones del punto P y para distintos ángulos α ¿Mantienes tu respuesta anterior?______ Anota tus observaciones:

  ____

  ____

Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.

____

____

____

Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

HOJA DE TRABAJO No. 9
(Reflexión)

Nombre:____________________________________ **Fecha:** __________________

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo “Reflexión 1”, aparecen 2 elementos manipulables (el punto P y la recta que pasa por los puntos A y B).

- Activa el botón de “Reflejo de P en la recta AB”, manipula los elementos que te permite el software y describe la relación de los objetos que aparecen en la imagen.

- Activa el botón “Segmento PP`”, el cual dibuja automáticamente el segmento que une al punto P con su reflejo P’. Ahora responde lo siguiente:
    - ¿Qué relación existe entre el segmento PP’ y la recta que pasa por los puntos A y B?

    - Ahora mide la distancia que existe entre tu punto P y el eje de reflexión (recta que pasa por los puntos A y B), así mismo la distancia del eje al reflejo del punto P (P’). ¿Qué observas?

    - Si manipulas la posición del punto P o la recta AB. ¿Qué efecto tiene en las mediciones hechas anteriormente? Elabora una conclusión al respecto.

- Verifica tus conjeturas para distintos ejes de reflexión (recta que pasa por los puntos A y B) y posiciones del punto P ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?

- Trata de enunciar todas las propiedades o condiciones que se deben cumplirse para que exista reflexión (Para que una figura sea reflejo de otra).

____
____
____
____
____
____
____
____

- Discute con tus compañeros sobre el conjunto mínimo de condiciones o propiedades que permiten definir a una reflexión.

____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO No. 10
(Reflexión)

Nombre:___________________________________ **Fecha: _________________**

En las primeras hojas de trabajo la exploración pretendía identificar las propiedades de las traslaciones. Particularmente en las actividades 5 y 6 la atención se centró en la propiedad de cerradura de dicha transformación. Durante tu trabajo descubriste que la composición de traslaciones es a su vez una traslación, la cual esta definida por los vectores involucrados.
A continuación haremos una exploración similar para la reflexión e intentaremos responder a la pregunta ¿La composición de reflexiones sigue siendo una reflexión?

ACTIVIDADES:

- En una hoja en blanco dibuja un polígono F, posteriormente marca una recta (intenta utilizar una regla o algo similar para no complicar la actividad) y por último dibuja la reflexión de la figura F con respecto al eje marcado, la cual llamaremos F'. En la misma hoja dibuja una recta distinta (que representara a otro eje de reflexión) y traza el reflejo de F' con respecto a esta línea, llama F'' a la última figura. ¿Es F'' una reflexión de la figura original F? Si la respuesta es "Si" identifique el eje de reflexión, de lo contrario indica que transformación relaciona a las figuras F y F'' (con los elementos necesarios para caracterizarlos)
  ____
  ____
  ____
  ____

- Comparte con tus compañeros tus observaciones y utiliza el siguiente espacio para redactar tus conclusiones finales.
  ____
  ____
  ____
  ____
  ____
  ____
  ____
  ____

HOJA DE TRABAJO No. 11
(Reflexión)

Nombre:_________________________________ **Fecha:** _________________

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Reflexión 2", donde aparecen varios elementos manipulables. En el archivo podrás explorar de manera general tu conjetura sobre la composición de reflexiones, hecha en la actividad anterior.

- Manipula las rectas: roja y verde (las cuales representan el primer y segundo eje de reflexión respectivamente).

____
____
____
____

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

____
____
____
____

- En el mismo archivo, experimenta cuando los ejes de reflexión son paralelos, activando la celda "Recta paralela`" (este botón limita las posiciones de la recta de color verde, permitiendo sólo rectas paralelas al eje de reflexión rojo y que pasan por el punto C). ¿Qué isometría trasforma la figura F en F''? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

____
____
____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO No. 12

Nombre ____ **Fecha** ___________________

ACTIVIDADES

- Investiga la definición del concepto algebraico llamado “Grupo”.

- Si consideramos a cada transformación de manera independiente (traslación, rotación y reflexión), ¿Cuáles constituyen un Grupo, con la operación composición?
  Para cada transformación, justifique ampliamente su respuesta.

- Para las transformaciones que no formen un grupo, define un subconjunto que si cumpla con las propiedades de grupo.

