"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones

TESIS

Que para obtener el título de:

Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Daniel Rubal Valencia

Directora de Tesis:

M.C. Guadalupe Villaseñor Gándara

Hermosillo, Sonora, México. Diciembre 2018

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que estuvieron de alguna manera durante este tiempo, principalmente quiero agradecer a mi madre que se que aún y cuando presencialmente no está junto a mí, a donde quiera que yo voy ella me acompaña siempre y sé que estuvo conmigo en este camino.

Quiero agradecer a mi padre y mi hermano que han sido dos pilares fundamentales para lograr cada uno de mis objetivos, en particular éste. Sin ellos, sin duda alguna todo sería mucho más difícil, siempre han hecho todo lo posible porque yo cumpla lo que me propongo y me han ayudado en los momentos que más lo he necesitado.

Quiero agradecer a Paola porque nunca dejo que me soltara de su mano y siempre me ha brindado su apoyo en los momentos que más lo he ocupado, ella es el otro pilar que me impulsa a lograr cada objetivo y que ha estado en cada éxito y fracaso, dándome su confianza y su sinceridad.

Quiero agradecer a mis profesores del posgrado que me han apoyado en cada paso que he dado a lo largo de mi estancia en la Maestría, han contribuido de gran manera en mi formación como estudiante y ahora como egresado de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, en especial a la coordinadora del posgrado, la maestra Silvia que ante cualquier situación siempre estuvo confiando en mi y dándome su voto de confianza. De igual manera, agradecer de antemano al maestro José Ramón que fue parte fundamental para que este proyecto saliera adelante.

Quiero agradecer a mi Directora de Tesis la maestra Guadalupe Villaseñor, que fue la pieza más importante para que lograra mis objetivos durante los dos años del posgrado, siempre mostrándome su apoyo y aventurándose junto conmigo a trabajar un tema que en un principio sabíamos que sería difícil, pero jamás nos dimos por vencido y logramos completar de manera satisfactoria este proyecto.

Quiero agradecer a los maestros que fueron mis sinodales Cesar, José Luis y Ruth, ya que ellos aportaron un granito de arena para que este proyecto se lograra, aportando de gran manera con sus acertados comentarios y las debidas correcciones que había por realizar. En especial, quiero agradecer a la Dra. Ruth Rodríguez, que me permitió aprender junto a ella durante un tiempo elementos que fueron fundamentales para que este proyecto se lograra, agradecerle que se tomara el tiempo para brindarme su apoyo en mi estancia en el Tecnológico de Monterrey en la ciudad de Monterrey, que pudiera asistir a la presentación de mi examen de grado y que me diera sus acertados comentarios respecto al trabajo realizado, espero volver a coincidir con ella.

Quiero agradecer a mi familia, a la familia de Paola y a mis amigos que de igual manera me brindaron todo su apoyo durante mi estancia en el posgrado y que de alguna forma influyeron en mí para que pudiera lograr ese objetivo.

Quiero agradecer a CONACYT que me brindó su apoyo económicamente, el cual me ayudo a poder centrarme únicamente en mis estudios y poder lograr mis objetivos en tiempo y forma. De igual manera, agradecerles por su apoyo durante mi estancia en la ciudad de Monterrey, ya que sin su apoyo nada de eso hubiera sido posible.

En verdad, quiero agradecer a cada uno de los que han estado conmigo durante este tiempo.

GRACIAS

Índice

Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales surgieron a la par del Cálculo Diferencial (Nápoles, 1998), a partir de diversas problemáticas presentes en la física. Además, Perdomo (2010) afirma que "el concepto de ecuación diferencial ordinaria está estrechamente relacionado con el concepto de derivada de una función, hasta el punto de poder considerarse como uno de los usos que conforman la red de significados asociados al concepto de derivada" (p. 1). Por lo cual en este trabajo se pretende promover la construcción de Ecuación Diferencial Ordinaria y sus soluciones a partir del análisis de diversas situaciones de variación, así como también a partir de la relación entre la noción de derivada y la de Ecuación Diferencial Ordinaria.

Por lo anterior, se diseñó una secuencia de actividades didácticas, la cual se divide en una secuencia de inicio, una secuencia de desarrollo y una secuencia de cierre. La secuencia de inicio tiene el propósito de reforzar la noción de derivada, la secuencia de desarrollo tiene el objetivo de promover un primer acercamiento al estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y sus soluciones, y finalmente, la secuencia de cierre tiene el propósito de reforzar algunas de las nociones exploradas en las secuencias de inicio y de desarrollo.

En el capítulo 1 se responde a las preguntas de ¿Por qué elegir el área de Ecuaciones Diferenciales? y ¿Por qué elegir específicamente la noción de EDO? Además, se incluye la importancia del uso de la tecnología en el análisis de las EDO, así como también la problemática asociada a la enseñanza y aprendizaje de éstas; una problemática detectada es que los estudiantes asocian el concepto de ecuación diferencial ordinaria con la representación analítica de ésta, además tienen problemas para establecer una conexión entre la noción de derivada y la de EDO.

En el capítulo 2 se describen diferentes trabajos dentro de la Matemática Educativa que están relacionados con las EDO y que reforzaron los elementos de justificación y la problemática detectada. Todos estos trabajos coinciden en que en la enseñanza de las EDO se privilegia a la representación analítica de éstas, por lo que consideramos como una característica importante de nuestra secuencia didáctica el promover el análisis de las diferentes representaciones de una EDO. Otro de los referentes importantes de nuestro trabajo, es el proyecto Inquiry Oriented Differential Equation (IO-DE) liderado por Chris Rasmussen, en este proyecto se han desarrollado una gran cantidad de investigaciones que se enfocan en trabajar en el área de las Ecuaciones Diferenciales, dicho proyecto tiene como referente teórico a la Educación Matemática Realista (EMR) de Hans Freudenthal, por lo cual elegimos a la EMR como una de las teorías que fundamenta nuestro trabajo.

En el capítulo 3 se plantea el objetivo general del trabajo, el cual se pretende lograr mediante el diseño de la secuencia de actividades didácticas, teniendo en consideración los objetivos específicos planteados. En este capítulo incluimos los referentes teóricos de nuestro trabajo, que como se mencionó previamente es la Educación Matemática Realista (EMR) de Hans Freudenthal y la Teoría de Representaciones Semióticas (TRS) de Raymond Duval.

En el capítulo 4, que corresponde a la metodología, se describen los elementos fundamentales que se contemplaron para el diseño de la secuencia de actividades didácticas. También, se plantean los objetivos generales de la secuencia didáctica y las características de ésta, así como la descripción de cada una de las Actividades que la conforman.

En el capítulo 5 se presenta un análisis de la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas, para el cual se desarrollaron tres tablas las cuales están basadas en el principio de los niveles de comprensión de la EMR. En estas tablas se describe cada uno de los niveles de comprensión aplicados para la noción de derivada y también para la noción de EDO, así como una categorización para la valoración de las respuestas dadas por los estudiantes a la secuencia didáctica.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo. En el Anexo 1 se muestran las Actividades que conforman la secuencia de actividades didácticas y en el Anexo 2 se presenta la descripción de los applets diseñados en GeoGebra, con los cuales se trabaja en la secuencia de actividades didácticas.

Capítulo 1.

Justificación y Problemática

1.1 Elementos de justificación

La importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en el nivel superior, se asocia a varios hechos, uno de ellos es que contribuye a la formación de los estudiantes de distintas áreas de la ciencia y la ingeniería, varios autores hacen alusión de ello. Por ejemplo, Moreno y Azcárate (2003) mencionan en su trabajo, la importancia que tiene el hecho de que la materia de Ecuaciones Diferenciales aparezca como uno de los primeros cursos universitarios en carreras como la química y la biología, por ser una herramienta que puede ser de gran utilidad en un futuro para los estudiantes que asisten a estos cursos y por la relación que tienen con el uso de las nuevas tecnologías. Referido a ello, Perdomo (2011) resalta la importancia que tienen las ecuaciones diferenciales y afirma que "las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) están consideradas como uno de los tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en los currículos de nivel universitario" (p. 113).

Algo que también hay que destacar, es la relación que tienen las ecuaciones diferenciales ordinarias con la vida cotidiana, ya que éstas ayudan a describir fenómenos de variación que ocurren en nuestro alrededor. Algunos autores hacen mención de ello, como Nápoles (2003) que expone que las EDO nos ayudan a describir fenómenos de la naturaleza, que están relacionados con distintas ramas de la ingeniería o de otras ciencias. Más aún, Perdomo (2011) menciona que "permiten describir fenómenos de variación y por tanto resultan de utilidad para modelar, analizar y resolver numerosos problemas que surgen en diferentes contextos" (p. 113).

Otra de las razones por las que se decidió trabajar en el área de Ecuaciones Diferenciales, es que cuenta con muy pocas investigaciones desde el punto de vista de la Educación (Rasmussen, 2016).

1.1.1 Uso de tecnología y Pensamiento variacional

Otro aspecto que también es importante mencionar, es la importancia del uso de la tecnología en las Ecuaciones Diferenciales, ya que ésta puede ser de gran ayuda para los estudiantes, pues les permite realizar conjeturas y como lo menciona Gamboa (2007) esta herramienta les sirve de ayuda para la resolución de problemas, pues permite la exploración de otras representaciones y no solo de lo algebraico, lo cual puede apoyarlos para la comprensión de algún tema. Y también, Perdomo (2011) hace referencia de ello al indicar que el usar herramientas tecnológicas en el análisis de las ecuaciones diferenciales ordinarias, facilita el proceso de aprendizaje del estudiante.

Por último, hay que recalcar que el estudio de las ecuaciones diferenciales permite desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes del nivel superior, pues según Vasco (2003) "las EDO proporcionan herramientas muy poderosas para modelar, y la manera actual de visualizar las ecuaciones diferenciales como campos vectoriales en el plano permiten un acercamiento al pensamiento variacional" (p. 12).

1.1.2 La importancia de las ecuaciones diferenciales en la formación de un ingeniero

En esta sección se realza la importancia que tiene para los estudiantes de ingeniería el curso de Ecuaciones Diferenciales, adentrándonos un poco en el currículo. Lo primero que hay que saber, es que el curso se imparte en el nivel superior en licenciaturas afines a la ciencia y la tecnología e ingenierías.

Con esto, es importante destacar que el trabajo está enfocado a estudiantes de ingenierías. Para ello, es valioso realizar un análisis sobre la forma en cómo se trabaja en las diferentes facultades alrededor del país. Una organización que cuenta con Institutos que incluyen en su oferta educativa gran cantidad de ingenierías, es el Tecnológico Nacional de México (TNM).

Un aspecto importante por conocer en esta organización es saber bajo qué enfoque están diseñados sus planes y programas de estudio. En el artículo de Gamino y Acosta (2016), se indica que el enfoque que predomina en el TNM es el enfoque por competencias. Y con base en éste, fueron diseñados los planes y los programas de los cursos de las diferentes ingenierías que se ofrecen y que hoy prevalecen.

Dentro de los planes de estudio de las diferentes ingenierías que se ofrecen en las instituciones afines al TNM, el curso de Ecuaciones Diferenciales aparece en la mayoría de ellas, resaltando así, la importancia que tiene en la formación de un ingeniero. Además, la materia se encuentra ubicada en el cuarto semestre, en el cual cuenta con un espacio de cinco horas por semana, coincidiendo con lo mencionado por Moreno y Azcárate (2003), al presentarse como uno de los primeros cursos que son impartidos a los estudiantes.

En lo que refiere al programa del curso que se imparte en las diferentes instituciones afines al TNM (2016), se pueden rescatar varios aspectos que fortalecen la elaboración de este trabajo, como la importancia que tiene el uso de la tecnología, el trabajar con contextos y el aplicar conocimientos de temas previos, como, por ejemplo, el de la derivada.

1.2 Descripción de la problemática

Una práctica recurrente en la enseñanza de las matemáticas es favorecer el aprendizaje memorístico de definiciones y procedimientos matemáticos. Es decir, la comprensión de una noción matemática por parte de los estudiantes suele ser limitada al uso de algoritmos o fórmulas, restándole importancia a otros tipos de representaciones que pueden ser de gran utilidad para lograr un conocimiento matemático concreto. En la literatura esto es comúnmente mencionado, y se hace hincapié en la mecanización de procedimientos. Por ejemplo, Flores (1997) afirma que "un problema importante y común que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas es que los alumnos mecanizan o automatizan un algoritmo o proceso sin tener comprensión cabal de las ideas y conceptos que están detrás" (p. 49). Además, Gamboa (2007) afirma que "en la enseñanza de las matemáticas se ha puesto mucho énfasis en el trabajo con ejercicios rutinarios a los cuales los estudiantes dan una solución mecánica, debido al énfasis que los profesores han dado a los procedimientos" (p. 10).

En el área de Ecuaciones Diferenciales esto no es diferente, pues según Perdomo (2011) el enfoque de la enseñanza habitual en el que se introduce el concepto de EDO a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución supone un aprendizaje que no perdura en el tiempo si éste no se refuerza con razonamientos que producen dichos métodos (este es el enfoque que recomienda el programa del TNM del curso de Ecuaciones Diferenciales). También, Nápoles (2003) menciona que, en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias, los conceptos que rodean al tema son evadidos o disfrazados con una fórmula o algoritmo, lo que no permite su comprensión, y hace creer a los estudiantes y en ocasiones a los profesores, que la fórmula es el concepto mismo. Además, Nápoles, González, Genes, Basabilbaso y Brundo (2004) señalan el predominio que se tiene hoy en día en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales del uso de las representaciones algebraicas, sobre las geométricas o las numéricas mismas y afirman que "esto ha traído, como consecuencia, que se tenga una visión muy parcial de los métodos que existen para resolver ecuaciones diferenciales, pues frecuentemente en el estudio de los modelos determinísticos se requiere establecer articulaciones entre los diferentes acercamientos" (p. 46).

Otro aspecto que es importante resaltar, es la estrecha relación que existe entre el concepto de EDO y el de derivada de una función, y es precisamente en este aspecto donde los estudiantes no pueden encontrar una conexión entre una y otra. Así, de acuerdo con Camacho, Perdomo y Santos-Trigo (2009), el estudiar las ecuaciones diferenciales requiere de la comprensión del concepto de derivada y de establecer una relación entre éstas, mediante el uso de las distintas representaciones asociadas. En particular, Perdomo (2010) afirma que "el concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias está estrechamente relacionado con el concepto de derivada de una función, hasta el punto de poder considerarse como uno de los usos que conforman la red de significados asociados al concepto de derivada" (p. 1). Y es ella misma que menciona en Perdomo (2011) que gran parte de los estudiantes muestra dificultades para poder establecer una conexión entre estos dos conceptos.

Capítulo 2.

Antecedentes de investigación

En esta sección, se hace una revisión de algunas investigaciones en el área de Ecuaciones Diferenciales desde el punto de vista de la Matemática Educativa, siguiendo primero lo que se ha realizado de manera local, es decir, en el Posgrado de Maestría en Matemática Educativa (PMME) de la Universidad de Sonora, continuando con algunas investigaciones que se han realizado en el país y en el extranjero. Para finalizar, se considera el proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equation), el cual por su relevancia en el campo de la investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO lo hemos considerado como un antecedente fundamental de nuestro trabajo.

2.1. Trabajos relacionados

Primeramente, en el PMME de la Universidad de Sonora solo se ha realizado un trabajo de tesis relacionado con las ecuaciones diferenciales, éste fue realizado por Rivera (2001), en él se hace una investigación sobre ¿Cuál es el sentido y significado que los estudiantes de Ingeniería les asignan a las ecuaciones diferenciales, en general?, y ¿Qué papel juegan en la adquisición de dicho sentido y significado, profesores y textos? En específico se trabaja con estudiantes de distintas ingenierías que ya habían llevado el curso de Ecuaciones Diferenciales en la Universidad Autónoma de Baja California. Es importante mencionar que se obtuvieron resultados interesantes en este trabajo, ya que la autora comprobó que no solo los alumnos, sino también, los profesores y los libros de texto, hacen uso en gran parte de herramientas algebraicas, dejando de lado lo gráfico e inclusive lo numérico.

En Balderas (2001) se expone una propuesta estructurada de integración de la informática en la didáctica de las ecuaciones diferenciales, en la cual se trabajó con estudiantes del Instituto Tecnológico de Querétaro de varias carreras de la Facultad de Ingeniería. En general, este trabajo habla de cómo el uso de la tecnología, en particular de las computadoras, ha beneficiado de gran manera a la educación matemática, en específico el área de las Ecuaciones Diferenciales. Además, menciona cómo se puede aprender a hacer matemáticas a la par de aprender a usar la tecnología, de tal manera que esto puede promover en los estudiantes una visión más completa e integral de la teoría.

En su trabajo, Hernández (2009) presentó una propuesta de enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, basándose en el movimiento uniforme. Para esto, diseñó una serie de actividades didácticas de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la física, las cuales aplicó a estudiantes de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Se destaca en su investigación que los estudiantes son conscientes del procedimiento algebraico, sin embargo, son incapaces de percibir el comportamiento gráfico que tiene la solución de una ecuación diferencial y menciona que esto viene como consecuencia de la descontextualización de la materia.

Más recientemente, Barrera, Téllez, León y Amaya (2012) publicaron su artículo cuyo objetivo fue probar cómo el uso de la tecnología facilita la comprensión de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de forma gráfica. En el estudio participaron alumnos del tercer semestre de la Licenciatura en Sistemas Computacionales de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. En este artículo los autores rescataron aspectos importantes, como el hecho de que, para poder graficar alguna función, los estudiantes hacen uso de la representación tabular, es decir, pueden establecer una conexión entre estas dos representaciones, aunque lo hacen de manera inconsciente. También mencionan las dificultades que muestran los estudiantes para manipular información en el uso de herramientas tecnológicas, aunque el utilizarlas les permite reflexionar sobre lo que se hace.

En cuanto al ámbito Internacional, Dullius (2009) realizó un trabajo en el cual se propuso e investigó una metodología para abordar las ecuaciones diferenciales enfocada en situaciones-problema. Para dicha investigación, requirió de la elaboración de una serie de estudios, en los cuales se apoyó en profesores de Física y Matemáticas y en estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Exactas de la Universidad Federal do Rio Grande do Sul, así como, en estudiantes de Química Industrial y de algunos cursos de Ingeniería del Centro Universitario UNIVATES. Algunas de las conclusiones formuladas en este trabajo están relacionadas con la importancia que se le ha dado a lo algebraico en los cursos de ecuaciones diferenciales, de tal manera que los estudiantes llegan a dominar los métodos de solución de éstas, pero no la concepción que hay detrás, a tal punto que saben que éstas están relacionadas con derivadas e integrales, pero no logran establecer una conexión de forma conceptual. La autora también menciona la importancia que tiene la aplicación de problemas contextualizados y el uso de la tecnología como recursos para obtener una mayor comprensión por parte de los estudiantes de las ecuaciones diferenciales.

Perdomo (2010) divide en dos fases su trabajo, en la primera de ellas analiza los conocimientos que los estudiantes universitarios tienen con respecto a las ecuaciones diferenciales ordinarias después de haber llevado el curso; la segunda fase tuvo como objetivo el diseño y desarrollo de un módulo de enseñanza para estudiantes, donde es introducido el tema de ecuación diferencial ordinaria en un ambiente de resolución de problemas. Este trabajo fue dirigido a los estudiantes de primer curso de la Licenciatura en Química. Y como conclusiones, Perdomo resalta que los estudiantes cuentan con un dominio en lo algebraico de las ecuaciones diferenciales ordinarias, además de que no pueden establecer una relación entre los conceptos de EDO y de derivada de una función, y también muestran rechazo cuando se les plantea un problema que requiere del empleo de la representación gráfica, especialmente cuando está relacionado con un concepto relativamente nuevo para ellos como es el campo de pendientes.

Algo que es común en cada uno de estos trabajos, es el hecho de que los estudiantes, para resolver una ecuación diferencial, se basan en el procedimiento algebraico y dejan de lado las otras representaciones que se pudieran utilizar. Algunos de los autores mencionan que esto se da como consecuencia de la enseñanza de los profesores y el contenido de los libros de texto, ya que éstos les dan prioridad a los métodos algebraicos.

2.2. Proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equation)

El proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equation) surge con el objetivo de introducir en el proceso de enseñanza un elemento que permita analizar cómo piensan o razonan los estudiantes, permitiendo contemplar no sólo su desarrollo cognitivo sino también aspectos relacionados con la clase de matemáticas. Este proyecto abarca tanto las actividades del profesor como las de los estudiantes, que aprenden matemáticas participando en discusiones, planteando y entendiendo conjeturas, explicando y justificando sus ideas y resolviendo problemas novedosos (Perdomo, 2010).

El equipo de investigación que participa en este proyecto es numeroso (algunos de sus miembros están identificados en Rasmussen & Kwon, 2007, p. 190). Trabajan en torno a tres objetivos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, enfocadas desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. Esos objetivos son:

- Que los estudiantes reinventen muchas de las ideas y métodos matemáticos fundamentales para analizar las soluciones de las ecuaciones diferenciales.
- Buscan tareas desafiantes, que reflejen situaciones reales, que sirvan de punto de partida para que los estudiantes comiencen a indagar.
- Debe existir un balance entre el tratamiento de los enfoques analítico, numérico y gráfico. Estos enfoques deben surgir de forma más o menos simultánea en las realizaciones de los estudiantes.

Este último objetivo viene motivado por los resultados mostrados por Rasmussen y Whitehead (2003) que señalan que los enfoques gráficos y cualitativos no se convierten de forma automática en comprensión conceptual, pudiendo quedarse en actividades de manipulación mecánica análogas a las que se realizan cuando se utilizan los métodos algebraicos de resolución de EDO. Los autores proponen que se fomente que los estudiantes expliquen y defiendan sus razonamientos y conclusiones en términos matemáticos, para evitar que se limiten a aprender una serie de procedimientos (algebraicos, gráficos...) sin ninguna conexión con otros aspectos del problema. Esta es una de las características que los investigadores pertenecientes a este proyecto han introducido en la dinámica de aula (Perdomo, 2010).

Para desarrollar los tres objetivos descritos anteriormente, dentro del proyecto IO-DE se realizan investigaciones dirigidas hacia tres áreas relacionadas entre sí:

- Adaptación de un enfoque de diseño innovador de la enseñanza en los niveles universitarios.

- Estudio sistemático del pensamiento de los estudiantes mientras construyen sus ideas e identificación del conocimiento que necesitan tener los profesores para respaldar lo que los estudiantes reinventen.
- Prestar atención a la producción social de significado y a las identificaciones de los estudiantes.

El proyecto IO-DE tiene su base en los fundamentos de la Educación Matemática Realista, teoría basada en la idea de Freudenthal de que las matemáticas deben estar conectadas a la realidad (Perdomo, 2010).

Desde el punto de vista de la EMR, los estudiantes aprenden matemáticas por un proceso de matematización de situaciones reales y de su propia actividad matemática. Freudenthal define la matematización como el proceso por el cual se organizan los aspectos clave de la materia en un nivel para producir nueva comprensión en un nivel superior (citado en Rasmussen & Kwon, 2007, p.191). Las situaciones reales incluyen tanto problemas enunciados en un contexto no matemático como matemático, siempre que este resulte cercano para el estudiante. El proceso de matematización se caracteriza por la realización de una serie de actividades que persiguen generalizar, verificar, precisar y simplificar (Rasmussen & King, 2000).

Además, el proyecto IO-DE amplió aún más el principio de reinvención de la EMR para incluir posibles puntos de partida debido a la tecnología, ya que ésta puede revelar cosas que históricamente no podían ser reveladas (Rasmussen & King, 2000). Con relación a ello, Kaput, (1997) menciona que, "los entornos de aprendizaje del pasado pueden ser significativamente diferentes de los de hoy y, por lo tanto, estar abiertos a las posibilidades que ofrece la tecnología alerta a los prospectos que de otro modo podrían no ser evidentes".

Como se puede ver, las características que se rescatan de los diferentes trabajos presentados en esta sección refuerzan la problemática y la justificación de este trabajo, y eso da pie a la elaboración de nuestros objetivos del trabajo. Dichos objetivos son presentados en el siguiente capítulo.

Capítulo 3.

Planteamiento de la propuesta y elementos teóricos

3.1. Objetivos de la propuesta.

3.1.1 Objetivo general.

Diseñar una secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones, de forma integrada con la noción de derivada, a partir del análisis de problemas prácticos y apoyándose en el uso de GeoGebra como recurso didáctico.

3.1.2 Objetivos específicos

Para que se lograra el objetivo general que se propuso, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar actividades de inicio para reforzar el concepto de derivada.
- Seleccionar contextos extra-matemáticos que sean de interés para el estudiante.
- Disponer de diseños específicos que promuevan el uso de GeoGebra.

3.2 Consideraciones Teóricas

Consideramos como elementos teóricos que dan sustento a este trabajo a la Educación Matemática Realista (EMR), así como también a la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS) de Raymond Duval.

3.2.1 Educación Matemática Realista (EMR)

La teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) surge alrededor de los años 60 y fue fundada por el matemático y educador alemán Hans Freudenthal (1905-1990), como respuesta al movimiento de la Matemática Moderna y al enfoque mecanicista que predominaba en la enseñanza de las matemáticas en Holanda en esos tiempos.

La Educación Matemática Realista es una teoría global que cuenta con las siguientes ideas centrales (Bressan, 2010):

- Pensar la matemática como una actividad humana.
- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles.
- La reinvención guiada de las matemáticas.

Además, esta teoría cuenta con las siguientes características (Zolkower, Bressan y Gallego, 2006):

- Los contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos.
- El uso de modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones.
- La centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en el proceso de enseñanza/ aprendizaje.
- El papel clave del docente como guía.
- La importancia de la interacción grupal.
- La fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática.

Actualmente la Educación Matemática Realista se basa en seis principios fundamentales, los cuales fueron articulados por Treffers (1987) y han sido reformulados a lo largo de los años (Alsina, 2009 y Heuvel-Panhuizen, Drijvers, 2014):

- De Actividad.

En este principio, la idea fundamental de Freudenthal es que la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola (Alsina, 2009).

Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014) mencionan que en este principio “los estudiantes son tratados como participantes activos en el proceso de aprendizaje” (p. 522).

Además, se menciona que la finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. Siguiendo con esta idea, Freudenthal (1968) menciona que “matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma” (p. 7).

Otro aspecto que se menciona en este principio es que la matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, también es una actividad de organización de un tema.

- De realidad.

La característica más importante que se aborda en este principio es que las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales, y por contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos. Para esto, Freudenthal (1991) dice, “yo prefiero aplicar el término “realidad” a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario” (p. 17). En este sentido, Freudenthal también considera como contextos a aquellos que son puramente matemáticos, en cuanto éstos sean significativos para los estudiantes.

Además, Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014) mencionan que en este principio se “expresa la importancia que se atribuye al objetivo de la educación matemática, incluida la capacidad de los estudiantes para aplicar las matemáticas en la resolución de problemas de la vida real” (p. 523). Aunado a ello, los autores agregan que se debe iniciar la educación matemática con situaciones problemas que sean significativos para los estudiantes, con la intención de dar un significado a los conceptos matemáticos que se desarrollan al resolver el problema.

- De reinvención guiada.

Primeramente, en este principio, se entiende como reinvención guiada al proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal. Freudenthal (1991) menciona que “la reinvención guiada significa encontrar un balance entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar” (p. 48).

La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino que reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos al inventarlas). Aquí el docente posee un papel bien definido como el sujeto que media entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego, entre los alumnos entre sí, entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales, ya institucionalizadas de la matemática como disciplina (Bressan, 2010).

- De niveles.

Freudenthal completa entonces el proceso de reinvención con lo que Treffers (1987) llama "matematización progresiva". Los alumnos deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática.

Este proceso de matematización fue profundizado por Treffers (1978, 1987) y retomado por Freudenthal (1991) bajo dos formas:

- La de matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva. En este proceso se traducen los problemas desde el mundo real al matemático.

- La de matematización vertical, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigor (limitando interpretaciones y validez), con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

En este proceso de matematización progresiva, la Educación Matemática Realista admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión. Estos niveles (Freudenthal, 1991) son: situacional, referencial, general y formal, y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada.

En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias es utilizado en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.

En el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.

El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto.

En el nivel formal se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.

La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel (Freudenthal, 1991).

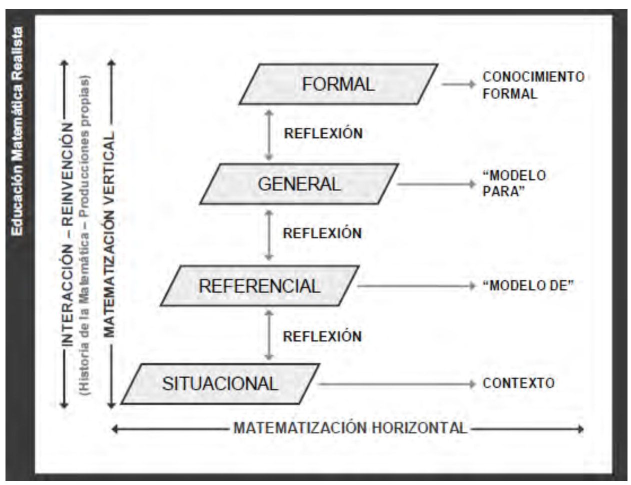


Figura 1. Niveles de matematización. (Bressan, 2010).

Estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Más que describir en forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno, sirven para seguir sus procesos globales de aprendizaje (Bressan, 2010).

- De interacción.

En la Educación Matemática Realista, se considera al aprendizaje de la matemática como una actividad social. La discusión sobre las interpretaciones de la situación problema, de las distintas clases de procedimientos y justificaciones de solución y de la adecuación y eficiencia de estos tiene un lugar central en la EMR. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados (Bressan, 2010).

La interacción entre los estudiantes con sus compañeros y los profesores pueden provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Es por eso, que Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014) mencionan que "la Educación Matemática Realista favorece las discusiones de toda la clase y el trabajo en grupo, ya que ofrece a los estudiantes oportunidades para compartir sus estrategias e invenciones con otros" (p. 523).

- De interconexión.

La Educación Matemática Realista no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo. Freudenthal propicia la interrelación entre ejes tan pronto, tan fuertemente y con tanto tiempo como sea posible (Freudenthal, 1991). Justamente la resolución de situaciones problemáticas realista a menudo exige establecer conexión y reclama la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas.

Freudenthal (1982) (citado en Zolkower, Bressan y Gallego (2004)) menciona que "lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación" (p. 9).

Los bloques de contenidos matemáticos (álgebra, geometría, numérico, cálculo…) no pueden ser tratados como entidades separadas.

En particular, Freudenthal busca desarrollar en los alumnos una actitud matemática, desde edades tempranas (Zolkower, Bressan y Gallego, 2004) incluyendo las siguientes disposiciones o estrategias como base para lograr otras en edades mayores:

- Desarrollar un lenguaje que suba de nivel desde lo ostensible (por ejemplo, señalar, indicar con artículos demostrativos) y lo relativo (específico a un contexto o a una situación determinada) hasta el uso de variables convencionales y lenguaje funcional. Cambiar de perspectiva o punto vista y reconocer cuando un cambio de perspectiva es incorrecto dentro de una situación o problema dado.

- Identificar estructuras matemáticas dentro de un contexto (si es que las hay) y abstenerse de usar la matemática cuando esta no es aplicable. Tratar la propia actividad como materia prima para la reflexión, con miras a alcanzar un nivel más alto.

3.2.2 Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS)

Otra teoría que da sustento a este trabajo es la teoría de las Representaciones Semiótica. En esta teoría, Duval (1993) define las representaciones semióticas como las "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias compulsiones de significado y de funcionamiento" (p. 175). Además, agrega, que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

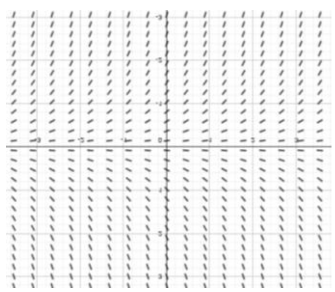
- La **formación** de una representación identificable como una representación de un registro dado, Por ejemplo, el enunciado de una frase (comprensible en una lengua natural dada), la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etcétera. Esta formación debe respetar las reglas propias del registro semiótico en el cual se produce la representación, la función de estas reglas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como la posibilidad de su utilización para los tratamientos.
- El **tratamiento** de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.
- La **conversión** de una representación es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica o viceversa.

A continuación, se presenta un ejemplo de las diferentes representaciones para el caso de una ecuación diferencial y de sus soluciones:

<table>
<tr>
<td>Representación Verbal

Una población de peces, si se les deja aislados, aumenta con rapidez de cambio del 20% al año. Se permite que al año se pesquen 10 millones de peces.</td>
<td>Representación Analítica

$$\frac{dP}{dt} = 0.2P - 10$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Representación Gráfica

</td>
<td>Representación Tabular

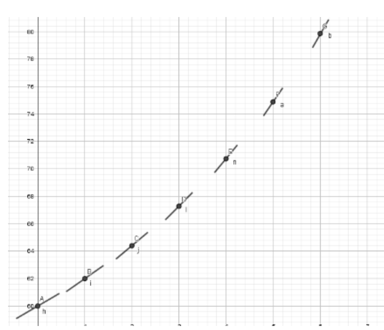
<table>
<tr><td>$\frac{dP}{dt}$</td><td>2</td><td>2.4</td><td>2.88</td><td>3.456</td><td>4.1472</td></tr>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Tabla 1. Representaciones de una Ecuación Diferencial

<table>
<tr>
<td>Representación Verbal

La población de peces con una cantidad inicial de 60 millones crece cada vez más rápido conforme pasa el tiempo.</td>
<td>Representación Analítica

$$P = 10e^{.2t} + 50$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Representación Gráfica

</td>
<td>Representación Tabular

<table>
<tr><td>P</td><td>60</td><td>62</td><td>64.4</td><td>67.28</td><td>70.736</td></tr>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Tabla 2. Representaciones de una solución particular de la ecuación; $\frac{dP}{dt} = 0.2P - 10$

Capítulo 4.

Elementos Metodológicos y diseño de la secuencia de actividades didáctico

4.1 Aspectos Metodológicos

Consideramos a la Educación Matemática Realista y a la Teoría de las Representaciones Semióticas, como las guías fundamentales para el desarrollo de las siguientes etapas: diseño, implementación y análisis.

Etapa 1: Diseño

Para esta etapa, nos apoyamos en el principio de realidad y de actividad de la Educación Matemática Realista, así como también se consideraron los tratamientos y conversiones entre los distintos tipos de representaciones semióticas de la Teoría de las Representaciones Semióticas y el uso de recursos tecnológicos los cuales permiten una exploración dinámica de las conexiones entre los diferentes registros de representación.

Se busca que el diseño cumpla con el principio de reinvención guiada que es fundamental para la EMR, para eso se desarrollan las siguientes fases:

Fase 1: Búsqueda y selección de contextos

Como inicio para el diseño de la secuencia de actividades didácticas, se parte de la búsqueda y la selección de contextos reales y que resulten de interés para los estudiantes. Zolkower et al. (2006) afirman que "los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos" (pp. 11-33), ya que:

- Son puntos de partida en el proceso de enseñanza y aprendizaje para producir matemática y dominios de aplicación de ésta.

- Bien elegidos, resultan de interés para los alumnos. Se constituyen en objetos de trabajo, tornando accesible el contenido matemático, y permiten que los estudiantes trabajen en diferentes niveles de conceptualización en base a sus posibilidades.
- Promueven el uso del sentido común y movilizan los conocimientos informales de los alumnos y la creación de modelos.
- Son abiertos (admiten estrategias variadas y/o varias soluciones) dando lugar a valiosas discusiones matemáticas entre los alumnos.
- Se usan en profundidad.

Freudenthal (1991), señala que “un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado” (p. 73).

Además, Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014) mencionan que “en lugar de comenzar con abstracciones o definiciones que se aplicaran más adelante, en EMR, la enseñanza comienza con problemas en contextos ricos que requieren organización matemática” (p. 523).

Fase 2: Emergencia de modelos

Inmediato a la selección de contextos, se trata de poner en juego la emergencia de modelos, es decir, que el mismo desarrollo de las actividades lleve al estudiante a modelar la situación planteada en un principio. La intención de esta etapa es que los alumnos hagan uso de herramientas conocidas por ellos, que a su vez puedan ayudarles a progresar en las distintas actividades. Referido a ello, Zolkower et al. (2016) afirman que “los modelos en la EMR no solo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones y se visualizan, explican, comparan, contrastan, comprueban relaciones” (p. 4). Además, menciona que los modelos deben satisfacer varias condiciones importantes:

- Estar enraizados en contextos realistas, imaginables.
- Tener suficiente flexibilidad para ser aplicados en un nivel más avanzado o más general. Cambian con el tiempo (en la didáctica tradicional son fijos). Esto implica que el modelo debería apoyar la progresión en la matematización vertical sin

bloquear la posibilidad de volver a las situaciones desde las cuales una estrategia se origina. Es decir, los estudiantes siempre deberían poder volver a niveles más bajos, justamente lo que torna a los modelos muy poderosos.

- Ser viables. Los modelos deberían comportarse en una manera natural, autoevidente. Ellos deberían ajustarse a las estrategias informales de los alumnos, como si los propios alumnos los pudieran haber reinventado, y ser fácilmente adaptables a otras situaciones.

El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal (Freudenthal, 1991, p. 34).

Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014) agregan que “los modelos son importantes para cerrar la brecha entre las matemáticas informales, relacionadas con el contexto y sus matemáticas más formales” (p. 523).

Fase 3: Trabajar con los diferentes tipos de representación semiótica

Gamboa (2007) señala que cuando los estudiantes afrontan un ejercicio que está representado de forma gráfica o tabular, siempre tratan de llevar el problema a una expresión algebraica, lo cual les genera problemas o los hace fracasar, al tratar de obtener la solución de éste. Además, concluye que este problema se da, debido a que los profesores introducen los temas bajo dicho enfoque, sin utilizar otras representaciones para un concepto o distintas técnicas de resolución, y esperan que los estudiantes los comprendan; mientras que estos gastan muchas horas dominando las reglas y aplicándolas para resolver ejercicios.

Precisamente, uno de los focos principales de este proyecto, es abordar la problemática que existe respecto al énfasis que se le ha dado en el proceso de enseñanza y en el de aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales a los métodos algebraicos. Con respecto a ello, Duval (1993) señala que “cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo”.

Fase 4: Promover el uso del software matemático GeoGebra

Es importante considerar, que uno de los recursos que ha renovado la manera de trabajar dentro de los salones de clase, son los recursos tecnológicos, y referido a esto, Gamboa (2007) menciona que introducir la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha cambiado la forma en la que se desarrolla una clase dentro de las aulas, pues a diferencia del enfoque algorítmico que se le ha dado a la enseñanza de esta disciplina, con este recurso, la clase se puede desarrollar ahora en un ambiente de descubrimiento y reflexión.

En particular, en este trabajo se promoverá el uso del software matemático GeoGebra, puesto que este software proporciona un entorno adecuado para el diseño de múltiples modelos representados en su forma gráfica, numérica y algebraica, tal y como lo indican Aktümen y Kabaca (2012). Con relación a ello, Gruszycki, A., Oteiza, Maras, Gruszycki, L. y Ballés (2014) señalan que “GeoGebra permite trabajar con diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático a través de sus distintas vistas” (p. 2169). Además, añaden que el manipular un entorno dinámico como éste, puede ayudar a los estudiantes a ampliar su experiencia permitiendo coordinar diferentes registros de representación.

Fase 5: Trabajo individual y colectivo

Retomando la idea de Freudenthal en la EMR, en la cual se menciona que el aprendizaje de las matemáticas es considerado como una actividad social, Alsina (2009) comenta que es absolutamente necesario que los estudiantes compartan sus ideas y generen discusiones en grupo con el fin de promover la reflexión. Además, añade que “el aprendizaje empieza cuando un grupo de personas con diversas expectativas, experiencias, habilidades y ritmos de aprendizaje entran en contacto” (p. 123). Finaliza mencionando que el interactuar fomenta y desarrolla los procesos cognitivos superiores del aprendizaje.

Prosiguiendo con lo mencionado por Freudenthal, Heuvel-Panhuizen (2002) afirma que “la educación debe ofrecer a los estudiantes la oportunidad de compartir sus estrategias e inventos entre sí” (p. 13). De tal manera, que al escuchar y discutir las diferentes formas en las cuales otros realizan sus actividades, los estudiantes pueden recopilar ideas que les ayuden a mejorar sus estrategias.

Siguiendo con la premisa de la Educación Matematice Realista, en la cual los estudiantes tienen un papel protagónico al reinventar las matemáticas, Heuvel-Panhuizen (2002) menciona que "en lugar de ser los receptores de las matemáticas, son considerados participantes activos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que desarrollan herramientas matemáticas y puntos de vista" (p. 4).

Etapa 2: Implementación

Para esta etapa, de la implementación de la propuesta, se siguen los principios de reinvención guiada y de interacción, que se plantean en la Educación Matemática Realista.

A partir de la elaboración del diseño de la propuesta, se continúa con la puesta en escena, es decir, el llevar al aula de clases la secuencia de actividades didácticas para que los estudiantes la respondan.

Para eso, es importante contar con el apoyo del profesor y que éste tome un papel fundamental en la aplicación de la secuencia. Respecto a esto, Alsina (2009) menciona que para los estudiantes "el profesor es una ayuda, un facilitador del aprendizaje" (p. 2) y agrega que la formación de los estudiantes comienza con las observaciones realizadas por profesores en distintas situaciones en las que él participa dentro del aula.

Zolkower et al. (2006) señalan que los docentes deben fomentar la interacción entre estudiantes de tal manera que eso ayude a generar la participación, el debate genuino y la reflexión de éstos. En adición a ello, añaden que "el docente debe ser capaz de analizar el trabajo oral y escrito de sus alumnos, atendiendo a aquellos momentos clave donde se aprecian discontinuidades en el aprendizaje" (p. 15). De tal forma que pueda utilizar este análisis a su favor, para tratar de organizar discusiones entre los estudiantes que puedan facilitarles el paso hacia niveles cada vez más avanzados de matematización.

Etapa 3: Análisis

Para finalizar, en esta etapa relacionada con el análisis de las respuestas de los estudiantes a la secuencia de actividades didácticas, se utiliza el principio de los niveles de la EMR, así como la valoración del desempeño de los estudiantes mediante la categorización de los distintos niveles de comprensión de la Educación Matemática Realista.

Heuvel-Panhuizen (2002) agrega que "esta característica de considerar niveles en los procesos de aprendizaje brinda coherencia longitudinal a la trayectoria de enseñanza-aprendizaje" (p. 14). A lo que añade que "los estudiantes pueden entender algo a diferentes niveles. En otras palabras, pueden trabajar sobre el mismo problema sin estar en el mismo nivel de comprensión" (p. 14).

4.2 Objetivos generales de la secuencia de actividades didácticas

- Promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones.
- Reforzar el significado físico y geométrico de la noción de derivada.

4.3 Características de la secuencia de actividades didácticas

- La secuencia de actividades didácticas se divide en una secuencia de inicio, secuencia de desarrollo y secuencia de cierre (Diaz-Barriga, 2013).
- Se utiliza como herramienta tecnológica el software matemático GeoGebra.
- Se promueven los seis Principios de la EMR.
- Se promueven los niveles de comprensión del Principio de niveles de la EMR.
- Se promueve el uso de diferentes representaciones semióticas.
- Se trabaja con diferentes contextos.

4.4 Descripción de la secuencia de actividades didácticas

En esta sección se presenta la descripción de la propuesta de secuencia de actividades didácticas que ha sido desarrollada bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista y la Teoría de Representaciones Semióticas. Esta secuencia de actividades se divide en una secuencia de inicio, una de desarrollo y una de cierre, las cuales tienen la intención de promover la construcción por el estudiante de la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones.

La secuencia de inicio consta de siete actividades, las cuales tienen el propósito de reforzar la noción de derivada debido a la importante relación que ésta tiene con las ecuaciones diferenciales ordinarias, están enfocadas, principalmente en analizar la noción de derivada, desde un punto de vista geométrico, numérico y físico, es decir, como la pendiente de la recta tangente y como la rapidez de cambio instantánea. Teniendo como referente a la Educación Matemática Realista el orden de las actividades propuestas siguen el principio de los niveles de comprensión, por lo que en las actividades 1 y 2, se trabaja en el nivel situacional, en el cual se habla de un contexto sin profundizar en lo matemático, en las actividades 3 y 4, se promueve el trabajar en el nivel referencial, en el cual se busca que a partir de situaciones planteadas el estudiante pueda extraer la matemática y trabajar con ella, en las actividades 5, 6 y 7, entra en juego el nivel general, a partir de lo hecho en las actividades anteriores, se busca que el estudiante reflexione lo realizado y pueda trabajar con casos donde se fomenta la generalización de la matemática, por último, el nivel formal no está involucrado directamente con nuestras actividades, aunque si se promueve de manera indirecta ya que al finalizar las últimas actividades se pide a los estudiantes que describan aquellas relaciones encontradas entre las funciones y su derivada, lo cual podría llevar al estudiante a realizar conjeturas que se aproximen a los términos formales de la matemática.

A continuación, se presenta la descripción de cada una de las actividades de la secuencia de actividades didácticas, comenzando con la secuencia de inicio.

Actividad 1 **"Las matemáticas en la vida diaria"**

Se comienza la secuencia de inicio con esta actividad, en la cual se plantean cinco diferentes situaciones de variación en su representación verbal y cinco diferentes representaciones gráficas, con la intención de que se relacione cada una de las situaciones verbales con la gráfica que crean que le corresponda. A partir de ello, se pide que se realice una descripción del proceso que se utilizó para realizar esas conversiones. Además, se pide que se bosqueje en cada representación gráfica el comportamiento futuro que tendría cada una de las situaciones planteadas y que describan dicho comportamiento verbalmente.

- Objetivos
    - Identificar las magnitudes variables que están involucradas en cada situación planteada.
    - Identificar a partir de la representación verbal la representación gráfica que le corresponde.
    - Realizar conjeturas sobre el comportamiento futuro de la situación de variación.
    - Promover la noción de derivada como rapidez de cambio instantánea.
- Niveles de comprensión de la EMR que se promueven
    - Situacional.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación verbal ↔ Representación gráfica.

Actividad 2 **"La temperatura de un vaso con agua"**

Esta actividad, inicia con la presentación de siete diferentes representaciones gráficas las cuales se pide que las relacione con la variación de la temperatura de un vaso con agua, se pide que se realice una descripción para cada gráfica sobre el comportamiento de la temperatura en el transcurso del tiempo.

- Objetivos
    - Analizar los tipos básicos de variación representados gráficamente.
    - Describir cada una de las representaciones gráficas en el contexto planteado.
    - Interpretar el significado físico de la noción de derivada en el contexto planteado.
    - Asociar los distintos comportamientos que tienen las gráficas con la noción de derivada.
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Situacional.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación gráfica ↔ Representación verbal.

Actividad 3 **"La fiebre"**

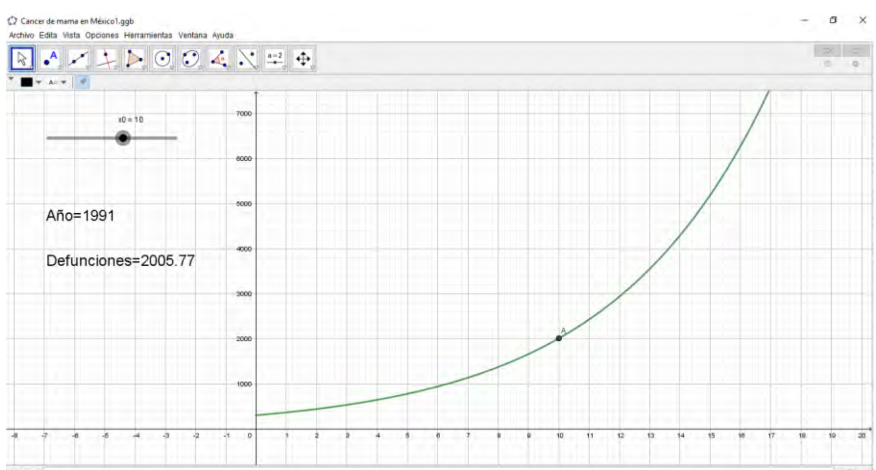
En esta actividad, se presenta una pequeña introducción sobre la fiebre y a partir de ello se presenta la representación gráfica de un caso de fiebre en un paciente en la cual se muestra la variación de la temperatura que éste tiene durante un día, con la información proporcionada se pide que se haga una descripción del comportamiento de la temperatura del paciente y que llene una tabla de valores para la cual hay que contestar una serie de preguntas relacionadas con la rapidez de cambio promedio de la temperatura en diferentes intervalos de tiempo, y se pide también que represente en la gráfica esta rapidez de cambio promedio.

- Objetivos
  - Identificar a partir de la gráfica los diferentes comportamientos de la temperatura.
  - Relacionar la rapidez de cambio promedio de la temperatura en diferentes intervalos de tiempo con la pendiente de la recta secante.
  - Relacionar la derivada en un punto con la rapidez de cambio instantánea y con la pendiente de la recta tangente.
- Niveles de comprensión que se promueven
  - Situacional.
  - Referencial.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
  - Representación Gráfica ↔ Representación Verbal.
  - Representación Gráfica ↔ Representación Tabular.
  - Representación Tabular → Representación Verbal.

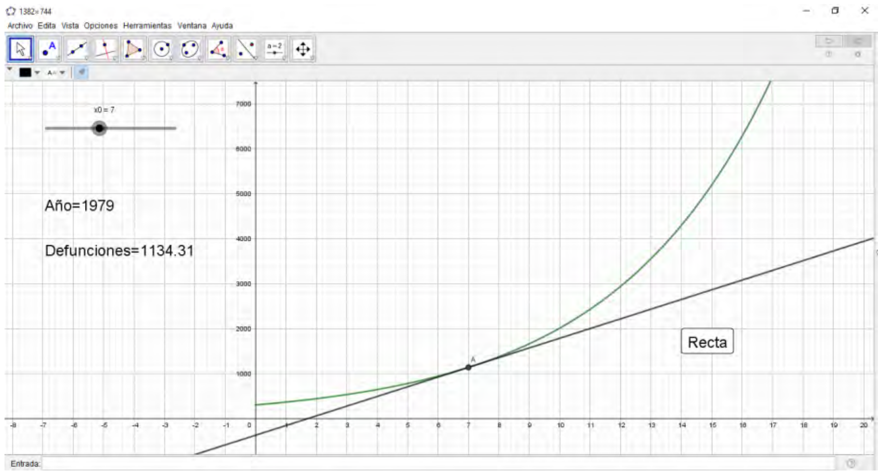
Actividad 4 **“El cáncer de mama en México”**

En esta actividad se presenta una gráfica de las defunciones por cáncer de mama con el paso del tiempo, para la cual se pide describir su comportamiento. Con la ayuda del software matemático GeoGebra, se puede ver la gráfica idealizada planteada en un principio, y con ella se le pide que llene un par de tablas y que a su vez conteste una serie de preguntas asociada a estas representaciones tabulares. Con los applets diseñados en GeoGebra se explora la noción de derivada en un punto en su representación gráfica, es decir, como la pendiente de la recta tangente

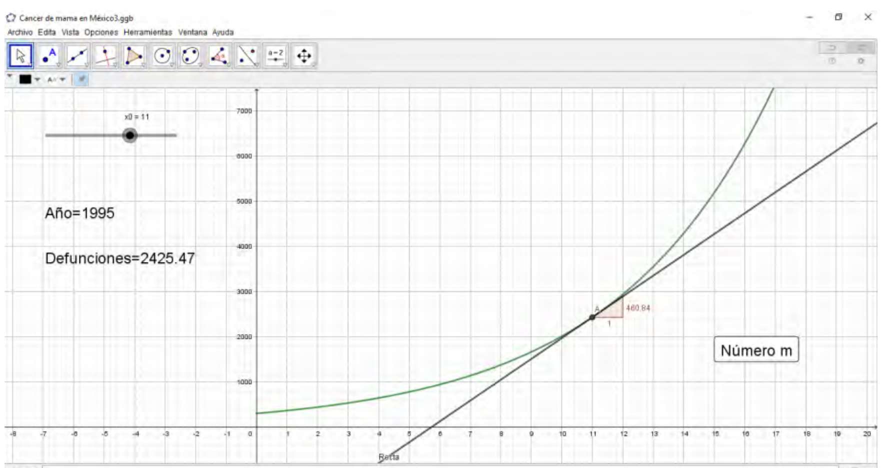
- Objetivos
  - Describir la situación planteada en el modelo gráfico.
  - Analizar las exploraciones con el software e identificar a la derivada en un punto como la rapidez de cambio instantánea y como la pendiente de la recta tangente en ese punto.
  - Describir detalladamente las exploraciones realizadas en la representación gráfica tratando de que utilice términos que estén relacionados con la derivada.
- Niveles de comprensión que se promueven
  - Situacional.
  - Referencial.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
  - Representación Gráfica ↔ Representación Verbal.
  - Representación Gráfica → Representación Tabular.
  - Representación Tabular → Representación Verbal.
- Applets de GeoGebra
  - Cáncer de mama en México1.ggb, el propósito de este applet es visualizar el cambio en las defunciones por cáncer de mama cada cuatro años. En este applet se pide al estudiante que realice una representación tabular con la información que proporciona la representación gráfica.



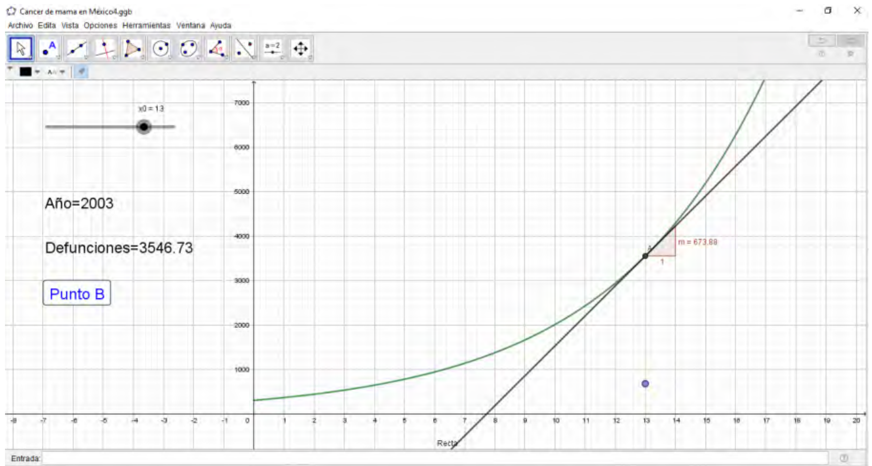
  - Cáncer de mama en México2.ggb, el propósito de este applet es identificar la recta tangente en cada punto de la gráfica. En este applet el estudiante habilita el botón de recta, donde a partir de ello puede visualizar como aparece la recta tangente para cada punto.



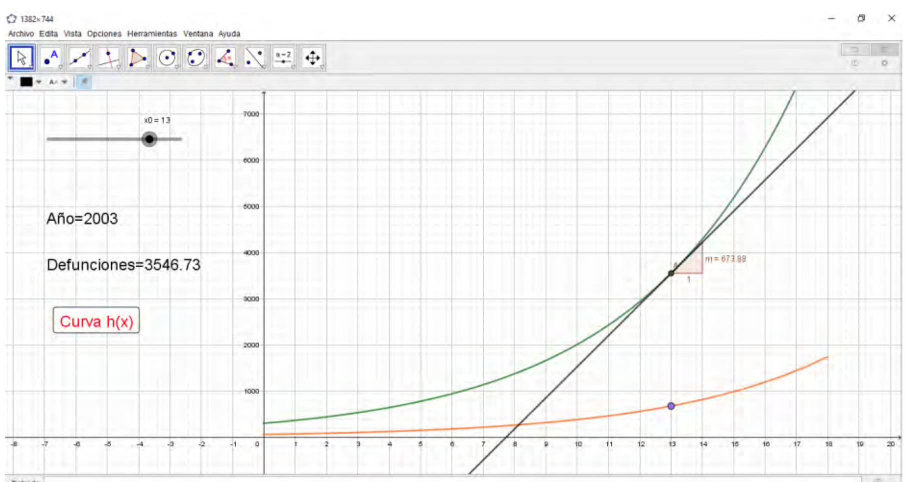
- Cáncer de mama en México3.ggb, el propósito de este applet es percibir la pendiente de la recta tangente como la rapidez de cambio que hay en las defunciones por cada cuatro años. En este applet aparece la opción de número m, el cual está asociado con el valor numérico de la pendiente de la recta tangente para cada punto de la gráfica.



- Cáncer de mama en México4.ggb, el propósito de este applet es identificar que cada uno de los puntos B resulta de asociar el año con el valor correspondiente a la pendiente de la recta tangente. En este applet se le pide al estudiante que pulse el botón de punto B, con el cual aparece un punto que resulta de asociar el año con la pendiente de la recta tangente para cada punto.



- Cáncer de mama en México5.ggb, por último, el propósito de este applet es identificar que la función $h(x)$ trazada, corresponde a la pendiente de la recta tangente, es decir, al cambio que hay en las defunciones de cáncer de mama cada cuatro años, en otras palabras, que es la función derivada.

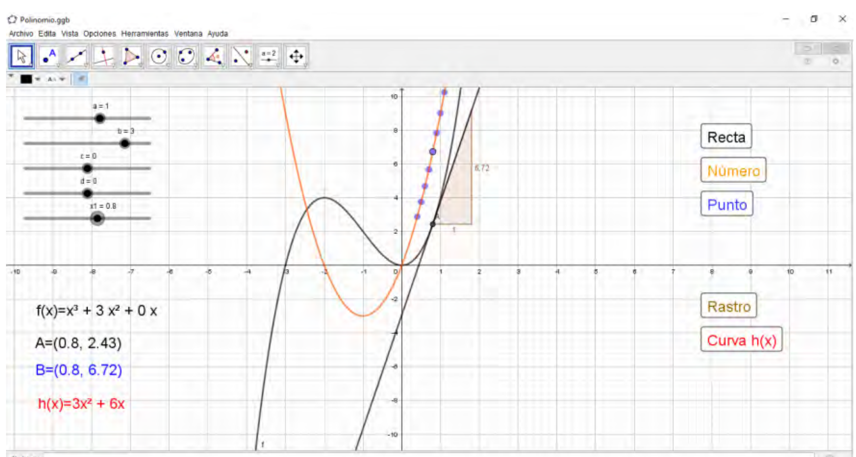


Actividad 5 **"Los polinomios"**

Esta actividad se desarrolla con el apoyo del applet de GeoGebra polinomios.ggb, se trabaja en el software con polinomios de hasta tercer grado. Traza las gráficas de éstos, así como también la gráfica de sus derivadas.

- Objetivos
  - Analizar con detalle la representación gráfica de las funciones polinómicas.

    - Visualizar a la derivada en un punto como la rapidez de cambio instantánea y como la pendiente de la recta tangente.
    - Visualizar e identificar las relaciones entre la función y su derivada a partir de sus representaciones gráficas.
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Situacional.
    - Referencial.
    - General.
    - Formal.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Gráfica → Representación Verbal.
    - Representación Gráfica → Representación Algebraica.
- Applets de GeoGebra
    - Polinomios.ggb, los propósitos de este applet son construir gráficamente la derivada de diferentes funciones polinómicas. Analizar las diferentes relaciones existentes entre una función y su derivada.



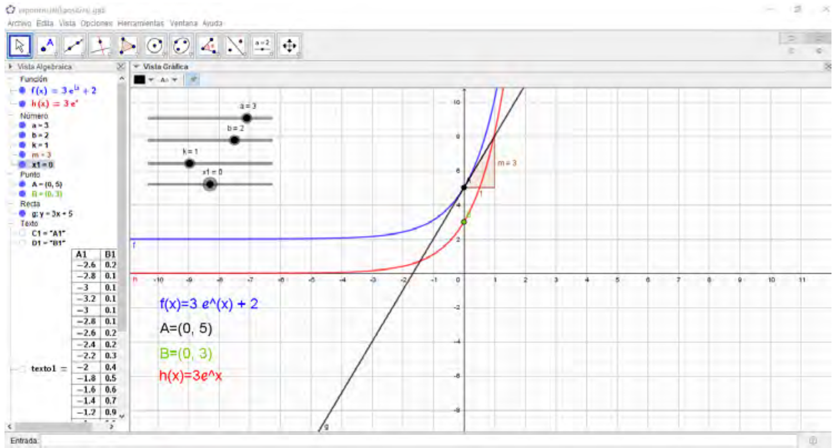
Actividad 6 **“La exponencial”**

En esta actividad al igual que en la actividad anterior, se trabaja con el apoyo de applets de GeoGebra, en este caso específicamente orientado a la función exponencial $f(x) = ae^x + b$, se comienza con la construcción de la derivada de la función exponencial en su representación gráfica, trabajando primeramente el caso $f(x) = ae^x$, donde se puede visualizar que su derivada es igual a la misma función. Después, con la ayuda de dos applets distintos, se trabaja con $f(x) = ae^{kx}$ y $f(x) = ae^{-kx}$.

- Objetivos
    - Analizar con detalle la gráfica de las funciones exponenciales $f(x) = ae^{x} + b$, $f(x) = ae^{kx}$ y $f(x) = ae^{-kx}$.
    - Visualizar a la derivada como la rapidez de cambio instantánea y como la pendiente de la recta tangente.
    - Analizar el comportamiento de la función exponencial de la forma $f(x) = ae^{x} + b$, $f(x) = ae^{kx}$ y $f(x) = ae^{-kx}$, así como su derivada.
    - Visualizar tanto en la representación gráfica como numéricamente que la derivada de la función exponencial es igual a la misma función en el caso $f(x) = ae^{x}$ y que la derivada de la función exponencial $f(x) = e^{kx}$ es proporcional a la misma función.
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Situacional.
    - Referencial.
    - General.
    - Formal.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Gráfica → Representación Verbal.
    - Representación Gráfica → Representación Algebraica.
- Applets de GeoGebra
    - exponencial.ggb, el propósito de este applet es identificar que la derivada de la función exponencial $f(x) = ae^{x}$, es igual a la misma función.

- exponencial(knegativa).ggb, el propósito de este applet es visualizar que la derivada $f(x) = ae^{-kx}$ es proporcional a la misma función y se analizan las características de sus gráficas.

- exponencial(kpositiva).ggb, el propósito de este applet es visualizar que la derivada $f(x) = ae^{kx}$ es proporcional a la misma función y se analizan las características de sus gráficas.



Actividad 7 **"¿Qué características tiene la función?"**

En esta actividad, se muestran diferentes gráficas que representan a la función derivada y la intención es encontrar mediante una serie de cuestionamientos, una posible gráfica de una función cuya derivada coincida con la representación gráfica propuesta.

- Objetivos
  - Analizar e identificar las características de la gráfica de la función derivada.
  - Identificar las diferentes relaciones que existen entre una función y su derivada gráficamente.
  - Representar gráficamente una posible función cuya derivada tenga las características anteriormente identificadas.
- Niveles de comprensión que se promueven
  - Referencial.
  - General.
  - Formal.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
  - Representación Gráfica ↔ Representación Algebraica.

Después de esta secuencia, se recomienda trabajar con la secuencia de desarrollo, la cual pretende introducir a los estudiantes a las ecuaciones diferenciales ordinarias y también a las soluciones de ellas, a partir de sus diferentes representaciones semióticas. Con el trabajo realizado en las actividades de inicio, se pretende que esta introducción al estudio de las

EDO y sus soluciones sea de una forma natural. Al trabajar con esta secuencia se pretende que el estudiante adquiera nuevas habilidades que le permitan no solo plantear y encontrar la solución de las ecuaciones, sino que además puedan ayudarle a comprender los diferentes fenómenos de variación que le son planteados.

Actividad 1 **"Comportamientos asociados a la derivada en la vida diaria"**

En esta actividad, se presentan situaciones de variación de la vida diaria representadas verbalmente utilizando diferentes términos asociados a la derivada, se busca que el estudiante asocie cada una de estas situaciones a las gráficas que se presentan y que argumente cual fue el procedimiento que utilizó para relacionar cada situación con la gráfica.

- Objetivos
    - Asociar situaciones de variación representadas verbalmente con sus respectivas representaciones gráficas.
    - Describir el comportamiento que tiene cada una de las situaciones planteadas.
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Situacional.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Verbal ↔ Representación Gráfica.

Actividad 2 **"Planteamiento de una ecuación diferencial"**

Para esta actividad, se plantean diferentes situaciones de variación en su representación verbal con la intención de que construya la representación analítica de cada una de ellas, a partir de una serie de cuestionamientos.

- Objetivos
    - Plantear ecuaciones diferenciales en su representación algebraica a partir de su representación verbal.
    - Trabajar con diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.
    - Describir el comportamiento de la derivada.
    - Bosquejar una posible solución para cada una de las Ecuaciones planteadas.

    - Realizar una descripción de los diferentes fenómenos planteados.
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Situacional.
    - Referencial.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Verbal ↔ Representación Algebraica.
    - Representación Algebraica → Representación Gráfica.
    - Representación Gráfica → Representación Verbal.

Actividad 3 **"Orden de una ecuación"**

En esta actividad, se presenta la representación analítica de una ecuación diferencial, con la intención de que identifique que esta situación que se presenta corresponde a una ecuación diferencial de orden 2, y que observe la diferencia entre este caso y los trabajados en la Actividad anterior.

- Objetivos
    - Identificar el orden de una ecuación diferencial.
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Referencial.
    - General.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Verbal ↔ Representación Algebraica.

Actividad 4 **"Solución numérica de la ecuación diferencial"**

En esta actividad la información inicial se presenta a través de una descripción verbal de la situación a analizar, la cual corresponde al comportamiento de una población de peces, de la cual se pide la representación analítica, una vez obtenida la ecuación diferencial se plantean tres diferentes condiciones iniciales y a partir de ello se llena una tabla cuya intención es hacer ver que, para diferentes cantidades iniciales de población de peces, la cantidad varía de forma diferente en el transcurso del tiempo.

- Objetivos

    - Analizar el hecho de que, para diferentes cantidades iniciales de la magnitud variable, ésta tiene un comportamiento diferente.
    - Calcular la solución numérica de una ecuación diferencial.
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Situacional.
    - Referencial.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Verbal ↔ Representación Algebraica.
    - Representación Algebraica → Representación Tabular.
    - Representación Tabular → Representación Verbal.

Actividad 5 **"Solución general de una ecuación diferencial"**

En esta actividad, se presenta la representación analítica de una ecuación diferencial y se pide que se proponga una solución de ésta y que la verifique, una vez hecho ésto, se pide que represente gráficamente diferentes soluciones.

- Objetivos
    - Obtener la solución general de una ecuación diferencial.
    - Identificar que una ecuación diferencial tiene no solo con una solución, sino, con una familia de ellas.
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Referencial.
    - General.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Algebraica → Representación Gráfica.

Actividad 6 **"Solución particular de una ecuación diferencial"**

Se inicia la Actividad trabajando con la ecuación diferencial de la actividad anterior, pero en esta Actividad se proponen diferentes condiciones iniciales, por lo que la solución de la ecuación diferencial se reduce a una única solución.

- Objetivos
    - Obtener la solución particular de la ecuación diferencial.

- Distinguir entre una solución general y una solución particular.

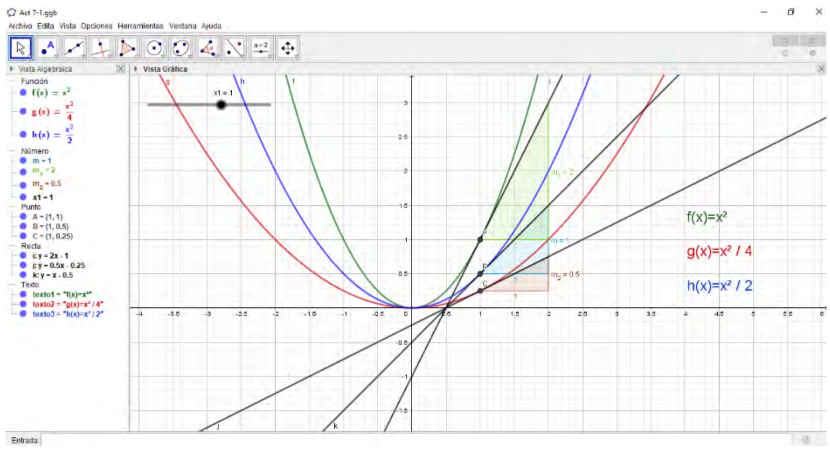
- Niveles de comprensión que se promueven
  - Referencial.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
  - Representación Verbal → Representación Algebraica.

Actividad 7 **"Campos de pendientes"**

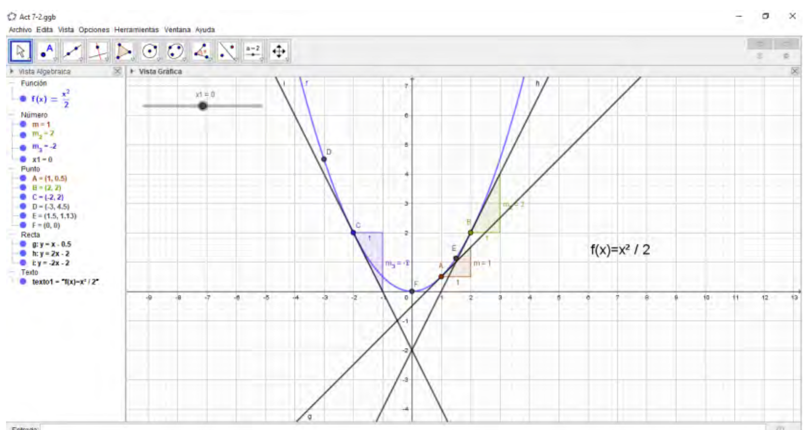
La Actividad inicia con la representación analítica de una ecuación diferencial del tipo $\frac{dy}{dx} = y$ junto con una serie de preguntas e instrucciones para que construya el campo de pendientes para una parte del plano cartesiano, dejando así para la parte final la representación gráfica del campo de pendientes para esta ecuación diferencial. Además, se plantea el caso para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$, para este caso se hace uso del software GeoGebra, con el cual se hace una construcción del campo de pendientes. Se plantea la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, para la cual se pide realizar la construcción del campo de pendientes, así como de otros casos para los cuales solo se tiene la representación analítica y una representación gráfica, esperando que identifique cual campo de pendientes le corresponde a cada ecuación diferencial.

- Objetivos
  - Elaborar el campo de pendientes para diferentes ecuaciones que se plantean.
  - Identificar que a partir de estos campos de pendientes se puede tener el espectro de lo que será la familia de soluciones de la ecuación diferencial.
  - Identificar el campo de pendientes para diferentes ecuaciones diferenciales.
- Niveles de comprensión que se promueven
  - Referencial.
  - General.
- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
  - Representación Algebraica ↔ Representación Gráfica.
  - Representación Algebraica → Representación Verbal.
  - Representación Gráfica → Representación Verbal.
- Applets de GeoGebra

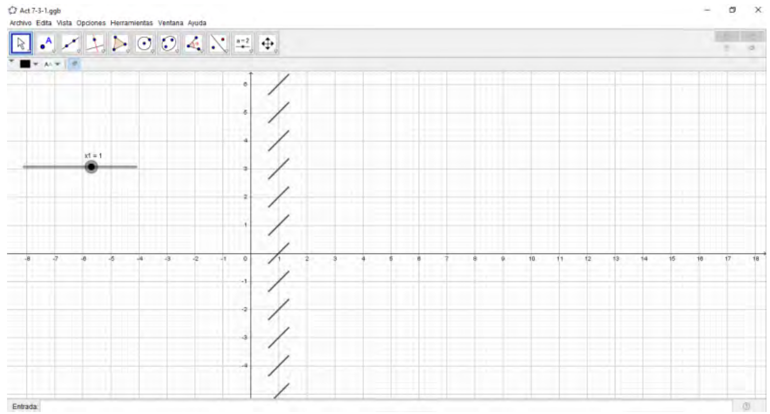
- Act7-1.ggb, el propósito de este applet es identificar la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$.



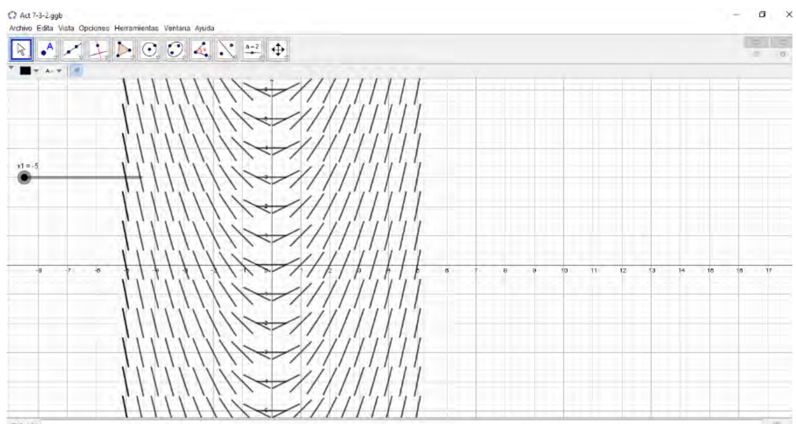
- Act7-2.ggb, el propósito de este applet es identificar que una ecuación diferencial tiene una infinidad de soluciones.



- Act7-3-1.ggb, el propósito de este applet es construir puntualmente el campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$.



- Act7-3-2.ggb, el propósito de este applet es visualizar el espectro de las curvas solución de la ecuación diferencial.



Actividad 8 **"Identificación de campos de pendiente"**

En esta actividad, se presentan diferentes representaciones analíticas de ecuaciones diferenciales, así como representaciones gráficas del campo de pendientes, con la intención de que pueda asociar cada una de las ecuaciones con su respectivo campo de pendientes.

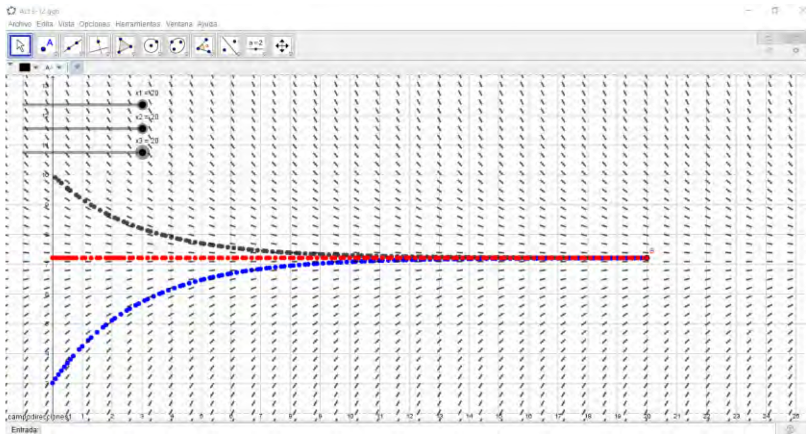
- Objetivos
  - Asociar una representación analítica de una ecuación diferencial con su respectivo campo de pendientes.
  - Argumentar las razones para asociar cada ecuación diferencial con su respectivo campo de pendientes.
- Niveles de comprensión que se promueven
  - Referencial.
  - General.

- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Algebraica → Representación Gráfica.
    - Representación Gráfica ↔ Representación Verbal.

Actividad 9 **“Existencia y unicidad de soluciones”**

En esta Actividad, se trabaja con el contexto de la población de peces analizada en la Actividad 5 y se presenta su campo de pendientes, a partir de ello se pide contestar una serie de preguntas. Además, se presenta la representación verbal de una nueva situación de relacionada con la variación de morfina en el cuerpo, para la cual se pide representar la ecuación diferencial que describe y que a partir de ésta y de su campo de pendientes generado con el software GeoGebra, se realice un análisis con diferentes condiciones iniciales.

- Objetivos
    - Visualizar y distinguir los diferentes comportamientos que pueden tener las soluciones de una ecuación diferencial.
    - Identificar la solución de equilibrio de la ecuación diferencial.
    - Identificar cuando la solución de equilibrio de la ecuación diferencial es estable (soluciones se acercan al equilibrio) o inestable (soluciones se alejan del equilibrio).
- Niveles de comprensión que se promueven
    - Referencial.
    - General.
    - Formal.
- Representaciones
    - Representación Algebraica ↔ Representación Gráfica.
    - Representación Gráfica → Representación Verbal.
    - Representación Algebraica ↔ Representación Verbal.
- Applet de GeoGebra
    - Act9-12.ggb, el propósito de este applet es identificar el comportamiento que tiene la cantidad de morfina en el organismo para diferentes condiciones iniciales.



La secuencia de cierre consta de una Actividad en la cual decidimos trabajar con la ecuación diferencial logística ya que ésta nos permite explorar de nuevo muchas de las nociones analizadas tanto en la secuencia de inicio como en la de desarrollo, por lo que consideramos que esta ecuación diferencial es muy "rica" matemáticamente hablando.

Actividad 1 **"Ecuación Diferencial logística"**

En esta actividad se trabaja con una ecuación diferencial logística, se plantea una situación de variación relacionada con una población en un espacio confinado.

- Objetivos
  - Plantear la representación algebraica de la ecuación diferencial.
  - Realizar la construcción del campo de pendientes.
  - Identificar la solución de equilibrio.
  - Analizar el campo de pendientes para diferentes condiciones iniciales.
  - Identificar las diferentes relaciones que se tienen entre una función y su derivada.
- Niveles de comprensión que se promueven
  - Situacional.
  - Referencial.
  - General.
  - Formal.

- Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven
    - Representación Verbal ↔ Representación Algebraica.
    - Representación Verbal → Representación Gráfica.
    - Representación Algebraica → Representación Gráfica.

Capítulo 5.

Resultados de la puesta en escena

5.1. Aspectos Generales

La secuencia de actividades didácticas se implementó en el Instituto Tecnológico de Hermosillo, se trabajó con 35 estudiantes del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Mecánica, para trabajar con la secuencia se formaron equipos de 3 estudiantes. Las sesiones en las que se realizó la puesta en escena tuvieron una duración de 2 horas y 3 sesiones por semana, por lo que las Actividades se implementaron durante 3 semanas.

En cuanto a la implementación de cada una de las secuencias; la secuencia de inicio se implementó en aproximadamente 5 horas, la secuencia de desarrollo su implementación se llevó a cabo en alrededor de 7 horas y por último la de cierre se dejó como tarea.

La puesta en escena se vio afectada por diversos factores que no permitieron tener un desempeño satisfactorio de todos los equipos de trabajo. Uno de esos factores fue la inasistencia en algunas clases de algunos estudiantes, lo que hizo que al final se descartaran estos equipos ya que no completaron la secuencia. Otro factor, fue que, para la puesta en escena de la secuencia de cierre, la cual se llevaría a cabo durante la última semana de clases del semestre, el investigador no pudo estar presente, por lo que se dejó de tarea, y eso derivó en que no todos los equipos realizaran la Actividad o que la dejaran incompleta, lo cual hizo que se descartaran más equipos.

Debido a estos factores, solo fueron alrededor de 6 equipos los que completaron la secuencia de actividades didácticas. Para el análisis de las respuestas de los estudiantes se decidió considerar las respuestas de tres de estos equipos debido a que estos tres equipos completaron la secuencia de actividades didácticas y a las características de sus respuestas, para identificarlos más adelante en el análisis de la secuencia los nombramos Equipo 1, Equipo 2 y Equipo 3.

Para la recopilación de la información de las respuestas que dieron los estudiantes a la secuencia de actividades didácticas se les pidió imprimir las hojas de trabajo que contenían cada una de las Actividades. Una vez concluidas las actividades que se trabajaban durante las sesiones, se les pidió que las entregaran.

5.2. Descripción y categorización de los Niveles de comprensión de la EMR

A continuación, se presenta la descripción y categorización de los niveles de comprensión de la EMR que implementamos, con el propósito de realizar el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a la secuencia de actividades didácticas.

Primeramente, se elaboró la siguiente tabla (Tabla 3) con la descripción de cada uno de los niveles de comprensión de la EMR.

Nivel	Descripción
Situacional	Para lograr este nivel, el estudiante comprende el contexto que se le plantea de forma general, de tal manera que puede extraer de éste información que le sea útil. A partir de ello, el estudiante puede proporcionar respuestas a distintas cuestiones que le son planteadas en diferentes tipos de representación (lengua natural, gráfica, tabular o analítica) haciendo uso de la matemática de manera cualitativa. Es importante que en sus argumentaciones el estudiante sea preciso con el lenguaje matemático que utiliza.
Referencial	Situamos en este nivel a aquel estudiante que además de comprender el contexto que le es planteado de manera particular, utiliza estrategias para la resolución del problema, las cuales están apoyadas en el uso de las distintas representaciones (lengua natural, gráfica, tabular o analítica), ya sea trabajando en un tipo en particular (tratamiento) o moviéndose entre ellas (conversión). En este nivel, los contextos planteados poseen datos específicos, por lo cual las estrategias utilizadas por el estudiante para la resolución del problema tendrán que estar orientadas al trabajo de la matemática en forma cualitativa y cuantitativa.
General	Para este nivel, el estudiante es capaz de identificar aquellos elementos trabajados en los niveles anteriores y de someterlos a un análisis que requiere de un mayor grado de complejidad. Aquí ya no trabaja con casos particulares, sino que se plantea un caso general que a su vez da respuesta a aquellos casos construidos en el nivel anterior. El trabajo matemático es más preciso, requiere el uso del lenguaje matemático de manera general.
Formal	En este nivel, el estudiante es capaz de plantear en términos puramente matemáticos: definiciones, proposiciones y demás aspectos de la matemática formal.

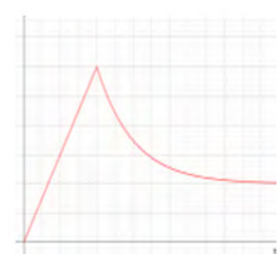
Tabla 3. Descripción del Principio de niveles de la EMR

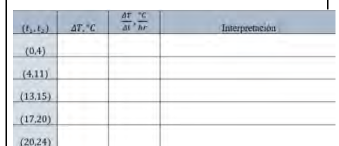
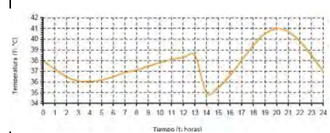
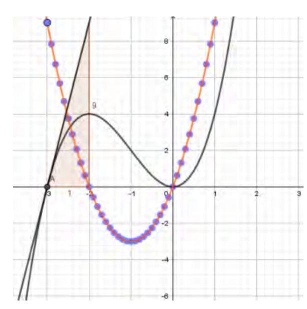
Apoyados en la Tabla 3, se desarrolla la siguiente tabla (Tabla 4) con el propósito de describir los niveles de comprensión de la EMR aplicados a la noción de derivada.

Para la valoración de los niveles de comprensión de la EMR alcanzados por los estudiantes se consideraron las categorizaciones: bajo, medio y alto, las cuales se describen en la cuarta columna de la tabla.

En la última columna, se presentan los diferentes tipos de representación semiótica que se promueven en la secuencia para cada uno de los niveles.