- Bajo la operación composición, el conjunto formado por las transformaciones isométricas (rotación, reflexión y traslación) es llamado “Grupo de isometrías”. Verifica que efectivamente es un Grupo, justificando ampliamente tu respuesta.

- Comparte y escucha sobre las justificaciones elaboradas por tus compañeros en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu respuesta (en caso de ser necesario), incluye además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

Examen

Nombre: ______________________________________ Fecha: __________________

1.- Fruto de tu exploración, descubriste distintas propiedades de las traslaciones en el plano. Demuestra las siguientes conjeturas, utilizando la definición de traslación elaborada en clase (entiéndase T_v como la traslación a través del vector v):

- ❖ Si l es una recta (o segmento de recta) en el plano, entonces $T_v(l) \parallel l$
- ❖ Demuestra que el conjunto de Traslaciones en el plano es cerrado bajo la composición.

2.- Una transformación φ es una isometría (en el plano) si:

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad \forall\, p, q \in \mathbb{R}^2 : d(p,q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$$

Siendo $d(p,q)$ la distancia euclidiana. Demuestra que cada una de las transformaciones vistas en clase (traslación, rotación y reflexión) son isometrías, utilizando las definiciones elaboradas.

3.- Enuncia una conjetura (completa) sobre la composición de reflexiones con respecto a ejes no paralelos y las rotaciones en el plano. Demuéstrala.

4.- Enuncia una conjetura (completa) sobre la composición de reflexiones con respecto a ejes paralelos y las traslaciones en el plano. Demuéstrala.

REFERENCIAS

Acuña, C. (1996). *Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior*. Investigaciones en Matemática Educativa (pp.93-109), Editorial Iberoamericana, México.

Arsac, G. (1987). *Ensayo de la demostración: Ensayo de epistemología didáctica*. En Recherches en didactique des mathematiques, Vol. 8, no 3, pp. 267-312.

Ausubel, D. et al (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2° Ed.TRILLAS México

Chacara, M. (2004). *Las nociones de isometría en el plano, estudiadas a través del Modelo de Van Hiele, enriquecido con principios constructivistas*. Tesis presentada para obtener el grado de maestría en la Universidad de Sonora. México.

Chaves, E. & Salazar J. (2006). *El papel y algunas condiciones para la utilización de la Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.* 1er Encuentro de la Enseñanza de las Matemáticas, UNED, Costa Rica.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de doctorado no publicada, CICATA, IPN, México.

de Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. *Épsilon*. 26, 15-30.

Godino, J. D. & Recio A. M. (1997). *Significado de la demostración en educación Matemática*. En: Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21th International Conference on PME, 2. (pp. 313-321). Lathi, Finland.

Gutierrez, A., Jaime, A., Fortuny, J. (1993). *An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels*. Journal for Research in Mathematics Education (Vol 22, No 3, pp. 237-251).

Haack, S. (1991). *Filosofía de las lógicas*, Editorial Cátedra, Madrid.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral, Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Valencia.

Kline, M (1980). *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*. España, Editorial siglo XXI.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología (Capitulo 4: ¿Qué es lo que prueba una prueba matemática? pp. 91-102)*. Madrid, Editorial Alianza

Lupiáñez, J. L. (2000). *Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92 (Capítulo 6: La Matemática de Grecia. Arquímedes de Siracusa)*. Granada: Universidad de Granada.

Martínez, A (2001). *La demostración en matemática: una aproximación epistemológica y didáctica.* En Quinto simposio de la Sociedad Española de Investigación en Matemática Educativa, pp. 29-43. Almería, España.

Murillo, M. (2006). *Una introducción al pensamiento lógico formal.* En I encuentro Enseñanza de la Matemática. UNED. Mercedes de Montes de Oca, Costa Rica.

Navarro, M. (2002). *Un estudio de convergencia encuadrada en el modelo educativo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*. Memoria presentada para obtener el grado de doctora, Universidad de Sevilla. Sevilla, España.

Polya , G (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Editorial Trillas.

Rodríguez, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabrí por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.* Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Valencia.

Romero, C (2010). *Una introducción gráfica al concepto de transformación lineal usando Geogebra.* Tesis presentada para obtener el grado de maestría en la Universidad de Sonora. México.

Van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión: La conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Matemáticas y Ciencias Naturales. Universidad Real de Ultrecht. Países Bajos.

Vargas, R. (1998). *Etapas o Estadios de una teoría Matemática*. Material didáctico de apoyo a cursos de maestría y diplomado. Hermosillo, Sonora.