<table>
<tr><th>Notación</th><th>Nivel</th><th>Descripción</th><th>Valoración</th><th>Representaciones Semióticas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">NS</td><td rowspan="3">Situacional</td><td rowspan="3">El estudiante puede identificar que en los contextos están involucradas magnitudes variables que están relacionadas entre sí (magnitud variable dependiente con respecto a la magnitud variable independiente) y a partir de ello, el estudiante responde los diferentes cuestionamientos relacionados a los distintos tipos de cambio (crecimiento cada vez más rápido, cada vez más lento y constante, decrecimiento cada vez más rápido, cada vez más lento y constante), abordados desde diferentes tipos de representación semiótica, realizando descripciones asociadas al contexto y utilizando en ellas términos matemáticos asociados a la derivada de manera cualitativa.</td><td>NS bajo: El estudiante presentó problemas en la identificación de las magnitudes variables y no asoció su descripción con los diferentes tipos de cambio.</td><td>Lengua natural:

La temperatura de un lingote de metal colocado en un horno y a continuación sacado de él.</td></tr>
<tr><td>NS medio: El estudiante entiende el contexto, puede identificar las magnitudes variables involucradas en éste, pero no puede asociarlas con los diferentes tipos de cambio.</td><td rowspan="2">Gráfica:
</td></tr>
<tr><td>NS alto: El estudiante entiende el contexto, puede identificar las magnitudes variables involucradas en éste y a partir de ello, puede describir de manera adecuada los diferentes tipos de cambio.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="3">NR</td>
<td rowspan="3">Referencial</td>
<td rowspan="3">El estudiante a partir de una situación particular comúnmente planteada en la lengua natural, en la cual identifica las magnitudes variables involucradas y cómo están cambiando; relaciona la rapidez de cambio instantánea de la función con la derivada</td>
<td>NR bajo: El estudiante no puede realizar la conversión entre representaciones semióticas de una situación específica.</td>
<td>Analítica:
$$f(x) = 3x^3 + 2x^2$$</td>
</tr>
<tr>
<td>NR medio: El estudiante realiza la conversión entre representaciones semióticas, pero presenta problemas al identificar a la derivada como la rapidez de cambio instantánea.</td>
<td>Tabular:

<table>
<tr><th>(t_1, t_2)</th><th>$\Delta T, °C$</th><th>$\frac{\Delta T}{\Delta t}, \frac{°C}{hr}$</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>(0,4)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(4,11)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(13,15)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(17,20)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(20,24)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>NR alto: El estudiante realiza las conversiones entre representaciones semióticas e identifica a la derivada como la rapidez de cambio instantánea.</td>
<td>Gráfica:

</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">NG</td>
<td rowspan="3">General</td>
<td rowspan="3">A partir de la exploración de las actividades en un contexto particular en el nivel referencial y de la reflexión realizada en ellas, el estudiante es capaz de realizar conversiones entre los diferentes tipos de representación entre una función y su derivada, para casos generales.</td>
<td>NG bajo: El estudiante presenta problemas al realizar las conversiones entre distintas representaciones semióticas, de una función y su derivada.</td>
<td>Analítica:
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$</td>
</tr>
<tr>
<td>NG medio: El estudiante realiza las conversiones entre diferentes representaciones semióticas, pero el lenguaje utilizado no es el adecuado.</td>
<td rowspan="2">Gráfica:
</td>
</tr>
<tr>
<td>NG alto: El estudiante realiza las conversiones entre diferentes representaciones semióticas y el lenguaje utilizado es el adecuado.</td>
</tr>
</table>

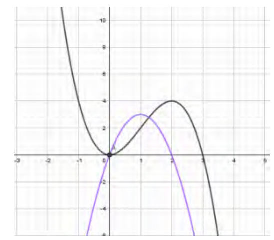
NF	Formal	Aunque en las actividades no se promueve explícitamente este nivel, el estudiante puede llegar a desarrollarlo con algunas de las preguntas asociadas, en las cuales se le pide realizar conjeturas entre la relación que hay entre una función y su derivada. Además, se le pide que realice una serie de argumentaciones que están encaminadas a que describa, quizás no con la formalidad del uso del lenguaje matemático formal, pero si con precisión en sus palabras, sobre las matemáticas que ha aprendido.	NF bajo: El estudiante no logro identificar las relaciones entre una función y su derivada	Lengua natural: Si la función tiene un valor extremo (máximo o un mínimo local) entonces la derivada es cero en ese punto.
			NF medio: El estudiante identifica las relaciones entre una función y su derivada, pero el lenguaje utilizado no es el adecuado.	Analítica: $Si\ f'(a) = 0$ $\Rightarrow f(a)\ es\ un\ extremo$
			NF alto: El estudiante identifica las relaciones entre una función y su derivada y utiliza el lenguaje adecuado.	Gráfica: 

Tabla 4. Criterios de valoración de los niveles de comprensión de la EMR para la noción de derivada.

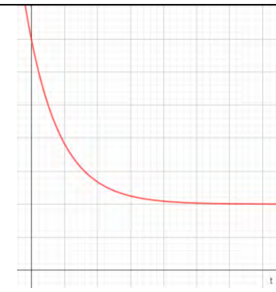
Apoyados en la Tabla 3, se desarrolla la siguiente tabla (Tabla 5) con el propósito de describir los niveles de comprensión de la EMR aplicados a la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones.

Para la valoración de los niveles de comprensión de la EMR alcanzados por los estudiantes se consideraron las categorizaciones; bajo, medio y alto, las cuales se describen en la cuarta columna de la tabla.

En la última columna, se presentan los diferentes tipos de representación semiótica que se promueven en la secuencia para cada uno de los niveles.

Notación	Nivel	Descripción	Valoración	Representaciones Semióticas
NS	Situacional	El estudiante puede identificar que en los contextos, están involucradas magnitudes variables que están relacionadas entre sí (magnitud variable dependiente con respecto a la magnitud variable independiente) y a partir de ello, el estudiante responde los diferentes cuestionamientos relacionados a los distintos tipos de cambio (crecimiento cada vez más rápido, cada vez	NS bajo: El estudiante presentó problemas en la identificación de las magnitudes variables y no asoció su descripción con los diferentes tipos de cambio.	Lengua natural: La rapidez con la que se descalcifica un hueso es cada vez más lenta.
			NS medio: El estudiante entiende el contexto, puede identificar las magnitudes variables involucradas en éste,	Gráfica:

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>más lento y constante, decrecimiento cada vez más rápido, cada vez más lento y constante), abordados desde diferentes tipos de representación, realizando descripciones asociadas al contexto y utilizando en ellas términos matemáticos asociados a la derivada de manera cualitativa.</td>
<td>pero no puede asociarlas con los diferentes tipos de cambio.

NS alto: El estudiante entiende el contexto, puede identificar las magnitudes variables involucradas en éste y a partir de ello, puede describir de manera adecuada los diferentes tipos de cambio.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>NR</td>
<td>Referencial</td>
<td>El estudiante a partir de una situación particular comúnmente planteada en la lengua natural, en la cual identifica las magnitudes variables involucradas y cómo están cambiando; relaciona la rapidez de cambio de la función con la derivada y puede plantear una ecuación diferencial (representación algebraica) que modele dicha situación, así como describir y representar gráficamente funciones que son solución de la ecuación diferencial. A partir de las reflexiones generadas por los diversos cuestionamientos, puede llevar a cabo la construcción puntual del campo de pendientes.</td>
<td>NR bajo: El estudiante presenta problemas al representar algebraicamente la ecuación diferencial de una situación particular que le es planteada en la lengua natural y por tanto no puede continuar.

NR medio: El estudiante a partir de una situación particular (planteada en lengua natural) puede representar la ecuación diferencial que modela dicha situación (representación algebraica), pero no identifica una posible solución de esta ecuación diferencial y/o presenta problemas al construir puntualmente su campo de pendientes (representación gráfica).
NR alto: El estudiante logra representar algebraicamente la ecuación diferencial de un contexto particular, identifica las posibles soluciones y puede</td>
<td>Lengua natural:

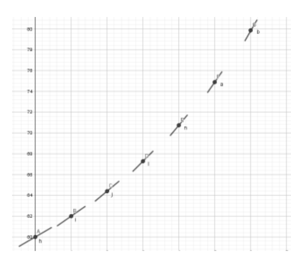
Una población de peces, si se les deja aislados, aumenta con rapidez de cambio del 20% al año. Se permite que al año se pesquen 10 millones de peces.

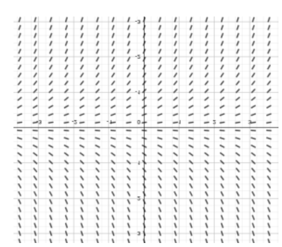
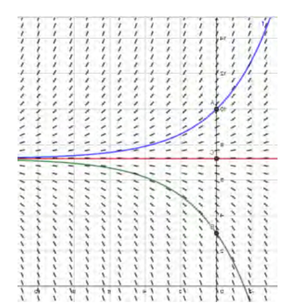
Analítico:

$$\frac{dP}{dt} = 0.2P - 10$$

Tabular:
<table><tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>60</td><td>62</td><td>64.4</td><td>67.2</td></tr></table>t: Tiempo (años)
P: Población de peces

Gráfica:

</td>
</tr>
</table>

			llevar a cabo la construcción puntual del campo de pendientes.	
NG	General	A partir del desarrollo de actividades con un contexto particular en el nivel anterior y de la reflexión realizada en ellas, el estudiante es capaz de plantear en forma algebraica ecuaciones diferenciales, encontrar diferentes soluciones para ellas (general y particular), a partir del trabajo en la misma representación (tratamiento) o del análisis del campo de pendientes de éstas (conversión).	NG bajo: El estudiante presenta problemas al representar algebraicamente la ecuación diferencial de una situación general que le es planteada en la lengua natural y por tanto no puede continuar	Lengua natural: Una población de insectos crece con una rapidez de cambio proporcional al tamaño de la población.
				Analítica: $$\frac{dy}{dx} = ky$$
			NG medio: El estudiante extrae de un contexto (planteado en lengua natural) la ecuación diferencial (representación algebraica), pero presenta problemas al construir su campo de pendientes (representación gráfica)	Gráfica: 
			NG alto: El estudiante logra representar algebraicamente la ecuación diferencial de un contexto y a partir de ello y de la reflexión generada por los distintos cuestionamientos, puede realizar un análisis que lo llevan a la construcción del campo de pendientes.	
		Aunque en las actividades no se promueve explícitamente este nivel, el estudiante puede	NF bajo: El estudiante no logra expresar sus ideas de manera adecuada o el lenguaje	Analítica: $$\frac{dy}{dx} = kx$$

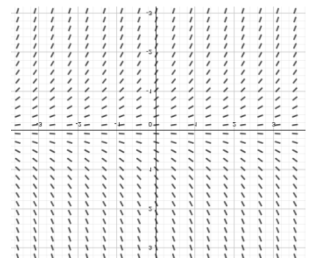
NF	Formal	llegar a desarrollarlo con algunas de las preguntas asociadas, en las cuales se le pide realizar conjeturas sobre el comportamiento de gráficas (campos de pendientes) o sobre la solución de ecuaciones diferenciales (numérica, particular y general). Además, hay momentos donde se le pide que realice una serie de argumentaciones que están encaminadas a que describa, quizás no con la formalidad del uso del lenguaje matemático formal, pero si con precisión en sus palabras, sobre las matemáticas que ha aprendido.	que utiliza no es el asociado a la matemática formal. NF medio: El estudiante identifica características propias de las Ecuaciones Diferenciales, pero el lenguaje matemático utilizado no es el adecuado. NF alto: El estudiante expresa características propias de las Ecuaciones Diferenciales y el lenguaje matemático utilizado es el adecuado.	Gráfica: 

Tabla 5. Criterios de valoración para Ecuaciones Diferenciales

5.3 Análisis de la secuencia de actividades didácticas

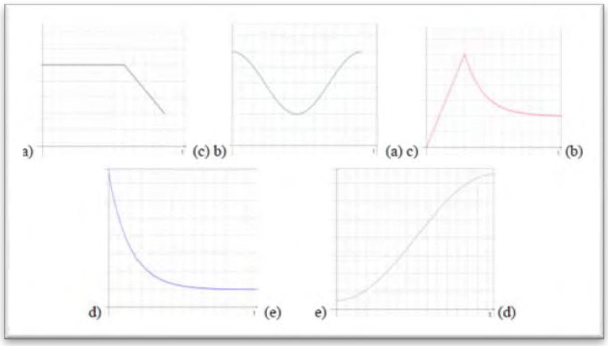
En esta sección, se realiza un reporte y análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a la secuencia de actividades didácticas.

5.3.1 Secuencia de inicio

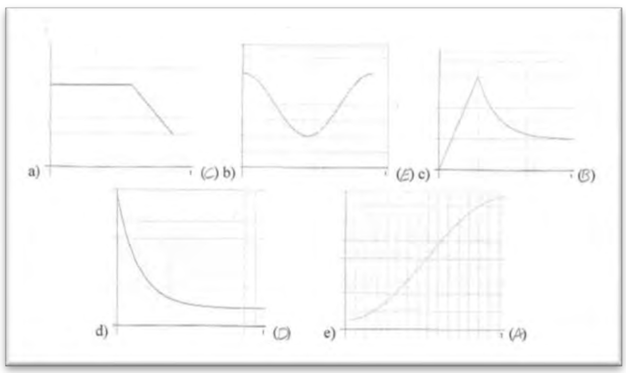
En la **Actividad 1** “Las matemáticas en la vida diaria”, había que realizar la articulación entre la representación verbal y la representación gráfica de diferentes situaciones de variación que fueron planteadas.

En la conversión de la representación verbal a la representación gráfica:

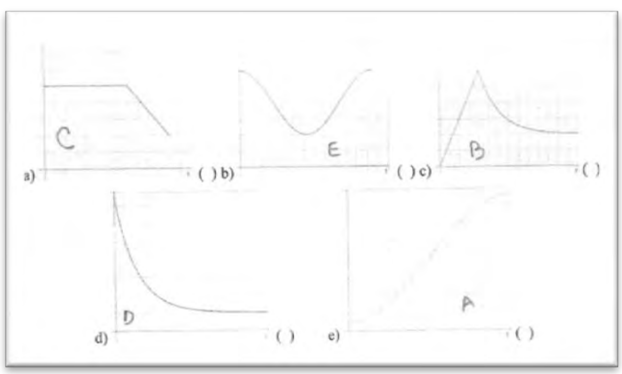
- El Equipo 1, tuvo errores en la conversión de tres de las cinco situaciones planteadas:



- El Equipo 2 y 3 realizaron adecuadamente la conversión de la representación verbal a la gráfica:



Equipo 2



Equipo 3

Al argumentar las razones para realizar cada conversión de la representación verbal a la gráfica:

- El Equipo 1, aún con los problemas que tuvo en la conversión, en sus descripciones se percibía el conocimiento que tenían sobre la situación, como podemos ver para el caso del polen en una planta en el transcurso de un año:

D. En esta supongo que el polen será abundante durante una época del año y mientras pasa el tiempo se ira dispersando.

- El Equipo 2, utilizó términos asociados a la derivada como se puede ver en la variación de la temperatura del lingote de metal:

B. El horno aumenta la temperatura linealmente y la pérdida de calor es muy lenta hasta ser nula

- El Equipo 3, en su descripción utilizó términos más coloquiales apelando un poco al sentido común, como podemos ver en la situación de la concentración de polen en una planta:

E. En este aumenta y disminuye según la temporada durante un lapso de tiempo.

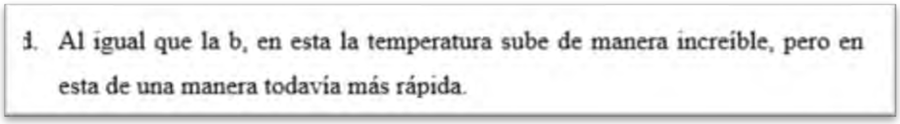
Apoyados en la tabla 4, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Bajo	Medio	Medio

En la **Actividad 2** “La temperatura de un vaso con agua”, había que identificar en la representación gráfica los tipos básicos de variación.

En la descripción del comportamiento de la temperatura de un vaso con agua en el transcurso del tiempo, para las distintas representaciones gráficas:

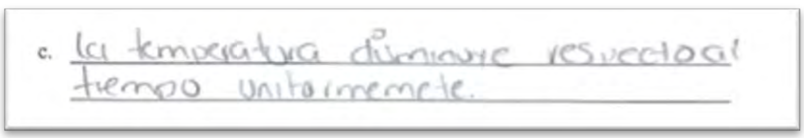
- El Equipo 1 no fue tan preciso en el uso del lenguaje, en el caso donde hay un crecimiento cada vez más rápido, redactaron lo siguiente:


1. Al igual que la b, en esta la temperatura sube de manera increíble, pero en esta de una manera todavía más rápida.

- El Equipo 2 mostró mayor comprensión sobre la situación y en el caso de un decrecimiento cada vez más lento escribieron:


g. El vaso se enfría lentamente en un medio gradual

- El Equipo 3 realizó adecuadamente la conversión entre la representación gráfica y la representación verbal, en el caso de un decrecimiento constante contestaron:


c. la tmperatura diminuye respecto al tiempo uniformemente.

Apoyados en la tabla 4, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Medio	Alto	Alto

En la **Actividad 3** “La fiebre”, había que representar en la gráfica la razón de cambio promedio.

En el cálculo de ΔT y $\frac{\Delta T}{\Delta t}$, y en la interpretación de éstos:

- El Equipo 1, aunque en sus descripciones asociadas a la situación de la fiebre las realizaron de forma adecuada, tuvo problemas para llenar la representación tabular, quizás por desconocer la notación utilizada:

(t_1, t_2)	$\Delta T, °C$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}, \frac{°C}{hr}$	Interpretación
(0,4)	2	2/2=1 0/4=0	Dividir
(4,11)	2	2/2=1 4/11=	Dividir
(13,15)	3	3/3=1 13/15=0.86	Dividir
(17,20)	3	3/3=1 17/20=0.85	Dividir
(20,24)	4	4/4=1 20/24=0.83	dividir

Tabla 1.

- El Equipo 2 y 3 realizaron las descripciones que se pedían de forma adecuada, en el llenado de la tabla realizaron los cálculos y la interpretación adecuada:

(t_1, t_2)	$\Delta T, °C$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}, \frac{°C}{hr}$	Interpretación
(0,4)	2°C	2°C/4hrs	0.5 °C/hr, cambio relativamente rápido
(4,11)	2°C	2°C/7hrs	0.285 °C/hr cambio lento en temperatura
(13,15)	3°C	3°C/2hrs	1.5 °C/hr cambio muy rápido en temp.
(17,20)	3°C	3°C/3hrs	1 °C/hr cambio rápido de temp.
(20,24)	4°C	4°C/4hrs	1 °C/hr cambio rápido de temp

Tabla 1.

Iguales

Equipo 2

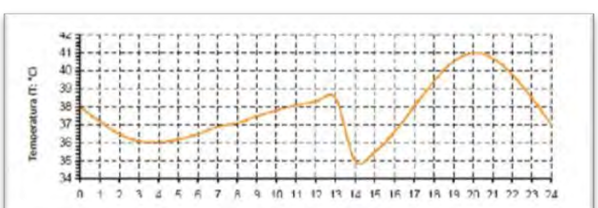
(t_1, t_2)	$\Delta T, °C$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}, \frac{°C}{hr}$	Interpretación
(0,4)	2C°	$\frac{2}{4}$	Temp. disminuyo 0.5 C° cada hora
(4,11)	2C°	$\frac{2}{7}$	la temp aumento dos grados en 7horas
(13,15)	3C°	3/2	la temp. disminuyo 3 grados en dos horas
(17,20)	3C°	$\frac{3}{3}$	la temp. aumento 1C° cada hora
(20,24)	4C°	$\frac{4}{4}$	la temp. disminuyo 1C° cada 1 hora.

Tabla 1.

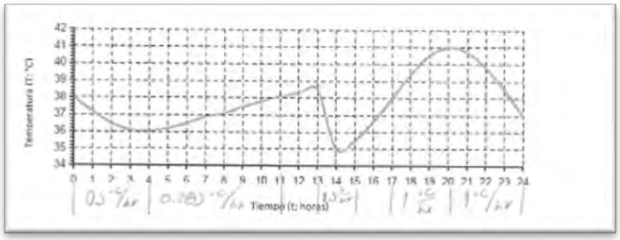
Equipo 3

En la representación gráfica de la rapidez de cambio promedio:

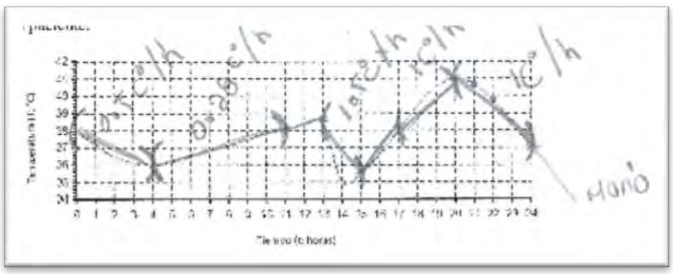
- El Equipo 1 no representó en la gráfica la rapidez de cambio promedio:



- El Equipo 2 no representaron correctamente en la gráfica la rapidez de cambio promedio:



- El Equipo 3 represento de forma adecuada la razón de cambio promedio en la representación gráfica como se muestra:



Apoyados en la tabla 4, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Alto	Alto	Alto
Referencial	Bajo	Medio	Alto

En la **Actividad 4** "El cáncer de mama en México", había que interpretar el comportamiento de la representación gráfica de la derivada para la situación del cáncer de mama en México apoyado de diferentes applets de GeoGebra.

En el llenado de la tabla, donde había que calcular Δy y $\frac{y_2}{y_1}$:

- El Equipo 1 tuvo problemas en el llenado de la tabla, ya que, realizaron mal el cálculo del cociente $\frac{y_2}{y_1}$:

x, años a partir de 1955	y, defunciones	Δy	$\frac{y_2}{y_1}$
0	362.77	62.77	5.7793
1	438.69	75.92	5.7783
2	530.48	91.79	5.7792
3	641.48	111	6.7781
4	775.71	139.33	5.7789
5	938.03	162.32	5.7788
6	1134.31	196.28	5.7790

- El Equipo 2 llenó adecuadamente los datos de la tabla y realizaron una buena interpretación de ésta:

b. Realiza una tabla de valores en la cual se tenga el número de años a partir de 1955 y el de defunciones por año:

x, años a partir de 1955	y, defunciones	Δy	$\frac{y_2}{y_1}$
0	300		
1	362.77	62.77	1.2092
2	438.69	75.92	1.2091
3	530.48	91.79	1.2093
4	641.48	111	1.2092
5	775.71	134.23	1.2092
6	938.03	162.32	1.2092

- El Equipo 3 completó correctamente la representación tabular asociada a las defunciones por cáncer de mama en México y tuvieron problemas en contestar algunas preguntas asociadas a la interpretación de la tabla debido a que no conocían el tema de sucesiones:

b. Realiza una tabla de valores en la cual se tenga el número de años a partir de 1955 y el de defunciones por año:

x, años a partir de 1955	y, defunciones	Δy	$\frac{y_2}{y_1}$
0	300	300	1.2090
1	362.77	62.77	1.2090
2	438.69	75.92	1.2090
3	530.41	91.72	1.2090
4	641.48	111.07	1.2092
5	775.71	134.23	1.2092
6	938.03	162.32	1.1026

En la identificación de la recta tangente en la representación gráfica:

- El Equipo 1 realizó mal la interpretación de la recta tangente al punto A y de la pendiente de ésta:

> i. Habilita la opción de recta y mueve el punto x0:
>
> ii. ¿Qué tiene de particular esa recta?
>
> Va desde los valores negativos a los positivos uniformemente
>
> iii. ¿Qué sucede con la recta al mover x0?
>
> Se mueve parejo todo

Recta tangente

> i. Elige el número m y mueve el punto x0:
>
> ii. ¿Qué representa el número m?
>
> 57 por cada paso que da en los puntos x
>
> iii. ¿Qué sucede con m al mover x0?
>
> La recta no cambia mucho, sube de a poco uniformemente.
>
> iv. ¿Qué información te brinda m con respecto a las defunciones por cáncer de mama?
>
> Se dieron 300

Pendiente de la recta tangente

- El Equipo 2 identificó de manera correcta la recta tangente al punto A, así como la pendiente de esa recta, en las representaciones gráficas, además las descripciones del comportamiento de ambas fueron acertadas:

> ii. ¿Qué tiene de particular esa recta?
>
> Es la recta tangente del punto
>
> iii. ¿Qué sucede con la recta al mover x0?
>
> Cambia su pendiente

- El Equipo 3 no expresó específicamente que la recta y el número que aparecían, correspondían a la recta tangente al punto A y a la pendiente de ésta, respectivamente en la representación gráfica:

> ii. ¿Qué representa el número m?
>
> Es el área de crecimiento de muertes, aprox. debajo de la curva
>
> iii. ¿Qué sucede con m al mover x0?
>
> Aumenta junto con x0
>
> iv. ¿Qué información te brinda m con respecto a las defunciones por cáncer de mama?
>
> Las muertes en ese periodo de tiempo

En la interpretación de la función derivada representada gráficamente por la curva $h(x)$:

- El Equipo 1 tuvo problemas para identificar la función derivada en la representación gráfica:

i. Marca la función $h(x)$ y contesta lo siguiente:

ii. ¿Qué representa la función $h(x)$?

La altura en x

iii. ¿Qué relación tiene el punto B con la función $h(x)$?

B sigue a la función uniformemente

- El Equipo 2 identificó a la derivada en un punto con la y ordenada del punto B y a la función derivada representada gráficamente por la curva $h(x)$, pero no le dieron el nombre de derivada:

ii. ¿Qué representa la función$h(x)$?

El valor de m con respecto a A

iii. ¿Qué relación tiene el punto$B$ con la función $h(x)$?

h(x) es la trayectoria de B

- El Equipo 3 en la interpretación gráfica de la derivada en un punto y la función derivada, no expresaron específicamente que los casos analizados estaban relacionados con la derivada:

iii. ¿Qué sucede con B al mover $x0$?

Aumenta igual que m

iv. ¿Qué representa el punto B?

[illegible] en

v. En el contexto de las defunciones por cáncer de mama, ¿qué relación tiene B con el punto A?

Indica el aumento de mujeres muertas por año

Apoyados en la tabla 4, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Bajo	Alto	Alto
Referencial	Bajo	Medio	Medio

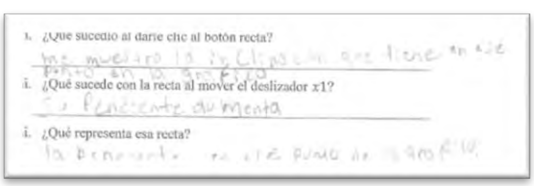
En la **Actividad 5** “Los polinomios”, había que identificar gráficamente las relaciones existentes entre una función y su derivada, en este caso para funciones polinomiales de hasta grado 3.

En la interpretación de la recta tangente al punto A y la pendiente de la recta tangente en la representación gráfica:

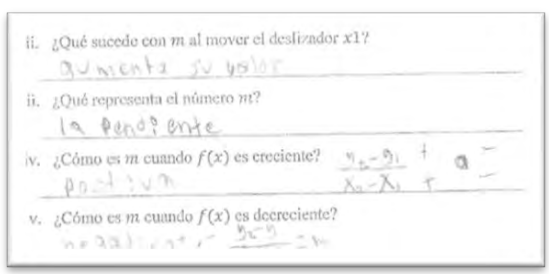
- El Equipo 1 realizó las interpretaciones de la representación gráfica incorrectamente, pareciera que no siguieron las indicaciones que se pedían en la Actividad, en el caso cuando aparecía la recta tangente para una función cuadrática, contestaron:

> i. ¿Qué sucedió al darle clic al botón recta?
> Se movió un poco mas arriba, pero en si no cambio nada, solo la posición.
> ii. ¿Qué sucede con la recta al mover el deslizador $x1$?
> Se mueve la recta un poco de posición.
> ii. ¿Qué representa esa recta?
> Es una recta que puede ser deslizada, se puede ajustara la pendiente o inclinación de la recta.
> v. ¿Cómo es la recta cuando $f(x)$ es creciente?
> La recta tiende a ir hacia a arriba.
> v. ¿Cómo es la recta cuando $f(x)$ es decreciente?
> La recta toma un lugar mas cercano al origen.

- El Equipo 2 tuvo problemas para identificar la recta tangente en la representación gráfica, pero en cambio realizaron de manera adecuada la identificación de la pendiente de la recta tangente, como podemos ver para el caso de una función cuadrática:

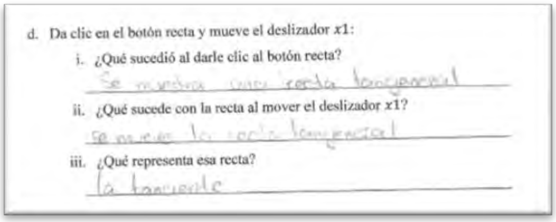

i. ¿Que sucedio al darle clic al botón recta?
i. ¿Qué sucede con la recta al mover el deslizador $x1$?
Su pendiente aumenta
i. ¿Qué representa esa recta?

Recta tangente


ii. ¿Qué sucede con m al mover el deslizador $x1$?
aumenta su valor
ii. ¿Qué representa el número m?
la pendiente
iv. ¿Cómo es m cuando $f(x)$ es creciente?
positiva
v. ¿Cómo es m cuando $f(x)$ es decreciente?

Pendiente de la recta tangente

- El Equipo 3 identificó correctamente en la representación gráfica la recta tangente y la pendiente de la recta tangente del punto A, cómo podemos ver en el caso de una función cuadrática:



d. Da clic en el botón recta y mueve el deslizador $x1$:

i. ¿Qué sucedió al darle clic al botón recta?

Se muestra una recta tangencial

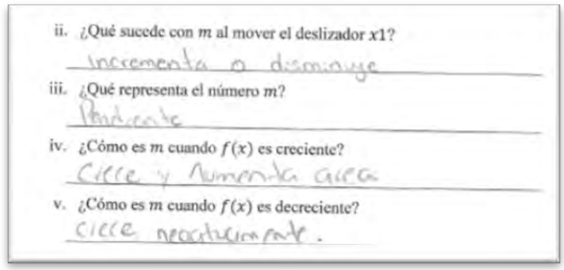
ii. ¿Qué sucede con la recta al mover el deslizador $x1$?

Se mueve la recta tangencial

iii. ¿Qué representa esa recta?

la tangente

Recta tangente



ii. ¿Qué sucede con m al mover el deslizador $x1$?

incrementa o disminuye

iii. ¿Qué representa el número m?

Pendiente

iv. ¿Cómo es m cuando $f(x)$ es creciente?

Crece y aumenta área

v. ¿Cómo es m cuando $f(x)$ es decreciente?

crece negativamente.

Pendiente de la recta tangente

En la interpretación de la función derivada representada gráficamente por la curva $h(x)$ y en su relación con la función $f(x)$:

1.- Cuando $f(x)$ tiene un valor extremo (máximo o mínimo local) ⇨ $h(x) = 0$.

2.- Cuando $f(x)$ es creciente ⇨ $h(x) > 0$.

3.- Cuando $f(x)$ es decreciente ⇨ $h(x) < 0$.

4.- Cuando $f(x)$ tiene un punto de inflexión ⇨ $h(x)$ tiene un valor extremo (máximo o mínimo local).

- El Equipo 1 no explicitó específicamente que la función $h(x)$ era la derivada, pero en la relación, entre la función y su derivada hicieron una asociación adecuada. Además, tuvieron problemas al calcular la derivada en su representación analítica. En la parte donde se busca que visualicen que al sumar una constante a la función, la derivada de ésta no cambia, el equipo no lo pudo observar. En el caso de una función de grado 3, donde había que identificar las relaciones entre la función y su derivada para puntos específicos, el equipo tuvo problemas para identificarlos, como podemos ver para el caso donde se tenía en la función un mínimo local y la derivada cortaba al eje x en ese punto ($h(x) = 0$):

h. Da clic al botón curva $h(x)$:

i. ¿Qué sucedió?

Se coloco la grafica un poco mas arriba en el plano.

ii. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?

Supongo que se refiere a que se mueven en conjunto.

iii. En el intervalo que $f(x)$ es creciente, ¿Qué signo tiene $h(x)$?

Positivo

iv. En el intervalo que $f(x)$ es creciente, ¿Qué signo tiene $h(x)$?

Negativo

Relación 2 y 3

vi. Calcula $\frac{d(2x^2)}{dx} = 133.74$

Cálculo de derivada

iii. ¿Qué sucede con $h(x)$ cuando mueves el deslizador d?

Incrementa h, supongo porque se mueve hacia arriba.

No hay cambio en la derivada

f. Sitúa el deslizador $x1$ en el número 0:

i. ¿Qué sucede en la gráfica de $f(x)$?

La grafica vuelve a su estado anterior, o creo que debi reiniciar los valores otra vez.

ii. ¿Qué sucede en la gráfica de $h(x)$?

Vuelve a valor positivo.

iii. ¿Qué representa el punto A?

Es el deslizador.

Relación 1

- El Equipo 2 percibió adecuadamente que cuando a una de las funciones se le suma o se le resta una constante, la derivada de esa función sigue siendo la misma al caso anterior. Tuvieron problemas para identificar que cuando la función tiene un valor extremo, la derivada corta al eje x, en ese valor de x:

i. ¿Qué sucede con la expresión algebraica $f(x)$ cuando mueves el deslizador d?

[illegible]

ii. ¿Qué sucede con $f(x)$ cuando mueves el deslizador d?

ii. ¿Qué sucede con $h(x)$ cuando mueves el deslizador d?

[illegible]

v. ¿A qué crees que se daba lo ocurrido?

[illegible]

No hay cambio en la derivada

e. Sitúa el deslizador $x1$ en el número -2:

i. ¿Qué sucede en la gráfica de $f(x)$?

[illegible]

ii. ¿Qué sucede en la gráfica de $h(x)$?

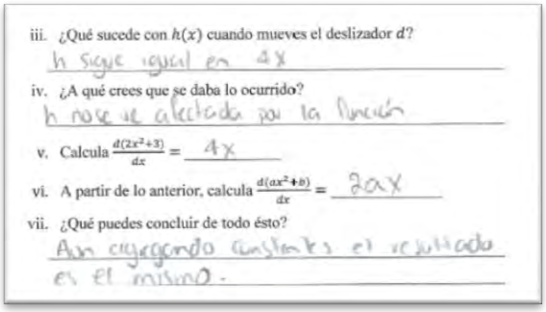
[illegible]

iii. ¿Qué representa el punto A?

[illegible]

Relación 1

- El Equipo 3 identificó que al agregar una constante a una función, la derivada de ésta no cambia. No pudieron visualizar la relación que había entre la función y su derivada, para el caso en el cual la función tiene un máximo, no identificaron que la derivada cortaba al eje x en ese punto $(h(x) = 0)$:



iii. ¿Qué sucede con $h(x)$ cuando mueves el deslizador d?
h sigue igual en 4x

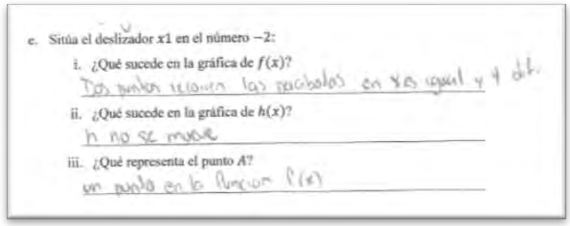
iv. ¿A qué crees que se daba lo ocurrido?
h no se ve afectada por la función

v. Calcula $\frac{d(2x^2+3)}{dx} =$ 4x

vi. A partir de lo anterior, calcula $\frac{d(ax^2+b)}{dx} =$ 2ax

vii. ¿Qué puedes concluir de todo ésto?
Aun agregando constantes el resultado es el mismo.

No hay cambio en la derivada



e. Sitúa el deslizador $x1$ en el número -2:

i. ¿Qué sucede en la gráfica de $f(x)$?
Dos puntos recorren las parabolas en x es igual y y dif.

ii. ¿Qué sucede en la gráfica de $h(x)$?
h no se mueve

iii. ¿Qué representa el punto A?
un punto en la funcion f(x)

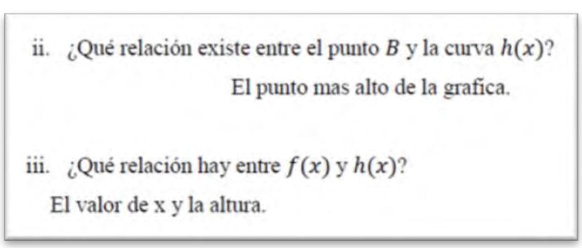
Relación 1

Apoyados en la tabla 4, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Referencial	Bajo	Medio	Medio
General	Bajo	Medio	Medio
Formal	Bajo	Bajo	Bajo

En la **Actividad 6** “La exponencial”, había que identificar gráficamente las relaciones existentes entre una función y su derivada, en este caso para funciones exponenciales, en específico que observaran que la derivada de la función exponencial $f(x) = ae^x$ es ella misma, es decir, $h(x) = ae^x$ y para el caso donde la derivada de la función $f(x) = e^{kx}$, es $h(x) = ke^{kx}$, se puede ver que la derivada es proporcional a la misma función.

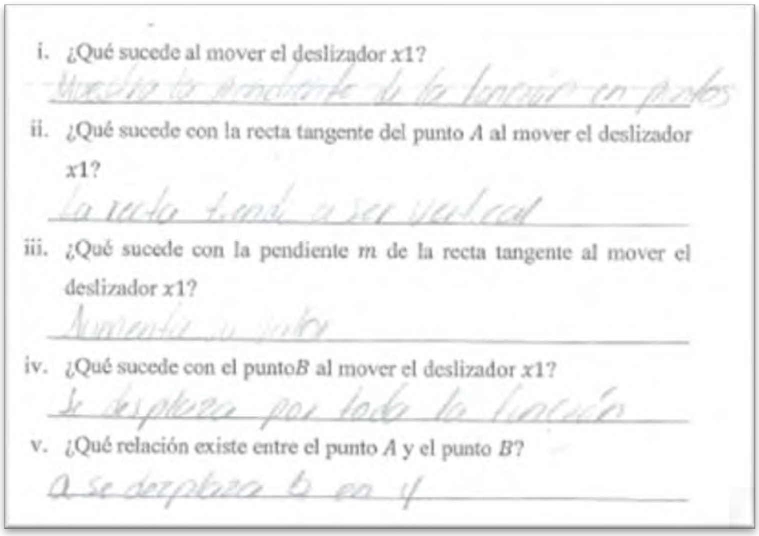
- El Equipo 1 no identificó que la derivada de la función exponencial $f(x) = ae^x$ es la misma función y tuvieron problemas para describir adecuadamente lo que sucedía con cada elemento que aparecía en la representación gráfica de esta función:



ii. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?
El punto mas alto de la grafica.

iii. ¿Qué relación hay entre $f(x)$ y $h(x)$?
El valor de x y la altura.

- El Equipo 2 realizó de manera correcta la descripción de la representación gráfica para el caso de la función $f(x) = e^x$, solo les faltó ser más explícitos en el sentido de decir que la derivada de la función es ella misma:



i. ¿Qué sucede al mover el deslizador $x1$?
Muestra la pendiente de la función en puntos

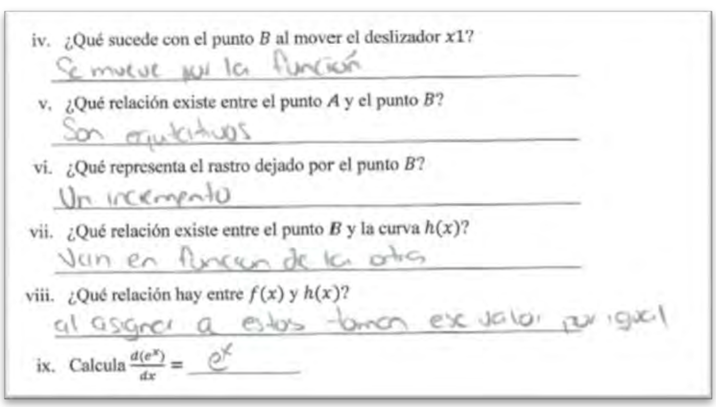
ii. ¿Qué sucede con la recta tangente del punto A al mover el deslizador $x1$?
La recta tiende a ser vertical

iii. ¿Qué sucede con la pendiente m de la recta tangente al mover el deslizador $x1$?
Aumenta su valor

iv. ¿Qué sucede con el punto$B$ al mover el deslizador $x1$?
Se desplaza por toda la función

v. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?
a se desplaza b en y

- El Equipo 3 describió adecuadamente aquellos elementos que se visualizaban en la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$, y pudieron concluir que la derivada de la función para este caso es ella misma:



iv. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?
Se mueve por la función

v. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?
Son equitativos

vi. ¿Qué representa el rastro dejado por el punto B?
Un incremento

vii. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?
Van en función de la otra

viii. ¿Qué relación hay entre $f(x)$ y $h(x)$?
al asignar a estos toman ese valor por igual

ix. Calcula $\frac{d(e^x)}{dx} =$ e^x

En el caso de la función exponencial $f(x) = e^{kx}$, con k positiva:

- El Equipo 1 tuvo problemas para describir con detalle lo que sucedía con la función:

i. ¿Qué sucede en la gráfica?
Cambio la grafica, tanto de lugar como en la parte superior.

ii. ¿Qué sucede con la expresión algebraica?
Cambio bastante.

iii. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?
Se mantiene como eje mientras se mueve la grafica.

- El Equipo 2 les falto ser más detallados en sus argumentaciones:

i. ¿Qué sucede en la gráfica?
Se va cerrando

ii. ¿Qué sucede con la expresión algebraica?
aumenta con respecto a K

iii. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?
Se desplaza por y

iv. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?
B representa pendiente de A

v. ¿Qué representa el rastro dejado por el punto B?
representa pendiente de A en X

vi. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?
son todos sus valores

i. Calcula $\frac{d(ae^{kx})}{dx} = ae^{kx}k$

- El Equipo 3 visualizó adecuadamente las características de la función y su derivada, pero al momento de calcular la derivada, no la realizaron:

i. ¿Qué sucede en la gráfica?
Se grafican 2 curvas y 1 recta

ii. ¿Qué sucede con la expresión algebraica?
Cambia valor de e en f(x) y h(x)

iii. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?
Avanza sobre la función h(x)

iv. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?
el punto en X y se desplazan en Y por la función

v. ¿Qué representa el rastro dejado por el punto B?
puntos específicos en la recta

En el caso de la función exponencial $f(x) = e^{kx}$, con k negativa:

- El Equipo 1 en las argumentaciones utilizadas les falto tener una explicación más detallada:

i. ¿Qué sucede en la gráfica?
Se distorsiona un poco la tabla abajo.

ii. ¿Qué sucede con la expresión algebraica?
Se modifica mucho.

iii. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?
Se mueve hacia la derecha.

- El Equipo 2 visualizó de manera adecuada y describieron lo que ocurría con la función y su derivada, pero sus argumentaciones no fueron las esperadas:

iii. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?
muestra la pendiente de a

iv. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?
B muestra los cambios de m en A

v. ¿Qué representa el rastro dejado por el punto B?
los valores de h(x)

vi. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?
los valores evaluados en x

ii. Calcula $\frac{d(ae^{kx})}{dx}$= $ae^{kx}k$

- El Equipo 3 describió de manera correcta cada una de las características presentes en la representación gráfica de la función, pero tuvieron problemas para calcular la derivada:

i. ¿Qué sucede en la gráfica?
Aparecen 2 curvas opuestas negativas creciendo en Y+

ii. ¿Qué sucede con la expresión algebraica?
la funcion es negativa

iii. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?
Camina por la función h(x)

iv. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?
el punto en -x

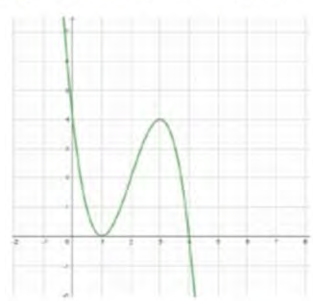
Apoyados en la tabla 4, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Referencial	Bajo	Medio	Alto
General	Bajo	Medio	Medio
Formal	Bajo	Bajo	Bajo

En la **Actividad 7** "¿Qué características tiene la función?", había que encontrar una función que cumpliera con las características de tener la función derivada que estaba representada gráficamente, utilizando las relaciones analizadas en las Actividades previas.

- El Equipo 1 al tener problemas desde las actividades previas, tuvieron dificultades para contestar adecuadamente esta actividad, las relaciones entre la función y su derivada, para cada uno de los casos planteados, no eran correctas:

2. Ahora, se muestra otra gráfica de la derivada de cierta función:



Gráfica 5. Función derivada

i. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es creciente?

Esta en 1 y 3 del eje x.

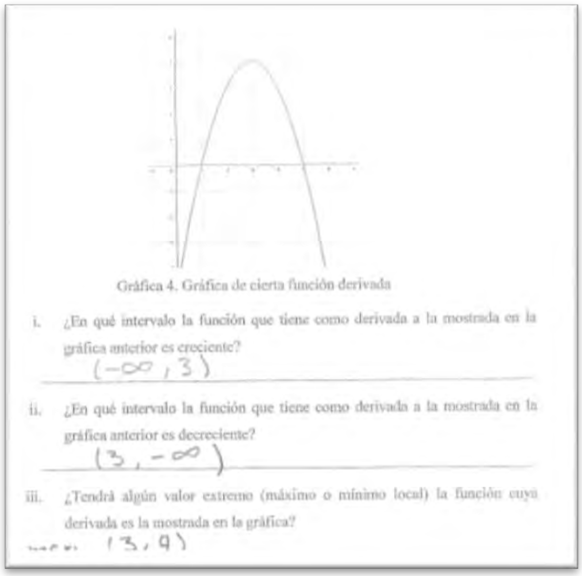
ii. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es decreciente?

Entre cero y dos.

iii. ¿Tendrá algún valor extremo (máximo o mínimo local) la función cuya derivada es la mostrada en la gráfica?

Entre dos y cuatro.

- El Equipo 2 tuvo problemas para identificar que la función que se quería encontrar no era la que estaba graficada y cada una de las preguntas que se plantearon, las contestaron pensando en la representación gráfica que se les presentaba:



Gráfica 4. Gráfica de cierta función derivada

i. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es creciente?

$(-\infty, 3)$

ii. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es decreciente?

$(3, -\infty)$

iii. ¿Tendrá algún valor extremo (máximo o mínimo local) la función cuya derivada es la mostrada en la gráfica?

$(3, 9)$

- El Equipo 3 contestó las preguntas de la Actividad pensando en que las preguntas que se les hacía estaban relacionadas con la representación gráfica de la función que se les presenta, aunque en el bosquejo de la función solución éstos la representaron bien para el caso de la derivada de una función cuadrática como se puede ver a continuación:

Gráfica 4. Gráfica de cierta función derivada

i. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es creciente?

$(-\infty, 4)$

ii. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es decreciente?

$(4, +\infty)$

ii. ¿Tendrá algún valor extremo (máximo o mínimo local) la función cuya derivada es la mostrada en la gráfica?

$x = 5$

Apoyados en la tabla 4, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

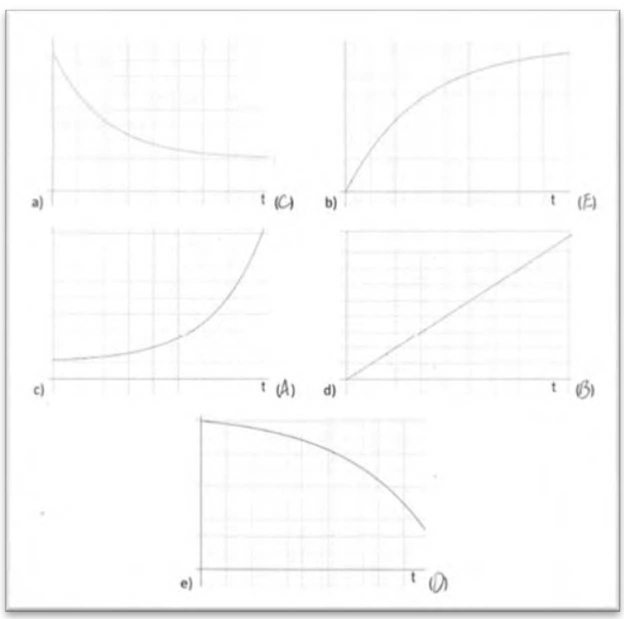
Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Referencial	Bajo	Bajo	Bajo
General	Bajo	Bajo	Medio

5.3.2 Secuencia de desarrollo

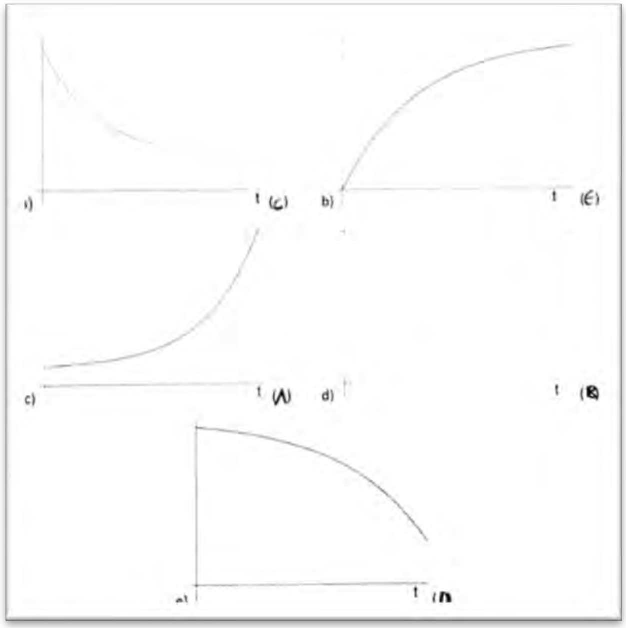
En la **Actividad 1** “Comportamientos asociados a la derivada en la vida diaria”, había que relacionar las situaciones representadas verbalmente con las representaciones gráficas.

En la conversión entre la representación verbal a la representación gráfica:

- Los Equipos 2 y 3 hicieron una correcta conversión entre la representación verbal y la representación gráfica:

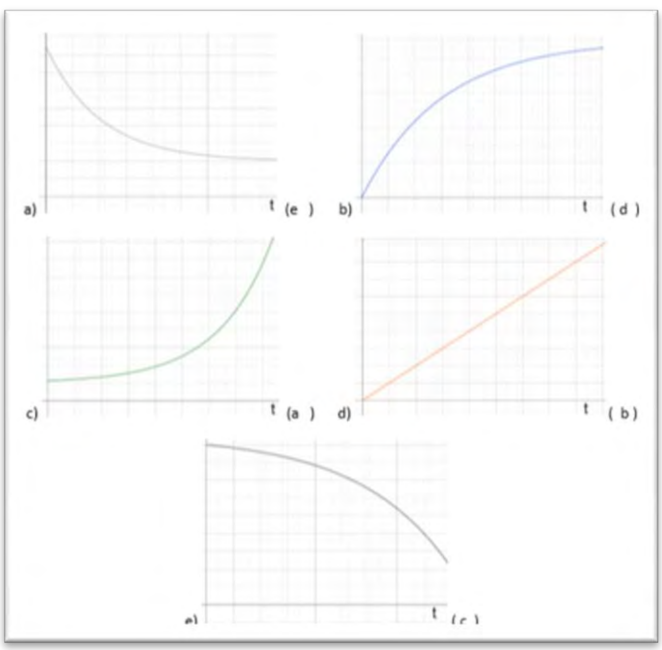


Equipo 2



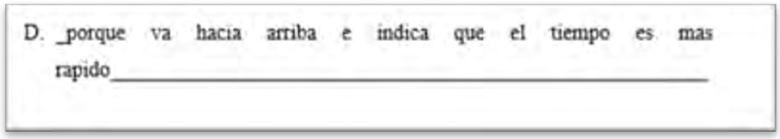
Equipo 3

- El Equipo 1 tuvo problemas para realizar la conversión de tres de las 5 situaciones:

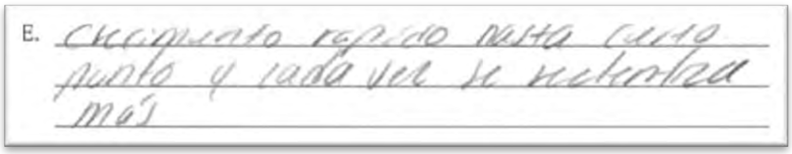


En la argumentación del proceso de conversión entre las representaciones verbal y gráfica:

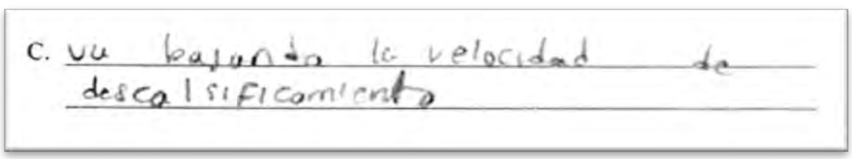
- El Equipo 1 tuvo problemas para comprender las situaciones y en la descripción de la depreciación de un vehículo respondieron:


D. _porque va hacia arriba e indica que el tiempo es mas rapido

- El Equipo 2 utilizó términos asociados a la derivada, como podemos ver en la situación del crecimiento de una persona desde su nacimiento hasta los 20 años:


E. crecimiento rapido hasta cierto punto y cada vez se ralentiza más

- El Equipo 3, no profundizo en su razonamiento, aunque realizó adecuadamente la conversión entre representaciones, y en el caso de la descalcificación de un hueso comentaron lo siguiente:


C. va bajando la velocidad de descalsificamiento

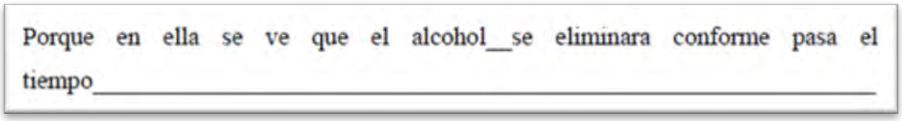
Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Bajo	Medio	Medio

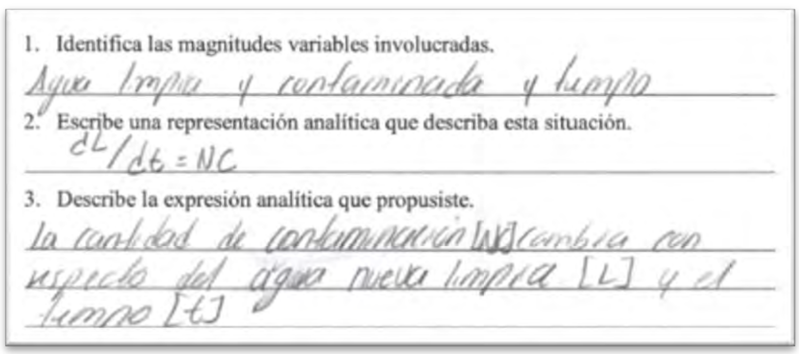
En la **Actividad 2** “Planteamiento de una Ecuación Diferencial”, había que representar algebraicamente la Ecuación Diferencial de cada situación planteada.

En la conversión de la representación verbal a la representación analítica de la ecuación diferencial:

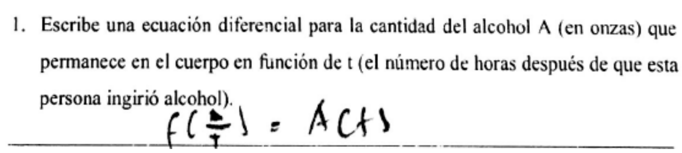
- El Equipo 1 no representó analíticamente la Ecuación Diferencial de ninguna de las situaciones y dejaron en blanco la pregunta que estaba asociada a cada caso. Pero cuando se les pedía realizar una descripción de lo que sucedía con las situaciones en el transcurso del tiempo, describieron de forma adecuada cada una de las situaciones, como podemos ver en el caso de la ingesta de alcohol de una persona:


Porque en ella se ve que el alcohol se eliminara conforme pasa el tiempo

- El Equipo 2 realizó la conversión de la representación verbal a la representación analítica de la Ecuación Diferencial de cada situación, aunque la representación no correspondía con la descripción verbal de cada uno de los casos. Podemos ver en el caso de la contaminación de un lago que, aunque el sentido de la Ecuación Diferencial está bien por la descripción que realizan, la variable de entrada de agua limpia al lago les causo conflicto:

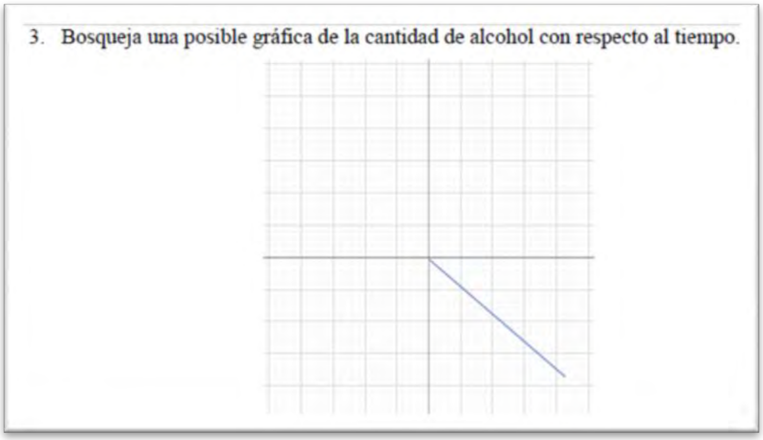

1. Identifica las magnitudes variables involucradas.
Agua limpia y contaminada y tiempo
2. Escribe una representación analítica que describa esta situación.
$dL/dt = NC$
3. Describe la expresión analítica que propusiste.
la cantidad de contaminación [N] cambia con respecto del agua nueva limpia [L] y el tiempo [t]

- El Equipo 3 representó algebraicamente dos de las tres situaciones planteadas, aunque no las expresó como Ecuaciones Diferenciales y además no fue la representación adecuada, como podemos ver para el caso de ingesta de alcohol:

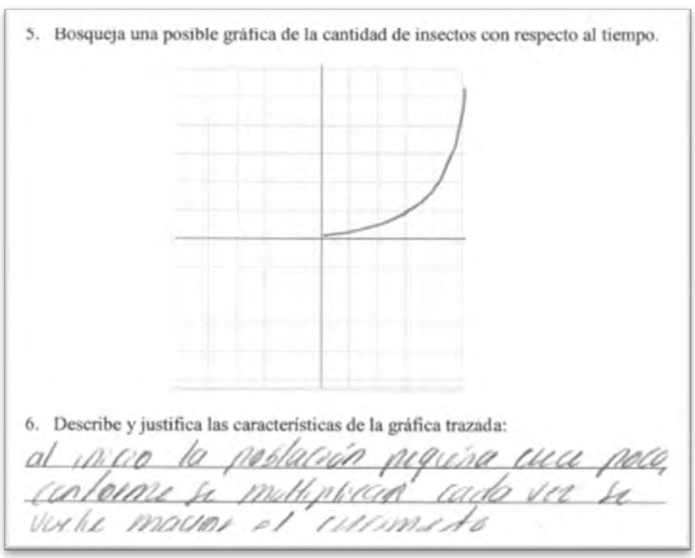

1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad del alcohol A (en onzas) que permanece en el cuerpo en función de t (el número de horas después de que esta persona ingirió alcohol).
$f(\frac{t}{t}) = A(t)$

En la representación gráfica de la ecuación diferencial para cada situación y la descripción de éstas:

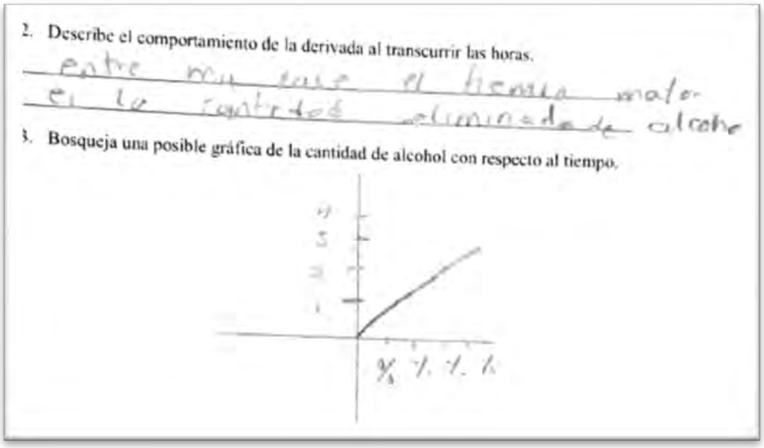
- El Equipo 1 presentó problemas en la representación gráfica ya que, aunque representan bien el comportamiento de la situación, en el cuadrante donde sitúan la gráfica no es el adecuado, como podemos ver para el caso de la ingesta de alcohol:



- El Equipo 2 realizó la representación verbal y la representación gráfica de forma adecuada, como podemos ver para el caso de crecimiento de una población de insectos:



- El Equipo 3 realizó la representación verbal respecto a cada situación adecuadamente, aunque presentaron problemas para representarlas gráficamente, como podemos ver para el caso de ingesta de alcohol:



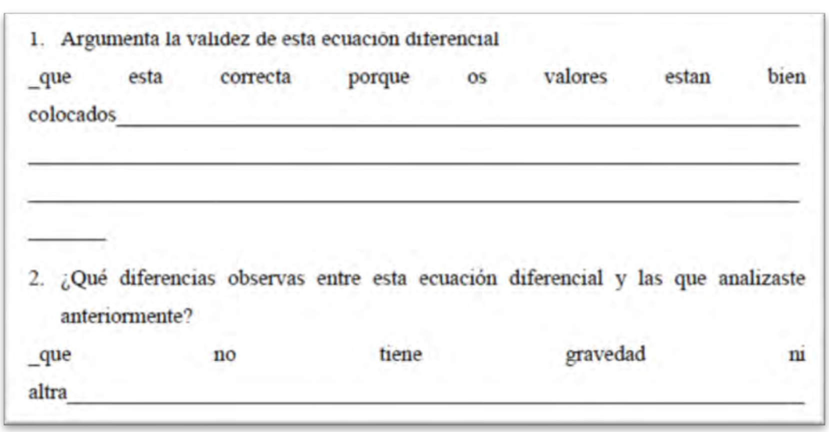
2. Describe el comportamiento de la derivada al transcurrir las horas.
entre mas pase el tiempo mayor es la cantidad eliminada de alcohol
3. Bosqueja una posible gráfica de la cantidad de alcohol con respecto al tiempo.

Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Alto	Alto	Alto
Referencial	Bajo	Medio	Bajo

En la **Actividad 3** “Orden de una ecuación”, había que identificar el orden de la ecuación diferencial planteada y compararla con las ecuaciones diferencial de la Actividad anterior.

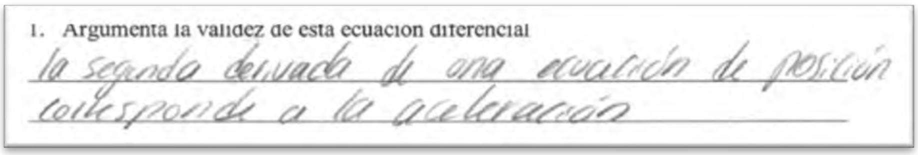
- El Equipo 1 tuvo problemas para identificar el orden la ecuación planteada y la pregunta asociada al orden de las ecuaciones trabajadas previamente no la escribieron:



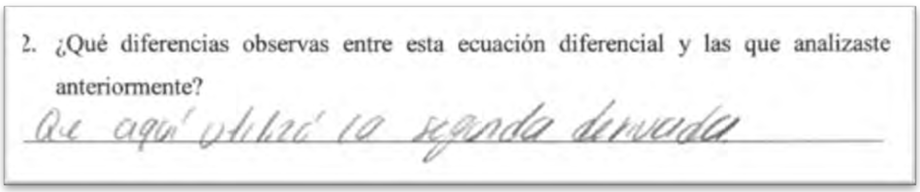
1. Argumenta la validez de esta ecuación diferencial
_que esta correcta porque os valores estan bien colocados

2. ¿Qué diferencias observas entre esta ecuación diferencial y las que analizaste anteriormente?
_que no tiene gravedad ni altra

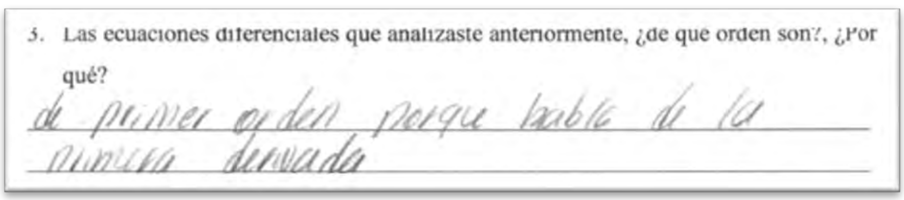
- El Equipo 2 identificó adecuadamente el orden de la ecuación planteada asociándola en este caso con la aceleración de gravedad, así como el orden de las ecuaciones trabajadas previamente:


1. Argumenta la validez de esta ecuación diferencial

la segunda derivada de una ecuación de posición corresponde a la aceleración

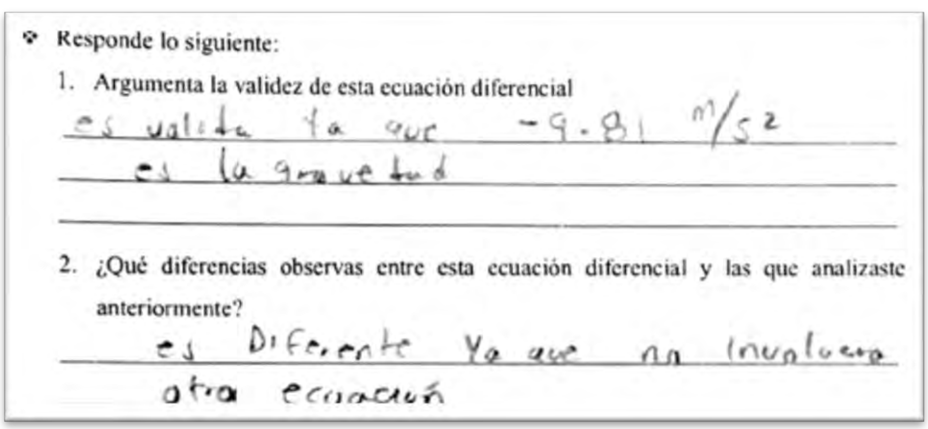

2. ¿Qué diferencias observas entre esta ecuación diferencial y las que analizaste anteriormente?

Que aquí utilizó la segunda derivada


3. Las ecuaciones diferenciales que analizaste anteriormente, ¿de que orden son?, ¿Por qué?

de primer orden porque habla de la primera derivada

- El Equipo 3 tuvo problemas para identificar el orden de la ecuación planteada, así como de las trabajadas previamente, aunque asocio adecuadamente la ecuación con la aceleración de la gravedad:


❖ Responde lo siguiente:

1. Argumenta la validez de esta ecuación diferencial

es valida ya que -9.81 m/s² es la gravedad

2. ¿Qué diferencias observas entre esta ecuación diferencial y las que analizaste anteriormente?

es Diferente ya que no involucra otra ecuación

Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Bajo	Alto	Medio
General	Bajo	Alto	Bajo

En la **Actividad 4** "Solución numérica de la Ecuación Diferencial", se trabaja con la situación de una población de peces, había que trabajar con tres diferentes condiciones iniciales y observar el comportamiento que tiene la población con respecto al tiempo para cada una de ellas.

- El Equipo 1 tuvo problemas para representar algebraicamente la situación y omitieron esas preguntas y al contestar las preguntas sus respuestas fueron un tanto inconsistentes con respecto al llenado de la tabla, el cual fue el adecuado. Para el caso de la condición inicial de 60 millones de peces contestaron lo siguiente:

c. Por consiguiente, ¿Qué población de peces habrá aproximadamente en t = 1?

El doble

d. Completa la siguiente tabla:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	6
Población (millones)	60	62	64.4	67.28	70.736	74883200	79859840

Tabla 5

- El Equipo 2 representó analíticamente la ecuación diferencial de la población de peces. Además, identificó correctamente el comportamiento que tiene la población para cada condición inicial. Para el caso de 40 millones de peces, contestaron lo siguiente:

1. Identifica las magnitudes variables involucradas.

Número de peces y tiempo

2. Escribe una ecuación diferencial que represente como cambia la población de peces al paso del tiempo.

$dN/dt = 1.20 N - 10 \times 10^6$ N: Número de peces

a. Completa la siguiente tabla:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	6
Población (millones)	40	38	35.6	32.72	29.264	25.1208	20.1493

Tabla 6

a. Analiza los valores de la tabla y describe el comportamiento de la población de peces.

la población decrece cada vez más

- El Equipo 3 representó analíticamente la situación de la población de peces, pero no expresó adecuadamente la ecuación diferencial. Completaron la tabla para la condición inicial de 60 millones de peces, aunque tuvieron problemas en los últimos valores que calcularon, mientras que para la condición inicial de 40 millones dieron por sentado que la población también aumentaría y no llenaron la tabla:

2. Escribe una ecuación diferencial que represente como cambia la población de peces al paso del tiempo.

$f(x) = (P_0)(\cdot/\cdot) + P_0 - 10$

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	6
Población (millones)	60	62	64.4	67.28	70.73	84.8	91.85

Tabla 5

En la descripción del comportamiento de la población de peces a partir de los datos de la tabla:

- El Equipo 1 en la descripción del comportamiento de la población para las condiciones iniciales de 60 millones de peces y de 40 millones de peces fue la adecuada, además de que identificaron correctamente que cuando la cantidad de peces es de 50 millones la población se mantiene constante como podemos ver:

1. ¿Qué te dice la ecuación diferencial obtenida en el Apartado 2 sobre la población de peces, para los diferentes valores iniciales (P_0)?

   a. Si, P_0 es pequeña:

   Tiende a disminuir la poblacion.

   b. Si, P_0 es grande:

   Tiende a aumentar.

   c. ¿Hay algún valor de P_0 con el cual la rapidez con la que está aumentando la población de peces es igual a la rapidez con que se están pescando? Argumenta tu respuesta.

   Si, en 50 millones, el 20% de ellos son 10 millones, cada año se pescan 10 millones por lo que la proporción seria la misma.

   d. Describe lo que sucederá con la población de peces conforme transcurren los años si se tiene esta población inicial

   No dice que población inicial, pero si es de 50m se mantendría.

- El Equipo 2 realizó la descripción adecuada para las condiciones iniciales, no pudieron identificar la condición inicial para la cual la población de peces iba a mantenerse constante:

a. Si, P_0 es pequeña:

la población va a tender a volverse cada vez menos

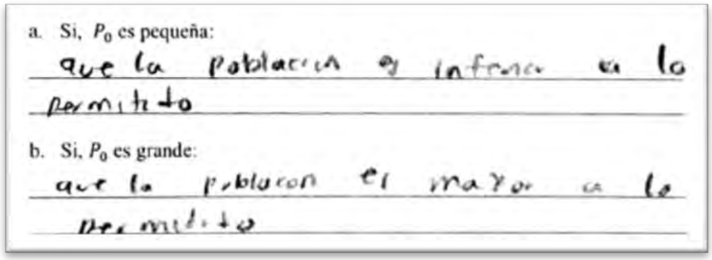
b. Si, P_0 es grande:

la población va a tender a volverse cada vez mayor

c. ¿Hay algún valor de P_0 con el cual la rapidez con la que está aumentando la población de peces es igual a la rapidez con que se están pescando? Argumenta tu respuesta.

puede que al principio si sea igual, pero luego tenderá a crecer o decrecer

- El Equipo 3 en la descripción del comportamiento de la población de peces para cada condición inicial la realizaron adecuadamente, pero no identificaron la condición inicial para la cual la población se mantenía:

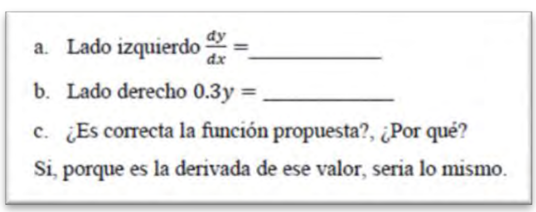

a. Si, P_0 es pequeña:
que la poblacion es inferior a lo permitido
b. Si, P_0 es grande:
que la poblacion es mayor a lo permitido

Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

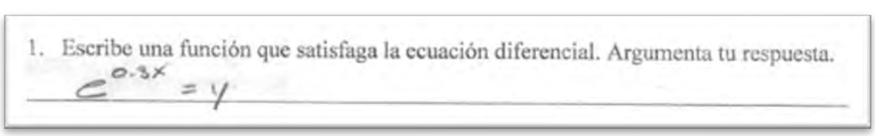
Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Medio	Alto	Medio
Referencial	Medio	Medio	Bajo

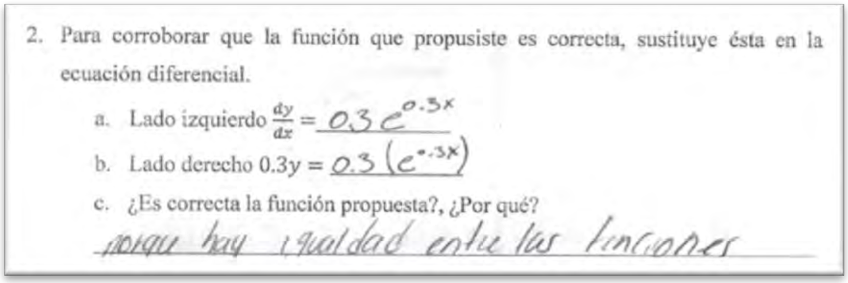
En la **Actividad 5** “Solución general de una ecuación diferencial”, había que representar analíticamente y gráficamente una posible solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 0.3y$.

- El Equipo 1 tuvo problemas para realizar esta Actividad, ya que solo contestaron una de las preguntas y el resto las dejaron en blanco:


a. Lado izquierdo $\frac{dy}{dx} =$ ___________
b. Lado derecho $0.3y =$ ___________
c. ¿Es correcta la función propuesta?, ¿Por qué?
Si, porque es la derivada de ese valor, seria lo mismo.

- El Equipo 2 realizó la representación analítica de una de las funciones que satisfacía la ecuación diferencial planteada, aunque no representaron gráficamente esta función:


1. Escribe una función que satisfaga la ecuación diferencial. Argumenta tu respuesta.
$e^{0.3x} = y$



2. Para corroborar que la función que propusiste es correcta, sustituye ésta en la ecuación diferencial.

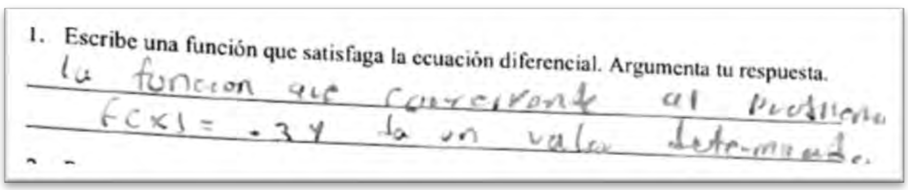
a. Lado izquierdo $\frac{dy}{dx} = 0.3e^{0.3x}$

b. Lado derecho $0.3y = 0.3(e^{.3x})$

c. ¿Es correcta la función propuesta?, ¿Por qué?

porque hay igualdad entre las funciones

- El Equipo 3 tuvo problemas para proponer una posible función que satisficiere la ecuación diferencial planteada y por tanto, su representación gráfica no fue la adecuada:



1. Escribe una función que satisfaga la ecuación diferencial. Argumenta tu respuesta.

la funcion que corresponde al problema $f(x) = .3y$ da un valor determinado.

Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
General	Bajo	Alto	Bajo

En la **Actividad 6** “Solución particular de una ecuación diferencial”, había que plantear una solución particular de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 0.3y$, para condiciones iniciales específicas, además de trabajar con una situación de variación particular.

En el planteamiento de la solución particular para condiciones iniciales específicas:

- El Equipo 2 fue el único que realizó de manera adecuada la representación analítica de la solución particular de la ecuación diferencial para las condiciones iniciales propuestas:

> 1 Si se tiene la siguiente información adicional cuando $x = 0$ entonces $y = 2$.
>
> a. ¿Cuál es la función que satisface la ecuación diferencial junto con la información adicional? Argumenta tu respuesta.
>
> $y = 2e^{0.3x}$ $\quad e^0 = 1 \quad 2e^0 = 2$

En la situación de la cafeína para la cual había que realizar la conversión de la representación verbal a la representación analítica y trabajar con condiciones iniciales:

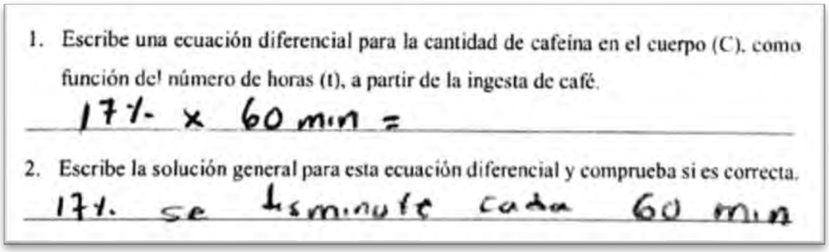
- El Equipo 1 tuvo problemas en el planteamiento de la ecuación diferencial para el caso de la cafeína no fue el adecuado y también para plantear la solución particular de la ecuación diferencial

> 1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de cafeína en el cuerpo (C), como función del número de horas (t), a partir de la ingesta de café.
>
> F(t)=17(.t100)
>
> 2. Escribe la solución general para esta ecuación diferencial y comprueba si es correcta.
>
> Cuando t 1, es igual a 17%

- El Equipo 2 en la situación de la cafeína, propusieron de manera adecuada la ecuación diferencial que la representa, así como la solución general para ella, pero tuvieron problemas en representar la solución particular para cuando una persona consumía una taza de café con 100mg de cafeína:

> 1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de cafeína en el cuerpo (C), como función del número de horas (t), a partir de la ingesta de café.
>
> $dc/dt = -0.17C$
>
> 2. Escribe la solución general para esta ecuación diferencial y comprueba si es correcta.
>
> $e^{-0.17t} = C \quad C' = 0.17e^{-0.17t}$

- El Equipo 3 tuvo problemas para plantear la ecuación diferencial de la situación de la cafeína y además tuvo problemas para representar algebraicamente la solución particular de la ecuación diferencial:



1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de cafeína en el cuerpo (C), como función del número de horas (t), a partir de la ingesta de café.
17% x 60 min =
2. Escribe la solución general para esta ecuación diferencial y comprueba si es correcta.
17% se 1 minute cada 60 min

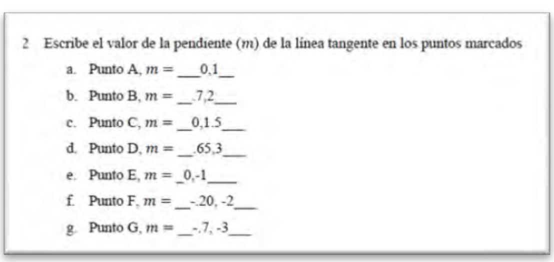
Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Referencial	Bajo	Medio	Bajo

En la **Actividad 7** "Campo de pendientes", se pide construir e identificar el campo de pendientes para las ecuaciones diferenciales $\frac{dy}{dx} = y$, $\frac{dy}{dx} = x$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.

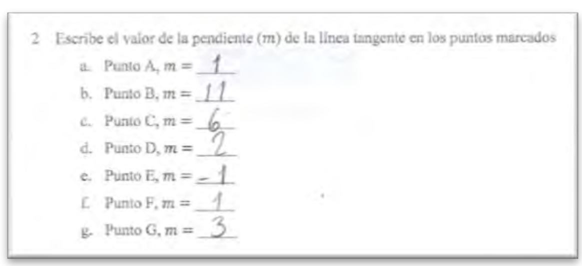
En la identificación de la pendiente de la recta tangente a diferentes puntos en la representación gráfica:

- Los tres equipos tuvieron problemas para identificar la pendiente de la recta tangente en diferentes puntos a partir de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y$, el Equipo 1 solo puso la coordenada (x, y) correspondiente a cada punto, mientras que el Equipo 2 solo respondió dos de los siete valores de la pendiente bien:



2 Escribe el valor de la pendiente (m) de la línea tangente en los puntos marcados
a. Punto A, m = ___0,1__
b. Punto B, m = __.7,2___
c. Punto C, m = __0,1.5___
d. Punto D, m = __.65,3___
e. Punto E, m = _0,-1____
f. Punto F, m = __-.20, -2___
g. Punto G, m = __-.7, -3___

Equipo 1

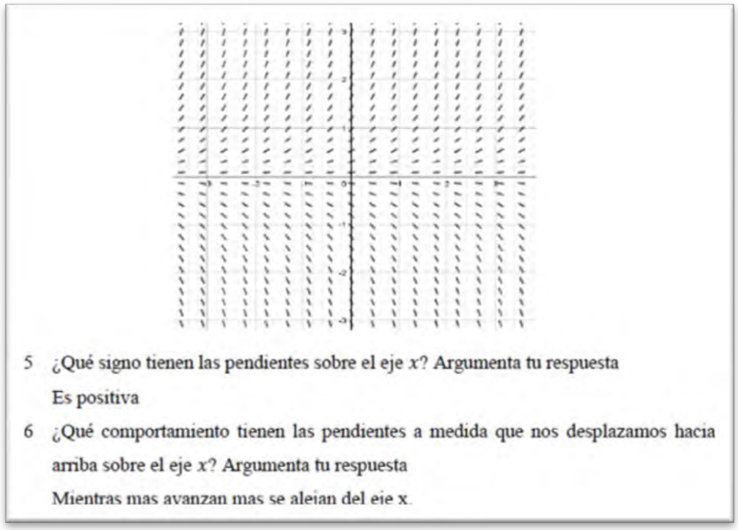


2 Escribe el valor de la pendiente (m) de la línea tangente en los puntos marcados
a. Punto A, m = 1
b. Punto B, m = 11
c. Punto C, m = 6
d. Punto D, m = 2
e. Punto E, m = -1
f. Punto F, m = 1
g. Punto G, m = 3

Equipo 2

En la descripción del campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y$:

- El Equipo 1 tuvo problemas para interpretar el campo de pendientes que se les presentaba:



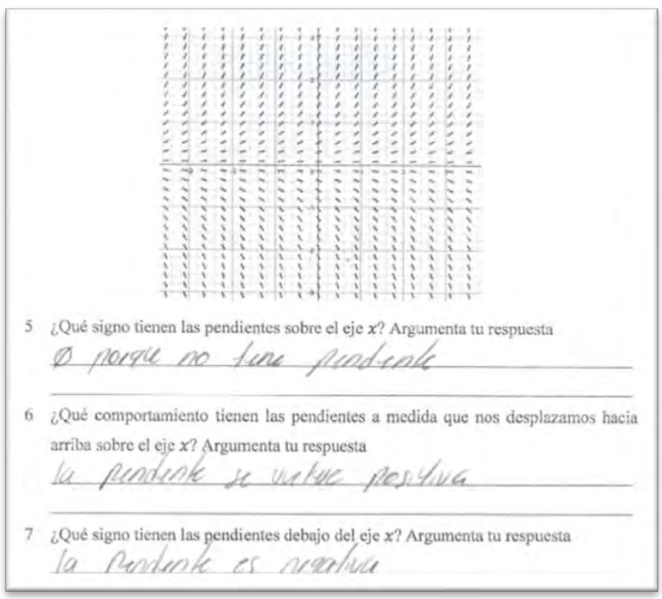
5 ¿Qué signo tienen las pendientes sobre el eje x? Argumenta tu respuesta

Es positiva

6 ¿Qué comportamiento tienen las pendientes a medida que nos desplazamos hacia arriba sobre el eje x? Argumenta tu respuesta

Mientras mas avanzan mas se alejan del eje x.

- El Equipo 2 realizó la interpretación del campo de pendientes adecuadamente:



5 ¿Qué signo tienen las pendientes sobre el eje x? Argumenta tu respuesta

Ø porque no tiene pendiente

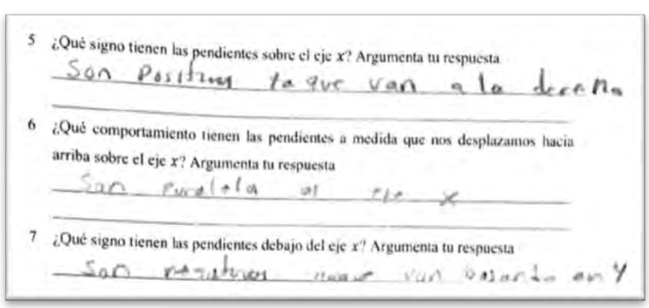
6 ¿Qué comportamiento tienen las pendientes a medida que nos desplazamos hacia arriba sobre el eje x? Argumenta tu respuesta

la pendiente se vuelve positiva

7 ¿Qué signo tienen las pendientes debajo del eje x? Argumenta tu respuesta

la Pendiente es negativa

- El Equipo 3 no realizó adecuadamente la descripción del campo de pendientes, ya que, sus respuestas no fueron las esperadas:



5 ¿Qué signo tienen las pendientes sobre el eje x? Argumenta tu respuesta

Son Positivas ya que van a la derecha

6 ¿Qué comportamiento tienen las pendientes a medida que nos desplazamos hacia arriba sobre el eje x? Argumenta tu respuesta

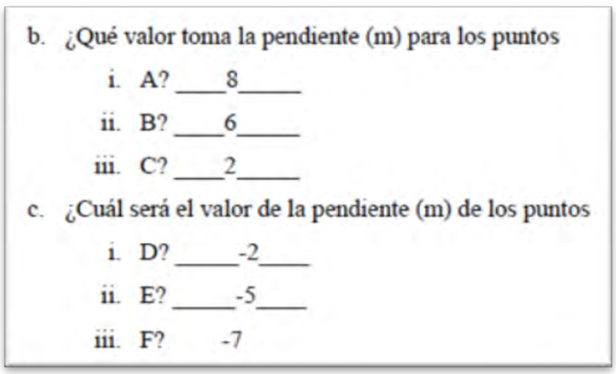
Son paralela al eje x

7 ¿Qué signo tienen las pendientes debajo del eje x? Argumenta tu respuesta

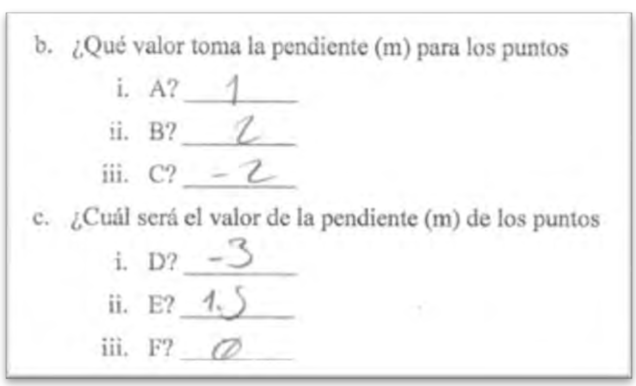
Son negativas porque van pasando en Y

En el cálculo de las pendientes de la línea tangente a partir de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$:

- El Equipo 1 tuvo problemas para realizar la conversión de la representación gráfica a la representación algebraica de la pendiente de la recta tangente para diferentes puntos de la ecuación diferencial, debido a que no calcularon correctamente el valor de la pendiente, aunque para los primeros casos estuviera indicado específicamente cual era el valor:

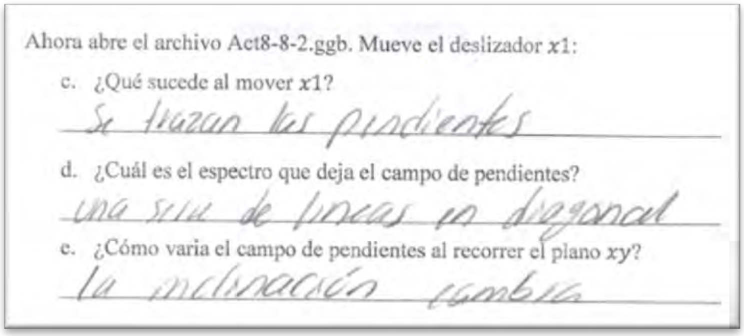

b. ¿Qué valor toma la pendiente (m) para los puntos
i. A? ____8_____
ii. B? ____6_____
iii. C? ____2_____
c. ¿Cuál será el valor de la pendiente (m) de los puntos
i. D? _____-2____
ii. E? _____-5____
iii. F? -7

- El Equipo 2 identificó adecuadamente la pendiente de la recta tangente para cada uno de los puntos que se les planteaba en la representación gráfica mostrada en el applet de GeoGebra:


b. ¿Qué valor toma la pendiente (m) para los puntos
i. A? 1
ii. B? 2
iii. C? -2
c. ¿Cuál será el valor de la pendiente (m) de los puntos
i. D? -3
ii. E? 1.5
iii. F? Ø

En la descripción del campo de pendiente de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$:

- El Equipo 2 no tuvo los argumentos esperados en la interpretación del campo de pendientes:



Ahora abre el archivo Act8-8-2.ggb. Mueve el deslizador $x1$:

c. ¿Qué sucede al mover $x1$?

Se trazan las pendientes

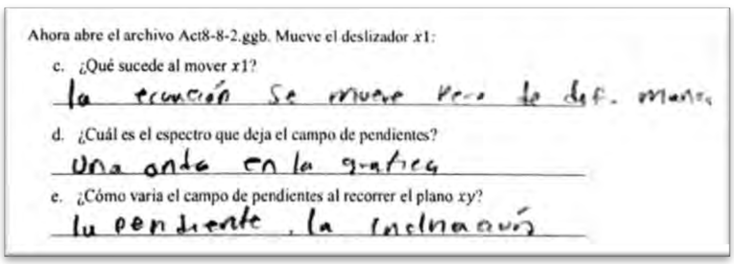
d. ¿Cuál es el espectro que deja el campo de pendientes?

una serie de lineas en diagonal

e. ¿Cómo varia el campo de pendientes al recorrer el plano xy?

la inclinación cambia

- El Equipo 3 no realizó adecuadamente la interpretación del campo de pendientes en el applet de GeoGebra:



Ahora abre el archivo Act8-8-2.ggb. Mueve el deslizador $x1$:

c. ¿Qué sucede al mover $x1$?

la ecuación se mueve pero de dif. manera

d. ¿Cuál es el espectro que deja el campo de pendientes?

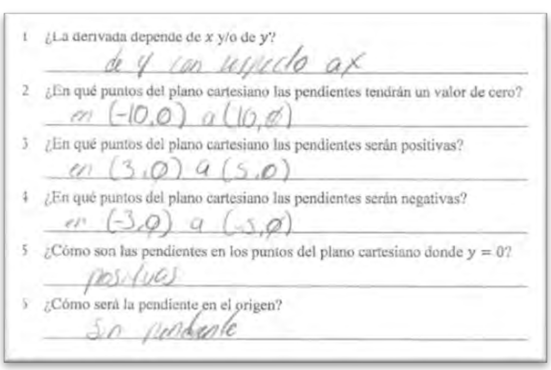
Una onda en la grafica

e. ¿Cómo varia el campo de pendientes al recorrer el plano xy?

la pendiente, la inclinación

En la conversión de la representación analítica a la representación verbal de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$:

- El Equipo 1 no respondió los diferentes cuestionamientos relacionados a la ecuación diferencial y los equipos 2 y 3 tuvieron problemas para representar verbalmente el comportamiento que tenía la ecuación:



1 ¿La derivada depende de x y/o de y?

de y con respecto a x

2 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes tendrán un valor de cero?

en (-10,0) a (10,0)

3 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes serán positivas?

en (3,0) a (5,0)

4 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes serán negativas?

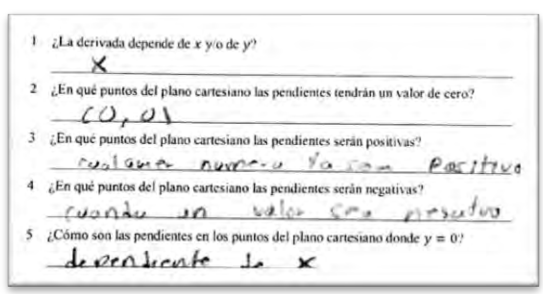
en (-3,0) a (-5,0)

5 ¿Cómo son las pendientes en los puntos del plano cartesiano donde $y = 0$?

positivas

5 ¿Cómo será la pendiente en el origen?

sin pendiente



1 ¿La derivada depende de x y/o de y?

x

2 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes tendrán un valor de cero?

(0, 0)

3 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes serán positivas?

cualquier numero ya sea positivo

4 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes serán negativas?

cuando un valor sea negativo

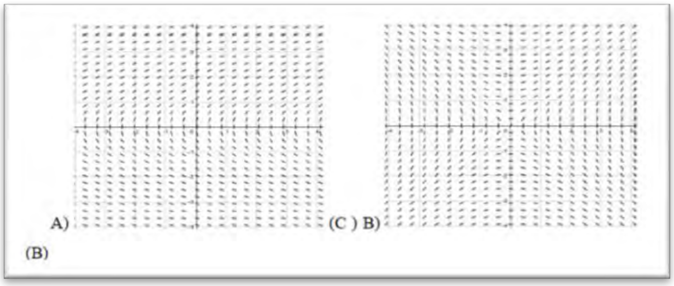
5 ¿Cómo son las pendientes en los puntos del plano cartesiano donde $y = 0$?

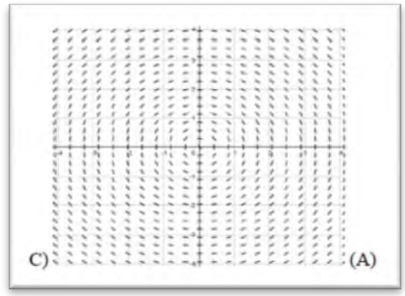
dependiente de x

Equipo 2 Equipo 3

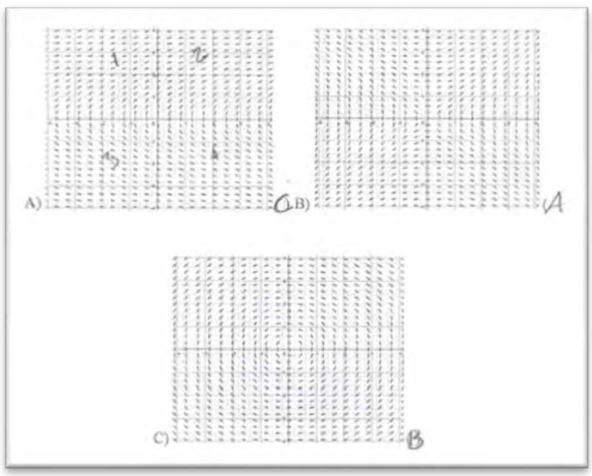
En la identificación del campo de pendientes para diferentes ecuaciones diferenciales:

- El Equipo 1 tuvo problemas en la identificación del campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales, ya que, solo respondieron correctamente una de las tres:

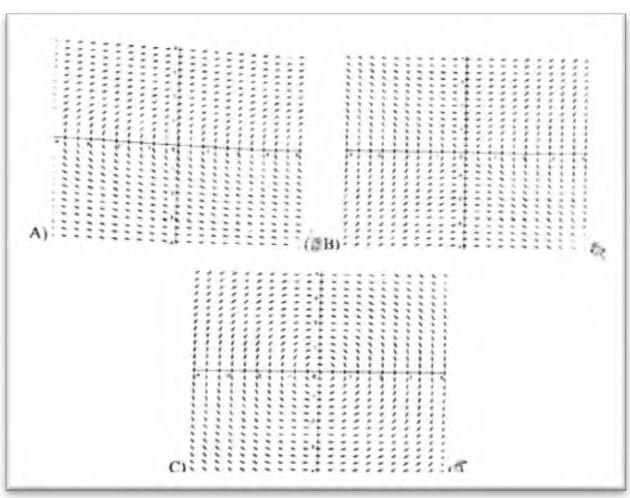




- El Equipo 2 identificaron correctamente el campo de pendientes para las diferentes ecuaciones diferenciales:



- El Equipo 3 solo realizó acertadamente una de las tres relaciones presentadas:



Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Bajo	Medio	Medio
Referencial	Bajo	Bajo	Medio
General	Bajo	Medio	Bajo

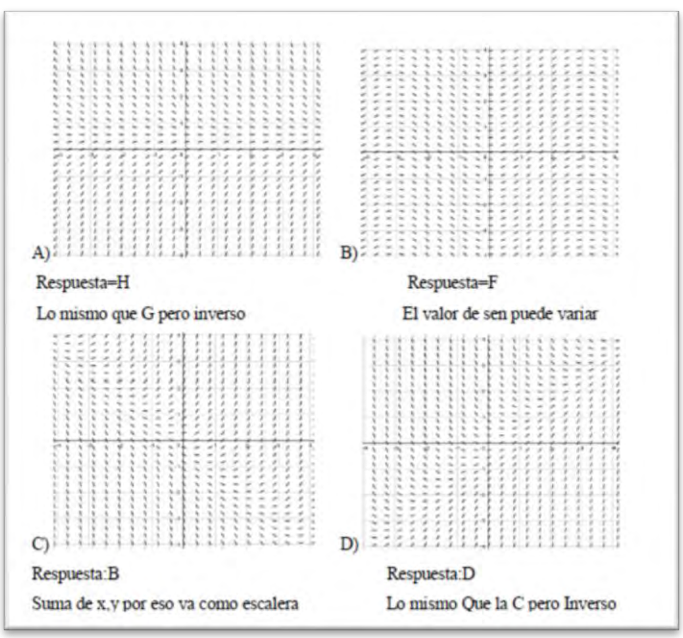
En la **Actividad 8** “Identificación de campo de pendientes”, había que realizar la conversión entre la representación analítica de la ecuación diferencial con el campo de pendientes que le corresponde.

❖ Haga corresponder los campos de pendientes con sus ecuaciones diferenciales. Justifica tu respuesta

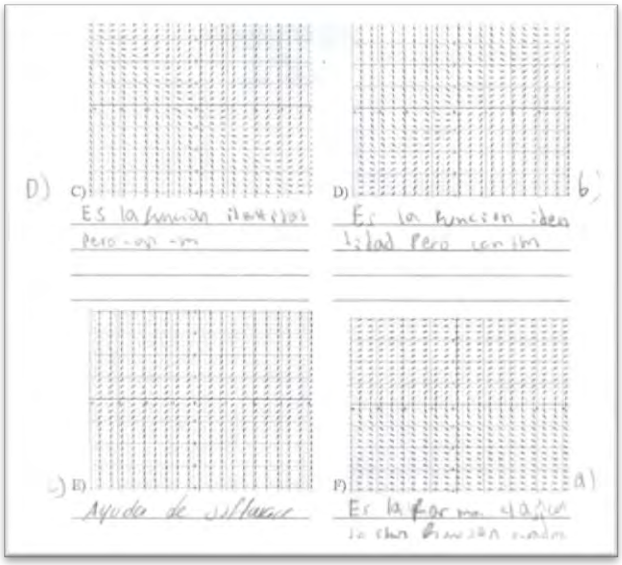
a) $y' = 1 + y^2$ b) $y' = x + y$ c) $y' = \frac{1}{y}$ d) $y' = x - y$

e) $y' = -\frac{x}{y}$ f) $y' = sen\, x$ g) $y' = y - \frac{1}{2}$ h) $y' = \frac{1}{2} - y$

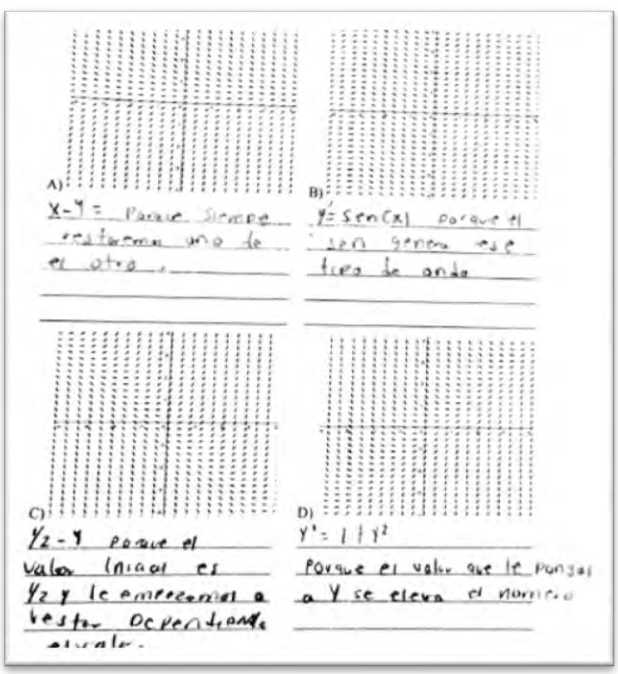
- El Equipo 1 realizó correctamente todas las asociaciones entre la representación algebraica y los campos de pendientes, pero su argumentación no fue la adecuada:



- El Equipo 2 al parecer tuvo problemas con la interpretación de los signos, esto por las asociaciones entre las ecuaciones diferenciales y los campos de pendientes que realizaron. Además, la argumentación se baso por el uso de un software, pero no fue adecuada:



- El Equipo 3 tuvo problemas para relacionar cada representación analítica con su campo de pendientes, ya que, de las ocho relaciones, solo contestaron bien una de ellas. Mientras que en la descripción solo consideraron las características de la ecuación diferencial, no consideraron las características del campo de pendientes:



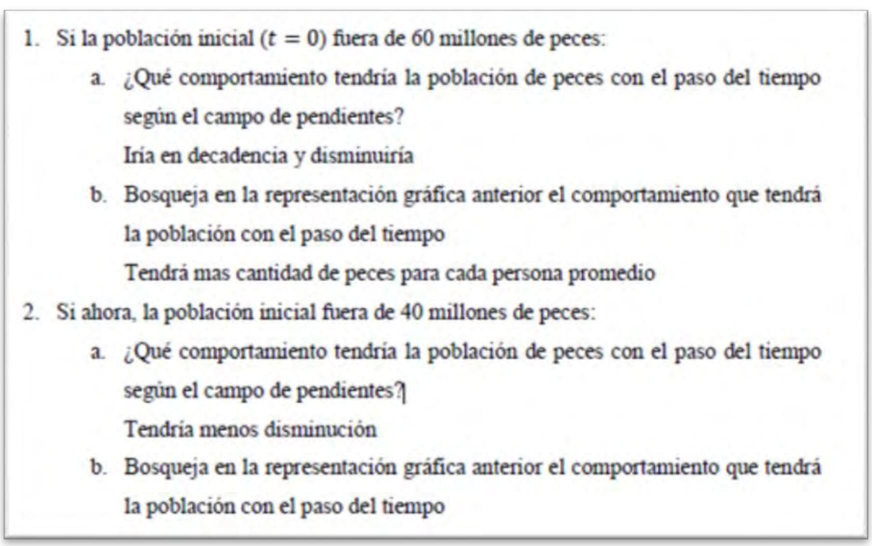
Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Bajo	Bajo	Bajo
General	Alto	Bajo	Bajo

En la **Actividad 9** "Existencia y unicidad de soluciones", había que trabajar con la situación de la población de peces y con una nueva situación de variación relacionada con la morfina, en las cuales había que identificar las soluciones de equilibrio y el comportamiento de éstas.

En la descripción del campo de pendientes de la situación de la población de peces:

- El Equipo 1 no interpretó de manera adecuada el campo de pendientes, además no bosquejo el comportamiento de la población para las diferentes condiciones iniciales que se le planteaban:



1. Si la población inicial ($t = 0$) fuera de 60 millones de peces:
   a. ¿Qué comportamiento tendría la población de peces con el paso del tiempo según el campo de pendientes?
   Iría en decadencia y disminuiría
   b. Bosqueja en la representación gráfica anterior el comportamiento que tendrá la población con el paso del tiempo
   Tendrá mas cantidad de peces para cada persona promedio
2. Si ahora, la población inicial fuera de 40 millones de peces:
   a. ¿Qué comportamiento tendría la población de peces con el paso del tiempo según el campo de pendientes?
   Tendría menos disminución
   b. Bosqueja en la representación gráfica anterior el comportamiento que tendrá la población con el paso del tiempo

- El Equipo 2 interpretó correctamente el campo de pendientes, y además bosquejaron adecuadamente el comportamiento que tendría la población para cada condición inicial, como podemos ver para el caso de una condición inicial de 50 millones de peces:

3. Por último, si la población de peces fuera de 50 millones:
    a. ¿Qué comportamiento tendría la población de peces con el paso del tiempo según el campo de pendientes?
    Se mantendrían igual al paso del tiempo
    b. Bosqueja en la representación gráfica anterior el comportamiento que tendrá la población con el paso del tiempo

- El Equipo 3 tuvo problemas para interpretar el campo de pendientes y no bosquejaron el comportamiento que se tendría de la población en el transcurso del tiempo, para la condición inicial de 40 millones de peces contestaron:

2. Si ahora, la población inicial fuera de 40 millones de peces:
    a. ¿Qué comportamiento tendría la población de peces con el paso del tiempo según el campo de pendientes?
    se fuera en crecimiento un poco más lento

En la conversión de la representación verbal a la representación analítica para la situación de variación de la morfina:

- El Equipo 1 tuvieron problemas en el planteamiento de la ecuación diferencial, por lo que tuvieron problemas para contestar correctamente las demás preguntas:

1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de morfina (M) en la sangre después de t horas.
    Dm/Dt = 2.5 +34.7

Según esta ecuación diferencial, contesta lo siguiente:

2. Si M toma valores iniciales pequeños, ¿Qué signo va a tener $\frac{dM}{dt}$?
    a. ¿Qué comportamiento tendrá la cantidad de morfina en la sangre con el paso del tiempo?
    Cada vez será menor y iría disminuyendo
3. Si M toma valores iniciales grandes, ¿Qué signo va a tener $\frac{dM}{dt}$?
    Positivo
    a. ¿Qué comportamiento tendrá la cantidad de morfina en la sangre con el paso del tiempo?
    Iría aumentando por el tiempo

- El Equipo 2 tuvo problemas para representar analíticamente la ecuación diferencial:

1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de morfina (M) en la sangre después de t horas.

2.5(t) − 34.7%· d(t)

- El Equipo 3 la ecuación diferencial que plantearon no fue la correcta, lo que influyo en las respuestas de las siguientes preguntas:

1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de morfina (M) en la sangre después de t horas. $\frac{dm}{dt} = .041 (min) \times .578 (min)$

Según esta ecuación diferencial, contesta lo siguiente:

2. Si M toma valores iniciales pequeños, ¿Qué signo va a tener $\frac{dM}{dt}$?
   a. ¿Qué comportamiento tendrá la cantidad de morfina en la sangre con el paso del tiempo?

   la morfina fuera en crecimiento dependiendo del tiempo

En la descripción del campo de pendientes:

- El Equipo 1 en la identificación del comportamiento de la morfina con el paso del tiempo en la representación gráfica mostrada en el applet Act9-12.ggb de GeoGebra, tuvieron problemas, debido a que no comprendieron la situación planteada:

5. Si la cantidad de Morfina en el paciente es de 10mg:
   a. ¿Qué comportamiento tendrá con el paso del tiempo?

   Aumentaría

   Mueve el deslizador $x1$, ¿Qué sucede al mover el deslizador?

   Se crean unos puntos indicando que disminuye algo

- El Equipo 2 realizaron adecuadamente la interpretación del campo de pendientes:

5. Si la cantidad de Morfina en el paciente es de 10mg:
   a. ¿Qué comportamiento tendrá con el paso del tiempo?

   Tendera a disminuir hasta 7.21 mg

   b. Mueve el deslizador $x1$, ¿Qué sucede al mover el deslizador?

   El punto a se mueve siguiendo el comportamiento de los pendientes dede 10 mg

6. Si la cantidad de Morfina en el paciente es de 3mg:
   a. ¿Qué comportamiento tendrá con el paso del tiempo?

   tendera a aumentar a 7.21 mg

- El Equipo 3 en la descripción del campo de pendientes de la situación de la morfina, no fue la esperada, y para la condición inicial de 7.2mg de morfina contestaron:

7. Si la cantidad de Morfina en el paciente es de 7.2mg:
   a. ¿Qué comportamiento tendrá con el paso del tiempo?
   menos dolor pero abrían trascurrendo mas horas
   b. Mueve el deslizador $x1$. ¿Qué sucede al mover el deslizador?
   se extiende la curva

En la identificación del tipo de solución de equilibrio que tenía la situación de la población de peces y la de la morfina:

- El Equipo 1 en la identificación del tipo de solución de equilibrio que era para cada caso, tuvieron la respuesta acertada pero no fue generada por el desempeño previo:

10. De los casos anteriores, ¿Cuál tenía una solución de equilibrio estable y cual un: solución de equilibrio inestable? ¿Por qué?
El de los peces era inestable y el de Morfina era lo más cercano a estable

- El Equipo 2 en la definición de un equilibrio estable, contestaron de manera adecuada, pero sin formalidad matemática y en la identificación del tipo de solución de equilibrio en cada uno de los casos, el equipo contestó correctamente:

Entonces, un equilibrio es inestable si:
cuando los valores iniciales no tienden al equilibrio

10. De los casos anteriores, ¿Cuál tenía una solución de equilibrio estable y cual una solución de equilibrio inestable? ¿Por qué?
El caso de los peces es una solucion inestable por que no tiende a un valor constante cualquiera y en la morfina cualquier valor tiende a la constante 7.21
25

- El Equipo 3 no realizó una descripción adecuada de un equilibrio inestable y no identificó entre cuál de las situaciones tenía un equilibrio estable y cual uno inestable:

Entonces, un equilibrio es inestable si:

es cuando despues de una perturbacion el objeto se aleja de la posicion inicial.

10. De los casos anteriores, ¿Cuál tenia una solución de equilibrio estable y cual una solución de equilibrio inestable? ¿Por qué?

Dependiendo de las variables es decir los limites de la ecuación es decir los valores como los [illegible].

Apoyados en la tabla 5, se tiene la siguiente tabla que valora el desempeño de los estudiantes en los niveles de comprensión promovidos en esta Actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Bajo	Alto	Bajo
Referencial	Bajo	Medio	Bajo
General	Bajo	Alto	Bajo
Formal	Bajo	Medio	Bajo

5.3.3 Secuencia de cierre

En la **Actividad 1** “Ecuación diferencial logística”, se analiza la situación de variación relacionada con una población en un espacio confinado.

En la conversión de la representación verbal a la representación analítica:

- El Equipo 1 no dedujo la ecuación diferencial, por lo que contestaron la tabla que estaba asociada a la ecuación, basándose en la intuición de la situación:

3. ¿Qué te dice esta ecuación diferencial sobre el comportamiento de la población P, con respecto al tiempo t? Completa la siguiente tabla:

Para valores de P	Los valores de $\frac{dP}{dt}$ serán:	¿Cómo crece la población P?
Pequeños	Menores	Mediante intervalos de tiempo
A medida que van aumentando	Se mantiene estable	Por Intervalos
Conforme se aproximen a la capacidad de carga L	Aumenta	Por intervalos

- El Equipo 3 representó analíticamente la ecuación diferencial que expresaron correctamente, pero tuvieron algunos problemas para describir el comportamiento de la población:

1. **Plantea la ecuación diferencial que describe como cambia la población confinada P, con respecto al tiempo t.** $\frac{dP}{dt} = KP(L-P)$

3. **¿Qué te dice esta ecuación diferencial sobre el comportamiento de la población P, con respecto al tiempo t? Completa la siguiente tabla:**

Para valores de P	Los valores de $\frac{dP}{dt}$ serán:	¿Cómo crece la población P?
Pequeños	Crece y luego decrece a cero	P t
A medida que van aumentando	Va hacia abajo $\frac{dP}{dt}$	P
Conforme se aproximen a la capacidad de carga L	Cercanos a cero	Desacelera P capacidad carga.

Tabla 4

En la descripción del campo de pendientes:

- El Equipo 1 tuvo problemas y sus argumentaciones no fueron las esperadas y cuando se le pedía que bosquejaran el comportamiento de la población para tres condiciones iniciales diferentes, no lo realizaron:

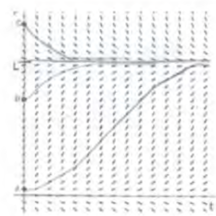
4. Analiza y describe detalladamente este campo de pendientes
   P tiende a ir hacia los valores positivos, L se mantiene estable y t tiende a bajar hacia los valores negativos.

5. La(s) solución(es) de equilibrio que identificaste previamente, ¿de qué tipo es(son)? Argumenta tu respuesta
   Son estables como una recta en dirección del eje x.

- El Equipo 2 en la descripción del campo de pendientes, ésta no fue tan descriptiva como se esperaba. Al representar gráficamente el comportamiento de la población para tres diferentes condiciones iniciales, lo realizaron adecuadamente y su descripción fue correcta:

i. Analiza y describe detalladamente este campo de pendientes

Cierto rango de valores tenderon a ser constantes



9. Describe cada una de las curvas solución trazadas

(A) tiende a crecer y luego estabilizarse

(B) crece rápido y se mantiene

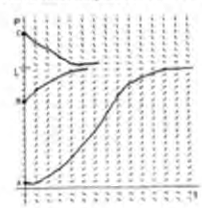
(C) decrece rápido y se estabiliza

- El Equipo 3 no realizó correctamente la descripción del campo de pendientes. Pero, bosquejaron adecuadamente las curvas soluciones representadas por cada una de las condiciones iniciales planteadas, pero la descripción del comportamiento de éstas no fue la esperada:

6. Analiza y describe detalladamente este campo de pendientes

Se observa como cambia la pendiente en cada valor de las coordenadas de la gráfica, suponiendo las pendientes son positivas van en crecimiento al llegar a L decrece, desacelera el crecimiento y después de L crece en forma negativa hacia P.

8. En el campo de pendientes, se señalan (con un punto) tres poblaciones iniciales diferentes. Traza una curva solución para cada una de estas tres condiciones



9. Describe cada una de las curvas solución trazadas

(A) va en crecimiento y desacelera llegando a un equilibrio

(B) ya creciendo se acerca a cero

(C) decrece en forma negativa ya que las pendientes vienen negativas.

En el tratamiento de la representación gráfica del comportamiento de la población:

- El Equipo 1 tuvo problemas para identificar el punto de inflexión en una curva solución de la ecuación diferencial logística y no bosquejo la gráfica de la derivada respecto a la población. Además, tuvieron problemas para describir el comportamiento de la población en el transcurso del tiempo:

A partir de la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = KP(L-P) = KLP - kP^2$$

8. ¿Qué forma va a tener la gráfica de $\frac{dP}{dt}$ en función de P? Argumenta tu respuesta

   Tiende a continuar por la zona media pero levanta de a poco.

9. ¿Para qué valores de P la derivada es cero?

   Cuando los valores son negativos.

13. ¿En qué intervalo de valores de P, la población será creciente al transcurrir el tiempo? Argumenta tu respuesta

    Superior a 10, solo tiende a subir.

14. ¿En qué intervalo de valores de P, la población será decreciente? Argumenta tu respuesta

    En intervalos menores de 6.

15. ¿Cómo va a ser la gráfica de la población P, en función del tiempo t, para $0 < P < \frac{L}{2}$? Argumenta tu respuesta

    Sera descendiente, en intervalos iguales.

- El Equipo 2 tuvo problemas para identificar el punto de inflexión de una curva solución de la ecuación diferencial y para describir el comportamiento que tiene la población respecto al tiempo:

13. ¿Para qué valor de P la derivada es máxima (pendiente máxima)? Argumenta tu respuesta

    50, solamente tiende a eso

14. Por lo que; el punto de inflexión se da cuando $P =$ 50

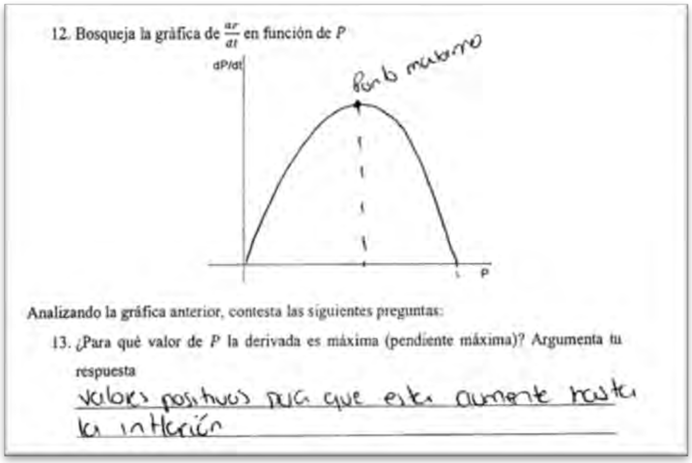
15. ¿En qué intervalo de valores de P, la población será creciente al transcurrir el tiempo? Argumenta tu respuesta

    En -50 a 0.5

16. ¿En qué intervalo de valores de P, la población será decreciente? Argumenta tu respuesta

    En 0.5 a 50

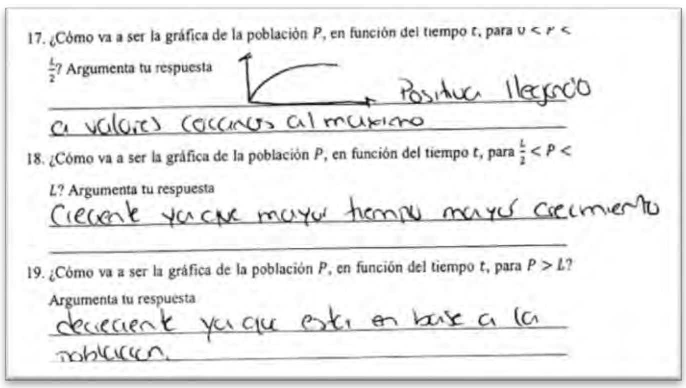
- El Equipo 3 en la relación entre la derivada y sus posibles soluciones, trazaron la gráfica de la derivada con respecto a la población e identificaron donde se da el punto de inflexión en una curva solución, pero la descripción que realizaron no fue la correcta:


12. Bosqueja la gráfica de $\frac{dP}{dt}$ en función de P

Analizando la gráfica anterior, contesta las siguientes preguntas:

13. ¿Para qué valor de P la derivada es máxima (pendiente máxima)? Argumenta tu respuesta

valores positivos para que esta aumente hasta la inflexión


17. ¿Cómo va a ser la gráfica de la población P, en función del tiempo t, para $0 < P < \frac{L}{2}$? Argumenta tu respuesta

Positiva llegando a valores cercanos al máximo

18. ¿Cómo va a ser la gráfica de la población P, en función del tiempo t, para $\frac{L}{2} < P < L$? Argumenta tu respuesta

Creciente ya que mayor tiempo mayor crecimiento

19. ¿Cómo va a ser la gráfica de la población P, en función del tiempo t, para $P > L$? Argumenta tu respuesta

decreciente ya que esta en base a la población.

Apoyados de la tabla 5, se realizó la siguiente tabla para valorar el desempeño de los estudiantes en los niveles promovidos a lo largo de la actividad:

Nivel	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
Situacional	Bajo	Bajo	Medio
Referencial	Bajo	Medio	Alto
General	Bajo	Bajo	Medio

5.4 A manera de conclusión

Como conclusión, el resultado de la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas nos mostró que en general el Equipo 1 tuvo un desempeño deficiente y el Equipo 2 tuvo un desempeño destacado en la mayoría de las Actividades, mientras tanto, el Equipo 3 tuvo un desempeño promedio al igual que la mayoría de los equipos que no se tomaron en cuenta para el análisis.

Para la secuencia de inicio cuyo propósito es reforzar en los estudiantes la noción de derivada, se tuvo una mayor participación por parte de los estudiantes. Los tres equipos mostraron un buen desempeño para las primeras actividades, pero conforme iban avanzando en el trabajo con las Actividades, el Equipo 1 iba teniendo un desempeño cada vez más deficiente, el Equipo 2 realizó adecuadamente las Actividades, pero en la Actividad 7 mostraron un desempeño poco favorable y el Equipo 3 tuvo el desempeño adecuado para alguna de las actividades e inadecuado para otras.

Las respuestas proporcionadas por los equipos en la secuencia de inicio, nos proporcionó información relevante para realizar cambios en algunas de las Actividades. Por mencionar algunos de los cambios que se han considerado; en la Actividad 3 "La fiebre" algunos de los problemas que tuvieron los equipos estuvo relacionado con el desconocimiento de la notación simbólica del cambio total de una magnitud (por ejemplo: el cambio en la temperatura ΔT) por lo cual consideramos conveniente expresarlo como; $\Delta T = T_2 - T_1$, en la Actividad 5 "Los polinomios" algunos de los problemas que tuvieron los estudiantes estuvieron relacionados a la redacción de los cuestionamientos, por lo que se han hecho cambios en la redacción de algunas de las preguntas; en la Actividad 7 "¿Qué características tiene la función?" los equipos tuvieron problemas en la interpretación de la gráfica que representaba a la función derivada por lo que se ha considerado realizar cambios en los cuestionamientos asociados a esta representación gráfica. Aunado a estos cambios, también consideramos la necesidad de realizar una sesión de trabajo con el grupo completo al finalizar esta secuencia de inicio con el propósito de propiciar la discusión y reflexión sobre las nociones matemáticas exploradas en las Actividades que conforman la secuencia.

En la secuencia de desarrollo donde se promueve la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones, la participación de los estudiantes vino a la baja. La mayoría de los equipos que trabajaron en esta secuencia tuvieron problemas para contestar algunas de las Actividades y dejaron en blanco preguntas asociadas a ellas, mientras que los equipos que se eligieron para el análisis contestaron todas o la mayoría de las Actividades de la secuencia.

Uno de los cambios importantes que se han considerado para esta secuencia de desarrollo es la inclusión de preguntas asociadas a los diferentes contextos en la Actividad 2 "Planteamiento de una Ecuación Diferencial", que sean específicas para la comprensión de la descripción de los contextos que se representan verbalmente y de los cuales hay que plantear la ecuación diferencial, esto debido a los problemas que tuvieron los Equipos para representar analíticamente la ecuación diferencial en cada uno de los casos planteados durante la secuencia. A partir de la Actividad 7 "Campo de pendientes", los Equipos tuvieron problemas para la construcción del campo de pendientes de diferentes ecuaciones diferenciales que se plantean, por ello, es necesario realizar ajustes a los cuestionamientos asociados a esta Actividad y a las que incluyen el trabajo con el campo de pendientes.

Al igual que para la secuencia de inicio, es importante que para la secuencia de desarrollo se realice una institucionalización al concluir las Actividades.

La secuencia de cierre que contiene la conjunción de los elementos más importantes vistos tanto en la secuencia de inicio como la de desarrollo, resulto ser la de mayor dificultad para los estudiantes, originado probablemente por su desempeño en la secuencia anterior y por la falta de una institucionalización al final de las secuencias de inicio y desarrollo. Es importante mencionar que esta secuencia la trabajaron como tarea.

Finalmente, en cuanto a la categorización de los diferentes niveles de comprensión de la EMR, podemos decir, que el Equipo 1 en su desempeño general, tuvo un nivel situacional, referencial, general y formal bajo; el Equipo 2 logro un nivel situacional alto, un nivel referencial y general medio, y finalmente un nivel formal bajo; el Equipo 3 tuvo un nivel situacional y referencial medio, y un nivel general y formal bajo.

Capítulo 6.

Conclusiones

El propósito de este trabajo ha consistido en diseñar una secuencia de actividades didácticas para promover la construcción por el estudiante de la noción de ecuación diferencial ordinaria y en particular para promover la relación entre la noción de derivada y de ecuación diferencial ordinaria, sustentando este diseño desde una perspectiva teórica basada en la Educación Matemática Realista y en la Teoría de Representaciones Semióticas, y promoviendo el uso de GeoGebra como recurso didáctico.

La secuencia de actividades didácticas se organizó en una secuencia de inicio, una de desarrollo y una de cierre. La secuencia de inicio se diseñó específicamente para reforzar la noción de derivada, mientras que en la secuencia de desarrollo se introduce al estudiante a las EDO y se culmina con la secuencia de cierre en la cual se ponen en práctica algunas de las nociones matemáticas analizadas en las secuencias previas.

En las Actividades que conforman la secuencia de actividades didácticas se promovieron los seis diferentes Principios de la Educación Matemática Realista que son: De Actividad, De Realidad, De Reinvención Guiada, De Niveles, De Interacción y De Interconexión. De estos Principios, fue el Principio de los Niveles de comprensión el que se privilegió para el diseño de las secuencias, ya que en cada una de las Actividades que conforman a éstas, se consideraron los niveles de comprensión que son: Referencial, Situación, General y Formal. De igual manera el diseño de cada una de las Actividades está apoyado en la Teoría de Representaciones Semióticas, ya que se consideraron las tres actividades cognitivas fundamentales: Formación, Tratamiento y Conversión.

A partir del análisis general realizado por diversos autores sobre el Principio de Niveles, se elaboraron tres tablas, las cuales tienen la intención de describir cada uno de los niveles de comprensión, específicamente para la noción de derivada y para la noción de ecuación diferencial ordinaria, también se incluye en estas tablas una categorización del nivel de comprensión la cual nos ayudó para la valoración de las respuestas dadas por los estudiantes en las Actividades. Se espera que estas tablas puedan ser de ayuda para diseños o investigaciones futuras, que estén relacionadas con estas nociones.

La puesta en escena de las Actividades se llevó a cabo en el Instituto Tecnológico de Hermosillo con un grupo del tercer semestre de Ingeniería Mecánica. Se aplicó la secuencia en diferentes sesiones, en donde se pudo notar que para la secuencia de inicio los estudiantes tuvieron una mayor participación y no tuvieron tantos problemas para contestar las Actividades, en la secuencia de desarrollo la participación ya no fue tan constante y se acercaron con mayor frecuencia al investigador para resolver dudas que les surgían al estar trabajando en las Actividades, mientras que la secuencia de cierre se pidió a los estudiantes de tarea extra clase y fueron pocos equipos los que realizaron dicha tarea.

Para realizar el análisis de la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas se consideraron las respuestas que escribieron los estudiantes en sus hojas de trabajo (Actividades), se consideraron para este análisis tres equipos (Equipo 1,2 y 3). Para el análisis de las respuestas de los equipos para cada Actividad, se incluyó una tabla en la cual se especifica la categoría de estas respuestas según la valoración del nivel de comprensión promovido en la Actividad. Al finalizar este análisis, pudimos concluir que el Equipo 1 tuvo un desempeño deficiente y el Equipo 2 un desempeño sobresaliente, mientras que el Equipo 3 tuvo altibajos en el desarrollo de la secuencia didáctica.

A través de esta puesta en escena pudimos constatar el problema que tienen los estudiantes para realizar la conexión entre la noción de derivada y la de EDO, así como también tuvieron dificultades para realizar las conversiones entre los diferentes tipos de representación de una EDO. En este sentido, consideramos que hizo falta una sesión con el grupo completo al finalizar las Actividades de cada secuencia, para propiciar la discusión y reflexión de lo explorado en las Actividades, con el fin de institucionalizar las nociones matemáticas analizadas en la secuencia. A pesar de ésto, observamos que algunos de los estudiantes desarrollaron habilidades para identificar una EDO, en cualquier registro de representación que se les presente.

Esta puesta en escena fue de gran ayuda para notar que algunas de las Actividades requerían cambios para mejorarlas. Esto sugiere que el proceso de diseño de secuencias de actividades didácticas es iterativo, pues con cada implementación, existe la posibilidad de detectar nuevos conflictos, lo cual sugiere una modificación o adaptación de la secuencia, lo que nos lleva a diseños cada vez mejor fundamentados, pero siempre perfectibles. Como proyecto futuro consideramos el seguir experimentando la secuencia de actividades didácticas con el fin de mejorarla.

También a partir de la puesta en escena observamos que el uso de los recursos tecnológicos en este caso GeoGebra, potencializa el aprendizaje que tienen los estudiantes, debido a que en los applets diseñados los estudiantes pudieron visualizar el comportamiento de gráficas y manipular las herramientas tecnológicas de GeoGebra que les fueron útiles para contestar los cuestionamientos de las diferentes Actividades que lo requerían.

El estudio de los tratamientos y conversiones entre las diferentes representaciones de una noción matemática representa una tarea demasiado complicada si se le aborda sin contar con el apoyo de algún recurso tecnológico. El utilizar los applets de GeoGebra nos permitió automatizar, facilitar y simplificar algunas de las posibles conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica que se promueven en la secuencia de actividades didácticas, con el propósito de crear un medio en el que el estudiante puede explorar, conjeturar, analizar, verificar ideas, así como desarrollar habilidades y estrategias que le serán de gran ayuda a la hora de resolver problemas.

Finalmente, es importante mencionar que, durante el desarrollo de este trabajo, se realizaron dos publicaciones de artículos que surgieron a partir de este trabajo, uno de ellos fue publicado en la revista El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática en su Volumen 10 y el otro artículo fue publicado en la revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa en su Volumen 31, versión 1.

Referencias

Aktümen, M. y Kabaca, T. (2012). Exploring the mathematical model of the thumbaround motion by geogebra. Documento en línea. Recuperado de: http://doi.org/10.1007/s10758-012-9194-5

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. Documento en línea. Recuperado de: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII-AngelAlsina.pdf

Balderas A. (2001). Diseño de un curso de Ecuaciones Diferenciales asistido por computadora (Tesis inédita de maestría). Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Barrera J., Téllez P., León I. y Amaya T. (2012). Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con Derive: de la solución algebraica a la solución gráfica. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 25, pp. 1425-1433.

Bressan, A. (2010). Los principios de la educación de la Matemática Realista.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.). *PNA* 3(3), pp. 123-133.

Diaz Barriga, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. Documento en línea. Recuperado de: http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Dullius. M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico (Tesis inédita de Doctorado). Universidad de Burgos, España.

Duval, Raymond, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Flores, A. (1997). Soluciones geométricas a problemas de máximos y mínimos. *Miscelánea matemática.* No. 26, pp. 49-57. Sociedad Matemática Mexicana.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática. Año 2, No. 3, pp. 11-44.

Gamino, A. y Acosta, M. (2016). Modelo curricular del Tecnológico Nacional de México. Revista Electrónica Educare. Vol. 20, No. 1, pp. 1-25.

Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L. y Ballés, H. (2014). GeoGebra y los sistemas de representación semióticos. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 27, pp. 2169-2176.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En Fou-Lai Lin (Eds.). Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001. The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, pp. 1-43. Taiwan: National Taiwan Normal University.

Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. Encyclopedia of Mathematics Education, pp. 521-525.

Hernández M. (2009). Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme (Tesis inédita de maestría). Instituto Politécnico Nacional, México.

Kaput, J. (1997). Rethinking calculus: Learning and teaching. American Mathematical Monthly, 104, pp. 731-737.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y Creencias de los Profesores Universitarios de Matemáticas acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. Enseñanza de las Ciencias. Vol. 21, No. 2, pp. 265-280.

Nápoles, J. (2003). La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico. Educación y Pedagogía. Vol. XV, No. 35, pp. 165-181.

Nápoles, J.; González, A.; Genes F.; Basabilbaso, F.; Brundo J. (2004). El Enfoque Histórico Problémico en la Enseñanza de la Matemática para Ciencias Técnicas: El Caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Acta Scientae. Vol. 6, No. 2, pp. 41-59. Ed. Ulbra.

Perdomo, J. (2010). Construcción del concepto de ecuación diferencial ordinaria en escenarios de resolución de problemas (Tesis inédita de doctorado). Universidad de la Laguna, España.

Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. Revista de la Didáctica de las Matemáticas. Vol. 78, pp. 113–134.

Rasmussen, C. & King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31 (2), 161-172.

Rasmussen, C. & Whitehead, K. (2003). Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. In A. Selden & J. Selden (Eds.), *MAA Online Research Sampler*. (http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html)

Rasmussen, C.; Kwon, O.; Allen, K.; Marrongelle, K.; Burtch, M. (2006). Capitalizing on Advances in Mathematics and K-12 Mathematics Education in Undergraduate Mathematics: An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations. Asia Pacific Education Review. Vol. 7, No. 1, pp. 85-93.

Rasmussen, C. & Kwon, O. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, pp. 189-194.

Rasmussen, C. (2016). The Inquiry Oriented Differential Equations Project: Addressing Challenges Facing Undergraduate Mathematic Education. MatRIC Modelling Colloquium.

Rivera, R. (2001). Sobre el sentido y significado que los estudiantes del área de ingeniería dan a las ecuaciones diferenciales (Tesis inédita de maestría). Universidad de Sonora, México.

Rubal, D. y Villaseñor, G. (2018). Secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de Ecuación Diferencial Ordinaria. El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de la Ciencias y la Matemática. Vol. 10. Pp. 1-20.

Rubal, D. y Villaseñor, G. (2018). Diseño de una secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de Ecuación Diferencial Ordinaria. Acta Latinoamericana Matemática. Vol. 31. No. 1. Pp. 516-524.

Tecnológico Nacional de México (2016). Programa de estudios de ecuaciones diferenciales. México.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Em Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recuperado de: http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf.

Zolkower, B.; Bressan, A. y Gallego, M. (2004). I Parte: la educación matemática realista. Principios en que se sustenta. Documento en línea. Recuperado de: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf.

Zolkower, B.; Bressan, A. y Gallego, F. (2006). La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores. Documento en línea. Recuperado de: https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/Yupana/article/download/2 47/333.

Zolkower, B.; Bressan, A. y Gallego, F. (2016). Educación Matemática Realista. Bases Teóricas. Documento en línea. Recuperado de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf.

Anexos

Anexo A: Secuencia de Actividades didácticas

INICIO

Actividad 1. *Las matemáticas en la vida diaria*

Modalidad: Individual

❖ Haga corresponder las gráficas con las descripciones siguientes:

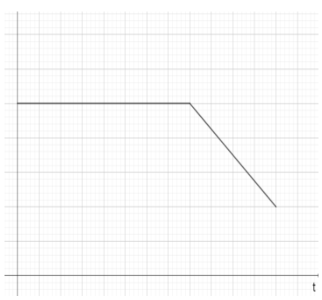
A. La población de una nueva especie introducida en una isla tropical.

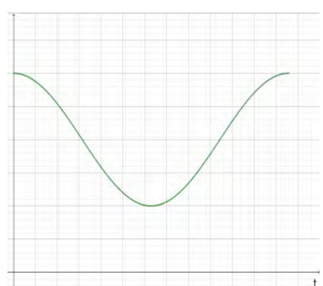
B. La temperatura de un lingote de metal colocado en un horno y a continuación sacado de él.

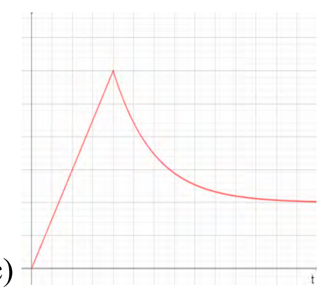
C. La velocidad de un carro que viaja a velocidad uniforme y después frena uniformemente.

D. La masa del carbono-14 en una muestra antigua.

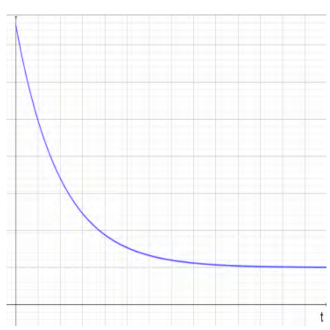
E. La concentración de polen de una planta en el aire en el curso de un año.

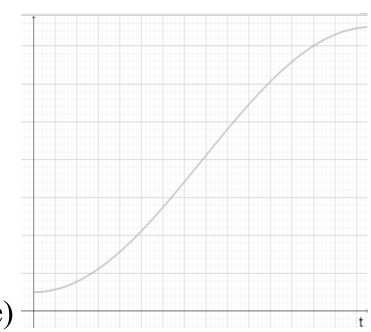
a) 

( ) b) 

( ) c) 

( )

d) 

( ) e) 

( )

❖ De forma individual, responde las siguientes preguntas asociadas a la actividad anterior:

1. Argumenta cual fue el proceso que utilizaste para asociar cada una de las situaciones planteadas con su respectiva gráfica:

    A. ____
    ____
    ____

    B. ____
    ____
    ____

    C. ____
    ____
    ____

    D. ____
    ____
    ____

    E. ____
    ____
    ____

2. ¿Qué comportamiento tendrían las curvas de cada una de las gráficas si éstas se prolongaran en el tiempo?

    I. Bosqueje lo que sucederá

    II. Haz una descripción de ese proceso

        A. ____
        ____
        ____
        ____

        B. ____
        ____

C.

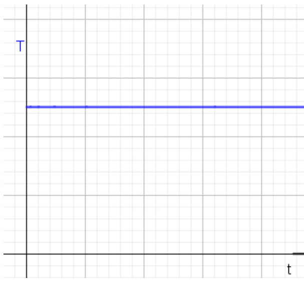
D.

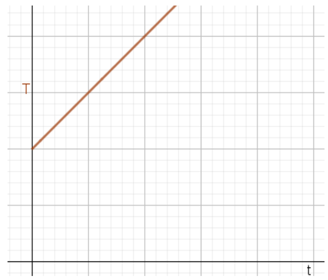
E.

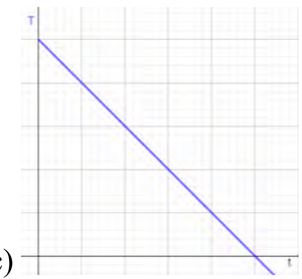
Actividad 2. ***La temperatura de un vaso con agua***

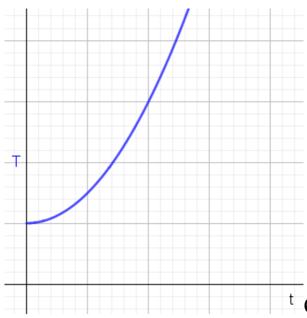
Modalidad: Individual

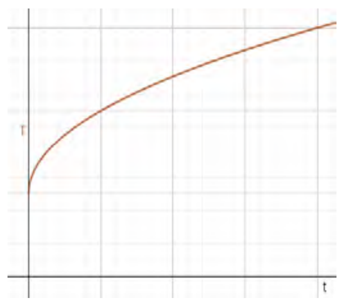
Las siguientes graficas están relacionadas con el comportamiento que tiene la temperatura de un vaso con agua:

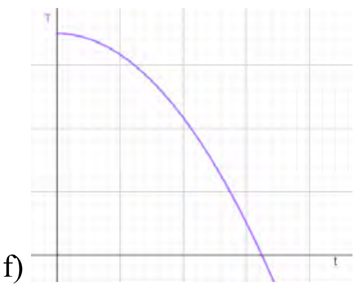
a) 

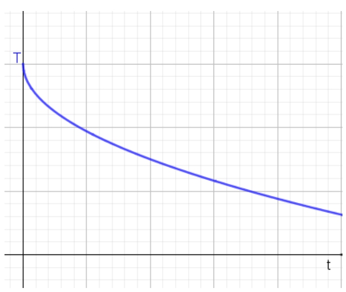
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

❖ Haz lo que se pide a continuación:

1. Describe para cada una de las gráficas como varia la temperatura con respecto al tiempo:

    a. ____

    ____

    ____

    ____

b.

c.

d.

e.

f.

g.

2.- En las anteriores representaciones de la variación de la temperatura con respecto al tiempo, ¿Qué representa o que información te da la derivada?

Actividad 3. *La fiebre*

Modalidad: Equipo de 2

La **fiebre** es un síndrome (conjunto de síntomas y signos) cuyo signo principal es la hipertermia, aunque no es imprescindible, pues puede haber fiebre sin hipertermia.

El organismo en condiciones normales mantiene la temperatura corporal dentro de un rango estrecho, independientemente de las variaciones del medio ambiente. Normalmente la temperatura es un poco mayor en la tarde, cerca de las 20 horas, y más baja en la madrugada. Esta es una variación de tipo circadiano. La temperatura que se registra en un paciente sano oscila entre 36,2ºC y 37ºC.

Se considera que una persona presenta:

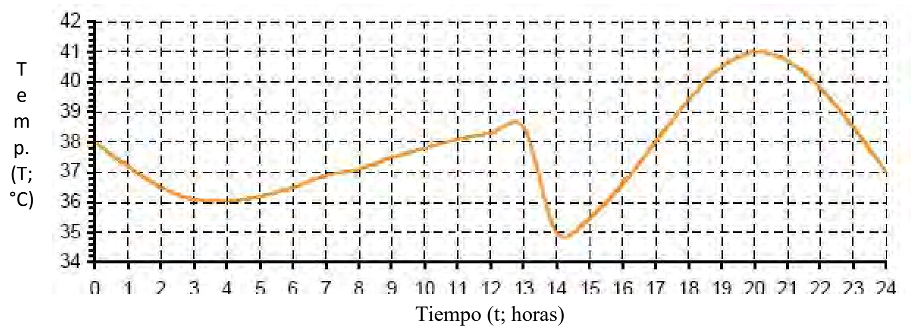
- un **estado subfebril**: cuando la temperatura oscila entre 37 y 37,5 ºC.
- **hipotermia**: cuando la temperatura es menor de 35,0ºC.
- **hipertermia**: cuando la temperatura es mayor de 41ºC.

Se desglosa la siguiente información relacionada con las temperaturas:

- **34 °C**: se llama hipotermia cuando la temperatura es menor a 35 °C. Hay temblor grave, pérdida de capacidad de movimiento en los dedos, cianosis y confusión. Puede haber cambios en el comportamiento.
- **35 °C**: temperatura levemente baja. La temperatura normal del cuerpo humano oscila entre los 36 y 37 °C
- **37 °C**: temperatura normal del cuerpo; esta puede oscilar entre 36 y 37 °C
- **38 °C** (febrícula): temperatura superior a 37 °C pero inferior a 38 °C durante 24 horas
- **39 °C** (pirexia): existe abundante sudor acompañado de rubor, con taquicardias y disnea. Puede surgir agotamiento. Los epilépticos y los niños pueden sufrir convulsiones llegados a este punto.
- **40 °C**: mareos, vértigos, deshidratación, debilidad, náuseas, vómitos, cefalea y sudor profundo.
- **41 °C** (urgencia): todo lo anterior más acentuado; también puede existir confusión, alucinaciones, delirios y somnolencia.

- **42 °C**: además de lo anterior, el sujeto puede tener palidez o rubor. Puede llegar al coma, con hipertensión o hipotensión y una gran taquicardia.

A continuación, se presenta la representación gráfica de la temperatura de un caso de fiebre en un paciente:



Gráfica 1. Temperatura de un paciente con fiebre en el paso del tiempo

❖ Responde lo que se pide:

1. Describe detalladamente que es lo que está sucediendo con el paciente según la Gráfica 1

2. Calcula para los siguientes intervalos de tiempo, el cambio en la temperatura (ΔT)

(t_1, t_2)	$\Delta T, °C$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}, \frac{°C}{hr}$	Interpretación
$(0,4)$			
$(4,11)$			
$(13,15)$			
$(17,20)$			
$(20,24)$			

Tabla 1.

   a. Completa la tercera columna de la Tabla 1 calculando la rapidez de cambio promedio (razón de cambio promedio)

b. Interpreta estos resultados obtenidos para cada intervalo de tiempo

3. En la Gráfica 1 representa la rapidez de cambio promedio en los intervalos indicados

   a. Describe lo que hiciste y argumenta tu respuesta

   ____

   ____

   ____

4. Atendiendo lo hecho anteriormente:

   a. ¿En qué intervalo de tiempo de los señalados el cambio de la temperatura fue más rápido?

   ____

   b. ¿En qué intervalo de tiempo de los señalados el cambio de la temperatura fue más lento?

   ____

   c. ¿Cómo llegaste a esa conclusión? Justifica tu respuesta

   ____

   ____

5. Con la información obtenida. Explica la evolución de la temperatura del paciente

____

____

____

____

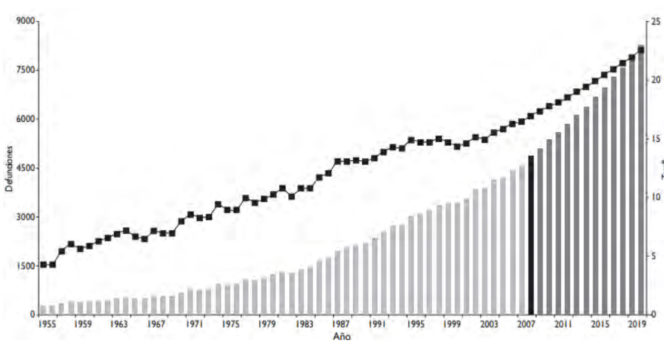
Actividad 4. *El cáncer de mama en México.*

Modalidad: Equipo de 2

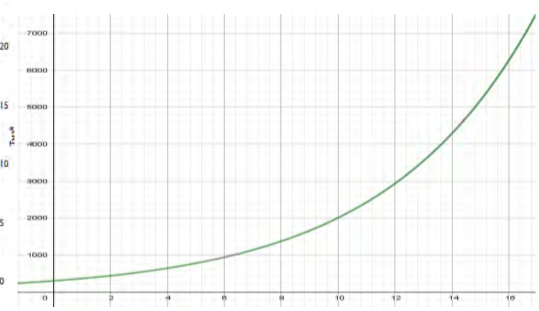
El cáncer de mama, al igual que otros tipos de cáncer, se origina por la mutación de células, las cuales crecen de forma anormal y desordenada, y se pueden diseminar a otras partes del cuerpo.

En México, cada año aumenta tanto el número de pacientes como el número de muertes por este mal, siendo de las principales causas de muerte en el país. Es importante mencionar, que dicha enfermedad puede ser prevenida si se realizan exámenes de manera constante y puede ser tratada y curada si se detecta en etapas tempranas.

A continuación, se presenta el gráfico original (Gráfica 2) y un modelo gráfico idealizado (Gráfica 3) de las defunciones de mujeres mayores a 25 años, por cáncer de mama en México, a lo largo de los años. Es importante mencionar que en el modelo idealizado se definió la variable tiempo como los años transcurridos a partir de 1955. Este modelo idealizado, tiene un error por debajo del 8% del modelo original:



Gráfica 2. Modelo original



Gráfica 3. Modelo idealizado

- En compañía de un compañero, analiza las gráficas anteriores y responde lo que se pide:
  1. ¿Qué puedes decir sobre las defunciones por cáncer de mama con respecto al paso de los años?

____

____

____

- Para analizar detalladamente el comportamiento del modelo gráfico presentado anteriormente es necesario descargar el software libre GeoGebra y seguir las siguientes instrucciones:

1. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico1.ggb

   a. Mueve el punto x0 que esta sobre la barra (deslizador) que aparece en la parte superior de la vista gráfica y responde lo siguiente:

      i. ¿Qué sucede al mover el punto señalado?

      ____

      ____

   b. Realiza una tabla de valores en la cual se tenga el número de años a partir de 1955 y el de defunciones por año:

x, años a partir de 1951	y, defunciones	Δy	$\frac{y_2}{y_1}$
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

Tabla 2.

i. Completa la tercera columna de la Tabla 2 calculando el cambio en el número de defunciones (Δy)

ii. ¿Qué comportamiento tienen estos cambios?

____

____

iii. Completa la cuarta columna de la Tabla 2, ¿qué puedes decir de los valores que obtuviste?

____

____

iv. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de x?

____

v. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de y?

____

vi. Después de haber realizado estos análisis en los valores numéricos de x y y, reportados en la Tabla 2. ¿En qué forma están aumentando los valores de y con respecto a los de x? Argumenta tu respuesta

____

____

c. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico2.ggb

i. Habilita la opción de recta y mueve el punto x0:

ii. ¿Qué tiene de particular esa recta?

____

iii. ¿Qué sucede con la recta al mover x0?

____

d. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico3.ggb

i. Elige el número m y mueve el punto x0:

ii. ¿Qué representa el número m?

____

iii. ¿Qué sucede con m al mover x0?

____

iv. ¿Qué información te brinda m con respecto a las defunciones por cáncer de mama?

____

e. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico4.ggb

i. Selecciona el punto B y mueve el punto $x0$:

ii. ¿Qué representan las coordenadas del punto B?

____

iii. ¿Qué sucede con B al mover $x0$?

____

iv. ¿Qué representa el punto B?

____

v. En el contexto de las defunciones por cáncer de mama, ¿qué relación tiene B con el punto A?

____

f. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico5.ggb

i. Marca la función $h(x)$ y contesta lo siguiente:

ii. ¿Qué representa la función $h(x)$?

____

iii. ¿Qué relación tiene el punto B con la función $h(x)$?

____

iv. Completa la siguiente tabla

x	$h(x)$	$\frac{h_2}{h_1}$
0		
1		
2		

3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

Tabla 3. Función $h(x)$

v. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de x y de $h(x)$?

___

vi. ¿Qué tipo de función es $h(x)$?

___

vii. ¿Qué puedes concluir de todo este proceso?

___

___

2. Después de haber realizado este análisis con el apoyo de GeoGebra. ¿Cómo te ayuda todo este proceso de construcción a comprender el contexto planteado?

___

___

3. Interactúa con tu profesor, para hablar de lo que se ha aprendido hasta este momento

Actividad 5. *Los polinomios*

Modalidad: Equipo de 3

- Para esta actividad descarga el archivo polinomio.ggb y ábrelo con el software matemático GeoGebra. Haz lo que se te pide:

1. Mueve el deslizador b y contesta lo siguiente:
    a. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador b?

    ____

    b. ¿Qué sucede con la expresión algebraica $f(x)$ cuando se mueve el deslizador b?

    ____

    c. Deja el deslizador b, en el número 2 y mueve el deslizador $x1$:
        i. ¿Qué sucede al mover el deslizador $x1$?

        ____

        ii. ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente?

        ____

        iii. ¿En qué intervalo $f(x)$ es decreciente?

        ____

    d. Da clic en el botón recta y mueve el deslizador $x1$:
        i. ¿Qué sucedió al darle clic al botón recta?

        ____

        ii. ¿Qué sucede con la recta al mover el deslizador $x1$?

        ____

        iii. ¿Qué representa esa recta?

        ____

        iv. ¿Cómo es la recta cuando $f(x)$ es creciente?

        ____

        v. ¿Cómo es la recta cuando $f(x)$ es decreciente?

        ____

    e. Da clic en el botón número y mueve el deslizador $x1$:
        i. ¿Qué sucedió al darle clic al botón número?

ii. ¿Qué sucede con m al mover el deslizador $x1$?

iii. ¿Qué representa el número m?

iv. ¿Cómo es m cuando $f(x)$ es creciente?

v. ¿Cómo es m cuando $f(x)$ es decreciente?

f. Da clic en el botón punto y mueve el deslizador $x1$:

i. ¿Qué sucedió al darle clic al botón punto?

ii. ¿Qué sucede con el punto al mover el deslizador $x1$?

iii. ¿Qué representan las coordenadas del punto B?

iv. ¿Qué relación tiene B con el punto A?

g. Da clic al botón de rastro y da clic derecho sobre el deslizador $x1$ y selecciona la opción de animación:

i. ¿Qué sucedió?

ii. ¿Qué representa el rastro dejado por el punto B?

h. Da clic al botón curva $h(x)$:

i. ¿Qué sucedió?

ii. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?

iii. En el intervalo que $f(x)$ es creciente, ¿Qué signo tiene $h(x)$?

iv. En el intervalo que $f(x)$ es decreciente, ¿Qué signo tiene $h(x)$?

____

v. Cuando $f(x)$ tiene un valor extremo (máximo o mínimo local), ¿Qué pasa en $h(x)$?

____

vi. Calcula $\frac{d(2x^2)}{dx} =$ __________

i. Mueve el deslizador d:

i. ¿Qué sucede con la expresión algebraica $f(x)$ cuando mueves el deslizador d?

____

ii. ¿Qué sucede con $f(x)$ cuando mueves el deslizador d?

____

iii. ¿Qué sucede con $h(x)$ cuando mueves el deslizador d?

____

iv. ¿A qué crees que se daba lo ocurrido?

____

v. Calcula $\frac{d(2x^2+3)}{dx} =$ ______________

vi. A partir de lo anterior, calcula $\frac{d(ax^2+b)}{dx} =$ ________________

vii. ¿Qué puedes concluir de todo ésto?

____

____

j. Regresa los deslizadores de cada número al valor cero.

2. Ahora mueve el deslizador c:

a. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador c?

____

b. ¿Qué sucede con la expresión algebraica $f(x)$ cuando se mueve el deslizador c?

____

c. Deja el deslizador c en algún número y mueve el deslizador $x1$:

i. ¿Qué sucede al mover el deslizador $x1$?

____

ii. ¿Qué sucede con la recta?

____

iii. ¿Qué sucede con el número m?

____

iv. ¿Qué sucede con el punto B?

____

v. ¿Qué sucede con la función $h(x)$?

____

vi. Calcula $\frac{d(-3x)}{dx} =$ _____________

vii. Calcula $\frac{d(4x-2)}{dx} =$ _____________

viii. Calcula $\frac{d(mx+b)}{dx} =$ ______________

d. ¿Qué puedes concluir de todo ésto?

____

____

e. Regresa los deslizadores de cada número al valor cero.

3. Ahora mueve el deslizador a:

a. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador a?

____

b. ¿Qué sucede con la expresión algebraica $f(x)$ cuando se mueve el deslizador a?

____

c. ¿Qué sucede con la expresión algebraica $h(x)$ cuando se mueve el deslizador a?

____

d. Deja el deslizador a en el número 1 y mueve el deslizador b hasta el número 3:

i. ¿Qué sucede al mover los deslizadores?

____

ii. ¿En qué intervalo(s) $f(x)$ es creciente?

____

iii. ¿Qué signo tiene $h(x)$ en ese intervalo?

____

iv. ¿En qué intervalo(s) $f(x)$ es decreciente?

____

v. ¿Qué signo tiene $h(x)$ en ese intervalo?

____

e. Sitúa el deslizador $x1$ en el número -2:

i. ¿Qué sucede en la gráfica de $f(x)$?

____

ii. ¿Qué sucede en la gráfica de $h(x)$?

____

iii. ¿Qué representa el punto A?

____

f. Sitúa el deslizador $x1$ en el número 0:

i. ¿Qué sucede en la gráfica de $f(x)$?

____

ii. ¿Qué sucede en la gráfica de $h(x)$?

____

iii. ¿Qué representa el punto A?

____

g. Sitúa el deslizador $x1$ en el número -1:

i. ¿Qué sucede en la gráfica de $f(x)$?

____

ii. ¿Qué sucede en la gráfica de $h(x)$?

____

iii. ¿Qué representa el punto A?

____

h. Calcula $\frac{d(x^3+3x^2)}{dx} =$ ______________

i. ¿Qué puedes concluir de todo ésto?

j. Describe las diferentes relaciones encontradas en los incisos anteriores entre $f(x)$ y $h(x)$

Actividad 6. *La exponencial*

Modalidad: Equipo de 3

Para esta actividad descarga el archivo exponencial.ggb y ábrelo con el software matemático GeoGebra. Haz lo que se te pide:

1. Mueve el deslizador a y contesta lo siguiente:
   a. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador a?

   ____

   b. ¿Qué sucede con la expresión algebraica cuando se mueve el deslizador a?

   ____

   c. Deja el deslizador a, en el número 1 y da clic derecho sobre el deslizador $x1$ y selecciona la opción de animación
      i. ¿Qué sucede al mover el deslizador $x1$?

      ____

      ii. ¿Qué sucede con la recta tangente del punto A al mover el deslizador $x1$?

      ____

      iii. ¿Qué sucede con la pendiente m de la recta tangente al mover el deslizador $x1$?

      ____

      iv. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?

      ____

      v. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?

      ____

      vi. ¿Qué representa el rastro dejado por el punto B?

      ____

      vii. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?

      ____

      viii. ¿Qué relación hay entre $f(x)$ y $h(x)$?

      ____

      ix. Calcula $\frac{d(e^x)}{dx} =$ ____________

x. Calcula $\frac{d(ae^{x})}{dx} =$ ____________

xi. Calcula $\frac{d(ae^{x}+b)}{dx} =$ ____________

xii. ¿Qué puedes concluir de este proceso?

____

____

d. Descarga el archivo exponencial(kpositiva).ggb

e. Fija el deslizador k en algún número y mueve el deslizador a

i. ¿Qué sucede en la gráfica?

____

ii. ¿Qué sucede con la expresión algebraica?

____

iii. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?

____

iv. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?

____

v. ¿Qué representa el rastro dejado por el punto B?

____

vi. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?

____

i. Calcula $\frac{d(ae^{kx})}{dx} =$ ____________

f. Descarga el archivo exponencial(knegativa).ggb

g. Fija el deslizador k en algún número y mueve el deslizador a

i. ¿Qué sucede en la gráfica?

____

ii. ¿Qué sucede con la expresión algebraica?

____

iii. ¿Qué sucede con el punto B al mover el deslizador $x1$?

____

iv. ¿Qué relación existe entre el punto A y el punto B?

____

v. ¿Qué representa el rastro dejado por el punto B?

____

vi. ¿Qué relación existe entre el punto B y la curva $h(x)$?

____

ii. Calcula $\frac{d(ae^{kx})}{dx} =$ ____________

iii. ¿Qué puedes concluir de todo ésto?

____

____

2. Explica con tus palabras que has aprendido con lo realizado en la Actividad 6.

____

____

____

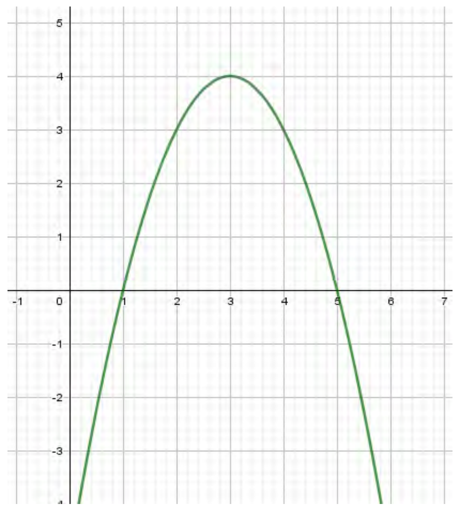
____

Actividad 7. *¿Qué características tiene la función?*

Modalidad: Individual

❖ Contesta lo que se pide:

1. A continuación, se muestra la gráfica de la derivada de cierta función:



Gráfica 4. Gráfica de cierta función derivada

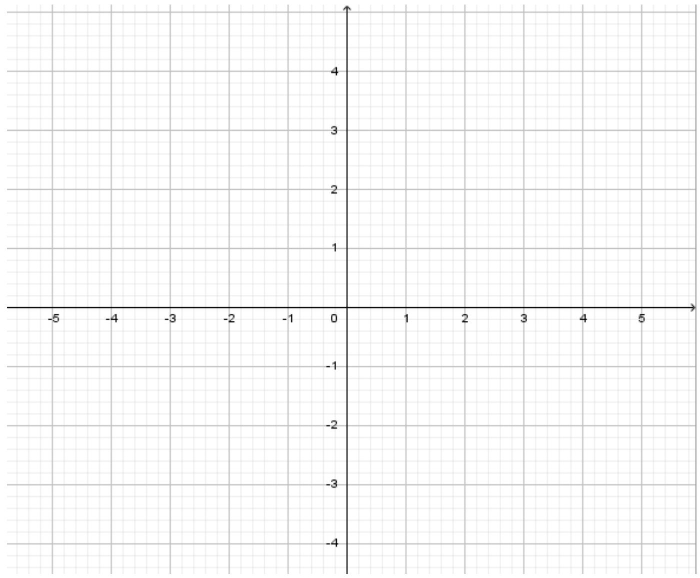
i. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es creciente?

ii. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es decreciente?

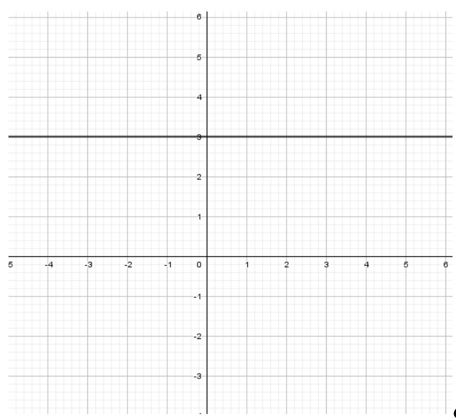
iii. ¿Tendrá algún valor extremo (máximo o mínimo local) la función cuya derivada es la mostrada en la gráfica?

iv. ¿Tendrá algún punto de inflexión la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica?

v. Bosqueja una posible grafica de la función que tiene como derivada la gráfica anterior



2. Ahora, se muestra otra gráfica de la derivada de cierta función:



¿

Gráfica 5. Función derivada

i. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es creciente?

____

ii. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es decreciente?

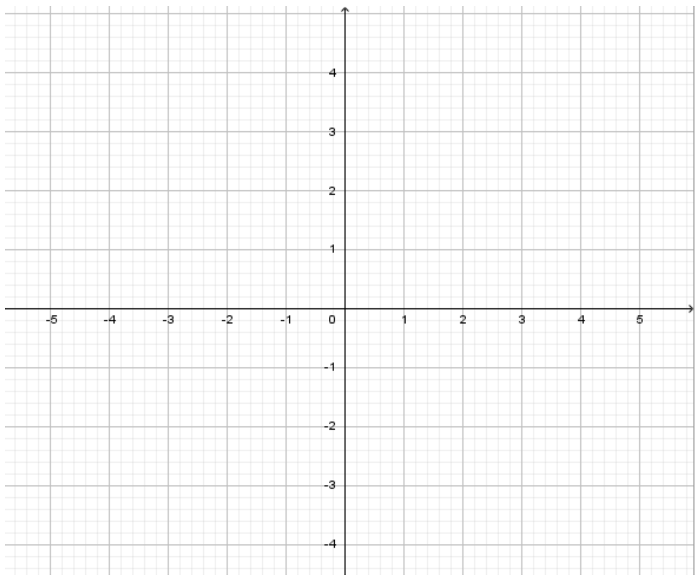
____

iii. ¿Tendrá algún valor extremo (máximo o mínimo local) la función cuya derivada es la mostrada en la gráfica?

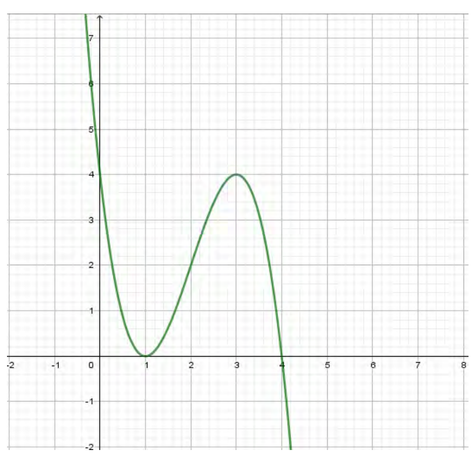
____

iv. ¿Tendrá algún punto de inflexión la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica?

v. Bosqueja una posible grafica de la función que tiene como derivada la gráfica anterior



3. Por último, se muestra la gráfica de la derivada de cierta función derivada



Gráfica 6. Función derivada

i. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es creciente?

ii. ¿En qué intervalo la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica anterior es decreciente?

---

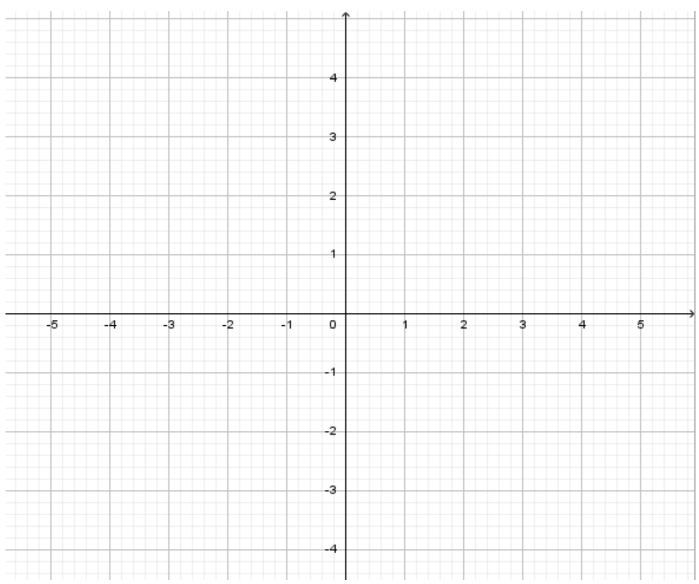
iii. ¿Tendrá algún valor extremo (máximo o mínimo local) la función cuya derivada es la mostrada en la gráfica?

---

iv. ¿Tendrá algún punto de inflexión la función que tiene como derivada a la mostrada en la gráfica?

---

vi. Bosqueja una posible grafica de la función que tiene como derivada la gráfica anterior



DESARROLLO

Actividad 1. *Comportamientos asociados a la derivada en la vida diaria*

❖ Haga corresponder las gráficas con las descripciones siguientes:

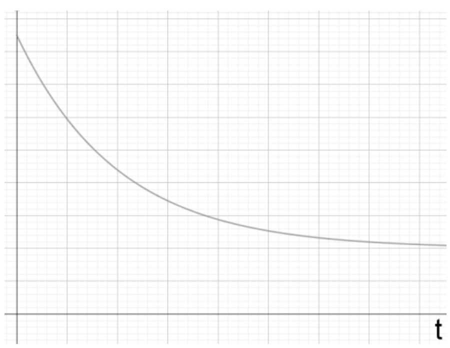
A. La tasa de crecimiento de un cultivo de bacterias es cada vez más rápida

B. La razón de cambio de la demanda de un producto en un año es constante

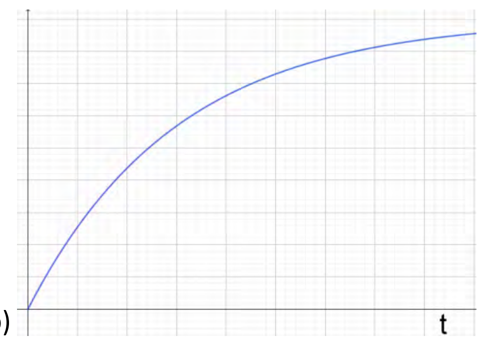
C. La rapidez con la que se descalcifica un hueso es cada vez más lenta

D. La velocidad con la que se deprecia un vehículo es cada vez más rápida

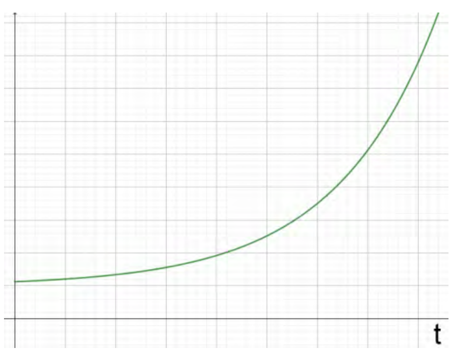
E. La razón con la que una persona crece hasta los 20 años es cada vez más lenta

a)


( )

b)


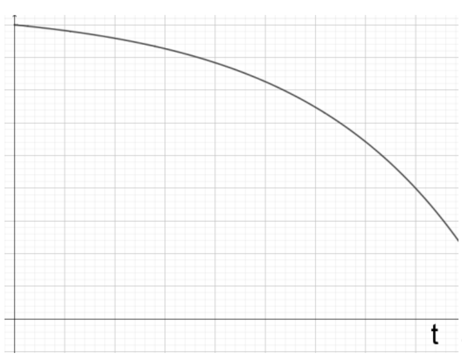
( )

c)


( )

d)


( )

e)


( )

- ❖ Responde las siguientes preguntas, asociadas a la actividad anterior:

1. Argumenta cual fue el proceso que utilizaste para asociar cada una de las situaciones planteadas con su respectiva gráfica:

   A. ____
   ____
   ____

   B. ____
   ____
   ____

   C. ____
   ____
   ____

   D. ____
   ____
   ____

   E. ____
   ____
   ____

Actividad 2. ***Planteamiento de una Ecuación Diferencial***

A veces no conocemos a la función que modela cierta situación, pero tenemos información de su rapidez de cambio o su derivada.

A. Contaminación en un lago.

Si entra agua limpia a un lago contaminado y una corriente saca agua, el nivel de contaminación en el lago disminuirá (suponiendo que no se agreguen nuevos contaminantes). La rapidez con la que disminuyen la cantidad de contaminantes en el lago en el transcurso del tiempo es proporcional a la cantidad de contaminantes presente.

- Haz lo que se pide a continuación:
  1. Identifica las magnitudes variables involucradas.

     ____

  2. En la descripción de la situación se enuncia lo siguiente "La rapidez con la que disminuyen la cantidad de contaminantes en el lago en el transcurso del tiempo" como representarías esto simbólicamente

     ____

  3. Escribe una representación analítica que describa el comportamiento de la rapidez de cambio, según la situación planteada.

     ____

  4. Describe la expresión analítica que propusiste.

     ____

     ____

     ____

Este tipo particular de ecuación que contiene a la derivada de una función, se llama ecuación diferencial.

Está es una ecuación diferencial que representa cómo cambia la cantidad de contaminantes en un lago con respecto al tiempo.

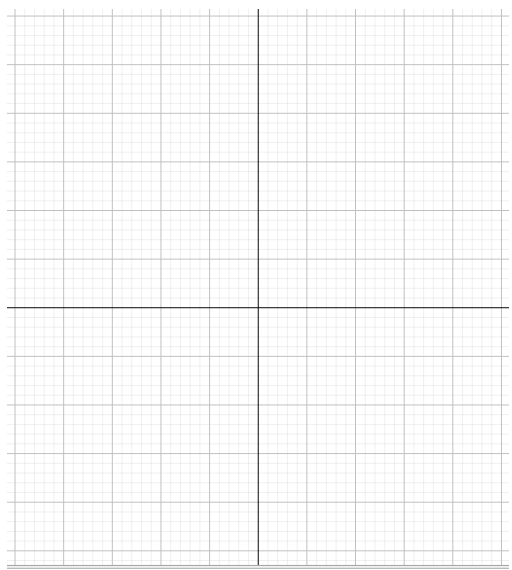
La incógnita en esta ecuación diferencial es la función que representa la cantidad de contaminantes con respecto al tiempo.

5. ¿Los valores de la derivada serán positivos o negativos? ¿Por qué?

6. ¿La constante de proporcionalidad es positiva o negativa? Argumenta tu respuesta.

7. Describe el comportamiento de la derivada conforme transcurre el tiempo:

8. Bosqueja una posible gráfica de la cantidad de contaminantes con respecto al tiempo.



9. Describe y justifica las características de la gráfica trazada.

B. Población de insectos

Una población de insectos crece con una rapidez de cambio proporcional al tamaño de la población.

❖ Haz lo que se pide a continuación:

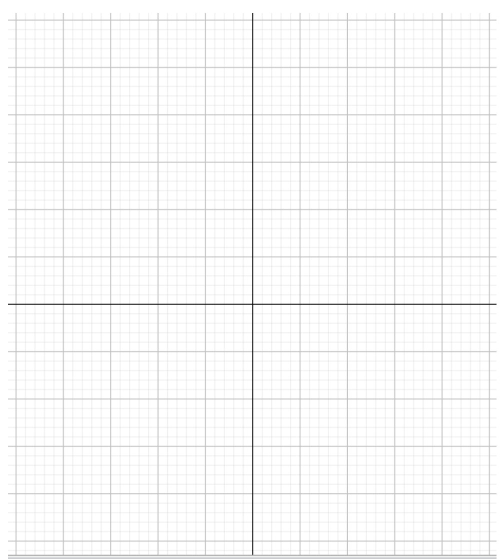
1. Escribe una ecuación diferencial para la rapidez de cambio de la población de insectos con respecto al tiempo t.

2. ¿Los valores de la derivada serán positivos o negativos? ¿Por qué?

3. ¿La constante de proporcionalidad es positiva o negativa? Argumenta tu respuesta.

4. Describe el comportamiento de la derivada al transcurrir el tiempo:

5. Bosqueja una posible gráfica de la cantidad de insectos con respecto al tiempo.



6. Describe y justifica las características de la gráfica trazada:

C. Ingesta de alcohol

El cuerpo metaboliza y elimina el alcohol con una rapidez constante de una onza por hora. Suponiendo que una persona ingiere algo de alcohol.

❖ Haz lo que se pide a continuación:

1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad del alcohol A (en onzas) que permanece en el cuerpo en función de t (el número de horas después de que esta persona ingirió alcohol).

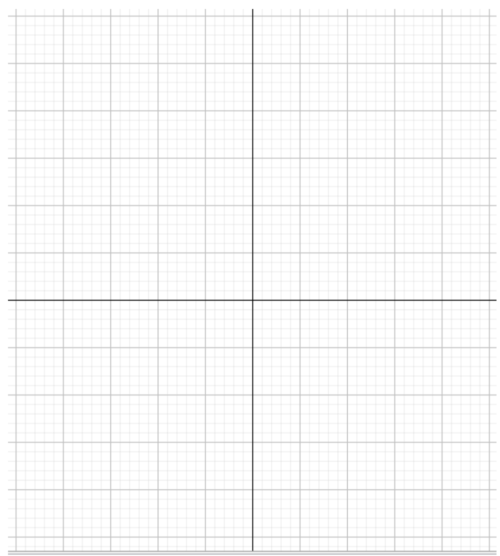
____

2. Describe el comportamiento de la derivada al transcurrir las horas.

____

____

3. Bosqueja una posible gráfica de la cantidad de alcohol con respecto al tiempo.



4. Describe y justifica las características de la gráfica trazada.

____

____

____

Actividad 3. *Orden de una ecuación*

Si S es la altura (en metros) de un cuerpo que cae bajo la fuerza de la gravedad y t es el tiempo (en segundos), entonces:

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -9.8$$

- Responde lo siguiente:
  1. Argumenta la validez de esta ecuación diferencial

     ____

     ____

     ____

  2. ¿Qué diferencias observas entre esta ecuación diferencial y las que analizaste anteriormente?

     ____

     ____

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden porque en ella interviene la segunda derivada de la función desconocida $S = f(t)$, pero no contiene derivadas de orden superior.

  3. Las ecuaciones diferenciales que analizaste anteriormente, ¿de qué orden son?, ¿Por qué?

     ____

     ____

     ____

Actividad 4. ***Solución numérica de la ecuación diferencial***

El efecto de la pesca en un criadero marino.

Supongamos que una población de peces, si se les deja aislados, aumenta con rapidez de cambio del 20% al año. Supongamos también que se permite que al año se pesquen 10 millones de peces.

❖ Responde lo que se pide.

1. Identifica las magnitudes variables involucradas.

   ____

2. Escribe una ecuación diferencial que represente como cambia la población de peces al paso del tiempo.

   ____

3. Supongamos que al tiempo $t = 0$ la población de peces es de 60 millones.
   a. Con esta información de la población inicial y la ecuación diferencial. Calcula la deriva $\frac{dP}{dt}$ en $t = 0$.

      ____

   b. ¿Cómo interpretas este resultado?

      ____

      ____

   c. Por consiguiente, ¿Qué población de peces habrá aproximadamente en $t = 1$?

      ____

   d. Con esta información, calcula la derivada $\frac{dP}{dt}$ en $t = 1$ e interpreta el resultado

      ____

      ____

   e. Por lo tanto, ¿Cuál será aproximadamente la población 2 años después?

      ____

f. Completa la siguiente tabla:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	6
Población (millones)	60						

Tabla 5

g. Analiza los valores de la tabla y describe el comportamiento de la población de peces.

____

____

4. Supongamos ahora que al tiempo $t = 0$ la población inicial de peces es de 40 millones.

   a. Completa la siguiente tabla:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	6
Población (millones)	40						

Tabla 6

   a. Analiza los valores de la tabla y describe el comportamiento de la población de peces.

____

____

5. ¿Qué te dice la ecuación diferencial obtenida en el Apartado 2 sobre la población de peces, para los diferentes valores iniciales (P_0)?

   a. Si, P_0 es pequeña:

____

____

   b. Si, P_0 es grande:

____

____

c. ¿Hay algún valor de P_0 con el cual la rapidez con la que está aumentando la población de peces es igual a la rapidez con que se están pescando? Argumenta tu respuesta.

____

____

d. Describe lo que sucederá con la población de peces conforme transcurren los años si se tiene esta población inicial

____

____

____

En las tablas anteriores (Tabla 5 y Tabla 6) se muestran valores numéricos aproximados de posibles soluciones de esta ecuación diferencial. Con frecuencia (pero no siempre) también es posible deducir una expresión analítica para la solución de una ecuación diferencial.

Actividad 5. ***Solución general de una ecuación diferencial***

Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 0.3y$$

❖ Responde lo que se pide a continuación:

1. Escribe una función que satisfaga la ecuación diferencial. Argumenta tu respuesta.

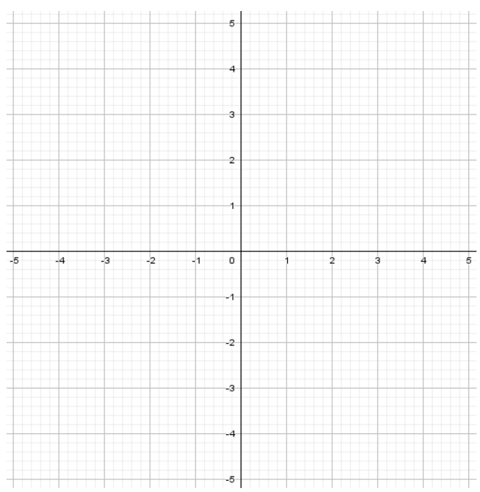
   ____

   ____

2. Para corroborar que la función que propusiste es correcta, sustituye ésta en la ecuación diferencial.
   a. Lado izquierdo $\frac{dy}{dx} =$_____________
   b. Lado derecho $0.3y =$ _____________
   c. ¿Es correcta la función propuesta?, ¿Por qué?

      ____

   d. Compara con tus compañeros de grupo, las funciones que propusieron
   e. En la siguiente cuadrícula y con ayuda de GeoGebra traza la gráfica de cuatro funciones que satisfagan esta ecuación diferencial



Generalizando:

La función que satisface esta ecuación diferencial es:

$$y = \_\_\_\_\_\_\_$$

La solución general de una ecuación diferencial es una familia de funciones.

Actividad 6. ***Solución particular de una ecuación diferencial***

Retomando la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 0.3y$$

Cuya solución general es: ___________

❖ Responde lo siguiente:

1 Si se tiene la siguiente información adicional cuando $x = 0$ entonces $y = 2$.

a. ¿Cuál es la función que satisface la ecuación diferencial junto con la información adicional? Argumenta tu respuesta.

____

____

La función que satisface la ecuación diferencial junto con la condición inicial se llama solución particular.

La ecuación diferencial y la condición inicial juntas se llaman problema de valor inicial.

Cafeína:

La rapidez con la que el cuerpo metaboliza y elimina la cafeína es de aproximadamente el 17% de la cantidad de cafeína presente.

❖ Haz lo que se pide:

1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de cafeína en el cuerpo (C), como función del número de horas (t), a partir de la ingesta de café.

____

2. Escribe la solución general para esta ecuación diferencial y comprueba si es correcta.

____

____

3. Si una persona toma una taza de café la cual contiene aproximadamente 100mg de cafeína. Encuentra la solución particular que satisface esta condición inicial.

____

____

Actividad 7. *Campos de pendientes*

En esta actividad se analizará la representación gráfica de una ecuación diferencial a la cual se le denomina campo de pendientes, así como también campo de direcciones.

Dada la ecuación diferencial:

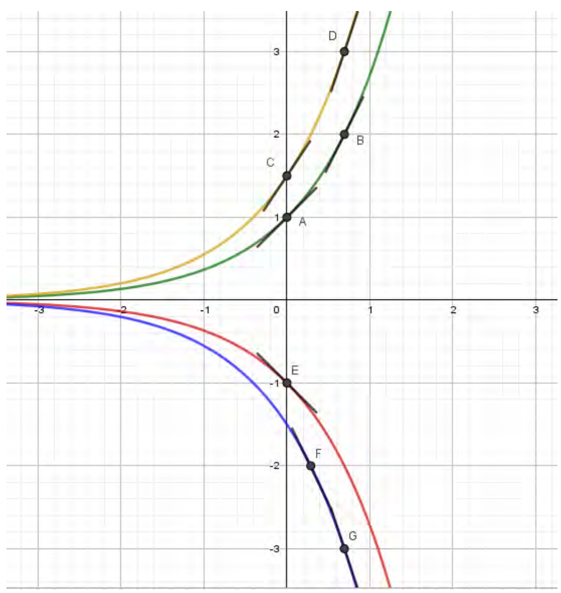
$$\frac{dy}{dx} = y$$

❖ Responde lo siguiente.

1 Escribe la expresión analítica o fórmula de la familia de funciones que es solución de esta ecuación diferencial

a. Comprobación:

A continuación, se muestra la gráfica de cuatro curvas que son solución de esta ecuación diferencial en las cuales se han trazado pequeños segmentos de recta en cada uno de los puntos marcados para mostrar la pendiente de la recta tangente (m) en ese punto de la curva



2 Escribe el valor de la pendiente (m) de la línea tangente en los puntos marcados

a. Punto A, $m =$ _____

b. Punto B, $m =$ _____

c. Punto C, $m =$ _____

d. Punto D, $m =$ _____

e. Punto E, $m =$ _____

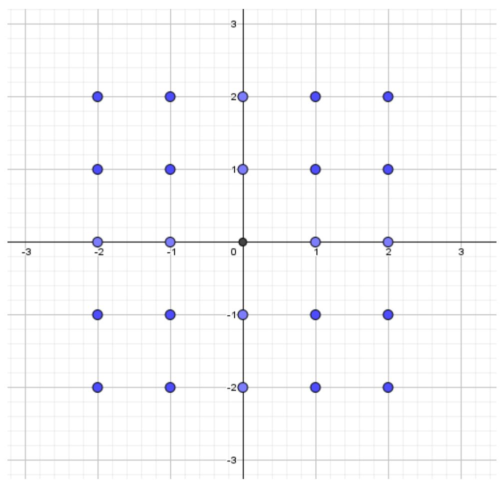
f. Punto F, $m =$ _____

g. Punto G, $m =$ _____

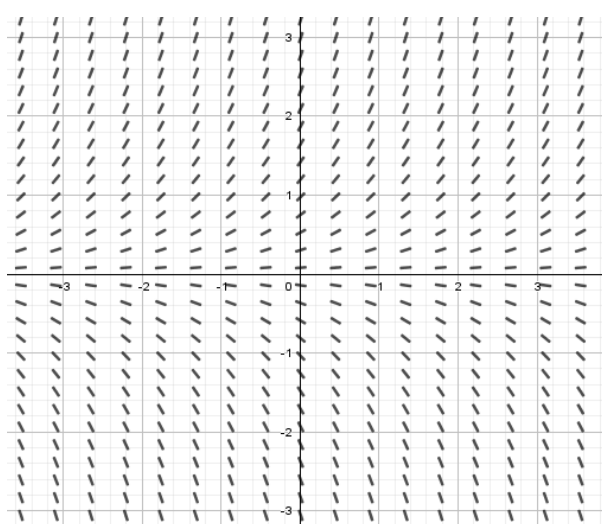
3 Esta ecuación diferencial dice que cualquier solución de ésta, tiene la propiedad de que la pendiente en cualquier punto del plano es igual a: _________

Si se trazan muchos de estos segmentos de recta, pero no se muestran las curvas, así es como se obtiene el campo de pendientes o campo de direcciones.

4 Traza el campo de pendientes para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y$ en los puntos indicados.



En la siguiente figura, se tiene una panorámica del campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y$



5 ¿Qué signo tienen las pendientes sobre el eje x? Argumenta tu respuesta

____

____

6 ¿Qué comportamiento tienen las pendientes a medida que nos desplazamos hacia arriba sobre el eje x? Argumenta tu respuesta

____

____

7 ¿Qué signo tienen las pendientes debajo del eje x? Argumenta tu respuesta

____

____

8 ¿Qué comportamiento tienen las pendientes a medida que nos desplazamos debajo del eje x? Argumenta tu respuesta

____

____

9 ¿Cómo son las pendientes en cualquier recta horizontal sobre el plano cartesiano? Argumenta tu respuesta

____

____

Podemos observar que en el campo de pendientes se deja reconocer el espectro de la familia de curvas solución de la ecuación diferencial.

Ahora, dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

❖ Responde lo siguiente.

1 Descarga el archivo Act 7-1.ggb y ábrelo con GeoGebra. Observa las siguientes expresiones algebraicas e indica cuál de ellas es solución de la ecuación diferencial planteada

a. $y = \frac{x^2}{4}$, es solución? ______ ¿Por qué?

b. $y = x^2$, es solución? ______ ¿Por qué?

c. $y = \frac{x^2}{2}$, es solución? ______ ¿Por qué?

2 Descarga el archivo Act 7-2.ggb y ábrelo con GeoGebra. Mueve el deslizador $x1$:

a. ¿Qué pasa con $f(x)$?

____

b. ¿Qué valor toma la pendiente (m) para los puntos

i. A? __________

ii. B? __________

iii. C? __________

c. ¿Cuál será el valor de la pendiente (m) de los puntos

i. D? __________

ii. E? __________

iii. F? __________

d. ¿A qué crees que se deba ésto?

____

____

3 Descarga el archivo Act 7-3-1.ggb y ábrelo con GeoGebra. Mueve el deslizador $x1$:

a. ¿Qué sucede al mover $x1$?

____

b. ¿Qué representan esos segmentos de recta?

____

Ahora abre el archivo Act 7-3-2.ggb. Mueve el deslizador $x1$:

c. ¿Qué sucede al mover $x1$?

____

d. ¿Cuál es el espectro que deja el campo de pendientes?

____

e. ¿Cómo varía el campo de pendientes al recorrer el plano xy?

____

4 Escribe la expresión analítica o fórmula de la familia de funciones que es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$

a. Comprobación:

Ahora, dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

❖ Responde lo siguiente.

1 ¿La derivada depende de x y/o de y?

____

2 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes tendrán un valor de cero?

____

3 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes serán positivas?

____

4 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes serán negativas?

____

5 ¿Cómo son las pendientes en los puntos del plano cartesiano donde $y = 0$?

____

6 ¿Cómo será la pendiente en el origen?

____

7 ¿Cómo serán las pendientes en los puntos del plano cartesiano donde $x = y$?

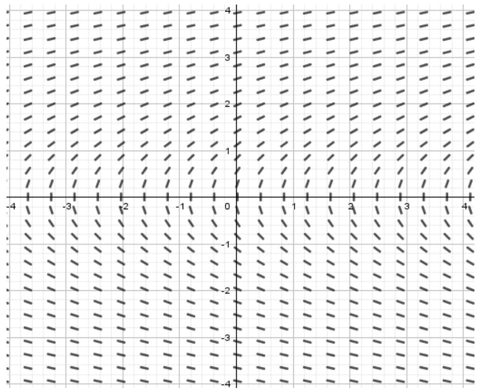
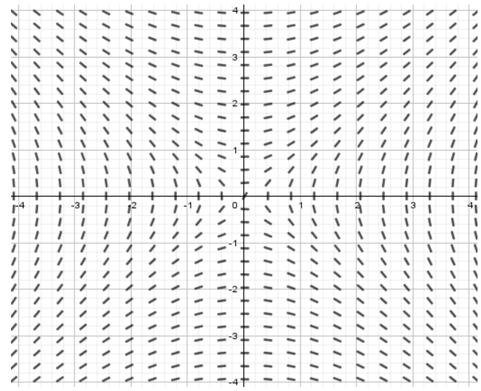
____

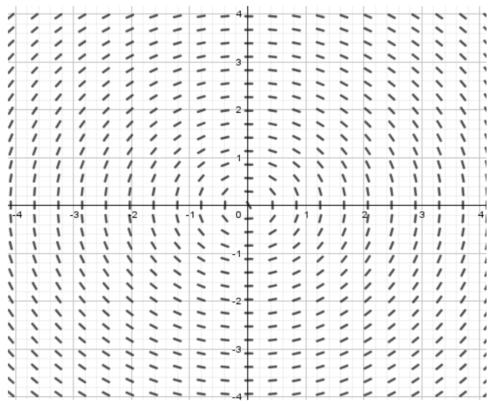
8 ¿En qué puntos del plano cartesiano las pendientes tienen un valor de -1?

____

9 Identifica el campo de pendientes de estas ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

A)  ( ) B)  (
)

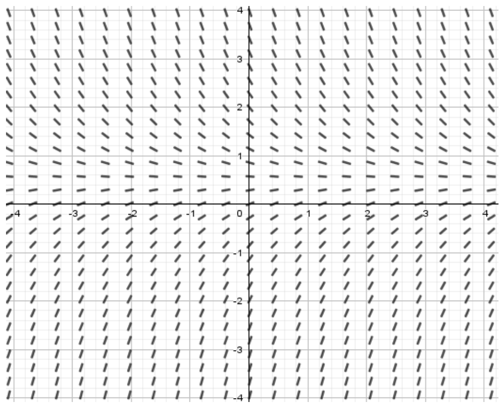
C)  ( )

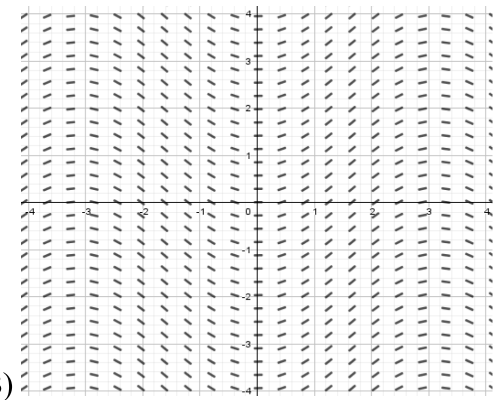
Actividad 8. *Identificación de campo de pendientes*

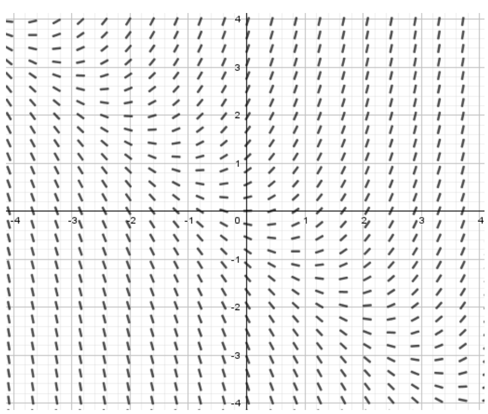
❖ Haga corresponder los campos de pendientes con sus ecuaciones diferenciales. Justifica tu respuesta

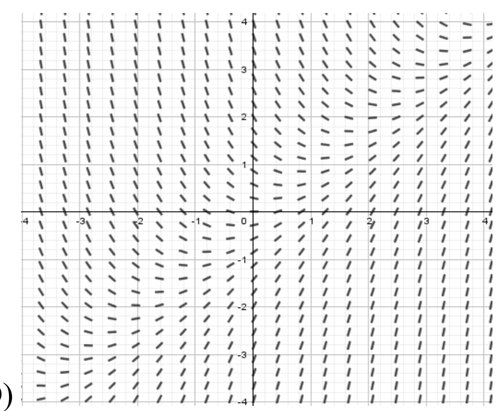
a) $y' = 1 + y^2$ b) $y' = x + y$ c) $y' = \frac{1}{y}$ d) $y' = x - y$

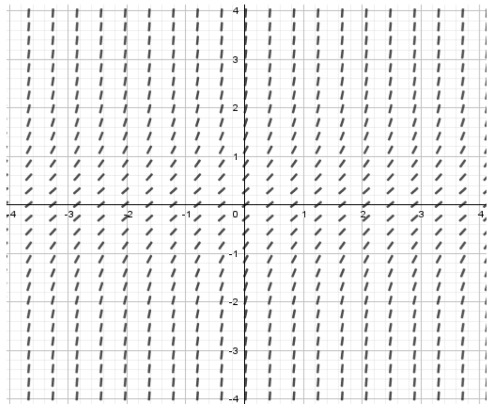
e) $y' = -\frac{x}{y}$ f) $y' = sen\, x$ g) $y' = y - \frac{1}{2}$ h) $y' = \frac{1}{2} - y$

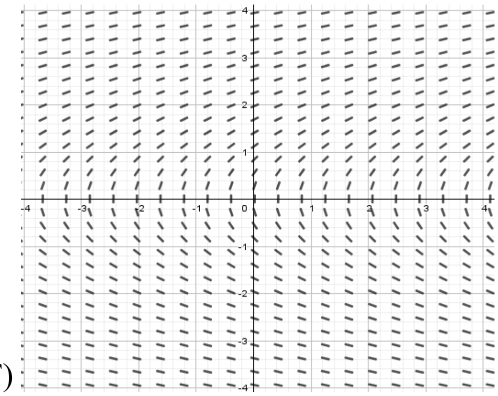
A) 

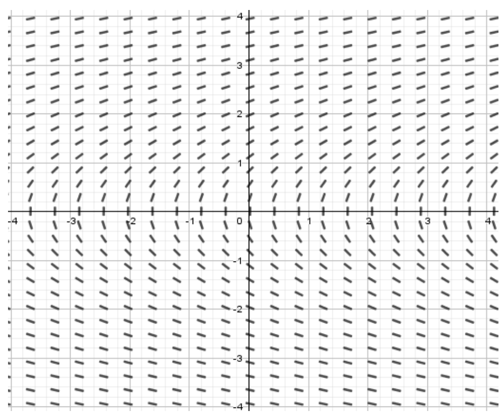
B) 

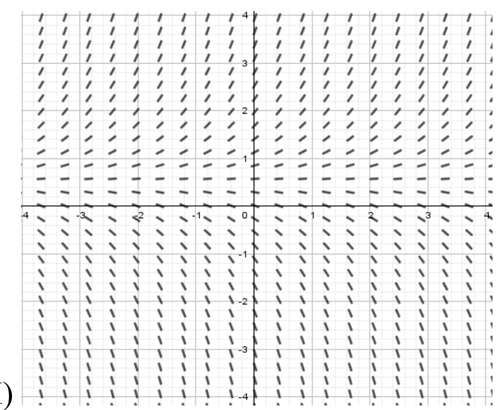
C) 

D) 

E) 

F) 

G) 

H) 

Actividad 9. *Existencia y unicidad de soluciones*

Debido a que las ecuaciones diferenciales se utilizan para modelar gran diversidad de situaciones reales, la pregunta de si existe una solución y si ésta es única tiene una gran importancia práctica.

Ya vimos que en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales un problema de valor inicial (ésto es una ecuación diferencial y una condición inicial), tiene casi siempre una solución única, una forma de visualizarlo es ver el campo de pendientes.

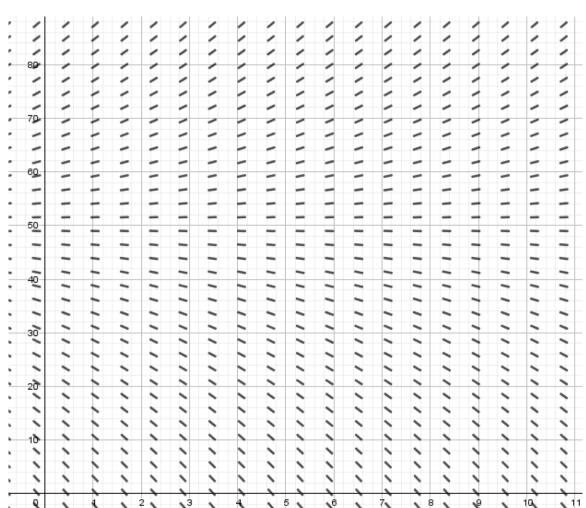
Es útil imaginar que el campo de pendientes (o campo de direcciones) es un conjunto de señales de tránsito que apuntan hacia la dirección que se debe seguir en cada punto. Si se comienza en un determinado punto del plano que representa la condición inicial, en el cual habrá por regla general un segmento de recta que apunte en la dirección que debe tomar la curva solución de tal manera que los segmentos de pendientes sean tangentes a la trayectoria, tras un paso corto, se observa nuevamente el campo de direcciones, de esta manera se describirá una de las curvas solución.

Consideremos de nuevo la población de peces que analizaste en la Actividad 5.

Si se les deja solos, la población de peces aumenta con rapidez de cambio del 20% al año. Los peces se pescan a una razón constante de 10 millones de peces al año. Si P es la población de peces en millones en el año t, entonces se tiene que:

$$\frac{dP}{dt} = 0.20P - 10$$

A continuación, se presenta el campo de pendientes de esta ecuación:



- Responde lo que se pide:
  1. Si la población inicial ($t = 0$) fuera de 60 millones de peces:
     a. ¿Qué comportamiento tendría la población de peces con el paso del tiempo según el campo de pendientes?

        ____

     b. Bosqueja en la representación gráfica anterior el comportamiento que tendrá la población con el paso del tiempo
  2. Si ahora, la población inicial fuera de 40 millones de peces:
     a. ¿Qué comportamiento tendría la población de peces con el paso del tiempo según el campo de pendientes?

        ____

     b. Bosqueja en la representación gráfica anterior el comportamiento que tendrá la población con el paso del tiempo
  3. Por último, si la población de peces fuera de 50 millones:
     a. ¿Qué comportamiento tendría la población de peces con el paso del tiempo según el campo de pendientes?

        ____

     b. Bosqueja en la representación gráfica anterior el comportamiento que tendrá la población con el paso del tiempo
  4. ¿Cómo interpretas el campo de pendiente con respecto a la población de peces?

     ____

     ____

  5. ¿Qué tipo de curvas se forman en el campo de pendientes?

     ____

  6. ¿Qué relación tiene esto, con lo realizado en la Actividad 4?

     ____

     ____

  7. ¿Qué diferencias hay entre esta forma de estimar la población de peces y la realizada en la Actividad 4?

     ____

     ____

Morfina

La morfina es una droga para aliviar el dolor. Supongamos que se administra morfina por vía intravenosa a un paciente con una rapidez de 2.5mg por hora. El cuerpo elimina y metaboliza la morfina con una rapidez de aproximadamente 34.7% por hora.

❖ Responde lo que se pide

1. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de morfina (M) en la sangre después de t horas.

   ____

   Según esta ecuación diferencial, contesta lo siguiente:

2. Si M toma valores iniciales pequeños, ¿Qué signo va a tener $\frac{dM}{dt}$?
   a. ¿Qué comportamiento tendrá la cantidad de morfina en la sangre con el paso del tiempo?

      ____

      ____

3. Si M toma valores iniciales grandes, ¿Qué signo va a tener $\frac{dM}{dt}$?
   a. ¿Qué comportamiento tendrá la cantidad de morfina en la sangre con el paso del tiempo?

      ____

      ____

4. ¿Habrá algún valor inicial de M, para el cual la rapidez de entrada será exactamente igual a la rapidez de salida? Argumenta tu respuesta

   ____

   ____

   a. ¿Qué comportamiento tendrá la cantidad de morfina en la sangre con el paso del tiempo?

      ____

      ____

En el archivo Act9-12.ggb se muestra el campo de pendientes para esta ecuación diferencial y tres condiciones iniciales diferentes.

5. Si la cantidad de Morfina en el paciente es de 10mg:
   a. ¿Qué comportamiento tendrá con el paso del tiempo?

   ____

   b. Mueve el deslizador $x1$, ¿Qué sucede al mover el deslizador?

   ____

   ____

6. Si la cantidad de Morfina en el paciente es de 3mg:
   a. ¿Qué comportamiento tendrá con el paso del tiempo?

   ____

   b. Mueve el deslizador $x1$, ¿Qué sucede al mover el deslizador?

   ____

   ____

7. Si la cantidad de Morfina en el paciente es de 7.2mg:
   a. ¿Qué comportamiento tendrá con el paso del tiempo?

   ____

   b. Mueve el deslizador $x1$, ¿Qué sucede al mover el deslizador?

   ____

   ____

8. ¿Qué tipo de curvas son las representadas por el campo de pendientes?

____

9. ¿Qué similitudes o diferencias vez entre el caso de la Morfina y el de la población de peces?

____

____

Una solución de equilibrio es constante para todos los valores de la magnitud variable independiente. La gráfica es una línea horizontal, ¿Cómo se puede encontrar la condición inicial que genera una solución de equilibrio a partir de la ecuación diferencial?

Un equilibrio es estable si un cambio pequeño en las condiciones iniciales origina una solución que tiende al equilibrio, cuando la magnitud variable independiente tiende al infinito positivo.

Entonces, un equilibrio es inestable si:

____

____

____

10. De los casos anteriores, ¿Cuál tenía una solución de equilibrio estable y cual una solución de equilibrio inestable? ¿Por qué?

____

____

____

En general, si el campo direccional es continuo al pasar de un punto del plano a otro, podemos estar seguros de que existe siempre una curva solución. Para asegurar que cada punto solo tenga una curva solución que lo atraviese, se requiere una condición algo más estricta.

Cierre

Actividad 1. *Ecuación diferencial logística*

Modalidad: Equipo de 3

Una población en un espacio confinado crece en forma proporcional al producto de la población actual P, y la diferencia entre la capacidad de carga L y la población actual. La capacidad de carga L es la población máxima que el medio ambiente puede sostener.

La ecuación diferencial que describe esta situación se le conoce como ecuación diferencial logística.

❖ Realiza lo que se pide

1. Plantea la ecuación diferencial que describe como cambia la población confinada P, con respecto al tiempo t.

2. ¿La derivada depende de P y/o t?

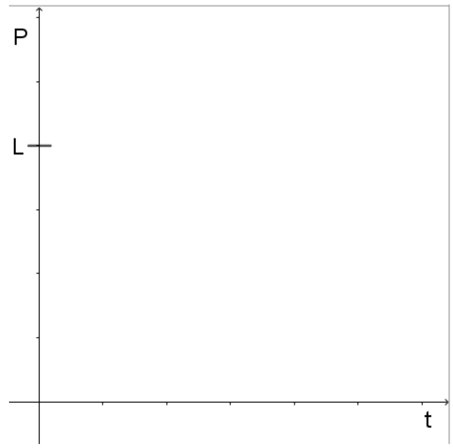
   ____

3. ¿Qué te dice esta ecuación diferencial sobre el comportamiento de la población P, con respecto al tiempo t? Completa la siguiente tabla:

Para valores de P	Los valores de $\frac{dP}{dt}$ serán:	¿Cómo crece la población P?
Pequeños		
A medida que van aumentando		
Conforme se aproximen a la capacidad de carga L		

Tabla 4

4. Bosqueja una posible gráfica de la cantidad de población confinada P, con respecto al tiempo.

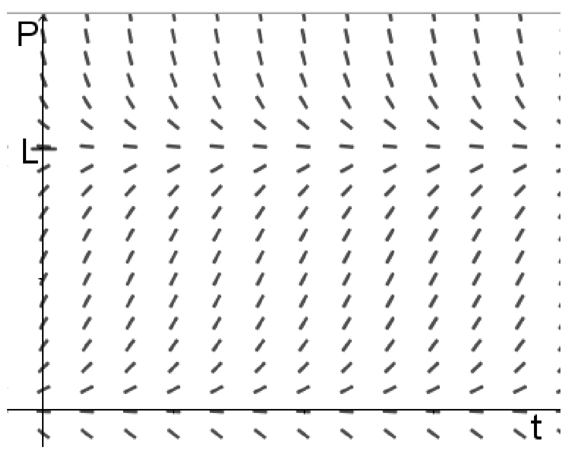


5. Esta ecuación diferencial, ¿tiene alguna(s) solución(es) de equilibrio? Argumenta tu respuesta

____

____

A continuación, se muestra el campo de pendientes de esta ecuación diferencial



6. Analiza y describe detalladamente este campo de pendientes

____

____

____

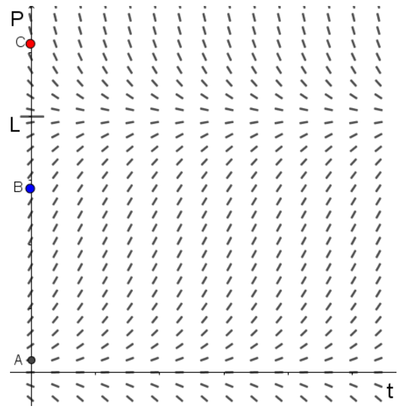
____

____

____

7. La(s) solución(es) de equilibrio que identificaste previamente, ¿de qué tipo es(son)? Argumenta tu respuesta

8. En el campo de pendientes, se señalan (con un punto) tres poblaciones iniciales diferentes. Traza una curva solución para cada una de estas tres condiciones



9. Describe cada una de las curvas solución trazadas

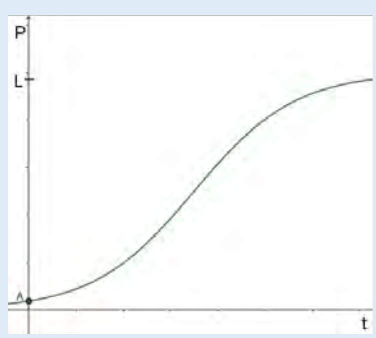
(A)______________________________

(B)______________________________

(C)______________________________

La curva solución (A) es la curva solución característica de la ecuación diferencial logística.

Observamos que este tipo de curvas tiene un punto de inflexión (I), donde las pendientes son máximas.



Para ubicar con exactitud el punto de inflexión, se analizará la gráfica de la derivada $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ en función de P.

A partir de la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = KP(L - P) = KLP - kP^2$$

10. ¿Qué forma va a tener la gráfica de $\frac{dP}{dt}$ en función de P? Argumenta tu respuesta

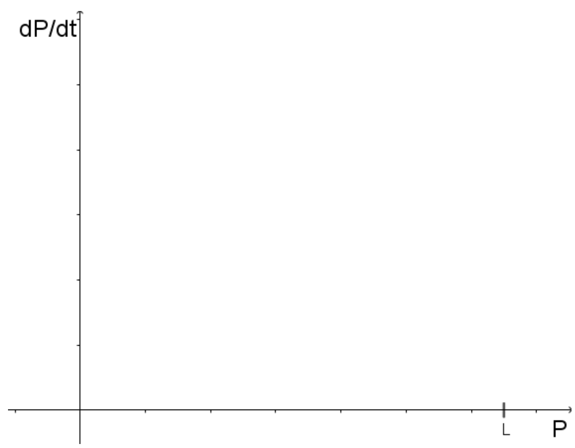
    ____

    ____

11. ¿Para qué valores de P la derivada es cero?

    ____

12. Bosqueja la gráfica de $\frac{dP}{dt}$ en función de P



Analizando la gráfica anterior, contesta las siguientes preguntas:

13. ¿Para qué valor de P la derivada es máxima (pendiente máxima)? Argumenta tu respuesta

    ____

    ____

14. Por lo que; el punto de inflexión se da cuando $P =$_____________

15. ¿En qué intervalo de valores de P, la población será creciente al transcurrir el tiempo? Argumenta tu respuesta

    ____

    ____

16. ¿En qué intervalo de valores de P, la población será decreciente? Argumenta tu respuesta

____

____

17. ¿Cómo va a ser la gráfica de la población P, en función del tiempo t, para $0 < P < \frac{L}{2}$? Argumenta tu respuesta

____

____

18. ¿Cómo va a ser la gráfica de la población P, en función del tiempo t, para $\frac{L}{2} < P < L$? Argumenta tu respuesta

____

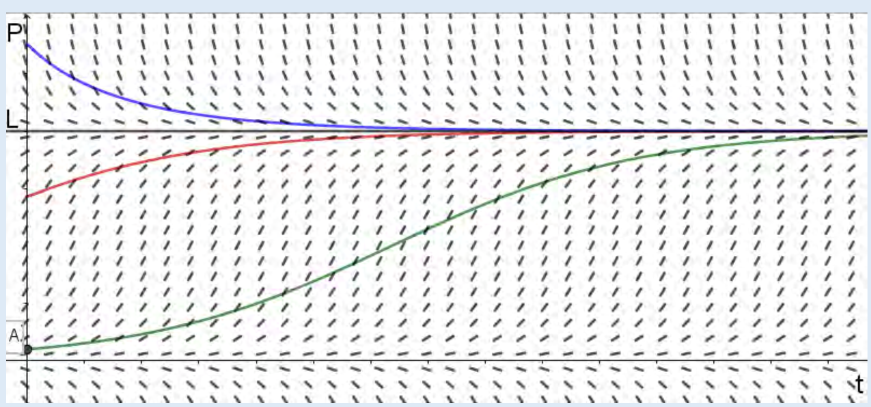
____

19. ¿Cómo va a ser la gráfica de la población P, en función del tiempo t, para $P > L$? Argumenta tu respuesta

____

____

Estos análisis a la gráfica de $\frac{dP}{dt}$ en función de P nos ayudan a entender el comportamiento de la familia de soluciones de la ecuación diferencial logística



Anexo B: Applets de GeoGebra

Cáncer de mama en México 1.ggb

Propósito: Analizar el cambio en las defunciones por cáncer de mama cada cuatro años.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Cáncer de mama en México 1.ggb. A continuación, aparecerá la siguiente pantalla (Figura 1), en la cual hay un deslizador denotado por $x0$, así como el valor de las coordenadas (magnitudes variables) correspondientes a ese punto, se muestra también la representación gráfica y un punto A que está sobre ella.

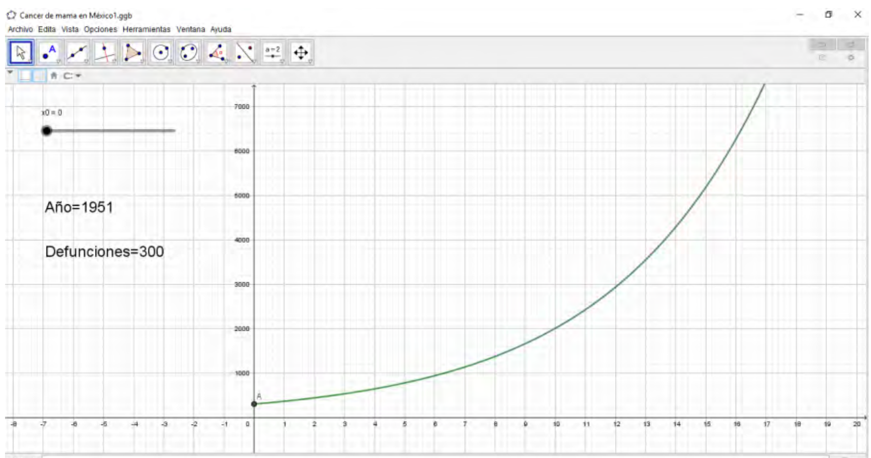


Figura 1.

2) Al mover el deslizador $x0$, la cantidad de años y el número de defunciones varia como se ve en la Figura 2. Con esto, se puede llenar la tabla a la cual está asociado este applet.

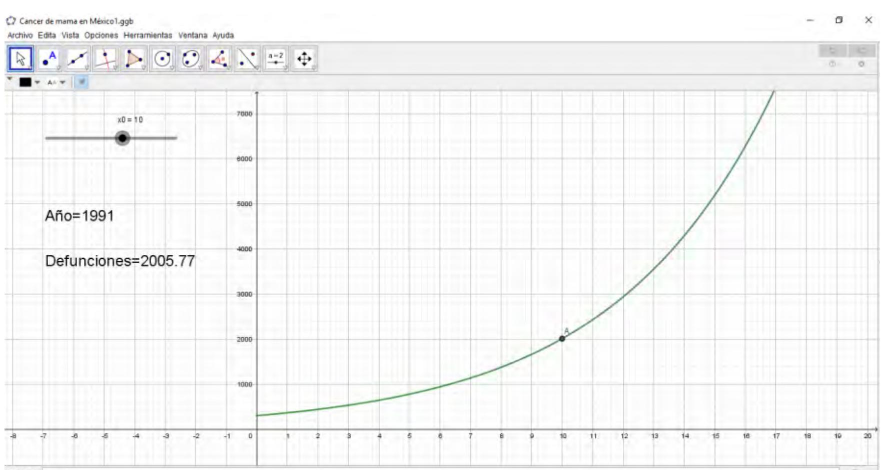


Figura 2.

Cáncer de mama en México 2.ggb

Propósito: Identificar la recta tangente en cada punto de la gráfica.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Cáncer de mama en México 2.ggb. A continuación, aparece la pantalla mostrada en la Figura 3, en la cual muestra el botón Recta.

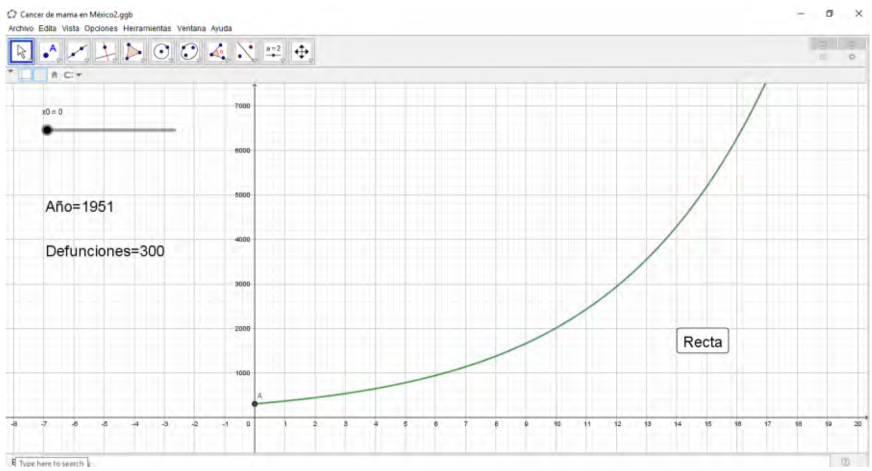


Figura 3.

2) Al dar clic al botón Recta aparece la recta tangente al punto A, como se muestra en la Figura 4.

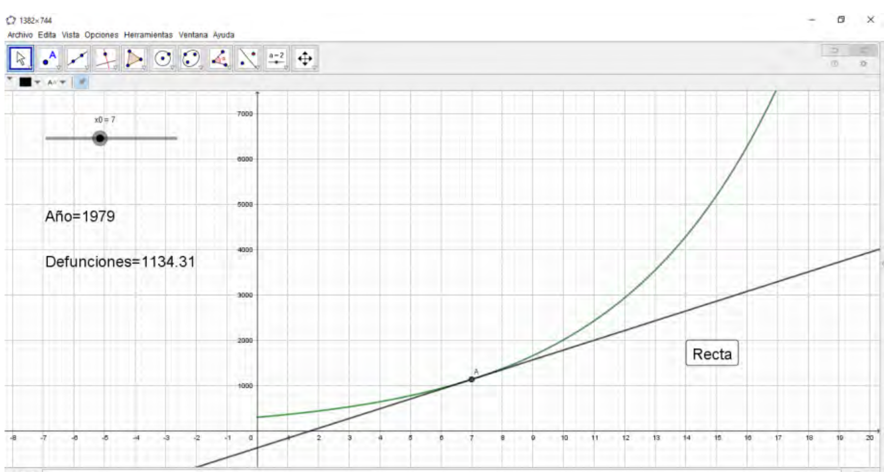


Figura 4.

Cáncer de mama en México 3.ggb

Propósito: Percibir la pendiente de la recta tangente como la rapidez de cambio que hay en las defunciones por cada cuatro años.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Cáncer de mama en México 3.ggb. A continuación, aparece la pantalla mostrada en la Figura 5, en la cual aparece el botón Número m.

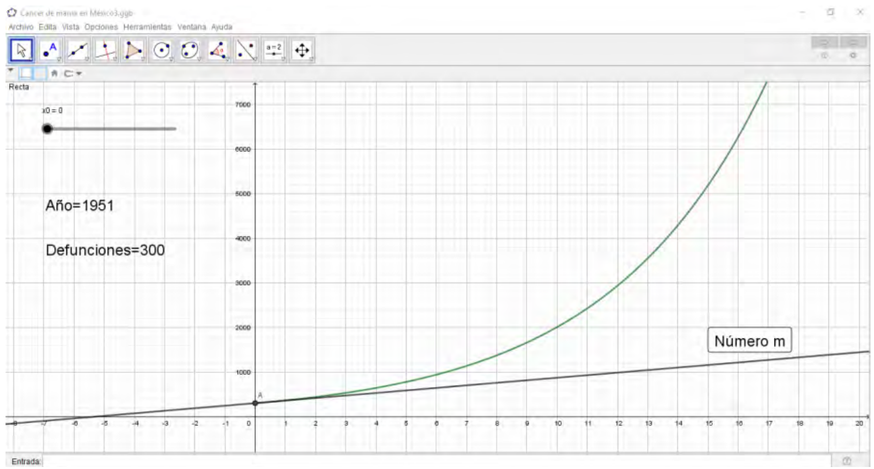


Figura 5.

2) Al dar clic al botón Número m aparece el valor numérico de la pendiente de la recta tangente al punto A, como se muestra en la Figura 6.

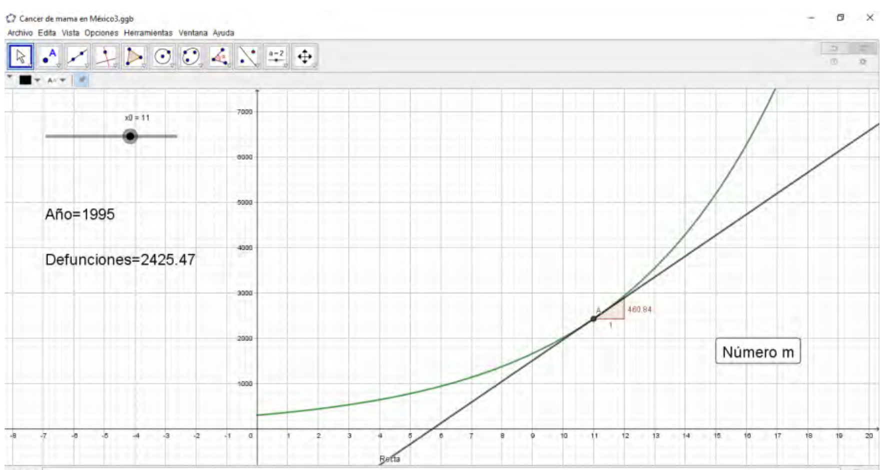


Figura 6.

Cáncer de mama en México 4.ggb

Propósito: Identificar que cada uno de los puntos B resulta de asociar la coordenada x del punto A con el valor correspondiente a la pendiente de la recta tangente a dicho punto.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Cáncer de mama en México 4.ggb. A continuación, aparece la pantalla mostrada en la Figura 7, en la cual aparece el botón Punto B.

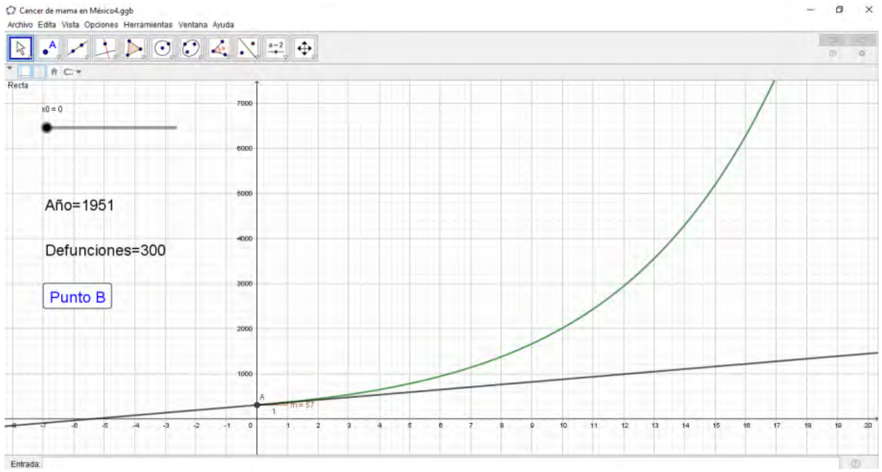


Figura 7.

2) Al dar clic al botón Punto B aparece un punto cuyas coordenadas resultan de asociar al valor de x correspondiente al punto A con el valor de la pendiente de la línea tangente al punto A, es decir la derivada en ese punto, como se muestra en la Figura 8.

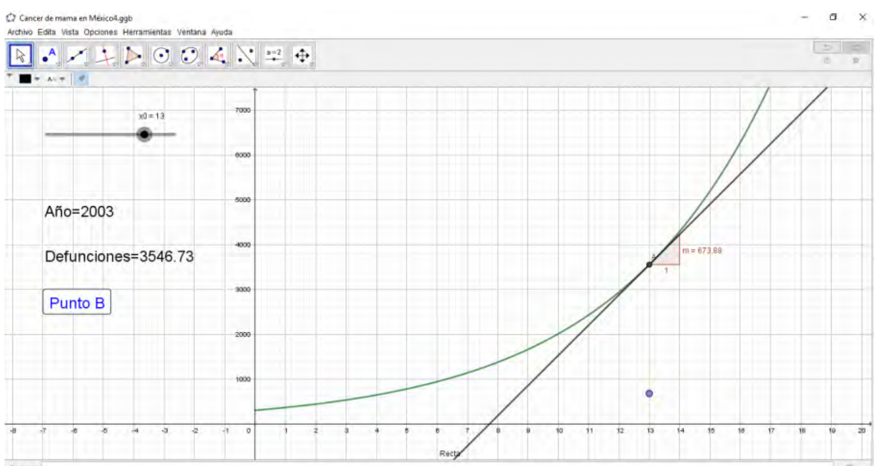


Figura 8.

Cáncer de mama en México 5.ggb

Propósito: Identificar que la función $h(x)$ corresponde a la función derivada.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Cáncer de mama en México 5.ggb. A continuación, aparece la pantalla mostrada en la Figura 9, en la cual aparece el botón Curva h(x).

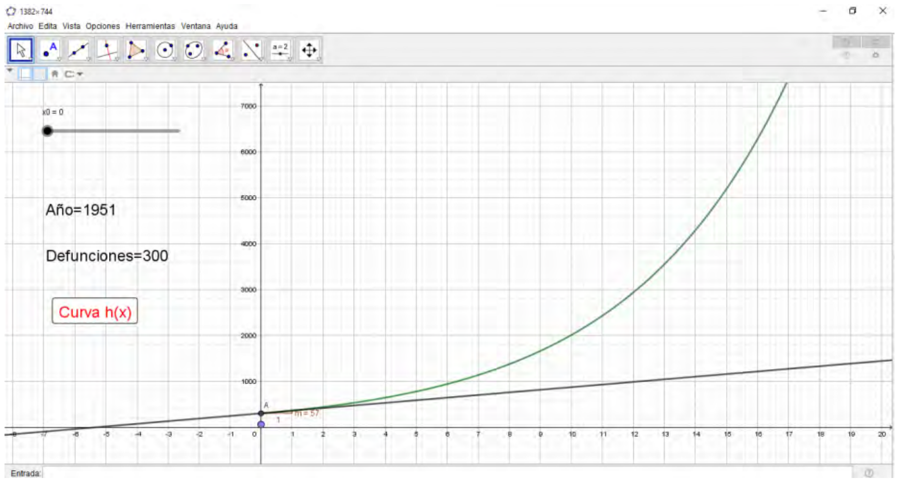


Figura 9.

2) Al dar clic al botón Curva h(x) aparece una curva que coincide con cada punto B, es decir, la curva $h(x)$ es la gráfica que representa a la función derivada, como se muestra en la Figura 10.

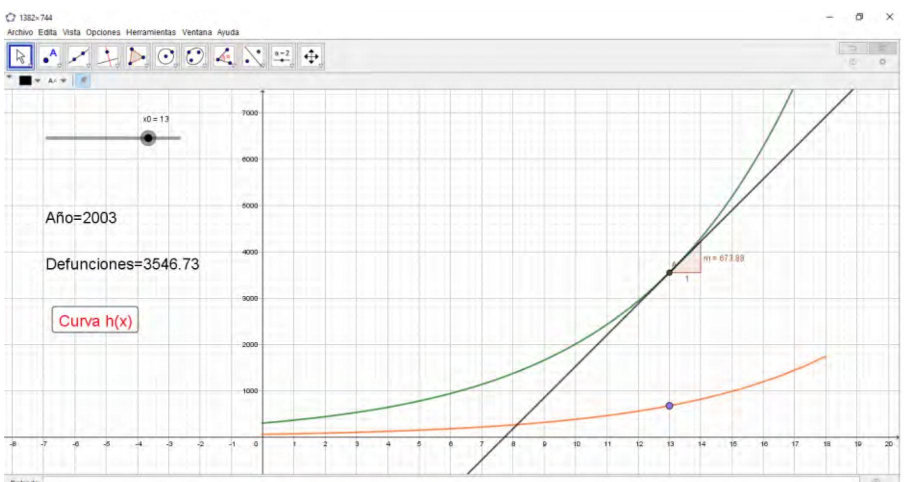


Figura 10.

Polinomio.ggb

Propósito: Construir gráficamente la derivada de diferentes funciones polinómicas. Analizar las diferentes relaciones existentes entre una función y su derivada.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Polinomio.ggb. A continuación, aparecerá una pantalla como la mostrada en la Figura 11. En esta pantalla, aparecen cinco deslizadores denotados por las letras a, b, c y d, que representan a los coeficientes del polinomio que puede ser de

hasta grado 3 y $x1$ que representa al punto A de la curva. También hay cinco botones que son: el botón Recta, que representa a la recta tangente al punto A, el botón Número que representa el valor numérico de la pendiente de la recta tangente, el botón Punto que grafica un punto que resulta de asociar la coordenada x del punto A con el valor numérico de la pendiente de la línea tangente al punto A, el botón Rastro, que representa el espectro que deja el punto B y el botón Curva h(x), que representa a la gráfica de la función derivada. Además, se puede ver la representación algebraica de la función $f(x)$, las coordenadas del punto A y las del punto B, así como también la representación algebraica de la función derivada $h(x)$.

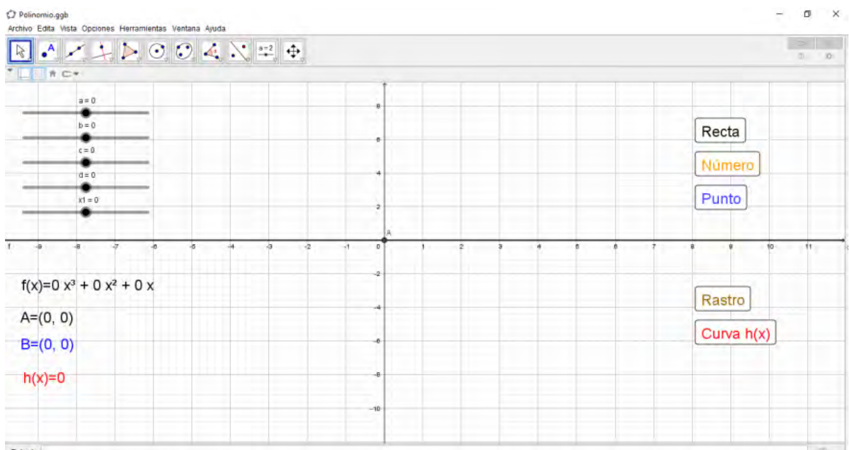


Figura 11.

2) Mover el deslizador b, el cual representa al coeficiente que acompaña al término cuadrático y aparece la gráfica de una función cuadrática como la mostrada en la Figura 12.

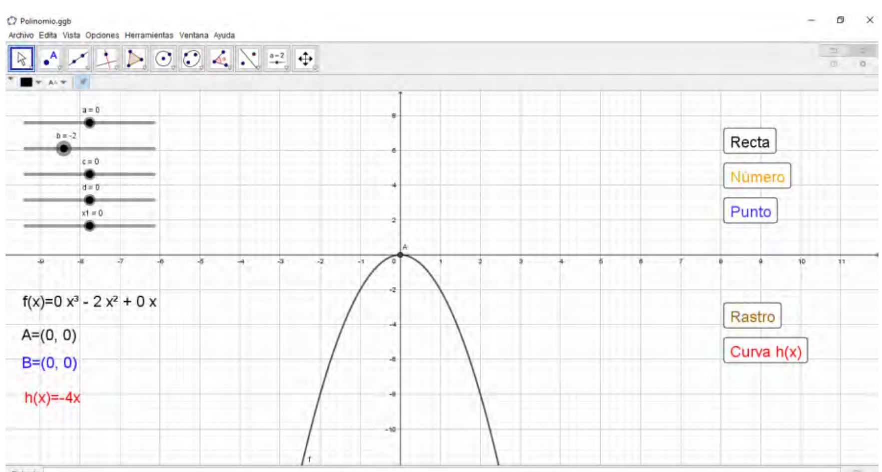


Figura 12.

3) Al habilitar los botones Recta, Numero, Punto, Rastro y Curva $h(x)$, se puede observar tanto la recta tangente al punto A, así como el valor numérico de la pendiente de esta recta, cada punto que resulta de asociar la coordenada x del punto A con el valor numérico de la pendiente de la línea tangente al punto A y la función derivada, estos últimos dos elementos se pueden ver tanto gráficamente como en su representación algebraica, como se puede ver en la figura 13.

Figura 13.

4) Mover el deslizador d, el cual es el coeficiente constante y representa el desplazamiento vertical de la representación gráfica (Figura 14) de la función $f(x)$. Al habilitar los botones Número, Punto, Rastro y Curva $h(x)$, se visualiza que la función derivada $h(x)$ no cambia, lo cual se puede observar también en la representación algebraica.

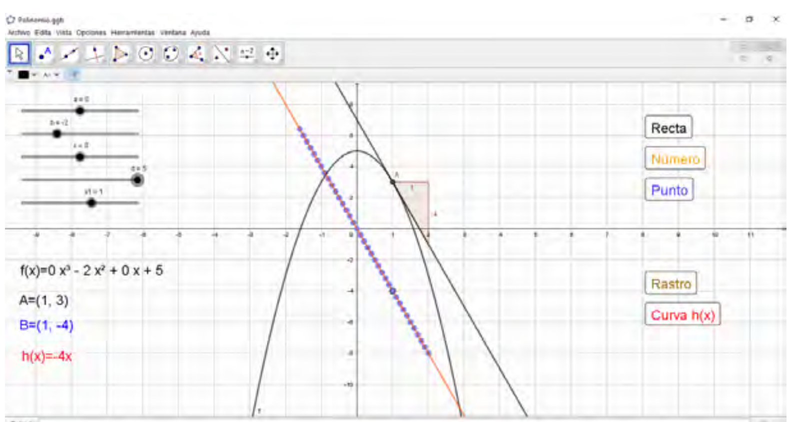


Figura 14.

5) Regresar los deslizadores b y d a 0.

6) Mover el deslizador c, el cual es el coeficiente que acompaña al término lineal, por lo que la representación gráfica y algebraica de $f(x)$ es una función lineal como se puede ver

en la Figura 15. Con este applet, se explora el comportamiento de la recta tangente, la cual en cada punto coincide con la gráfica de la función $f(x)$, por lo que la pendiente de la línea tangente en cada punto será la misma, e igual que la pendiente de $f(x)$, por lo que la función $h(x)$ es una función constante, lo cual se puede comprobar con la representación gráfica y algebraica.

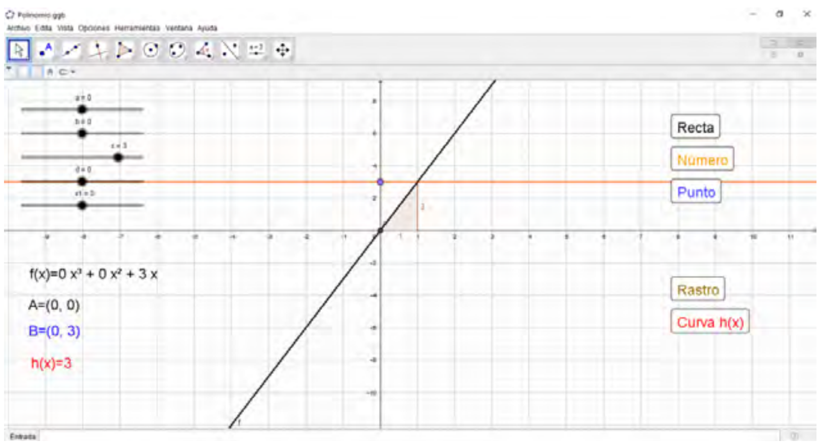


Figura 15.

7) Regresar el deslizador a 0.

8) Mover el deslizador a, el cual es el coeficiente que acompaña al término cúbico por lo que la representación gráfica tiene las características que muestra la Figura 16. En esta gráfica podemos ver que la recta tangente en cada punto siempre es ascendente, por tanto, su pendiente siempre es positiva, también se observa que la gráfica de la derivada en cada punto deja el rastro de una función cuadrática, lo cual se comprueba con la representación gráfica y algebraica de la función $h(x)$.

Figura 16.

9) Fijar el deslizador a en 1 y el deslizador b en 3, resultando la gráfica mostrada en la Figura 17. Al analizar esta gráfica se exploran las distintas relaciones entre $f(x)$ y $h(x)$, como por ejemplo, que cuando la función $f(x)$ es creciente, $h(x)$ es positiva, cuando $f(x)$ es decreciente, $h(x)$ es negativa, cuando $f(x)$ tiene un valor extremo (máximo local o mínimo local), $h(x)$ interseca el eje de las x ($h(x)$=0), cuando $f(x)$ tiene un punto de inflexión, $h(x)$ tiene un valor extremo (máximo local o mínimo local).

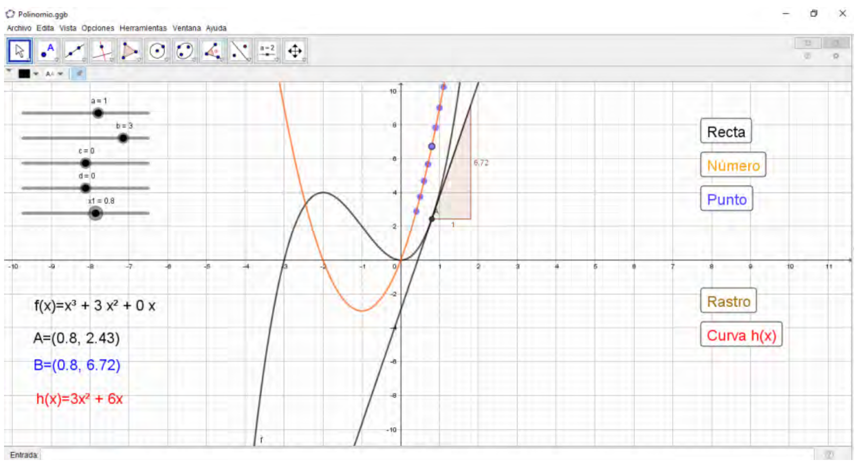


Figura 17.

exponencial.ggb

Propósito: Identificar que la derivada de la función exponencial $f(x) = ae^x$, es igual a la misma función.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra exponencial.ggb. A continuación, aparecerá una pantalla como la mostrada en la Figura 18. En esta pantalla, aparecen tres deslizadores denotados por las letras a y b, que representan al coeficiente y la constante de la función exponencial $f(x) = ae^x + b$, y $x1$ que mueve el punto A sobre la curva. Además, se puede ver la representación algebraica de la función $f(x)$, las coordenadas del punto A y las del punto B, así como de la función derivada $h(x)$.

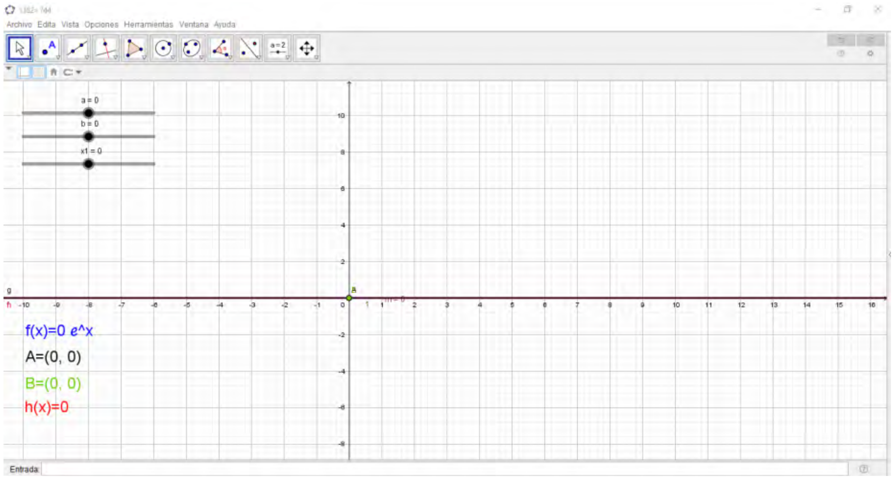


Figura 18.

2) Mover el deslizador a y fijar en 1, este valor representa al coeficiente que acompaña a la exponencial y aparece la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ cómo se muestra en la Figura 19. En este caso se analizan, tanto en la representación gráfica como en la representación algebraica que la función exponencial coincide con su derivada, es decir, $f(x) = h(x)$.

Figura 19.

exponencial(kpositiva).ggb

Propósito: Visualizar que la derivada $f(x) = e^{kx}$ es proporcional a la misma función y se analizan las características de sus gráficas.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra exponencial(kpositiva).ggb. A continuación, aparecerá una pantalla como la mostrada en la Figura 20. En un principio es similar al applet anterior

(exponencial.ggb) con la diferencia de que en este se agrega un nuevo deslizador llamado k, que representa al coeficiente que acompaña a la variable x en la función exponencial $f(x) = ae^{kx} + b$, explorando con este applet cuando $k > 0$.

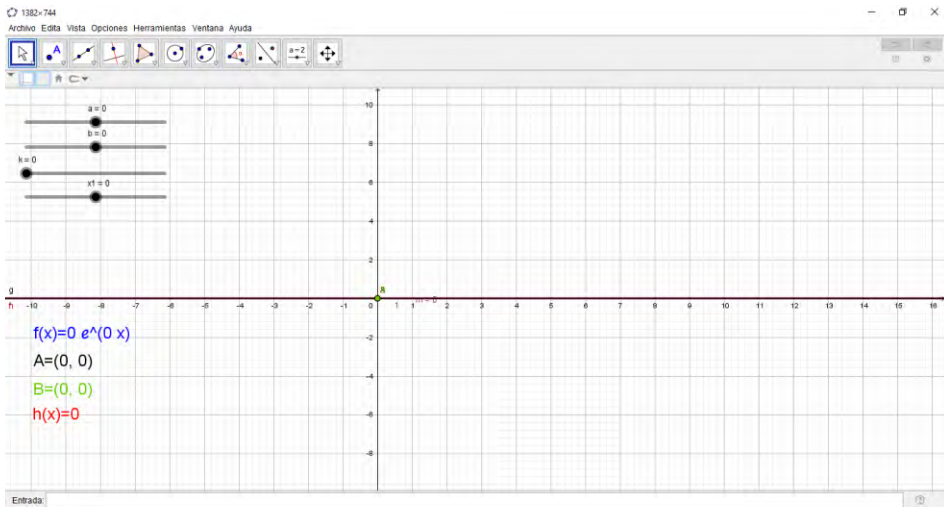


Figura 20.

2) Mover el deslizador a y fijar k en algún valor, en donde aparece la gráfica de la función exponencial $f(x) = 3e^{x} + 2$, como la mostrada en la Figura 21. En este caso se puede observar que para el caso donde k es distinto de 1, $f(x)$ y $h(x)$ no coinciden pero conservan un comportamiento similar.

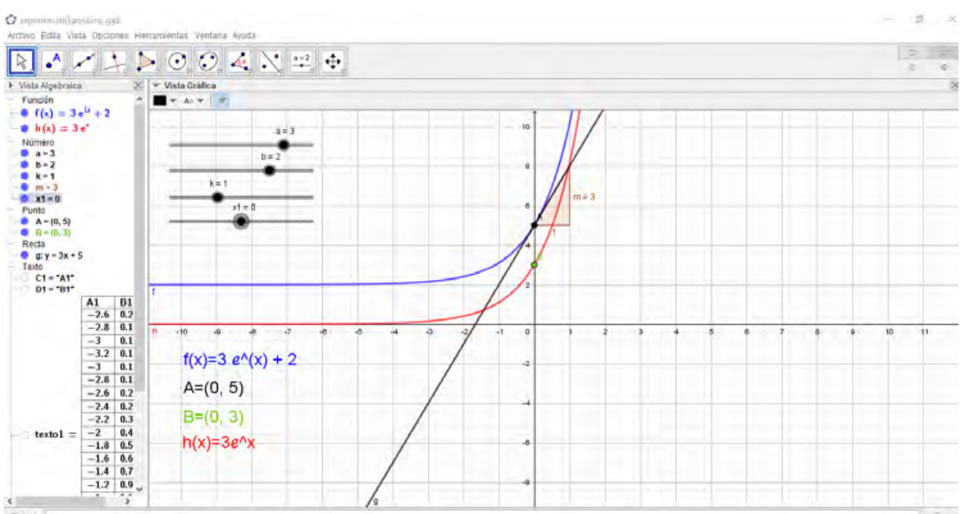


Figura 21.

exponencial(knegativa).ggb

Propósito: Visualizar que la derivada $f(x) = e^{-kx}$ es proporcional a la misma función y se analizan las características de sus gráficas.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra exponencial(knegativa).ggb. A continuación, aparecerá una pantalla como la mostrada en la Figura 22. En este applet, se consideran valores de k negativos.

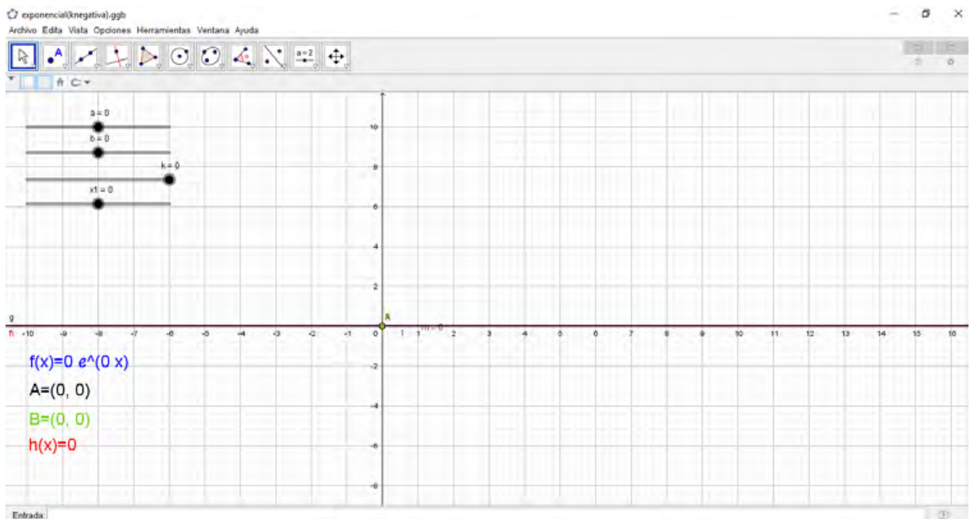


Figura 22.

2) Mover el deslizador a y fijar k en algún valor, en donde aparece la gráfica de una función exponencial como la mostrada en la Figura 23. En este caso se puede observar que $f(x)$ y $h(x)$ no coinciden y sus comportamientos son diferentes (creciente y decreciente), pero el tipo de comportamiento es similar (exponencial).

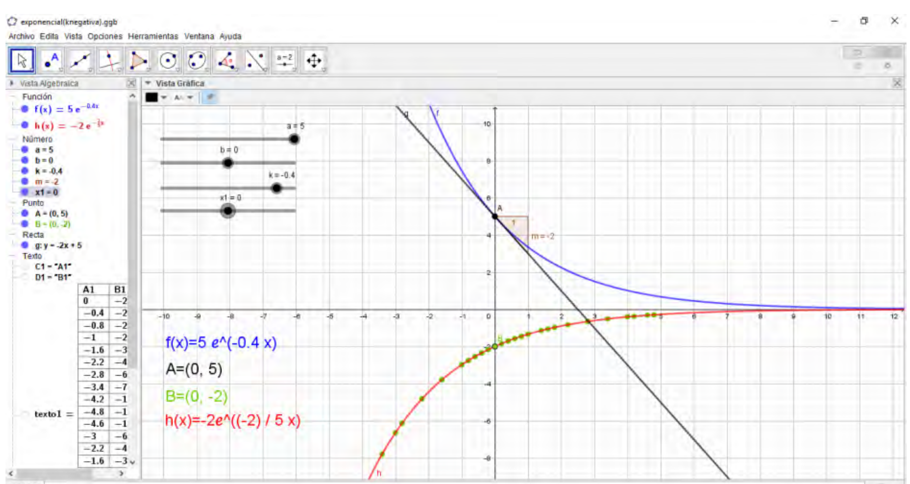


Figura 23.

Secuencia de desarrollo

Act 7-1.ggb

Propósito: Identificar una posible solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Act 7-1.ggb, en donde se pueden ver tres diferentes gráficas mostradas en la Figura 24. Este applet cuenta con un deslizador $x1$, que mueve cada uno de los puntos sobre las representaciones gráficas, en donde comparando el valor numérico de la pendiente de la recta tangente a un punto en cada una de las funciones graficadas se puede llegar a la conclusión de cuál es una posible solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$.

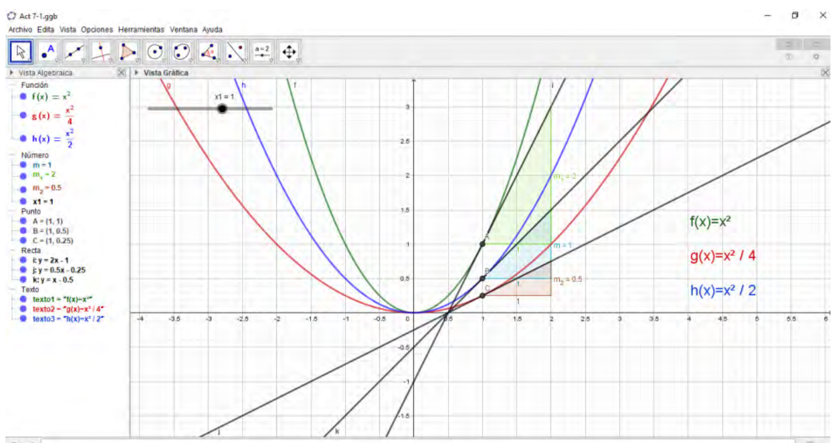


Figura 24.

Act 7-2.ggb

Propósito: Identificar que una ecuación diferencial tiene una infinidad de soluciones.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Act 7-2.ggb, en el cual se puede observar la gráfica de la función que es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$ que resultó de la exploración con el applet anterior (Act 7-1) (Figura 25). Este applet cuenta con un deslizador $x1$, que desplaza verticalmente la representación gráfica de la curva solución de la ecuación diferencial, analizándose que estas gráficas también son solución de la ecuación diferencial,

por lo que la solución de la ecuación diferencial no es única, si no que tiene una infinidad de soluciones.

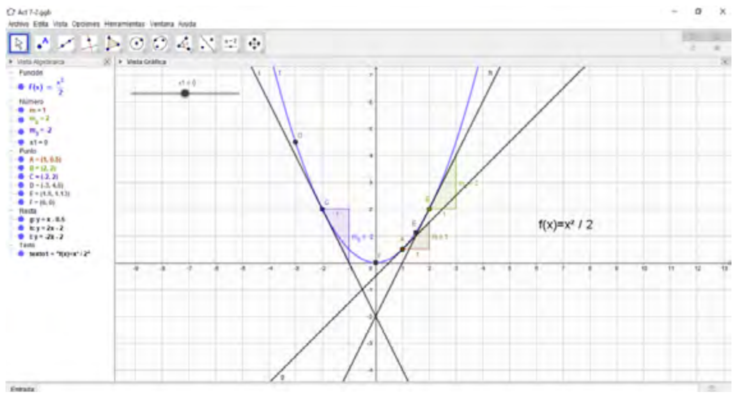


Figura 25.

Act 7-3-1.ggb

Propósito: Construir puntualmente el campo de pendientes de la ecuación diferencial

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Act 7-3-1.ggb, en la cual se pueden ver segmentos de recta (cuya pendiente representa a la derivada en ese punto) que son paralelos para un valor de x (Figura 26). Este applet cuenta con un deslizador $x1$, que mueve los segmentos de recta a lo largo del eje x y que muestran poco a poco el espectro de la familia de soluciones que tiene la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$.

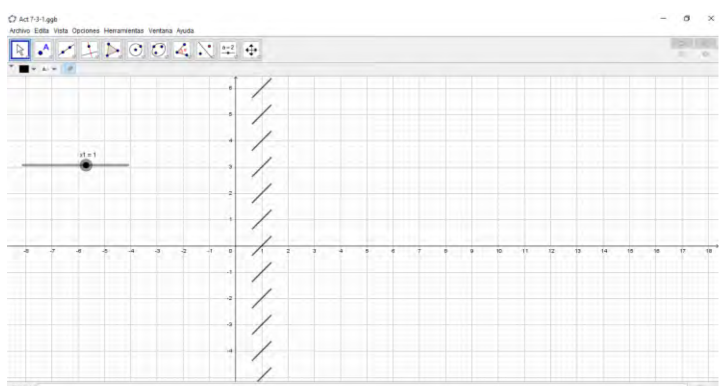


Figura 26.

Act 7-3-2.ggb

Propósito: Visualizar el espectro de las curvas solución de la ecuación diferencial.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Act 7-3-2.ggb, en la cual se puede ver segmentos de recta que son paralelos para un valor dado de x (Figura 27). Este applet cuenta con un deslizador $x1$ que traza los segmentos de recta para diferentes valores de x, los cuales a su vez tienen habilitada la opción de rastro y esto deja visible el espectro de la familia de soluciones para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$.

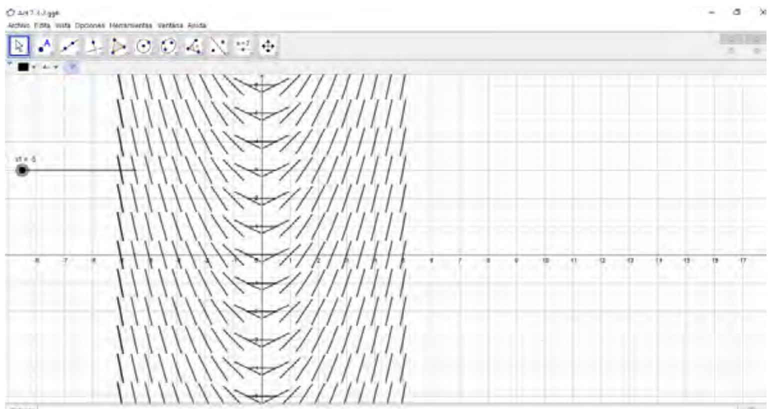


Figura 27.

Act 9-12.ggb

Propósito: Identificar el comportamiento que tiene la cantidad de morfina en el organismo en el transcurseo del tiempo para diferentes condiciones iniciales.

Indicaciones para trabajar con este applet:

1) Abrir el archivo de GeoGebra Act 9-12.ggb, en el cual se puede observar en pantalla la imagen de la Figura 28. Este applet cuenta con tres deslizadores $x1$, $x2$ y x3 que indican tres condiciones iniciales distintas para el caso de la morfina y se muestra el campo de pendientes.

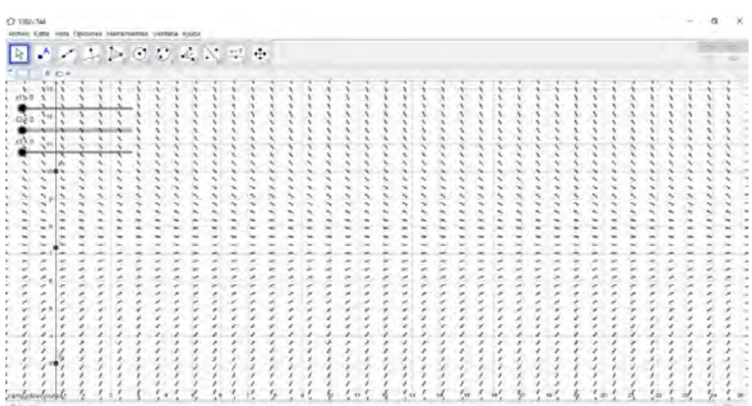


Figura 28.

2) Mover el deslizador $x1$, en donde aparece la representación gráfica mostrada en la Figura 29. En este applet, al mover el deslizador se observa que la condición inicial representada por el punto A, genera el comportamiento que se espera, según el campo de pendientes, es decir, la cantidad de morfina disminuye cada vez más lento.

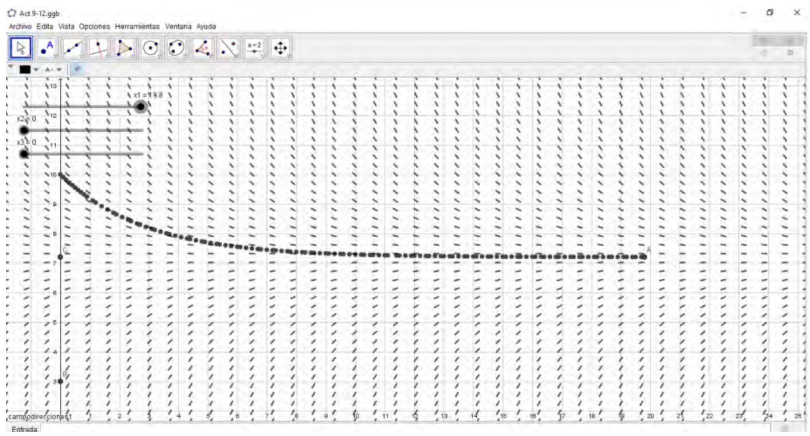


Figura 29.

3) Mover el deslizador $x2$, en donde aparece la representación gráfica mostrada en la Figura 30. En este applet, al mover el deslizador se observa que la condición inicial representada por el punto B, genera el comportamiento que se espera, según el campo de pendientes, es decir, la cantidad de morfina aumenta cada vez más lento y parece coincidir en el transcurso del tiempo con la curva generada por la condición inicial A.

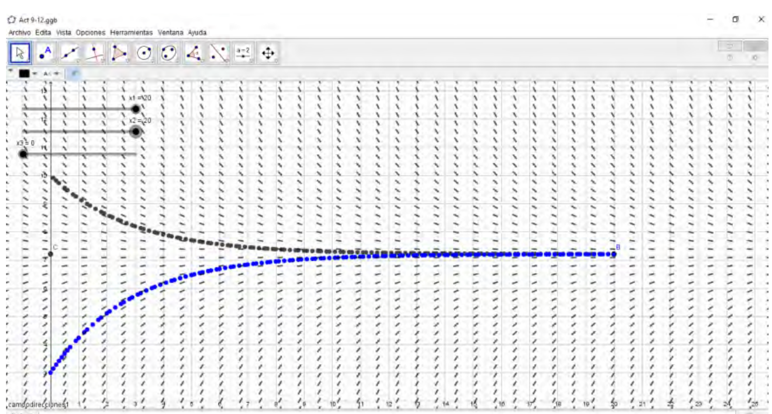


Figura 30.

4) Mover el deslizador $x3$, en donde aparece la representación gráfica mostrada en la Figura 31. En este applet, al mover el deslizador se observa que la condición inicial representada por el punto C, genera el comportamiento que se espera, según el campo de pendientes, en este caso, la cantidad de morfina se mantiene constante y parece coincidir al

transcurrir el tiempo con las curvas generadas por las condiciones iniciales A y B. Con esto, se puede observar en este applet que la gráfica generada por la condición inicial representada por el punto C representa la solución de equilibrio de la ecuación diferencial.

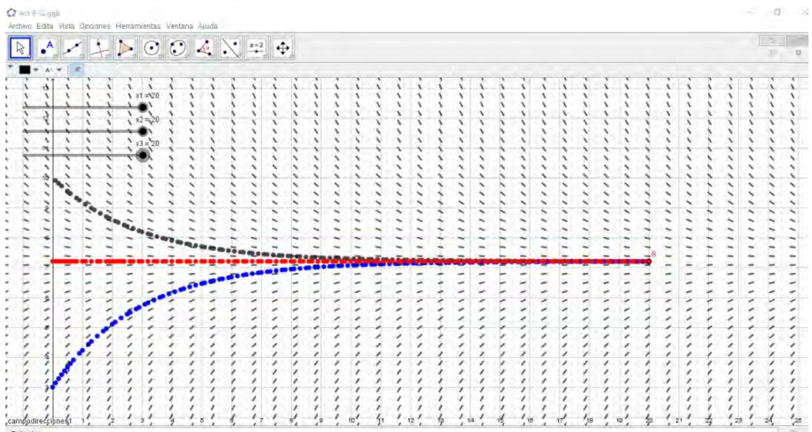


Figura 31.

Por tanto, se observa que las curvas generadas por las condiciones iniciales representadas por los puntos A y B, las cuales representan la variación de la morfina con respecto al tiempo se acercan a la cantidad de equilibrio conforme transcurre el tiempo, por lo que en este caso se trata de una solución de equilibrio estable.